

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Departamento de Ingeniería Electrónica y Comunicaciones



Análisis de alternancias de onda T en la señal electrocardiográfica.

TESIS DOCTORAL

Presentada por
Juan Pablo Martínez Cortés

Dirigida por
Dr. Salvador Olmos Gassó

ZARAGOZA, MAYO 2005

A Olga.

A mis padres.

Agradecimientos

Al cerrar las últimas líneas de esta tesis, vuelvo la vista atrás, y recuerdo con cariño a todas las personas que han contribuido a que este trabajo haya visto la luz. Quisiera expresar desde estas líneas mi más sincero agradecimiento a todos los que en estos años me han ofrecido su soporte científico y personal, brindándome sus conocimientos, su apoyo y su amistad... Me considero muy afortunado de haber contado con ellos. Debo mencionar expresamente:

A Salvador Olmos, que ha dirigido esta tesis con gran entusiasmo. Quiero agradecerle su amistad, su disponibilidad, su sinceridad, su incansable apoyo, sus palabras de ánimo, su calidad técnica y humana, y especialmente la confianza que desde un primer momento depositó en mí.

A Pablo Laguna, por quien me he sentido siempre apoyado y animado, quiero agradecerle sus consejos, aportaciones y discusiones, técnicas y no técnicas. De él también he aprendido mucho en lo científico y en lo personal.

A Leif Sörnmo, de la Universidad de Lund, por sus aportaciones y discusiones científicas, sus consejos, su amabilidad y por todos esos ratos de buena conversación.

A los compañeros de fatigas Alfonso Ortega, Luis Vicente, Ángela Hernández, Íñigo Salinas... con quienes he compartido alegrías, penas e inquietudes, y de quienes he obtenido comprensión y apoyo. En general, a todos los compañeros del Grupo de Tecnologías de las Comunicaciones, por el buen ambiente disfrutado.

A mis amigos: Alejandro, Adolfo, Daniel, Santi, Carlos, Alberto..., a quienes he incordiado con mis preocupaciones y de quienes he recibido siempre palabras de ánimo.

A mis padres, Juan Pablo y Ana, que han invertido su esfuerzo en mi formación, por su inmenso amor e incondicional apoyo.

Y finalmente, a Olga, compañera en el vivir y en el querer. Por haber estado siempre a mi lado, en los buenos y malos momentos. Por tu amor, comprensión y paciencia. Sin ellos esta tesis no hubiera sido posible.

Resumen

La presente tesis doctoral estudia las metodologías de análisis de Alternancias de Onda T (AOT) en la señal electrocardiográfica. Este fenómeno se ha desvelado en los últimos años como uno de los índices clínicos no invasivos más prometedores para estratificar el riesgo de arritmias malignas y muerte súbita cardiaca.

En primer lugar se realiza un esfuerzo de sistematización de los enfoques planteados por los diversos autores. Se lleva a cabo una revisión pormenorizada de los métodos existentes, planteando un marco de referencia unificado para el análisis de AOT. A la luz de este esquema generalizado se analizan los distintos métodos, clasificándolos en función de la forma de calcular los estimadores y estadísticos de decisión. Se demuestra que algunos métodos son equivalentes a pesar de que parten de planteamientos muy diferentes.

En esta tesis se utilizan herramientas de las teorías estadísticas de la detección y la estimación para derivar y proponer nuevas técnicas de análisis de AOT. Se propone un enfoque metodológico basado en modelos. En particular, se derivan el estimador de máxima verosimilitud (EMV), el test del cociente de verosimilitudes generalizado (TCVG) y los detectores asintóticamente equivalentes de Wald y Rao para los diferentes modelos considerados. En ellos, la señal alterna se caracteriza según un modelo lineal con parámetros deterministas desconocidos. Se consideran modelos de ruido gaussiano, así como la familia de distribuciones gaussianas generalizadas. Por otro lado, según el grado de estacionariedad y conocimiento a priori del ruido se definen tres tipos de modelos: estacionarios, adaptativos y no estacionarios. Con la utilización de estos modelos se pretende llevar a cabo una caracterización más realista del problema, ya que el ruido real presente en el ECG es leptocúrtico y claramente no estacionario. Se han derivado las prestaciones teóricas de los métodos (bien de forma exacta, bien de forma asintótica) y su sensibilidad ante los desajustes entre el modelo y la señal a analizar.

La validación de los métodos se completa evaluando sus prestaciones ante señales con AOT simuladas en condiciones realistas. Para ello se utilizan dos generadores de señal ECG, cuya característica común es que el ruido presente en las señales simuladas es real, bien procedente de una base de datos con registros de ruido fisiológico, o bien de las propias señales ECG sobre las que se simula la alternancia. Se comprueba que los detectores de AOT que consiguen las mejores prestaciones son el TCVG laplaciano adaptativo, junto con los detectores basados en modelos no estacionarios (tanto gaussianos como laplacianos). Los resultados muestran igualmente que cualquiera de los tres métodos anteriores supera con claridad las prestaciones de los métodos más ampliamente utilizados en la literatura.

Como aplicación clínica de las metodologías propuestas, se presenta un estudio en que se analizan señales ECG registradas durante una intervención de angioplastia coronaria transluminal percutánea (PTCA). La isquemia controlada inducida durante la intervención ofrece la oportunidad de caracterizar el fenómeno de las AOT producida durante los primeros minutos de la isquemia aguda de miocardio. Utilizando una metodología basada en el modelo laplaciano adaptativo se estudia su prevalencia y magnitud en función de la localización de la oclusión. Asimismo, se caracteriza la evolución de la alternancia durante los períodos de oclusión y reperfusión, se comprueba que la distribución espacial por derivaciones depende de la arteria ocluida y se estudian las diferencias en su distribución temporal dentro del complejo ST-T.

Abstract

This PhD thesis is focused on the methods for T wave alternans (TWA) analysis in the ECG signal. In the last years, this phenomenon has revealed to be one of the most promising clinical indexes to stratify the risk of malignant arrhythmias and sudden cardiac death.

First of all, a systematization effort of the different approaches is performed. The existent methods are reviewed, and a generalized framework for TWA analysis is established. In the light of this general scheme, the different methods are analysed, compared and classified according to the way of computing the estimators and detection statistics. Equivalences have been shown between some of them, even though they departed from very different theoretical approaches.

In this thesis, the tools provided by the statistical detection and estimation theories are used to derive and propose new TWA analysis methods. In particular, the maximum likelihood estimator (MLE), the generalized likelihood ratio test (GLRT) and the asymptotically equivalent Wald and Rao tests are derived for different models. In them, the alternans signal is characterised according to a linear model with unknown deterministic parameters. Gaussian distribution as well as the family of generalized Gaussian distributions are considered for noise modelling. On the other hand, three types of models are defined, according to the degree of prior knowledge and stationarity of the noise level: stationary, adaptive and non-stationary models. The use of these models intends to perform a more realistic characterization of the problem, since real noise present in the ECG is leptokurtic and non-stationary. The theoretical performance of the methods is then derived (either on their exact form or asymptotically) and their sensitivity to modelling misadjustments is assessed.

The methods validation is completed by evaluating their performance when facing signals with simulated TWA in realistic conditions. Two ECG signal generators have been designed, having in common that the noise in the simulated signal is real: it originates either from a database with physiological noise recordings, or from the proper ECG signals on which the TWA episodes are simulated. It is shown that the best performance is achieved by TWA detectors based on the adaptive Laplacian model, as well as the non-stationary models (either Gaussian or Laplacian). The results also show that these models outperform clearly the currently used methods.

As a clinical application of the proposed methodologies, we present a study analysing ECG signals recorded during balloon coronary angioplasty interventions. The controlled

VIII

ischemia induced by the balloon inflation allows to characterise the TWA phenomenon during the first minutes of acute myocardial ischemia. Using a Laplacian adaptive method, the prevalence and magnitude of TWA is studied. Moreover, the evolution of TWA amplitude during the occlusion and reperfusion periods is characterized. The spatial lead distribution is shown to depend on the occluded artery, and differences in the temporal distribution of TWA within the ST-T complex are studied.

Índice general

Índice general	IX
Índice de figuras	xix
Índice de tablas	xxix
1. Introducción.	1
1.1. Antecedentes y motivacion.	1
1.1.1. Muerte súbita cardiaca.	2
1.1.2. Enfermedad coronaria.	3
1.2. La señal electrocardiográfica.	4
1.2.1. Origen: actividad eléctrica del corazón.	4
1.2.2. Derivaciones.	6
1.2.3. Descripción de la señal electrocardiográfica.	7
1.2.3.1. Características temporales.	7
1.2.3.2. Características frecuenciales.	10
1.2.4. Patologías asociadas con el ECG.	10
1.2.5. Tipos de ruido e interferencias presentes en el ECG.	12
1.2.6. Adquisición de la señal ECG.	13
1.2.7. Registros ECG ambulatorios de larga duración: registros Holter. . .	14
1.3. Alternancias de onda T en el ECG.	14
1.3.1. Alternancias de onda T e isquemia de miocardio.	16
1.3.1.1. Angioplastia coronaria transluminal percutánea.	16
1.3.2. Mecanismos electrofisiológicos.	16
1.4. Objetivos y alcance de la tesis.	18
1.5. Organización de la memoria.	19

2. Revisión metodológica del análisis de alternancias de onda T.	21
2.1. Análisis de Alternancias de Onda T.	21
2.2. Métodos de análisis de AOT.	22
2.2.1. Método espectral sobre la energía de la onda T (ME-E).	22
2.2.2. Método espectral (ME).	23
2.2.3. Método de la demodulación compleja (MDC).	23
2.2.4. Método de la correlación (MC).	24
2.2.5. Métodos basados en la transformada de Karhunen-Loève (ME-KL, MDC-KL).	24
2.2.6. Método del filtrado de Capon (MFC).	25
2.2.7. Método de los mapas de Poincaré (MMP).	25
2.2.8. Método de la transformada de periodicidad (MTP).	26
2.2.9. Método de los tests estadísticos (MTE).	26
2.2.10. Método de la media móvil modificada (MMM).	27
2.2.11. Otras propuestas.	27
2.2.12. Estudios previos de revisión y comparación de métodos.	27
2.3. Esquema general.	28
2.3.1. Preprocesado.	29
2.3.2. Reducción de datos.	29
2.3.3. Análisis de AOT.	30
2.3.3.1. Detección de AOT.	30
2.3.3.2. Estimación de AOT.	31
2.4. Revisión metodológica.	31
2.4.1. Preprocesado.	32
2.4.2. Reducción de datos.	36
2.4.2.1. Características temporalmente localizadas.	36
2.4.2.2. Características globales.	38
2.4.3. Análisis de AOT: subetapa de detección.	39
2.4.3.1. Métodos basados en la TFL (o basados en filtrado lineal).	40
2.4.3.2. Métodos basados en el conteo de cambios de signo.	45
2.4.3.3. Métodos basados en filtrado no lineal.	46
2.4.4. Análisis de AOT: subetapa de estimación.	47
2.4.4.1. Estimación de amplitud.	47

2.4.4.2. Estimación de la forma de onda.	48
2.4.5. Análisis de AOT: discusión y ejemplos.	49
2.4.5.1. Métodos basados en la TFL.	49
2.4.5.2. Métodos basados en conteo de cambios de signo.	54
2.4.5.3. Métodos basados en filtrado no lineal.	55
2.5. Validación de métodos de análisis.	57
2.6. Conclusiones.	58
3. Análisis de AOT basado en modelos gaussianos.	61
3.1. Introducción.	61
3.2. Tests de hipótesis. Teoría de la decisión estadística.	62
3.2.1. Test de hipótesis simples.	62
3.2.2. Test de hipótesis compuestas.	63
3.2.2.1. Test del cociente de verosimilitudes generalizado (TCVG).	64
3.2.2.2. Enfoque Bayesiano.	65
3.2.3. Prestaciones de un detector.	65
3.2.4. Detección de señal en ruido. Propiedades asintóticas.	65
3.2.4.1. Detector TCVG.	65
3.2.4.2. Prestaciones asintóticas del EMV y el TCVG.	66
3.2.4.3. Detectores asintóticamente equivalentes.	70
3.3. Modelado de la señal observada.	71
3.4. Modelo gaussiano estacionario.	73
3.4.1. Planteamiento.	73
3.4.2. EMV y TCVG.	74
3.4.2.1. Casos particulares.	78
3.4.3. Matriz de información de Fisher. Tests de Wald y de Rao.	80
3.4.4. Prestaciones del detector.	80
3.4.5. Prestaciones del EMV.	87
3.5. Modelo gaussiano adaptativo.	89
3.5.1. Planteamiento.	89
3.5.2. EMV y TCVG.	91
3.5.3. Matriz de información de Fisher. Tests de Wald y de Rao.	93
3.5.4. Prestaciones de los detectores.	94

3.5.5. Prestaciones del EMV.	96
3.6. Modelo gaussiano no estacionario.	96
3.6.1. Planteamiento.	96
3.6.2. EMV y TCVG.	99
3.6.3. Matriz de información de Fisher. Detectores de Wald y Rao.	101
3.6.4. Cálculo numérico de los EMV.	103
3.6.5. Detector TCVG clarividente.	105
3.6.6. Prestaciones de los detectores.	106
3.6.7. Prestaciones del EMV.	109
3.7. Modelos extendidos. Inclusión de la onda P.	113
3.7.1. Justificación.	113
3.7.2. Modelo extendido.	113
3.7.3. Modelo gaussiano estacionario.	114
3.7.4. Modelo gaussiano adaptativo.	114
3.7.4.1. Detectores y estimadores.	115
3.7.4.2. Prestaciones.	116
3.7.5. Modelo gaussiano no estacionario.	117
3.7.5.1. Detectores y estimadores.	117
3.7.5.2. Prestaciones.	118
3.8. Aplicación secuencial de los métodos estudiados.	118
3.8.1. Modelo gaussiano estacionario.	120
3.8.2. Modelo gaussiano adaptativo.	121
3.8.3. Modelo gaussiano no estacionario.	122
3.9. Comparación con otros métodos publicados.	123
3.10. Características y validez de los modelos.	125
3.10.1. Eliminación del ECG de fondo.	125
3.10.2. Modelo de ruido.	126
3.10.2.1. Distribución gaussiana.	126
3.10.2.2. Ruido de media nula.	126
3.10.2.3. Conocimiento de la varianza de ruido.	126
3.10.2.4. Estacionariedad del ruido.	127
3.10.2.5. Conocimiento previo de \mathbf{C}_w	128

3.10.2.6. Desajuste por utilización de modelos para ruido blanco ($\mathbf{C}_w = \mathbb{I}_N$).	130
3.10.3. Modelo de señal (AOT).	136
3.10.3.1. Modelo gaussiano estacionario.	136
3.10.3.2. Modelo gaussiano adaptativo.	142
3.10.3.3. Modelo gaussiano no estacionario.	144
3.10.4. Subespacios para el análisis de alternancias.	145
3.11. Conclusiones.	148
Apéndice 3.A. Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano estacionario.	151
Apéndice 3.B. Detector clarividente de Neyman-Pearson para ruido estacionario.	152
Apéndice 3.C. Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano adaptativo.	153
Apéndice 3.D. Distribución exacta del TCVG gaussiano adaptativo.	154
Apéndice 3.E. Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano no estacionario.	156
Apéndice 3.F. Distribución del CVG gaussiano adaptativo con desajustes en el modelo de AOT.	158
4. Análisis de AOT basado en modelos no gaussianos.	161
4.1. Introducción.	161
4.2. Distribuciones gaussianas generalizadas.	162
4.3. Estimación de mínima norma ℓ_α y M-estimadores.	166
4.4. ¿Es gaussiano el ruido?	168
4.5. Modelado de la señal observada.	170
4.6. Modelo gaussiano generalizado estacionario.	171
4.6.1. Planteamiento.	171
4.6.2. EMV y TCVG.	171
4.6.3. Matriz de información de Fisher. Tests de Wald y de Rao.	173
4.6.4. Cálculo numérico del EMV.	175
4.6.5. Modelo laplaciano ($\alpha = 1$).	176
4.6.5.1. Caso particular: modelo de AOT estacionaria.	178
4.6.6. Prestaciones de los detectores.	180
4.6.7. Prestaciones del EMV.	182
4.7. Modelo gaussiano generalizado adaptativo.	184

4.7.1. Planteamiento.	184
4.7.2. EMV y TCVG.	187
4.7.3. Matriz de información de Fisher. Tests de Wald y de Rao.	188
4.7.4. Cálculo numérico del EMV.	190
4.7.5. Modelo laplaciano ($\alpha = 1$).	191
4.7.6. Prestaciones de los detectores.	192
4.7.7. Prestaciones del EMV.	193
4.8. Modelo gaussiano generalizado no estacionario.	195
4.8.1. Planteamiento.	195
4.8.2. EMV y TCVG.	195
4.8.3. Matriz de información de Fisher. Detectores de Wald y de Rao.	196
4.8.4. Cálculo numérico del EMV.	199
4.8.5. Caso particular: Ruido laplaciano ($\alpha = 1$).	199
4.8.6. Detector TCVG clarividente.	202
4.8.7. Prestaciones de los detectores.	202
4.8.8. Prestaciones del EMV.	204
4.9. Modelos extendidos. Inclusión de la onda P.	209
4.9.1. Planteamiento.	209
4.9.2. Modelo gaussiano generalizado estacionario.	209
4.9.3. Modelo gaussiano generalizado adaptativo.	209
4.9.3.1. Detectores y estimadores.	209
4.9.3.2. Prestaciones.	210
4.9.4. Modelo gaussiano generalizado no estacionario.	211
4.9.4.1. Detectores y estimadores.	211
4.9.4.2. Prestaciones.	211
4.10. Aplicación secuencial de los métodos estudiados.	212
4.10.1. Modelo gaussiano generalizado estacionario.	212
4.10.2. Modelo gaussiano generalizado adaptativo.	213
4.10.3. Modelo gaussiano generalizado no estacionario.	213
4.11. Comparación con otros métodos publicados.	214
4.12. Características y validez de los modelos.	216
4.12.1. Eliminación del ECG de fondo.	216
4.12.2. Modelo de ruido.	217

4.12.2.1. Distribución laplaciana.	217
4.12.2.2. Conocimiento y estacionariedad de σ	217
4.12.2.3. Correlación intralatido.	218
4.12.3. Modelo de señal (AOT).	219
4.12.4. Comportamiento ante latidos anómalos y artefactos impulsivos.	219
4.12.5. Complejidad computacional.	219
4.13. Conclusiones.	220
Apéndice 4.A. Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano generalizado estacionario.	222
Apéndice 4.B. Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano generalizado adaptativo.	224
Apéndice 4.C. Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano generalizado no estacionario.	226
5. Evaluación de prestaciones.	229
5.1. Introducción.	229
5.2. Simuladores y conjuntos de datos.	230
5.2.1. Simulación de AOT en ruido fisiológico controlado (Simulador 1).	230
5.2.1.1. Generación de la señal limpia.	231
5.2.1.2. Simulación de AOT.	231
5.2.1.3. Generación de la señal ruidosa.	231
5.2.2. Simulación de AOT en señales reales (Simulador 2).	235
5.2.2.1. Base de datos de sujetos sanos.	236
5.2.2.2. Simulación de AOT.	236
5.2.3. Señal ECG real con simulación de latidos ectópicos y ráfagas de ruido.	238
5.3. Caracterización del ruido fisiológico.	238
5.3.1. Caracterización espectral.	238
5.3.2. Distribución estadística.	240
5.3.3. Estacionariedad del nivel de ruido.	243
5.4. Evaluación de los métodos en AOT estacionarias.	245
5.4.1. Validación en ruido de actividad muscular y movimiento de electrodos (Simulador 1).	245
5.4.1.1. Configuración del estudio.	245
5.4.1.2. Evaluación de los detectores.	246

5.4.1.3. Evaluación de los EMV.	253
5.4.1.4. Modelos de subespacio <i>vs</i> diezmado de la señal.	259
5.4.2. Validación en registros ECG reales (Simulador 2).	262
5.4.2.1. Configuración del estudio.	262
5.4.2.2. Evaluación de los detectores.	263
5.4.2.3. Evaluación de los EMV.	268
5.4.3. Comparación con otros métodos utilizados en la literatura.	271
5.4.3.1. Método espectral.	271
5.4.3.2. Método de la media móvil modificada.	274
5.5. Evaluación de los métodos en AOT transitoria.	277
5.5.1. Detección de episodios transitorios.	277
5.5.1.1. Configuración del estudio.	277
5.5.2. Seguimiento de la amplitud alterna.	280
5.5.2.1. Configuración del estudio.	280
5.5.3. Episodio de AOT transitorio en presencia de ráfagas de ruido y latidos ectópicos.	282
5.5.3.1. Preprocesado de las señales y configuración de los métodos.	282
5.5.3.2. Análisis de AOT en el episodio original y con ráfagas de ruido.	283
5.5.3.3. Análisis de AOT con latidos ectópicos.	285
5.6. Conclusiones.	289
6. Alternancias de onda T e isquemia de miocardio.	293
6.1. Introducción.	293
6.2. Anatomía de la circulación coronaria.	295
6.3. Base de datos.	296
6.3.1. Población de estudio.	296
6.3.2. Adquisición del ECG.	296
6.4. Métodos	297
6.4.1. Análisis de AOT. Modelo laplaciano adaptativo.	297
6.4.1.1. Preprocesado.	297
6.4.1.2. Reducción de datos.	297
6.4.1.3. Análisis de AOT: detección y estimación.	298
6.4.2. Análisis temporal.	299

6.4.3. Análisis de la distribución por derivaciones y de la forma de onda alternante.	300
6.4.4. Métodos estadísticos.	300
6.5. Resultados.	300
6.5.1. Episodios de AOT.	300
6.5.2. Análisis de la evolución de AOT.	303
6.5.3. Análisis espacial.	304
6.6. Discusión.	308
6.6.1. Metodología de análisis.	311
6.6.2. Incidencia y magnitud.	311
6.6.3. Evolución de la alternancia. Respuesta a la oclusión y a la reperfusión.	313
6.6.4. Distribución por derivaciones.	314
6.6.5. Análisis de la forma de onda alternante.	315
6.6.6. Otras consideraciones.	316
6.6.7. Limitaciones.	316
6.7. Conclusión	318
7. Conclusiones y líneas futuras.	319
7.1. Conclusiones.	319
7.2. Líneas futuras.	323
Nomenclatura	325
Bibliografía	331

Índice de figuras

1.1. Sección del corazón que muestra el sistema de conducción del impulso eléctrico.	6
1.2. Posición de los electrodos en el sistema de derivaciones estándar, tanto para derivaciones frontales (izquierda) como para derivaciones precordiales (derecha). Los electrodos que forman el triángulo de Einthoven (LL, RA y LA) se colocan en las extremidades, para evitar ruidos y facilitar su colocación. Las extremidades actúan como sondas a los puntos correspondientes del torso.	7
1.3. Derivaciones ortogonales X, Y Z, junto a la red de resistencias necesarias para su cálculo. (Reproducido de (Webster 1988)).	9
1.4. Latido normal de la señal ECG con las ondas e intervalos más significativos.	9
1.5. Espectro del ECG y sus componentes. (Reproducido de (Thakor <i>et al.</i> 1984)).	11
1.6. Ejemplo de ECG con alternancia de onda T.	14
1.7. Imagen longitudinal de una arteria coronaria mostrando el modo en que se abre la obstrucción durante una angioplastia.	17
2.1. Ejemplo de análisispectral realizado con $L = 128$ latidos consecutivos de un ECG con presencia de AOT. Reproducido de (Rosenbaum <i>et al.</i> 1994).	23
2.2. Modelo de alternancias de onda T asumido en el MDC. Reproducido de (Neuring y Verrier 1993).	24
2.3. Oscilaciones en la serie de correlaciones cruzadas en presencia de AOT. Reproducido de (Burattini 1998).	25
2.4. Mapas de Poincaré en series latido a latido procedentes de una señal ECG (a) sin actividad alternante (una sola agrupación de puntos) y (b) con presencia de AOT (dos grupos de puntos). Reproducido de (Strumillo y Ruta 2002).	26
2.5. Esquema general de un sistema de análisis de AOT. $\mathbf{X} = \{x_i[n]\}$: matriz de segmentos del ECG preprocesados, $\mathbf{Y} = \{y_i[p]\}$: matriz de coeficientes de dimensionalidad reducida. $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_1$: decisión sobre la ausencia/presencia de alternancias. \hat{V}_i : Amplitud de AOT. $\hat{a}_i[n]$: forma de onda alternante.	29

2.6. Diagrama de bloques de la etapa de análisis de AOT (la notación se explica en el texto).	30
2.7. Esquema general del preprocessado. $\mathbf{X}^s = \{x_i^s[n]\}$: matriz de repolarización. $\mathbf{X} = \{x_i[n]\}$: matriz de repolarización filtrada. qrs_i : punto fiducial del complejo QRS del latido i -ésimo.	32
2.8. Comportamiento de los métodos basados en la TFL. Se representa la evolución del estadístico de detección normalizado en la señal $Sig1$ con diferentes ventanas de análisis. La escala del eje vertical derecho representa la amplitud estimada V_t en μV	50
2.9. Comportamiento de los métodos basados en la TFL sobre la señal $Sig2$. Las líneas verticales indican la posición de los latidos ectópicos.	52
2.10. Evolución del estadístico de detección basado en la TFL (ventana de análisis rectangular de 32 latidos) en la señal $Sig3$ (línea continua), junto con el umbral $\gamma_l = \sqrt{m_l + \gamma s_l}$ (con $\gamma = 3$) propuesto para el ME en (Rosenbaum <i>et al.</i> 1994) (línea de puntos). Las líneas horizontales indican los intervalos con ruido añadido. Las áreas sombreadas indican la zona donde se detecta la AOT.	53
2.11. Comportamiento de los métodos basados en conteo de cambios de signo en la señal $Sig1$. Se muestra el estadístico (2.26) para $L = 32$ (gráfica superior) y $L = 7$ (gráfica inferior). Las áreas sombreadas indican la detección de AOT para los umbrales $\gamma_Z(l) = 25$ (gráfica superior) y $\gamma_Z(l) = 7$ (gráfica inferior).	55
2.12. Método MMM aplicado a las señales $Sig1$ (a), $Sig2$ (b) y $Sig3$ (c). Resultado de aplicar el método MMM como está descrito en (Nearing y Verrier 2002) (línea continua) y en su versión lineal (línea de puntos). Las líneas verticales en (b) y las horizontales en (c) indican respectivamente la posición de los latidos ectópicos y de los intervalos donde se ha añadido ruido adicional.	56
3.1. FDP asintótica del estadístico CVG modificado $2 \ln L_G(\mathbf{x})$ bajo \mathcal{H}_0 (distribución $\chi^2_{N_s}$, en línea discontinua) y \mathcal{H}_1 (distribución $\chi^2_{N_s}(\lambda)$, en línea continua) para distintos valores de N_s y λ	69
3.2. Curvas ROC asintóticas de detectores CVG con distintos N_s y λ	69
3.3. Estructura del análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano estacionario.	77
3.4. Realización del sistema de análisis con una etapa de reducción de datos (3.56).	78
3.5. Curvas P_D vs η' del detector (3.54) con $L = 32$ latidos, $N = 48$ muestras y $P = N$ grados de libertad para diferentes probabilidades de falsa alarma.	82

3.6. Curvas P_D vs η' para $P_{FA} = 0,05$ del TCVG gaussiano estacionario (3.54), con $L = 32$ latidos, $N = 48$ muestras y distintas dimensiones del subespacio de señal, desde $P = 1$ (detector adaptado) hasta $P = 48$ (detector de energía). La línea de puntos representa las prestaciones del detector clarividente de Neyman-Pearson (Apéndice 3.B).	82
3.7. Curvas P_D vs η' del TCVG gaussiano estacionario (3.54) para $P_{FA} = 0,05$, con $P = N = 48$ muestras en función de la duración de la ventana de análisis L	83
3.8. Curvas P_D vs η' del TCVG gaussiano estacionario (3.54) para $P_{FA} = 0,05$, con $P = N = 48$ muestras en función de la duración de la ventana de análisis L	84
3.9. Curvas P_D vs η' para $P_{FA} = 0,05$ del detector TCVG de energía y del detector clarividente, con $L = 32$ latidos y $N = 3, 12, 48$ y 192 muestras.	84
3.10. Señal de ejemplo (3.79).	86
3.11. Prestaciones del estimador de alternancia (3.47).	89
3.12. Estimación de AOT para distintos tipos de ruido y dimensiones del subespacio. En cada gráfica se representan: la señal simulada (línea gruesa), el margen teórico $\pm\sigma_{\varepsilon(n)}$ (delimitado por dos líneas discontinuas) y la señal estimada en 10 realizaciones (líneas delgadas). Se indican asimismo el valor teórico de σ_{ε} y el error RMS calculado en 100 realizaciones de Monte Carlo.	90
3.13. Esquema de análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano adaptativo.	93
3.14. Curvas P_D vs η' (para $P_{FA} = 0,05$) del detector TCVG gaussiano adaptativo (σ^2 desconocida) y el TCVG gaussiano estacionario (σ^2 conocida)	97
3.15. Esquema del análisis TCVG/EMV para ruido no estacionario.	101
3.16. Esquema del detector de Wald para ruido no estacionario.	102
3.17. Esquema del detector de Rao para ruido no estacionario.	103
3.18. P_{FA} experimental para los tests TCVG (3.128), de Wald (3.130) y de Rao (3.133) en función de L . Se ha utilizado el umbral $\gamma_a = Q_{\chi_P^2}^{-1}(P_{FA})$, de forma que P_{FA} asintótica sea de 0,05. La P_{FA} teórica exacta del TCVG clarividente (que en este caso es el TCVG estacionario) con el umbral γ_a es también de 0,05, y se representa por una línea continua.	108
3.19. Curvas P_D vs $\bar{\eta}'$ experimentales (simulación de Monte Carlo) para $P_{FA} = 0,05$ y $L = 8$ (azul), 16 (verde), 32 (rojo) y 64 latidos (cian) de los tests del CVG (3.128), de Wald (3.130) y de Rao (3.133). Se muestran también las prestaciones teóricas del TCVG para σ^2 estacionaria y desconocida (línea continua) y las prestaciones asintóticas de los detectores (línea discontinua).	109

3.20. Curvas P_D vs $\bar{\eta}'$ experimentales (simulación de Monte Carlo) para $P_{FA} = 0,05$ y $L = 32$ de los tests del CVG (3.128), de Wald (3.130) y de Rao (3.133) ante ruido no estacionario. Se muestran también las prestaciones teóricas del TCVG adaptativo y las prestaciones asintóticas de los detectores, que coinciden con las del TCVG clarividente.	110
3.21. Valor RMS del sesgo $RMS(E(\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}))$ de los estimadores para ruido no estacionario (EMV y de Rao) y para ruido estacionario (EMV).	112
3.22. Desviación estándar del error de estimación en los estimadores para ruido no estacionario (EMV y de Rao) y para ruido estacionario (EMV).	112
3.23. Curvas P_D vs $\bar{\eta}'$ experimentales (simulación de Monte Carlo) para $P_{FA} = 0,05$ y $L = 32$ de los tests del CVG (3.128), de Wald (3.130) y de Rao (3.133) para ruido no estacionario y del TCVG adaptativo cuando el ruido es no estacionario (cambio de varianza a mitad de la ventana). Se muestran también las prestaciones asintóticas (que coinciden con las del TCVG clarividente).	119
3.24. Valor RMS del sesgo $RMS(E(\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}))$ de los estimadores para ruido no estacionario (EMV y de Rao) y para ruido estacionario (EMV).	119
3.25. Desviación estándar del error de estimación en los estimadores para ruido no estacionario (EMV y de Rao) y para ruido estacionario (EMV).	120
3.26. Estructura secuencial del detector TCVG estacionario.	121
3.27. Sensibilidad de la P_{FA} al desajuste de la varianza de ruido real respecto a la varianza de diseño para una P_{FA} nominal de 0,05.	127
3.28. Curvas P_D vs η del detector de energía para ruido blanco (en rojo) y para ruido correlado (suponiendo \mathbf{C}_w conocida) (en verde) para diferentes señales inmersas en ruido AR(1).	131
3.29. Curvas P_D vs η del detector de energía para ruido blanco (en rojo) y para ruido correlado (suponiendo \mathbf{C}_w conocida) (en verde) para diferentes señales paso-bajo inmersas en ruido AR(1).	133
3.30. Curvas P_D vs η de los detectores de subespacio (modelo de señal paso-bajo) para ruido blanco (en rojo) y para ruido correlado (suponiendo \mathbf{C}_w conocida) (en verde) para diferentes señales paso-bajo inmersas en ruido AR(1).	134
3.31. Parámetro de no centralidad λ en función del tipo y duración de la ventana de análisis.	139

3.32. Estimación de AOT para distintos tipos de ruido AR(1) y dimensiones del subespacio. En cada gráfica se representan: la señal simulada (línea gruesa), la señal media estimada (línea de círculos), el margen teórico $\pm\sigma_{\varepsilon(n)}$ (delimitado por dos líneas discontinuas) y la señal estimada en 10 realizaciones (líneas delgadas). Se indican asimismo los valores teóricos de la desviación estándar σ_{ε} y la raíz cuadrada del error cuadrático medio J_{ε} , y el error RMS calculado en 100 realizaciones de Monte Carlo (todos en μV).	141
3.33. Curva P_D vs η' para $P_{FA} = 0,05$ del TCVG gaussiano estacionario al detectar la forma de onda de ejemplo (3.79) en ruido AR(1), $\alpha = 0,7$, utilizando como subespacios de análisis los engendrados por las bases truncadas de la TDC.	142
3.34. Curva P_D vs η' del detector del CVG adaptativo con desajustes en el subespacio de señal y la evolución de la alternancia. Se presentan también las curvas teóricas del TCVG clarividente (es decir, para σ^2 conocida) con y sin desajustes.	144
3.35. Curvas P_D vs $\bar{\eta}'$ de los detectores CVG, de Wald y de Rao no estacionarios con desajustes en el subespacio de señal y la evolución de la alternancia. Se presentan también las curvas del TCVG clarividente con y sin desajustes.	145
4.1. FDP de variables aleatorias gaussianas generalizadas con $m = 0$ y $\sigma = 1$, en su representación lineal (a)-(b) y logarítmica (c)-(d).	163
4.2. Coeficiente de curtosis κ para distribuciones (a) leptocúrticas y (b) platocúrticas en función del parámetro de forma α	165
4.3. Funciones de influencia $\psi(x)$ para distintos valores del parámetro de forma α	167
4.4. Funciones criterio a minimizar en la estimación de mínima normal ℓ_{α} . Gráficas (a)-(d): observación original sin valores atípicos. Gráficas (e)-(h): Observación con un valor atípico.	169
4.5. Esquema del análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano generalizado estacionario.	173
4.6. Esquema del test de Wald para el modelo gaussiano generalizado estacionario.	174
4.7. Esquema del test de Rao para el modelo gaussiano generalizado estacionario.	175
4.8. Ganancia G_{α} (en dB) debida a la no gaussianidad del ruido.	180
4.9. P_{FA} real de los detectores estacionarios con ventanas de análisis de duración finita, para un P_{FA} asintótica de 0,05. La línea continua indica el nivel de $P_{FA} = 0,05$	182
4.10. Curvas P_D vs η (para $P_{FA} = 0,05$) en ruido laplaciano de los detectores estacionarios laplácianos y gaussianos, con distintas dimensiones de la ventana de análisis y el subespacio de señal.	183

4.11. Estimación de AOT en ruido laplaciano mediante los EMV laplaciano y gaussiano y el estimador de Rao. En cada gráfica se representa la señal simulada (línea continua), la señal estimada en 5 realizaciones (líneas de puntos), así como el valor medio (línea de círculos) y el margen $\pm\sigma_{\varepsilon(n)}$ (línea discontinua) calculados con 3000 realizaciones de Monte Carlo.	185
4.12. Valor RMS del sesgo $RMS(E(\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}))$ (gráficas (a) y (b)) y desviación estándar del error de estimación (gráficas (c) y (d)) obtenidas experimentalmente para el EMV laplaciano, el EMV gaussiano y el estimador de Rao.	186
4.13. Esquema del análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano generalizado adaptativo.	188
4.14. Esquema del test de Wald para el modelo gaussiano generalizado adaptativo.	189
4.15. Estructura del test de Rao para el modelo gaussiano generalizado adaptativo.	190
4.16. P_{FA} real de los detectores adaptativos con ventanas de análisis de duración finita, para un P_{FA} asintótica de 0,05. La línea continua indica el nivel de $P_{FA} = 0,05$	193
4.17. Curvas P_D vs η (para $P_{FA} = 0,05$) en ruido laplaciano de los detectores adaptativos laplacianos y gaussianos, con distintas dimensiones de la ventana de análisis y el subespacio de señal.	194
4.18. Esquema del análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano generalizado no estacionario.	196
4.19. Esquema del test de Wald para el modelo gaussiano generalizado no estacionario.	197
4.20. Esquema del test de Rao para el modelo gaussiano generalizado no estacionario.	198
4.21. P_{FA} real obtenida por los detectores no estacionarios en ruido laplaciano estacionario, diseñando el umbral para un P_{FA} asintótica de 0,05. La línea continua indica el nivel de $P_{FA} = 0,05$	204
4.22. Curvas P_D vs $\bar{\eta}$ (para $P_{FA} = 0,05$) en ruido laplaciano de los detectores no estacionarios laplacianos y gaussianos, en ruido laplaciano estacionario.	205
4.23. Curvas P_D vs η (para $P_{FA} = 0,05$) de los detectores laplacianos adaptativos y no estacionarios con $L = 32$ latidos, $N = 48$ muestras y subespacios de dimensiones $P = 48$ y $P = 6$	206
4.24. Valor RMS del sesgo $RMS(E(\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}))$ (gráficas (a) y (b)) y desviación estándar del error de estimación (gráficas (c) y (d)) obtenidas experimentalmente en ruido laplaciano no estacionario por distintos EMV y el estimador de Rao para el modelo laplaciano no estacionario.	208
4.25. Sensibilidad de la P_{FA} al desajuste de la varianza de ruido real respecto a la varianza de diseño para una P_{FA} nominal de 0,05.	218

5.1. Esquema del Simulador 1 (AOT en ECG periódico con ruido fisiológico registrado).	230
5.2. Generación del ECG limpio como la repetición periódica de un latido.	231
5.3. Proceso de síntesis del ECG con AOT	232
5.4. ECG limpio con una AOT de $50 \mu V$ RMS.	232
5.5. Ejemplo del registro <i>ma</i> (<i>muscular activity</i>) de la base de datos NSTDB.	233
5.6. Ejemplo del registro <i>em</i> (<i>electrode motion</i>) de la base de datos NSTDB.	233
5.7. ECG simulado con AOT y ruido muscular.	234
5.8. ECG simulado con AOT y artefactos de movimiento.	235
5.9. Esquema de la simulación de alternancias sobre un ECG real.	235
5.10. Fragmento de señal del registro <i>p008_0</i> de la base de datos Politécnico-Ca'Granda.	237
5.11. Fragmento de señal de la Figura 5.10 en la que se han simulado AOT de $50 \mu V$	237
5.12. Espectro medio de los registros de ruido <i>ma</i> y <i>em</i>	239
5.13. Histogramas de los registros de ruido <i>ma</i> y <i>em</i> , comparados con los histogramas de variables aleatorias gaussianas y laplaciañas con la misma media y desviación estándar.	242
5.14. Funciones de autocovarianza del nivel de ruido local en los registros <i>ma</i> y <i>em</i>	244
5.15. Curvas ROC experimentales de los TCVG para una señal alternaente de $4 \mu V$ (RMS) en ruido de actividad muscular ($\eta_{\text{nom}} = -20 \text{ dB}$).	247
5.16. Curvas P_D vs η_{nom} ($P_{FA} = 0,01$) de los TCVG en ruido de actividad muscular.	249
5.17. Curvas P_D vs η_{nom} de los TCVG en ruido de movimiento de electrodos.	250
5.18. Comparación de las prestaciones de los detectores CVG y de Rao para $L = 32$	251
5.19. Prestaciones de los EMV de la alternancia en ruido de actividad muscular (registro <i>ma</i>). En azul se muestra la señal simulada (línea gruesa), y las estimaciones correspondientes a 10 estimaciones (línea delgada). En rojo se muestra la señal estimada media en 2000 realizaciones y el intervalo correspondiente a ± 1 desviación estándar.	254
5.20. Prestaciones de los EMV de la alternancia en ruido de movimiento de electrodos (registro <i>em</i>). En azul se muestra la señal simulada (línea gruesa), y las estimaciones correspondientes a 10 estimaciones (línea delgada). En rojo se muestra la señal estimada media en 2000 realizaciones y el intervalo correspondiente a ± 1 desviación estándar.	255

5.21. Valor RMS del sesgo y desviación estándar del error de estimación en función de la duración de la ventana de análisis (registro de ruido <i>ma</i>).	256
5.22. Valor RMS del sesgo y desviación estándar del error de estimación en función de la duración de la ventana de análisis (registro de ruido <i>em</i>).	257
5.23. Curvas P_D vs η_{nom} obtenidas con diferentes modelos de señal: espacio completo (línea continua), subespacio con $P = 8$ (línea discontinua) y espacio completo tras diezmar la señal (línea de puntos y rayas).	261
5.24. Curvas P_{FA} vs γ teóricas y experimentales obtenidas en registros ECG reales.	264
5.25. Curvas P_D vs V_{RMS} para $P_{FA} = 0,01$ de los detectores CVG y de Rao. . . .	265
5.26. Curvas P_D vs V_{RMS} para $P_{FA} = 0,01$ de los detectores CVG y los correspondientes tests de Rao con $L = 32$ y $L = 128$	266
5.27. Curvas P_D vs V_{RMS} para $P_{FA} = 0,01$ en las tres derivaciones ortogonales. .	267
5.28. Media \pm desviación estándar de la forma de onda alterna estimada en toda la base de datos. Se representan asimismo las estimaciones correspondientes a 10 realizaciones.	269
5.29. Valores RMS del sesgo y la desviación estándar de los EMV en para las tres derivaciones.	270
5.30. Curvas P_D vs V_{RMS} para $P_{FA} = 0,01$ obtenidas con el método espectral (línea gruesa negra) y comparación con los TCVG de algunos de los modelos estudiados.	273
5.31. Curvas P_D vs V_{RMS} obtenidas con el método de la media móvil modificada (línea gruesa negra) y comparación con el MDC y los TCVG correspondientes a modelos laplacianos.	276
5.32. P_D para $P_{FA} = 0,01$ en función del número de latidos de la ventana de análisis para distintos métodos y duraciones L_{obs} del episodio alterna simulado.	279
5.33. Evolución de la amplitud V_{RMS} en los episodios simulados.	280
5.34. Evolución de la amplitud de AOT estimada \hat{V}_{RMS} para el episodio simulado de la Figura 5.33.	281
5.35. Evolución temporal de los estadísticos TCVG en la señal original <i>Sig1</i> (línea roja discontinua) y la señal contaminada <i>Sig3</i> (línea azul continua). Las líneas horizontales indican la localización temporal de las ráfagas de ruido. .	284
5.36. Evolución temporal de la amplitud RMS de AOT estimada $\hat{V}_{RMS}(l)$ en las señales <i>Sig1</i> (línea roja discontinua) y <i>Sig3</i> (línea azul continua).	284
5.37. Evolución de los estadísticos de Rao $T_R(\mathbf{X}_l)$ en la señal original (línea roja discontinua) y la señal contaminada (línea azul continua).	285

5.38. Evolución temporal de los estadísticos TCVG en la señal original (línea roja discontinua) y la señal contaminada por dos ráfagas de ruido (línea azul continua). Las líneas horizontales indican la localización temporal de las ráfagas.	287
5.39. Evolución temporal de la amplitud RMS de AOT estimada $\hat{V}_{\text{RMS}}(l)$ en la señal original (línea roja discontinua) y la señal contaminada (línea azul continua).	287
5.40. Evolución de los estadísticos de Rao $T_R(\mathbf{X}_l)$ en la señal original (línea roja discontinua) y la señal contaminada (línea azul continua).	288
5.41. Evolución temporal de la amplitud RMS de AOT estimada $\hat{V}_{\text{RMS}}(l)$ en la señal con latidos ectópicos, utilizando las estrategias de eliminación (línea roja discontinua) y substitución (línea azul continua) de los latidos ectópicos.	289
6.1. Anatomía coronaria de un corazón con dominancia derecha.	295
6.2. Diagrama de cajas de las amplitudes de AOT máximas en cada paciente, clasificadas según la arteria ocluida y según la evidencia electrocardiográfica de un infarto previo de miocardio.	303
6.3. Evolución promediada de la amplitud de AOT en función del tiempo transcurrido desde el comienzo de la oclusión (a) y en función del tiempo relativo al final de la oclusión (b). Las gráficas superiores indican el número de registros con oclusión (línea continua) y con AOT (línea discontinua) en un instante dado.	304
6.4. Representación similar a la Figura 6.3, pero normalizando las evoluciones latido a latido antes de promediar.	305
6.5. Distribución normalizada por derivaciones de la amplitud de AOT, promediada en cada subgrupo según la arteria ocluida. Las barras de error representan ± 1 desviación estándar.	306
6.6. Porcentaje de episodios detectados en cada derivación respecto del total de episodios alternantes (barras claras). También se representa el porcentaje de episodios con máxima amplitud alternante en una determinada derivación (barras oscuras).	307
6.7. Promedio del eje eléctrico normalizado de la AOT en función de la arteria ocluida. Se representan las proyecciones en los planos frontal, transversal y sagital. Los sectores circulares cubren 2 desviaciones estándar (± 1 desviación estándar respecto a la media) de la magnitud y ángulo del eje eléctrico en cada plano.	308
6.8. Promedio de las formas de onda alternantes normalizadas, para cada arteria ocluida. Las barras de error representan ± 1 desviación estándar de las formas de onda alternantes.	309

Índice de tablas

1.1.	Derivaciones normalizadas a partir de las posiciones de los electrodos.	8
1.2.	Amplitudes de ondas y duración de los intervalos del ECG. (Reproducido de (Cromwell <i>et al.</i> 1980)).	10
2.1.	Tabla sinóptica de las implementaciones de la etapa de preprocesado.	33
2.2.	Tabla sinóptica de las implementaciones de la etapa de reducción de datos.	37
2.3.	Tabla sinóptica de las implementaciones de la etapa de análisis.	40
2.4.	Significación o p -valor del test de Rayleigh (probabilidad de obtener un determinado patrón como resultado de ruido aleatorio) según el número de desviaciones respecto a los patrones alternantes de 32 latidos. Reproducida de (Srikanth <i>et al.</i> 2002b).	46
3.1.	η' mínima (en dB) para obtener $P_{FA} = 0,05$ y $P_D = 0,95$ en un detector de subespacio de rango P . Se indica también la ganancia (en dB) respecto al detector de energía.	83
3.2.	Valor mínimo de η' (en dB) necesario en el detector TCVG de energía y en el detector clarividente para obtener $P_D = 0,95$ con $P_{FA} = 0,05$ con $L = 32$ latidos y distintos valores de N	85
3.3.	Ganancias de blanqueado de la señal de ejemplo (3.79) en ruido AR(1) para distintos valores del parámetro α	87
3.4.	Valor mínimo de RSR η_{\min} (en dB) necesario para obtener $P_D = 0,95$ con $P_{FA} = 0,05$ con los detectores TCVG para σ^2 conocida y desconocida (adaptativo) para para distintos valores de L , N y P	98
3.5.	Desviación estándar global del error de estimación σ_ε con el EMC (EMV para ruido blanco) y el EMCG (EMV para ruido correlado). Se resaltan en negrita las diferencias mayores.	135
5.1.	Coeficientes de asimetría y curtosis (media \pm desviación estándar) del ruido de actividad muscular.	241
5.2.	Coeficientes de asimetría y curtosis (media \pm desviación estándar) del ruido de artefactos de movimiento.	241

5.3. Valor RMS de la AOT estimada mediante los distintos EMV estudiados (media \pm desviación estándar) para una $\eta_{hom} = 0 \text{ dB}$, con una ventana de análisis de $L = 32$ latidos.	256
5.4. Valor máximo de la AOT estimada mediante los distintos EMV estudiados (media \pm desviación estándar) para una $\eta_{hom} = 0 \text{ dB}$, con una ventana de análisis de $L = 32$ latidos.	257
5.5. Valor media de la AOT estimada mediante los distintos EMV estudiados (media \pm desviación estándar) para una $\eta_{hom} = 0 \text{ dB}$, con una ventana de análisis de $L = 32$ latidos.	258
5.6. Valor RMS estimado mediante los distintos EMV estudiados (media \pm desviación estándar) aplicados sobre la señal diezmada para una $\eta_{hom} = 0 \text{ dB}$. El tamaño de la ventana de análisis es de $L = 32$ latidos.	260
5.7. Número de fragmentos utilizados en los conjuntos de entrenamiento y prueba según el tamaño de la ventana de análisis.	262
5.8. Estimación de la amplitud de AOT \hat{V}_{RMS} (media \pm desviación estándar) en el ECG diezmado mediante los distintos EMV estudiados. El tamaño de la ventana de análisis es de $L = 32$ latidos y la alternancia simulada es de $V_{RMS} = 20 \mu\text{V}$	269
5.9. Estimación de la amplitud de AOT \hat{V}_{RMS} (media \pm desviación estándar) en el ECG diezmado con el método espectral. El valor RMS de la alternancia simulada es $V_{RMS} = 20 \mu\text{V}$	274
5.10. Estimación de la amplitud de AOT \hat{V}_{RMS} (media \pm desviación estándar) en el ECG diezmado con el método de la media móvil modificada. El valor RMS de la alternancia simulada es $V_{RMS} = 20 \mu\text{V}$	277
6.1. Presencia de AOT durante la PTCA en el grupo de estudio en función de la arteria ocluida, localización de la oclusión, sexo y evidencia electrocardiográfica de infarto previo.	301
6.2. Ritmo cardiaco medio \overline{HR} en los registros de control y de PTCA, variación del ritmo cardiaco $\Delta HR = \overline{HR} (\text{PTCA}) - \overline{HR} (\text{control})$ y ritmo cardiaco medio al inicio de los episodios de AOT.	302
6.3. Tiempo tras el punto fiducial del QRS en el cual el área acumulada bajo la forma de onda alterna alcanza el 10%, el 50% y el 90% del área total.308	

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Antecedentes y motivación.

Las afecciones cardiovasculares son una de las principales causas de muerte en todo el mundo, y en los países industrializados constituyen la mayor causa de mortalidad, seguidas muy de lejos por el cáncer. Estadísticas recientes de la *American Heart Association* (American Heart Association 2001) hablan de 61 millones de personas con alguna enfermedad cardiovascular en los EE.UU. Según la misma fuente, estas enfermedades fueron responsables de 960.000 muertes en 1999 (un 40 % del total), frente a 550.000 fallecimientos por cáncer, 98.000 por accidentes, 45.000 por enfermedad de Alzheimer o 15.000 por SIDA. En España, según los últimos datos publicados por el Instituto Nacional de Estadística (Instituto Nacional de Estadística 2005)¹ un 34,1 % del total de defunciones se debió a enfermedades del sistema cardiovascular (125.000 muertes),² constituyendo el principal grupo de causas de muerte.

Una buena parte de estas muertes se producen de manera repentina, al poco tiempo de manifestarse los primeros síntomas, y están relacionadas con arritmias ventriculares malignas que conducen a un paro cardiaco. Este tipo de desenlaces se conocen como muerte súbita cardiaca (MSC) (Bayés y Guindo 1989). Las cifras anteriores hablan por sí solas del gran impacto social y económico de las enfermedades cardiovasculares y justifican la preocupación de las sociedades occidentales por reducir la incidencia de las mismas. Por tanto, los avances que colaboren a una rápida detección y diagnóstico de este tipo de enfermedades tienen un extraordinario interés social y tecnológico.

En un campo como éste, la colaboración entre la medicina y la ingeniería biomédica ha producido, en las últimas décadas, excelentes resultados en distintos ámbitos y aplicaciones. De forma particular, el procesado de señales biomédicas (entre ellas, la señal electrocardiográfica) ha experimentado un progreso notable.

¹El estudio completo puede consultarse en línea desde el sitio web del Instituto Nacional de Estadística, en la dirección <http://www.ine.es/inebase>, dentro de la sección de Salud.

²La misma fuente asigna a causas cardiovasculares un 33,4 % de las muertes sucedidas en la Comunidad Autónoma de Aragón durante 2002.

En esta tesis se profundiza en el procesado de la señal electrocardiográfica para obtener uno de los índices clínicos para la estratificación de riesgo de MSC que ha mostrado resultados más prometedores en los últimos años: las alternancias de onda T.

1.1.1. Muerte súbita cardiaca.

Aunque no existe una única definición universalmente aceptada de la MSC, la *Task Force on Sudden Cardiac Death* de la *Sociedad Europea de Cardiología* la define como “*una muerte natural debida a causas cardíacas, precedida por la pérdida brusca de conciencia dentro de la primera hora desde el inicio de los síntomas agudos; puede conocerse la preexistencia de una cardiopatía de base, pero el tiempo y la forma de la muerte son inesperados*” (Priori *et al.* 2001). Se calcula que el 12% de las defunciones que se producen de forma natural son súbitas, y que de éstas el 88% son de origen cardíaco (Marrugat *et al.* 1999). En EE.UU. se producen más de 300.000 por año, y en general la incidencia en los países desarrollados se sitúa en torno a 1 MSC/1000 personas/año (Priori *et al.* 2001), si bien España presenta unas tasas algo menores (unas 9000 MSC al año en pacientes de 25 a 74 años según (Marrugat *et al.* 1999))³. Se calcula asimismo que el 80% de las MSC se deben a causas coronarias (infarto de miocardio, isquemia, enfermedad coronaria) que degradan la función contráctil del corazón y desembocan en arritmias ventriculares malignas, y finalmente en la muerte.

Los tratamientos utilizados para prevenir la MSC son básicamente la administración de fármacos antiarrítmicos y la implantación de un desfibrilador automático implantable (DAI) (Zipes y Wellens 1998; García *et al.* 2000a). Ésta última es una técnica efectiva ya que la fibrilación ventricular es el desencadenante habitual en una gran parte de las MSC, pero es invasiva (requiere una intervención quirúrgica y presenta riesgos añadidos) y de elevado coste (de los resultados del estudio MADIT (Mushlin *et al.* 1998), se calcula que hacen falta 100 DAI implantados para salvar 10 vidas, con un coste por vida salvada de 27000 \$), por lo que no se justifica la implantación generalizada de desfibriladores a todos los pacientes que hayan padecido un infarto.

Un método efectivo para determinar el riesgo de sufrir arritmias malignas es el Estudio Electrofisiológico (EEF), en el que mediante la estimulación controlada del corazón, se comprueba si se pueden inducir arritmias. La principal desventaja de esta prueba es que es costosa, invasiva y entraña riesgos, por lo que no puede emplearse de manera generalizada.

Por tanto, parece clara la importancia y necesidad de establecer líneas de investigación para determinar los indicadores no invasivos que permitan estratificar a los pacientes según el riesgo de sufrir arritmias ventriculares malignas, para poder posteriormente aplicar de forma selectiva pruebas diagnósticas invasivas (como el EEF), y en su caso, los tratamientos adecuados (como la implantación de un desfibrilador). De este modo, es posible ahorrar en riesgo y costes.

³Un dato aproximado de su incidencia en la Comunidad Autónoma de Aragón puede encontrarse en el titular del Heraldo de Aragón, del 18 de marzo de 2000: “Mil aragoneses fallecen al año por muerte súbita cardiaca”, con el subtítulo: “Los médicos ven imprescindible disponer de desfibriladores”.

Se han estudiado diversos índices no invasivos (la mayoría obtenidos de la señal electrocardiográfica) para pronosticar el riesgo de arritmias. Entre ellos, la fracción de eyeción del ventrículo izquierdo, la presencia de arritmias y frecuencia de latidos ventriculares prematuros (PVC) en registros Holter, la presencia de potenciales tardíos en el ECG promediado de alta resolución, la duración del QRS, la dispersión del intervalo QT y parámetros referidos a la variabilidad del ritmo cardiaco (García *et al.* 2000a; Priori *et al.* 2001). El valor pronóstico de estos índices ha sido evaluado en diferentes estudios, y en general, tienen una alta sensibilidad y valor predictivo negativo, pero presentan el problema de su baja especificidad y valor predictivo positivo (Ikeda *et al.* 2000b; García *et al.* 2000a; Priori *et al.* 2001). En los últimos años han aparecido nuevos y prometedores índices de riesgo basados en las Alternancias de Onda T (AOT), cuyo análisis constituye el tema central de esta tesis.

1.1.2. Enfermedad coronaria.

Uno de los principales problemas cardiovasculares se produce cuando las arterias coronarias, que son las que aportan oxígeno al músculo cardiaco para que éste pueda desarrollar su actividad mecánica de bombeo, presentan estenosis, es decir, se estrechan u obstruyen debido a acumulaciones de grasas, colesterol, etc. Se produce entonces una disminución del aporte de oxígeno en las células del corazón, que se conoce como isquemia de miocardio. La isquemia produce alteraciones iónicas a nivel celular, que se manifiestan en el electrocardiograma. Si la isquemia se produce de forma sostenida puede derivar en la muerte de las células, originándose una región infartada incapaz de conducir el estímulo eléctrico (infarto de miocardio). En los enfermos coronarios se producen, de forma reversible en isquemia y permanente tras un infarto, cambios en la fisiología de las células afectadas, que degradan su función contráctil y son fuentes de inestabilidades eléctricas que pueden dar lugar a arritmias ventriculares, algunas de ellas letales. Según el Instituto Nacional de Estadística, las enfermedades coronarias son la principal causa de muerte dentro del grupo de enfermedades cardiovasculares con 39.400 fallecimientos en 2002 (10,7 % del total de muertes)⁴. La forma más frecuente de fallecimiento en estos enfermos es la MSC, produciéndose ésta sin síntomas previos en el 19-26 % de los casos (Marrugat *et al.* 1999). Por tanto, los pacientes con enfermedad coronaria, y en particular los que han padecido un infarto previo son el principal grupo de riesgo de MSC. De ahí el gran interés social y tecnológico que supone el diagnóstico y seguimiento de estas enfermedades.

En los últimos años, se ha comprobado que la presencia de AOT en pacientes post-infarto es capaz de predecir los resultados del EEF (inducibilidad de arritmias malignas), y es un buen predictor del riesgo de MSC, tanto individualmente como combinado con otros índices (Ikeda *et al.* 2000b, 2002). Además, se ha reportado la presencia de AOT durante episodios de isquemia ambulatoria (Verrier *et al.* 1996a; Martínez *et al.* 2000b), angina

⁴En Aragón, las enfermedades coronarias fueron responsables de 1150 fallecimientos (un 8.85 %) durante 2002.

de Prinzmetal⁵ (Kleinfeld y Rozanski 1977; Turitto y El-Sherif 1988), isquemia inducida por el ejercicio (Konta *et al.* 1990; Ikeda *et al.* 2000a) e intervenciones de angioplastia⁶ coronaria (Gilchrist 1991; Nearing *et al.* 1994; Martínez *et al.* 2002).

Para facilitar la comprensión de esta tesis, se explican a continuación algunos conceptos básicos sobre la señal electrocardiográfica y su origen, así como sus características más relevantes.

1.2. La señal electrocardiográfica.

La señal electrocardiográfica o electrocardiograma (ECG) es una medida de la actividad eléctrica del corazón registrada sobre la superficie del cuerpo. Se trata de una prueba no invasiva y no traumática para el paciente, y por su sencillez, bajo coste y gran utilidad, es la exploración más frecuente en el estudio y diagnóstico de las patologías cardíacas.

Esta señal proporciona información de la actividad eléctrica del corazón y su estudio permite el diagnóstico de las principales enfermedades cardíacas. Los distintos tipos de registros electrocardiográficos, como el ECG de 12 derivaciones, la prueba de esfuerzo, o los registros Holter proporcionan información que se puede utilizar para determinar el riesgo de arritmias ventriculares.

Varias patologías alteran la actividad eléctrica del corazón y causan cambios en el ECG. Así, algunas cardiopatías producen cambios en la masa muscular del miocardio, modificando la morfología del ECG (por ejemplo, la hipertrofia ventricular produce aumentos en las amplitudes de los complejos QRS); la muerte de tejido muscular del corazón (infarto de miocardio) se refleja en cambios de morfología de algunas de las ondas; el suministro insuficiente de sangre al músculo cardíaco causa alteraciones en la repolarización de las células cardíacas, lo que también se refleja en cambios característicos en el ECG.

Debe indicarse también que el ECG es insensible a ciertas anomalías cardíacas, por lo que un trazado normal no excluye la presencia de cardiopatías. Por otra parte, existen cambios en el ECG que no son específicos de una determinada patología.

La ingeniería biomédica se ocupa en este campo de desarrollar técnicas de adquisición, monitorización, procesado y análisis de la señal ECG para proporcionar una herramienta automática de ayuda al diagnóstico.

1.2.1. Origen: actividad eléctrica del corazón.

Las células del corazón, como las de cualquier otro músculo, tienen la propiedad de ser excitables eléctricamente, produciéndose un flujo de iones a través de su membrana (despolarización), de forma que el potencial entre el interior y el exterior de la célula varía.

⁵Se debe a un vasoespasmo que no deja pasar la sangre por la arteria coronaria, y produce isquemia en el miocardio.

⁶*Vid. infra* Sección 1.3.1.1.

Esta variación se conoce como potencial de acción. Cuando el tejido cardíaco es excitado eléctricamente, se produce la contracción del músculo. Esta excitación se propaga a las células adyacentes, de forma que el impulso eléctrico se transmite por todo el órgano. Las células permanecen un cierto tiempo despolarizadas hasta que de nuevo las corrientes iónicas a través de la membrana hacen volver al potencial de acción a su valor en reposo (repolarización), con lo que la célula vuelve a su estado original. Desde que la célula se despolariza hasta que puede volver a ser excitada por otro impulso eléctrico ha de transcurrir un intervalo de tiempo denominado periodo refractario.

La particularidad del músculo cardíaco estriba en su capacidad para generar el impulso eléctrico que inicia la excitación. Existen células en el corazón que tienen la propiedad de la automaticidad, es decir, generan espontáneamente potenciales de acción que se propagarán al resto de las células.

En una situación normal, el ritmo cardíaco lo marca la automaticidad de las células del nodo seno-auricular (SA) situado en la aurícula derecha, en las cercanías de la vena cava, como se aprecia en la Figura 1.1. La despolarización se transmite desde el nodo seno-auricular hacia las aurículas, hasta que el impulso llega al nodo aurículo-ventricular (AV) que es el paso conductor normal entre las aurículas y los ventrículos. Tras salir del nodo AV, el impulso entra en el Haz de His, que a su vez se divide en las ramas derecha, izquierda anterior e izquierda posterior, hasta llegar a través de la red de Purkinje al músculo ventricular. Gracias al retardo que introduce el nodo AV, la contracción del corazón se produce en dos tiempos (primero las aurículas y después los ventrículos) dando así tiempo a que la sangre pase de las aurículas a los ventrículos y se puedan cerrar las válvulas que los separan.

Además del ritmo sinusal, el corazón posee varios mecanismos de seguridad que se ponen en funcionamiento e inician la despolarización si falla la automaticidad en el nodo SA, o bien si la conducción de la onda de despolarización se bloquea. Estos mecanismos se inhiben cuando existe un ritmo sinusal normal ya que al tener un ritmo natural más lento, se reinician cuando les llega el impulso producido por el nodo SA. El marcapasos normal del corazón está en el nodo SA, y tiene una tasa natural de disparo de 70-80 latidos por minuto. Esta tasa es algo más baja en el nodo AV (50-60 latidos por minuto), y todavía más baja en el sistema de conducción ventricular (30-40 latidos por minuto). Estos marcapasos inferiores sólo actúan si transcurrido el tiempo correspondiente, no han sido despolarizados por otro impulso eléctrico.

La propagación de la activación eléctrica genera dípolos eléctricos variables distribuidos por el músculo cardíaco, de forma que la superposición de todos ellos generará en la superficie del cuerpo un campo eléctrico variable. La señal electrocardiográfica mide la evolución temporal de la diferencia de potencial entre dos puntos de la superficie del cuerpo (o entre un punto y una referencia). Bajo la hipótesis de que la distancia entre las fuentes eléctricas y la superficie del cuerpo es mucho mayor que las distancias entre las fuentes, podemos sumar todos los dípolos en un mismo punto. Según esta aproximación, la señal ECG obtenida será una proyección del dipolo de corriente total en el eje que definen los puntos de medida (Webster 1988, pp. 1024-1030). Las distintas posiciones en las que se toman estas medidas se denominan derivaciones, y de ellas se hablará a continuación.

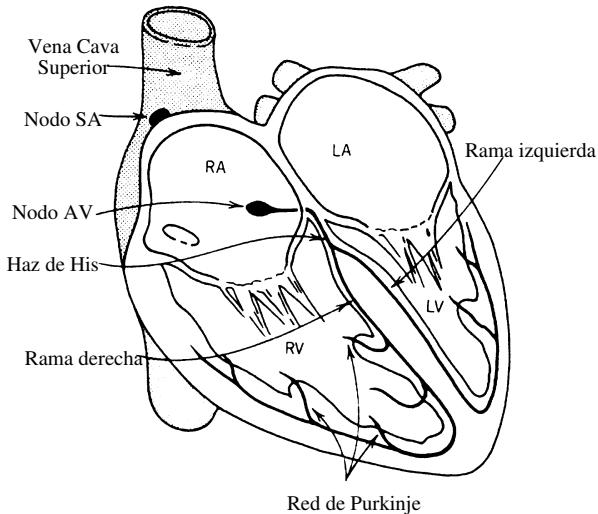


Figura 1.1: Sección del corazón que muestra el sistema de conducción del impulso eléctrico.

1.2.2. Derivaciones.

Los cardiólogos, a fin de unificar criterios, han estandarizado diferentes puntos de medida de la señal ECG. Se denomina derivación a cada una de estas posiciones de medida, y, por extensión, a la señal ECG registrada en esos puntos mediante los electrodos correspondientes (Webster 1992). En la práctica clínica habitual se habla de 12 derivaciones estándar. De ellas, 6 recogen proyecciones del vector cardíaco en el plano frontal, mientras que las otras 6 representan la actividad eléctrica cardiaca en un plano transversal al torso.

Las derivaciones frontales están definidas a partir de los potenciales en la pierna derecha (RL), la pierna izquierda (LL), el brazo derecho (RA) y el brazo izquierdo (LA). El punto RL sirve de referencia de voltaje para el amplificador, y combinando el resto de potenciales se obtienen las derivaciones frontales como se describe en la Tabla 1.1. Estos puntos forman el triángulo conocido como triángulo de Einthoven (Figura 1.2).

Las tres primeras derivaciones fueron propuestas a principios del siglo XX por Einthoven, y se conocen con el nombre de derivaciones bipolares I, II y III, ya que se calculan directamente como la diferencia de potencial entre dos electrodos.

Las otras tres derivaciones frontales, denominadas derivaciones aumentadas (aVR, aVL y aVF), fueron propuestas por Goldberger. Se calculan a partir de los mismos puntos anteriores mediante una red de resistencias, de modo que se obtiene la diferencia entre un punto del triángulo de Einthoven y el valor medio del potencial de los otros dos (Tabla 1.1).

Las otras seis derivaciones normalizadas se denominan unipolares precordiales (V1,

V2, V3, V4, V5 y V6). Fueron propuestas por Wilson y recogen la actividad cardíaca en un plano transversal al torso. Se utilizan 6 electrodos más colocados en los puntos (v_i ; $i=1, \dots, 6$) situados en un plano horizontal a la altura de los espacios intercostales 4º y 5º, como se ve en la Figura 1.2. La referencia para estas derivaciones es un punto denominado terminal central de Wilson y su potencial es el promedio de los potenciales en los puntos RA, LA y LL. La señal correspondiente a estas derivaciones es la diferencia de potencial entre cada punto v_i y el terminal central de Wilson (Tabla 1.1).

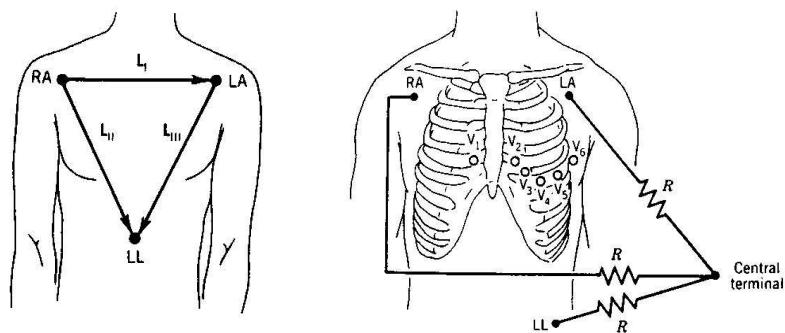


Figura 1.2: Posición de los electrodos en el sistema de derivaciones estándar, tanto para derivaciones frontales (izquierda) como para derivaciones precordiales (derecha). Los electrodos que forman el triángulo de Einthoven (LL, RA y LA) se colocan en las extremidades, para evitar ruidos y facilitar su colocación. Las extremidades actúan como sondas a los puntos correspondientes del torso.

Además de las 12 derivaciones estándar, se emplean habitualmente otros sistemas, como las derivaciones llamadas ortogonales o de Frank (X, Y, Z) que recogen la proyección de la actividad cardíaca en tres ejes ortogonales (*vid. Figura 1.3*). Se calculan a partir de una serie de electrodos en diferentes puntos del cuerpo (A, C, E, I, M, F, H) y una red de resistencias que genera las derivaciones X, Y y Z (Tabla 1.1 y Figura 1.3). En ocasiones se utilizan también derivaciones ortogonales sin corregir, obtenidas con electrodos situados directamente sobre los ejes x, y, z.

Existen también matrices de transformación, como la de Dower, que permiten obtener, de forma aproximada, las derivaciones estándar a partir de las ortogonales, y viceversa (Dower *et al.* 1980; Edenbrandt y Pahlm 1988).

1.2.3. Descripción de la señal electrocardiográfica.

1.2.3.1. Características temporales.

Por estar asociada a la actividad eléctrica del músculo cardíaco, la señal ECG presenta un comportamiento repetitivo sincronizado con las ocurrencias de los latidos cardíacos,

Tipo de derivación	Electrodos	Definición
Bipolares	RL, LL, RA, LA	I=LA-RA II=LL-RA III=LL-LA
Aumentadas	RL, LL, RA, LA	aVR=RA-0.5 (LA + LL) aVL=LA-0.5 (LL + RA) aVF=LL-0.5 (LA + RA)
Unipolares Precordiales	v_1, v_2, \dots, v_6	$V1=v_1 \cdot (LA + RA + LL) / 3$ $V2=v_2 \cdot (LA + RA + LL) / 3$ $V3=v_3 \cdot (LA + RA + LL) / 3$ $V4=v_4 \cdot (LA + RA + LL) / 3$ $V5=v_5 \cdot (LA + RA + LL) / 3$ $V6=v_6 \cdot (LA + RA + LL) / 3$
Ortogonales o de Frank	I, E, C, A, M, H, F	$X = 0.610 A + 0.171 C - 0.781 I$ $Y = 0.655 F + 0.345 M - 1.000 H$ $Z = 0.133 A + 0.736 M - 0.264 I - 0.374 E - 0.231 C$

Tabla 1.1: Derivaciones normalizadas a partir de las posiciones de los electrodos.

que son a su vez efecto de la despolarización y repolarización de las células cardiacas. En cada ciclo del ECG están representadas las distintas fases del latido cardiaco. Las ondas que aparecen en la señal se denotan con una letra (P, Q, R, S, T). La Figura 1.4 muestra un latido típico del ECG. Siguiendo un orden temporal, la primera desviación que se observa en la señal se denomina onda P, y representa la activación (despolarización) de las aurículas. El segmento plano que precede a esta onda P se denomina línea de base o isopotencial, pues corresponde a la situación en la que el corazón está en reposo (sin actividad eléctrica). Tras la onda P, se produce una serie de ondas por efecto de la activación de los ventrículos. A esta secuencia de desviaciones rápidas se la denomina complejo QRS. La repolarización de las aurículas se produce también en ese intervalo de tiempo, pero no se ve reflejada en el ECG pues la masa muscular ventricular es mucho más grande que la de las aurículas, y predomina el efecto de la despolarización ventricular. Tras el complejo QRS encontramos el denominado complejo ST-T, formado por el segmento ST y la onda T, que representan la repolarización de los ventrículos. En ocasiones, aparece también una onda posterior, denominada onda U, de escasa amplitud y origen incierto.

También son importantes para el diagnóstico los intervalos temporales dentro de la señal correspondiente a cada latido. Así, el intervalo PR indica el tiempo de conducción aurículo-ventricular. El intervalo QT por su parte indica el tiempo transcurrido entre la activación de la primera célula del ventrículo hasta la desactivación de la última (desde el comienzo del QRS hasta el final de la onda T). También tiene su importancia el tiempo total de despolarización ventricular, que viene dado en el ECG por la anchura del intervalo QRS (desde el inicio de la onda Q hasta el final de la onda S). Existen además otras

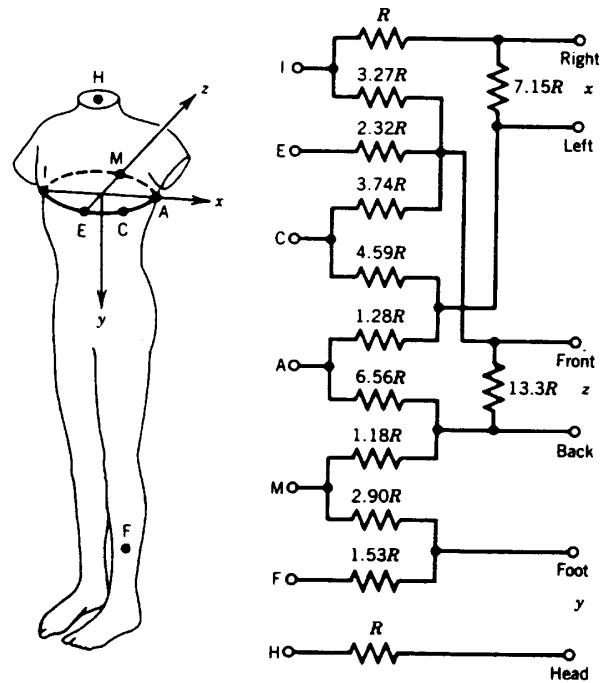


Figura 1.3: Derivaciones ortogonales X, Y Z, junto a la red de resistencias necesarias para su cálculo. (Reproducido de (Webster 1988)).

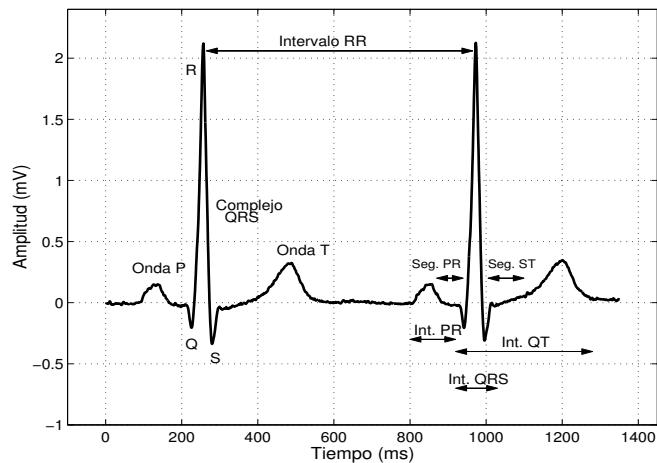


Figura 1.4: Latido normal de la señal ECG con las ondas e intervalos más significativos.

medidas relativas a latidos consecutivos, como es el ritmo cardiaco, que se mide a través del intervalo RR (distancia entre las ondas R de dos latidos consecutivos). En la Tabla 1.2 se presentan los valores típicos de amplitud (voltaje) de las ondas y la duración de algunos intervalos (Cromwell *et al.* 1980; Cohen 1986).

Amplitud	Onda P	0.25 mV
	Onda Q	25% onda R
	Onda R	1.60 mV
	Onda T	0.1-0.5 mV
Duración	Intervalo PR	0.12-0.20 s
	Intervalo QT	0.35-0.44 s
	Segmento ST	0.05-0.15 s
	Onda P	0.11 s
	Complejo QRS	0.06-0.1 s
	Intervalo RR	0.6-1.0 s

Tabla 1.2: Amplitudes de ondas y duración de los intervalos del ECG. (Reproducido de (Cromwell *et al.* 1980)).

1.2.3.2. Características frecuenciales.

En (Thakor *et al.* 1984) puede encontrarse un estudio de las componentes espectrales de la señal ECG en el que se analizan las componentes frecuenciales de cada onda. En la Figura 1.5 se presentan los resultados obtenidos. Como puede apreciarse en ella, las componentes significativas del ECG se sitúan en una banda entre 0.05 y 40 Hz. Las mayores frecuencias corresponden al complejo QRS, mientras que las ondas P y T tienen componentes frecuenciales más bajas por debajo del los 10 Hz.

1.2.4. Patologías asociadas con el ECG.

Son diversas las patologías que se manifiestan en la señal ECG (Webster 1992; Bayés 1992). A continuación se describe el efecto en el ECG de algunas patologías comunes de especial interés para esta tesis.

- **Arritmias.** Consisten en irregularidades del ritmo cardiaco, debidas a cambios en la inicialización del impulso del nodo sinusal, o a problemas del sistema de conducción entre las aurículas y los ventrículos (con posibles ondas de recirculación o reentradas). En la sección 1.2.1 se ha explicado el mecanismo de automaticidad de las células cardíacas. Un latido disparado por uno de los marcapasos secundarios debido a un fallo del nodo SA o a un problema de conducción, se denomina *latido de escape*. Si el marcapasos inferior se dispara prematuramente debido a un incremento en su tasa de automaticidad, el latido se llama *latido ectópico*. Su presencia se manifiesta en cambios del ritmo cardiaco y la morfología de la señal ECG.

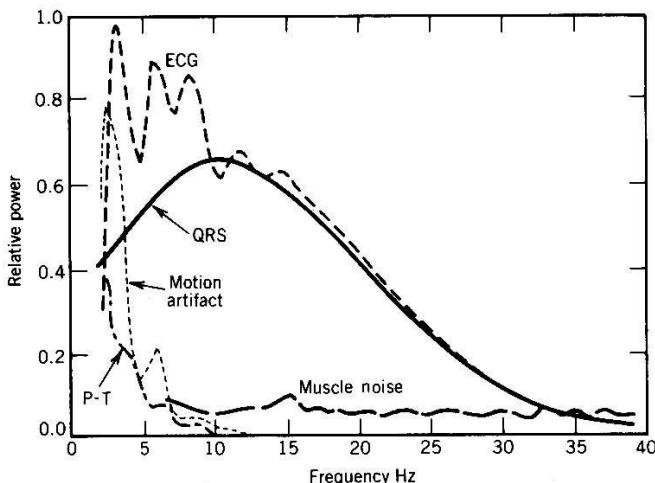


Figura 1.5: Espectro del ECG y sus componentes. (Reproducido de (Thakor *et al.* 1984)).

Las arritmias más clásicas son la taquicardia y la bradicardia auriculares, que presentan un ECG de forma normal, pero con un ritmo cardíaco superior a 100 latidos por minuto o inferior a 60 latidos por minuto, respectivamente.

