«Los más grandes con los más pequeños para que sean más equilibrados los resultados»: respuestas a un problema olímpico de Primaria

por

José M. Muñoz-Escolano y Sara Alonso García

(Universidad de Zaragoza)

Las Olimpiadas Matemáticas en Aragón es una de las actividades organizadas por la SAPM con mayor tradición. Esta entidad se ha encargado de su organización de manera ininterrumpida desde 1989 hasta la actualidad y, de hecho, aparecen mencionadas explícitamente en las finalidades de sus propios estatutos. Esta actividad gratuita goza, además, de una gran aceptación tanto entre el estudiantado como entre el profesorado. A modo de ejemplo, en la última olimpiada autonómica, celebrada en 2025, más de 1600 escolares aragoneses participaron en alguna de sus modalidades (Alevín, Junior y Juvenil).

El sábado 17 de mayo de 2025 tuvo lugar la final de la V Olimpiada Matemática Aragonesa de la categoría Alevín en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza (Oros, 2025). Esta fue la quinta edición de la Olimpiada Alevín, en la que participaron alrededor de 450 estudiantes de 5.º y 6.º de Educación Primaria de todo Aragón en sus dos fases, lo que pone de manifiesto la consolidación de esta actividad (Beltrán, 2024, 2023, 2022; Oros, 2024; Sierra, 2021).

En este artículo presentamos el enunciado de uno de los problemas que se planteó en la fase final y algunas de las resoluciones del estudiantado, incidiendo en los diferentes procedimientos o estrategias de resolución y el grado de razonamiento y argumentación presentes en las diferentes respuestas de los estudiantes.

Nuestro propósito es que la tarea y el análisis de las respuestas de los niños y niñas puedan servir de invitación a los lectores docentes para emplearlas como recurso didáctico en las aulas de Educación Primaria y ESO. Este

CE.M.2. Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones, reflexionar sobre estas y el proceso seguido para incorporar nuevos saberes a la red de conocimientos y competencias del alumnado, y asegurar su validez e implicaciones desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.
CE.M.3. Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones cercanas y significativas para el alumnado, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para contrastar su validez, integrar y comprender nuevo conocimiento.
CE.M.4. Utilizar el pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos, en situaciones de aprendizaje con el andamiaje adecuado, para modelizar y automatizar situaciones cercanas y significativas para el alumnado.

Tabla 1. Competencias específicas de la materia de Matemáticas en Educación Primaria

problema es una tarea «de suelo bajo y techo alto» por la variedad de estrategias de resolución de base que admite y la posibilidad de ampliación y profundización (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021). Por otro lado, analizar las respuestas de estos estudiantes sirve al docente para anticipar posibles respuestas de su alumnado y demuestra la idoneidad de la tarea para movilizar y desarrollar las competencias específicas del eje de resolución de problemas (principalmente la CEM.2) y las del eje de razonamiento y argumentación (CEM.3 y CEM.4) presentes en el actual currículo autonómico LOMLOE (tabla 1).

El enunciado del problema

El enunciado del problema 2 de la fase final es el siguiente (figura 1):

V Olimpiada Matemática Alevín - FINAL

PARTE 2: Valorada en 30 ptos. La explicación forma parte de la valoración de esos puntos. La respuesta debe estar razonada. Puedes utilizar calculadora , texto , dibujos y operaciones para explicar tus razonamientos. Puedes usar el folio por ambas caras.

2 - Es posible formar cuatro parejas con los ocho números 72, 8, 24, 10, 5, 45, 36 y 15, de manera que la multiplicación de los dos números en cada pareja dé el mismo resultado para las cuatro parejas formadas. Indica las cuatro parejas explicando el proceso que has seguido.

Figura 1. El enunciado del problema

Tal y como observamos en la figura 1, en la parte de arriba de todos los enunciados de la Olimpiada se señalaba que, más allá de dar una solución final correcta numéricamente, es fundamental que los niños y niñas expliquen y razonen la resolución del problema, incidiendo en la importancia de documentar el proceso y las argumentaciones a la resolución. De hecho, también se vuelve sobre este aspecto al señalar «Indica las cuatro parejas explicando el proceso que has seguido» en el propio enunciado del problema.

