

MODELO DE CONSTITUCIÓN
INTERNA DE LA TIERRA

YOËL LANA-RENAULT



DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Portada

MODELO DE CONSTITUCION INTERNA DE LA TIERRA.

por

Yoël Lana-Renault

Memoria elaborada bajo la dirección de los Dres. D. José Ignacio Badal Nicolás y D. Rafael Cid Palacios en el Departamento de Física Teórica (Area de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica) de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, presentada para aspirar al grado de Doctor.

Septiembre 1997.

A Piluca, Noemí y Yann.

Agradecimientos

La elaboración de esta memoria ha sido efectuada en el Departamento de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza (Área de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica) bajo la dirección de los Dres. D. José Ignacio Badal Nicolás y D. Rafael Cid Palacios a quienes debo especial gratitud por su inestimable ayuda.

Deseo resaltar, de forma exclusivamente personal, la amistad y el tiempo que me han brindado constantemente en estos últimos años el Dr. D. Rafael Cid Palacios y el Profesor D. Francisco Javier Sabadell Melado que han sido en todo momento partícipes, animadores y críticos excelentes en la consecución del modelo del interior de la Tierra descrito en esta memoria y que designamos con las siglas ZY.

Por último, también deseo agradecer a los Profesores de dicha área la ayuda que me han prestado en todo momento y de modo especial a los Dres. D. Antonio Elipe Sánchez y D. Alberto J. Abad Medina.

Estructura de la memoria

El conocimiento de los diversos materiales que componen el interior de la Tierra, así como su distribución y sus propiedades físicas, constituyen el principal problema de la Geofísica que abordamos en esta memoria con el título de *Modelo de constitución interna de la Tierra*.

En esencia, la presente memoria se fundamenta en los apartados siguientes:

1) Datos observados de los tiempos empleados por las ondas sísmicas en sus trayectorias a través de la Tierra.

2) Establecimiento de un *modelo esférico*, por medio de un conjunto de hipótesis matemáticas, que determinan la distribución de las *velocidades* de las ondas sísmicas y de las *densidades* en el interior de la Tierra.

De esta forma, un esquemático y analítico tratamiento nos permite contrastar las diferencias de tiempos que existen entre los datos observados y los calculados como consecuencia de las hipótesis anteriores, así como poder establecer una distribución interna de estratos.

No creemos que la estratificación interna de la Tierra que establece nuestro modelo sea un fiel reflejo de la realidad, ya que, probablemente, la estratificación interna de nuestro planeta presenta irregularidades que no pueden ser satisfechas por ningún modelo, del mismo modo que creemos que nuestro modelo es susceptible de un posterior perfeccionamiento.

Atendiendo a todas estas cuestiones, hemos estructurado nuestra memoria en siete capítulos con el siguiente contenido:

Capítulo 1: En él se exponen, de manera resumida, las diferentes etapas que han dado origen a la elaboración de esta memoria y se establecen las hipótesis fundamentales que definen nuestro modelo de constitución interna de la Tierra.

Capítulo 2: Con arreglo a dichas hipótesis, se determina un formulario general sobre la transmisión de las ondas sísmicas P y S , a través de cualquier estrato, teniendo en cuenta las leyes de la refracción y la reflexión. De esta forma, queda definida en cada caso la relación que existe entre la *distancia epicentral* de cualquier trayectoria y el *tiempo* empleado en su transmisión.

Capítulo 3: Análogamente, se establecen las fórmulas que servirán de base para la determinación de diversos parámetros del interior de la Tierra y de manera más concreta: la densidad, el momento de inercia, el potencial, la gravedad, la presión y el módulo de compresibilidad.

Capítulo 4: Este capítulo está destinado a determinar las constantes que definen el Manto, que se supone subdividido en dos estratos bien diferenciados: manto superior y manto inferior.

Capítulo 5: En él se hace un estudio global del núcleo, diferenciando su estratificación, de acuerdo a los siguientes substratos: núcleo externo, zona de transición y núcleo interno.

Capítulo 6: Finalmente, se efectúa la determinación de los diversos parámetros citados en el Capítulo 3, y se comparan los resultados obtenidos en nuestro modelo con los que proporciona el modelo PREM isotrópico.

Capítulo 7: Contiene un resumen de funcionamiento del programa informático MATHCAD y un conjunto de tablas de tiempos de propagación de ondas P y S en el manto y de ondas P en el núcleo.

Índice analítico

1	Hipótesis fundamentales	9
1.1	Introducción	9
1.2	Hipótesis fundamentales	14
2	Trayectorias de las ondas sísmicas	19
2.1	Fórmulas fundamentales	19
2.2	Ondas a través del estrato E_0 reflejadas en la superficie de radio R'_0	23
2.3	Formulación general. Representación gráfica	24
2.4	Condiciones para la existencia de extremos relativos de Δ y T . . .	29
3	Diversos parámetros que definen el interior de la Tierra	33
3.1	Distribución de densidades	33
3.2	Momento de inercia	35
3.3	Potencial en un punto interior de la Tierra	36
3.3.1	Potencial creado por un estrato sobre un punto cualquiera	37
3.3.2	Potencial gravitatorio creado por la Tierra sobre un punto cualquiera	39
3.4	Campo gravitatorio	40
3.5	Campo hidrostático de presiones	41
3.5.1	Cálculo de la presión	42
3.5.2	Variación de la densidad con respecto a la presión	43
3.5.3	Módulo de compresibilidad	43
3.5.4	Variación del módulo de compresibilidad	44
4	Estudio global del manto	45
4.1	Cálculo de constantes del manto por mínimos cuadrados	45
4.2	Ondas PcP y ScS . Radio del núcleo externo	51
4.3	Ondas PcS y ScP	52
4.4	Resultados y análisis del manto	53

5	Estudio global del núcleo	65
5.1	Ondas \mathcal{P} en el núcleo	65
5.2	Ondas \mathcal{PKP} (tramo ABC)	68
5.3	Prospección de la zona de transición al núcleo interno	73
5.4	Prospección del núcleo interno	74
5.5	Determinación conjunta de la zona de transición y del núcleo interno	76
6	Consecuencias de la distribución de densidades	87
6.1	Cálculo de la constante H y del momento de inercia	87
6.2	Propiedades físicas derivadas del modelo	88
6.2.1	Distribución de masas y densidades	91
6.2.2	Potencial, gravedad y presión	102
6.2.3	Módulo de compresibilidad κ	104
6.2.4	Variación de la densidad con respecto a la presión	111
6.2.5	Resumen comparativo entre los modelos PREM y ZY	115
	Bibliografía	121
7	APÉNDICES	125
7.1	Funcionamiento del programa informático MATHCAD	125
7.2	Tablas de tiempos de propagación	129
7.2.1	Ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} en el manto	129
7.2.2	Ondas \mathcal{P} refractadas y reflejadas en el núcleo	139

Índice de Figuras

1.1	Trayectorias cóncavas y curva dromocrónica $T(\Delta)$ correspondiente.	11
1.2	Trayectoria sísmica y características de un estrato E_i .	16
2.1	Características de una trayectoria sísmica en el estrato E_0 .	20
2.2	Trayectoria sísmica reflejada en la superficie de radio R'_0 .	23
2.3	Trayectoria sísmica en la esfera de radio R_c .	25
4.1	Trayectorias sísmicas de ondas \mathcal{P} : Una tangente a R_1 y otra atravesando el manto inferior.	54
4.2	Fase \mathcal{P} : Diferencias $T_{Bull} - T_c$ en función de Δ .	55
4.3	Fase \mathcal{S} : Diferencias $T_{Rand} - T_c$ en función de Δ .	55
4.4	Fase \mathcal{P} . Diferencias $T_{Bull} - T_c$, en función de Δ para los modelos PREM, SP6 y ZY.	56
4.5	Fase \mathcal{S} . Diferencias $T_{Rand} - T_c$, en función de Δ para los modelos PREM, SP6 y ZY.	56
4.6	Distribución de velocidades de las ondas \mathcal{P} en el manto. Comparación entre los modelos SP6 y ZY.	58
4.7	Distribución de velocidades de las ondas \mathcal{S} en el manto. Comparación entre los modelos SP6 y ZY.	59
4.8	Fase \mathcal{PcP} : Diferencias $T_{Bull} - T_c$ para los modelos PREM, SP6 y ZY.	60
5.1	Dromocrónicas $T(\Delta)$ de ondas \mathcal{P} que penetran en el núcleo.	65
5.2	Distribución de velocidades para ondas \mathcal{P} en el núcleo según varios autores.	66
5.3	Desdoblamiento de la trayectoria sísmica de la onda \mathcal{P} tangente al núcleo externo, refractándose con ángulo límite (punto A).	69
5.4	Fase \mathcal{PKP} . Trayectoria sísmica tangente a la zona de transición que determina el punto C.	70
5.5	Fase \mathcal{PKP} . Trayectoria sísmica correspondiente al punto caústico B, en donde el frente de ondas cambia de sentido.	71

5.6	Diferencias $T_0 - T_c$ en la fase \mathcal{PKP} tramo AB.	72
5.7	Diferencias $T_0 - T_c$ en la fase \mathcal{PKP} tramo BC.	72
5.8	Distribución de velocidades en el núcleo según los modelos SP6 y ZY	79
5.9	Trayectoria sísmica tangente al núcleo interno que determina el punto D.	81
5.10	Trayectoria sísmica tangente a la esfera de radio R_c que determina el punto E.	82
5.11	Fase \mathcal{PKIKP} . Diferencias $T_0 - T_c$ en los modelos SP6 y ZY . . .	83
5.12	Fase \mathcal{PKIKP} . Diferencias $T_c - T_{JB}$ entre los tiempos calculados en los modelos SP6 (1993) y ZY (1997) y los suministrados por Jeffreys-Bullen (1958).	83
5.13	Fase \mathcal{PKIKP} . Diferencias $T_c - T_{JB}$ entre los tiempos calculados en los modelos PREM (1981), IASP (1991), SP6 (1993) y ZY (1997) y los suministrados por JB. (1958)	84
5.14	Aspecto general de las dromocrónicas $T(\Delta)$ de las fases que penetran en el núcleo terrestre en el modelo ZY.	85
6.1	Mod. PREM y ZY. Distribución de densidades en el manto. . . .	93
6.2	Mod. PREM y ZY. Distribución de densidades en el núcleo. . . .	93
6.3	Mod. PREM. Variables v_p y ρ en el manto superior.	95
6.4	Mod. ZY. Variables v_p y ρ en el manto superior.	95
6.5	Mod. PREM. Variables v_p y ρ en el manto inferior y el núcleo. . .	96
6.6	Mod. ZY. Variables v_p y ρ en el manto inferior y el núcleo. . . .	96
6.7	Mod. PREM y ZY. Velocidades v_p en el manto a medida que aumenta la densidad.	98
6.8	Mod. PREM y ZY. Velocidades v_p en el núcleo a medida que aumenta la densidad.	98
6.9	Mod. ZY. Potencial gravitatorio adimensional $\chi(z) = V(z)/V(0)$ de la Tierra.	99
6.10	Mod. PREM y ZY. Gravedad en el interior de la Tierra.	103
6.11	Mod. PREM y ZY. Presión en el interior de la Tierra.	103
6.12	Mod. PREM y ZY. Módulo κ en función de la profundidad. . . .	104
6.13	Mod. PREM y ZY. Módulo de compresibilidad κ en el manto. . .	105
6.14	Mod. PREM y ZY. Módulo de compresibilidad κ en el núcleo. . .	105
6.15	Mod. PREM y ZY. Valores de la función $d\kappa/dp$ en el interior de la Tierra.	106
6.16	Mod. ZY. Valores de las funciones κ , v_p y $d\kappa/dp$ en el manto con respecto a la densidad.	107

6.17 Mod. ZY. Valores de las funciones κ , v_p y $d\kappa/dp$ en el núcleo con respecto a la densidad.	107
6.18 Mod. PREM. Representación de la función $d\rho/dp$ en el manto con respecto a la densidad.	112
6.19 Mod. PREM. Representación de la función $d\rho/dp$ en el núcleo con respecto a la densidad.	112
6.20 Mod. ZY. Representación de la función $d\rho/dp$ en el manto con respecto a la densidad.	113
6.21 Mod. ZY. Representación de la función $d\rho/dp$ en el núcleo con respecto a la densidad.	113

Índice de Tablas

4.1	Estratos y coeficientes polinómicos de distribución de velocidades para ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} en el modelo SP6.	62
4.2	Velocidades de las ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} en el manto de los modelos SP6 y ZY, diferenciando la estratificación	63
5.1	Mod. SP6 y ZY. Velocidad de las ondas \mathcal{P} en el núcleo, diferenciando la estratificación	80
6.1	Estratos y coeficientes de la funciones polinómicas de velocidad y densidad en el modelo PREM.	89
6.2	Estratos y constantes del modelo ZY.	90
6.3	Mod. PREM y ZY. Densidades en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.	92
6.4	Mod. PREM y ZY. Valores de la gravedad g en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.	100
6.5	Mod. PREM y ZY. Valores de la presión p en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.	101
6.6	Mod. PREM y ZY. Valores de κ en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.	109
6.7	Mod. PREM y ZY. Valores de $d\kappa/dp$ en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.	110
6.8	Mod. PREM y ZY. Valores de $d\rho/dp$ en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.	114
6.9	Modelo ZY. Evaluación de distintas funciones en el interior de la Tierra.	119
7.1	Ondas \mathcal{P} en el manto superior.	130
7.2	Ondas \mathcal{S} en el manto superior.	131
7.3	Ondas \mathcal{P} en el manto (I).	132
7.4	Ondas \mathcal{P} en el manto (II).	133
7.5	Ondas \mathcal{S} en el manto (I).	134

7.6 Ondas S en el manto (II).	135
7.7 Ondas \mathcal{PcP}	136
7.8 Ondas \mathcal{ScS}	137
7.9 Ondas \mathcal{PcS}	138
7.10 Ondas \mathcal{PKP} (tramo AB).	140
7.11 Ondas \mathcal{PKP} (tramo BC).	141
7.12 Ondas \mathcal{PKP} (tramo CD) (I).	142
7.13 Ondas \mathcal{PKP} (tramo CD) (II).	143
7.14 Ondas \mathcal{PKIKP} (tramo DE).	144
7.15 Ondas \mathcal{PKIKP} (tramo EF).	145
7.16 Ondas \mathcal{PKiKP}	146

Capítulo 1

Hipótesis fundamentales

1.1 Introducción

Durante siglos, la Astronomía nos ha suministrado valiosos datos sobre el movimiento de rotación de la Tierra, la posición de nuestro planeta en su órbita y la orientación de su eje polar, en tanto que la Geodesia nos ha permitido conocer con gran precisión la forma elipsoidal de la Tierra, la masa total y la densidad media terrestres, de donde se ha derivado la determinación de la constante de gravitación universal G .

Como consecuencia de tales estudios, los valores actuales admitidos para las constantes terrestres son los siguientes:

- Radio ecuatorial $R_e = 6.378.137$ m
- Aplanamiento terrestre $f = 1/298,257$
- Radio medio $R_o = 6.371.028$ m
- Masa total $M = 5.977 \cdot 10^{27}$ g
- Densidad media $\rho = 5.517$ g \cdot cm $^{-3}$
- Momento de inercia adimensional $I = 0.33076$
- Constante de gravitación $G = 6.67259 \cdot 10^{-11}$ N \cdot m 2 \cdot kg $^{-2}$
- Gravedad en la superficie terrestre $g_o = 979,981$ gals

Sin embargo, su estructura interior es mucho menos conocida, a pesar de los estudios desarrollados por los geofísicos, principalmente, que han conducido al

establecimiento de diversas estructuras del interior de la Tierra, gracias a los trabajos de H. Kraemer (1902), Oldham (1906), Mohorovicic (1909), Miss Lehmann (1936), Jeffreys (1939), Gutenberg (1959), Bullen (1963), Bott (1971), Bolt (1973), etcétera.

De acuerdo con M.H.P. Bott (1971), en una adaptación de los estratos considerados por K.E. Bullen (1963), se supone que el interior de la Tierra puede considerarse dividida en siete capas o regiones, identificadas con las letras A, B, C, D, E, F, G, que se pueden esquematizar de la siguiente forma:

Región	Nombre	Profundidad
A	Corteza terrestre	0 km - 33 km
B	Manto superior	33 km - 400 km
C	Zona de transición	400 km - 1000 km
D	Manto inferior	1000 km - 2900 km
E	Núcleo externo	2900 km - 4980 km
F	Zona de transición	4980 km - 5120 km
G	Núcleo interno	5120 km - 6370 km

El conjunto de las tres regiones (manto superior, zona de transición y manto inferior) constituyen el manto. Por otra parte, entre las regiones A y B suele incluirse la *Discontinuidad de Mohorovicic* y entre las regiones D y E la *Discontinuidad de Gutenberg*. Asimismo, el manto inferior (región D) se subdivide en dos: la D' y la D'' que abarca una franja de unos 200 km., desde una profundidad de 2700 km. hasta el inicio del núcleo externo.

El establecimiento de estas regiones está basado principalmente en el estudio de la propagación de ondas elásticas a través del interior de la Tierra y fundamentalmente sobre dos tipos de ondas, denotadas por Oldham como: *ondas primeras P* y *ondas segundas S*. Las primeras son debidas a la transmisión de compresiones y expansiones de la materia (ondas longitudinales), las segundas a movimientos de cizalladura (ondas transversales).

Aplicando las propiedades de propagación de ondas en un medio estratificado esférico, tal como se considera constituida la Tierra y donde se supone que la velocidad de transmisión de las ondas crece con la profundidad, se demuestra

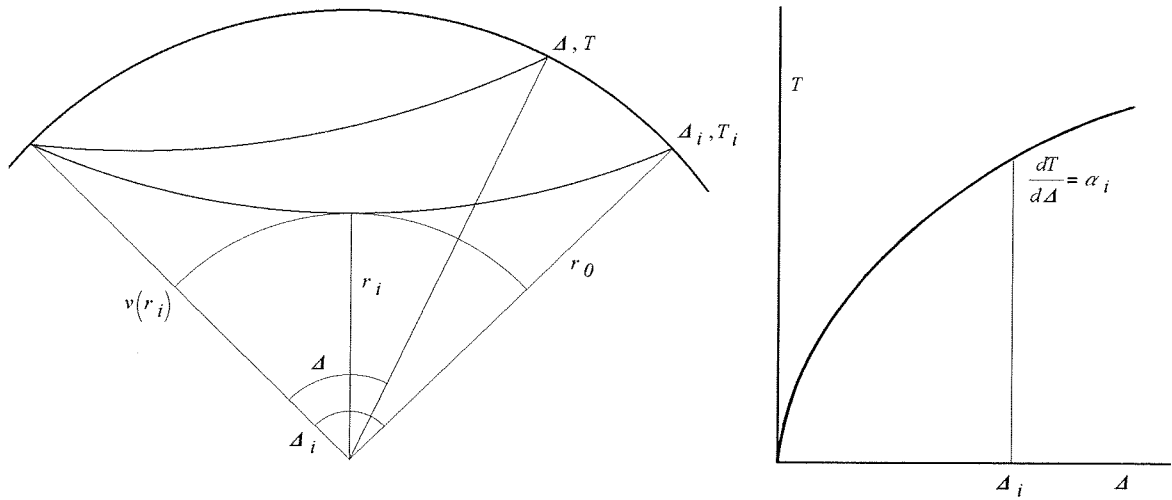


Figura 1.1: Trayectorias cóncavas y curva dromocrónica $T(\Delta)$ correspondiente.

fácilmente que las trayectorias son curvas cóncavas (Fig.1.1), en las que debe significarse la distancia angular Δ , también llamada epicentral y el tiempo T de recorrido, desde que las ondas se producen hasta que emergen a la superficie.

Por otra parte, se han registrado a lo largo de este siglo miles de observaciones sismográficas del tiempo T que transcurre entre la producción de un terremoto (natural o provocado) y la recepción del mismo en diferentes observatorios de la red mundial, por lo que disponemos ahora de tablas empíricas de los parámetros (Δ, T) para los distintos tipos de ondas o fases, identificadas como \mathcal{P} , \mathcal{PP} , \mathcal{PS} , \mathcal{PcP} , \mathcal{PKP} , \mathcal{PKIKP} , etcétera.

Con estos datos podemos construir las curvas $T = T(\Delta)$ de cada fase, llamadas *dromocrónicas* y, lo que es más importante, conocer en todo momento la pendiente $\alpha = \frac{dT}{d\Delta}$ para cada Δ_i , ya que esto nos proporcionará las velocidades de transmisión en cada punto de la trayectoria y, por tanto, la distribución de velocidades con la profundidad $z_i = r_0 - r_i$.

En 1910, Herglotz, Wiechert y Bateman, demostraron que si $v(r)$ era una función monótona creciente con la profundidad z , se cumplía siempre que

$$\int_0^{\Delta_i} \cosh^{-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha_i} \right) d\Delta = \pi \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right)$$

por lo que evaluando numéricamente esta integral, se puede obtener el valor de r_i y a continuación el de $v(r_i)$ por la relación

$$v(r_i) = \frac{r_i}{\alpha_i}$$

El proceso es iterativo para cada Δ_i . Al final obtenemos una serie de valores v_i , que nos proporcionan una curva de distribución de velocidades con la profundidad, que podemos ajustar con una función adecuada de $v(r)$. Asimismo, si ponemos $\eta = r/v(r)$, podemos calcular numéricamente Δ y T por medio de las integrales

$$\Delta = 2 \int_{r_i}^{r_0} \frac{\alpha dr}{r\sqrt{\eta^2 - \alpha^2}} \quad T = 2 \int_{r_i}^{r_0} \frac{\eta^2 dr}{r\sqrt{\eta^2 - \alpha^2}},$$

y reconstruir las curvas dromocrónicas para compararlas con las reales.

En esencia, este trabajo tan laborioso es un caso particular del método general, conocido como método de inversión.

De hecho, muchos investigadores han procurado obtener distribuciones óptimas de $v(r)$ tales que los errores $\epsilon = T_o - T_c$, entre los tiempos de transmisión observados T_o y los calculados T_c , de todas las fases conocidas sean lo más pequeños posible y satisfagan, a la vez, al modelo adoptado para la estructura interior de la Tierra determinando los límites de cada estrato.

Uno de los mejores y últimos trabajos realizados es el modelo SP6 de Morelli y Dziewonski (1993), que establece la existencia de 11 estratos esféricos en donde la distribución de velocidades obtenidas, por el método de inversión, son funciones polinómicas de grados 0,1,2 y 3. Con este modelo se consiguen errores máximos de ± 1 segundo y se determina que los núcleos externo e interno comienzan a las profundidades de 2891 km. y 5156 km., respectivamente. Sin duda este modelo mejora otros anteriores, como son los de Jeffreys y Bullen (1940), Gutenberg (1959), Bolt (1964), PREM de Dziewonski y Anderson (1981) e IASP91 de Kennet y Engdahl (1991).

El conocimiento de la distribución de las velocidades de transmisión v_p y v_s de las ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} con la profundidad, nos permite relacionar tres propiedades físicas importantes: la *densidad* $\rho(r)$, el *módulo de compresibilidad* $\kappa(r)$ y el *módulo de rigidez* $\mu(r)$, por medio de las relaciones

$$v_p = \sqrt{\frac{3\kappa + 4\mu}{3\rho}} \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Estas ecuaciones han sido verificadas en el laboratorio bajo condiciones extremas y se suponen adecuadas para estudiar el interior de la Tierra, aunque se pueda dudar de su total validez, por la imposibilidad de reproducir fielmente las condiciones de presión y temperatura que puedan existir en el interior de la Tierra.

No obstante, para poder calcular las funciones $\rho(r)$, $\kappa(r)$ y $\mu(r)$, así como para poder conocer otras propiedades, como el *potencial* $V(r)$, la *gravedad* $g(r)$

y la *presión* $p(r)$, necesitamos determinar la función $\rho(r)$. De ahí que muchos investigadores hayan formulado relaciones empíricas para $\rho(r)$, como la de Birch (1961) $\rho(r) = a + bv_p$ (con a y b constantes), que fue propuesta para el manto, o bien a construir distribuciones de densidades que satisfagan a las dos magnitudes que conocemos perfectamente sobre la Tierra, es decir, su masa y su momento de inercia.

Así, autores como Bullen (1964) y Clark-Ringwood (1964) construyeron distribuciones de densidad aplicando criterios tales como que la densidad en el núcleo interno era constante y que en el núcleo externo se cumplía la ecuación de Adams-Williamson, que relaciona la densidad y la gravedad con las velocidades de las ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} .

En realidad, los múltiples modelos matemáticos que se han establecido y desarrollado para explicar todos los fenómenos observados suelen ser complejos y algo inconexos, echándose en falta una formulación básica que los integre y los simplifique.

En nuestra modesta opinión, el problema consiste en buscar y desarrollar un modelo conciso y simplificado, a partir del cual se fije fácilmente el comportamiento de la velocidad de transmisión de las ondas elásticas y la densidad con la profundidad.

Es decir:

- Establecer empíricamente las funciones $v(r)$ y $\rho(r)$.
- Calcular las dromocrónicas $T(\Delta)$, los módulos $\kappa(r)$ y $\mu(r)$, la masa, el momento de inercia, el potencial, la gravedad y la presión.
- Comprobar que los resultados calculados analíticamente concuerdan con los datos obtenidos por observación.

Tal es, en esencia, el proceso seguido durante años, que culmina en el año 1991 con la publicación de una Monografía en la Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza, con el título "On the problem of the internal constitution of the Earth", en cuya elaboración hemos recibido la inestimable ayuda del profesor R. Cid Palacios. En este trabajo solamente figuraba el desarrollo de la función $v(r)$ para la obtención de todas las curvas dromocrónicas y su aplicación a cinco modelos que corroboraban en parte las interpretaciones y los modelos de Jeffreys, Gutenberg, Miss Lehmann, Choy-Cormier, Qamar, Dziewonski-Anderson y otros.

En 1993, con la colaboración de F.J. Sabadell y J. Badal, informatizamos y representamos gráficamente todas las curvas $T(\Delta)$ de los cinco modelos, presentando el trabajo resultante en la XXIV Bienal de la R. S. Española de Física (Jaca, Septiembre de 1993) y en la XIX General Assembly of the European Geophysical Society (Grenoble, Abril de 1994). Finalmente, en la VIII Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica (Madrid, Mayo de 1995), dimos a conocer la función $\rho(r)$ adoptada, en una ponencia titulada "Solo dos leyes sencillas para conocer el interior de la Tierra".

Nuestro trabajo de investigación culmina con la presente memoria para aspirar al grado de Doctor, que contiene varios capítulos en los que iremos desarrollando toda la formulación básica que nos permitirá construir un modelo del interior de la Tierra compatible con los conocimientos actuales, adquiridos a lo largo de este siglo, y destinada a determinar, de manera preferente, la velocidad de las ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} en cada punto $P(r)$ del interior de la Tierra, así como la densidad, el potencial y la presión.

No obstante, nuestra intención primordial consiste en demostrar que el modelo adoptado tiene un gran valor didáctico por su sencillez, a la vez que es capaz de aproximarnos a conocer lo que acontece en el interior de la Tierra. Buena muestra de ello es que los errores $\epsilon = T_o - T_c$ alcanzados en algunas fases son menores que ± 0.8 segundos.

Con estos fines estableceremos un conjunto de *hipótesis* que sirven de fundamento a nuestro modelo.

1.2 Hipótesis fundamentales

De manera general, si $P(r)$ representa un punto terrestre cualquiera, del interior o de la superficie, supondremos:

1.- *Que la Tierra es una esfera de centro O y radio medio $R_0 = 6.371.028$ m., con estratificación esférica.*

Esto significa que la velocidad $v(r)$ de las ondas, la densidad $\rho(r)$ y la presión $p(r)$, el potencial $V(r)$, etc. del medio, dependen exclusivamente de la distancia $r = \overline{OP}$. Es indudable que la extensión de esta hipótesis al caso elipsoidal introduciría ligeras modificaciones, aunque estimamos que su incidencia sobre los resultados no sería fundamental.

2.- Que el interior de la Tierra se considera estratificado en $n + 1$ regiones o estratos esféricos, de manera que los radios que limitan cada región E_i serán (R_i, R'_i) y los ángulos de incidencia de cualquier trayectoria de onda sísmica en dichos extremos se denotarán (I_i, I'_i) , siendo $i = 0, 1, 2 \dots n$

No obstante, como se supone que el límite inferior de un estrato coincide con el límite superior del siguiente, tendremos las igualdades: $R'_i = R_{i+1}$.

3.- Que las trayectorias de las ondas sísmicas a través de los diferentes estratos satisfacen las leyes de la refracción, del mismo modo que en los extremos de cada estrato pueden presentarse reflexiones que satisfacen a las leyes de la reflexión

Por consiguiente, para cada punto $P(r)$ de la trayectoria, a través del cual la onda pasa con velocidad $v(r)$, con un ángulo de incidencia $I(r)$ del rayo con respecto al radio $r = \overline{OP}$, las leyes de la refracción vienen expresadas por cualquiera de las ecuaciones

$$\alpha = \frac{r \operatorname{sen} I}{v} = \eta \operatorname{sen} I = \frac{\operatorname{sen} I}{w} = \operatorname{const.} \quad (1.1)$$

donde $w = \eta^{-1} = v/r$.

De igual manera, si en el límite inferior $R' = r$ de un estrato se produce una reflexión y son (I, I') los ángulos que el rayo incidente y el rayo reflejado forman con el radio r , se tiene

$$I = I' \quad (1.2)$$

4.- Que la velocidad de transmisión de las ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} , en cada punto $P(r)$ de su trayectoria, viene dada por la fórmula fundamental

$$v(r) = r(B - A \ln r), \quad (1.3)$$

donde B y A son constantes a determinar para cada estrato.

5.- Que la densidad en cada punto $P(r)$ está definida por la función

$$\rho(r) = H(B - A \ln r), \quad (1.4)$$

donde H es una nueva constante a determinar.

Si se introduce la función

$$w(r) = B - A \ln r,$$

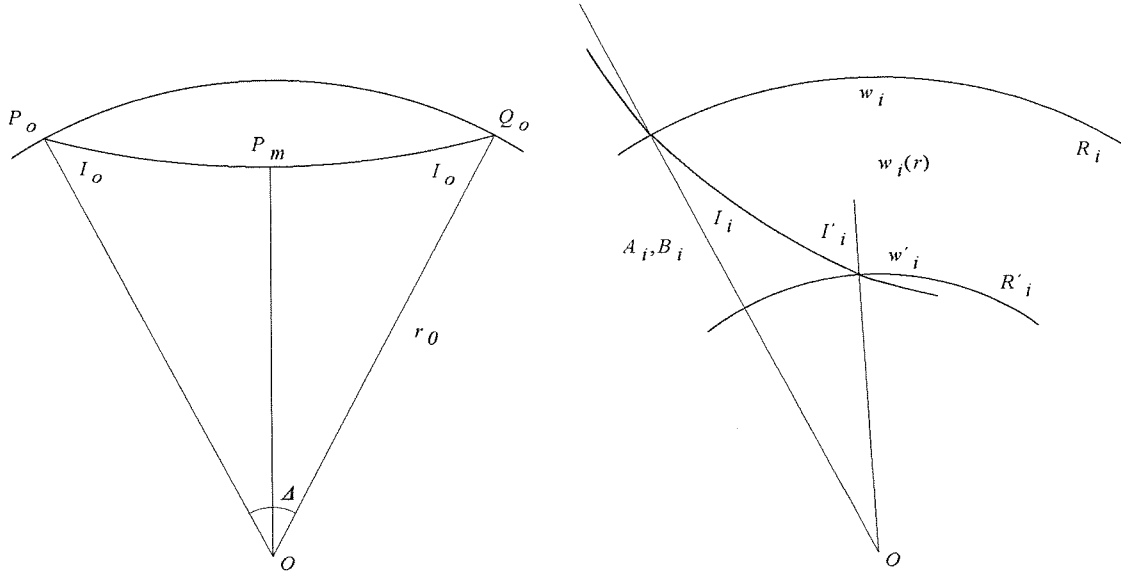


Figura 1.2: Trayectoria sísmica y características de un estrato E_i .

que será utilizada frecuentemente a lo largo de esta memoria, la semejanza de fórmulas empleadas para la velocidad $v(r)$ y la densidad $\rho(r)$ nos permiten expresar ambas funciones en las formas

$$v(r) = rw(r) = \frac{r\rho(r)}{H}, \quad \rho(r) = Hw(r) = H\frac{v(r)}{r},$$

6.- Que en el centro de la Tierra existe una pequeña esfera de radio $R_c = R'_n$, en cuyo interior la velocidad de transmisión de las ondas, la densidad y la función $w(r)$ son constantes, estableciéndose para todo $r \leq R_c$ la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} w(r) &= w_c = \text{cte.}, \\ \rho(r) &= Hw(r) = Hw_c = \rho_c = \text{cte.}, \\ v(r) &= v(R_c) = R_c w_c = v_c = \text{cte.}, \\ \alpha &= \frac{r \operatorname{sen} I}{v_c} = \frac{R_c \operatorname{sen} I_c}{v_c} = \frac{\operatorname{sen} I_c}{w_c}. \end{aligned}$$

La introducción de esta pequeña esfera viene determinada por la singularidad que presenta la función $w(r)$ para $r = 0$, ya que en este caso tenemos $w(0) = \infty$.

Como consecuencia inmediata de estas hipótesis podemos establecer las siguientes conclusiones:

A) Si consideramos la trayectoria de un rayo que parte de un punto $P_o = P(r_0)$ y se recibe en otro punto $Q_o = Q(r_0)$ de la misma superficie esférica, el ángulo $\Delta = P_o\widehat{O}Q_o$ se denomina *distancia epicentral* y se comprueban fácilmente las siguientes propiedades:

1. Con respecto al radio correspondiente, el ángulo de incidencia I_o de salida en P_o es igual al ángulo de llegada en Q_o .
2. Si P_m es el punto más profundo de la trayectoria, las curvas $P_o\widehat{P}_m$ y $P_m\widehat{Q}_o$ son simétricas (Fig. 1.2).

B) En los extremos (R_i, R'_i) de cada estrato E_i (Fig. 1.2) la función $w(r)$ estará definida por las igualdades

$$w_i = w_i(R_i) = B_i - A_i \ln R_i, \quad w'_i = w_i(R'_i) = B_i - A_i \ln R'_i,$$

en tanto que para la esfera de radio R_c o estrato E_c será

$$w_c = \frac{v_c}{R_c}.$$

Una vez establecidas las bases de nuestro trabajo, pasemos a comprobar:

- Las consecuencias que se derivan de la introducción de tales hipótesis.
- La comparación de los resultados obtenidos con los datos proporcionados por otros autores.

Capítulo 2

Trayectorias de las ondas sísmicas

2.1 Fórmulas fundamentales

Consideremos la trayectoria de una onda sísmica $P_oP(r)P'(r')$ (Fig. 2.1) referida a las coordenadas polares (r, Δ) . Si el elemento de arco $\widetilde{PP'}$ de la trayectoria lo representamos por la diferencial ds y es I el ángulo de incidencia que determina la trayectoria con el radio r en P , tendremos

$$\text{sen } I = \frac{rd\Delta}{ds}, \quad (2.1)$$

$$\tan I = -\frac{rd\Delta}{dr}, \quad (2.2)$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2d\Delta^2} = r\sqrt{\left(\frac{dr}{r}\right)^2 + d\Delta^2}. \quad (2.3)$$

Eliminando los términos ds y $\text{sen } I$ entre las tres ecuaciones (1.1), (2.1), (2.2) y (2.3), resulta

$$d\Delta = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\eta^2 - \alpha^2}} \frac{dr}{r} = -\frac{dr}{r} \tan I \quad (2.4)$$

Analogamente, si eliminamos el término ds entre la ecuación (2.3) y la igualdad $ds = v dT$ y elevamos al cuadrado, obtenemos

$$dT^2 = \eta^2 \left[\left(\frac{dr}{r}\right)^2 + d\Delta^2 \right]$$

Finalmente, sustituyendo la expresión de $d\Delta^2$ por medio de la ecuación (2.4), resulta

$$dT = \pm \frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^2 - \alpha^2}} \frac{dr}{r} = -\frac{\eta dr}{r \cos I} \quad (2.5)$$

En las fórmulas (2.4) y (2.5) el signo (-) corresponde a los rayos incidentes y el signo (+) a los rayos emergentes.

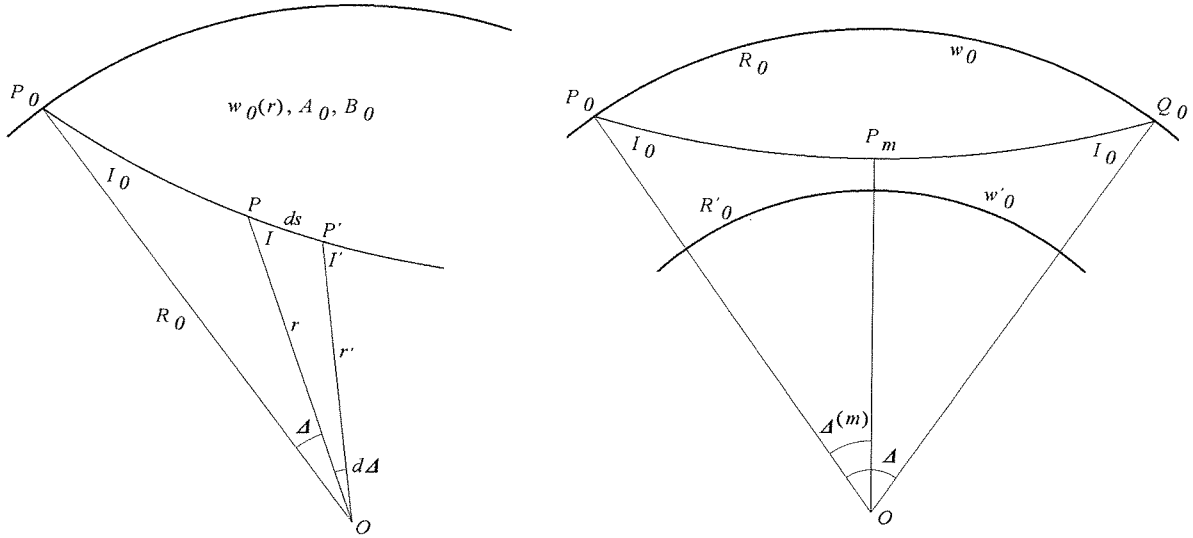


Figura 2.1: Características de una trayectoria sísmica en el estrato E_0 .

Trayectoria de un rayo sísmico a través de un estrato

Aunque la formulación que sigue está referida al estrato E_0 , de radios R_0 y R'_0 , se sobreentiende que podría aplicarse a cualquier estrato E_i , de radios R_i y R'_i , sin más que sustituir el subíndice 0 por el subíndice i (Fig. 2.1)

Eliminando el factor común v/r entre las ecuaciones (1.1) y (1.3), se llega a la igualdad

$$B - A \ln r = \frac{\text{sen } I}{\alpha}.$$

Ahora bien, si consideramos una trayectoria $\widetilde{P_0P}$, a través del estrato E_0 , la ecuación anterior, se escribirá

$$B_0 - A_0 \ln r = \frac{\text{sen } I}{\alpha}.$$

Derivando esta ecuación, tendremos

$$A_0 \frac{dr}{r} = -\frac{\cos I dI}{\alpha} \quad (2.6)$$

Finalmente, eliminando el factor dr/r entre esta ecuación y la (2.4), escrita en la forma

$$d\Delta = -\frac{dr}{r} \tan I,$$

resulta

$$d\Delta = \frac{\text{sen } I dI}{A_0 \alpha} \quad (2.7)$$

Por tanto, si integramos esta ecuación entre los puntos P_0 y P , obtendremos la distancia epicentral que determinan ambos puntos con el centro O de la Tierra y que podemos escribir en cualquiera de las formas

$$\Delta(P_0, P) = \frac{\cos I_0 - \cos I}{A_0 \alpha} = \frac{1}{A_0} \left[\frac{w_0}{\tan I_0} - \frac{w}{\tan I} \right] = \frac{1}{A_0} \left[\frac{w_0}{\tan \frac{I_0}{2}} - \frac{w}{\tan \frac{I}{2}} \right] \quad (2.8)$$

De manera semejante, si tenemos en cuenta la relación $\sin^2 I dT - \alpha d\Delta = 0$, deducida de las fórmulas (2.4) y (2.5), basta eliminar el término $d\Delta$ entre esta relación y la ecuación (2.7), para obtener

$$dT = \frac{dI}{A_0 \sin I} \quad (2.9)$$

Integrando esta ecuación entre P_0 y P , resulta, en cualquiera de las formas, la igualdad

$$T(P_0, P) = \frac{1}{A_0} \ln \left[\frac{\tan(I/2)}{\tan(I_0/2)} \right] = \frac{1}{A_0} \ln \left[\frac{w(1 + \cos I_0)}{w_0(1 + \cos I)} \right] \quad (2.10)$$

Las fórmulas anteriores son fundamentales para el cálculo de trayectorias a través de cualquier estrato E_i , una vez que se ha sustituido el subíndice 0 por el subíndice i .

Además, dichas fórmulas, que definen diversas propiedades de las trayectorias a través de un único estrato, nos permiten deducir algunas consecuencias, que tendrán utilidad en desarrollos posteriores. Son éstas:

a) *Radio de un punto cualquiera de la trayectoria.*

Integrando la fórmula (2.6) entre $P(R_0)$ y un punto cualquiera $P(r)$ de la trayectoria, tendremos

$$r(P) = R_0 \exp \left[\frac{\sin I_0 - \sin I}{A_0 \alpha} \right] = R_0 \exp \left[\frac{w_0 - w}{A_0} \right] \quad (2.11)$$

En particular, si P_m es el punto medio de la trayectoria, de radio $r(P_m)$, sobre el que incide el rayo con un ángulo de incidencia

$$I_m = \frac{\pi}{2},$$

retornando hacia la superficie, se tiene

$$r(P_m) = R_0 \exp \left[\frac{w_0}{A_0} \left(1 - \frac{1}{\sin I_0} \right) \right] = R_0 \exp \left[\frac{1}{A_0} \left(w_0 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \quad (2.12)$$

b) *Distancia epicentral $\Delta^{(m)}$ y tiempo invertido $T^{(m)}$ en la trayectoria $(P_0 P_m)$.*

Aplicando las fórmulas (2.8) y (2.10) a este caso y teniendo en cuenta las relaciones $\Delta = 2\Delta^{(m)}$, $T = 2T^{(m)}$, tendremos

$$\Delta^{(m)} = \frac{\cos I_0}{A_0 \alpha} = \frac{w_0}{A_0 \tan I_0}, \quad (2.13)$$

$$T^{(m)} = -\frac{\ln \tan(I_0/2)}{A_0} = \frac{1}{A_0} \ln \frac{1 + \cos I_0}{\operatorname{sen} I_0} \quad (2.14)$$

c) *Relación entre los parámetros $\Delta^{(m)}$ y $T^{(m)}$.*

Si se introducen las funciones

$$\delta^{(m)} = A_0 \Delta^{(m)} = \frac{w_0}{\tan I_0}, \quad \tau^{(m)} = A_0 T^{(m)} = -\ln \tan(I_0/2),$$

y se tienen en cuenta las relaciones

$$\tan I_0 = \frac{2 \tan(I_0/2)}{1 - \tan^2(I_0/2)} = \frac{2e^{-\tau^{(m)}}}{1 - e^{-2\tau^{(m)}}} = \frac{2}{e^{\tau^{(m)}} - e^{-\tau^{(m)}}},$$

resulta

$$\delta^{(m)} = w_0 \sinh \tau^{(m)} \quad (2.15)$$

d) *Posibilidad de existencia de un punto con velocidad máxima.*

Si suponemos que existe un punto P^* con velocidad máxima v^* , para que exista dicha velocidad, según (1.3), ha de ser

$$\frac{dv}{dr} = B_0 - A_0 \ln r - A_0 = w - A_0 = 0, \quad w^* = A_0$$

por tanto, según (2.11), tendremos

$$r^* = R_0 \exp \left[\frac{w_0 - A_0}{A_0} \right].$$

Es decir que, en el interior del estrato (R_0, R'_0) deberán verificarse las condiciones $R_0 \geq r^* \geq R'_0$. Si es así, dicha velocidad será máxima, puesto que la derivada segunda $d^2v/dr^2 = -A_0/r^*$ nos indica que se trata de un máximo.

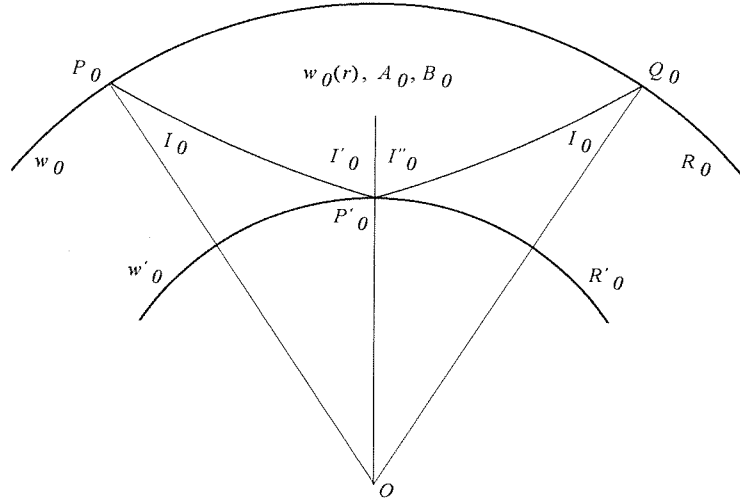


Figura 2.2: Trayectoria sísmica reflejada en la superficie de radio R'_0 .

2.2 Ondas a través del estrato E_0 reflejadas en la superficie de radio R'_0

Consideremos un rayo que parte de un punto $P_0 = P(R_0)$ con un ángulo inicial I_0 y llega a un punto $P'_0 = P'(R'_0)$ con un ángulo de incidencia I'_0 , reflejándose en la superficie de radio R'_0 (Fig.2.2), con un ángulo $I''_0 = I'_0$.

En estas condiciones, las ecuaciones que determinan la trayectoria vienen dadas por las fórmulas (1.1), (2.8) y (2.10), que podemos escribir así:

$$w_0 \sin I'_0 = w'_0 \sin I_0, \quad (2.16)$$

$$w_0 \cos I'_0 = w_0 \cos I_0 - \delta_0 \sin I_0, \quad (2.17)$$

$$\tan \frac{I'_0}{2} = e^{\tau_0} \tan \frac{I_0}{2} \quad (2.18)$$

donde $\delta_0 = A_0 \Delta(P_0, P'_0)$ y $\tau_0 = A_0 T(P_0, P'_0)$.

Sumando las ecuaciones (2.16), (2.17), elevadas al cuadrado y eliminando el término común w_0^2 , obtenemos

$$(w'^2_0 - w^2_0 + \delta^2_0) \sin^2 I_0 = 2w_0 \delta_0 \sin I_0 \cos I_0,$$

y para $I_0 \neq 0$, resulta

$$\tan I_0 = \frac{2w_0 \delta_0}{w'^2_0 - w^2_0 + \delta^2_0}. \quad (2.19)$$

Análogamente, sustituyendo las expresiones de $\sin I'_0$ y $\cos I'_0$, dadas por (2.16) y (2.17), en la ecuación (2.18), resulta

$$e^{\tau_0} \tan \frac{I_0}{2} = \frac{\sin I'_0}{1 + \cos I'_0} = \frac{w'_0 \tan(I_0/2)}{w_0 - \delta_0 \tan(I_0/2)},$$

y finalmente, para $I_0 \neq 0$, tendremos

$$\tan \frac{I_0}{2} = \frac{w_0 e^{\tau_0} - w'_0}{\delta_0 e^{\tau_0}} \quad (2.20)$$

en tanto que para $I_0 = 0$, será

$$w'_0 = w_0 e^{\tau_0}.$$

La eliminación de I_0 entre (2.19) y (2.20), nos lleva a la igualdad

$$(w_0 e^{\tau_0} - w'_0)(w'_0 e^{\tau_0} - w_0) = \delta_0^2 e^{\tau_0} \quad (2.21)$$

que también puede ser escrita en cualquiera de las formas:

$$w_0 w'_0 (1 + e^{2\tau_0}) = (w_0^2 + w_0'^2 + \delta_0^2) e^{\tau_0} \quad (2.22)$$

$$w'_0 = w_0 \cosh \tau_0 \pm \sqrt{w_0^2 \sinh^2 \tau_0 - \delta_0^2} \quad (2.23)$$

En el caso $I'_0 = \frac{\pi}{2}$, tenemos una onda totalmente refractada y podemos utilizar la ecuación (2.15) en la forma $\delta_0 = w_0 \sinh \tau_0$. Eliminando τ_0 entre esta igualdad y la ecuación (2.23), resulta finalmente.

$$w_0'^2 = w_0^2 + \delta_0^2$$

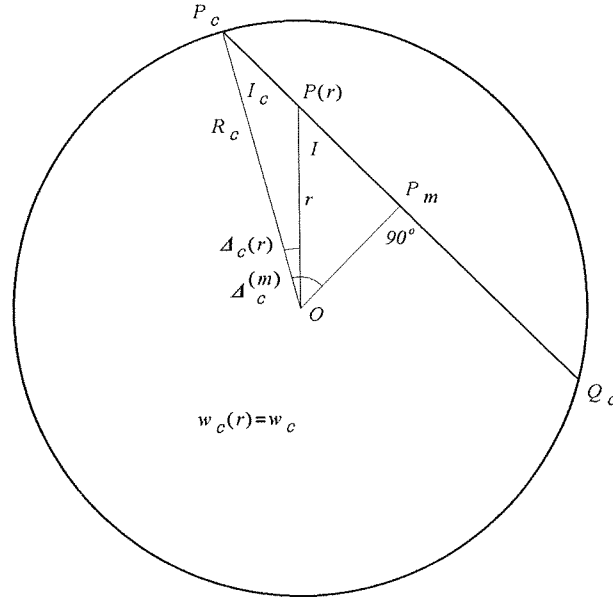
2.3 Formulación general. Representación gráfica

Las fórmulas contenidas en los párrafos anteriores, sirven de base al establecimiento de una formulación general para los distintos tipos de ondas transmitidas por distintos estratos del interior de la Tierra, que resumimos de la forma siguiente:

Para un rayo sísmico que atraviese k estratos E_i , tal que $k \leq n$, tendremos la cadena de igualdades

$$\alpha = \frac{\sin I}{w} = \frac{\sin I_i}{w_i} = \frac{\sin I'_i}{w'_i} = \frac{\sin I_k}{w_k},$$

donde $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$.

Figura 2.3: Trayectoria sísmica en la esfera de radio R_c .

