REVISTA

DE LA

SOCIEDAD DE PROFESORES DE CIENCIAS.

AÑO III. MADRID 20 DE AGOSTO DE 1876. NÚM. 3.

DE LOS GRADOS ACADÉMICOS Y DEL VALOR DE SUS FUEROS Y PREEMINENCIAS.

(Conclusion) (1).

II.

Confesamos ingénuamente que es más fácil censurar con oportunidad que poner atinadamente mano en la enmienda. Así es que si tuviéramos — pase por un momento la hipótesis — que dictar un plan general de instruccion pública, nada nos sorprenderia si á poco de publicado le veiamos por cien puntos descoserse de puro defectuoso. Pero como afortunadamente, bajo este punto de vista, no nos toca ordenar ni mandar sino sólo proponer, ni es siquiera nuestra intencion que prevalezca el propio parecer, sino convertir hácia este asunto la atencion más ilustrada de otros, ello nos anima á exponer en sentido de enmienda algunas reflexiones.

No estará de más hacer notar, por si algun optimista saliera al encuentro con el sabido estribillo de que sus tiempos fueron mejores y todo va degenerando, que con restablecer el grado de bachiller, el defecto acaso quedára disimulado un poco, pero tan en pié. Porque si el renaciente grado no tenía otro concepto que el de un exámen general que abreviára el de la licenciatura, pero sin otorgar otro derecho que el de seguir estudiando, en nada afectaba al deslinde de atribuciones entre el licenciado y el doctor, y si por el contrario se le reconocian fueros y preeminencias, la cuestion, léjos de facilitarse, se complicaba, pues si establecer sobre una diferencia racional de conocimientos la distincion de derechos de dos grados ofrece séria

(1) Véase la pág. 301.

dificultad, ¿con cuanto mayor no se habia de tropezar al querer demarcar los derechos de tres grados distintos? Cierto que á fuerza de poner en tortura la mente cabe descubrir que el bachiller puede servir para tal cosa, el licenciado para esto y algo más, y el doctor para uno y otro y algo más; pero, regla general, concepto alambicado es concepto falso, y distincion que no brota espontáneamente de la naturaleza de las cosas no vale el trabajo que cuesta forjarla. Con dos grados basta, si no sobra, en cada facultad, y lo que importa es, repetimos, asentar sobre una base razonable la distincion de sus atribuciones. Para lo cual no hay otro camino que penetrarse bien de la índole de cada carrera. Quien no acierta á definir bien, discurre mal, y á un pensamiento vago sigue indefectiblemente una aplicacion embrollada.

Sírvanos de ejemplo de reforma en las carreras especulativas la Facultad de Ciencias. Con arreglo al principio señalado, ante todo definamos. De tal facultad se dice que tiene por objeto el estudio de la Ciencia por la Ciencia, y con su sabor de sentencia de Pitonisa, esta frase á nuestro entender significa que no se ha de mirar la Ciencia como senda estrecha que si bien lleva en derechura á un punto dado, en cambio no tiene más ancho que el necesario para afirmar el pié, sino como camino dilatado y holgadísimo, por donde, al par que uno anda, su vista se solaza, ó bien como mar por el cual con rumbo vário se navega tocando y no desembarcando en todos los puertos de aplicacion. Pues si tal es el fin á que la facultad responde, se infiere que los conocimientos que abrace han de tener una amplitud desusada y fuera de lugar en cualquier escuela especial; y quien sienta hácia la Ciencia pura alguna inclinacion, ningun título ha de reputar más honroso ni que mejor pruebe lo ejercitado de su inteligencia en el desenvolvimiento de altos conceptos, que el grado de Doctor.

Ahora bien, no comprendiendo la segunda enseñanza sino conocimientos generales sobre diferentes ramos del saber, de los cuales nadie, presumiendo de medianamente ilustrado, cualquiera que sea su profesion ulterior, debe prescindir, natural es, puesto que aquí no se tiene á la vista la aplicacion inmediata, buscar en la Facultad de Ciencias el plantel de catedráticos, á cuyo cargo corra la enseñanza de los elementos de estas ciencias en el Instituto, así como, por análoga razon, la Facultad de Filosofía y Letras debe ser la que más particularmente suministre los catedráticos encargados de los principios de estos otros ramos en el mismo Instituto.

Pero ocurre aquí preguntar: ¿es justo que al catedrático de un Instituto que ha de enseñar de la Ciencia nada más que puros elementos, se le exija un tan vasto saber como supone el título de Doctor? No, sino que se le debe formar especialmente para la enseñanza á la cual se le destina; y este fin pudiera proponerse el período de la licenciatura. Quien hubiera de enseñar en el Instituto Matemáticas elementales, en la Facultad debiera estudiar ante todo ampliamente estas mismas Matemáticas elementales, y dar de nuevo, desde el principio, *Aritmética*, *Algebra*, *Geometría* y *Trigonometría*, pero con más detenimiento ó amplitud, y avanzando mucho más, hasta penetrar algun tanto en las superiores, con lo cual queremos decir, prescindiendo ahora del órden más adecuado para estos diversos conocimientos, que la Aritmética abarcase alguna parte cuando ménos de lo que se llama *Teoría de los números*, que el Algebra se extendiera á la *Teoría general de ecuaciones*, que la Geometría abrazára lo que se llama *Geometría superior*, la *Geometría analítica*, en lo que toca á sus principios generales y al estudio detallado de las curvas de segundo grado, y asimismo la *Geometría descriptiva*, y que la Trigonometría comprendiese la *plana* y la *esférica;* pero de *Cálculo infinitesimal*, sobre todo en su parte integral, el Licenciado no debiera aprender sino puros elementos. Con esto podria formarse un buen catedrático de Matemáticas elementales, suficientemente conocedor de los más sólidos y fecundos métodos de investigacion y demostracion. El período del doctorado vendria en pos con un objeto bastante bien definido; el estudio, en vastísima escala, del infinitamente grande é infinitamente pequeño, y aquí del *Cálculo infinitesimal* con grande extension, aquí de su aplicaoion á la *Geometría analítica* que empezó á aprender el Licenciado; aquí de la *Mecánica racional*, y aquí de la aplicacion extensa de todo ello á la *Física matemática*, á la *Geodesia* y á la *Astronomía* (1). Ser entónces Doctor no sería casi lo mismo que Licenciado: entre sus conocimientos existiria marcada diferencia, y sobre ella con más solidez podria asentarse la distincion de derechos que ahora rige.