Esta exigencia de comunicar los procesos seguidos y de argumentar la solución fue una constante en todas las preguntas de desarrollo de la olimpiada alevín, que incluían consignas en el enunciado de los problemas como «Tienes que ayudar a un compañero a que encuentre la solución… ¿Cómo lo guiarás?, ¿Qué pistas le puedes dar?» o «Explica los pasos que has seguido para llegar a la solución como si lo fueras a explicar a un compañero o compañera».

El enunciado de la tarea es una adaptación del problema *Pairing Up* que aparece en la página del proyecto NRICH. NRICH es un programa de enriquecimiento curricular de matemáticas escolares de la Universidad de Cambridge que acaba de cumplir 25 años y que surgió como una colaboración entre sus Facultades de Matemáticas y de Educación. En el desarrollo aragonés LOMLOE de las materias de matemáticas, aparece mencionado este programa como fuente de recursos y tareas concretas en varias ocasiones a lo largo de todo el documento, tanto en el caso de Educación Primaria como en el de ESO y Bachillerato.

Las actividades de NRICH se centran en desarrollar habilidades de resolución de problemas y tienen como objetivo fomentar la perseverancia de los estudiantes, el razonamiento matemático, la capacidad de aplicar el conocimiento de manera creativa en contextos desconocidos y la confianza para enfrentar nuevos desafíos. Las tareas de NRICH se denominan tareas de «suelo bajo y techo alto» (LTHC, por sus siglas en inglés) y poseen buenas propiedades para trabajar la inclusión en el aula de matemáticas.

Por un lado, las tareas LTHC están diseñadas para tener un punto de entrada accesible para todos los estudiantes. Es decir, todos los estudiantes deben poseer el conocimiento previo necesario para abordarla y todos los estudiantes pueden participar desde el inicio, independientemente de su nivel. Además, algunos problemas pueden ser sencillos en términos de contenido matemático, pero difíciles de abordar sin estrategias adecuadas. Por otro lado, las tareas LTHC incluyen oportunidades de extensión, permitiendo que cada estudiante alcance un punto de desafío y desarrolle habilidades de resolución de problemas. Todos los estudiantes pueden quedarse atascados en algún punto de la misma.

También cabe advertir que el enunciado del problema propuesto en la olimpiada no contiene todos los requisitos de una tarea LTHC puesto que se adaptó a un contexto de concurso matemático y es algo más «cerrado», sin preguntas de ampliación explícitas, pensado para favorecer que los y las participantes de la olimpiada puedan resolver otras tareas de manera individual en un tiempo determinado.

No obstante, como señalábamos anteriormente, invitamos a los y las docentes que consideren estas tareas formativas e interesantes para implementar en el aula, se animen a visitar la web en busca de más recursos que puedan emplear en un contexto de aula habitual. Por ejemplo, recomendamos la visita a los Mapas Curriculares de Primaria y Secundaria de NRICH, donde se secuencian estas tareas atendiendo a los saberes matemáticos que abordan, a la edad y curso recomendado y a su dificultad.

Las respuestas del estudiantado

De los 55 estudiantes que participaron en la fase final, 51 resolvieron este problema. En todos esos casos, la solución obtenida fue correcta y se identificaron adecuadamente las cuatro parejas del listado de números proporcionado. Encontrar la solución numérica resultó, por tanto, una tarea sencilla para la mayoría de los olímpicos y olímpicas. No obstante, se observó una gran variedad tanto en los procedimientos o estrategias de resolución empleadas como en los tipos de justificaciones y argumentaciones utilizadas.

Revisando las 51 producciones, hemos realizado una clasificación de los procedimientos o estrategias presentes en estas resoluciones.

Resolución sin indicar ninguna estrategia o procedimiento empleado

Dos estudiantes mencionan las cuatro parejas sin mencionar el procedimiento que han empleado (ver figura 2). La argumentación en estas respuestas va en la línea de calcular los cuatro productos y constatar que los cuatro son igual a 360.