En las mismas hipótesis, la distancia epicentral Δ'_i y el tiempo empleado en su transmisión T'_i , a través del estrato E_i , vienen dados por las fórmulas (2.8) y (2.10)

$$\Delta'_i = \frac{\cos I_i - \cos I'_i}{A_i \alpha}, \quad T'_i = \frac{1}{A_i} \ln \left[\frac{\tan(I'_i/2)}{\tan(I_i/2)} \right].$$

y para el último estrato E_k , según (2.13) y (2.14), tendremos

$$\Delta_k^{(m)} = \frac{\cos I_k}{\alpha A_k} \quad T_k^{(m)} = -\frac{\ln \tan(I_k/2)}{A_k}$$

por lo que la trayectoria incidente y la trayectoria total, vienen determinadas, respectivamente, por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \Delta^{(m)} &= \sum_i \Delta'_i + \Delta_k^{(m)} & \Delta &= 2\Delta^{(m)} \\ T^{(m)} &= \sum_i T'_i + T_k^{(m)} & T &= 2T^{(m)} \end{aligned}$$

En particular, para el estrato E_c , como se comprueba en la (Fig. 2.3), será

$$\Delta_c^{(m)} = \frac{\pi}{2} - I_c, \quad T_c^{(m)} = \frac{\cos I_c}{w_c}.$$

En resumen, si la trayectoria pasa por todos los estratos, incluido E_c , para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, tendremos

$$\alpha = \frac{\text{sen } I}{w} = \frac{\text{sen } I_i}{w_i} = \frac{\text{sen } I'_i}{w'_i} = \frac{\text{sen } I_c}{w_c},$$

$$\Delta^{(m)} = \sum_i \Delta'_i + \Delta_c^{(m)}, \quad \Delta = 2\Delta^{(m)}$$

$$T^{(m)} = \sum_i T'_i + T_c^{(m)}, \quad T = 2T^{(m)}$$

Representación gráfica

Con arreglo a esta nomenclatura, podemos representar en coordenadas polares (r, Δ) cualquier trayectoria sísmica por el interior de la Tierra, determinando el tiempo $T(r, \Delta)$ de recorrido que corresponde a cada punto $P(r, \Delta)$ de la trayectoria.

En tal sentido, conviene distinguir entre la trayectoria *descendente o incidente* y la trayectoria *ascendente o emergente*:

Trayectoria descendente

Cualquier punto $P(r, \Delta)$, perteneciente a una trayectoria sísmica que penetra en el interior de la Tierra con un ángulo inicial I_0 y que atraviesa un estrato E_h , tal que $R_h \geq r \geq R'_h$, viene determinado por las ecuaciones

$$\alpha = \frac{\text{sen } I_0}{w_0} = \frac{\text{sen } I}{w_h(r)}, \quad w_h(r) = B_h - A_h \ln r,$$

$$\Delta_d(r) = \sum_{i=0}^{h-1} \Delta'_i + \Delta_h(r), \quad T_d(r) = \sum_{i=0}^{h-1} T'_i + T_h(r),$$

siendo

$$\Delta_h(r) = \frac{\cos I_h - \sqrt{1 - [\alpha w_h(r)]^2}}{\alpha A_h}, \quad T_h(r) = \frac{1}{A_h} \ln \frac{w_h(r)[1 + \cos I_h]}{w_h(1 + \sqrt{1 - [\alpha w_h(r)]^2})}.$$

En cualquier caso, si el estrato E_h contiene el punto P_m de máxima profundidad, habrá de restringirse la trayectoria incidente, tomando como último punto el que define el radio

$$r(P_m) = R_h \exp \left[\frac{1}{A_h} \left(w_h - \frac{1}{\alpha} \right) \right].$$

En particular, si la trayectoria atraviesa la esfera de radio R_c (Fig. 2.3), en un punto $P(r)$, tal que $R_c \geq r \geq r(P_m) = R_c \text{sen } I_c$, tendremos

$$\alpha = \frac{r \text{sen } I}{w_c R_c} \quad \Delta_d(r) = \sum_{i=0}^n \Delta'_i + \Delta_c(r), \quad T_d(r) = \sum_{i=0}^n T'_i + T_c(r),$$

siendo

$$\Delta_c(r) = \arcsin \left(\frac{R_c \text{sen } I_c}{r} \right) - I_c, \quad T_c(r) = \frac{\cos I_c}{w_c} - \sqrt{\left(\frac{r}{w_c R_c} \right)^2 - \alpha^2}.$$

Trayectoria ascendente

Teniendo en cuenta que la trayectoria es simétrica con respecto al punto P_m , tendremos

$$\Delta_a(r) = 2\Delta^{(m)} - \Delta_d(r), \quad T_a(r) = 2T^{(m)} - T_d(r).$$

Puntos de inflexión

Señalemos finalmente que, si en algún estrato E_i se cumple la condición de máximo para la velocidad $v(r)$, es decir $w_i^* = w_i(r_i^*) = A_i$, podremos comprobar que en la superficie esférica de radio r_i^* , las trayectorias cambian de curvatura, como era de esperar, al cambiar el gradiente de velocidad. Utilizando la ecuación polar

$$r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\Delta} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\Delta^2} = 0,$$

para hallar los puntos de inflexión de las trayectorias, se comprueba que la solución $w_i^* = A_i$ satisface dicha ecuación.

En esencia, todo se reduce a determinar, para cada estrato E_i , los elementos que lo definen, teniendo en cuenta:

- Que en la superficie de radio R'_i se puede producir una refracción hacia el estrato E_{i+1} o una reflexión hacia la superficie.
- Que un rayo tangente a la esfera de radio R'_i puede penetrar hacia el interior del estrato E_{i+1} con un ángulo límite de refracción, o retornar hacia la superficie.

Dichos elementos son los siguientes:

1. Las constantes A_i , B_i , de cada estrato.
2. Los valores extremos w_i , w'_i , de la función $w(r)$, de cada estrato.
3. Los radios R_i y R'_i , que limitan dicho estrato.
4. Las profundidades $z_i = R_0 - R_i$ y $z'_i = R_0 - R'_i$.
5. Los ángulos de incidencia I_0^i , $I_0'^i$, que determinan las trayectorias tangentes a las esferas de radios R_i y R'_i .
6. El ángulo de incidencia $(I_0^i)^*$ y el radio r_i^* de un rayo que, en un punto P_i^* , interior al estrato E_i , alcanza una velocidad máxima v_i^* .

El cálculo de los elementos que definen un estrato, basados en las observaciones disponibles, pueden ser obtenidos por distintos métodos. De manera más concreta, nosotros utilizaremos alguno de los que siguen:

- a) Aproximación de constantes por el método de mínimos cuadrados.
- b) Cálculo de constantes por medio de ondas reflejadas en un estrato.
- c) Cálculo de constantes por medio de puntos bien definidos.

El siguiente cuadro indica la notación que emplearemos en lo sucesivo para designar los distintos tipos de trayectorias que pueden presentarse, según los estratos atravesados.

Tipos de ondas	Definición de sus trayectorias
\mathcal{P}, \mathcal{S} .	Ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} a través del manto.
$\mathcal{P} \mathcal{P}, \mathcal{S} \mathcal{S}, \mathcal{P} \mathcal{P} \mathcal{P}, \mathcal{S} \mathcal{S} \mathcal{S}$, etc.	Ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} transmitidas a través del manto y reflejadas una o más veces en la superficie terrestre.
$\mathcal{P} \mathcal{S}, \mathcal{S} \mathcal{P}, \mathcal{P} \mathcal{P} \mathcal{S}, \mathcal{S} \mathcal{P} \mathcal{P}$, etc.	Ondas a través del manto reflejadas en la superficie de la Tierra una o más veces y cambiando su tipo.
$\mathcal{P}c\mathcal{P}, \mathcal{S}c\mathcal{S}, \mathcal{P}c\mathcal{S}$, etc.	Ondas a través del manto, reflejadas en la superficie del núcleo externo, cambiando o no su tipo.
$\mathcal{P} K \mathcal{P}$	Ondas transmitidas a través del manto, núcleo externo y manto
$\mathcal{P}KiK\mathcal{P}$	Ondas transmitidas a través del manto y núcleo externo, y reflejadas en la superficie del núcleo interno hacia la superficie de la Tierra.
$\mathcal{P}KiK\mathcal{P}$	Ondas transmitidas a través del manto, núcleo externo y núcleo interno, retornando hacia la superficie de la Tierra.

2.4 Condiciones para la existencia de extremos relativos de Δ y T

Recordemos que las ecuaciones que definen la trayectoria incidente de una onda sísmica a través de los estratos E_0, E_1, \dots, E_k ($k \leq n$), satisfacen a tres ecuaciones fundamentales:

En efecto, si I_i designa cualquiera de los ángulos $I'_0, I_1, I'_1, \dots, I_k$, tenemos una primera ecuación

$$\frac{\text{sen } I_0}{w_0} = \frac{\text{sen } I_i}{w_i}, \quad (2.24)$$

que relaciona cualquiera de los ángulos I_i con I_0 .

De igual modo, la distancia epicentral $\Delta^{(m)}$ y el tiempo $T^{(m)}$, invertido en la trayectoria incidente, vienen dados por las ecuaciones:

$$\Delta^{(m)} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\cos I_i - \cos I'_i}{A_i \alpha} + \frac{\cos I_k}{A_k \alpha}, \quad (2.25)$$

$$T^{(m)} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{A_i} \left(\ln \tan \frac{I'_i}{2} - \ln \tan \frac{I_i}{2} \right) - \frac{1}{A_k} \ln \tan \frac{I_k}{2}. \quad (2.26)$$

De esta forma, vemos que $\Delta^{(m)}$ y $T^{(m)}$, son funciones del ángulo inicial I_0 , y de un conjunto de constantes $A_0, A_1, \dots, A_k, w_0, w'_0, w_1, w'_1, \dots, w_k$, a través de los ángulos I_i .

Si derivamos la igualdad (2.24) con respecto a I_0 y eliminamos las constantes w_0 y w_i , obtenemos

$$\frac{dI_i}{dI_0} = \frac{\tan I_i}{\tan I_0} \quad (2.27)$$

Por tanto, derivando las funciones $\Delta^{(m)}$ y $T^{(m)}$ con respecto a I_0 , obtenemos fácilmente

$$\frac{d\Delta^{(m)}}{dI_0} = \frac{\Phi}{\alpha \tan I_0}, \quad (2.28)$$

$$\frac{dT^{(m)}}{dI_0} = \frac{\Phi}{\tan I_0},$$

donde Φ representa la función

$$\Phi = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{A_i} \left(\frac{1}{\cos I'_i} - \frac{1}{\cos I_i} \right) - \frac{1}{A_k \cos I_k}. \quad (2.29)$$

Dividiendo las igualdades (2.28), resulta $\alpha d\Delta^{(m)} = dT^{(m)}$, y por la simetría de la trayectoria emergente, tendremos en general

$$\alpha d\Delta = dT. \quad (2.30)$$

En consecuencia vemos que, según (2.28), la condición $\Phi = 0$ es necesaria para la existencia de extremos relativos. Esta condición ha de ser suplementada con los valores de las segundas derivadas, para conocer el carácter de dichas funciones.

Introduciendo la función

$$\Psi = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{A_i} \left(\frac{1}{\cos^3 I'_i} - \frac{1}{\cos^3 I_i} \right) - \frac{1}{A_k \cos^3 I_k}, \quad (2.31)$$

se deduce, después de algunos cálculos con la condición $\Phi = 0$, la igualdad

$$\alpha \frac{d^2 \Delta^{(m)}}{dI_0^2} = \frac{d^2 T^{(m)}}{dI_0^2} = \frac{\Psi}{\tan^2 I_0}, \quad (2.32)$$

que nos indica que ambas derivadas segundas tienen el mismo signo, puesto que $\alpha > 0$, y que dicho signo depende exclusivamente del valor de Ψ .

Con este fin, introduzcamos las funciones

$$\nu_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{A_i} \left(\frac{1}{\cos I'_i} - \frac{1}{\cos I_i} \right), \quad (2.33)$$

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{A_i} (\cos I_i - \cos I'_i). \quad (2.34)$$

Evidentemente, la condición $\Phi = 0$, nos demuestra que

$$\frac{1}{A_k} = \nu_k \cos I_k, \quad (2.35)$$

por lo cual, tendremos

$$\Delta^{(m)} = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta'_i + \Delta_k^{(m)} = \frac{1}{\alpha} (\mu_k + \nu_k \cos^2 I_k), \quad (2.36)$$

de donde se deduce

$$\cos^2 I_k = \frac{\Delta^{(m)} \alpha - \mu_k}{\nu_k}. \quad (2.37)$$

Resumiendo el proceso, supongamos conocidas todas las constantes A_i, w_i, w'_i , para los subíndices $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, la existencia de un extremo relativo para una distancia epicentral $\Delta^{(m)*}$ y un tiempo $T^{(m)*}$, ambos extraídos de tablas. Entonces, para cada ángulo inicial I_0 podemos ir calculando los ángulos $I'_0, I_1, \dots, I'_{k-1}$, por medio de la fórmula (2.24) y las cantidades ν_k, μ_k , por (2.33) y (2.34), obteniendo I_k por la igualdad (2.37) y el valor de A_k por (2.35). Finalmente, la ecuación

$$T^{(m)} = \sum_{i=0}^{k-1} T'_i + T_k^{(m)}, \quad (2.38)$$

nos dará el valor de $T^{(m)}$.

Estos cálculos han de ser repetidos hasta encontrar un valor de I_0^* que nos proporcione un valor de $T^{(m)}$, tal que verifique la igualdad $T^{(m)} = T^{(m)*}$. Evidentemente, los valores de I_k , A_k , correspondientes al ángulo inicial I_0^* y las fórmulas

$$w_k = \frac{w_0 \operatorname{sen} I_k}{\operatorname{sen} I_0^*}, \quad B_k = w_k + A_k \ln R_k,$$

nos permiten obtener las constantes A_k , B_k , w_k , que definen el estrato E_k .

El proceso anterior puede ser extendido al conjunto de estratos E_0 , E_1 , E_2, \dots , E_n , E_c , teniendo en cuenta que en este caso las fórmulas correspondientes, son

$$\Phi_c = \nu_{n+1} - \alpha \tan I_c, \quad w_c = \frac{\operatorname{sen} I_c}{\alpha},$$

resultando que, para $\Phi_c = 0$, se tiene

$$\tan I_c = \frac{\nu_{n+1}}{\alpha},$$

y la función

$$\Psi_c = \sum_{i=0}^n \frac{1}{A_i} \left(\frac{1}{\cos^3 I_i'} - \frac{1}{\cos^3 I_i} \right) - \frac{\operatorname{sen}^2 I_c}{w_c \cos^3 I_c} - 2\nu_{n+1}, \quad (2.39)$$

que nos indica, según su signo, si se trata de un máximo o un mínimo. Tanto en este caso como en el anterior si Ψ o Ψ_c , son nulos, habremos de recurrir a derivadas de orden superior al segundo.

Capítulo 3

Diversos parámetros que definen el interior de la Tierra

3.1 Distribución de densidades

Entre las hipótesis establecidas al comienzo de esta memoria figura la siguiente:

Que la densidad en cada punto $P(r)$ está definida por la función

$$\rho(r) = H(B - A \ln r), \quad (3.1)$$

donde H es una nueva constante a determinar.

En estas condiciones vemos que, la densidad en cada punto del interior de la Tierra depende de una constante H y del valor que toma en dicho punto la expresión $w(r) = B - A \ln r$, donde las constantes A y B , están definidas para el estrato en cuyo interior se encuentra el punto $P(r)$.

Experimentalmente se comprueba que en la Tierra, la relación entre las velocidades de las ondas \mathcal{P} y las ondas \mathcal{S} , en cualquier punto del manto, es casi constante y viene dada por la relación

$$\frac{v_p(r)}{v_s(r)} = \frac{B_p - A_p \ln r}{B_s - A_s \ln r} \simeq c,$$

No obstante, como las ondas \mathcal{S} no se transmiten a través de un medio fluido, como acontece en la Tierra, a partir de ahora solamente nos referiremos a la constante H que determinan las ondas \mathcal{P} .

Determinación de la constante H .

Imaginemos que en nuestro planeta somos conocedores de los parámetros A_i y B_i de cada estrato E_i , asociados a las ondas \mathcal{P} . En tal caso, la masa total M

de la Tierra será la suma de todas las masas m_i de los $n + 1$ diferentes estratos existentes E_i , más la masa m_c de la pequeña esfera de radio R_c . Por tanto

$$M = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \Delta = \sum_{i=0}^n m_i + m_c, \quad (3.2)$$

siendo Δ la densidad media de la Tierra y $R_0 = 6.371.028$ m su radio medio.

Si $d\nu$ representa el elemento de volumen, la masa m_i de cada estrato E_i vendrá dada por las integrales

$$m_i = \int_{R'_i}^{R_i} \rho d\nu = H \int_{R'_i}^{R_i} (B_i - A_i \ln r) 4\pi r^2 dr,$$

Utilizando para integrar la expresión general

$$\int x^m \ln x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(\ln x - \frac{1}{m+1} \right), \quad (3.3)$$

válida para todo entero $m \neq -1$, se obtiene

$$m_i = \frac{4}{3}\pi H \left[R_i^3 \left(B_i - A_i \ln R_i + \frac{A_i}{3} \right) - R'_i{}^3 \left(B_i - A_i \ln R'_i + \frac{A_i}{3} \right) \right].$$

Recordando que $w_i = B_i - A_i \ln R_i$, y $w'_i = B_i - A_i \ln R'_i$, e introduciendo la función

$$\Theta_i = R_i^3 \left(w_i + \frac{A_i}{3} \right) - R'_i{}^3 \left(w'_i + \frac{A_i}{3} \right), \quad (3.4)$$

obtenemos finalmente

$$m_i = \frac{4}{3}\pi H \Theta_i. \quad (3.5)$$

Para la esfera de radio R_c , conocida la constante w_c , tendremos

$$\rho_c = H w_c,$$

de donde

$$m_c = \frac{4}{3}\pi R_c^3 \rho_c = \frac{4}{3}\pi R_c^3 H w_c. \quad (3.6)$$

Por tanto, si ponemos $\Theta_c = w_c R_c^3$, tendremos finalmente

$$m_c = \frac{4}{3}\pi H \Theta_c. \quad (3.7)$$

En consecuencia, la fórmula (3.2) se puede escribir en la forma

$$M = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \Delta = \frac{4}{3}\pi H \left(\sum_{i=0}^n \Theta_i + \Theta_c \right), \quad (3.8)$$

y el valor de H puede ser obtenido por la igualdad

$$H = \frac{R_0^3 \Delta}{\sum_{i=0}^n \Theta_i + \Theta_c}. \quad (3.9)$$

Cálculo de la densidad en cada punto del interior de la Tierra.

De acuerdo con la fórmula (3.1) podemos calcular la densidad en cada punto $P(r)$ del interior de la Tierra, puesto que son conocidos los parámetros A_i, B_i y la constante H . No obstante, el cálculo puede efectuarse de la siguiente forma:

Comencemos calculando la densidad ρ_c por la igualdad

$$\rho_c = H w_c,$$

y la densidad superficial ρ_i de cada estrato por la expresión

$$\rho_i = H(B_i - A_i \ln R_i).$$

Entonces, la densidad en un punto $P(r)$ del estrato E_i vendrá dado por la fórmula

$$\rho(r) = H(B_i - A_i \ln r) = \rho_i + a_i \ln \frac{R_i}{r}, \quad (3.10)$$

siendo $a_i = HA_i$ una constante característica de dicho estrato.

Observemos que la última expresión de la densidad tiene más sentido físico por tratarse de una función estrictamente monótona creciente con la profundidad y que en la superficie de cada estrato se cumple la evidente igualdad

$$\rho(R_i) = \rho_i.$$

3.2 Momento de inercia

Suponiendo, como hasta ahora, que la Tierra está estratificada esféricamente, comenzaremos calculando previamente su momento de inercia polar I_0 , con respecto a su centro, puesto que su momento I respecto a un eje cumple la relación

$$I = \frac{2}{3} I_0 \quad (3.11)$$

Evidentemente, el momento I_0 total será la suma de todos los momentos polares que producen los diferentes estratos E_i , más el producido por la esfera de radio R_c . Esto es

$$I_0 = \sum_{i=0}^n I_i + I_c \quad (3.12)$$

El momento de inercia polar I_i producido por la masa m_i de un estrato esférico E_i , respecto a su centro, será

$$I_i = \int_{m_i} r^2 dm = 4\pi \int_{R'_i}^{R_i} \rho(r) r^4 dr = 4\pi H \int_{R'_i}^{R_i} (B_i - A_i \ln r) r^4 dr.$$

Utilizando la igualdad (3.3), podemos integrar en la forma

$$I_i = \frac{4}{5} H \left[R_i^5 \left(B_i - A_i \ln R_i + \frac{A_i}{5} \right) - R'_i{}^5 \left(B_i - A_i \ln R'_i + \frac{A_i}{5} \right) \right]$$

Finalmente, introduciendo la función

$$\Lambda_i = R_i^5 \left(w_i + \frac{A_i}{5} \right) - R'_i{}^5 \left(w'_i + \frac{A_i}{5} \right),$$

resulta

$$I_i = \frac{4}{5} \pi H \Lambda_i.$$

De igual manera, para la esfera de radio R_c , de densidad constante ρ_c , tendremos

$$I_c = \int_{m_c} r^2 dm = 4\pi \int_0^{R_c} \rho_c r^4 dr = \frac{4}{5} \pi H w_c R_c^5 = \frac{4}{5} \pi H \Lambda_c,$$

siendo $\Lambda_c = w_c R_c^5$.

Según esto, el momento de inercia de la Tierra, será

$$I = \frac{8}{15} \pi H \left[\sum_{i=0}^n \Lambda_i + \Lambda_c \right] \quad (3.13)$$

3.3 Potencial en un punto interior de la Tierra

Para el desarrollo de esta sección debemos recordar algunas cuestiones que son establecidas en la *teoría del potencial*, adaptando sus conclusiones al caso que nos ocupa, esto es, al estudio del potencial creado por una esfera de radio R_0 , dividida en estratos esféricos, sobre un punto P_0 de su interior.

Por esto, recordaremos las siguientes propiedades del potencial:

1. El potencial V creado sobre un punto $P(r_0)$ por un dominio esférico de masas D , abierto, acotado y conexo, con distribución continua de masas, queda definido por la función

$$V = G \iiint_D \frac{\rho d\nu}{r_0}, \quad (3.14)$$

donde G designa la constante de gravitación, $d\nu$ el elemento de volumen y ρ la densidad en cada punto del dominio.

2. En consecuencia, el potencial V_e creado por una esfera homogénea, de masa M , sobre un punto *exterior* $P(r)$, viene dado por la igualdad

$$V_e = \frac{GM}{r} \quad (3.15)$$

3. De forma análoga, el potencial V_i creado por una esfera homogénea, de radio R_0 y densidad constante ρ , sobre un punto *interior* $P(r)$, es

$$V_i = 2\pi G\rho \left(R_0^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad (3.16)$$

3.3.1 Potencial creado por un estrato sobre un punto cualquiera

Comencemos, pues, considerando un estrato esférico E , de centro O , limitado por dos superficies esféricas de radios R_1, R_2 ($R_1 < R_2$), cuyos puntos materiales $Q(x, y, z)$ se encuentran a una distancia $R = \overline{OQ}$ del centro y supongamos, además, que la densidad $\rho(R)$ es una función continua en todos los puntos de dicho estrato. Sea $P(r_0)$ un punto situado a la distancia $r_0 = \overline{OP}$ y denotemos por r la distancia \overline{QP} .

En estas condiciones, el potencial V creado por el estrato esférico sobre el punto P , viene dado por la fórmula

$$V = G \iiint_E \frac{\rho(R) d\nu}{r_0}, \quad (3.17)$$

siendo $d\nu$ el elemento de volumen y G la constante de gravitación.

En coordenadas polares esféricas, tendremos

$$x = R \operatorname{sen} \theta \cos \lambda, \quad y = R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \lambda, \quad z = R \cos \theta,$$

y el elemento de volumen, será

$$d\nu = R^2 \operatorname{sen} \theta dR d\theta d\lambda.$$

Dado que $r^2 = r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos \theta$, el potencial V creado por el estrato esférico sobre el punto P , será

$$V = G \int_{R_1}^{R_2} dR \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \rho(R) \operatorname{sen} \theta d\lambda}{\sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos \theta}}. \quad (3.18)$$

Integrando respecto a λ y poniendo $u = r^2$, $du = 2Rr_0 \sin \theta d\theta$, resulta

$$V = \frac{2\pi G}{r_0} \int_{R_1}^{R_2} R\rho(R)dR \int_0^\pi \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2\pi G}{r_0} \int_{R_1}^{R_2} R\rho(R) \left[\sqrt{u} \right]_0^\pi dR \quad (3.19)$$

Según esto, podemos considerar tres casos posibles:

1.- Si $r_0 \geq R_2$, tendremos $\sqrt{u_\pi} = r_0 + R$ y $\sqrt{u_0} = r_0 - R$, de donde $[\sqrt{u}]_0^\pi = 2R$, por lo cual llegamos a la siguiente expresión del potencial

$$V_e = \frac{4\pi G}{r_0} \int_{R_1}^{R_2} R^2 \rho(R) dR \quad (3.20)$$

2.- Si $r_0 \leq R_1$, serán $\sqrt{u_\pi} = r_0 + R$ y $\sqrt{u_0} = R - r_0$, de donde $[\sqrt{u}]_0^\pi = 2r_0$, y por consiguiente el potencial adoptará la expresión

$$V_0 = 4\pi G \int_{R_1}^{R_2} R\rho(R) dR \quad (3.21)$$

3.- Finalmente, si $R_1 \leq r_0 \leq R_2$, podemos descomponer el potencial de la siguiente forma:

$$V_i = 4\pi G \int_{r_0}^{R_2} R\rho(R) dR + \frac{4\pi G}{r_0} \int_{R_1}^{r_0} R^2 \rho(R) dR \quad (3.22)$$

En particular, para la esfera de radio R_c , con $R_1 = 0$, $R_2 = R_c$ y densidad constante, tendremos fácilmente

$$V_e = \frac{4\pi G \rho_c}{r_0} \int_0^{R_c} R^2 dR = \frac{4\pi G \rho_c R_c^3}{3r_0} = \frac{Gm_c}{r_0} \quad (3.23)$$

y también

$$V_i = 4\pi G \rho_c \int_{r_0}^{R_c} R dR + \frac{4\pi G \rho_c}{r_0} \int_0^{r_0} R^2 dR = 2\pi G H w_c \left(R_c^2 - \frac{r_0^2}{3} \right). \quad (3.24)$$

De acuerdo con los tres casos mencionados en las fórmulas (3.20), (3.21) y (3.22), el potencial creado por un estrato E_i , limitado por las superficies esféricas de radios R'_i , R_i ($R'_i \leq R_i$) y cuya densidad está definida por la igualdad $\rho = H(B_i - A_i \ln R)$, se calcula fácilmente si tenemos en cuenta las integrales (3.3).

Potencial creado por el estrato E_i sobre un punto $P(r_0)$, tal que $r_0 \leq R'_i$.

En este caso, aplicando la fórmula (3.21), se obtiene fácilmente la expresión

$$V_0 = 2\pi G H \left[R_i^2 \left(w_i + \frac{A_i}{2} \right) - R_i'^2 \left(w_i' + \frac{A_i}{2} \right) \right] \quad (3.25)$$

Potencial creado por el estrato E_i sobre un punto exterior de radio $r_o \geq R_i$.

En este caso la fórmula (3.20) nos conduce al siguiente resultado:

$$V_e = \frac{4\pi GH}{3r_0} \left[R_i^3 \left(w_i + \frac{A_i}{3} \right) - R_i'^3 \left(w_i' + \frac{A_i}{3} \right) \right] = \frac{4\pi GH \Theta_i}{3r_0} = \frac{Gm_i}{r_0} \quad (3.26)$$

Potencial creado por el estrato E_i sobre un punto interior $R_i' \leq r_0 \leq R_i$.

Este caso viene a ser una combinación de los dos anteriores, dado por la fórmula (3.22), por lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} V_i = & 2\pi GH \left[R_i^2 \left(w_i + \frac{A_i}{2} \right) - r_0^2 \left(w_i(r_0) + \frac{A_i}{2} \right) \right] \\ & + \frac{4\pi GH}{3r_0} \left[r_0^3 \left(w_i(r_0) + \frac{A_i}{3} \right) - R_i'^3 \left(w_i' + \frac{A_i}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.3.2 Potencial gravitatorio creado por la Tierra sobre un punto cualquiera

Generalizando podemos encontrarnos con tres situaciones:

1.- Punto $P(r_0)$ situado en el exterior de la Tierra ($r_0 \geq R_0$).

En este caso tendremos

$$V(r_0) = \sum_{i=0}^n V_e(E_i) + V_e(E_c) = \sum_{i=0}^n \frac{Gm_i}{r_0} + \frac{Gm_c}{r_0} = \frac{G}{r_0} \left(\sum_{i=0}^n m_i + m_c \right) = \frac{GM}{r_0} \quad (3.28)$$

siendo M la masa total de la Tierra.

2.- Punto $P(r_0)$ situado en el interior de un estrato E_k ($R_k \geq r_0 \geq R_k'$), tal que ($0 \leq k \leq n$).

El potencial creado, será

$$\begin{aligned} V_k(r_0) &= \sum_{i=0}^{k-1} V_0(E_i) + V_i(E_k) + \sum_{i=k+1}^n V_e(E_i) + V_e(E_c) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} V_0(E_i) + V_i(E_k) + \frac{G}{r_0} \left(\sum_{i=k+1}^n m_i + m_c \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.- Punto $P(r_0)$ situado en el interior de la esfera de radio R_c ($R_c \geq r_0 \geq 0$).

Finalmente, tendremos

$$V_c(r_0) = \sum_{i=0}^n V_0(E_i) + V_i(E_c) \quad (3.30)$$

En cualquier caso se comprueba que el potencial $V(r)$ es una función continua en todas las superficies de separación de los estratos.

3.4 Campo gravitatorio

. La gravedad $g(r)$ o campo gravitatorio en un punto $P(r)$ se define habitualmente por el gradiente, con signo negativo, del potencial gravitatorio, es decir

$$g(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \quad (3.31)$$

por lo que al igual que hemos visto en el cálculo del potencial, tendremos tres situaciones a considerar:

1.- *Que el punto esté situado en el exterior de la Tierra ($r \geq R_0$).*

En este caso obtendremos directamente

$$g(r) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{GM}{r} \right) = \frac{GM}{r^2}. \quad (3.32)$$

2.- *Que el punto se encuentre en el interior de un estrato E_k ($R_k \geq r \geq R'_k$), tal que $0 \leq k \leq n$.*

Derivando parcialmente el potencial $V_k(r)$ con respecto a r , tendremos:

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_{i=0}^{k-1} V_0(E_i) \right] = 0. \quad (3.33)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_{i=k+1}^n V_e(E_i) \right] = -\sum_{i=k+1}^n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Gm_i}{r} \right) = \sum_{i=k+1}^n \frac{Gm_i}{r^2}. \quad (3.34)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} V_e(E_c) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Gm_c}{r} \right) = \frac{Gm_c}{r^2}. \quad (3.35)$$

Por último, derivando el término $V_i(E_k)$, después de efectuar algunas simplificaciones, se obtiene

$$-\frac{\partial}{\partial r} V_i(E_k) = \frac{4\pi GH}{3r^2} \left[r^3 \left(w_k(r) + \frac{A_k}{3} \right) - R'_k{}^3 \left(w'_k + \frac{A_k}{3} \right) \right], \quad (3.36)$$

en donde podemos reconocer la función

$$\Theta_k(r, R'_k) = r^3 \left(w_k(r) + \frac{A_k}{3} \right) - R'_k{}^3 \left(w'_k + \frac{A_k}{3} \right) \quad (3.37)$$

como perteneciente a la masa del substrato inferior $m_k(r, R'_k) = \frac{4}{3}\pi H \Theta_k(r, R'_k)$, limitado por las superficies esféricas de radios r y R'_k .

En consecuencia, tendremos

$$-\frac{\partial}{\partial r} V_i(E_k) = G \frac{m_k(r, R'_k)}{r^2}. \quad (3.38)$$

Sumando los resultados de las ecuaciones (3.33), (3.34), (3.35) y (3.38), tendremos finalmente

$$g_k(r) = \frac{G}{r^2} \left[m_k(r, R'_k) + \sum_{i=k+1}^n m_i + m_c \right] = G \frac{M_k(r, 0)}{r^2}, \quad (3.39)$$

donde $M_k(r, 0)$ es la masa total que encierra la superficie esférica de radio r , como era de esperar.

3.- Que el punto $P(r)$ sea interior a la esfera R_c ($R_c \geq r \geq 0$).

En este caso, tendremos

$$g_c(r) = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_{i=0}^n V_0(E_i) + V_i(E_c) \right] = \frac{4}{3} \pi G H w_c r, \quad (3.40)$$

o bien, siguiendo la nomenclatura anterior, podemos escribir

$$g_c(r) = G \frac{m_c(r, 0)}{r^2}, \quad (3.41)$$

siendo $m_c(r, 0) = \frac{4}{3} \pi H \Theta_c(r, 0)$ la masa que encierra la esfera de radio $r \leq R_c$, y donde $\Theta_c(r, 0) = w_c r^3$.

Podemos comprobar que la función gravedad presenta discontinuidades de 2ª especie en las superficies de separación de los estratos, cumpliéndose, en general

$$g(R_0) = g_0(R_0), \quad g_k(R'_k) = g_{k+1}(R_{k+1}), \quad g_n(R'_n) = g_c(R_c)$$

3.5 Campo hidrostático de presiones

Para poder calcular la distribución de presiones en el interior de la Tierra, aplicaremos la condición hidrostática de equilibrio

$$dp = \rho dV = \rho \frac{\partial V}{\partial r} dr = -\rho g dr \quad (3.42)$$

tal como han hecho otros autores.

En esencia, la aplicación de esta condición está basada en un supuesto enfriamiento secular de una Tierra inicialmente fluida, de lo que existen pruebas que lo justifican y entre las cuales figura, como más importante, el hecho de que en el núcleo externo las ondas S, de cizalladura, no se transmiten, por lo que se considera que la materia, en dicho estrato, se encuentra en estado fluido.

En cualquier caso, nuestro interés en aplicar dicha condición reside en la comprobación de que los desarrollos matemáticos derivados de ella son muy didácticos

y exclusivamente analíticos, y que los resultados obtenidos son coherentes, como veremos.

Según esto, la presión $p(r)$ vendrá dada por la integral

$$p(r) = - \int \rho(r)g(r)dr + cte.$$

3.5.1 Cálculo de la presión

Presión en un punto situado en el interior de un estrato E_k ($R_k \geq r \geq R'_k$), tal que $0 \leq k \leq n$.

En este caso, tendremos

$$p_k(r) = - \int \rho(r)g(r)dr + C_k = -HG \int \frac{w_k(r)}{r^2} \left[m_k(r, R'_k) + \sum_{i=k+1}^n m_i + m_c \right] dr + C_k \quad (3.43)$$

Sustituyendo $w_k(r)$ y $m_k(r, R'_k)$ por sus expresiones y reordenando términos, se obtiene un conjunto de integrales inmediatas de funciones tales como $\frac{\ln r}{r^2}$, $r \ln r$, resolubles por la fórmula (3.3), e integrales del tipo $r \ln^2 r$, por medio de la igualdad

$$\int x^m \ln^2 x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[\ln^2 x - \frac{2 \ln x}{m+1} + \frac{2}{(m+1)^2} \right],$$

válida para todo entero $m \neq -1$. Después de una simplificación laboriosa, se llega a la ecuación

$$p_k(r) = H[w_k(r) - A_k]rg_k(r) - 2\pi Gw_k^2(r)r^2 + C_k \quad (3.44)$$

Finalmente, introduciendo la densidad $\rho_k(r) = Hw_k(r)$, se obtiene

$$p_k(r) = \rho_k(r)g_k(r)r - HA_k g_k(r)r - 2\pi G\rho_k^2(r)r^2 + C_k \quad (3.45)$$

El valor de la constante C_k se fijará por medio de las condiciones de contorno que se impongan en las superficies de separación de los estratos.

Por ejemplo, sabemos que en la superficie del manto superior ($k = 0$), la presión $p_0(R_0)$ es de una atmósfera, y tendremos

$$p_0(R_0) = \rho_0(R_0)g_0(R_0)R_0 - HA_0 g_0(R_0)R_0 - 2\pi G\rho_0^2(R_0)R_0^2 + C_0.$$

Despejando C_0 en esta igualdad y sustituyendo su expresión en la ecuación (3.45), para $k = 0$, resultará

$$p_0(r) = p_0(R_0) + p_{01}(r) + p_{02}(r) + p_{03}(r),$$

donde

$$\begin{aligned} p_{01}(r) &= 2\pi G \left[\rho_0^2(R_0)R_0^2 - \rho_0^2(r)r^2 \right], \\ p_{02}(r) &= HA_0 [g_0(R_0)R_0 - g_0(r)r], \\ p_{03}(r) &= \rho_0(r)g_0(r)r - \rho_0(R_0)g_0(R_0)R_0. \end{aligned}$$

Para un punto interior a la esfera de radio R_c ($0 \leq r \leq R_c$), tendremos

$$p(r) = - \int \rho_c g_c(r) dr = -\frac{2}{3}\pi G \rho_c^2 r^2 + C_c.$$

de manera que, si es conocida la presión $p(R_c)$, será

$$C_c = p(R_c) + \frac{2}{3}\pi G \rho_c^2 R_c^2,$$

y por tanto, la presión en un punto cualquiera $Q(r)$, vendrá dada por la igualdad

$$p(r) = p(R_c) + \frac{2}{3}\pi G \rho_c^2 (R_c^2 - r^2).$$

3.5.2 Variación de la densidad con respecto a la presión

Si tenemos en cuenta que, según la ecuación (3.42), se verifica

$$\left(\frac{dp}{dr} \right)_i = -\rho_i(r) g_i(r), \quad \left(\frac{dr}{dp} \right)_i = -\frac{1}{\rho_i(r) g_i(r)},$$

y que

$$\left(\frac{d\rho}{dr} \right)_i = \frac{d}{dr} [H w_i(r)] = -\frac{H A_i}{r} = -\frac{a_i}{r}, \quad (3.46)$$

resultará que la variación de la densidad con respecto a la presión, viene dada por la relación

$$\left(\frac{d\rho}{dp} \right)_i = \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_i \left(\frac{dr}{dp} \right)_i = \frac{a_i}{\rho_i(r) g_i(r) r} = \frac{A_i}{v_i(r) g_i(r)}. \quad (3.47)$$

De esta forma, una vez conocidas las constantes A_i, B_i, H , podremos observar cómo varía la densidad con la presión.

3.5.3 Módulo de compresibilidad

El módulo de elasticidad de volumen, también denominado volumétrico o de compresibilidad κ , mide la resistencia que presentan los sólidos o los líquidos a cambiar de volumen ν . Suele definirse en la forma

$$\kappa = -\frac{\delta p}{\delta \nu / \nu} = -\nu \frac{\partial p}{\partial \nu} \quad (3.48)$$

siendo $\delta\nu/\nu$ la defomación volumétrica producida por una variación δp de la presión.

Considerando la conservación de la masa en dicho volumen, podemos escribir

$$\rho d\nu + \nu d\rho = 0,$$

por lo que el módulo κ puede definirse también en la forma

$$\kappa = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (3.49)$$

Utilizando ahora la igualdad (3.47), el módulo de compresibilidad para cada estrato, se puede expresar como

$$\kappa_i(r) = \frac{\rho_i(r) v_i(r) g_i(r)}{A_i} = \frac{\rho_i^2(r) g_i(r) r}{a_i} \quad (3.50)$$

3.5.4 Variación del módulo de compresibilidad

De acuerdo con la fórmula anterior, para cualquier estrato podemos escribir en general

$$\kappa = \frac{\rho v g}{A}.$$

Por otra parte, si derivamos esta ecuación con respecto a p y tenemos en cuenta la igualdad (3.47), resulta

$$\frac{d\kappa}{dp} = \frac{d\kappa}{d\rho} \frac{d\rho}{dp} = \frac{A}{vg} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho v g}{A} \right) = 1 + \frac{\rho dv}{v d\rho} + \frac{\rho dg}{g d\rho}. \quad (3.51)$$

Basta recordar las igualdades $\rho = Hw$, $v = rw$, $w = B - A \ln r$ y $g = \frac{GM(r, 0)}{r^2}$, para obtener las siguientes derivadas

$$\frac{dr}{d\rho} = -\frac{r}{AH} = -\frac{v}{A\rho}, \quad (3.52)$$

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{d\rho} = -\frac{v(w - A)}{A\rho} = \left(1 - \frac{w}{A}\right) \frac{v}{\rho}, \quad (3.53)$$

$$\frac{dg}{d\rho} = \frac{dg}{dr} \frac{dr}{d\rho} = -\left(4\pi G\rho - \frac{2g}{r}\right) \frac{v}{A\rho} = \frac{2gw}{A\rho} - \frac{4\pi Gv}{A}. \quad (3.54)$$

Sustituyendo ahora las dos últimas derivadas en la igualdad (3.51), resulta que para cualquier estrato E_i , tendremos finalmente

$$\left(\frac{d\kappa}{dp}\right)_i = 2 + \frac{\rho_i(r)}{a_i} - 4\pi G \frac{\kappa_i(r)}{g_i^2(r)}. \quad (3.55)$$

Capítulo 4

Estudio global del manto

4.1 Cálculo de constantes del manto por mínimos cuadrados

El manto es posiblemente la región que ha sido más estudiada, comprobándose que presenta una estratificación muy compleja, especialmente en sus primeros 1.000 km. Por eso, muchos investigadores se han visto abocados a subdividir el manto en nueve o más estratos con el fin de obtener unos errores mínimos en las fases \mathcal{P} y \mathcal{S} . Por ejemplo, el modelo SP6, de Morelli y Dziewonski (1993), divide la Corteza terrestre en dos subestratos, el manto superior en tres, una zona de transición en dos y un manto inferior en dos, consiguiendo con ello unos errores inmejorables para la fase \mathcal{P} , del orden de ± 0.1 segundos.

Aunque también nosotros podríamos ajustar la distribución de velocidades del modelo SP6 a nuestra función $v(r)$ y conseguir así parecidos resultados, hemos preferido, en aras de una mayor claridad y simplificación, dividir el manto en dos regiones y ajustar la función $v(r)$ por un método directo que veremos a continuación.

El método que será aplicado a las dos subregiones del manto limitadas por los radios R_0, R'_0 y R_1, R'_1 , consiste en ir mejorando valores previos A_0, w_0 y A_1, w_1 por iterativas aplicaciones del método de mínimos cuadrados que permiten la obtención de correcciones sucesivas de $(\delta A_0, \delta w_0)$ y $(\delta A_1, \delta w_1)$, hasta obtener una gran concordancia con datos observados para Δ y T , que son suministrados, entre otras, por las siguientes tablas: H. Jeffreys y K.E. Bullen (1958), E. Herrin et al. (1968) y M.J. Randall (1971).

En lo que sigue, se suponen verificadas las siguientes igualdades:

$$R'_0 = R_1, \quad w_0 = B_0 - A_0 \ln R_0, \quad w'_0 = w_1 = B_1 - A_1 \ln R_1, \quad I'_0 = I_1.$$

Cálculo de las constantes A_0 , w_0 , del manto superior.

En este caso, poniendo

$$\delta_0 = \frac{1}{2}A_0\Delta_0, \quad \tau_0 = \frac{1}{2}A_0T_0,$$

según (2.15), tendremos

$$\delta_0 = w_0 \sinh \tau_0.$$

Por tanto, si disponemos de unos valores previos A_0^o , w_0^o y de un conjunto de datos $\Delta_0^{(i)}$, $T_0^{(i)}$ para ondas \mathcal{P} o \mathcal{S} , podemos calcular el conjunto de valores que toma la función

$$y_0^{(i)} = w_0^o \sinh \tau_0^{(i)} - \delta_0^{(i)},$$

donde

$$\delta_0^{(i)} = \frac{1}{2}A_0^o\Delta_0^{(i)}, \quad \tau_0^{(i)} = \frac{1}{2}A_0^oT_0^{(i)},$$

En general, los valores obtenidos para $y_0^{(i)}$ serán distintos de cero. Por consiguiente, si desarrollamos en serie la función $y^{(i)}$ en el entorno de $y_0^{(i)}$, tendremos

$$y^{(i)} = y_0^{(i)} + a_0^{(i)}\delta A_0^o + b_0^{(i)}\delta w_0^o + \dots = 0,$$

donde los coeficientes $a_0^{(i)}$, $b_0^{(i)}$ son calculados por las derivadas parciales de la función $y^{(i)}$ con respecto a las variables A_0 y w_0 . Es decir

$$a_0^{(i)} = \frac{1}{A_0^o} \left(w_0^o \tau_0^{(i)} \cosh \tau_0^{(i)} - \delta_0^{(i)} \right), \quad b_0^{(i)} = \sinh \tau_0^{(i)}, \quad c_0^{(i)} = -y_0^{(i)}.$$

En consecuencia, tendremos un conjunto de ecuaciones del tipo

$$a^{(i)}\delta A_0^o + b^{(i)}\delta w_0^o = c^{(i)} \tag{4.1}$$

que pueden ser tratadas por el método de mínimos cuadrados y conducirán a un sistema de ecuaciones normales

$$\begin{aligned} [11]\delta A_0^o + [12]\delta w_0^o &= c_1 \\ [21]\delta A_0^o + [22]\delta w_0^o &= c_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde

$$\begin{aligned} [11] &= \sum_i \left(a^{(i)} \right)^2, & [22] &= \sum_i \left(b^{(i)} \right)^2, & [12] &= [21] = \sum_i a^{(i)} b^{(i)}, \\ c_1 &= \sum_i a^{(i)} c^{(i)}, & c_2 &= \sum_i b^{(i)} c^{(i)}. \end{aligned}$$

Una vez resuelto este sistema, tendremos valores de A_0 y w_0 más aproximados por medio de las igualdades

$$A_0 = A_0^o + \delta A_0^o, \quad w_0 = w_0^o + \delta w_0^o.$$

El proceso es evidentemente iterativo, de tal manera que puede repetirse hasta que las diferencias δA_0 , δw_0 sean inferiores a un número prefijado.

Este proceso ha sido aplicado a un conjunto de distancias epicentrales incluidas en el intervalo $(0^\circ, 40^\circ)$ y tomadas de 0.5° en 0.5° grados sexagesimales.

Concretamente, en el caso de ondas \mathcal{P} , se han considerado los valores iniciales $A_0^o = 5.9 \cdot 10^{-3}$ y $w_0^o = 1.2 \cdot 10^{-3}$ y los datos Δ_0, T_0 tomados del *Bulletin of the Seismological Society of America* (E. Herrin et al., 1968). Análogamente, en el caso de ondas \mathcal{S} , se ha partido de los valores iniciales $A_0^o = 3.4 \cdot 10^{-3}$ y $w_0^o = 6.2 \cdot 10^{-4}$ y los datos Δ_0, T_0 tomados de las *Travel Time Tables for S waves* (M.J. Randall, 1971).

Una vez obtenidos los valores de A_0 y w_0 se han calculado los valores de B_0 por medio de la igualdad $B_0 = w_0 + A_0 \ln R_0$. Los resultados a que hemos llegado, son los siguientes:

Constante	Para ondas \mathcal{P}	Para ondas \mathcal{S}
A_0	$5.91557395629 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	$3.45919016463 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
B_0	$5.29785911433 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$	$3.09234694999 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$
w_0	$1.16102573176 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	$6.22637501038 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

De acuerdo con estos valores de A_0 y w_0 se han construido las tablas 7.1 (para ondas \mathcal{P}) y 7.2 (para ondas \mathcal{S}) que incluyen el ángulo de incidencia I_0 , la distancia epicentral Δ en grados sexagesimales, el tiempo invertido T_c en la transmisión (obtenido por cálculo), el tiempo T_t suministrado por tablas y las diferencias $T_t - T_c$.

Cálculo de las constantes A_1 , w_1 , del manto inferior.

Una vez calculadas las constantes A_0 , w_0 , del manto superior, se puede proceder al cálculo de las constantes A_1 , w_1 , del manto inferior. Para ello, recordemos

las igualdades $w'_0 = w_1$, $I'_0 = I_1$ y designemos, respectivamente, por $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1$ y $T = T_0 + T_1$ la distancia epicentral y el tiempo total invertido, que determina la trayectoria a través de todo el manto (superior e inferior).

Según hemos visto anteriormente, para la trayectoria incidente, tendremos

$$\begin{aligned}\Delta'_0 &= \frac{1}{A_0\alpha}(\cos I_0 - \cos I_1), & \Delta_1^{(m)} &= \frac{1}{A_1\alpha} \cos I_1, \\ T'_0 &= \frac{1}{A_0} \left(\ln \tan \frac{I_1}{2} - \ln \tan \frac{I_0}{2} \right), & T_1^{(m)} &= -\frac{1}{A_1} \ln \tan \frac{I_1}{2}.\end{aligned}$$

Por tanto, si ponemos $A = (A_0 - A_1)/A_1$, obtendremos

$$\begin{aligned}\Delta^{(m)} &= \frac{1}{A_0\alpha}(\cos I_0 + A \cos I_1), \\ T^{(m)} &= -\frac{1}{A_0} \left(\ln \tan \frac{I_0}{2} + A \ln \tan \frac{I_1}{2} \right).\end{aligned}\tag{4.3}$$

En resumen, las ecuaciones que definen la trayectoria a través de todo el manto son las siguientes:

$$w_1 \operatorname{sen} I_0 = w_0 \operatorname{sen} I_1,\tag{4.4}$$

$$\delta = \frac{1}{2}A_0\Delta = \frac{w_0(\cos I_0 + A \cos I_1)}{\operatorname{sen} I_0},\tag{4.5}$$

$$\tau = \frac{1}{2}A_0T = -\ln \tan \frac{I_0}{2} - A \ln \tan \frac{I_1}{2}.\tag{4.6}$$

Poniendo $w^2 = w_1^2 - w_0^2$, y $D^2 = \delta^2 + w^2(A^2 - 1)$, la eliminación del ángulo I_1 entre (4.4) y (4.5) permite despejar el valor positivo de I_0 en la forma

$$\tan I_0 = w_0 \frac{\delta + AD}{D^2 + w^2}.\tag{4.7}$$

Supongamos ahora que disponemos de unos valores previos A^o , w^o , de A , w , y de unas cantidades $\delta^{(i)}$, $\tau^{(i)}$ dadas por tablas. Entonces podremos calcular el valor positivo de D , el valor de I_0 por (4.7), el ángulo I_1 por (4.4) y el de $\tau^{(i)}$ por (4.6). En estas condiciones, la función

$$y^{(i)} = \tau^{(i)} + \ln \tan \frac{I_0}{2} + A^o \ln \tan \frac{I_1}{2},\tag{4.8}$$

deducida de (4.6) será en general distinta de cero. Por consiguiente, si desarrollamos la función $y = \tau + \ln \tan \frac{I_0}{2} + A \ln \tan \frac{I_1}{2}$ en el entorno de valores A^o , w^o y suponemos que $A = A^o + \delta A^o$, $w = w^o + \delta w^o$ son valores más probables de dichas constantes, el método de mínimos cuadrados podrá ser aplicado al conjunto de ecuaciones

$$\left(\frac{\partial y^{(i)}}{\partial A} \right)_o \delta A^o + \left(\frac{\partial y^{(i)}}{\partial w} \right)_o \delta w^o + y^{(i)} = 0\tag{4.9}$$

de cada uno de los datos suministrados por tablas para obtener los incrementos δA° y δw° .

El cálculo de las derivadas parciales de la función $y^{(i)}$, contenidas en la igualdad (4.9) se hará teniendo en cuenta que los ángulos I_0 e I_1 dependen de A y w y que las funciones δ y τ tienen derivadas nulas.