Otro ejemplo: Quien hubiera de enseñar en el Instituto elementos de Física y Química, en el período de la licenciatura debiera estudiar: *Matemáticas*, con bastante más extension que en el Instituto, aunque con ménos, por de contado, que el Licenciado en Ciencias exactas; un curso ámplio de *Física*, otro de *Química general*, y, conviene fijarse en ello, ántes que el de Física, uno de *Mecánica*, comprendiendo en él la gran parte que de esta asignatura puede darse sin recurrir á cálculos algebráicos de un órden superior. Y llamamos la atencion sobre este punto, porque es de notar que cuando todo tiende á confirmar que los diversos agentes físicos no son más que formas de movimiento, y cuando así la Mecánica cada vez invade más los dominios de la Física, ni en la licenciatura ni en el doctorado de la

(1) Exigir, como ahora se hace, á quien en el Instituto sólo ha de enseñar elementos de Matemáticas puras, que estudie ántes en la Facultad la asignatura de Geodesia, es ocurrencia peregrina. Lástima no se pida á continuacion un curso de Máquinas de vapor.

Facultad de Ciencias físicas y químicas, se dedica un curso especial á estudiar la ciencia de las fuerzas y movimientos. Luégo, en el período del doctorado, se estudiaria ampliamente y en cursos distintos: el *Calor*, la *Luz*, la *Electricidad* y *Magnetismo*, la *Química inorgánica*, la *Química orgánica* y la *Análisis química*, aparte de que hubiera los correspondientes cursos prácticos de Quimica y áun de Física. De este órden de conocimientos, claro que no brotaria probablemente un Fresnel ni un Cauchy, mas pudiera salir un Faraday ó un Tyndall, y el mérito de estos genios no es mayor ni menor, sino de distinta índole.

A este tenor pudieran reformarse las demas facultades especulativas. Por de contado, que en ciertos casos, muy pocos, bien se podria conferir el grado de Doctor, con todos sus fueros y preeminencias, á quien no tuviera un solo curso aprobado en la Universidad. Si entre nosotros apareciera, por ejemplo, un libro como la *Mecánica celeste* de Laplace, y áun algo ménos, ¿debiera vacilar ningun claustro, por reputado que fuera, en conceder *ipso facto* á su autor el más honroso título? Un tal libro valdria por cien exámenes. Esto, sin embargo, para prevenir abusos, debiera sólo hacerlo la Facultad Central en claustro pleno.

Respecto á las carreras de aplicacion poco tenemos que añadir á lo indicado en la primera parte de este artículo. Dos objetos cabe proponerse: ó distinguir entre el que aplica fórmulas sabidas y el que puede formular en casos nuevos, estableciendo en Jurisprudencia, Medicina y Farmacia una diferencia algo análoga á la que existe entre el Ingeniero y el Ayudante de Obras públicas, ó bien formar abogados, médicos y farmacéuticos, cuya vasta ilustracion tanto les permita aplicar lo sabido como discurrir en lo nuevo. En el primer caso cabe distinguir entre el Licenciado y el Doctor, y dejando para éste las asignaturas de ménos inmediata aplicacion, particularmente las de índole histórica ó filosófica, hacer que el tiempo consagrado por él al estudio sea marcadamente mayor que el que dedique el otro. En el segundo caso sobra uno de los dos títulos: es ridículo, por dos ó tres asignaturas, establecer diferencias. Fíjese entónces el mínimum de asignaturas que se requiere para ser abogado, médico ó farmacéutico, y déjese que á voluntad de los alumnos, cursen ó no esas otras, y no haya más disticion entre sus derechos respectivos que el no poder luégo uno explicar asignatura que no ha cursado ó no tiene aprobada. Como el período universitario hasta el exámen general y de término sería entónces algo extenso, convendria imponer á mitad de él un exámen que abreviára el último, pero sin conceder por ello preeminencia alguna. Se dirá que de ese modo faltaria estímulo para estudiar las asignaturas que se dejasen al arbitrio de los alumnos; pero eso es desconocer la naturaleza humana: cabalmente por no exigirse, y porque no siendo de necesidad absoluta, su existencia en la

Facultad sería el premio concedido á personas de alto mérito y especialidad señalada, fueran las más concurridas.