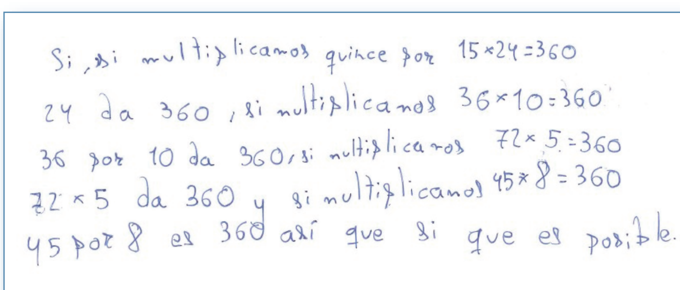

Si, si multiplicamos quince por 15×24=360
24 da 360, si multiplicamos 36×10=360
36 por 10 da 360, si multiplicamos 72×5=360
72×5 da 360 y si multiplicamos 45×8=360
45 por 8 es 360 así que si que es posible.

Figura 2. Resolución sin indicar procedimiento

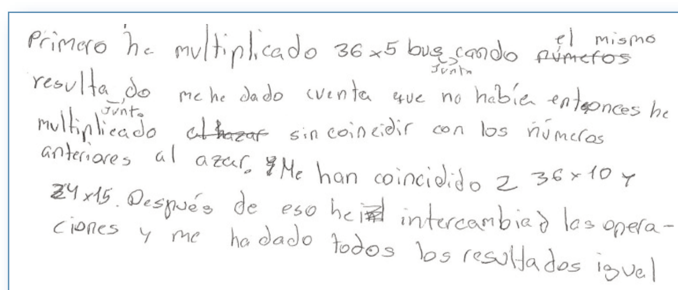

Primero he multiplicado 36×5 buscando juntos el mismo resultado me he dado cuenta que no había entonces he multiplicado junto ~~al azar~~ sin coincidir con los números anteriores al azar. Me han coincidido 2 36×10 y 24×15. Después de eso he intercambiado las operaciones y me ha dado todos los resultados igual

Figura 3. Resolución por prueba y error

Prueba y error

En esta categoría, 10 estudiantes optan por ir haciendo parejas del listado de ocho números del enunciado de manera asistemática, calcular su producto hasta identificar dos parejas que coincida su producto y posteriormente, probar con los otros cuatro números restantes. Para la mayoría, siete estudiantes, la elección de esas parejas de números se realiza al azar y «encuentran» el resultado (figura 3).

Otros tres estudiantes incorporan a su resolución algunos elementos de argumentación o justificación del proceso de elección de una pareja y otra. Por ejemplo, el o la estudiante de la figura 4, en un primer paso, escribe sobre que el producto debe de ser divisible por todos los números del listado (paso 1.º) y, posteriormente, menciona que, al haber un 10 en el listado de números, el producto común a las cuatro parejas es un número que acaba en 0 por lo que desecha hacer parejas cuyo producto no acabe en 0 (paso 3.º).