Después de algunas simplificaciones, los resultados obtenidos son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_0}{\partial A} &= \frac{w_0}{D} \cos^2 I_1, \\
\frac{\partial I_0}{\partial w} &= -\frac{wA}{w_0 D} \operatorname{sen}^2 I_0, \\
\frac{\partial I_1}{\partial A} &= \frac{w_1}{D} \cos I_0 \cos I_1, \\
\frac{\partial I_1}{\partial w} &= \frac{w \operatorname{sen} I_0}{w_0 \cos I_1} \left(\frac{1}{w_1} - \frac{Aw_1 \operatorname{sen} 2I_0}{2w_0 D} \right), \\
\frac{\partial y}{\partial A} &= \frac{1}{\operatorname{sen} I_0} \frac{\partial I_0}{\partial A} + \frac{A}{\operatorname{sen} I_1} \frac{\partial I_1}{\partial A} + \ln \tan \frac{I_1}{2}, \\
\frac{\partial y}{\partial w} &= \frac{1}{\operatorname{sen} I_0} \frac{\partial I_0}{\partial w} + \frac{A}{\operatorname{sen} I_1} \frac{\partial I_1}{\partial w}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial A} &= \ln \tan \frac{I_1}{2} + \frac{w_0 \cos I_1}{D \operatorname{sen} I_0} (A \cos I_0 + \cos I_1), \\
\frac{\partial y}{\partial w} &= \frac{Aw}{w_1 \cos I_1} \left[\frac{1}{w_1} - \frac{\operatorname{sen} I_1}{D} (A \cos I_0 + \cos I_1) \right],
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Sustituyendo estas expresiones de las derivadas parciales en las ecuaciones (4.9) obtendremos, para cada uno de los datos suministrados por tablas, un conjunto de ecuaciones que pueden ser tratadas por mínimos cuadrados y resueltas con respecto a los incrementos δA° y δw° . De la misma forma que en el caso anterior, el proceso es iterativo, hasta que los incrementos obtenidos sean inferiores a pequeños valores prefijados.

El proceso descrito ha sido aplicado a distancias epicentrales del intervalo $(40^\circ, 100^\circ)$, tomadas de $0^\circ.5$ en $0^\circ.5$. Para ondas \mathcal{P} , con valores iniciales $A^\circ = 0.46$, $w^\circ = 1.6 \cdot 10^{-3}$ y datos (Δ, T) extraídos del *Bulletin of the Seismological Society of America* (E. Herrin et al., 1968), y para ondas \mathcal{S} , con valores iniciales $A^\circ = 0.73$, $w^\circ = 9.5 \cdot 10^{-4}$, y datos (Δ, T) extraídos de las *Travel Time Tables for S waves* (M.J. Randall, 1971).

Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

Constante	Para ondas \mathcal{P}	Para ondas \mathcal{S}
A_1	$4.01993327787 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	$1.99145018196 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
w_1	$2.003644445639 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	$1.13889542829 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

Con ayuda de estas constantes se puede calcular el radio R_1 que separa ambas regiones del manto por medio de la fórmula (2.11), esto es

$$R_1 = R_0 \exp \left[\frac{w_0 - w_1}{A_0} \right],$$

y la constante $B_1 = w_1 + A_1 \ln R_1$ para ambos tipos de ondas. El cálculo de dichas constantes establece los siguientes resultados:

Constante	Para ondas \mathcal{P}	Para ondas \mathcal{S}
R_1	5.525'2036 km	5.487'7504 km
B_1	$3.66437125273 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$	$1.82858265398 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

La ostensible diferencia de radios $R_{1p} - R_{1s} = 37.5 \text{ km.}$, que se obtiene para ondas \mathcal{P} y ondas \mathcal{S} , es debida a la extracción de datos de diferentes tablas. Hubiésemos preferido calcular las constantes de las ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} extrayendo los datos de una misma fuente, pero esto nos fue imposible. Las tablas de E. Herrin no disponen de datos de ondas \mathcal{S} y las de M.J. Randall de ondas \mathcal{P} . Las tablas de Jeffreys y Bullen (1958), aun siendo más completas, no las utilizamos por su antigüedad, aunque siguen estando en vigor para referenciar todos los modelos.

4.2 Ondas \mathcal{PcP} y \mathcal{ScS} . Radio del núcleo externo

La formulación correspondiente a las ondas \mathcal{PcP} y \mathcal{ScS} , que atraviesan el manto (superior e inferior) y se reflejan en la superficie del núcleo externo, puede esquematizarse en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\Delta^{(m)} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cos I_0 - \cos I'_0}{A_0} + \frac{\cos I_1 - \cos I'_1}{A_1} \right), \\ T^{(m)} &= \frac{1}{A_0} \ln \left[\frac{\tan \frac{I'_0}{2}}{\tan \frac{I_0}{2}} \right] + \frac{1}{A_1} \ln \left[\frac{\tan \frac{I'_1}{2}}{\tan \frac{I_1}{2}} \right].\end{aligned}\quad (4.12)$$

o también

$$\begin{aligned}\delta &= A_0 \Delta^{(m)} = \frac{1}{\alpha} [\cos I_0 + A \cos I_1 - (1 + A) \cos I'_1], \\ \tau &= A_0 T^{(m)} = -\ln \tan \frac{I_0}{2} - A \ln \tan \frac{I_1}{2} + (1 + A) \ln \tan \frac{I'_1}{2}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Se sobreentiende que estas fórmulas proporcionan la distancia epicentral $\Delta^{(m)}$ y el tiempo $T^{(m)}$ correspondientes a la trayectoria incidente, que resulta ser simétrica de la trayectoria emergente, como sabemos.

Evidentemente, para poder utilizarlas necesitamos conocer donde se inicia el núcleo externo, es decir, conocer el valor del radio $R_2 = R'_1$. Una forma sencilla de abordar este problema consiste en calcular el valor de $w'_1 = w_1(R'_1)$ mediante el tiempo T que invierte el rayo axial ($I_0 = 0$) al reflejarse en el núcleo.

Tal elección determina, seguramente, que el error cometido en los cálculos es el más pequeño posible. Según hemos visto en la sección 2.2, para un rayo incidente de ángulo $I_0 = 0$, tenemos:

$$w'_i = w_i \exp(A_i T'_i). \quad (4.14)$$

Por consiguiente, si un rayo atraviesa en estas condiciones los estratos E_0 y E_1 en los tiempos T'_0 y T'_1 , respectivamente, por ser $w'_0 = w_1$, tendremos

$$T'_0 = \frac{1}{A_0} \ln \frac{w_1}{w_0} \quad (4.15)$$

y por tanto, si $T' = T'_0 + T'_1$, resultará

$$w'_1 = w_1 \exp[A_1(T' - T'_0)] \quad (4.16)$$

y finalmente

$$R'_1 = R_2 = R_1 \exp \frac{w_1 - w'_1}{A_1}. \quad (4.17)$$

Aplicando estas igualdades a ondas \mathcal{PcP} , con $I_0 = 0$ y con el tiempo $T' = 255^s.65$, deducido de las tablas sismológicas del *Bulletin* (1968), hemos obtenido los siguientes resultados:

$$T'_0 = 92^s.242, \quad w'_1 = 3.86459673672 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad R_2 = 3477.76192858 \text{ km}$$

Análogamente, utilizando las *Tablas sismológicas* de Jeffreys y Bullen (1958) para ondas \mathcal{ScS} , con $I_0 = 0$ y $T' = 467^s.85$, resulta

$$T'_0 = 174^s.564, \quad w'_1 = 2.0423958711 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad R_2 = 3486.25714643 \text{ km}$$

El hecho de que en las tablas de M.J. Randall no figuren los tiempos para la fase \mathcal{ScS} , nos ha obligado a utilizar los tiempos suministrados por las tablas de Jeffreys y Bullen, con los cuales hemos obtenido tan sólo una pequeña diferencia de 8.5 km entre los radios R_{2p} y R_{2s} .

Insistiendo en estas cuestiones, un análisis detallado de los resultados del manto nos ha hecho ver que no es aconsejable utilizar distintas fuentes de información. Por lo cual, teniendo presente que todas las constantes halladas para las ondas \mathcal{P} se han deducido de la misma fuente (*Bulletin*, 1968), a partir de ahora consideraremos que el radio del núcleo externo es el que se deduce de la transmisión de dichas ondas, por lo que el nuevo valor de w'_1 para las ondas \mathcal{S} , será

$$w'_{1s} = B_{1s} - A_{1s} \ln R_2 = 2.0472545055 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

4.3 Ondas \mathcal{PcS} y \mathcal{ScP}

Como quedó especificado en la nomenclatura de los distintos tipos de ondas, las ondas \mathcal{PcS} y \mathcal{ScP} son ondas convertidas tras su reflexión en el núcleo externo. Su cálculo es análogo al anterior, si bien hay que tener en cuenta en la formulación, el cambio que se produce al considerar la trayectoria incidente y la trayectoria emergente. De acuerdo con esto, las fórmulas (4.13) se escribirán ahora

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{A_0} [\cos I_0 + A \cos I_1 - (1 + A) \cos I'_1] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{A_{0s}} [\cos I_{0s} + A_s \cos I_{1s} - (1 + A_s) \cos I'_{1s}] \right) \\ T &= \frac{1}{A_0} \left[-\ln \tan \frac{I_0}{2} - A \ln \tan \frac{I_1}{2} + (1 + A) \ln \tan \frac{I'_1}{2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{A_{0s}} \left[-\ln \tan \frac{I_{0s}}{2} - A_s \ln \tan \frac{I_{1s}}{2} + (1 + A_s) \ln \tan \frac{I'_{1s}}{2} \right] \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.4 Resultados y análisis del manto

El conocimiento de las constantes $A_0, B_0, w_0, A_1, B_1, w_1$, y los valores de los radios R_0, R_1, R_2 , para ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} , han permitido la construcción de las tablas 7.3 y 7.4 (para ondas \mathcal{P}) y 7.5 y 7.6 (para ondas \mathcal{S}).

Para la construcción de las tablas 7.3 y 7.4, en el manto superior, hemos calculado el ángulo $I_0 = 35^\circ.4123$, que corresponde al ángulo $I'_0 = 90^\circ$ del rayo tangente a la esfera de radio R_1 y que determina una distancia epicentral $\Delta_0 = 31^\circ.6326$. A partir de aquí se han calculado, para el intervalo de distancias epicentrales $(0^\circ, 31^\circ.6326)$, los valores de

$$\delta = \frac{A_0 \Delta}{2}, \quad \tau = \arg \sinh \left(\frac{\delta}{w_0} \right), \quad T = \frac{2\tau}{A_0}.$$

En el manto inferior, se ha determinado el valor

$$I_0 = \arcsin \left(\frac{w_0}{w'_1} \right) = 17^\circ.4832,$$

del rayo tangente a R_2 , que corresponde a una distancia epicentral $\Delta = 101^\circ.5901$, calculando para el intervalo $(31^\circ.6326, 101^\circ.5901)$ de distancias epicentrales, los valores correspondientes de $\delta, D, I_0, I_1, \tau$ y T .

La estructura de las tablas 7.3, 7.4, 7.5 y 7.6 es análoga a la de las tablas 7.1 y 7.2, si bien en ellas se han incluido, además, los valores del radio $r_m = r(P_m)$, $z_m = R_0 - r_m$, $v_m = v(r_m)$ y $w_m = w(r_m)$, donde P_m designa el punto de mayor profundidad de la trayectoria.

La tabla 7.7 (para ondas \mathcal{PcP}) incluye, para el intervalo $(0^\circ, 17^\circ.4832)$ de valores iniciales de los ángulos I_0 , y el intervalo $(0^\circ, 101^\circ.5901)$ de distancias epicentrales Δ , las diferencias $T_{Bull} - T_c$ entre los tiempos que figuran en las tablas del Bulletin y los tiempos calculados en nuestro modelo, en tanto que la tabla 7.8 (para ondas \mathcal{ScS}) lo hace para el intervalo $(0^\circ, 17^\circ.7060)$ de valores iniciales I_{0S} y el intervalo $(0^\circ, 106^\circ.1417)$ de distancias epicentrales Δ . Las diferencias $T_t - T_c$ se han omitido en este caso, al no disponer de tiempos para esta fase las tablas de Randall.

Finalmente, señalemos que los idénticos resultados obtenidos para las ondas \mathcal{PcS} y \mathcal{ScP} , que corresponden al intervalo $(0^\circ, 17^\circ.4832)$ de valores iniciales I_0 y al intervalo $(0^\circ, 64^\circ.7469)$ de distancias epicentrales, están incluidos en la tabla 7.9.

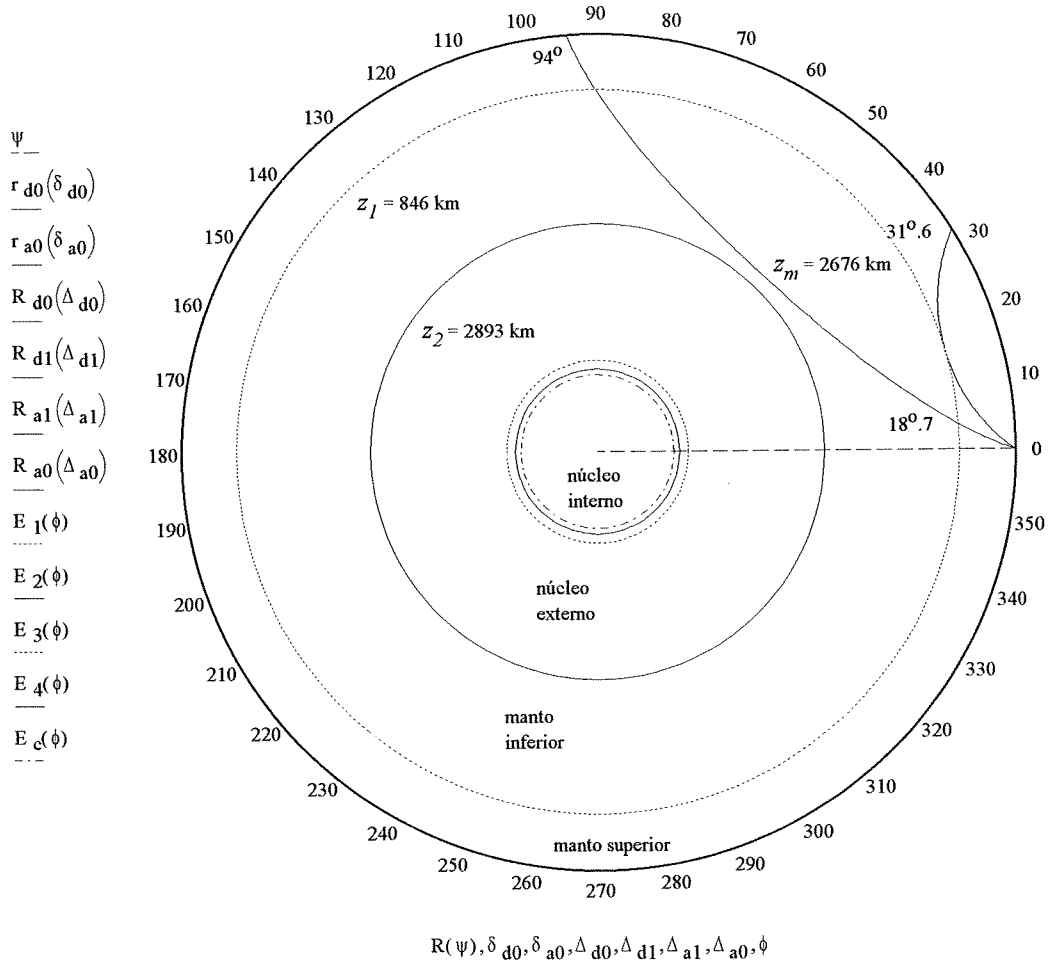


Figura 4.1: Trayectorias sísmicas de ondas \mathcal{P} : Una tangente a R_1 y otra atravesando el manto inferior.

Utilizando la formulación general que hemos diseñado para la transmisión de ondas sísmicas, en la figura 4.1 hemos representado el recorrido que realizan dos ondas a través del manto. Una a través del manto (superior e inferior) y otra tangente a la superficie de separación (R_1) entre ambos mantos.

En las figuras 4.2 y 4.3, se han representado las curvas que determinan las diferencias existentes entre los tiempos $T(\Delta)$ que son suministrados por las tablas de E. Herrin et al. (1968), T_{Bull} , y las tablas de M.J. Randall (1971), T_{Rand} , que hemos utilizado, y los tiempos T_c calculados por nosotros para ondas \mathcal{P} y ondas \mathcal{S} , respectivamente.

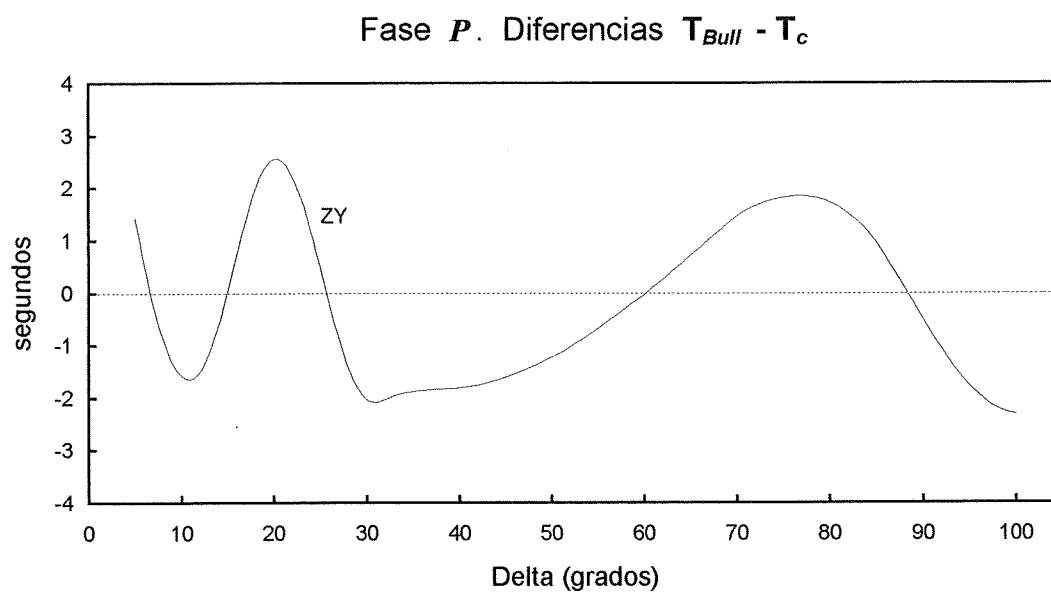


Figura 4.2: Fase P: Diferencias $T_{Bull} - T_c$ en función de Δ .

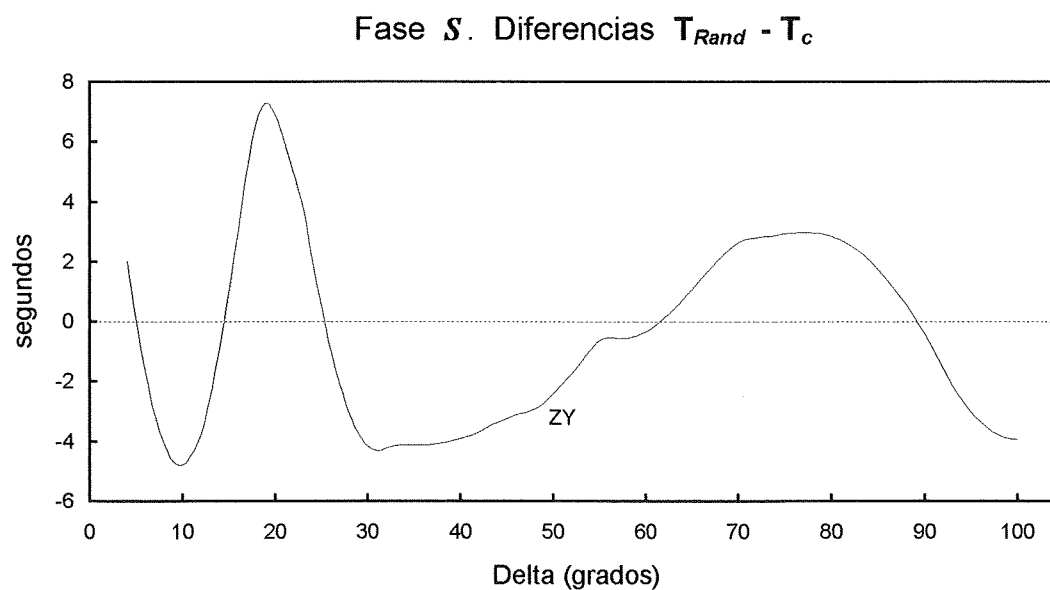


Figura 4.3: Fase S: Diferencias $T_{Rand} - T_c$ en función de Δ .

En ellas se observa no sólo la buena distribución de dichas diferencias con respecto al cero, sino también la continuidad de las curvas cuando se pasa del manto superior al inferior en la unión, para $\Delta = 31^{\circ}.6$, entre ambos mantos.

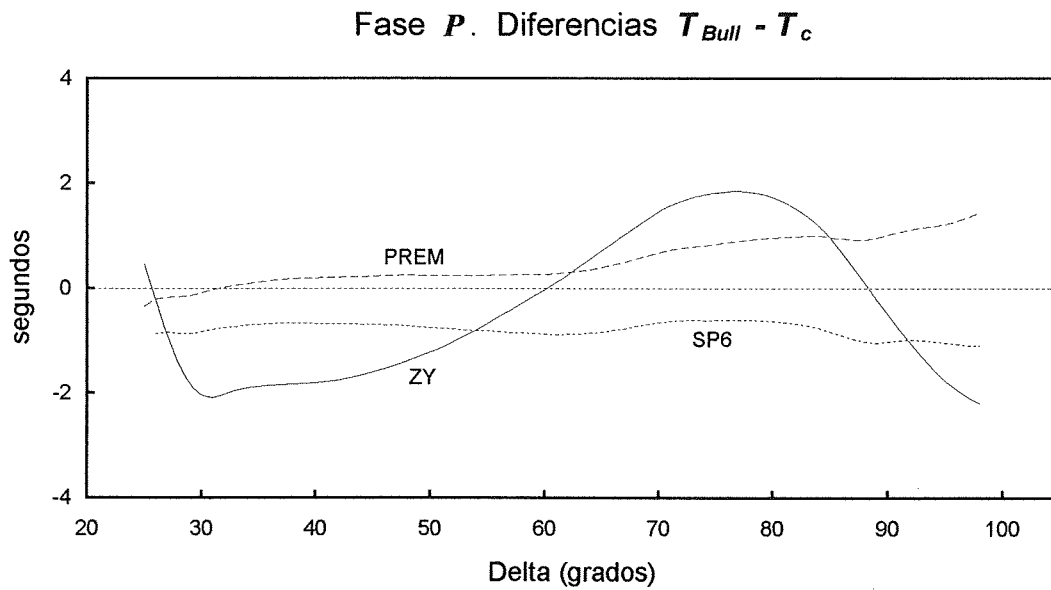


Figura 4.4: Fase \mathcal{P} . Diferencias $T_{Bull} - T_c$, en función de Δ para los modelos PREM, SP6 y ZY.

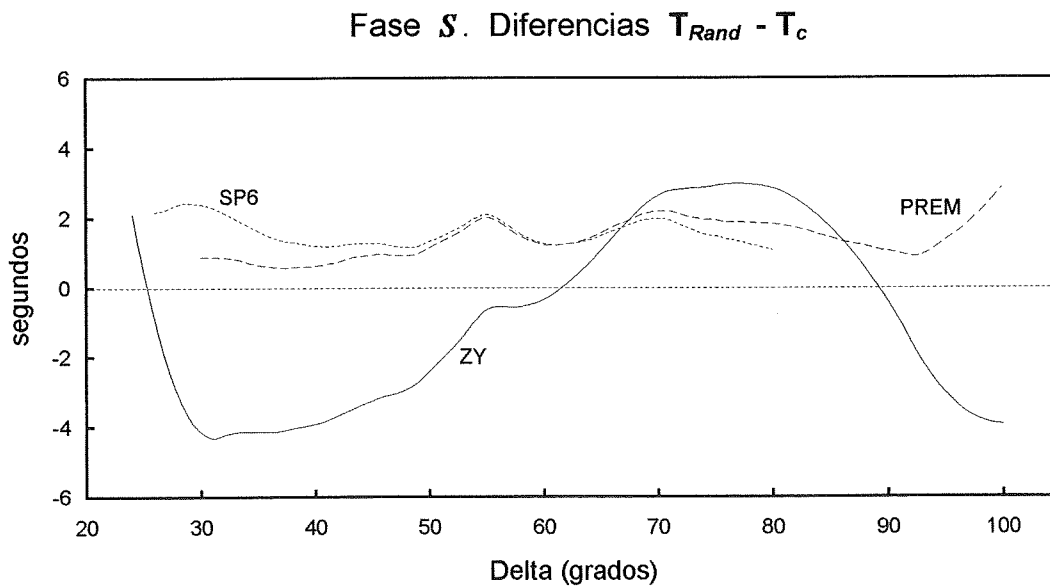


Figura 4.5: Fase \mathcal{S} . Diferencias $T_{Rand} - T_c$, en función de Δ para los modelos PREM, SP6 y ZY.

Para la fase \mathcal{P} obtenemos diferencias máximas de 2 segundos en la práctica totalidad del rango de Δ ($5^\circ - 96^\circ$), con un máximo de 2.5 segundos en $\Delta = 20^\circ$.

En la fase \mathcal{S} estas diferencias se acentúan especialmente para las trayectorias que recorren el manto superior, en tanto que las diferencias máximas para las trayectorias que atraviesan el manto inferior son de 4 segundos.

Por otra parte, es interesante comparar los resultados de nuestro modelo ZY con los de otros conocidos modelos publicados recientemente: El PREM isotrópico de Dziewonski - Anderson (1981) y el SP6 de Morelli - Dziewonski (1993).

En las figuras 4.4 y 4.5, hemos representado para las fases \mathcal{P} y \mathcal{S} , respectivamente, las diferencias de tiempos existentes entre los datos suministrados por los modelos PREM, SP6, ZY y por las tablas empíricas (Herrin et al. y Randall) que hemos utilizado, restringiéndonos al rango de distancias epicentrales Δ que ellos consideran válidas para sus modelos.

En la figura 4.4 (Fase \mathcal{P}) se observa la buena distribución de las diferencias obtenidas con nuestro modelo, que oscilan entre ± 2 segundos, así como la separación existente entre las curvas de los modelos PREM y SP6, que comienzan con una separación aproximada de 1 s y van aumentando hasta unos 2 s a medida que Δ crece. El motivo de esta separación proviene de los distintos criterios adoptados para asignar un valor a los tiempos $T_0(\Delta)$ considerados como observados, que servirán posteriormente para calcular los tiempos $T_c(\Delta)$ de cada modelo por el método de inversión.

De hecho, para cada distancia epicentral, suele disponerse de miles de tiempos distintos que han sido observados y que presentan diferencias que oscilan entre ± 4 segundos para la fase \mathcal{P} , en tanto que para la fase \mathcal{S} se registran variaciones de hasta ± 8 segundos. Por tanto, la forma de determinar el tiempo que se va a utilizar como dato de tiempo observado $T_0(\Delta)$, influye sensiblemente sobre el cálculo de $T_c(\Delta)$ y sobre las diferencias $T_0 - T_c$ obtenidas.

En el modelo SP6, por ejemplo, Morelli y Dziewonski dibujaron para cada Δ la distribución de frecuencias de tiempos observados tomados de los boletines que edita el ISC (International Seismological Center), obteniendo una distribución de puntos en forma de campana de Gauss sobre la que ajustaron por mínimos cuadrados una curva gaussiana, tomando como criterio de tiempo observado el valor máximo de esta curva. Como otros modelos utilizan criterios distintos para determinar el óptimo valor de tiempo observado, es natural que surjan diferencias entre ellos.

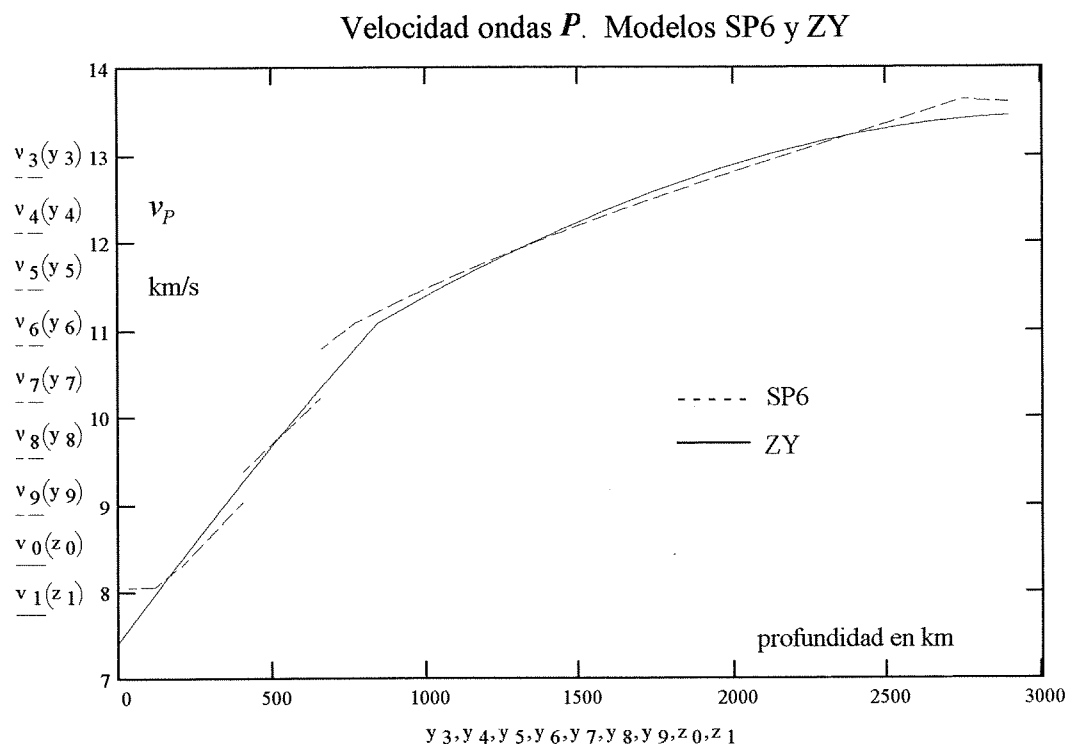


Figura 4.6: Distribución de velocidades de las ondas \mathcal{P} en el manto. Comparación entre los modelos SP6 y ZY.

En la fase \mathcal{S} (Fig. 4.5) podemos detectar que los tiempos de las tablas de M.J. Randall están desfasados 2 segundos con respecto a los tiempos observados como más probables que fueron utilizados en los modelos PREM isotrópico y SP6, de ahí que la curva de nuestro modelo ZY aparezca descentrada con respecto a las curvas de aquellos modelos.

Por otra parte, las pequeñas diferencias $T_0 - T_c$ de ± 0.1 s para la fase \mathcal{P} y de ± 0.9 s para la fase \mathcal{S} , entre los tiempos observados y los calculados por Morelli-Dziewonski en el modelo SP6, nos anima a comparar la distribución de velocidades entre los modelos SP6 y ZY.

En las figuras 4.6 y 4.7 se han representado, para las fases \mathcal{P} y \mathcal{S} , respectivamente, la distribución de velocidades de los modelos SP6 y ZY, si bien en ambas figuras los dos primeros tramos del modelo SP6, entre 0 – 20 km y 20 – 35 km no están representados.

Recordemos que los tiempos obtenidos por inversión en el modelo SP6 han sido ajustados por medio de una división del manto en nueve substratos, lo

que conduce a la existencia de saltos de velocidad, perdiéndose de este modo la continuidad de esta función en el rango de profundidades comprendidas entre 0 y 660 km. Esta circunstancia no se presenta, sin embargo, en nuestro modelo ZY.

Observemos finalmente que la distribución de velocidades en el rango de valores 900-2600 km es muy similar en ambos modelos.

Es de destacar que en la fase S tenemos un máximo de velocidad de 7.123 km/s (ver tabla 7.6) a una profundidad de 2794 km, en tanto que el modelo SP6 fija dicho máximo en la discontinuidad de 2ª especie a una profundidad de 2.741 km, con objeto de disponer de un gradiente negativo para la velocidad del último substrato del manto, consiguiendo así unos tiempos T_c más acordes en el rango $\Delta > 90^\circ$. Aunque el modelo SP6 extiende dicho criterio a la fase P , nuestro modelo no lo detecta en dicha fase.

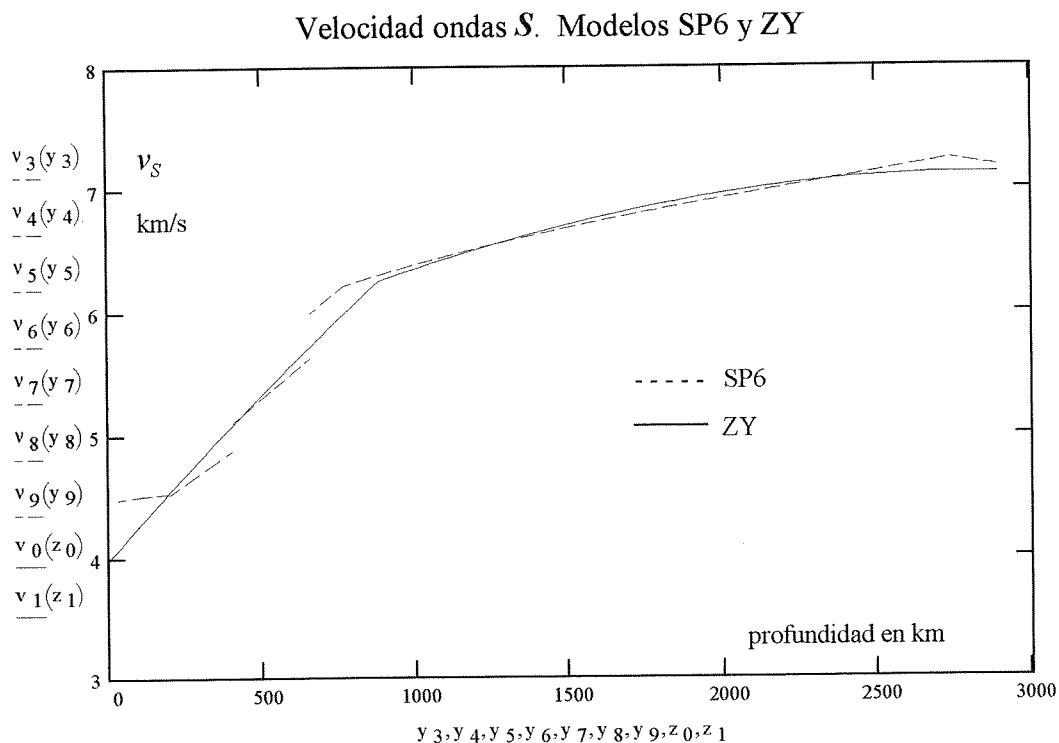


Figura 4.7: Distribución de velocidades de las ondas S en el manto. Comparación entre los modelos SP6 y ZY.

Para comprender mejor la simplicidad de nuestros cálculos de velocidades en el manto, frente a los que se efectúan en el modelo SP6, hemos incluido las tablas

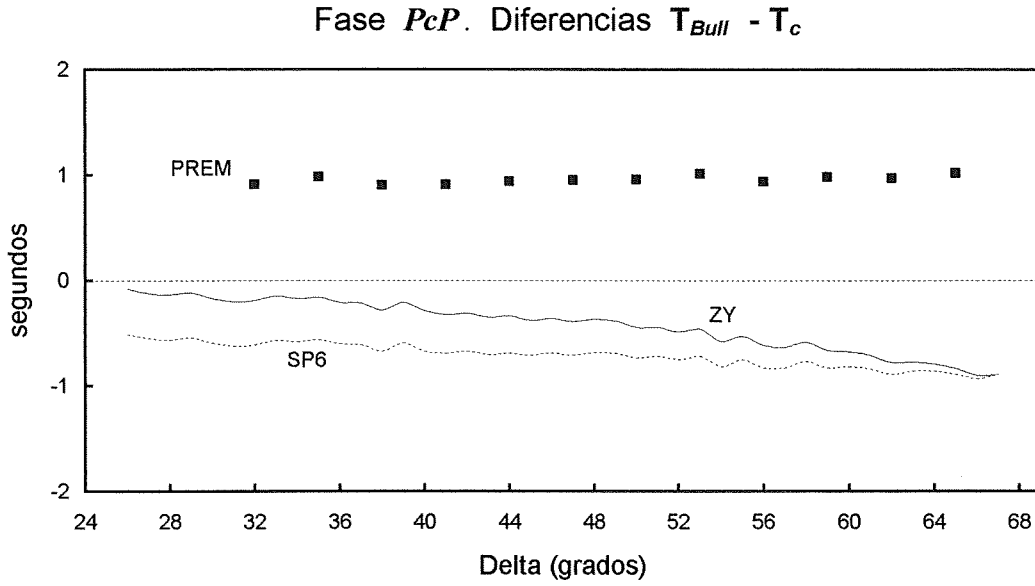


Figura 4.8: Fase PcP : Diferencias $T_{Bull} - T_c$ para los modelos PREM, SP6 y ZY.

4.1 y 4.2 que definen, respectivamente, la forma de calcular en el modelo SP6 y los resultados obtenidos en ambos modelos.

Para ello, digamos lo siguiente:

En el modelo ZY, las velocidades en km/s son calculadas por la fórmula única $v = r(B - A \ln r)$ y el manto es dividido en dos estratos (manto superior E_0 e inferior E_1). Las constantes A , B , toman los valores:

$$B_0 = 5.29786 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad A_0 = 5.91557 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$B_1 = 3.66437 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad A_1 = 4.01993 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

para las ondas \mathcal{P} .

De manera análoga, para las ondas \mathcal{S} , las constantes toman los siguientes valores:

$$B_0 = 3.09235 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad A_0 = 3.45919 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$B_1 = 1.82858 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad A_1 = 1.99145 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

En el modelo SP6 el manto es dividido en 9 estratos y los cálculos de velocidades son efectuados por una fórmula polinómica del tipo $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, siendo $x = r/R_0$. En la tabla 4.1 se incluyen los valores adoptados por Morelli y Dziewonski en cada estrato.

En la tabla 4.2 se consignan para los modelos SP6 y ZY los resultados obtenidos para las velocidades v_p y v_s en todo el manto, diferenciando los substratos del modelo SP6 mediante líneas continuas de separación, en tanto que para los del modelo ZY hemos utilizado un sombreado.

Otra cuestión que tiene gran interés consiste en conocer la profundidad máxima del manto inferior, para saber donde se inicia el núcleo externo. En este sentido el modelo SP6 fija la superficie de separación entre ambos estratos a una profundidad de 2891 km, mientras que nuestro modelo, como ya vimos anteriormente, lo detecta a 2893 km. Esta pequeña diferencia de 2 km en la determinación de la superficie de separación entre el manto y el núcleo externo, como veremos posteriormente, no afecta a la obtención de resultados correctos para el interior de la Tierra.

Un primer resultado satisfactorio nos ha permitido comprobar que las diferencias $T_{Bull} - T_c$ obtenidas para la fase $\mathcal{P}c\mathcal{P}$ (reflexión de las ondas \mathcal{P} en el núcleo externo) son mejores que las obtenidas en los modelos PREM y SP6, en el rango de valores de Δ que nos imponen dichos modelos (ver Fig. 4.8).

Radio rango r (km)	Profundidad rango z (km)	Modelo SP6	
		v_P (km/s)	v_S (km/s)
6371 - 6351	0 - 20	$a_0 = 5,80000$	$a_0 = 3,36000$
6351 - 6336	20 - 35	$a_0 = 6,50000$	$a_0 = 3,75000$
6336 - 6251	35 - 120	$a_0 = 8,78541$ $a_1 = -0,74953$	$a_0 = 6,70623$ $a_1 = -2,24858$
6251 - 6161	120 - 210	$a_0 = 25,40956$ $a_1 = -17,69281$	$a_0 = 5,75198$ $a_1 = -1,27602$
6161 - 5961	210 - 410	$a_0 = 30,78588$ $a_1 = -23,25239$	$a_0 = 15,24313$ $a_1 = -11,08653$
5961 - 5711	410 - 660	$a_0 = 29,39809$ $a_1 = -21,40010$	$a_0 = 17,72032$ $a_1 = -13,49239$
5711 - 5600	660 - 771	$a_0 = 26,01542$ $a_1 = -17,00747$	$a_0 = 17,57267$ $a_1 = -12,92378$
5600 - 3630	771 - 2741	$a_0 = 23,61837$ $a_1 = -35,52920$ $a_2 = 45,20724$ $a_3 = -23,92870$	$a_0 = 11,87772$ $a_1 = -17,43557$ $a_2 = 23,32985$ $a_3 = -12,31633$
3630 - 3480	2741 - 2891	$a_0 = 12,84645$ $a_1 = 1,366110$	$a_0 = 5,65120$ $a_1 = 2,78686$
3480 - 1215	2891 - 5156	$a_0 = 11,31616$ $a_1 = -7,09314$ $a_2 = 15,75426$ $a_3 = -25,70488$	$a_0 = 0,00000$
1215 - 0	5156 - 6371	$a_0 = 11,29719$ $a_1 = -8,88699$	$a_0 = 3,66780$ $a_1 = -4,44749$

Tabla 4.1: Estratos y coeficientes polinómicos de distribución de velocidades para ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} en el modelo SP6.

Radio r (km)	Profundidad z (km)	v_P (km/s)		v_S (km/s)	
		SP6	ZY	SP6	ZY
$R_0 = 6371$	$z_0 = 0$	5,800	7,397	3,360	3,967
6351	20	5,800	7,492	3,360	4,023
6351	20	6,500	7,492	3,750	4,023
6336	35	6,500	7,563	3,750	4,066
6336	35	8,040	7,563	4,470	4,066
6300	71	8,044	7,732	4,483	4,167
6251	120	8,050	7,961	4,500	4,303
6251	120	8,050	7,961	4,500	4,303
6200	171	8,192	8,196	4,510	4,444
6161	210	8,300	8,375	4,518	4,550
6161	210	8,300	8,375	4,522	4,550
6061	310	8,665	8,825	4,696	4,820
5961	410	9,030	9,267	4,870	5,083
5961	410	9,375	9,267	5,096	5,083
5871	500	9,677	9,655	5,287	5,315
5711	660	10,215	10,325	5,626	5,716
5711	660	10,770	10,325	5,988	5,716
5600	771	11,066	10,775	6,213	5,986
5600	771	11,066	10,775	6,213	5,986
$R_I = 5525,2$	$z_I = 845,8$	11,199	$v_I = 11,071$	6,270	6,163
5500	871	11,243	11,121	6,289	6,221
$R_{Is} = 5487,7$	$z_{Is} = 883,3$	11,264	11,146	6,298	$v_{Is} = 6,250$
5400	971	11,411	11,317	6,360	6,323
5300	1071	11,571	11,506	6,428	6,404
5200	1171	11,725	11,687	6,492	6,480
5100	1271	11,872	11,860	6,553	6,553
5000	1371	12,012	12,026	6,610	6,621
4900	1471	12,148	12,183	6,665	6,686
4800	1571	12,278	12,332	6,717	6,747
4700	1671	12,404	12,473	6,767	6,803
4600	1771	12,526	12,606	6,815	6,855
4500	1871	12,645	12,729	6,862	6,903
4400	1971	12,761	12,844	6,907	6,947
4300	2071	12,875	12,949	6,951	6,986
4200	2171	12,987	13,045	6,994	7,020
4100	2271	13,099	13,132	7,037	7,050
4000	2371	13,210	13,209	7,079	7,075
3900	2471	13,321	13,275	7,122	7,094
3800	2571	13,432	13,332	7,165	7,109
3700	2671	13,545	13,378	7,208	7,118
3630	2741	13,625	13,403	7,239	7,122
3630	2741	13,625	13,403	7,239	7,122
3600	2771	13,618	13,413	7,226	7,122
$r_s^* = 3576,6$	$z_s^* = 2794,4$	13,613	13,419	7,216	$v_s^* = 7,123$
3500	2871	13,597	13,436	7,182	7,121
3480	2891	13,593	13,440	7,173	7,120
$R_2 = 3477,7$	$z_2 = 2893,3$		$v'_I = 13,440$		$v'_{Is} = 7,120$

Tabla 4.2: Velocidades de las ondas P y S en el manto de los modelos SP6 y ZY, diferenciando la estratificación

Capítulo 5

Estudio global del núcleo

5.1 Ondas \mathcal{P} en el núcleo

Las ondas \mathcal{P} que abandonan el manto inferior y penetran en el núcleo se denominan genéricamente ondas \mathcal{PKP} . Del registro de estas ondas en la superficie terrestre, y de su análisis posterior, se ha deducido la forma básica de sus curvas dromocrónicas $T(\Delta)$. El resultado puede verse en la Fig. 5.1.

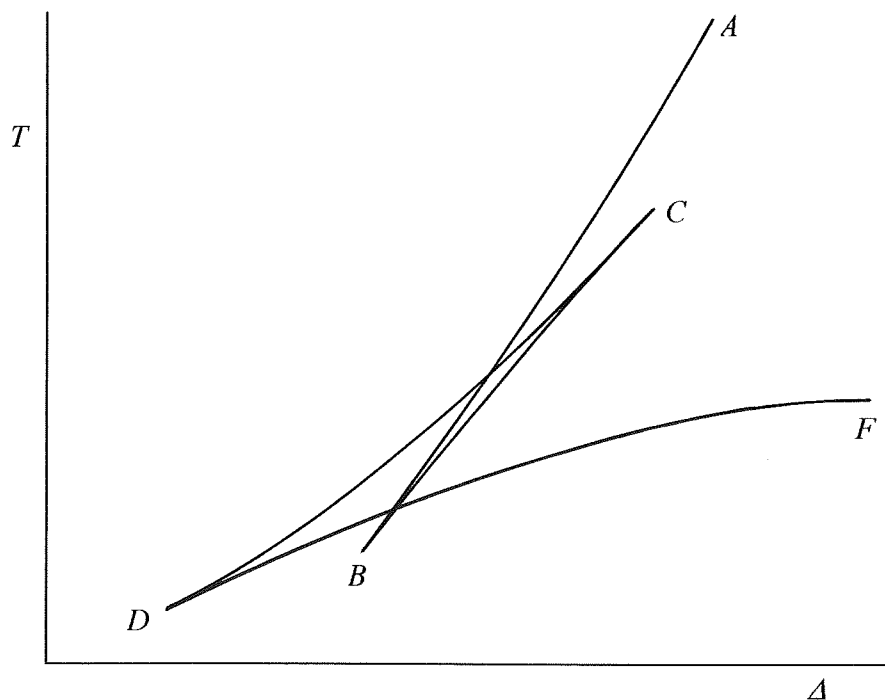


Figura 5.1: Dromocrónicas $T(\Delta)$ de ondas \mathcal{P} que penetran en el núcleo.

El tramo ABC corresponde a ondas que se transmiten exclusivamente por el

núcleo externo (Ondas \mathcal{PKP}). El tramo CD responde a ondas que retornan de la zona de transición, o bien, a ondas reflejadas directamente en la superficie del núcleo interno (Ondas \mathcal{PKiKP}). Por último el segmento DF es atribuido a las ondas que penetran en el núcleo interno (Ondas \mathcal{PKIKP}).

Con excepción del punto F, que está bien localizado por ser el rayo axial ($\Delta_F = 180^\circ$), los puntos A, B, C y D son de más dudosa localización.

En efecto, el punto A corresponde teóricamente al primer rayo refractado con ángulo límite en la superficie del núcleo externo, aunque, debido a supuestas irregularidades en dicha superficie y a fenómenos de difracción, llegamos a observar $\Delta_A > 180^\circ$.

El punto B es consecuencia de una disminución súbita de la velocidad de las ondas \mathcal{P} al pasar del manto al núcleo y en esta zona se produce una reversión del frente de ondas (cáustica), de manera que las ondas retroceden con continuidad desde el punto A hasta el B, para avanzar después hacia el C. Como en el caso anterior, la irregular superficie de separación entre las dos regiones, imposibilita la localización exacta del punto B. Jeffreys (1939) situó dicho punto en $\Delta_B = 143^\circ$, en tanto que Qamar (1973) lo localiza en $\Delta_B = 144^\circ$.

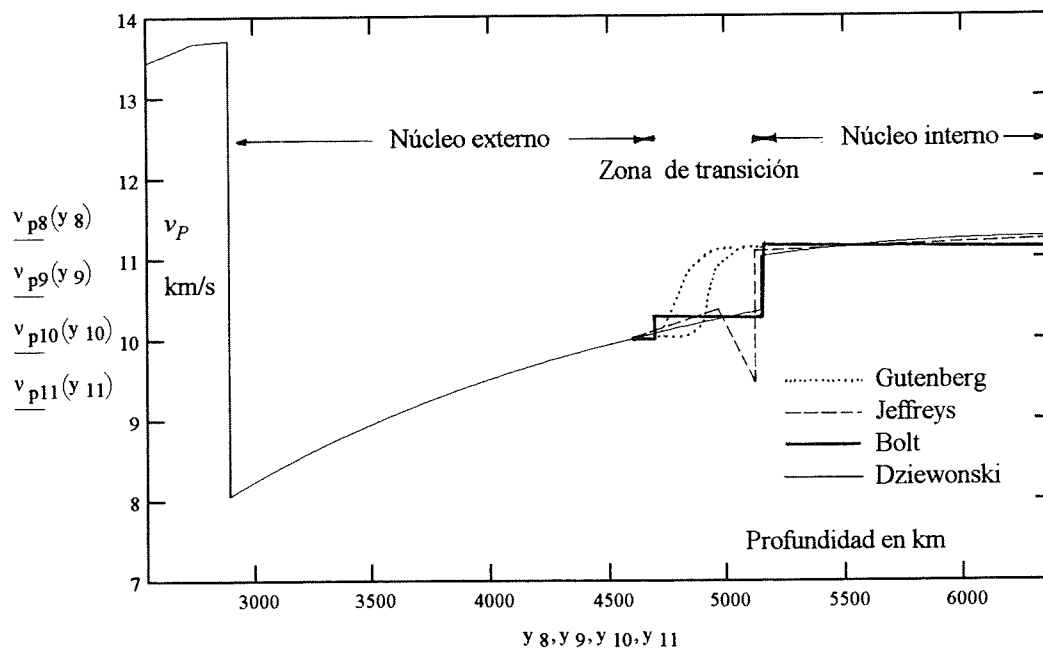


Figura 5.2: Distribución de velocidades para ondas \mathcal{P} en el núcleo según varios autores

La localización de los puntos C y D es todavía más crítica y ambigua. El rango del punto C va desde $\Delta_C = 154^\circ$ (Choy y Cormier, 1983) hasta los 170° determinados por Gutenberg (1959), mientras que el punto D oscila entre los 110° de Jeffreys y los 121° de Choy-Cormier. La razón de estos rangos tan amplios para Δ_C y Δ_D estriba en las distintas distribuciones de velocidad v_p de las ondas \mathcal{P} , calculadas para la zona de transición e inicio del núcleo interno, con el fin de obtener unas curvas dromocrónicas CD y DF, concordantes con las básicas.

En un sistema de coordenadas cartesianas (Δ , T), Jeffreys (1939) logra compatibilizar las observaciones asignando un radio de 1250 km. al núcleo interno y un espesor de 150 km. a la zona de transición, donde la velocidad v_p decrece de forma monótona con la profundidad y salta a un valor constante mayor al comienzo del núcleo (Ver Fig. 5.2). En contraste con esto, Gutenberg (1959) consigue compatibilizar las observaciones con crecimientos rápidos y continuos de v_p en la zona de transición, y con tamaños distintos del núcleo, en tanto que Bolt (1964) preconiza dos saltos bruscos de v_p . Finalmente, autores más recientes (Choy, Cormier, Anderson, Dziewonski, etc.) eliminan la zona de transición fijando únicamente una discontinuidad importante en el inicio del núcleo, donde los incrementos de velocidad son del orden de 0.5 km./seg. Como se aprecia en la figura, la supuesta velocidad en el núcleo interno permanece constante en casi todos los modelos.