Otro tipo clásico de arritmias es la arritmia ventricular, que genera contracciones ventriculares prematuras (PVC) o extrasístoles. Éstos son latidos prematuros que se originan en el ventrículo. Normalmente, no son conducidos hacia las aurículas, y no descargan el nódulo sinusal. Suelen ir seguidos de pausas compensadoras, razón por la que el siguiente latido aparece aproximadamente en la misma posición que si no hubiese intervenido un latido prematuro.

La taquicardia ventricular (VT) puede originarse bien por ectopía o por reentrada. Es una situación que pone en peligro la vida del paciente. Se origina cuando un foco generador de estímulos, situado en los ventrículos, emite estímulos de activación a frecuencia elevada, originando extrasístoles ventriculares sucesivos en el ECG. Como el proceso de despolarización de los ventrículos sigue vías anómalas, el complejo QRS aparece ensanchado y con morfología anormal.

Todas las arritmias anteriores tienen en común la contracción sincrónica de todas las fibras musculares de las aurículas o de los ventrículos, aunque con diferente velocidad. Cuando las fibras musculares se contraen independientemente y de forma asíncrona, se tiene la fibrilación ventricular (VF). El estado de fibrilación ventricular es de emergencia para el paciente que suele perder la conciencia, y si no se corrige inmediatamente conduce a la muerte.

- **Isquemia e infarto de miocardio.** Se da cuando el flujo de sangre a una región del músculo cardíaco se reduce o se interrumpe. Las células de esta región son dañadas

y pueden llegar a morir en ocasiones. El impulso eléctrico, cuando llega a estas regiones, necesita seguir otras vías de propagación alternativas, ya que estas células quedan inactivas. Su efecto sobre el ECG no es unívoco, ya que depende del grado de disfunción y de la localización de las células dañadas. Cuando las células no han muerto, sino que quedan parcialmente dañadas (isquemia), se suele reflejar en una elevación o depresión anormal del segmento ST debido a una repolarización más rápida de dichas células. La presencia de ondas Q de duración superior a 40 ms. y de amplitud mayor de 0,2 mV sugieren infarto de miocardio.

1.2.5. Tipos de ruido e interferencias presentes en el ECG.

En la adquisición de la señal ECG es imposible aislar completamente el sistema estudiado (el cardiovascular, en este caso) de otros sistemas adyacentes, tanto fisiológicos como electrónicos. Por ser una señal biomédica de baja amplitud (del orden del milivoltio), un problema inevitable en el registro de la señal ECG es la presencia de señales indeseadas superpuestas a la señal de interés. Estas señales pueden tener un origen fisiológico, ambiental o ser debidas al equipo de adquisición y registro. A continuación se describen las fuentes de ruidos e interferencias más habituales.

- **Ruido de origen fisiológico.**

- **Actividad muscular.** Junto a la actividad eléctrica del corazón, en el ECG se registra también la actividad de los músculos más cercanos a los electrodos. A la actividad eléctrica de los músculos en general se la conoce como electromiograma (EMG). La señal EMG tiene una amplitud del orden del ECG, pero se extiende en frecuencias hasta los 500 Hz. Se puede reducir su efecto tratando de tener al paciente inmóvil durante el registro (lo que no es siempre posible, como en los registros Holter o las pruebas de esfuerzo), y colocando los electrodos lejos de las zonas de mayor actividad muscular.
- **Movimiento de los electrodos.** Cuando se produce un movimiento del paciente, debido a la interfaz piel-electrodo, aparecen dos tipos de variaciones:
 - Variaciones lentas: llamadas también *variaciones de la línea de base*. Se deben fundamentalmente a la respiración del paciente.
 - Variaciones rápidas: llamadas *artefactos de movimientos*, producidos por el movimiento brusco de los electrodos. Se pueden suavizar sus efectos reduciendo la impedancia de la piel y utilizando electrodos de punción o electrodos de Ag-AgCl.

- **Interferencias de origen externo.**

- **Interferencia inducida por la red eléctrica.** Debido a la presencia de dispositivos de instrumentación cercanos al paciente que están conectados a la red eléctrica, se introducen interferencias inducidas en la señal ECG.

- **Interferencias radioeléctricas.** Producidas por equipos habituales en entornos hospitalarios, como bisturísbisturíes eléctricos. Al ser interferencias de alta frecuencia, se eliminan mediante un adecuado filtrado en el sistema de adquisición.

- **Ruidos propios del equipo de medida.**

Estos ruidos tienen su origen en el propio sistema de adquisición. Normalmente, se pueden eliminar con un buen diseño del equipo de medida.

La presencia de ruidos e interferencias en el ECG obligan a considerar técnicas para su cancelación o que, al menos, permitan atenuar su efecto sobre la información de interés. Por otro lado, dado que ésta no se presenta habitualmente de forma directa sobre la señal, es importante que las técnicas de procesado de señal utilizadas en la extracción de la información relevante sean también robustas ante situaciones de ruido e interferencias.

1.2.6. Adquisición de la señal ECG.

La actividad eléctrica del corazón humano puede detectarse en la superficie del cuerpo y, aunque es pequeña (del orden del milivoltio), puede registrarse. Para ello es necesario un sistema de adquisición o electrocardiógrafo. Su función es obtener la señal eléctrica, amplificarla y rechazar los artefactos y ruidos ambientales o biológicos señalados en la sección 1.2.5, para registrarla. Tradicionalmente, la señal ECG se ha registrado y se sigue registrando sobre papel. Pero con el desarrollo de los ordenadores y los sistemas digitales, es cada vez más frecuente registrar la señal digitalmente, lo que permite su posterior análisis utilizando técnicas de tratamiento digital de la señal.

El registro digital se puede modelar como un proceso de muestreo de la señal analógica a intervalos uniformes, y la cuantificación de las muestras para permitir su almacenamiento o transmisión en forma digital. Las frecuencias de muestreo utilizadas oscilan entre 200 Hz y 5000 Hz. Como se ha señalado en la sección 1.2.3.2, esta tasa de muestreo es suficiente para representar las componentes significativas del ECG, e incluso introduce redundancia. Las frecuencias de muestreo más bajas se suelen utilizar en señales de larga duración, mientras que las frecuencias de muestreo mayores de 1 kHz se emplean en lo que se llama electrocardiografía de alta resolución (Berbari y Lander 1992). En lo que a la cuantificación de las señales se refiere, el número de bits utilizado no está estandarizado, y encontramos equipos y bases de datos que cuantifican los datos con un número de bits que oscila entre 10 y 16 bits. La cuantificación conlleva una pérdida de información, apareciendo el llamado ruido de cuantificación, que es tanto menor cuantos más bits se utilicen para representar las muestras.

1.2.7. Registros ECG ambulatorios de larga duración: registros Holter.

El sistema Holter es un sistema de registro portátil de la señal ECG que permite duraciones de grabación de hasta 24 y 48 horas, durante las cuales el paciente realiza una actividad normal, favoreciendo así la aparición de episodios arrítmicos esporádicos.

Los registros Holter, también llamados ambulatorios, permiten observar la reacción del paciente ante los distintos estados de estrés que se le pueden presentar a lo largo de todo un día. El sistema tradicional almacena la señal analógicamente en una cinta magnetofónica (generalmente sólo dos derivaciones). Sin embargo, los equipos ambulatorios modernos adquieren la señal en forma digital, y es común registrar las tres derivaciones ortogonales.

Este tipo de señales son de gran interés para los objetivos de esta tesis, y se caracterizan por su duración, que es mucho mayor que la de los registros habituales, y la cantidad de ruido que contienen debido a su carácter ambulatorio.

1.3. Alternancias de onda T en el ECG.

La alternancia de onda T (AOT) también conocida como alternancia de la repolarización, es un fenómeno detectable en el ECG y que se define como una fluctuación consistente latido a latido de la amplitud, duración o morfología de la repolarización (segmento ST y onda T) con periodicidad de dos latidos (Verrier *et al.* 1996b; Adam *et al.* 1984; Smith *et al.* 1988). En la Figura 1.6 puede apreciarse un ejemplo de AOT visible durante una intervención de angioplastia coronaria. Se trata de dos derivaciones simultáneas de un mismo registro. En el trazado superior se aprecia una alternancia de baja amplitud, mientras que en la gráfica inferior tenemos un caso de alternancia claramente visible.

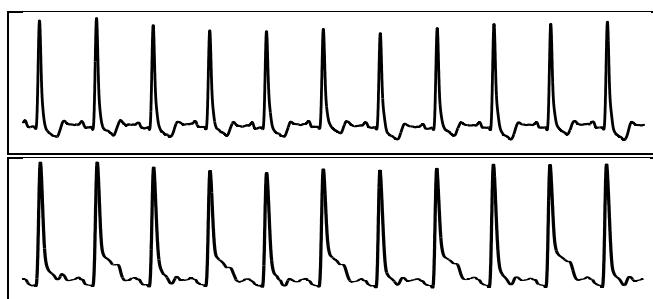


Figura 1.6: Ejemplo de ECG con alternancia de onda T.

Las primeros casos de AOT fueron documentados ya en los albores del siglo XX (Hering 1909; Lewis 1910). En las décadas siguientes se reportaron algunos casos (Hamburger *et al.* 1936; Kalter y Schwartz 1948; Schwartz y Malliani 1975; Kleinfeld y Rozanski

1977; Navarro-López *et al.* 1978) que mantuvieron el interés por este fenómeno, si bien fue generalmente considerado como un hallazgo infrecuente, sin incidencia en el día a día de la práctica clínica. En 1981, Adam y sus colaboradores fueron capaces de medir alternancias no visibles (del orden de microvoltios) con la ayuda de un ordenador (Adam *et al.* 1981), y desde entonces el análisis digital del ECG ha mostrado que estas sutiles alternancias invisibles al ojo clínico son mucho más comunes que las AOT visibles.

En los últimos años, varios estudios han permitido reconocer la presencia de AOT como un indicador de inestabilidad eléctrica durante estimulación controlada (*pacing*) (Rosenbaum *et al.* 1994), pruebas de esfuerzo (Estes III *et al.* 1997; Hohnloser *et al.* 1998; Klingenheben *et al.* 2000), pruebas de estrés farmacológico (Coch *et al.* 1998), intervenciones de angioplastia coronaria (Nearing *et al.* 1994) o registros ambulatorios (Verrier *et al.* 1996a) asociadas a un amplio espectro de condiciones patológicas como el síndrome de QT largo (Zareba *et al.* 1994), isquemia de miocardio (Verrier *et al.* 1996a; Ikeda *et al.* 2000a), angina de Prinzmetal (Turitto y El-Sherif 1988), infarto de miocardio (Ikeda *et al.* 2000b; Verrier *et al.* 2003), cardiomiopatía dilatada (Adachi *et al.* 1999) y algunas otras cardiopatías (Smith *et al.* 1988). También se han encontrado AOT en sujetos sanos, siempre asociadas a ritmos cardíacos elevados (Caref *et al.* 1997; Weber *et al.* 2003; Kop *et al.* 2004).

Algunos trabajos realizados en la última década han relacionado directamente la presencia de alternancias de onda T con el riesgo de padecer arritmias ventriculares malignas, lo que permite considerar las AOT como un índice muy prometedor para estratificar a los pacientes según su riesgo de muerte súbita cardiaca, por sí mismo (Rosenbaum *et al.* 1994; Estes III *et al.* 1997; Armondas *et al.* 1998a,b; Adachi *et al.* 1999; Gold *et al.* 2000) o combinado con otros índices (Ikeda *et al.* 2000b). De ahí la importancia de disponer de métodos sensibles y robustos para detectar alternancias de onda T.

En las dos últimas décadas se han propuesto diversas metodologías para detectar AOT en el ECG. Los métodos más conocidos y extendidos son el Método Espectral (Smith *et al.* 1988; Rosenbaum *et al.* 1994), y el Método de la Demodulación Compleja (Nearing *et al.* 1991). Ambos están basados en la utilización de filtros lineales para analizar espectralmente la señal. Otras propuestas posteriores han tenido una aplicación más limitada (Laguna *et al.* 1996; Burattini *et al.* 1999; Martínez *et al.* 2000a; Strumillo y Ruta 2002; Srikanth *et al.* 2002a,b; Nearing y Verrier 2002). Entre las propuestas recientes, destaca el Método de la Media Móvil Modificada (Nearing y Verrier 2002), que se basa en un análisis mediante filtros no lineales y ha sido empleado recientemente en algunos estudios clínicos (Nearing y Verrier 2003a; Verrier *et al.* 2003).

En las referencias citadas, los métodos se describen como una concatenación de procedimientos, con una serie de parámetros y reglas heurísticas seleccionados *ad hoc* a partir de la experiencia de los autores. Este hecho, junto con la diversidad de las estrategias utilizadas dificulta enormemente la comparación de los métodos.

1.3.1. Alternancias de onda T e isquemia de miocardio.

La presencia de AOT durante episodios de isquemia ambulatoria, angina de Prinzmetal, intervenciones de angioplastia coronaria y en pacientes post-infarto se reporta en gran número de estudios, p. ej. (Kleinfeld y Rozanski 1977; Verrier *et al.* 1996a; Smith *et al.* 1988; Konta *et al.* 1990; Ikeda *et al.* 2000a,b, 2002). Se asocia generalmente a los pacientes en que pueden inducirse arritmias malignas, por lo que se considera como un predictor del riesgo.

1.3.1.1. Angioplastia coronaria transluminal percutánea.

La angioplastia coronaria transluminal percutánea (PTCA) o angioplastia de globo es una técnica médica utilizada como alternativa al puente coronario (*by-pass*) en el tratamiento de la estenosis (Webster 1988). Consiste en introducir por vía femoral un globo en el interior de la arteria coronaria ocluida mediante el uso de un catéter. El globo se sitúa en la proximidad de la región de la arteria ocluida, y se infla durante unos instantes para abrir la oclusión. Una vez desinflado, se restablece o mejora la circulación arterial. En la Figura 1.7 puede verse un esquema de la etapa de inflado en el procedimiento de angioplastia. Durante el tiempo de inflado se produce la oclusión total de una arteria coronaria y determinadas regiones cardiacas quedan privadas de flujo sanguíneo, de modo que se induce temporalmente una situación de isquemia total. En ese intervalo, se tiene un excelente modelo para estudiar los estados iniciales de la isquemia aguda de miocardio, ya que se somete al músculo cardiaco a condiciones similares, con la ventaja de que se conoce el intervalo y el lugar de la oclusión.

En la literatura médica existen referencias a episodios de AOT en intervenciones de PTCA (Joyal *et al.* 1984; Shah y Subramanyan 1995; Kwan *et al.* 1999), así como en estudios experimentales de oclusión coronaria en animales (Cinca *et al.* 1980; Hashimoto *et al.* 1983; Nearing *et al.* 1991).

En esta tesis se van a analizar señales ECG de alta resolución registradas durante PTCA, correspondientes al proyecto multicéntrico internacional “STAFF III” coordinado por el Dr. Galen Wagner del *Duke University Medical Center* (North Carolina, USA). Dichas señales fueron obtenidas sobre pacientes a los que se les practicó una PTCA en el *Charleston Area Medical Center* (West Virginia, USA) y constituyen una base de datos pionera en su campo, debido a la duración de las oclusiones con una media de 5 minutos.

1.3.2. Mecanismos electrofisiológicos.

Hasta el momento no existe un acuerdo unánime en cuanto a los mecanismos electrofisiológicos causantes de las AOT. En la literatura pueden encontrarse dos hipótesis predominantes (Pastore *et al.* 1999; Narayan y Smith 2000). Según la primera, la dispersión intrínseca de la refractariedad puede causar que las células del miocardio con tiempos de recuperación más largos no consigan despolarizarse completamente y se produzcan cambios en la morfología de su potencial de acción en uno de cada dos latidos. El

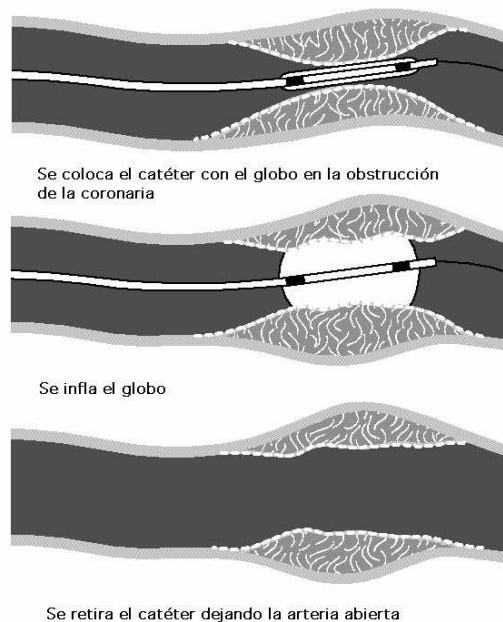


Figura 1.7: Imagen longitudinal de una arteria coronaria mostrando el modo en que se abre la obstrucción durante una angioplastia.

segundo mecanismo afirma que se puede producir una conducción 2:1 debida a condiciones de heterogeneidad del tejido cardiaco. En cualquiera de las dos hipótesis, la dispersión espacial resultante en la repolarización ventricular facilita la creación de barreras en la propagación del impulso eléctrico y el fraccionamiento de los frentes de onda, aumentando la predisposición a la reentrada y a la generación de arritmias ventriculares.

Varios estudios experimentales realizados sobre células individuales o corazones *in vivo* o *in vitro* de animales, en condiciones normales (Pastore *et al.* 1999; Hirayama *et al.* 1993), isquémicas (Cinca *et al.* 1980), o en condiciones similares a las que se producen en el síndrome de QT largo (Shimizu y Antzelevitch 1999), sugieren que las alternancias en el ECG de superficie son un reflejo de las alternancias eléctricas a nivel de la célula individual.

A pesar de las evidencias de la asociación existente entre la AOT con el riesgo de desarrollo de arritmias ventriculares y muerte súbita cardiaca, no está claro si existe una relación causa-efecto con el mecanismo subyacente de las arritmias ventriculares o ambas son dos manifestaciones causadas por una misma anomalía electrofisiológica.

1.4. Objetivos y alcance de la tesis.

Esta tesis doctoral se centra en el tratamiento digital de la señal ECG para la detección y estimación de AOT en el ECG. Los objetivos principales perseguidos por la presente tesis son los de estudiar las características del problema planteado, así como proponer, justificar y validar metodologías robustas de análisis de AOT. Adicionalmente, se pretende aplicar las metodologías propuestas para caracterizar las alternancias de onda T asociadas con la isquemia aguda de miocardio, y estudiar las relaciones espaciales y temporales entre ambos fenómenos.

Para ello, se ha llevado a cabo una revisión de los diferentes enfoques metodológicos publicados en la literatura. Se ha propuesto un esquema general que sirve como marco de referencia para la clasificación y estudio de los distintos métodos de análisis. Este marco de referencia unificado permite establecer claros paralelismos entre los métodos publicados.

A continuación se ha abordado el análisis de AOT desde las teorías estadísticas de la estimación y de la detección (van Trees 1968; Scharf 1991; Kay 1993, 1998). Éstas ofrecen herramientas y resultados útiles para derivar metodologías óptimas de detección y estimación a partir de un modelo de la señal observada. La hipótesis de partida es que *un modelado adecuado de la señal ECG y de la AOT junto con la aplicación de las herramientas que proporciona la teoría de la detección y de la estimación permitirá obtener métodos de análisis que mejoren las prestaciones de los métodos clásicos*.

Se han propuesto y estudiado distintos modelos de señal para el ECG con AOT, y se han derivado los detectores y estimadores adaptados a los mismos (en particular, detectores basados en tests del cociente de verosimilitudes generalizado (*generalized likelihood ratio test*) y estimadores de máxima verosimilitud (Kay 1993, 1998)). Se ha hecho un especial énfasis en el modelado del ruido. Mientras que los métodos clásicos asumen implícitamente una distribución de ruido gaussiana y estacionaria, se han estudiado modelos de ruidos no gaussianos y no estacionarios, más acordes con las características del ruido presente en la señal ECG.

La inexistencia de bases de datos de ECG con anotaciones de AOT nos ha llevado a recurrir a estudios de simulación para evaluar las prestaciones de los métodos de análisis. Gracias a la simulación, es posible estudiar la sensibilidad y especificidad en detección y la precisión en estimación de las diferentes técnicas para distintos niveles de alternancia y ruido. Para conseguir simulaciones más realistas, se han generado señales ruidosas a partir de registros de ruido fisiológico (artefactos de movimiento y actividad muscular). También se han simulado alternancias sobre ECG reales procedentes de registros ambulatorios.

Además de abordar el diseño y evaluación de detectores, en esta tesis se han aplicado las metodologías seleccionadas a señales ECG registradas durante episodios isquémicos. Este estudio ha permitido: 1) comprobar el funcionamiento del algoritmo seleccionado en condiciones reales, 2) caracterizar las AOT en el miocardio isquémico y 3) mejorar el conocimiento de las relaciones espacio-temporales entre la cardiopatía isquémica y el fenómeno de las AOT.

Se analizan para este fin señales ECG de alta resolución registradas durante intervenciones de angioplastia coronaria (PTCA). Estas señales son muy apropiadas para nuestro propósito puesto que se conoce la duración real de la isquemia (desde el inicio de la oclusión, y no únicamente desde su manifestación en el ECG) y también cuál de las arterias coronarias principales fue ocluida: la descendente anterior izquierda (LAD), la arteria coronaria derecha (RCA) o la arteria circunfleja izquierda (LCX). Por tanto, se puede realizar, además del análisis temporal (estudiando la evolución de la alternancia durante la oclusión), un estudio *espacial* de la relación entre las características espaciales de la AOT y la zona del miocardio afectada por la isquemia. Estas características espaciales se pueden extraer analizando la distribución de las AOT en las distintas derivaciones, así como la distribución de la forma de onda alternante dentro del complejo ST-T. La aplicación del detector de AOT permitirá asimismo estudiar la prevalencia de las alternancias en este tipo de registros, comparándola con otros trabajos aparecidos en la bibliografía donde se informa de la presencia de AOT en registros de PTCA.

El entorno de trabajo ha sido fundamentalmente Matlab, donde se han programado las técnicas de procesado necesarias para realizar la presente tesis. En menor medida, se han programado en C rutinas con elevado coste computacional.

1.5. Organización de la memoria.

A continuación se describe brevemente el contenido de los capítulos restantes de la tesis:

- **Capítulo 2:** En este capítulo se propone un esquema unificado para el estudio y clasificación de los métodos de análisis de AOT. A la luz de este marco de referencia, se revisan, comparan y discuten los principios metodológicos de los diferentes esquemas de análisis de AOT publicados en la literatura. El contenido del mismo ha originado un artículo de revisión en la revista *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* (Martínez y Olmos 2005).
- **Capítulos 3 y 4:** En estos capítulos se plantea el problema del análisis de AOT bajo la óptica de la teoría estadística de la detección. Se proponen una serie de modelos de señal, variando los grados de libertad de la señal alternante así como la distribución, correlación y estacionariedad del ruido. Para cada uno de los modelos considerados, se deriva el test del cociente de verosimilitudes generalizado (TCVG) y el estimador de máxima verosimilitud de la alternancia (EMV) y se estudian sus prestaciones teóricas. También se derivan los tests correspondientes de Wald y Rao, que son aproximaciones asintóticamente equivalentes al TCVG. Cuando las prestaciones no pueden obtenerse en forma analítica, se recurre a las propiedades asintóticas del TCVG y el EMV para obtener sus prestaciones asintóticas y se emplean simulaciones de Monte Carlo para estimar las prestaciones exactas.

El Capítulo 3 se limita a modelos gaussianos, obteniéndose estimadores y detectores

basados en operadores lineales. En el Capítulo 4, los modelos se extienden a distribuciones gaussianas generalizadas, haciendo especial hincapié en la distribución laplaciana. Algunos de los métodos novedosos propuestos en este capítulo han sido presentados en (Martínez y Olmos 2002, 2003).

- **Capítulo 5:** Los métodos de análisis derivados en los capítulos previos se basan en un modelo de señal, y las prestaciones teóricas son válidas en tanto en cuanto la señal se ajuste al modelo correspondiente. Para evaluar las prestaciones de los métodos, es preciso validar los modelos comparando los métodos de ellos derivados en las condiciones de ruido existentes en señales ECG reales. Para ello, se han diseñado dos simuladores de señales ECG que combinan un perfecto control de los parámetros de la señal alterna simulada con el realismo del ECG y el ruido utilizados en la simulación. Para ello se han empleado registros de ruido fisiológico y señales ECG reales. La descripción de los los simuladores y algunos resultados preliminares pueden encontrarse en diversas contribuciones a congresos (Martínez *et al.* 2000a,b; Martínez y Olmos 2002, 2003).
- **Capítulo 6:** En él se presenta un estudio clínico en pacientes sometidos a una PTCA. Se utiliza una metodología basada en un modelo de señal laplaciano y adaptativo para estudiar las características de las AOT debidas a la isquemia aguda inducida durante la PTCA. La caracterización incluye estudios sobre la prevalencia y la amplitud de este fenómeno en función de la arteria incluida, la evolución de la alternancia durante el tiempo de la oclusión coronaria y tras el final de la misma, así como el análisis de la forma de onda alterna y la distribución de la amplitud de AOT en las distintas derivaciones según la localización de la oclusión. Este estudio se encuentra en la fecha de presentación de esta tesis en el proceso de revisión editorial para su publicación en la revista *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* (Martínez *et al.* 2005).
- **Capítulo 7:** Finalmente, en este capítulo se recopilan las conclusiones, aportaciones y líneas de extensión futura del trabajo realizado en esta tesis.

Capítulo 2

Revisión metodológica del análisis de alternancias de onda T.

2.1. Análisis de Alternancias de Onda T.

En las dos últimas décadas, desde que Adam *et al.* midieron con la ayuda de un ordenador alternancias del nivel de microvoltios en el ECG (Adam *et al.* 1981, 1982, 1984), se han propuesto en la literatura diversos métodos para detectar y estimar automáticamente este fenómeno (Smith *et al.* 1988; Rosenbaum *et al.* 1994; Nearing *et al.* 1991; Nearing y Verrier 1993; Burattini *et al.* 1997; Burattini 1998; Burattini *et al.* 1999; Laguna *et al.* 1996; Martínez *et al.* 2000a; Strumillo y Ruta 2002; Srikanth *et al.* 2002a,b; Nearing y Verrier 2002). El desarrollo de estos métodos ha permitido el análisis de AOT hasta entonces “invisibles” en diversas situaciones clínicas y experimentales, y arrojar algo de luz en el conocimiento de los mecanismos electrofisiológicos que regulan la presencia de este fenómeno y su relación con la arritmogenicidad maligna.

La comparación de los métodos se ve dificultada por la diversidad de los planteamientos en que se sustentan. Además, los métodos de análisis de alternancias se describen en la literatura como una sucesión de procedimientos (filtros, transformaciones, reglas de decisión...) aplicados a la señal ECG. El funcionamiento de tales procedimientos está determinado por una serie de parámetros de diseño y reglas heurísticas, generalmente seleccionados *ad hoc* a partir de la experiencia del investigador y el conocimiento previo del problema. Por tanto, las diferencias observadas al comparar las prestaciones obtenidas en un conjunto de señales pueden tener su causa en la superioridad de un planteamiento metodológico respecto a otro, en la adecuada selección de los parámetros de análisis o en una combinación de ambas. Así, podemos decir que no basta con la simple comparación de las prestaciones obtenidas en un conjunto de señales para evaluar y comparar distintos métodos.

En consecuencia, se hace patente la necesidad de un esfuerzo de sistematización metodológica. Contar con un esquema unificado válido para todos los métodos existentes y suficientemente abierto como para acoger otros posibles planteamientos nos permitirá

caracterizar adecuadamente y comparar las etapas que constituyen cada método, así como explicar las diferencias observadas en las prestaciones de los mismos. Las conclusiones pueden aportar una valiosa y sólida información para la selección de parámetros y el diseño de futuros algoritmos.

No nos consta que este esfuerzo de generalización haya sido realizado hasta el momento. Si bien se han publicado amplios trabajos de revisión sobre los mecanismos electrofisiológicos de la AOT (Euler 1999; Walker y Rosenbaum 2003) y sus implicaciones clínicas (Verrier *et al.* 1996b; Locati *et al.* 1998; Takagi y Yoshikawa 2003; Pham *et al.* 2003), no sucede lo mismo desde el punto de vista del procesado de señal. Sólo en (Verrier *et al.* 1996b) y (Locati *et al.* 1998) se revisan brevemente los métodos publicados hasta esas fechas. En todo caso, la discusión sobre las prestaciones de los mismos está fundamentada únicamente en los resultados clínicos documentados en otras publicaciones, realizados con señales de diferentes características adquiridas en condiciones heterogéneas. En otros trabajos, como (Rosenbaum *et al.* 1995; Burattini *et al.* 1997; Martínez *et al.* 2000a), se lleva a cabo una comparación directa de diferentes métodos sobre el mismo conjunto de datos, reales o simulados, aunque sin considerar el problema de la selección de parámetros (*vid. infra* Sección 2.2.12).

El propósito de este capítulo es proporcionar una revisión metodológica de los distintos planteamientos utilizados hasta la fecha para el análisis de AOT. En la Sección 2.2 se presenta, desde una perspectiva histórica, el panorama de los métodos de análisis de AOT junto con una breve descripción de los mismos. También se resumen las conclusiones de algunas referencias en las que se recogen y comparan diferentes metodologías. En la Sección 2.3 se establece un marco de referencia unificado para estudiar, interpretar y comparar las diferentes metodologías. La Sección 2.4 se dedica a revisar, comparar y discutir las diversas realizaciones de cada una de las etapas de la estructura general propuesta. En la Sección 2.5 se realizan algunas consideraciones sobre evaluación de métodos. Finalmente, se ofrecen en la Sección 2.6 las conclusiones del capítulo.

2.2. Métodos de análisis de AOT.

A continuación se presentan, ordenados cronológicamente, los diferentes planteamientos que hasta la fecha se han propuesto para el análisis de AOT.

2.2.1. Método espectral sobre la energía de la onda T (ME-E).

Los primeros estudios cuantitativos que relacionaron las AOT con la inestabilidad eléctrica del miocardio fueron publicados por Adam *et al.* en 1981-1984 (Adam *et al.* 1981, 1982, 1984). El método se fundamenta en la observación de que las alternancias producen una fluctuación de frecuencia 0.5 ciclos por latido (cpl) en la energía de la onda T medida latido a latido. En los citados trabajos la magnitud de AOT se mide a partir del periodograma de la serie formada por la energía de la onda T en cada latido. El

periodograma se evalúa en 0.5 cpl y se substrae de él una estimación del ruido de fondo obtenida del propio periodograma.

2.2.2. Método espectral (ME).

El ME fue propuesto en 1988 por Smith *et al.* (Smith *et al.* 1988) como una versión más elaborada del método de Adam. En ella, se alinean los latidos del ECG digitalizado y se estima el espectro de las series latido a latido correspondientes a cada una de las muestras de la repolarización calculando su spectrograma. El fundamento del método es similar al de Adam: las alternancias han de aparecer en el espectro de las series latido a latido como un pico significativo en $f = 0,5 \text{ cpl}$ (vid. Figura 2.1). Para decidir la presencia de AOT en la señal se compara la suma de las componentes alternantes (a 0,5 cpl) en todas las muestras de la repolarización con una estimación del nivel de ruido en el espectro. En 1994, el mismo grupo presentó una versión ligeramente modificada (Rosenbaum *et al.* 1994). Desde entonces, el ME ha sido utilizado ampliamente en investigaciones clínicas (Hohnloser *et al.* 1998; Adachi *et al.* 1999; Gold *et al.* 2000; Klingenberg *et al.* 2000; Ikeda *et al.* 2002). Este método está incluido en equipos comerciales como el CH2000® y el Heartwave® (Cambridge Heart Inc, Bedford, MA).

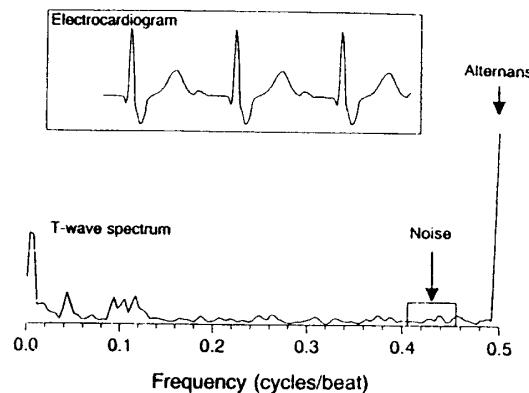


Figura 2.1: Ejemplo de análisis espectral realizado con $L = 128$ latidos consecutivos de un ECG con presencia de AOT. Reproducido de (Rosenbaum *et al.* 1994).

2.2.3. Método de la demodulación compleja (MDC).

El MDC fue presentado a principios de los 90 por Nearing *et al.* (Nearing *et al.* 1991) como una alternativa al ME que permitiera el seguimiento dinámico de las AOT. En (Nearing y Verrier 1993) se proporciona una descripción más detallada del mismo. En este método los latidos también son alineados. En cada serie de muestras latido a latido, la AOT se modela como una señal sinusoidal de frecuencia 0,5 cpl y amplitud variante (Figura 2.2).

El método propone estimar la amplitud de AOT y seguir sus fluctuaciones demodulando la componente de cada serie latido a latido a la frecuencia alternante (0,5 cpl). Este método ha sido utilizado en varios estudios clínicos, especialmente para estudiar AOT producidas durante isquemia de miocardio (Nearing *et al.* 1994; Verrier *et al.* 1996a).

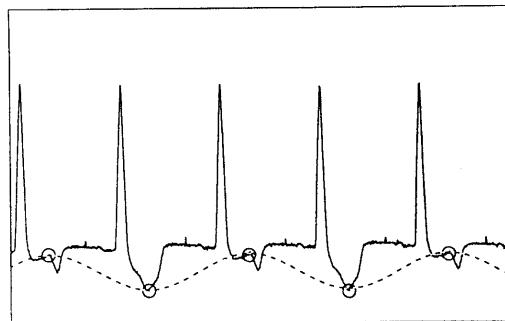


Figura 2.2: Modelo de alternancias de onda T asumido en el MDC. Reproducido de (Nearing y Verrier 1993).

2.2.4. Método de la correlación (MC).

Este método fue propuesto en 1997 por Burattini y sus colaboradores (Burattini *et al.* 1997; Burattini 1998; Burattini *et al.* 1999). La metodología del MC presenta dos claras diferencias con los métodos ME y MDC: por una parte, el complejo ST-T se analiza conjuntamente, reduciendo toda la información de cada repolarización cardiaca a un único coeficiente de correlación cruzada con una forma de onda patrón. Por otro lado, la única serie de coeficientes latido a latido resultante se analiza en el dominio temporal. Las oscilaciones alternativas de la correlación cruzada en torno a 1 anuncian la presencia de AOT (Figura 2.3). La amplitud de la oscilación indica la magnitud de la alternancia. El MC ha sido empleado para estudiar AOT en enfermos coronarios y pacientes con el síndrome de QT largo (Burattini *et al.* 1998b).

2.2.5. Métodos basados en la transformada de Karhunen-Loëve (ME-KL, MDC-KL).

La transformada de Karhunen-Loëve (KL) ha sido utilizada como paso previo al análisis de AOT en algunas de las metodologías presentadas en la literatura¹. El motivo de

¹Es la solución al problema de minimizar el error cuadrático medio entre una señal y una combinación lineal de rango reducido de funciones base ortonormales (Karhunen 1947; Loeve 1945). La base ortonormal óptima de rango P para un conjunto de señales está formada por los P autovectores de su matriz de covarianzas asociados con los P autovalores mayores.

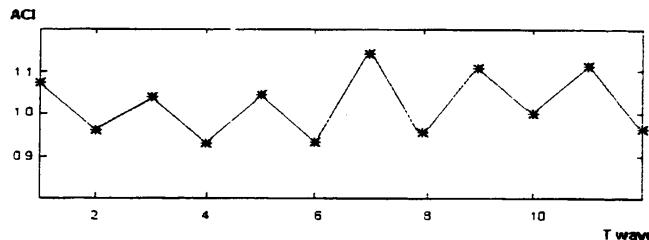


Figura 2.3: Oscilaciones en la serie de correlaciones cruzadas en presencia de AOT. Reproducido de (Burattini 1998).

su utilización es la conocida capacidad de la transformada de KL para lograr la máxima compactación de la energía en unos pocos coeficientes (Therrien 1992). En la primera de las propuestas (Laguna *et al.* 1996), cada complejo ST-T queda representado por los primeros cuatro coeficientes de su transformada de KL. A continuación, cada serie latido a latido de coeficientes de KL se analiza espectralmente utilizando un periodograma. Por tanto, se trata de un método espectral aplicado sobre la transformada de KL truncada de los complejos ST-T (ME-KL). Este método fue probado en registros ambulatorios de pacientes isquémicos (Laguna *et al.* 1996). La transformada de KL también fue utilizada en uno de los trabajos preliminares de esta tesis (Martínez *et al.* 2000a), si bien se propone analizar las series de coeficientes resultantes por medio de la demodulación compleja (MDC-KL).

2.2.6. Método del filtrado de Capon (MFC).

Este método fue propuesto también en (Martínez *et al.* 2000a) como una variante del MDC. En el MDC se emplea un filtro paso-bajo diseñado *a priori* para separar la componente alterna demodulada de otras componentes no deseadas. En el MFC propusimos sustituir este filtro invariante por el filtro de Capon (Stoica y Moses 1997). Se trata del filtro FIR que, preservando la componente alterna, minimiza la potencia de señal a su salida. El filtro de Capon es dependiente de los datos y se obtiene a partir de la función de autocorrelación de los mismos.

2.2.7. Método de los mapas de Poincaré (MMP).

Los mapas de Poincaré son una herramienta para el análisis de sistemas dinámicos que muestran periodicidades. En 2002, Strumillo y Ruta propusieron un método de análisis de AOT basado en esta técnica (Strumillo y Ruta 2002). Para cada muestra del complejo ST-T, se obtiene un mapa de Poincaré representando pares consecutivos de diferencias latido a latido en el espacio de fases. La distribución de puntos del mapa de Poincaré de un ECG normal viene dada por una agrupación como la mostrada en la Figura 2.4(a),

mientras que la presencia de AOT se identifica cuando el mapa de Poincaré muestra dos agrupaciones o *clusters* de puntos (Figura 2.4(b)). Su magnitud se mide como la distancia entre los centroides de ambos grupos.

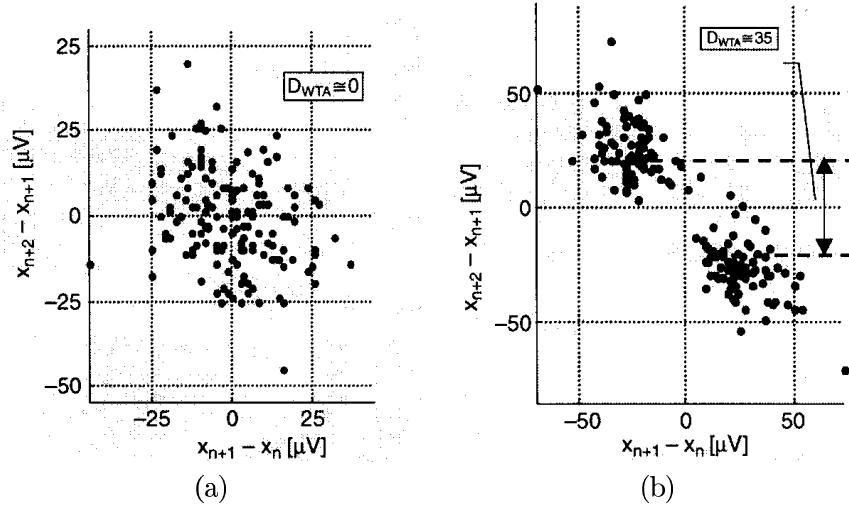


Figura 2.4: Mapas de Poincaré en series latido a latido procedentes de una señal ECG (a) sin actividad alternante (una sola agrupación de puntos) y (b) con presencia de AOT (dos grupos de puntos). Reproducido de (Strumillo y Ruta 2002).

2.2.8. Método de la transformada de periodicidad (MTP).

Srikanth *et al.* (Srikanth *et al.* 2002a) propusieron en 2002 un nuevo método de detección de AOT basado en la Transformada de Periodicidad (Sethares y Staley 1999). La técnica reduce el ECG a series latido a latido de algunas características de la onda T como la amplitud, área o varianza. En cada serie, se estima la magnitud de la alternancia como la energía de la proyección ortogonal de la serie en el subespacio de secuencias con periodicidad de dos latidos.

2.2.9. Método de los tests estadísticos (MTE).

Los mismos autores presentaron, también en 2002, un planteamiento alternativo basado en tres tests estadísticos (Srikanth *et al.* 2002b): los tests de la *t* de Student para muestras independientes y pareadas, aplicados para estudiar si hay diferencias entre las características de la onda T entre latidos pares e impares, así como el test de periodicidad de Rayleigh.

2.2.10. Método de la media móvil modificada (MMM).

En 2002, el método de la media móvil modificada fue propuesto por los autores del MDC como una estrategia de análisis más robusta (Nearing y Verrier 2002). El análisis, que se realiza en el dominio temporal, consiste en estimar de forma continua el latido promedio de los latidos pares y de los latidos impares. Para ello se emplea un filtro de media móvil recursivo, donde se aplica una no-linealidad que limita el valor absoluto máximo de la innovación en cada nuevo latido. Desde su publicación, se ha utilizado para evaluar el riesgo en pacientes post-infarto de miocardio (Verrier *et al.* 2003) y en pacientes con desfibriladores/cardioversores automáticos implantables (Kop *et al.* 2004). Este método está implementado en el equipo comercial CASE®-8000 (GE Medical Systems, Milwaukee, WI).

2.2.11. Otras propuestas.

Además de los métodos que se acaban de describir, Nearing y Verrier mencionan en (Verrier *et al.* 1996b; Nearing *et al.* 1996) la estimación por substracción, la estimación de mínimos cuadrados y la estimación espectral paramétrica (AR y ARMA) como posibles técnicas de análisis de AOT. Sin embargo, su implementación no ha sido documentada.

2.2.12. Estudios previos de revisión y comparación de métodos.

En la literatura clínica y técnica sobre AOT se encuentran pocos trabajos en los que se comparan, siquiera de forma teórica, los distintos métodos propuestos. A continuación se resumen los resultados y discusiones de algunos de estos trabajos en los que se realiza una revisión y/o comparación de las metodologías de análisis de AOT.

En (Verrier *et al.* 1996b) los autores dividen las técnicas de análisis de AOT en dos grandes grupos: las basadas en la transformada discreta de Fourier (TDF), donde se incluye el ME y las técnicas denominadas dinámicas, que son *“adecuadas para medidas transitorias en registros ambulatorios”*. Entre éstas se incluye básicamente el método MDC, aunque también se citan otras posibilidades como la estimación por substracción, la estimación mínimos cuadrados, o las estimaciones AR y ARMA. Verrier *et al.* destacan la tolerancia de los métodos dinámicos ante la no estacionariedad de los datos, en contraste con el método espectral, que presupone estacionariedad en fragmentos de 128 latidos consecutivos.

En (Locati *et al.* 1998) se describen brevemente los métodos ME, MDC y MC, y se realiza una revisión de resultados clínicos publicados utilizando cada uno de esos métodos. Los autores de este trabajo de revisión subrayan la capacidad del MC para evaluar episodios transitorios, incluso con un número pequeño de latidos.

Rosenbaum *et al.* dieron a conocer (Rosenbaum *et al.* 1995) un estudio en el que se compararon los métodos MDC y ME aplicados sobre señales grabadas durante pruebas electrofisiológicas (*pacing*). Se estudió la capacidad de discriminar pacientes con alto riesgo

de MSC. Los resultados más relevantes se resumen en: a) Hay una alta correlación entre la magnitud de las AOT medidas con ambos métodos para amplitudes de alternancia mayores de $5 \mu\text{V}$, b) Aplicando un umbral de $2 \mu\text{V}$ para considerar la presencia de AOT, el ME mostró una especificidad más alta que el método MDC y c) Se mostró mediante un estudio de simulación que la pobre especificidad del MDC era debida a la mala discriminación entre las alternancias de baja amplitud y el ruido. En definitiva, las conclusiones apuntan hacia las ventajas del ME para distinguir las alternancias del ruido.

Burattini *et al.* compararon el MC y el ME en señales simuladas (Burattini *et al.* 1997). Para ello generaron secuencias de 128 ondas T consecutivas cuya amplitud variaba latido a latido para simular alternancias. Se introdujeron también desalineamientos en las ondas T y la modulación de su amplitud por una señal sinusoidal para simular el efecto de la respiración. Las conclusiones del estudio pueden resumirse en: a) El MC puede detectar alternancias de tan sólo 7 latidos, mientras que la capacidad de detección del ME se degrada cuando los episodios duran menos de 128 latidos; b) el MC es más robusto ante desalineamientos que el ME y c) el ME se comporta mejor que el MC ante la presencia de otras componentes en la serie, como por ejemplo la modulación de amplitud introducida por efecto de la respiración.

Finalmente, en uno de los trabajos preliminares de esta tesis (Martínez *et al.* 2000a) comparamos las prestaciones de los métodos MDC, MC y algunas variantes del primero (los métodos MC y MDC-KL) mediante un estudio de simulación. Se utilizaron señales simuladas a partir de un latido real repetido al cual se añadieron distintos tipos de ruido (fisiológico registrado y simulado) y alternancias simuladas sumando y restando alternativamente al complejo ST-T una forma de onda (ventana de Hanning, rectangular, bifásica...) con una amplitud modulada por la forma del episodio a simular. Se aplicó el mismo preprocesado a todos los métodos, evaluándose la sensibilidad y el valor predictivo positivo en la detección y el error en la estimación de la amplitud. De los resultados se concluyó que el comportamiento del método MDC supera claramente al del MC en todos los casos estudiados. Por otro lado, las variantes estudiadas del MDC (MDC-KL y MFC) no introducían mejoras significativas a pesar del importante aumento en la complejidad. Asimismo, se comprobó cualitativamente la capacidad de los distintos métodos (incluyendo en este caso al ME) para reconstruir la forma de onda alternante.

Sin embargo, en todos los trabajos citados en esta sección sigue quedando en el aire la cuestión de si las diferencias observadas responden a cuestiones metodológicas o a la elección de los parámetros de diseño en cada implementación.

2.3. Esquema general.

A la vista de los métodos propuestos en la literatura podemos definir un esquema general para las metodologías de análisis de AOT. Los sistemas de análisis de alternancias de onda T constan de tres bloques o etapas: preprocesado, reducción de datos y análisis de alternancias propiamente dicho. Esta última etapa puede descomponerse a su vez en

las subetapas de detección y de estimación. Esta estructura puede verse reflejada en el diagrama de bloques de la Figura 2.5. La entrada al sistema es una señal ECG digitalizada, mientras que las posibles salidas son la decisión sobre la presencia (hipótesis \mathcal{H}_1) o ausencia (hipótesis \mathcal{H}_0) de AOT, la amplitud de AOT \hat{V}_l y la forma de onda alternante $\hat{a}_l[n]$ calculadas en un entorno del latido l -ésimo. A continuación se describe la función de cada etapa.

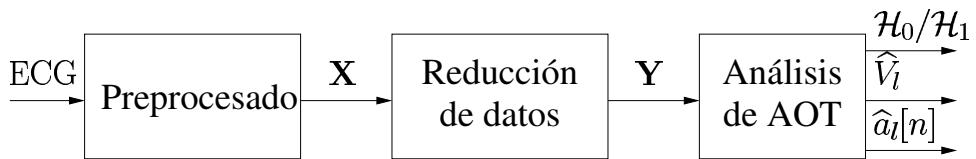


Figura 2.5: Esquema general de un sistema de análisis de AOT. $\mathbf{X} = \{x_i[n]\}$: matriz de segmentos del ECG preprocessados, $\mathbf{Y} = \{y_i[p]\}$: matriz de coeficientes de dimensionalidad reducida. $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_1$: decisión sobre la ausencia/presencia de alternancias. \hat{V}_l : Amplitud de AOT. $\hat{a}_l[n]$: forma de onda alternante.

2.3.1. Preprocesado.

Esta etapa tiene como objetivo acondicionar la señal ECG adquirida para facilitar el posterior análisis de AOT. Por ser la alternancia un fenómeno asociado a la repolarización cardiaca (complejo ST-T) y que se produce *latido a latido*, es preciso definir un proceso de segmentación y alineamiento de los mismos². Por tanto, la detección de QRS y la segmentación de complejos ST-T son tareas necesarias. La señal también puede ser filtrada en esta etapa para mejorar su calidad. La salida de la etapa de preprocessado es una matriz $N \times M$ de segmentos del ECG filtrados $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{M-1}]$, donde $\mathbf{x}_i = [x_i[0] \dots x_i[N-1]]^T$ es el intervalo de repolarización del latido i -ésimo (complejo ST-T) después del preprocessado, N es el número de muestras seleccionadas y M es el número total de latidos. Las filas de \mathbf{X} son series latido a latido con la misma latencia dentro del intervalo de repolarización. El número de muestras N de cada segmento $x_i[n]$ depende de la frecuencia de muestreo, el ritmo cardiaco y el criterio utilizado para segmentar.

2.3.2. Reducción de datos.

El propósito de esta etapa es reducir el volumen de datos a procesar manteniendo la información de AOT presente en \mathbf{X} . Esto puede hacerse eliminando las redundancias presentes en la señal. Nótese que la señal de interés es la posible forma de onda alternante en \mathbf{x}_i , y que ésta está concentrada en las bajas frecuencias (según (Nearing *et al.* 1996), entre los 0.3 Hz y los 15 Hz). En esta etapa, se aplica una transformación de reducción de

²Este proceso es también común en otras aplicaciones biomédicas como el análisis de potenciales tardíos en el ECG.

datos $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ a cada segmento \mathbf{x}_i , donde $\mathbf{y}_i = [y_i[0], \dots, y_i[P-1]]^T$ es el vector $P \times 1$ formado por los coeficientes transformados ($P \leq N$) del segmento i -ésimo. La salida de esta etapa es la matriz $P \times M$ de coeficientes $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{M-1}]$. En algunos de los métodos, no se lleva a cabo ninguna reducción de datos ($\mathbf{Y} = \mathbf{X}$).

2.3.3. Análisis de AOT.

En la última etapa se analiza la matriz de coeficientes transformados \mathbf{Y} para detectar la presencia de alternancias y estimar su amplitud. Por tanto, podemos distinguir las subetapas de detección y estimación (Figura. 2.6).

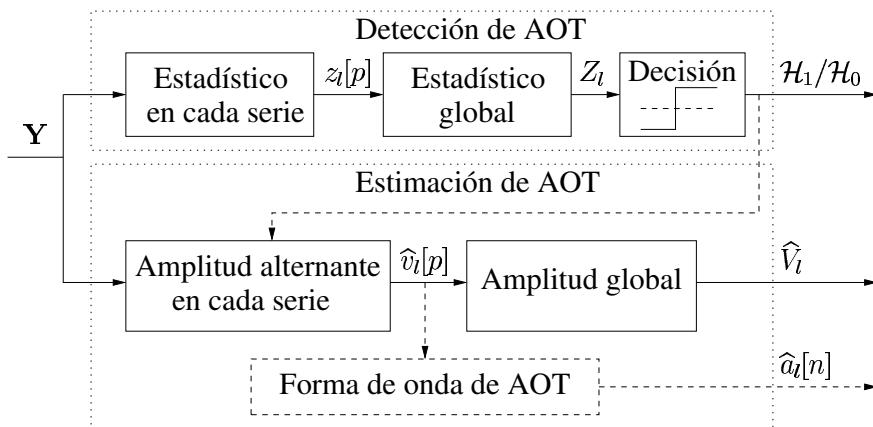


Figura 2.6: Diagrama de bloques de la etapa de análisis de AOT (la notación se explica en el texto).

Debido a la naturaleza transitoria y no estacionaria de las AOT, los procesos de detección y estimación han de involucrar un número limitado de latidos adyacentes. Así, podemos hablar de una ventana de análisis que debe ser desplazada para cubrir los M latidos de la señal completa. Denotaremos por L la duración (en latidos) de la ventana de análisis y por D el desplazamiento (en latidos) de la ventana entre dos pasos consecutivos. Eso significa que se calcula un valor del estadístico de detección y de la estimación por cada D latidos. El análisis puede realizarse por bloques sin solapamiento ($D = L$) o con solapamiento ($D \leq L$), cuyo caso extremo es tener una ventana de análisis deslizante latido a latido ($D = 1$).

2.3.3.1. Detección de AOT.

Para decidir entre las hipótesis \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_0 se calcula un estadístico de detección global Z_l situando la ventana de análisis en el latido l -ésimo. El valor de Z_l cuantifica la importancia

de la componente alterna en el entorno del latido l -ésimo. A continuación se aplica una regla de decisión, que consiste en comparar Z_l con un umbral $\gamma_Z(l)$, fijo o variable.

$$Z_l \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma_Z(l). \quad (2.1)$$

Cuando $P > 1$, el procedimiento se realiza habitualmente en dos fases: en primer lugar, se calculan P estadísticos individuales $z_l[p]$, $p = 0, \dots, P - 1$, donde cada uno cuantifica la alternancia en una fila de la matriz \mathbf{Y} . A continuación se calcula el estadístico global Z_l a partir de los estadísticos individuales $z_l[p]$ (como el valor RMS, promedio, valor máximo...).

2.3.3.2. Estimación de AOT.

En primer lugar se estima la amplitud alterna en cada serie latido a latido de coeficientes transformados. Denotaremos por $\hat{v}_l[p]$ la amplitud de alternancia estimada en la serie latido a latido del coeficiente p -ésimo, con la ventana de análisis situada en el latido l -ésimo. La magnitud global de la alternancia \hat{V}_l (en unidades de voltaje) se calcula como una función de los valores $\{\hat{v}_l[p]\}$. Algunos métodos de análisis de AOT permiten también la estimación de la forma de onda alterna ($\hat{\mathbf{a}}_l = [\hat{a}_l[0], \dots, \hat{a}_l[N - 1]]^T$) que, además de indicar la magnitud de la alternancia, describe también cómo se distribuye ésta durante la repolarización ventricular.

Debe notarse en este punto que algunos autores definen la amplitud de alternancias como la diferencia entre un latido alterna y el centro de la fluctuación (p.ej. (Rosenbaum *et al.* 1994, 1996)), mientras que otros la definen como la diferencia entre dos latidos consecutivos, que es exactamente el doble (p.ej. (Nearing *et al.* 1991; Burattini *et al.* 1999)). En esta tesis emplearemos esta última definición, que proporciona una medida más conforme a la realidad del fenómeno, ya que el latido promedio entre los latidos alterna carece de significado fisiológico.

2.4. Revisión metodológica.

En esta sección se revisan, comparan y discuten las distintas metodologías publicadas en la literatura para el análisis de AOT, a la luz del marco de referencia unificado descrito en la sección anterior (Figura 2.5). Se omiten en esta sección los detalles de implementación no relevantes para la discusión y la comparación de los métodos. El lector puede encontrar más información sobre ellos en las Tablas 2.1-2.3, así como en la bibliografía citada en este capítulo. La terminología y la notación empleadas por los autores de cada método se han adaptado a las utilizadas en la Sección 2.3 con el fin de uniformizarlas y facilitar la comparación de los métodos. En los casos en que la identificación con la notación original no es inmediata, se explica brevemente la relación entre ambas.

2.4.1. Preprocesado.

En la Figura 2.7 se muestra un esquema general de la etapa de preprocesado. La Tabla 2.1 resume sinópticamente los detalles más relevantes de las diferentes implementaciones de la etapa de procesado en la literatura. Algunos autores no proporcionan detalles de esta etapa (Strumillo y Ruta 2002; Srikanth *et al.* 2002a,b; Nearing y Verrier 2002), probablemente porque las tareas llevadas a cabo en la misma no son específicas del análisis de AOT. De hecho, el diseño de esta etapa puede estar determinado por los equipos disponibles y las circunstancias de adquisición (ambulatoria, prueba de esfuerzo, durante estimulación...) y por tanto, no puede considerarse como parte de ningún método en particular. Las especificaciones que debe cumplir esta etapa de preprocesado también dependen, en parte de la metodología posterior. Así, los requerimientos de esta etapa (p. ej. eliminación de ruido, detección de latidos anómalos...) pueden incrementarse o relajarse según la robustez de las etapas posteriores.

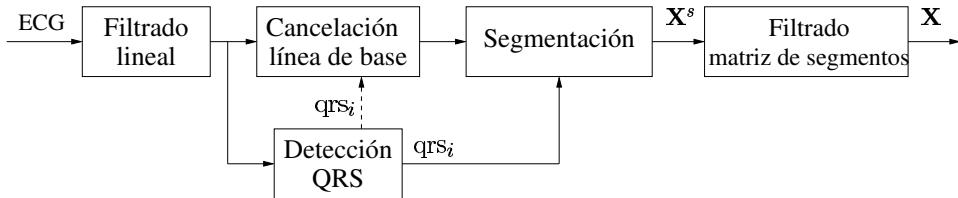


Figura 2.7: Esquema general del preprocesado. $\mathbf{X}^s = \{x_i^s[n]\}$: matriz de repolarización. $\mathbf{X} = \{x_i[n]\}$: matriz de repolarización filtrada. qrs_i : punto fiducial del complejo QRS del latido i -ésimo.

Señal ECG digitalizada. Los potenciales eléctricos cardiacos medidos en la superficie del cuerpo se convierten en señales digitales. Las características del equipo de adquisición (frecuencia de muestreo, resolución en amplitud, respuesta frecuencial...) fijan un límite en la calidad de la señal, influyendo en las prestaciones del análisis.

Las frecuencias de muestreo F_s empleadas en la literatura oscilan entre los 250 y los 1000 Hz (Tabla 2.1). Se sabe que cualquier frecuencia de muestreo en ese rango preserva las componentes relevantes del ECG (Thakor *et al.* 1984). En (Burattini *et al.* 1998a), se comparan las estimaciones de amplitud de AOT (medidas con el MC) en señales muestreadas con distintas tasas de muestreo. Los autores concluyeron que la estimación es esencialmente idéntica para frecuencias en el rango 250-1000 Hz, observándose sólo ligeras diferencias al comparar con señales muestreadas a 100 Hz.

La resolución en amplitud limita la precisión de las medidas de alternancia. Desde el punto de vista metodológico, la falta de resolución puede caracterizarse como un ruido de cuantificación aditivo. Los actuales conversores analógico-digital de 12 y 16 bits permiten

Método	F_s (Hz)	Filtrado lineal	Eliminación línea de base	Detección de QRS	Eliminación de latidos
ME-E	360	0.125-68 Hz	N.E.	N.E.	N.E.
ME (1)	1000	DC-360 Hz	interpolación	filtro adaptado	eliminación de anómalos
ME (2)	500	0.01-100 Hz	N.E.	N.E.	sustitución de ectópicos
MDC	500	DC-50Hz	filtro FIR	N.E.	eliminación de prematuros
MC	1000	DC-60 Hz	splines cúbicas	derivada	eliminación RR inestable
ME-KL	250	No	splines cúbicas	Aristotle	no
MDC-KL	250	No	splines cúbicas	Aristotle	no
MFC	250	No	splines cúbicas	Aristotle	no
MMP	500	notch 50 Hz	sí (N.E.)	transf. wavelet	sustitución de anómalos
MTP	250		N.E.		
MTE	250		N.E.		
MMM	500	DC-50 Hz	splines cúbicas	N.E.	eliminación de anómalos

Método	Ventana de segmentación	Alineamiento	Filtrado de matriz de segmentos
ME-E	ST-T (variable)	n.e.	No
ME (1)	QRS (150 ms) y ST-T (225 ms)	QRS	No
ME (2)	QRS, ST y T (fija)	QRS	No
MDC	ST-T (230 ms)	QRS	paso-alto (0.2-0.5 cpl) por filas
MC	ST-T (ajustada al RR)	ST-T	banda eliminada (0.1-0.35 cpl) por filas
ME-KL	ST-T (N.E.)	QRS	No
MDC-KL	ST-T (300 ms)	QRS	No
MFC	ST-T (300 ms)	QRS	No
MMP	ST-T (ajustada al RR)	QRS	No
MTP	ST-T (N.E.)	N.E.	No
MTE	ST-T (N.E.)	N.E.	No
MMM	ST-T (N.E.)	N.E.	No

N.E.: no especificado en los trabajos que describen el método. Los datos de las filas ME (1) y ME (2) se refieren a las implementaciones descritas en (Smith *et al.* 1988) y (Rosenbaum *et al.* 1994) respectivamente.

Tabla 2.1: Tabla sinóptica de las implementaciones de la etapa de preprocesado.

resoluciones desde $0.6 \mu V$ a $2.4 \mu V$ (para un rango dinámico típico de ± 5 mV) muy por debajo de otras fuentes de ruido en las condiciones de adquisición más comunes.

Nearing *et al.* cuantificaron las respuestas frecuenciales de diferentes equipos de registro de ECG ambulatorios (Nearing *et al.* 1996), concluyendo que los equipos Holter analógicos de amplitud modulada (AM) introducen una distorsión dependiente del ritmo cardíaco en la medida de la alternancia. Esta distorsión se debe fundamentalmente al rizado en su respuesta a las bajas frecuencias. Por otra parte, los equipos de registro analógicos de frecuencia modulada (FM) o los digitales muestran una distorsión mínima para ritmos

cardiacos entre los 60 y los 200 latidos por minuto. Los autores de este estudio recomiendan como mínimo una respuesta paso-banda entre los 0.05 Hz y los 50 Hz para monitorización ambulatoria de AOT.

El análisis fiable de AOT en condiciones como la prueba de esfuerzo requiere la utilización de técnicas de adquisición más sensibles (como el uso de electrodos especiales multicontacto o la adquisición de medidas independientes para compensar la respiración y los movimientos corporales), tal como se discute en (Rosenbaum *et al.* 1996).

Filtrado lineal. Se emplean filtros lineales paso-bajo para eliminar el ruido y otras componentes fuera de la banda de interés. Las frecuencias de corte utilizadas en las referencias oscilan entre los 50 y los 360 Hz (Tabla 2.1). Desde el punto de vista de preservación de la información de interés podrían haberse empleado filtros más restrictivos ya que el espectro de AOT está concentrado en la banda de frecuencias 0.3-15 Hz (Nearing *et al.* 1996). Sin embargo, los complejos QRS perderían sus componentes de alta frecuencia, lo que podría degradar la detección de QRS y el alineamiento de los latidos. Además, el QRS ensanchado por efecto del filtro podría invadir el complejo ST-T adyacente. Algunas referencias (Nearing y Verrier 1993; Strumillo y Ruta 2002) emplean también filtros de banda eliminada o *notch* para cancelar las interferencias de la red eléctrica (50/60 Hz).

Cancelación de variaciones de línea de base. El contenido frecuencial de las fluctuaciones de la línea de base del ECG puede solaparse con el de las AOT (Thakor *et al.* 1984). Estas fluctuaciones se manifiestan como ruido de gran amplitud en las series latido a latido, y pueden degradar las prestaciones del análisis, p.ej. enmascarando AOT de baja amplitud o generando falsas detecciones. Es conveniente, por tanto, la cancelación de estas fluctuaciones en la etapa de preprocesado. En la literatura sobre AOT se han utilizado métodos basados tanto en filtrado lineal (Nearing y Verrier 1993) como en interpolación (Martínez *et al.* 2000a; Burattini *et al.* 1999; Laguna *et al.* 1996).

Si se utilizan filtros lineales para cancelar la línea de base, ha de tenerse un especial cuidado para evitar que el filtro paso alto atenúe la componente alternante cuando el ritmo cardíaco sea lento, ya que la frecuencia fundamental de la alternancia se encuentra a la mitad de la frecuencia cardíaca.

Detección de QRS y segmentación. La detección de QRS es un tema estudiado extensamente en el procesado de señal ECG (Köhler *et al.* 2002). En las referencias sobre AOT se utilizan para esta tarea diversas técnicas bien conocidas (ver Tabla 2.1). Para el análisis de AOT es fundamental, además de unas buenas prestaciones de detección, que los detectores de QRS sean estables en la determinación del punto fiducial en los diferentes latidos. De lo contrario, la inestabilidad o *jitter* de detección se traducirá en un desalineamiento de los complejos ST-T en la matriz **X**. Narayan y sus colaboradores estudiaron el efecto del desalineamiento producido por distintas estrategias de determinación del punto fiducial (Narayan y Smith 1999b). Los resultados indican que las prestaciones del ME son mejores cuando se alinea maximizando la correlación cruzada del complejo

QRS con un complejo QRS patrón que utilizando otras técnicas basadas en cruces de un umbral o localización de picos del QRS.

En (Burattini 1998) se realiza un alineamiento posterior de los complejos ST-T, maximizando su correlación cruzada con un complejo ST-T patrón. Si bien es cierto que esta estrategia reduce el efecto del *jitter* de detección, también atenúa las AOT ya que tanto los complejos pares como los impares son alineados respecto a un mismo patrón. Este extremo fue verificado por Narayan *et al.* (Narayan y Smith 1999b) para el ME.

En la literatura encontramos criterios diversos para definir los segmentos de interés dentro del ciclo cardiaco. En la mayoría de los trabajos se selecciona el complejo ST-T con una ventana relativa a la posición del QRS, con localización y duración fijas (Smith *et al.* 1988; Rosenbaum *et al.* 1994; Nearing *et al.* 1991; Nearing y Verrier 1993) o bien determinadas en función del intervalo RR (Burattini 1998; Burattini *et al.* 1999; Strumillo y Ruta 2002). En algunas referencias se analizan el segmento ST y la onda T separadamente (Rosenbaum *et al.* 1994) o se llega a incluir en el complejo QRS (Smith *et al.* 1988; Rosenbaum *et al.* 1994). En cualquier caso, se acaba mapeando el ECG original en una matriz de segmentos alineados $N \times M \mathbf{X}^s = [\mathbf{x}_0^s \dots \mathbf{x}_{M-1}^s]$, donde $\mathbf{x}_i^s = [x_i^s[0] \dots x_i^s[N-1]]^T$ es el segmento de interés del latido i -ésimo.

En la mayoría de los métodos se rechazan los latidos o fragmentos de señal que no son adecuados para el posterior análisis. Los criterios de rechazo incluyen a los latidos prematuros y ectópicos, así como tramos con RR inestable o con mala calidad de la señal. Este procedimiento es crucial cuando las técnicas de análisis de AOT son muy sensibles a la presencia de ruido impulsivo o valores extremos (*vid. infra* Sección 2.4.5). Por otro lado, los métodos más robustos ante valores extremos pueden ser más tolerantes en esta etapa. Los latidos rechazados pueden ser sencillamente eliminados, o bien sustituidos por un latido patrón. En (Rosenbaum *et al.* 1996; Narayan y Smith 1999b) se discute el efecto que tiene la eliminación y sustitución de latidos en las prestaciones del ME.

Filtrado de la matriz de segmentos alineados. La matriz de segmentos alineados \mathbf{X}^s puede ser filtrada por columnas o por filas. El filtrado por columnas combina muestras dentro del mismo complejo ST-T. Filtrando por columnas la matriz de segmentos \mathbf{X}^s en lugar del ECG original se pueden evitar problemas debidos a la distorsión y ensanchamiento del complejo QRS. Aplicando un filtro a las filas de \mathbf{X}^s se pueden combinar muestras de distintos latidos con la misma latencia dentro del ciclo cardiaco. De este modo, se puede filtrar en la dimensión del índice de los latidos, lo que permite discriminar componentes de las series latido a latido en el dominio de la “frecuencia de latidos” o *beatquency* (Lisenby y Richardson 1977) (medida en ciclos por latido). Este tipo de filtros son útiles para eliminar o atenuar componentes periódicas no alternantes en las filas de \mathbf{X}^s (componente continua, respiración, variabilidad fisiológica...). En el MDC se aplica un filtro paso-alto de eliminación de tendencias (*detrending*) a las filas de \mathbf{X}^s para cancelar la componente continua y las fluctuaciones de baja frecuencia. De forma similar, el MC aplica a las filas de \mathbf{X}^s un filtro lineal de banda eliminada (0,1 – 0,35 Hz) para cancelar la modulación de amplitud debida a la respiración (Burattini *et al.* 1999).

2.4.2. Reducción de datos.

Es importante que la alternancia en los complejos ST-T esté bien representada en los coeficientes transformados $y_i[p]$ ya que estos coeficientes son los únicos datos de que se dispone en la etapa de análisis. Además, si la metodología de análisis contempla la caracterización de la distribución temporal de las AOT (la forma de onda alternante), los coeficientes transformados $y_i[p]$ deben proporcionar una representación adecuada de la morfología de la repolarización (p. ej. por medio de diezmado, expansiones lineales, etc.) que permita la reconstrucción de la forma de onda alternante.

Si la transformación de reducción de datos $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ es lineal, puede escribirse como

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{T}^T \mathbf{x}_i, \quad (2.2)$$

donde \mathbf{T} es una matriz $N \times P$ de rango P . El complejo ST-T representado por los coeficientes \mathbf{y}_i puede reconstruirse como

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{y}_i = \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{x}_i, \quad (2.3)$$

es decir, la proyección de la forma de onda \mathbf{x}_i en el subespacio de columnas de \mathbf{T} . Puede demostrarse que (2.3) equivale a un filtro lineal variante en el tiempo periódico (FLVTP) definido por la matriz de transformación \mathbf{T} (Olmos *et al.* 1999b). Por tanto, las estrategias lineales de reducción de datos pueden interpretarse como un filtrado lineal de los datos, cuyo efecto viene a sumarse a los filtros lineales de la etapa de preprocesado.

Encontramos también en la literatura otros planteamientos del análisis en los que no se pretende estimar la morfología de la onda T, y realizan esta etapa seleccionando una característica representativa de la repolarización, que se utiliza posteriormente para la detección (y estimación en algunos casos) de AOT.

En la Tabla 2.2 se resumen las estrategias de reducción de datos y las dimensiones de entrada y salida de esta etapa encontradas en cada una de las referencias. Las estrategias pueden dividirse en dos grupos, según si los coeficientes $y_i[p]$ reflejan características de la repolarización temporalmente localizadas, o bien características globales del intervalo.

2.4.2.1. Características temporalmente localizadas.

Incluimos en esta categoría las transformaciones cuyos coeficientes $y_i[p]$ acarrean información localizada temporalmente dentro del intervalo de repolarización cardiaca.

Sin reducción de datos. En algunas referencias (Rosenbaum *et al.* 1994; Narayan y Smith 1999b; Martínez *et al.* 2000b; Nearing y Verrier 2002) la etapa de análisis se aplica directamente a las filas de la señal ECG preprocesada \mathbf{X} (es decir, $P=N$ y $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i$). Teniendo en cuenta que las frecuencias de muestreo en esas referencias son de 250 Hz (Martínez *et al.* 2000a), 500 Hz (Rosenbaum *et al.* 1994; Nearing y Verrier 2002) y 1000 Hz (Narayan y Smith 1999b), podemos decir que existirá un alto grado de redundancia entre las filas adyacentes de la matriz \mathbf{X} .

Método	Técnica de reducción	<i>N</i>	<i>P</i>
ME-E	energía de la onda T	variable	1
ME (1)	diezmado	225 (ST-T)	75
ME (2)	ninguna (identidad)	75 (onda T)	75
MDC	áreas de subsegmentos	115	23
MC	correlación con patrón	variable	1
ME-KL	transformada de KL	N.E.	4
MDC-KL	transformada de KL	75	4
MFC	ninguna (identidad)	75	75
MMP	diezmado	variable	7
MTT	amplitud en el pico de onda T	N.E.	1
MTE	área de onda T, varianza por subsegmentos	N.E.	1
MMM	diezmado	N.E.	N.E.

N.E.: no especificado en los trabajos que describen el método. Los datos de las filas ME (1) y ME (2) se refieren a las implementaciones descritas en (Smith *et al.* 1988) y (Rosenbaum *et al.* 1994) respectivamente.

Tabla 2.2: Tabla sinóptica de las implementaciones de la etapa de reducción de datos.

Diezmado. Un procedimiento muy simple para reducir la dimensionalidad de los datos es el diezmado temporal, que ha sido utilizado en el ME (Smith *et al.* 1988) y en el MMP (Strumillo y Ruta 2002). Diezmado los segmentos $x_i[n]$ por un factor Q se reduce la frecuencia de muestreo a F_s/Q . Por tanto, los segmentos deben estar limitados en banda hasta $F_s/(2Q)$ para evitar el *aliasing*.

Si la frecuencia de corte del filtro paso-bajo de la etapa de preprocesado cumple el criterio de Nyquist, esta técnica de reducción de datos consiste simplemente en quedarse con una de cada Q muestras del segmento: $y_i[p] = x_i[pQ]$, $p = 0, \dots, P - 1$, siendo $P = \lfloor N/Q \rfloor$ el número de muestras del segmento diezmado. De lo contrario, hay que utilizar otro filtro paso-bajo *antialiasing* antes del diezmado. En ese caso, podemos decir que la forma de onda \hat{x}_i representada por y_i , es una versión filtrada paso-bajo de x_i , con frecuencia de corte $F_s/(2Q)$. Por tanto, esta etapa filtra paso-bajo la onda T (y por tanto, la posible forma de onda alterna), además de reducir el volumen de datos a procesar. Para no distorsionar la forma de onda alterna, la frecuencia de corte del filtro ha de estar por encima de 15 Hz (según la caracterización de la alterna realizada en (Nearing *et al.* 1996)), lo que impone un límite inferior en la dimensión final P . En la literatura, podemos encontrar valores de P entre 7 (Strumillo y Ruta 2002) y 75 (Smith *et al.* 1988). Si consideramos una duración de 225 ms para el complejo ST-T, las frecuencias de corte equivalentes son 16 Hz y 167 Hz respectivamente. En ambos casos, esta etapa realiza un filtro más restrictivo que la etapa de preprocesado (ver Tabla 2.1), sin llegar a distorsionar la señal deseada.

Áreas de subsegmentos. La estrategia utilizada por Nearing y Verrier (Nearing y Verrier 1993) para reducir la dimensionalidad de los datos en el MDC consiste en dividir

los segmentos de interés en subsegmentos de Q muestras, y calcular en cada subsegmento el área encerrada entre el ECG y la línea de base

$$y_i[p] = \sum_{n=pQ+1}^{(p+1)Q} x_i[n], \quad p = 0 \dots P - 1, \quad (2.4)$$

donde $P = \lfloor N/Q \rfloor$. Esta estrategia es equivalente, salvo un factor constante, a diezmar por Q tras haber aplicado un filtro de media móvil de Q muestras como filtro *antialiasing*. En (Nearing y Verrier 1993), se tiene una dimensión final de $P = 23$ segmentos ($Q = 5$ con $F_s = 500$ Hz), resultando en una frecuencia de Nyquist de 50 Hz.

Otras características localizadas. Srikanth propone en (Srikanth *et al.* 2002a,b) la utilización de otras características temporalmente localizadas, como la amplitud de la onda T, o la varianza en subsegmentos de la onda T. En estos casos se pierde la capacidad de representación de la morfología de la señal, y por tanto, la forma de onda alternante no puede ser estimada posteriormente.

2.4.2.2. Características globales.

Las técnicas incluidas en este grupo transforman las muestras del ECG en coeficientes que reflejan características de todo el intervalo de repolarización.

Correlación con un patrón. En el MC (Burattini *et al.* 1999), cada segmento \mathbf{x}_i se reduce a un único parámetro denominado índice de correlación de la alternancia (ACI)

$$y_i[0] = \text{ACI}(i) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x_i[n] x_{\text{med}}[n]}{\sum_{n=0}^{N-1} x_{\text{med}}^2[n]} = \frac{\mathbf{x}_{\text{med}}^T \cdot \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_{\text{med}}\|_2^2}, \quad (2.5)$$

que corresponde a la correlación cruzada normalizada con un complejo ST-T patrón \mathbf{x}_{med} , calculado como la mediana de 128 segmentos \mathbf{x}_i adyacentes.

Según la interpretación de (2.2) y (2.3) como un filtro lineal, podemos considerar que cada complejo ST-T preprocesado \mathbf{x}_i se proyecta en el subespacio de rango uno generado por el complejo patrón normalizado $\mathbf{t}_0 = \mathbf{x}_{\text{med}} / \|\mathbf{x}_{\text{med}}\|_2^2$. Esta estrategia plantea el problema de la posible desadaptación entre \mathbf{x}_{med} y la señal a detectar (la forma de onda alternante). Subyace la asunción de que la morfología de AOT es similar a la del complejo ST-T, lo que no tiene por qué ser cierto. Por tanto, una fracción de la energía alternante podrá proyectarse en el espacio nulo de la transformación, y por consiguiente se perderá. En un caso extremo, la AOT podría ser indetectable si la forma de onda alternante y el complejo ST-T mediano fueran ortogonales. Otro inconveniente de esta técnica reside en que no se puede recuperar la información de la morfología de la alternancia.

Transformada ortogonal truncada. En (Laguna *et al.* 1996) y (Martínez *et al.* 2000a), los vectores de coeficientes transformados \mathbf{y}_i están compuestos por los primeros $P=4$ coeficientes de la transformada de KL de cada segmento \mathbf{x}_i . En este caso, la matriz de transformación \mathbf{T} es la matriz $N \times P$ cuyas columnas \mathbf{t}_p , $p = 0, \dots, P - 1$ son los P primeros vectores de la base de la transformada de KL. Cada segmento \mathbf{x}_i queda descrito en este dominio en función de su correlación con los vectores de la base \mathbf{t}_p . Esta estrategia podría considerarse como una extensión de la correlación con un patrón, ya que los P primeros vectores base de la transformada de KL definen el subespacio que contiene las morfologías dominantes en el conjunto de datos de entrenamiento.

La base de la transformada de KL debe estimarse a partir de un conjunto de datos de entrenamiento o *training set*. En (Laguna *et al.* 1996) se emplea para ello un conjunto de datos *universal* (señales de diversas bases de datos de ECG, que abarcan un amplio rango de morfologías de la repolarización). Alternativamente, puede emplearse un conjunto de datos de entrenamiento específico para cada paciente. Así en (Martínez *et al.* 2000a), la base se obtiene de un conjunto de entrenamiento formado por latidos del propio registro a procesar.

La ecuación (2.3) permite interpretar la etapa de reducción de datos como la proyección del segmento ST-T en el subespacio de columnas de la matriz \mathbf{T} . En el caso de la transformada de KL, el FLVTP equivalente presenta una respuesta frecuencial que varía de muestra a muestra en función del contenido frecuencial local en las señales del conjunto de entrenamiento (Olmos *et al.* 1999b). Por tanto, esta estrategia mejora la relación señal a ruido de la señal, ya que el ECG está bien representado en el subespacio de columnas de \mathbf{T} , mientras que una fracción significativa del ruido no lo está (Olmos *et al.* 1999a).

Debe notarse que, al igual que sucede en el MC, las bases de KL están adaptadas a las morfologías predominantes del complejo ST-T y no a las morfologías de AOT. Sin embargo, al emplear una dimensión mayor ($P = 4$), aumenta el espacio de señales detectables se extiende con respecto al MC ($P = 1$). En (Martínez *et al.* 2000a) se muestra cómo se pueden reconstruir diferentes formas de onda alternantes con este método.

Otras características globales. Otras características globales de la repolarización utilizadas en la literatura son la energía de la onda T (Adam *et al.* 1984) y el área de la onda T (Srikanth *et al.* 2002a,b). En ambos casos se pierde la información de la morfología.

2.4.3. Análisis de AOT: subetapa de detección.

La primera tarea de la etapa de análisis es decidir sobre la presencia/ausencia de AOT ($\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_0$) en las series de coeficientes de dimensionalidad reducida $\{y_i[p]\}$. En la Tabla 2.3 se resumen las diferentes técnicas empleadas en la literatura para este propósito. En ella podemos encontrar propuestas basadas en diferentes planteamientos. Se mostrará más adelante que algunas de las técnicas, a pesar de partir de modelos y supuestos diferentes, desembocan en estadísticos de detección equivalentes.