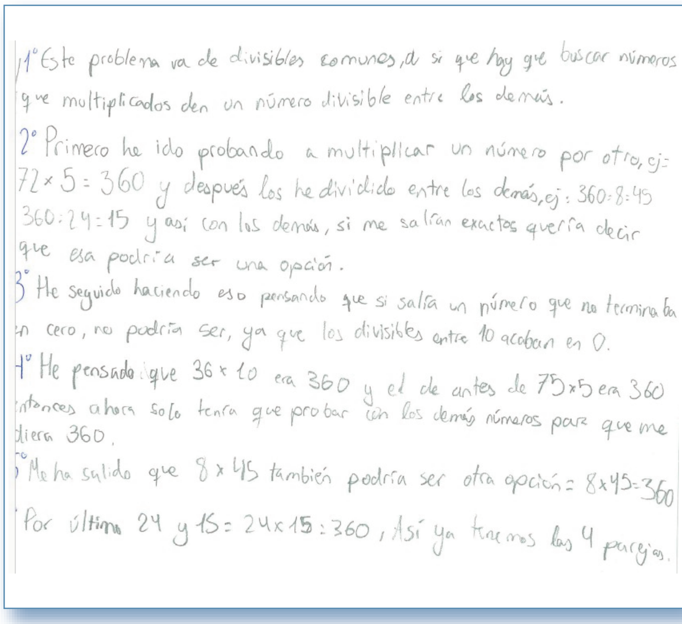


Figura 4. Resolución por prueba y error
con distintas argumentaciones

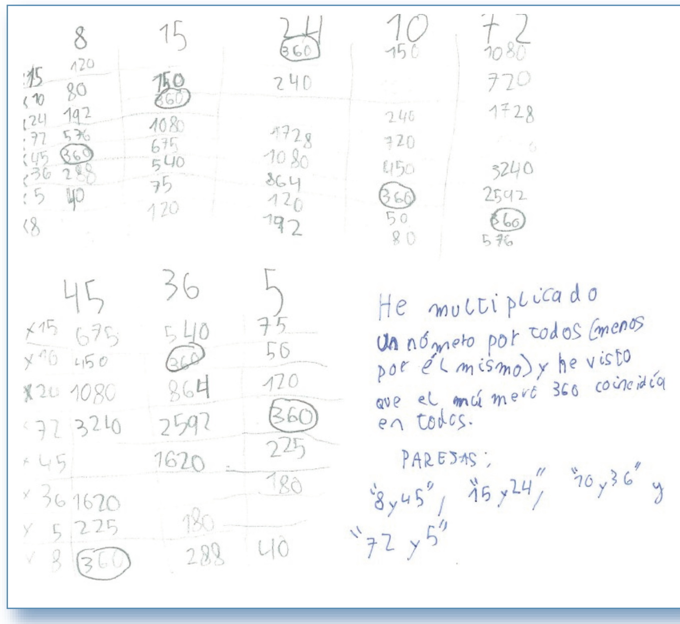


Figura 5. Resolución a través de
una búsqueda sistemática mediante una tabla

Además, este o esta estudiante también menciona en el segundo paso otro procedimiento diferente al de multiplicar parejas y comprobar que el producto final es el mismo (aunque no lo desarrolla posteriormente): dividir el producto final de una pareja por uno de los otros números del listado para encontrar las posibles parejas, si la división era exacta.

Búsqueda sistemática de parejas de números

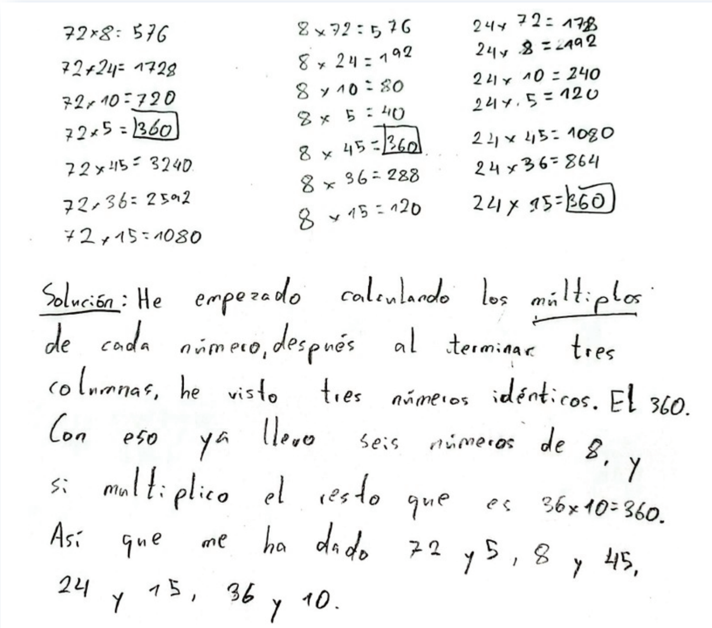
Cinco (5) estudiantes emplean el procedimiento de calcular todos los productos que se pueden encontrar formando todas las parejas posibles del listado de una forma exhaustiva y sistemática (recordamos que los estudiantes podían disponer de calculadora a la hora de resolver los problemas). Estos estudiantes organizan estos resultados a través de una tabla de doble entrada (ver figura 5) o mediante un listado de productos, caso a caso.