De uno ú otro modo convendria la reforma: la distribucion actual nos parece defectuosa áun bajo el punto de vista económico. Porque disfrutando todos los catedráticos el mismo sueldo de entrada, se entiende que todas las asignaturas tienen el mismo valor intrínseco: luego deben costar lo mismo al alumno. Ahora bien: las cuotas de los grados significan á nuestro modo de ver que el precio de cada asignatura se divide en dos partes, una que desde luégo se abona y otra que se adeuda y acumula y se paga por junto al tomar el título correspondiente; de manera que si el período de la licenciatura comprende doce asignaturas, el precio de cada una es lo que de matrícula le toca, más la dozava parte de la cuota del título. Pero no componiendo el período del Doctorado más que dos ó tres asignaturas, y siendo la cuota del título más crecida, tales asignaturas resultan en comparacion muy caras. Luego si, como queda dicho, en conocimientos poco pueden añadir á los de un Licenciado, y sin adquirir aquel título no es dado explicar en la Facultad, el mérito real para ello no dirémos que sea, mas parece ser... el lector acabará la frase.

Daniel Rotezo y Duro.

TEORÍA DE LAS TRASVERSALES.

(Continuacion) (1).

5.—EL TRIEDRO Y EL TRIÁNGULO ESFÉRICO.

Tres planos que no pasen por una misma recta, y de los cuales no sean dos paralelos, en cualquiera posicion que los concibamos tendrán un solo punto comun de interseccion, y dividirán el espacio en ocho partes. Cada una de estas partes podemos considerarla como un triángulo de bulto, que lleva generalmente el nombre de *triedro,* con sus tres ángulos y sus tres lados, á la manera que el triángulo rectilíneo. Los tres *ángulos* del triedro son los ángulos diedros que forman entre sí los planos mencionados; y las tres caras ó *lados* del mismo, son los ángulos formados por las intersecciones de aquellos planos generadores: intersecciones que se llaman *aristas* ó cantos del triedro. Entre el triedro y el triángulo esférico no existe diferencia esencial ninguna. Si con un radio de tamaño arbitrario trazamos una esfera, cuyo centro sea el punto de interseccion de los tres planos fundamentales, estos planos, círculos máximos entónces de dicha esfera,

(1) Véase la pág. 286.

dividirán la superficie de este cuerpo redondo en ocho partes tambien. Cada una de estas partes de superficie esférica será un *triángulo esférico*, cuyos ángulos y cuyos lados coincidirán con los ángulos y los lados de alguno de los triedros construidos anteriormente, hasta en la disposicion ú órden en que dichos elementos se hallen colocados.

Supuestas las más elementales propiedades del triedro y el triángulo esférico, vamos á demostrar concisamente algunas leyes que de las mismas se derivan, y que corresponden á las demostradas para el triángulo en el artículo precedente.

a.—Las bisectrices de los ángulos planos, que son las caras ó lados de un triedro, se denominan *líneas medias* de dichos lados ó caras.

Los tres planos que pasan por cada una de las tres aristas de un triedro, y cada una de las líneas medias de las caras respectivamente opuestas á dichas aristas, se cortan en una misma recta. Desde luégo es evidente que estos tres planos, así trazados, tienen comun el *vértice* del triedro; en los mismos ademas estarán contenidas las líneas de gravedad del triángulo plano, formado por las rectas que unen entre sí los vértices del esférico, correspondiente al triedro propuesto: luégo pasarán por el centro de gravedad de dicho triángulo plano; y, en consecuencia, por la recta que une este centro con el vértice del triedro, la cual constituye su *línea de gravedad.* Aplicando esto al triángulo esférico dirémos: *Los tres círculos máximos que unen los vértices de un triángulo esférico con los puntos medios de los lados respectivamente opuestos, se cortan en un mismo punto que es el* PUNTO DE GRAVEDAD *de dicho triángulo.*

b.—*Los tres planos que pasan por las aristas de un triedro y son perpendiculares á las caras respectivamente opuestas, se cortan en una misma línea recta.* Para demostrarlo constrúyanse los planos que pasan por las aristas SA y SB del triedro S (fig. 4), y sean perpendiculares respectivamente á las caras B S C y CSA, los cuales se cortarán segun la recta SH, por ejemplo; y por un punto cualquiera H de esta recta-interseccion trácese un plano perpendicular á la misma, que cortará á las tres aristas del triedro respectivamente en los puntos A, B, C. Ahora bien, el plano AH S es perpendicular simultáneamente á los dos planos A B C y B S C; y á la interseccion de estos B′ C, por consecuencia, será tambien perpendicular la línea A′H que corta, prolongándola, á dicha interseccion en el punto A′. Del mismo modo se demuestra que B H prolongada es perpendicular á A C en el punto B′; y por lo tanto que C H es tambien una altura del triángulo A B C, y perpendicular así al lado A′B. Y como por otra parte es fácil probar despues de lo dicho que el plano S H C es perpendicular al A S B, resulta, en efecto, que los planos trazados por las aristas de un triedro perpendicularmente á las caras opuestas se

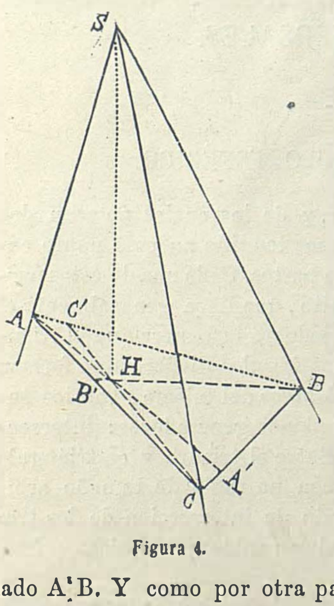


Figura 4.