Clasificaremos las diferentes técnicas utilizadas en la etapa de análisis según el modo de calcular los estadísticos de detección para cada serie $z_i[p]$ (o el estadístico global Z_i si $P = 1$). Distinguiremos tres categorías: 1) Estadísticos relativos a la transformada de Fourier localizada (TFL) o, de forma equivalente, basados en filtrado lineal. 2) Estadísticos basados en el conteo de cambios de signo, y 3) Estadísticos basados en filtrado no lineal.

Método	L (latidos)	D (latidos)	técnica	estimación $\hat{V}_i / \hat{a}_i[n]$
ME-E	1024	1024	periodograma	no / no
ME (1)	128	128	periodograma modificado	sí / sí**
ME (2)	128	128	periodograma	sí / sí**
MDC	~30 *	1	demodulación compleja	sí / sí
MC	7	1	conteo de cambios de signo	sí / no
ME-KL	5 min.	$L/2$	periodograma	no / no
MDC-KL	16	1	demodulación compleja	sí / sí
MFC	10	1	demodulación compleja con filtro de Capon	sí / sí
MMP	100	100	mapa de Poincaré	sí / sí
MTP	16	1	transformada de periodicidad	no / no
MTE	32	1	tests de hipótesis	no / no
MMM	~9 *	1	media móvil no lineal	sí / sí

* Para permitir la comparación, en los métodos basados en filtros IIR, se proporciona la longitud equivalente de la respuesta impulsional $L = \sum h_{\text{IIR}}^2[n] / \max(h_{\text{IIR}}^2[n])$.

** El ME permite estimar el valor absoluto de la forma de onda alternante.

N.E.: no especificado en los trabajos que describen el método. Los datos de las filas ME (1) y ME (2) se refieren a las implementaciones descritas en (Smith *et al.* 1988) y (Rosenbaum *et al.* 1994) respectivamente.

Tabla 2.3: Tabla sinóptica de las implementaciones de la etapa de análisis.

2.4.3.1. Métodos basados en la TFL (o basados en filtrado lineal).

En los métodos pertenecientes a esta clase, el estadístico de detección puede expresarse en función de la TFL de las filas de \mathbf{Y} (las series de coeficientes latido a latido) evaluada en $0,5 \text{ cpl}$

$$\begin{aligned}
 Y_w[p, l] &= \text{TFL}_{w, l}\{y_i[p]\}|_{f=0,5} \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_i[p] w[i - l] e^{-j2\pi f i} \Big|_{f=0,5} \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_i[p] w[i - l] (-1)^i,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde $w[k]$ es una ventana de análisis de L latidos. De acuerdo con la interpretación de la TFL como un banco de filtros (Stoica y Moses 1997), $Y_w[p, l]$ puede expresarse como

$$Y_w[p, l] = (-1)^l \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_i[p] h_{\text{hpf}}[l - i] = (-1)^l (y_l[p] * h_{\text{hpf}}[l]) \quad (2.7)$$

donde $h_{\text{hpf}}[k] = w[-k](-1)^k$ es la respuesta impulsional de un filtro lineal paso-alto.

Los métodos más ampliamente utilizados pertenecen a esta categoría: el ME, basado en el espectrograma, y el MDC, que lleva a cabo la demodulación compleja de la componente alterna. Se mostrará que también otras propuestas más recientes proporcionan estadísticos basados en (2.6), (2.7), aunque están basados en técnicas y planteamientos originalmente lejanos al análisis espectral o al filtrado lineal (p. ej. la distancia en los mapas de Poincaré o los tests de la t de Student).

Espectrograma (ME, ME-E, ME-KL). Las diferentes variantes del método espectral calculan el periodograma localizado o espectrograma de las series latido a latido de muestras (ME (Smith *et al.* 1988; Rosenbaum *et al.* 1994)), de energía de la onda T (ME-E (Adam *et al.* 1984)) o de coeficientes transformados de KL (ME-KL (Laguna *et al.* 1996)). El estadístico de detección es la componente a 0.5 cpl del periodograma localizado de la señal enventanada que puede expresarse en función de la TFL como

$$z_l[p] = \frac{1}{L} |Y_w[p, l]|^2, \quad (2.8)$$

donde $w[i]$ es la ventana de análisis del periodograma (de L latidos). El estadístico de detección global es la media de los estadísticos individuales

$$Z_l = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} z_l[p] = \frac{1}{PL} \sum_{p=0}^{P-1} |Y_w[p, l]|^2. \quad (2.9)$$

La regla de decisión en (Smith *et al.* 1988; Rosenbaum *et al.* 1994) se define en función de una medida de significación de la alternancia, denominada ratio de AOT (*T wave alternans ratio*, TWAR), que se calcula como

$$\text{TWAR}(l) = \frac{Z_l - m_l}{s_l}, \quad (2.10)$$

donde m_l , s_l son la media y la desviación estándar del ruido espectral medido en una ventana espectral escogida adecuadamente para evitar el efecto de la respiración. Nótese que aplicar un umbral fijo (que es típicamente de $\gamma = 3$ en la literatura) al ratio de AOT equivale a aplicar un umbral variable dependiente del ruido al estadístico global Z_l

$$\text{TWAR}(l) \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma \Leftrightarrow Z_l \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \underbrace{\gamma s_l + m_l}_{\gamma z(l)}. \quad (2.11)$$

Demodulación compleja (MDC, MDC-KL, MFC). Esta técnica de análisis espectral se emplea en el MDC (Nearing *et al.* 1991) y el MDC-KL (Martínez *et al.* 2000b) sobre muestras y coeficientes de KL respectivamente. Los estadísticos de detección por series se calculan como la magnitud de la componente a 0.5 cpl demodulada y filtrada paso-bajo

$$z_l[p] = |(y_l[p] \cdot (-1)^l) * h_{\text{lpf}}[l]|, \quad (2.12)$$

que puede reescribirse como

$$z_l[p] = |y_l[p] * h_{\text{lpf}}[l]|, \quad (2.13)$$

donde $h_{\text{hpf}}[k] = h_{\text{lpf}}[k] \cdot (-1)^k$ es el filtro paso-alto que resulta de trasladar en frecuencia (por modulación) el filtro paso-bajo $h_{\text{lpf}}[k]$. De acuerdo con (2.7), el estadístico de la demodulación compleja (2.13) puede escribirse como $z_l[p] = |Y_w[p, l]|$, donde la ventana de análisis es $w[k] = h_{\text{lpf}}[-k]$. El estadístico global se obtiene a partir de los estadísticos individuales ($Z_l = \sum_{p=0}^{P-1} z_l[p]$ en (Nearing y Verrier 1993) y $Z_l = \text{RMS}(z_l[p])$ en (Martínez *et al.* 2000a)). Esta técnica proporciona un estadístico de detección para cada nuevo latido.

El MFC (Martínez *et al.* 2000a) es una versión más sofisticada del MDC, que sustituye el filtro paso-bajo invariante $h_{\text{lpf}}[k]$ por un filtro óptimo de Capon, que es dependiente de los datos (Stoica y Moses 1997). La optimalidad del filtro descansa en el conocimiento de la autocorrelación latido a latido $r_p(k) = E\{y_l[p] y_{l+k}[p]\}$. En la práctica, la autocorrelación debe estimarse a partir de los datos, y el error de estimación introduce una degradación de las prestaciones del filtro, y por tanto del método. Esto explica los resultados obtenidos en (Martínez *et al.* 2000a), donde se observó que la aplicación de este método sólo conseguía una ligera mejora respecto al MDC con filtro invariante, a costa de un incremento importante en la complejidad del método.

Nearing *et al.* no proporcionan ninguna regla de decisión específica para el MDC, ya que consideran que la AOT tiene una amplitud variante que puede medirse permanentemente (Nearing *et al.* 1991; Nearing y Verrier 1993). Sin embargo, en otros trabajos (Rosenbaum *et al.* 1995; Martínez *et al.* 2000a,b) se ha aplicado un umbral (fijo o variable) a la magnitud total de alternancias Z_l con el fin de decidir si hay alternancias o la amplitud estimada se debe al ruido.

Distancia entre centroides en los mapas de Poincaré (MMP). El estadístico de detección propuesto por Strumillo y Ruta es la distancia entre los centroides de las agrupaciones de puntos pares e impares en el espacio de fases (Strumillo y Ruta 2002)

$$\begin{aligned} z_l[p] &= |E\{y_{2i+1}[p] - y_{2i}[p]\} - E\{y_{2i}[p] - y_{2i-1}[p]\}| \\ &\cong 2|E\{y_{2i}[p] - y_{2i-1}[p]\}|. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En la práctica, se sustituye el valor esperado en la expresión (2.14) por un promedio en una ventana de $L = 100$ latidos

$$\begin{aligned} z_l[p] &= 2 \left| \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L/2-1} y_{l-2i}[p] - \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L/2-1} y_{l-2i-1}[p] \right| \\ &= \frac{2}{L} \left| \sum_{j=l-L+1}^l y_j[p] (-1)^j \right| \\ &= \frac{2}{L} |Y_w[p, l]|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La ventana de análisis en este caso es una ventana rectangular de L latidos. El estadístico global Z_l se calcula como la media de todas las series del complejo ST-T

$$Z_l = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} z_l[p] = \frac{2}{LP} \sum_{p=0}^{P-1} |Y_w[p, l]|. \quad (2.16)$$

Proyección en el espacio de periodicidad 2 (MTP). En el MTP (Srikanth *et al.* 2002a) se analiza una serie latido a latido de características de la repolarización $\{y_i\}$, formando bloques de $L = 16$ latidos $\{y_{l-L+1}, \dots, y_{l-1}, y_l\}$ que se actualizan en cada nuevo latido. En cada bloque se sustrae el valor medio, $\bar{y}_l = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} y_{l-k}$, y se calcula el estadístico de detección como la energía de su proyección en el subespacio de secuencias con periodicidad 2 (según el producto escalar definido en (Sethares y Staley 1999)). Se trata de un subespacio de rango 2, y los dos coeficientes de la proyección vienen dados por los promedios de las muestras pares e impares de cada bloque de datos (después de sustraer la media).

$$\alpha_0(l) = \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{L/2-1} (y_{l-2k-1} - \bar{y}_l) \quad (2.17)$$

$$\alpha_1(l) = \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{L/2-1} (y_{l-2k} - \bar{y}_l). \quad (2.18)$$

Puede comprobarse que $\alpha_0(l) + \alpha_1(l) = 0$, de forma que el estadístico de detección es $Z_l = \alpha_0^2(l) + \alpha_1^2(l) = 2\alpha_0^2(l)$. Sustituyendo el valor de \bar{y}_l en (2.17) se comprueba que el estadístico global puede expresarse como

$$Z_l = \frac{2}{L^2} \left| \sum_{k=0}^{L-1} y_{l-k} (-1)^k \right|^2 = \frac{2}{L^2} |Y_w[0, l]|^2, \quad (2.19)$$

de forma que el análisis es, salvo constantes, equivalente a calcular el espectrograma de la serie con una ventana rectangular de L latidos.

Tests de la t de Student (MTE). Srikanth *et al.* emplean en el MTE (Srikanth *et al.* 2002b) los tests de la t de Student para muestras independientes y pareadas para decidir si las diferencias observadas entre los coeficientes $\{y_i\}$ de los latidos pares e impares son significativas. El análisis se realiza en bloques de $L = 32$ latidos actualizados en cada nuevo latido.

En el test de la t estándar (para muestras independientes) se consideran dos conjuntos de parámetros, los de los latidos pares y los de los latidos impares ($L/2$ valores en cada grupo) y se calcula el estadístico

$$t_l = \frac{m_l^{\text{par}} - m_l^{\text{impar}}}{S_l / \sqrt{L/4}} \quad (2.20)$$

$$\text{con } S_l = \sqrt{\frac{1}{2} (s_l^{\text{par}})^2 + \frac{1}{2} (s_l^{\text{impar}})^2}$$

donde m_l^{par} , m_l^{impar} , s_l^{par} , s_l^{impar} son la media y la desviación estándar muestral de $\{y_i\}$ en cada uno de los dos conjuntos. El p -valor³ de este test se compara con un nivel de significación mínimo (el nivel α) para tomar una decisión. Como el p -valor y $|t_l|$ están relacionados por una función monótona decreciente, la regla de decisión equivale a decidir la existencia de AOT si $|t_l| > \gamma$ donde γ es el valor crítico del test para el nivel α considerado (p. ej. $\gamma = 2,042$ para $\alpha = 0,005$ y $L = 32$ que son los valores empleados en (Srikanth *et al.* 2002b)). Por tanto, la regla de decisión equivalente es

$$\underbrace{|m_l^{\text{par}} - m_l^{\text{impar}}|}_{Z_l} \underbrace{\geq_{\mathcal{H}_0} \gamma}_{\gamma_{Z(l)}} \underbrace{\frac{S_l}{\sqrt{L/4}}}_{.} \quad (2.21)$$

Nótese que

$$Z_l = \left| m_l^{\text{par}} - m_l^{\text{impar}} \right|$$

$$= \left| \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{L/2-1} y_{l-2k-1} - \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{L/2-1} y_{l-2k} \right|$$

$$= \frac{2}{L} |Y_w[0, l]|. \quad (2.22)$$

El estadístico equivale al módulo de la TFL con una ventana de análisis rectangular de L latidos.

El test de la t para muestras pareadas es una alternativa al test anterior que evita la influencia de las variaciones de baja frecuencia en la secuencia a analizar. Los cambios lentos en la morfología del ECG disminuyen la sensibilidad del detector ya que se incrementan las varianzas intragrupo (s^{par} , s^{impar}) y por tanto, la varianza conjunta S_l . En el

³El p -valor de un test estadístico cuantifica la probabilidad de obtener los datos observados si fuera cierta la hipótesis nula. En el caso que nos ocupa, la hipótesis nula es que ambos grupos (latidos pares e impares) tienen la misma media.

test pareado, se considera que cada pareja de latidos consecutivos (latido impar, latido par) están pareados, y el test trata de decidir si la media de las diferencias entre latidos pareados (la alternancia) es significativamente distinta de cero. El estadístico empleado es

$$t_l^\Delta = \frac{m_l^\Delta}{s_l^\Delta / \sqrt{L/2}}, \quad (2.23)$$

donde m_l^Δ , s_l^Δ son la media muestral y desviación estándar muestral de las $L/2$ diferencias $\Delta_i = y_{2i} - y_{2i-1}$. La regla de decisión en este caso puede expresarse como $|t_l^\Delta| \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma$, o bien como

$$\underbrace{|m_l^\Delta|}_{Z_l} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma \frac{s_l^\Delta}{\sqrt{L/2}}, \quad (2.24)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_l &= |m_l^\Delta| \\ &= \left| \frac{2}{L} \sum_{k=0}^{L/2-1} (y_{l-2k} - y_{l-2k-1}) \right| \\ &= \frac{2}{L} |Y_w[0, l]| \end{aligned} \quad (2.25)$$

es exactamente el mismo estadístico que en el test de muestras independientes.

2.4.3.2. Métodos basados en el conteo de cambios de signo.

El test de Rayleigh (incluido en el MTE) y el MC pertenecen a esta categoría. Se trata de métodos que trabajan en el dominio temporal. Ambos se basan en la observación de los cambios de signo (o cruces por cero) en una serie latido a latido.

El test de Rayleigh decide si una serie puede explicarse como una distribución aleatoria o como un patrón periódico, midiendo la regularidad del patrón de cambios de fase (que son cambios de signo en el caso de periodicidad 2) (Srikanth *et al.* 2002b). La serie latido a latido $\{y_i\}$ se analiza con una ventana deslizante de $L = 32$ latidos. En cada bloque de datos, se mide el número de desviaciones con respecto a uno de los dos patrones alternantes siguientes $\{y_i > y_{i+1}, y_{i+1} < y_{i+2}, y_{i+2} > y_{i+3} \dots\}$ ó $\{y_i < y_{i+1}, y_{i+1} > y_{i+2}, y_{i+2} < y_{i+3} \dots\}$, y se obtiene un valor de significación que mide la probabilidad de obtener ese patrón como resultado de la observación de una variable aleatoria (p -valor). La Tabla 2.4 muestra los p -valores según el número de desviaciones respecto al patrón alternante de 32 latidos. El método decide que hay alternancias si el p -valor está por debajo de un umbral de significación. No obstante, dado que existe una relación monótona entre el p -valor y el número de latidos que siguen alguno de los dos patrones alternantes, la regla es equivalente a decidir que hay alternancias si el número de latidos que siguen alguno de los dos patrones

Desviaciones	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<i>p</i> -valor	0	0	0	0	0	$3 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	0.0294	0.06

Tabla 2.4: Significación o *p*-valor del test de Rayleigh (probabilidad de obtener un determinado patrón como resultado de ruido aleatorio) según el número de desviaciones respecto a los patrones alternantes de 32 latidos. Reproducida de (Srikanth *et al.* 2002b).

es mayor que un umbral γ_Z

$$Z_l = \frac{1}{2} \left(L + \left| \sum_{i=l-L+1}^l \text{sign}(\Delta y_i) (-1)^i \right| \right) \geq \gamma_Z \quad (2.26)$$

donde $\{\Delta y_i\} = \{y_i - y_{i-1}\}$. La relación de este método con los métodos basados en la TFL queda destacada si reescribimos (2.26) como

$$Z_l = \frac{1}{2} \left(L + |TFL_{w,l}\{\text{sign}(\Delta y_i)\}|_{f=0,5} \right) \geq \gamma_Z. \quad (2.27)$$

Por tanto, puede interpretarse como un método basado en la TFL del signo de la serie Δy_i .

En el MC, el índice de correlación de la alternancia $\{y_i\}$ (2.5) tiene un valor generalmente entorno a 1, ya que los complejos ST-T son similares al complejo ST-T patrón. Sin embargo, cuando el ECG presenta AOT, es de esperar que la correlación alterne también entre valores mayores y menores que uno. Burattini *et al.* (Burattini *et al.* 1999) imponen un mínimo de $L = 7$ cambios de signo consecutivo en la serie $\{\Delta y_i\} = \{y_i - 1\}$ para decidir la presencia de AOT. Empleando nuestra notación, la regla de decisión es la misma (2.26) pero con $\gamma_Z = L = 7$.

2.4.3.3. Métodos basados en filtrado no lineal.

Esta categoría incluye algunos métodos de análisis recientemente propuestos, donde se emplean filtros no lineales para calcular los estadísticos de detección y estimadores de amplitud.

Media móvil modificada. En el MMM (Verrier *et al.* 2003) se calcula en paralelo una media móvil modificada de los latidos pares e impares

$$\bar{y}_l[p] = \bar{y}_{l-2}[p] + g((y_l[p] - \bar{y}_{l-2}[p])/8), \quad (2.28)$$

siendo $g(x)$ una función no-lineal limitadora

$$g(x) = \begin{cases} -K & \text{si } x < -K \\ x & \text{si } |x| \leq K \\ K & \text{si } x > K \end{cases}. \quad (2.29)$$

La AOT en el latido l -ésimo se calcula como el valor absoluto de la diferencia entre los latidos promedios par e impar

$$z_l[p] = |\bar{y}_l[p] - \bar{y}_{l-1}[p]|, \quad (2.30)$$

y el estadístico de detección global se calcula como

$$Z_l = \max_p z_l[p] = \max_p |\bar{y}_l[p] - \bar{y}_{l-1}[p]|. \quad (2.31)$$

También forman parte de este paradigma los métodos no lineales desarrollados en el capítulo 4 de esta tesis, basados en el test del cociente de verosimilitudes generalizado para un modelo de ruido laplaciano (*vid.* (Martínez y Olmos 2003, 2005)).

2.4.4. Análisis de AOT: subetapa de estimación.

2.4.4.1. Estimación de amplitud.

El valor de la amplitud global de AOT en el complejo ST-T se calcula a partir de las estimaciones de amplitud alterna en cada serie.

El ME (Rosenbaum *et al.* 1994) estima la amplitud global de AOT como la raíz cuadrada de la potencia alterna, medida como la diferencia entre el espectro estimado en 0,5 cpl (Z_l) y el nivel medio de ruido espectral (m_l).

$$\begin{aligned} \hat{v}_l[p] &= 2 \sqrt{z_l[p] - m_l}, \\ \hat{V}_l &= 2 \sqrt{Z_l - m_l} = \text{RMS}(\hat{v}_l[p]). \end{aligned} \quad (2.32)$$

En los métodos basados en la demodulación compleja, la amplitud de cada serie se demodula como

$$\hat{v}_l[p] = 2(y_l[p] (-1)^l * h_{\text{lpf}}[l]). \quad (2.33)$$

$$= 2(-1)^l (y_l[p] * h_{\text{lpf}}[l]). \quad (2.34)$$

El valor global se calcula como $\hat{V}_l = \sum_p |\hat{v}_l[p]|$ en (Nearing y Verrier 1993) y como $\hat{V}_l = \text{RMS}(\hat{v}_l[p])$ en el MDC-KL (Martínez *et al.* 2000a).

En el resto de métodos basados en TFL (MMP, MTP, tests de la t de Student), no se describe ningún estimador de amplitud. Sin embargo, cuando estos métodos se aplican sobre series de amplitud, pueden considerarse los siguientes estimadores de amplitud basados en la TFL: $\hat{v}_l[p] = 2Y_w[p, l] / \sum_i w[i]$ y $\hat{V}_l = \text{RMS}(\hat{v}_l[p])$ calculados de forma sencilla a partir de los estadísticos (2.15), (2.19), (2.21) y (2.24).

Asumiendo que la AOT presenta un valor constante en el intervalo de repolarización, Burattini *et al.* (Burattini *et al.* 1999) proponen el siguiente estimador de amplitud latido

a latido para el MC

$$\widehat{V}_i = 2 \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x_{\text{med}}^2[n]}{\sum_{n=0}^{N-1} |x_{\text{med}}[n]|} \cdot |y_i - 1| = K \cdot |y_i - 1|. \quad (2.35)$$

En el método MMM, $z_l[p]$ es ya un estimador de la amplitud de alternancia en la serie p -ésima, a partir del cual se puede calcular un estadístico global Z_l .

2.4.4.2. Estimación de la forma de onda.

Desde las primeras observaciones de AOT, se sabe que la alternancia no se distribuye uniformemente a lo largo del complejo ST-T. La caracterización de la forma de onda alternante, aunque ha sido poco estudiada en la literatura de AOT, podría proporcionar información clínicamente significativa. Algunos de los trabajos citados (Nearing y Verrier 1993; Rosenbaum *et al.* 1994) muestran ejemplos de distribuciones de AOT. Recientemente, algunos estudios han mostrado que la morfología de AOT refleja información sobre el riesgo de inducir taquicardia ventricular en estimulación cardiaca (Narayan *et al.* 1999) y la localización de las fuentes alternantes en isquemia aguda (Martínez *et al.* 2002).

La capacidad de estimar la morfología de AOT depende de la implementación de las etapas de reducción de datos y de análisis. La información perdida en la etapa de reducción de datos no puede recuperarse aun en el caso de un análisis ideal, tal como sugiere la expresión (2.3). Así, los métodos que se basan en el análisis de un sólo coeficiente (ver Tabla 2.2) no permiten la estimación de la forma de onda.

Cuando la técnica de reducción de datos está basada en el diezmado temporal (ME, MDC, MFC, MMP y MMM), los $\widehat{v}_l[p]$ estiman la amplitud de AOT en varios instantes dentro del complejo ST-T. Estrictamente, $\widehat{v}_l[p]$ es un estimador de la forma de onda de AOT diezmada. La señal alternante $\widehat{a}_l[n]$ en su frecuencia de muestreo original puede recuperarse interpolando $\widehat{v}_l[p]$. En el ME, sólo puede obtenerse el valor absoluto de la distribución $|\widehat{a}_l[n]|$ ya que $\widehat{v}_l[p]$ (2.32) no conserva la fase de la alternancia.

En los esquemas de reducción de datos basados en transformaciones lineales (p. ej. los basados en la transformada de KL), los $\widehat{v}_l[p]$ indican cómo se distribuye la alternancia en el dominio transformado. La ecuación (2.3) sugiere que la forma de onda alternante puede ser reconstruida combinando adecuadamente los distintos $\widehat{v}_l[p]$, siempre que se preserve el signo/fase relativo de la alternancia en las diferentes series. Por tanto, el método ME-KL, tal como está descrito en la literatura, no permite la recuperación de la forma de onda alternante. El MDC-KL sí mantiene el signo, y la forma de onda alternante se estima como la transformada de KL inversa de $\widehat{v}_l[p]$, es decir, $a_l[n] = \mathbf{T} \widehat{v}_l$ (Martínez *et al.* 2000a).

2.4.5. Análisis de AOT: discusión y ejemplos.

La discusión llevada a cabo en esta sección se complementa con una serie de ejemplos en señales ECG reales y simuladas. Han sido seleccionados para ilustrar algunos aspectos de la discusión, pero no pretenden servir como un conjunto de datos de validación⁴.

Se ha seleccionado una señal ECG (derivación V2) adquirida digitalmente con $F_s=1000$ Hz, y resolución de $0.6 \mu\text{V}$ durante una intervención de angioplastia coronaria (puede encontrarse más información sobre este conjunto de datos en el Capítulo 6). La duración de la señal es de 6 min. 22 s. (6:22), con un total de 482 latidos. El globo se infló en el instante 0:30, y fue desinflado en el 5:24. Se comprobó visualmente (en el ECG y representando latidos superpuestos) la existencia de un episodio de alternancias cuyo valor de pico se encuentra en torno al final de la oclusión (5:20).

En los ejemplos se ha utilizado este ECG real (*Sig1*) y dos señales simuladas. La señal simulada *Sig2* se construye a partir de *Sig1*, donde se ha insertado un mismo latido ectópico (también grabado en el propio paciente) en los instantes 1:18, 2:35, 4:16 y 4:55. Los dos primeros se insertaron antes del episodio de AOT y los otros dos durante la alternancia. De estos dos últimos, uno rompe la fase de la alternancia (es decir, se simula el patrón ABXAB, donde A,B son los latidos alternantes y X el latido ectópico) y el otro no la rompe (patrón ABXBA). La tercera señal (*Sig3*) se obtiene añadiendo ruido gaussiano con desviación estándar de $50 \mu\text{V}$ en la banda DC-20Hz al ECG real en dos intervalos de 50 latidos, uno antes (desde 1:57 hasta 2:35) y otro después de la AOT (desde 3:56 hasta 4:36).

En todos los métodos se aplica la misma etapa de preprocessado, consistente en detección de QRS, eliminación de línea de base (interpolación con splines cúbicas), segmentación de ST-T (segmentos de 320 ms), alineamiento y filtrado paso-bajo por columnas de la matriz de segmentos (frecuencia de corte de 20 Hz). Como etapa de reducción de datos, se emplea un diezmado por $Q = 8$ ($P = 40$) en los métodos basados en TFL y en filtrado no lineal, y la amplitud de pico de la onda T para los métodos basados en conteo de cambios de signo.

2.4.5.1. Métodos basados en la TFL.

Como se comprobado en la Sección 2.4.3, los estadísticos de detección de los métodos basados en el periodograma, la demodulación compleja, la distancia en los mapas de Poincaré, la transformada de periodicidad y los tests de la *t* de Student se basan en las TFL de las series latido a latido evaluadas en 0.5 cpl. Por tanto, sus estadísticos son equivalentes y las diferencias entre las técnicas residen básicamente en la forma y la longitud de la ventana de análisis $w[i]$.

Las características del filtro paso-alto equivalente $h_{\text{hpf}}[k]$ tienen una gran influencia en las prestaciones de los métodos. El filtro debería preservar la componente alterante en

⁴En el capítulo 5 se lleva a cabo la validación más completa de algunos de estos métodos junto con otros métodos derivados en esta tesis.

cada serie, realizando un seguimiento de sus cambios dinámicos a la vez que elimina tanto ruido como sea posible. Por tanto, encontramos el clásico compromiso entre seguimiento y eliminación de ruido.

Con el uso de filtros cortos (L baja) se consigue un mejor seguimiento de episodios transitorios y cambios abruptos de AOT que usando filtros más largos (L alta). Por otro lado, los filtros largos llevan a cabo un suavizado mayor en las series latido a latido, reduciendo el ruido presente en los estadísticos de detección y en los estimadores de amplitud. Este compromiso puede apreciarse en la Figura 2.8(a) donde se representa el estadístico de detección $Z_l = RMS(|Y_w[p, l]|)/\sum_i w(i)$ para la señal *Sig1*, empleando ventanas de análisis de Hanning de longitudes $L=8, 32$ y 128 latidos. La normalización por $\sum_i w(i)$ permite comparar ventanas de diferente longitud sin preocuparnos de la escala. El efecto de suavizado de la ventana de 128 latidos no permite que el estadístico siga correctamente la evolución del episodio transitorio de AOT. Sin embargo, el ruido en Z_l (o \hat{V}_l) se reduce con respecto a ventanas más breves. La ventana de 8 latidos resulta en un estadístico ruidoso, lo que dificulta la tarea de la regla de decisión. En este caso, la ventana de 32 latidos alcanza un buen compromiso entre seguimiento y eliminación de ruido.

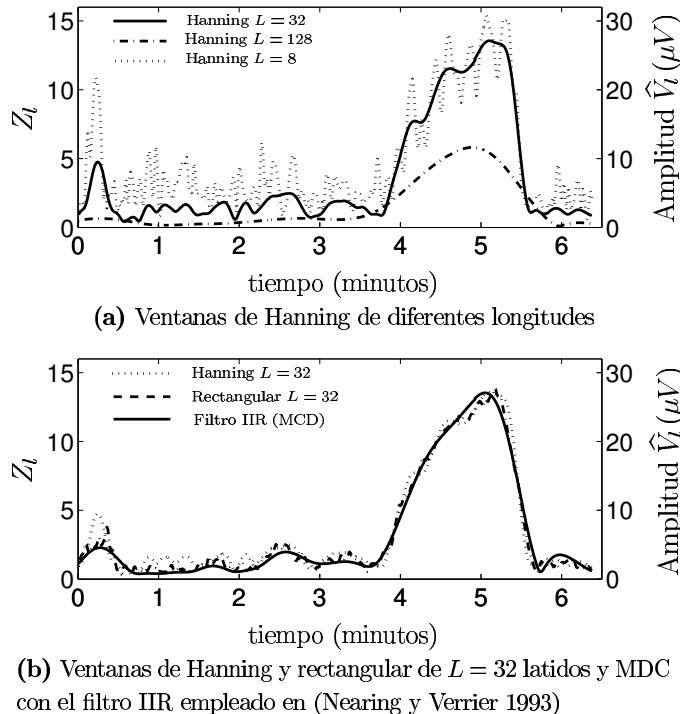


Figura 2.8: Comportamiento de los métodos basados en la TFL. Se representa la evolución del estadístico de detección normalizado en la señal *Sig1* con diferentes ventanas de análisis. La escala del eje vertical derecho representa la amplitud estimada \hat{V}_l en μV .

Verrier *et al* consideran que la principal limitación del ME en comparación con el MDC es la asunción de estacionariedad en un intervalo de 128 latidos (Verrier *et al.* 1996a). Sin embargo, esta limitación debe atribuirse más bien al tamaño de la ventana utilizada en el análisis ($L=128$ latidos) que al propio método. De hecho, la capacidad de seguimiento de episodios transitorios sería igual si la duración de la ventana utilizada fuera igual a la duración efectiva de la respuesta impulsional del filtro utilizado en el MDC. Esto se ilustra en la Figura 2.8(b), donde se observa que el estadístico del MDC con el filtro descrito en (Nearing y Verrier 1993) (un filtro IIR aplicado con la técnica *forward-backward* cuya longitud efectiva es de 30 latidos) tiene características de ruido y seguimiento similares a las obtenidas con un periodograma de 32 latidos (tanto el periodograma estándar como el modificado con una ventana de Hanning).

En los capítulos 3 y 4 de esta tesis se han derivado detectores adaptados a determinados modelos de señal utilizando el paradigma de los tests del cociente de verosimilitudes generalizado (TCVG), proporcionado por la teoría estadística de la detección. En ellos se muestra que los estadísticos basados en la TFL (2.6) o en filtros lineales paso-alto (2.7) son detectores TCVG para alternancias en ruido gaussiano y estacionario (*vid.* también (Martínez y Olmos 2002)). En concreto, se trata de un detector adaptado a episodios de AOT con una evolución latido a latido y una duración dadas por la ventana de análisis $w[k]$. Esto indica que, desde el punto de vista de la detección, la duración de la ventana de análisis es óptima cuando es similar a la duración del episodio (que por otro lado, es desconocida *a priori*).

La componente del complejo ST-T que se repite periódicamente en todos los latidos (el complejo ST-T de fondo) tiene normalmente una amplitud mucho mayor que la de la señal deseada (es decir, la alternancia). El ECG de fondo se traduce en una componente continua de gran magnitud en las series latido a latido. Por tanto, es importante que la respuesta del filtro paso-alto equivalente sea nula en 0 Hz para prevenir que la componente residual a la salida del filtro acabe enmascarando la alternancia. Esta condición se cumple en estos métodos cuando la ventana de análisis es simétrica y de longitud par. No obstante, la componente continua también se puede eliminar en la etapa de preprocesado utilizando un filtro paso-alto adecuado (*detrending filter*).

El efecto de los artefactos impulsivos en las series latido a latido es otro de los aspectos destacables en estos detectores. Como efecto del filtrado lineal, la energía del impulso se dispersa entre los latidos vecinos, siguiendo la forma de la respuesta impulsional y afectando a la detección y estimación de la alternancia en un entorno de L latidos, como puede verse en el ejemplo de la Figura 2.9(a). De ahí la importancia de rechazar en la etapa de preprocesado cualquier latido anómalo (ectópicos, prematuros, con artefactos importantes) si la etapa de análisis está basada en un filtrado lineal. En la Figura 2.9(b) se expone el efecto de la eliminación de latidos ectópicos así como de la sustitución de los mismos. Nótese que la mejor estrategia cuando ocurre un latido ectópico depende de cómo afecta el latido a la fase de la alternancia. Si el latido anómalo produce un cambio de fase en la AOT (ABXAB) la mejor opción sería borrarlo, ya que así se elimina el cambio

de fase que se traduce en una caída brusca del nivel de alternancia⁵. Si, por el contrario, el ectópico no afecta a la fase de la alternancia (ABXBA), su eliminación generaría un cambio de fase de la alternancia, siendo preferible sustituirlo por un latido patrón. Ambos comportamientos son posibles, según se desprende de (Narayan *et al.* 1999).

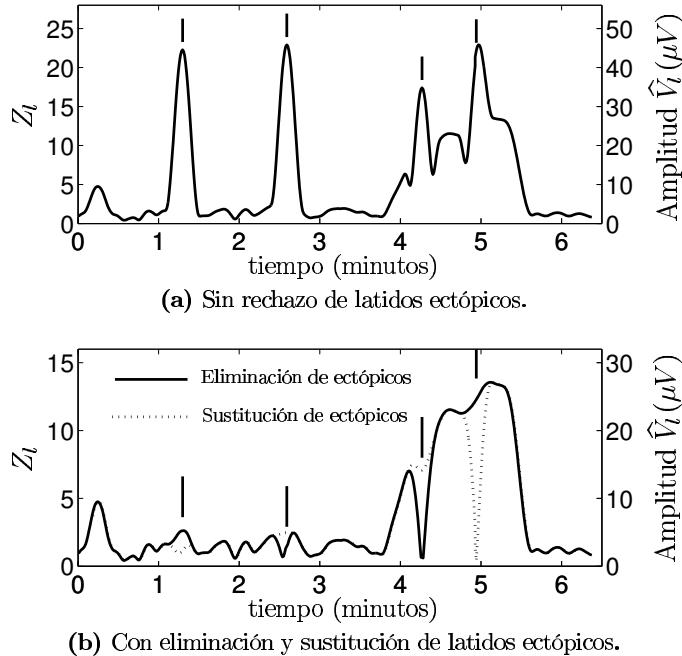


Figura 2.9: Comportamiento de los métodos basados en la TFL sobre la señal *Sig2*. Las líneas verticales indican la posición de los latidos ectópicos.

El parámetro de desplazamiento de la ventana D define la frecuencia del cálculo del estadístico de detección y del estimador de amplitud. La utilización de una ventana deslizante latido a latido (como la utilizada en los ejemplos de este capítulo) permite obtener nuevos valores para cada nuevo latido. En la literatura encontramos que algunos autores utilizan un análisis por bloques no solapados ($D = L$) (Strumillo y Ruta 2002) o con un cierto solapamiento ($D = L/2$) (Laguna *et al.* 1996). El ME se define en (Smith *et al.* 1988) como un método de análisis por bloques ($D = L$), pero puede usarse utilizando una ventana deslizante como en (Kaufman *et al.* 2000) ($L = 64$, $D = 4$). En cualquier caso, la resolución del método viene determinada por la duración efectiva del filtro L , y no por el valor de D . El solapamiento introduce correlación entre valores consecutivos de los estadísticos de detección o las estimaciones de amplitud. El beneficio de utilizar ventanas muy solapadas es que se consigue una mejor representación de la evolución temporal de

⁵En realidad, se produce un cambio de signo de la alternancia, pero mientras hay fragmentos con fases opuestas dentro de la ventana de análisis, ambas componentes se superponen de forma destructiva. El mínimo se produce cuando el cambio de fase se sitúa en el centro de la ventana de análisis.

la alternancia, permitiendo una localización más precisa de los inicios, finales y picos de los episodios.

Como hemos visto, el diseño del filtro (o la ventana de análisis) tiene una gran importancia en la resolución temporal, capacidad para seguir la evolución temporal y la precisión del análisis. No obstante, la sensibilidad y robustez del detector dependen también, en gran medida, de las reglas de decisión empleadas.

En los métodos MDC, MMP y MTP, la decisión se toma comparando el estadístico Z_l con un umbral fijo (independientemente de las condiciones del ruido). En contraste, las reglas de decisión de los métodos ME y los tests de la t de Student permiten la adaptación a las condiciones cambiantes del ruido. Los umbrales variables se reflejan en las expresiones (2.11), (2.21) y (2.24). Como puede observarse, los umbrales dependen de parámetros del ruido estimados sobre la señal observada. Así, en el caso del ME, los parámetros m_l y s_l miden la media y desviación estándar del *pedestal de ruido* en el periodograma. Los umbrales equivalentes de los tests de la t estándar y pareado son proporcionales, respectivamente a las desviaciones estándar S_l y s_l^Δ . La diferencia estriba en que s_l^Δ sólo tiene en cuenta la variabilidad en las diferencias entre latidos pares e impares consecutivos, y por tanto, permanece insensible a las derivas lentas en la serie de coeficientes latido a latido, al contrario de lo que sucede en el test de la t estándar. En los tres casos, el nivel de significación requerido para decidir la presencia de AOT puede ajustarse mediante el parámetro γ .

El ejemplo de la Figura 2.10, donde se analiza la señal *Sig3*, exhibe cómo afectan los cambios en el nivel de ruido a Z_l y V_l , y cómo se puede discriminar entre la alternancia y el ruido utilizando umbrales adaptados al nivel de ruido. Como puede verse en la figura, no sería posible distinguir entre alternancia y ruido utilizando un umbral fijo. Según los resultados mostrados por Rosenbaum *et al.*, el MDC tiene una especificidad muy pobre (de sólo un 5 %) en comparación con el ME, dada la incapacidad del primero para discriminar la alternancia del ruido (Rosenbaum *et al.* 1995).

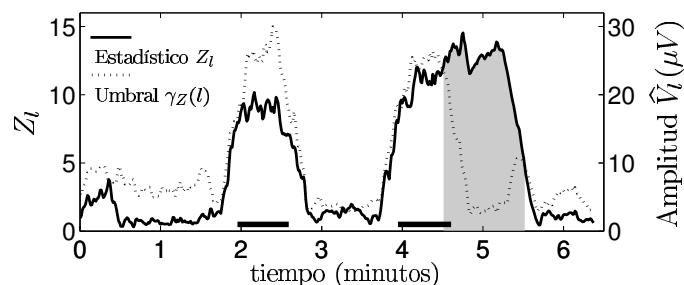


Figura 2.10: Evolución del estadístico de detección basado en la TFL (ventana de análisis rectangular de 32 latidos) en la señal *Sig3* (línea continua), junto con el umbral $\gamma_l = \sqrt{m_l + \gamma s_l}$ (con $\gamma = 3$) propuesto para el ME en (Rosenbaum *et al.* 1994) (línea de puntos). Las líneas horizontales indican los intervalos con ruido añadido. Las áreas sombreadas indican la zona donde se detecta la AOT.

Sin embargo, el MDC también puede usarse con un umbral adaptativo, como puede verse en (Martínez *et al.* 2000a,b). En ellos, la estrategia de adaptación del umbral consistió en realizar un promediado exponencial del estadístico Z_l que se actualiza latido a latido cuando no hay alternancia (interrumpiendo la actualización al detectar un nuevo episodio).

$$\zeta_l = \begin{cases} \alpha Z_l + (1 - \alpha) \zeta_{l-1} & \text{si } Z_l \leq \gamma_l \\ \zeta_{l-1} & \text{si } Z_l > \gamma_l \end{cases} \quad (2.36)$$

De este modo, ζ_l es una estimación del valor de Z_l atribuible al nivel de ruido en cada momento. El umbral variante se fijó, finalmente, en un valor constante por encima del nivel de base: $\gamma_l = \zeta_l + K$ (con $K = 10 \mu V$ en las referencias citadas). Esta estrategia permitió reducir el número de falsos positivos debidos al incremento del nivel de ruido.

2.4.5.2. Métodos basados en conteo de cambios de signo.

El test de Rayleigh (método MTE) y el MC se basan en el conteo de cambios de signo o cruces por cero. De hecho, el conteo de cruces por cero ha sido utilizado como técnica de análisis espectral (Kedem 1986). Según Kedem, para que el análisis de cruces por cero sea fiable, la señal ha de tener una frecuencia dominante (en el caso que nos ocupa, la componente alternante a $0,5 \text{ cpl}$) y una relación señal a ruido alta (Kedem 1986). Así, la presencia de otras componentes de gran amplitud, como pueden ser las debidas a la respiración, variaciones de la línea de base, o variaciones fisiológicas lentas podrían degradar el comportamiento de estos métodos. De ahí que sea preciso aplicar filtros que rechacen la componente respiratoria (como el utilizado en el MC, *vid.* Sección 2.4.1). En el test de Rayleigh, el análisis de los cruces por cero se lleva a cabo sobre la diferencia entre un latido y el anterior, de manera que se están filtrando implícitamente las componentes de baja frecuencia.

El funcionamiento de ambos métodos depende de la longitud de la ventana empleada. Una ventana de análisis corta (p. ej., la utilizada en el MC, donde $L = 7$) permite detectar episodios alternantes muy breves, posibilitando su aplicación a registros cortos (como los registros rutinarios de 10 segundos). Sin embargo, cuanto más breve es la ventana, mayor es la probabilidad de tener una falsa detección, ya que es más probable que la secuencia de ruido siga, casualmente, el patrón alternante requerido. Esto se puede observar en la Figura 2.11 (gráfica inferior), donde se ha calculado el estadístico 2.26 con $L = 7$ en la señal *Sig1*. Esto, junto con la degradación de estos métodos cuando hay componentes importantes no alternantes puede explicar la falta de robustez del MC documentada en estudios de simulación (Martínez *et al.* 2000a). La utilización de ventanas más largas (como la ventana de $L = 32$ latidos en (Srikanth *et al.* 2002b)) asegura mayor robustez a costa de requerir una mayor duración de los episodios para ser detectados (*vid.* gráfica superior de la Figura 2.11). Así, volvemos a encontrar un compromiso en la selección de la ventana de análisis.

La ecuación (2.27) subraya la interpretación de estos métodos como la TFL de las series de signos. La función signo limita los efectos de los valores extremos (ruido impulsivo,

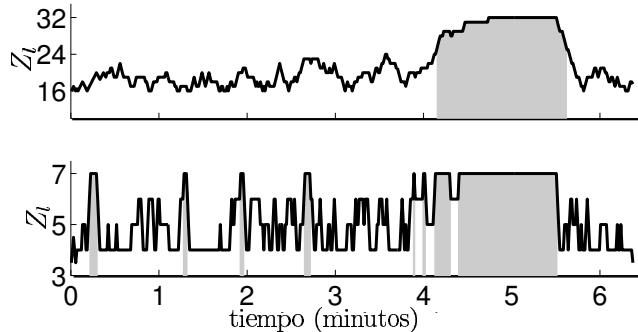


Figura 2.11: Comportamiento de los métodos basados en conteo de cambios de signo en la señal *Sig1*. Se muestra el estadístico (2.26) para $L = 32$ (gráfica superior) y $L = 7$ (gráfica inferior). Las áreas sombreadas indican la detección de AOT para los umbrales $\gamma_Z(l) = 25$ (gráfica superior) y $\gamma_Z(l) = 7$ (gráfica inferior).

latidos ectópicos, etc.) en el estadístico de detección, en contraste con lo que sucede en los métodos lineales. Sin embargo, se está perdiendo una información relevante: la amplitud de la alternancia. En el método del test de Rayleigh no se propone ningún estimador de amplitud. Los autores del MC, por otra parte, proponen un estimador (2.35) basado en un modelo lineal.

2.4.5.3. Métodos basados en filtrado no lineal.

El uso de no linealidades permite diseñar métodos robustos ante los valores extremos y el ruido impulsivo en las series latido a latido.

En el método MMM, la función no lineal (2.29) se comporta linealmente cuando las diferencias entre el nuevo latido y el latido medio son pequeñas. En ese caso, el estadístico (2.30) es el resultado de filtrar las series latido a latido con la siguiente función de transferencia paso-alto

$$H_{\text{hpf}}(z) = \frac{1}{8} \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{7}{8} z^{-2}}. \quad (2.37)$$

Por tanto, el estadístico es equivalente al de los métodos basados en la transformada de Fourier localizada $z_l[p] = |Y_w[p, l]|$, siendo la ventana de análisis $w[i] = h_{\text{hpf}}[-i] (-1)^i$. No obstante, las diferencias se deben a la no linealidad de (2.29) que limita el efecto que los cambios abruptos de morfología, artefactos y latidos anómalos pueden tener en la estimación y la detección. La Figura 2.12 ilustra el comportamiento del método MMM y el método lineal análogo (sustituyendo la función (2.29) por la función identidad). En las señales *Sig1* y *Sig3*, donde no hay cambios bruscos en las series latido a latido, encontramos que el método MMM funciona esencialmente igual al método basado en el filtro lineal. Por otro lado, en la señal *Sig2*, los latidos ectópicos afectan gravemente al estadístico basado en el método lineal, mientras que el estadístico del MMM no se ve afectado por

los mismos. La melladura observada en el instante 4:55 se debe al cambio de fase de la alternancia causada por el último latido ectópico.

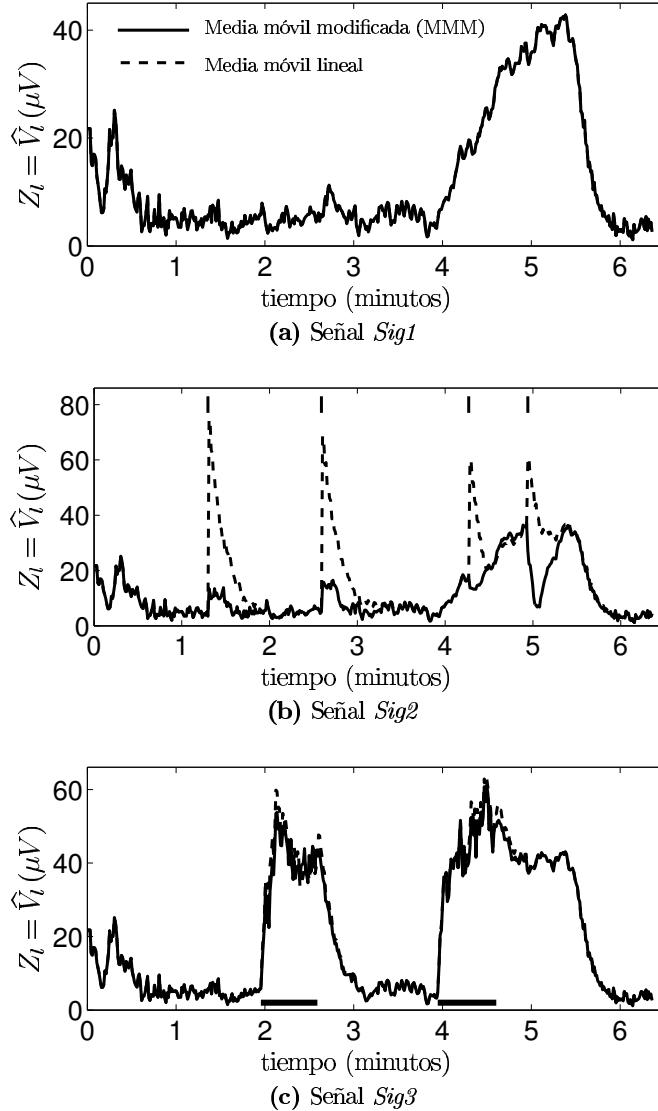


Figura 2.12: Método MMM aplicado a las señales *Sig1* (a), *Sig2* (b) y *Sig3* (c). Resultado de aplicar el método MMM como está descrito en (Nearing y Verrier 2002) (línea continua) y en su versión lineal (línea de puntos). Las líneas verticales en (b) y las horizontales en (c) indican respectivamente la posición de los latidos ectópicos y de los intervalos donde se ha añadido ruido adicional.

Los métodos derivados en esta tesis a partir de modelos de ruido no gaussianos (Capí-

tulo 4) también pueden considerarse dentro de esta categoría. Como el MMM, los métodos basados en modelos laplacianos son robustos ante la presencia de latidos anómalos. Algunos estudios recientes de simulación indican que los métodos no lineales superan a los clásicos en presencia de latidos ectópicos, cambios abruptos, artefactos y ruido fisiológico (Nearing y Verrier 2002; Martínez y Olmos 2002, 2003).

2.5. Validación de métodos de análisis.

El objetivo de esta sección es llamar la atención sobre algunos aspectos de la validación que, en general, no han sido tenidos en cuenta en la literatura sobre alternancias, así como indicar algunas pautas útiles a seguir en el proceso de validación.

Al hablar de validación de los métodos de análisis de AOT, podemos distinguir entre la validación metodológica (es decir, la caracterización del método mediante la cuantificación de la capacidad de detección y la precisión en la estimación) y la validación clínica (que mide la bondad del análisis de AOT como una medida para estratificar el riesgo de arritmias malignas y muerte súbita cardiaca). Antes de extraer conclusiones clínicas, sería deseable evaluar las prestaciones del método desde el punto de vista del procesado de señal.

El principal problema para la validación metodológica estriba en la ausencia de un patrón de oro o *gold standard* para el análisis de AOT. Sería deseable la existencia de bases de datos de ECG con AOT anotadas por expertos cardiólogos. La mayor dificultad para producir una base de datos de este tipo es que las AOT presentes en el ECG son a menudo invisibles para el observador humano debido a su baja amplitud (a veces por debajo del nivel del ruido). Este obstáculo podría ser superado en los próximos años combinando técnicas de análisis automático con herramientas de visualización apropiadas.

Algunos autores llevan a cabo una validación conjunta metodológica y clínica. Así, en (Rosenbaum *et al.* 1995) se compara el poder estratificador de la AOT medida con los métodos ME y MDC, utilizando como patrón de oro el resultado del test electrofisiológico. El problema principal de la validación conjunta estriba en que no hay forma de saber si los falsos positivos o falsos negativos cometidos en la estratificación se deben a errores cometidos por el método de análisis o a la falta de sensibilidad o especificidad del parámetro clínico considerado.

Strumillo y Ruta validaron su nuevo método de los mapas de Poincaré correlando sus resultados con los del ME (es decir, considerando al ME como patrón de oro) (Strumillo y Ruta 2002). Este procedimiento permite comprobar si un nuevo método es capaz de alcanzar las prestaciones de otro previamente validado, aunque no permite sacar ninguna conclusión sobre las discordancias encontradas entre los dos métodos.

Dadas las limitaciones de validar utilizando señales ECG reales, la forma más común de evaluar el comportamiento de un método es por medio de estudios de simulación (Nearing *et al.* 1996; Laguna *et al.* 1996; Burattini *et al.* 1998b; Burattini 1998; Mrowka *et al.* 1998; Narayan y Smith 1999b; Martínez *et al.* 2000b; Nearing y Verrier 2002; Srikanth *et al.*

2002b,a; Martínez y Olmos 2002; Martínez *et al.* 2000a; Martínez y Olmos 2003). De esta forma se pueden controlar y conocer *a priori* los parámetros de la AOT presente en la señal (localización, amplitud, duración y forma de onda). Dos aspectos pueden condicionar la fiabilidad de los resultados obtenidos: 1) el grado de realismo de las señales simuladas (incluyendo el ECG de fondo, la alternancia y el ruido) y 2) el peligro de sobreadaptación entre el modelo utilizado para generar la señal utilizada y el modelo de señal subyacente al método evaluado.

En la literatura de AOT pueden encontrarse simulaciones con diferentes grados de realismo. Generalmente, la alternancia se simula añadiendo una forma de onda alternante sintética a los complejos ST-T de un ECG ruidoso simulado. Normalmente, el ECG de fondo se construye como la repetición de un solo latido limpio (bien sintético, como en (Nearing *et al.* 1996; Burattini *et al.* 1998b; Burattini 1998; Nearing y Verrier 2002) o bien extraído de un ECG real, como en (Laguna *et al.* 1996; Mrowka *et al.* 1998; Narayan y Smith 1999b; Srikanth *et al.* 2002b,a; Martínez y Olmos 2002; Martínez *et al.* 2000a)). Una limitación de estos simuladores es que no consideran la variabilidad fisiológica del ECG que puede llegar a enmascarar las AOT en los registros reales. En algunos estudios se produce un escalado temporal de las formas de onda para simular el efecto de un ritmo cardíaco variable (Burattini *et al.* 1998b; Burattini 1998; Nearing y Verrier 2002). Para evaluar el comportamiento del método ante diferentes niveles de ruido, se añade ruido aleatorio generado por ordenador (generalmente blanco, gaussiano y estacionario) (Laguna *et al.* 1996; Burattini 1998; Burattini *et al.* 1998b; Srikanth *et al.* 2002b,a) al ECG de fondo. Una forma de añadir realismo a la señal simulada consiste en sumar ruido fisiológico registrado, como hacemos en (Martínez *et al.* 2000a; Martínez y Olmos 2002), donde se utiliza la base de datos *MIT-BIH noise stress database*. Finalmente, se pueden conseguir simulaciones más realistas añadiendo alternancias simuladas a registros ECG reales sin alternancias, con su propia variabilidad fisiológica y el ruido grabado en el propio registro de la señal (Narayan y Smith 1999b; Martínez *et al.* 2000b; Martínez y Olmos 2003). Estas simulaciones proporcionan resultados mucho más cercanos a la realidad, ya que tanto el ECG de fondo como el ruido son reales.

Como se ha discutido anteriormente (*vid. supra* Sección 2.4.5) y se mostrará en los capítulos siguientes, la selección de un método de análisis con un conjunto de parámetros determina las características de la señal y del ruido con las que el método puede enfrentarse con éxito. De ahí que un sobreajuste entre los parámetros de la simulación (duración de los episodios, forma de onda, distribución de ruido, estacionariedad) y los parámetros del análisis puede sesgar los resultados y, por tanto, debe evitarse.

2.6. Conclusiones.

En esta sección se han revisitado dos décadas de análisis automático de AOT. Nos hemos servido de un esquema general en tres etapas para diseccionar y estudiar analíticamente los diferentes métodos aparecidos en la literatura. Este marco de referencia nos ha permitido encontrar una relación analítica entre métodos que han sido considerados

como claramente diferentes en la literatura, debido a las diferencias en sus planteamientos iniciales. Se han aislado los principios básicos de la detección y estimación del resto de procedimientos auxiliares y parámetros heurísticos.

La etapa de preprocesado es necesaria para acondicionar la señal para el análisis. Sus especificaciones dependen en gran medida de las condiciones de adquisición, pero también de la robustez de las etapas subsiguientes.

Algunos esquemas lineales de reducción de datos reducen la carga computacional eliminando la redundancia y otras componentes no deseadas. Su efecto en el ECG es el de un filtro lineal periódico variante en el tiempo. Otros métodos utilizan etapas no lineales que extraen las características relevantes de la repolarización.

El núcleo de los métodos de análisis de AOT está constituido por las subetapas de detección y estimación. Hemos mostrado que una buena parte de los métodos publicados (incluyendo los más ampliamente utilizados ME y MDC) están basados en la transformada de Fourier localizada de las series latido a latido. Las diferencias de prestaciones entre métodos pueden explicarse, por una parte, por la selección de la ventana de análisis, y por otra, por la adaptación de la regla de decisión a los cambios en las características del ruido. Una segunda categoría recoge los métodos basados en conteo de cambios de signo. La principal desventaja de estos métodos en su sensibilidad ante la presencia de componentes no alternantes de gran amplitud. Finalmente, el reciente método MMM pertenece, junto con algunos de los métodos desarrollados en esta tesis, a la categoría de los métodos basados en filtrado no lineal. Estos métodos son intrínsecamente robustos ante valores extremos o ruido impulsivo y han mostrado mejores prestaciones que los métodos lineales ante ruido fisiológico.

Capítulo 3

Análisis de AOT basado en modelos gaussianos.

3.1. Introducción.

La teoría de la detección es fundamental en el diseño de sistemas que permitan decidir cuándo sucede un fenómeno de interés. Este tipo de problemas aparece en distintos ámbitos: comunicaciones, radar, control de errores, procesado de voz e imagen, así como en el procesado de señales biomédicas. En muchas de estas aplicaciones la detección precede a la tarea de extraer información sobre el fenómeno detectado (estimación de parámetros). Estimación y detección son dos procesos que están íntimamente ligados.

Las teorías estadísticas de la detección y la estimación proporcionan metodologías para diseñar detectores y estimadores adaptados a un modelo de señal observada (señal deseada, ruido y otras componentes) establecido *a priori*. Las prestaciones del análisis derivado de este modo dependen del grado de adecuación del modelo a las condiciones reales del problema. Al introducir información *a priori* en el modelo se reducen los grados de libertad del mismo, restringiendo las señales bien representadas por el mismo. El análisis resultante es entonces más eficiente, siempre que el modelo sea adecuado para la señal observada. Sin embargo, al reducir los grados de libertad aumenta el riesgo de que existan desajustes entre la señal observada y el modelo. Por el contrario, pueden conseguirse modelos más robustos aumentando los grados de libertad del modelo, pero esto sucede, en general, a costa de empeorar las prestaciones y complicar la metodología. Encontramos, por tanto, un compromiso para seleccionar modelos precisos, sencillos y realistas.

En este capítulo y en el siguiente se realiza un acercamiento teórico al problema del análisis de AOT en el ECG a partir del modelado de la señal ECG observada. Se emplearán para ello técnicas y conceptos procedentes de las teorías estadísticas de la detección y la estimación (van Trees 1968; Scharf 1991; Kay 1993, 1998).

3.2. Tests de hipótesis. Teoría de la decisión estadística.

Un problema simple de detección consiste en decidir si una señal está o no presente en unos datos observados. Se trata entonces de decidir entre dos hipótesis posibles: \mathcal{H}_1 : la señal deseada está presente (junto con ruido, errores de medida y/u otras componentes no deseadas) y \mathcal{H}_0 : los datos observados sólo contienen componentes no deseadas. Este problema se conoce como *test de hipótesis binario*. Para tomar la decisión, se debe emplear lo más eficientemente posible la información presente en los datos observados, así como el conocimiento *a priori* de las características de las señales presentes (la señal deseada, el ruido, otras señales...).

En el procesado de señales biomédicas es común que la señal deseada no sea conocida en su totalidad, aunque sí se suelen conocer algunas de sus características. La caracterización de la señal puede ser determinista (con algunos parámetros desconocidos) o aleatoria. En cualquiera de los dos casos, la observación de la misma estará inevitablemente acompañada de ruido, por lo que la señal observada deberá tratarse como una variable aleatoria multidimensional. Nos encontramos entonces ante un problema de decisión estadística. En las secciones siguientes se presentan distintas soluciones a este problema.

3.2.1. Test de hipótesis simples.

Consideremos un test de hipótesis binario, donde la señal observada se denota por \mathbf{x} . Un conocimiento ideal de los mecanismos subyacentes en la generación de la señal nos llevaría al conocimiento de las funciones de densidad de probabilidad (FDP) de la señal observada en las dos posibles hipótesis: $p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_1)$ y $p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_0)$. Dada una observación concreta \mathbf{x} , $p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_1)$ y $p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_0)$ indican lo verosímil que es cada una de las dos hipótesis y pueden utilizarse para tomar la decisión. En la práctica, las FDP reales no se conocen, y debemos limitarnos a establecer un modelo *a priori* y determinar las FDP a partir de él.

Dada la naturaleza aleatoria de la señal observada, el diseño de un detector libre de errores es imposible. La solución óptima pasa por minimizar el error según un criterio determinado. Podemos distinguir dos tipos de errores: las falsas alarmas (decidir \mathcal{H}_1 cuando \mathcal{H}_0 es cierta) y las pérdidas (decidir \mathcal{H}_0 cuando \mathcal{H}_1 es cierta)¹. La probabilidad de falsa alarma queda definida como $P_{FA} = Pr(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_0)$, y la probabilidad de pérdidas como $P_L = Pr(\mathcal{H}_0; \mathcal{H}_1)$. Aunque ambos errores son inevitables, se puede reducir uno de ellos a costa del otro. Nótese que P_L es el complemento a uno de la probabilidad de detección² $P_D = P(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_1) = 1 - P_L$.

El enfoque clásico consiste en encontrar el detector que maximiza la probabilidad de detección para un nivel dado de probabilidad de falsa alarma. El teorema de Neyman-

¹La terminología empleada varía según el campo de aplicación. En estadística se habla de errores de tipo I y de tipo II para referirse a las falsas alarmas y las pérdidas. En el entorno de la biomedicina es común referirse a ellos como falsos positivos y falsos negativos respectivamente.

²En estadística se habla del nivel de significación (α) y potencia de un test (β) para referirse a la P_{FA} y P_D , mientras que en biomedicina están muy arraigados los términos sensibilidad ($Se = P_D$) y especificidad ($Sp = 1 - P_{FA}$).

Pearson (Kay 1998, Teorema 3.1) afirma que el detector

$$T_{NP}(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_0)} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma \quad (3.1)$$

maximiza la P_D para una $P_{FA} = \alpha$, donde γ es un umbral tal que

$$P_{FA} = \int_{\{\mathbf{x}: T_{NP}(\mathbf{x}) > \gamma\}} p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_0) d\mathbf{x} = \alpha. \quad (3.2)$$

La función $T_{NP}(\mathbf{x})$ se conoce como el cociente de verosimilitudes (CV), y el test (3.1) como test del cociente de verosimilitudes (TCV) o test de Neyman-Pearson. También posee las mismas prestaciones (y por tanto es óptimo) cualquier detector resultado de aplicar una función biunívoca creciente a ambos miembros de (3.1).

Los enfoques bayesianos asignan probabilidades *a priori* a las hipótesis \mathcal{H}_0 y \mathcal{H}_1 para después minimizar una función objetivo que puede ser la probabilidad de error total, el riesgo de Bayes, o bien maximizar la probabilidad *a posteriori* (criterio *máximo a posteriori*). Todos los criterios conducen igualmente al detector (3.1) (Kay 1998), donde la única diferencia con el enfoque clásico reside en el cálculo del umbral³ γ . En procesado de señales biomédicas, la asignación razonable de las probabilidades *a priori* no es en absoluto trivial, por lo que nos centraremos en el enfoque de Neyman-Pearson.

3.2.2. Test de hipótesis compuestas.

En la sección anterior se ha supuesto un conocimiento perfecto de las FDP bajo las hipótesis \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_0 , lo que permite el diseño de detectores óptimos. En muchos problemas reales, sin embargo, las FDP no se conocen enteramente ya que algunos parámetros de la señal o del ruido son desconocidos *a priori* en al menos una de las dos hipótesis. Denotaremos por $\boldsymbol{\theta}_1$ y $\boldsymbol{\theta}_0$ los vectores de parámetros desconocidos en las hipótesis \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_0 respectivamente. Por tanto, las FDP correspondientes $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_1, \mathcal{H}_1)$ y $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_0, \mathcal{H}_0)$ están parametrizadas por $\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_0\}$. Para una observación concreta \mathbf{x} , $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_1, \mathcal{H}_1)$ y $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_0, \mathcal{H}_0)$ son funciones de los parámetros $\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_0\}$, indicando la verosimilitud de que dichos parámetros hayan generado la observación. De ahí que se les dé el nombre de funciones de verosimilitud. Las formas de estas funciones y las dimensiones de $\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_0\}$ pueden ser, en general, diferentes bajo las dos hipótesis.

Nos encontramos entonces ante un test de hipótesis compuestas, ya que cada una de las hipótesis $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0\}$ es en realidad una hipótesis compuesta por todo el rango de valores posible de los parámetros $\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_0\}$. El detector óptimo (en el sentido de Neyman-Pearson) para unos valores determinados de $\boldsymbol{\theta}_1$ y $\boldsymbol{\theta}_0$ viene dado por el CV

$$L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1) = \frac{p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_1, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_0, \mathcal{H}_0)} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma. \quad (3.3)$$

³En el test de Neyman-Pearson, el umbral se calcula fijando la probabilidad de falsa alarma deseada. En el enfoque bayesiano, el umbral viene fijado por las probabilidades *a priori* de cada una de las hipótesis y el coste asignado a cada decisión.

Nótese que el detector (3.3) depende en general de los parámetros desconocidos $\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_0\}$, y por tanto es irrealizable. Un test que, como (3.3), asume el conocimiento de parámetros desconocidos se denomina detector clarividente (*clairvoyant detector*). Aunque un detector clarividente no es realizable en la práctica, puede ser útil para evaluar una cota superior para las prestaciones de los detectores realizable. Así, las prestaciones del detector (3.3) establecen un límite máximo a las prestaciones que puede presentar un detector cuando los parámetros son desconocidos.

Si existe un detector que sea óptimo (maximizando la P_D para una P_{FA} dada) para cualquier valor posible de los vectores de parámetros se le denomina detector uniformemente más potente (UMP). Desafortunadamente, la existencia de un detector UMP no está asegurada en un test de hipótesis compuestas (Kay 1998, Cap. 6). De hecho, a excepción de algunas clases concretas de problemas, no existe normalmente un detector UMP, por lo que hay que recurrir a detectores subóptimos.

Existen dos enfoques principales para el diseño de detectores con parámetros desconocidos: el primero considera que $\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_0\}$ son parámetros deterministas desconocidos, e intenta estimarlos a partir de la señal observada, para luego sustituirlos en el cociente de verosimilitudes (3.3). El segundo considera que $\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_0\}$ son realizaciones de una variable aleatoria y les asigna unas FDP *a priori*.

3.2.2.1. Test del cociente de verosimilitudes generalizado (TCVG).

Esta estrategia, muy utilizada en el diseño de detectores subóptimos para tests de hipótesis compuestas, consiste en utilizar el cociente de verosimilitudes (3.3), sustituyendo los parámetros desconocidos $\{\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1\}$ por sus estimaciones de máxima verosimilitud (EMV) $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_0, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1\}$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}_i} p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_i, \mathcal{H}_i), \quad i = 0, 1. \quad (3.4)$$

El estadístico resultante se conoce como el cociente de verosimilitudes generalizado (CVG)

$$L_G(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_0, \mathcal{H}_0)} = \frac{\max_{\boldsymbol{\theta}_1} p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_1, \mathcal{H}_1)}{\max_{\boldsymbol{\theta}_0} p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_0, \mathcal{H}_0)}, \quad (3.5)$$

y el detector correspondiente

$$L_G(\mathbf{x}) \stackrel{\mathcal{H}_1}{\underset{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma, \quad (3.6)$$

es el test del cociente de verosimilitudes generalizado (TCVG).

Aunque el TCVG no es el resultado de ninguna optimización, da buenos resultados en la práctica, y es fácil de implementar (Kay 1998). Además, tiene la ventaja de que sus prestaciones asintóticas son fácilmente caracterizables. Para modelos lineales en ruido gaussiano, Scharf y Friedlander han demostrado que el TCVG es el detector óptimo dentro de la clase de los detectores que comparten una serie de invariancias deseables para el modelo en cuestión (Scharf y Friedlander 1994).

3.2.2.2. Enfoque Bayesiano.

Otra manera de enfocar el problema consiste en tratar los parámetros desconocidos $\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_0\}$ como variables aleatorias, asignándoles unas FDP *a priori* $p(\boldsymbol{\theta}_1)$ y $p(\boldsymbol{\theta}_0)$. El cociente de verosimilitudes (3.1) puede calcularse entonces como

$$L_B(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_0)} = \frac{\int p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_1, \mathcal{H}_1) p(\boldsymbol{\theta}_1) d\boldsymbol{\theta}_1}{\int p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_0, \mathcal{H}_0) p(\boldsymbol{\theta}_0) d\boldsymbol{\theta}_0}. \quad (3.7)$$

La asignación de las FDP $p(\boldsymbol{\theta}_1)$ y $p(\boldsymbol{\theta}_0)$, así como la complejidad de su cálculo (ya que involucra integrales multidimensionales) hacen que este enfoque no sea tan popular como el TCVG.

3.2.3. Prestaciones de un detector.

Sea $T(\mathbf{x})$ el estadístico de detección del test binario de hipótesis expresado por

$$T(\mathbf{x}) \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma. \quad (3.8)$$

Las prestaciones del detector (P_D y P_{FA}) para unos valores concretos de $\{\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1\}$ pueden calcularse en función del umbral como

$$P_D = \Pr\{T(\mathbf{x}) > \gamma; \mathcal{H}_1\} = 1 - P_L \quad (3.9)$$

$$P_{FA} = \Pr\{T(\mathbf{x}) > \gamma; \mathcal{H}_0\}. \quad (3.10)$$

Por tanto, es necesario conocer las FDP de $T(\mathbf{x})$ bajo ambas hipótesis para estudiar las prestaciones teóricas de un detector. Cuando no es posible determinar analíticamente las prestaciones, podemos estimar P_D y P_{FA} recurriendo a simulaciones de Monte Carlo (Kay 1998).

3.2.4. Detección de señal en ruido. Propiedades asintóticas.

3.2.4.1. Detector TCVG.

Cuando se trata de detectar una señal inmersa en ruido y/o interferencias encontramos que las dos hipótesis sólo se diferencian en que la señal está presente en \mathcal{H}_1 , pero no en \mathcal{H}_0 . Es muy frecuente entonces que la FDP sea la misma bajo las dos hipótesis, excepto por los valores que toman algunos de sus parámetros.

Sea $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_s^T \boldsymbol{\theta}_m^T]^T$ el vector de parámetros de dimensiones $N_T \times 1$ de la FDP $p(\boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m)$. La señal queda determinada por los N_s parámetros de $\boldsymbol{\theta}_s$, que son sólo desconocidos bajo la hipótesis \mathcal{H}_1 (bajo \mathcal{H}_0 toman un valor conocido $\boldsymbol{\theta}_s = \boldsymbol{\theta}_{s0}$) y que sirven para diferenciar ambas hipótesis. En ocasiones existen también otros parámetros referidos al

ruido que son desconocidos bajo ambas hipótesis ($\boldsymbol{\theta}_m$, de dimensiones $N_m \times 1$). Son los denominados *parámetros molestos*. Podemos escribir el test de hipótesis como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 : \quad & \boldsymbol{\theta}_s = \boldsymbol{\theta}_{s0}, \quad \boldsymbol{\theta}_m \\ \mathcal{H}_1 : \quad & \boldsymbol{\theta}_s \neq \boldsymbol{\theta}_{s0}, \quad \boldsymbol{\theta}_m.\end{aligned}\quad (3.11)$$

El TCVG es en este caso⁴

$$L_G(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_{s1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m1})}{p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_{s0}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m0})} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma, \quad (3.12)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{s1}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m1}$ son los EMV bajo \mathcal{H}_1

$$[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{s1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m1}] = \arg \max_{[\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m]} p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m), \quad (3.13)$$

y $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m0}$ es el EMV bajo \mathcal{H}_0 ,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m0} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}_m} p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_{s0}, \boldsymbol{\theta}_m). \quad (3.14)$$

Nótese que si aplicamos una función biunívoca creciente $f(x)$ al CVG obtenemos el estadístico $l_G(\mathbf{x}) = f(L_G(\mathbf{x}))$. Si se compara $l_G(\mathbf{x})$ con el umbral modificado $\gamma' = f(\gamma)$, tenemos el TCVG modificado

$$l_G(\mathbf{x}) \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} f(\gamma) = \gamma', \quad (3.15)$$

que proporciona las mismas P_{FA} y P_D que el test (3.12). Por tanto, los detectores (3.12) y (3.15) son equivalentes y tienen las mismas prestaciones.

3.2.4.2. Prestaciones asintóticas del EMV y el TCVG.

Para estudiar las prestaciones exactas de los EMV de los parámetros desconocidos y del detector TCVG (3.12) es preciso determinar la distribución de los estadísticos correspondientes en función de los valores que toman los parámetros desconocidos. Las distribuciones estadísticas dependen del modelo de señal considerado y en ocasiones no es posible obtener una expresión cerrada para la misma. No obstante, bajo ciertas condiciones de regularidad, es posible conocer la distribución exacta de los EMV y el CVG cuando la dimensión de los datos observados tiende a infinito (distribución asintótica).

En primer lugar, definimos la matriz de información de Fisher $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$. Sea \mathbf{x} un vector aleatorio con FDP $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ dependiente del vector de parámetros $N_T \times 1$ $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \theta_2 \dots \theta_{N_T}]^T$. La matriz de información de Fisher del vector $\boldsymbol{\theta}$ es la matriz $N_T \times N_T$

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = E \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \right) = -E \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \right) \quad (3.16)$$

⁴Nótese que aunque el vector de parámetros molestos es el mismo $\boldsymbol{\theta}_m$ bajo ambas hipótesis, el estimador puede ser distinto. De ahí la doble notación $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m1}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m0}$.

cuyos elementos son

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = -E \left(\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right). \quad (3.17)$$

Esta matriz, procedente de la teoría de la información, es clave en la determinación de la cota inferior de Cramér-Rao y de las prestaciones asintóticas de los EMV y TCVG (Kay 1993, 1998).

Teorema 3.1 (Cota inferior de Cramér-Rao (Kay 1993, pág. 44)). *Se asume que la FDP $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ satisface las condiciones de regularidad*

$$E \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) = \mathbf{0} \quad \text{para cualquier } \boldsymbol{\theta}, \quad (3.18)$$

tomando la esperanza con respecto a \mathbf{x} . Entonces, la matriz de covarianzas $\mathbf{C}_{\check{\boldsymbol{\theta}}}$ de cualquier estimador insesgado $\check{\boldsymbol{\theta}}$ cumple que

$$\mathbf{C}_{\check{\boldsymbol{\theta}}} - \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \geq \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

evaluando la matriz de Fisher en el valor verdadero del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$ y donde $\geq \mathbf{0}$ significa que la matriz es semidefinida positiva.

La demostración puede encontrarse en (Kay 1993, Apéndice 3.B).

Los elementos de la diagonal de una matriz semidefinida positiva son mayores o iguales que cero. Por tanto, tenemos que la varianza de la estimación del parámetro i -ésimo ha de satisfacer la siguiente desigualdad

$$\text{var}(\check{\theta}_i) \geq \frac{1}{[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{ii}} = \frac{1}{-E \left(\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i^2} \right)}. \quad (3.20)$$

Se dice que un estimador insesgado $\check{\boldsymbol{\theta}}$ es eficiente si alcanza la la cota inferior de Cramér-Rao

$$\mathbf{C}_{\check{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.21)$$

Teorema 3.2 (Distribución Asintótica del EMV (Kay 1993, pág. 183)). *Si la FDP $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ cumple ciertas condiciones de regularidad, el EMV del vector de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta}$ está distribuido asintóticamente según*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})), \quad (3.22)$$

donde $\stackrel{a}{\sim}$ indica que se trata de una distribución asintótica, $\boldsymbol{\theta}$ es el valor verdadero del vector de parámetros e $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ es la matriz de información de Fisher evaluada en el verdadero valor de $\boldsymbol{\theta}$

Por tanto, el EMV es consistente y asintóticamente eficiente, ya que al aumentar el tamaño de los datos analizados $E(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \rightarrow \boldsymbol{\theta}$ y $\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \rightarrow \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$.

Teorema 3.3 (Distribución Asintótica del CVG (Kay 1998, pág. 205)). *Cuando el tamaño de los datos es suficientemente grande, si los EMV alcanzan su FDP asintótica (Teorema 3.2) el estadístico modificado $2 \ln L_G(\mathbf{x})$ verifica*

$$2 \ln L_G(\mathbf{x}) \stackrel{a}{\sim} \begin{cases} \chi_{N_s}^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_{N_s}^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1, \end{cases} \quad (3.23)$$

donde $L_G(\mathbf{x})$ es el CVG (3.12), $\chi_{N_s}^2$ denota una distribución *ji-cuadrado (central)* con N_s grados de libertad (la dimensión del vector de parámetros de señal $\boldsymbol{\theta}_s$) y $\chi_{N_s}^2(\lambda)$ denota una distribución *ji-cuadrado no central* con N_s grados de libertad y parámetro de no centralidad λ . Este parámetro indica la separación de las FDPs bajo ambas hipótesis⁵, y toma un valor de

$$\lambda = (\boldsymbol{\theta}_{s1} - \boldsymbol{\theta}_{s0})^T [\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}_{s0}, \boldsymbol{\theta}_m) - \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}_{s0}, \boldsymbol{\theta}_m) \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{s0}, \boldsymbol{\theta}_m) \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}_{s0}, \boldsymbol{\theta}_m)] (\boldsymbol{\theta}_{s1} - \boldsymbol{\theta}_{s0}) \quad (3.24)$$

donde $\boldsymbol{\theta}_s$ y $\boldsymbol{\theta}_m$ son los valores reales de los vectores de parámetros de señal y de parámetros molestos, y las matrices $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_x \boldsymbol{\theta}_y}$ son las particiones de la matriz de información de Fisher

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m) & \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m) \\ \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m) & \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_s \times N_s & N_s \times N_m \\ N_m \times N_s & N_m \times N_m \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

La demostración puede encontrarse en (Kay 1998, Apéndice 6.C). Nótese que el estadístico modificado $2 \ln L_G(\mathbf{x})$ es equivalente al CVG $L_G(\mathbf{x})$.

Los Teoremas 3.2 y 3.3 nos permitirán calcular las prestaciones aproximadas de los EMV y TCVG cuando no sea posible obtener una expresión cerrada de sus prestaciones exactas para un tamaño finito de los datos.

La Figura 3.1 muestra las FDP asintóticas del CVG bajo ambas hipótesis para distintos parámetros de no centralidad y grados de libertad. Es de destacar que la FDP asintótica bajo \mathcal{H}_0 no depende de ninguno de los parámetros del ruido, por lo que puede calcularse el umbral necesario para tener una P_{FA} dada (aunque esta propiedad no se cumple necesariamente si el tamaño de los datos es finito). Los detectores que presentan esta interesante propiedad se denominan detectores con tasa de falsa alarma constante (o CFAR, *constant false alarm rate*).