Es indudable que en todas las hipótesis consideradas sobre la velocidad de las ondas \mathcal{P} en el núcleo se crea un modelo específico aceptable del interior de la Tierra, al igual que ocurre con el modelo que presentamos en esta memoria. Existe, sin embargo, una diferencia esencial entre nuestro modelo y los modelos anteriores, puesto que las hipótesis que establecemos influyen directamente en el cálculo del momento de inercia de la Tierra, al ser la densidad función de la velocidad de las ondas (hipótesis 5).

Dziewonski y Anderson, en su modelo *Preliminary Reference Earth Model (PREM)*, parten del valor real del momento de inercia de la Tierra y de la necesidad de fijar a priori tres parámetros:

1. El supuesto salto de densidad existente entre los núcleos externo e interno.
2. La densidad en la base del manto.
3. La densidad por debajo de la discontinuidad de Mohorovicic.

De esta forma pueden ajustar las constantes de su distribución de densidades, obtenidas mediante la asunción de la hipótesis de linealidad de Birch ($\rho = a + bv_p$)

en el manto superior y el cumplimiento de la ecuación de Adams-Williamson en el resto de los estratos terrestres.

Nosotros, sin embargo, tal como vimos en las secciones 3.1 y 3.2, no necesitamos, en nuestro modelo, fijar a priori ningún parámetro, puesto que las distribuciones de densidad y el momento de inercia quedan directamente definidos por las constantes A_i , B_i de cada estrato E_i , que determinamos exclusivamente por medio de datos observados (Δ, T) .

De este modo hemos comprobado que cuanto más nos acercamos a las curvas básicas $T(\Delta)$, obtenemos mejores resultados del momento de inercia.

5.2 Ondas \mathcal{PKP} (tramo ABC)

Consideramos que la fase \mathcal{PKP}_{ABC} es originada exclusivamente por el estrato E_2 , que identificaremos con el núcleo externo. Por tanto, una vez conocidas las constantes del manto inferior A_1, B_1, R'_1 , podemos proceder a calcular las constantes A_2, B_2, R'_2 , dado que se ha supuesto $R_2 = R'_1$.

Con este objeto hemos decidido utilizar la condición de mínimo relativo (que vimos en la sección 2.4, con $k = 2$) del punto cáustico B, seleccionando el mejor par de valores (Δ_B, T_B) dentro de su rango, para que la curva ABC calculada se identifique lo más posible con la observada, de manera que los errores $\epsilon = T_0 - T_c$ sean mínimos.

Localizando el punto cáustico B en el sistema de coordenadas Δ, T por medio de un ángulo inicial $I_0 = 14^\circ.9$ y de los valores $\Delta_B = 144^\circ.6$, $T_B = 1174.1$ s, hemos obtenido los siguientes resultados:

$$\begin{array}{ll}
 I_0 & = 14^\circ.9946 & I_1 & = 26^\circ.5194 \\
 I'_1 & = 59^\circ.4520 & I_2 & = 28^\circ.8074 \\
 \nu_2 & = 225.3429 & \mu_2 & = 108.1822 \\
 w_2 & = 2.162346405 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} & \Psi & = 1302.3093 \\
 A_2 & = 5.064434189 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} & B_2 & = 4.345847329 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}
 \end{array}$$

donde el valor positivo de Ψ nos confirma que el punto B es un mínimo.

Por otra parte, si suponemos que el valor del radio inferior del núcleo externo es $R'_2 = 1394.3$ km (que calcularemos posteriormente), hemos construido las tablas 7.10 y 7.11, cuyos resultados comentamos a continuación:

a) Los ángulos iniciales I_A , I_C fijan el rango de las ondas \mathcal{PKP}_{ABC} , a los que corresponden, respectivamente, los siguientes valores del par (Δ, T) :

$$I_A = 17^\circ.483, \quad \Delta_A = 174^\circ.06, \quad T_A = 1303.97 \text{ s},$$

$$I_C = 9^\circ.844, \quad \Delta_C = 175^\circ.37, \quad T_C = 1266.77 \text{ s}.$$

En la figura 5.3 se observa que la trayectoria con ángulo inicial $I_A = 17^\circ.483$ corresponde al rayo tangente al núcleo externo, que retorna a la superficie R_0 con

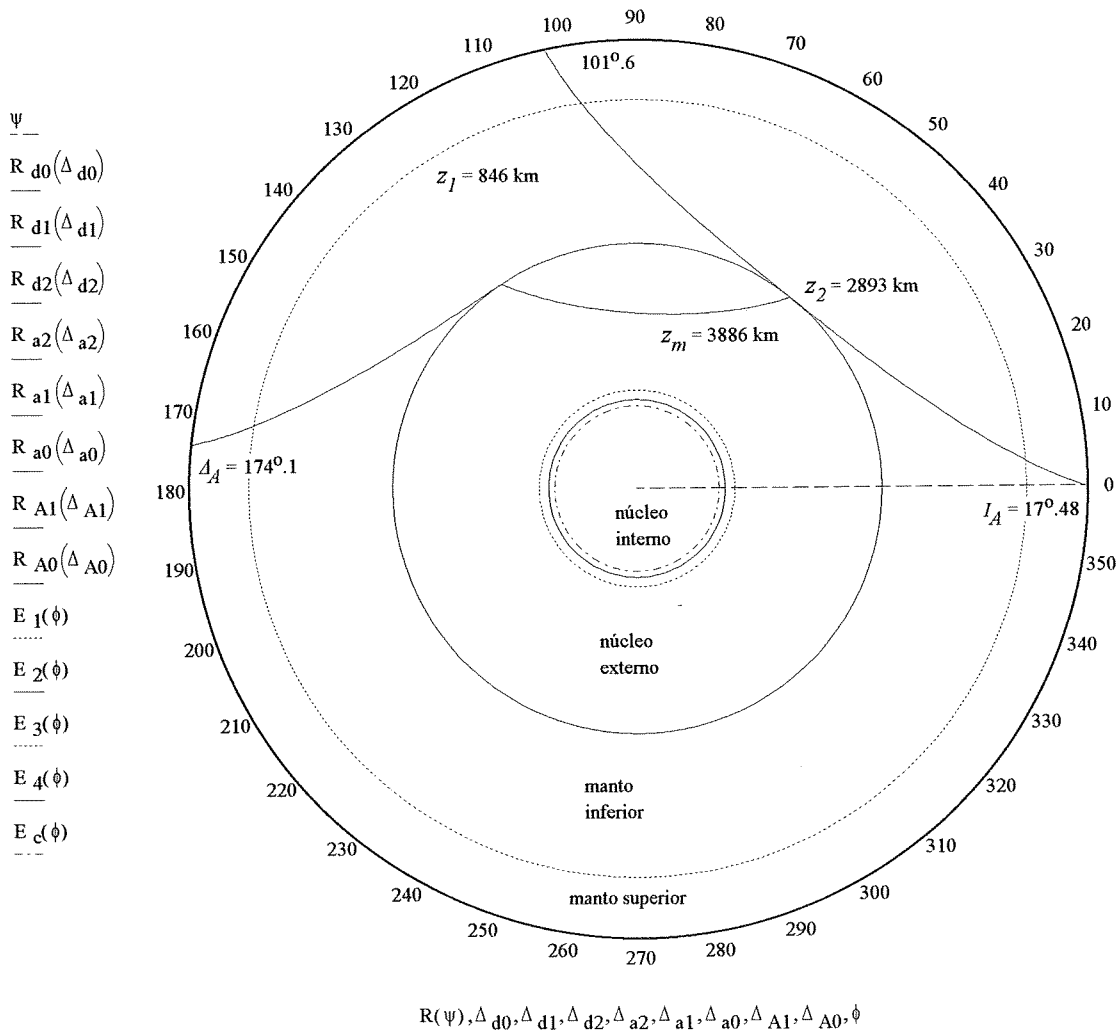


Figura 5.3: Desdoblamiento de la trayectoria sísmica de la onda \mathcal{P} tangente al núcleo externo, refractándose con ángulo límite (punto A).

una distancia epicentral $\Delta = 101^\circ.6$ (Tabla 7.4), sufriendo, a la vez, una fuerte refracción y penetrando en el Núcleo externo con ángulo límite, para retornar a la superficie con una distancia epicentral $\Delta_A = 174^\circ.06$.

Esto nos permite comprobar que la rama AB no comienza con una distancia epicentral $\Delta_A > 180^\circ$, lo que parece confirmar que las distancias epicentrales registradas mayores que Δ_A son probablemente debidas a fenómenos de difracción

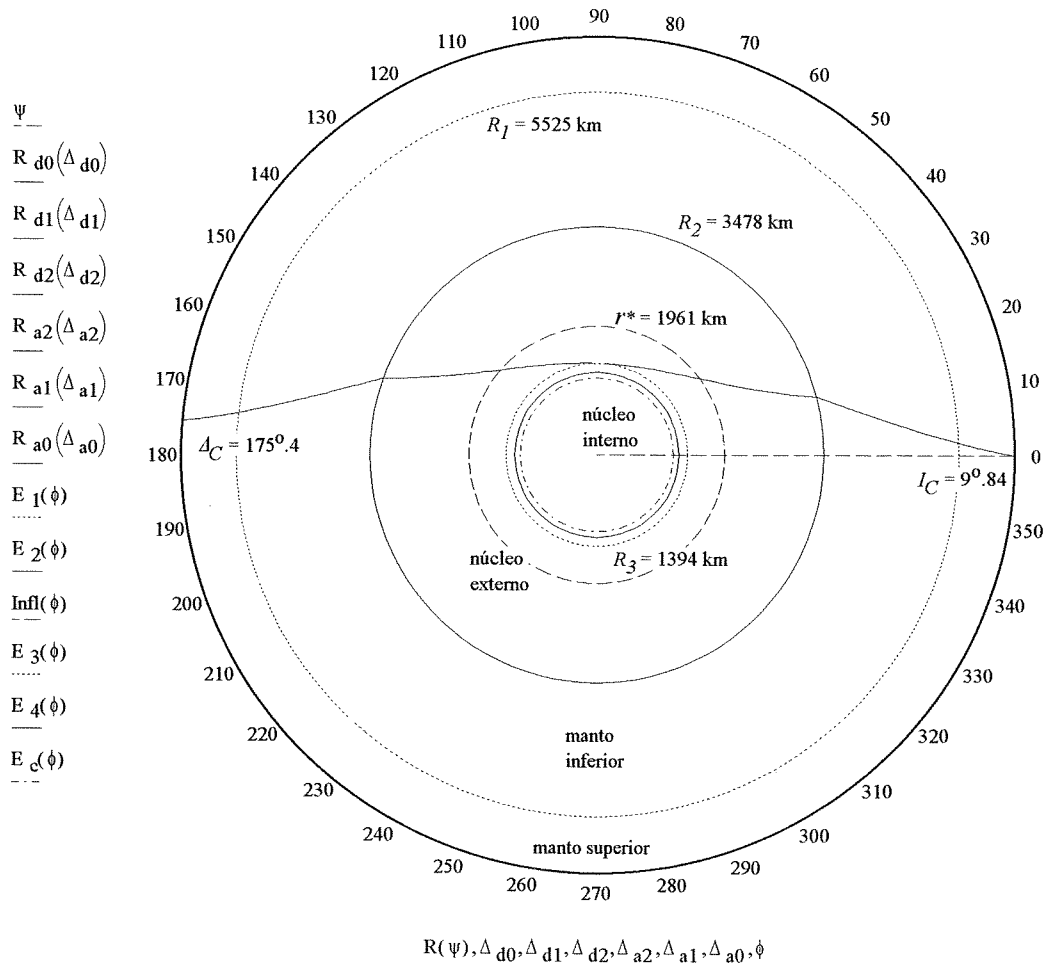


Figura 5.4: Fase \mathcal{PKP} . Trayectoria sísmica tangente a la zona de transición que determina el punto C.

o a irregularidades en la transición que existe al pasar del manto al núcleo, como ya fue indicado por T. Lay, T.J. Ahrens, P. Olson, J. Smyth y D. Loper en *Physics Today* (octubre de 1990), entre otros.

Como se puede observar en la figura 5.4, la trayectoria con ángulo inicial I_C , que determina el punto C, corresponde al rayo tangente a la superficie de separación entre el núcleo externo y la zona de transición.

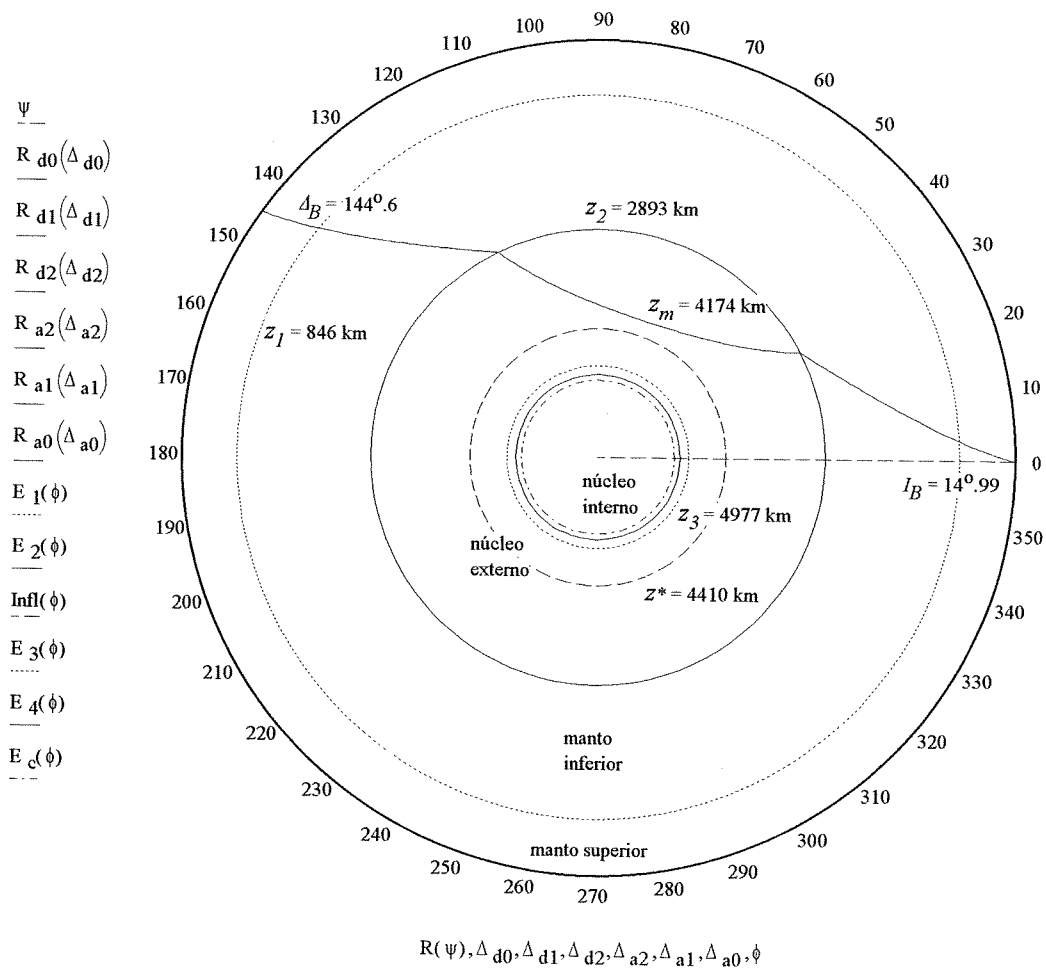


Figura 5.5: Fase PKP. Trayectoria sísmica correspondiente al punto caústico B, en donde el frente de ondas cambia de sentido.

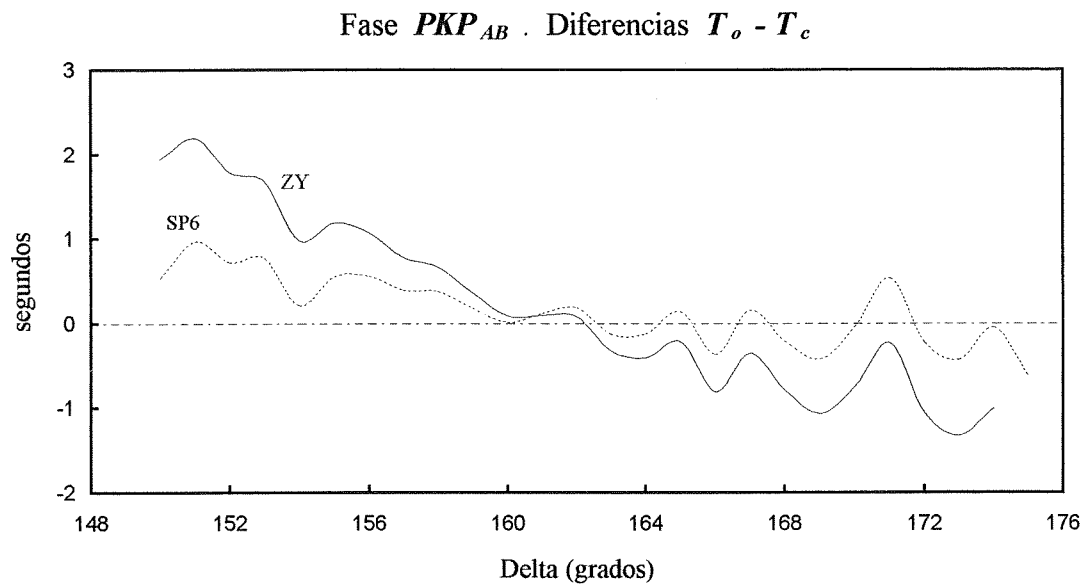


Figura 5.6: Diferencias $T_o - T_c$ en la fase PKP tramo AB.

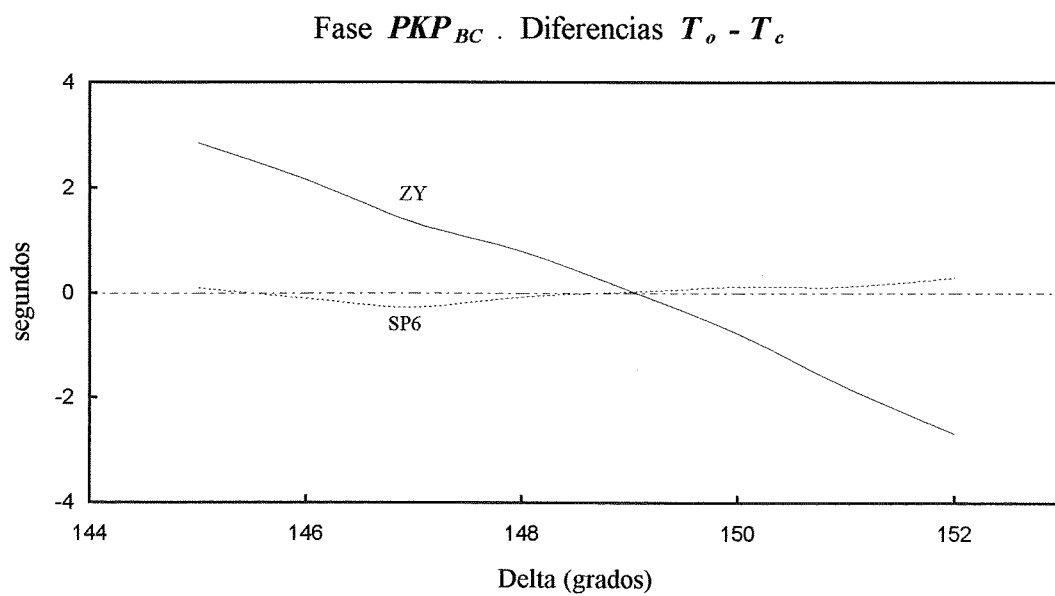


Figura 5.7: Diferencias $T_o - T_c$ en la fase PKP tramo BC.

Podemos observar también que, mientras el ángulo inicial va disminuyendo desde el valor I_A hasta el I_C , los valores (Δ, T) disminuyen continuamente hasta el mínimo considerado (punto B), para aumentar posteriormente (Fig. 5.5).

En el punto B podemos constatar, además, una gran concentración de energía, pues en el entorno del ángulo inicial I_B , un pincel de rayos de sólo 1° de amplitud se concentra a su llegada (en B) en otro pincel de sólo $0^\circ.8$, en un intervalo de tiempo de unos 3 segundos.

b) Teniendo en cuenta que $w_2 < A_2 < w'_2 = w(R'_2)$, existe un punto P^* de máxima velocidad v^* , definido por la igualdad $w_2^* = A_2$, para el que se obtienen los siguientes resultados:

$$r^* = R_2 \exp\left(\frac{w_2 - w_2^*}{A_2}\right) = 1960.8 \text{ km.} \quad v^* = w_2^* r^* = 9.93 \text{ km/seg.}$$

$$I_0^* = \arcsin \frac{w_0}{w_2^*} = 13^\circ.253 \quad \Delta^* = 148^\circ.30 \quad T^* = 1187.40 \text{ seg.}$$

En la figura 5.4 se observa que la trayectoria tangente a R'_2 cambia de curvatura en la superficie esférica de radio r^* .

c) En las figuras 5.6 y 5.7 se han construido las curvas que determinan las diferencias entre los tiempos observados y calculados de los tramos AB y BC, respectivamente.

En dichas figuras podemos observar que las curvas están bien centradas, lo que nos indica que la localización obtenida del punto caústico B puede ser una buena aproximación de su posición real.

Para la localización del punto caústico B y de todos los puntos del tramo ABC, hemos utilizado como tiempos observados los que suministran Morelli y Dziewonski (1993) para su modelo SP6.

5.3 Prospección de la zona de transición al núcleo interno

Con objeto de obtener valores aproximados de las constantes $R_3 = R'_2, R'_3, A_3, B_3, w_3$, que definen la zona de transición al núcleo interno como estrato E_3 , hemos supuesto que el tramo CD es una consecuencia exclusiva de ondas \mathcal{PKP} , que retornan por refracción en dicho estrato hacia la superficie terrestre, y que en el punto de separación entre el núcleo externo y la zona de transición existe una discontinuidad de 2ª especie en la velocidad de transmisión, puesto que no se aprecia ningún salto brusco en los datos observados de Δ, T .

De acuerdo con esto, podemos establecer las siguientes igualdades:

$$v'_2 = v_3, \quad w'_2 = w_3, \quad I'_2 = I_3,$$

que unidas a las anteriores $I'_0 = I_1$, $w'_0 = w_1$, nos permiten establecer que, *para cualquier punto del tramo CD*, se cumplen las 7 ecuaciones del siguiente sistema:

$$\alpha = \frac{\text{sen } I_0}{w_0} = \frac{\text{sen } I_1}{w_1} = \frac{\text{sen } I'_1}{w'_1} = \frac{\text{sen } I_2}{w_2} = \frac{\text{sen } I_3}{w_3}, \quad (5.1)$$

$$\Delta^{(m)} = \sum_{i=0}^2 \Delta'_i + \Delta_3^{(m)} = \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i=0}^2 \frac{\cos I_i - \cos I'_i}{A_i} + \frac{\cos I_3}{A_3} \right], \quad (5.2)$$

$$T^{(m)} = \sum_{i=0}^2 T'_i + T_3^{(m)} = \sum_{i=0}^2 \frac{1}{A_i} \left[\ln \tan \frac{I'_i}{2} - \ln \tan \frac{I_i}{2} \right] - \frac{1}{A_3} \ln \tan \frac{I_3}{2}, \quad (5.3)$$

Este sistema de 7 ecuaciones contiene las 8 incógnitas α , I_0 , I_1 , I'_1 , I_2 , I_3 , A_3 , w_3 , pero puede ser resuelto por cálculo numérico partiendo de un valor previo aproximado de R_3 .

En efecto, escogido un punto cualquiera $P(\Delta_p, T_p)$ del tramo CD y un ángulo inicial I_0 , podemos proceder del siguiente modo:

- a) Calculamos para el valor inicial I_0 , el valor w_3 por la relación (2.11).

$$R_3 = R_2 \exp \left(\frac{w_2 - w_3}{A_2} \right) \quad (5.4)$$

- b) Calculamos a continuación los valores de α , I_1 , I'_1 , I_2 , I_3 , por medio de las igualdades (5.1).

- c) Obtenemos finalmente A_3 por la ecuación (5.3) y comprobamos si todos ellos satisfacen a la ecuación (5.2).

Este proceso es iterativo hasta encontrar el valor inicial I_0 que haga compatible el sistema, que no siempre lo es, pues depende del valor asignado al radio R_3 de la superficie de separación. En la ejecución de estos cálculos hemos comprobado que el sistema sólo es compatible para un intervalo muy pequeño de valores en torno a $R_3 = 1390 \pm 40$ kilómetros.

5.4 Prospección del núcleo interno

Como en el caso anterior, para conocer valores aproximados de las constantes que definen las características del núcleo interno, supondremos que éste se compone

de un estrato E_4 , en cuyo interior existe una esfera de radio $R_c = R'_4$ que define la existencia del estrato $E_c = (R_c, 0)$ y que ya fue introducida entre las hipótesis fundamentales (hipótesis 6), con objeto de evitar la singularidad que se presentaría en la forma $w(0) = \infty$. Considerando, además, que la velocidad de propagación de las ondas \mathcal{P} sólo puede presentar discontinuidades de 2ª especie en las superficies de separación entre los estratos $E_3 - E_4$, $E_4 - E_c$, al no detectarse saltos bruscos en los tiempos observados $T(\Delta)$ de la fase \mathcal{PKIKP} , tendremos que hallar

$$\begin{aligned} R'_3 &= R_4, & v'_3 &= v_4, & w'_3 &= w_4, & I'_3 &= I_4, & A_4, \\ R'_4 &= R_c, & v'_4 &= v_c, & w'_4 &= w_c, & I'_4 &= I_c, & B_4, \end{aligned}$$

Además, se entiende que el tramo DF producido por las ondas \mathcal{PKIKP} , estará formado por dos segmentos de curva que se unen en un punto E, como consecuencia de la discontinuidad prevista en R_c . Por tanto, tendremos los dos tramos siguientes: El tramo DE, producido por las ondas \mathcal{PKIKP} , que se transmiten exclusivamente por el estrato E_4 , y el tramo EF, causado por las ondas que atraviesan el estrato E_c .

Una forma adecuada de calcular las características de los estratos E_4 y E_c , que nos determinarán la posible constitución del núcleo interno, es la siguiente:

Cualquier punto Q perteneciente al tramo DE satisface las ecuaciones:

$$\alpha = \frac{\text{sen } I_0}{w_0} = \frac{\text{sen } I_1}{w_1} = \frac{\text{sen } I'_1}{w'_1} = \frac{\text{sen } I_2}{w_2} = \frac{\text{sen } I_3}{w_3} = \frac{\text{sen } I_4}{w_4}, \quad (5.5)$$

$$\Delta^{(m)} = \sum_{i=0}^3 \Delta'_i + \Delta_4^{(m)} = \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i=0}^3 \frac{\cos I_i - \cos I'_i}{A_i} + \frac{\cos I_4}{A_4} \right], \quad (5.6)$$

$$T^{(m)} = \sum_{i=0}^3 T'_i + T_4^{(m)} = \sum_{i=0}^3 \frac{1}{A_i} \left[\ln \tan \frac{I'_i}{2} - \ln \tan \frac{I_i}{2} \right] - \frac{1}{A_4} \ln \tan \frac{I_4}{2}. \quad (5.7)$$

Utilizando dos veces la igualdad (2.11), podemos establecer la siguiente relación entre los radios R_3 y R_c ,

$$R_c = R_3 \exp\left(\frac{w_3 - w_4}{A_3}\right) \exp\left(\frac{w_4 - w_c}{A_4}\right). \quad (5.8)$$

Por otra parte, si se introduce el tiempo $T_F^{(m)}$ del punto F como dato, entonces, de acuerdo con la relación (4.14), tendremos

$$T_F^{(m)} = \sum_{i=0}^4 \frac{1}{A_i} \ln \left(\frac{w'_i}{w_i} \right) + \frac{1}{w_c} \quad (5.9)$$

El sistema formado por las ecuaciones (5.5), (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), puede resolverse por cálculo numérico de la siguiente forma:

Asignando el tiempo T_F , de recorrido del rayo axial, las coordenadas (Δ, T) de un punto Q del tramo DE y partiendo de un hipotético valor de R_c , calcularemos para un par de ángulos iniciales I_0, I_4 las variables $\alpha, I_1, I'_1, I_2, I_3$ y w_4 por las ecuaciones (5.5), el valor de A_4 por la ecuación (5.7), el valor de w_c por la fórmula (5.8) y comprobamos si todos los resultados satisfacen a las ecuaciones (5.6) (5.9).

El proceso es iterativo hasta encontrar los valores de I_0 e I_4 que hacen compatible el sistema para el hipotético valor de R_c .

Todas las pruebas que hemos realizado nos han llevado a concluir lo siguiente:

a) Que, para la compatibilidad del sistema, el radio R_c debe pertenecer al intervalo de valores comprendido entre las distancias de 1000 y 1200 kilómetros.

Esto nos lleva a comprobar que la esfera de radio R_c no puede ser pequeña como en un principio habíamos supuesto, de ahí que la velocidad de propagación $v(r)$ y la densidad $\rho(r)$ deben ser constantes (v_c, ρ_c) en la práctica totalidad del núcleo interno, excepto quizás en su inicio, donde tendremos un pequeño estrato E_4 que seguirá la ley de la función $w(r)$.

b) Que se obtienen mejores resultados cuando la constante A_4 calculada se acerca al entorno del valor obtenido para w'_4 .

Esta observación conduce a evitarnos la discontinuidad propuesta en un principio sobre la separación de los estratos E_4 y E_c , ya que imponiendo la restricción $w'_4 = A_4$ (condición de máximo) damos continuidad a la función $v(r)$ en R_c y, lo que es más importante, posibilita la resolución completa de los valores que definen la zona de transición y el núcleo interno, sin tener que dar valores hipotéticos previos a los radios R_3 y R_c , como veremos a continuación.

5.5 Determinación conjunta de la zona de transición y del núcleo interno

Para la resolución de este problema, al igual que para la resolución del problema anterior, hemos utilizado el programa informático MATHCAD (ver APÉNDICE), que facilita la solución de sistemas no lineales con un gran número de ecuaciones y de incógnitas, siempre y cuando dispongamos de unos valores previos aproximados de las variables.

En esencia, el planteamiento de este problema queda determinado por un sistema de 25 ecuaciones con 25 incógnitas, que ahora veremos:

1) Escogiendo adecuadamente un punto P del tramo CD, podemos plantear el sistema

$$\alpha = \frac{\text{sen } I_0}{w_0} = \frac{\text{sen } I_1}{w_1} = \frac{\text{sen } I'_1}{w'_1} = \frac{\text{sen } I_2}{w_2} = \frac{\text{sen } I_3}{w_3}, \quad (5.10)$$

$$\Delta^{(m)} = \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i=0}^2 \frac{\cos I_i - \cos I'_i}{A_i} + \frac{\cos I_3}{A_3} \right], \quad (5.11)$$

$$T^{(m)} = \sum_{i=0}^2 \frac{1}{A_i} \left[\ln \tan \frac{I'_i}{2} - \ln \tan \frac{I_i}{2} \right] - \frac{1}{A_3} \ln \tan \frac{I_3}{2}, \quad (5.12)$$

que contiene 7 ecuaciones con las 8 incógnitas $\alpha, I_0, I_1, I'_1, I_2, I_3, A_3, w_3$.

2) A continuación elegiremos un punto Q del tramo DE, que nos conduce a la resolución del sistema

$$\alpha = \frac{\text{sen } I_0}{w_0} = \frac{\text{sen } I_1}{w_1} = \frac{\text{sen } I'_1}{w'_1} = \frac{\text{sen } I_2}{w_2} = \frac{\text{sen } I_3}{w_3} = \frac{\text{sen } I_4}{w_4} \quad (5.13)$$

$$\Delta^{(m)} = \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i=0}^3 \frac{\cos I_i - \cos I'_i}{A_i} + \frac{\cos I_4}{A_4} \right], \quad (5.14)$$

$$T^{(m)} = \sum_{i=0}^3 \frac{1}{A_i} \left[\ln \tan \frac{I'_i}{2} - \ln \tan \frac{I_i}{2} \right] - \frac{1}{A_4} \ln \tan \frac{I_4}{2}, \quad (5.15)$$

que contiene 8 ecuaciones con 9 incógnitas nuevas $\alpha, I_0, I_1, I'_1, I_2, I_3, I_4, A_4, w_4$.

3) Finalmente, escogido un punto S del tramo EF y teniendo en cuenta que $w'_4 = w_c = A_4$ podemos plantear el sistema

$$\alpha = \frac{\text{sen } I_0}{w_0} = \frac{\text{sen } I_1}{w_1} = \frac{\text{sen } I'_1}{w'_1} = \frac{\text{sen } I_2}{w_2} = \frac{\text{sen } I_3}{w_3} = \frac{\text{sen } I_4}{w_4} = \frac{\text{sen } I_c}{A_4} \quad (5.16)$$

$$\Delta^{(m)} = \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i=0}^4 \frac{\cos I_i - \cos I'_i}{A_i} \right] + \frac{\pi}{2} - I_c \quad (5.17)$$

$$T^{(m)} = \sum_{i=0}^4 \frac{1}{A_i} \left[\ln \tan \frac{I'_i}{2} - \ln \tan \frac{I_i}{2} \right] + \frac{\cos I_c}{A_4}. \quad (5.18)$$

que contiene 9 ecuaciones con las 8 incógnitas nuevas $\alpha, I_0, I_1, I'_1, I_2, I_3, I_4, I_c$.

En resumen, disponemos de un sistema de 24 ecuaciones con 25 incógnitas. Bastará, pues, introducir una última ecuación para poder resolver el sistema.

Tal ecuación viene dada por la igualdad

$$T_F^{(m)} = \sum_{i=0}^4 \frac{1}{A_i} \ln \left(\frac{w'_i}{w_i} \right) + \frac{1}{A_4} \quad (5.19)$$

que define la mitad del tiempo invertido por las ondas para alcanzar el punto F.

Tal como quedó establecido en las prospecciones anteriores, hemos elegido adecuadamente los puntos P , Q , S de los tramos respectivos CD, DE, EF y el tiempo observado de la trayectoria axial.

Para los puntos Q y S, las coordenadas Δ , T_0 seleccionadas han sido las siguientes: 130° , 1152.01 s para el punto Q y 161° , 1201.82 s para el punto S, en donde los tiempos observados T_0 son los que figuran en la publicación de Morelli-Dziewonski *Body wave traveltimes and a spherically symmetric P- and S- wave velocity model* (Geophys. J. Int. (1993), 112, 178-194). Las coordenadas asignadas a los puntos P y F han sido, respectivamente, las siguientes: 121° , 1134.796 s y 180° , 1212.52 s.

Con tales datos, hemos resuelto el sistema de ecuaciones mencionado con una aproximación inferior a 10^{-3} para los datos de entrada.

Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

$$A_3 = 2.10857045058 \cdot 10^{-2} s^{-1}, \quad w_3 = 6.79106282153 \cdot 10^{-3} s^{-1},$$

$$A_4 = 9.63047431601 \cdot 10^{-3} s^{-1}, \quad w_4 = 8.93389430249 \cdot 10^{-3} s^{-1},$$

por lo que las dimensiones y las constantes específicas de los estratos E_3 , E_4 y E_c resultan ser:

Estrato E_3 (zona de transición)

$$R_3 = 1394.344 \text{ km}, \quad A_3 = 2.10857045058 \cdot 10^{-2} s^{-1},$$

$$R'_3 = 1259.606 \text{ km}, \quad B_3 = 1.59455339462 \cdot 10^{-1} s^{-1},$$

Estrato E_4 (Inicio del núcleo interno)

$$R_4 = 1259.606 \text{ km}, \quad A_4 = 9.63047431601 \cdot 10^{-3} s^{-1},$$

$$R'_4 = 1171.715 \text{ km}, \quad B_4 = 7.76815574985 \cdot 10^{-2} s^{-1},$$

Estrato E_c (núcleo interno)

$$R_c = 1171.715 \text{ km}, \quad w_c = 9.63047431601 \cdot 10^{-3} s^{-1}.$$

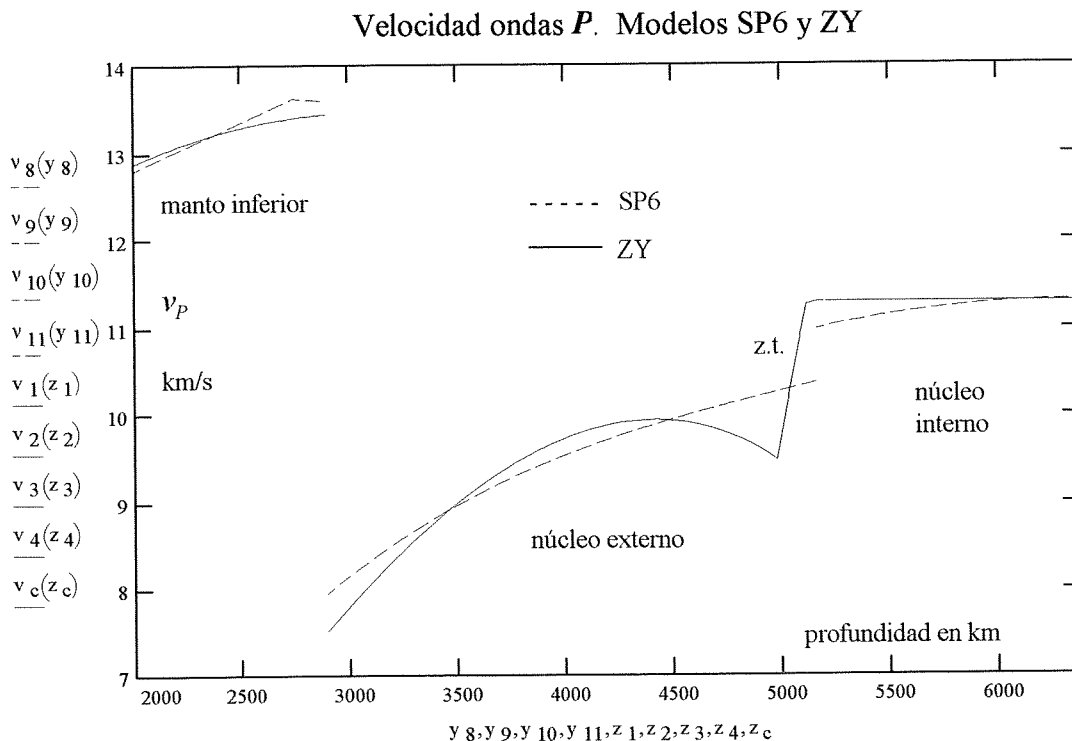


Figura 5.8: Distribución de velocidades en el núcleo según los modelos SP6 y ZY

Analicemos, en primer lugar, la distribución de velocidades en la totalidad del núcleo, efectuando una comparación de los resultados obtenidos en los modelos SP6 y ZY. En la tabla 5.1 se han incluido, en forma numérica, las velocidades v_p de las ondas \mathcal{P} a las diferentes profundidades.

En la figura 5.8 figuran los mismos resultados en forma gráfica, donde se observa que en nuestro modelo, a partir de un máximo de 9.93 km/s, hallado a una profundidad de 4.410 km, tenemos un gradiente negativo de velocidad que continúa hasta el comienzo de la zona de transición del núcleo externo, situado a la profundidad de 4.977 km, y donde la velocidad alcanza un valor mínimo de 9.47 km/s. A continuación se presenta un gradiente positivo de velocidad en toda la zona de transición (de 135 km de espesor), obteniéndose un valor final de 11.25 km/s al comienzo del núcleo interno, con un radio $R_4 = 1259.6$ kilómetros.

Posteriormente, la velocidad aumenta lentamente hasta el máximo de 11.28 km/s, en $R'_4 = R_c = 1171.7$ km, donde comienza la esfera R_c del núcleo interno y en la que la velocidad es constante.

Radio r (km)	Profundidad z (km)	v_P (km/s)	
		SP6	ZY
3480	2891	7,953	
$R_2 = 3477,7$	$z_2 = 2893,3$	7,958	$v_2 = 7,52$
3400	2,971	8,111	7,741
3300	3071	8,297	8,013
3200	3171	8,471	8,268
3100	3271	8,633	8,508
3000	3371	8,785	8,732
2900	3471	8,927	8,939
2800	3571	9,060	9,128
2700	3671	9,183	9,300
2600	3771	9,298	9,452
2500	3871	9,405	9,585
2400	3971	9,506	9,698
2300	4071	9,599	9,790
2200	4171	9,687	9,859
2100	4271	9,769	9,906
2000	4371	9,847	9,928
$r^* = 1960,8$	$z^* = 4410,2$	9,876	$v^* = 9,930$
1900	4471	9,920	9,926
1800	4571	9,990	9,896
1700	4671	10,057	9,838
1600	4771	10,121	9,751
1500	4871	10,184	9,632
1400	4971	10,245	9,479
$R_3 = 1394,3$	$z_3 = 4976,7$	10,249	$v_3 = 9,469$
1300	5071	10,306	10,748
$R_4 = 1259,6$	$z_4 = 5111,4$	10,331	$v_4 = 11,253$
1215	5156	10,358	11,276
1215	5156	10,974	11,276
1200	5171	10,982	11,281
$R_c = 1171,7$	$z_c = 5199,3$	10,997	$v_c = 11,284$
1100	5271	11,032	11,284
1000	5371	11,076	11,284
900	5471	11,120	11,284
800	5571	11,157	11,284
700	5671	11,190	11,284
600	5771	11,218	11,284
500	5871	11,242	11,284
400	5971	11,262	11,284
300	6071	11,277	11,284
200	6171	11,288	11,284
100	6271	11,295	11,284
0	6371	11,297	11,284

Tabla 5.1: Mod. SP6 y ZY. Velocidad de las ondas \mathcal{P} en el núcleo, diferenciando la estratificación

Por otra parte, aunque el salto de velocidad que se presenta en el acceso al núcleo interno es de 1.8 km/s en nuestro modelo y de 0.6 km/s en el modelo SP6, se obtienen parecidos valores de velocidad en el centro de la Tierra.

Señalemos finalmente que nuestra distribución de velocidades se acerca más, cualitativamente, a la de Jeffreys-Bullen (Fig. 5.2), en la que también se observa un gradiente negativo, y un radio de 1250 km para el comienzo del núcleo interno

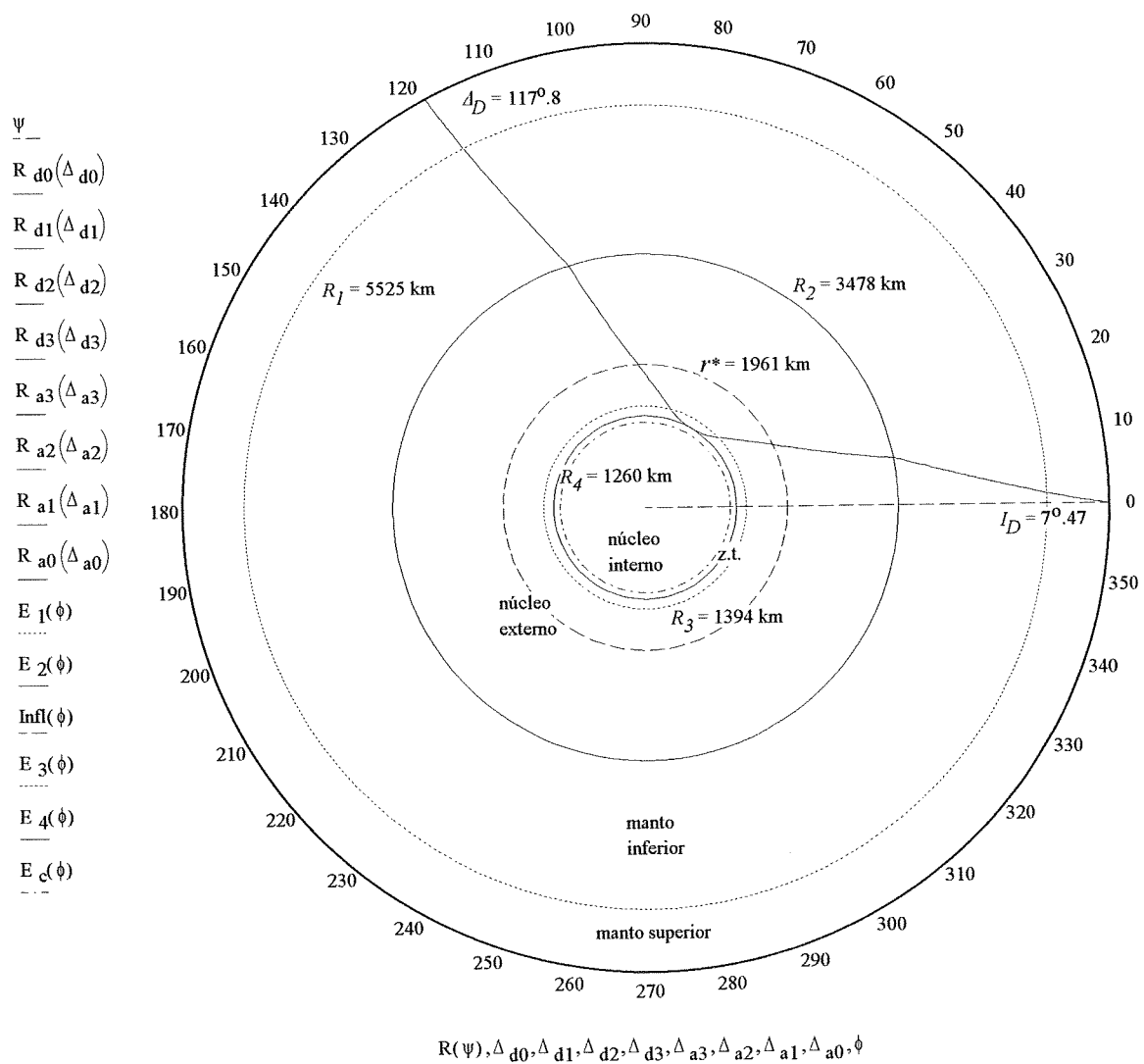


Figura 5.9: Trayectoria sísmica tangente al núcleo interno que determina el punto D.

más acorde con el nuestro (de 1259.6 km), en tanto que el radio en el modelo SP6 es de 1215 kilómetros.

A continuación comentaremos, de manera sucinta, los resultados obtenidos para las fases \mathcal{PKP}_{CD} , \mathcal{PKIKP} y \mathcal{PKiKP} , tal como pueden verse en las tablas 7.12, 7.13, 7.14, 7.15 y 7.16, respectivamente, y que figuran al final de esta memoria.

En la fase \mathcal{PKP}_{CD} , originada exclusivamente por trayectorias sísmicas refractadas en la zona de transición, el frente de ondas retrocede desde el punto C ($\Delta_C = 175^\circ.37$) hasta el punto D ($\Delta_D = 117^\circ.8$) a medida que el ángulo inicial I_0 decrece desde el valor $9^\circ.844$ al valor $7^\circ.47$.

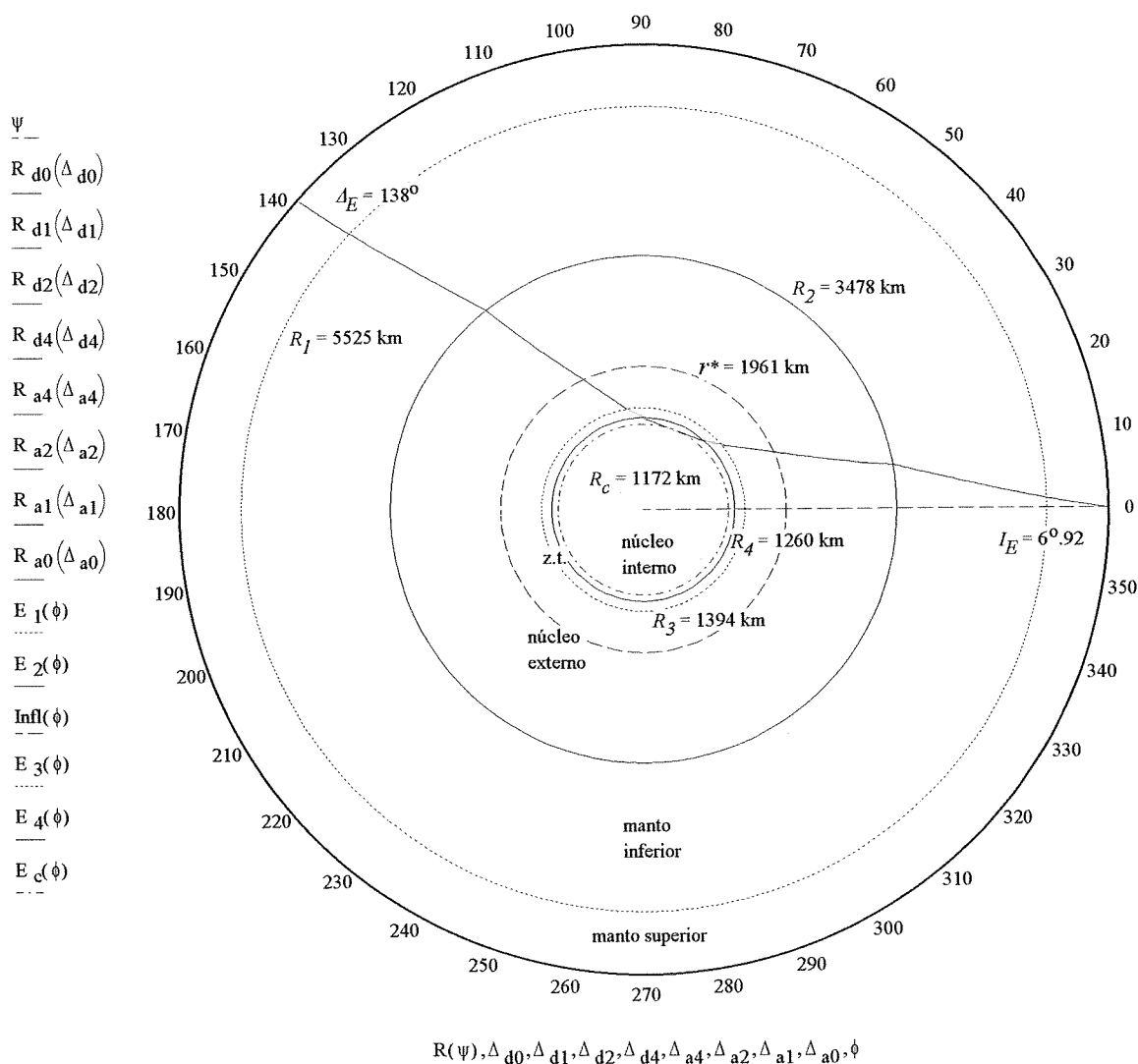


Figura 5.10: Trayectoria sísmica tangente a la esfera de radio R_c que determina el punto E.