cortan en una recta (en la S H de la figura), que es la *línea de altura* de dicho triedro. Por consecuencia, *los arcos de círculo máximo trazados por los vértices de un triángulo esférico perpendicularmente á los arcos ó lados opuestos, se cortan en un punto; el* PUNTO DE ALTURA *de dicho triángulo.*

En un principio dijimos que por tres planos y sus intersecciones correspondientes se repartia el espacio en ocho partes que llamamos triedros. Cada dos de estos triedros son opuestos por el vértice, y es fácil concebir que tienen una misma línea por línea de gravedad: de lo cual se infiere que los ocho triedros, ó el espacio que entre todos ellos componen contiene solamente *cuatro* líneas de la clase expresada. Por el contrario, imaginándose construidas las líneas de altura para cada uno de los ocho triedros, bien pronto se nota que existe una misma para todos ellos. Los ocho triángulos esféricos que definen sobre la superficie de una esfera tres círculos máximos, tienen *ocho* puntos de gravedad; pero cada dos de estos puntos se hallan sobre los extremos del mismo diámetro. Puntos de altura sólo existen *dos* para los ocho triángulos esféricos; pero los dos tambien opuestos diametralmente.

C.—*El lugar geométrico de los puntos, en el espacio, equidistantes de dos rectas que partan de uno mismo, es el plano que pasa por la bisectriz del ángulo que forman las dos rectas, y es perpendicular al plano de dicho ángulo.*

Los dos planos perpendiculares á dos caras de un triedro, en las líneas medias de estas caras, se cortan en una recta, cada uno de cuyos puntos equidista de las tres aristas del triedro. Dicha recta-interseccion debe, por consecuencia, hallarse tambien sobre el plano perpendicular á la tercera cara del triedro en su línea media: luégo los tres planos perpendiculares respectivamente á las caras de un triedro en sus líneas medias se cortan segun una misma recta que se denomina *eje de las aristas del triedro.* De esta proposicion se deduce tambien que *los tres arcos de círculo máximo perpendiculares á los lados de un triángulo esférico en sus puntos medios respectivos, se cortan en un mismo punto.*

Si desde un punto del eje de las aristas de un triedro se trazan perpendiculares á estas aristas, los piés de dichas perpendiculares caerán sobre una circunferencia cuyo plano es perpendicular al mencionado eje. Efectuando la misma construccion para todos los puntos del eje, obtendrémos una serie de capas circulares cuya totalidad constituye un cono de revolucion, que puede ser engendrado tambien, de otro modo, por el giro completo al rededor de su eje de una arista del triedro. Esto prueba que el eje de las aristas de un triedro es al mismo tiempo el eje de un cono de revolucion cuya superficie naturalmente contiene á dichas aristas; y así se patentiza tambien la significacion del punto en que se cortan, como ántes dijimos, los tres arcos de círculo máximo perpendiculares á los tres lados de un triángulo esférico en sus puntos medios respectivos; porque tal punto, evidentemente ahora, es el centro del círculo menor de la esfera, en cuya periferia se encuentran los tres vértices del expresado triángulo.

Si en lugar de un solo triedro tomamos en cuenta los ocho formados por tres planos, de los que várias veces hemos hablado, y suponemos indefinidamente prolongadas las aristas ó lados del cono de revolucion, resultará que los ocho triedros mencionados se reducen á cuatro conos de revolucion en cuyas superficies se hallan sus aristas, ó lo que es igual, que existen cuatro conos de revolucion que contienen en toda su extension á tres rectas que pasen por un mismo punto.

d.— *Los lugares geométricos de todos los puntos, en el espacio, equidistantes de dos planos, son los planos bisectores de los ángulos que forman aquéllos; y recíprocamente: todo punto equidistante de dos planos se halla sobre uno de los dos planos bisectores de los ángulos que forman entre sí los planos dados.*

Los dos planos bisectores de dos ángulos diedros de un triedro se cortan en una recta que equidista de todas las caras del triedro, y se encuentra, segun fácilmente puede demostrarse, sobre el plano bisector tambien del tercer ángulo diedro. Por consecuencia, los planos bisectores de los tres ángulos diedros de un triedro se cortan en una línea recta, la cual se llama *eje de las caras del triedro*, y es al mismo tiempo eje de un cono de revolucion tangente á dichas caras. Al principio ántes enunciado, añadimos ahora que existen cuatro conos de revolucion tangentes á tres planos dados, y cada uno de ellos corresponde á dos triedros opuestos por el vértice de los ocho en que puede ser dividido el espacio por tres planos. Respecto del triángulo esférico dirémos tambien que los tres círculos máximos, bisectores de sus ángulos, se cortan en un punto que es el centro del círculo menor de la esfera, inscrito en el triángulo, ó que es tangente á las porciones de círculos máximos que lo forman.

e.— De todos los triedros, fijémonos en el que tenga todas sus caras ó ángulos planos rectos, y rectos tambien todos sus ángulos diedros: el cual en cierto sentido corresponde al triángulo equilátero, y en otro al rectángulo. Aplicándole los principios últimamente expuestos, se percibe al momento la posibilidad de amplificar un teorema muy conocido: aquel que establece ser recto todo águlo cuyo vértice se halla sobre una circunferencia y cuyos lados pasen por los extremos de un diámetro. Generalizando, pues, puede esta proposicion enunciarse como sigue: *si, colocado sobre una circunferencia el vértice de un ángulo recto, determinamos los otros puntos de interseccion de los lados de este ángulo con aquella curva, y los unimos por una recta, esta recta pasará por el centro de la circunferencia: esto es, por un punto fijo, sea cualquiera la posicion que ocupe sobre la periferia el vértice del ángulo recto que puede recorrerla toda.*

Sea ahora E una esfera fija (el lector debe construir la figura), S un punto sobre su superficie, y Sa, Sb, Sc las aristas de un triedro equilátero y rectángulo (definido ántes) que cortarán segunda vez á la esfera en los puntos a, b, c. Los tres planos ó caras de tal triedro bSc, cSa, aSb, cortarán á la esfera E segun círculos, cuyos centros se hallarán trazando desde el centro O de la esfera perpendiculares á dichas caras ó planos; y los piés de estas perpendiculares respectivamente a', b', c', serán los puntos medios de los lados bc, ca, ab, del triángulo $a\,b\,c$.