La dependencia existente entre la P_D y P_{FA} se conoce como la característica de operación del receptor. Se representa gráficamente por medio de las denominadas curvas ROC (*receiver operating characteristics*), utilizadas para comparar las prestaciones de distintos detectores.

La Figura 3.2 muestra las curvas ROC asintóticas del TCVG obtenidas para distintos valores de N_s y λ . En ellas podemos apreciar que las prestaciones mejoran al incrementar el parámetro de no centralidad λ y al disminuir el número de grados de libertad N_s (es decir, el número de parámetros desconocidos de la señal).

⁵Si $x \sim \chi_N^2$, $E(x) = N$, $\text{var}(x) = 2N$, mientras que si $x \sim \chi_N^2(\lambda)$, $E(x) = N + \lambda$, $\text{var}(x) = 2N + 4\lambda$. También es de destacar que cuando N crece, las distribuciones χ^2 pueden aproximarse por una distribución gaussiana.

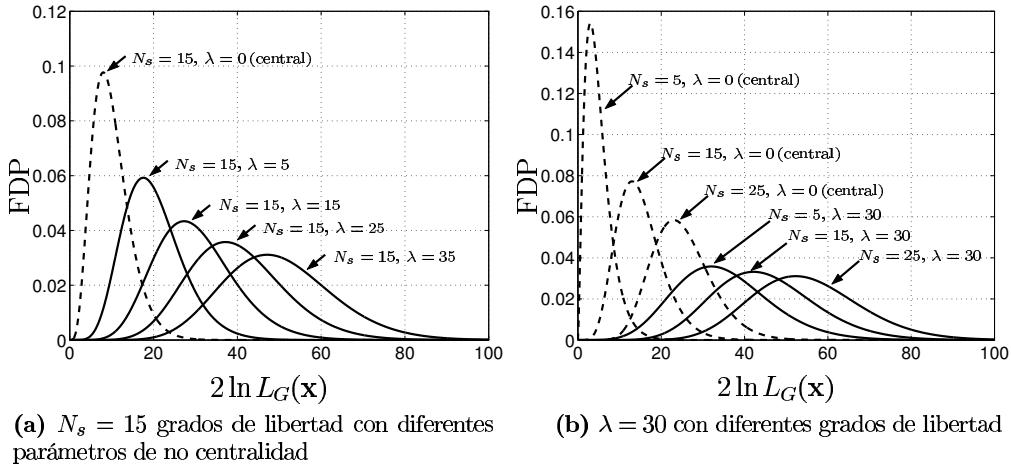


Figura 3.1: FDP asintótica del estadístico CVG modificado $2 \ln L_G(\mathbf{x})$ bajo \mathcal{H}_0 (distribución $\chi_{N_s}^2$, en línea discontinua) y \mathcal{H}_1 (distribución $\chi_{N_s}^2(\lambda)$, en línea continua) para distintos valores de N_s y λ .

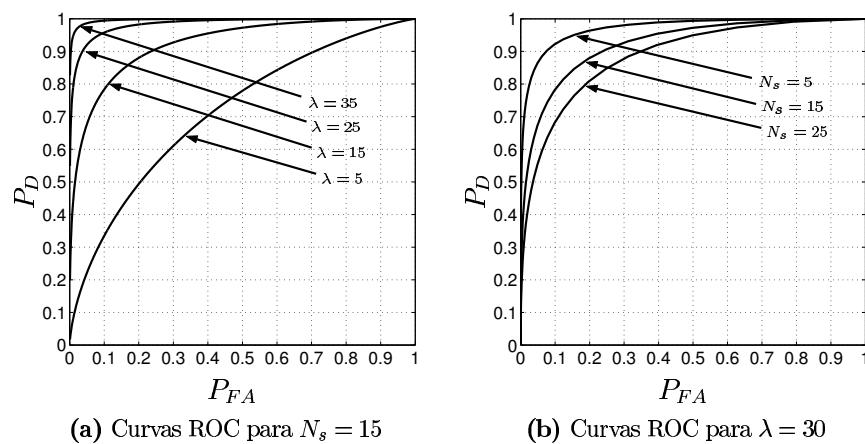


Figura 3.2: Curvas ROC asintóticas de detectores CVG con distintos N_s y λ .

La presencia de parámetros desconocidos del ruido también afecta a las prestaciones, si bien lo hace a través del parámetro de no centralidad (3.24). En efecto, el valor de λ de un detector TCVG clarividente⁶ donde los parámetros molestos fueran conocidos es $\lambda_c = (\boldsymbol{\theta}_{s1} - \boldsymbol{\theta}_{s0})^T \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}_{s0}, \boldsymbol{\theta}_m) (\boldsymbol{\theta}_{s1} - \boldsymbol{\theta}_{s0})$. Cuando hay parámetros de ruido desconocidos, puede comprobarse que

$$\lambda = \lambda_c - (\boldsymbol{\theta}_{s1} - \boldsymbol{\theta}_{s0})^T [\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}_{s0}, \boldsymbol{\theta}_m) \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{s0}, \boldsymbol{\theta}_m) \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}_{s0}, \boldsymbol{\theta}_m)] (\boldsymbol{\theta}_{s1} - \boldsymbol{\theta}_{s0}) \leq \lambda_c \quad (3.26)$$

de manera que las prestaciones son iguales o peores que las del TCVG clarividente. La igualdad $\lambda = \lambda_c$ se verifica si la matriz de Fisher cruzada entre los parámetros de señal y los parámetros molestos es nula, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m} = \mathbf{0}$. En ese caso, el TCVG con parámetros molestos alcanza asintóticamente las mismas prestaciones del detector TCVG clarividente.

En resumen, las prestaciones son mejores si los detectores se basan en modelos con pocos grados de libertad (tanto en la señal a detectar como en el ruido). Esto se consigue introduciendo en el modelo el conocimiento disponible *a priori* de las características de la señal y del ruido. Por otro lado, ya se ha señalado que permitiendo nuevos grados de libertad se relajan las asunciones del modelo, con lo que se puede dotar al detector de mayor robustez.

3.2.4.3. Detectores asintóticamente equivalentes.

Las prestaciones asintóticas de los TCVG (Teorema 3.3) son también alcanzadas asintóticamente por los detectores denominados test de Wald y test de puntuación de Rao (o simplemente test de Rao). En efecto, puede demostrarse que el estadístico de Wald

$$T_W(\mathbf{x}) = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{s1} - \boldsymbol{\theta}_{s0})^T \left(\left[\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{s1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m1}) \right]_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s} \right)^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{s1} - \boldsymbol{\theta}_{s0}), \quad (3.27)$$

donde

$$[\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m)]_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s} = (\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m) - \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m) \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m) \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m))^{-1} \quad (3.28)$$

y el estadístico de Rao

$$T_R(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m)}{\partial \boldsymbol{\theta}_s} \right)^T [\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m)]_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m)}{\partial \boldsymbol{\theta}_s} \right) \Bigg|_{\substack{\boldsymbol{\theta}_s = \boldsymbol{\theta}_{s0} \\ \boldsymbol{\theta}_m = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m0}}} \quad (3.29)$$

presentan la misma distribución asintótica⁷ que el CVG modificado $2 \ln L_G(\mathbf{x})$. La demostración puede encontrarse en (Kay 1998, Apéndices 6.A y 6.B). Es conveniente tenerlos en

⁶No confundir el detector TCVG clarividente (donde los parámetros de ruido son conocidos, pero no los de señal) con el detector clarividente de Neyman-Pearson, que supone conocidos todos los parámetros del modelo.

⁷En el caso del estadístico de Rao (3.29) es preciso asumir, además, que la señal es débil respecto al ruido.

cuenta porque, en ocasiones, pueden dar lugar a estadísticos más sencillos que el propio CVG. Nótese que el estadístico del test de Rao sólo precisa calcular el EMV de los parámetros molestos bajo \mathcal{H}_0 . Otra propiedad interesante es que cuando el modelo de señal es lineal y el ruido es gaussiano, aditivo y sin parámetros molestos, los tres tests (TCVG, Wald y Rao) son iguales (Kay 1998, p. 228, Problema 6.15).

3.3. Modelado de la señal observada.

Como se ha visto en el capítulo 2, el análisis de AOT en el ECG se lleva a cabo generalmente tras una etapa de preprocesado donde la señal es filtrada y segmentada, y se forma una matriz de complejos ST-T alineados.

Consideremos el análisis de AOT localizado en un fragmento de L latidos. Siguiendo la notación del capítulo previo, la señal observada será una matriz \mathbf{X} de complejos ST-T, con dimensiones $N \times L$, donde N es el número de muestras de cada complejo. La columna i -ésima $\mathbf{x}_i = [x_i[0], \dots, x_i[N-1]]^T$ contiene el complejo ST-T del latido i -ésimo y la fila n -ésima contiene la serie de amplitudes latido a latido $\{x_0[n], x_1[n], \dots, x_{L-1}[n]\}$.

En la matriz de complejos correspondiente al ECG alternante podemos distinguir tres componentes claramente diferenciadas: el ECG *de fondo*, que se repite latido a latido; la componente alternante, con una periodicidad de dos latidos; y el resto de componentes no deseadas consideradas como ruido aditivo. De ahí que podamos definir el siguiente modelo sencillo para la matriz de complejos:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{L-1}]; \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{s} + \frac{1}{2} \underbrace{e_i \mathbf{a}}_{\mathbf{a}_i} (-1)^i + \mathbf{w}_i, \quad i = 0, \dots, L-1, \quad e_i \neq 0. \quad (3.30)$$

donde $\mathbf{s} = [s[0], \dots, s[N-1]]^T$ es el complejo ST-T de fondo (el mismo en todos los latidos), \mathbf{a}_i es la componente alternante en el latido i -ésimo⁸ y \mathbf{w}_i es un vector de ruido que agrupa todas las componentes no deseadas del complejo i -ésimo. Dentro de la componente alternante, la serie $\{e_0, \dots, e_{L-1}\}$ modela la evolución latido a latido de la amplitud alternante y $\mathbf{a} = [a[0], \dots, a[N-1]]^T$ indica la forma de onda alternante, considerada constante en la ventana de L latidos. La serie $\{e_i\}$ está normalizada de tal forma que

$$\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i^2 = 1. \quad (3.31)$$

De este modo, la norma de \mathbf{a} es una medida del valor RMS de la alternancia en la ventana de análisis

$$\sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{a}_i\|_2^2} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i^2 \|\mathbf{a}\|_2^2} = \|\mathbf{a}\|_2, \quad (3.32)$$

⁸El factor 1/2 se incluye en el modelo por coherencia con la definición de AOT como la diferencia entre las amplitudes de dos latidos consecutivos (Sección 2.3.3.2).

mientras que la ausencia de alternancias viene indicada por $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. El test binario de hipótesis correspondiente es

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0: \mathbf{x}_i &= \mathbf{s} + \mathbf{w}_i \\ \mathcal{H}_1: \mathbf{x}_i &= \mathbf{s} + \frac{1}{2} e_i \mathbf{a} (-1)^i + \mathbf{w}_i, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

El ECG *de fondo* es un vector de parámetros molestos que puede ser eliminado en la etapa de preprocessado filtrando por filas la matriz de complejos ST-T. Puede utilizarse, como en el MDC, un filtro paso-alto de eliminación de tendencias. Su versión más simple es un filtro diferenciador con respuesta impulsional $h[k] = (\delta[k] - \delta[k-1])/2$. De este modo, además de eliminarse la componente repetitiva latido a latido, se atenúan otras variaciones latido a latido de baja frecuencia. Por tanto, podemos simplificar el modelo sin pérdida de generalidad asumiendo que se ha llevado a cabo previamente un filtrado de eliminación de tendencias. El modelo de señal es entonces

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{L-1}]; \quad \mathbf{x}_i = \frac{1}{2} \underbrace{e_i \mathbf{a}}_{\mathbf{a}_i} (-1)^i + \mathbf{w}_i, \quad i = 0, \dots, L-1, \quad e_i \neq 0. \quad (3.34)$$

y el test de hipótesis asociado al problema de detección es

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0: \mathbf{x}_i &= \mathbf{w}_i \\ \mathcal{H}_1: \mathbf{x}_i &= \frac{1}{2} e_i \mathbf{a} (-1)^i + \mathbf{w}_i, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (3.35)$$

En los modelos propuestos se asume que la morfología de la señal alternante \mathbf{a}_i es constante en la ventana de análisis de L latidos: $\mathbf{a}_i = e_i \mathbf{a}$. Este supuesto es razonable si el intervalo de observación es suficientemente corto. La serie $\{e_0, \dots, e_{L-1}\}$, que determina la evolución latido a latido de la alternancia, se supone conocida y ha de ser definida *a priori*. La opción más sencilla consiste en asumir una alternancia estacionaria cuya amplitud es constante en el intervalo de observación ($e_i = 1, i = 0, \dots, L-1$ y $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}$). También puede pensarse en otro tipo de evoluciones (p. ej. triangular o trapezoidal, modelando un episodio que comienza creciendo hasta un valor máximo y termina decreciendo hasta desaparecer).

Se asume asimismo que la señal alternante \mathbf{a} es una combinación lineal de un conjunto de $P \leq N$ vectores linealmente independientes $\{\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_{P-1}\}$. La alternancia obedece por tanto al modelo lineal

$$\mathbf{a} = \mathbf{T} \mathbf{c}, \quad (3.36)$$

donde $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_{P-1}]$ es una matriz $N \times P$ conocida, de rango $P \leq N$, y $\mathbf{c} = [c_0 \dots c_{P-1}]^T$ es un vector $P \times 1$ de parámetros desconocidos. Por tanto, el modelo tiene P grados de libertad. Este paradigma lineal permite modelar la señal con distintos niveles de conocimiento *a priori*: desde el conocimiento perfecto de la forma de onda, de modo que $\mathbf{T} = \mathbf{t}_0$ y $P = 1$, hasta el desconocimiento absoluto, de forma que cualquier morfología de la señal se considera posible (por ejemplo, haciendo $\mathbf{T} = \mathbb{I}_N, P = N$).

El ruido es la única componente no determinista del modelo. Por tanto, las asunciones que se hagan sobre sus características determinarán la función de verosimilitud de la

señal observada y , en consecuencia, los estimadores y estadísticos de detección adaptados al modelo seleccionado. Por simplicidad, el ruido presente en el ECG suele modelarse como una variable aleatoria gaussiana, estacionaria e incorrelada. En el presente capítulo y en el siguiente se estudiarán metodologías de análisis de AOT derivadas a partir de diferentes modelos de ruido.

En este capítulo asumiremos que el ruido en el complejo ST-T i -ésimo es gaussiano, de media nula, varianza σ_i^2 y matriz de covarianzas \mathbf{C}_w , normalizada de tal modo que $tr(\mathbf{C}_w) = N$. Se asume igualmente que el ruido en latidos diferentes es incorrelado. Así, tenemos que

$$\mathbf{w}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \mathbf{C}_w) \quad (3.37)$$

$$E(\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T) = \delta_{ij} \sigma_i^2 \mathbf{C}_w, \quad i, j = 0, \dots, L-1, \quad (3.38)$$

donde δ_{ij} es la Delta de Kronecker. La matriz de covarianzas se supone conocida y estacionaria para todos los latidos. En cuanto al nivel de ruido, podemos plantear diferentes asunciones sobre el grado de conocimiento *a priori* y estacionariedad del mismo, que nos conducirán a diferentes modelos.

El modelo más sencillo asume que el nivel de ruido es estacionario $\sigma_i^2 = \sigma^2$ y conocido *a priori*. Se trata, por tanto, de un **modelo gaussiano estacionario** (Sección 3.4). Un modelo más realista consiste en asumir que la varianza de ruido es constante dentro de la ventana de análisis $\sigma_i^2 = \sigma^2$, pero donde σ^2 es un parámetro desconocido. Este modelo permite la adaptación del método al nivel de ruido, ya que éste debe ser estimado en cada fragmento de señal. Podemos hablar entonces de un **modelo gaussiano adaptativo** (Sección 3.5). Por último, podemos considerar que la varianza de ruido es desconocida y puede variar de latido en latido. Se trata entonces de un **modelo gaussiano no estacionario** (Sección 3.6).

3.4. Modelo gaussiano estacionario.

3.4.1. Planteamiento.

Se considera el siguiente modelo de señal

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{L-1}]; \quad \mathbf{x}_i = \frac{1}{2} \underbrace{e_i \mathbf{T} \mathbf{c}}_{\mathbf{a}_i} (-1)^i + \mathbf{w}_i, \quad i = 0, \dots, L-1, \quad e_i \neq 0. \quad (3.39)$$

$$\mathbf{w}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \mathbf{C}_w)$$

$$E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T\} = \delta_{ij} \sigma^2 \mathbf{C}_w, \quad \text{con } \mathbf{C}_w \text{ definida positiva y } tr(\mathbf{C}_w) = N. \quad (3.40)$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_{P-1}] \quad (\text{matriz } N \times P)$$

$$\mathbf{c} = [c_0 \dots c_{P-1}]^T \quad (\text{vector } P \times 1),$$

donde los únicos parámetros desconocidos son los P coeficientes del vector \mathbf{c} .

La FDP de la señal observada es

$$p(\mathbf{X}; \mathbf{c}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NL}{2}} \det^{1/2}(\mathbf{C}_w)} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} e_i \mathbf{T} \mathbf{c} (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 \right) \quad (3.41)$$

donde $\|\cdot\|_{\mathbf{W}}$ es la norma inducida por el producto escalar ponderado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{W}} = \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{v}$, de manera que $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{u}$.

El problema de detección de alternancias puede reducirse al test de parámetros

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0: \mathbf{c} &= \mathbf{0} \\ \mathcal{H}_1: \mathbf{c} &\neq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.4.2. EMV y TCVG.

El detector TCVG correspondiente es

$$\begin{aligned} L_G(\mathbf{X}) &= \frac{p(\mathbf{X}; \hat{\mathbf{c}}, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{X}; \mathcal{H}_0)} \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} e_i \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 - \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_i\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 \right) \right] \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma. \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde $\hat{\cdot}$ indica el EMV del parámetro correspondiente. Para obtener el EMV de \mathbf{c} bajo la hipótesis \mathcal{H}_1 maximizamos, por su mayor sencillez, el logaritmo de la función de verosimilitud

$$\ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \sigma^2, \mathcal{H}_1) = -NL \ln \sqrt{2\pi\sigma^2} - \ln \sqrt{\det(\mathbf{C}_w)} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} e_i \mathbf{T} \mathbf{c} (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2. \quad (3.44)$$

Igualando a cero su derivada obtenemos la condición

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \sigma^2, \mathcal{H}_1)}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}}} = \frac{1}{2\hat{\sigma}_1^2} \sum_{i=0}^{L-1} \left(e_i (-1)^i \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x} - \frac{1}{2} e_i^2 \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.45)$$

Despejando y teniendo en cuenta que $\sum_{i=0}^{L-1} e_i^2 = L$ obtenemos el siguiente EMV lineal

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i. \quad (3.46)$$

Nótese que los dos primeros términos de (3.44) no dependen de \mathbf{c} . Por tanto, la maximización llevada a cabo equivale a minimizar la función de error $\sum_{i=0}^{L-1} \varepsilon_i^T \mathbf{C}_w^{-1} \varepsilon_i$ donde $\varepsilon_i = \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} (-1)^i e_i \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}}$. Esta función corresponde al criterio de mínimos cuadrados generalizados. El EMV de la alternancia para el modelo lineal gaussiano estacionario es, por tanto, un estimador de mínimos cuadrados generalizados (EMCG).

Aplicando la propiedad de la invariancia del EMV (Kay 1993, Teorema 7.4, p. 185), el EMV (y también el EMCG) de la forma de onda alterna es

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}} &= \mathbf{T}\hat{\mathbf{c}} = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i \\ &= \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{x}_i.\end{aligned}\quad (3.47)$$

donde $\mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} = \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1}$ es una matriz de proyección oblicua⁹ en el subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$ de rango P engendrado por las columnas de \mathbf{T} . Así, el EMV de la alternancia se obtiene proyectando los complejos ST-T en el subespacio de señal, y realizando un promediado ponderado de las series latido a latido demoduladas. Nótese que cualquier otra base engendradora del subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$ proporciona el mismo EMV $\hat{\mathbf{a}}$.

La inversa de la matriz de covarianzas puede factorizarse como $\mathbf{C}_w^{-1} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$, donde \mathbf{D} es una matriz $N \times N$ no singular. La matriz \mathbf{D} funciona como un filtro blanqueador¹⁰, ya que al aplicarla a un vector de ruido $\mathbf{w}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{C}_w)$ produce un vector de ruido incorrelado $\mathbf{w}'_i = \mathbf{D}\mathbf{w}_i$, con matriz de covarianzas

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{w'} &= E(\mathbf{w}'\mathbf{w}'^T) = E(\mathbf{D}\mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{D}) \\ &= \sigma^2 \mathbf{D}\mathbf{C}_w \mathbf{D} = \sigma^2 \mathbb{I}_{N \times N}.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Puede definirse la señal blanqueada

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{D}\mathbf{x}_i, \quad (3.49)$$

cuyo modelo es

$$\mathbf{x}'_i = \frac{1}{2} (-1)^i \underbrace{e_i \mathbf{T}' \mathbf{c}}_{\mathbf{a}'_i} + \mathbf{w}'_i, \quad i = 0, \dots, L-1, \quad e_i \neq 0, \quad (3.50)$$

donde $\mathbf{w}'_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \mathbb{I}_N)$ es un vector de ruido blanqueado y la matriz $\mathbf{T}' = \mathbf{D}\mathbf{T}$ es la matriz de vectores base blanqueados $\mathbf{t}'_i = \mathbf{D}\mathbf{t}_i$. En la señal blanqueada, las formas de onda que cumplen el modelo se encuentran en el subespacio blanqueado $\langle \mathbf{T}' \rangle$, engendrado por las P formas de onda blanqueadas \mathbf{t}'_p , $p = 0, \dots, P-1$.

El EMV (3.46) puede expresarse en función de la señal blanqueada como el estimador de mínimos cuadrados

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{T}'^T \mathbf{T}')^{-1} \mathbf{T}'^T \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} (-1)^i e_i \mathbf{x}'_i. \quad (3.51)$$

⁹ $P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w}$ es una proyección oblicua respecto al producto escalar convencional. Se trata, no obstante, de una proyección ortogonal en el subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$ cuando se establece la ortogonalidad mediante el producto escalar ponderado $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{C}_w^{-1}}$. Bajo esta métrica, $P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} - P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{x}$ son ortogonales: $\langle P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{x}, \mathbf{x} - P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{C}_w^{-1}} = \mathbf{x}^T P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w}^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbb{I}_N - P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

¹⁰La descomposición $\mathbf{C}_w^{-1} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$ no es única, por lo que es posible seleccionar un filtro blanqueador \mathbf{D} con algunas características deseables (p. ej. causalidad, mediante la factorización de Cholesky).

Podemos obtener el EMV de la forma de onda alterna en la señal blanqueada como

$$\hat{\mathbf{a}}' = \mathbf{T}'\hat{\mathbf{c}} = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{x}'_i, \quad (3.52)$$

donde $\mathcal{P}_{\mathbf{T}'} = \mathbf{T}' (\mathbf{T}'^T \mathbf{T}')^{-1} \mathbf{T}'^T$ es la matriz de proyección ortogonal en el subespacio blanqueado $\langle \mathbf{T}' \rangle$.

Nótese que el proyector oblicuo $\mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} = \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1}$ puede descomponerse como $\mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} = \mathbf{D}^{-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{D}$, es decir, como la secuenciación de un filtro blanqueador \mathbf{D} , la proyección ortogonal en el subespacio blanqueado $\mathcal{P}_{\mathbf{T}'}$ y el filtro coloreador \mathbf{D}^{-1} .

Desarrollando el logaritmo del CVG (3.43) y empleando (3.51) podemos obtener el estadístico TCVG equivalente¹¹

$$\begin{aligned} l_G(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}'_i\|_2^2 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}'_i - \frac{1}{2} \mathbf{T}' \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{c}}^T \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{T}'^T \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i - \frac{1}{4\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} e_i^2 \|\mathbf{T}' \hat{\mathbf{c}}\|_2^2 \\ &= \frac{L}{2\sigma^2} \hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{T}'^T \mathbf{T}' \hat{\mathbf{c}} - \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{T}' \hat{\mathbf{c}}\|_2^2 \\ &= \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{T}' \hat{\mathbf{c}}\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.53)$$

Por tanto, la regla de decisión del TCVG modificado puede escribirse como

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{L}{4\sigma^2} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 = \frac{1}{L\sigma^2} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i \right\|_2^2 \begin{cases} \geq \frac{L\|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{4} & \mathcal{H}_1 \\ \leq \frac{L\|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{4} & \mathcal{H}_0 \end{cases} 2 \ln \gamma = \gamma'. \quad (3.54)$$

Al igual que sucedía con el estimador, el estadístico de detección es idéntico para todas las bases que engendran un mismo subespacio de señal. Por tanto, el EMV y el TCVG son invariantes a la base concreta del subespacio.

El estadístico $l_G(\mathbf{X})$ puede expresarse como el cociente entre la energía total de la alternancia blanqueada estimada en el subespacio $\langle \mathbf{T}' \rangle$: $\hat{\mathcal{E}}' = \frac{L\|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{4}$ y la varianza de ruido σ^2

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{\hat{\mathcal{E}}'}{\sigma^2}. \quad (3.55)$$

El TCVG es, por tanto, un **detector de subespacio** y está basado en la relación de energía a ruido (RER). No obstante, al asumir que σ^2 es una constante conocida, una vez fijado el umbral, la decisión se basa únicamente en la energía alterna medida en el subespacio de señal.

¹¹Al tomar logaritmos aplicamos una función biunívoca creciente al estadístico de detección, por lo que obtenemos un TCVG equivalente.

La Figura 3.3 muestra esquemáticamente una posible configuración del detector (3.54). En primer lugar se blanquea la señal y a continuación se proyecta en el subespacio de señal blanqueado. Ambas etapas pueden interpretarse como un preprocesado de las columnas de la matriz de complejos ST-T. La componente alterna se estima correlando cada fila con la serie $\frac{2}{L} e_i (-1)^i$, para calcular a continuación la energía de la alterna. También es posible colocar los filtros de blanqueado y proyección después del correlador. Esto equivale a estimar la alterna en las filas de la señal original (como si el ruido fuera blanco y el subespacio completo), y postprocesar la forma de onda estimada para tener en cuenta la correlación del ruido y el subespacio de señal. Nótese que el esquema de análisis se simplifica notablemente al considerar ruido blanco ($\mathbf{D} = \mathbb{I}_N$) y/o espacio completo de señal ($\mathcal{P}_{\mathbf{T}'} = \mathbb{I}_N$).

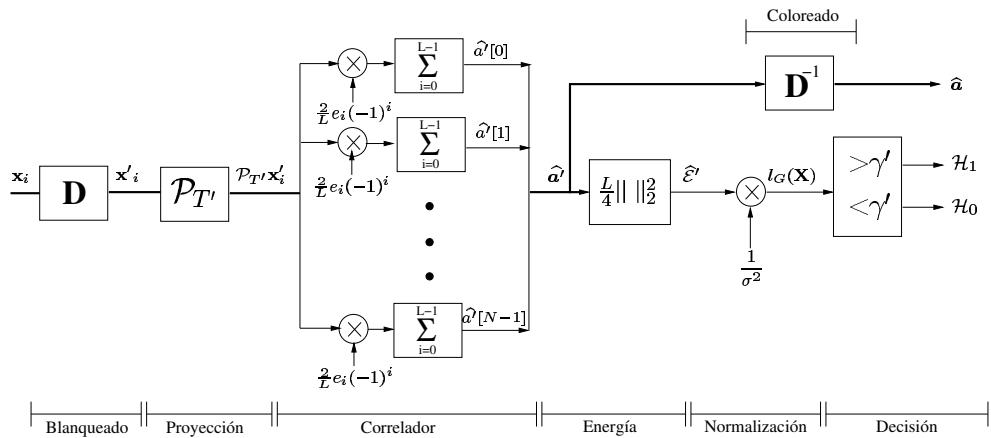


Figura 3.3: Estructura del análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano estacionario.

El estadístico (3.54) puede expresarse alternativamente en función de la energía alterna medida en un dominio transformado de dimensión reducida definido por una base ortonormal del subespacio $\langle \mathbf{T}' \rangle$. Así, a partir de la base $\mathbf{T}' = \mathbf{D}\mathbf{T}$, no necesariamente ortonormal, podemos definir la transformación ortonormal $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}'^T \mathbf{x}'_i$ definida por la base ortonormalizada $\mathbf{T}'' = \mathbf{T}'(\mathbf{T}'^T \mathbf{T}')^{-1/2}$, engendradora del subespacio $\langle \mathbf{T}' \rangle$. El estadístico de detección y el estimador de alterna pueden expresarse como

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{1}{L\sigma^2} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{y}_i e_i (-1)^i \right\|_2^2. \quad (3.56)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{D}\mathbf{T}'' \underbrace{\frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{y}_{l+i} e_i (-1)^i}_{\hat{v}}, \quad (3.57)$$

donde $\hat{v}[p]$ es la amplitud de la alterna estimada en el coeficiente transformado p -ésimo. La Figura 3.4 muestra el esquema de análisis TCVG/EMV utilizando la etapa

de reducción de datos. Esta implementación permite reducir la complejidad del análisis tanto en la etapa de correlación (el número de correladores en paralelo se reduce a P) como en el cálculo de la energía alternante (Nótese que, según el teorema de Parseval, $\|\hat{\mathbf{v}}\|_2^2 = \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2$).

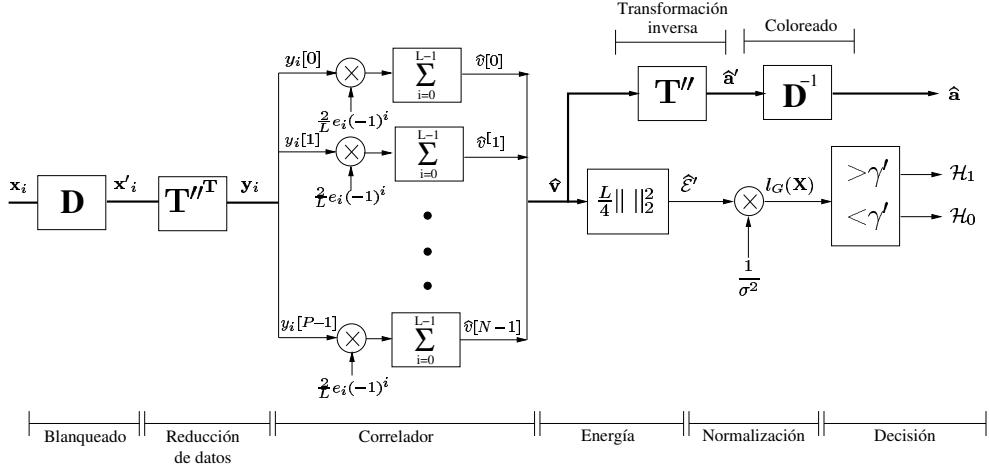


Figura 3.4: Realización del sistema de análisis con una etapa de reducción de datos (3.56).

Por otro lado, dado que en el detector gaussiano estacionario la varianza de ruido se asume conocida y constante, ésta puede ser absorbida por el umbral, obteniéndose la regla de decisión equivalente

$$T(\mathbf{X}) = \hat{\mathcal{E}}' = \frac{L}{4} \left\| \hat{\mathbf{a}}' \right\|_{2, \mathcal{H}_0}^2 \gamma'' = \gamma' \sigma^2, \quad (3.58)$$

3.4.2.1. Casos particulares.

Veamos a continuación cómo son los detectores y estimadores para algunos casos particulares del modelo gaussiano estacionario general.

Detector para ruido blanco. Si asumimos que las muestras de ruido son incorreladas dentro de un mismo latido, tenemos que $\mathbf{C}_w = \mathbb{I}_N$, de forma que no es necesario preblanquear la señal. Los EMV de \mathbf{c} y \mathbf{a} son entonces los estimadores de mínimos cuadrados (EMC)

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \mathbf{x}_i, \quad (3.59)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i. \quad (3.60)$$

En este caso, la proyección de la señal observada en el subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$ es ortogonal. El CVG modificado es

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{L}{4\sigma^2} \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2 = \frac{1}{L\sigma^2} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i e_i (-1)^i \right\|_2^2 = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\sigma^2}, \quad (3.61)$$

proporcional a la energía de la señal alterna estimada en el subespacio de señal.

Detector de energía alterna. La carencia de información *a priori* acerca de las características de la forma de onda alterna se refleja en un modelo de señal con N grados de libertad. El subespacio de señal es entonces el espacio completo \mathbb{R}^N y la proyección oblicua en el mismo es directamente la identidad $\mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} = \mathbb{I}_{N \times N}$. El EMV de la alternancia no depende entonces de la correlación del ruido y se obtiene a partir de la demodulación de las muestras del complejo ST-T, sin ningún tipo de blanqueado ni proyección

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \mathbf{x}_i. \quad (3.62)$$

El estadístico de detección mide la energía total de la alternancia estimada en la señal blanqueada.

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{L}{4\sigma^2} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 = \frac{1}{L\sigma^2} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i \right\|_2^2 = \frac{\hat{\mathcal{E}}'}{\sigma^2}. \quad (3.63)$$

Detector adaptado. Una señal alterna cuya forma es conocida *a priori* a excepción de su amplitud puede describirse por el modelo lineal $\mathbf{a} = c \mathbf{t}$ con un único grado de libertad. La señal a detectar se encuentra en el subespacio unidimensional $\langle \mathbf{t} \rangle$. Los EMV son

$$\hat{c} = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \frac{\mathbf{t}'^T}{\mathbf{t}^T \mathbf{t}'} \mathbf{x}'_i \quad (3.64)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{c} \mathbf{t} = \left(\frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \frac{\mathbf{t}'^T}{\mathbf{t}^T \mathbf{t}'} \mathbf{x}'_i \right) \mathbf{t}, \quad (3.65)$$

y el CVG modificado mide en este caso únicamente la energía alterna en el subespacio unidimensional.

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{L}{4\sigma^2} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 = \frac{1}{L\sigma^2} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathbf{t}'^T \mathbf{x}'_i}{\mathbf{t}^T \mathbf{t}'} e_i (-1)^i \right)^2 \|\mathbf{t}'\|_2^2 \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma'. \quad (3.66)$$

3.4.3. Matriz de información de Fisher. Tests de Wald y de Rao.

La matriz de información de Fisher para este modelo se deriva en el Apéndice 3.A, y tiene la forma

$$\mathbf{I}(\mathbf{c}) = \frac{L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}. \quad (3.67)$$

Al ser el modelo de señal observada lineal, gaussiano y sin parámetros molestos, los tests de Rao y de Wald son idénticos al TCVG modificado (3.54). En el Apéndice 3.A se derivan ambos estadísticos a partir de la matriz de Fisher.

3.4.4. Prestaciones del detector.

Para estudiar las prestaciones del detector de energía alternante debemos determinar la FDP del estadístico (3.54) bajo las dos hipótesis (3.42). Para ello reescribimos éste como

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{L}{4\sigma^2} \left\| \hat{\mathbf{a}}' \right\|_2^2 = \left\| \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 L}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i}_{\mathbf{z}} \right\|_2^2 = \mathbf{z}^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{z}. \quad (3.68)$$

donde \mathbf{z} es proporcional a la alternancia presente en los datos preblanqueados (sin restricción de subespacio). Es fácil comprobar que

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 L}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_{N \times N}) & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{N}\left(\frac{\sqrt{L}}{2\sigma} \mathbf{T}' \mathbf{c}, \mathbb{I}_{N \times N}\right) & \text{bajo } \mathcal{H}_1, \end{cases} \quad (3.69)$$

donde \mathbf{c} es el valor verdadero de los coeficientes de la alternancia. Como $\mathcal{P}_{\mathbf{T}'}$ es una matriz de proyección de rango P , la forma cuadrática $\mathbf{z}^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{z}$ tiene una distribución ji-cuadrado con P grados de libertad (Moon y Stirling 2000, Teorema 11.2)

$$l_G(\mathbf{X}) = \mathbf{z}^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{z} \sim \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.70)$$

con el parámetro de no centralidad

$$\lambda = \frac{L}{4\sigma^2} \mathbf{c}^T \mathbf{T}^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{T}' \mathbf{c} = \frac{L}{4\sigma^2} \left\| \mathbf{a}' \right\|_2^2. \quad (3.71)$$

El parámetro λ indica la separación existente entre las distribuciones de $l_G(\mathbf{X})$ bajo \mathcal{H}_0 y \mathcal{H}_1 , por lo que es un indicador de la detectabilidad de la señal. En el modelo estudiado, λ mide la relación entre la energía de la alternancia verdadera blanqueada $\mathcal{E}' = L \left\| \mathbf{a}' \right\|_2^2 / 4$ y la varianza de ruido σ^2 . Por tanto, λ es la RER real de la alternancia. También podemos expresarlo como $\lambda = NL\eta'$ donde

$$\eta' = \frac{\left\| \mathbf{a}' \right\|_2^2 / (4N)}{\sigma^2} \quad (3.72)$$

es la relación señal a ruido media (RSR) de la señal alterna blanqueada.

Obsérvese que en el modelo considerado, la distribución asintótica dada por (3.23) se verifica de forma exacta también para intervalos de observación finitos. En el Apéndice 3.A se comprueba que el valor de λ derivado a partir de la matriz de Fisher es exactamente igual a (3.71).

Las P_{FA} y P_D del detector para un umbral γ' son

$$P_{FA} = \Pr(l_G(\mathbf{X}) > \gamma'; \mathcal{H}_0) = Q_{\chi_P^2}(\gamma') \quad (3.73)$$

$$P_D = \Pr(l_G(\mathbf{X}) > \gamma'; \mathcal{H}_1) = Q_{\chi_P^2(\lambda)}(\gamma'). \quad (3.74)$$

Nótese que el umbral γ' puede calcularse para una P_{FA} dada como $\gamma' = Q_{\chi_P^2}^{-1}(P_{FA})$, con independencia del valor que tomen los parámetros desconocidos. Podemos obtener también la P_D alcanzable con una P_{FA} dada es

$$P_D = Q_{\chi_P^2(\lambda)}\left(Q_{\chi_P^2}^{-1}(P_{FA})\right), \quad (3.75)$$

que aumenta monótonamente con el valor de $\lambda = NL\eta'$. Por tanto, una vez fijadas las dimensiones del problema N y L , las prestaciones del detector están parametrizadas únicamente por la dimensión del subespacio de señal P y la RSR de la alternancia blanqueada η' .

Para tener una idea de la degradación que produce el desconocimiento de los parámetros de señal en el detector, es interesante comparar las prestaciones del TCVG con las del detector clarividente de Neyman-Pearson, es decir, el detector óptimo si la señal a detectar fuera completamente conocida. La expresión de este detector y de sus prestaciones pueden encontrarse en el Apéndice 3.B. En el detector clarividente, la P_D que se puede alcanzar para una P_{FA} dada también está parametrizada por la RSR blanqueada η' : $P_D = Q(Q^{-1}(P_{FA}) - \sqrt{NL\eta'})$.

Una forma de caracterizar las prestaciones de un detector es representando la P_D en función de la RSR para una P_{FA} dada (curvas P_D vs RSR). A partir de esta representación, es sencillo determinar la RSR mínima necesaria para que un detector alcance unas determinadas prestaciones. Es también una forma de comparar el comportamiento de distintos detectores en función de las condiciones de ruido. A lo largo de este capítulo y el siguiente utilizaremos las curvas P_D vs RSR.

Ejemplo 3.4 (Curvas P_D vs η'). Consideremos un fragmento de $L = 32$ latidos de señal ECG muestreada a $f_s = 200$ Hz. Los complejos ST-T se segmentan mediante una ventana de 240 ms ($N = 48$). La Figura 3.5 muestra las curvas P_D vs η' , del detector de energía ($P = N = 48$ grados de libertad, es decir, sin conocimiento previo de la señal) para cuatro niveles de P_{FA} .

La Figura 3.6 muestra las curvas P_D vs η' ($P_{FA} = 0,05$) del TCVG gaussiano estacionario para $L = 32$, $N = 48$ con subespacios de distintas dimensiones, desde $P = 1$ (detector adaptado) hasta $P = N$ (detector de energía). Como referencia, se muestran

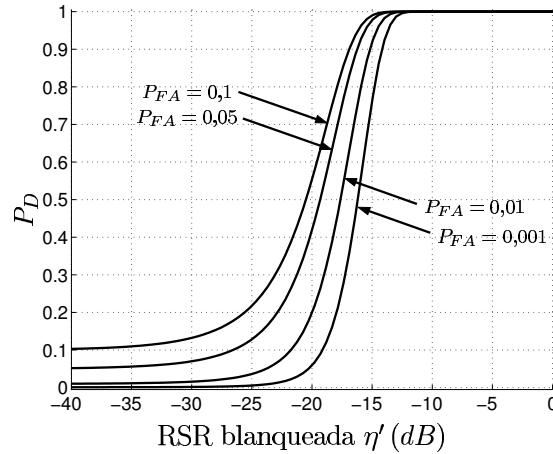


Figura 3.5: Curvas P_D vs η' del detector (3.54) con $L = 32$ latidos, $N = 48$ muestras y $P = N$ grados de libertad para diferentes probabilidades de falsa alarma.

también las prestaciones del detector clarividente de Neyman-Pearson. Las prestaciones del detector mejoran claramente al reducir los grados de libertad. La Tabla 3.1 recoge las η' mínimas para obtener $P_{FA} = 0,05$ y $P_D = 0,95$, así como la ganancia de cada detector respecto al detector de energía.

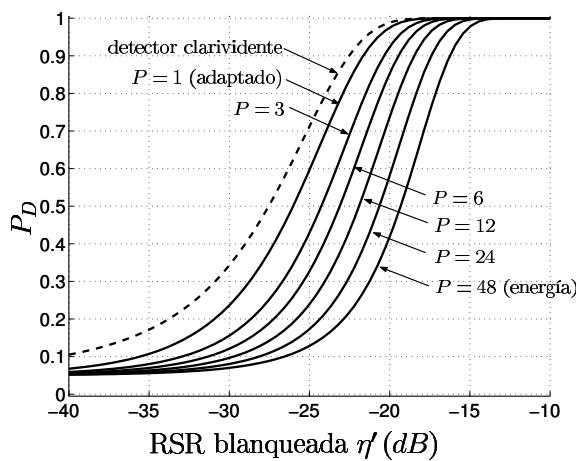


Figura 3.6: Curvas P_D vs η' para $P_{FA} = 0,05$ del TCVG gaussiano estacionario (3.54), con $L = 32$ latidos, $N = 48$ muestras y distintas dimensiones del subespacio de señal, desde $P = 1$ (detector adaptado) hasta $P = 48$ (detector de energía). La línea de puntos representa las prestaciones del detector clarividente de Neyman-Pearson (Apéndice 3.B).

Un aumento de la duración L supone un incremento proporcional del parámetro de no centralidad λ (siempre que el modelo siga siendo válido al aumentar el tamaño de la

P	48	24	12	6	3	1	clarividente
$\eta' (dB)$	-15.59	-16.71	-17.74	-18.67	-19.52	-20.73	-21.52
ganancia (dB)	-	1.12	2.15	3.08	3.93	5.14	5.93

Tabla 3.1: η' mínima (en dB) para obtener $P_{FA} = 0,05$ y $P_D = 0,95$ en un detector de subespacio de rango P . Se indica también la ganancia (en dB) respecto al detector de energía.

ventana). Así, alargar la ventana de observación en un factor K supone una ganancia de $10 \log_{10} K$ dB en las prestaciones del detector¹². La Figura 3.7 muestra las prestaciones del detector de energía $P = N = 48$ con distintos valores de L .

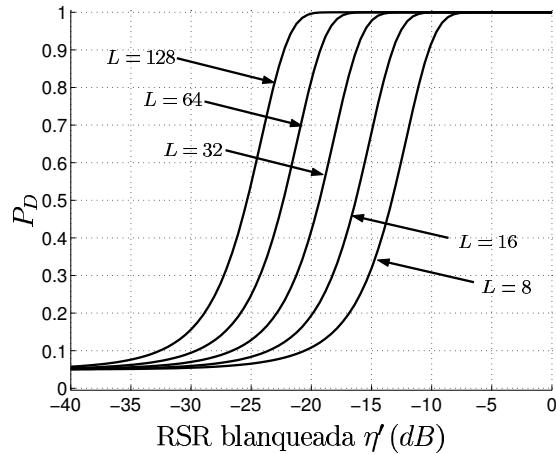


Figura 3.7: Curvas P_D vs η' del TCVG gaussiano estacionario (3.54) para $P_{FA} = 0,05$, con $P = N = 48$ muestras en función de la duración de la ventana de análisis L .

Consideremos por último la variación del número de muestras N en un detector de energía. El efecto es doble: por una parte, si se reduce N disminuye el número de grados de libertad, con la consiguiente mejora de prestaciones (se reduce la varianza del estadístico bajo ambas hipótesis); por otro lado, el parámetro de no centralidad $\lambda = NL\eta'$ se reduce también (suponiendo que la RSR η' es fija), disminuyendo la separación entre las FDP. La Figura 3.8 ilustra el efecto de la variación de N en un detector de energía con $L = 32$. En ella se aprecia que las prestaciones empeoran al disminuir el valor de N , por lo que el efecto predominante es la reducción del parámetro λ para una misma RSR η' . Para poder reducir el número de grados de libertad sin perder energía de la señal, hemos de incluir en el modelo información que delimita el subespacio en el que se encuentra la señal alternante (cfr. Figura 3.6).

La Figura 3.9 compara las prestaciones del detector TCVG de energía y del detector clarividente para distintos valores de N . La Tabla 3.2 recoge las RSR mínimas (η_{\min})

¹²Es decir, se obtendrán las mismas prestaciones para una RSR K veces menor.

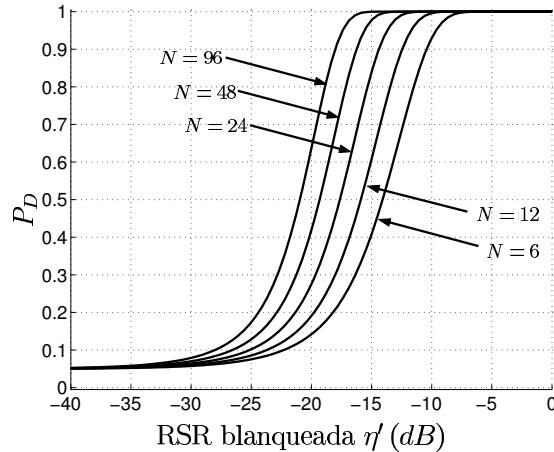


Figura 3.8: Curvas P_D vs η' del TCVG gaussiano estacionario (3.54) para $P_{FA} = 0,05$, con $P = N = 48$ muestras en función de la duración de la ventana de análisis L .

necesarias para obtener una $P_D = 0,95$ con $P_{FA} = 0,05$. Se puede observar cómo las pérdidas respecto al detector clarividente se acrecientan cuanto mayor es el número de grados de libertad.

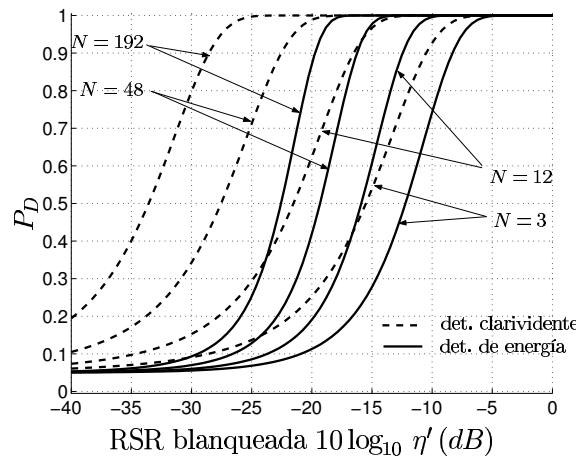


Figura 3.9: Curvas P_D vs η' para $P_{FA} = 0,05$ del detector TCVG de energía y del detector clarividente, con $L = 32$ latidos y $N = 3, 12, 48$ y 192 muestras.

En las figuras y tablas previas se han caracterizado los detectores en función de la RSR blanqueada η' . Sin embargo, al diseñar un detector, puede ser más interesante conocer

$\eta'_{\min}(dB), P_D = 0,95; P_{FA} = 0,05$			
TCVG	clarividente	pérdida (dB)	
$N = 3$	-7.47	-9.48	2.01
$N = 12$	-11.72	-15.50	3.78
$N = 48$	-15.59	-21.52	5.93
$N = 192$	-19.31	-27.5	8.19

Tabla 3.2: Valor mínimo de η' (en dB) necesario en el detector TCVG de energía y en el detector clarividente para obtener $P_D = 0,95$ con $P_{FA} = 0,05$ con $L = 32$ latidos y distintos valores de N .

cuáles son las prestaciones en función de la RSR de la señal observada, definida como

$$\eta = \frac{\|\mathbf{a}\|_2^2 / (4N)}{\sigma^2}. \quad (3.76)$$

La relación entre η y η' depende del grado de solapamiento espectral entre la señal y el ruido. Si el espectro de ruido está muy solapado con el de la forma de onda alterna, η' será sensiblemente menor que la RSR original η , lo que indica que será más difícil de detectar que si el ruido fuera blanco. Así, podemos definir la ganancia de blanqueado

$$G_b(\mathbf{a}) = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{c}}, \quad (3.77)$$

que da idea de la detectabilidad de una forma de onda concreta en ruido coloreado. Como $\eta' = G_b(\mathbf{a}) \eta$, las curvas de P_D en función de η se obtienen mediante una translación de $10 \log_{10} G_b(\mathbf{a}) dB$ en el eje de abscisas de las Figuras 3.5 a 3.9. Nótese que en el modelo para ruido blanco, todas las formas de ondas son igualmente detectables, al contrario de lo que sucede en los modelos de ruido coloreado.

Vamos a buscar a continuación las formas de onda que maximizan y minimizan la ganancia de blanqueado. La condición $\partial G_b(\mathbf{a}) / \partial \mathbf{c} = \mathbf{0}$ se cumple para los valores de \mathbf{c} que cumplen la ecuación de valores/vectores propios generalizados $\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \mathbf{c} = \pi \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{c}$. Por tanto, los vectores de coeficientes que maximizan y minimizan $G_b(\mathbf{a})$ favorables son vectores propios de la matriz $\mathbf{U} = (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}$. Sean $\pi_0 \geq \pi_1 \dots \geq \pi_{P-1}$ los valores propios ordenados de \mathbf{U} y $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{P-1}$ los vectores propios asociados. La ganancia de blanqueado cuando \mathbf{c} es proporcional a \mathbf{v}_i es $G_b(\mathbf{a}) = \pi_i$. En consecuencia, las formas de onda $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{T} \rangle$ más detectables son aquéllas proporcionales a $\mathbf{T} \mathbf{v}_0$ ($G_b(\mathbf{a}) = \pi_0$) y las menos detectables son las proporcionales a $\mathbf{T} \mathbf{v}_{P-1}$ ($G_b(\mathbf{a}) = \pi_{P-1}$). Si el subespacio de señal es de rango N (detector de energía), tenemos que $\mathbf{U} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}$. Teniendo en cuenta la relación existente entre los vectores propios de \mathbf{U} y \mathbf{C}_w^{-1} , las formas de onda más favorables son proporcionales a los vectores propios dominantes de \mathbf{C}_w^{-1} (el vector propio menos dominante de \mathbf{C}_w), y las menos favorables son proporcionales al vector propio menos dominante de \mathbf{C}_w^{-1} (el dominante de \mathbf{C}_w). Finalmente, si el ruido es incorrelado, tenemos que $\mathbf{U} = \mathbb{I}_N$, donde todos los valores propios son iguales. Por tanto, en el caso de ruido blanco todas las formas de onda tienen la misma ganancia $G_b(\mathbf{a}) = 1$.

Ejemplo 3.5 (Detección en ruido AR(1)). Consideremos que el ruido es un proceso autorregresivo de orden 1 ó AR(1) con densidad espectral $S_{ww}(z) = \sigma^2 \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$, $0 \leq |\alpha| < 1$. La matriz de covarianzas $N \times N$ tiene la forma

$$\mathbf{C}_w = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{N-1} \\ \alpha & 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \alpha^2 & \alpha & \ddots & \alpha & \alpha^2 \\ \vdots & \ddots & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^{N-1} & \cdots & \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Consideremos, a modo de ejemplo, la forma de onda

$$\begin{aligned} a[n] = & 0,6 + 0,05 \cos \frac{\pi}{N} (n + 0,5) - 0,5 \cos \frac{2\pi}{N} (n + 0,5) \\ & - 0,1 \cos \frac{4\pi}{N} (n + 0,5) - 0,05 \cos \frac{5\pi}{N} (n + 0,5), \quad n = 0, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (3.79)$$

representada en la Figura 3.10(a). La Figura 3.10(b) muestra los espectros de $a[n]$ y del AR(1) ruido para algunos valores de α . La frecuencia de muestreo considerada es de $F_s = 200 \text{ Hz}$.

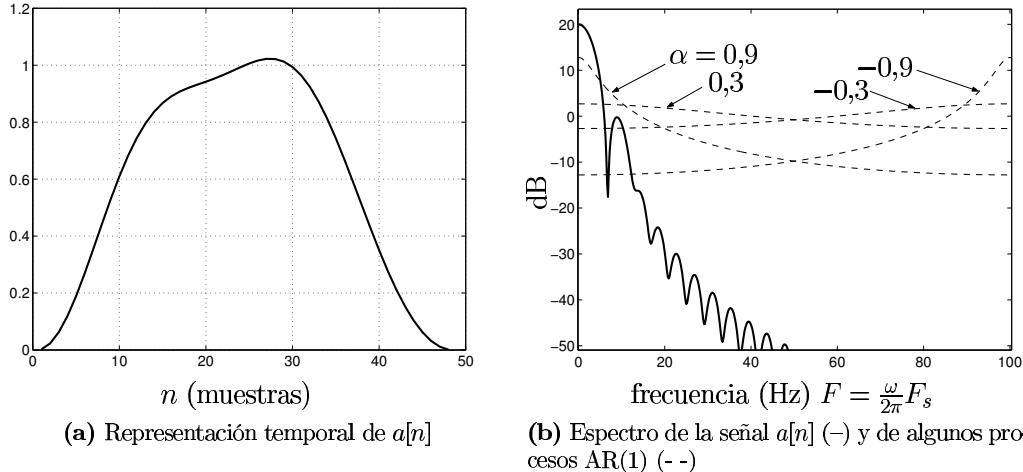


Figura 3.10: Señal de ejemplo (3.79).

La Tabla 3.3 recoge la ganancia de blanqueado $G_b(\mathbf{a})$ que experimenta la forma de onda alternante (3.79) en distintos ruidos de tipo AR(1). Estos valores son fácilmente explicables en términos de solapamiento espectral entre la señal y el ruido (*vid. Figura 3.10(b)*). Los ruidos con $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) tienen un espectro de tipo paso-bajo (paso-alto), por lo que el blanqueado atenúa (realza) las bajas frecuencias y realza (atenúa) las altas frecuencias.

α	-0.9	-0.6	-0.3	0	0.3	0.6	0.9
$G_b(\mathbf{a})$ (dB)	12.78	6.02	2.68	0	-2.67	-5.93	-11.09

Tabla 3.3: Ganancias de blanqueado de la señal de ejemplo (3.79) en ruido AR(1) para distintos valores del parámetro α .

Como la alternancia del ejemplo es claramente paso-bajo, la ganancia es lógicamente mayor cuanto más paso-alto es el ruido.

Según la Tabla 3.1, el detector de energía precisa $\eta' \geq -15,59 \text{ dB}$ para asegurar $P_D \geq 0,95$, $P_{FA} = 0,05$. Si el ruido es blanco, la RSR mínima η_{\min} es de $-15,59 \text{ dB}$ para cualquier forma de onda. Para ruido coloreado, la RSR mínima depende de la forma de onda concreta. Así, para la señal paso-bajo del presente ejemplo inmersa en ruido proceso AR(1) claramente paso-bajo con $\alpha = 0,9$, la RSR mínima es de $\eta_{\min} = -15,59 \text{ dB} - G_b(\mathbf{a}) = -4,5 \text{ dB}$. La misma alternancia es más fácilmente detectable en ruido paso-alto. Así, para $\alpha = -0,9$, $\eta_{\min} = -15,59 \text{ dB} - G_b(\mathbf{a}) = -28,37 \text{ dB}$.

3.4.5. Prestaciones del EMV.

El EMV del vector de parámetros (3.51) posee una distribución

$$\hat{\mathbf{c}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{c}, \frac{4\sigma^2}{L} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1}). \quad (3.80)$$

Se trata de un estimador eficiente, ya que es insesgado y su matriz de covarianzas alcanza la cota de Cramér-Rao (Apéndice 3.A). Por tanto, es también el estimador insesgado de mínima varianza (EIMV). El EMV de la forma de onda alternante $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}}$ es también eficiente¹³ y EIMV, con distribución

$$\hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \frac{4\sigma^2}{L} \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T). \quad (3.81)$$

La varianza de error en cada muestra es $\sigma_{\varepsilon(n)}^2 = \frac{4\sigma^2}{L} [\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T]_{n,n}$. La potencia media del error $\boldsymbol{\varepsilon}$ viene dada por $\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{N} E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{4\sigma^2}{NL} \text{tr}(\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)$, por lo que la RSR de la estimación es

$$\nu = \frac{\|\mathbf{a}\|_2^2 / N}{\sigma_{\varepsilon}^2} = L \frac{N}{\text{tr}(\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)} \eta. \quad (3.82)$$

Así, podemos hablar de una ganancia de estimación definida como

$$G_e = \frac{\nu}{\eta} = L \frac{N}{\text{tr}(\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)}. \quad (3.83)$$

¹³La eficiencia de un estimador se mantiene para transformaciones lineales (Kay 1993, Sec. 3.6, p. 27).

La ganancia de estimación (3.83) tiene dos componentes: una ganancia debida al filtrado lineal latido a latido, de valor L , y otra, de valor $N/\text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)$, debida a la proyección del ruido en el subespacio de señal.

La mejora en la RSR depende tanto del subespacio¹⁴ $\langle \mathbf{T} \rangle$ como de \mathbf{C}_w . Si el subespacio de señal es completo ($P = N$, $\text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T) = N$), la ganancia de estimación se reduce a la ganancia debida al filtrado latido a latido, $G_e = L$. Si $P < N$, existe una ganancia adicional que depende del espectro de ruido: así, en ruido incorrelado $\text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T) = \text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T) = P$, por lo que $\sigma_e^2 = \frac{4\sigma^2}{NL} P$. La ganancia debida a la proyección del ruido blanco en el subespacio de señal es de N/P , siendo la ganancia total $G_e = LN/P$. Si el ruido es coloreado, la G_e depende del solapamiento espectral existente entre el subespacio de señal y el ruido. Podemos expresar el denominador de (3.83) como

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T) &= \text{tr}((\mathbf{T}'^T \mathbf{T}')^{-1} \mathbf{T}'^T \mathbf{C}_w \mathbf{T}') \\ &= \text{tr}((\mathbf{T}'^T \mathbf{T}')^{-1} \mathbf{T}'^T \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{T}') \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i \|\mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{u}_i\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde $\pi_i, \mathbf{u}_i, i = 0, \dots, N-1$ son los valores propios de \mathbf{C}_w , ordenados de mayor a menor y sus vectores propios asociados. Al ser los \mathbf{u}_i unitarios $\text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T) \leq \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i = N$, con lo que $G_e \geq L$. Para una dimensión P del subespacio, la máxima ganancia posible se producirá cuando el subespacio de señal blanqueado $\langle \mathbf{T}' \rangle$ contenga a los P vectores propios de \mathbf{C}_w asociados con los P valores propios menores: $G_e = LN / \sum_{i=N-P+1}^{N-1} \pi_i \geq LN/P$, mientras que el peor caso se producirá cuando los P vectores propios dominantes de \mathbf{C}_w pertenezcan a $\langle \mathbf{T}' \rangle$. En ese caso, $G_e = LN / \sum_{i=0}^{P-1} \pi_i \leq LN/P$.

Ejemplo 3.6 (Estimación de alternancias paso-bajo en ruido AR(1)). Consideremos la familia de subespacios paso-bajo engendrados por las P primeras funciones de la base ortogonal de la transformada discreta coseno (TDC)

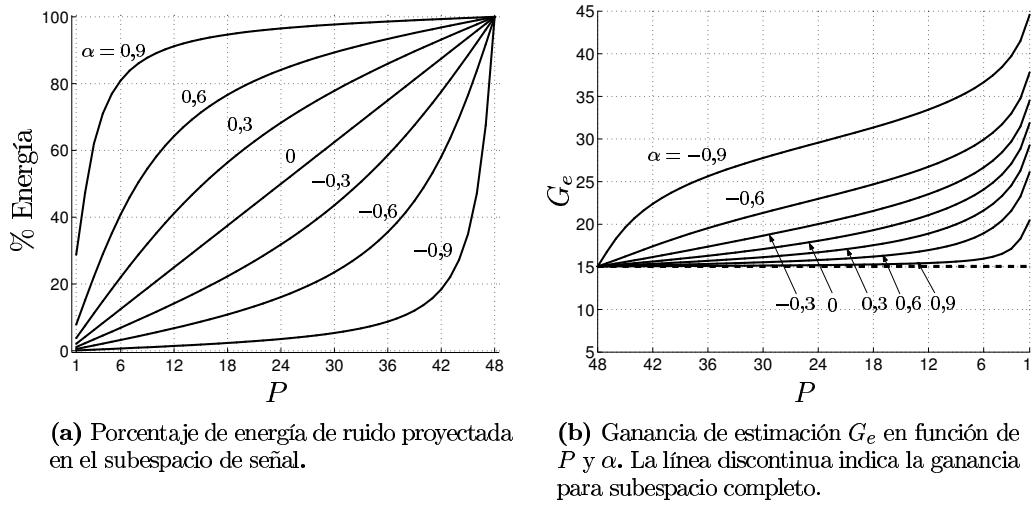
$$\begin{aligned} t_0[n] &= \sqrt{\frac{1}{N}} \quad n = 0, \dots, N-1, \\ t_p[n] &= \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{\pi}{N} p(n+0,5), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad p = 1, \dots, P-1. \end{aligned} \quad (3.85)$$

La Figura 3.11 muestra las propiedades teóricas del estimador (3.47) en ruido AR(1) para esta familia de subespacios. Las dimensiones de los datos observados son $N = 48$, $L = 32$ ($e_i = 1$, $i = 0, \dots, L-1$). La gráfica 3.11(a) muestra el porcentaje de energía de ruido original que proyecta en el subespacio de señal

$$R(\%) = 100 \text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)/N \quad (3.86)$$

¹⁴Nótese que $\text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)$ y, por tanto, G_e no dependen de la base seleccionada del subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$.

en función de la dimensión del mismo. En la gráfica 3.11(b) se representa la ganancia de estimación G_e (en dB) en función de P . El valor de la ganancia debida al filtrado latido a latido es de $10 \log_{10} L = 15,05 dB$ y está señalada por una línea discontinua.



(a) Porcentaje de energía de ruido proyectada en el subespacio de señal.

(b) Ganancia de estimación G_e en función de P y α . La línea discontinua indica la ganancia para subespacio completo.

Figura 3.11: Prestaciones del estimador de alternancia (3.47).

En la Figura 3.12 se muestran las formas de onda alternantes estimadas cuando se simulan alternancias con la forma de la señal de ejemplo (3.79), con una amplitud máxima de $10 \mu V$ ($V_{RMS} = 6,86 \mu V$), y ruido con desviación estándar $\sigma = 20 \mu V$. El estimador utiliza los subespacios de la TDC correspondientes a las primeras $P = 6, 16$ y 48 funciones base. Nótese que la señal $a[n]$ puede ser descrita en función de las 6 primeras funciones base de la TDC y por tanto está incluida en los 3 subespacios considerados.

En las figuras 3.11 y 3.12 se observa que cuanto más paso-bajo es el espectro del ruido, menos importante es la mejora debida a la proyección en el subespacio (paso-bajo) de dimensión reducida, ya que aumenta la fracción de ruido proyectada en el mismo.

3.5. Modelo gaussiano adaptativo.

3.5.1. Planteamiento.

La señal observada se expresa en este modelo igual que en el modelo estacionario (3.39), pero asumiendo que la varianza de ruido es desconocida (no así la matriz de covarianzas normalizada). Por tanto, $E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T\} = \delta_{ij} \sigma^2 \mathbf{C}_w$ donde \mathbf{C}_w es conocida y cumple $tr(\mathbf{C}_w) = N$, y $\sigma^2 > 0$ es un *parámetro molesto* desconocido. La FDP de la señal observada es

$$p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{NL}{2}} \det^{1/2}(\mathbf{C}_w)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} \mathbf{e}_i (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2\right). \quad (3.87)$$

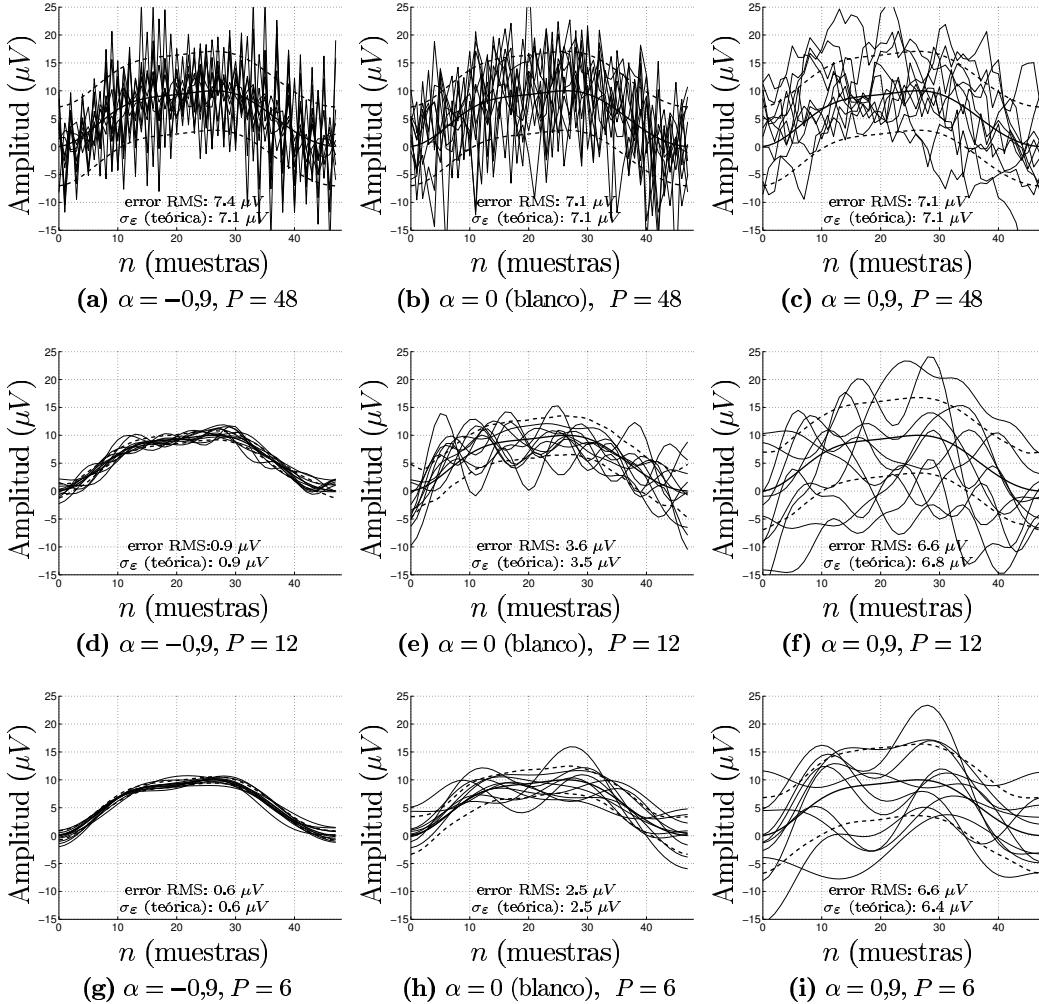


Figura 3.12: Estimación de AOT para distintos tipos de ruido y dimensiones del subespacio. En cada gráfica se representan: la señal simulada (línea gruesa), el margen teórico $\pm\sigma_{\varepsilon(n)}$ (delimitado por dos líneas discontinuas) y la señal estimada en 10 realizaciones (líneas delgadas). Se indican asimismo el valor teórico de σ_{ε} y el error RMS calculado en 100 realizaciones de Monte Carlo.

donde los parámetros desconocidos son \mathbf{c} (bajo \mathcal{H}_1) y la varianza del ruido σ^2 (bajo ambas hipótesis). El test de parámetros es

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0: \mathbf{c} &= \mathbf{0}, \sigma^2 > 0 \\ \mathcal{H}_1: \mathbf{c} &\neq \mathbf{0}, \sigma^2 > 0.\end{aligned}\quad (3.88)$$

3.5.2. EMV y TCVG.

El detector TCVG correspondiente es

$$L_G(\mathbf{X}) = \frac{p(\mathbf{X}; \hat{\mathbf{c}}, \hat{\sigma}_1^2, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{X}; \hat{\sigma}_0^2, \mathcal{H}_0)} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \stackrel{\mathcal{H}_0}{\lessgtr} \gamma, \quad (3.89)$$

donde $\hat{\mathbf{c}}$, $\hat{\sigma}_0^2$ y $\hat{\sigma}_1^2$ son los EMV de los parámetros desconocidos. En los parámetros molestos el subíndice señala la hipótesis bajo la que realiza la estimación. Los EMV deben cumplir las ecuaciones de verosimilitud

$$-\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \sigma^2, \mathcal{H}_1)}{\partial \mathbf{c}} \Bigg|_{\substack{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}} \\ \sigma^2=\hat{\sigma}_1^2}} = -\frac{1}{2\hat{\sigma}_1^2} \sum_{i=0}^{L-1} \left(e_i (-1)^i \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} e_i^2 \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} \right) = \mathbf{0} \quad (3.90)$$

$$-\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \sigma^2, \mathcal{H}_1)}{\partial \sigma^2} \Bigg|_{\substack{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}} \\ \sigma^2=\hat{\sigma}_1^2}} = \frac{NL}{2\hat{\sigma}_1^2} - \frac{\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2}{2\hat{\sigma}_1^4} = 0 \quad (3.91)$$

$$-\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \sigma^2, \mathcal{H}_0)}{\partial \sigma^2} \Bigg|_{\sigma^2=\hat{\sigma}_0^2} = \frac{NL}{2\hat{\sigma}_0^2} - \frac{\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2}{2\hat{\sigma}_0^4} = 0. \quad (3.92)$$

(3.93)

La solución a la ecuación (3.90) es la misma que para varianza conocida, de manera que el EMV de los parámetros de señal es el EMCG

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{c}} &= \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i e_i (-1)^i \\ &= \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{T}')^{-1} \mathbf{T}' \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i,\end{aligned}\quad (3.94)$$

y el EMV de la forma de onda

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{x}_i e_i (-1)^i. \quad (3.95)$$

Resolviendo las ecuaciones (3.91) y (3.93) obtenemos los EMV de σ^2 bajo \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_0

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{NL} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}} e_i (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 = \frac{1}{NL} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}'_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}' e_i (-1)^i \right\|_2^2 \quad (3.96)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{NL} \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_i\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 = \frac{1}{NL} \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}'_i\|_2^2, \quad (3.97)$$

donde $\hat{\mathbf{a}}'$ es el estimador de la alternancia blanqueada

$$\hat{\mathbf{a}}' = \mathbf{D} \hat{\mathbf{a}} = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i. \quad (3.98)$$

Por consiguiente, (3.96) y (3.97) miden la potencia de ruido de la señal blanqueada bajo ambas hipótesis. Bajo \mathcal{H}_0 , toda la señal se considera ruido mientras que en la estimación bajo \mathcal{H}_1 sólo se considera ruido el residuo después de haber sustraído la alternancia estimada de la señal observada.

Sustituyendo los valores de $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\mathbf{a}}$ en (3.89) obtenemos el detector TCVG

$$L_G(\mathbf{X}) = \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right)^{\frac{NL}{2}} \underset{\mathcal{H}_0}{\gtrless} \underset{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma. \quad (3.99)$$

La decisión depende, en consecuencia, del cociente entre las estimaciones de la varianza del ruido bajo ambas hipótesis. El estadístico (3.99) alcanzará su valor mínimo ($L_G(\mathbf{X}) = 1$) únicamente si $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$. Cuanto mayor sea la fracción de la energía observada modelable como alternancia, menor será el denominador de (3.99) aumentando el cociente de verosimilitudes. Teniendo en cuenta la siguiente relación entre $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_0^2$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{NL} \sum_{i=0}^{L-1} \left(\|\mathbf{x}'_i\|_2^2 + \frac{1}{4} e_i^2 \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 - e_i (-1)^i \hat{\mathbf{a}}'^T \mathbf{x}'_i \right) \\ &= \hat{\sigma}_0^2 + \frac{1}{NL} \left(\frac{L}{4} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 - \hat{\mathbf{a}}'^T \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i \right) \\ &= \hat{\sigma}_0^2 - \frac{L}{4NL} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.100)$$

podemos reescribir el estadístico $L_G(\mathbf{X})$ en (3.99) como

$$L_G(\mathbf{X}) = \left(\frac{\hat{\sigma}_1^2 + \frac{L}{4NL} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right)^{\frac{NL}{2}} = \left(1 + \frac{\frac{L}{4NL} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right)^{\frac{NL}{2}} \quad (3.101)$$

Aplicando la función $f(x) = NL(x^{\frac{2}{NL}} - 1)$, biunívoca creciente para $x \geq 0$, a los dos miembros de la regla de decisión (3.99), obtenemos el siguiente TCVG equivalente

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{L}{4\hat{\sigma}_1^2} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 \underset{\mathcal{H}_0}{\gtrless} \underset{\mathcal{H}_1}{\gtrless} NL(\gamma^{\frac{2}{NL}} - 1) = \gamma'. \quad (3.102)$$

El estadístico modificado (3.102) muestra explícitamente su dependencia con las estimaciones de señal y ruido. Es el cociente entre la energía alterna estimada en el subespacio blanqueado $\hat{\mathcal{E}}' = L \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2 / 4$ y la varianza de ruido $\hat{\sigma}_1^2$ estimada bajo la hipótesis \mathcal{H}_1 . Comparando los estadísticos del modelo adaptativo (3.102) y del modelo estacionario (3.54), la única diferencia entre ellos radica en que el valor de σ^2 se sustituye en el presente modelo por su estimación bajo la hipótesis \mathcal{H}_1 . Dado que la $\hat{\sigma}_1^2$ se calcula ahora para cada fragmento de señal observada, podemos hablar de un detector adaptativo (de ahí el nombre que hemos dado al modelo). Se trata, por tanto, de un **detector de subespacio adaptativo**. Una característica destacable del CVG es su invariancia ante un escalado en la amplitud de la señal observada. Un detector con esta característica es también CFAR ya que, bajo \mathcal{H}_0 , la estadística del estimador no depende del nivel de ruido y es, por tanto, insensible a las fluctuaciones del mismo (Kraut *et al.* 2001).

La Figura 3.13 muestra esquemáticamente la realización del detector TCVG y el EMV para el modelo gaussiano adaptativo.

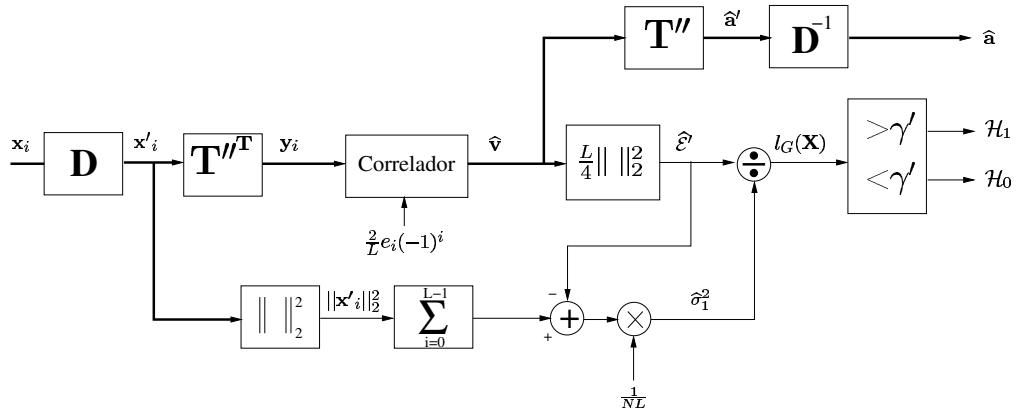


Figura 3.13: Esquema de análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano adaptativo.

3.5.3. Matriz de información de Fisher. Tests de Wald y de Rao.

La matriz de información de Fisher para este modelo se deriva en el Apéndice 3.C, y tiene la forma

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} & \mathbf{0}_{P \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times P} & \frac{NL}{2\sigma^4} \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

con $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{c}^T \sigma^2]^T$. Las particiones de la matriz de Fisher son $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{NL}{2\sigma^4}$ y $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{P \times 1}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{1 \times P}$.

En el mismo Apéndice 3.C se obtienen las expresiones de los estadísticos de Wald

(3.27) y Rao (3.29). El test de Wald coincide con el TCVG modificado

$$T_W(\mathbf{X}) = \frac{L \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{4\hat{\sigma}_1^2} = l_G(\mathbf{X}), \quad (3.104)$$

mientras que el test de Rao proporciona el detector alternativo

$$T_R(\mathbf{X}) = \frac{L \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{4\hat{\sigma}_0^2} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \stackrel{\mathcal{H}_0}{\lessdot} \gamma_R, \quad (3.105)$$

que alcanza, asintóticamente, las mismas prestaciones. Como el TCVG, el test de Rao estima la energía alternante en la señal blanqueada, pero en este caso ésta se divide por la varianza de ruido estimada bajo la hipótesis \mathcal{H}_0 , que es la potencia media de los datos observados. Como $\hat{\sigma}_0^2 \geq \hat{\sigma}_1^2$, se verifica que $T_R(\mathbf{X}) \leq l_G(\mathbf{X})$. Al igual que el TCVG, el test de Rao es CFAR e invariante ante constantes de proporcionalidad.

Utilizando la relación entre $\hat{\sigma}_0^2$ y $\hat{\sigma}_1^2$ expresada por (3.100), tenemos que

$$T_R(\mathbf{X}) = \frac{L \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{4 \left(\hat{\sigma}_1^2 + \frac{L}{4NL} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 \right)} = \frac{l_G(\mathbf{X})}{1 + \frac{l_G(\mathbf{X})}{4NL}}. \quad (3.106)$$

La relación entre ambos estadísticos viene dada por $T_R(\mathbf{X}) = f(l_G(\mathbf{X}))$, donde $f(x) = \frac{x}{1+x/4NL}$ es una función biunívoca creciente para $x \geq 0$. Por tanto, ambos detectores son equivalentes y alcanzan las mismas prestaciones¹⁵.

Si $l_G(\mathbf{X}) \ll NL$ (es decir, si la RSR es baja y/o la dimensión de los datos es suficientemente grande) ambos estadísticos tienen el mismo valor, mientras que para RSR altas el estadístico de Rao satura tendiendo a $T_R(\mathbf{X}) \rightarrow NL$. La reducción del margen dinámico en el test de Rao ($0 \leq T_R(\mathbf{X}) \leq NL$) hace que aumente su sensibilidad respecto a la selección del umbral. Teniendo en cuenta, además, que la reducción de la complejidad del detector es mínima, podemos descartar la utilización del test de Rao en favor del TCVG expresado en (3.102).