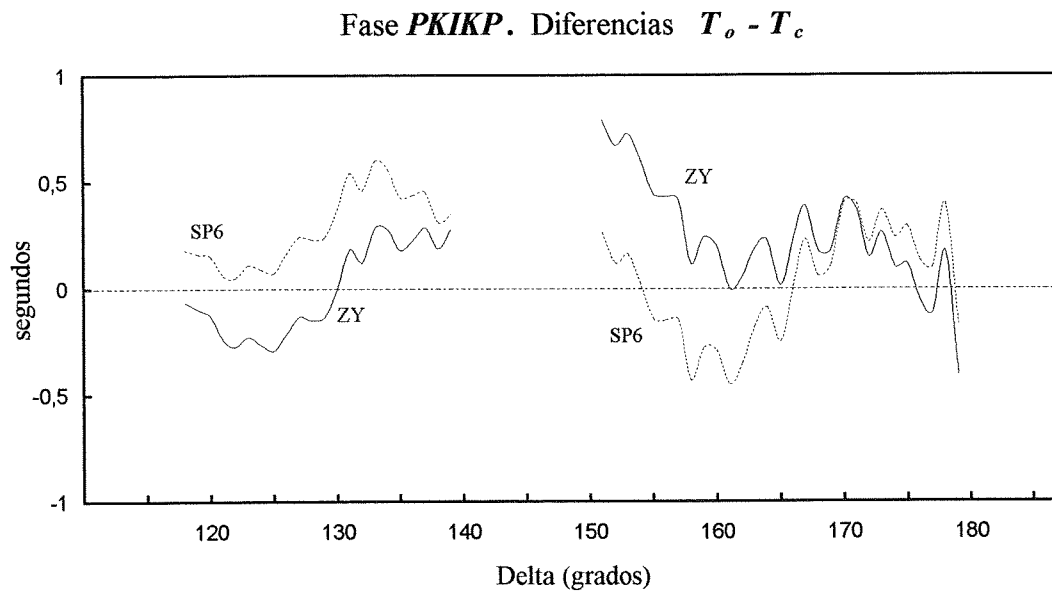


Figura 5.11: Fase *PKIKP*. Diferencias $T_o - T_c$ en los modelos SP6 y ZY

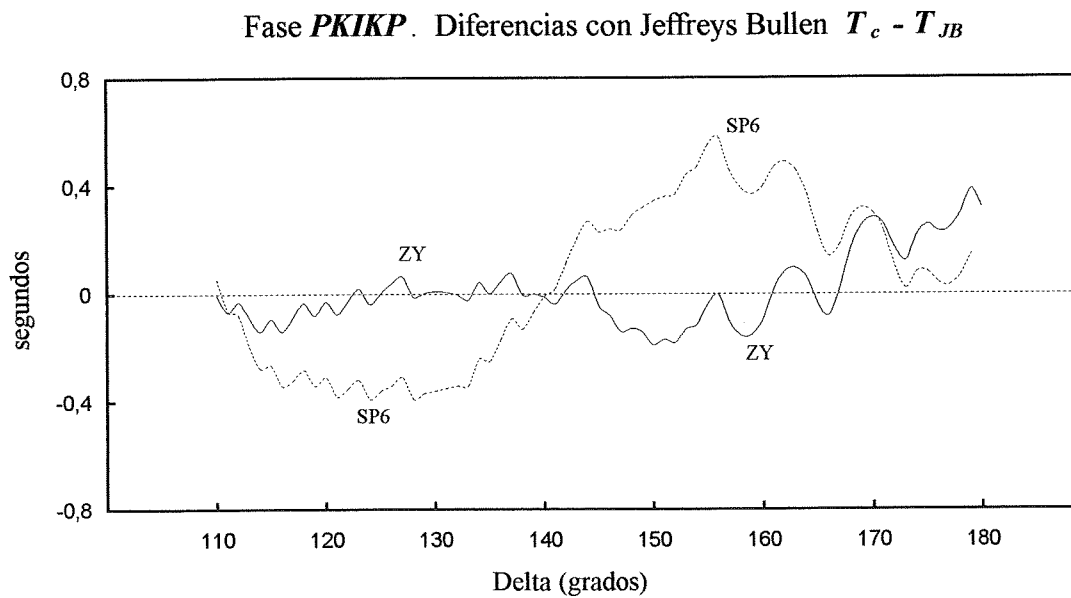


Figura 5.12: Fase *PKIKP*. Diferencias $T_c - T_{JB}$ entre los tiempos calculados en los modelos SP6 (1993) y ZY (1997) y los suministrados por Jeffreys-Bullen (1958).

El punto D corresponde a la trayectoria sísmica tangente a la superficie esférica de radio R_4 , que separa la zona de transición del núcleo interno, tal como se observa en la figura 5.9.

En la fase \mathcal{PKIKP} , el frente de ondas vuelve a avanzar desde el punto D hasta el F (rayo axial) a medida que I_0 disminuye desde el valor $7^\circ.47$ hasta 0° .

Notemos que la trayectoria sísmica tangente a la esfera de radio R_c , que da origen al punto de unión de los tramos DE y EF, es decir el punto E, se produce para una distancia epicentral $\Delta = 138^\circ$, con un ángulo inicial de $6^\circ.92$ (ver Fig. 5.10), en tanto que la reflexión de las ondas \mathcal{P} en el núcleo interno (correspondiente a la fase \mathcal{PKiKP}) finaliza en el punto D (ver la tabla 7.16).

En la figura 5.11 se incluyen las diferencias de tiempos de recorrido $T_0 - T_c$ para la fase \mathcal{PKIKP} en los modelos SP6 y ZY, donde se comprueba que nuestro modelo está mejor centrado en el primer tramo de valores de las distancias epicentrales Δ , con desviaciones máximas de ± 0.3 s, si bien aparecen diferencias superiores a 0.4 s en el rango $151^\circ - 157^\circ$ del segundo tramo, que deberíamos mejorar.

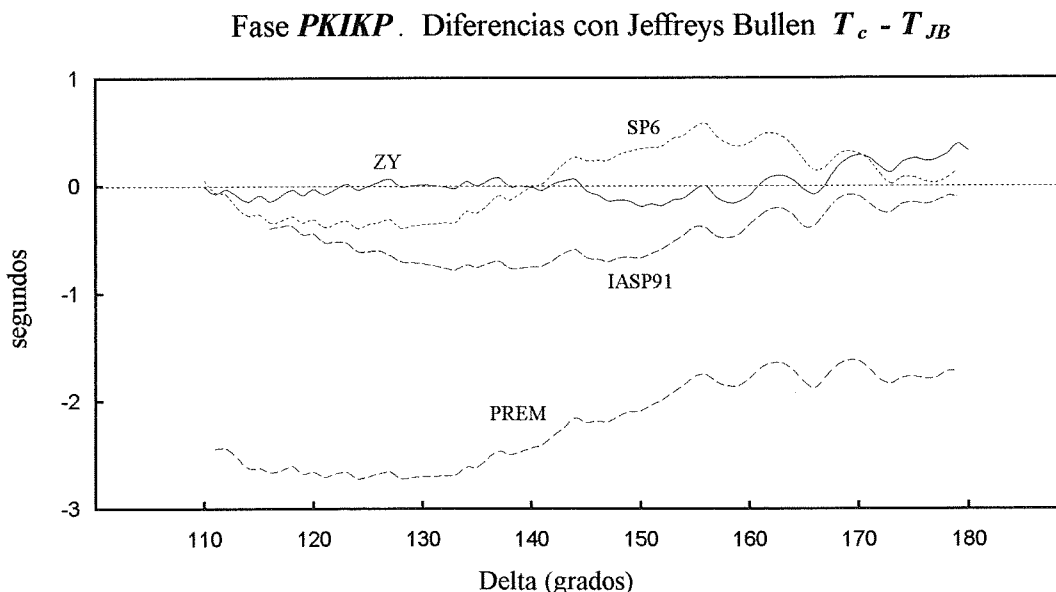


Figura 5.13: Fase \mathcal{PKIKP} . Diferencias $T_c - T_{JB}$ entre los tiempos calculados en los modelos PREM (1981), IASP (1991), SP6 (1993) y ZY (1997) y los suministrados por JB. (1958)

No obstante, esta circunstancia no aparece si construimos las diferencias con respecto a los tiempos suministrados por las tablas de Jeffreys-Bullen (JB), que representamos en la figura 5.12.

En dicha figura se observa que nuestros tiempos se adaptan muy bien a los de Jeffreys-Bullen en todo el rango de Δ , teniendo una diferencia máxima de 0.4 s en $\Delta = 179^\circ$, mientras que en el modelo SP6 se obtienen diferencias comprendidas entre +0.6 s y -0.4 segundos.

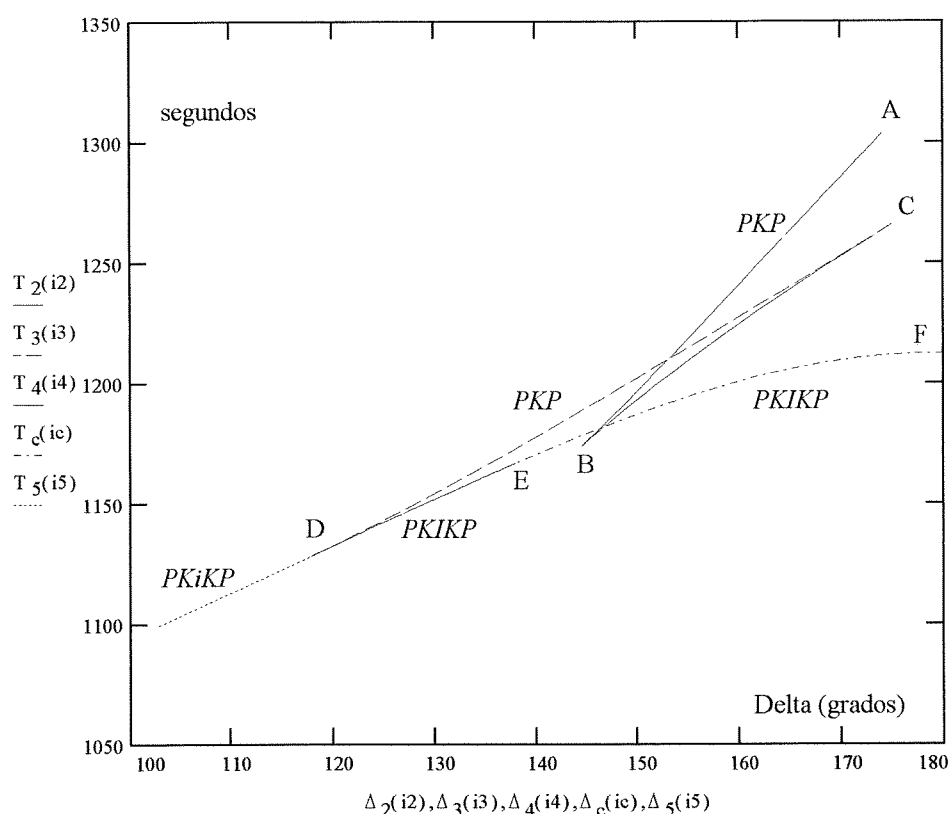


Figura 5.14: Aspecto general de las dromocrónicas $T(\Delta)$ de las fases que penetran en el núcleo terrestre en el modelo ZY.

Señalemos, no obstante, que para abarcar la totalidad del rango de Δ que exponen dichos autores, hemos utilizado, para el pequeño rango $110^\circ - 117^\circ$, los tiempos obtenidos de la fase \mathcal{PKiKP} , entendiendo con ello que los tiempos observados bien pudieran ser debidos a esta fase y no a la fase \mathcal{PKIKP} .

Nuestra comparación se ha completado incluyendo, además, en la figura 5.13, las diferencias $T_c - T_{JB}$ de los modelos IASP91 (Kennett-Engdahl, 1991) y PREM

(Dziewonski - Anderson, 1981).

Por último, en la figura 5.14 se han representado las curvas dromocrónicas $T(\Delta)$ de las fases \mathcal{PKP} , \mathcal{PKiKP} , \mathcal{PKIKP} , así como los puntos especiales A, B, C, D, E y F, para ver el aspecto general que presentan. Gráficamente se comprueba que dicha figura es comparable, cualitativamente, con los resultados de la figura 5.1.

Capítulo 6

Consecuencias de la distribución de densidades

6.1 Cálculo de la constante H y del momento de inercia

Una vez conocidas las constantes y las dimensiones correspondientes de cada estrato, la fórmula (3.9) nos permite calcular la constante H , y la igualdad (3.13) el momento de inercia I .

En nuestro modelo, los resultados obtenidos han sido los siguientes:

$$H = 2200.965 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \text{ s} = 2.200965 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg}}{\text{km}^3} \text{ s},$$

$$I = 8.02445 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 8.02445 \cdot 10^{31} \text{ kg} \cdot \text{km}^2,$$

de los que se deduce, en nuestro modelo de Tierra esférica, el valor

$$II = \frac{I}{MR_0^2} = 0.33287,$$

para el momento adimensional II .

Como vemos, este resultado no coincide exactamente con el valor $II = 0.33076$, admitido en la actualidad para el elipsoide terrestre.

Sin embargo, el paso de un modelo esférico a un modelo elipsoidal, se puede hacer por medio de la fórmula de Radau, que fue obtenida a partir de la ecuación diferencial de Clairaut, en una aproximación de primer orden, calculando el achatamiento terrestre f_0 para un fluido aislado en equilibrio hidrostático que gira lentamente con movimiento uniforme.

Si designamos por γ la relación adimensional, existente en el ecuador, entre las fuerzas centrífuga y gravitacional, y por II el momento adimensional esférico, la fórmula de Radau se puede escribir en la forma siguiente:

$$f_0 = \frac{5}{2} \frac{\gamma}{1 + \frac{25}{4} \left(1 - \frac{3}{2} \mathit{II}\right)^2}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que la rotación uniforme de la Tierra corresponde a un día sidereo τ , tendremos

$$\tau = 8.616409 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Por consiguiente, para γ resulta

$$\gamma = \frac{4\pi^2 R_0^3}{GM\tau^2} = 3.447926 \cdot 10^{-3}.$$

Finalmente, introduciendo los valores de γ y $f_0^{-1} = 298.257$ del achatamiento terrestre, la fórmula de Radau nos permite calcular el valor

$$\mathit{II} = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} \sqrt{\frac{5\gamma}{2f_0} - 1} = 0.33244,$$

que concuerda perfectamente con el valor obtenido en nuestro modelo (0.33287), pues solamente presenta un error de 0.13%.

6.2 Propiedades físicas derivadas del modelo

Somos conscientes de que nuestro modelo de estratificación es uno más entre los ya existentes, así como del posible perfeccionamiento de su estructura, con objeto de mejorar las consecuencias que de ella se derivan, para conseguir mejores aproximaciones en las diferencias observación-cálculo (O-C) que se obtienen con su aplicación.

No obstante, no podemos olvidar nuestro propósito inicial, tratando de conseguir una estratificación del interior de la Tierra por medio de un modelo analítico sencillo que proporcione pequeñas diferencias O-C.

En todo caso, y con independencia de ajustes comparables en cuanto a las diferencias O-C proporcionadas por otros modelos, es necesario tener presentes las propiedades físicas del interior de la Tierra que se obtienen en cada modelo.

Radio rango r (km)	Profundidad rango z (km)	Modelo PREM isotrópico		
		v_P (km/s)	v_S (km/s)	ρ (g/cm ³)
6371 - 6356	0 - 15	$a_0 = 5,8000$	$a_0 = 3,2000$	$a_0 = 2,6000$
6356 - 6346,6	15 - 24,4	$a_0 = 6,8000$	$a_0 = 3,9000$	$a_0 = 2,9000$
6346,6 - 6151	24,4 - 220	$a_0 = 4,1875$	$a_0 = 2,1519$	$a_0 = 2,6910$
		$a_1 = 3,9382$	$a_1 = 2,3481$	$a_1 = 0,6924$
6151 - 5971	220 - 400	$a_0 = 20,3926$	$a_0 = 8,9496$	$a_0 = 7,1089$
		$a_1 = -12,2569$	$a_1 = -4,4597$	$a_1 = -3,8045$
5971 - 5771	400 - 600	$a_0 = 39,7027$	$a_0 = 22,3512$	$a_0 = 11,2494$
		$a_1 = -32,6166$	$a_1 = -18,5856$	$a_1 = -8,0298$
5771 - 5701	600 - 670	$a_0 = 19,0957$	$a_0 = 9,9839$	$a_0 = 5,3197$
		$a_1 = -9,8672$	$a_1 = -4,9324$	$a_1 = -1,4836$
5701 - 5600	670 - 771	$a_0 = 29,2766$	$a_0 = 22,3459$	$a_0 = 7,9565$
		$a_1 = -23,6027$	$a_1 = -17,2473$	$a_1 = -6,4761$
		$a_2 = 5,5242$	$a_2 = -2,0834$	$a_2 = 5,5283$
		$a_3 = -2,5514$	$a_3 = 0,9783$	$a_3 = -3,0807$
5600 - 3630	771 - 2741	$a_0 = 24,9520$	$a_0 = 11,1671$	$a_0 = 7,9565$
		$a_1 = -40,4673$	$a_1 = -13,7818$	$a_1 = -6,4761$
		$a_2 = 51,4832$	$a_2 = 17,4575$	$a_2 = 5,5283$
		$a_3 = -26,6419$	$a_3 = -9,2777$	$a_3 = -3,0807$
3630 - 3480	2741 - 2891	$a_0 = 15,3891$	$a_0 = 6,9254$	$a_0 = 7,9565$
		$a_1 = -5,3181$	$a_1 = 1,4672$	$a_1 = -6,4761$
		$a_2 = 5,5242$	$a_2 = -2,0834$	$a_2 = 5,5283$
		$a_3 = -2,5514$	$a_3 = 0,9783$	$a_3 = -3,0807$
3480 - 1221,5	2891 - 5149,5	$a_0 = 11,0487$	$a_0 = 0,0000$	$a_0 = 12,5815$
		$a_1 = -4,0362$		$a_1 = -1,2638$
		$a_2 = 4,8023$		$a_2 = -3,6426$
		$a_3 = -13,5732$		$a_3 = -5,5281$
1221,5 - 0	5149,5 - 6371	$a_0 = 11,2622$	$a_0 = 3,6678$	$a_0 = 13,0885$
		$a_1 = -6,3640$	$a_1 = -4,4475$	$a_1 = -8,8381$

Tabla 6.1: Estratos y coeficientes de las funciones polinómicas de velocidad y densidad en el modelo PREM.

<i>Estratos</i> E_i	Radio rango r (km)	Profundidad rango z (km)	Modelo ZY constantes (s^{-1})
<i>Manto superior</i> E_0	6371 - 5525,2	0 - 845,8	$A_0 = 5,91557 \cdot 10^{-3}$ $B_0 = 5,29786 \cdot 10^{-2}$
<i>Manto inferior</i> E_1	5525,2 - 3477,7	845,8 - 2893,3	$A_1 = 4,01993 \cdot 10^{-3}$ $B_1 = 3,66437 \cdot 10^{-2}$
<i>Núcleo externo</i> E_2	3477,7 - 1394,3	2893,3 - 4976,7	$A_2 = 5,06443 \cdot 10^{-3}$ $B_2 = 4,34585 \cdot 10^{-2}$
<i>Zona de transición</i> E_3	1394,3 - 1259,6	4976,7 - 5111,4	$A_3 = 2,10857 \cdot 10^{-2}$ $B_3 = 1,59455 \cdot 10^{-1}$
<i>Núcleo interno</i> E_4	1259,6 - 1171,7	5111,4 - 5199,3	$A_4 = 9,63047 \cdot 10^{-3}$ $B_4 = 7,76816 \cdot 10^{-2}$
E_c	1171,7 - 0	5199,3 - 6371	$w_c = A_4$

Tabla 6.2: Estratos y constantes del modelo ZY.

En tal sentido, por no disponer de datos de las propiedades físicas que genera el modelo SP6 en el interior de la Tierra, utilizaremos, a partir de ahora, el modelo PREM isotrópico para contrastar las diferencias existentes en dichas propiedades físicas.

Recordemos que el modelo PREM es un modelo general del que han nacido otros más perfectos, como es el caso del modelo SP6. La diferencias más acusadas respecto al modelo SP6, radican en el establecimiento de una estratificación diferente en el manto superior y en que fija el inicio del núcleo interno a una profundidad de 5149.5 km, es decir a 6.5 km menos que en el modelo SP6.

Los coeficientes de sus funciones polinómicas de velocidad y densidad que necesitaremos, así como su estratificación, aparecen en la tabla 6.1.

Como contrapartida, hemos construido la tabla 6.2 que resume las características de nuestro modelo ZY, que nos servirá para contrastar los resultados que se deducen con respecto a las propiedades físicas en ambos modelos, esto es, modelo PREM isotrópico y modelo ZY.

6.2.1 Distribución de masas y densidades

Comencemos por el cálculo de densidades superficiales ρ_i de cada estrato E_i , así como de las constantes a_i correspondientes, teniendo en cuenta que, según vimos en el capítulo 3, se tiene

$$\rho_i(r) = \rho_i + a_i \ln \frac{R_i}{r},$$

siendo en general $\rho_i = H(B_i - A_i \ln R_i)$, $a_i = HA_i$, en tanto que en la esfera de radio R_c la densidad es constante y tiene el valor $\rho_c = Hw_c$.

Los resultados obtenidos para ρ_i y a_i , en cada estrato, expresados en g/cm^3 , han sido los siguientes:

Estrato	ρ_i	a_i
Manto superior	2.555	13.020
Manto inferior	4.410	8.848
Núcleo externo	4.759	11.147
Zona de transición	14.947	46.409
Inicio núcleo interno	19.663	21.196
Esfera de radio R_c	$\rho_c = a_4 = 21.196$	—

Con estos datos, ó bien utilizando la expresión general

$$\rho_i(r) = H \frac{v_i(r)}{r},$$

hemos construido la tabla 6.3, que proporciona la densidad en función de la profundidad y en el que hemos añadido los resultados del modelo PREM.

Los resultados obtenidos han sido representados en las figuras 6.1 y 6.2, donde figuran en un sistema cartesiano (ρ, z) las distribuciones de la densidad a las distintas profundidades, en el manto y en el núcleo, respectivamente.

Tanto en la tabla 6.3 como en las figuras 6.1 y 6.2, se puede observar que nuestra distribución de densidades difiere sustancialmente de la que determina el modelo PREM, en todo el rango de z , excepto en el manto superior, donde Dziewonski y Anderson (1981), en su modelo PREM, asumen la hipótesis de linealidad de Birch.

Radio r (km)	Profundidad z (km)	ρ (g/cm ³)		Radio r (km)	Profundidad z (km)	ρ (g/cm ³)	
		PREM	ZY			PREM	ZY
$R_0 = 6371$	$z_0 = 0$	2,600	2,555	3480	2891	9,903	
6356	15	2,600	2,586	$R_2 = 3477,7$	$z_2 = 2893,3$	9,907	4,759
6356	15	2,900	2,586	3400	2,971	10,029	5,011
6346,6	24,4	2,900	2,605	3300	3071	10,181	5,344
6346,6	24,4	3,381	2,605	3200	3171	10,327	5,687
6256	115	3,371	2,793	3100	3271	10,467	6,041
6151	220	3,359	3,013	3000	3371	10,601	6,406
6151	220	3,436	3,013	2900	3471	10,730	6,784
6061	310	3,490	3,205	2800	3571	10,853	7,175
5971	400	3,543	3,400	2700	3671	10,971	7,581
5971	400	3,724	3,400	2600	3771	11,083	8,001
5871	500	3,850	3,620	2500	3871	11,191	8,439
5771	600	3,976	3,843	2400	3971	11,293	8,894
5771	600	3,976	3,843	2300	4071	11,390	9,368
5736	635	3,984	3,922	2200	4171	11,483	9,864
5701	670	3,992	4,002	2100	4271	11,571	10,382
5701	670	4,381	4,002	2000	4371	11,655	10,926
5600	771	4,443	4,235	$r^* = 1960,8$	$z^* = 4410,2$	11,686	11,147
5600	771	4,443	4,235	1900	4471	11,734	11,498
$R'_0 = 5525,2$	$z'_0 = 845,8$	4,489	4,410	1800	4571	11,809	12,100
$R_1 = 5525,2$	$z_1 = 845,8$	4,489	4,410	1700	4671	11,880	12,737
5500	871	4,504	4,450	1600	4771	11,947	13,413
5400	971	4,563	4,613	1500	4871	12,010	14,133
5300	1071	4,621	4,778	1400	4971	12,069	14,902
5200	1171	4,678	4,947	$R'_2 = 1394,3$	$z'_2 = 4976,7$	12,072	14,947
5100	1271	4,735	5,118	$R_3 = 1394,3$	$z_3 = 4976,7$	12,072	14,947
5000	1371	4,790	5,294	1375	4996	12,083	15,594
4900	1471	4,844	5,472	1350	5021	12,098	16,446
4800	1571	4,898	5,655	1325	5046	12,111	17,313
4700	1671	4,951	5,841	1300	5071	12,125	18,197
4600	1771	5,003	6,031	1275	5096	12,138	19,098
4500	1871	5,055	6,226	$R'_3 = 1259,6$	$z'_3 = 5111,4$	12,147	19,663
4400	1971	5,106	6,425	$R_4 = 1259,6$	$z_4 = 5111,4$	12,147	19,663
4300	2071	5,157	6,628	1221,5	5149,5	12,166	20,314
4200	2171	5,207	6,836	1221,5	5149,5	12,764	20,314
4100	2271	5,257	7,049	1200	5171	12,775	20,690
4000	2371	5,307	7,268	$R'_4 = 1171,7$	$z'_4 = 5199,3$	12,790	21,196
3900	2471	5,357	7,492	$R_c = 1171,7$	$z_c = 5199,3$	12,790	21,196
3800	2571	5,407	7,722	1100	5271	12,825	21,196
3700	2671	5,457	7,958	1000	5371	12,871	21,196
3630	2741	5,491	8,127	800	5571	12,949	21,196
3630	2741	5,491	8,127	600	5771	13,010	21,196
3600	2771	5,506	8,200	500	5871	13,034	21,196
3500	2871	5,556	8,449	400	5971	13,054	21,196
3480	2891	5,566	8,500	200	6171	13,080	21,196
$R'_1 = 3477,7$	$z'_1 = 2893,3$		8,506	0	6371	13,088	21,196

Tabla 6.3: Mod. PREM y ZY. Densidades en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.

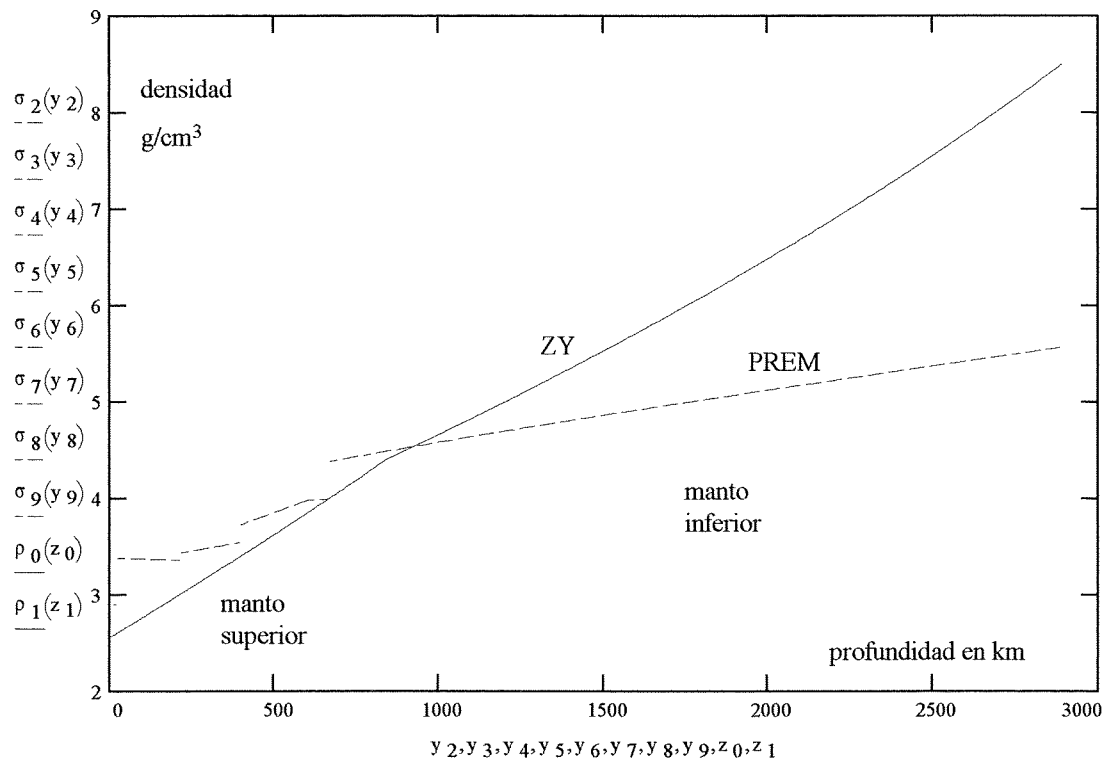


Figura 6.1: Mod. PREM y ZY. Distribución de densidades en el manto.

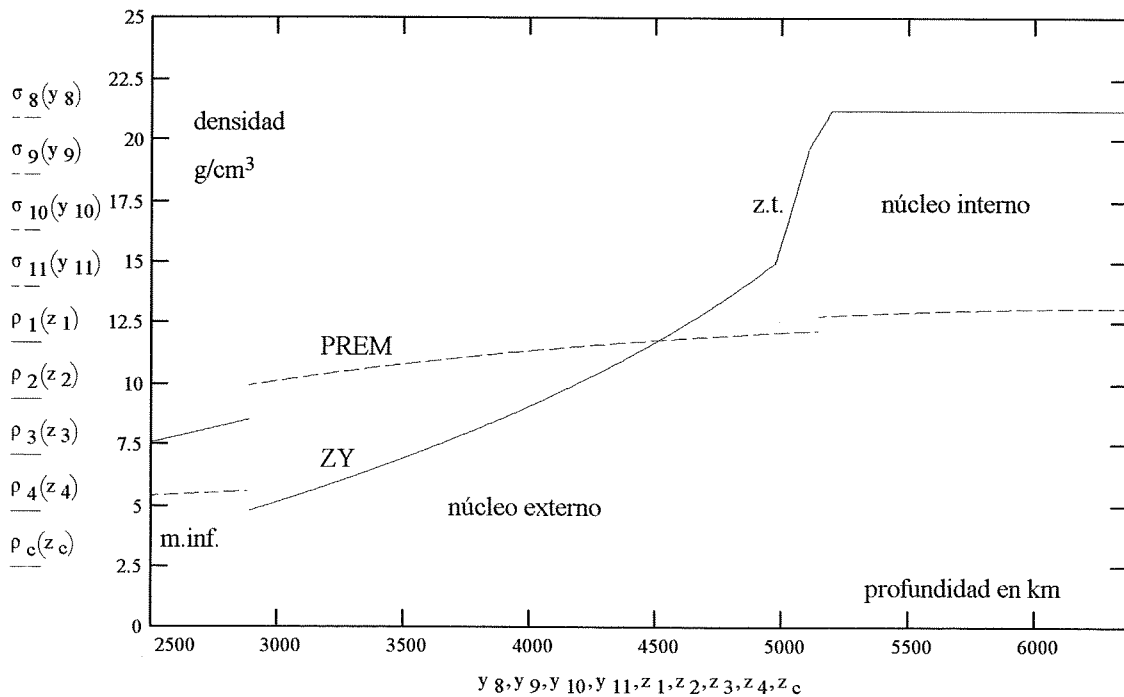


Figura 6.2: Mod. PREM y ZY. Distribución de densidades en el núcleo.

La explicación de estas diferencias radica probablemente en que nosotros no hemos supuesto que se verifiquen las relaciones

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \\ v_s &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{aligned} \quad (6.1)$$

en el interior de la Tierra, para poder obtener una distribución de densidades mediante la ecuación de Adams-Williamson

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{Gm\rho^2}{r^2\kappa}$$

que relaciona la densidad con el módulo de compresibilidad κ , el cual puede deducirse directamente de las relaciones (6.1). Esto es

$$\kappa = \rho \left(v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2 \right). \quad (6.2)$$

Estrictamente, las relaciones (6.1) determinan las velocidades v_p y v_s transmitidas por un medio continuo, homogéneo, isótropo y perfectamente elástico, deducidas en la obtención de la ecuación de Navier. Sin embargo, no podemos asegurar que tales relaciones se cumplan en un medio con simetría esférica, $\rho(r)$, $\kappa(r)$, $\mu(r)$, máxime si consideramos las enormes presiones y temperaturas a que están sometidos los materiales.

Volviendo a nuestra distribución de densidades en el interior de la Tierra, debemos resaltar que el valor correcto obtenido ($\rho_0 = 2.555 \text{ g/cm}^3$) para la densidad en la superficie terrestre, así como el del momento de inercia, son consecuencia exclusiva de los valores hallados para las constantes A_i , B_i y las dimensiones de cada estrato, siendo éstas, a su vez, el resultado de utilizar solamente datos sísmicos observados en la superficie de la Tierra. Es, pues, natural que concedamos una cierta credibilidad a nuestras hipótesis.

No obstante, debemos resaltar que en nuestro modelo existe un salto negativo de densidad al comienzo del núcleo externo que requiere explicación. De hecho, en el subsuelo hay constancia de procesos tales como el calentamiento y la fusión, que conducen a una disminución de la densidad. Recordemos la fusión parcial que se produce en los magmas basálticos con separación de un componente de menor densidad.

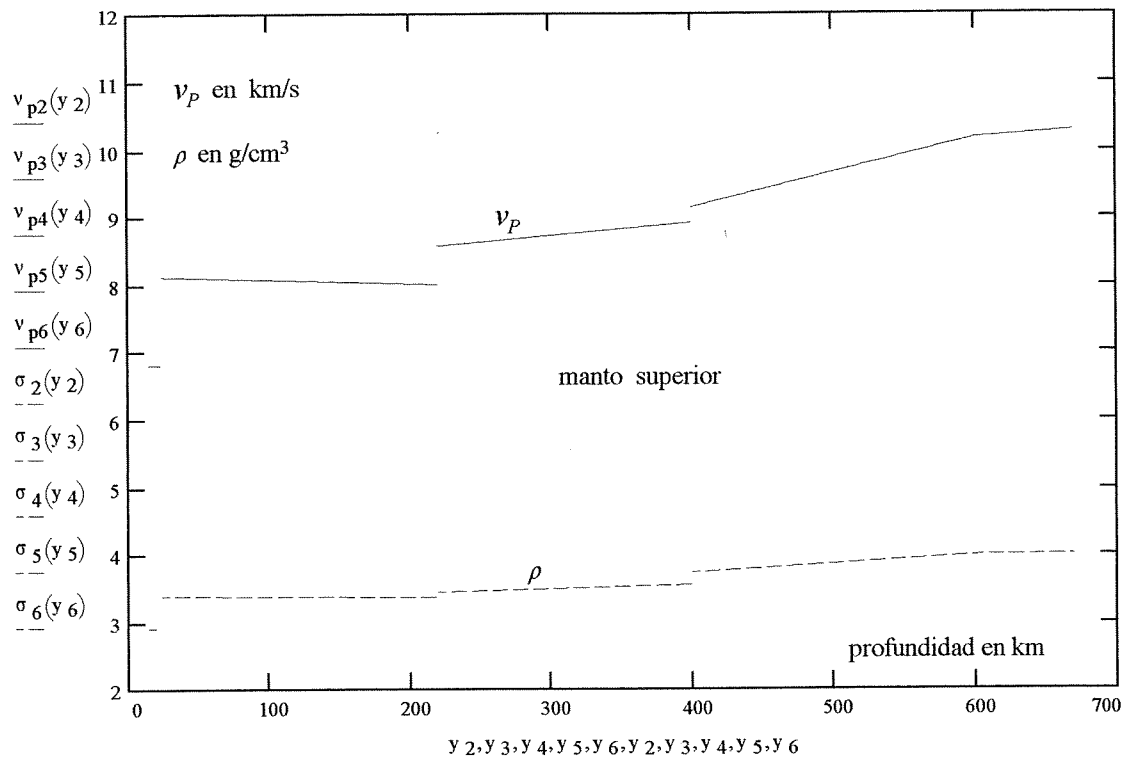


Figura 6.3: Mod. PREM. Variables v_p y ρ en el manto superior.

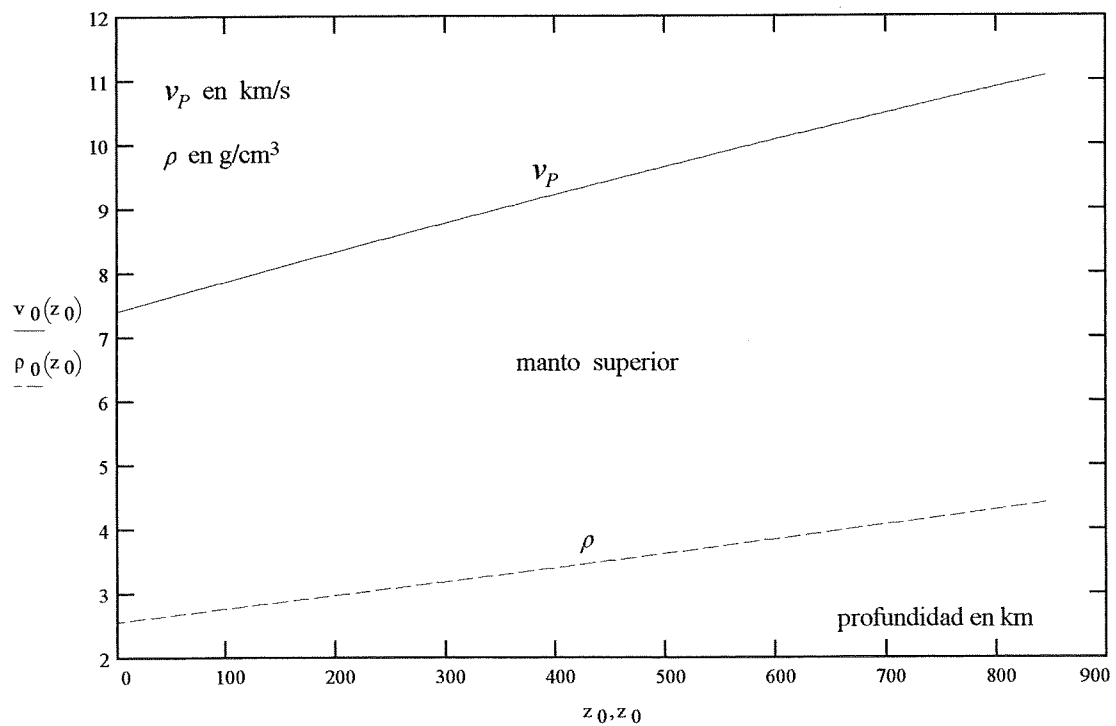


Figura 6.4: Mod. ZY. Variables v_p y ρ en el manto superior.

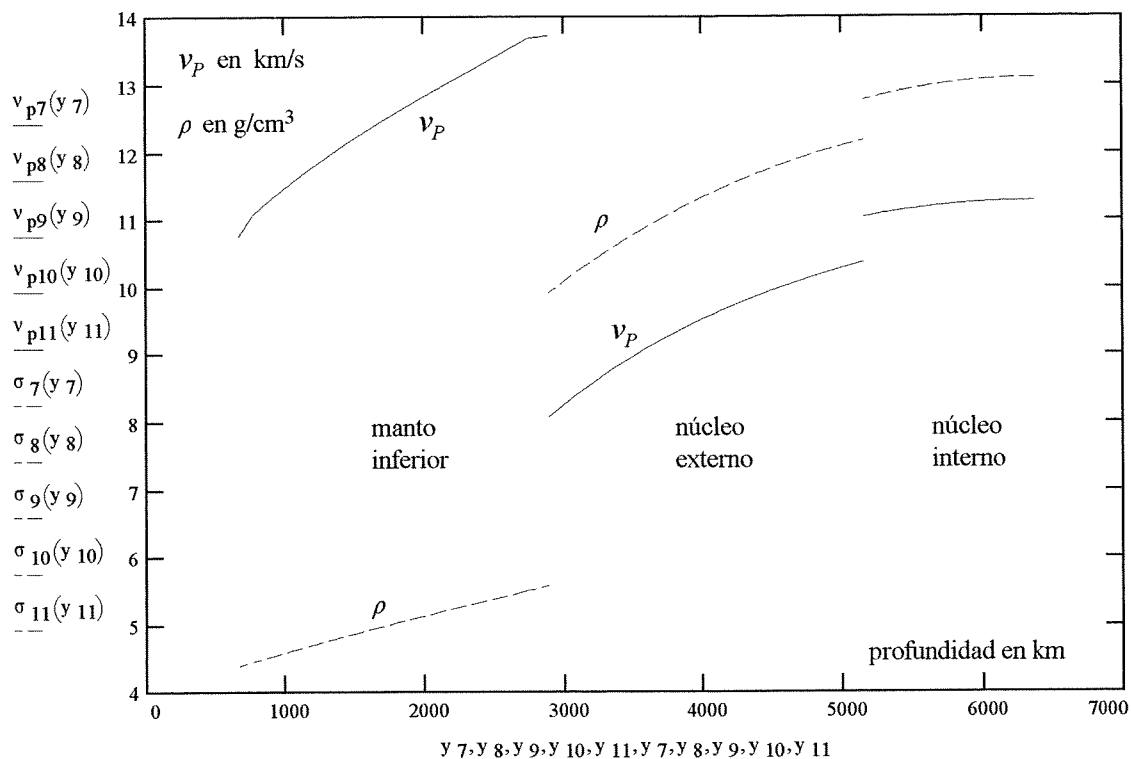


Figura 6.5: Mod. PREM. Variables v_p y ρ en el manto inferior y el núcleo.

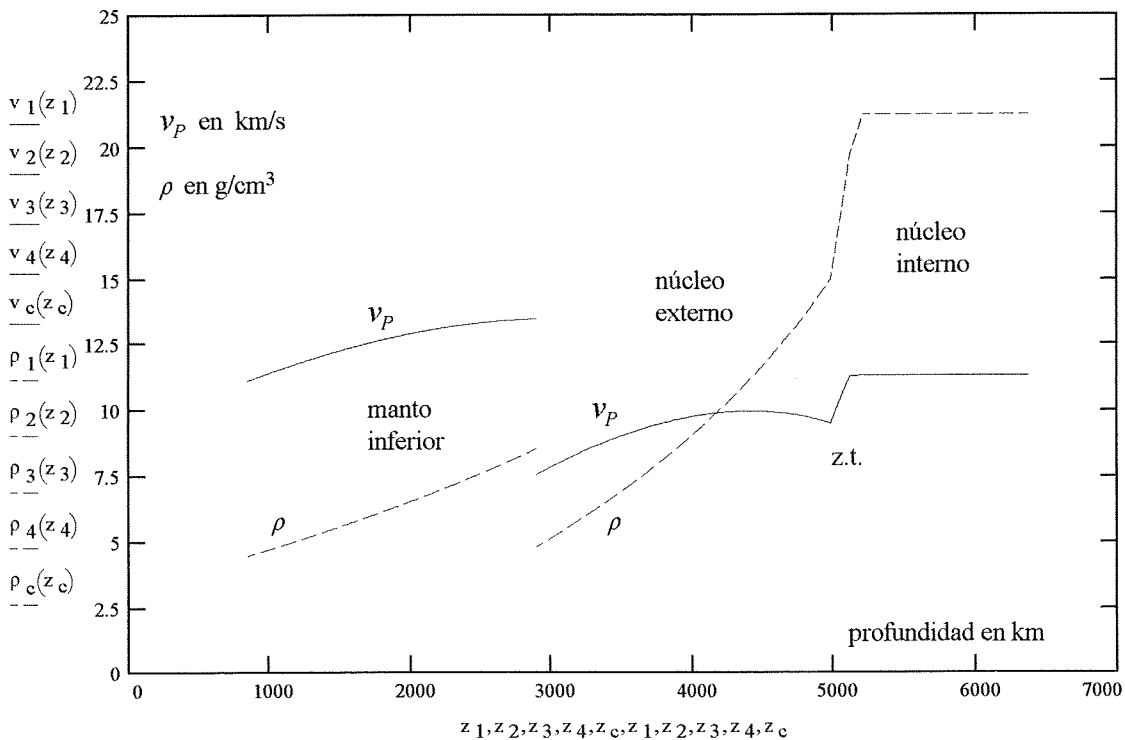


Figura 6.6: Mod. ZY. Variables v_p y ρ en el manto inferior y el núcleo.

Esto nos lleva a pensar que una posible interpretación de este salto de densidad podría ser la fusión total o parcial de materiales muy compactos de densidad alta (8.5 g/cm^3), por la presión y la temperatura, en elementos y compuestos sencillos en fase líquida, que por gravitación se hubiesen estratificado de menor a mayor densidad.

De esta forma quedaría explicado también el gradiente positivo de densidades que existe en el núcleo externo y zona de transición, donde tenemos toda la gama de densidades de los elementos químicos hasta llegar a los metales pesados con densidades de 18 y 20 g/cm^3 y alcanzar el núcleo interno con una densidad de $19.7 - 21.2 \text{ g/cm}^3$.

Con objeto de analizar la distribución de velocidades v_p y densidades ρ en los modelos PREM y ZY, fijémonos en las figuras 6.3 y 6.4. En ellas se observa que en el manto superior el comportamiento de la velocidad es directamente proporcional a la densidad, si bien el modelo PREM presenta saltos de velocidad y densidad que no se observan en el modelo ZY.

Las figuras 6.5 y 6.6 representan, respectivamente, las mismas variables v_p y ρ en el manto inferior, núcleo externo y núcleo interno. En el modelo PREM (figura 6.5) se constata un salto positivo de densidades y un salto negativo de velocidades al pasar del manto inferior al núcleo externo, mientras en el modelo ZY se observa un salto negativo en ambas variables.

Estamos de acuerdo en que la velocidad de las ondas \mathcal{P} , como ocurre en ambos modelos, debe disminuir al comienzo del núcleo externo puesto que la ausencia de transmisión de ondas \mathcal{S} indica que el núcleo externo está en fase líquida. Sin embargo, no es razonable que la densidad aumente. Lo normal es que los materiales al fundirse, acaso con la excepción del agua y el hierro, aumenten de volumen, por lo que la densidad debe disminuir.

No obstante, debemos señalar que en nuestro modelo tenemos un pequeño decrecimiento de la velocidad, con aumento de la densidad, entre el punto de máxima velocidad $v^* = 9.93 \text{ km/s}$ con $\rho^* = 11.15 \text{ g/cm}^3$ y la densidad $\rho_3 = 14.95 \text{ g/cm}^3$ al comienzo de la zona de transición, al que no hemos encontrado explicación.

Las figuras 6.7 y 6.8 representan, en un sistema cartesiano (v_p, ρ) la evolución de las velocidades con respecto a la densidad en el manto (fig. 6.7) y en el núcleo (fig. 6.8). Se comprueba así la continuidad de las velocidades en nuestro modelo y la existencia de saltos en el modelo PREM.

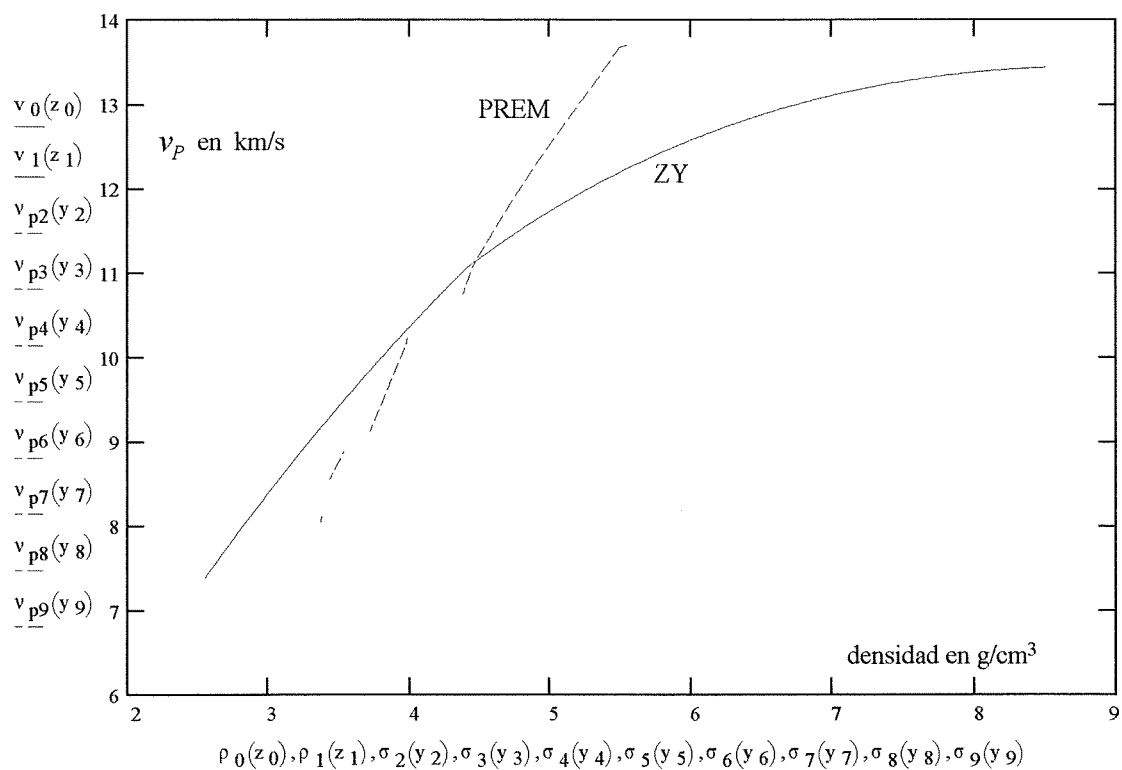


Figura 6.7: Mod. PREM y ZY. Velocidades v_p en el manto a medida que aumenta la densidad.

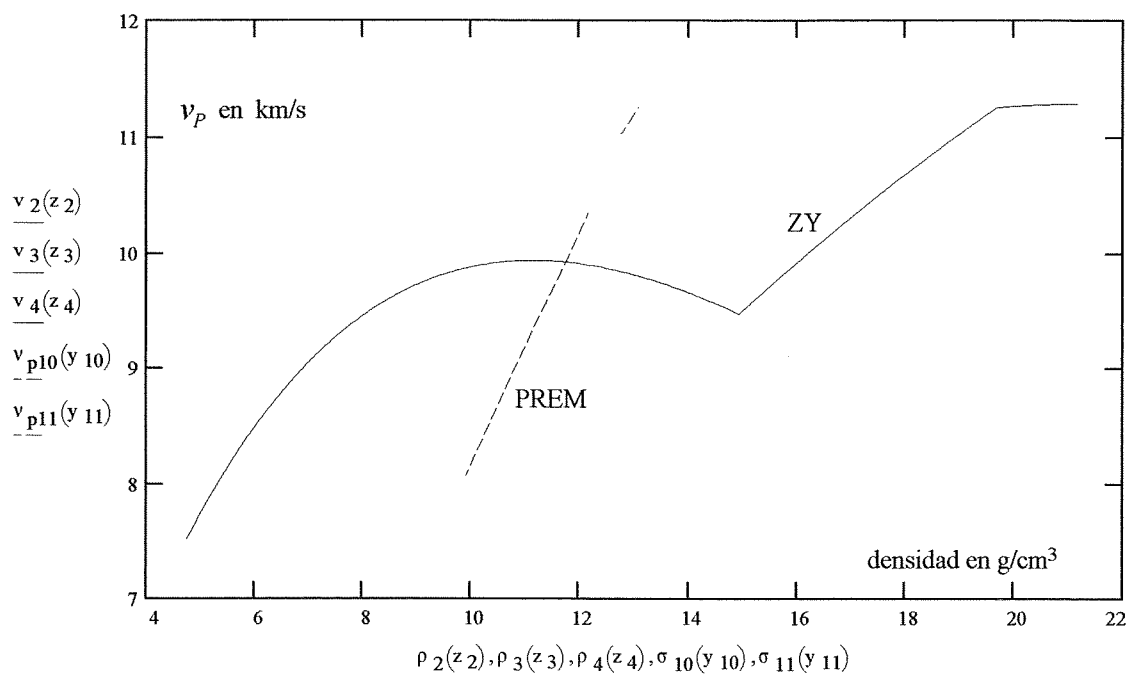


Figura 6.8: Mod. PREM y ZY. Velocidades v_p en el núcleo a medida que aumenta la densidad.