Concretémonos para demostrar esta proposicion al plano b S c. Este plano corta á la esfera E, segun un círculo, respecto del cual será *inscrito* el ángulo recto b S c, y cuyo centro, por consecuencia, será el punto medio a, de la recta b c. Por otra parte, las rectas a'S y O$'a$, perpendiculares al plano b S c, serán naturalmente paralelas y se hallarán en un plano que contendrá los cuatro puntos a, S, O, a';

de lo cual se deduce que deben cortarse las dos rectas O S y $a\,a'$. Del mismo modo se demuestra que O S debe ser cortada tambien por $b\,b'$ y $c\,c'$; y esto sólo puede ocurrir cuando dicha línea O S pase por el punto de interseccion S de las tres rectas $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$; que es el punto de gravedad del triángulo $a\,b\,c$. Y como por ser paralelas las línea a S y Oa', los triángulos $a\,s$ S y a' S O son semejantes, y, de consiguiente, S $s = 2\,s$ O, porque $a\,s = 2\,s\,a'$, resulta en conclusion que: *si hacemos girar un triedro equilátero-rectángulo, alrededor de su vértice* S, *fijo sobre una esfera* E, *y en cada una de sus posiciones determinamos los segundos puntos de interseccion de sus aristas con dicha esfera, designados por* a, b, c, *los planos del triángulo* a b c *pasarán siempre por un punto fijo* s, *que es el centro de gravedad de este triángulo, y el cual se determina tomando sobre el radio* O S *su tercera parte á contar desde el centro.*

Si desde los puntos S y O trazamos perpendiculares al plano $a\,b\,c$, y designamos sus piés respectivamente por h y m, los puntos S, h, s, m, O, estarán todos en un mismo plano, y los tres m, s, h en una misma recta, dividida por ellos en la relacion $h\,s = 2\,s\,m$. Este corolario confirma nuevamente la proposicion ya demostrada (4 — a); puesto que h, s y m son el punto de altura, el centro de gravedad, y el del círculo circunscrito relativos al triángulo $a\,b\,c$.

f.—Terminarémos este artículo con la generalizacion para el espacio de los teoremas referentes á las trasversales, en los dos primeros demostrados.

Si unimos sucesivamente por rectas los cuatro puntos A, B, C, D, no situados en el mismo plano, formarémos un cuadrilátero alabeado ABCD, del cual puede considerarse como diagonal la recta AC. Imaginemos un plano cualquiera que corta á los lados AB, BC, CD, DA, del cuadrilátero, y á la prolongacion de su diagonal AC, respectivamente en los puntos C', A', A'', C'', B'. Ahora bien, en el plano ABC, los puntos C', A', B' se hallan en una recta: luego (art. 1)

$$BC'.\,CA'.\,AB' = B'C.\,C'A.\,A'B.$$

De igual manera en el plano ADC los puntos A', B', C'' caen sobre una recta, y por lo tanto:

$$B'C.\,C''A.\,A''D. = DC''.\,CA''.\,AB'.$$

Y multiplicando las dos ecuaciones resulta esta otra:

$$BC'.\,CA'.\,C''A.\,A''D = C'A.\,A'B.\,CA''.\,DC''$$

donde ya no figuran las porciones de la diagonal, y que en lenguaje vulgar expresa la ley siguiente: *si cortamos por un plano los lados de un cuadrilátero alabeado, cada lado quedará dividido en dos porciones, y las ocho, correspondientes á los cuatro lados son en tamaño de tal modo que el producto de cuatro no contiguas es igual al de las otras cuatro.*

Recíprocamente: *si entre los ocho trozos definidos sobre los lados limitados* AB, BC, CD, DA, *de un cuadrilátero alabeado, por los cuatro puntos* C', A', A'', C'', *existe la relacion*

$$BC'.\,CA'.\,C''A.\,A''D = C'A.\,A'B.\,CA''.\,DC''$$

ó su equivalente

$$\frac{C'A.\ A'B}{BC'.\ CA'} = \frac{C''A.\ A''D}{DC''.\ CA''}$$

dichos cuatro puntos se hallan sobre un mismo plano. En efecto, designando, como ántes, por B′ el punto de interseccion de la porcion prolongada A′C′ con la prolongacion tambien de AC, tendrémos (1):

$$BC'.\ CA'.\ AB' = B'C.\ C'A.\ A'B.$$

ó

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{C'A.\ A'B}{BC'.\ CA'}$$

y si marcamos por B″ el punto de interseccion de C″ A″ con la misma diagonal A C, será por la misma razon:

$$B''C.\ C''A.\ A''D = DC''.\ CA''.\ AB''$$

ó

$$\frac{AC''}{B''C} = \frac{C''A.\ A''D}{DC''.\ CA''}$$

Las dos razones $\frac{AB'}{B'C}$ y $\frac{AB''}{B''C}$ deben ser iguales, segun la hipótesis; y para que lo sean es necesario que los puntos B′ y B″, que segun la construccion caen ambos sobre la prolongacion de A C, coincidan; pues ya sabemos (2 — *d*) que sobre la prolongacion de una recta sólo un punto puede existir que la divida conforme á una relacion determinada. Y si los dos puntos B′ y B″ coinciden, los cuatro puntos C′, A′, A″, C″ se hallan efectivamente sobre un mismo plano.