3.5.4. Prestaciones de los detectores.

Determinaremos en primer lugar las distribuciones exactas del estadístico de decisión $l_G(\mathbf{X})$ bajo las dos hipótesis. Para ello, reescribimos (3.102) como

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{L \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 / (4\sigma^2)}{\hat{\sigma}_1^2 / \sigma^2} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{D}}, \quad (3.107)$$

¹⁵La equivalencia de dos detectores indica que, seleccionando adecuadamente los umbrales, se pueden obtener con ambos las mismas P_{FA} y P_D . No obstante, consideraciones de otra índole (simplicidad de cálculo, sensibilidad ante variaciones del umbral, etc.) podrían hacer preferir uno u otro.

donde σ^2 es la varianza real del ruido (desconocida para el detector).

En el Apéndice 3.D se demuestra que el numerador \mathfrak{N} y el denominador \mathfrak{D} son dos formas cuadráticas independientes, cuyas distribuciones son

$$\mathfrak{N} \sim \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases} \quad \text{y} \quad NL\mathfrak{D} \sim \begin{cases} \chi_{NL-P}^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_{NL-P}^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}. \quad (3.108)$$

Por tanto, el estadístico (3.102) es proporcional a una distribución F con P grados de libertad en el numerador y $NL - P$ grados de libertad en el denominador

$$\frac{NL - P}{NLP} l_G(\mathbf{X}) \sim \begin{cases} F_{P, NL-P} & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ F'_{P, NL-P}(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.109)$$

con el parámetro de no centralidad

$$\lambda = \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}'\|_2^2 = NL\eta' = G_b(\mathbf{a})NL\eta. \quad (3.110)$$

Nótese que λ tiene la misma expresión que en el caso de varianza conocida (3.71).

Las prestaciones del detector vendrán dadas por las funciones de distribución acumuladas

$$P_{FA} = Pr(l_G(\mathbf{X}) > \gamma'; \mathcal{H}_0) = Q_{F_{P, NL-P}}\left(\frac{NL - P}{NLP}\gamma'\right) \quad (3.111)$$

$$P_D = Pr(l_G(\mathbf{X}) > \gamma'; \mathcal{H}_1) = Q_{F'_{P, NL-P}(\lambda)}\left(\frac{NL - P}{NLP}\gamma'\right). \quad (3.112)$$

Nótese que se puede fijar el umbral para una P_{FA} dada como

$$\gamma' = \frac{NLP}{NL - P} Q_{F_{P, NL-P}}^{-1}(P_{FA}), \quad (3.113)$$

independientemente de la varianza de ruido que presente la señal. Se trata, en consecuencia, de un detector CFAR respecto a fluctuaciones en la varianza de ruido.

Cuando $L \rightarrow \infty$, el número de grados de libertad del denominador es mucho mayor que el del numerador. Aplicando las propiedades¹⁶ de la distribución F tenemos que, asintóticamente,

$$(1 - \frac{P}{NL}) l_G(\mathbf{X}) \approx l_G(\mathbf{X}) \stackrel{a}{\sim} \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}. \quad (3.114)$$

Aplicando el Teorema 3.3, obtenemos que la distribución asintótica de $2 \ln L_G(\mathbf{X})$ es también (3.114). Los detalles pueden encontrarse en el Apéndice 3.C.

Se ha demostrado, por tanto, que las prestaciones asintóticas del TCVG adaptativo son las mismas que las del TCVG estacionario con conocimiento exacto de la varianza de ruido

¹⁶Si $NL - P \gg P$, $F_{P, NL-P} \rightarrow \chi_P^2/P$, y $F'_{P, NL-P}(\lambda) \rightarrow \chi_P^2(\lambda)/P$.

(3.70). En otras palabras: si las dimensiones de la señal observada son suficientemente grandes, la estimación del nivel de ruido no degrada las prestaciones del TCVG respecto al caso ideal en el que la varianza de ruido fuera conocida *a priori*.

La Figura 3.14 recoge las prestaciones teóricas del detector TCVG adaptativo (3.102) y su comparación con las del TCVG para σ^2 conocida¹⁷ (3.54) para distintos valores de L , N y P . Las figuras muestran que el detector (3.102) presenta una cierta, aunque pequeña, degradación respecto al detector (3.54). La degradación es lógica, ya que el estimador de la varianza de ruido introduce una fuente de error adicional. La diferencia se reduce cuando aumenta la duración de la ventana de análisis o bien se reduce la dimensión del subespacio de señal. En cualquier caso, las prestaciones asintóticas (3.114) se alcanzan con ventana de análisis de duración $L \geq 32$, incluso para el detector de energía con $P = N = 48$. A cambio de esta mínima degradación, el detector (3.102) puede diseñarse independientemente de la varianza de ruido de la señal observada, e incluso puede adaptarse dinámicamente a ella dentro de un mismo registro de señal ECG.

La Tabla 3.4 recoge las RSR mínimas (tras el blanqueado) necesarias para alcanzar $P_D = 0,95$ con $P_{FA} = 0,05$. Se observa que la degradación respecto al detector para σ^2 conocida es inferior a $0,5 \text{ dB}$ incluso para ventanas de sólo 8 latidos.

3.5.5. Prestaciones del EMV.

El EMV del vector de parámetros (3.94) y de la señal alterna (3.95) son los mismos que en el modelo gaussiano estacionario, ya que la varianza de ruido no interviene en la estimación. Por tanto, sus distribuciones vienen dadas por las ecuaciones (3.80) y (3.81) respectivamente y sus prestaciones son las mismas. Además, ambos detectores alcanzan la cota de Cramér-Rao (*vid. Teorema 3.1* y la matriz de Fisher (3.103)). En consecuencia, los EMCG (3.94) y (3.95) son también estimadores eficientes (EIMV) para el modelo gaussiano adaptativo. Las consideraciones sobre la ganancia de estimación realizadas en la Sección 3.4.5 son igualmente válidas para el modelo adaptativo.

3.6. Modelo gaussiano no estacionario.

3.6.1. Planteamiento.

En la sección precedente, la asunción del desconocimiento de la varianza de ruido (modelo gaussiano adaptativo) ha dado como resultado un detector adaptativo y CFAR, capaz de adaptarse a las variaciones del nivel medio de ruido.

¹⁷El TCVG para σ^2 conocida (modelo gaussiano estacionario) puede verse como un TCVG clarividente (no confundir con el detector clarividente de Neyman-Pearson), ya que se asume un conocimiento exacto de los parámetros de ruido pero los parámetros de señal son desconocidos. Por tanto es lógico que sus prestaciones sean una cota superior a las prestaciones de los detectores adaptativos, en los cuales σ^2 ha de ser estimada.

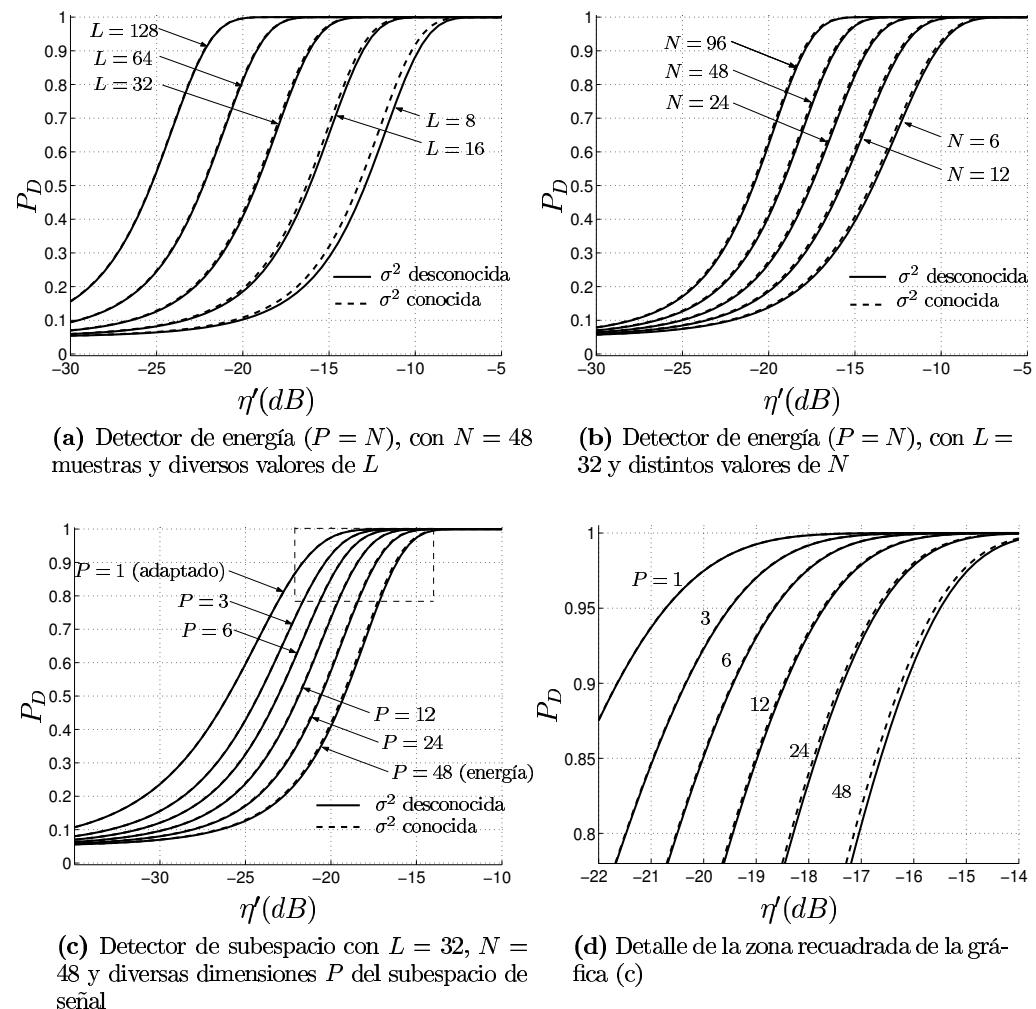


Figura 3.14: Curvas P_D vs η' (para $P_{FA} = 0,05$) del detector TCVG gaussiano adaptativo (σ^2 desconocida) y el TCVG gaussiano estacionario (σ^2 conocida).

$N = 48$	$\eta_{\min}(\text{dB}), P_D = 0,95; P_{FA} = 0,05$		Pérdida (dB)
$P = 48$	TCVG σ^2 conocida	TCVG σ^2 desconocida	
$L = 8$	-9,57	-9,17	0,40
$L = 16$	-12,58	-12,39	0,19
$L = 32$	-15,59	-15,50	0,09
$L = 64$	-18,60	-18,55	0,05
$L = 128$	-21,61	-21,59	0,02

(a) $N = 48, P = 48$

$L = 32$	$\eta_{\min}(\text{dB}), P_D = 0,95; P_{FA} = 0,05$		Pérdida (dB)
$P = N$	TCVG σ^2 conocida	TCVG σ^2 desconocida	
$N = 6$	-9,64	-9,49	0,15
$N = 12$	-11,72	-11,60	0,12
$N = 24$	-13,70	-13,59	0,11
$N = 48$	-15,59	-15,50	0,09
$N = 92$	-17,37	-17,29	0,08

(b) $L = 32, P = N$

$N = 48$	$\eta_{\min}(\text{dB}), P_D = 0,95; P_{FA} = 0,05$		Pérdida (dB)
$L = 32$	TCVG σ^2 conocida	TCVG σ^2 desconocida	
$P = 1$	-20,726	-20,721	0,005
$P = 3$	-19,516	-19,505	0,01
$P = 6$	-18,67	-18,65	0,02
$P = 12$	-17,74	-17,71	0,03
$P = 24$	-16,71	-16,66	0,05
$P = 48$	-15,59	-15,50	0,09

(c) $L = 32, N = 48$

Tabla 3.4: Valor mínimo de RSR η_{\min} (en dB) necesario para obtener $P_D = 0,95$ con $P_{FA} = 0,05$ con los detectores TCVG para σ^2 conocida y desconocida (adaptativo) para para distintos valores de L , N y P .

En esta sección, utilizamos de nuevo el modelo general (3.34), aceptando que la varianza del ruido pueda ser diferente en cada latido de la ventana. Así,

$$E\{\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_j\} = \delta_{ij} \sigma_i^2 \mathbf{C}_w, \quad i, j = 0, \dots, L-1 \quad (3.115)$$

donde \mathbf{C}_w es una matriz definida positiva conocida con $\text{tr}(\mathbf{C}_w) = N$, y donde $\sigma_i^2, i = 0, \dots, L-1$ son parámetros desconocidos.

La expresión de la FDP es

$$p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \{\sigma_i^2\}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{Tc} e_i (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 / \sigma_i^2\right)}{(2\pi)^{\frac{NL}{2}} \det^{1/2}(\mathbf{C}_w) \prod_{i=0}^{L-1} (\sigma_i^2)^{N/2}}. \quad (3.116)$$

Los parámetros desconocidos son los P coeficientes del vector \mathbf{c} que caracterizan la señal alterna y las L varianzas latido a latido $\{\sigma_i^2\}, i = 0, \dots, L-1$ (parámetros molestos).

El test de parámetros es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0: \mathbf{c} &= \mathbf{0}, \sigma_i^2 > 0, i = 0, \dots, L-1 \\ \mathcal{H}_1: \mathbf{c} &\neq \mathbf{0}, \sigma_i^2 > 0, i = 0, \dots, L-1. \end{aligned} \quad (3.117)$$

3.6.2. EMV y TCVG.

El detector TCVG es, por definición

$$L_G(\mathbf{X}) = \frac{p(\mathbf{X}; \hat{\mathbf{c}}, \{\hat{\sigma}_{i,1}^2\}, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{X}, \{\hat{\sigma}_{i,0}^2\}, \mathcal{H}_0)} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \stackrel{\mathcal{H}_0}{\lessdot} \gamma. \quad (3.118)$$

Las condiciones de máxima verosimilitud para los EMV $\hat{\mathbf{c}}$, $\{\hat{\sigma}_{i,1}^2\}$ y $\{\hat{\sigma}_{i,0}^2\}$ son

$$-\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \{\sigma_i^2\}, \mathcal{H}_1)}{\partial \mathbf{c}} \bigg|_{\substack{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}} \\ \{\sigma_i^2\}=\{\hat{\sigma}_{i,1}^2\}}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i (-1)^i \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} e_i^2 \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}}}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} = \mathbf{0} \quad (3.119)$$

$$-\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \{\sigma_i^2\}, \mathcal{H}_1)}{\partial \sigma_k^2} \bigg|_{\substack{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}} \\ \{\sigma_i^2\}=\{\hat{\sigma}_{i,1}^2\}}} = \frac{N}{2\hat{\sigma}_{k,1}^2} - \frac{\left\| \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_k (-1)^k \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2}{2\hat{\sigma}_{k,1}^4} = 0 \quad (3.120)$$

$$-\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \{\sigma_i^2\}, \mathcal{H}_0)}{\partial \sigma_k^2} \bigg|_{\{\sigma_i^2\}=\{\hat{\sigma}_{i,0}^2\}} = \frac{N}{2\hat{\sigma}_{k,0}^2} - \frac{\|\mathbf{x}_k\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2}{2\hat{\sigma}_{k,0}^4} = 0; \quad k = 0 \dots L-1. \quad (3.121)$$

De la ecuación (3.119) se obtiene el siguiente estimador de los parámetros de la señal

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{c}} &= \frac{2}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} \\ &= \frac{2}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} (\mathbf{T}'^T \mathbf{T}')^{-1} \mathbf{T}'^T \mathbf{x}'_i (-1)^i,\end{aligned}\quad (3.122)$$

donde $\mathbf{T}' = \mathbf{D}\mathbf{T}$, $\mathbf{C}_w^{-1} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$. Es un EMCG, donde cada latido se pondera por el inverso de la varianza de ruido estimada en el mismo. El vector de alternancia estimado es

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{2}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{x}_i (-1)^i. \quad (3.123)$$

Resolviendo las ecuaciones (3.120) y (3.121), tenemos que

$$\hat{\sigma}_{k,1}^2 = \frac{1}{N} \left\| \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}} e_k (-1)^k \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 = \frac{1}{N} \left\| \mathbf{x}'_k - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}' e_k (-1)^k \right\|_2^2, \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (3.124)$$

$$\hat{\sigma}_{k,0}^2 = \frac{1}{N} \|\mathbf{x}_k\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 = \frac{1}{N} \|\mathbf{x}'_k\|_2^2, \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (3.125)$$

Como en secciones anteriores, $\hat{\mathbf{a}}'$ denota el estimador de la forma de onda blanqueada

$$\hat{\mathbf{a}}' = \mathbf{D}\hat{\mathbf{a}} = \frac{2}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} P_{\mathbf{T}', \mathbf{x}'_i} e_i (-1)^i. \quad (3.126)$$

Nótese que, a diferencia de (3.96) y (3.97), la varianza se estima en cada latido independientemente. Pero la principal diferencia con los modelos anteriores radica en que ahora los estimadores $\hat{\mathbf{c}}$ (ó $\hat{\mathbf{a}}$) y $\hat{\sigma}_{k,1}^2$ están acoplados, y la solución de MV debe obtenerse numéricamente (*vid. infra* Sección 3.6.4).

Sustituyendo los EMV (3.122), (3.124) y (3.125) en (3.118) obtenemos el siguiente test CVG

$$L_G(\mathbf{X}) = \prod_{i=0}^{L-1} \left(\frac{\hat{\sigma}_{i,0}^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} \right)^{\frac{N}{2}} \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_0} \gamma. \quad (3.127)$$

También puede utilizarse el estadístico modificado $l_G(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X})$ en el siguiente test equivalente

$$l_G(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) = N \sum_{i=0}^{L-1} (\ln \hat{\sigma}_{i,0}^2 - \ln \hat{\sigma}_{i,1}^2) \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_0} \gamma' = 2 \ln \gamma. \quad (3.128)$$

El esquema correspondiente se presenta en la Figura 3.15.

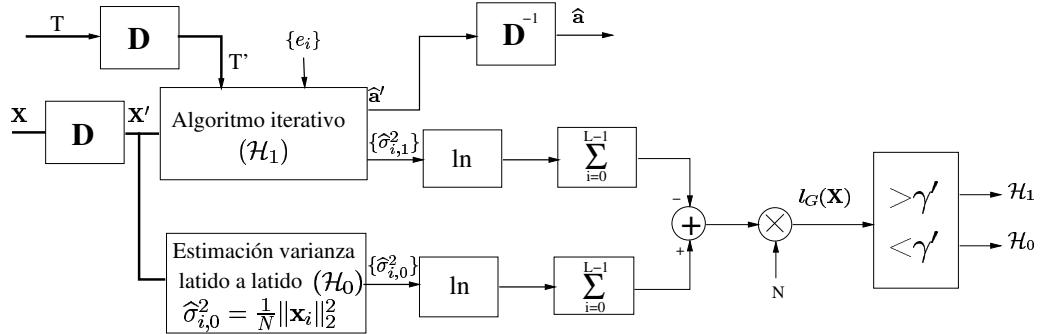


Figura 3.15: Esquema del análisis TCVG/EMV para ruido no estacionario.

3.6.3. Matriz de información de Fisher. Detectores de Wald y Rao.

En el Apéndice 3.E se deriva la matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano no estacionario. Su expresión es

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} & \mathbf{0}_{P \times L} \\ \mathbf{0}_{L \times P} & \frac{N}{2} \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_0^4}, \frac{1}{\sigma_1^4}, \dots, \frac{1}{\sigma_{L-1}^4} \right) \end{bmatrix}, \quad (3.129)$$

con $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{c}^T \sigma_0^2 \sigma_1^2 \dots \sigma_{L-1}^2]^T$. Las particiones de la matriz de Fisher son $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \sum_{i=0}^{L-1} e_i^2 / \sigma_i^2$ para los parámetros de señal e $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{2} \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_0^4}, \frac{1}{\sigma_1^4}, \dots, \frac{1}{\sigma_{L-1}^4} \right)$ para las varianzas de ruido, siendo nulos los términos cruzados $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{P \times L}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{L \times P}$.

A partir de la matriz de Fisher, la derivación de los tests de Wald y de Rao es inmediata (*vid.* Apéndice 3.E). El estadístico del test de Wald (3.27) es

$$\begin{aligned} T_W(\mathbf{X}) &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 \\ &= \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\hat{\mathcal{E}}'_i}{\hat{\sigma}_{i,1}^2}, \end{aligned} \quad (3.130)$$

donde $\hat{\mathcal{E}}'_i = e_i^2 \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 / 4$ es la energía estimada de la alternancia (blanqueada) en el latido i -ésimo. El test de Wald puede interpretarse así como la suma de las RER estimadas latido a latido. También puede interpretarse como una relación de energía alternante a

ruido si denotamos por $\tilde{\sigma}_1^2$ la media armónica ponderada de las varianzas estimadas

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_1^2} = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\tilde{\sigma}_{i,1}^2}}{\sum_{i=0}^{L-1} e_i^2} = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\tilde{\sigma}_{i,1}^2}. \quad (3.131)$$

De este modo, puede escribirse

$$T_W(\mathbf{X}) = \frac{\frac{L}{4} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{\tilde{\sigma}_1^2} = \frac{\hat{\mathcal{E}}'}{\tilde{\sigma}_1^2}. \quad (3.132)$$

Compárese con los detectores (3.54) ó (3.102), que son proporcionales a la RER estimada globalmente en los L latidos de la ventana de análisis. Al igual que el TCVG, el test de Wald requiere el cálculo numérico de $\hat{\mathbf{a}}'$ y $\tilde{\sigma}_{i,1}^2$. El esquema de este detector se presenta en la Figura 3.16

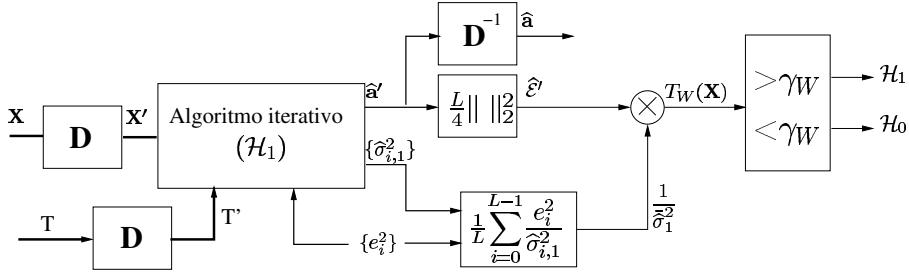


Figura 3.16: Esquema del detector de Wald para ruido no estacionario.

Por su parte, el test de Rao (3.29) proporciona el estadístico

$$T_R(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\tilde{\sigma}_{i,0}^2}} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \frac{P_{\mathbf{T}'} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i}{\tilde{\sigma}_{i,0}^2} \right\|_2^2. \quad (3.133)$$

Una ventaja importante de este test respecto al TCVG y al test de Wald es que puede expresarse de forma cerrada, sin precisar de cálculos iterativos. Denominando $\hat{\mathbf{a}}_R$ a

$$\hat{\mathbf{a}}_R = \frac{2}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\tilde{\sigma}_{i,0}^2}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i}{\tilde{\sigma}_{i,0}^2} P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w^{-1}} \mathbf{x}_i (-1)^i, \quad (3.134)$$

podemos reescribir (3.133) como

$$\begin{aligned} T_R(\mathbf{X}) &= \frac{1}{4} \|\hat{\mathbf{a}}_R'\|_2^2 \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\tilde{\sigma}_{i,0}^2} = \\ &= \frac{\hat{\mathcal{E}}_R'}{\tilde{\sigma}_0^2} \end{aligned} \quad (3.135)$$

donde $\hat{\mathbf{a}}'_R = \mathbf{D}\hat{\mathbf{a}}_R$ y $\hat{\mathcal{E}}'_R = \frac{L}{4} \|\hat{\mathbf{a}}'_R\|_2^2$, y $\tilde{\sigma}_0^2$ es la media armónica ponderada de las varianzas estimadas

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_0^2} = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}}{\sum_{i=0}^{L-1} e_i^2} = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}. \quad (3.136)$$

La Figura 3.133 muestra un esquema posible para la realización del detector de Rao.

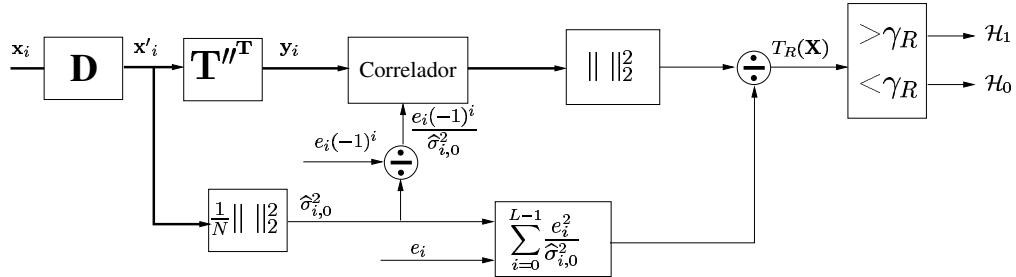


Figura 3.17: Esquema del detector de Rao para ruido no estacionario.

Se observan algunos paralelismos entre el test de Rao y el test de Wald. El vector $\hat{\mathbf{a}}_R$ es el equivalente al EMV en el test de Rao, y podemos denominarlo *estimador de Rao* de la forma de onda alterna. Tanto el estadístico de Rao $T_R(\mathbf{X})$ como el estimador $\hat{\mathbf{a}}_R$ son análogos al test de Wald y al EMV respectivamente, sustituyendo los estimadores $\hat{\sigma}_{i,1}^2$ por los $\hat{\sigma}_{i,0}^2$. De este modo se evita la necesidad de resolver la maximización acoplada de la verosimilitud de $\hat{\mathbf{c}}$ y $\hat{\sigma}_1^2$.

3.6.4. Cálculo numérico de los EMV.

Para calcular el EMV de la alternancia es preciso resolver el sistema no lineal acoplado formado por las ecuaciones (3.122) y (3.124). El número de parámetros a estimar ($P+L$) desaconseja una búsqueda intensiva en una rejilla de valores de los parámetros. Entre los métodos iterativos de gradiente, uno de los algoritmos más utilizados para encontrar estimadores de máxima verosimilitud es el método de puntuación de Fisher (Kay 1993, Sección 7.7), que es una modificación del conocido método de Newton-Raphson¹⁸. La iteración del método de puntuación de Fisher es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(r+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(r)} + \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(r)}} \quad (3.137)$$

¹⁸El método de Newton-Raphson se basa en iterar la expresión $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(r+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(r)} - \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]^{-1} \left. \frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(r)}}$ hasta llegar a la convergencia. El método de puntuación de Fisher sustituye el hessiano $\mathbf{H} = \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$ por su valor esperado $E(\mathbf{H}) = -\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$.

donde $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ es la matriz de información de Fisher y (r) denota el número de iteración. Sustituyendo la matriz de Fisher (3.129) y la derivada de la función de verosimilitud (3.119) en (3.137) se obtiene que

$$\widehat{\mathbf{c}}_{(r+1)} = \widehat{\mathbf{c}}_{(r)} + \frac{4(\mathbf{T}'\mathbf{T}')^{-1}}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathbf{T}'\mathbf{x}'_i e_i (-1)^i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathbf{T}'\mathbf{T}'\mathbf{c} e_i^2}{\sigma_i^2} \right) \quad (3.138)$$

$\left. \begin{array}{l} \mathbf{c} = \widehat{\mathbf{c}}_{(r)} \\ \{\sigma_i^2\} = \{\widehat{\sigma}_{i,1}^2\} \end{array} \right\}$

$$\sigma_{k,1,(r+1)}^2 = \sigma_{k,1,(r)}^2 + \frac{2\sigma_k^4}{N} \left(\frac{-N}{2\sigma_k^2} + \frac{1}{2\sigma_k^4} \left\| \mathbf{x}'_k - \frac{1}{2} \mathbf{T}'\mathbf{c} e_k (-1)^k \right\|_2^2 \right) \quad (3.139)$$

$\left. \begin{array}{l} \sigma_k^2 = \widehat{\sigma}_{k,1,(r)}^2 \end{array} \right\}$

$$k = 0, \dots, L-1.$$

Desarrollando las expresiones (3.138) y (3.139) se pueden simplificar las iteraciones:

$$\widehat{\mathbf{c}}_{(r+1)} = \frac{2}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\widehat{\sigma}_{i,1,(r)}^2}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{(\mathbf{T}'\mathbf{T}')^{-1} \mathbf{T}'\mathbf{x}'_i e_i (-1)^i}{\widehat{\sigma}_{i,1,(r)}^2} \quad (3.140)$$

$$\widehat{\sigma}_{k,1,(r+1)}^2 = \frac{1}{N} \left\| \mathbf{x}'_k - \frac{1}{2} \mathbf{T}'\widehat{\mathbf{c}}_{(r)} e_k (-1)^k \right\|_2^2, \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (3.141)$$

Comparando (3.140), (3.141) con las expresiones de los EMV teóricos (3.122), (3.124), vemos que en la iteración r -ésima, $\widehat{\mathbf{c}}_{(r)}$ es el EMV de \mathbf{c} (3.122) asumiendo que $\widehat{\sigma}_{k,1}^2 = \widehat{\sigma}_{k,1,(r-1)}^2$. Por su parte, los $\{\widehat{\sigma}_{k,1,(r)}^2\}$ son los EMV de $\{\sigma_k^2\}$ (3.124) asumiendo que $\widehat{\mathbf{c}} = \widehat{\mathbf{c}}_{(r-1)}$. Es suficiente con actualizar la estimación de señal y de ruido alternativamente (una vez cada dos iteraciones), ya que $\widehat{\mathbf{c}}_{(r)}$ depende de $\widehat{\mathbf{c}}_{(r-2)}$ (por medio de los $\{\widehat{\sigma}_{k,1,(r-1)}^2\}$) y no de $\widehat{\mathbf{c}}_{(r-1)}$, y que los $\{\widehat{\sigma}_{k,1,(r)}^2\}$ dependen de $\{\widehat{\sigma}_{k,1,(r-2)}^2\}$ (por medio de $\widehat{\mathbf{c}}_{(r-1)}$) y no de $\{\widehat{\sigma}_{k,1,(r-1)}^2\}$. Esta versión simplificada se describe en el Algoritmo 3.1 (donde se actualiza directamente el estimador de la señal alternante blanqueada $\widehat{\mathbf{a}}'_{(r)} = \mathbf{T}'\widehat{\mathbf{c}}_{(r)}$).

Algunos puntos de partida razonables para el algoritmo son el EMV para ruido estacionario $\widehat{\mathbf{a}}'_{(0)} = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}'\mathbf{x}'_i e_i} (-1)^i$, o bien simplemente $\widehat{\mathbf{a}}'_{(0)} = \mathbf{0}_{P \times 1}$. Nótese que entonces $\widehat{\sigma}_{k,1,(1)}^2 = \widehat{\sigma}_{k,0}^2$ y $\widehat{\mathbf{a}}'_{(2)}$ es el estimador de Rao $\widehat{\mathbf{a}}'_R$ (3.134).

En general, el método de puntuación de Fisher no asegura la convergencia, y si ésta se alcanza, podría tratarse de un máximo local de la función de verosimilitud. No obstante, si el punto de partida seleccionado está cerca del máximo global, el algoritmo converge a éste. Además, conforme aumenta el tamaño de los datos observados, el logaritmo de la función de verosimilitud tiende a ser cuadrático (Kay 1993, pág. 187), asegurando una correcta convergencia al valor deseado.

- 1: **INICIO:** $r = 0$, $\hat{\mathbf{a}}'_{(0)} \in \langle \mathbf{T}' \rangle$.
- 2: $r = r + 1$.
- 3: **ACTUALIZACIÓN DE $\{\hat{\sigma}_{k,1}^2\}$:** $\hat{\sigma}_{k,1_{(r)}}^2 = \frac{1}{N} \left\| \mathbf{x}'_k - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}'_{(r-1)} e_k (-1)^k \right\|_2^2$, $k = 0, \dots, L-1$.
- 4: $r = r + 1$.
- 5: **ACTUALIZACIÓN DE $\hat{\mathbf{a}}'$:** $\hat{\mathbf{a}}'_{(r)} = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\hat{\sigma}_{i,1_{(r-1)}}^2} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1_{(r-1)}}^2}}$.
- 6: **REPETIR PASOS 2-5 HASTA QUE** $\left\| \hat{\mathbf{a}}'_{(r)} - \hat{\mathbf{a}}'_{(r-1)} \right\| < \epsilon$.
- 7: $\hat{\sigma}_{k,1}^2 = \hat{\sigma}_{k,1_{(r)}}^2$, $k = 0, \dots, L-1$
 $\hat{\mathbf{a}}' = \hat{\mathbf{a}}'_{(r)}$
 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{D}^{-1} \hat{\mathbf{a}}'$
 $\hat{\mathcal{E}}_i = \frac{1}{4} e_i^2 \left\| \hat{\mathbf{a}}' \right\|_2^2$.

Algoritmo 3.1: Algoritmo para la obtención de los EMV de \mathbf{a} y σ^2 bajo \mathcal{H}_1 en el modelo gaussiano no estacionario utilizando el método de puntuación de Fisher

3.6.5. Detector TCVG clarividente.

Si asumimos que la varianza de ruido en cada latido es conocida (o puede estimarse por medios externos al detector), tenemos un modelo de señal observada donde los únicos parámetros desconocidos son los de la señal¹⁹. El EMV es entonces

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{2}{\sum_{i=0}^{L-1} e_i^2 / \sigma_i^2} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\sigma_i^2} (\mathbf{T}'^T \mathbf{T}')^{-1} \mathbf{T}'^T \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i, \quad (3.142)$$

y el estadístico del TCVG clarividente es

$$\begin{aligned} l_{GC}(\mathbf{X}) = 2 \ln L_{GC}(\mathbf{X}) &= \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\left\| \mathbf{x}'_i \right\|_2^2 - \left\| \mathbf{x}'_i - \frac{1}{2} \mathbf{T}' \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_2^2 \right) \\ &= \hat{\mathbf{c}}^T \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\sigma_i^2} \mathbf{T}'^T \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i - \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \left\| \mathbf{T}' \hat{\mathbf{c}} \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \left\| \mathbf{T}' \hat{\mathbf{c}} \right\|_2^2 = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\hat{\mathcal{E}}_i}{\sigma_i^2}. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Nótese el paralelismo entre el TCVG clarividente y las expresiones de los tests de Wald y de Rao. Ambos estadísticos se obtienen sustituyendo los valores de σ_i^2 en el TCVG

¹⁹Este detector no debe confundirse con el detector clarividente de Neyman-Pearson, que sería el detector óptimo asumiendo un perfecto conocimiento de las características tanto de la señal como del ruido.

clarividente por un estimador del mismo. Cuando el ruido es estacionario ($\sigma_i^2 = \sigma^2$), el TCVG clarividente se reduce al TCVG estacionario estudiado en la Sección 3.4.

Puede comprobarse que la distribución exacta del CVG clarividente es

$$l_{GC}(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) \sim \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.144)$$

con el parámetro de no centralidad

$$\lambda = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \|\mathbf{a}'\|_2^2 = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathcal{E}_i}{\sigma_i^2}. \quad (3.145)$$

3.6.6. Prestaciones de los detectores.

La distribución estadística exacta del CVG (3.127) no tiene una expresión cerrada sencilla. Afortunadamente, el Teorema 3.3 presentado en la Sección 3.2.4 nos permite obtener su distribución asintótica. Aplicando el teorema 3.3 tenemos que

$$l_G(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) \stackrel{a}{\sim} \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.146)$$

con el parámetro de no centralidad,

$$\lambda = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \|\mathbf{a}'\|_2^2 = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathcal{E}'_i}{\sigma_i^2}. \quad (3.147)$$

Las prestaciones asintóticas están parametrizadas por λ , que es una suma de las RER en cada latido. También podemos escribir $\lambda = G_b(\mathbf{a}) N \sum_{i=0}^{L-1} \eta'_i = G_b(\mathbf{a}) NL\bar{\eta}'$, donde se aprecia su relación con la RSR de cada latido $\eta'_i = \frac{e_i^2 \|\mathbf{a}'\|_2^2}{4N\sigma_i^2}$ y con la RSR media $\bar{\eta}' = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \eta'_i$. Los tests de Wald (3.130) y de Rao (3.133) para el modelo gaussiano no estacionario también alcanzan asintóticamente las mismas prestaciones.

Para tamaños finitos, los detectores CVG, de Wald y de Rao para el modelo gaussiano no estacionario son CFAR ante variaciones del nivel ruido que afecten proporcionalmente a todos los latidos, pero no lo son ante variaciones arbitrarias de los valores de $\{\sigma_i^2\}$. No obstante, la distribución (3.146) indica que los tres detectores son asintóticamente CFAR para cualesquiera valores de $\{\sigma_i^2\}$ (la distribución asintótica de los estadísticos bajo \mathcal{H}_0 no depende de los $\{\sigma_i^2\}$). Si el comportamiento de los detectores se aproxima al asintótico puede determinarse el umbral como $\gamma' = Q_{\chi_P^2}^{-1}(P_{FA})$. De lo contrario, es preferible determinar el umbral de forma empírica, ajustando el umbral para obtener la tasa deseada de falsas alarmas en un conjunto de entrenamiento de señales ECG sin alternancia (generadas bajo la hipótesis \mathcal{H}_0).

Puede comprobarse que la distribución exacta del TCVG clarividente (3.144) coincide con (3.146). Por tanto, cuando N y L son suficientemente grandes, el TCVG y los tests

asintóticamente equivalentes de Wald y de Rao convergen a las prestaciones del TCVG clarividente. Esta propiedad es deseable, ya que el TCVG clarividente constituye una cota superior a las prestaciones de un TCVG sin conocimiento *a priori* del ruido. No obstante, las prestaciones para tamaños finitos pueden alejarse de los valores asintóticos.

Recuérdese que para que se alcancen las prestaciones asintóticas del detector (Teorema 3.3), los EMV de los parámetros desconocidos deben aproximarse a su distribución normal asintótica (Teoremas 3.1 y 3.2). En el caso de \mathbf{c} , es preciso que $L \rightarrow \infty$, mientras que en el caso de la varianza de ruido, N ha de ser suficientemente grande, ya que la varianza de ruido de un latido se estima únicamente con las N muestras del mismo (valor fijado normalmente por la forma de realizar la adquisición). Así, el aumento de L no asegura la convergencia a las prestaciones asintóticas del detector²⁰.

Nótese que si el ruido es estacionario (es decir $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $i = 0, \dots, L - 1$), los tres detectores estudiados en esta sección tienden asintóticamente a las mismas prestaciones que los detectores en ruido estacionario de varianza conocida (3.70) y desconocida (3.114). Sin embargo, es de esperar que las prestaciones sean peores para L y N finitos, dado que varianza del estimador de σ_i^2 en cada latido (calculada con sólo N muestras) es mayor que la del EMV de σ^2 (3.96) calculado con NL muestras. Las prestaciones exactas pueden estimarse mediante simulaciones de Monte Carlo.

Ejemplo 3.7 (Detección en ruido estacionario mediante el detector no estacionario). Consideremos que el ruido es estacionario ($\sigma_i^2 = \sigma^2$, $i = 0, \dots, L - 1$). La Figura 3.18 muestra las P_{FA} de los detectores CVG, de Wald²¹ y de Rao en función de L , estimadas mediante simulaciones de Monte Carlo (20.000 realizaciones independientes de \mathbf{X} para cada punto). El ruido simulado es blanco y el umbral utilizado ha sido $\gamma_a = Q_{\chi^2}^{-1}(P_{FA})$, es decir, aquél con el que se alcanzaría una $P_{FA} = 0,05$ si el estadístico hubiera alcanzado su distribución asintótica.

En la Figura 3.18(a) (subespacio de dimensión completa), se observa que los estadísticos CVG y de Wald tienen un valor mayor que el CVG clarividente (σ^2 conocida), especialmente para ventanas de análisis cortas: tienden a considerar más verosímil que el ruido observado sea una señal alterna, que el detector para ruido estacionario. Este efecto se reduce al incrementar L y/o al restringir las morfologías posibles de la alternancia (Figura 3.18(b)). Por el contrario, el test de Rao sobreestima la verosimilitud de la hipótesis \mathcal{H}_0 respecto al TCVG para σ^2 constante. Nótese que la P_{FA} de los tests CVG y de Wald no alcanza el valor asintótico cuando $L \rightarrow \infty$. Esto se debe a que, como ya se ha indicado, las estimaciones $\hat{\sigma}_{i,1}^2$ son calculadas siempre con N muestras. Por ello, el aumento de L no disminuye la varianza de los estimadores $\hat{\sigma}_{i,1}^2$. Para que éstos lleguen a su distribución asintótica, debe aumentar también N . No obstante, el test de Rao alcanza la P_{FA} asintótica para $L = 16$ y $N = 48$.

²⁰Por el contrario, en el TCVG adaptativo (Sección 3.5), un aumento de L disminuye la varianza tanto de $\hat{\mathbf{c}}$ como de $\hat{\sigma}_1^2$ (la varianza se estima con NL muestras de la señal observada). Por tanto, las prestaciones de los EMV y del TCVG se pueden aproximar a las asintóticas si L es suficientemente grande (aunque N no aumente).

²¹Los EMV necesarios en los tests del CVG y de Wald se han obtenido mediante el Algoritmo 3.1, utilizando $\hat{\mathbf{a}}_{(0)} = 0$ como valor de inicio del algoritmo.

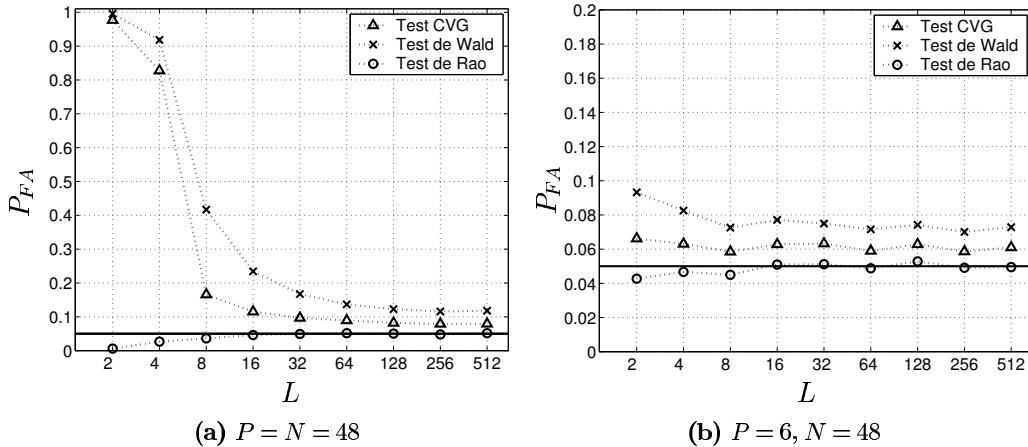


Figura 3.18: P_{FA} experimental para los tests TCVG (3.128), de Wald (3.130) y de Rao (3.133) en función de L . Se ha utilizado el umbral $\gamma_a = Q_{\chi_P^2}^{-1}(P_{FA})$, de forma que P_{FA} asintótica sea de 0,05. La P_{FA} teórica exacta del TCVG clarividente (que en este caso es el TCVG estacionario) con el umbral γ_a es también de 0,05, y se representa por una línea continua.

En la Figura 3.19 se representan las curvas P_D vs η' de los detectores para ruido no estacionario, obtenidas por simulación de Monte Carlo (10.000 realizaciones) donde la señal alterna es (3.79) y el episodio es de amplitud constante. Para comparar los detectores de forma coherente con el criterio de optimalidad de Neyman-Pearson, el umbral en cada detector se ha calculado experimentalmente para tener una $P_{FA} = 0,05$ en un conjunto de entrenamiento con 20.000 señales generadas según el modelo para \mathcal{H}_0 (ECG ruidoso sin alternancia). La utilización del umbral asintótico nos llevaría a comparar curvas P_D vs η' de detectores con P_{FA} diferentes, según se desprende de la Figura 3.18. Se representan también las curvas teóricas para el TCVG clarividente (que es el detector TCVG adaptativo para este problema) y del TCVG estacionario. La Figura 3.19 muestra una ligera degradación en los detectores para ruido no estacionario, debida al mayor número de parámetros a estimar. Esta degradación es pequeña en cualquier caso, y se hace despreciable cuando la ventana de análisis es mayor de 16-32 latidos (Figura 3.19(a)), o al reducir la dimensión del subespacio de señal (Figura 3.19(b)). Las diferencias entre el CVG y sus aproximaciones de Wald y Rao son también mínimas en este ejemplo.

Se comprueba, por tanto, que la degradación respecto al detector para ruido estacionario es mínima para dimensiones típicas de los datos. La utilización ventajosa de estos detectores se produce cuando el ruido es no estacionario. Dado que los métodos para ruido no estacionario suponen un aumento importante de la complejidad del detector, tratamos de estudiar a continuación el grado de mejora obtenida cuando el ruido es no estacionario.

Ejemplo 3.8 (Detección en ruido no estacionario). En este ejemplo estudiamos el comportamiento cuando el ruido es no estacionario. Consideramos que en la mitad de la

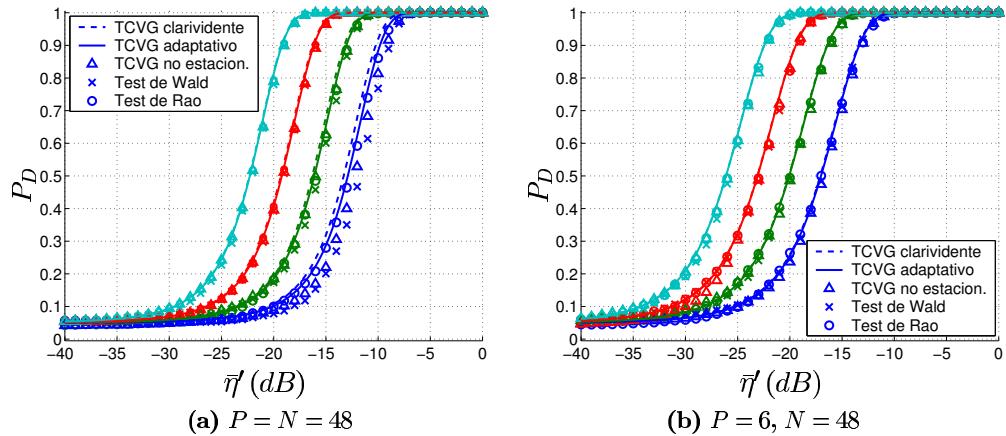


Figura 3.19: Curvas P_D vs $\bar{\eta}'$ experimentales (simulación de Monte Carlo) para $P_{FA} = 0,05$ y $L = 8$ (azul), 16 (verde), 32 (rojo) y 64 latidos (cian) de los tests del CVG (3.128), de Wald (3.130) y de Rao (3.133). Se muestran también las prestaciones teóricas del TCVG para σ^2 estacionaria y desconocida (línea continua) y las prestaciones asintóticas de los detectores (línea discontinua).

ventana se produce un cambio del nivel de ruido, de forma que la desviación estándar es $\sigma_i = 5 \mu V$, $i = 0, \dots, L/2 - 1$ y $\sigma_i = 20 \mu V$, $i = L/2, \dots, L - 1$. La Figura 3.20 exhibe el comportamiento real y asintótico de los detectores para ruido no estacionario junto con el comportamiento real del TCVG para el modelo adaptativo. Los resultados se dan en función de la RSR media $\bar{\eta}$. Se han simulado 2000 realizaciones para calcular cada punto de la curva y otras 10000 bajo \mathcal{H}_0 para seleccionar el umbral. Las diferencias entre los tres métodos no estacionarios son nuevamente mínimas, mientras que el detector para ruido estacionario presenta unas pérdidas de aproximadamente 6 dB.

En resumen, los detectores estudiados en esta sección son robustos ante la no estacionariedad del ruido, mejorando las prestaciones de los detectores adaptativos de la Sección 3.5. Cuando el ruido es estacionario, la degradación respecto a los detectores para ruido estacionario es pequeña. El problema principal del TCVG no estacionario (y el test de Wald) radica en su elevado coste computacional en comparación con los derivados de los modelos estacionario y adaptativo. En este sentido, el test de Rao no requiere maximizaciones numéricas y constituye una alternativa interesante.

3.6.7. Prestaciones del EMV.

El EMV del vector de parámetros de señal \mathbf{c} se calcula numéricamente, lo que dificulta la obtención de una expresión cerrada de su distribución estadística. No obstante, podemos estudiar sus propiedades asintóticas haciendo uso del Teorema 3.2 y teniendo en cuenta que los términos cruzados entre parámetros de señal y ruido en la matriz de información

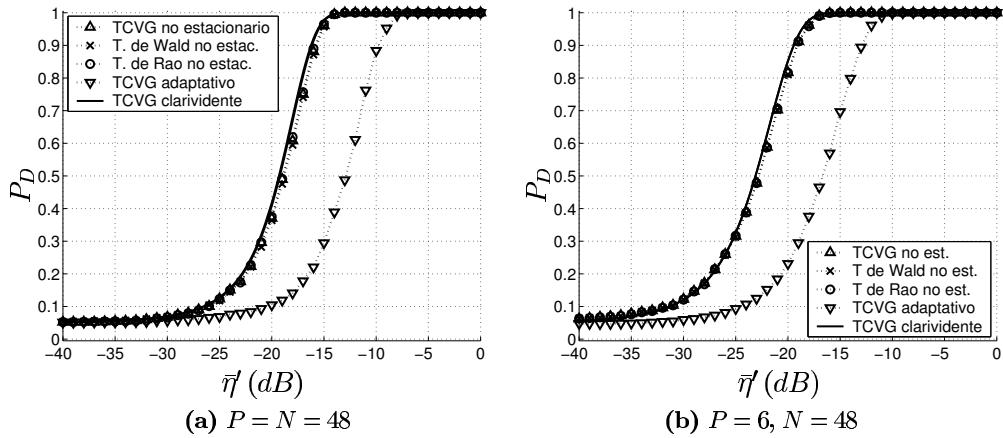


Figura 3.20: Curvas P_D vs $\bar{\eta}'$ experimentales (simulación de Monte Carlo) para $P_{FA} = 0,05$ y $L = 32$ de los tests del CVG (3.128), de Wald (3.130) y de Rao (3.133) ante ruido no estacionario. Se muestran también las prestaciones teóricas del TCVG adaptativo y las prestaciones asintóticas de los detectores, que coinciden con las del TCVG clarividente.

de Fisher son nulos

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_s \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}_s, \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}^{-1}(\boldsymbol{\theta})). \quad (3.148)$$

Utilizando (3.129) obtenemos la distribución asintótica del vector de parámetros

$$\hat{\mathbf{c}} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N} \left(\mathbf{c}, \frac{4}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \right). \quad (3.149)$$

El estimador es consistente, ya que $E(\hat{\mathbf{c}}) \xrightarrow{a} \mathbf{c}$, y asintóticamente eficiente, aunque para datos finitos puede tener un cierto sesgo. El EMV de la señal alterna en el dominio temporal es también consistente y asintóticamente eficiente, con distribución asintótica

$$\hat{\mathbf{a}} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N} \left(\mathbf{a}, \frac{4}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \right). \quad (3.150)$$

La varianza asintótica del error en cada muestra puede expresarse como

$$\sigma_{\varepsilon(n)}^2 = \frac{4}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} [\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T]_{n,n}, \quad (3.151)$$

siendo su potencia media

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = E\left(\frac{1}{N} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \frac{4}{N \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} \operatorname{tr}(\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T). \quad (3.152)$$

La RSR asintótica puede escribirse como

$$\nu = \frac{\|\mathbf{a}\|_2^2 / N}{\sigma_{\varepsilon}^2} = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2 \|\mathbf{a}\|_2^2}{4 \sigma_i^2}}{\operatorname{tr}(\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)} \quad (3.153)$$

$$= \frac{N \sum_{i=0}^{L-1} \eta_i}{\operatorname{tr}(\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)} = \frac{NL\bar{\eta}}{\operatorname{tr}(\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)}, \quad (3.154)$$

donde $\eta_i = \frac{e_i^2 \|\mathbf{a}\|_2^2 / 4}{N \sigma_i^2}$ es la RSR en cada latido y $\bar{\eta} = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \eta_i$ es la RSR media. Por tanto, se produce una ganancia de estimación

$$G_e = \nu / \bar{\eta} = L \frac{N}{\operatorname{tr}(\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)} \quad (3.155)$$

proporcional a L y dependiente de \mathbf{T} y \mathbf{C}_w . La expresión de la ganancia de estimación es la misma que la encontrada en los modelos estacionario y adaptativo, y su dependencia con \mathbf{T} y \mathbf{C}_w ha sido ya analizada en la Sección 3.5.5. Las consideraciones allí realizadas son válidas también para el modelo no estacionario, si bien han de considerarse prestaciones asintóticas. Si además el ruido es estacionario ($\sigma_i^2 = \sigma^2$) la distribución de $\hat{\mathbf{a}}$ tiende asintóticamente a la distribución exacta del EMV para los modelos estacionario y adaptativo.

Ejemplo 3.9 (Estimación en ruido no estacionario). En este ejemplo se plantea la cuestión de cuán lejos se encuentra el comportamiento del EMV no estacionario (3.123) con L y N finitos de las prestaciones asintóticas (óptimas). Por otra parte, es interesante comprobar cuál es el funcionamiento del estimador de Rao (3.134) en comparación con el EMV y cómo se comporta el EMV para ruido estacionario cuando el ruido es realmente no estacionario. Para ilustrar el comportamiento, se han simulado realizaciones de alternancia en ruido gaussiano no estacionario ($5 \mu V$ en la primera mitad de la ventana y $20 \mu V$ en la segunda mitad). Las Figuras 3.21 y 3.22 muestran, respectivamente, el valor RMS del sesgo y la desviación estándar del EMV y el estimador de Rao (ambos para ruido no estacionario) así como del EMV para ruido estacionario. Se ha considerado el caso de $N = 48$ con diversos valores de L entre 8 y 128, tanto para el caso de subespacio completo $P = N$ (a) como para subespacio de dimensión reducida $P = 6$ (b). La forma de la alternancia es de nuevo (3.79) con una amplitud de pico de $10 \mu V$.

El sesgo es pequeño en todos los casos ($\leq 0,5 \mu V$, correspondiente a un 0,5 % de la energía alterante) y tiende a cero asintóticamente para los EMV. El estimador de Rao

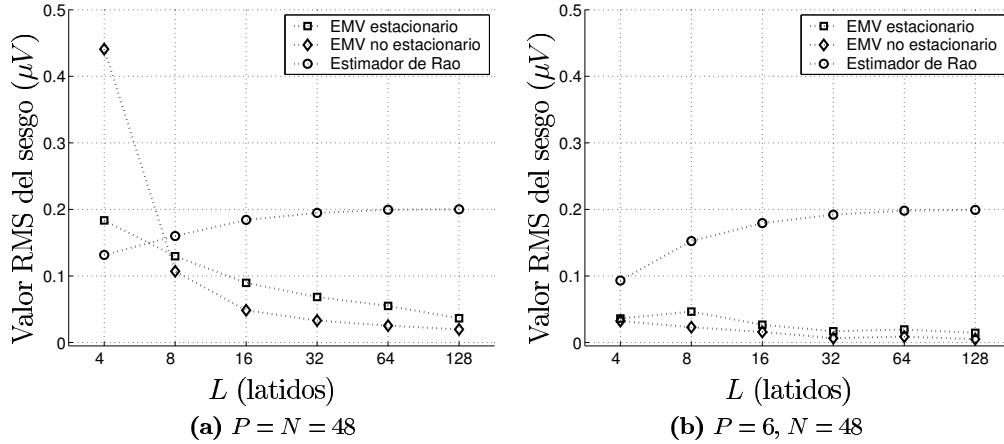


Figura 3.21: Valor RMS del sesgo $RMS(E(a - \hat{a}))$ de los estimadores para ruido no estacionario (EMV y de Rao) y para ruido estacionario (EMV).

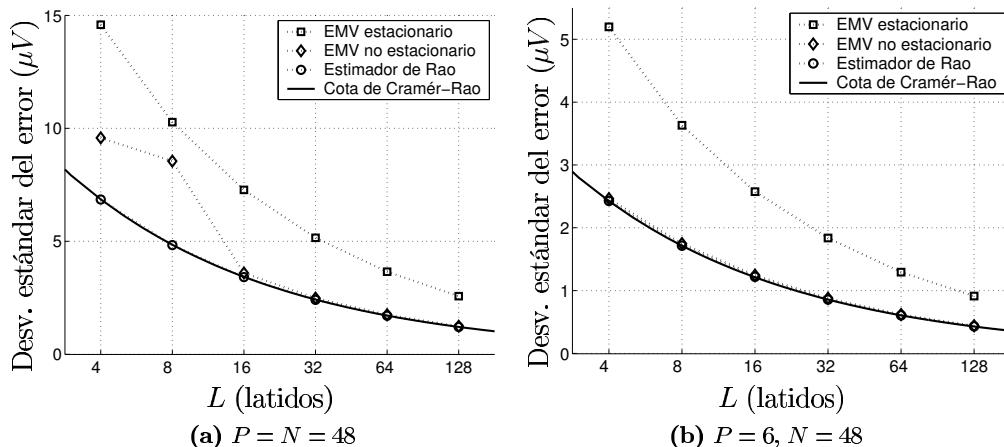


Figura 3.22: Desviación estándar del error de estimación en los estimadores para ruido no estacionario (EMV y de Rao) y para ruido estacionario (EMV).

tiende a un sesgo constante a medida que L aumenta. En cuanto a la varianza, tanto el EMV como el estimador de Rao alcanzan la cota de Cramér-Rao para $L \geq 16$ (o incluso para ventanas menores si se restringe la dimensión del subespacio). El EMV para ruido estacionario presenta una degradación importante, con una amplitud de ruido en la estimación que es aproximadamente el doble que en los estimadores no estacionarios. La degradación es, por tanto, de aproximadamente 6 dB.

3.7. Modelos extendidos. Inclusión de la onda P.

3.7.1. Justificación.

En los modelos estudiados en este capítulo se ha considerado que los detectores disponen únicamente de la señal ECG en el intervalo de repolarización de cada latido (complejo ST-T).

En la práctica, el sistema de análisis tiene a su alcance el ECG completo con información adicional correspondiente a otras partes del ciclo cardíaco, como la despolarización auricular (onda P) y la despolarización ventricular (complejo QRS). Bajo la premisa de que no se producen alternancias en esas partes de la señal, podemos utilizar las series latido a latido correspondientes como *series de entrenamiento* o *series de ruido*, que pueden aportar información útil sobre las características del ruido.

Por su contenido en altas frecuencias el complejo QRS es muy sensible a los posibles desalineamientos debidos a la incertidumbre en la determinación del punto fiducial del QRS. Además, se han encontrado en algunos casos alternancias en la parte final del complejo QRS (Smith *et al.* 1988; Rosenbaum *et al.* 1994; Martínez *et al.* 2002). La onda P, por otro lado, tiene un espectro similar al de la onda T (Figura 1.5), y son escasos los casos documentados de alternancia eléctrica en esa parte del ciclo cardíaco²². Por ello se propone estudiar los detectores CVG (y otros detectores asintóticamente equivalentes) incorporando para ello la onda P al modelo de señal.

Este tipo de modelos son ampliamente utilizados en otras aplicaciones como detección radar o procesado de *arrays*, donde se asume que el procesador cuenta con observaciones compuestas esencialmente del ruido ambiental e interferencias (denominados datos de entrenamiento o secundarios) (Kelly 1986; Kraut *et al.* 2001). Estas observaciones permiten una mejor estimación de las características de ruido en detectores adaptativos.

3.7.2. Modelo extendido.

El modelo extendido de señal observada incluye, además de la matriz de complejos ST-T \mathbf{X} modelada por (3.39), una matriz formada por las L ondas P de los latidos de

²²La alternancia en la onda P es un fenómeno raro, generalmente acompañado por alternancias en el resto del ECG, y asociado a movimientos del corazón dentro del saco pericárdico (especialmente en casos de pericarditis severa con efusión pericárdica y taponamiento cardíaco) y/o alternancias mecánicas (*pulsus alternans*) (Surawicz y Fisch 1992).

la ventana de observación $\mathbf{X}^P = [\mathbf{x}_0^P, \dots, \mathbf{x}_{L-1}^P]$. Cada onda P (N_P muestras) se denota por el vector $\mathbf{x}_i^P = \mathbf{p} + \mathbf{w}_i^P$ formado por la componente repetitiva de la onda P (ECG de fondo) más el ruido. Del mismo modo que para los complejos ST-T, consideramos que la componente de fondo ha sido eliminada en el preprocesado mediante un filtro paso-alto de eliminación de tendencias. Tras eliminar el ECG de fondo, podemos asumir que la matriz \mathbf{X}^P contiene únicamente muestras de ruido. El detector dispone, por tanto, de los siguientes datos

$$\mathbf{X}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^P \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^P & \mathbf{x}_1^P & \dots & \mathbf{x}_{L-1}^P \\ \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_{L-1} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

con

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i^P = \mathbf{w}_i^P, & i = 0, \dots, L-1. \\ \mathbf{x}_i = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{Tc}}_{\mathbf{a}_i} \mathbf{e}_i (-1)^i + \mathbf{w}_i, & i = 0, \dots, L-1. \end{cases} \quad (3.157)$$

Asumimos que el ruido es estacionario dentro de un mismo latido, y que las muestras de ruido de la onda P y del complejo ST-T están incorreladas²³ $E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^{P^T}\} = \mathbf{0}$. Se asume igualmente que no hay correlación entre muestras correspondientes a distintos latidos. La hipótesis de estacionariedad indica que $E\{\mathbf{w}_i^P \mathbf{w}_i^{P^T}\} = \sigma_i^2 \mathbf{C}_w^P$, $E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T\} = \sigma_i^2 \mathbf{C}_w$, con $tr\{\mathbf{C}_w^P\} = N_P$, $tr\{\mathbf{C}_w\} = N$ y donde \mathbf{C}_w^P y \mathbf{C}_w son toeplitz. Asumiendo que $N_P \leq N$, los valores de las $2N_P - 1$ diagonales de \mathbf{C}_w^P son iguales a los de las $2N_P - 1$ diagonales principales de \mathbf{C}_w .

3.7.3. Modelo gaussiano estacionario.

En este modelo se asume que la varianza de ruido es conocida e igual en todos los latidos $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $i = 0, \dots, L-1$. Además, en el modelo extendido se asume que las muestras de la onda P y del complejo ST-T son incorreladas. Así, las muestras de la onda P no proporcionan información útil adicional que mejore el conocimiento del ruido que afecta al ST-T. Las muestras de la onda P son, por tanto, ignoradas por el EMV y el TCVG, de forma que $l_G(\mathbf{X}^G) = l_G(\mathbf{X})$.

3.7.4. Modelo gaussiano adaptativo.

En este modelo la varianza de ruido es desconocida y debe ser estimada a partir de los datos. Dada la asunción de estacionariedad intra-latido, los métodos de análisis pueden aprovechar la información adicional proporcionada por las muestras correspondientes a la onda P.

²³Para ello, la correlación entre muestras del ruido debe ser esencialmente nula para retardos mayores que la separación entre el final de la onda P y el inicio del complejo ST-T (del orden de 150 ms.).

3.7.4.1. Detectores y estimadores.

La FDP de las señales observadas en el modelo extendido es

$$p(\mathbf{X}^G; \mathbf{c}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{(N+N_P)L}{2}} \det^{1/2}(\mathbf{C}_w) \det^{1/2}(\mathbf{C}_w^P)} \quad (3.158)$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} \left(\left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 + \left\| \mathbf{x}_i^P \right\|_{\mathbf{C}_w^{P-1}}^2 \right)\right). \quad (3.159)$$

Puede comprobarse que los datos adicionales \mathbf{X}^P no influyen en el EMV de la señal alterna (3.94). Sin embargo, el EMV de $\hat{\sigma}^2$ bajo ambas hipótesis se calcula ahora con todos los datos disponibles

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{(N+N_P)L} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i' - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}' e_i (-1)^i \right\|_2^2 + \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i^{P'} \right\|_2^2 \right) \\ &= \frac{N}{N+N_P} \hat{\sigma}_{STT,1}^2 + \frac{N_P}{N+N_P} \hat{\sigma}_P^2. \end{aligned} \quad (3.160)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{1}{(N+N_P)L} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i' \right\|_2^2 + \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i^{P'} \right\|_2^2 \right) \\ &= \frac{N}{N+N_P} \hat{\sigma}_{STT,0}^2 + \frac{N_P}{N+N_P} \hat{\sigma}_P^2. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Ambos estimadores se basan en las varianzas estimadas tanto en el complejo ST-T ($\hat{\sigma}_{STT,0}^2$ y $\hat{\sigma}_{STT,1}^2$) como en la zona de la onda P ($\hat{\sigma}_P^2$, independientemente de la hipótesis considerada). Nótese que, si se asume que existe correlación intra-segmento, $\mathbf{x}_i^{P'}$ denota la señal \mathbf{x}_i^P blanqueada con la matriz \mathbf{D}^P tal que $(\mathbf{C}_w^P)^{-1} = \mathbf{D}^{P^T} \mathbf{D}^P$. De todos modos, el filtro de preblanqueado es esencialmente el mismo²⁴ para la onda P y para el complejo ST-T si la autocorrelación del ruido no es significativa para retardos mayores de N_P (supuesto $N_P \leq N$).

El TCVG es

$$L_G(\mathbf{X}^G) = \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right)^{\frac{(N_P+N)L}{2}} \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \gtrless \\ \mathcal{H}_0 \end{matrix} \gamma. \quad (3.162)$$

Teniendo en cuenta que $\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}_1^2 + \frac{L}{4(N+N_P)L} \left\| \hat{\mathbf{a}}' \right\|_2^2$ y aplicando la función $f(x) = (N+N_P)L(x^{\frac{2}{(N_P+N)L}} - 1)$ al estadístico y al umbral llegamos al TCVG equivalente

$$l_G(\mathbf{X}^G) = \frac{L \left\| \hat{\mathbf{a}}' \right\|_2^2}{4 \hat{\sigma}_1^2} \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \gtrless \\ \mathcal{H}_0 \end{matrix} (N+N_P)L(\gamma^{\frac{2}{(N_P+N)L}} - 1) = \gamma', \quad (3.163)$$

²⁴Además, la estacionariedad del ruido permite implementar el blanqueado con un único filtro lineal invariante en el tiempo, que puede aplicarse a la señal ECG antes de segmentar.

cuyo estadístico tiene la misma expresión que (3.102), aunque varía la forma de estimar la varianza de ruido.

Los tests de Wald y de Rao para el modelo extendido vuelven a ser equivalentes al CVG. El estadístico de Wald tiene exactamente la misma expresión que el CVG, mientras que el estadístico de detección de Rao es

$$T_R(\mathbf{X}^G) = \frac{L \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{4 \hat{\sigma}_0^2} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma_R, \quad (3.164)$$

donde $\hat{\sigma}_0$ se calcula mediante la expresión (3.161).

3.7.4.2. Prestaciones.

El estadístico de detección del TCVG extendido a la onda P (3.163) puede escribirse como

$$l_G(\mathbf{X}^G) = \frac{L \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 / (4\sigma^2)}{\hat{\sigma}_1^2 / \sigma^2} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{D}}, \quad (3.165)$$

donde el numerador \mathfrak{N} y el denominador \mathfrak{D} son dos formas cuadráticas independientes, con distribuciones²⁵

$$\mathfrak{N} \sim \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases} \quad \text{y} \quad (N + N_p)L\mathfrak{D} \sim \begin{cases} \chi_{(N+N_p)L-P}^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_{(N+N_p)L-P}^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases} \quad (3.166)$$

Por consiguiente, $l_G(\mathbf{X}^G)$ es proporcional a una distribución F con P grados de libertad en el numerador y $(N + N_p)L - P$ grados de libertad en el denominador.

$$\frac{(N + N_p)L - P}{(N + N_p)L} l_G(\mathbf{X}^G) \sim \begin{cases} F_{P, (N+N_p)L-P} & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ F_{P, (N+N_p)L-P}(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.167)$$

con $\lambda = \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}'\|_2^2$ como parámetro de no centralidad. Asintóticamente, su distribución tiende a

$$l_G(\mathbf{X}^G) \xrightarrow{a} \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}. \quad (3.168)$$

Por tanto, el TCVG $l_G(\mathbf{X}^G)$ para el modelo gaussiano estacionario extendido a la onda P presenta, asintóticamente, las mismas prestaciones que los tests que sólo utilizan el complejo ST-T, que a su vez coinciden con las prestaciones exactas del TCVG clarividente (suponiendo que σ^2 fuera conocida).

Para tamaños finitos, la distribución F se aproxima tanto más a la distribución ji-cuadrado (3.168) cuantos más grados de libertad tenga el denominador. Teniendo en cuenta que la distribución (3.168) es una cota superior a las prestaciones del modelo adaptativo, podemos decir que las prestaciones de $l_G(\mathbf{X}^G)$ han de ser mejores que $l_G(\mathbf{X})$.

²⁵La derivación es paralela a la realizada en el Apéndice 3.D.

Sin embargo se puede apreciar en la Figura 3.14 que el margen de posible mejora es muy estrecho, ya que para tamaños de ventana típicos de 32 latidos las prestaciones de $l_G(\mathbf{X})$ son esencialmente las mismas que las del detector clarividente de varianza conocida, que constituye una cota superior de las prestaciones para este modelo

3.7.5. Modelo gaussiano no estacionario.

La varianza de ruido en este modelo es desconocida y ha de ser estimada en cada latido. Las muestras de la onda P pueden utilizarse para estimar el nivel de ruido dentro del latido.

3.7.5.1. Detectores y estimadores.

La FDP de los datos observados según el modelo gaussiano no estacionario extendido a la onda P es

$$p(\mathbf{X}^G; \mathbf{c}, \{\sigma_i^2\}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(N+N_P)L}{2}} \det^{1/2}(\mathbf{C}_w) \det^{1/2}(\mathbf{C}_w^P) \prod_{i=0}^{L-1} (\sigma_i^2)^{(N+N_P)/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 + \left\| \mathbf{x}_i^P \right\|_{\mathbf{C}_w^{P-1}}^2 \right)\right). \quad (3.169)$$

Procediendo del mismo modo que en la Sección 3.6.2, obtenemos los EMV

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{2}{\sum_{i=0}^{L-1} e_i^2 / \hat{\sigma}_{i,1}^2} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} (\mathbf{T}'^T \mathbf{T}')^{-1} \mathbf{T}'^T \mathbf{x}_i' e_i (-1)^i, \quad (3.170)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{k,1}^2 &= \frac{1}{N+N_P} \left(\left\| \mathbf{x}_k' - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}' e_k (-1)^k \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{x}_k^{P'} \right\|_2^2 \right) \\ &= \frac{N}{N+N_P} \hat{\sigma}_{k,1,STT}^2 + \frac{N_P}{N+N_P} \hat{\sigma}_{k,P}^2, \quad k = 0, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (3.171)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{k,0}^2 &= \frac{1}{N+N_P} \left(\left\| \mathbf{x}_k' \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{x}_k^{P'} \right\|_2^2 \right) \\ &= \frac{N}{N+N_P} \hat{\sigma}_{k,0,STT}^2 + \frac{N_P}{N+N_P} \hat{\sigma}_{k,P}^2, \quad k = 0, \dots, L-1. \end{aligned} \quad (3.172)$$

Los EMV del ruido aprovechan los fragmentos de señal correspondientes a la onda P (libres de alternancia en ambas hipótesis) para estimar, junto con el complejo ST-T, la

potencia de ruido en cada latido. De nuevo encontramos el problema del acoplamiento entre \hat{c} (ó \hat{a}) y $\hat{\sigma}_{k,1}^2$, por lo que se debe recurrir a procedimientos numéricos. La extensión del algoritmo propuesto en la sección 3.6.4 es inmediata.

Las expresiones de los tests del CVG (3.128), de Wald (3.130) y de Rao (3.133) son válidas también para el modelo extendido, donde los estimadores $\{\hat{\sigma}_{i,1}^2\}$ y $\{\hat{\sigma}_{i,0}^2\}$ se calculan según (3.171) y (3.172), respectivamente.

3.7.5.2. Prestaciones.

Las distribuciones asintóticas de los estadísticos CVG, de Wald y de Rao no varían al extender el modelo a la onda P

$$l_G(\mathbf{X}^G) \stackrel{a}{\sim} T_W(\mathbf{X}^G) \stackrel{a}{\sim} T_R(\mathbf{X}^G) \stackrel{a}{\sim} \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.173)$$

y por tanto tienden a alcanzar las prestaciones del TCVG clarividente (3.144). Al utilizar $N + N_P$ muestras para estimar cada varianza, las prestaciones exactas se acercan algo más al límite asintótico de lo observado en las curvas de la Figura 3.19 donde se utiliza sólo el complejo ST-T.

Ejemplo 3.10 (Detección en ruido no estacionario, modelo extendido a la onda P). La Figura 3.23 muestra el comportamiento de los detectores CVG, de Wald y de Rao incluyendo la onda P y sin incluirla ($P = N = 48$ muestras y $N_P = 25$ muestras). El resto de condiciones son las mismas que en el Ejemplo 3.8. La diferencia es mínima, pero permite que los detectores alcancen su límite asintótico.

Las distribuciones asintóticas de los EMV \hat{c} y \hat{a} cuando se utiliza la onda P tienden asintóticamente a (3.149) y (3.150). Al aumentar la dimensión de los datos, los estimadores deben estar más cerca de la cota de Cramér-Rao que sus homólogos basados únicamente en las muestras de la repolarización.

Ejemplo 3.11 (Estimación en ruido no estacionario (modelo extendido a la onda P)). Las Figuras 3.24 y 3.25 muestran el sesgo y la desviación estándar de los estimadores de MV (estacionario y no estacionario) y el estimador de Rao cuando se emplea la información de la onda P ($N_P = 25$). Las condiciones de simulación son las mismas que en el Ejemplo 3.9. Se observa cómo, al utilizar las muestras de la onda P, el EMV no estacionario alcanza la cota de Cramér-Rao incluso para $P = N$ con ventanas de análisis de sólo $L = 8$ latidos, manteniéndose el sesgo en valores reducidos (*cfr.* Figuras 3.21 y 3.22).

3.8. Aplicación secuencial de los métodos estudiados.

Los detectores y estimadores estudiados en las secciones precedentes permiten analizar la señal en un entorno de L latidos. Para aplicarlos a señales ECG reales, debemos deslizar

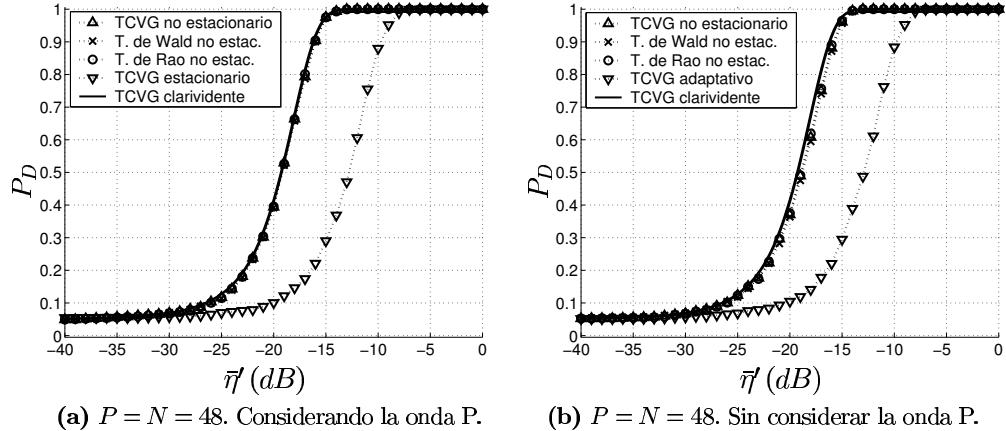


Figura 3.23: Curvas P_D vs $\bar{\eta}$ experimentales (simulación de Monte Carlo) para $P_{FA} = 0,05$ y $L = 32$ de los tests del CVG (3.128), de Wald (3.130) y de Rao (3.133) para ruido no estacionario y del TCVG adaptativo cuando el ruido es no estacionario (cambio de varianza a mitad de la ventana). Se muestran también las prestaciones asintóticas (que coinciden con las del TCVG clarividente).

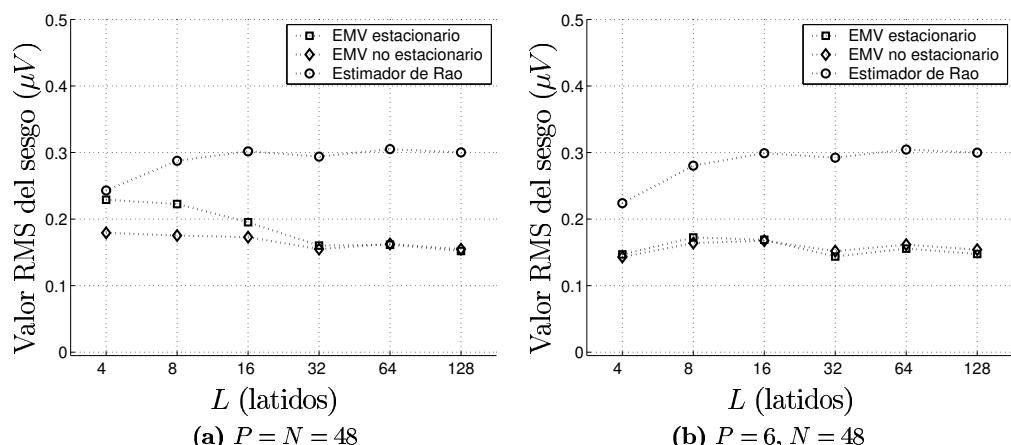


Figura 3.24: Valor RMS del sesgo $RMS(E(a - \hat{a}))$ de los estimadores para ruido no estacionario (EMV y de Rao) y para ruido estacionario (EMV).

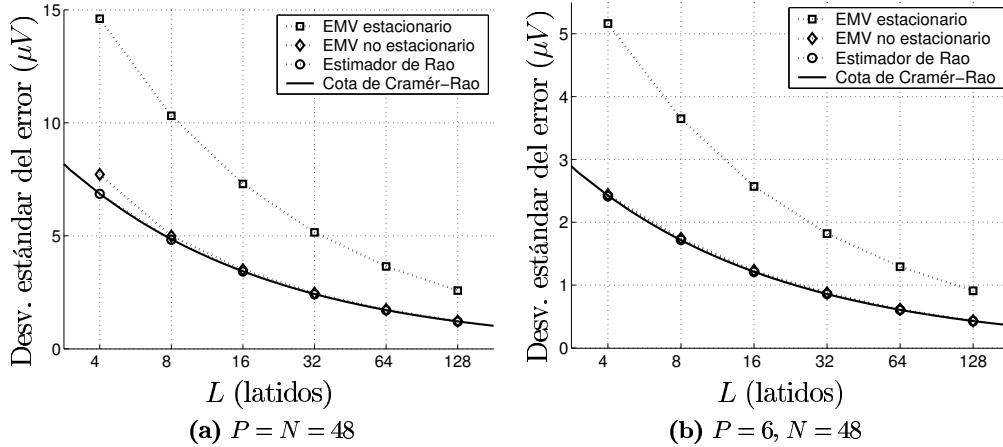


Figura 3.25: Desviación estándar del error de estimación en los estimadores para ruido no estacionario (EMV y de Rao) y para ruido estacionario (EMV).

la ventana de observación hasta cubrir el registro completo. Así, si la señal a analizar contiene $M \gg L$ latidos, el detector puede aplicarse secuencialmente a las matrices de observación locales $\mathbf{X}_l = [\mathbf{x}_{l-L+1}, \dots, \mathbf{x}_l]$, $l = 0, \dots, M - L$ que contienen muestras de L latidos consecutivos, finalizando en el l -ésimo.