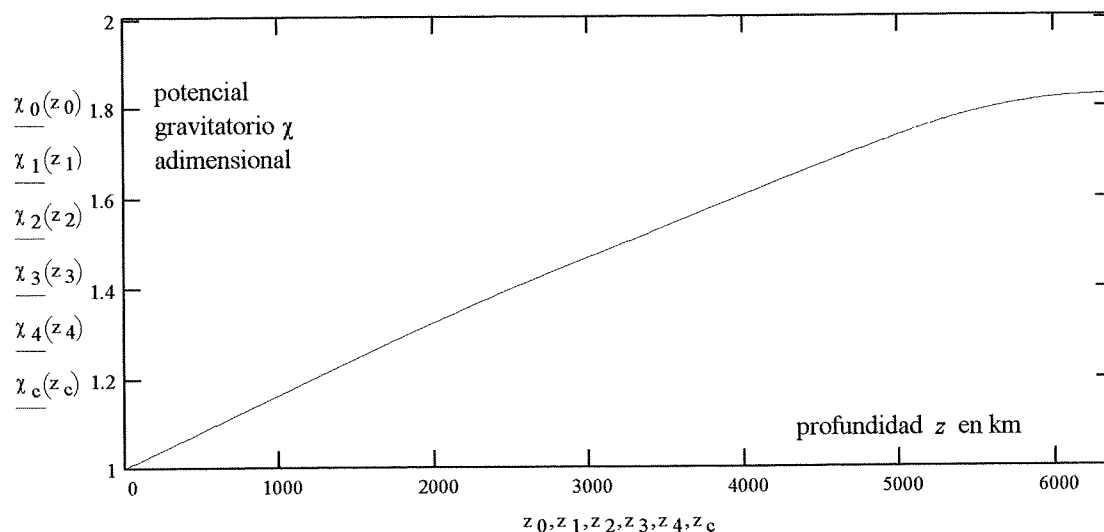


Figura 6.9: Mod. ZY. Potencial gravitatorio adimensional $\chi(z) = V(z)/V(0)$ de la Tierra.

Pasemos finalmente a conocer la masa de cada estrato y su contribución en tanto por ciento a la masa total de la Tierra. Los resultados obtenidos en nuestro modelo (m_i en 10^{24} kg) son los siguientes:

Estrato	m_i	%
Manto superior	$m_0 = 1.2871$	21.53
Manto inferior	$m_1 = 3.1812$	53.22
Núcleo externo	$m_2 = 1.2813$	21.44
Zona de transición	$m_3 = 0.0513$	0.86
Inicio núcleo interno	$m_4 = 0.0333$	0.56
Esfera de radio R_c	$m_c = 0.1428$	2.39

Como dato comparativo podemos señalar que en el PREM y otros modelos deducen que el 65 % de la masa terrestre se concentra en el manto, mientras que el nuestro predice un 75 %, como acabamos de ver. Este resultado parece lógico, puesto que nuestro modelo disminuye la densidad en el inicio del núcleo y la aumenta en el manto inferior y núcleo interno, obteniendo así un correcto momento de inercia.

Radio r (km)	Profundidad z (km)	g (m/s ²)		Radio r (km)	Profundidad z (km)	g (m/s ²)	
		PREM	ZY			PREM	ZY
$R_0 = 6371$	$z_0 = 0$	9,8156	9,8256	3480	2891	10,6823	
6356	15	9,8331	9,8396	$R_2 = 3477,7$	$z_2 = 2893,3$		8,3234
6356	15	9,8332	9,8396	3400	2,971	10,5065	8,3827
6346,6	24,4	9,8394	9,8483	3300	3071	10,2804	8,4512
6346,6	24,4	9,8394	9,8483	3200	3171	10,0464	8,5108
6256	115	9,8664	9,9276	3100	3271	9,8051	8,5612
6151	220	9,9048	10,0096	3000	3371	9,5570	8,6023
6151	220	9,9048	10,0096	2900	3471	9,3023	8,6337
6061	310	9,9361	10,0710	2800	3571	9,0414	8,6553
5971	400	9,9686	10,1240	2700	3671	8,7746	8,6668
5971	400	9,9686	10,1240	2600	3771	8,5023	8,6679
5871	500	9,9883	10,1725	2500	3871	8,2248	8,6584
5771	600	10,0038	10,2099	2400	3971	7,9425	8,6380
5771	600	10,0038	10,2099	2300	4071	7,6556	8,6065
5736	635	10,0088	10,2202	2200	4171	7,3645	8,5637
5701	670	10,0143	10,2291	2100	4271	7,0697	8,5093
5701	670	10,0143	10,2291	2000	4371	6,7715	8,4434
5600	771	9,9985	10,2464	$r^* = 1960,8$	$z^* = 4410,2$		8,4143
5600	771	9,9985	10,2464	1900	4471	6,4704	8,3657
$R'_0 = 5525,2$	$z'_0 = 845,8$		10,2510	1800	4571	6,1669	8,2764
$R_1 = 5525,2$	$z_1 = 845,8$		10,2510	1700	4671	5,8614	8,1758
5500	871	9,9836	10,2511	1600	4771	5,5548	8,0643
5400	971	9,9698	10,2473	1500	4871	5,2477	7,9428
5300	1071	9,9573	10,2365	1400	4971	4,9413	7,8129
5200	1171	9,9467	10,2184	$R'_2 = 1394,3$	$z'_2 = 4976,7$		7,8054
5100	1271	9,9383	10,1929	$R_3 = 1394,3$	$z_3 = 4976,7$		7,8054
5000	1371	9,9326	10,1594	1375	4996		7,7754
4900	1471	9,9301	10,1177	1350	5021		7,7241
4800	1571	9,9314	10,0675	1325	5046		7,6578
4700	1671	9,9369	10,0082	1300	5071	4,6368	7,5758
4600	1771	9,9474	9,9395	1275	5096		7,4773
4500	1871	9,9635	9,8609	$R'_3 = 1259,6$	$z'_3 = 5111,4$		7,4079
4400	1971	9,9859	9,7718	$R_4 = 1259,6$	$z_4 = 5111,4$		7,4079
4300	2071	10,0156	9,6716	1221,5	5149,5	4,4003	7,2188
4200	2171	10,0535	9,5597	1221,5	5149,5	4,4002	7,2188
4100	2271	10,1006	9,4353	1200	5171	4,3251	7,1035
4000	2371	10,1580	9,2977	$R'_4 = 1171,7$	$z'_4 = 5199,3$		6,9417
3900	2471	10,2272	9,1460	$R_c = 1171,7$	$z_c = 5199,3$		6,9417
3800	2571	10,3095	8,9790	1100	5271	3,9739	6,5170
3700	2671	10,4066	8,7958	1000	5371	3,6203	5,9246
3630	2741	10,4844	8,6571	800	5571	2,1862	4,7397
3630	2741	10,4844	8,6571	600	5771	2,1862	3,5548
3600	2771	10,5204	8,5949	500	5871	1,8239	2,9624
3500	2871	10,6532	8,3751	400	5971	1,4604	2,3699
3480	2891	10,6823	8,3287	200	6171	0,7311	1,1850
$R'_1 = 3477,7$	$z'_1 = 2893,3$		8,3234	0	6371	0,0000	0,0000

Tabla 6.4: Mod. PREM y ZY. Valores de la gravedad g en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.

Radio r (km)	Profundidad z (km)	p (10^{10} ·N/m ²)		Radio r (km)	Profundidad z (km)	p (10^{10} ·N/m ²)	
		PREM	ZY			PREM	ZY
$R_0 = 6371$	$z_0 = 0$	0,0000	0,0000	3480	2891	13,57510	
6356	15	0,03640	0,0379	$R_2 = 3477,7$	$z_2 = 2893,3$		15,3124
6356	15	0,03370	0,0379	3400	2.971	14,41941	15,6296
6346,6	24,4	0,06040	0,0619	3300	3071	15,46982	16,0654
6346,6	24,4	0,06043	0,0619	3200	3171	16,51209	16,5331
6256	115	0,36183	0,3037	3100	3271	17,54418	17,0336
6151	220	0,71108	0,6076	3000	3371	18,56409	17,5677
6151	220	0,71115	0,6076	2900	3471	19,56991	18,1361
6061	310	1,02027	0,8885	2800	3571	20,55978	18,7394
5971	400	1,33520	1,1886	2700	3671	21,53189	19,3784
5971	400	1,33527	1,1886	2600	3771	22,48453	20,0536
5871	500	1,71311	1,5448	2500	3871	23,41603	20,7657
5771	600	2,10425	1,9251	2400	3971	24,32484	21,5151
5771	600	2,10426	1,9251	2300	4071	25,20942	22,3023
5736	635	2,24364	2,0639	2200	4171	26,06838	23,1277
5701	670	2,38334	2,2057	2100	4271	26,90035	23,9918
5701	670	2,38342	2,2057	2000	4371	27,70407	24,8947
5600	771	2,82930	2,6315	$r^* = 1960,8$	$z^* = 4410,2$		25,2596
5600	771	2,82930	2,6315	1900	4471	28,47839	25,8369
$R'_0 = 5525,2$	$z'_0 = 845,8$		2,9630	1800	4571	29,22221	26,8185
$R_1 = 5525,2$	$z_1 = 845,8$		2,9630	1700	4671	29,93457	27,8399
5500	871	3,27623	3,0773	1600	4771	30,61461	28,9014
5400	971	3,72852	3,5418	1500	4871	31,26159	30,0035
5300	1071	4,18606	4,0227	1400	4971	31,87493	31,1468
5200	1171	4,64882	4,5200	$R'_2 = 1394,3$	$z'_2 = 4976,7$		31,2130
5100	1271	5,11676	5,0336	$R_3 = 1394,3$	$z_3 = 4976,7$		31,2130
5000	1371	5,58991	5,5634	1375	4996		31,4428
4900	1471	6,06830	6,1091	1350	5021		31,7532
4800	1571	6,55202	6,6706	1325	5046		32,0778
4700	1671	7,04119	7,2476	1300	5071	32,45420	32,4159
4600	1771	7,53598	7,8397	1275	5096		32,7668
4500	1871	8,03660	8,4464	$R'_3 = 1259,6$	$z'_3 = 5111,4$		32,9892
4400	1971	8,54332	9,0673	$R_4 = 1259,6$	$z_4 = 5111,4$		32,9892
4300	2071	9,05646	9,7018	1221,5	5149,5	32,88502	33,5459
4200	2171	9,57641	10,3492	1221,5	5149,5	32,88513	33,5459
4100	2271	10,10363	11,0086	1200	5171	33,00480	33,8616
4000	2371	10,63864	11,6791	$R'_4 = 1171,7$	$z'_4 = 5199,3$		34,2780
3900	2471	11,18207	12,3597	$R_c = 1171,7$	$z_c = 5199,3$		34,2780
3800	2571	11,73465	13,0491	1100	5271	33,53596	35,3005
3700	2671	12,29719	13,7459	1000	5371	34,02383	36,6191
3630	2741	12,69741	14,2371	800	5571	34,86665	38,8795
3630	2741	12,69742	14,2371	600	5771	35,52783	40,6377
3600	2771	12,87067	14,4484	500	5871	35,78894	41,3284
3500	2871	13,45619	15,1548	400	5971	36,00315	41,8935
3480	2891	13,57509	15,2964	200	6171	36,28960	42,6470
$R'_1 = 3477,7$	$z'_1 = 2893,3$		15,3124	0	6371	36,38520	42,8982

Tabla 6.5: Mod. PREM y ZY. Valores de la presión p en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.

6.2.2 Potencial, gravedad y presión

Potencial

Utilizando las fórmulas 3.29 y 3.30, hemos calculado el potencial gravitatorio adimensional $\chi(r) = V(r)/V(R_0)$ creado en cualquier punto del interior de la Tierra, obteniendo valores discretos de dicho potencial, que se consignan más adelante en la tabla general 6.9 y se representan en la figura 6.9, con respecto a la profundidad.

Gravedad

Para poder comparar los valores de la gravedad, obtenidos a distintas profundidades en ambos modelos, hemos tomado los datos que proporciona el modelo PREM de 100 en 100 km a partir de 771 km de profundidad. Los datos para las profundidades de 71 km, 171 km y 671 km han sido obtenidos por interpolación. Nuestros valores han sido calculados por las fórmulas 3.39 y 3.40. Los resultados obtenidos figuran numéricamente en la tabla 6.4 y están representados en la figura 6.10. En ambos modelos se comprueba la existencia de discontinuidades de 2ª especie en la superficie de separación manto-núcleo y un distinto comportamiento de las curvas en su recorrido, debido a las diferentes distribuciones de densidad, de modo que el descenso de la gravedad hacia cero se inicia al comienzo del núcleo en el modelo PREM y al comienzo de la zona de transición en nuestro modelo.

Presión

Utilizando las ecuaciones desarrolladas en la sección 3.5 para la presión $p(r)$, e imponiendo condiciones de continuidad en las superficies de separación de los estratos, es decir

$$p_k(R'_k) = p_{k+1}(R_{k+1}), \quad (0 \leq k \leq n-1) \quad p_n(R'_n) = p(R_c),$$

hemos calculado, con el mismo criterio utilizado en el caso de la gravedad, los valores de la presión consignados en la tabla 6.5 y que están representados a su vez en la figura 6.11. Aunque las curvas obtenidas en ambos casos son bastante similares, se observa: 1) Que la presión en el núcleo externo es más baja en nuestro modelo que en el modelo PREM y 2) Que en el centro de la Tierra se detecta la mayor diferencia de presiones entre ambos modelos (3.6 millones de atmósferas en el modelo PREM y 4.2 millones de atmósferas en el nuestro).

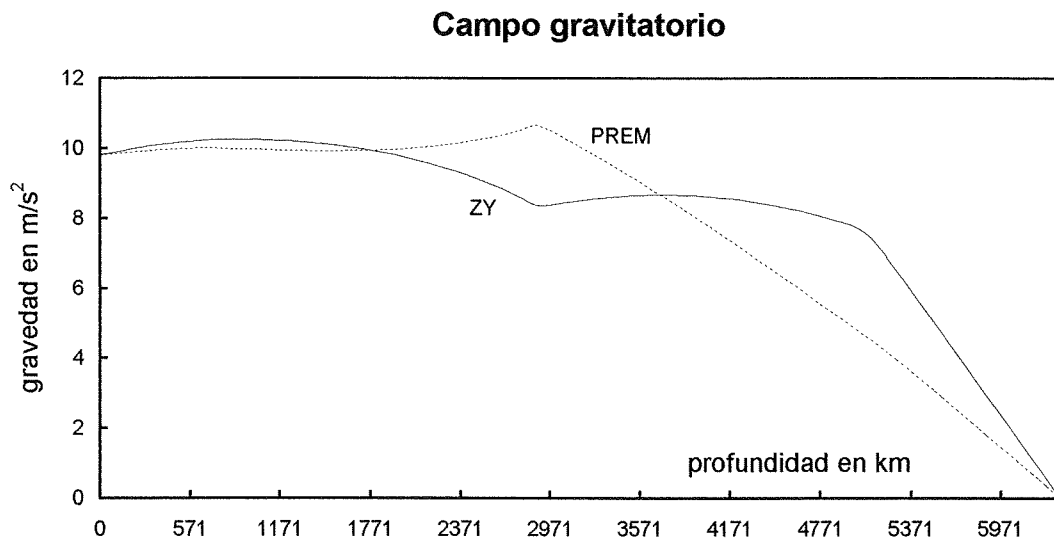


Figura 6.10: Mod. PREM y ZY. Gravedad en el interior de la Tierra.

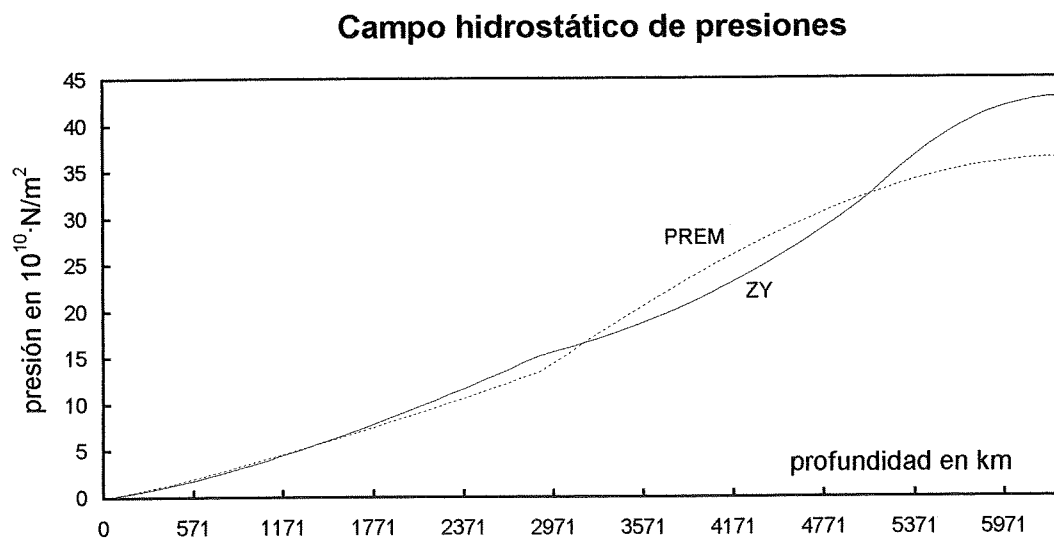


Figura 6.11: Mod. PREM y ZY. Presión en el interior de la Tierra.

6.2.3 Módulo de compresibilidad κ

En la tabla 6.6 se consignan los valores de $\kappa(r)$ hallados en función de las velocidades v_p y v_s por medio de la relación 6.2, en el modelo PREM, y haciendo uso de la ecuación 3.50 en nuestro modelo. Los resultados están representados en la figura 6.12.

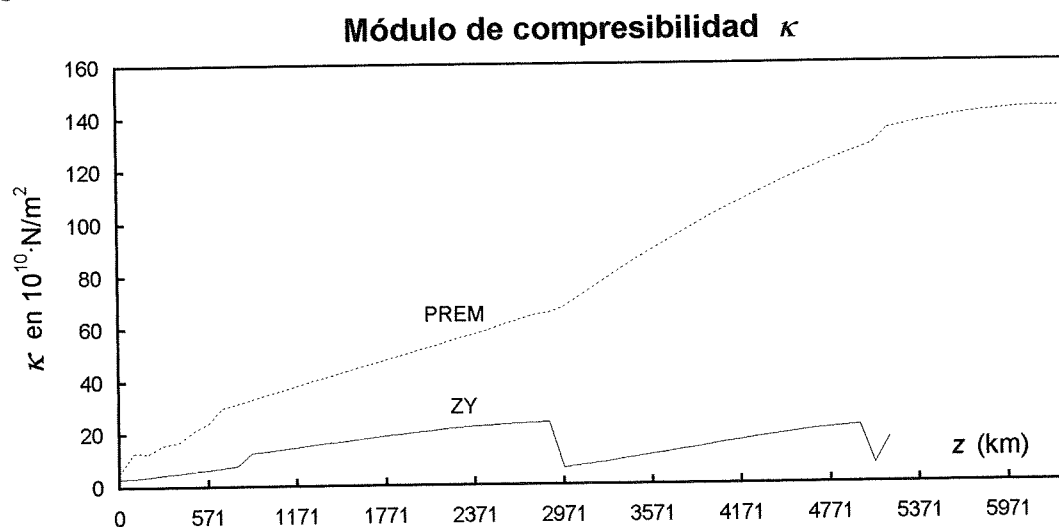


Figura 6.12: Mod. PREM y ZY. Módulo κ en función de la profundidad.

Si nos fijamos en la siguiente tabla de valores de ρ y κ para algunos materiales:

Material	ρ (g/cm ³)	κ (10 ¹⁰ N/m ²)
Agua	1.0	0.2
Cuarzo	2.6	2.7
Aluminio	2.7	7.0
Hierro	7.8	11.3
Cobre	8.9	11.7
Niquel	8.9	16.4
Plomo	11.3	3.3
Mercurio	13.6	2.8
Oro	19.3	16.6

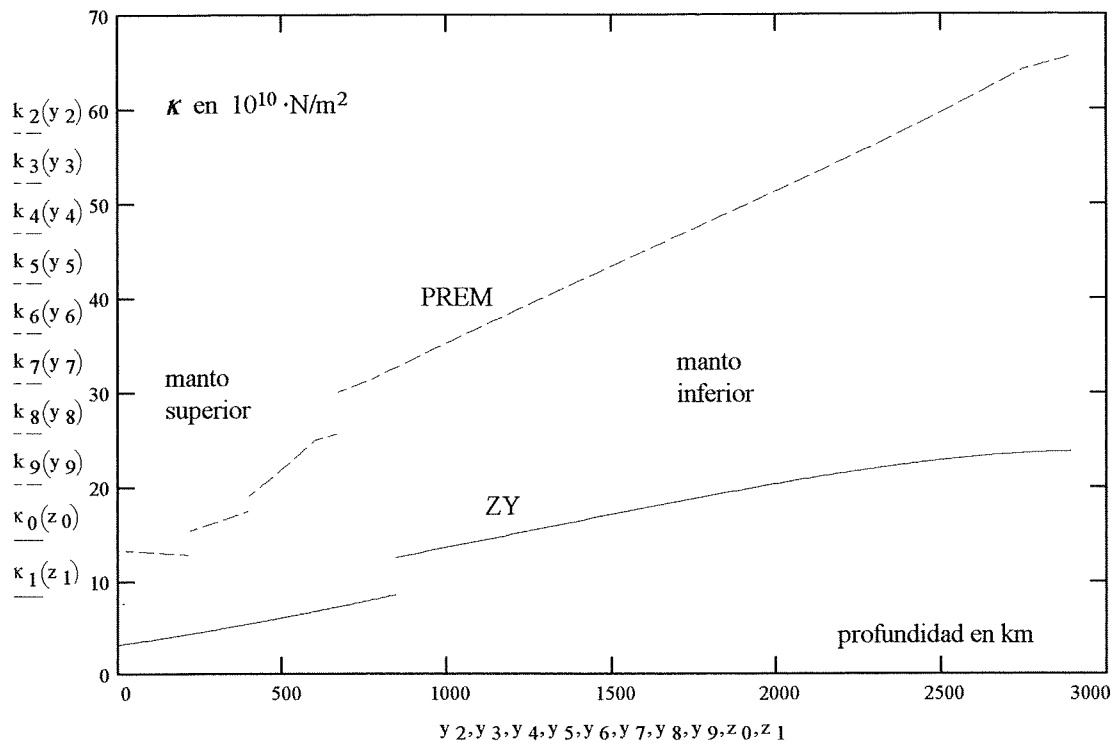


Figura 6.13: Mod. PREM y ZY. Módulo de compresibilidad κ en el manto.

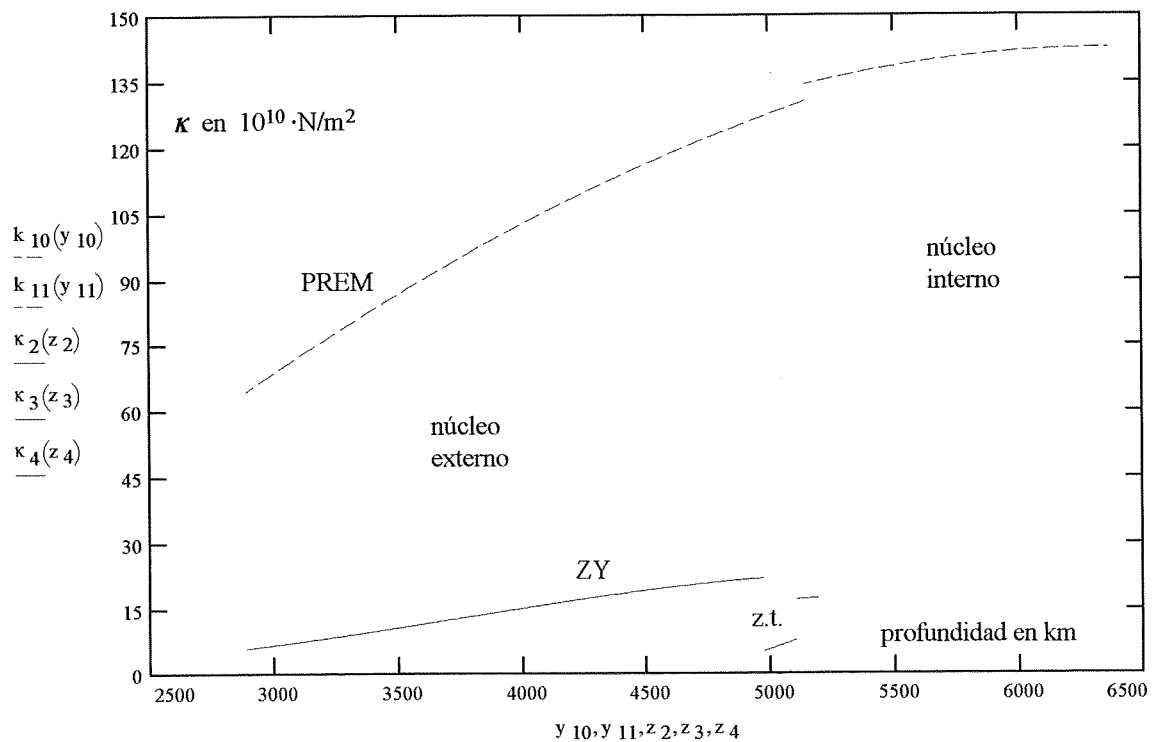


Figura 6.14: Mod. PREM y ZY. Módulo de compresibilidad κ en el núcleo.

comprobamos que, mientras nuestros valores de κ están dentro del rango de valores medidos en los laboratorios en condiciones adiabáticas, los valores del modelo PREM son mucho mayores.

Los mismos resultados, representados con más detalle en las figuras 6.13 (para el manto) y 6.14 (para el núcleo), indican que los valores obtenidos de κ en ambos modelos no son comparables, debido a la distinta distribución de densidades y a la diferente forma de obtener el módulo κ .

Nuestras conclusiones se refuerzan si analizamos la variación de κ con respecto a la presión, es decir $d\kappa/dp$, cuyos resultados están consignados en la tabla 6.7 y representados en la figura 6.15, donde se observa una gran irregularidad en la curva del modelo PREM frente a una mayor uniformidad de nuestro modelo.

En la figura 6.16 se han representado, para el manto, las funciones v_p , κ y $d\kappa/dp$, con respecto a la densidad ρ . En ella vemos que a medida que ρ aumenta con la profundidad, también lo hacen v_p y κ , en tanto que $d\kappa/dp$ disminuye. Cuando se llega al extremo inferior del manto, los materiales de densidad 8.5 g/cm^3 ya no aumentan su resistencia a la compresión ($d\kappa/dp$ es prácticamente cero) y se produce posiblemente un cambio de fase sólida a fase líquida, como ya adelantábamos en el análisis de la densidad.

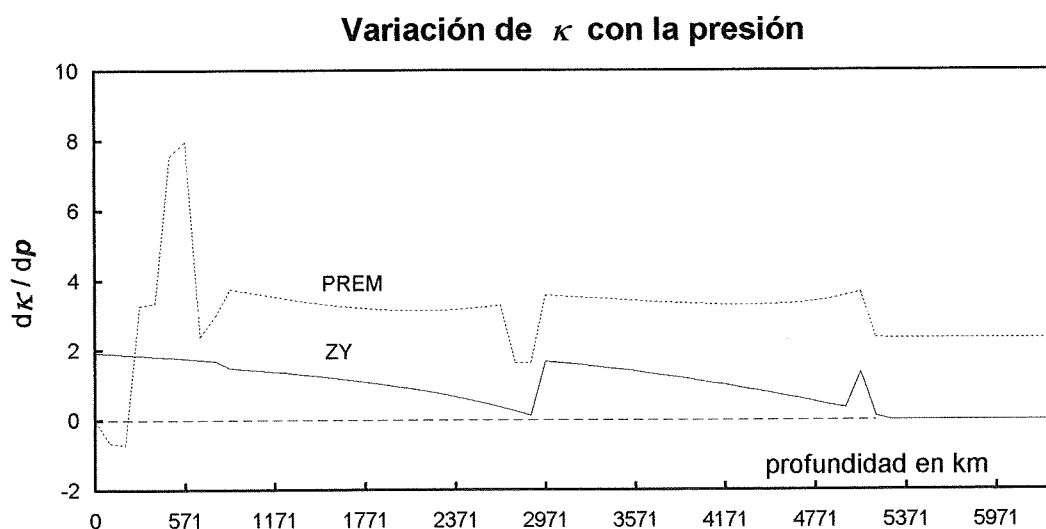


Figura 6.15: Mod. PREM y ZY. Valores de la función $d\kappa/dp$ en el interior de la Tierra.

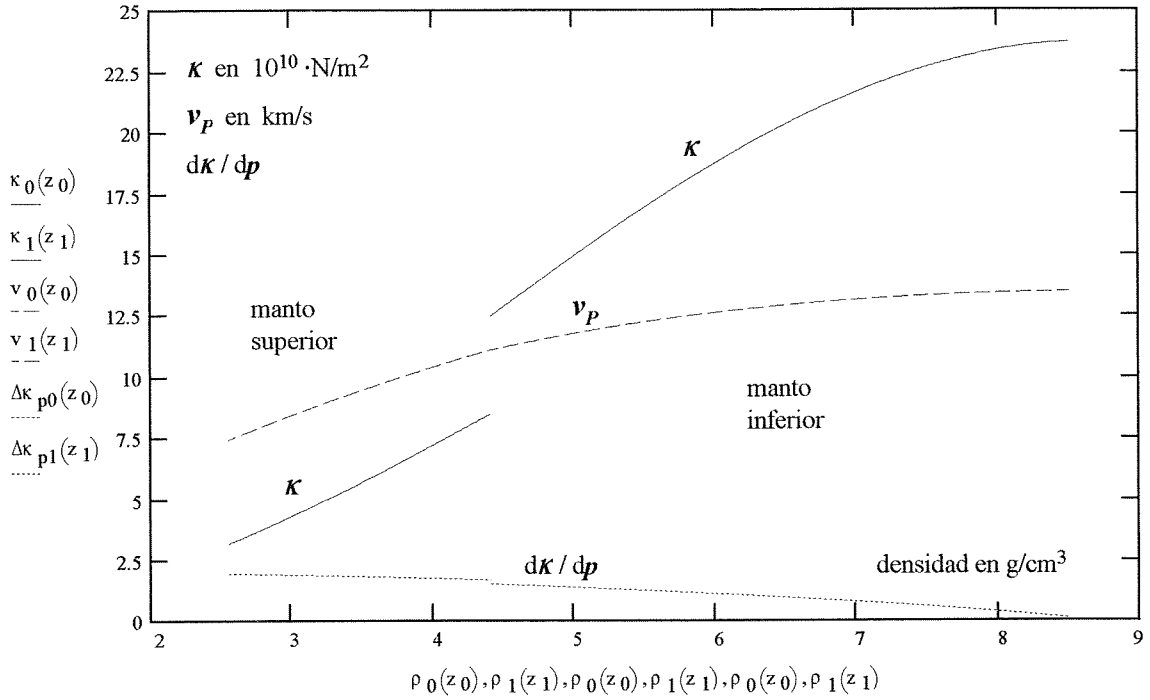


Figura 6.16: Mod. ZY. Valores de las funciones κ , v_p y $d\kappa/dp$ en el manto con respecto a la densidad.

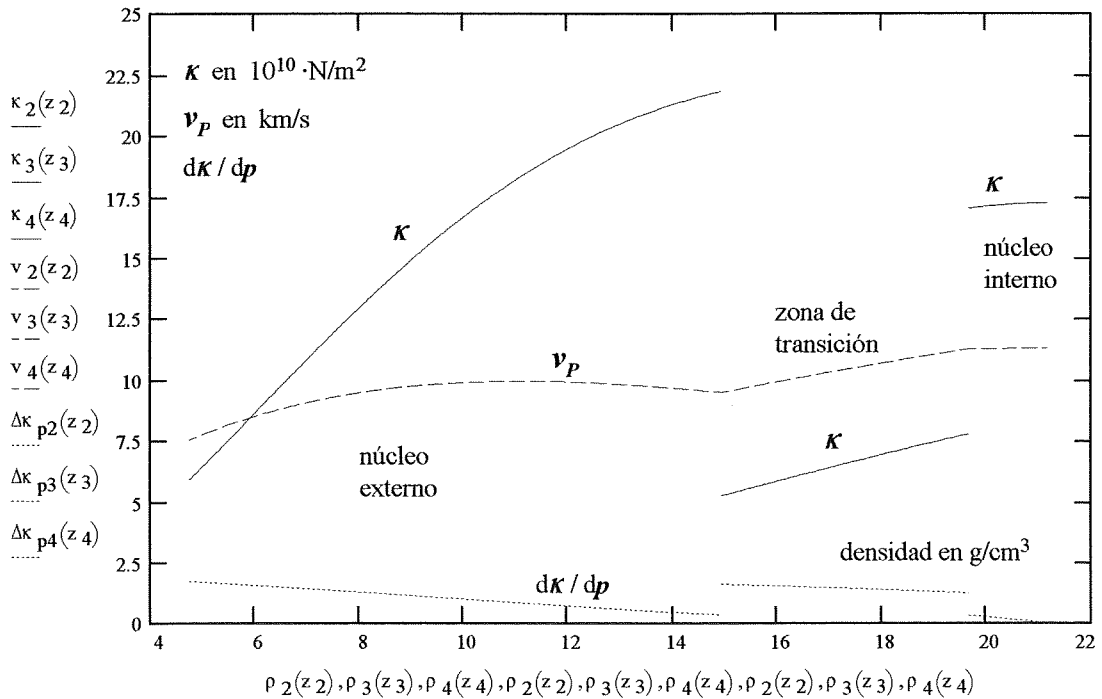


Figura 6.17: Mod. ZY. Valores de las funciones κ , v_p y $d\kappa/dp$ en el núcleo con respecto a la densidad.

En la figura 6.17, donde se representa el mismo proceso para el núcleo, se comprueba análogamente que los materiales en fase líquida, con una densidad y una menor resistencia a la compresión que en los sólidos, se comportan del mismo modo hasta que llegamos a la zona de transición, donde los materiales cambian de fase, transformándose posiblemente en un fluido muy viscoso, con disminución drástica del módulo κ , en tanto que la densidad aumenta rápidamente con la profundidad.

Se constata así que, mientras este supuesto fluido viscoso aumenta su densidad de 14.9 a 19.6 (g/cm³), su resistencia a la compresión también crece, aunque de modo más lento, desde 524 a 777 kbar, para saltar después a 1702 kbar en el inicio del núcleo interno, donde se supone que la materia pasa de nuevo a fase sólida, puesto que ahora propaga las ondas elásticas \mathcal{S} .

En el inicio del núcleo interno (estrato E_4), el comportamiento de κ es similar, aunque la resistencia de los materiales a la compresión aumenta muy lentamente y se aminora a medida que nos acercamos a la esfera de radio $R_c = 1171.7$ km, donde la densidad es constante ($\rho = 21.2$ g/cm³) y la materia sólida deja de comprimirse. Así se comprueba que en el extremo inferior del estrato E_4 , es decir para el radio $R'_4 = R_c$, la función $d\kappa/dp$ es nula, lo que parece confirmar que la materia, de densidad constante, deja de comprimirse, por llegar a sus límites de compresibilidad.

Para llegar a esta conclusión, recordemos que en la prospección del núcleo interno se encontraban mejores diferencias de tiempos $T_0 - T_c$ para las trayectorias de las ondas \mathcal{PKIKP} cuando se imponía la condición de máximo $w'_4 = A_4$ en el interior del estrato E_4 .

Esta restricción, que ha estado motivada por el ajuste óptimo de los tiempos calculados con respecto a los observados, junto con la condición general de discontinuidad de 2ª especie, es la que nos conduce a comprobar la igualdad

$$\left(\frac{d\kappa_4(r)}{dp_4(r)} \right)_{R'_4} = 0$$

puesto que, según se comprueba por medio de la fórmula 3.55 y las condiciones impuestas, se verifica

$$\left(\frac{d\kappa_4(r)}{dp_4(r)} \right)_{R'_4} = 2 + \frac{\rho'_4}{A_4 H} - 4\pi G \frac{\kappa'_4}{(g'_4)^2} = 2 + \frac{w'_4}{A_4} - 3 \frac{w'_4}{A_4} = 0$$

Radio r (km)	Profundidad z (km)	κ ($10^{10} \cdot \text{N/m}^2$)		Radio r (km)	Profundidad z (km)	κ ($10^{10} \cdot \text{N/m}^2$)	
		PREM	ZY			PREM	ZY
$R_0 = 6371$	$z_0 = 0$	5,20	3,14	3480	2891	64,41	
6356	15	5,20	3,21	$R_2 = 3477,7$	$z_2 = 2893,3$	64,50	5,88
6356	15	7,53	3,21	3400	2971	67,43	6,42
6346,6	24,4	7,53	3,26	3300	3071	71,16	7,15
6346,6	24,4	13,15	3,26	3200	3171	74,84	7,90
6256	115	12,95	3,72	3100	3271	78,46	8,69
6151	220	12,70	4,29	3000	3371	82,02	9,50
6151	220	15,29	4,29	2900	3471	85,50	10,34
6061	310	16,30	4,82	2800	3571	88,89	11,19
5971	400	17,35	5,37	2700	3671	92,20	12,07
5971	400	18,99	5,37	2600	3771	95,42	12,94
5871	500	21,81	6,01	2500	3871	98,55	13,83
5771	600	24,89	6,68	2400	3971	101,58	14,71
5771	600	24,89	6,68	2300	4071	104,51	15,59
5736	635	25,23	6,93	2200	4171	107,35	16,44
5701	670	25,56	7,17	2100	4271	110,09	17,28
5701	670	29,99	7,17	2000	4371	112,73	18,09
5600	771	31,33	7,90	$r^* = 1960,8$	$z^* = 4410,2$	113,74	18,39
5600	771	31,33	7,90	1900	4471	115,29	18,85
$R'_0 = 5525,2$	$z'_0 = 845,8$	32,61	8,46	1800	4571	117,75	19,57
$R_1 = 5525,2$	$z_1 = 845,8$	32,61	12,45	1700	4671	120,13	20,23
5500	871	33,03	12,62	1600	4771	122,42	20,83
5400	971	34,71	13,31	1500	4871	124,64	21,35
5300	1071	36,38	14,00	1400	4971	126,79	21,79
5200	1171	38,03	14,70	$R'_2 = 1394,3$	$z'_2 = 4976,7$	126,91	21,81
5100	1271	39,66	15,39	$R_3 = 1394,3$	$z_3 = 4976,7$	126,91	5,24
5000	1371	41,28	16,09	1375	4996	127,32	5,60
4900	1471	42,88	16,78	1350	5021	127,84	6,08
4800	1571	44,48	17,47	1325	5046	128,36	6,55
4700	1671	46,07	18,14	1300	5071	128,88	7,03
4600	1771	47,66	18,80	1275	5096	129,39	7,49
4500	1871	49,25	19,44	$R'_3 = 1259,6$	$z'_3 = 5111,4$	129,70	7,77
4400	1971	50,85	20,06	$R_4 = 1259,6$	$z_4 = 5111,4$	129,70	17,02
4300	2071	52,46	20,65	1221,5	5149,5	130,47	17,17
4200	2171	54,09	21,21	1221,5	5149,5	134,34	17,17
4100	2271	55,75	21,73	1200	5171	134,62	17,22
4000	2371	57,44	22,20	$R'_4 = 1171,7$	$z'_4 = 5199,3$	134,98	17,24
3900	2471	59,17	22,63	$R_c = 1171,7$	$z_c = 5199,3$	134,98	∞
3800	2571	60,95	22,99	1100	5271	135,86	∞
3700	2671	62,79	23,29	1000	5371	137,01	∞
3630	2741	64,12	23,46	800	5571	138,98	∞
3630	2741	64,12	23,46	600	5771	140,53	∞
3600	2771	64,40	23,52	500	5871	141,14	∞
3500	2871	65,37	23,65	400	5971	141,64	∞
3480	2891	65,56	23,67	200	6171	142,31	∞
$R'_1 = 3477,7$	$z'_1 = 2893,3$		23,67	0	6371	142,53	∞

Tabla 6.6: Mod. PREM y ZY. Valores de κ en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.

Radio r (km)	Profundidad z (km)	$d\kappa/d\rho$		Radio r (km)	Profundidad z (km)	$d\kappa/d\rho$	
		PREM	ZY			PREM	ZY
$R_0 = 6371$	$z_0 = 0$	0,0000	1,9236	3480	2891	3,5769	
6356	15	0,0000	1,9204	$R_2 = 3477,7$	$z_2 = 2893,3$		1,7150
6356	15	0,0000	1,9204	3400	2.971	3,5629	1,6834
6346,6	24,4	0,0000	1,9184	3300	3071	3,5437	1,6406
6346,6	24,4	-0,6428	1,9184	3200	3171	3,5215	1,5954
6256	115	-0,6868	1,8980	3100	3271	3,4972	1,5479
6151	220	-0,7364	1,8722	3000	3371	3,4714	1,4980
6151	220	3,2305	1,8722	2900	3471	3,4448	1,4457
6061	310	3,3017	1,8481	2800	3571	3,4180	1,3908
5971	400	3,3718	1,8221	2700	3671	3,3919	1,3333
5971	400	7,2633	1,8221	2600	3771	3,3670	1,2732
5871	500	7,6761	1,7911	2500	3871	3,3441	1,2103
5771	600	8,0910	1,7575	2400	3971	3,3242	1,1447
5771	600	2,3734	1,7575	2300	4071	3,3080	1,0762
5736	635	2,3868	1,7452	2200	4171	3,2966	1,0047
5701	670	2,4000	1,7325	2100	4271	3,2911	0,9304
5701	670	3,0358	1,7325	2000	4371	3,2927	0,8531
5600	771	2,9819	1,6940	$r^* = 1960,8$	$z^* = 4410,2$		0,8220
5600	771	3,8403	1,6940	1900	4471	3,3028	0,7729
$R'_0 = 5525,2$	$z'_0 = 845,8$		1,6636	1800	4571	3,3230	0,6901
$R_1 = 5525,2$	$z_1 = 845,8$		1,5050	1700	4671	3,3552	0,6050
5500	871	3,7582	1,4959	1600	4771	3,4017	0,5181
5400	971	3,6775	1,4587	1500	4871	3,4649	0,4305
5300	1071	3,5989	1,4198	1400	4971	3,5478	0,3436
5200	1171	3,5236	1,3790	$R'_2 = 1394,3$	$z'_2 = 4976,7$		0,3387
5100	1271	3,4527	1,3362	$R_3 = 1394,3$	$z_3 = 4976,7$		1,6010
5000	1371	3,3871	1,2913	1375	4996		1,5590
4900	1471	3,3276	1,2440	1350	5021		1,5003
4800	1571	3,2750	1,1942	1325	5046		1,4360
4700	1671	3,2302	1,1417	1300	5071	3,6539	1,3654
4600	1771	3,1935	1,0862	1275	5096		1,2878
4500	1871	3,1657	1,0273	$R'_3 = 1259,6$	$z'_3 = 5111,4$		1,2359
4400	1971	3,1472	0,9648	$R_4 = 1259,6$	$z_4 = 5111,4$		0,3269
4300	2071	3,1383	0,8981	1221,5	5149,5	3,7545	0,1961
4200	2171	3,1393	0,8268	1221,5	5149,5	2,3486	0,1961
4100	2271	3,1503	0,7502	1200	5171	2,3480	0,1153
4000	2371	3,1716	0,6678	$R'_4 = 1171,7$	$z'_4 = 5199,3$		0
3900	2471	3,2029	0,5785	$R_0 = 1171,7$	$z_0 = 5199,3$		0
3800	2571	3,2443	0,4813	1100	5271	2,3460	0
3700	2671	3,2957	0,3749	1000	5371	2,3443	0
3630	2741	3,3344	0,2941	800	5571	2,3414	0
3630	2741	1,6420	0,2941	600	5771	2,3391	0
3600	2771	1,6424	0,2576	500	5871	2,3382	0
3500	2871	1,6434	0,1275	400	5971	2,3375	0
3480	2891	1,6435	0,0997	200	6171	2,3365	0
$R'_1 = 3477,7$	$z'_1 = 2893,3$		0,0965	0	6371	2,3360	0

Tabla 6.7: Mod. PREM y ZY. Valores de $d\kappa/d\rho$ en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.

6.2.4 Variación de la densidad con respecto a la presión

Para comprender mejor el posible comportamiento de los materiales del interior de la Tierra, hemos representado en las figuras 6.18, 6.19, 6.20 y 6.21 la función $\delta = d\rho/dp$ con respecto a la densidad, diferenciando el manto del núcleo en ambos modelos. Los resultados numéricos correspondientes a dichas figuras han sido incluidos en la tabla 6.8.

En ambos modelos se aprecia que la función δ disminuye cuando la densidad aumenta, a causa de una mayor resistencia de los materiales a la compresión, tal como vimos en la subsección anterior. Sin embargo, en nuestro modelo los cambios de fase están más diferenciados y sujetos, por ello, a otras posibles interpretaciones.

Notemos, por ejemplo, que en las bases del manto y núcleo externo, así como al comienzo del núcleo interno, tenemos un pequeño crecimiento de la función δ , que sugiere que la materia pierde parte de sus propiedades elásticas antes de acceder al cambio de fase, en tanto que los valores altos de la zona de transición refuerzan la hipótesis de un posible fluido viscoso.

Por último, creemos que tiene algún interés reflejar los saltos de las funciones $\rho(\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$, $\kappa(\text{kbar})$, $\delta(10^{-12} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}/\text{N} \cdot \text{m}^{-2})$ en las siguientes superficies de separación:

manto-núcleo (sólido a líquido)

Modelo	ρ	κ	δ
PREM	4.337	-115	6.89
ZY	-3.747	-1779	44.98

Acceso núcleo interno (fluido a sólido)

Modelo	ρ	κ	δ
PREM	0.598	387	0.18
ZY	0.000	925	-137.41

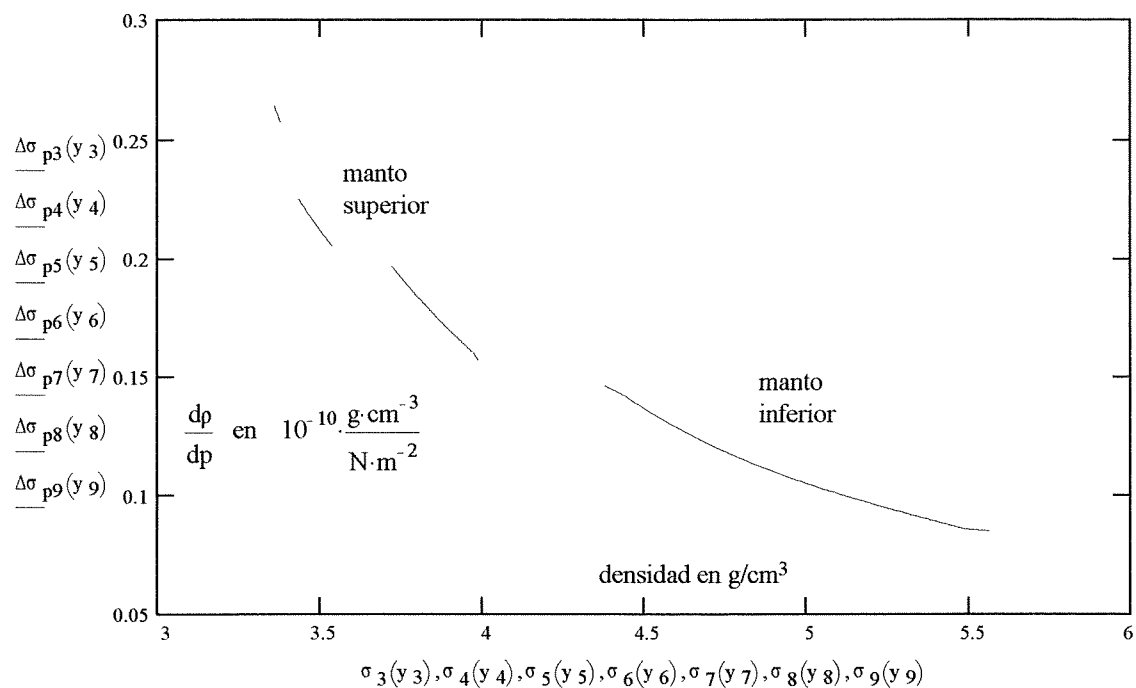


Figura 6.18: Mod. PREM. Representación de la función $d\rho/dp$ en el manto con respecto a la densidad.

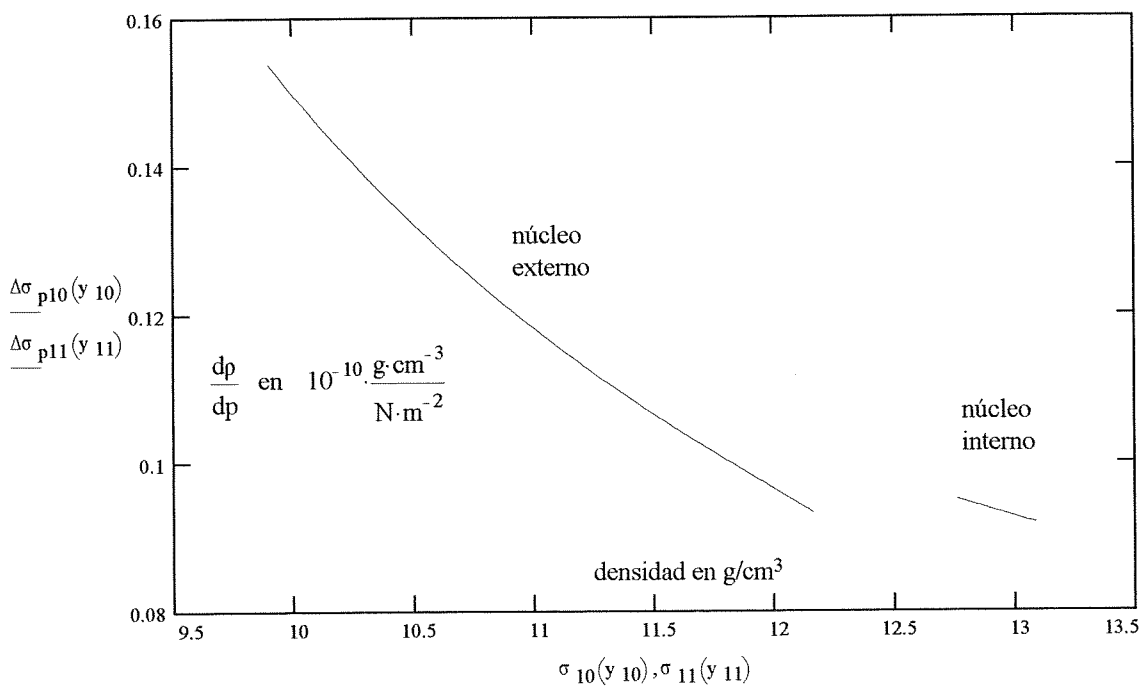


Figura 6.19: Mod. PREM. Representación de la función $d\rho/dp$ en el núcleo con respecto a la densidad.