Viene á confirmar este recíproco la consideracion de que los puntos medios C′, A′, A″, C″, de los lados AB, BC, CD, DA, de un cuadrilátero alabeado, caen sobre un plano; pues para tales puntos se verifican las igualdades

$$AC' = C'B,\ BA' = A'C,\ CA'' = A''D,\ DC'' = C''A$$

de las que por multiplicacion se deduce la siguiente:

$$BC'.\ CA'.\ C''A.\ A''D = C'A.\ A'B.\ CA''.\ DC''$$

que la demuestra. Los cuatro puntos mencionados son, como sin esfuerzo se percibe, los vértices de un paralelógramo.

Si los lados AB, BC, CD, DA del cuadrilátero alabeado A B C D, son tangentes á una esfera respectivamente en los puntos C′, A′, A″, C″, se verificarán las igualdades:

$$AC' = AC'',\ BA' = BC',\ CA'' = CA',\ DC'' = DA''$$

de las que se desprende esta otra:

$$BC'. CA'. C''A. A''D = C'A. A'B. CA''. DC'':$$

la cual expresa que los puntos de contacto de un cuadrilátero alabeado, circunscrito á una esfera, caen sobre un mismo plano.

(*Se continuará.*)

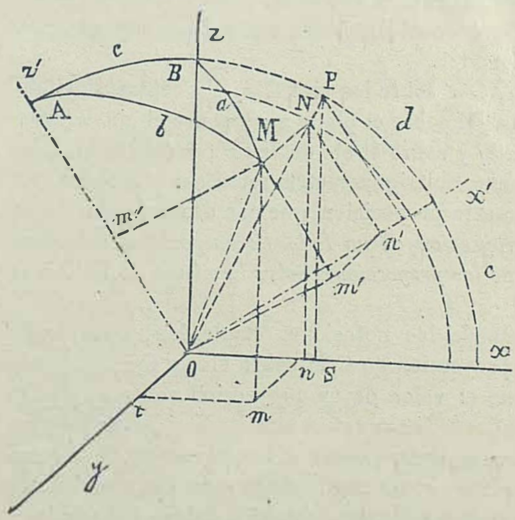
X.

EXÁMEN DE ALGUNOS RESULTADOS
Á QUE CONDUCE LA CONSIDERACION DE LAS PROYECCIONES.

(Conclusion) (1).

Demostradas estas fórmulas para el caso de las figuras planas, es fácil obtener por el mismo procedimiento las correspondientes que se estudian en trigonometría esférica.

Sean tres planos coordenados perpendiculares entre sí. Supongamos (fig. 3) que, sin variar el eje O y, ha girado el plano ($x z$) un ángulo x O $x' = c$. Sea M un punto del espacio.



(Figura 3.)

Tracemos en el plano x z una circunferencia con el radio O N, que llamarémos r, y otra con el radio O B = 1. Designando por d el ángulo que el radio O N forma con el nuevo eje de las x, O x', tendrémos en general, cualquiera que sea la disposicion de la figura,

$$\operatorname{sen}(c \pm d) = \operatorname{sen} c \cos d \pm \cos c \operatorname{sen} d,$$
$$\cos(c \pm d) = \cos c \cos d \mp \operatorname{sen} c \operatorname{sen} d.$$

Convengamos en la siguiente notacion: z O M $= a$, z' O M $= b$.

Tenemos en el plano x z, segun se probó anteriormente, las relaciones

$$\mathrm{P\,S} = \frac{\mathrm{N}n}{r} = \operatorname{sen} c \cos d + \cos c \operatorname{sen} d,$$

$$\mathrm{O\,S} = \frac{\mathrm{O}n}{r} = \cos c \cos d - \operatorname{sen} c \operatorname{sen} d;$$

(1) Véase la pág. 310.

pero

$$\mathrm{N}\,n = \mathrm{M}\,m = \cos a;\ \mathrm{N}\,n' = r \operatorname{sen} d = \mathrm{M}\,m' = \cos b$$

$$\mathrm{O}\,n = \mathrm{O}\,m \cos \mathrm{B} = \operatorname{sen} a \cos \mathrm{B}\ ;\ \mathrm{O}\,n' = r \cos d = \mathrm{O}\,m' \cos \mathrm{A} = \operatorname{sen} b \text{ en } \mathrm{A}$$

(los ángulos m O n y m' O n' son los rectilíneos correspondientes á A y B).

Sustituyendo en las relaciones obtenidas resulta

$$\frac{\cos a}{r} = \operatorname{sen} c.\ \frac{\operatorname{sen} b \cos \mathrm{A}}{r} + \cos c.\ \frac{\cos b}{r}$$

$$\frac{\operatorname{sen} a \cos \mathrm{B}}{r} = \cos c.\ \frac{\operatorname{sen} b \cos \mathrm{A}}{r} - \operatorname{sen} c.\ \frac{\cos b}{r},$$

ó bien

$$\cos a = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \cos \mathrm{A} + \cos c \cos b$$

$$\operatorname{Sen} a \cos \mathrm{B} = \cos c \operatorname{sen} b \cos \mathrm{A} - \operatorname{sen} c \cos b.$$

A estas expresiones podemos agregar la siguiente:

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} \mathrm{B} = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \mathrm{A}$$

que expresa que las proyecciones de O M sobre el eje O y son iguales para los dos sistemas de planos coordenados, lo cual es evidente.