De este modo, los detectores y estimadores pueden seguir las variaciones de la señal alternante a lo largo del registro. No obstante, las estimaciones y decisiones realizadas en latidos separados por menos de L latidos no son independientes. Por tanto, la capacidad de seguimiento de las evoluciones de AOT, tanto en detección como en estimación, está limitada por el valor de L . A continuación se presentan las implementaciones secuenciales para los tres modelos

3.8.1. Modelo gaussiano estacionario.

La versión secuencial del detector (3.54) es

$$l_G(\mathbf{X}_l) = \frac{L}{4\sigma^2} \left\| \widehat{\mathbf{a}}'_l \right\|_2^2 = \frac{1}{L\sigma^2} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{y}_{l-L+1+i} e_i (-1)^i \right\|_2^2 \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless} \gamma', \quad l = 0, \dots, M-1, \quad (3.174)$$

donde $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}'' \mathbf{x}'_i$ estimándose la forma de onda alternante como

$$\widehat{\mathbf{a}}_l = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{x}_{l-L+1+i} e_i (-1)^i. \quad (3.175)$$

Al realizar el análisis con una ventana deslizante la etapa correladora puede sustituirse por un banco de filtros paso-alto adaptados a la evolución del episodio asumida en el

modelo ($h[k] = e_{L-1-k} (-1)^k$). La Figura 3.26 muestra la implementación secuencial del TCVG y el EMV para ruido estacionario.

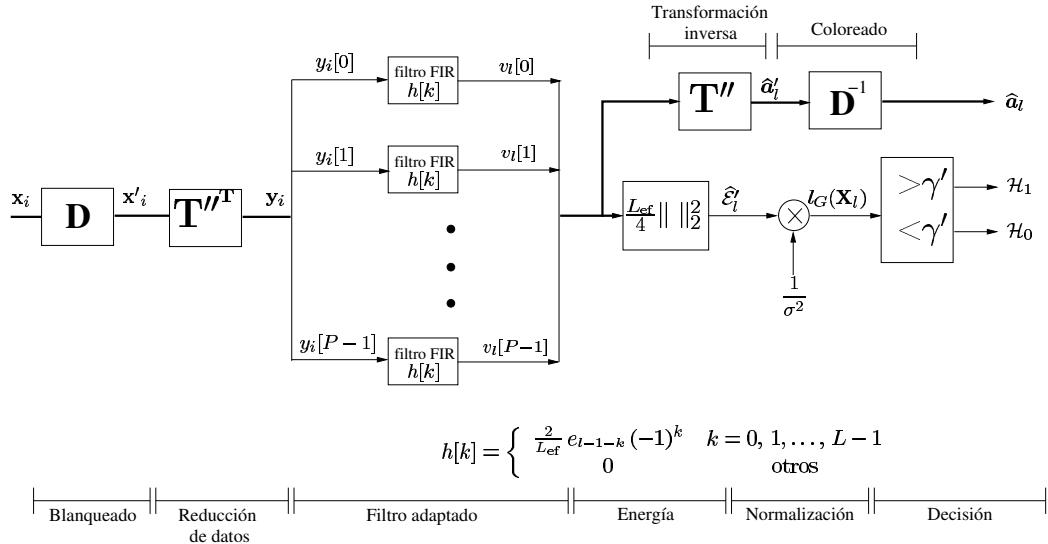


Figura 3.26: Estructura secuencial del detector TCVG estacionario.

3.8.2. Modelo gaussiano adaptativo.

La versión secuencial de los detectores TCVG y de Rao para el modelo adaptativo es

$$l_G(\mathbf{X}_l^G) = \frac{L}{4\hat{\sigma}_1^2(l)} \|\hat{\mathbf{a}}_l'\|_2^2 \begin{cases} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma' \\ \stackrel{\mathcal{H}_0}{\lessgtr} \gamma' \end{cases} \quad (3.176)$$

$$T_R(\mathbf{X}_l^G) = \frac{L}{4\hat{\sigma}_0^2(l)} \|\hat{\mathbf{a}}_l'\|_2^2 \begin{cases} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma_R \\ \stackrel{\mathcal{H}_0}{\lessgtr} \gamma_R \end{cases} \quad (3.177)$$

donde $\hat{\mathbf{a}}_l$ es el EMV (3.175) y

$$\hat{\sigma}_0^2(l) = \frac{1}{(N+N_P)L} \sum_{i=0}^{L-1} \left(\|\mathbf{x}_{l-L+1+i}^{P_l}\|_2^2 + \|\mathbf{x}_{l-L+1+i}'\|_2^2 \right) \quad (3.178)$$

$$\hat{\sigma}_1^2(l) = \frac{1}{(N+N_P)L} \sum_{i=0}^{L-1} \left(\|\mathbf{x}_{l-L+1+i}^{P_l}\|_2^2 + \left\| \mathbf{x}_{l-L+1+i}' - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_l' e_i (-1)^i \right\|_2^2 \right) \quad (3.179)$$

La estimación temporalmente localizada de la varianza del ruido permite la adaptación del detector a las variaciones lentas del ruido sin necesidad de variar el umbral γ' .

3.8.3. Modelo gaussiano no estacionario.

La versión secuencial del TCVG precisa maximizar numéricamente la verosimilitud cada vez que se desplaza la ventana de análisis. Así, el TCVG es

$$l_G(\mathbf{X}_l^G) = N \sum_{i=0}^{L-1} (\ln \hat{\sigma}_{i,0}^2(l) - \ln \hat{\sigma}_{i,0}^2(l)) \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma, \quad (3.180)$$

con

$$\hat{\sigma}_{i,0}^2(l) = \frac{1}{N + N_P} \left(\|\mathbf{x}_{l-L+1+i}^{P'}\|_2^2 + \|\mathbf{x}_{l-L+1+i}'\|_2^2 \right), \quad (3.181)$$

mientras que $\hat{\sigma}_{i,1}^2(l)$ se obtiene al resolver el sistema acoplado

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{i,1}^2(l) = \frac{1}{N + N_P} \left(\|\mathbf{x}_{l-L+1+i}^{P'}\|_2^2 + \left\| \mathbf{x}_{l-L+1+i}' - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_l' e_i (-1)^i \right\|_2^2 \right) \\ \hat{\mathbf{a}}_l' = \frac{2}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2(l)}} \mathbf{T}'' \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathbf{y}_{l-L+1+i} e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,1}^2(l)} \end{array} \right. . \quad (3.182)$$

El test de Wald también requiere resolver numéricamente el sistema anterior, y puede expresarse como

$$T_W(\mathbf{X}_l^G) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2(l)}} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathbf{y}_{l-L+1+i} e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,1}^2(l)} \right\|_2^2 \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma_W.$$

El test de Rao, por el contrario, puede calcularse directamente a partir de los datos observados como

$$T_R(\mathbf{X}_l^G) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2(l)}} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathbf{y}_{l-L+1+i} e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,0}^2(l)} \right\|_2^2 \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma_R.$$

Nótese que, en general $\hat{\sigma}_{i,1}^2(l+k) \neq \hat{\sigma}_{i+k,1}^2(l)$, ya que bajo \mathcal{H}_1 , la estimación de la varianza de ruido depende de la estimación de la alternancia, que a su vez varía al deslizar la ventana de análisis ($\hat{\mathbf{a}}_{l+k} \neq \hat{\mathbf{a}}_l$). Por tanto, el TCVG y el test de Wald no pueden aprovechar los valores de $\hat{\sigma}_{i,1}^2(l)$ calculados anteriormente para los latidos en los que exista solapamiento, debiéndose estimar numéricamente la varianza en cada latido cada vez que se calcula el estadístico de detección. Por el contrario, sí se cumple que $\hat{\sigma}_{i,0}^2(l+k) = \hat{\sigma}_{i+k,0}^2(l) = \|\mathbf{x}_{l+i}'\|_2^2$ (con $0 \leq i+k < L-1$), de manera que el test de Rao en su versión secuencial sólo necesita estimar la varianza en cada nuevo latido y almacenar las estimaciones en los $L-1$ últimos latidos que han entrado al detector.

3.9. Comparación con otros métodos publicados.

Utilizando el esquema general y la notación propuestos en el Capítulo 2, los métodos de análisis basados en el TCVG y el EMV para los modelos estacionario y adaptativo pueden describirse como compuestos por una etapa de preprocesado, seguida de la etapa de reducción de datos lineal

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{T}''^T \mathbf{D} \mathbf{x}_i, \quad (3.183)$$

y una etapa de análisis basada en la TFL. Así, el EMV se calcula a partir de la TFL de cada serie transformada $\{y_i[p]\}$ evaluada en 0.5 cpl

$$\begin{aligned} \hat{v}_i[p] &= \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} y_{l-L+1+i}[p] e_i (-1)^i \\ &= \frac{2}{L} (-1)^l STFT_{e,l}\{y_i[n]\}|_{f=0,5} = \frac{2}{L} (-1)^l Y_{e,l}[p, l], \end{aligned} \quad (3.184)$$

donde la ventana de análisis de la TFL es la evolución $\{e_i\}$ asumida en el modelo de señal (3.30). La señal alterante en el dominio original se estima invirtiendo la transformación de reducción de datos

$$\hat{\mathbf{a}}_l = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{T}'' \hat{\mathbf{v}}_l. \quad (3.185)$$

Los TCVG gaussianos estacionario (3.58) y adaptativo (3.176) y también el test de Rao adaptativo (3.177) pueden expresarse como la energía de la alternancia estimada

$$T(\mathbf{X}_l) = \frac{L}{4} \|\hat{\mathbf{a}}_l\|_2^2 = \frac{1}{L} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{y}_{l-L+1+i} e_i (-1)^i \right\|_2^2 \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \stackrel{\mathcal{H}_0}{\lessgtr} \gamma''(l). \quad (3.186)$$

Siguiendo la notación del Capítulo 2, el estadístico de detección puede escribirse como

$$Z_l = T(\mathbf{X}_l) = \frac{1}{L} \sum_{p=0}^{P-1} z_l^2[p], \quad (3.187)$$

$$z_l[p] = \left| \sum_{i=0}^{L-1} y_{l-L+1+i}[p] e_i (-1)^i \right| = |Y_{e,l}[p, l]|. \quad (3.188)$$

Por tanto, la metodología de análisis TCVG / EMV en los modelos gaussianos estacionario y adaptativo pertenece al paradigma de métodos basados en la TFL (Sección 2.4.3.1), con una transformación lineal de reducción de datos. Una buena parte de los métodos publicados hasta el momento pertenecen también a este paradigma. Los métodos más populares en la literatura: el ME y el MDC pueden considerarse métodos TCVG/EMV para ruido gaussiano, adaptados a episodios de AOT cuya duración L y evolución e_i viene dada por la duración y forma de la ventana de análisis (o del filtro paso-alto equivalente).

Los métodos que cuentan además con una etapa lineal de reducción de datos, pueden interpretarse como métodos de subespacio: el modelo subyacente asume que la alternancia pertenece a un determinado subespacio. Así, los métodos que diezman la señal o realizan una integración por segmentos asumen que ésta pertenece a un subespacio paso-bajo²⁶. La técnica de la transformada de KL asume que la AOT es una combinación lineal de las formas de onda dominantes en un conjunto de entrenamiento de complejos ST-T. Por último, el MC asume que la alternancia tiene la misma forma que el complejo ST-T mediano (tan sólo permite un grado de libertad)²⁷, si bien la técnica de detección utilizada posteriormente no pertenece al paradigma de la TFL. Como se concluye de las secciones 3.4.4 y 3.4.5, la reducción de grados de libertad llevada a cabo en estos métodos supone una mejora de sus prestaciones siempre que las señales a detectar cumplan el modelo subyacente.

El umbral $\gamma''(l)$ en (3.186) es una constante $\gamma''(l) = \gamma'\sigma^2$ en el caso del TCVG estacionario y un umbral variante, proporcional a una estimación del nivel de ruido en los latidos de la ventana, en los detectores adaptativos ($\gamma''(l) = \gamma'\hat{\sigma}_1^2(l)$ para el TCVG adaptativo y $\gamma''(l) = \gamma_R\hat{\sigma}_0^2(l)$ para el test de Rao adaptativo). Estos últimos permiten la adaptación del detector a las variaciones del nivel medio de ruido en la ventana de análisis, manteniendo constante la tasa de falsas alarmas (detectores CFAR). Algunos de los métodos basados en la TFL que encontramos en la literatura también utilizan diversas estrategias de adaptación del umbral al nivel de ruido (*vid. Secciones 2.4.3 y 2.4.5*). En el ME (2.11), la energía de la alternancia estimada se compara con un umbral que depende del nivel del ruido, estimado en una ventana espectral. Por tanto, se trata de un método muy cercano al TCVG gaussiano adaptativo (aunque difieren en la forma de estimar el nivel de ruido). El MDC, por el contrario, no lleva a cabo ningún tipo de adaptación, por lo que es equivalente al TCVG gaussiano adaptativo.

Todos los detectores de AOT encontrados en la literatura asumen la estacionariedad del ruido en una ventana de análisis de mayor o menor duración. El modelo gaussiano no estacionario nos ha permitido obtener detectores adecuados cuando el ruido experimenta variaciones rápidas. El TCVG no estacionario tiene una forma claramente diferente de los demás métodos, y presenta el inconveniente, junto con el test de Wald, de necesitar un cálculo numérico iterativo, que puede ser prohibitivo en su versión secuencial. La forma de los tests de Wald y de Rao es similar a los métodos basados en la TFL, con la salvedad de que la ventana de análisis utilizada es adaptativa y depende de la estimación de la varianza de ruido en cada latido de la señal observada

$$w_l[i] = \begin{cases} e_i / \hat{\sigma}_{i,k}^2(l) & i = 0 \dots L-1 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}, \quad (3.189)$$

con $k = 0$ para el test de Rao y $k = 1$ para el test de Wald. El MFC, propuesto en (Martínez *et al.* 2000a) también consiste en una ventana de análisis adaptativa y dependiente

²⁶En la página 147 se discute este extremo con más profundidad.

²⁷De hecho, el detector TCVG de dimensión 1 (detector adaptado) consiste, en su versión para ruido blanco, en estimar la alternancia en la serie $\{y_i\}$ formada por los coeficientes $y_i = \frac{t_o}{t_o^2 t_o} \mathbf{x}_i$, similares a los índices de correlación utilizados en el MC (*cfr.* ecuación (2.5)).

de la señal (el filtro de Capon), si bien las asunciones son diferentes en ambos casos. En el modelo no estacionario hemos asumido que el ruido es incorrelado de un latido a otro, aunque su varianza puede variar (series latido a latido con matriz de autocorrelación diagonal, aunque no toeplitz). Por el contrario, en (Martínez *et al.* 2000a) asumimos estacionariedad del ruido en la ventana de análisis y correlación entre las muestras de ruido de distintos latidos (series latido a latido con matriz de autocorrelación toeplitz).

Otras novedades incorporadas en los métodos de este capítulo respecto a los métodos encontrados en la literatura han sido la consideración de modelos de ruido coloreado y la utilización de otros intervalos del ECG (la despolarización auricular) para mejorar la estimación del nivel de ruido.

3.10. Características y validez de los modelos.

Las prestaciones teóricas de los métodos presentados en este capítulo se han derivado, bien de forma exacta, bien asintóticamente en las secciones previas. Ahora bien, las prestaciones reales sólo se aproximarán a las teóricas en tanto en cuanto el modelo de señal describa adecuadamente la señal observada (evolución y duración del episodio, subespacio de la señal alterna, características del ruido...). A continuación se discute la validez de las asunciones de los modelos considerados, y se estudia el efecto de los posibles desajustes entre la señal observada y el modelo.

3.10.1. Eliminación del ECG de fondo.

En los modelos estudiados se ha asumido que el ECG de fondo ha sido filtrado en la etapa de preprocesado. Para que esto sea posible, el ECG de fondo ha de ser estacionario, o presentar únicamente variaciones lentas latido a latido (como, por ejemplo, los cambios morfológicos debidos a la isquemia). Otros fenómenos como la variabilidad latido a latido de la repolarización o la existencia de latidos anómalos (contracciones ventriculares prematuras, latidos ectópicos o de escape, etc.) no pueden ser cancelados por un filtro de eliminación de tendencias y deben considerarse como componentes de ruido que afectan a la señal observada.

La variabilidad fisiológica latido a latido es un fenómeno que se traduce en ruido de baja amplitud en las series de amplitud latido a latido. Por otro lado, los latidos anómalos se manifiestan como ruido impulsivo de gran amplitud en las series latido a latido, lo que pueden afectar seriamente al análisis, dada la linealidad del mismo (*vid. supra* Figura 2.9). La solución habitual en la literatura es detectar y eliminar o sustituir estos latidos (Sección 2.4.1). Otra forma de tratar estos latidos es modelando el ruido mediante una distribución estadística leptocúrtica, es decir, con colas más pesadas que la distribución gaussiana (Capítulo 4). El modelo asume de este modo que pueden existir valores extremos con una probabilidad no despreciable. Los detectores y estimadores derivados de estos modelos son más robustos ante la presencia de latidos anómalos.

3.10.2. Modelo de ruido.

3.10.2.1. Distribución gaussiana.

La asunción de ruido gaussiano, ampliamente utilizada para modelar el ruido presente en el ECG, cobra sentido por el Teorema Central del Límite, considerando que el ruido observado es la suma de un gran número de contribuciones independientes. Además, el modelo gaussiano permite obtener soluciones matemáticamente tratables, llevando a estimadores y estadísticos sencillos y fácilmente realizables en la práctica.

Uno de los inconvenientes de este modelo es la poca robustez ante valores anómalos y ruido impulsivo, dada la naturaleza lineal de los métodos de análisis. En el Capítulo 4 se derivarán detectores TCVG para la familia de distribuciones gaussianas generalizadas, que alberga distribuciones simétricas y unimodales con diferentes valores de curtosis. En el Capítulo 5 (Sección 5.3) se estudiará hasta qué punto se cumple la gaussianidad del ruido en el ECG real.

3.10.2.2. Ruido de media nula.

Esta asunción no es crítica ya que si $E\{\mathbf{w}_i\} \neq \mathbf{0}$, el nivel medio de ruido sería considerado como parte del ECG *de fondo* y eliminado en el preprocesado.

3.10.2.3. Conocimiento de la varianza de ruido.

El modelo gaussiano estacionario supone conocida la varianza de ruido. Por tanto, el valor de σ^2 en el estadístico (3.54) ha de considerarse un parámetro de diseño del detector. Otra opción consiste en emplear la regla de decisión equivalente (3.58), donde la varianza queda absorbida en el umbral $\gamma'' = \gamma'\sigma^2$. El problema se traslada entonces a la determinación del umbral γ'' para un determinado nivel de P_{FA} , que ha de llevarse a cabo empíricamente.

Consideremos el TCVG gaussiano estacionario para una varianza de ruido nominal $\sigma^2 = \sigma_{\text{nom}}^2$. Si la varianza de ruido de la señal observada es de σ_{obs}^2 , la P_{FA} del detector (3.54) puede expresarse como

$$P_{FA} = Pr(l_G(\mathbf{X}) > \gamma') = Q_{\chi_P^2}(\gamma' \frac{\sigma_{\text{nom}}^2}{\sigma_{\text{obs}}^2}). \quad (3.190)$$

La Figura 3.27 muestra la sensibilidad de la P_{FA} del TCVG gaussiano estacionario ante desajustes del nivel del ruido respecto al nominal $\Delta = 10 \log(\sigma_{\text{obs}}^2 / \sigma_{\text{nom}}^2)$ cuando el umbral se diseña para una P_{FA} nominal de 0,05. Está claro que el TCVG estacionario no es CFAR. Para $P = 48$, tenemos que un aumento del nivel de ruido de sólo 1 dB incrementa la P_{FA} desde el valor nominal de 0,05 hasta 0,33, mientras que desajustes de 2 y 3 dB sitúan la P_{FA} en 0,75 y 0,955 respectivamente. Estos datos hablan por sí solos de la poca robustez del detector ante desajustes y/o variaciones del nivel de ruido. Nótese que la sensibilidad de la P_{FA} ante desajustes es mayor cuanto mayor es el número de grados de libertad.

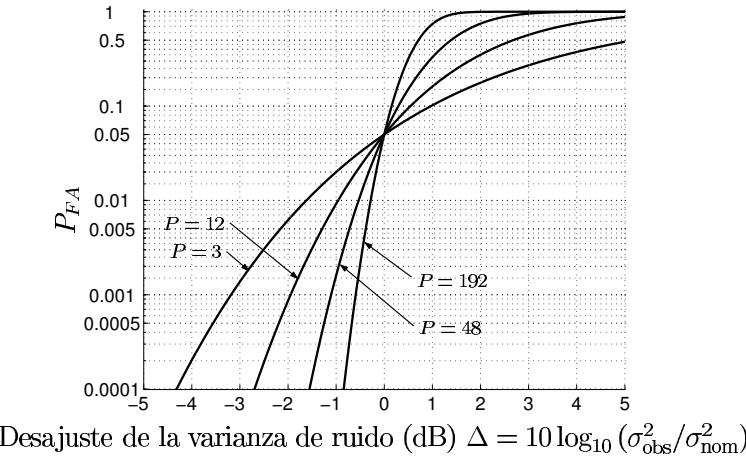


Figura 3.27: Sensibilidad de la P_{FA} al desajuste de la varianza de ruido real respecto a la varianza de diseño para una P_{FA} nominal de 0,05.

Una alternativa de diseño consiste en sustituir en el TCVG el parámetro desconocido σ^2 por un estimador de la varianza $\check{\sigma}^2$. Este modo de proceder se denomina *estimar y sustituir*²⁸. Las prestaciones calculadas en la Sección 3.4.4 dejan de ser válidas, ya que no tienen en cuenta la influencia del error de estimación.

Los modelos gaussianos adaptativo y no estacionario estudiados en las Secciones 3.5 y 3.6 consideran, respectivamente, el nivel de ruido total σ^2 y el nivel de ruido en cada latido $\{\sigma_i^2\}$ como parámetros desconocidos del modelo de señal observada. Ambos planteamientos permiten mantener una P_{FA} constante independientemente del nivel de ruido.

3.10.2.4. Estacionariedad del ruido.

Además de ser desconocida, la varianza del ruido en el ECG real presenta cambios temporales dentro de un mismo registro. La capacidad de adaptación a estas variaciones es una característica deseable en un detector.

El modelo gaussiano estacionario no permite la adaptación a las variaciones del nivel de ruido. De la Figura 3.27 se desprende la falta de robustez del detector (3.54) utilizado con un umbral fijo. La estrategia *estimar y sustituir* proporciona una solución si se sustituye σ^2 por un estimador de la varianza local $\check{\sigma}^2(l)$ calculado mediante una ventana deslizante. La regla de decisión correspondiente es equivalente a

$$T(\mathbf{X}_l) = \frac{1}{L} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{x}_{l-L+1+i} e_i (-1)^i \right\|_2^2 \begin{cases} \geqslant \gamma' \check{\sigma}^2(l) = \gamma''(l), \\ \leqslant \gamma' \check{\sigma}^2(l) = \gamma''(l), \end{cases} \quad (3.191)$$

²⁸En inglés se emplea la expresión *estimate and plug*.

donde γ' puede ajustarse empíricamente para una P_{FA} . Este detector es equivalente a utilizar el detector (3.54) con un umbral adaptativo. Algunos de los métodos de análisis de AOT de la literatura han tenido en cuenta este aspecto, y en ellos se han utilizado diversas estrategias de adaptación del umbral (Sección 2.4.5).

El modelo gaussiano adaptativo estudiado en la Sección 3.5 asume que el nivel de ruido es desconocido *a priori*, pero puede considerarse estacionario dentro de la ventana de observación. El TCVG resultante es un detector adaptativo y CFAR ante las fluctuaciones lentas del nivel de ruido, que no comprometen la asunción de estacionariedad dentro de la ventana de análisis. El EMV para el modelo adaptativo es el mismo que el del modelo estacionario, y es eficiente independientemente del nivel de ruido (siempre que se cumpla la asunción de estacionariedad). No obstante, es común que se produzcan en el ECG episodios de ruido transitorios que duran unos pocos latidos (por ejemplo, ráfagas de ruido muscular). Si denotamos por σ_i^2 la varianza del ECG bajo test en el latido i -ésimo de la ventana, es sencillo demostrar que el EMV (3.95) tiene la siguiente distribución

$$\hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \frac{4}{L^2} \sum_{i=0}^{L-1} e_i^2 \sigma_i^2 \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T). \quad (3.192)$$

Se trata de un estimador insesgado pero ineficiente, ya que no alcanza la cota de Cramér-Rao (*Vid. infra* Apéndice 3.E, donde se calcula la matriz de Fisher cuando la varianza varía latido a latido). Por otro lado, el CVG deja de ser un cociente de variables jí-cuadrado, dificultando el estudio analítico de sus prestaciones. La degradación del TCVG y el EMV respecto a sus homólogos no estacionarios se ha ilustrado, mediante simulaciones de Monte Carlo, en los Ejemplos 3.8 y 3.9.

El modelo gaussiano no estacionario (Sección 3.6) proporciona un detector adaptativo y asintóticamente CFAR para todo tipo de variaciones del nivel de ruido. Como ya se ha indicado, el EMV gaussiano no estacionario (3.123) es asintóticamente eficiente ante ruido no estacionario, y el TCVG alcanza, también asintóticamente, las prestaciones que tendría un detector que conociera exactamente el nivel de ruido en cada latido (TCVG clarividente).

3.10.2.5. Conocimiento previo de \mathbf{C}_w .

En los tres modelos estudiados se ha asumido que el ruido es incorrelado latido a latido $E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T\} = \mathbf{0}$, $i \neq j$ y presenta una correlación constante y conocida dentro de cada latido $E\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T\} = \sigma_i \mathbf{C}_w$, $i \neq j$.

En la práctica, la matriz de covarianzas del ruido es desconocida y debe ser estimada. Existirá por tanto un cierto desajuste debido al error de estimación. También existe un desajuste similar cuando se utilizan, por su sencillez, los detectores y estimadores para ruido incorrelado.

Debe tenerse en cuenta que los detectores para ruido correlado son equivalentes a aplicar los detectores para ruido blanco sobre la señal *preblanqueada* $\mathbf{X}' = \mathbf{D}\mathbf{X}$. Consideremos que $\mathbf{C}_w^{\text{obs}}$ es la matriz de covarianzas de la señal real observada y $\mathbf{C}_w = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$

es la matriz de covarianzas nominal utilizada en el detector (ambas normalizadas). Si $\mathbf{C}_w \neq \mathbf{C}_w^{\text{obs}}$, el filtro blanqueador \mathbf{D} no conseguirá blanquear la señal observada, de manera que $E(\mathbf{w}'\mathbf{w}^T) = \mathbf{D}\mathbf{C}_w^{\text{obs}}\mathbf{D} \neq \mathbb{I}_N$. Así, la potencia media del ruido *blanqueado* \mathbf{w}' es

$$\begin{aligned}\sigma'^2 &= \frac{\text{tr}(\sigma^2 \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{C}_w^{\text{obs}}\mathbf{D}))}{N} \\ &= \sigma^2 \frac{\text{tr}(\mathbf{C}_w^{\text{obs}}\mathbf{C}_w^{-1})}{N} \geq \sigma^2.\end{aligned}\quad (3.193)$$

y su matriz de covarianzas normalizada es

$$\mathbf{C}_{w'} = \frac{N}{\text{tr}(\mathbf{C}_w^{\text{obs}}\mathbf{C}_w^{-1})} \mathbf{D}\mathbf{C}_w^{\text{obs}}\mathbf{D}.$$

Después de blanquear la señal se aplica el detector correspondiente para ruido blanco. El desajuste produce dos efectos: por una parte, la varianza del ruido *blanqueado* es mayor (o en el mejor de los casos, igual²⁹) que la varianza de ruido observada. Por otro lado, el ruido en la señal *blanqueada* no es incorrelado por lo que no empleará los datos con toda la eficiencia posible. Las prestaciones teóricas de los detectores obtenidas en las secciones previas dejan de ser válidas.

Cuando hay un desajuste en la matriz de covarianzas la distribución del EMV para los modelos estacionario y adaptativo (el EMCG) es

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \frac{4\sigma^2}{L} \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{C}_w^{\text{obs}} \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T) \\ &\sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \frac{4\sigma^2}{L} \mathbf{D}^{-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{D}\mathbf{C}_w^{\text{obs}}\mathbf{D}^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{D}^{-1T}).\end{aligned}\quad (3.194)$$

El desajuste no introduce sesgo, aunque sí modifica la matriz de covarianzas del error de estimación. La varianza media del error es

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{4\sigma^2}{NL} \text{tr}(\mathbf{C}_w \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{D}\mathbf{C}_w^{\text{obs}}\mathbf{D}^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}) \geq \frac{4\sigma^2}{NL} \text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{\text{obs}-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T).\quad (3.195)$$

La desigualdad es inmediata aplicando el Teorema 3.1³⁰. Por tanto, el desajuste aumenta el error de estimación y el estimador deja de ser eficiente. Nótese que el desajuste no afecta al estimador si el subespacio es completo ($\langle \mathbf{T} \rangle = \mathbb{R}^N$), ya que $\hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \frac{4\sigma^2}{L} \mathbf{C}_w^{\text{obs}})$, $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{4\sigma^2}{L} N$ independientemente de \mathbf{C}_w . Un caso particular de desajuste se da cuando se prescinde del preblanqueado asumiendo ruido blanco ($\mathbf{C}_w = \mathbb{I}_N$). La distribución es, en este caso, $\hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \frac{4\sigma^2}{L} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{C}_w^{\text{obs}} \mathcal{P}_{\mathbf{T}})$, con varianza media del error $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{4\sigma^2}{NL} \text{tr}(\mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{C}_w^{\text{obs}}) \geq \frac{4\sigma^2}{NL} \text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{\text{obs}-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T)$.

²⁹Si la \mathbf{C}_w nominal es \mathbb{I}_N (detector para ruido blanco), $\sigma'^2 = \sigma^2$, por lo que no se produce este aumento efecto de la varianza de ruido.

³⁰La desigualdad de Cramér-Rao indica que para un estimador insesgado como $\hat{\mathbf{a}}$, $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} - \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{\text{obs}-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{-1}$ es semidefinida positiva. Por tanto, $\text{tr}(\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}}) \geq \text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{\text{obs}-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{-1})$.

3.10.2.6. Desajuste por utilización de modelos para ruido blanco ($\mathbf{C}_w = \mathbb{I}_N$).

La utilización de detectores y estimadores para ruido blanco se justifica por su simplicidad y porque elimina la necesidad de estimar la correlación del ruido.

A continuación se presentan simulaciones de Monte Carlo que ilustran el comportamiento de los detectores y estimadores para ruido blanco cuando analizan señales con ruido coloreado y lo comparan con las prestaciones obtenidas si se tuviera un conocimiento ideal de la matriz de covarianzas del ruido simulado.

Las dimensiones de las señales simuladas en todos los ejemplos son $N = 48$ muestras y $L = 32$ latidos. Utilizamos para ello detectores y estimadores correspondientes al modelo gaussiano estacionario, con $e_i = 1$, $i = 0, \dots, L - 1$. La simulación de una única forma de onda alterna no permitiría obtener resultados representativos ya que las prestaciones dependerán en gran medida de la ganancia $G_b(\mathbf{a})$ (*vid. Sección 3.4.4*). Por esta razón se han simulado distintas formas de onda representativas del subespacio de señal observada. En particular, dado un subespacio de señal $\langle \mathbf{T} \rangle$, se han seleccionado los vectores propios de la matriz $\mathbf{U} = (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})$ como formas de onda representativas. De este modo, seleccionamos las formas de onda con máxima y mínima ganancia de blanqueado $G_b(\mathbf{a})$, así como otras formas de onda con un comportamiento intermedio (*vid. pág. 85*). Con cada forma de onda se han generado 200 realizaciones en 4 tipos de ruido AR(1) ($\alpha = \pm 0,3, \pm 0,9$). El umbral γ' utilizado en los detectores se ha calculado experimentalmente con 1000 realizaciones sin alternancia de cada tipo de ruido (hipótesis \mathcal{H}_0), de forma que la tasa de falsa alarma sea del 5 %.

Ejemplo 3.12 (Detección de energía en ruido coloreado). Consideramos en primer lugar los detectores de energía para ruido blanco y para ruido correlado. Cualquier forma de onda $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ se considera válida. Para cubrir todo el rango de ganancias de blanqueado posibles, se han utilizado como formas de onda alternantes los N vectores propios de $\mathbf{U} = \mathbf{C}_w^{-1}$. La Figura 3.28 muestra las curvas P_D vs η para $P_{FA} = 0,05$ de ambos detectores para las diferentes formas de onda simuladas, así como la curva teórica del detector para ruido blanco. Nótese que las curvas se representan en función de la RSR observada η y no de la RSR blanqueada η' .

Cuando el ruido está poco correlado ($\alpha = \pm 0,3$), las diferencias entre los comportamientos medios de ambos detectores son pequeñas, y las prestaciones de ambas son similares a las esperables para ruido blanco. Para ruido muy correlado ($\alpha = \pm 0,9$), las diferencias se acrecientan: el detector de energía para ruido blanco experimenta claras pérdidas respecto a su curva teórica, y en general sus prestaciones son bastante peores que las del detector con preblanqueado. Destaca, no obstante, la gran dispersión observada en las curvas de P_D del TCVG con preblanqueado ante las diferentes formas de onda. Así, por ejemplo, en ruido AR(1) paso-bajo con $\alpha = 0,9$ y una RSR de -20 dB, la mayor parte de las formas de onda se detectan con $P_D \approx 1$ y $P_{FA} = 0,05$, mientras que algunas formas de onda son prácticamente indetectables $P_D \approx 0,05$. Las curvas del detector para ruido blanco están mucho más concentradas, hasta el punto de que algunas señales se detectan mejor con el detector para ruido blanco que con el TCVG correspondiente.

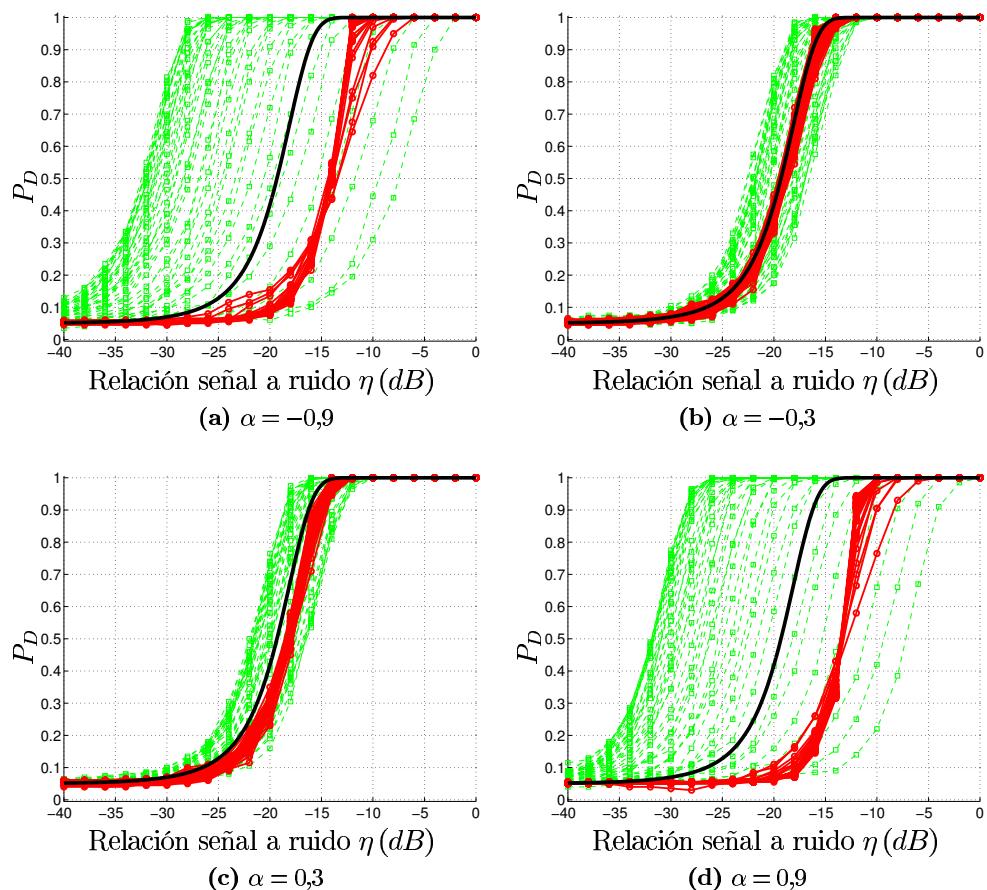


Figura 3.28: Curvas P_D vs η del detector de energía para ruido blanco (en rojo) y para ruido correlado (suponiendo \mathbf{C}_w conocida) (en verde) para diferentes señales inmersas en ruido AR(1).

Se concluye que el detector de energía generalizado (que es el TCVG para el problema estudiado) es superior en media al detector de energía convencional, pero dada la dispersión de las ganancias de blanqueado, puede haber formas de onda (las más solapadas espectralmente con el ruido) que se detectan mejor sin preblanquear.

Ejemplo 3.13 (Detección de energía de señales paso-bajo en ruido coloreado). De acuerdo con el modelo del detector, en el ejemplo anterior se han simulado formas de onda $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ con espectros de todo tipo. Sin embargo, la alternancia es una señal de baja frecuencia. Para estudiar el comportamiento de los detectores de energía ante señales paso-bajo, generamos formas de onda utilizando las $P = 6$ primeras funciones base de la TDC (3.85). De todas las formas de onda de ese subespacio, los coeficientes de las que tienen mayor y menor ganancia de blanqueado están entre los P vectores propios de $\mathbf{U} = (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})$. La Figura 3.29 muestra cómo se comportan los dos detectores de energía (sin y con preblanqueado) para los 6 vectores propios de \mathbf{U} . En ella observamos que el preblanqueado sólo mejora las prestaciones cuando el ruido tiene un espectro paso-alto (figuras 3.29(a) y (b)). Si el ruido es paso-bajo, se obtienen mejores prestaciones sin blanquear los datos (p. ej. para $\alpha = 0,3$, Figura 3.29(c)). Esto puede parecer contradictorio, ya que el modelo de ruido coloreado refleja más fielmente la señal simulada. Lo que sucede es que los detectores han sido diseñados para detectar cualquier señal $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$. De ahí que el comportamiento del detector para ruido coloreado en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ fuera mejor, *en media*, que el detector para ruido blanco (Figura 3.28). Sin embargo, sus prestaciones no tienen por qué ser óptimas para un subespacio concreto o una señal concreta.

Ejemplo 3.14 (Detección de subespacio en ruido coloreado). En este ejemplo reducimos el subespacio de señal de los detectores al engendrado por las 6 primeras bases de la TDC, de manera que el modelo utilizado en detección coincide con el utilizado en la generación de las señales. En la Figura 3.30 se dibujan las curvas P_D vs η de los detectores de subespacio correspondientes. Cuando el ruido es poco correlado ($\alpha = \pm 0,3$) las prestaciones de ambos detectores son similares. La superioridad del TCVG para ruido correlado se hace patente cuando el ruido es más correlado ($\alpha = \pm 0,9$) si bien las diferencias son pequeñas. Para $\alpha = -0,9$, tenemos que la diferencia es de aproximadamente 2 dB. Cuando el ruido está muy solapado con la señal, ($\alpha = 0,9$), la dispersión en las ganancias de blanqueado hace que algunas señales sean incluso más detectables utilizando el detector para ruido blanco.

Ejemplo 3.15 (Estimación de AOT en ruido coloreado). En este ejemplo comparamos las prestaciones del EMV para ruido blanco (estimador de mínimos cuadrados, EMC) y el EMV para ruido coloreado (estimador de mínimos cuadrados generalizados, EMCG). La Tabla 3.5 recoge la desviación estándar del error de estimación σ_ϵ (en μV) en todo el complejo ST-T con ambos estimadores en ruido AR(1) para distintas dimensiones del subespacio paso-bajo definido por los primeros vectores base de la TDC (3.85) y distintos valores de α . La forma de onda alternante simulada³¹ ha sido (3.79) con amplitud máxima de $10 \mu V$ y el resto de parámetros de la simulación son $\sigma = 20 \mu V$, $L = 32$ y $N = 48$. Las

³¹Nótese que el error de estimación no depende de la forma de onda concreta simulada.

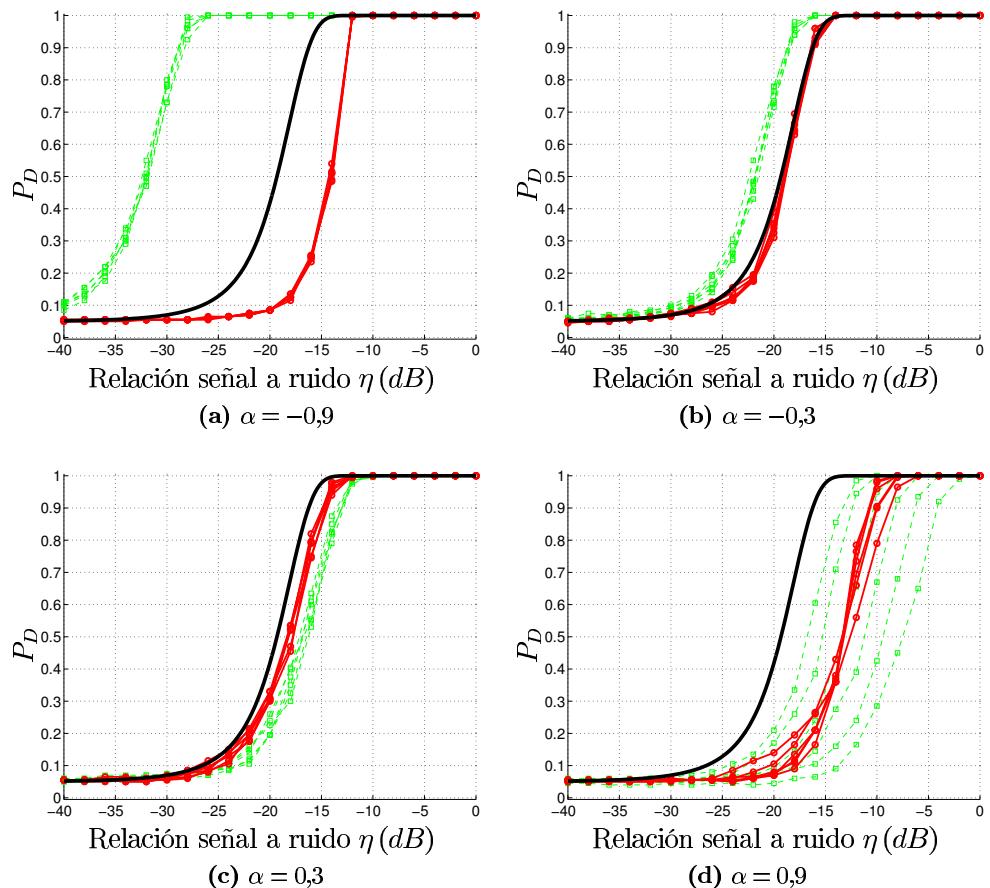


Figura 3.29: Curvas P_D vs η del detector de energía para ruido blanco (en rojo) y para ruido correlado (suponiendo \mathbf{C}_w conocida) (en verde) para diferentes señales paso-bajo inmersas en ruido AR(1).

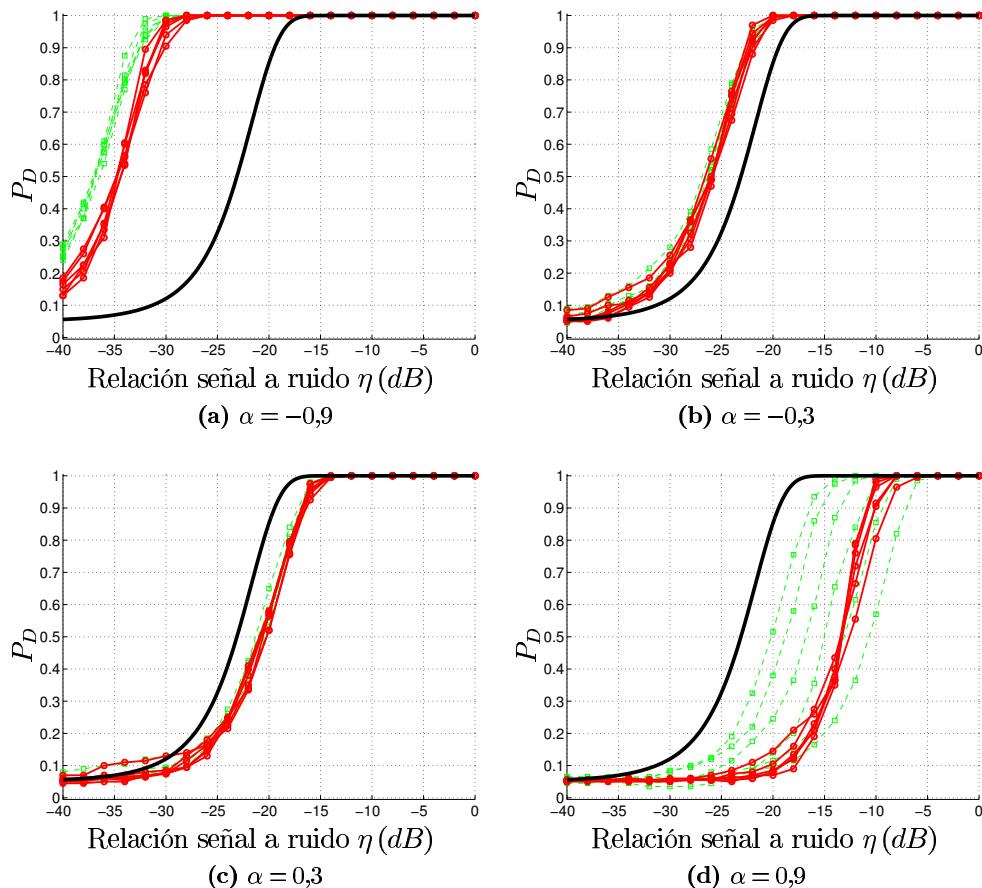


Figura 3.30: Curvas P_D vs η de los detectores de subespacio (modelo de señal paso-bajo) para ruido blanco (en rojo) y para ruido correlado (suponiendo \mathbf{C}_w conocida) (en verde) para diferentes señales paso-bajo inmersas en ruido AR(1).

diferencias encontradas son mínimas. Las mayores diferencias se han encontrado cuando la correlación de ruido es mayor. En el peor de los casos, el exceso de error de estimación debido al desajuste es de 1.12 dB (para $P = 24$ y $\alpha = -0.9$).

		$P = 48$	$P = 24$	$P = 12$	$P = 6$	$P = 3$	$P = 1$
α	Estimador	$\sigma_\varepsilon(\mu V)$					
-0.9	EMCG	7.0711	1.3290	0.8504	0.5880	0.4129	0.2365
	EMC	7.0711	1.5120	0.9750	0.6727	0.4679	0.2561
-0.3	EMCG	7.0711	3.9895	2.6638	1.8579	1.3086	0.7526
	EMC	7.0711	3.9950	2.6710	1.8639	1.3128	0.7541
0	EMCG	7.0711	5.0000	3.5355	2.5000	1.7678	1.0206
	EMC	7.0711	5.0000	3.5355	2.5000	1.7678	1.0206
0.3	EMCG	7.0711	5.8430	4.5372	3.3189	2.3697	1.3786
	EMC	7.0711	5.8444	4.5428	3.3267	2.3764	1.3813
0.9	EMCG	7.0711	6.9470	6.7529	6.3623	5.5710	3.7939
	EMC	7.0711	6.9498	6.7694	6.4169	5.7182	3.9888

Tabla 3.5: Desviación estándar global del error de estimación σ_ε con el EMC (EMV para ruido blanco) y el EMCG (EMV para ruido correlado). Se resaltan **en negrita** las diferencias mayores.

Las simulaciones realizadas en esta Sección nos permiten concluir que,

- El modelo de ruido blanco proporciona detectores y estimadores subóptimos, pero sencillos y robustos ante las distintas morfologías.
- Las diferencias entre el EMC (EMV para ruido blanco) y el EMCG (EMV para ruido coloreado) son mínimas.
- Si el ruido está poco correlado, la degradación por asumir incorrelación del ruido es mínima.
- Si la señal y el ruido están espectralmente solapados, el detector para ruido coloreado es muy sensible al valor de $G_b(\mathbf{a})$, mientras que el detector para ruido blanco es prácticamente insensible a la forma de onda, superando al TCVG para algunas señales.
- Si se reducen los grados de libertad del modelo y el subespacio de señal modela bien la señal de interés, las prestaciones de ambos detectores mejoran significativamente (tanto más cuanto menos solapados estén el subespacio de señal y el ruido) y la mejora de prestaciones debida al preblanqueado es modesta.

Teniendo en cuenta que tanto las señales alternantes como el ruido fisiológico presente en el ECG tienen un espectro paso-bajo, los resultados anteriores sugieren que es más provechoso tratar de modelar bien el subespacio de señal que la correlación del ruido. Si el subespacio de señal está modelado adecuadamente, el análisis para ruido blanco proporciona prestaciones similares al detector adaptado al espectro de ruido, con la ventaja de ser esencialmente invariante ante las distintas morfologías de la señal alternante.

3.10.3. Modelo de señal (AOT).

En los modelos estudiados se ha asumido que la alternancia observada cumple las siguientes condiciones:

1. La morfología no varía dentro de la ventana de observación, es decir, $\mathbf{a}_i = e_i \mathbf{a}$.
2. La evolución de la amplitud latido a latido coincide con la evolución nominal $\{e_i\}$ considerada en el modelo.
3. La forma de onda de la alternancia obedece al modelo lineal $\mathbf{a} = \mathbf{T} \mathbf{c}$, es decir, $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{T} \rangle$.

Las prestaciones teóricas de los detectores y estimadores son válidas únicamente si se cumplen las antedichas condiciones. Del mismo modo, las simulaciones de Monte Carlo y los ejemplos ilustrativos han considerado en todo momento un perfecto ajuste de la señal observada al modelo de alternancia. A continuación estudiaremos qué sucede cuando hay desajustes entre la señal alternante observada y el modelo de AOT.

3.10.3.1. Modelo gaussiano estacionario.

Si $\{\mathbf{a}_i^{\text{obs}}\}$, $i = 0, \dots, L - 1$ es la señal alternante real observada en cada latido de la ventana de análisis, sin ningún tipo de restricción, la distribución del EMV estacionario es

$$\hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N} \left(\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i \mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{a}_i^{\text{obs}}, \frac{4\sigma^2}{L} \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \right). \quad (3.196)$$

Por tanto, la esperanza del EMV es un promedio ponderado de las proyecciones de los vectores alternantes $\{\mathbf{a}_i^{\text{obs}}\}$ en el subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$. Por otro lado, la matriz de covarianzas del estimador no varía por el hecho de que existan desajustes en el modelo de alternancia. Si la morfología varía dentro de la ventana de observación, el EMV se comporta como un filtro promediador. No obstante, para las ventanas de observación habituales es razonable asumir que la morfología alternante es constante. En este caso, podemos expresar $\mathbf{a}_i^{\text{obs}} = e_i^{\text{obs}} \mathbf{a}^{\text{obs}}$, donde $\{e_i^{\text{obs}}\}$, $i = 0, \dots, L - 1$ es la evolución normalizada de la alternancia en

la ventana de análisis y \mathbf{a}^{obs} es la señal alterna observada. La distribución del EMV puede escribirse entonces como

$$\hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}\left(k \mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{a}^{\text{obs}}, \frac{4\sigma^2}{L} \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T\right), \quad (3.197)$$

siendo $k = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i e_i^{\text{obs}}$. La desigualdad de Cauchy-Schwarz indica que $|k| \leq 1$. Así, los desajustes en el modelo de señal se traducen en un sesgo del estimador ($E(\hat{\mathbf{a}}) \neq \mathbf{a}^{\text{obs}}$), si bien la matriz de covarianzas del error de estimación no varía.

En cuanto al TCVG, puede comprobarse que la distribución del estadístico sigue siendo ji-cuadrado³²,

$$l_G(\mathbf{X}) \sim \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.198)$$

y el parámetro de no centralidad es ahora

$$\lambda = \frac{L}{4\sigma^2} \|k \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{a}_i^{\text{obs}}\|_2^2. \quad (3.199)$$

Es fácil comprobar que $\lambda \leq \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}_i^{\text{obs}}\|_2^2 = \frac{\varepsilon_i^{\text{obs}}}{\sigma^2}$. La igualdad sólo se produce cuando $e_i^{\text{obs}} = e_i$ y $\mathbf{a}_i^{\text{obs}} \in \langle \mathbf{T} \rangle$. Es decir: cuando hay desajustes, el parámetro de no centralidad experimenta una reducción de su valor, acercando la distribución bajo la hipótesis \mathcal{H}_1 a la distribución bajo \mathcal{H}_0 . El parámetro de no centralidad permite comparar las prestaciones de detectores ji-cuadrado con el mismo número de grados de libertad. Por tanto, desde el punto de vista de energía, la desadaptación produce una pérdida de magnitud

$$W = \frac{\|\mathbf{a}_i^{\text{obs}}\|_2^2}{k^2 \|\mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{a}_i^{\text{obs}}\|_2^2} \quad (3.200)$$

respecto al detector *adaptado* a la alternancia observada: es preciso tener una RSR $10 \log_{10} W \text{ dB}$ mayor para obtener las mismas prestaciones que un detector sin desajustes.

Evolución de los episodios. La duración L de la ventana de análisis y la evolución del episodio $\{e_i\}$ son parámetros de diseño en los modelos considerados. Las prestaciones teóricas derivadas en los capítulos previos asumen que la evolución de la alternancia observada coincide con la $\{e_i\}$ considerada en el modelo. Idealmente, la duración L y la evolución $\{e_i\}$ deberían diseñarse de manera que coincidan con la duración y evolución de los episodios a detectar. Sin embargo, el abanico de duraciones y evoluciones que podemos encontrar en el ECG real imposibilita una caracterización previa de los episodios de AOT. No podemos, por tanto, asumir la adaptación del modelo a la evolución de la señal alterna.

³²El TCVG puede expresarse como $l_G(\mathbf{X}) = \mathbf{z}^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{z}$, con $\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 L}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{x}_i' e_i (-1)^i$, donde \mathbf{z} se distribuye como $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_{N \times N})$ bajo \mathcal{H}_0 y $\mathcal{N}\left(k \frac{\sqrt{L}}{2\sigma} \mathbf{T}' (\mathbf{T}'^T \mathbf{T}')^{-1} \mathbf{T}'^T \mathbf{a}^{\text{obs}}, \mathbb{I}_{N \times N}\right)$ bajo \mathcal{H}_1 .

Consideremos que la señal alternante está dentro del subespacio de señal $\mathbf{a}_i^{\text{obs}} \in \langle \mathbf{T} \rangle$. El desajuste en la evolución del episodio se traduce en un sesgo que subestima la alternancia: $E(\hat{\mathbf{a}}) = k \mathbf{a}_i^{\text{obs}}$, y una pérdida de $-20 \log_{10} k \text{ dB}$ en el detector.

en cuanto a la selección de los $\{e_i\}$ del modelo, una opción razonable consiste en considerar que la alternancia es estacionaria durante L latidos, $e_i = 1, i = 0, \dots, L - 1$. De este modo, $E(\hat{\mathbf{a}}) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{a}_i^{\text{obs}}$. También es posible utilizar otro tipo de ventanas (triangular, trapezoidal...) que den más importancia a las muestras centrales del intervalo de observación.

Duración de la ventana de análisis. De las expresiones de la ganancia de estimación (3.83) y el parámetro de no centralidad (3.71) se concluye que las prestaciones del TCVG y el EMV son mejores cuanto mayor sea L . No obstante, si la ventana de observación dura más que la alternancia, ésta deja de cumplir el modelo (3.34), y la estimación será sesgada y el detector menos sensible.

Consideremos una alternancia de amplitud constante y duración L^{obs} , y un detector con $e_i = 1, i = 0, \dots, L - 1$. Si $L \leq L^{\text{obs}}$, el modelo estacionario se cumple cuando la ventana de análisis se sitúa dentro del episodio, teniéndose el parámetro de no centralidad $\lambda = \frac{L \|\mathbf{a}'\|_2^2}{4\sigma^2}$. Si $L \geq L^{\text{obs}}$, tenemos que al centrar la ventana de análisis en el episodio, habrá latidos con alternancia y latidos sin alternancia. La alternancia se subestima entonces en un factor $k = L^{\text{obs}}/L$. El parámetro de no centralidad es $\lambda = \frac{k L^{\text{obs}} \|\mathbf{a}'\|_2^2}{4\sigma^2}$. La Figura 3.31(a) muestra la detectabilidad (cuantificada por λ para una RSR $\eta' = \|\mathbf{a}'\|_2^2/(4\sigma^2) = 1$) de dos episodios de amplitud constante y duración $L^{\text{obs}} = 32$ y 64 latidos respectivamente por detectores con ventana de análisis rectangular de distintos tamaños. La máxima detectabilidad se produce cuando la ventana está adaptada al episodio. La Figura 3.31(b) representa la detectabilidad de episodios con evolución triangular de duración $L^{\text{obs}} = 32$ y 64 latidos, cuando la ventana de análisis del detector es triangular y cuando ésta es rectangular. Se considera siempre que la ventana de análisis está centrada en el episodio. Obsérvese que al utilizar la ventana de análisis rectangular, el máximo se produce para $L = 22$ y $L = 42$ respectivamente. Esto se debe a que la longitud efectiva del episodio triangular es menor que su duración total. Nótese también que para ventanas de análisis menores que la duración del episodio, la ventana rectangular se comporta mejor que la propia ventana triangular.

En resumen, L debe diseñarse atendiendo a la mínima duración de la alternancia que se desea detectar. Por otro lado, la capacidad de seguimiento del nivel de AOT también está limitada por el valor seleccionado de L , como se ha discutido en la Sección 3.8.

Desajustes en el subespacio. El subespacio de rango reducido utilizado para el análisis de alternancias puede diseñarse a partir del conocimiento *a priori* de las características de la señal (por ejemplo, teniendo en cuenta el espectro de la alternancia), o utilizando un conjunto de entrenamiento de señales alternantes (*vid. infra* Sección 3.10.4). En señales reales no podemos asumir una caracterización perfecta de la AOT. En general, no será

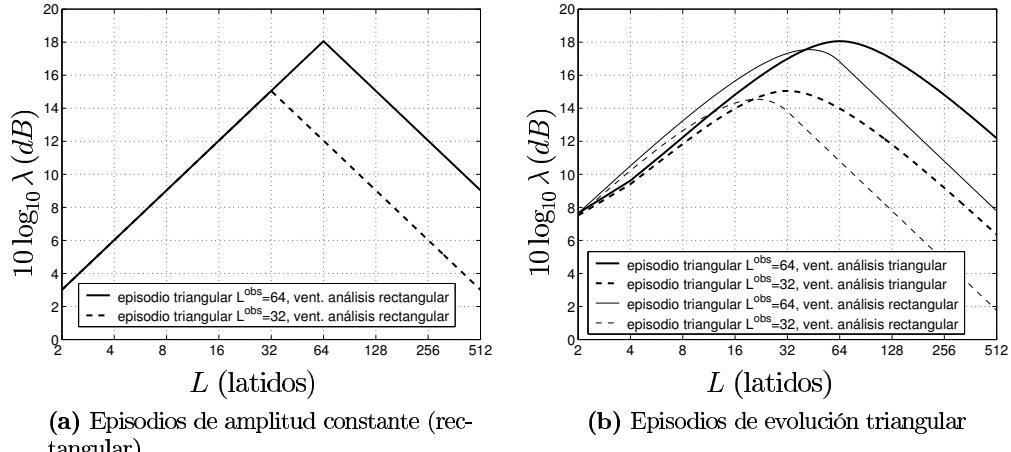


Figura 3.31: Parámetro de no centralidad λ en función del tipo y duración de la ventana de análisis.

cierto $\mathbf{a}^{\text{obs}} \in \langle \mathbf{T} \rangle$, aunque en un buen modelo, la proyección de \mathbf{a} en el subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$ debería ser una buena aproximación de la alternancia.

Asumiendo adaptación perfecta en la evolución de la alternancia, la distribución del EMV (3.47) es

$$\hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}(P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{a}^{\text{obs}}, \frac{4\sigma^2}{L} \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T). \quad (3.201)$$

La esperanza de $\hat{\mathbf{a}}$ es una proyección oblicua (una proyección ortogonal en el producto vectorial definido por \mathbf{C}_w^{-1}) de \mathbf{a}^{obs} en el subespacio de señal $\langle \mathbf{T} \rangle$: $E(\hat{\mathbf{a}}) = P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} \mathbf{a}^{\text{obs}} = \mathbf{D}^{-1} P_{\mathbf{T}} \mathbf{D} \mathbf{a}^{\text{obs}}$. El EMV de \mathbf{a} es, por tanto, un estimador sesgado cuando $\mathbf{a}^{\text{obs}} \notin \langle \mathbf{T} \rangle$. El sesgo es una proyección oblicua de \mathbf{a}^{obs} en el subespacio nulo³³ de \mathbf{T} (de dimensión $N - P$): $E(\hat{\mathbf{a}}) - \mathbf{a}^{\text{obs}} = (\mathbb{I}_N - P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w}) \mathbf{a}^{\text{obs}} = \mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w}^\perp \mathbf{a}^{\text{obs}}$.

Nos encontramos ante un compromiso a la hora de seleccionar el subespacio de señal. Cuanto menor sea la dimensión del subespacio menor será la varianza del estimador (Sección 3.4.5) pero aumenta la probabilidad de existencia de sesgo en la estimación de las formas de onda reales. Un índice que aglutina ambos efectos es el error cuadrático medio del estimador

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\mathbf{a}) &= \frac{1}{N} E((\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}^{\text{obs}})^T (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}^{\text{obs}})) \\ &= \frac{1}{N} \left(\mathbf{a}^{\text{obs}T} (\mathbb{I}_N - P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w}) \mathbf{a}^{\text{obs}} + \frac{4\sigma^2}{L} \text{tr}(\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T) \right), \end{aligned} \quad (3.202)$$

donde el primer término es el valor cuadrático medio del sesgo y el segundo es la varianza media de ruido. Si asumimos ruido blanco, $J_\varepsilon(\mathbf{a}) = \frac{1}{N} \left(\mathbf{a}^{\text{obs}T} (\mathbb{I}_N - P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w}) \mathbf{a}^{\text{obs}} + \frac{4\sigma^2}{L} P \right)$.

³³Puede comprobarse que $\mathbb{I}_N - P_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w} = \mathbf{D}^{-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}}^\perp \mathbf{D} = \mathcal{P}_{\mathbf{T}, \mathbf{C}_w}^\perp$.

Ejemplo 3.16 (EMV con señal alternante inframodelada). En este ejemplo se han simulado alternancias cuya forma de onda es la señal de ejemplo (3.79) en ruido AR(1). Las características de la simulación son las mismas que en el Ejemplo 3.6 (página 88). En este caso, los subespacios empleados han sido los engendrados por las primeras $P = 4, 2$ y 1 funciones base de la TDC. Nótese que la alternancia simulada \mathbf{a}^{obs} (combinación lineal de las 6 primeras funciones base de la TDC) está inframodelada en los tres subespacios. En el caso del ruido AR paso-alto ($\alpha = -0,9$) la mejora en la varianza de ruido σ_{ε}^2 debida a la reducción de la dimensión no es capaz de compensar la energía del sesgo que aparece debido al inframodelado (*cfr.* Figura 3.32(a), (d) y (g) con Figura 3.12(a), (d) y (g)). En el caso de ruido blanco, comparando las gráficas (b), (e) y (h) de las figuras 3.32 y 3.12, observamos que al reducir la dimensión de $P = 6$ a $P = 4$, se reduce σ_{ε}^2 de $2,5 \mu V$ a $2,0 \mu V$ a cambio de un ligero sesgo. Restringir más el subespacio aumenta la energía del sesgo más de lo que disminuye la energía de ruido. Por último, cuando $\alpha = 0,9$, buena parte del ruido proyecta en los subespacios paso-bajo. Por eso, el error cuadrático medio mínimo se obtiene cuando $P = 1$, a pesar del importante sesgo que presenta la estimación.

Además de sesgar el EMV, el desajuste del subespacio también afecta al estadístico de detección, ya que no toda la energía alternante se refleja en el mismo. La distribución del estadístico es χ^2 con P grados de libertad y parámetro de no centralidad se reduce a $\lambda = \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{a}'\|_2^2 \leq \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}'\|_2^2$. El compromiso sesgo-varianza se refleja en el detector del siguiente modo: al reducir la dimensión P se reduce la varianza del estadístico bajo ambas hipótesis (aumentando la detectabilidad), pero la separación entre las medias bajo ambas hipótesis (expresada por λ) también disminuye debido a la porción de la energía alternante que queda fuera del subespacio de señal.

Ejemplo 3.17 (TCVG con señal alternante inframodelada). De nuevo tratamos la detección de AOT en una matriz de complejos ST-T de $L = 32$ latidos y $N = 48$ muestras por latido. La forma de onda alternante es la señal de ejemplo (3.79) y el ruido es AR(1) con $\alpha = 0,7$. La Figura 3.33 ofrece las curvas (teóricas) de P_D del detector TCVG con distintos subespacios de señal definidos por las funciones base de la TDC. Para $P \geq 6$ (líneas continuas), la señal pertenece al subespacio de análisis, obteniéndose las prestaciones descritas en la Sección 3.4.4. Si $P < 6$ (líneas discontinuas) se produce un desajuste (inframodelado) entre el subespacio y la alternancia con la consiguiente pérdida de energía que afecta a las prestaciones. Para el caso concreto de la señal de ejemplo, la pérdida de energía al reducir la dimensión a $P = 3$, es pequeña³⁴ respecto a la ganancia por disminución de los grados de libertad. Cuando $P = 2$, la disminución de λ no compensa la reducción de grados de libertad, obteniendo peores resultados. Al utilizar una única función base $P = 1$, el estadístico de detección recoge la energía de la componente continua, descartando el resto de componentes. Para RSR altas, la pérdida de energía no se ve compensada con la drástica reducción de grados de libertad. Sin embargo, para situaciones muy ruidosas, la reducción de ruido conseguida gracias a la reducción de la dimensionalidad hace que, a pesar de la pérdida de energía, el detector de alternancias para $P = 1$ sea el que mejor funciona para $\eta' \leq -17,5 \text{ dB}$. Para $\eta' > -17,5$, las mejores prestaciones se obtienen para $P = 3$.

³⁴La mayor parte de la energía de (3.79) se recoge en las tres primeras funciones de la TDC.

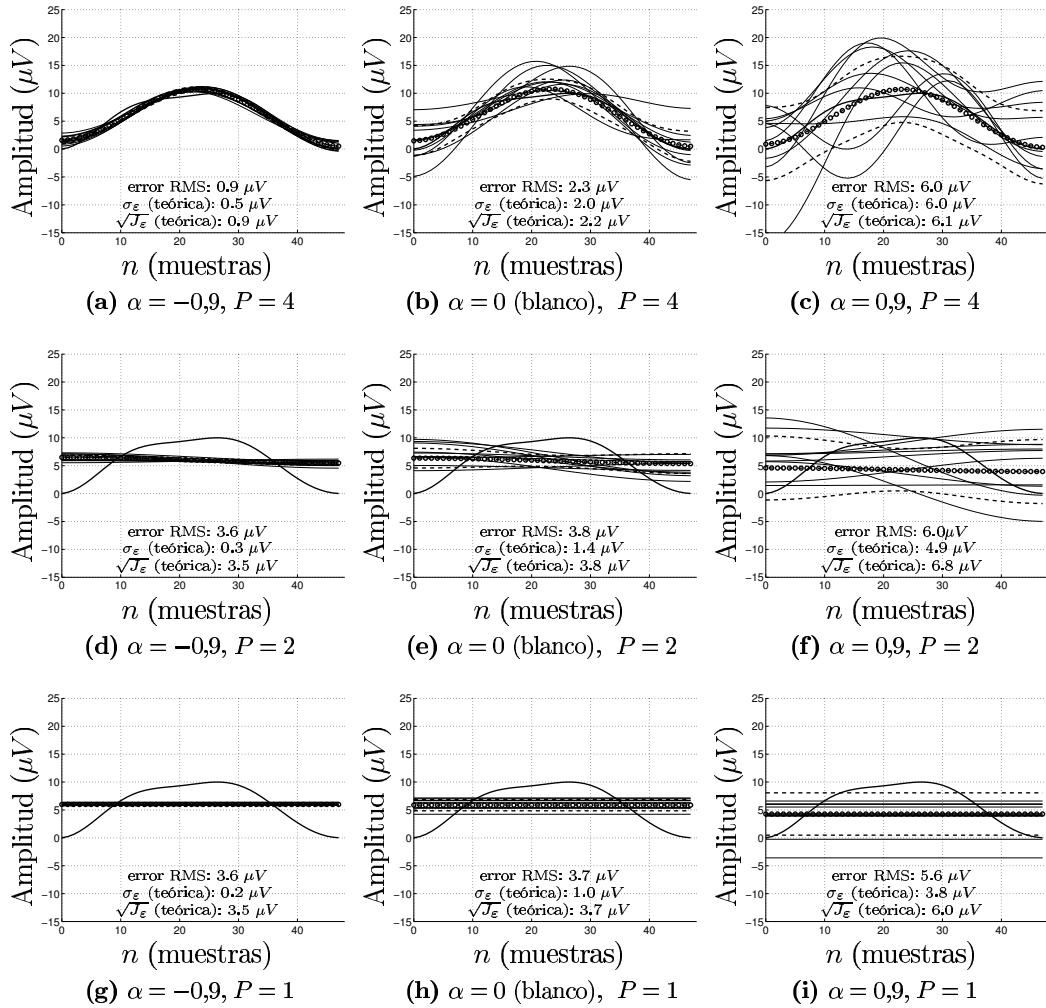


Figura 3.32: Estimación de AOT para distintos tipos de ruido AR(1) y dimensiones del subespacio. En cada gráfica se representan: la señal simulada (línea gruesa), la señal media estimada (línea de círculos), el margen teórico $\pm \sigma_{\varepsilon(n)}$ (delimitado por dos líneas discontinuas) y la señal estimada en 10 realizaciones (líneas delgadas). Se indican asimismo los valores teóricos de la desviación estándar σ_ε y la raíz cuadrada del error cuadrático medio J_ε , y el error RMS calculado en 100 realizaciones de Monte Carlo (todos en μV).

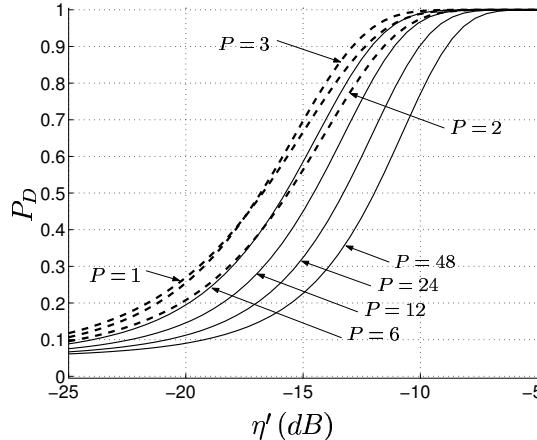


Figura 3.33: Curva P_D vs η' para $P_{FA} = 0,05$ del TCVG gaussiano estacionario al detectar la forma de onda de ejemplo (3.79) en ruido AR(1), $\alpha = 0,7$, utilizando como subespacios de análisis los engendrados por las bases truncadas de la TDC.

3.10.3.2. Modelo gaussiano adaptativo.

El EMV para este modelo es el mismo que para el modelo gaussiano estacionario. Por tanto, el efecto de los desajustes en la evolución y el subespacio de señal es el ya estudiado en la sección previa. En cuanto al CVG, hemos de tener en cuenta que el desajuste afecta a la estimación de la energía alterna, pero también a la estimación de la varianza de ruido $\hat{\sigma}_1^2$, ya que ésta se calcula después de sustraer la alternancia estimada³⁵. Así, cualquier componente de la señal que no se adecue al modelo es considerada como parte del ruido, produciendo una sobreestimación de la varianza.

Para obtener la distribución del CVG podemos partir de la expresión (3.107), donde queda expresado como el cociente de dos estadísticos. El numerador \mathfrak{N} es el estadístico de detección para σ^2 conocida. Su estadística, con desajustes, es

$$\mathfrak{N} \sim \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.203)$$

con $\lambda = \frac{L}{4\sigma^2} \|k P_{\mathbf{T}} \mathbf{a}^{\text{obs}}\|_2^2 \leq \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}^{\text{obs}}\|_2^2 = \frac{\varepsilon^{\text{obs}}}{\sigma^2}$, siendo $k = \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{\text{obs}} e_i / L$ (vid. supra). Pero el desajuste no sólo afecta al numerador. El EMV de σ^2 bajo \mathcal{H}_1 (3.96), estima la varianza del ruido sustrayendo de la señal observada la alternancia estimada según el modelo. En el Apéndice 3.F se demuestra que

$$NL\mathfrak{D} = NL \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma^2} \sim \begin{cases} \chi_{NL-P}^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_{NL-P}^2(\lambda_D) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.204)$$

³⁵Nótese que en el cómputo de $\hat{\sigma}_1^2$ se consideran parte del ruido todas las componentes no alternantes y las que, aun siendo alternantes, estén fuera del subespacio de señal.

con $\lambda_D = \frac{L}{4\sigma^2} \left\| \mathbf{a}'^{\text{obs}} \right\|_2^2 - \frac{L}{4\sigma^2} \left\| k \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{a}'^{\text{obs}} \right\|_2^2 = \frac{\mathcal{E}'^{\text{obs}}}{\sigma^2} - \lambda$. Nótese que la distribución de $N\mathcal{D}$ bajo \mathcal{H}_1 es ji-cuadrado central ($\lambda_D = 0$) sólo cuando la señal se ajusta al modelo.

Los desajustes de la señal hacen que bajo \mathcal{H}_1 el estadístico sea el cociente entre dos distribuciones ji-cuadrado no centrales independientes, con $(P, NL - P)$ grados de libertad y parámetros de no centralidad (λ, λ_D) . Esta distribución se denomina *distribución F no central doble* $F''_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1, \lambda_2)$. Así,

$$l_G(\mathbf{X}) \sim \begin{cases} F_{P, NL-P} & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ F''_{P, NL-P}(\lambda, \lambda_D) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}. \quad (3.205)$$

Nótese que $\lambda + \lambda_D = \frac{\mathcal{E}'^{\text{obs}}}{\sigma^2}$ es la RER blanqueada de la alternancia real observada. La disminución de λ debida a los desajustes conlleva un aumento de λ_D , lo que reduce todavía más la separación de las dos distribuciones y produce una degradación adicional respecto a la observada en el modelo para varianza conocida. El numerador y el denominador son proporcionales a la energía proyectada en los subespacios de señal y de ruido. Así, cualquier componente de alternancia que, debido a los desajustes, no proyecte en el subespacio de señal, proyecta en el del ruido, aumentando el denominador y disminuyendo por tanto la detectabilidad. El desarrollo anterior puede realizarse también incluyendo la onda P. La única diferencia radica en que aumentan las distribuciones del denominador tienen $(P, (N_P + N)L - P)$ grados de libertad.

Ejemplo 3.18 (TCVG adaptativo con desadaptación en el modelo de AOT). Para ilustrar el comportamiento ante desajustes de los métodos adaptativos, consideremos la detección de la forma de onda alternante (3.79) en ruido blanco. La evolución de la forma de onda observada es estacionaria dentro de la ventana de observación $e_i^{\text{obs}} = 1$, $i = 0, \dots, L - 1$. Sin embargo, utilizamos un detector que utiliza una ventana de análisis e_i simétrica y triangular. Además, el detector está adaptado al subespacio definido por las dos primeras bases de la TDC. El resto de los parámetros son $L = 32$, $N = 48$ y $N_P = 25$. La energía alternante recogida por el numerador del detector TCVG es un 55% de la energía total de la alternancia (en otras palabras, λ es casi 3 dB menor que si no hubiera desajustes). Como se ha señalado, además de la disminución de λ , se produce otro efecto, debido a que el denominador del TCVG pasa a ser proporcional a una distribución χ^2 no central. En la Figura 3.34 se muestran las prestaciones (obtenidas mediante simulaciones de Monte Carlo) del TCVG adaptativo (incluyendo la onda P). Se observa una pérdida de aproximadamente 3 dB respecto a la curva teórica del TCVG estacionario para un modelo con $P = 2$ grados de libertad y sin desajustes (línea continua). Sin embargo, el TCVG para σ^2 desconocida apenas presenta degradación respecto al detector con σ^2 conocida y los mismos desajustes. Este ejemplo sugiere que la degradación por desajustes afecta básicamente al numerador del TCVG (y los detectores asociados), siendo el efecto en el denominador menos importante.

En efecto, si $L \gg 1$, la distribución de $\mathfrak{D} = \hat{\sigma}_1^2/\sigma^2$ es aproximadamente normal³⁶

³⁶Partiendo de $N\mathcal{D} \sim \chi^2_{NL-P}(\lambda_D)$, si $L \gg 1$, las propiedades asintóticas de las distribuciones ji-cuadrado nos dicen que aproximadamente $N\mathcal{D} \sim \mathcal{N}(NL - P + \lambda_D, 2NL - 2P + 4\lambda_D)$, o lo que es lo mismo $\mathfrak{D} \sim \mathcal{N}(1 - \frac{P}{NL} + \frac{\lambda_D}{NL}, \frac{2}{NL} - \frac{2P}{N^2L^2} + 4\frac{\lambda_D}{N^2L^2})$. Teniendo en cuenta que $NL \gg P$, la distribución se reduce a $\mathfrak{D} \sim \mathcal{N}(1 + \frac{\lambda_D}{NL}, \frac{2}{NL})$

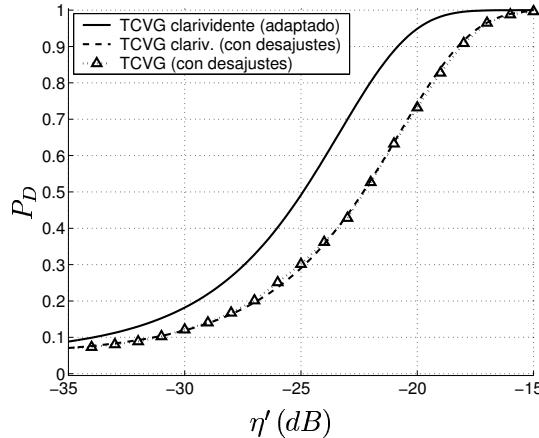


Figura 3.34: Curva P_D vs η' del detector del CVG adaptativo con desajustes en el subespacio de señal y la evolución de la alternancia. Se presentan también las curvas teóricas del TCVG clarividente (es decir, para σ^2 conocida) con y sin desajustes.

$\mathfrak{D} \sim \mathcal{N}(1 + \frac{\lambda_D}{NL}, \frac{2}{NL})$. Asintóticamente, tenemos que la varianza del denominador tiende a anularse y su esperanza, que debería ser la unidad si no hubiera desajustes, crece (es decir, la varianza de ruido se sobreestima) tanto más cuanto mayor sea $\eta'_D = \lambda_D/(NL)$, donde η'_D es la relación entre la potencia de señal perdida debido al desajuste y la potencia de ruido. Así, si la RSR η' es baja, η'_D es, en general, todavía más baja, siendo despreciable la sobreestimación del nivel de ruido.