Si bien la argumentación es de naturaleza parecida a los anteriores estudiantes («he visto que el 360 coincidía en todos los casos»), también podemos encontrar respuestas en las que observan que se puede aplicar la propiedad conmutativa del producto (y no es necesario, por ejemplo, calcular todos los resultados de las ocho columnas de la tabla) o que, al aparecer el 360 en tres listados calculados (el de 72, el de 8 y el de 24), cambian el procedimiento y cogen los otros dos números restantes para observa si su producto coincide con 360 (figura 6).

Ordenar los números para emparejar el más grande con el más pequeño y así sucesivamente

Treinta y dos (32) estudiantes siguen el procedimiento de ordenar el listado inicial de ocho números y, a continuación, se forman las parejas emparejando el número mayor con el menor, el segundo mayor con el segundo menor, y así sucesivamente. Este fue el procedimiento más empleado.

En la mayoría de ellos (23 de 32), la resolución es meramente descriptiva y no se enriquece la argumentación que justifica el procedimiento más allá de constatar que los productos de las cuatro parejas son iguales (figura 7).


72×8: 576
72×24= 1728
72×10=720
72×5 = $\boxed{360}$
72×45= 3240
72×36= 2592
72×15=1080

8×72=576
8×24=192
8×10=80
8×5=40
8×45=$\boxed{360}$
8×36=288
8×15=120

24×72=178
24×8=192
24×10=240
24×5=120
24×45=1080
24×36=864
24×15=$\boxed{360}$

Solución: He empezado calculando los múltiplos de cada número, después al terminar tres columnas, he visto tres números idénticos. El 360. Con eso ya llevo seis números de 8, y si multiplico el resto que es 36×10=360. Así que me ha dado 72 y 5, 8 y 45, 24 y 15, 36 y 10.

Figura 6. Resolución a través de una búsqueda sistemática solo de tres parejas

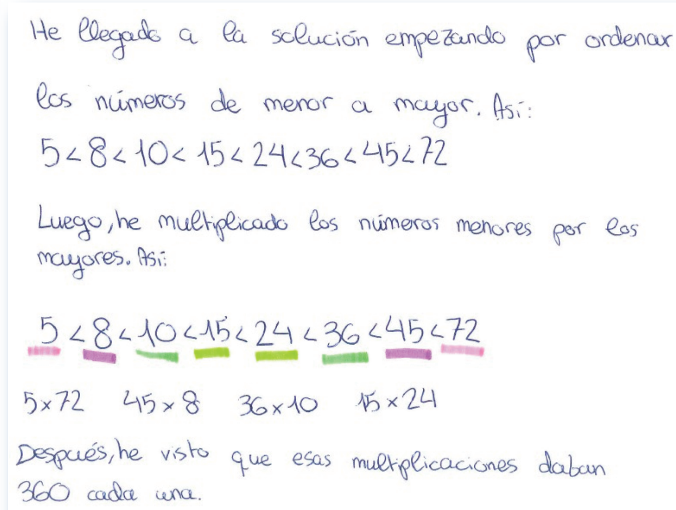

He llegado a la solución empezando por ordenar los números de menor a mayor. Así:
5<8<10<15<24<36<45<72
Luego, he multiplicado los números menores por los mayores. Así:
5<8<10<15<24<36<45<72
5×72 45×8 36×10 15×24
Después, he visto que esas multiplicaciones daban 360 cada una.