Las otras dos se prestan á análogas consideraciones que las correspondientes á trigonometría rectilínea, advirtiendo:

1.° Que en las proyecciones O n, O n' sobre los ejes O x, O x' entran los factores que indican la proyeccion de O M sobre el plano $x\,y$ y sobre el eje de las x sucesivamente, ó sobre el plano $x'\,y$ y sobre el eje de las x'; y ésta es la diferencia que notamos entre las fórmulas de trigonometría rectilínea y esférica.

2.° Podiamos haber demostrado esta proposicion que nos ocupa fundándonos desde luégo en el teorema: *La proyeccion de un lado de un polígono sobre una recta es igual á la suma algébrica de las proyecciones sobre la misma de los demas lados.*

3.° Será útil observar, conservando las notaciones empleadas, que siendo O n = sen a cos B el valor de la proyeccion de O M sobre el eje O x, se puede obtener, mediante esta expresion, el valor de su proyeccion sobre el eje Oy cambiando cos B en sen B, la cual será O t = sen a sen B. Y si de las proyecciones sobre los ejes en el plano $x\,y$ se quiere pasar á la proyeccion de la recta sobre el eje perpendicular á este plano, basta cambiar sen a en cos a omitiendo cos B ó sen B, pues, como se ve en la figura, la proyeccion sobre el eje de las z es independiente de la posicion del plano proyectante z O M.

De esto se desprende la regla siguiente, muy útil en las aplicaciones, sobre todo en astronomía esférica, donde se hacen con frecuencia cambios de ejes coordenados.

Para pasar en un plano de la proyeccion sobre un eje á la proyeccion sobre otro que le es perpendicular, basta cambiar en su expresion la línea ó colínea del ángulo en el plano por la colínea ó línea del mismo; y si de una cualquiera de estas proyecciones se quiere pasar á la proyeccion sobre el eje perpendicular al pla-

no, se prescindirá de la colínea ó línea del ángulo en el plano, y se hará el cambio de la colínea ó línea del ángulo situado en el plano proyectante.

4.° Si el plano z' O M gira hasta confundirse con el $x z$, el triángulo esférico A B M se reduce á un arco A B M_1 en que B $M_1 = a = b - c$; entónces el ángulo diedro A $= 0$ y el B $= 180°$; y haciendo estas hipótesis en las fórmulas

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$
$$\operatorname{sen} a \cos B = \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A,$$

se reducen á

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c,$$
$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b \cos c - \cos b \operatorname{sen} c;$$

y si se hace girar el plano z O M hasta confundirse con el $z x$, se hará B $= 0$, A $= 180°$, teniéndose

$$\cos a = \cos b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c,$$
$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b \cos c + \cos b \operatorname{sen} c;$$

pero $a = b + c$ en este caso.

Zoel García de Galdeano,
Licenciado en Ciencias.

SOLUCION DE LAS CUESTIONES PROPUESTAS.

CUESTION 12.

En una esfera sólida de una sustancia dada se ha formado una cavidad, de la cual sólo se sabe que es uno de los sólidos regulares concéntricos con la esfera. Se pide hallar por medios mecánicos (sin abrir ni penetrar la esfera) la forma y dimensiones de dicha cavidad.

SOLUCION.

Resolverémos primero la cuestion en los términos en que viene propuesta; despues supondrémos que el hueco es regular, pero excéntrico; y por último, considerarémos el caso en que el hueco tiene una forma cualquiera.

Empezarémos por observar que el momento de inercia de la esfera y de los poliedros regulares homogéneos con relacion á una recta que pasa por su centro es constante, es decir, que no varía cuando el eje de los momentos cambia de direccion.

Esto supuesto, llamando M al momento de inercia y ρ á la densidad, los momentos de inercia de los seis cuerpos regulares son los siguientes:

Para el tetraedro $M = \frac{\rho\, l^5}{240} \sqrt{2}$

Para el octaedro $M = \frac{\rho\, l^5}{30} \sqrt{2}$

Para el icosaedro $M = \frac{\rho\, l^5}{24} (7 + 3\sqrt{5})$

Para el cubo $M = \frac{\rho\, l^5}{6}$

Para el dodecaedro $M = \frac{\rho\, l^5}{120} (279 + 125\sqrt{5})$

Para la esfera $M = \frac{8\, \pi\, \rho\, R^5}{15}$

En estas fórmulas, l es el lado del poliedro regular, y R el radio de la esfera.

Si representamos por V el volúmen del cuerpo, y por R el radio de una esfera de volúmen V, tendrémos en general:

$$M = c\, R^2\, V\, \rho,$$

siendo c un coeficiente que varía con la forma del cuerpo. El valor de este coeficiente es:

Para el tetraedro	$\log c = \bar{1},7328067$	$c = 0,5405137$	
Para el octaedro	$\log c = \bar{1},6324632$	$c = 0,4290058$	
Para el icosaedro	$\log c = \bar{1},6068384$	$c = 0,4044254$	(A)
Para el cubo	$\log c = \bar{1},6365744$	$c = 0,4330862$	
Para el dodecaedro	$\log c = \bar{1},6085650$	$c = 0,4060365$	
Para la esfera	$\log c = \bar{1},6020600$	$c = 0,4000000$	

Las fórmulas precedentes y la tabla anterior, que es su consecuencia, han sido calculadas expresamente para la resolucion de la presente cuestion.