3.10.3.3. Modelo gaussiano no estacionario.

En el caso del TCVG para ruido no estacionario, el estudio analítico del efecto de los desajustes en el detector es sensiblemente más complicado, dado el acople existente entre los EMV bajo \mathcal{H}_0 . No obstante, podemos estudiar el comportamiento del TCVG clarividente para ruido no estacionario, que es una cota superior a las prestaciones del TCVG para ruido no estacionario desconocido. Es fácil demostrar que si $\mathbf{a}_i^{\text{obs}} = e_i^{\text{obs}} \mathbf{a}^{\text{obs}}$ es la alternancia observada latido a latido, la estadística del CVG clarividente (que conoce la varianza de ruido en cada latido) es

$$l_{GC}(\mathbf{X}) \sim \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.206)$$

donde $\lambda = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{4\sigma_i^2} \|k P_{\mathbf{T}'} \mathbf{a}'\|_2^2 \leq \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\varepsilon_i^{\text{obs}}}{\sigma_i^2}$. La degradación debida a los desajustes es exactamente la misma que en el modelo estacionario. Por tanto, el TCVG para el modelo gaussiano no estacionario y los detectores de Wald y Rao deben tener una degradación similar. Por otro lado, en el TCVG y el test de Wald la varianza de ruido en cada latido

se estima sustrayendo a la señal observada la alternancia estimada, por lo que el sesgo producido por el desajuste puede hacer que se sobreestime el nivel de ruido, disminuyendo aun más la distancia entre hipótesis. No obstante, como se ha discutido en la sección previa, este último efecto es despreciable si la RSR es baja, ya que entonces la posible sobreestimación debida al sesgo es mucho menor que el nivel de ruido a estimar.

Ejemplo 3.19 (TCVG no estacionario con desadaptación en el modelo de AOT). Consideremos la misma simulación del Ejemplo 3.18. La Figura 3.35 recoge las prestaciones (obtenidas mediante 10.000 realizaciones de Monte Carlo) de los detectores CVG, de Wald y de Rao para el modelo no estacionario (todos incluyendo la onda P). Se observa una pérdida de aproximadamente 3 dB respecto a la curva del TCVG clarividente sin desajustes (línea continua). En el ejemplo, los tres detectores para σ_i^2 desconocidos apenas presentan degradación respecto al detector clarividente (que conoce los σ_i^2) con desajustes en el modelo de señal. De nuevo encontramos que la degradación por desajustes afecta básicamente a la energía de la alternancia estimada, y su efecto en la estimación del nivel de ruido apenas es apreciable.

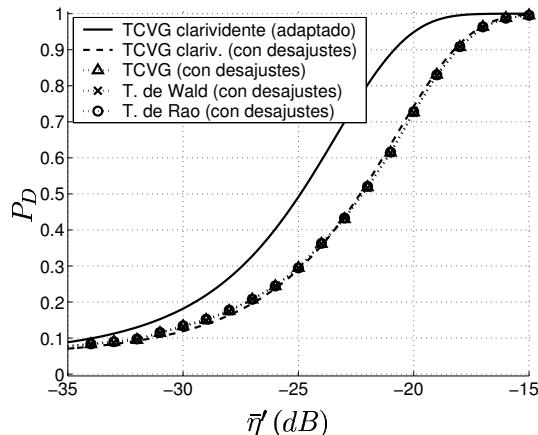


Figura 3.35: Curvas P_D vs $\bar{\eta}'$ de los detectores CVG, de Wald y de Rao no estacionarios con desajustes en el subespacio de señal y la evolución de la alternancia. Se presentan también las curvas del TCVG clarividente con y sin desajustes.

3.10.4. Subespacios para el análisis de alternancias.

Las formas de onda alternantes no han sido apenas estudiadas en la literatura sobre AOT, y por tanto, es difícil realizar una caracterización precisa de las mismas. Nearing *et al.* describen la alternancia como una señal localizada espectralmente entre los 0.3 Hz y los 15 Hz (Nearing *et al.* 1996). Las formas de onda descritas en otros trabajos siguen también un patrón paso-bajo, en un rango de frecuencias similar al de la onda T (Smith *et al.* 1988; Nearing *et al.* 1991; Martínez *et al.* 2002).

Partiendo de esta característica, un planteamiento lógico es utilizar un modelo que restrinja las posibles formas de onda \mathbf{a} , asumiendo que éstas pertenecen a un subespacio de señales paso-bajo.

Subespacios de la transformada discreta coseno y de Fourier. En los ejemplos utilizados en esta sección, se han utilizado las primeras funciones base de la TDC (3.85) para constituir subespacios paso-bajo. Las P primeras bases de la TDC restringen el subespacio de señal alternante a una frecuencia máxima de aproximadamente $PF_m/2N$, siendo F_m la frecuencia de muestreo de la señal. Así, si $F_m = 200\text{ Hz}$, $N = 48$ y $P = 6$, la proyección en dicho subespacio tiene una frecuencia efectiva de corte de aproximadamente $12,5\text{ Hz}$.

La transformada discreta de Fourier (TDF) también permite crear subespacios paso-bajo con una determinada frecuencia de corte. Para evitar números complejos, podemos utilizar senos y cosenos como funciones base:

$$\begin{aligned} t_0[n] &= \frac{1}{\sqrt{N}}, n = 0, \dots, N-1, \\ t_{2k-1}[n] &= \frac{2}{\sqrt{N}} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}n\right), \\ t_{2k}[n] &= \frac{2}{\sqrt{N}} \sin\left(\frac{2\pi k}{N}n\right), k = 1, 2, \dots, \frac{P-1}{2}. \end{aligned} \quad (3.207)$$

Utilizando un número impar de funciones base P , la frecuencia de corte del subespacio se limita a $(P-1)F_m/(2N)$.

Siguiendo el esquema de la Figura 3.4 y teniendo en cuenta ambas transformadas son ortonormales ($\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbb{I}_N$), el TCVG y el EMV para ruido blanco pueden calcularse a partir de la alternancia estimada en los primeros coeficientes de la TDC o la TDF

$$\mathbf{v}_l = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{y}_{l-L+1+i} e_i (-1)^i, \quad (3.208)$$

con $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}^T \mathbf{x}_i$. El estadístico de detección es proporcional a $\|\mathbf{v}_l\|_2^2$ mientras que el EMV es la transformada inversa $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{T} \mathbf{v}_l$.

Subespacios paso-bajo en el dominio del tiempo. Una señal continua de banda limitada puede caracterizarse por una versión muestreada a la frecuencia de Nyquist correspondiente

$$s(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} s(pT) h_s(t - pT), \quad (3.209)$$

donde

$$h_s(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}. \quad (3.210)$$

Sea $s[n] = s(n/F_m)$ el resultado de muestrear $s(t)$ con tasa de muestreo F_m . Si $s(t)$ no tiene componentes frecuenciales por encima de $F_m/(2Q)$, también podemos expresar la señal muestreada como

$$s[n] = s(n/F_m) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} s(pQ/F_m) \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{Q} - p\right). \quad (3.211)$$

Aunque esta representación sólo es exacta para señales de duración infinita, también podemos utilizarla para caracterizar, de forma aproximada, señales de duración finita como la forma de onda alterna dentro de un latido.

Así, podemos utilizar el siguiente modelo lineal para la señal alterna

$$a[n] = \sum_{p=0}^{P-1} c_p \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{Q} - p\right), \quad (3.212)$$

donde c_p es el resultado de remuestrear $a[n]$ a la frecuencia F_s/Q . En forma vectorial tenemos $\mathbf{a} = \mathbf{T} \mathbf{c}$, siendo

$$t_p[n] = \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{Q} - p\right), \quad n = 0, \dots, N-1; \quad p = 0, \dots, P-1, \quad (3.213)$$

con $P = \lfloor N/Q \rfloor$. En el subespacio de señal $\langle \mathbf{T} \rangle$ correspondiente, la frecuencia máxima representada viene dada por $F_m/(2Q) \approx PF_m/(2N)$. Debido al lento decaimiento de la función *sinc*, se producen efectos de borde y la matriz \mathbf{T} no es exactamente ortogonal, si bien puede comprobarse que $\mathbf{T}^T \mathbf{T} \rightarrow Q \mathbb{I}_N$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Utilizando esta representación en el modelo de señal, el TCVG puede implementarse, de acuerdo con la Figura 3.4, aplicando a cada latido \mathbf{x}_i la transformación de reducción de datos $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}''^T \mathbf{x}_i$. Asumiendo ruido blanco, $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}^T (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1/2} \mathbf{x}_i \approx \frac{1}{\sqrt{Q}} \mathbf{T}^T \mathbf{x}_i$. Despreciando los efectos de los bordes ($N \rightarrow \infty$), esta transformación equivale a filtrar el latido \mathbf{x}_i con el filtro $h[n] = \operatorname{sinc}(n/Q)$, es decir, con un filtro paso-bajo ideal cuya frecuencia de corte es F_s/Q , y diezmar la señal por un factor Q . Evidentemente, este filtro es irrealizable. Para N finito, las columnas de \mathbf{T} contienen una versión enventanada del filtro ideal, de manera que la señal se filtra con una aproximación al filtro ideal antes de ser diezmada. Siguiendo con el esquema de la Figura 3.4, la alternancia es estimada en el dominio diezmado \mathbf{v}_l , y se le aplica a continuación la transformación inversa $\hat{\mathbf{a}}_l = \frac{1}{\sqrt{Q}} \mathbf{T} \hat{\mathbf{v}}_l$, que para N finita es una aproximación al filtro interpolador ideal. Alternativamente, se puede diseñar un filtro $h_Q[n]$ cuya frecuencia de corte sea F_s/Q , y utilizarlo en lugar de la matriz $\frac{1}{\sqrt{Q}} \mathbf{T}$ como filtro anti-aliasing previo al diezmado y como filtro interpolador.

Se han propuesto 3 modelos lineales para modelar un subespacio de señal paso-bajo. Para un mismo valor de P , los subespacios de señal correspondientes son prácticamente los mismos, y por tanto, las prestaciones de los detectores son similares. Finalmente, podemos utilizar otra estrategia consistente en hacer acopio de un conjunto de entrenamiento de señales alternantes, y buscar, bajo algún criterio, el subespacio óptimo para ese conjunto de datos.

Diseño del subespacio a partir de un conjunto de entrenamiento. La búsqueda del subespacio de dimensión P que mejor describe un conjunto de señales es un problema que surge en diversas áreas del procesado de señal. En este caso, partimos de un conjunto suficientemente amplio de R señales de entrenamiento $\{\mathbf{r}_i\}$, representantes del conjunto de señales a caracterizar. En el caso de las alternancias, es necesario aplicar previamente un detector de alternancias (p. ej., con el detector de energía) para localizar fragmentos de ECG con alternancias y obtener de allí *formas de onda de entrenamiento*³⁷. El modelo para estas señales es $\mathbf{r}_i = \mathbf{T}\mathbf{c}_i + \mathbf{w}_i$, donde \mathbf{T} es una base del subespacio a determinar.

Asumiendo que los vectores de ruido se distribuyen³⁸ como $\mathbf{w}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbb{I}_N)$, el subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$ que maximiza la verosimilitud de las observaciones $\{\mathbf{r}_i\}$, es el engendrado por los vectores propios dominantes de la matriz de autocorrelación de la muestra

$\mathbf{S} = \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T$ (Moon y Stirling 2000, pp. 565-566). El criterio de mínimo error cuadrático medio nos proporciona el mismo subespacio (Scharf 1991). La transformación lineal equivalente es la transformada de Karhunen-Loëve (TKL) truncada a sus P primeros coeficientes. El detector correspondiente para ruido blanco recuerda a los métodos de detección ME-KL (Laguna *et al.* 1996) y MDC-KL (Martínez *et al.* 2000a). La diferencia radica en el conjunto de entrenamiento, que debe estar formado sólo por señales alternantes (más ruido) y no por complejos ST-T como las citadas referencias.

3.11. Conclusiones.

En este capítulo hemos aplicado herramientas de la teoría estadística de la detección para encontrar metodologías de análisis de AOT en el ECG. En concreto, se han planteado tres modelos sencillos de la señal observada, con una caracterización lineal de la señal alterante en ruido gaussiano, y diversos grados de conocimiento y estacionariedad del ruido. Una vez definidos los modelos, se han derivado detectores y estimadores según el paradigma del test del cociente de verosimilitudes generalizado y el estimador de máxima verosimilitud (TCVG / EMV), y, en su caso, otras metodologías asintóticamente equivalentes. Hemos estudiado las prestaciones exactas (de forma analítica o bien mediante simulaciones de Monte Carlo) y asintóticas de los detectores y estimadores, así como la degradación existente cuando la señal no se ajusta al modelo en cuestión.

Las prestaciones de los métodos de análisis dependen, para una relación señal a ruido dada, de las dimensiones de la ventana de análisis y el número de grados de libertad de la señal. Los grados de libertad pueden reducirse incluyendo en el modelo información *a priori* sobre las características de la señal. La reducción de grados de libertad conlleva

³⁷Una vez localizados los fragmentos, podemos formar el conjunto de entrenamiento 1) con las formas de onda alternantes $\hat{\mathbf{a}}$ estimadas en \mathbb{R}^N , ó 2) con los propios complejos ST-T \mathbf{x}_i de los que se ha eliminado previamente el ECG de fondo.

³⁸Al proceder de diferentes señales, el nivel de ruido no tiene por qué ser el mismo en las señales $\{\mathbf{r}_i\}$. Si las diferencias son importantes, se puede estimar la varianza σ_i^2 en cada señal de entrenamiento, y normalizarlas para que todas tengan la misma varianza.

una mejora de las prestaciones siempre que la caracterización de la señal sea realista. De lo contrario, los métodos experimentan al mismo tiempo una degradación debida al desajuste. Si, por el contrario, se relajan las asunciones del modelo de señal, aumentando los grados de libertad, se está dotando al análisis de mayor robustez, aunque a costa de una cierta degradación de sus prestaciones.

Los tres modelos estudiados corresponden a distintas asunciones sobre el conocimiento y la estacionariedad del ruido.

- El modelo gaussiano estacionario nos ha conducido a detectores y estimadores sencillos, cuya limitación principal es su sensibilidad ante las variaciones de ruido (detector no adaptativo y no CFAR).
- El modelo gaussiano adaptativo añade un grado de libertad debido al desconocimiento del nivel de ruido. El TCVG para este modelo permite la adaptación del detector a las variaciones lentas del nivel de ruido a cambio de una mínima degradación en las prestaciones (que es despreciable para los valores típicos de la ventana de análisis). Además, la complejidad del detector adaptativo es poco mayor que la del esquema estacionario. No obstante, los métodos adaptativos experimentan una degradación importante ante variaciones transitorias del nivel de ruido.
- El modelo gaussiano no estacionario proporciona detectores y estimadores robustos ante episodios de ruido no estacionario. Esta robustez, que se alcanza al incorporar al modelo la incertidumbre sobre el nivel de ruido en cada latido, se consigue a cambio de una mínima degradación. La principal limitación del EMV y los detectores TCVG y de Wald para este modelo radica en su complejidad computacional, ya que los EMV bajo \mathcal{H}_1 han de estimarse numéricamente. En este sentido, el test de Rao, por su sencillez, es una buena alternativa para la detección. Los resultados de simulación han mostrado que, para dimensiones razonables de la matriz de datos observados, el test de Rao alcanza prestaciones similares al TCVG, y muy cercanas a las del TCVG clarividente. En cuanto a la estimación de la alternancia, el estimador de Rao es sesgado, por lo que es preferible recurrir a la estimación numérica del EMV o bien a la utilización del EMV estacionario, cuya degradación está dentro de unos límites razonables.

Los métodos estudiados tienen una serie de parámetros de diseño que influyen en sus prestaciones. Son aquéllos que se han considerado conocidos en el modelo de señal: la duración de la ventana de análisis L , la evolución asumida para la alternancia $\{e_i\}$ (define la forma de la ventana de análisis), el subespacio de la señal alternante $\langle T \rangle$ (definido por la matriz T) y la matriz de covarianza del ruido C_w . En el modelo estacionario, el valor de σ^2 es también un parámetro de diseño. Se han discutido opciones razonables para el diseño de $\langle T \rangle$ y $\{e_i\}$, estudiándose asimismo el efecto de los desajustes del modelo. En cuanto a la correlación del ruido, las simulaciones llevadas a cabo sugieren que la mejora debida al preblanqueado es mínima cuando el los espectros de la alternancia y el ruido están solapados, y que la mayor ganancia se obtiene por reducción de los grados

de libertad del modelo. Si a esto añadimos que los detectores para ruido coloreado (con preblanqueado) tienen un comportamiento muy dependiente de la forma de onda concreta, y que requieren una estimación previa de la matriz de covarianzas, concluimos que los detectores de subespacio reducido para ruido blanco son una opción razonable incluso para analizar señales en ruido coloreado.

La comparación con los métodos que pueden encontrarse en la literatura, nos lleva a la conclusión de que el grupo de métodos más ampliamente utilizados (los métodos basados en la TFL, que incluyen al método espectral y al método de la demodulación compleja) pueden interpretarse como casos particulares de los modelos gaussiano estacionario (métodos con umbral fijo) y gaussiano adaptativo (métodos con umbral variable).

La asunción de gaussianidad ha llevado a obtener métodos sencillos, basados en operadores lineales. Éstos presentan comportamientos no deseados cuando la señal contiene valores extremos, *outliers*, etc. La utilización de modelos no gaussianos con el fin de obtener detectores y estimadores robustos será objeto de estudio del capítulo 4.

La evaluación de los métodos estudiados se ha efectuado en el presente capítulo por medio de simulaciones de Monte Carlo, garantizando que las señales simuladas cumplan los modelos para los que se han derivado los métodos. También se ha estudiado la degradación de las prestaciones debida a diversos desajustes en el modelo. Las prestaciones obtenidas en este capítulo sólo permiten predecir el comportamiento de los métodos ante el ECG real en la medida en que los modelos considerados se adecuen a las características del ECG real. El Capítulo 5 se dedica a la evaluar las prestaciones de los detectores y estimadores de AOT en escenarios de señal ECG mucho más realistas.

Apéndice 3.A Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano estacionario.

En el modelo gaussiano estacionario (Sección 3.4) los únicos parámetros desconocidos son los elementos de \mathbf{c} . Calculamos la derivada parcial del logaritmo de la FDP (3.4) respecto a ellos

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} e_i^2 \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \mathbf{c}. \quad (3.A.1)$$

La matriz de Fisher (3.16) es, por tanto

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = -E \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \right] = \frac{L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}. \quad (3.A.2)$$

De la matriz de Fisher podemos obtener

- La cota de Cramér-Rao. Para cualquier estimador insesgado $\hat{\mathbf{c}}$,

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{c}}} - \frac{4\sigma^2}{L} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \geq 0. \quad (3.A.3)$$

- El estadístico del test de Wald (3.27):

$$T_W(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{c}}^T \frac{L}{4\sigma^2} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \hat{\mathbf{c}} = \frac{L}{4\sigma^2} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2. \quad (3.A.4)$$

- El estadístico del test de Rao (3.29). Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=0} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i = \frac{L}{4\sigma^2} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}) \hat{\mathbf{c}}, \quad (3.A.5)$$

el estadístico toma la forma

$$\begin{aligned} T_R(\mathbf{X}) &= \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=0} \right)^T \frac{4\sigma^2}{L} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=0} \\ &= \frac{L}{4\sigma^2} \hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} \\ &= \frac{L}{4\sigma^2} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.A.6)$$

y por tanto, coinciden con el TCVG (3.54).

- El parámetro de no centralidad (3.24) de la distribución asintótica del TCVG (y de los tests de Wald y Rao) es

$$\lambda = \mathbf{c}^T \frac{L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \mathbf{c} = \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}'\|_2^2. \quad (3.A.7)$$

Apéndice 3.B Detector clarividente de Neyman-Pearson para ruido estacionario.

Sea \mathbf{X} una señal modelada por (3.39) donde \mathbf{a} , σ^2 y \mathbf{C}_w son parámetros conocidos. El detector óptimo (en el sentido de Neyman-Pearson) es el TCV

$$L(\mathbf{X}) = \frac{p(\mathbf{X}; \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{X}; \mathcal{H}_0)} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma. \quad (3.B.1)$$

El logaritmo del CV es un detector equivalente, y por tanto, óptimo:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{X}) = \ln L(\mathbf{X}) &= -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}'_i - \frac{1}{2} \mathbf{a}' e_i (-1)^i \right\|_2^2 - \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}'_i\|_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \left(\mathbf{a}'^T \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i - \frac{L}{4} \|\mathbf{a}'\|_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{2} \mathbf{a}'^T \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i - \frac{\mathcal{E}'}{2} \right) \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \ln \gamma, \end{aligned} \quad (3.B.2)$$

donde \mathcal{E}' es la energía de la alternancia a detectar una vez blanqueada. Como \mathcal{E}' es una constante conocida, el detector óptimo puede escribirse de forma equivalente como

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{2} \mathbf{a}'^T \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma' = \sigma^2 \ln \gamma + \frac{\mathcal{E}'}{2}. \quad (3.B.3)$$

Como se puede apreciar, el detector clarividente correla la señal observada blanqueada \mathbf{X}' con la señal esperada, tanto por filas (correlando con la evolución $e_i(-1)^i$) como por columnas (correlando con la señal \mathbf{a}').

El estadístico $T(\mathbf{X})$ es una combinación de las muestras de \mathbf{X}' , que son variables gaussianas incorreladas. Por tanto, la distribución de $T(\mathbf{X})$ es normal bajo ambas hipótesis. Puede comprobarse que

$$T(\mathbf{X}) \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathcal{E}') & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{N}(\mathcal{E}', \sigma^2 \mathcal{E}') & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}. \quad (3.B.4)$$

Por tanto,

$$P_{FA} = Q\left(\frac{\gamma'}{\sqrt{\sigma^2 \mathcal{E}'}}\right); P_D = Q\left(\frac{\gamma' - \mathcal{E}'}{\sqrt{\sigma^2 \mathcal{E}'}}\right), \quad (3.B.5)$$

donde Q es la función de distribución acumulada complementaria para distribución gaussiana estandarizada. Despejando el umbral $\gamma' = \sqrt{\sigma^2 \mathcal{E}'} Q^{-1}(P_{FA})$ para una P_{FA} dada y sustituyendo en la P_D tenemos

$$P_D = Q\left(Q^{-1}(P_{FA}) - \sqrt{\frac{\mathcal{E}'}{\sigma^2}}\right) = Q\left(Q^{-1}(P_{FA}) - \sqrt{\lambda}\right), \quad (3.B.6)$$

donde $\lambda = \sqrt{\frac{\mathcal{E}'}{\sigma^2}} = \sqrt{NL\eta'}$ coincide con el parámetro de no centralidad de la distribución del TCVG.

Apéndice 3.C Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano adaptativo.

En el modelo gaussiano adaptativo (Sección 3.5), $\boldsymbol{\theta}_s = \mathbf{c}$ son los parámetros de señal y $\theta_m = \sigma^2$ es el único parámetro *molesto*. Calculamos en primer lugar las derivadas parciales del logaritmo de la FDP (3.87) respecto a los parámetros desconocidos

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} (e_i(-1)^i \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} e_i^2 \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \mathbf{c}) \quad (3.C.1)$$

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} = -\frac{NL}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2. \quad (3.C.2)$$

Los elementos de la matriz de información de Fisher (3.17) para los parámetros de señal son:

$$-E \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \right) = \frac{L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}, \quad (3.C.3)$$

para la varianza de ruido:

$$\begin{aligned} -E \left(\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\sigma^2)^2} \right) &= -\frac{NL}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6} \sum_{i=0}^{L-1} E \left(\left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 \right) \\ &= -\frac{NL}{2\sigma^4} + \frac{L}{\sigma^6} N\sigma^2 = \frac{NL}{2\sigma^4} \end{aligned} \quad (3.C.4)$$

y, finalmente, los términos cruzados

$$\begin{aligned} -E \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} \right) &= -E \left(\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \\ &= \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=0}^{L-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} E(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i - \frac{1}{2} e_i^2 \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{0}_{P \times 1}. \end{aligned} \quad (3.C.5)$$

Así, la matriz de Fisher es

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} & \mathbf{0}_{P \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times P} & \frac{NL}{2\sigma^4} \end{bmatrix}, \quad (3.C.6)$$

con $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{NL}{2\sigma^4}$ y $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{P \times 1}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{1 \times P}$. De ella obtenemos

- La cota de Cramér-Rao. Para cualesquiera estimadores insesgados $\hat{\mathbf{c}}$ y $\tilde{\sigma}^2$,

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{c}}} - \frac{4\sigma^2}{L} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \geq \mathbf{0} \quad (3.C.7)$$

y

$$\text{var}(\tilde{\sigma}^2) \geq \frac{2\sigma^4}{NL}. \quad (3.C.8)$$

- El estadístico del test de Wald (3.27)

$$T_W = \hat{\mathbf{c}}^T \frac{L}{4\hat{\sigma}_1^2} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \hat{\mathbf{c}} = \frac{L}{4\hat{\sigma}_1^2} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2. \quad (3.C.9)$$

- El estadístico del test de Rao (3.29). Calculamos en primer lugar

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Bigg|_{\substack{\mathbf{c}=\mathbf{0} \\ \sigma^2=\hat{\sigma}_0^2}} = \frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2} \sum_{i=0}^{L-1} e_i (-1)^i \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i = \frac{L}{4\hat{\sigma}_0^2} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}) \hat{\mathbf{c}}, \quad (3.C.10)$$

de manera que

$$\begin{aligned} T_R &= \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Bigg|_{\substack{\mathbf{c}=\mathbf{0} \\ \sigma^2=\hat{\sigma}_0^2}} \right)^T \frac{4\sigma^2}{L} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \Bigg|_{\sigma^2=\hat{\sigma}_0^2} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Bigg|_{\substack{\mathbf{c}=\mathbf{0} \\ \sigma^2=\hat{\sigma}_0^2}} \\ &= \frac{L}{4\hat{\sigma}_0^2} \hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}}, \\ &= \frac{L}{4\hat{\sigma}_0^2} \|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.C.11)$$

- El parámetro de no centralidad (3.24) de la distribución asintótica del TCVG (y de los tests de Wald y Rao) es exactamente el mismo que en el caso de que la varianza sea conocida, ya que los términos cruzados $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta})$ y $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta})$ son nulos.

$$\lambda = \mathbf{c}^T \frac{L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{c} = \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}'\|_2^2. \quad (3.C.12)$$

Apéndice 3.D Distribución exacta del TCVG gaussiano adaptativo.

El numerador de (3.107) es exactamente el estadístico (3.54) por lo que su distribución es

$$\mathfrak{N} \sim \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.D.1)$$

con $\lambda = \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}'\|_2^2$ (ver Sección 3.4.4).

En cuanto al denominador, puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma^2} &= \frac{\sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}'_i\|_2^2}{NL\sigma^2} - \frac{\frac{1}{L} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i \right\|_2^2}{NL\sigma^2} \\ &= \frac{1}{NL\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} \left(\mathbf{x}'_i^T \mathbf{x}'_i - \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} e_i e_j (-1)^{i+j} \mathbf{x}'_i^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{x}'_j \right) \end{aligned} \quad (3.D.2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{NL\sigma^2} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{x}'_i^T \mathbf{x}'_i - \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} B_{ij} \mathbf{x}'_i^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{x}'_j \right) \\ &= \frac{1}{NL\sigma^2} (tr\{\mathbf{X}'^T \mathbf{X}'\} - tr\{\mathbf{X}'^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{X}' \mathbf{B}\}) \end{aligned} \quad (3.D.3)$$

con

$$[B]_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{L} e_i^2 & i = j \\ \frac{1}{L} e_i e_j (-1)^{i+j} & i \neq j \end{cases} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{e}_a \mathbf{e}_a^T}{\mathbf{e}_a^T \mathbf{e}_a} = \frac{1}{L} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_a^T \quad (3.D.4)$$

donde se ha introducido el vector $\mathbf{e}_a = [e_0(-1)^0 e_1(-1)^1 \dots e_{L-1}(-1)^{L-1}]^T$. Las matrices \mathbf{B} y $\mathcal{P}_{\mathbf{T}'}$ son matrices de proyección ortogonales de rango 1 y P respectivamente. El denominador puede escribirse como la forma cuadrática

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{NL\sigma^2} \text{vec}(\mathbf{X}')^T \mathbf{M} \text{vec}(\mathbf{X}'), \quad (3.D.5)$$

donde $\text{vec}(\mathbf{X})$ es el vector $NL \times 1$ resultado de concatenar las columnas de la matriz $N \times L$ y

$$\mathbf{M} = \mathbb{I}_{NL} - \mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}. \quad (3.D.6)$$

donde \otimes denota el producto de Kronecker. La matriz \mathbf{M} es idempotente

$$\mathbf{M}^2 = (\mathbb{I}_{NL} - \mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}) (\mathbb{I}_{NL} - \mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}) = \mathbb{I}_{NL} - 2\mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} + \mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} = \mathbf{M} \quad (3.D.7)$$

y de rango³⁹

$$\text{rango}(\mathbf{M}) = \text{tr}(\mathbf{M}) = \text{tr}(\mathbb{I}_{NL}) - \text{tr}(\mathbf{B}) \text{tr}(\mathcal{P}_{\mathbf{T}'}) = NL - P. \quad (3.D.8)$$

Bajo \mathcal{H}_0 , $\mathbf{X} = \mathbf{W} = [\mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{L-1}]$, por lo que $\mathfrak{D} = \frac{1}{NL\sigma^2} \text{vec}(\mathbf{W}')^T \mathbf{M} \text{vec}(\mathbf{W}')$. Bajo \mathcal{H}_1 , $\mathbf{X} = \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} \mathbf{e}_a + \mathbf{W}$. Sustituyendo este valor en (3.D.2) y desarrollando la expresión encontramos también que $\mathfrak{D} = \frac{1}{NL\sigma^2} \text{vec}(\mathbf{W}')^T \mathbf{M} \text{vec}(\mathbf{W}')$. Como $\text{vec}(\mathbf{W}') \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{NL \times NL}, \sigma^2 \mathbb{I}_{NL})$, tenemos que bajo ambas hipótesis

$$NL\mathfrak{D} = NL \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma^2} = \text{vec}(\mathbf{W}')^T \mathbf{M} \text{vec}(\mathbf{W}') \sim \begin{cases} \chi^2_{NL-P} & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi^2_{NL-P} & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}. \quad (3.D.9)$$

³⁹El rango de una matriz idempotente es igual a su traza.

Salvando las constantes, tenemos el cociente entre dos formas cuadráticas que tienen una distribución ji-cuadrado. Además, el numerador y el denominador son independientes. Para demostrarlo, puede escribirse el numerador como $\mathfrak{N} = \frac{L}{4\sigma^2} \text{vec}(\mathbf{X}')^T (\mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}) \text{vec}(\mathbf{X}')$. Las distribuciones de \mathfrak{N} y $N\mathfrak{D}$ son independientes, ya que $(\mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'})\mathbf{M} = (\mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'})(\mathbf{I}_{NL} - \mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}) = \mathbf{0}$ (Teorema de independencia de normas cuadráticas). Por tanto, teniendo en cuenta las propiedades de las distribuciones F, tenemos que

$$\frac{NL - P}{NLP} l_G(\mathbf{X}) \sim \begin{cases} F_{P,NL-P} & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ F'_{P,NL-P}(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}. \quad (3.D.10)$$

con $\lambda = \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}'\|_2^2$ como parámetro de no centralidad.

El numerador y el denominador pueden interpretarse como la energía de la señal observada blanqueada proyectada en sendos subespacios. El numerador es la energía de la proyección de $\text{vec}(\mathbf{X}')$ en el subespacio de señal (definido por la matriz de proyección $\mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}$), y el denominador es energía proyectada en el subespacio ortogonal (definido por $\mathbf{M} = \mathbf{I}_{NL} - \mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}$).

Apéndice 3.E Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano no estacionario.

En el modelo gaussiano no estacionario (Sección 3.6) los parámetros de señal son $\boldsymbol{\theta}_s = \mathbf{c}$, siendo $\boldsymbol{\theta}_m = [\sigma_0^2, \dots, \sigma_{L-1}^2]$ los parámetros molestos. Las derivadas parciales del logaritmo de la FDP (3.116) respecto a los parámetros desconocidos son

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i(-1)^i}{\sigma_i^2} \left(\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right) \quad (3.E.1)$$

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_i^2} = -\frac{N}{2\sigma_i^2} + \frac{1}{2\sigma_i^4} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2. \quad (3.E.2)$$

Los elementos de la matriz de Fisher (3.17) son, para el vector de parámetros de señal

$$-E \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \right) = \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}, \quad (3.E.3)$$

para los parámetros molestos

$$-E \left(\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\sigma_i^2)^2} \right) = -\frac{N}{2\sigma_i^4} + \frac{1}{\sigma_i^6} E \left(\left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_{\mathbf{C}_w^{-1}}^2 \right) \quad (3.E.4)$$

$$= -\frac{N}{2\sigma_i^4} + \frac{1}{\sigma_i^6} N\sigma^2 = \frac{N}{2\sigma_i^4} \quad (3.E.5)$$

$$-E \left(\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2} \right) = 0, \quad (3.E.6)$$

para $i, j = 0, \dots, L - 1$. Finalmente, los términos cruzados son

$$-E\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_i^2}\right) = -E\left(\frac{\partial}{\partial \sigma_i^2} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}}\right)^T \quad (3.E.7)$$

$$= \frac{e_i(-1)^i}{2\sigma_i^4} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} E(\mathbf{x}_i) - \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \quad (3.E.8)$$

$$= \mathbf{0}_{P \times 1}, \quad (3.E.9)$$

para $i = 0, \dots, L - 1$. Por tanto, la matriz de Fisher (3.16) es

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} & \mathbf{0}_{P \times L} \\ \mathbf{0}_{L \times P} & \frac{N}{2} \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}, \frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{L-1}^2}\right) \end{bmatrix}, \quad (3.E.10)$$

donde $\text{diag}(d_0, d_1, \dots)$ denota una matriz diagonal con los elementos d_0, d_1, \dots en su diagonal principal. Las particiones son $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \sum_{i=0}^{L-1} (e_i^2 / \sigma_i^2)$ para los parámetros de señal, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{2} \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}, \frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_{L-1}^2}\right)$ para las varianzas de ruido y términos cruzados nulos $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{P \times L}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{L \times P}$. De la matriz de Fisher obtenemos:

- La cota de Cramér-Rao. Para cualesquiera estimadores insesgados $\hat{\mathbf{c}}$ y $\{\check{\sigma}_i^2\}$,

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{c}}} - \frac{4}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \geq 0, \quad (3.E.11)$$

y

$$\text{var}(\check{\sigma}_i^2) \geq \frac{2\sigma_i^4}{N}, \quad i = 0, \dots, L - 1. \quad (3.E.12)$$

- El estadístico del test de Wald (3.27)

$$T_W = \hat{\mathbf{c}}^T \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \sum_{i=0}^{L-1} e_i^2 / \check{\sigma}_i^2 \hat{\mathbf{c}} = \sum_{i=0}^{L-1} e_i^2 / \check{\sigma}_i^2 \frac{\|\hat{\mathbf{a}}'\|_2^2}{4}. \quad (3.E.13)$$

- El estadístico del test de Rao (3.29). Obtenemos primero

$$\left. \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right|_{\substack{\mathbf{c}=\mathbf{0} \\ \{\sigma_i^2\}=\{\check{\sigma}_{i,0}^2\}}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i}{\check{\sigma}_{i,0}^2} (-1)^i \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i. \quad (3.E.14)$$

$$\begin{aligned}
T_R &= \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\substack{\mathbf{c}=\mathbf{0} \\ \{\sigma_i^2\}=\{\hat{\sigma}_{i,0}^2\}}} \right)^T \frac{4}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\substack{\mathbf{c}=\mathbf{0} \\ \{\sigma_i^2\}=\{\hat{\sigma}_{i,0}^2\}}} \\
&= \frac{4}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}} \left\| \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{x}_i \frac{e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,0}^2} \right\|_{\mathbf{C}_w}^2 \\
&= \frac{4}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{x}'_i e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,0}^2} \right\|_2^2. \tag{3.E.15}
\end{aligned}$$

- El parámetro de no centralidad (3.24) de la distribución asintótica del TCVG (y de los tests de Wald y Rao) es exactamente el mismo que si se conocieran las varianzas de todos los latidos, ya que los términos cruzados $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta})$ y $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta})$ son nulos.

$$\lambda = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_0^2} \mathbf{c}^T \frac{1}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{T} \mathbf{c} = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_0^2} \frac{\|\mathbf{a}'\|_2^2}{4}. \tag{3.E.16}$$

Apéndice 3.F Distribución del CVG gaussiano adaptativo con desajustes en el modelo de AOT.

Sea la señal observada $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{L-1}]$, $\mathbf{x}_i = \frac{1}{2} e_i^{\text{obs}} \mathbf{a}^{\text{obs}} + \mathbf{w}_i$, que no se ajusta necesariamente al modelo de alternancia utilizado en el detector. Reescribimos \mathbf{X} de forma más compacta como

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{\text{obs}} \mathbf{e}_a^{\text{obs}^T} + \mathbf{W}, \tag{3.F.1}$$

siendo $\mathbf{e}_a^{\text{obs}} = [e_0^{\text{obs}} (-1)^0 \ e_1^{\text{obs}} (-1)^1 \ \dots \ e_{L-1}^{\text{obs}} (-1)^{L-1}]^T$.

El numerador del CVG expresado como en (3.107) es una forma cuadrática definida por una proyección de rango P. Por tanto (Moon y Stirling 2000, Teorema 11.2)

$$\mathfrak{N} \sim \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \tag{3.F.2}$$

con $\lambda = \frac{L}{4\sigma^2} \|k P_{\mathbf{T}'} \mathbf{a}'\|_2^2 \leq \frac{\mathcal{E}'^{\text{obs}}}{\sigma^2}$, donde $k = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{\text{obs}} e_i$ (vid. supra Sección 3.10.3). Pero el desajuste no sólo afecta al numerador. El denominador de (3.107) se ha expresado en el Apéndice 3.D como

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{NL\sigma^2} \text{vec}(\mathbf{X}')^T \mathbf{M} \text{vec}(\mathbf{X}'), \tag{3.F.3}$$

con

$$\mathbf{M} = \mathbb{I}_{NL} - \mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}. \tag{3.F.4}$$

siendo $\mathbf{B} = \frac{1}{L} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_a^T$ y $\mathbf{e}_a = [e_0(-1)^0 \ e_1(-1)^1 \ \dots \ e_{L-1}(-1)^{L-1}]^T$. La distribución de $N\mathcal{D}$ bajo \mathcal{H}_0 es χ_{NL-P}^2 , tal y como se ha señalado en el citado apéndice. Bajo \mathcal{H}_1 , tenemos que

$$\mathcal{D} = \frac{1}{NL\sigma^2} \text{vec} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T} + \mathbf{W}' \right)^T \mathbf{M} \text{vec} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T} + \mathbf{W}' \right) \quad (3.F.5)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{\sigma^2} \text{vec} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T} + \mathbf{W}' \right)^T \sim \mathcal{N}(\text{vec}(\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T}), \mathbb{I}_{NL})$, y que \mathbf{M} es una matriz de proyección de rango $NL - P$,

$$NL\mathcal{D} \sim \begin{cases} \chi_{NL-P}^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_{NL-P}^2(\lambda_D) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (3.F.6)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_D &= \frac{1}{\sigma^2} \text{vec} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T} \right)^T \mathbf{M} \text{vec} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \text{vec} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T} \right)^T \text{vec} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T} \right) - \\ &\quad \frac{1}{\sigma^2} \text{vec} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T} \right) (\mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}) \text{vec} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T} \right) \\ &= \frac{1}{4\sigma^2} \left(\text{tr}(\mathbf{e}_a^{\text{obs}} \mathbf{a}'^T \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T}) - \text{tr}(\mathbf{e}_a^{\text{obs}} \mathbf{a}'^T \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{a}' \mathbf{e}_a^{\text{obs}T} \mathbf{B}) \right) \\ &= \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}'\|_2^2 - \frac{L}{4\sigma^2} \|k \mathcal{P}_{\mathbf{T}'} \mathbf{a}'\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.F.7)$$

Salvando las constantes, el numerador y el denominador del TCVG bajo \mathcal{H}_0 son variables aleatorias ji-cuadrado centrales independientes. Bajo \mathcal{H}_1 el numerador y el denominador son proporcionales a variables ji-cuadrado no centrales e independientes (ya que $\mathbf{M}^T (\mathbf{B} \otimes \mathcal{P}_{\mathbf{T}'}) = \mathbf{0}_{NL \times NL}$). La distribución del cociente se conoce como distribución F doblemente no central $F''_{\nu_1, \nu_2}(\lambda_1, \lambda_2)$, siendo ν_1, ν_2 los grados de libertad y λ_1, λ_2 los parámetros de no centralidad del numerador y denominador respectivamente. Así,

$$\frac{NL - P}{NLP} l_G(\mathbf{X}) \sim \begin{cases} F_{P, NL-P} & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ F''_{P, NL-P}(\lambda, \lambda_D) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}. \quad (3.F.8)$$

Interpretando el numerador y el denominador del TCVG como la energía proyectada en los subespacios de señal y de ruido, tenemos que cualquier componente de alternancia que, debido a los desajustes, no proyecte en el subespacio de señal, lo hará en el del subespacio de ruido, aumentando el denominador y disminuyendo por tanto la sensibilidad del detector.

Capítulo 4

Análisis de AOT basado en modelos no gaussianos.

4.1. Introducción.

La asunción de ruido gaussiano, extensamente utilizada en la literatura, se justifica por el teorema central del límite y por la simplicidad de los desarrollos matemáticos derivados. Este planteamiento es razonable en un gran abanico de problemas de interés.

Sin embargo, hay tipos de ruido que no pueden caracterizarse como gaussianos. Por ejemplo, cuando el ruido presenta niveles muy altos de forma ocasional, es decir, cuando tiene un comportamiento más impulsivo. Estos valores atípicos (*outliers*) o espículas de ruido pueden encontrarse en las series de muestras latido a latido como, por ejemplo, las producidas por artefactos de movimiento o actividad muscular. En estos casos, crece la probabilidad de que el ruido presente valores alejados de la media, y el histograma del ruido tiende a tener colas más pesadas que las de una distribución gaussiana (la distribución se denomina entonces supergaussiana o leptocúrtica).

No sólo las características del ruido pueden desaconsejar un modelado gaussiano. En el caso del ECG, la presencia de latidos anómalos (p. ej. latidos ectópicos) produce valores atípicos en las series latido a latido. El efecto es similar al de un ruido impulsivo superpuesto al ECG de fondo. Por tanto, los latidos anómalos tienden a hacer más supergaussiana la distribución del ruido¹.

Entre las características de los EMV para el modelo gaussiano, destaca que equivalen a minimizar una función cuadrática del error² y que los estimadores de los parámetros de un modelo lineal son también lineales. A consecuencia de esto, la presencia de valores atípicos (*outliers*) o ruido impulsivo puede distorsionar gravemente la estimación de los parámetros, y por tanto, la detección de alternancias. Este efecto ya se ha observado en

¹Recuérdese que entendemos como ruido todas las componentes distintas del ECG de fondo repetitivo y de la alternancia.

²Por esta razón, los EMV para ruido gaussiano son estimadores de mínimos cuadrados.

el Capítulo 2 y constituye una importante desventaja de los métodos basados en modelos gaussianos.

El objetivo del presente capítulo es derivar metodologías robustas para el análisis de alternancias utilizando modelos no gaussianos. La hipótesis de partida en este capítulo es la siguiente: considerando en el modelo de señal distribuciones de ruido que tengan en cuenta la existencia de valores extremos, podemos derivar metodologías insensibles a la presencia de estos valores extremos. Así, en este capítulo consideraremos detectores de alternancias para modelos no gaussianos (en particular, para la familia de distribuciones gaussianas generalizadas).

Del mismo modo que la adopción del modelo gaussiano es, generalmente, fruto de un compromiso entre la adecuación del modelo a la realidad y la sencillez de su tratamiento matemático, la adopción de una determinada distribución no gaussiana no pretende constituir un modelo exacto del ruido presente en el ECG. Se busca un modelo, que siendo robusto ante los valores atípicos encontrados en el ECG, sea tratable matemáticamente. Así, la complejidad matemática que encontramos al tratar con FDP no gaussianas, va a ser un factor a tener en cuenta en el diseño de metodologías robustas. Asumiremos desde un principio que el ruido es incorrelado muestra a muestra (ruido blanco). En cuanto a la estacionariedad del mismo, estudiaremos modelos similares a los del Capítulo 3, pero donde la distribución del ruido es gaussiana generalizada.

4.2. Distribuciones gaussianas generalizadas.

Se trata de una familia de distribuciones simétricas determinadas por tres parámetros: el parámetro de localización m , que representa la media de la distribución, la desviación estándar³ de la distribución σ , y el parámetro de forma α , que mide el grado de decaimiento exponencial de las colas de la distribución, y define la forma de la misma. La FDP de una v.a. gaussiana generalizada es

$$x \sim \mathcal{GG}(m, \sigma, \alpha) \Rightarrow p(x; m, \sigma, \alpha) = \frac{\alpha \beta(\alpha)}{2 \Gamma(1/\alpha) \sigma} \exp \left(- \left| \beta(\alpha) \frac{x - m}{\sigma} \right|^\alpha \right), \alpha > 0, \quad (4.1)$$

donde $\beta(\alpha) = \sqrt{\frac{\Gamma(3/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)}}$, y $\Gamma(x)$ es la función gamma definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} \exp(-u) du. \quad (4.2)$$

La Figura 4.1 muestra algunas FDP pertenecientes a esta familia con media nula y varianza unidad ($m = 0, \sigma = 1$) y distintos valores de α . Los diferentes grados de decaimiento se aprecian mejor en las representaciones logarítmicas. Así, para $\alpha = 2$ tenemos

³En ocasiones se caracteriza la desviación por el *factor de anchura*, definido como $v = \sigma/\beta(\alpha)$.

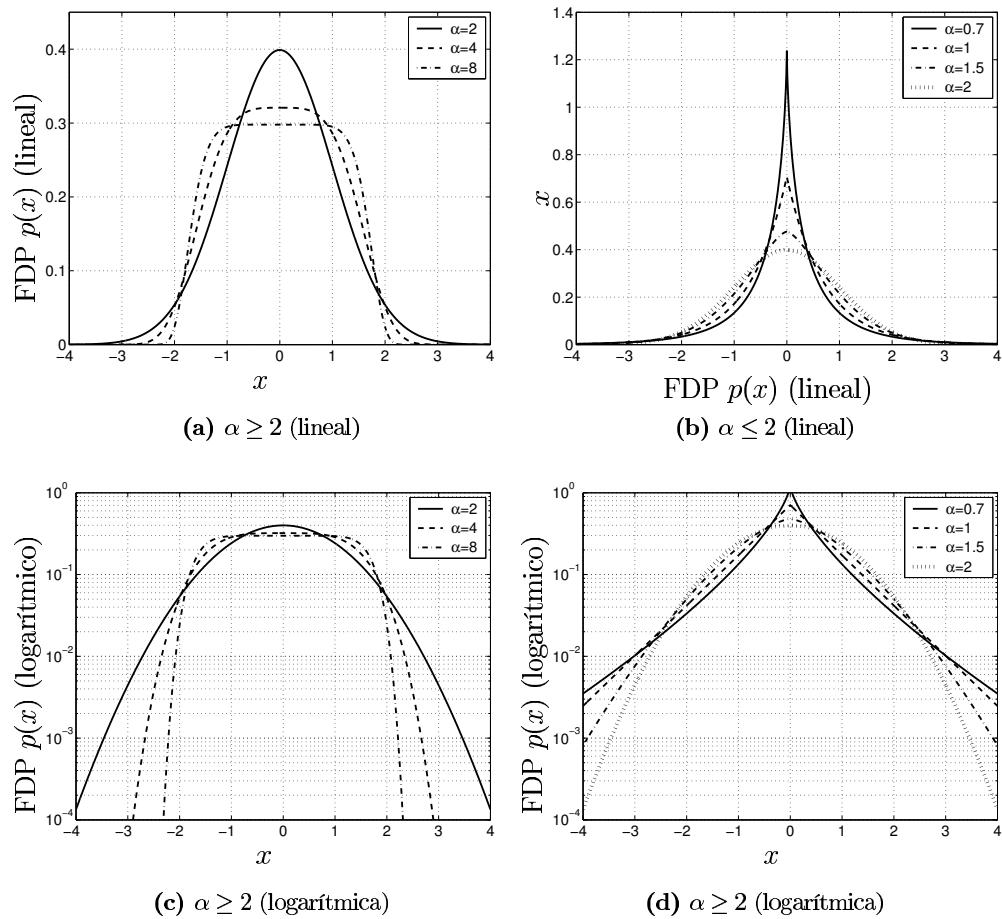


Figura 4.1: FDP de variables aleatorias gaussianas generalizadas con $m = 0$ y $\sigma = 1$, en su representación lineal (a)-(b) y logarítmica (c)-(d).

la distribución gaussiana

$$x \sim \mathcal{GG}(m, \sigma, 2) \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Rightarrow p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.3)$$

Las distribuciones con $0 < \alpha < 2$ se denominan supergaussianas o leptocúrticas y tienen un decaimiento más lento que la distribución normal. Son más picudas que la gaussiana alrededor de su valor medio, pero tienen una mayor probabilidad de que se produzcan valores alejados de la media (valores atípicos u *outliers*). Por tanto, modelan mejor los valores atípicos que se producen ocasionalmente en las señales biológicas. Un ejemplo de distribución leptocúrtica es la distribución laplaciana o doble exponencial ($\alpha = 1$)

$$x \sim \mathcal{GG}(m, \sigma, 1) \sim \mathcal{L}(m, \sigma) \Rightarrow p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x-m|\right). \quad (4.4)$$

Cuando $\alpha \rightarrow 0^+$, la FDP tiende a ser una delta $p(x) = \delta(x - m)$. Las distribuciones leptocúrticas modelan mejor la presencia de valores alejados de la media y poco frecuentes como sucede en presencia de ruido impulsivo o valores atípicos. Por tanto, es de esperar que los detectores basados en distribuciones leptocúrticas sean menos sensibles ante el ruido impulsivo (como el que se produce en las series latido a latido al analizar latidos ectópicos).

Las distribuciones con $\alpha > 2$ se denominan subgaussianas o platicúrticas y tienen un decaimiento más rápido que la distribución normal. Son bastante planas en valores cercanos a la media, pero tienen una densidad muy baja para valores alejados de la misma. Cuando $\alpha \rightarrow \infty$, la gaussiana generalizada tiende a la distribución uniforme

$$x \sim \mathcal{GG}(m, \sigma, \infty) \sim \mathcal{U}(m - \sigma/\beta, m + \sigma/\beta) \Rightarrow p(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{2\sigma} & -\frac{\sigma}{\beta} \leq x - m \leq \frac{\sigma}{\beta} \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}. \quad (4.5)$$

Todas las distribuciones de esta familia son simétricas. Por tanto, todos los momentos centrados de orden impar son nulos:

$$M_{2k+1} = E((x - m)^{2k+1}) = 0. \quad (4.6)$$

En cuanto a los momentos centrados de orden par, pueden expresarse de la siguiente forma

$$M_{2k} = E((x - m)^{2k}) = \frac{\sigma^{2k}}{\beta^{2k}(\alpha)} \frac{\Gamma(\frac{2k+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}. \quad (4.7)$$

Otros momentos de interés para el estudio de estas distribuciones son los momentos centrados absolutos, que para una distribución gaussiana generalizada son

$$M'_k = E(|x - E[x]|^k) = \frac{\sigma^k}{\beta^k(\alpha)} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}. \quad (4.8)$$

Como es evidente, los momentos centrados de orden par coinciden con los momentos centrados absolutos correspondientes.

La varianza M_2 de las distribuciones gaussianas generalizadas es σ^2 para cualquier α , y el momento de orden 4 es

$$M_4 = \sigma^4 \frac{\Gamma(\frac{5}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma^2(\frac{3}{\alpha})}. \quad (4.9)$$

Para caracterizar la estadística de orden 4 suele emplearse el coeficiente de curtosis o apuntamiento⁴

$$\kappa = \frac{M_4}{M_2^2} - 3, \quad (4.10)$$

que mide el grado de apuntamiento de una distribución (respecto a la normal), y se suele emplear como una medida de la no gaussianidad de variables aleatorias simétricas. Las variables con $\kappa \geq 0$ presentan mayor probabilidad de tener valores alejados de la media, y se dice que tienen colas pesadas (*heavy-tailed distributions*). La curtosis de una distribución gaussiana generalizada depende del parámetro de forma y su valor es

$$\kappa(\alpha) = \frac{\Gamma(\frac{5}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma^2(\frac{3}{\alpha})} - 3. \quad (4.11)$$

La Figura 4.2 muestra la evolución de la curtosis en función del parámetro de forma α .

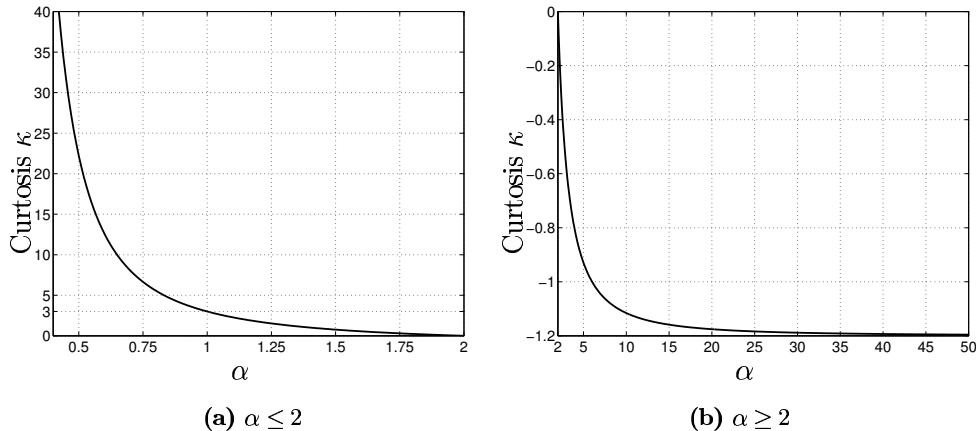


Figura 4.2: Coeficiente de curtosis κ para distribuciones (a) leptocúrticas y (b) platicúrticas en función del parámetro de forma α .

⁴En esta tesis, el coeficiente de curtosis se refiere a la *curtosis de Fisher* o *exceso de curtosis*, tal como se define en el texto. En otros textos, se utiliza la *curtosis de Pearson*, definida como $\kappa_P = M_4/M_2^2 = \kappa + 3$. La curtosis de Pearson es siempre positiva, y una distribución mesocúrtica (como la normal) tiene $\kappa_P = 3$ ($\kappa = 0$).

4.3. Estimación de mínima norma ℓ_α y M-estimadores.

Para una mejor comprensión de los métodos derivados en este capítulo, nos detenemos a estudiar las características de los estimadores de mínima norma ℓ_α (EMN ℓ_α), íntimamente ligados a la estimación de MV de señales en ruido gaussiano generalizado.

Del mismo modo que el EMV para ruido gaussiano coincide con el estimador de mínimos cuadrados, la estimación de MV de parámetros de señal en ruido gaussiano generalizado con parámetro de forma α equivale a la minimización de la norma ℓ_α del residuo.

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{w}$ un modelo para la observación \mathbf{x} , de dimensiones $I \times 1$, donde su componente de señal depende del vector de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta}$ y \mathbf{w} es un ruido de media nula. El EMN ℓ_α de $\boldsymbol{\theta}$ se define como el valor del parámetro que minimiza la norma ℓ_α del residuo

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MN}\ell_\alpha} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})\|_\alpha = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})\|_\alpha^\alpha, \quad (4.12)$$

donde $\|\mathbf{u}\|_\alpha = \left(\sum_{i=0}^{I-1} |u_i|^\alpha \right)^{1/\alpha}$ denota la norma ℓ_α de $\mathbf{u} = [u_0 \dots u_{I-1}]^T$. Si asumimos que los elementos de \mathbf{w} son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como $w[n] \sim \mathcal{G}\mathcal{G}(0, \sigma, \alpha)$, el EMV de $\boldsymbol{\theta}$ es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MV}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})\|_\alpha^\alpha = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{n=0}^{I-1} |x_i - s_i(\boldsymbol{\theta})|^\alpha. \quad (4.13)$$

A su vez, los EMN ℓ_α forman parte de una familia más amplia: los denominados M-estimadores (Huber 1981). En esta familia, se trata de minimizar una función del residuo $\rho(x_i - s_i(\boldsymbol{\theta}))$, denominada función de coste del M-estimador

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_\rho = M_\rho(x_0, \dots, x_{I-1}) = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=0}^{I-1} \rho(x_i - s_i(\boldsymbol{\theta})). \quad (4.14)$$

La función de coste en los EMN ℓ_α es $\rho(x) = |x|^\alpha$. Si $\rho(x)$ es derivable, esta condición implica

$$\sum_{i=0}^{I-1} \frac{\partial s_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \psi(x_i - s_i(\boldsymbol{\theta})) = 0, \quad (4.15)$$

donde $\psi(x) = \frac{\partial \rho(x)}{\partial x}$ es la función de influencia. La ecuación (4.15) facilita, en algunos casos, la búsqueda de la solución. La función $\psi(x)$ mide la influencia de cada muestra en la estimación del parámetro en función de la diferencia entre la muestra y el valor estimado. Así, en el estimador de mínimos cuadrados, $\rho(x) = x^2$ y $\psi(x) = 2x$, de manera que la influencia de cada dato aumenta linealmente con el valor de su error. En general la función de influencia del EMN ℓ_α es $\psi(x) = \alpha |x|^{\alpha-1} \text{sgn}(x)$, donde la función signo se define como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}. \quad (4.16)$$

Las funciones de influencia normalizadas correspondientes a los EMN ℓ_α (y por tanto a los EMV para ruido gaussiano generalizado) se representan en la Figura 4.3. Nótese que para $\alpha < 2$, las muestras con errores más altos tienden a tener menos influencia que en el estimador de mínimos cuadrados, y por tanto, los estimadores son más robustos ante valores anómalos.

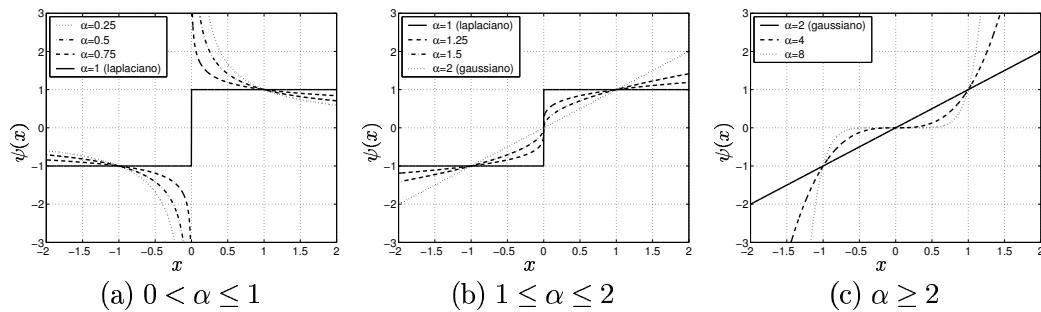


Figura 4.3: Funciones de influencia $\psi(x)$ para distintos valores del parámetro de forma α .

Una propiedad deseable es que el estimador sea único y la función $\sum_{i=0}^{I-1} \rho(x_i - s_i(\boldsymbol{\theta}))$ no tenga mínimos locales. Para ello, la función de coste $\rho(x)$ ha de ser convexa⁵, o de forma equivalente, la función de influencia $\psi(x)$ ha de ser no decreciente ($\frac{d^2\rho(x)}{dx^2} = \frac{d\psi(x)}{dx} \geq 0$). Como se observa en la Figura 4.3, los EMN ℓ_α con $\alpha < 1$ son funciones decrecientes con una discontinuidad infinita en el origen. Por tanto, la búsqueda de los EMV en modelos gaussianos generalizados con $\alpha < 1$ planteará problemas de convergencia y unicidad de la solución si se utiliza para ello algoritmos iterativos. Para $\alpha = 1$, la función criterio $\sum_{i=0}^{I-1} \rho(x_i - s_i(\boldsymbol{\theta})) = \sum_{i=0}^{I-1} |x_i - s_i(\boldsymbol{\theta})|$ no tiene mínimos locales, pero dada la característica constante por tramos de $\psi(x)$, puede suceder que el mínimo global se alcance para todo un intervalo de valores adyacentes.

Otra propiedad deseable en entornos impulsivos y con valores atípicos es que la influencia de un valor anómalo esté acotada por muy grande que éste sea. Esta propiedad se denomina B-robustez⁶. La condición necesaria y suficiente es que la función de influencia esté acotada. Aunque en general los M-estimadores de mínima norma ℓ_α con $\alpha < 2$ son más robustos que el estimador de mínimos cuadrados, el único estimador acotado dentro del paradigma EMN ℓ_α es el correspondiente a $\alpha = 1$, que utiliza el criterio de mínimo error absoluto y corresponde al EMV para ruido laplaciano.

Por estas razones y por su tratabilidad matemática, como se verá a lo largo del capítulo, haremos un énfasis especial en la distribución laplaciana. No obstante, por generalidad, las derivaciones se realizarán en general para la familia de distribuciones gaussianas generalizadas. Terminamos esta sección con un ejemplo ilustrativo.

⁵No es suficiente (aunque sí necesario) que $\rho(x)$ posea un único mínimo.

⁶Se puede definir una condición más estricta exigiendo que $\psi(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Sin embargo, esta condición es incompatible con la unicidad del estimador, pudiendo existir más de una solución.

Ejemplo 4.1 (EMN ℓ_α . M-estimadores del valor central). Deseamos estimar una magnitud A a partir de una serie de medidas $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{I-1}]^T$. El modelo de señal correspondiente es $\mathbf{x} = A + \mathbf{w}$. El EMN ℓ_α de A (es decir, el EMV asumiendo ruido gaussiano generalizado con parámetro de forma α) es

$$\hat{A} = F_\alpha(x_0, \dots, x_{I-1}) = \arg \min_A \sum_{i=0}^{I-1} |x_i - A|^\alpha. \quad (4.17)$$

La función $F_\alpha(x_0, \dots, x_{I-1})$ se denomina M-filtro especialmente cuando se aplica en forma de ventana deslizante (*vid.* (Lee y Kassam 1985)). Es fácil comprobar que el M-filtro es un filtro de media móvil cuando $\alpha = 2$ y un filtro de mediana cuando $\alpha = 1$.

Tomemos por ejemplo las observaciones $\mathbf{x} = [3,4 \ 4,6 \ 3,15 \ 4,05 \ 3,9 \ 3,6 \ 4,2 \ 5 \ 3,45]^T$. Las Figuras 4.4 (a)-(d) muestran la función criterio correspondiente a los EMN ℓ_α para $\alpha = \{0,5; 1; 1,5; 2\}$. En el caso de $\alpha = 0,5$ se observa que existen mínimos locales cuando A es igual a cada uno de los valores observados. Para $\alpha \geq 1$, la función criterio tiene un único mínimo (no hay mínimos locales). Si sustituimos una nueva observación con un error importante en la medida (por ejemplo, si x_4 pasa a valer 50), las nuevas funciones criterio son las representadas en las Figuras 4.4 (e)-(h). Se observa que para $\alpha = 2$ (estimador de mínimos cuadrados correspondiente al EMV en el modelo gaussiano), el nuevo valor afecta claramente al estimador (que es el valor medio de las observaciones), pasando de $\hat{A} = 3,93$ a $\hat{A} = 9,05$. Para $\alpha = 1,5$, la distribución correspondiente es leptocúrtica, pero el valor extremo todavía distorsiona la estimación (que pasa de 3,9 a 4,87). Para $\alpha = 1$, el estimador de mínimo error absoluto (la mediana de las observaciones) correspondiente al EMV para ruido laplaciano apenas se ve afectado por el valor atípico. Cuando $\alpha < 1$, el valor atípico afecta a la estimación en la dirección opuesta: reduciendo el valor de la misma.

4.4. ¿Es gaussiano el ruido?

Para responder a esta pregunta, necesitamos estudiar la estadística del *ruido fisiológico* presente en el ECG. En el capítulo 5 (Sección 5.3) se estudian los registros de ruido de la base de datos NOISE STRESS TEST DATABASE (NSTDB) (Moody y Mark 1990). Esta base de datos contiene tres registros de *ruido fisiológico* adquiridos mediante un sistema Holter en un sujeto con los electrodos colocados donde la actividad eléctrica del corazón era apenas perceptible. Los detalles de la base de datos se dan en la Sección 5.2.1.3. El coeficiente de curtosis medido en el registro con ruido predominante de actividad muscular se sitúa en torno a $\kappa = 7$ (téngase en cuenta, como referencia, que el coeficiente de curtosis es 0 para ruido gaussiano y 3 para ruido laplaciano). Por otro lado, el registro en el que predominan los artefactos de movimiento presenta unos valores de curtosis de entre 3 y 3,5 (según el tamaño de la ventana y el ancho de banda utilizados en la medición) en la primera derivación y de entre 1 y 1,4 en la segunda derivación.

Por tanto, podemos decir que el ruido fisiológico es esencialmente leptocúrtico: el ruido de actividad muscular supera incluso la curtosis de la distribución laplaciana. El ruido

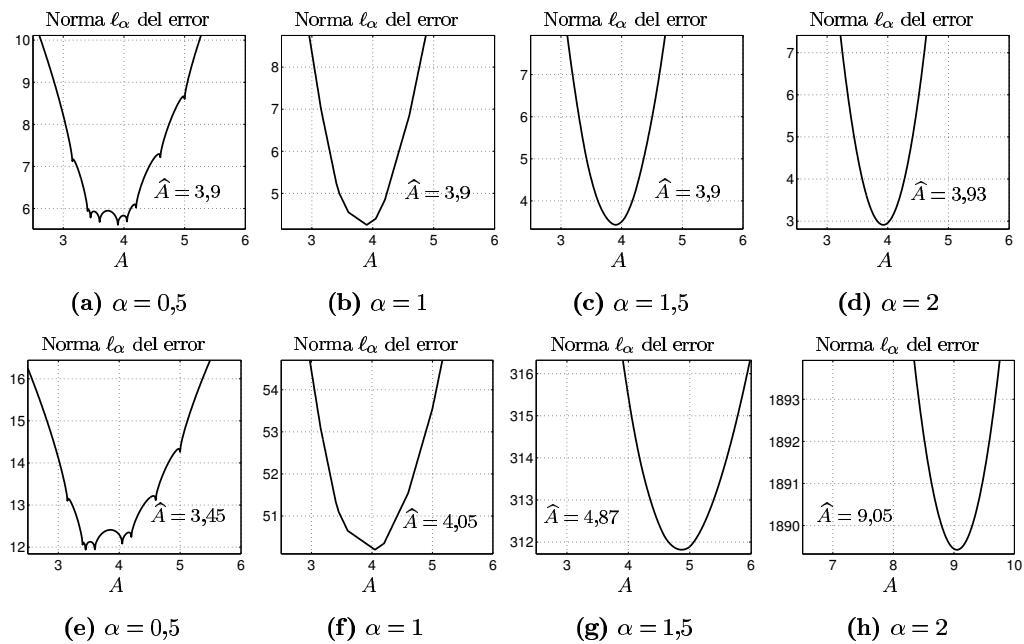


Figura 4.4: Funciones criterio a minimizar en la estimación de mínima normal ℓ_α . Gráficas (a)-(d): observación original sin valores atípicos. Gráficas (e)-(h): Observación con un valor atípico.

debido al movimiento de los electrodos es también supergausiano, aunque su curtosis está entre las de las distribuciones gaussiana y laplaciana.

4.5. Modelado de la señal observada.

Mantenemos el mismo modelo básico de la señal observada que en el Capítulo 3. Tras eliminar el ECG de fondo en la etapa de preprocesado, la matriz de complejos ST-T está formada por una posible componente alterna y el resto de componentes no deseadas que agrupamos en la denominación de ruido. Por tanto, el modelo de señal para una observación de L latidos es

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{L-1}]; \quad \mathbf{x}_i = \underbrace{\frac{1}{2} e_i \mathbf{a}}_{\mathbf{a}_i} (-1)^i + \mathbf{w}_i, \quad i = 0, \dots, L-1, \quad e_i \neq 0. \quad (4.18)$$

y el test de hipótesis asociado al problema de detección es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0: \quad & \mathbf{x}_i = \mathbf{w}_i \\ \mathcal{H}_1: \quad & \mathbf{x}_i = \frac{1}{2} e_i \mathbf{a} (-1)^i + \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad i = 0 \dots L-1. \quad (4.19)$$

La señal alterna obedece al modelo lineal

$$\mathbf{a} = \mathbf{T} \mathbf{c}, \quad (4.20)$$

donde $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_{P-1}]$ es una matriz $N \times P$ de rango completo y conocida, y $\mathbf{c} = [c_0 \dots c_{P-1}]^T$ es un vector $P \times 1$ de parámetros desconocidos. Tanto $\{e_i\}$ como \mathbf{T} se suponen conocidos *a priori*. Por tanto, determinan las características del modelo y, en consecuencia, de los detectores y estimadores de él derivados.

En los modelos de este capítulo se asume que las muestras de ruido $w_i[n]$ son variables aleatorias independientes y distribuidas según una distribución gaussiana generalizada, de media nula, varianza σ_i^2 y parámetro de forma α . Por tanto,

$$w_i[n] \sim \mathcal{GG}(0, \sigma_i, \alpha), \quad i = 0, \dots, L-1, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (4.21)$$

$$E(\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T) = \delta_{ij} \sigma_i^2 \mathbb{I}_N, \quad i, j = 0, \dots, L-1. \quad (4.22)$$

El parámetro de forma es una característica del modelo y determina la forma de los estimadores y detectores correspondientes. En cuanto al nivel de ruido, estudiamos tres modelos paralelos a los estudiados en el Capítulo 3. En la Sección 4.6 se considera que el ruido es estacionario ($\sigma_i = \sigma$), y que el nivel de ruido es conocido (**modelo gaussiano generalizado estacionario**). En la Sección 4.7 se asume que σ es un parámetro desconocido, lo que da lugar a un **modelo gaussiano generalizado adaptativo**. Por último, consideramos en la Sección 4.8 que el nivel de ruido, además de ser desconocido, puede variar de latido en latido. Se trata entonces de un **modelo gaussiano generalizado no estacionario**. Dentro de los tres modelos estudiaremos de manera especial los modelos laplacianos ($\alpha = 1$).

4.6. Modelo gaussiano generalizado estacionario.

4.6.1. Planteamiento.

Consideremos el siguiente modelo de señal observada

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{L-1}]; \quad \mathbf{x}_i = \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{T} \mathbf{c}}_{\mathbf{a}_i} e_i (-1)^i + \mathbf{w}_i, \quad i = 0, \dots, L-1, \quad (4.23)$$

$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_{P-1}]$ (matriz $N \times P$)
 $\mathbf{c} = [c_0 \dots c_{P-1}]^T$ (vector $P \times 1$),

donde las muestras de ruido son independientes y siguen una distribución gaussiana generalizada de media nula y varianza σ^2 conocida $w_i[n] \sim \mathcal{G}\mathcal{G}(0, \sigma, \alpha)$. Los elementos del vector \mathbf{c} son los únicos parámetros desconocidos.

La FDP de la matriz observada es

$$p(\mathbf{X}; \mathbf{c}) = \left(\frac{\alpha \beta(\alpha)}{2 \Gamma(1/\alpha) \sigma} \right)^{NL} \exp \left(- \left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma} \right)^\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right), \quad (4.24)$$

y el problema de detección se reduce al test de parámetros

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : \mathbf{c} &= \mathbf{0} \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{c} &\neq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.6.2. EMV y TCVG.

El detector TCVG correspondiente es

$$L_G(\mathbf{X}) = \frac{p(\mathbf{X}; \hat{\mathbf{c}}, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{X}; \mathcal{H}_0)} \quad (4.26)$$

$$= \exp \left[- \left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma} \right)^\alpha \left(\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha - \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i \right\|_\alpha^\alpha \right) \right] \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_0} \gamma. \quad (4.27)$$

El EMV de \mathbf{c} debe minimizar el menos logaritmo de la función de verosimilitud bajo \mathcal{H}_1

$$\begin{aligned} -\ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \mathcal{H}_1) &= NL(\ln 2\Gamma(1/\alpha)\sigma - \ln \alpha \beta(\alpha)) \\ &\quad + \left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma} \right)^\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dado que el primer término es constante, el EMV debe minimizar la norma ℓ_α del residuo. Se trata pues de un EMN ℓ_α

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha. \quad (4.29)$$

Teniendo en cuenta la propiedad de invariancia del EMV (Kay 1993, Teorema 7.4, p. 185), el EMV de \mathbf{a} es

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \langle \mathbf{T} \rangle} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{a} e_i (-1)^i \right\|_{\alpha}^{\alpha}. \quad (4.30)$$

La condición de máxima verosimilitud para cada coeficiente c_p es

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \mathcal{H}_1)}{\partial c_p} \Big|_{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}}} &= \left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma} \right)^{\alpha} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial \left| x_i[n] - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{P-1} t_j[n] c_j e_i (-1)^j \right|^{\alpha}}{\partial c_p} \Big|_{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}}} \\ &= -\frac{1}{2\sigma^{\alpha}} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{N-1} t_p[n] g_{\alpha} \left(x_i[n] - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{P-1} t_j[n] \hat{c}_j e_i (-1)^j \right) e_i (-1)^i = 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

con $p = 0, \dots, P-1$. Para simplificar la expresión se ha definido la función no lineal $g_{\alpha}(x)$

$$g_{\alpha}(x) = \alpha \beta^{\alpha}(\alpha) |x|^{\alpha-1} \operatorname{sgn}(x), \quad (4.32)$$

La transformación no lineal $g_{\alpha}(x)$ es proporcional a la función de influencia del EMN ℓ_{α} correspondiente (Figura 4.3). Como ya se ha señalado, la búsqueda del EMV para $\alpha < 1$ (equivalente al EMN ℓ_{α}) puede ser problemática, dada la discontinuidad infinita de $g_{\alpha}(x)$ en el origen, así como la presencia de mínimos locales en la función criterio (que corresponden a máximos locales de la verosimilitud). Teniendo en cuenta esta circunstancia, la distribución estadística laplaciana, correspondiente a $\alpha = 1$, adquiere una significación especial, ya que, además de ser una distribución B-robusta, se trata de la distribución gaussiana generalizada con curtosis más alta que permite una búsqueda del EMV relativamente sencilla.

Las ecuaciones de verosimilitud pueden expresarse de forma compacta como

$$-\frac{1}{2\sigma^{\alpha}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_{\alpha} \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T}\hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right) e_i (-1)^i = \mathbf{0}_{P \times 1}. \quad (4.33)$$

donde $\mathbf{g}_{\alpha}(\mathbf{x}) = [g_{\alpha}(x[0]) \ g_{\alpha}(x[1]) \ \dots \ g_{\alpha}(x[N-1])]^T$. Nótese que la maximización de los P coeficientes de \mathbf{c} está acoplada. La optimización sólo está desacoplada si \mathbf{T} es diagonal. Manipulando la expresión, podemos escribir

$$-\frac{1}{(2\sigma)^{\alpha}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_{\alpha} \left(\underbrace{2\mathbf{x}_i (-1)^i}_{\zeta_i} / e_i - \underbrace{\mathbf{T}\hat{\mathbf{c}}}_{\hat{\mathbf{a}}} \right) |e_i|^{\alpha} = \mathbf{0}_{P \times 1}. \quad (4.34)$$

donde $\zeta_i = 2\mathbf{x}_i (-1)^i$ es el vector de las series latido a latido demoduladas y $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{c}}$ es el EMV de la señal alterna.

Ya hemos visto la solución analítica para $\alpha = 2$ (Sección 3.4.2). En general, para otros valores de α la búsqueda de $\hat{\mathbf{c}}$ (ó $\hat{\mathbf{a}}$) debe realizarse numéricamente (*vid. infra* Sección 4.6.4). En la Sección 4.6.5 se estudia el caso especial $\alpha = 1$ (distribución laplaciana) en el que, en algunas condiciones, puede encontrarse una expresión analítica cerrada.

Sustituyendo $\hat{\mathbf{c}}$ en (4.27) y tomando logaritmos obtenemos el siguiente estadístico TCVG

$$l_G(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) = 2 \left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma} \right)^\alpha \left(\sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_i\|_\alpha^\alpha - \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right). \quad (4.35)$$

No podemos llegar más lejos analíticamente, sin particularizar α en un valor concreto. El esquema general del análisis TCVG/EMV se muestra en la Figura 4.5.

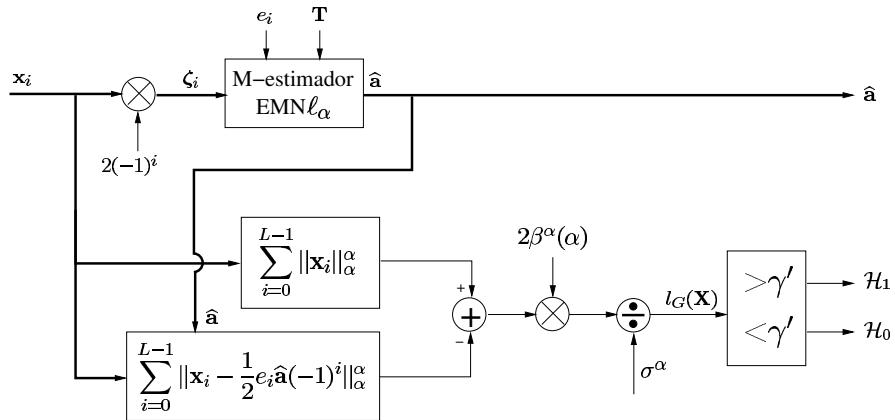


Figura 4.5: Esquema del análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano generalizado estacionario.

Nótese que $\hat{\mathbf{a}}$ es el vector que maximiza la verosimilitud dentro del subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$. Por tanto, el EMV $\hat{\mathbf{a}}$, y el TCVG $l_G(\mathbf{X})$ son invariantes respecto a las posibles bases de un mismo subespacio.

4.6.3. Matriz de información de Fisher. Tests de Wald y de Rao.

En el Apéndice 4.A se deriva la matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano generalizado. Su expresión es

$$\mathbf{I}(\mathbf{c}) = E \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right) = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T}, \quad (4.36)$$

donde G_α es una constante dependiente del parámetro de forma α

$$G_\alpha = \alpha^2 \frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha}) \Gamma(2 - \frac{1}{\alpha})}{\Gamma^2(1/\alpha)}. \quad (4.37)$$

A partir de ella pueden derivarse los tests de Wald (3.27) y de Rao (3.29) para el modelo gaussiano generalizado estacionario. El test de Wald está basado en el estadístico

$$T_W(\mathbf{X}) = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2. \quad (4.38)$$

Por tanto, el test de Wald decide en función de la RER de la señal estimada, de forma similar al TCVG para ruido gaussiano estacionario (3.54). La diferencia radica en la forma de calcular el EMV $\hat{\mathbf{a}}$. Dicho estimador debe, en el caso general, calcularse numéricamente (Sección 4.6.4). El esquema de este detector se representa en la Figura 4.6.