Figura 7. Resolución descriptiva del procedimiento de ordenar los números

Además, en una de estas respuestas también se adapta el procedimiento de cálculo de manera que, conociendo que 360 es el producto del número mayor con el número menor, se calculan las restantes parejas dividiendo 360 por cada uno de ellos:

A partir de aquí, habría que dividir 360 entre cada número para que nos dé su pareja:
360 : 45 = 8 → 45 y 8 son pareja.
360 : 36 = 10 → 36 y 10 son pareja.
360 : 24 = 15 → 24 y 15 son pareja.

Finalmente, cabe destacar que 8 estudiantes sí aportan argumentaciones que justifican que el procedimiento seguido es correcto con más o menos precisión. Por ejemplo, en una respuesta se señala que se hace para «que sean más equilibrados los resultados» (figura 8) y en otra se recoge que si «emparejas el más mayor con el más mayor, y el más pequeño con el más pequeño, no va a coincidir» y que por eso hay que emparejar números grandes con números pequeños.

De entre todas, cabe destacar la argumentación de la siguiente respuesta (figura 9) por la corrección y claridad en su justificación.

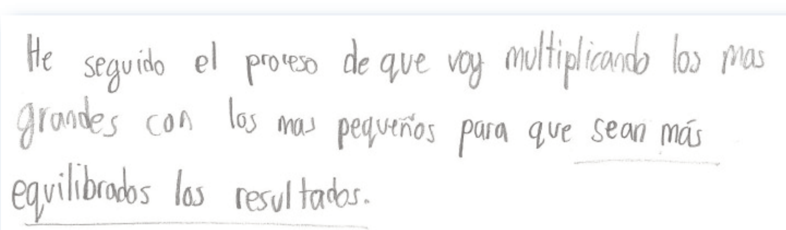

He seguido el proceso de que voy multiplicando los mas grandes con los mas pequeños para que sean más equilibrados los resultados.

Figura 8. Una argumentación del procedimiento de ordenar números

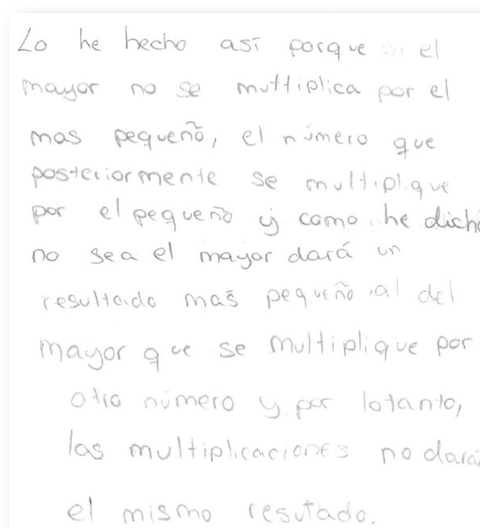
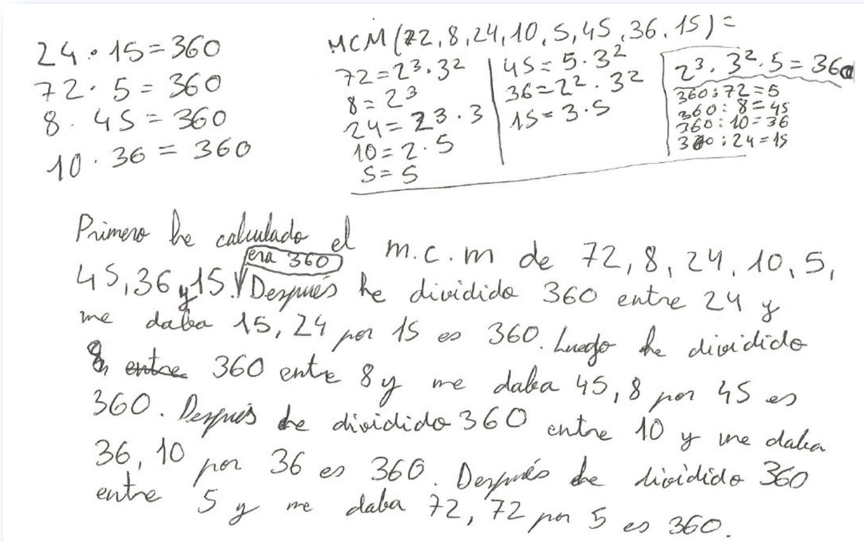

Lo he hecho así porque si el mayor no se multiplica por el mas pequeño, el número que posteriormente se multiplique por el pequeño y como he dicho no sea el mayor dará un resultado mas pequeño al del mayor que se multiplique por otro número y por lo tanto, las multiplicaciones no darán el mismo resutado.