Hemos pedido al cálculo los valores que necesitábamos, y ahora vamos á pedir á la experiencia otros datos tan indispensables como los primeros.

Determinemos el peso P de la esfera, y el peso p que pierde sumergida en agua en su máximo de densidad; y el número de gramos contenido en p será igual al de centímetros cúbicos del volúmen V de la esfera dada. El peso P expresado en gramos, dividido por la densidad de la materia de que la esfera se compone, nos dará el número de centímetros cúbicos del volúmen V′ de la materia contenida en el cuerpo dado. La diferencia $V - V' = v$ será el volúmen del hueco.

Podriamos tambien medir el diámetro de la esfera y deducir su volúmen V; multiplicar éste por la densidad de la materia de que la esfera se compone, y sacar en consecuencia el peso que ésta tendria si fuera maciza; despues, restando de este peso el peso efectivo, y dividiendo la diferencia por la densidad, tendriamos el volúmen v del hueco.

Con estos datos podemos pasar ya á la resolucion del problema.

Para ello llamemos R al radio de la esfera dada, ρ á su densidad, es decir, á la densidad de la materia de que está formada, y r al radio de una esfera de volúmen v. El momento de inercia del cuerpo dado con respecto á una recta cualquiera que pase por su centro, será

$$\left(\frac{2}{5}\,R^2\,V - c\,r^2\,v\right)\rho,$$

y el cuadrado de su radio de giro

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\,R^2\,V - c\,r^2\,v\right)\rho}{(V - v)\,\rho}.$$

Suspendamos la esfera á un eje horizontal por un hilo muy fino, que supondrémos sin peso, cuya longitud sea $a - R$, y hagámosla oscilar al rededor de dicho eje. La longitud del péndulo simple, equivalente al compuesto que de este modo hemos formado, será:

$$l = a + \frac{\frac{2}{5}\,R^2\,V - c\,r^2\,v}{a\,(V - v)};$$

de modo que, si conociéramos la longitud l, esta ecuacion no contendria más incógnita que la c, y serviria para determinar su valor. Pero si del número de oscilaciones verificadas durante un cierto tiempo por el péndulo compuesto, deducimos la duraciou θ de una de ellas, la formula

$$\theta = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ó cualquiera otra más completa, nos dará el valor de l, y sustituido en la fórmula anterior, y despejando c, resultará:

$$c = \frac{\frac{2}{5}R^2\,V - a\,(l - a)\,(V - v)}{r^2\,v}.$$

Este valor de c debe coincidir con uno de los seis de la tabla (A), y la forma correspondiente será la forma del hueco: queda, pues, resuelta la cuestion.

Hemos supuesto el hilo sin peso y unido directamente á la esfera, con lo cual nos separamos de la realidad de las cosas; pues por una parte no hay hilos imponderables, y por otra el hilo ha de llevar en su extremo inferior un pequeño casquete muy delgado, y untado ligeramente con una sustancia grasa para pegar la esfera; si es que en estos experimentos se ha de proceder como se acostumbra cuando se opera con el péndulo de Borda. Pero no hemos creido conveniente complicar las fórmulas ni repetir una doctrina en tantas partes consignada, tratándose de una cuestion puramente ideal. Por la misma razon no hablamos de ninguna de las correcciones que exige la determinacion experimental de l, ni del modo de deducir su valor más probable por medio de una serie de observaciones.

(*Se continuará.*)

José Bartrina y Royo,
Catedrático de Matemáticas en el Instituto de Albacete.

RELACIONES DE LAS FUERZAS FÍSICAS ENTRE SÍ.

(Conclusion) (1).

¿Qué es, en suma, el magnetismo? *Atracciones* y *repulsiones* análogas á las eléctricas, ó lo que es lo mismo, modo de movimiento de la materia. Esta manera de considerar los fenómenos magnéticos los relaciona con los eléctricos de tal modo, que hoy la mayoría de los físicos los considera como producidos por verdaderas corrientes eléctricas que circulan en espiral por los cuerpos que los presentan.

El célebre Œrsted, guiado por las teorías del aleman Ritter, que anunciaba la existencia de polos eléctricos en la tierra, descubriendo en 1818 la accion directora que una corriente fija ejerce á distancia sobre una aguja imanada y móvil, y más tarde la influencia que tiene un iman fijo sobre una corriente móvil, relaciona el magnetismo y la electricidad; mas, cosa extraña, así como todas las fuerzas conocidas obran en línea recta, éstas lo efectúan perpendicularmente, y por esto las corrientes tienden á colocar los imanes en ángulo recto con su direccion, y éstos hacen lo mismo con los conductores móviles por donde marchan aquéllas. Guiado Arago por los descubrimientos de Œrsted, halló la accion que los imanes ejercian sobre el arco voltaico. Davy fué el que hizo constar la posicion que tomaba segun la del iman y la naturaleza del polo que representaba el arco. Plucker vino á completar los trabajos de Davy con sus múltiples y variados experimentos sobre esta accion, y Ampère en su grandiosa teoría electro-dinámica, explicando los fenómenos magnéticos, las acciones de las corrientes sobre los imanes y la de éstos sobre aquéllas, establece la relacion más

(1) Véase la pág. 316.