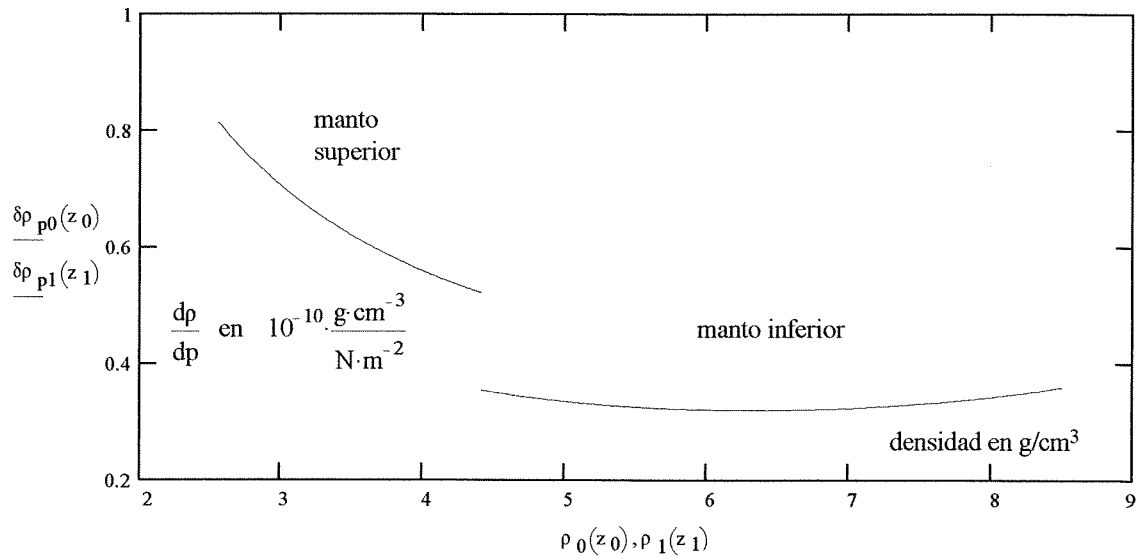


Figura 6.20: Mod. ZY. Representación de la función $d\rho/dp$ en el manto con respecto a la densidad.

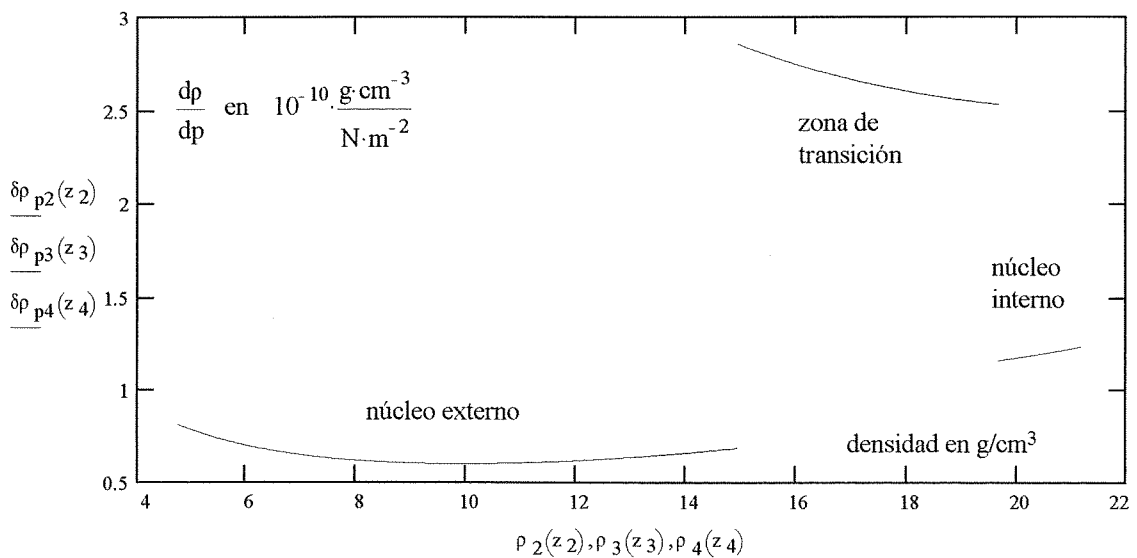


Figura 6.21: Mod. ZY. Representación de la función $d\rho/dp$ en el núcleo con respecto a la densidad.

Radio r (km)	Profundidad z (km)	$d\rho/d\rho$		Radio r (km)	Profundidad z (km)	$d\rho/d\rho$	
		PREM	ZY			PREM	ZY
$R_0 = 6371$	$z_0 = 0$	0,5003	0,8139	3480	2891	0,1538	
6356	15	0,5003	0,8050	$R_2 = 3477,7$	$z_2 = 2893,3$	0,1536	0,8091
6356	15	0,3852	0,8050	3400	2971	0,1487	0,7804
6346,6	24,4	0,3852	0,7995	3300	3071	0,1431	0,7479
6346,6	24,4	0,2571	0,7995	3200	3171	0,1380	0,7197
6256	115	0,2605	0,7507	3100	3271	0,1334	0,6953
6151	220	0,2646	0,7019	3000	3371	0,1293	0,6742
6151	220	0,2247	0,7019	2900	3471	0,1255	0,6562
6061	310	0,2141	0,6656	2800	3571	0,1221	0,6410
5971	400	0,2042	0,6335	2700	3671	0,1190	0,6284
5971	400	0,1961	0,6335	2600	3771	0,1161	0,6181
5871	500	0,1765	0,6023	2500	3871	0,1136	0,6102
5771	600	0,1597	0,5750	2400	3971	0,1112	0,6046
5771	600	0,1597	0,5750	2300	4071	0,1090	0,6011
5736	635	0,1579	0,5662	2200	4171	0,1070	0,5998
5701	670	0,1562	0,5579	2100	4271	0,1051	0,6008
5701	670	0,1461	0,5579	2000	4371	0,1034	0,6041
5600	771	0,1418	0,5358	$r^* = 1960,8$	$z^* = 4410,2$	0,1027	0,6061
5600	771	0,1418	0,5358	1900	4471	0,1018	0,6099
$R'_0 = 5525,2$	$z'_0 = 845,8$	0,1377	0,5213	1800	4571	0,1003	0,6183
$R_1 = 5525,2$	$z_1 = 845,8$	0,1377	0,3542	1700	4671	0,0989	0,6296
5500	871	0,1363	0,3526	1600	4771	0,0976	0,6440
5400	971	0,1314	0,3466	1500	4871	0,0964	0,6620
5300	1071	0,1270	0,3413	1400	4971	0,0952	0,6839
5200	1171	0,1230	0,3366	$R'_2 = 1394,3$	$z'_2 = 4976,7$	0,0951	0,6852
5100	1271	0,1194	0,3325	$R_3 = 1394,3$	$z_3 = 4976,7$	0,0951	2,8529
5000	1371	0,1160	0,3290	1375	4996	0,0949	2,7836
4900	1471	0,1130	0,3261	1350	5021	0,0946	2,7062
4800	1571	0,1101	0,3238	1325	5046	0,0944	2,6418
4700	1671	0,1075	0,3220	1300	5071	0,0941	2,5895
4600	1771	0,1050	0,3208	1275	5096	0,0938	2,5488
4500	1871	0,1026	0,3203	$R'_3 = 1259,6$	$z'_3 = 5111,4$	0,0936	2,5294
4400	1971	0,1004	0,3203	$R_4 = 1259,6$	$z_4 = 5111,4$	0,0936	1,1553
4300	2071	0,0983	0,3210	1221,5	5149,5	0,0932	1,1833
4200	2171	0,0963	0,3223	1221,5	5149,5	0,0950	1,1833
4100	2271	0,0943	0,3244	1200	5171	0,0949	1,2018
4000	2371	0,0924	0,3273	$R'_4 = 1171,7$	$z'_4 = 5199,3$	0,0948	1,2295
3900	2471	0,0905	0,3311	$R_c = 1171,7$	$z_c = 5199,3$	0,0948	0
3800	2571	0,0887	0,3358	1100	5271	0,0944	0
3700	2671	0,0869	0,3416	1000	5371	0,0939	0
3630	2741	0,0856	0,3464	800	5571	0,0932	0
3630	2741	0,0856	0,3464	600	5771	0,0926	0
3600	2771	0,0855	0,3487	500	5871	0,0923	0
3500	2871	0,0850	0,3572	400	5971	0,0922	0
3480	2891	0,0849	0,3591	200	6171	0,0919	0
$R'_1 = 3477,7$	$z'_1 = 2893,3$		0,3593	0	6371	0,0918	0

Unidades: $d\rho/d\rho$ en $10^{-10} \cdot \text{g} \cdot \text{cm}^{-3} / \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$

Tabla 6.8: Mod. PREM y ZY. Valores de $d\rho/d\rho$ en el interior de la Tierra, diferenciando la estratificación.

6.2.5 **Resumen comparativo entre los modelos PREM y ZY**

Con independencia de las diferencias de estructura que presentan los modelos PREM y ZY, en cuanto se refiere al estado físico de los materiales que existen en el interior de la Tierra y que han sido señaladas a lo largo de este capítulo, nos interesa comparar ambos modelos en su aspecto analítico, es decir, definiendo los datos de entrada que han servido de base a su determinación, el proceso de cálculo seguido en su ejecución y los resultados obtenidos en su aplicación.

Con este fin, en las dos páginas siguientes hemos resumido, de forma comparativa, las diferencias que presentan ambos modelos en cuanto a los **datos de entrada**, el **proceso de cálculo** y los **resultados obtenidos**.

Finalmente, en las páginas 118 y 119, presentamos una detallada tabla 6.9 en la que figuran, por orden de aparición, los valores que presentan las distintas funciones que definen el interior de la Tierra en nuestro modelo: La velocidad v_p de las ondas \mathcal{P} , la velocidad v_s de las ondas \mathcal{S} , la densidad ρ , el potencial gravitatorio adimensional χ , la gravedad g , la presión p , el módulo de compresibilidad κ , y las derivadas, con respecto a la presión, de las funciones κ y ρ , es decir $d\kappa/dp$ y $d\rho/dp$.

Modelo PREM	Modelo ZY
Datos de entrada	Datos de entrada
<ol style="list-style-type: none"> 1. Tiempos observados de las ondas \mathcal{P} y \mathcal{S}. 2. Masa de la Tierra. 3. Momento de inercia terrestre. 4. Densidad superficial de la Tierra: 2.6 g/cm^3. 5. Densidad por debajo de la discontinuidad de Mohorovicic: 3.32 g/cm^3. 6. Densidad en la base del manto: 5.55 g/cm^3. 7. Salto de densidad entre los núcleos externo e interno: 0.5 g/cm^3. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Tiempos observados de las ondas \mathcal{P} y \mathcal{S}. 2. Masa de la Tierra.
Proceso de cálculo	Proceso de cálculo
<ol style="list-style-type: none"> 1. Ajuste de velocidades por el método de inversión. 2. Ajuste de densidades por medio de: <ol style="list-style-type: none"> a) la hipótesis de Birch $\rho(r) = a + bv_p(r)$ en el manto superior. b) Ecuación de Adams-Williamson $\frac{d\rho(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \frac{\rho^2(r)}{\kappa(r)}$ siendo $\kappa(r) = \rho(r) \left(v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2 \right)$. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ajuste de velocidades por medio de la función $v(r) = r(B - A \ln(r)).$ 2. Cálculo de la constante H mediante la función densidad $\rho(r) = H \frac{v_p(r)}{r}.$

Modelo PREM	Modelo ZY
Resultados obtenidos	Resultados obtenidos
<ol style="list-style-type: none"> 1. La Tierra dividida en 11 estratos. 2. Distribución de velocidades. 3. Reproducción de los tiempos observados de las ondas \mathcal{P} y \mathcal{S}. 4. Distribución de densidades. 5. Potencial, gravedad y presión. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. La Tierra dividida en 6 estratos. 2. Distribución de velocidades. 3. Reproducción de los tiempos observados de las ondas \mathcal{P} y \mathcal{S}. 4. Distribución de densidades. 5. Potencial, gravedad y presión. 6. Correcto momento de inercia de la Tierra. Precisión 99.87 %. 7. Densidad superficial correcta. 8. Nuevas relaciones para dilucidar sobre los posibles materiales del interior de la Tierra <ol style="list-style-type: none"> a) $\kappa(r) = \frac{\rho^2(r) g(r) r}{a}$ b) $\frac{d\rho}{dp} = \frac{a}{\rho(r) g(r) r}$ c) $\frac{d\kappa}{dp} = 2 + \frac{\rho(r)}{a} - 4\pi G \frac{\kappa(r)}{g^2(r)}$. 9. Modelo totalmente algebraico.

Tabla 6.9: Modelo ZY. Evaluación de distintas funciones en el interior de la Tierra.

Radio km	Profundidad km	v_p km/s	v_s km/s	ρ g/cm ³	χ	g m/s ²	P 10 ¹⁰ N/m ²	κ 10 ¹⁰ N/m ²	$d\kappa/dp$	$d\rho/dp$ 10 ⁻¹⁰ g/cm ³ N/m ²	Profundidad km
$R_0 = 6371$	$z_0 = 0$	7,397	3,967	2,555	1,0000	9,8256	0,0000	3,140	1,9236	0,8139	$z_0 = 0$
6300	71	7,732	4,167	2,701	1,0112	9,8901	0,1840	3,492	1,9081	0,7736	71
6200	171	8,196	4,444	2,910	1,0270	9,9727	0,4626	3,845	1,8845	0,7237	171
6100	271	8,651	4,715	3,121	1,0430	10,0454	0,7644	4,585	1,8587	0,6807	271
6000	371	9,096	4,981	3,337	1,0591	10,1078	1,0898	5,186	1,8307	0,6434	371
5900	471	9,531	5,241	3,555	1,0753	10,1596	1,4390	5,820	1,8003	0,6109	471
5800	571	9,956	5,495	3,778	1,0916	10,2002	1,8123	6,485	1,7675	0,5825	571
5700	671	10,370	5,743	4,004	1,1079	10,2293	2,2098	7,181	1,7321	0,5576	671
5600	771	10,775	5,986	4,235	1,1243	10,2464	2,6315	7,904	1,6940	0,5358	771
$R'_0 = 5525,2$	$z'_0 = 845,8$	11,071	6,163	4,410	1,1365	10,2510	2,9630	8,460	1,6636	0,5215	$z'_0 = 845,8$
$R_1 = 5525,2$	$z_1 = 845,8$	11,071	6,163	4,410	1,1365	10,2510	2,9630	12,449	1,5050	0,3542	$z_1 = 845,8$
5500	871	11,121	6,221	4,450	1,1406	10,2511	3,0773	12,621	1,4959	0,3526	871
5400	971	11,317	6,323	4,613	1,1570	10,2473	3,5418	13,307	1,4587	0,3466	971
5300	1071	11,506	6,404	4,778	1,1734	10,2365	4,0227	13,999	1,4198	0,3415	1071
5200	1171	11,687	6,480	4,947	1,1897	10,2184	4,5200	14,695	1,3790	0,3366	1171
5100	1271	11,860	6,553	5,118	1,2060	10,1929	5,0336	15,392	1,3362	0,3325	1271
5000	1371	12,026	6,621	5,294	1,2223	10,1594	5,5634	16,089	1,2913	0,3290	1371
4900	1471	12,183	6,686	5,472	1,2385	10,1177	6,1091	16,780	1,2440	0,3261	1471
4800	1571	12,332	6,747	5,655	1,2546	10,0675	6,6706	17,465	1,1942	0,3238	1571
4700	1671	12,473	6,803	5,841	1,2706	10,0082	7,2476	18,139	1,1417	0,3220	1671
4600	1771	12,606	6,855	6,031	1,2866	9,9395	7,8397	18,799	1,0862	0,3208	1771
4500	1871	12,729	6,903	6,226	1,3024	9,8609	8,4464	19,440	1,0273	0,3203	1871
4400	1971	12,844	6,947	6,425	1,3181	9,7718	9,0673	20,058	0,9648	0,3205	1971
4300	2071	12,949	6,986	6,628	1,3336	9,6716	9,7018	20,650	0,8981	0,3210	2071
4200	2171	13,045	7,020	6,836	1,3490	9,5597	10,3492	21,208	0,8268	0,3223	2171
4100	2271	13,132	7,050	7,049	1,3641	9,4353	11,0086	21,728	0,7502	0,3244	2271
4000	2371	13,209	7,075	7,268	1,3791	9,2977	11,6791	22,204	0,6678	0,3273	2371
3900	2471	13,275	7,094	7,492	1,3938	9,1460	12,3597	22,628	0,5785	0,3311	2471
3800	2571	13,332	7,109	7,722	1,4083	8,9790	13,0491	22,994	0,4813	0,3358	2571
3700	2671	13,378	7,118	7,958	1,4225	8,7958	13,7459	23,293	0,3749	0,3416	2671
3600	2771	13,413	7,122	8,200	1,4364	8,5949	14,4484	23,516	0,2576	0,3487	2771
3500	2871	13,436	7,121	8,449	1,4500	8,3751	15,1548	23,653	0,1275	0,3572	2871
$R'_1 = 3477,7$	$z'_1 = 2893,3$	13,440	7,120	8,506	1,4529	8,3234	15,3124	23,670	0,0965	0,3595	$z'_1 = 2893,3$
$R_2 = 3477,7$	$z_2 = 2893,3$	7,520	0	4,759	1,4259	8,3234	15,3124	5,882	1,7150	0,8091	$z_2 = 2893,3$
3400	2971	7,741	0	5,011	1,4633	8,3827	15,6296	6,421	1,6834	0,7804	2971
3300	3071	8,013	0	5,344	1,4768	8,4512	16,0654	7,145	1,6406	0,7479	3071
3200	3171	8,268	0	5,687	1,4903	8,5108	16,5331	7,902	1,5954	0,7197	3171
3100	3271	8,508	0	6,041	1,5039	8,5612	17,0336	8,689	1,5479	0,6955	3271
3000	3371	8,732	0	6,406	1,5176	8,6023	17,5677	9,502	1,4980	0,6742	3371
2900	3471	8,939	0	6,784	1,5314	8,6337	18,1361	10,339	1,4457	0,6562	3471

Radio km	Profundidad km	v_p km/s	v_s km/s	ρ g/cm ³	χ	g m/s ²	P 10 ¹⁰ N/m ²	κ 10 ¹⁰ N/m ²	$d\kappa/dp$ 10 ⁻¹⁰ g·cm ⁻³ ·N·m ⁻²	$d\rho/dp$ 10 ⁻¹⁰ g·cm ⁻³ ·N·m ⁻²	Profundidad km
2800	3571	9,128	0	7,175	1,5452	8,6553	18,7394	11,194	1,3908	0,6410	3571
2700	3671	9,300	0	7,581	1,5591	8,6668	19,3784	12,065	1,3333	0,6284	3671
2600	3771	9,452	0	8,001	1,5729	8,6679	20,0536	12,944	1,2732	0,6181	3771
2500	3871	9,585	0	8,439	1,5868	8,6584	20,7657	13,829	1,2103	0,6102	3871
2400	3971	9,698	0	8,894	1,6006	8,6380	21,5151	14,711	1,1447	0,6046	3971
2300	4071	9,790	0	9,368	1,6143	8,6065	22,3023	15,585	1,0762	0,6011	4071
2200	4171	9,859	0	9,864	1,6281	8,5637	23,1277	16,444	1,0047	0,5998	4171
2100	4271	9,906	0	10,382	1,6417	8,5093	23,9918	17,280	0,9304	0,6008	4271
2000	4371	9,928	0	10,926	1,6552	8,4434	24,8947	18,085	0,8531	0,6041	4371
$r^* = 1960,8$	$z^* = 4410,2$	$v^* = 9,930$	0	11,147	1,6605	8,4143	25,2596	18,391	0,8220	0,6061	$z^* = 4410,2$
1900	4471	9,926	0	11,498	1,6687	8,3657	25,8369	18,851	0,7729	0,6099	4471
1800	4571	9,896	0	12,100	1,6820	8,2764	26,8185	19,569	0,6901	0,6183	4571
1700	4671	9,838	0	12,737	1,6951	8,1758	27,8399	20,230	0,6050	0,6296	4671
1600	4771	9,751	0	13,413	1,7081	8,0643	28,9014	20,826	0,5181	0,6440	4771
1500	4871	9,632	0	14,133	1,7209	7,9428	30,0035	21,349	0,4305	0,6620	4871
1400	4971	9,479	0	14,902	1,7334	7,8129	31,1468	21,791	0,3436	0,6839	4971
$R_2 = 1394,3$	$z'_2 = 4976,7$	9,469	0	14,947	1,7342	7,8054	31,2130	21,813	0,3387	0,6852	$z'_2 = 4976,7$
$R_3 = 1394,3$	$z'_3 = 4976,7$	9,469	0	14,947	1,7342	7,8054	31,2130	5,239	1,6010	2,8529	$z'_3 = 4976,7$
1375	4996	9,742	0	15,594	1,7366	7,7754	31,4428	5,602	1,5590	2,7836	4996
1350	5021	10,088	0	16,446	1,7397	7,7241	31,7552	6,077	1,5003	2,7062	5021
1325	5046	10,423	0	17,313	1,7427	7,6578	32,0778	6,554	1,4360	2,6418	5046
1300	5071	10,748	0	18,197	1,7458	7,5758	32,4159	7,027	1,3654	2,5895	5071
1275	5096	11,064	0	19,098	1,7488	7,4773	32,7668	7,493	1,2878	2,5488	5096
$R_3 = 1259,6$	$z'_3 = 5111,4$	11,253	0	19,663	1,7506	7,4079	32,9892	7,774	1,2359	2,5294	$z'_3 = 5111,4$
$R_4 = 1259,6$	$z'_4 = 5111,4$	11,253	*	19,663	1,7506	7,4079	32,9892	17,020	0,3269	1,1553	$z'_4 = 5111,4$
1225	5146	11,273	*	20,253	1,7547	7,2569	33,4946	17,156	0,2087	1,1805	5146
1200	5171	11,281	*	20,690	1,7575	7,1035	33,8616	17,216	0,1153	1,2018	5171
$R_4 = 1171,7$	$z'_4 = 5199,3$	11,284	*	21,196	1,7607	6,9417	34,2780	17,240	0	1,2295	$z'_4 = 5199,3$
$R_5 = 1171,7$	$z'_5 = 5199,3$	11,284	*	21,196	1,7607	6,9417	34,2780	∞	0	0	$z'_5 = 5199,3$
1100	5271	11,284	*	21,196	1,7684	6,5170	35,3005	∞	0	0	5271
1000	5371	11,284	*	21,196	1,7783	5,9246	36,6191	∞	0	0	5371
900	5471	11,284	*	21,196	1,7873	5,3321	37,8121	∞	0	0	5471
800	5571	11,284	*	21,196	1,7954	4,7397	38,8795	∞	0	0	5571
700	5671	11,284	*	21,196	1,8025	4,1472	39,8214	∞	0	0	5671
600	5771	11,284	*	21,196	1,8086	3,5548	40,6377	∞	0	0	5771
500	5871	11,284	*	21,196	1,8138	2,9624	41,3284	∞	0	0	5871
400	5971	11,284	*	21,196	1,8181	2,3699	41,8935	∞	0	0	5971
300	6071	11,284	*	21,196	1,8214	1,7775	42,3330	∞	0	0	6071
200	6171	11,284	*	21,196	1,8238	1,1850	42,6470	∞	0	0	6171
100	6271	11,284	*	21,196	1,8252	0,5926	42,8354	∞	0	0	6271
0	6371	11,284	*	21,196	1,8257	0	42,8982	∞	0	0	6371

Tabla 6.9: Modelo ZY. Evaluación de distintas funciones en el interior de la Tierra.

Bibliografía

- Abad Zaragoza, S. (1995): *Estudio variacional de sistemas autogravitantes en lenta rotación*. (Tesis doctoral). Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza.
- Alonso, M. y Finn, E.J. (1987): *Campos y ondas*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Ben-Menahem, A. and Singh, S.J. (1981): *Seismic waves and sources*. Springer-Verlag. Berlin.
- Ben-Menahem, A. (1995): *A Concise History of Mainstream Seismology: Origins, Legacy and Perspectives*. Bull. of the Seismological Soc. of America. vol **85**, nº 4, 1202-1225.
- Bath, M. (1973): *Introduction to seismology*. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- Bolt, B.A.(1981): *Terremotos*. Editorial Reverté S.A. Barcelona.
- Bolt, B.A. (1982): *Inside the Earth*. Freeman and Company. San Francisco.
- Bolt, B.A. (1982): *The constitution of the core: Seismological evidence*. Phil. Trans. Roy. Soc. A **306**, 11-20.
- Bott, M.H.P. (1972): *The interior of the Earth; its structure, constitution and evolution*. Edward Arnold. Londres.
- Bullen, K.E. (1982): *An introduction to the theory of Seismology*. Cambridge University Press. Cambridge.
- Bullen, K.E. and Bolt, B.A. (1985): *An introduction to the theory of Seismology*. Cambridge University Press. New York.
- Bullen, K.E. (1961): *Seismic ray theory*. Geophys. J. R. Ast. Soc. **4**, 93-105.

- Choy, G.L. and Cormier, V.F. (1983): *The structure of the inner core inferred from short-period and broadband GDSN data*. Geophys. J. R. Ast. Soc. **72**, 1-21.
- Cagniard, L. (1962): *Réflexion et réfraction des ondes séismiques progressives*. Gauthier-Villars. Paris.
- Carmichael, R.S. (1990): *Practical Handbook of Physical Properties of Rocks and Minerals*. CRC Press. Boston.
- Cid Palacios, R. (1985): *Curso de Geodesia*. Universidad de Zaragoza.
- Dziewonski, A.M. and Anderson, D.L. (1981): *Preliminary reference Earth model*. Physics of the Earth and Planetary Interiors. **25**. 297-356. Elsevier Scientific Publishing Company. Amsterdam - Printed in The Netherlands.
- French, A.P. (1993): *Vibraciones y ondas*. Editorial Reverté. S.A. Barcelona.
- Garmany, J., Orcutt, J. and Parker, R. (1979): *Travel time Inversion: A Geometrical Approach*. Journal of Geophysical Research. vol **84**, nº B7.
- Gutenberg, B. (1959): *Physics of the Earth's interior*. Academic Press. New York.
- Herrin, E. and others (1968): *Seismological Tables for P phases*. Bull. of the Seismological Soc. of America. vol **58**. nº 4 (extrac). California.
- Jacobs, J.A. (1975): *The Earth's core*. Academic Press. New York.
- Jeanloz, R. and Lay, T. (1993): *The Core-Mantle Boundary*. Scientific American. May (26-33).
- Jeffreys, H. (1970): *The Earth*. Cambridge University Press. New York.
- Jeffreys, H. and Bullen, K.E. (1958): *Seismological Tables*. Off. of the British Ass. Burlington House. W. 1. London.
- Lana-Renault, Y. (1995): *Sólo dos leyes sencillas para conocer el interior de la Tierra*. VIII Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica. Madrid.
- Lana-Renault, Y. (1997): *An analytic spherically symmetric P and S wave velocity model*. XXII General Assembly of the European Geophysical Society. Vienna.
- Lana-Renault, Y. and Cid Palacios, R. (1991): *On the problem of the internal constitution of the Earth*. Monografía nº 4 de la Acad. de Ciencias de Zaragoza.

- Lana-Renault, Y., Sabadell, F.J., Badal, J. y Cid Palacios, R. (1993): *Modelos de propagación de fases P en el interior de la Tierra: Distancias epicentrales tiempos de propagación y velocidades*. XXIV Bienal de la Real Soc. Española de Física. Jaca (Huesca).
- Lana-Renault, Y., Sabadell, F.J., Badal, J. (1994): *A general velocity law for P and S phase propagation in a spherically symmetric Earth*. XIX General Assembly of the European Geophysical Society. Grenoble. France.
- Lane, R.J and Lee, R.C. (1985): *Extremal bounds of the P velocity in the Earth's core*. Bull. of the Seism.Soc. of Amer. vol **75**, nº 1. 115-130.
- Lay, T., Ahrens, T.J., Olson, P., Smyth, J. and Loper, D. (1990): *Studies of the Earth's Deep Interior: Goals and Trends*. Physics Today. October (44-52).
- Lee, R.C. and Lane, R.J. (1984): *Extremal bounds on the seismic velocities in the Earth's Mantle*. Geophysic. Jour. of the Roy. Astr. Soc. **77**, 667-681.
- Lee, R.C. and Lane, R.J. (1984): *Tau estimates for Mantle P-and S- waves from global travel-time observation*. Geophysic. Jour. of the Roy. Astr. Soc. **77**, 655-666.
- Lozano Calvo, L. (1972): *Introducción a la Geofísica*. Editorial Paraninfo. Madrid.
- Lléo Morilla, A. (1983): *Tensores cartesianos y sus aplicaciones*. Editorial Alhambra. Madrid.
- Macià i Jové, R. (1993): *Estudis cinemàtics de la propagació d'ones sísmiques: Aplicació a les ones internes*. (Tesis doctoral). Facultad de Físicas. Universidad de Barcelona.
- Morelli, A. and Dziewonski, A.M. (1993): *Body wave traveltimes and a spherically symmetric P - and S - wave velocity model*. Geophys. J. Int. **112**. 178-194.
- Morelli, A. and Dziewonski, A.M.(1987): *The harmonic expansion approach to the retrieval of deep Earth structure*. Seismic Tomography, 251-274. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht-Holland.
- Müller, G. (1973): *Amplitude studies of Core phases*. Journal of Geophysical Research. vol **78**, nº 17. June 10.
- Payo Subiza, G. and Bath, M. (1964): *Core Phases and the Inner Core Boundary*. Geophysical Journal of the Royal, Astronomical Society. vol **8**, nº 5.

- Payo Subiza, G. (1986): *Introducción al análisis de sismogramas*. Monografía nº 3 del Instituto Geográfico Nacional. Madrid.
- Randall, M.J. (1971): *Travel time tables for S waves*. A. R. Shearer Gov. Printer. Wellington. New-Zealand.
- Rial, J.A. and Cormier, V.F. (1980): *Seismic waves at the Epicenter's Antipode*. Journal of Geophysical Research. vol **85**, nº B5, 2661-2668.
- Serón, F.J., Badal, J. y Sabadell, J. (1996): *A numerical laboratory for simulation and visualization of seismic wavefields*. Geophysical Prospecting **44**. 603-642.
- Rikitake, T. (1966): *Electromagnetism and the Earth's interior*. Elsevier Publishing Company. Amsterdam.
- Udias, A. y Mézcua, J. (1986): *Fundamentos de Geofísica*. Editorial Alhambra. Madrid.
- Udias, A. (1971): *Introducción a la sismología y estructura interior de la Tierra*. Instituto Geográfico y Catastral. Madrid.
- Zharkov, V.N. (1985): *Estructura interior de la Tierra y de los planetas*. Editorial MIR. Moscú.

Capítulo 7

APÉNDICES

7.1 Funcionamiento del programa informático MATHCAD

Este programa de ordenador permite la resolución de complicados sistemas no lineales de n ecuaciones con n incógnitas, siempre y cuando se disponga de valores previos aproximados de dichas incógnitas.

Una vez conseguido ésto, es decir que ya se dispone de valores iniciales adecuados de prueba, se establece el sistema de ecuaciones propuesto entre los comandos *Dado* y *errmin* (con variables separadas por una coma), y se llega a una matriz $M(n, 1)$ de resultados, identificándose correlativamente sus elementos M_{i1} con las incógnitas.

Finalmente, se comprueba la exactitud de los resultados obtenidos.

Como ejemplo, vamos a exponer esquemáticamente la resolución del sistema de 25 ecuaciones contenidas en las fórmulas (5.10), (5.11),..., (5.19), con 25 incógnitas, que figura en las páginas 71 y 72 de esta memoria.

En efecto, según esto hemos de buscar valores aproximados que determinen una adecuada posición del punto P, del tramo CD, del punto Q del tramo DE, del punto S del tramo EF y del tiempo T_F invertido por la trayectoria del rayo axial.

Recordemos que en la prospección de la zona de transición, hemos obtenido un valor aceptable de R_3 y un correcto ángulo inicial I_{0P} para la trayectoria que determina este punto.

Así, tomando $R_3 = 1394$ km e $I_{0P} = 7^\circ.8$, resultan fácilmente los siguientes

valores:

$$\alpha_p = 116.89, \quad A_3 = 2.075 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad w_3 = 6.792 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1},$$

$$I_{1P} = 13^\circ.55, \quad I'_{1P} = 26^\circ.86, \quad I_{2P} = 14^\circ.64, \quad I_{3P} = 52^\circ.56.$$

De manera análoga, en la prospección del núcleo interno, hemos obtenido ángulos de prueba aceptables para la trayectoria del punto Q, que son:

$$I_{0Q} = 7^\circ.2, \quad I_{4Q} = 77^\circ.0.$$

Con estos datos, resultan los siguientes valores:

$$\alpha_Q = 107.95, \quad A_4 = 9.635 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}, \quad w_4 = 9.026 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1},$$

$$I_{1Q} = 12^\circ.49, \quad I'_{1Q} = 24^\circ.66, \quad I_{2Q} = 13^\circ.50, \quad I_{3Q} = 47^\circ.16.$$

Finalmente, para la trayectoria del punto S hemos utilizado el ángulo inicial de prueba $I_{0S} = 4^\circ.1$, de tal forma que resulta $\alpha_S = 61.58$ y las restantes variables toman los siguientes valores de prueba:

$$I_{1S} = 7^\circ.09, \quad I'_{1S} = 13^\circ.77, \quad I_{2S} = 7^\circ.65,$$

$$I_{3S} = 24^\circ.73, \quad I_{4S} = 33^\circ.77, \quad I_{cS} = 36^\circ.39.$$

Al operar con los comandos *Dado* y *errmin* hemos llegado a la matriz vertical $M(a_i, 1)$ ($i = 1, 2, \dots, 25$), que figura en la página siguiente, y en la que los resultados corresponden al siguiente orden de las variables a_i :

$$(I_{0P}, \alpha_P, I_{1P}, I'_{1P}, I_{2P}, I_{3P}, A_3, w_3,$$

$$I_{0Q}, \alpha_Q, I_{1Q}, I'_{1Q}, I_{2Q}, I_{3Q}, I_{4Q}, A_4, w_4,$$

$$I_{0S}, \alpha_S, I_{1S}, I'_{1S}, I_{2S}, I_{3S}, I_{4S}, I_{cS}.)$$

$$M := \begin{bmatrix} 1.372634216893386 \cdot 10^{-1} \\ 1.178550898193879 \cdot 10^2 \\ 2.383912683551643 \cdot 10^{-1} \\ 4.728915418621504 \cdot 10^{-1} \\ 2.57685886882464 \cdot 10^{-1} \\ 9.278976579948459 \cdot 10^{-1} \\ 2.108570450582997 \cdot 10^{-2} \\ 6.791062821529809 \cdot 10^{-3} \\ 1.269265033160416 \cdot 10^{-1} \\ 1.090294293023777 \cdot 10^2 \\ 2.202321907994086 \cdot 10^{-1} \\ 4.349386638845948 \cdot 10^{-1} \\ 2.379999157801768 \cdot 10^{-1} \\ 8.337034951042494 \cdot 10^{-1} \\ 1.342517746770942 \\ 9.6304743160095 \cdot 10^{-3} \\ 8.933894302493747 \cdot 10^{-3} \\ 7.240968270580504 \cdot 10^{-2} \\ 6.231250639992041 \cdot 10^1 \\ 1.251787714543149 \cdot 10^{-1} \\ 2.43203114951375 \cdot 10^{-1} \\ 1.351523005038376 \cdot 10^{-1} \\ 4.369391285187342 \cdot 10^{-1} \\ 5.90399989447292 \cdot 10^{-1} \\ 6.436248550992946 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Para que se compruebe el grado de aproximación conseguido con el programa MATHCAD, incluimos a continuación algunos de los valores obtenidos junto con el grado de aproximación alcanzado:

$\Delta_P = 121^\circ$	$\Delta_P = 121^\circ.000000000000200$
$T_P = 1134.796 \text{ s}$	$T_P = 1134.796000000000000 \text{ s}$
$\Delta_Q = 130^\circ$	$\Delta_Q = 130^\circ.000000000000100$
$T_Q = 1152.01 \text{ s}$	$T_Q = 1152.010000000000000 \text{ s}$
$\Delta_S = 161^\circ$	$\Delta_S = 161^\circ.000000000000000$
$T_S = 1201.82 \text{ s}$	$T_S = 1201.820000000000000 \text{ s}$
$T_F = 1212.52 \text{ s}$	$T_S = 1212.520000000000000 \text{ s}$

7.2 Tablas de tiempos de propagación

7.2.1 Ondas \mathcal{P} y \mathcal{S} en el manto

I_0	Δ	T_{Bull} (s)	T_c (s)	$T_{Bull} - T_c$
90,0000	0	0,00	0,00	0,00
87,4541	1	18,53	15,03	3,50
84,9182	2	34,86	30,03	4,84
82,4022	3	48,58	44,97	3,62
79,9152	4	62,29	59,82	2,47
77,4660	5	75,99	74,56	1,43
75,0625	6	89,67	89,16	0,51
72,7116	7	103,33	103,60	-0,27
70,4192	8	116,98	117,86	-0,88
68,1902	9	130,60	131,92	-1,32
66,0284	10	144,19	145,77	-1,58
63,9369	11	157,75	159,39	-1,64
61,9174	12	171,28	172,77	-1,49
59,9711	13	184,77	185,91	-1,14
58,0983	14	198,19	198,80	-0,61
56,2987	15	211,48	211,44	0,04
54,5714	16	224,55	223,81	0,74
52,9152	17	237,34	235,93	1,41
51,3283	18	249,78	247,80	1,98
49,8087	19	261,79	259,41	2,38
48,3543	20	273,32	270,77	2,55
46,9628	21	284,37	281,88	2,49
45,6315	22	294,95	292,74	2,21
44,3582	23	305,11	303,37	1,74
43,1402	24	314,91	313,76	1,14
41,9751	25	324,39	323,93	0,46
40,8603	26	333,63	333,87	-0,24
39,7936	27	342,71	343,60	-0,89
38,7724	28	351,68	353,12	-1,44
37,7947	29	360,60	362,43	-1,83
36,8582	30	369,51	371,55	-2,04
35,9608	31	378,38	380,47	-2,09
35,1005	32	387,19	389,20	-2,01
34,2755	33	395,96	397,76	-1,80
33,4840	34	404,68	406,14	-1,46
32,7241	35	413,34	414,35	-1,00
31,9944	36	421,95	422,39	-0,44
31,2933	37	430,49	430,28	0,21
30,6193	38	438,96	438,01	0,95
29,9711	39	447,37	445,59	1,77
29,3473	40	455,70	453,03	2,67

Tabla 7.1: Ondas P en el manto superior.

I_0	Δ	T_{Rand} (s)	T_c (s)	$T_{Rand} - T_c$
90,0000	0	0,00	0,00	0,00
87,2243	1	32,71	28,02	4,69
84,4616	2	62,32	55,98	6,35
81,7245	3	88,11	83,80	4,31
79,0248	4	113,46	111,43	2,03
76,3736	5	138,82	138,82	0,00
73,7805	6	164,17	165,90	-1,73
71,2539	7	189,52	192,63	-3,11
68,8006	8	214,88	218,98	-4,10
66,4262	9	240,23	244,89	-4,66
64,1347	10	265,58	270,35	-4,77
61,9286	11	290,91	295,33	-4,42
59,8095	12	316,09	319,81	-3,72
57,7778	13	341,28	343,79	-2,51
55,8330	14	366,36	367,24	-0,88
53,9738	15	391,16	390,17	0,99
52,1984	16	415,67	412,58	3,09
50,5045	17	439,57	434,47	5,10
48,8892	18	462,53	455,85	6,68
47,3496	19	484,01	476,71	7,30
45,8827	20	503,94	497,08	6,86
44,4851	21	522,94	516,96	5,98
43,1537	22	541,33	536,37	4,96
41,8851	23	559,11	555,31	3,80
40,6762	24	575,91	573,80	2,11
39,5239	25	592,37	591,86	0,51
38,4251	26	608,55	609,49	-0,94
37,3770	27	624,55	626,71	-2,16
36,3768	28	640,44	643,52	-3,08
35,4219	29	656,20	659,96	-3,76
64,5097	30	671,87	676,02	-4,15
33,6379	31	687,42	691,73	-4,31
32,8042	32	702,90	707,08	-4,18
32,0065	33	718,29	722,10	-3,81
31,2429	34	733,60	736,80	-3,20
30,5114	35	748,85	751,18	-2,33
29,8102	36	764,05	765,27	-1,22
29,1378	37	779,21	779,06	0,15
28,4926	38	794,34	792,57	1,77
27,8730	39	809,39	805,81	3,58
27,2778	40	824,37	818,78	5,59

Tabla 7.2: Ondas S en el manto superior.

I_0	Δ	T_{Bull} (s)	T_c (s)	$T_{Bull} - T_c$	w_m (s^{-1})	r_m (km)	z_m (km)	v_m (km/s)
90,0000	0	0,00	0,00	0,00	1,1610E-03	6371,0	0,0	7,397
87,4541	1	18,53	15,03	3,50	1,1622E-03	6369,8	1,2	7,403
84,9182	2	34,86	30,03	4,84	1,1656E-03	6366,1	4,9	7,420
82,4022	3	48,58	44,97	3,62	1,1713E-03	6360,0	11,1	7,449
79,9152	4	62,29	59,82	2,47	1,1792E-03	6351,4	19,6	7,490
77,4660	5	75,99	74,56	1,43	1,1894E-03	6340,6	30,5	7,541
75,0625	6	89,67	89,16	0,51	1,2016E-03	6327,4	43,6	7,603
72,7116	7	103,33	103,60	-0,27	1,2160E-03	6312,1	58,9	7,675
70,4192	8	116,98	117,86	-0,88	1,2323E-03	6294,7	76,3	7,757
68,1902	9	130,60	131,92	-1,32	1,2505E-03	6275,4	95,7	7,848
66,0284	10	144,19	145,77	-1,58	1,2706E-03	6254,1	116,9	7,947
63,9369	11	157,75	159,39	-1,64	1,2925E-03	6231,0	140,0	8,053
61,9174	12	171,28	172,77	-1,49	1,3160E-03	6206,3	164,7	8,167
59,9711	13	184,77	185,91	-1,14	1,3410E-03	6180,1	190,9	8,288
58,0983	14	198,19	198,80	-0,61	1,3676E-03	6152,4	218,6	8,414
56,2987	15	211,48	211,44	0,04	1,3956E-03	6123,4	247,7	8,546
54,5714	16	224,55	223,81	0,74	1,4249E-03	6093,1	277,9	8,682
52,9152	17	237,34	235,93	1,41	1,4554E-03	6061,8	309,3	8,822
51,3283	18	249,78	247,80	1,98	1,4871E-03	6029,4	341,7	8,966
49,8087	19	261,79	259,41	2,38	1,5199E-03	5996,0	375,0	9,113
48,3543	20	273,32	270,77	2,55	1,5537E-03	5961,9	409,2	9,263
46,9628	21	284,37	281,88	2,49	1,5885E-03	5926,9	444,1	9,415
45,6315	22	294,95	292,74	2,21	1,6241E-03	5891,3	479,7	9,568
44,3582	23	305,11	303,37	1,74	1,6606E-03	5855,0	516,0	9,723
43,1402	24	314,91	313,76	1,14	1,6979E-03	5818,2	552,8	9,879
41,9751	25	324,39	323,93	0,46	1,7360E-03	5781,0	590,1	10,036
40,8603	26	333,63	333,87	-0,24	1,7747E-03	5743,3	627,8	10,192
39,7936	27	342,71	343,60	-0,89	1,8140E-03	5705,2	665,9	10,349
38,7724	28	351,68	353,12	-1,44	1,8540E-03	5666,8	704,3	10,506
37,7947	29	360,60	362,43	-1,83	1,8945E-03	5628,1	743,0	10,662
36,8582	30	369,51	371,55	-2,04	1,9356E-03	5589,2	781,9	10,818
35,9608	31	378,38	380,47	-2,09	1,9771E-03	5550,0	821,0	10,973
35,4123	31,63	383,96	386,02	-2,06	2,0036E-03	5525,2	845,8	11,071
35,4046	32	387,19	389,22	-2,02	2,0040E-03	5524,7	846,3	11,072
35,3169	33	395,96	397,92	-1,95	2,0084E-03	5518,7	852,3	11,084
35,1558	34	404,68	406,59	-1,91	2,0164E-03	5507,7	863,3	11,106
34,9417	35	413,34	415,22	-1,88	2,0271E-03	5493,0	878,0	11,135
34,6883	36	421,95	423,81	-1,86	2,0401E-03	5475,4	895,7	11,170
34,4054	37	430,49	432,33	-1,84	2,0547E-03	5455,4	915,6	11,209
34,1000	38	438,96	440,79	-1,83	2,0709E-03	5433,5	937,5	11,252
33,7776	39	447,37	449,19	-1,82	2,0883E-03	5410,1	960,9	11,298
33,4425	40	455,70	457,51	-1,81	2,1067E-03	5385,3	985,7	11,345
33,0979	41	463,97	465,76	-1,78	2,1261E-03	5359,4	1011,7	11,395
32,7466	42	472,17	473,93	-1,75	2,1464E-03	5332,5	1038,6	11,445
32,3907	43	480,31	482,02	-1,71	2,1673E-03	5304,7	1066,3	11,497
32,0320	44	488,37	490,03	-1,66	2,1890E-03	5276,2	1094,8	11,550
31,6719	45	496,36	497,96	-1,60	2,2112E-03	5247,1	1123,9	11,603
31,3115	46	504,28	505,82	-1,54	2,2341E-03	5217,4	1153,6	11,656
30,9520	47	512,12	513,59	-1,46	2,2574E-03	5187,2	1183,8	11,710
30,5941	48	519,89	521,28	-1,39	2,2812E-03	5156,6	1214,4	11,763
30,2385	49	527,58	528,89	-1,31	2,3054E-03	5125,6	1245,5	11,817
29,8857	50	535,20	536,42	-1,22	2,3301E-03	5094,2	1276,8	11,870

Tabla 7.3: Ondas \mathcal{P} en el manto (I).

I_0	Δ	T_{Bull} (s)	T_c (s)	$T_{Bull} - T_c$	w_m (s ⁻¹)	r_m (km)	z_m (km)	v_m (km/s)
29,5362	51	542,74	543,87	-1,13	2,3551E-03	5062,6	1308,4	11,923
29,1904	52	550,22	551,24	-1,03	2,3805E-03	5030,7	1340,3	11,976
28,8486	53	557,62	558,53	-0,92	2,4063E-03	4998,6	1372,4	12,028
28,5111	54	564,95	565,75	-0,80	2,4323E-03	4966,3	1404,7	12,080
28,1780	55	572,21	572,89	-0,68	2,4587E-03	4933,9	1437,2	12,131
27,8495	56	579,40	579,95	-0,55	2,4853E-03	4901,3	1469,8	12,181
27,5257	57	586,51	586,93	-0,42	2,5122E-03	4868,6	1502,5	12,231
27,2068	58	593,55	593,84	-0,29	2,5394E-03	4835,8	1535,2	12,280
26,8928	59	600,52	600,68	-0,16	2,5668E-03	4802,9	1568,1	12,328
26,5837	60	607,42	607,44	-0,02	2,5944E-03	4770,0	1601,0	12,376
26,2795	61	614,24	614,13	0,11	2,6223E-03	4737,1	1633,9	12,422
25,9803	62	621,01	620,75	0,26	2,6504E-03	4704,1	1666,9	12,468
25,6861	63	627,71	627,30	0,41	2,6786E-03	4671,2	1699,9	12,512
25,3968	64	634,35	633,78	0,56	2,7071E-03	4638,2	1732,8	12,556
25,1123	65	640,91	640,20	0,72	2,7357E-03	4605,3	1765,7	12,599
24,8328	66	647,41	646,54	0,87	2,7645E-03	4572,4	1798,6	12,641
24,5580	67	653,85	652,82	1,02	2,7935E-03	4539,6	1831,5	12,681
24,2880	68	660,22	659,04	1,17	2,8227E-03	4506,8	1864,3	12,721
24,0226	69	666,51	665,19	1,32	2,8520E-03	4474,0	1897,0	12,760
23,7619	70	672,74	671,28	1,46	2,8814E-03	4441,4	1929,6	12,797
23,5057	71	678,88	677,31	1,57	2,9110E-03	4408,8	1962,2	12,834
23,2541	72	684,94	683,27	1,66	2,9407E-03	4376,3	1994,7	12,870
23,0068	73	690,91	689,18	1,73	2,9706E-03	4343,9	2027,1	12,904
22,7639	74	696,81	695,02	1,78	3,0006E-03	4311,7	2059,4	12,937
22,5253	75	702,63	700,81	1,82	3,0307E-03	4279,5	2091,5	12,970
22,2908	76	708,38	706,54	1,84	3,0609E-03	4247,4	2123,6	13,001
22,0604	77	714,07	712,21	1,85	3,0913E-03	4215,5	2155,5	13,031
21,8341	78	719,67	717,83	1,84	3,1217E-03	4183,7	2187,3	13,060
21,6117	79	725,19	723,40	1,79	3,1523E-03	4152,0	2219,0	13,088
31,3932	80	730,63	728,91	1,73	2,2288E-03	5224,2	1146,8	11,644
21,1786	81	736,00	734,36	1,64	3,2137E-03	4089,0	2282,0	13,141
20,9676	82	741,29	739,77	1,52	3,2445E-03	4057,8	2313,3	13,166
20,7603	83	746,49	745,12	1,37	3,2755E-03	4026,7	2344,4	13,189
20,5565	84	751,61	750,43	1,18	3,3065E-03	3995,7	2375,4	13,212
20,3563	85	756,63	755,68	0,95	3,3377E-03	3964,9	2406,2	13,233
20,1594	86	761,56	760,89	0,68	3,3689E-03	3934,2	2436,8	13,254
19,9660	87	766,43	766,04	0,39	3,4002E-03	3903,7	2467,3	13,273
19,7758	88	771,25	771,15	0,09	3,4315E-03	3873,3	2497,7	13,292
19,5888	89	776,01	776,21	-0,21	3,4630E-03	3843,2	2527,9	13,309
19,4050	90	780,72	781,23	-0,51	3,4945E-03	3813,1	2557,9	13,325
19,2243	91	785,40	786,20	-0,80	3,5261E-03	3783,3	2587,7	13,340
19,0466	92	790,06	791,13	-1,07	3,5578E-03	3753,6	2617,4	13,354
18,8718	93	794,69	796,02	-1,33	3,5895E-03	3724,1	2646,9	13,368
18,6999	94	799,30	800,86	-1,56	3,6213E-03	3694,8	2676,3	13,380
18,5308	95	803,89	805,65	-1,77	3,6532E-03	3665,6	2705,4	13,391
18,3645	96	808,47	810,41	-1,95	3,6851E-03	3636,6	2734,4	13,401
18,2010	97	813,04	815,13	-2,09	3,7170E-03	3607,8	2763,2	13,410
18,0400	98	817,60	819,80	-2,20	3,7491E-03	3579,1	2791,9	13,419
17,8817	99	822,17	824,44	-2,27	3,7812E-03	3550,7	2820,4	13,426
17,7259	100	826,73	829,03	-2,30	3,8133E-03	3522,4	2848,6	13,432
17,5725	101		833,59		3,8456E-03	3494,3	2876,8	13,437
17,4832	101,59		836,26		3,8646E-03	3477,8	2893,3	13,440

Tabla 7.4: Ondas \mathcal{P} en el manto (II).