Figura 9. Una buena justificación del procedimiento

Factorizar los números del listado para buscar múltiplos comunes

Dos (2) estudiantes factorizan en primos los ocho números del listado y calculan el mínimo común múltiplo de los ocho números. Una vez conocido que el m.c.m. es 360, dividen este número por los del listado para encontrar las parejas (figura 10).



$24 \cdot 15 = 360$
$72 \cdot 5 = 360$
$8 \cdot 45 = 360$
$10 \cdot 36 = 360$

MCM (72, 8, 24, 10, 5, 45, 36, 15) =
$72 = 2^3 \cdot 3^2$, $8 = 2^3$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$, $5 = 5$
$45 = 5 \cdot 3^2$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $15 = 3 \cdot 5$
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$
360 : 72 = 5
360 : 8 = 45
360 : 10 = 36
360 : 24 = 15

Primero he calculado el m.c.m de 72, 8, 24, 10, 5, 45, 36 y 15 (era 360). Despues he dividido 360 entre 24 y me daba 15, 24 por 15 es 360. Luego he dividido ~~8, entre~~ 360 entre 8 y me daba 45, 8 por 45 es 360. Despues he dividido 360 entre 10 y me daba 36, 10 por 36 es 360. Despues he dividido 360 entre 5 y me daba 72, 72 por 5 es 360.

Figura 10. Resolución calculando el m.c.m. de los ocho números

Lamentablemente, las respuestas de los dos estudiantes que emplean este procedimiento son meramente descriptivas, sin argumentaciones, por lo que no justifican por qué el mínimo común múltiplo de los ocho números es el producto común de las cuatro parejas formadas. Es una cuestión matemáticamente interesante por lo que animamos a los lectores de este artículo a tratar de intentar justificar este procedimiento y averiguar si calcular el m.c.m. resuelve siempre este tipo de problemas para ocho números cualesquiera.

Discusión y conclusiones

Hemos confirmado que, aunque es de fácil acceso, la tarea posee distintos procedimientos o estrategias de resolución empleados por el estudiantado de 5.º y 6.º de Educación Primaria. Así, hemos identificado y clasificado cuatro procedimientos distintos en sus respuestas. Por otro lado, hemos observado que, a pesar de que varios estudiantes puedan emplear el mismo procedimiento de resolución, los razonamientos y las argumentaciones expresadas en sus resoluciones son muy diferentes.

Por tanto, constatamos que ciertas tareas olímpicas (Beltrán-Pellicer y Muñoz-Escolano, 2023; Rubio-Chueca y otros, 2024) pueden constituir un excelente recurso para su empleo en el aula (Toh, 2013). En concreto en este problema, esta tarea permite desarrollar (y evaluar) las competencias específicas de razonamiento (CEM.3 y CEM.4) y de resolución de problemas (CEM.2, en particular) del currículo LOMLOE en el aula de 5.º y 6.º de Educación Primaria y de 1.º de ESO.

En una olimpiada, por su naturaleza de concurso, no se pueden gestionar las distintas soluciones de los estudiantes, ni trabajar en grupo, ni plantear extensiones a las tareas. Sin embargo, en un aula de 5.º y 6.º de Educación Primaria (o de 1.º de ESO), sería muy natural una vez resuelto individualmente o en pequeño grupo el problema, compartir las distintas soluciones de los estudiantes, observar sus diferencias y dialogar sobre ellas con todo el grupo clase para que se produzca el aprendizaje de saberes y el desarrollo de las competencias antes mencionadas.