I_0	Δ	T_{Rand} (s)	T_c (s)	$T_{Rand} - T_c$	w_m (s^{-1})	r_m (km)	z_m (km)	v_m (km/s)
90,0000	0	0,00	0,00	0,00	6,2264E-04	6371,0	0,0	3,967
87,2243	1	32,71	28,02	4,69	6,2337E-04	6369,7	1,3	3,971
84,4616	2	62,32	55,98	6,35	6,2556E-04	6365,7	5,4	3,982
81,7245	3	88,11	83,80	4,31	6,2919E-04	6359,0	12,1	4,001
79,0248	4	113,46	111,43	2,03	6,3424E-04	6349,7	21,3	4,027
76,3736	5	138,82	138,82	0,00	6,4067E-04	6337,9	33,1	4,061
73,7805	6	164,17	165,90	-1,73	6,4845E-04	6323,7	47,4	4,101
71,2539	7	189,52	192,63	-3,11	6,5752E-04	6307,1	63,9	4,147
68,8006	8	214,88	218,98	-4,10	6,6783E-04	6288,3	82,7	4,200
66,4262	9	240,23	244,89	-4,66	6,7933E-04	6267,5	103,6	4,258
64,1347	10	265,58	270,35	-4,77	6,9196E-04	6244,6	126,4	4,321
61,9286	11	290,91	295,33	-4,42	7,0565E-04	6220,0	151,1	4,389
59,8095	12	316,09	319,81	-3,72	7,2035E-04	6193,6	177,4	4,462
57,7778	13	341,28	343,79	-2,51	7,3599E-04	6165,6	205,4	4,538
55,8330	14	366,36	367,24	-0,88	7,5252E-04	6136,3	234,8	4,618
53,9738	15	391,16	390,17	0,99	7,6988E-04	6105,5	265,5	4,701
52,1984	16	415,67	412,58	3,09	7,8801E-04	6073,6	297,4	4,786
50,5045	17	439,57	434,47	5,10	8,0687E-04	6040,6	330,4	4,874
48,8892	18	462,53	455,85	6,68	8,2639E-04	6006,6	364,4	4,964
47,3496	19	484,01	476,71	7,30	8,4655E-04	5971,7	399,3	5,055
45,8827	20	503,94	497,08	6,86	8,6728E-04	5936,0	435,0	5,148
44,4851	21	522,94	516,96	5,98	8,8856E-04	5899,6	471,4	5,242
43,1537	22	541,33	536,37	4,96	9,1034E-04	5862,6	508,5	5,337
41,8851	23	559,11	555,31	3,80	9,3260E-04	5825,0	546,0	5,432
40,6762	24	575,91	573,80	2,11	9,5528E-04	5786,9	584,1	5,528
39,5239	25	592,37	591,86	0,51	9,7837E-04	5748,4	622,6	5,624
38,4251	26	608,55	609,49	-0,94	1,0018E-03	5709,5	661,5	5,720
37,3770	27	624,55	626,71	-2,16	1,0257E-03	5670,4	700,7	5,816
36,3768	28	640,44	643,52	-3,08	1,0498E-03	5630,9	740,1	5,911
35,4219	29	656,20	659,96	-3,76	1,0743E-03	5591,2	779,8	6,006
64,5097	30	671,87	676,02	-4,15	6,8978E-04	6248,6	122,5	4,310
33,6379	31	687,42	691,73	-4,31	1,1240E-03	5511,4	859,6	6,195
33,1411	31,59	696,57	700,84	-4,27	1,1389E-03	5487,7	883,3	6,250
33,1371	32	702,90	707,11	-4,21	1,1390E-03	5487,4	883,6	6,250
33,0967	33	718,29	722,43	-4,14	1,1402E-03	5484,0	887,0	6,253
33,0181	34	733,60	737,72	-4,12	1,1427E-03	5477,4	893,6	6,259
32,9072	35	748,85	752,97	-4,12	1,1461E-03	5468,0	903,0	6,267
32,7688	36	764,05	768,17	-4,12	1,1504E-03	5456,2	914,8	6,277
32,6070	37	779,21	783,31	-4,10	1,1554E-03	5442,3	928,7	6,288
32,4253	38	794,34	798,38	-4,04	1,1612E-03	5426,6	944,4	6,301
32,2267	39	809,39	813,37	-3,98	1,1676E-03	5409,3	961,8	6,316
32,0136	40	824,37	828,27	-3,90	1,1745E-03	5390,5	980,6	6,331
31,7884	41	839,28	843,09	-3,81	1,1820E-03	5370,4	1000,7	6,348
31,5529	42	854,13	857,81	-3,68	1,1899E-03	5349,1	1021,9	6,365
31,3089	43	868,91	872,42	-3,51	1,1982E-03	5326,8	1044,2	6,382
31,0577	44	883,57	886,94	-3,37	1,2069E-03	5303,5	1067,5	6,401
30,8008	45	898,11	901,34	-3,23	1,2160E-03	5279,4	1091,6	6,420
30,5391	46	912,53	915,64	-3,11	1,2254E-03	5254,6	1116,4	6,439
30,2738	47	926,79	929,83	-3,04	1,2351E-03	5229,0	1142,0	6,458
30,0056	48	941,00	943,91	-2,91	1,2451E-03	5202,8	1168,2	6,478
29,7354	49	955,15	957,87	-2,72	1,2553E-03	5176,1	1194,9	6,498
29,4638	50	969,31	971,71	-2,40	1,2658E-03	5148,8	1222,2	6,518
29,1914	51	983,37	985,44	-2,07	1,2766E-03	5121,1	1249,9	6,538
28,9188	52	997,32	999,06	-1,74	1,2876E-03	5092,9	1278,1	6,558
28,6464	53	1011,18	1012,55	-1,37	1,2988E-03	5064,4	1306,6	6,578

Tabla 7.5: Ondas S en el manto (I).

I_0	Δ	T_{Rand} (s)	T_c (s)	$T_{Rand} - T_c$	w_m (s ⁻¹)	r_m (km)	z_m (km)	v_m (km/s)
28,3746	54	1024,98	1025,93	-0,95	1,3102E-03	5035,5	1335,5	6,597
28,1037	55	1038,56	1039,20	-0,63	1,3218E-03	5006,3	1364,7	6,617
27,8342	56	1051,80	1052,34	-0,54	1,3335E-03	4976,8	1394,2	6,637
27,5662	57	1064,82	1065,37	-0,55	1,3454E-03	4947,1	1423,9	6,656
27,3000	58	1077,74	1078,29	-0,55	1,3575E-03	4917,1	1453,9	6,675
27,0359	59	1090,61	1091,08	-0,47	1,3698E-03	4887,0	1484,1	6,694
26,7739	60	1103,42	1103,77	-0,35	1,3822E-03	4856,6	1514,4	6,713
26,5143	61	1116,20	1116,34	-0,14	1,3947E-03	4826,2	1544,9	6,731
26,2572	62	1128,92	1128,80	0,12	1,4074E-03	4795,5	1575,5	6,749
26,0026	63	1141,55	1141,14	0,41	1,4202E-03	4764,8	1606,2	6,767
25,7508	64	1154,10	1153,38	0,72	1,4331E-03	4734,0	1637,0	6,784
25,5018	65	1166,58	1165,50	1,08	1,4462E-03	4703,1	1668,0	6,801
25,2556	66	1178,95	1177,51	1,44	1,4593E-03	4672,1	1698,9	6,818
25,0123	67	1191,20	1189,42	1,78	1,4726E-03	4641,1	1730,0	6,834
24,7720	68	1203,33	1201,22	2,11	1,4860E-03	4610,0	1761,0	6,850
24,5346	69	1215,32	1212,91	2,41	1,4995E-03	4578,9	1792,1	6,866
24,3002	70	1227,13	1224,50	2,63	1,5130E-03	4547,8	1823,2	6,881
24,0689	71	1238,76	1235,98	2,78	1,5267E-03	4516,7	1854,3	6,896
23,8406	72	1250,18	1247,36	2,82	1,5404E-03	4485,6	1885,4	6,910
23,6154	73	1261,49	1258,64	2,85	1,5543E-03	4454,6	1916,4	6,924
23,3931	74	1272,70	1269,82	2,88	1,5682E-03	4423,5	1947,5	6,937
23,1739	75	1283,84	1280,90	2,94	1,5822E-03	4392,5	1978,5	6,950
22,9577	76	1294,85	1291,88	2,97	1,5963E-03	4361,6	2009,4	6,962
22,7445	77	1305,76	1302,77	2,99	1,6105E-03	4330,7	2040,3	6,974
22,5343	78	1316,53	1313,56	2,97	1,6247E-03	4299,9	2071,2	6,986
22,3271	79	1327,19	1324,25	2,94	1,6390E-03	4269,1	2101,9	6,997
22,1227	80	1337,71	1334,86	2,85	1,6534E-03	4238,4	2132,6	7,008
21,9213	81	1348,09	1345,37	2,72	1,6678E-03	4207,8	2163,2	7,018
21,7227	82	1358,34	1355,79	2,55	1,6823E-03	4177,3	2193,8	7,027
21,5270	83	1368,45	1366,12	2,33	1,6968E-03	4146,8	2224,2	7,037
21,3341	84	1378,42	1376,36	2,06	1,7115E-03	4116,5	2254,5	7,045
21,1440	85	1388,25	1386,51	1,74	1,7261E-03	4086,3	2284,7	7,053
20,9566	86	1397,96	1396,58	1,38	1,7409E-03	4056,2	2314,8	7,061
20,7719	87	1407,56	1406,57	0,99	1,7556E-03	4026,2	2344,8	7,069
20,5898	88	1417,04	1416,46	0,58	1,7705E-03	3996,3	2374,7	7,075
20,4104	89	1426,39	1426,28	0,11	1,7854E-03	3966,5	2404,5	7,082
20,2336	90	1435,61	1436,02	-0,41	1,8003E-03	3936,9	2434,2	7,088
20,0594	91	1444,70	1445,67	-0,97	1,8153E-03	3907,4	2463,7	7,093
19,8876	92	1453,66	1455,25	-1,59	1,8303E-03	3878,0	2493,1	7,098
19,7184	93	1462,60	1464,74	-2,14	1,8454E-03	3848,7	2522,3	7,102
19,5515	94	1471,54	1474,16	-2,62	1,8605E-03	3819,6	2551,4	7,107
19,3871	95	1480,48	1483,50	-3,02	1,8757E-03	3790,6	2580,4	7,110
19,2250	96	1489,42	1492,77	-3,35	1,8909E-03	3761,8	2609,2	7,113
19,0652	97	1498,36	1501,96	-3,60	1,9062E-03	3733,1	2637,9	7,116
18,9078	98	1507,30	1511,08	-3,78	1,9214E-03	3704,6	2666,5	7,118
18,7526	99	1516,24	1520,13	-3,89	1,9368E-03	3676,2	2694,9	7,120
18,5995	100	1525,18	1529,11	-3,93	1,9521E-03	3647,9	2723,1	7,121
18,4487	101		1538,01		1,9675E-03	3619,8	2751,2	7,122
18,3000	102		1546,85		1,9830E-03	3591,9	2779,2	7,123
18,2193	102,55		1551,67		1,9915E-03	3576,6	2794,4	7,123
18,1534	103		1555,62		1,9984E-03	3564,1	2807,0	7,123
18,0088	104		1564,32		2,0139E-03	3536,4	2834,6	7,122
17,8663	105		1572,95		2,0295E-03	3508,9	2862,1	7,121
17,7258	106		1581,52		2,0450E-03	3481,6	2889,4	7,120
17,7060	106,14		1582,73		2,0473E-03	3477,8	2893,3	7,120

Tabla 7.6: Ondas S en el manto (II).

I_0	Δ	T_{Bull} (s)	T_c (s)	$T_{Bull} - T_c$	I_0	Δ	T_{Bull} (s)	T_c (s)	$T_{Bull} - T_c$
0,0000	0	511,30	511,30	0,0000	14,4831	52	622,9	623,39	-0,49
0,3665	1	511,40	511,35	0,0519	14,6303	53	626,7	627,17	-0,47
0,7328	2	511,50	511,49	0,0077	14,7726	54	630,4	630,98	-0,58
1,0985	3	511,70	511,73	-0,0325	14,9103	55	634,3	634,83	-0,53
1,4634	4	512,10	512,07	0,0314	15,0433	56	638,1	638,72	-0,62
1,8272	5	512,50	512,50	-0,0002	15,1718	57	642,0	642,63	-0,63
2,1897	6	513,00	513,03	-0,0271	15,2958	58	646,0	646,58	-0,58
2,5506	7	513,60	513,65	-0,0488	15,4154	59	649,9	650,57	-0,67
2,9097	8	514,40	514,36	0,0351	15,5307	60	653,9	654,58	-0,68
3,2667	9	515,20	515,17	0,0252	15,6418	61	657,9	658,62	-0,72
3,6214	10	516,10	516,08	0,0221	15,7487	62	661,9	662,68	-0,78
3,9735	11	517,10	517,07	0,0264	15,5815	63	666,0	666,78	-0,78
4,3228	12	518,10	518,16	-0,0610	15,9503	64	670,1	670,89	-0,79
4,6691	13	519,30	519,34	-0,0395	15,0452	65	674,2	675,04	-0,84
5,0121	14	520,60	520,61	-0,0081	16,1363	66	678,3	679,20	-0,90
5,3517	15	521,90	521,97	-0,0659	16,2236	67	682,5	683,39	-0,89
5,6877	16	523,40	523,41	-0,0119	16,3073	68	686,6	687,60	-1,00
6,0199	17	524,90	524,95	-0,0452	16,3873	69	690,8	691,83	-1,03
6,3481	18	526,50	526,56	-0,0646	16,4639	70	695,1	696,09	-0,99
6,6721	19	528,20	528,27	-0,0691	16,5370	71	699,3	700,36	-1,06
6,9918	20	530,00	530,06	-0,0574	16,6067	72	703,5	704,64	-1,14
7,3070	21	531,90	531,93	-0,0285	16,6732	73	707,9	708,95	-1,05
7,6176	22	533,80	533,88	-0,0809	16,7365	74	712,1	713,27	-1,17
7,9235	23	535,80	535,91	-0,1135	16,7966	75	716,5	717,61	-1,11
8,2245	24	537,90	538,03	-0,1250	16,8537	76	720,7	721,96	-1,26
8,5206	25	540,10	540,21	-0,1140	16,9078	77	725,0	726,32	-1,32
8,8115	26	542,40	542,48	-0,0791	16,9589	78	729,3	730,70	-1,40
9,0974	27	544,70	544,82	-0,1191	17,0073	79	733,6	735,09	-1,49
9,3780	28	547,10	547,23	-0,1324	17,0529	80	738,0	739,49	-1,49
9,6533	29	549,60	549,72	-0,1176	17,0958	81	742,4	743,91	-1,51
9,6232	30	552,10	552,27	-0,1734	17,1360	82	746,7	748,33	-1,63
10,1877	31	554,70	554,90	-0,1982	17,1737	83	751,1	752,77	-1,67
10,4468	32	557,4	557,59	-0,1907	17,2089	84	755,5	757,21	-1,71
10,7004	33	560,20	560,35	-0,1492	17,2416	85	759,9	761,66	-1,76
10,9484	34	563,00	563,17	-0,1725	17,2720	86	764,3	766,12	-1,82
11,1910	35	565,90	566,06	-0,1589	17,3001	87	768,7	770,59	-1,89
11,4279	36	568,80	569,01	-0,2071	17,3259	88	773,1	775,06	-1,96
11,6594	37	571,80	572,02	-0,2154	17,3496	89	777,5	779,54	-2,04
11,8853	38	574,80	575,08	-0,2826	17,3711	90	781,9	784,03	-2,13
12,1057	39	578,00	578,21	-0,2070	17,3905	91	786,3	788,52	-2,22
12,3206	40	581,10	581,39	-0,2872	17,4080	92	790,8	793,01	-2,21
12,5300	41	584,30	584,62	-0,3219	17,4234	93	795,2	797,51	-2,31
12,7339	42	587,60	587,91	-0,3094	17,4370	94	799,6	802,01	-2,41
12,9324	43	590,90	591,25	-0,3485	17,4487	95	804,0	806,52	-2,52
13,1256	44	594,30	594,64	-0,3376	17,4586	96	808,5	811,03	-2,53
13,3134	45	597,70	598,08	-0,3754	17,4668	97		815,54	
13,4959	46	601,20	601,56	-0,3605	17,4733	98		820,05	
13,6732	47	604,70	605,09	-0,3915	17,4781	99		824,57	
13,8453	48	608,30	608,67	-0,3670	17,4813	100		829,08	
14,0122	49	611,90	612,29	-0,3857	17,4829	101		833,60	
14,1742	50	615,50	615,95	-0,4462	17,4832	101,59		836,26	
14,3311	51	619,20	619,65	-0,4473					

Tabla 7.7: Ondas PcP .

I_0	Δ	T_c (s)	I_0	Δ	T_c (s)
0,0000	0	938,09	14,7203	54	1159,69
0,3628	1	938,18	14,8612	55	1166,84
0,7253	2	938,44	14,9977	56	1174,07
1,0872	3	938,88	15,1298	57	1181,35
1,4484	4	939,50	15,2575	58	1188,70
1,8086	5	940,30	15,3810	59	1196,10
2,1674	6	941,27	15,5003	60	1203,57
2,5248	7	942,42	15,6155	61	1211,08
2,8803	8	943,74	15,7266	62	1218,66
3,2338	9	945,24	15,8339	63	1226,28
3,5850	10	946,91	15,9372	64	1233,95
3,9338	11	948,74	16,0367	65	1241,67
4,2798	12	950,75	16,1325	66	1249,44
4,6229	13	952,93	16,2247	67	1257,25
4,9629	14	955,27	16,3133	68	1265,10
5,2995	15	957,78	16,3985	69	1273,00
5,6326	16	960,45	16,4802	70	1280,93
5,9620	17	963,28	16,5585	71	1288,90
6,2875	18	966,27	16,6336	72	1296,91
6,6090	19	969,42	16,7055	73	1304,95
6,9263	20	972,72	16,7743	74	1313,02
7,2392	21	976,18	16,8400	75	1321,13
7,5477	22	979,78	16,9028	76	1329,26
7,8516	23	983,54	16,9626	77	1337,43
8,1507	24	987,44	17,0196	78	1345,62
8,4450	25	991,49	17,0738	79	1353,84
8,7345	26	995,67	17,1253	80	1362,08
9,0189	27	1000,00	17,1742	81	1370,34
9,2982	28	1004,46	17,2205	82	1378,63
9,5724	29	1009,06	17,2643	83	1386,94
9,8414	30	1013,78	17,3056	84	1395,27
10,1052	31	1018,64	17,3445	85	1403,62
10,3637	32	1023,62	17,3811	86	1411,98
10,6169	33	1028,72	17,4155	87	1420,36
10,8647	34	1033,95	17,4476	88	1428,76
11,1071	35	1039,29	17,4775	89	1437,17
11,3442	36	1044,75	17,5054	90	1445,60
11,5760	37	1050,32	17,5312	91	1454,04
11,8023	38	1056,00	17,5550	92	1462,48
12,0233	39	1061,78	17,5769	93	1470,94
12,2390	40	1067,67	17,5968	94	1479,41
12,4494	41	1073,67	17,6150	95	1487,89
12,6545	42	1079,76	17,6313	96	1496,38
12,8543	43	1085,95	17,6459	97	1504,87
13,0490	44	1092,23	17,6588	98	1513,37
13,2384	45	1098,60	17,6700	99	1521,88
13,4228	46	1105,07	17,6796	100	1530,39
13,6021	47	1111,62	17,6877	101	1538,91
13,7764	48	1118,25	17,6942	102	1547,42
13,9457	49	1124,97	17,6993	103	1555,94
14,1101	50	1131,76	17,7029	104	1564,47
14,2698	51	1138,63	17,7051	105	1572,99
14,4246	52	1145,58	17,7060	106	1581,52
14,5747	53	1152,60	17,7060	106,14	1582,73

Tabla 7.8: Ondas ScS.

I_0	Δ	T_c (s)	I_0	Δ	T_c (s)
0,0000	0	724,69	15,3018	41	817,01
0,4754	1	724,76	15,4971	42	821,01
0,9504	2	724,94	15,6824	43	825,05
1,4245	3	725,25	15,8579	44	829,13
1,8973	4	725,69	16,0235	45	833,26
2,3684	5	726,25	16,1793	46	837,43
2,8374	6	726,93	16,3255	47	841,64
3,3038	7	727,74	16,4621	48	845,88
3,7672	8	728,66	16,5893	49	850,16
4,2273	9	729,71	16,7071	50	854,46
4,6836	10	730,88	16,8158	51	858,80
5,1357	11	732,17	16,9155	52	863,16
5,5833	12	733,57	17,0064	53	867,55
6,0259	13	735,09	17,0886	54	871,95
6,4633	14	736,73	17,1624	55	876,38
6,8951	15	738,48	17,2279	56	880,82
7,3209	16	740,34	17,2854	57	885,28
7,7403	17	742,31	17,3350	58	889,76
8,1532	18	744,38	17,3770	59	894,24
8,5592	19	746,57	17,4117	60	898,74
8,9579	20	748,86	17,4392	61	903,24
9,3492	21	751,25	17,4599	62	907,75
9,7327	22	753,74	17,4739	63	912,26
10,1082	23	756,33	17,4815	64	916,77
10,4755	24	759,02	17,4832	64,75	920,15
10,8343	25	761,80			
11,1845	26	764,67			
11,5258	27	767,63			
11,8581	28	770,68			
12,1812	29	773,81			
12,4950	30	777,02			
12,7993	31	780,31			
13,094	32	783,68			
13,3790	33	787,12			
13,6542	34	790,63			
13,9195	35	794,22			
14,1749	36	797,87			
14,4203	37	801,58			
14,6557	38	805,35			
14,8811	39	809,18			
15,0965	40	813,07			

Tabla 7.9: Ondas \mathcal{PcS} .

7.2.2 Ondas \mathcal{P} refractadas y reflejadas en el núcleo

I_0	Δ	T_0 (s)	T_c (s)	$T_0 - T_c$	w_m (s^{-1})	r_m (km)	z_m (km)	v_m (km/s)
17,4832	174,06		1303,97		3,8646E-03	2485,0	3886,0	9,604
17,4832	174	1302,68	1303,68	-1,00	3,8646E-03	2485,0	3886,0	9,604
17,4823	173	1297,84	1299,16	-1,32	3,8648E-03	2484,9	3886,1	9,604
17,4799	172	1293,59	1294,65	-1,06	3,8653E-03	2484,6	3886,4	9,604
17,4758	171	1289,90	1290,13	-0,23	3,8662E-03	2484,2	3886,8	9,604
17,4699	170	1284,87	1285,62	-0,75	3,8674E-03	2483,6	3887,4	9,605
17,4621	169	1280,04	1281,11	-1,07	3,8691E-03	2482,8	3888,3	9,606
17,4523	168	1275,81	1276,60	-0,79	3,8712E-03	2481,7	3889,3	9,607
17,4404	167	1271,74	1272,09	-0,35	3,8738E-03	2480,5	3890,5	9,609
17,4262	166	1266,78	1267,59	-0,81	3,8768E-03	2479,0	3892,0	9,611
17,4095	165	1262,87	1263,09	-0,22	3,8804E-03	2477,2	3893,8	9,613
17,3902	164	1258,19	1258,59	-0,40	3,8846E-03	2475,2	3895,8	9,615
17,3680	163	1253,78	1254,10	-0,32	3,8894E-03	2472,8	3898,2	9,618
17,3427	162	1249,70	1249,62	0,08	3,8949E-03	2470,2	3900,9	9,621
17,3141	161	1245,24	1245,14	0,10	3,9012E-03	2467,1	3903,9	9,625
17,2818	160	1240,76	1240,67	0,09	3,9082E-03	2463,7	3907,4	9,629
17,2454	159	1236,57	1236,21	0,36	3,9162E-03	2459,8	3911,2	9,633
17,2047	158	1232,42	1231,76	0,66	3,9252E-03	2455,4	3915,6	9,638
17,1590	157	1228,10	1227,32	0,78	3,9354E-03	2450,5	3920,5	9,644
17,1078	156	1223,96	1222,89	1,07	3,9468E-03	2445,0	3926,0	9,650
17,0504	155	1219,66	1218,47	1,19	3,9597E-03	2438,8	3932,2	9,657
16,9859	154	1215,05	1214,07	0,98	3,9743E-03	2431,8	3939,3	9,664
16,9132	153	1211,37	1209,69	1,68	3,9908E-03	2423,8	3947,2	9,673
16,8309	152	1207,11	1205,33	1,78	4,0098E-03	2414,8	3956,3	9,683
16,7369	151	1203,18	1200,99	2,20	4,0317E-03	2404,4	3966,7	9,694
16,6287	150	1198,61	1196,67	1,94	4,0571E-03	2392,3	3978,7	9,706
16,5022	149		1192,38		4,0874E-03	2378,1	3993,0	9,720
16,3509	148		1188,13		4,1241E-03	2360,8	4010,2	9,736
16,1633	147		1183,92		4,1707E-03	2339,2	4031,8	9,756
15,9134	146		1179,77		4,2345E-03	2310,0	4061,1	9,782
15,5052	145		1175,69		4,3431E-03	2261,0	4110,1	9,820
14,9946	144,60		1174,10		4,4874E-03	2197,4	4173,6	9,861

Tabla 7.10: Ondas PKP (tramo AB).

I_0	Δ	T_0 (s)	T_c (s)	$T_0 - T_c$	w_m (s ⁻¹)	r_m (km)	z_m (km)	v_m (km/s)
14,9946	144,60		1174,10		4,4874E-03	2197,4	4173,6	9,861
14,4472	145	1178,47	1175,62	2,85	4,6536E-03	2126,5	4244,5	9,896
13,9474	146	1181,46	1179,30	2,16	4,8169E-03	2059,0	4312,0	9,918
13,6064	147	1184,21	1182,88	1,33	4,9353E-03	2011,5	4359,6	9,927
13,3279	148	1187,16	1186,38	0,78	5,0365E-03	1971,7	4399,4	9,930
13,2530	148,30		1187,40		5,0644E-03	1960,8	4410,2	9,930
13,0861	149	1189,85	1189,81	0,04	5,1279E-03	1936,4	4434,6	9,930
12,8693	150	1192,41	1193,19	-0,78	5,2128E-03	1904,2	4466,8	9,926
12,6712	151	1194,72	1196,51	-1,79	5,2929E-03	1874,3	4496,7	9,921
12,4878	152	1197,10	1199,78	-2,68	5,3694E-03	1846,2	4524,8	9,913
12,3163	153		1203,01		5,4429E-03	1819,6	4551,4	9,904
12,1548	154		1206,20		5,5142E-03	1794,2	4576,8	9,893
12,0019	155		1209,34		5,5834E-03	1769,8	4601,2	9,882
11,8564	156		1212,45		5,6509E-03	1746,4	4624,6	9,869
11,7175	157		1215,52		5,7169E-03	1723,8	4647,2	9,855
11,5844	158		1218,56		5,7817E-03	1701,9	4669,2	9,840
11,4566	159		1221,56		5,8453E-03	1680,6	4690,4	9,824
11,3336	160		1224,53		5,9079E-03	1660,0	4711,0	9,807
11,2149	161		1227,47		5,9696E-03	1639,9	4731,1	9,789
11,1002	162		1230,38		6,0305E-03	1620,3	4750,7	9,771
10,9893	163		1233,26		6,0906E-03	1601,2	4769,9	9,752
10,8817	164		1236,11		6,1501E-03	1582,5	4788,6	9,732
10,7774	165		1238,93		6,2089E-03	1564,2	4806,8	9,712
10,6761	166		1241,73		6,2671E-03	1546,3	4824,7	9,691
10,5775	167		1244,50		6,3249E-03	1528,8	4842,2	9,669
10,4816	168		1247,25		6,3821E-03	1511,6	4859,4	9,647
10,3882	169		1249,97		6,4388E-03	1494,8	4876,3	9,625
10,2971	170		1252,67		6,4952E-03	1478,2	4892,8	9,601
10,2083	171		1255,35		6,5511E-03	1462,0	4909,0	9,578
10,1216	172		1258,00		6,6066E-03	1446,1	4925,0	9,554
10,0368	173		1260,63		6,6618E-03	1430,4	4940,6	9,529
9,9540	174		1263,24		6,7167E-03	1415,0	4956,0	9,504
9,8731	175		1265,83		6,7711E-03	1399,8	4971,2	9,479
9,8439	175,37		1266,77		6,7911E-03	1394,3	4976,7	9,469

Tabla 7.11: Ondas PKP (tramo BC).

I_0	Δ	T_c (s)	w_m (s^{-1})	r_m (km)	z_m (km)	v_m (km/s)
9,8439	175,37	1266,77	6,7911E-03	1394,3	4976,7	9,469
9,8438	175	1265,83	6,7911E-03	1394,3	4976,7	9,469
9,8432	174	1263,26	6,7915E-03	1394,3	4976,7	9,470
9,8418	173	1260,69	6,7925E-03	1394,2	4976,8	9,470
9,8396	172	1258,12	6,7940E-03	1394,2	4976,9	9,472
9,8366	171	1255,55	6,7960E-03	1394,0	4977,0	9,474
9,8328	170	1252,98	6,7986E-03	1393,8	4977,2	9,476
9,8282	169	1250,42	6,8018E-03	1393,6	4977,4	9,479
9,8227	168	1247,85	6,8056E-03	1393,4	4977,6	9,483
9,8163	167	1245,29	6,8100E-03	1393,1	4977,9	9,487
9,8090	166	1242,73	6,8150E-03	1392,8	4978,3	9,492
9,8007	165	1240,17	6,8207E-03	1392,4	4978,6	9,497
9,7915	164	1237,61	6,8270E-03	1392,0	4979,1	9,503
9,7813	163	1235,05	6,8341E-03	1391,5	4979,5	9,510
9,7701	162	1232,50	6,8418E-03	1391,0	4980,0	9,517
9,7578	161	1229,95	6,8504E-03	1390,4	4980,6	9,525
9,7445	160	1227,41	6,8596E-03	1389,8	4981,2	9,534
9,7301	159	1224,86	6,8697E-03	1389,2	4981,9	9,543
9,7145	158	1222,32	6,8806E-03	1388,4	4982,6	9,553
9,6978	157	1219,79	6,8924E-03	1387,7	4983,4	9,564
9,6798	156	1217,26	6,9050E-03	1386,8	4984,2	9,576
9,6607	155	1214,73	6,9186E-03	1385,9	4985,1	9,589
9,6403	154	1212,21	6,9331E-03	1385,0	4986,0	9,602
9,6186	153	1209,70	6,9485E-03	1384,0	4987,1	9,617
9,5956	152	1207,19	6,9651E-03	1382,9	4988,1	9,632
9,5712	151	1204,69	6,9826E-03	1381,7	4989,3	9,648
9,5454	150	1202,19	7,0013E-03	1380,5	4990,5	9,665
9,5182	149	1199,70	7,0212E-03	1379,2	4991,8	9,684
9,4894	148	1197,22	7,0423E-03	1377,8	4993,2	9,703
9,4591	147	1194,75	7,0646E-03	1376,4	4994,7	9,724
9,4273	146	1192,28	7,0883E-03	1374,8	4996,2	9,745
9,3938	145	1189,82	7,1133E-03	1373,2	4997,8	9,768
9,3586	144	1187,37	7,1398E-03	1371,5	4999,6	9,792
9,3217	143	1184,93	7,1678E-03	1369,7	5001,4	9,817
9,2830	142	1182,50	7,1974E-03	1367,7	5003,3	9,844
9,2424	141	1180,08	7,2288E-03	1365,7	5005,3	9,872
9,1999	140	1177,67	7,2619E-03	1363,6	5007,5	9,902

Tabla 7.12: Ondas PKP (tramo CD) (I).

I_0	Δ	T_c (s)	w_m (s^{-1})	r_m (km)	z_m (km)	v_m (km/s)
9,1554	139	1175,28	7,2969E-03	1361,3	5009,7	9,933
9,1088	138	1172,89	7,3339E-03	1358,9	5012,1	9,966
9,0600	137	1170,52	7,3730E-03	1356,4	5014,6	10,001
9,0090	136	1168,16	7,4144E-03	1353,7	5017,3	10,037
8,9556	135	1165,81	7,4583E-03	1350,9	5020,1	10,075
8,8998	134	1163,48	7,5047E-03	1347,9	5023,1	10,116
8,8414	133	1161,16	7,5539E-03	1344,8	5026,2	10,158
8,7802	132	1158,86	7,6061E-03	1341,5	5029,5	10,203
8,7162	131	1156,57	7,6615E-03	1338,0	5033,1	10,251
8,6492	130	1154,30	7,7204E-03	1334,2	5036,8	10,301
8,5789	129	1152,05	7,7832E-03	1330,3	5040,8	10,354
8,5052	128	1149,81	7,8501E-03	1326,0	5045,0	10,410
8,4277	127	1147,60	7,9217E-03	1321,5	5049,5	10,469
8,3463	126	1145,41	7,9984E-03	1316,7	5054,3	10,532
8,2606	125	1143,24	8,0809E-03	1311,6	5059,4	10,599
8,1701	124	1141,09	8,1698E-03	1306,1	5064,9	10,670
8,0744	123	1138,97	8,2660E-03	1300,1	5070,9	10,747
7,9728	122	1136,87	8,3706E-03	1293,7	5077,3	10,829
7,8646	121	1134,80	8,4850E-03	1286,7	5084,3	10,918
7,7488	120	1132,75	8,6110E-03	1279,0	5092,0	11,014
7,6240	119	1130,74	8,7511E-03	1270,6	5100,5	11,119
7,4885	118	1128,77	8,9086E-03	1261,1	5109,9	11,235
7,4671	117,85	1128,47	8,9339E-03	1259,6	5111,4	11,253

Tabla 7.13: Ondas PKP (tramo CD) (II).

I_0	Δ	T_0 (s)	T_c (s)	$T_0 - T_c$	w_m (s^{-1})	r_m (km)	z_m (km)	v_m (km/s)
7,4671	117,85		1128,47		8,9339E-03	1259,6	5111,4	11,253
7,4671	118	1128,70	1128,77	-0,07	8,9339E-03	1259,6	5111,4	11,253
7,4656	119	1130,62	1130,72	-0,10	8,9357E-03	1259,4	5111,7	11,253
7,4618	120	1132,54	1132,67	-0,13	8,9402E-03	1258,8	5112,3	11,254
7,4554	121	1134,38	1134,62	-0,24	8,9479E-03	1257,8	5113,2	11,254
7,4465	122	1136,30	1136,57	-0,27	8,9585E-03	1256,4	5114,6	11,255
7,4349	123	1138,29	1138,52	-0,23	8,9724E-03	1254,6	5116,4	11,257
7,4205	124	1140,20	1140,46	-0,26	8,9897E-03	1252,3	5118,7	11,258
7,4032	125	1142,11	1142,40	-0,29	9,0106E-03	1249,6	5121,4	11,260
7,3830	126	1144,12	1144,34	-0,22	9,0351E-03	1246,4	5124,6	11,262
7,3598	127	1146,13	1146,27	-0,13	9,0634E-03	1242,8	5128,3	11,264
7,3337	128	1148,04	1148,19	-0,15	9,0955E-03	1238,6	5132,4	11,266
7,3045	129	1149,97	1150,10	-0,13	9,1317E-03	1234,0	5137,0	11,268
7,2724	130	1152,01	1152,01	0,00	9,1718E-03	1228,9	5142,2	11,271
7,2373	131	1154,09	1153,91	0,18	9,2160E-03	1223,2	5147,8	11,273
7,1995	132	1155,92	1155,80	0,12	9,2642E-03	1217,1	5153,9	11,276
7,1590	133	1157,96	1157,68	0,28	9,3163E-03	1210,6	5160,5	11,278
7,1160	134	1159,82	1159,54	0,28	9,3723E-03	1203,6	5167,5	11,280
7,0707	135	1161,58	1161,40	0,18	9,4320E-03	1196,1	5174,9	11,282
7,0233	136	1163,47	1163,25	0,23	9,4954E-03	1188,3	5182,8	11,283
6,9741	137	1165,36	1165,08	0,28	9,5620E-03	1180,1	5191,0	11,284
6,9243	137,98		1166,86		9,6305E-03	1171,7	5199,3	11,284

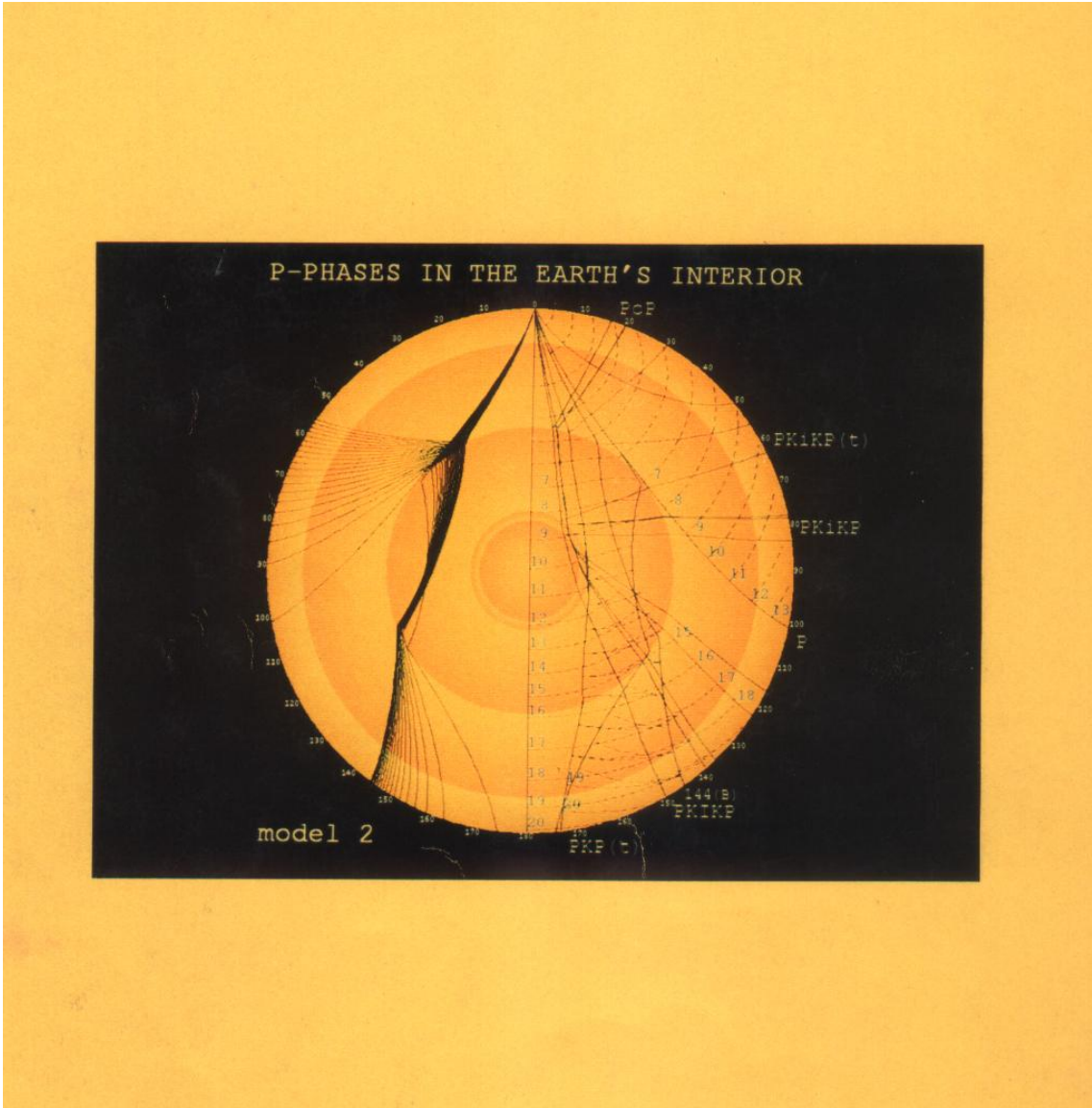
Tabla 7.14: Ondas *PKIKP* (tramo DE).

I_0	Δ	T_0 (s)	T_c (s)	$T_0 - T_c$	w_m (s ⁻¹)	r_m (km)	z_m (km)	v_m (km/s)
6,9243	137,98		1166,86		9,6305E-03	1171,7	5199,3	11,284
6,9232	138	1167,08	1166,90	0,18	9,6305E-03	1171,5	5199,5	11,284
6,8667	139	1168,98	1168,70	0,28	9,6305E-03	1162,0	5209,0	11,284
6,8042	140		1170,49		9,6305E-03	1151,5	5219,5	11,284
6,7364	141		1172,26		9,6305E-03	1140,1	5231,0	11,284
6,6631	142		1174,02		9,6305E-03	1127,7	5243,3	11,284
6,5845	143		1175,75		9,6305E-03	1114,5	5256,6	11,284
6,5003	144		1177,46		9,6305E-03	1100,3	5270,7	11,284
6,4104	145		1179,15		9,6305E-03	1085,1	5285,9	11,284
6,3146	146		1180,82		9,6305E-03	1069,0	5302,0	11,284
6,2129	147		1182,46		9,6305E-03	1051,8	5319,2	11,284
6,1052	148		1184,07		9,6305E-03	1033,7	5337,4	11,284
5,9912	149		1185,66		9,6305E-03	1014,4	5356,6	11,284
5,8711	150		1187,21		9,6305E-03	994,2	5376,8	11,284
5,7447	151	1189,52	1188,73	0,79	9,6305E-03	972,8	5398,2	11,284
5,6121	152	1190,89	1190,22	0,67	9,6305E-03	950,5	5420,6	11,284
5,4732	153	1192,40	1191,67	0,73	9,6305E-03	927,0	5444,0	11,284
5,3281	154	1193,70	1193,09	0,62	9,6305E-03	902,5	5468,5	11,284
5,1769	155	1194,91	1194,46	0,45	9,6305E-03	877,0	5494,1	11,284
5,0197	156	1196,23	1195,80	0,43	9,6305E-03	850,4	5520,6	11,284
4,8566	157	1197,51	1197,09	0,42	9,6305E-03	822,8	5548,2	11,284
4,6878	158	1198,46	1198,34	0,12	9,6305E-03	794,3	5576,7	11,284
4,5134	159	1199,79	1199,55	0,24	9,6305E-03	764,8	5606,2	11,284
4,3336	160	1200,91	1200,71	0,20	9,6305E-03	734,4	5636,6	11,284
4,1488	161	1201,82	1201,82	0,00	9,6305E-03	703,1	5667,9	11,284
3,9590	162	1202,94	1202,88	0,06	9,6305E-03	671,0	5700,0	11,284
3,7645	163	1204,08	1203,90	0,18	9,6305E-03	638,1	5732,9	11,284
3,5657	164	1205,08	1204,86	0,22	9,6305E-03	604,5	5766,6	11,284
3,3627	165	1205,78	1205,77	0,01	9,6305E-03	570,1	5800,9	11,284
3,1558	166	1206,85	1206,62	0,23	9,6305E-03	535,1	5836,0	11,284
2,9452	167	1207,81	1207,42	0,39	9,6305E-03	499,4	5871,7	11,284
2,7314	168	1208,34	1208,16	0,18	9,6305E-03	463,2	5907,9	11,284
2,5144	169	1209,03	1208,85	0,18	9,6305E-03	426,4	5944,6	11,284
2,2947	170	1209,90	1209,48	0,42	9,6305E-03	389,1	5981,9	11,284
2,0724	171	1210,43	1210,06	0,37	9,6305E-03	351,5	6019,6	11,284
1,8478	172	1210,72	1210,57	0,15	9,6305E-03	313,4	6057,6	11,284
1,6212	173	1211,29	1211,03	0,26	9,6305E-03	275,0	6096,1	11,284
1,3928	174	1211,52	1211,42	0,10	9,6305E-03	236,2	6134,8	11,284
1,1630	175	1211,87	1211,76	0,11	9,6305E-03	197,3	6173,8	11,284
0,9319	176	1211,97	1212,03	-0,06	9,6305E-03	158,1	6213,0	11,284
0,6998	177	1212,13	1212,24	-0,11	9,6305E-03	118,7	6252,3	11,284
0,4669	178	1212,57	1212,40	0,17	9,6305E-03	79,2	6291,8	11,284
0,2336	179	1212,08	1212,49	-0,41	9,6305E-03	39,6	6331,4	11,284
0,0000	180		1212,52		9,6305E-03	0,0	6371,0	11,284

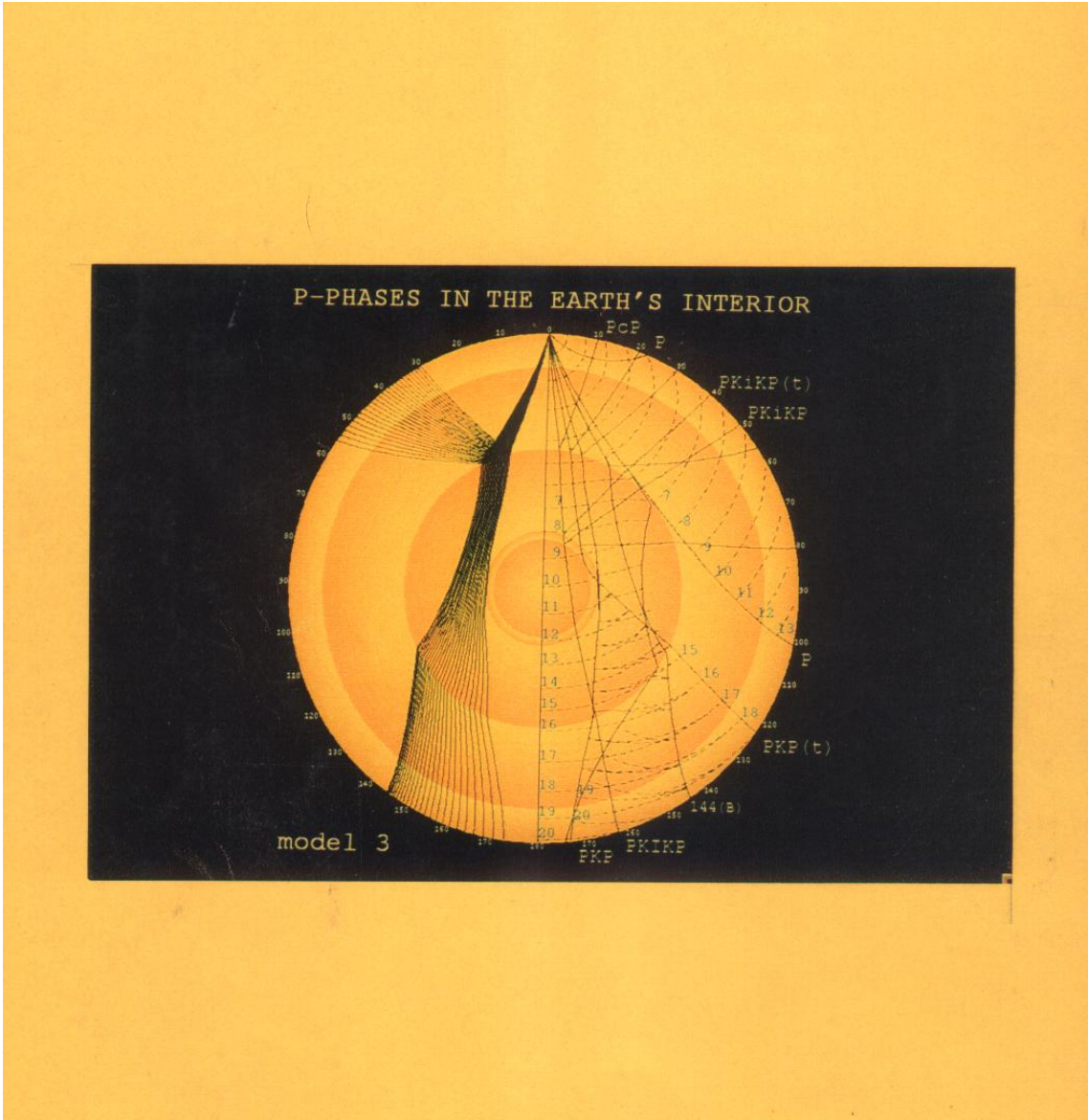
Tabla 7.15: Ondas \mathcal{PKIKP} (tramo EF).

I_0	Δ	T_c (s)	I_0	Δ	T_c (s)
0,000	0	989,25	4,955	60	1029,87
0,090	1	989,27	5,024	61	1031,18
0,179	2	989,30	5,092	62	1032,51
0,269	3	989,36	5,159	63	1033,85
0,359	4	989,44	5,226	64	1035,21
0,448	5	989,55	5,292	65	1036,59
0,538	6	989,68	5,357	66	1037,98
0,627	7	989,83	5,422	67	1039,39
0,716	8	990,01	5,486	68	1040,82
0,805	9	990,21	5,550	69	1042,27
0,895	10	990,43	5,612	70	1043,73
0,984	11	990,68	5,674	71	1045,21
1,072	12	990,95	5,735	72	1046,70
1,161	13	991,24	5,796	73	1048,21
1,250	14	991,55	5,855	74	1049,74
1,338	15	991,89	5,914	75	1051,28
1,426	16	992,26	5,973	76	1052,84
1,514	17	992,64	6,030	77	1054,41
1,602	18	993,05	6,086	78	1055,99
1,689	19	993,48	6,142	79	1057,60
1,777	20	993,94	6,197	80	1059,21
1,864	21	994,41	6,251	81	1060,84
1,951	22	994,92	6,305	82	1062,49
2,037	23	995,44	6,357	83	1064,14
2,124	24	995,98	6,409	84	1065,81
2,210	25	996,55	6,460	85	1067,50
2,295	26	997,14	6,510	86	1069,20
2,381	27	997,76	6,559	87	1070,91
2,466	28	998,39	6,607	88	1072,63
2,550	29	999,05	6,654	89	1074,37
2,635	30	999,73	6,700	90	1076,11
2,719	31	1000,43	6,745	91	1077,87
2,802	32	1001,16	6,790	92	1079,65
2,886	33	1001,90	6,833	93	1081,43
2,969	34	1002,67	6,875	94	1083,22
3,051	35	1003,46	6,917	95	1085,03
3,133	36	1004,27	6,957	96	1086,84
3,215	37	1005,10	6,996	97	1088,67
3,296	38	1005,96	7,034	98	1090,50
3,377	39	1006,83	7,070	99	1092,35
3,457	40	1007,73	7,106	100	1094,21
3,537	41	1008,64	7,140	101	1096,07
3,616	42	1009,58	7,173	102	1097,94
3,695	43	1010,54	7,205	103	1099,82
3,774	44	1011,52	7,235	104	1101,71
3,852	45	1012,52	7,264	105	1103,61
3,929	46	1013,54	7,291	106	1105,51
4,006	47	1014,58	7,317	107	1107,43
4,082	48	1015,64	7,341	108	1109,34
4,158	49	1016,72	7,363	109	1111,27
4,234	50	1017,82	7,384	110	1113,20
4,308	51	1018,94	7,402	111	1115,13
4,383	52	1020,08	7,419	112	1117,07
4,456	53	1021,24	7,433	113	1119,01
4,529	54	1022,41	7,445	114	1120,96
4,602	55	1023,61	7,455	115	1122,91
4,674	56	1024,83	7,462	116	1124,86
4,745	57	1026,06	7,466	117	1126,81
4,815	58	1027,31	7,467	117,85	1128,47
4,885	59	1028,58			

Tabla 7.16: Ondas $PKiKP$.



Contraportada mod 2



Contraportada mod 3