Además, cada procedimiento presenta ventajas e inconvenientes diferentes que, aunque no afectan a la solución final obtenida, pueden resultar relevantes si los datos del enunciado cambiaran, aunque el problema sea similar.

Por ejemplo, en el caso de aquellos estudiantes que eligen las parejas al azar, el docente puede preguntarles si su procedimiento sería igual de eficaz si, en lugar de un listado de ocho números, se tratara de uno con dieciocho números, buscando que se replanteen un cierto grado de sistematización en su búsqueda o que aparezcan argumentos como, por ejemplo, «si hay un 10 en el listado de números, entonces el producto final debe acabar en 0» o «si hay un número par en el listado de números, entonces no formaré parejas con dos números impares».

Del mismo modo, aquellos estudiantes que realizan una búsqueda sistemática mediante una tabla ante problemas con listados con muchos más números, el docente podría preguntar sobre cómo podrían mejorar la eficiencia de su procedimiento, provocando que los estudiantes empleen la propiedad conmutativa o busquen otros procedimientos.

Por otro lado, para el caso del procedimiento de ordenar y emparejar números grandes y pequeños, también cabe extender la tarea con preguntas como ¿es igualmente válido este método si en lugar de realizar multiplicaciones con las parejas, se realizan sumas? ¿y si en lugar de multiplicaciones, se buscan parejas de números cuya resta o cuyo cociente sea constante?

El último procedimiento en que se factoriza en primos los números del listado y se combinan para encontrar un producto común también puede ser adaptado para resolver otra tarea muy similar del proyecto NRICH, *Multiplication Squares*. En ella se trata de completar con los números del 1 al 9, los cuadrados rojos de las siguientes tablas (figura 11) de manera que el producto de los números de cada fila y de cada columna coincidan con los números que aparecen a la derecha y debajo.

		35
		12
21	20	

			15
			108
			224
144	8	315	

Figura 11. Tablas de la actividad *Multiplication Squares* de NRICH

Finalmente, otra posible extensión del problema permite conectarlo con la semejanza de figuras, cambiando los «números abstractos» del listado por «números medida» que representen las longitudes en centímetros de los lados de distintos cuadrados. Nos podríamos preguntar entonces por el significado que tiene encontrar las parejas de cuadrados cuyo cociente al dividir sus lados es siempre el mismo.

Referencias bibliográficas

Beltrán, A. (2022), «II Olimpiada Matemática Aragonesa Alevín y IV Olimpiada Matemática Nacional Alevín», *Entorno Abierto*, n.º 47, 33-35.

— (2023), «III Olimpiada Matemática Aragonesa Alevín», *Entorno Abierto*, n.º 52, 22-23.

— (2024), «4. ª OLIMPRI en Zaragoza», *Entorno Abierto*, n.º 54, 2-3.

Beltrán-Pellicer, P., y S. Martínez-Juste (2021), «Enseñar a través de la resolución de problemas». *Suma*, n.º 98, 11-21.

Beltrán-Pellicer, P., y J. M. Muñoz-Escolano (2023), «Volando voy (Graphing Bee): final de la XXX Olimpíada Matemática de 2. º ESO». *Entorno Abierto*, n.º 50, 4-7.

Oros, L. A. (2025), «Final de la V Olimpiada Matemática Aragonesa Alevín», *Entorno Abierto*, n.º 60, 12-14.

— (2024), «VI Olimpiada Matemática Nacional Alevín (Madrid)», *Entorno Abierto*, n.º 56, 8-14.

Rubio-Chueca, J. M., Muñoz-Escolano, J. M. y P. Beltrán-Pellicer (2024), «Estrategias ante problemas que movilizan ideas sobre la probabilidad condicional en Olimpiadas», *Entorno Abierto*, n.º 54, 30-34.

Sierra, D. (2021), «Crónica», *Entorno Abierto,* n.º 40, 1-2.

Toh, T. L. (2013), «Mathematics Competition Questions and Mathematical Tasks for Instructional Use», en B. Kaur (Eds.), *Nurturing Reflective Learners in Mathematics: Yearbook 2013*, World Scientific, AME, 189-207.