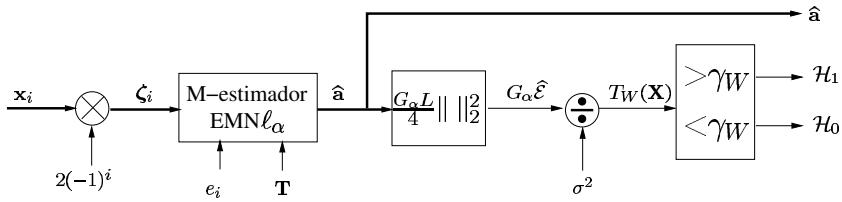


Figura 4.6: Esquema del test de Wald para el modelo gaussiano generalizado estacionario.

El estadístico del test de Rao es

$$T_R(\mathbf{X}) = \frac{L}{4G_\alpha \sigma^{2\alpha-2}} \left\| \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i \right\|_2^2. \quad (4.39)$$

La principal ventaja de este test es su sencillez, ya que no se precisa realizar ningún tipo de estimación numérica. El estadístico de Rao equivale, salvo constantes, al CVG gaussiano estacionario (3.54), aplicado sobre la transformación no lineal $\mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i)$ de las muestras observadas. De forma similar al TCVG gaussiano, puede reducirse la complejidad utilizando una etapa de reducción de datos. Denominando $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}^{\alpha T} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i)$ a los coeficientes del vector $\mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i)$ en una base ortonormal $\mathbf{T}^{\alpha T} = \mathbf{T}(\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1/2}$ del subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$ y aplicando el Teorema de Parseval, el TCVG puede escribirse como

$$T_R(\mathbf{X}) = \frac{L}{4G_\alpha \sigma^{2\alpha-2}} \left\| \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{y}_i e_i (-1)^i \right\|_2^2 \begin{cases} \geq \gamma_R & \mathcal{H}_1 \\ \leq \gamma_R & \mathcal{H}_0 \end{cases} \quad (4.40)$$

Por tanto, el test de Rao puede descomponerse en una transformación no lineal aplicada a los datos observados, seguida de una etapa lineal de reducción de datos y una etapa de análisis similar, salvo constantes, a la del TCVG gaussiano. La Figura 4.7 muestra un posible esquema del test de Rao.

Las funciones $g_\alpha(x)$ normalizadas para distintos parámetros de forma se han representado previamente en la Figura 4.3. Nótese que en el caso laplaciano ($\alpha = 1$), $g_1(x)$ es la función signo. Esto simplifica en gran medida el detector, ya que el estadístico depende únicamente del signo de la señal observada (**detector de signo**).

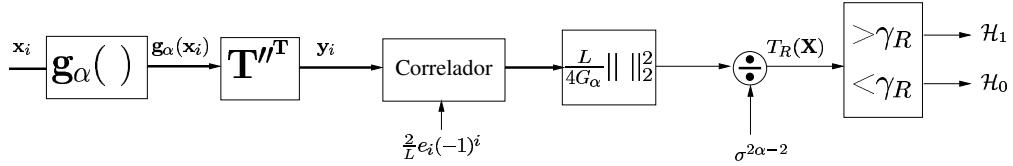


Figura 4.7: Esquema del test de Rao para el modelo gaussiano generalizado estacionario.

El test de Rao puede expresarse también como una RER

$$T_R(\mathbf{X}) = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \|\hat{\mathbf{a}}_R\|_2^2 \quad (4.41)$$

donde

$$\hat{\mathbf{a}}_R = \frac{2}{G_\alpha \sigma^{\alpha-2} L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) e_i(-1)^i. \quad (4.42)$$

Denominaremos estimador de Rao a $\hat{\mathbf{a}}_R$, ya que cumple en el test de Rao una función equivalente a la del EMV en el test de Wald (*cfr.* (4.41) y (4.38)).

4.6.4. Cálculo numérico del EMV.

Aplicando el método de puntuación de Fisher (3.137) encontramos la siguiente iteración en la búsqueda del EMV

$$\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)} = \hat{\mathbf{c}}_{(r)} + \frac{2}{G_\alpha L \sigma^{\alpha-2}} \sum_{i=0}^{L-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i(-1)^i \right) e_i(-1)^i \Big|_{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}}_{(r)}}, \quad (4.43)$$

o, de forma equivalente

$$\hat{\mathbf{a}}_{(r+1)} = \hat{\mathbf{a}}_{(r)} + \frac{2}{G_\alpha L \sigma^{\alpha-2}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r)} e_i(-1)^i \right) e_i(-1)^i. \quad (4.44)$$

Nótese que el valor de $\hat{\mathbf{a}}$ en las sucesivas iteraciones está restringido al subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$ y que dichos valores no dependen de la base concreta del subespacio utilizado en el modelo.

Como se ha visto en la Sección 4.2, el menos logaritmo de la verosimilitud (o la norma ℓ_α del residuo) no tiene mínimos locales para $\alpha \geq 1$, por lo que si se llega a la convergencia, ésta se producirá en el mínimo global. No obstante, cuando $\hat{\mathbf{a}}_{(r)}$ se approxima al EMV el algoritmo previo puede presentar problemas de convergencia cíclica (es decir, el estimador se desplaza cíclicamente entre varios valores en torno a la solución de MV). Este efecto se observa especialmente cuando α se acerca al valor $\alpha = 1$, y puede solucionarse multiplicando el término de actualización por una constante positiva $\mu_r \leq 1$, cuyo valor se reduce al acercarse a la solución. Una posible estrategia consiste en calcular en cada

paso la norma ℓ_α del residuo, y reducir la constante de actualización μ_r en el momento en que el residuo deja de disminuir de un paso al siguiente.

El Algoritmo 4.1 muestra el procedimiento iterativo basado en el método de puntuación de Fisher con la modificación citada. El estimador se puede iniciar asignándole el valor de un estimador más sencillo, como el de mínimos cuadrados, o sencillamente $\hat{\mathbf{a}}_{(0)} = \mathbf{0}_{N \times 1}$. Nótese que en este caso, la estimación en la primera iteración es $\hat{\mathbf{a}}_{(1)} = \frac{2}{G_\alpha L \sigma^{\alpha-2}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_T \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i$, expresión que coincide con lo que hemos dado en llamar estimador de Rao (4.42).

```

1: INICIO:  $r = 0$ ,  $\mu_{(0)} = 1$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_{(0)} \in \langle \mathbf{T} \rangle$ .
    $J_{(0)} = \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(0)} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha$ .
2:  $r = r + 1$ .
3: ACTUALIZACIÓN DE  $\hat{\mathbf{a}}$ :
   
$$\begin{cases} \Delta \mathbf{a} = \mu_{(r-1)} \frac{2}{G_\alpha L \sigma^{\alpha-2}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_T \mathbf{g}_\alpha \left( \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r-1)} e_i (-1)^i \right) e_i (-1)^i \\ \hat{\mathbf{a}}_{(r)} = \hat{\mathbf{a}}_{(r-1)} + \Delta \mathbf{a}. \end{cases}$$

4: EVALUACIÓN DE LA NORMA  $\ell_\alpha$ :  $J_{(r)} = \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r)} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha$ .
5: SI  $J_{(r)} \geq J_{(r-1)}$ ,
    $\mu_{(r)} = \mu_{(r-1)}/2$ ,
    $\hat{\mathbf{a}}_{(r)} = \hat{\mathbf{a}}_{(r-1)}$ ,
    $J_{(r)} = J_{(r-1)}$ .
   SI NO
    $\mu_{(r)} = \mu_{(r-1)}$ .
   FIN
6: REPETIR PASOS 2-5 HASTA QUE  $\|\Delta \mathbf{a}\| < \epsilon$ .
7:  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{(r)}$ .

```

Algoritmo 4.1: Algoritmo basado en el método de puntuación de Fisher para la obtención de los EMV de \mathbf{a} bajo \mathcal{H}_1 (EMN ℓ_α) en el modelo gaussiano generalizado estacionario.

4.6.5. Modelo laplaciano ($\alpha = 1$).

Estudiamos en particular el caso del ruido laplaciano ($\alpha = 1$). Esta distribución es supergaussiana, con curtosis $\kappa = 3$, y permite la derivación analítica de estimadores de MV y detectores TCVG tratables matemáticamente.

El EMV es el estimador de mínima norma ℓ_1

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{c}} &= \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\| \\ &= \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} |e_i| \left\| \zeta_i / e_i - \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} \right\|\end{aligned}\quad (4.45)$$

y la condición de máxima verosimilitud (4.34) se reduce a

$$-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{T}^T \mathbf{sgn}(\zeta_i / e_i - \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}}) |e_i| = \mathbf{0}_{N \times 1}, \quad (4.46)$$

donde $\mathbf{sgn}(\mathbf{x})$ es un vector resultado de aplicar la función $\text{sgn}(\cdot)$ a los elementos de \mathbf{x} .

Las iteraciones del algoritmo de puntuación de Fisher vienen dadas por

$$\hat{\mathbf{a}}_{(r+1)} = \hat{\mathbf{a}}_{(r)} + \frac{\sigma}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{sgn} \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r)} e_i (-1)^i \right) e_i (-1)^i. \quad (4.47)$$

La actualización del EMV en cada iteración se produce en la dirección determinada por la proyección en el subespacio de señal del vector de signos del residuo del EMV anterior.

El estadístico del TCVG laplaciano es

$$\begin{aligned}l_G(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_i\|_1 - \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}} e_i (-1)^i \right\|_1 \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{L-1} |x_i[n]| - \sum_{i=0}^{L-1} \left| x_i[n] - \frac{1}{2} \hat{a}[n] e_i (-1)^i \right| \right).\end{aligned}\quad (4.48)$$

El estadístico (4.48) corresponde a un **detector laplaciano de subespacio**, ya que se trata del equivalente en ruido laplaciano del detector de subespacio (3.54).

Un caso particular interesante lo encontramos si no se restringe la morfología que puede tener la alternancia (**detector laplaciano de energía**). Tomando la base canónica $\mathbf{T} = \mathbf{I}_N$, encontramos que los parámetros desconocidos se hallan desacoplados, de manera que se puede estimar por separado la alternancia en cada serie. Así,

$$\begin{aligned}\hat{a}[n] &= \arg \min_{a[n]} \sum_{i=0}^{L-1} \left| x_i[n] - \frac{1}{2} a[n] e_i (-1)^i \right| \\ &= \arg \min_{a[n]} \sum_{i=0}^{L-1} |e_i| \left| \zeta_i[n] / e_i - a[n] \right|.\end{aligned}\quad (4.49)$$

La condición de máxima verosimilitud en la muestra n -ésima se obtiene igualando a cero la derivada parcial del logaritmo de la verosimilitud con respecto a la amplitud de

cada muestra: $J(a[n]) = \frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{a}, \mathcal{H}_1)}{\partial a[n]}$. Así, $\hat{a}[n]$ ha de cumplir

$$\begin{aligned} J(a[n])|_{a[n]=\hat{a}[n]} &= -\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sum_{i=0}^{L-1} |e_i| \operatorname{sgn}(\zeta_i[n]/e_i - \hat{a}[n]) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \left(\sum_{i; \zeta_i[n]/e_i > \hat{a}[n]} |e_i| - \sum_{i; \zeta_i[n]/e_i < \hat{a}[n]} |e_i| \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

La solución de máxima verosimilitud puede identificarse con la definición⁷ de la mediana de los $\{\zeta_i[n]/e_i\}$ ponderada por $\{|e_i|\}$ (Yin *et al.* 1996)

$$\hat{a}[n] = \text{mediana} \left(|e_0| \diamond \frac{\zeta_0[n]}{e_0}, |e_1| \diamond \frac{\zeta_1[n]}{e_1}, \dots, |e_{L-1}| \diamond \frac{\zeta_{L-1}[n]}{e_{L-1}} \right). \quad (4.51)$$

La función $J(a[n])$ es constante por tramos y creciente, por lo que puede existir un intervalo de valores en que $J(a[n])=0$. En ese caso existe un intervalo de soluciones de máxima verosimilitud. También es posible que el cruce por cero de $J(a[n])$ se sitúe en una discontinuidad. El EMV es entonces el punto de discontinuidad en el que la función salta de un valor negativo a un valor positivo⁸.

El estadístico TCVG $l_G(\mathbf{X})$ puede escribirse como

$$l_G(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{n=0}^{N-1} T_n \quad (4.52)$$

donde los T_n son estadísticos calculados en cada serie de forma independiente

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=0}^{L-1} |x_i[n]| - \sum_{i=0}^{L-1} \left| x_i[n] - \frac{1}{2} \hat{a}[n] e_i (-1)^i \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{L-1} |e_i| (|\zeta_i[n]/e_i| - |\zeta_i[n]/e_i - \hat{a}[n]|) \right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

4.6.5.1. Caso particular: modelo de AOT estacionaria.

Cuando no se conoce a priori la evolución de la alternancia, es razonable considerar que la alternancia es estacionaria en la ventana de análisis $e_i = 1, i = 0, \dots, L-1$. En

⁷La mediana ponderada $x_{\text{med},w} = \text{mediana}(w_0 \diamond x_0, \dots, w_{L-1} \diamond x_{L-1})$ con $w_i \geq 0$ y $S = \sum_i w_i > 0$ es un elemento de $\{x_i, i = 0, \dots, L-1\}$ tal que la suma S_+ de los pesos w_i asociados a los elementos $x_i > x_{\text{med},w}$ y suma S_- de los pesos w_i asociados a los elementos $x_i < x_{\text{med},w}$ sean ambas menores o iguales de $0,5S$. Como máximo dos valores distintos de $\{x_i\}$ pueden cumplir esta condición. En ese caso, cualquier valor en el intervalo abierto entre los dos elementos es una solución de máxima verosimilitud, y por tanto, equivalente desde el punto de vista de detección. Desde el punto de vista de la estimación, es preferible utilizar una media de los dos valores.

⁸Es decir, $\lim_{a[n] \rightarrow \hat{a}[n]-} J(a[n]) < 0$ y $\lim_{a[n] \rightarrow \hat{a}[n]+} J(a[n]) > 0$.

en este caso, el EMV $\hat{a}[n]$ es el valor mediano de la serie demodulada (operador mediana convencional)

$$\hat{a}[n] = \text{mediana}(1 \diamond \zeta_0[n], \dots, 1 \diamond \zeta_{L-1}[n]) = \text{mediana}(\zeta_0[n], \dots, \zeta_{L-1}[n]). \quad (4.54)$$

En este caso, tenemos que $l_G(\mathbf{X}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{n=0}^{N-1} T_n$ y

$$T_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{L-1} (|\zeta_i[n]| - |\zeta_i[n] - \hat{a}[n]|) \right).$$

Manipulando y reordenando los términos de T_n , tenemos

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \sum_{i; \zeta_i[n] < \hat{a}[n]} (|\zeta_i[n]| + \zeta_i[n] - \hat{a}[n]) + \frac{1}{2} \sum_{i; \zeta_i[n] \geq \hat{a}[n]} (|\zeta_i[n]| - \zeta_i[n] + \hat{a}[n]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i; \zeta_i[n] < \hat{a}[n]} (|\zeta_i[n]| + \zeta_i[n]) + \frac{1}{2} \sum_{i; \zeta_i[n] > \hat{a}[n]} |e_i| (|\zeta_i[n]| - \zeta_i[n]) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i; \zeta_i[n] = \hat{a}[n]} |\zeta_i[n]| + \underbrace{\frac{1}{2} \hat{a}[n] \sum_{i=0}^{L-1} \text{sgn}(\zeta_i[n] - \hat{a}[n])}_{C_n=0}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

El término C_n es nulo por la propia definición de la mediana. De los tres términos restantes, cuando $\hat{a}[n] < 0$, el primer sumatorio es nulo, y en el segundo sólo contribuyen de forma no nula los términos $\zeta_i[n]$ negativos. Si, por el contrario, $\hat{a}[n] > 0$, sólo contribuyen de forma no nula los $\zeta_i[n]$ negativos del primer sumatorio, siendo nula la contribución del segundo. Así, podemos escribir

$$T_n = \begin{cases} \sum_{i; 0 \leq \zeta_i[n] < \hat{a}[n]} |2x_i[n](-1)^i| + \sum_{i; \zeta_i[n] = \hat{a}[n]} |x_i[n](-1)^i| & \text{si } \hat{a}[n] > 0 \\ \sum_{i; \hat{a}[n] < \zeta_i[n] < 0} |2x_i[n](-1)^i| + \sum_{i; \zeta_i[n] = \hat{a}[n]} |x_i[n](-1)^i| & \text{si } \hat{a}[n] < 0 \\ 0 & \text{si } \hat{a}[n] = 0 \end{cases}. \quad (4.56)$$

Nótese que la primera componente es la suma de los valores absolutos de la serie demodulada $\{\zeta_i[n]\}$ con valores entre 0 y la mediana de la misma $\hat{a}[n]$. Si alguno de los valores de la serie $\zeta_i[n]$ coincide con $\hat{a}[n]$, debe sumarse la mitad del valor absoluto de la muestra demodulada coincidente. Por tanto, las muestras cuyo valor absoluto sea mayor que el de la mediana o bien tengan signo contrario a la misma (una vez demoduladas) no contribuyen al estadístico de detección. Así, el TCVG es prácticamente insensible a la presencia de valores extremos. Si L es par, el TCVG se reduce a

$$T_n = \begin{cases} \sum_{i; 0 \leq \zeta_{i,n} < \hat{a}[n]} |2x_i[n](-1)^i| & \text{si } \hat{a}[n] > 0 \\ \sum_{i; \hat{a}[n] < \zeta_{i,n} < 0} |2x_i[n](-1)^i| & \text{si } \hat{a}[n] < 0 \\ 0 & \text{si } \hat{a}[n] = 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

que es el estadístico propuesto en (Martínez y Olmos 2002, 2003).

4.6.6. Prestaciones de los detectores.

Según el Teorema 3.3 (pág 68), los detectores CVG, de Wald y de Rao derivados en las secciones previas son asintóticamente equivalentes, y sus estadísticos se distribuyen asintóticamente como

$$l_G(\mathbf{X}) \stackrel{a}{\sim} T_W(\mathbf{X}) \stackrel{a}{\sim} T_R(\mathbf{X}) \stackrel{a}{\sim} \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (4.58)$$

donde

$$\lambda = \frac{LG_\alpha}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}\|_2^2 = G_\alpha \frac{\mathcal{E}}{\sigma^2} \quad (4.59)$$

es el parámetro de no centralidad, obtenido a partir de la matriz de información de Fisher (4.36) (*vid.* Apéndice 4.A para la derivación de λ). Éste puede expresarse en función de la RSR como

$$\lambda = G_\alpha NL\eta. \quad (4.60)$$

En el caso gaussiano ($\alpha = 2$), ya se ha visto que $\lambda = NL\eta$ ($G_\alpha = 1$). En el resto de distribuciones, G_α puede interpretarse como la ganancia en detectabilidad debida a la no gaussianidad del ruido. La Figura 4.8 representa el valor de G_α en función del parámetro de forma. Se observa que $G_\alpha \geq 1$, alcanzándose el mínimo para ruido gaussiano (0 dB). La ganancia obtenida es mayor cuanto más se aleja el ruido de la gaussianidad. En concreto, la ganancia en ruido laplaciano es de $G_\alpha = 2$ (3 dB).

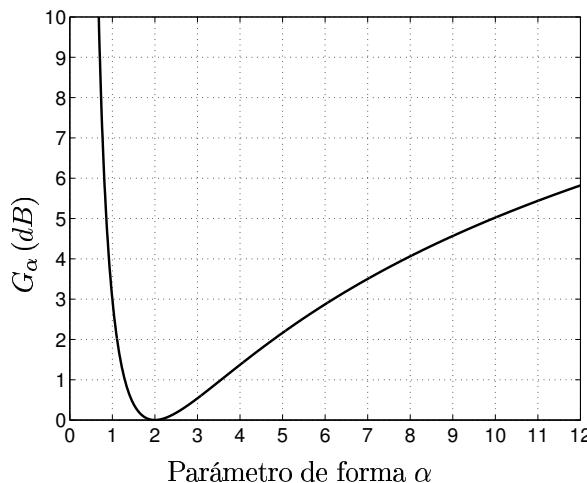


Figura 4.8: Ganancia G_α (en dB) debida a la no gaussianidad del ruido.

Así, una señal con RSR η en ruido gaussiano generalizado con parámetro de forma α es tan detectable como una señal con una RSR de $G_\alpha\eta$ en ruido gaussiano (asumiendo que se ha alcanzado el comportamiento asintótico). En el caso gaussiano, como se ha visto en

la Sección 3.4.4, la distribución asintótica es también válida para tamaños finitos, pero las prestaciones para tamaño finito pueden ser algo inferiores en el resto de distribuciones.

Si se aplica el detector gaussiano estacionario a señales en ruido gaussiano generalizado con parámetro de forma α tenemos que, asintóticamente,

$$l_G(\mathbf{X}) = \mathcal{Z} \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases} . \quad (4.61)$$

con $\lambda = \frac{L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}\|_2^2 = NL\eta$. Para demostrarlo, basta con expresar el TCVG gaussiano para ruido blanco como $l_G(\mathbf{X}) = \mathbf{z}^T \mathbf{P}_T \mathbf{z}$, con $\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 L}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{x}_i e_i (-1)^i$. El teorema central del límite asegura que, aunque el ruido no sea gaussiano, \mathbf{z} se distribuye asintóticamente como $\mathcal{N}\left(\frac{\sqrt{L}}{2\sigma} \mathbf{T}\mathbf{c}, \mathbb{I}_{N \times N}\right)$. Así, para un ruido gaussiano generalizado con parámetro de forma α , G_α puede interpretarse como la ganancia del TCVG *adaptado* a la distribución de ruido respecto al TCVG gaussiano.

Ejemplo 4.2 (Detector laplaciano estacionario). En este ejemplo estudiamos el comportamiento de los detectores para ruido laplaciano con N y L finitos.

Para estimar experimentalmente la P_{FA} exacta con ventanas de tamaño finito se han realizado simulaciones de Monte Carlo (con el modelo de señal correspondiente a \mathcal{H}_0) con $N = 48$ y distintos tamaños de la ventana de análisis. Se ha medido la P_{FA} exacta de los detectores laplacianos del CVG, de Wald y de Rao y para el detector TCVG gaussiano, utilizando el umbral $\gamma = Q_{\chi_P^2}(0,05)$ que proporciona asintóticamente una $P_{FA} = 0,05$. Se ha simulado en todos los casos ruido laplaciano (10000 realizaciones de \mathbf{X} por cada punto representado). En la Figura 4.9 se muestran los resultados para $P = 48$ (a) y $P = 6$ (b). Se observa cómo la P_{FA} del test de Wald es claramente mayor que la asintótica, alcanzándose esta sólo con ventanas de análisis de duración mayor de 512 latidos. El TCVG tiene una P_{FA} ligeramente mayor que la asintótica. La convergencia se alcanza cuando la duración de la ventana es de $L = 128$ latidos para subespacio completo y $L = 16$ latidos para $P = 6$. El test de Rao es el que más se aproxima a sus prestaciones asintóticas bajo \mathcal{H}_0 , alcanzando las mismas para $L = 8$ en el subespacio completo y para cualquier tamaño en el subespacio de dimensión $P = 6$. El TCVG gaussiano, a pesar del desajuste con la FDP del ruido, alcanza la P_{FA} asintótica desde $L = 8-16$ latidos.

La Figura 4.10 muestra la P_D alcanzable en función de la RSR para $P_{FA} = 0,05$. Se han utilizado 10000 realizaciones bajo \mathcal{H}_0 para estimar el umbral (ya que, como hemos visto, la expresión asintótica no asegura la obtención de la P_{FA} nominal para ventanas finitas), y 2000 realizaciones con alternancias para estimar cada punto de la curva. Se aprecia en las gráficas una degradación de los detectores laplacianos respecto a las curvas asintóticas. Esta degradación se reduce al aumentar el número de latidos procesados en una ventana o al reducir la dimensión del subespacio de señal. Las prestaciones obtenidas por el detector gaussiano alcanzan su valor asintótico (que como ya se ha señalado está 3 dB por debajo del comportamiento asintótico de los detectores laplacianos). Entre los detectores laplacianos, el TCVG es el más cercano a las prestaciones asintóticas (la pérdida es del orden de 0.5 dB incluso para $L = 16$; $P = 48$ (a)). La aproximación de Rao tiene

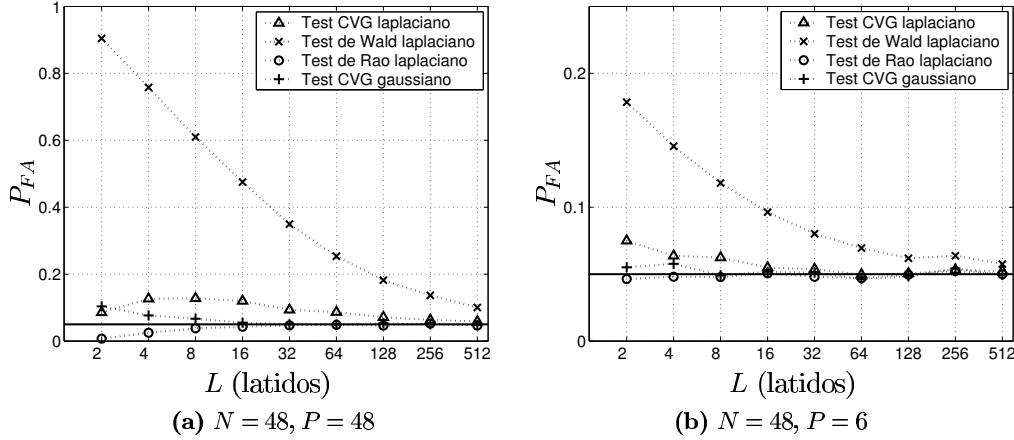


Figura 4.9: P_{FA} real de los detectores estacionarios con ventanas de análisis de duración finita, para un P_{FA} asintótica de 0,05. La línea continua indica el nivel de $P_{FA} = 0,05$.

una degradación ligeramente mayor. Por su parte, el test de Wald presenta una clara degradación (especialmente con $P = 48$, gráficas (a), (c) y (e)). No obstante, cuando $P = 6$, las diferencias entre los tres tests (y respecto a la curva asintótica) son mínimas para $L \geq 32$.

4.6.7. Prestaciones del EMV.

De acuerdo con el Teorema 3.2 (pág. 67) el EMV es asintóticamente normal, insesgado y eficiente. Su distribución asintótica es

$$\hat{\mathbf{c}} \xrightarrow{a} \mathcal{N}(\mathbf{c}, \frac{4\sigma^2}{G_\alpha L} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1}) \quad (4.62)$$

y por tanto,

$$\hat{\mathbf{a}} \xrightarrow{a} \mathcal{N}(\mathbf{a}, \frac{4\sigma^2}{G_\alpha L} \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T) \quad (4.63)$$

La varianza de error en cada muestra es $\sigma_{\varepsilon(n)}^2 = \frac{4\sigma^2}{G_\alpha L} [\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T]_{n,n}$. La potencia media del error ε viene dada por $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{N} E(\varepsilon^T \varepsilon) = \frac{4\sigma^2}{N G_\alpha L} \text{tr}(\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T) = \frac{4\sigma^2 P}{N G_\alpha L}$, por lo que la RSR de la estimación es

$$\nu = G_\alpha \frac{\|\mathbf{a}\|_2^2 / N}{\sigma_\varepsilon^2} = G_\alpha L \frac{N}{P} \eta. \quad (4.64)$$

La ganancia de estimación es, en consecuencia

$$G_e = \frac{\nu}{\eta} = G_\alpha L \frac{N}{P}. \quad (4.65)$$

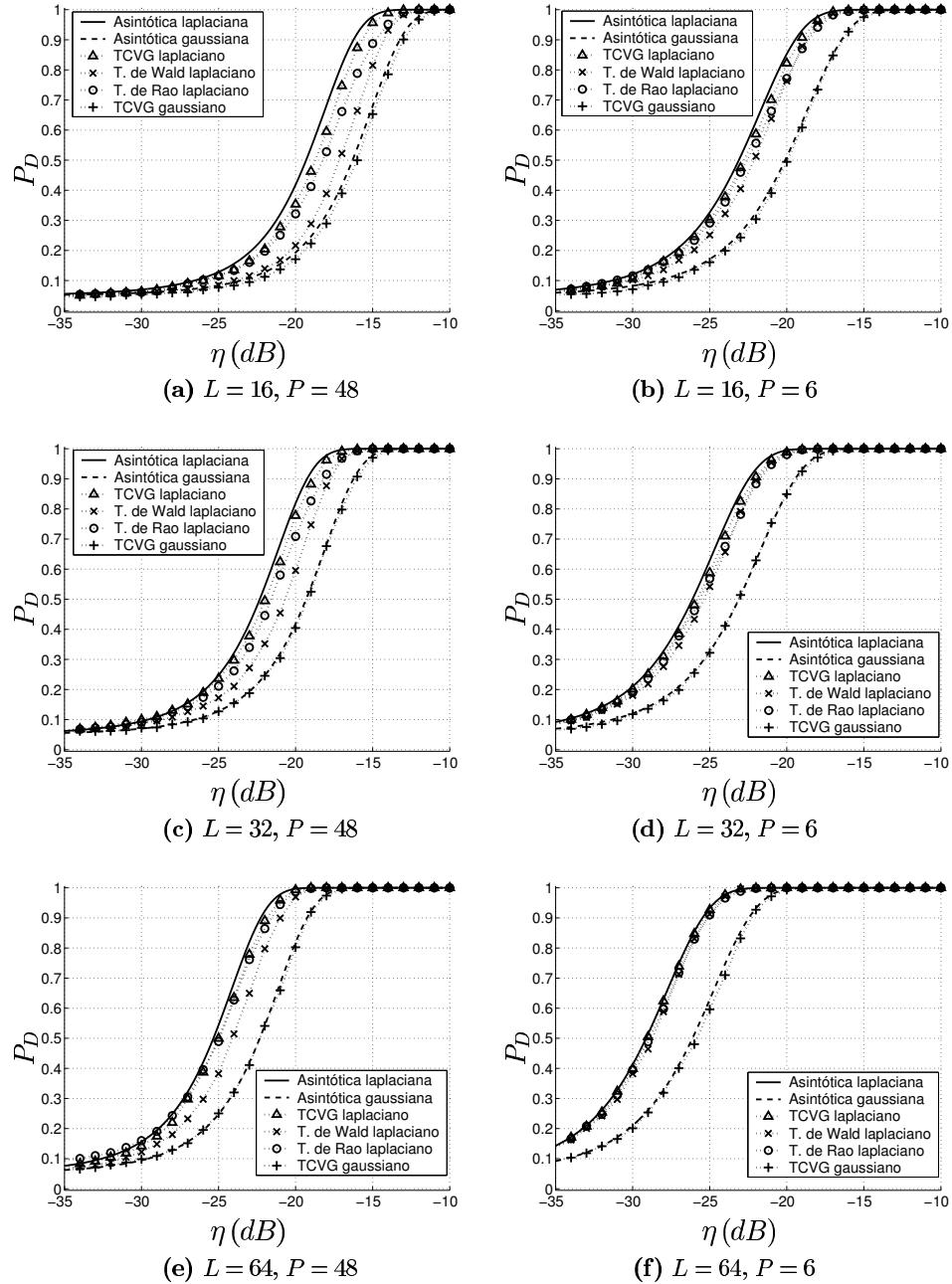


Figura 4.10: Curvas P_D vs η (para $P_{FA} = 0,05$) en ruido laplaciano de los detectores estacionarios laplacianos y gaussianos, con distintas dimensiones de la ventana de análisis y el subespacio de señal.

La ganancia de estimación tiene en este caso tres componentes: una ganancia L debida al filtrado latido a latido (en este caso, se trata de un M -filtro no lineal), otra, de valor N/P , debida a la proyección en el subespacio de señal de dimensión P y una tercera debida a la no gaussianidad del ruido G_α . De nuevo encontramos que las distribuciones de ruido no gaussianas permiten una utilización más eficiente de los datos observados.

Ejemplo 4.3 (EMV laplaciano estacionario). El comportamiento del EMV para ventanas finitas se estudia en el siguiente ejemplo. Se han generado realizaciones de AOT en ruido laplaciano, utilizando la señal de ejemplo (3.79) con una amplitud de pico de $10\mu V$ como forma de onda alterna. Consideremos la familia de subespacios paso-bajo engendrados por las P primeras funciones base de la transformada discreta coseno (3.85). La Figura 4.11 muestra las propiedades del EMV laplaciano (4.30), el EMV gaussiano (3.47) y el estimador de Rao laplaciano (4.42) cuando las dimensiones de los datos observados son $N = 48$, $L = 32$. Se representan la media y desviación estándar del EMV calculados con 3000 realizaciones de ruido laplaciano con $\sigma = 20\mu V$. A modo de ejemplo, se muestra el EMV obtenido en 5 realizaciones. Se puede observar que ambos EMV son esencialmente insesgados y, como cabía esperar, el EMV gaussiano presenta una varianza mayor que su homólogo laplaciano. El estimador de Rao es un estimador sesgado que tiende a subestimar la señal. Sin embargo, proporciona una aproximación sencilla a la forma de onda alterna.

Las prestaciones de los tres estimadores en función de la duración (finita) de la ventana de análisis se resumen en la Figura 4.12, donde se muestra el valor RMS del sesgo y la desviación estándar de los estimadores en función de la duración de la ventana. En las gráficas (a) y (b) se observa que el sesgo de los EMV es reducido y desaparece al aumentar el tamaño de la ventana. Por otro lado, en las gráficas (c) y (d) se observa que los EMV alcanzan la cota inferior de Cramér-Rao para ventanas de sólo 32 latidos. Por su parte, la desviación estándar del test de Rao alcanza e incluso parece rebasar la cota de Cramér-Rao. Este comportamiento no incumple el Teorema 3.1 (Cota de Cramér-Rao), ya que se trata de un estimador sesgado.

4.7. Modelo gaussiano generalizado adaptativo.

4.7.1. Planteamiento.

Consideremos ahora el modelo de señal (4.23) donde las muestras de ruido son independientes y siguen una distribución gaussiana generalizada de media nula y desviación estándar σ **desconocida** $w_i[n] \sim \mathcal{G}\mathcal{G}(0, \sigma, \alpha)$. La FDP correspondiente es

$$p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \sigma) = \left(\frac{\alpha \beta(\alpha)}{2 \Gamma(1/\alpha) \sigma} \right)^{NL} \exp \left(- \left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma} \right) \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right), \quad (4.66)$$

siendo parámetros desconocidos el vector \mathbf{c} (P parámetros) y la desviación estándar σ (*parámetro molesto*).

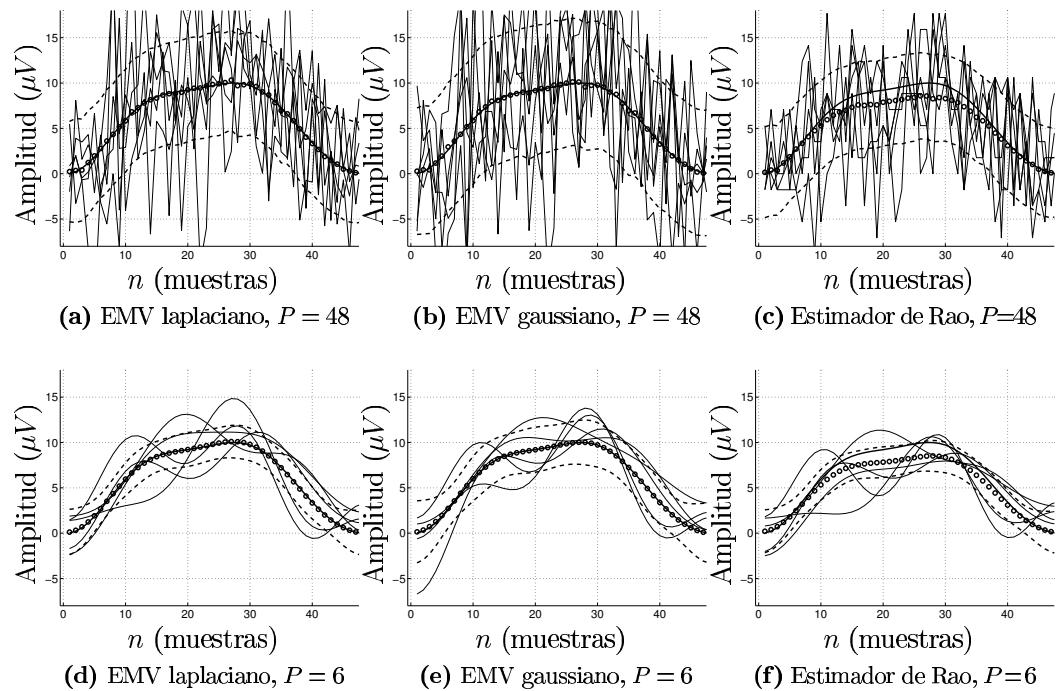


Figura 4.11: Estimación de AOT en ruido laplaciano mediante los EMV laplaciano y gaussiano y el estimador de Rao. En cada gráfica se representa la señal simulada (línea continua), la señal estimada en 5 realizaciones (líneas de puntos), así como el valor medio (línea de círculos) y el margen $\pm\sigma_{\varepsilon(n)}$ (línea discontinua) calculados con 3000 realizaciones de Monte Carlo.

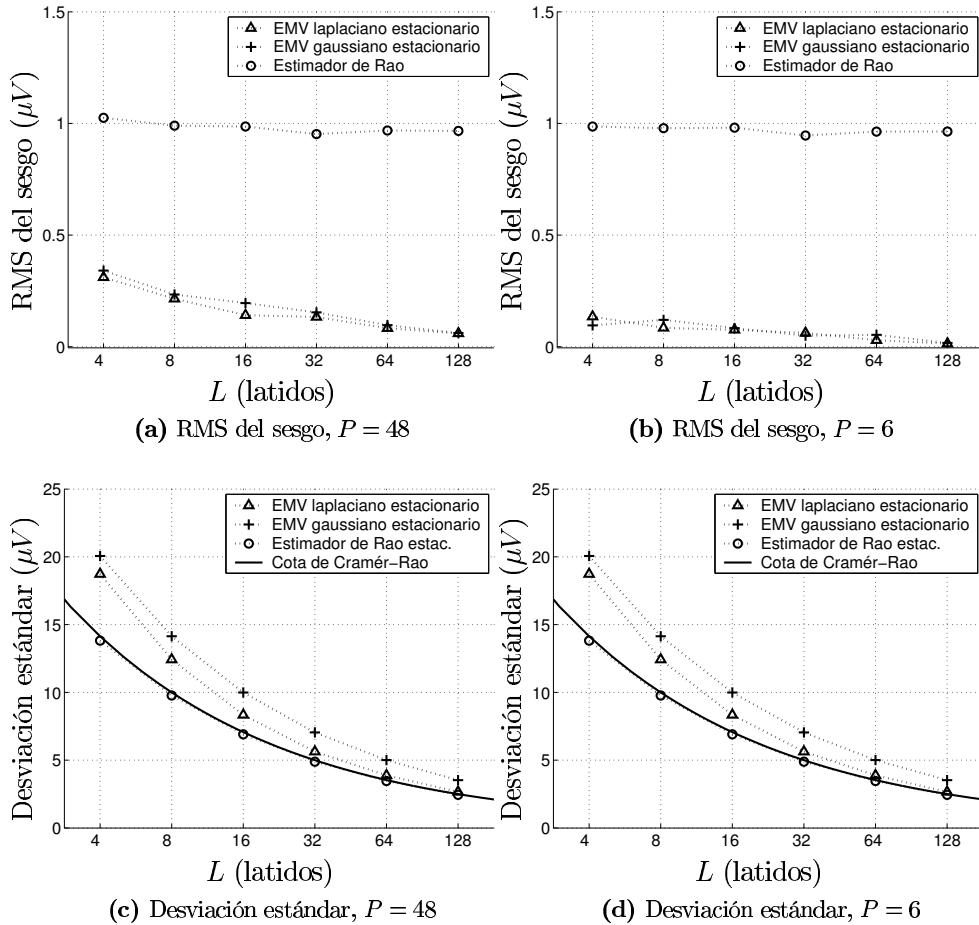


Figura 4.12: Valor RMS del sesgo $RMS(E(\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}))$ (gráficas (a) y (b)) y desviación estándar del error de estimación (gráficas (c) y (d)) obtenidas experimentalmente para el EMV laplaciano, el EMV gaussiano y el estimador de Rao.

4.7.2. EMV y TCVG.

El detector TCVG para este modelo es

$$L_G(\mathbf{X}) = \frac{p(\mathbf{X}; \hat{\mathbf{c}}, \hat{\sigma}_1, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{X}; \hat{\sigma}_0, \mathcal{H}_0)} \hat{\gtrless}_{\mathcal{H}_0}^{\mathcal{H}_1} \gamma, \quad (4.67)$$

donde, además de $\hat{\mathbf{c}}$, deben obtenerse los EMV de σ bajo ambas hipótesis: ($\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_0$).

El EMV de \mathbf{c} debe minimizar el menos logaritmo de la función de verosimilitud bajo \mathcal{H}_1

$$\begin{aligned} -\ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \sigma, \mathcal{H}_1) &= NL(\ln 2\Gamma(1/\alpha)\sigma - \ln \alpha \beta(\alpha)) \\ &\quad + \left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma}\right)^\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha. \end{aligned} \quad (4.68)$$

La expresión anterior es minimizada por el EMN ℓ_α

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha, \quad (4.69)$$

independientemente del valor de σ . Se trata pues del mismo estimador que el derivado para el modelo estacionario (con σ conocida) (4.29). Como se ha indicado en la sección anterior, la evaluación del EMV requiere la utilización de un algoritmo numérico de búsqueda. Las ecuaciones de verosimilitud para σ son

$$-\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \sigma, \mathcal{H}_1)}{\partial \sigma} \Big|_{\substack{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}} \\ \sigma=\hat{\sigma}_1}} = -\frac{NL}{\hat{\sigma}_1} + \alpha \beta^\alpha(\alpha) \frac{1}{\hat{\sigma}_1^{\alpha+1}} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha = 0 \quad (4.70)$$

$$-\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \sigma, \mathcal{H}_0)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\hat{\sigma}_0} = \frac{NL}{\hat{\sigma}_0} + \alpha \beta^\alpha(\alpha) \frac{1}{\hat{\sigma}_0^{\alpha+1}} \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_i\|_\alpha^\alpha = 0, \quad (4.71)$$

de las que se obtienen los EMV

$$\hat{\sigma}_1^\alpha = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{NL} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \quad (4.72)$$

$$\hat{\sigma}_0^\alpha = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{NL} \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_i\|_\alpha^\alpha. \quad (4.73)$$

Ambos estimadores son proporcionales a la norma ℓ_α del residuo considerado en cada hipótesis.

Sustituyendo $\hat{\mathbf{c}}$, $\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_0$ en (4.27) obtenemos el CVG

$$L_G(\mathbf{X}) = \left(\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1} \right)^{NL} = \left(\frac{\hat{\sigma}_0^\alpha}{\hat{\sigma}_1^\alpha} \right)^{\frac{NL}{\alpha}}. \quad (4.74)$$

Aplicando la función biunívoca creciente $f(x) = 2NL(x^{\frac{\alpha}{NL}} - 1)/\alpha$, obtenemos el siguiente estadístico equivalente

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{2NL}{\alpha} \frac{\hat{\sigma}_0^\alpha - \hat{\sigma}_1^\alpha}{\hat{\sigma}_1^\alpha} = 2\beta^\alpha(\alpha) \frac{\left(\sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_i\|_\alpha^\alpha - \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right)}{\hat{\sigma}_1^\alpha} \quad (4.75)$$

que es similar al TCVG para varianza de ruido conocida, sin más que reemplazar el parámetro σ por su estimación bajo \mathcal{H}_1 . Se trata, por tanto, de un **detector de subespacio adaptativo para ruido gaussiano generalizado**.

En la Figura 4.13 se muestra el esquema general del análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano generalizado adaptativo.

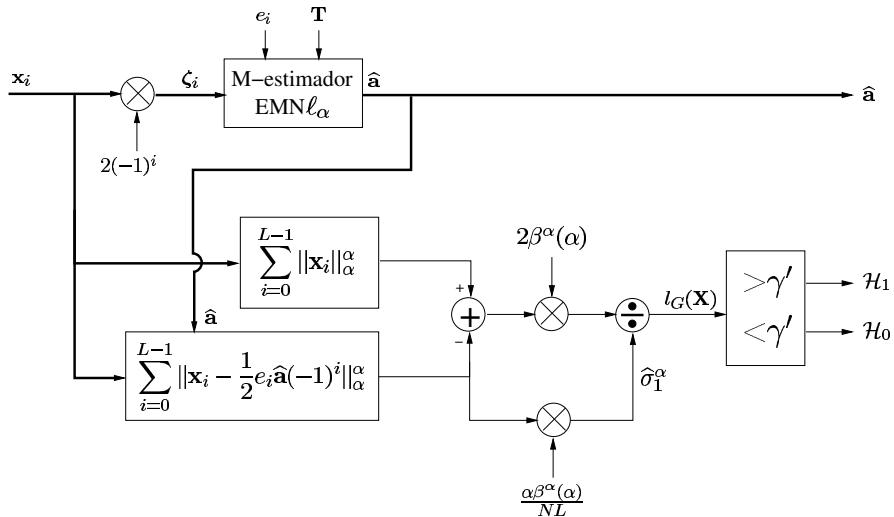


Figura 4.13: Esquema del análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano generalizado adaptativo.

4.7.3. Matriz de información de Fisher. Tests de Wald y de Rao.

La matriz de información de Fisher del vector de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{c}^T \ \sigma^\alpha]^T$ es

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T} & \mathbf{0}_{P \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times P} & \frac{NL}{\alpha \sigma^{2\alpha}} \end{bmatrix}, \quad (4.76)$$

tal y como se deriva en el Apéndice 4.B. Las matrices parciales son $\mathbf{I}_{\theta_s, \theta_s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T}$, $\mathbf{I}_{\theta_m, \theta_m}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{NL}{\alpha \sigma^2}$, $\mathbf{I}_{\theta_m, \theta_s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{1 \times P}$, $\mathbf{I}_{\theta_s, \theta_m}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{P \times 1}$. A partir de ellas se derivan los tests de Wald (3.27) y de Rao (3.29) para este modelo.

El estadístico de Wald es

$$T_W(\mathbf{X}) = \frac{G_\alpha L}{4\hat{\sigma}_1^2} \hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} = \frac{G_\alpha L}{4\hat{\sigma}_1^2} \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2, \quad (4.77)$$

y es proporcional a la relación entre la energía de la señal alterna estimada y la varianza del ruido. El estadístico (4.77) es adaptativo, a diferencia del estadístico de Wald para σ conocida (4.38). La Figura 4.14 muestra el esquema del test de Wald adaptativo.

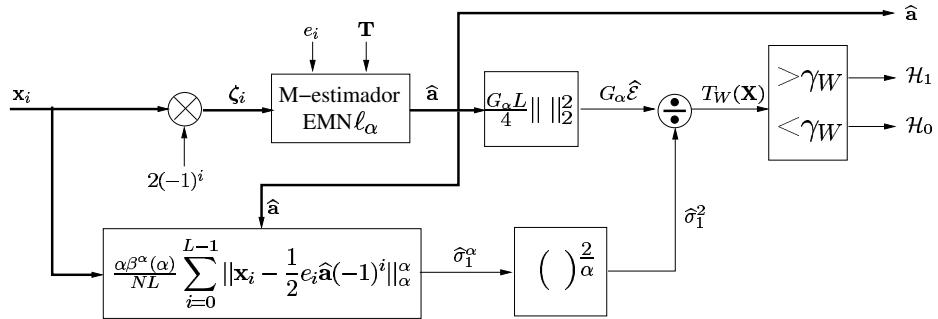


Figura 4.14: Esquema del test de Wald para el modelo gaussiano generalizado adaptativo.

El estadístico del test de Rao es

$$T_R(\mathbf{X}) = \frac{L}{4G_\alpha \hat{\sigma}_0^{2\alpha-2}} \left\| \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i \right\|_2^2 \quad (4.78)$$

$$= \frac{L}{4G_\alpha \hat{\sigma}_0^{2\alpha-2}} \left\| \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{y}_i e_i (-1)^i \right\|_2^2, \quad (4.79)$$

que emplea únicamente el EMV de σ bajo \mathcal{H}_0 . El test de Rao es el más sencillo, también en este caso, ya que no requiere estimar la señal alterna. Utiliza la señal observada tras aplicarle la transformación no lineal $g_\alpha(x)$. La única diferencia respecto al test de Rao para el modelo gaussiano generalizado estacionario (4.39) reside en que σ se sustituye por su estimador bajo \mathcal{H}_0 . De ahí que el detector resultante sea adaptativo. La Figura 4.15 muestra una posible implementación del test de Rao adaptativo.

Escribiendo

$$T_R(\mathbf{X}) = \frac{G_\alpha L}{4\hat{\sigma}_0^2} \|\hat{\mathbf{a}}_R\|_2^2 \quad (4.80)$$

donde $\hat{\mathbf{a}}_R$ es el siguiente *estimador de Rao*

$$\hat{\mathbf{a}}_R = \frac{2}{G_\alpha \hat{\sigma}_0^{2\alpha-2} L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i \quad (4.81)$$

se puede observar un paralelismo entre el test de Wald y el de Rao.

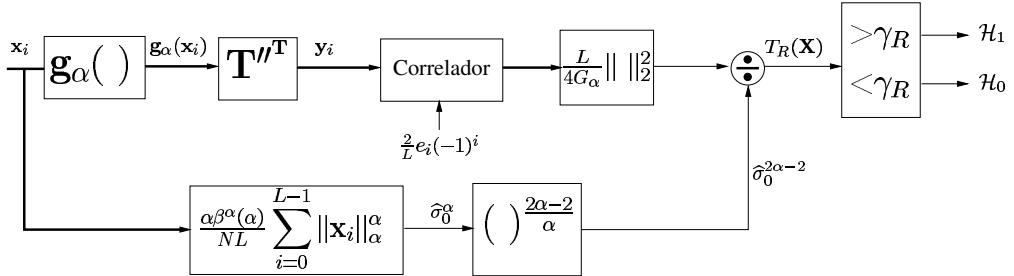


Figura 4.15: Estructura del test de Rao para el modelo gaussiano generalizado adaptativo.

A diferencia de los detectores estacionarios, los tests de Wald y de Rao adaptativos son invariantes ante un escalado de la amplitud de la señal observada y por tanto, son detectores CFAR.

4.7.4. Cálculo numérico del EMV.

El estimador $\hat{\mathbf{c}}$ debe calcularse numéricamente. El método de puntuación de Fisher proporciona las siguientes iteraciones para calcular $\hat{\mathbf{c}}$ y $\hat{\mathbf{a}}$

$$\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)} = \hat{\mathbf{c}}_{(r)} + \frac{2}{G_\alpha L \hat{\sigma}_{1(r)}^{\alpha-2}} \sum_{i=0}^{L-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}}_{(r)} e_i (-1)^i \right) e_i (-1)^i, \quad (4.82)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(r+1)} = \hat{\mathbf{a}}_{(r)} + \frac{2}{G_\alpha L \hat{\sigma}_{1(r)}^{\alpha-2}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_\mathbf{T} \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r)} e_i (-1)^i \right) e_i (-1)^i, \quad (4.83)$$

$$\hat{\sigma}_{1(r+1)}^\alpha = \alpha \beta^\alpha(\alpha) \frac{1}{NL} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r)} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha. \quad (4.84)$$

Se requiere, por tanto, calcular un nuevo valor de $\hat{\sigma}_{1(r+1)}^\alpha$ en cada iteración. Sin embargo, la ecuación (4.69) indican que los EMV $\hat{\mathbf{c}}$ y $\hat{\mathbf{a}}$ no dependen de σ y son los mismos que en el caso de σ conocida. Por tanto, podemos utilizar el Algoritmo 4.1 para calcular el EMV de los parámetros de señal, utilizando, por ejemplo, $\sigma = \hat{\sigma}_0$ (4.73) como valor estimado de la desviación estándar. Una vez obtenido el valor de $\hat{\mathbf{a}}$ (o bien $\hat{\mathbf{c}}$), el cálculo de $\hat{\sigma}_1$ es inmediato aplicando (4.72).

4.7.5. Modelo laplaciano ($\alpha = 1$).

Particularizando para el modelo laplaciano adaptativo, tenemos las siguientes expresiones de los EMV

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_1 \quad (4.85)$$

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\sqrt{2}}{NL} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_1 \quad (4.86)$$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\sqrt{2}}{NL} \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_i\|_1. \quad (4.87)$$

Los EMV de \mathbf{c} (y de \mathbf{a}) son los mismos que en el modelo laplaciano estacionario. Si no hay restricción de subespacio ($P = N$), el EMV $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}}$ se reduce a la mediana ponderada de las series latido a latido demoduladas. El detector de subespacios laplaciano, por el contrario, precisa emplear un algoritmo numérico como el propuesto en la Sección 4.7.4. Los EMV de σ se calculan sumando los valores absolutos de los residuos en las dos hipótesis.

El estadístico del TCVG es

$$\begin{aligned} l_G(\mathbf{X}^G) &= \frac{2\sqrt{2}}{\hat{\sigma}_1} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_i\|_1 - \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_1 \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\hat{\sigma}_1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{L-1} |x_i[n]| - \sum_{i=0}^{L-1} \left| x_i[n] - \frac{1}{2} \hat{a}[n] e_i (-1)^i \right| \right). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Es similar al detector laplaciano de subespacio (4.48), pero normalizando el estadístico por el EMV del nivel de ruido $\hat{\sigma}_1$. Por tanto, se trata de un detector de subespacio laplaciano y adaptativo. Además, es un detector CFAR, ya que (4.88) es invariante ante un escalado de amplitud en la señal observada. El detector de energía adaptativo (con $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ y $e_i = 1$) en ruido laplaciano puede calcularse a partir de estadísticos individuales T_n para cada muestra del complejo ST-T (4.56). La expresión del CVG es

$$l_G(\mathbf{X}) = \frac{2\sqrt{2}}{\hat{\sigma}_1} \sum_{n=0}^{N-1} T_n. \quad (4.89)$$

El estadístico de Wald es proporcional a la RER calculada con los EMV $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\sigma}_1^2$

$$T_W(\mathbf{X}) = \frac{G_\alpha L}{4\hat{\sigma}_1^2} \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2. \quad (4.90)$$

Nótese su similitud con el CVG gaussiano adaptativo (3.102). Las diferencias estriban en la ganancia G_α , y en la forma de estimar $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\sigma}_1$. Es fácil comprobar que el detector de Wald se adapta al nivel de ruido en la señal y que es CFAR.

El estadístico de Rao para el modelo laplaciano adaptativo es

$$T_R(\mathbf{X}) = \frac{1}{2L} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \operatorname{sgn}(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i \right\|_2^2. \quad (4.91)$$

Se trata exactamente del mismo detector que para σ conocida. A diferencia de los tests CVG y de Wald para el modelo de σ desconocida, el test de Rao no depende del nivel de ruido estimado. No obstante, se trata de un detector CFAR, ya que la función signo es invariante al escalado. El detector de Rao es muy sencillo computacionalmente, y no precisa calcular ningún estimador del nivel de ruido.

4.7.6. Prestaciones de los detectores.

Según el Teorema 3.3, los estadísticos TCVG, de Wald y de Rao correspondientes al modelo gaussiano generalizado adaptativo alcanzan, asintóticamente, las mismas prestaciones que sus tests homólogos para σ conocida

$$2 \ln L_G(\mathbf{X}) \xrightarrow{a} T_W(\mathbf{X}) \xrightarrow{a} T_R(\mathbf{X}) \xrightarrow{a} \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (4.92)$$

con el parámetro de no centralidad

$$\lambda = \frac{LG_\alpha}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}\|_2^2 = G_\alpha NL\eta. \quad (4.93)$$

Por tanto, el grado adicional de libertad que supone la necesidad de estimar σ , tiene un efecto despreciable a medida que L es suficientemente grande. Esto es así gracias a que la submatriz de Fisher correspondiente a los parámetros de señal $\mathbf{I}_{\theta_s \theta_s}(\boldsymbol{\theta})$ coincide con la matriz de Fisher en el caso de varianza de ruido conocida, y que los términos cruzados $\mathbf{I}_{\theta_m \theta_s}(\boldsymbol{\theta})$ y $\mathbf{I}_{\theta_s \theta_m}(\boldsymbol{\theta})$ son nulos. En una situación real donde N y L son finitos, es de esperar que las prestaciones sean algo inferiores al caso de σ conocida, debido a la varianza en la estimación de σ .

Ejemplo 4.4 (TCVG laplaciano adaptativo). Para ilustrar el comportamiento de los detectores laplacianos adaptativos para tamaños finitos de los datos recurrimos a simulaciones de Monte Carlo.

En primer lugar estimamos la P_{FA} real obtenida con ventanas de análisis finitas. Se han estudiado los detectores CVG, de Wald y de Rao para el modelo laplaciano adaptativo y el TCVG gaussiano adaptativo para $N = 48$, con $P = 48$ y $P = 6$.

La Figura 4.16 muestra las P_{FA} medidas en 10.000 realizaciones para distintos tamaños de la ventana de análisis, escogiendo el umbral que asintóticamente proporciona una $P_{FA} = 0,05$. La P_{FA} real del test de Wald es siempre mayor que la P_{FA} asintótica, que sólo es alcanzada con ventanas de análisis de duración mayor de 512 latidos. El TCVG laplaciano también presenta una P_{FA} mayor que la asintótica, aunque menor que la obtenida con el test de Wald. La P_{FA} converge a la asintótica a partir de $L = 64$ latidos en

el caso de subespacio completo. No obstante, para un subespacio reducido de dimensión $P = 6$, la P_{FA} concuerda con la asintótica incluso para $L = 16$. El test de Rao, como ya se ha observado en otros modelos, tiene una P_{FA} menor que la asintótica, pero la alcanza para ventanas de análisis de sólo 8 latidos.

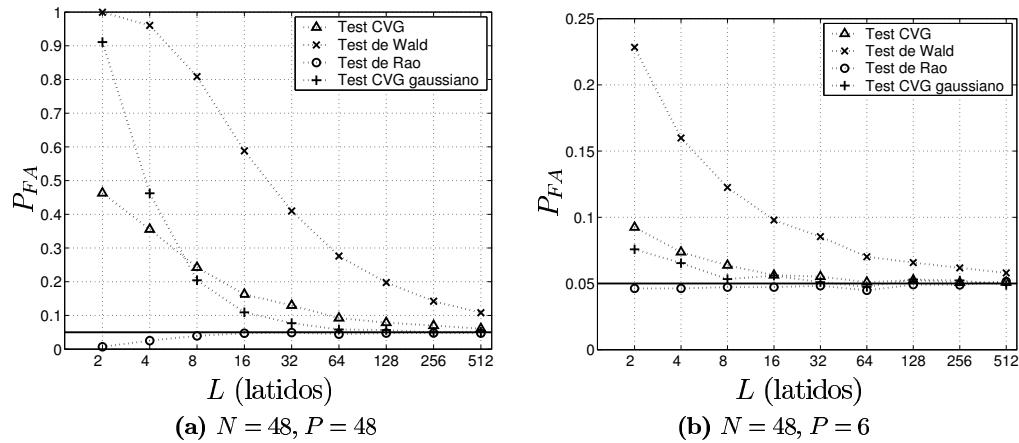


Figura 4.16: P_{FA} real de los detectores adaptativos con ventanas de análisis de duración finita, para un P_{FA} asintótica de 0,05. La línea continua indica el nivel de $P_{FA} = 0,05$.

La Figura 4.17 muestra la P_D alcanzable con $P_{FA} = 0,05$ por los mismos detectores en función de la RSR. El umbral en cada detector se ha determinado de forma que produzca una tasa de falsas alarmas de 0,05 en un conjunto de 10.000 realizaciones bajo \mathcal{H}_0 . Cada punto de la curva P_D vs η se ha estimado con otras 2000 realizaciones, ésta vez simuladas con el modelo de señal bajo \mathcal{H}_1 . Como referencia, se han representado las curvas asintóticas para ruido laplaciano y gaussiano. Se puede apreciar una degradación de los detectores respecto a las curvas asintóticas similar a la obtenida para σ conocida (Cfr. Figura 4.10). Así, puede decirse que los detectores estudiados en esta sección son CFAR y adaptativos, a cambio de una degradación despreciable de sus prestaciones. Se observan asimismo las características ya señaladas en los detectores estacionarios: la degradación del TCVG gaussiano respecto a los detectores laplacianos, las peores prestaciones del test de Wald respecto al TCVG y el test de Rao, y el acercamiento a las prestaciones asintóticas al aumentar la longitud de la ventana de análisis o disminuir la dimensión del subespacio de señal.

4.7.7. Prestaciones del EMV.

El EMV de la señal alterna (4.69) es el mismo que bajo la asunción de σ conocida. Sus prestaciones, tanto asintóticas como para tamaños finitos de la ventana, han sido estudiadas en la Sección 4.6.7.

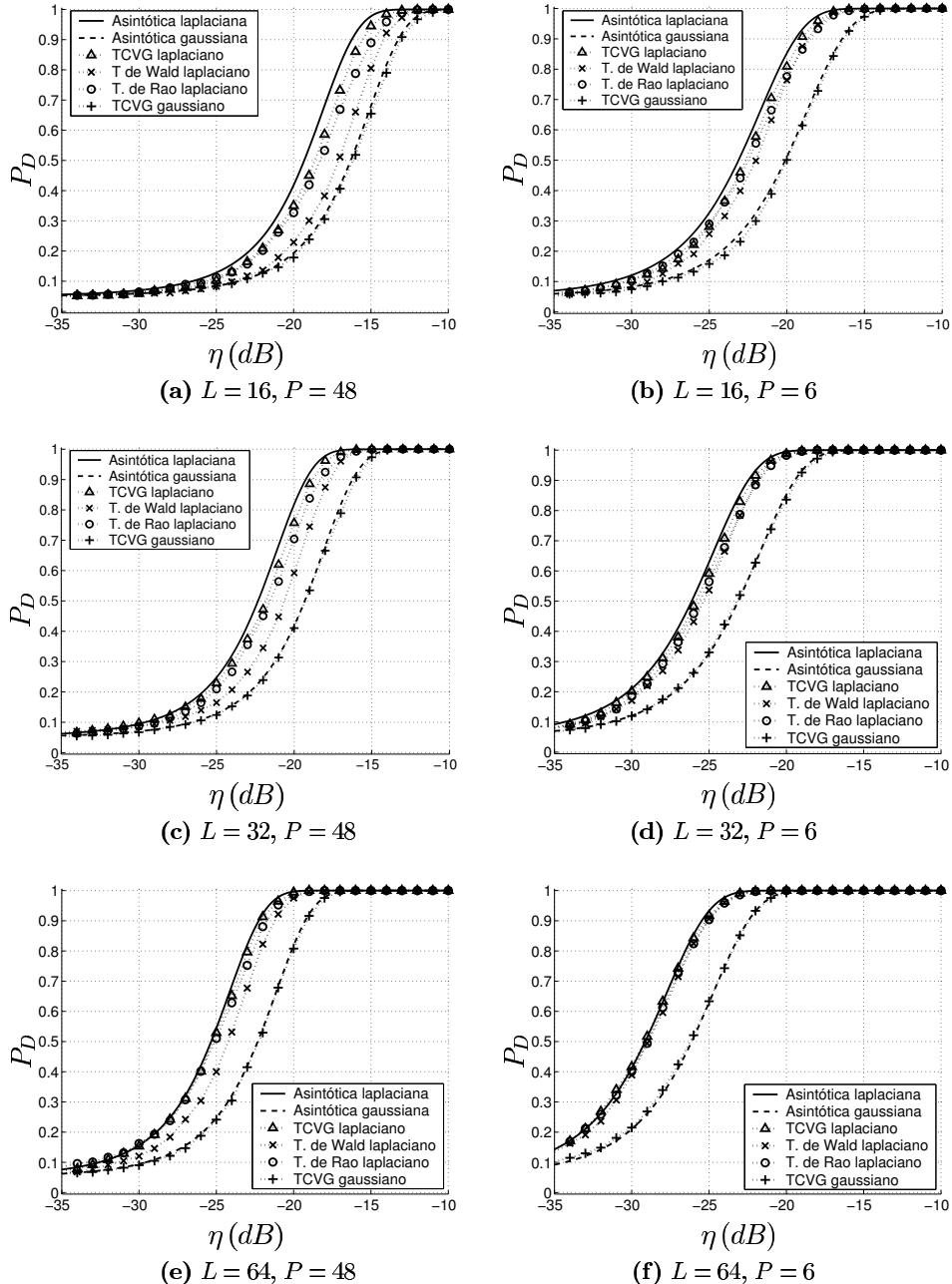


Figura 4.17: Curvas P_D vs η (para $P_{FA} = 0,05$) en ruido laplaciano de los detectores adaptativos laplacianos y gaussianos, con distintas dimensiones de la ventana de análisis y el subespacio de señal.

4.8. Modelo gaussiano generalizado no estacionario.

4.8.1. Planteamiento.

En esta sección estudiamos los detectores y estimadores correspondientes al modelo (4.23), asumiendo ahora que el nivel de ruido puede variar de un latido a otro dentro de la ventana de análisis. Por tanto, tenemos muestras de ruido independientes y con distribución $w_i[n] \sim \mathcal{GG}(0, \sigma_i, \alpha)$, siendo los $\{\sigma_i\}$ parámetros de ruido desconocidos (*parámetros molestos*). La FDP correspondiente es

$$p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \{\sigma_i\}) = \left(\frac{\alpha \beta(\alpha)}{2 \Gamma(1/\alpha)} \right)^{NL} \frac{\exp \left(-\beta^\alpha(\alpha) \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\sigma_i^\alpha} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right)}{\prod_{i=0}^{L-1} \sigma_i^N}. \quad (4.94)$$

Los parámetros desconocidos son los P coeficientes del vector \mathbf{c} que caracterizan la señal alternante bajo \mathcal{H}_1 y las L desviaciones estándar $\{\sigma_i\}$, $i = 0, \dots, L-1$ bajo ambas hipótesis.

4.8.2. EMV y TCVG.

El detector TCVG es

$$L_G(\mathbf{X}) = \frac{p(\mathbf{X}; \hat{\mathbf{c}}, \{\hat{\sigma}_{i,1}\}, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{X}, \{\hat{\sigma}_{i,0}\}, \mathcal{H}_0)} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \stackrel{\mathcal{H}_0}{\lessdot} \gamma. \quad (4.95)$$

El EMV de \mathbf{c} es

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha}{\hat{\sigma}_{i,1}^\alpha} = \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \frac{\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,1}} \right\|_\alpha^\alpha. \quad (4.96)$$

Se trata de minimizar la norma ℓ_α del residuo total, ponderando el residuo en cada latido inversamente al nivel de ruido estimado en el mismo. Podemos decir que es un EMNL $_\alpha$ generalizado. La condición de máxima verosimilitud es

$$\left. \frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \{\sigma_i\}, \mathcal{H}_1)}{\partial \mathbf{c}} \right|_{\{\sigma_i\} = \{\hat{\sigma}_{i,1}\}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,1}^\alpha} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right) = \mathbf{0}_{P \times 1}. \quad (4.97)$$

Los estimadores $\{\hat{\sigma}_{i,1}\}$ y $\{\hat{\sigma}_{i,0}\}$ deben cumplir las condiciones de verosimilitud

$$\left. -\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \mathbf{c}, \{\sigma_i\}, \mathcal{H}_1)}{\partial \sigma_k} \right|_{\{\sigma_i\} = \{\hat{\sigma}_{i,1}\}} = \frac{N}{\hat{\sigma}_{k,1}} - \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha) \left\| \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_k (-1)^k \right\|_\alpha^\alpha}{\hat{\sigma}_{k,1}^{\alpha+1}} = 0 \quad (4.98)$$

$$\left. -\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}; \{\sigma_i\}, \mathcal{H}_0)}{\partial \sigma_k} \right|_{\{\sigma_i\} = \{\hat{\sigma}_{i,0}\}} = \frac{N}{\hat{\sigma}_{k,0}} - \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha) \left\| \mathbf{x}_k \right\|_\alpha^\alpha}{\hat{\sigma}_{k,0}^{\alpha+1}} = 0 \quad (4.99)$$

para $k = 0, \dots, L - 1$. Despejando se obtienen los correspondientes EMV. Bajo \mathcal{H}_0 , tenemos que

$$\hat{\sigma}_{i,0}^\alpha = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{N} \|\mathbf{x}_i\|_\alpha^\alpha, \quad k = 0, \dots, L - 1. \quad (4.100)$$

Para la hipótesis \mathcal{H}_1 tenemos

$$\hat{\sigma}_{i,1}^\alpha = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{N} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}} e_k (-1)^k \right\|_\alpha^\alpha, \quad k = 0, \dots, L - 1. \quad (4.101)$$

Nótese que las ecuaciones de verosimilitud de \mathbf{c} y $\{\sigma_i\}$ bajo H_1 están acopladas. La solución a este problema de maximización conjunta ha de realizarse por procedimientos numéricos.

Sustituyendo (4.100) y (4.101) en (4.95), obtenemos el TCVG

$$L_G(\mathbf{X}) = \prod_{i=0}^{L-1} \left(\frac{\hat{\sigma}_{i,0}^\alpha}{\hat{\sigma}_{i,1}^\alpha} \right)^{\frac{N}{\alpha}} \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_0} \geq \gamma. \quad (4.102)$$

o el test equivalente

$$l_G(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) = \frac{2N}{\alpha} \sum_{i=0}^{L-1} (\ln \hat{\sigma}_{i,0}^\alpha - \ln \hat{\sigma}_{i,1}^\alpha) \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_0} \geq \gamma' = 2 \ln \gamma. \quad (4.103)$$

La Figura 4.18 muestra esquemáticamente este detector.

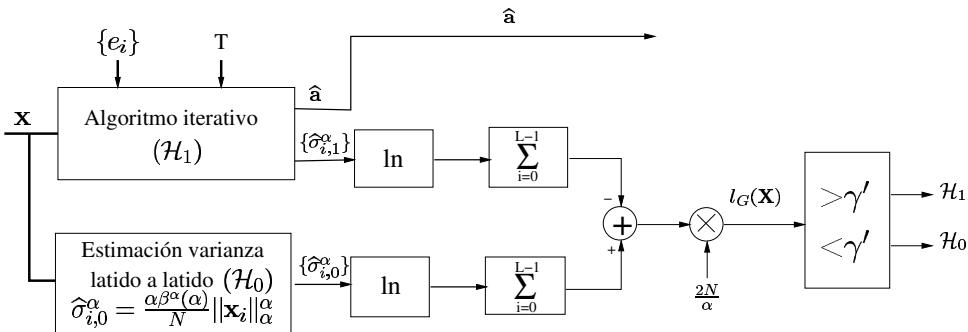


Figura 4.18: Esquema del análisis TCVG/EMV para el modelo gaussiano generalizado no estacionario.

4.8.3. Matriz de información de Fisher. Detectores de Wald y de Rao.

En el Apéndice 4.C se deriva la matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano generalizado no estacionario. Su expresión es

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{G_\alpha}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T} & \mathbf{0}_{P \times L} \\ \mathbf{0}_{L \times P} & \frac{N}{\alpha} \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_0^{2\alpha}}, \frac{1}{\sigma_1^{2\alpha}}, \dots, \frac{1}{\sigma_{L-1}^{2\alpha}} \right) \end{bmatrix}, \quad (4.104)$$

con $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{c}^T \sigma_0^\alpha \sigma_1^\alpha \dots \sigma_{L-1}^\alpha]^T$. Las particiones de la matriz de Fisher son $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{G_\alpha}{4} \mathbf{T}^T \mathbf{T} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}$ para los parámetros de señal e $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{\alpha} \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_0^{2\alpha}}, \frac{1}{\sigma_1^{2\alpha}}, \dots, \frac{1}{\sigma_{L-1}^{2\alpha}} \right)$ para los parámetros molestos, siendo nulos los términos cruzados $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{P \times L}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{L \times P}$.

A partir de la matriz de Fisher, la derivación de los tests de Wald y de Rao es inmediata (*vid. Apéndice 4.C*). El estadístico del test de Wald (3.27) es

$$T_W(\mathbf{X}) = G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} \frac{\|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2}{4}. \quad (4.105)$$

Es proporcional a la suma de las RER estimadas en cada latido

$$T_W(\mathbf{X}) = G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\hat{\mathcal{E}}_i}{\hat{\sigma}_{i,1}^2}, \quad (4.106)$$

donde $\hat{\mathcal{E}}_i$ es la energía de la alternancia estimada en el latido i -ésimo $\hat{\mathcal{E}}_i = e_i^2 \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2 / 4$. También puede interpretarse como una relación de energía alternante a ruido

$$T_W(\mathbf{X}) = \frac{G_\alpha \hat{\mathcal{E}}}{\hat{\sigma}_1^2}, \quad (4.107)$$

donde $\hat{\sigma}_1^2$ es la media armónica ponderada (3.131). La diferencia entre los tests de Wald para diferentes distribuciones gaussianas generalizadas se reduce, salvo constantes, a la forma de estimar los parámetros desconocidos. El test de Wald comparte con el TCVG la necesidad de algoritmos numéricos para resolver el problema de maximización con parámetros acoplados. La Figura 4.19 muestra un esquema del test de Wald no estacionario.

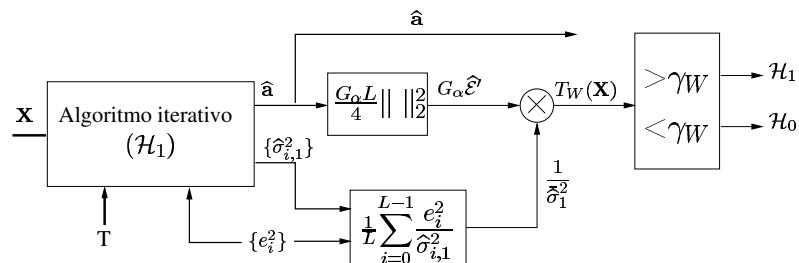


Figura 4.19: Esquema del test de Wald para el modelo gaussiano generalizado no estacionario.

El estadístico de Rao (3.29) es

$$\begin{aligned}
 T_R(\mathbf{X}) &= \frac{1}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i \mathcal{P}_T \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,0}^\alpha} \right\|_2^2 \\
 &= \frac{1}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathbf{y}_i e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,0}^\alpha} \right\|_2^2. \tag{4.108}
 \end{aligned}$$

Este estadístico permite una interpretación en términos de la suma de las RER en cada latido si se reescribe como

$$T_R(\mathbf{X}) = G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2} \frac{\|\hat{\mathbf{a}}_R\|_2^2}{4}, \tag{4.109}$$

donde

$$\hat{\mathbf{a}}_R = \frac{2}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i \mathcal{P}_T \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,0}^\alpha} \tag{4.110}$$

es un estimador sesgado de la señal alterna (estimador de Rao). Este test no requiere el cálculo numérico de $\hat{\mathbf{a}}$ ni de los $\hat{\sigma}_{i,1}$, y se basa en la transformación de la señal observada mediante la función no lineal $\mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i)$. El detector opera sobre la señal transformada de modo similar al detector de Rao para el modelo gaussiano no estacionario (3.133). El estadístico de Rao no utiliza los EMV bajo \mathcal{H}_1 y puede ser calculado con un esquema sencillo como el que se muestra en la Figura 4.20.

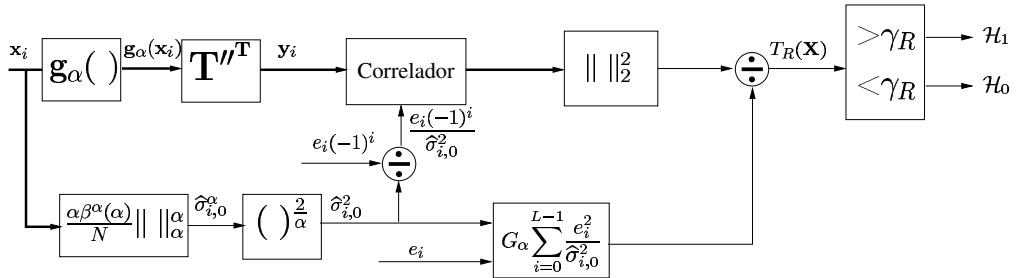


Figura 4.20: Esquema del test de Rao para el modelo gaussiano generalizado no estacionario.

4.8.4. Cálculo numérico del EMV.

Aplicando el método de puntuación de Fisher (3.137) encontramos la siguiente iteración en la búsqueda de los EMV

$$\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)} = \hat{\mathbf{c}}_{(r)} + \frac{2}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} \sum_{i=0}^{L-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right) \frac{e_i (-1)^i}{\sigma_i^\alpha} \Bigg|_{\substack{\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}_{(r)} \\ \{\sigma_i\} = \{\hat{\sigma}_{i,1(r)}\}}} \quad (4.111)$$

$$\hat{\sigma}_{k,1(r+1)}^\alpha = \hat{\sigma}_{k,1(r)}^\alpha + \frac{\alpha}{N} \sigma_k^{2\alpha} \left(-\frac{N}{\alpha \sigma_k^\alpha} + \beta^\alpha(\alpha) \frac{1}{\sigma_k^{2\alpha}} \left\| \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_k (-1)^k \right\|_\alpha^\alpha \right) \Bigg|_{\substack{\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}_{(r)} \\ \sigma_k = \hat{\sigma}_{k,1(r)}}} \quad (4.112)$$

$$k = 0, \dots, L-1.$$

Premultiplicando por \mathbf{T} la iteración (4.111), obtenemos la ecuación de actualización del EMV de \mathbf{a}

$$\hat{\mathbf{a}}_{(r+1)} = \hat{\mathbf{a}}_{(r)} + \frac{2}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{k,1(r)}^2}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_\mathbf{T} \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r)} e_i (-1)^i \right) \frac{e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{k,1(r)}^\alpha}. \quad (4.113)$$

En cuanto a la iteración (4.112), puede comprobarse que se reduce al estimador

$$\hat{\sigma}_{k,1(r+1)}^\alpha = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{N} \left\| \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r)} e_k (-1)^k \right\|_\alpha^\alpha. \quad (4.114)$$

Así, en cada iteración, los parámetros de la alternancia se aproximan numéricamente al EMV, mientras que los estimadores de $\{\sigma_i^\alpha\}$ en la iteración r -ésima se calculan directamente como el EMV (4.101) asumiendo que $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{(r-1)}$.

Como ya se ha explicado en modelos previos, los problemas derivados de la convergencia cíclica pueden ser evitados aplicando una constante positiva $\mu_r \leq 1$ al término de actualización de $\hat{\mathbf{a}}$. La metodología resultante se expresa en el Algoritmo 4.2.

La inicialización del algoritmo puede hacerse con el estimador de mínimos cuadrados, o sencillamente con $\hat{\mathbf{a}}_{(0)} = \mathbf{0}_{N \times 1}$ y con $\hat{\sigma}_{k,1(0)}^\alpha = \hat{\sigma}_{k,0}^\alpha$. En este caso, la primera iteración proporciona el estimador de Rao (4.110) $\hat{\mathbf{a}}_{(1)} = \hat{\mathbf{a}}_R$.

4.8.5. Caso particular: Ruido laplaciano ($\alpha = 1$).

Si el ruido se modela con una estadística laplaciana, los EMV de la desviación estándar del ruido se calculan mediante la norma ℓ_1 del residuo

$$\hat{\sigma}_{k,0} = \frac{\sqrt{2}}{N} \|\mathbf{x}_k\|_1 = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_k[n]|. \quad (4.115)$$

$$\hat{\sigma}_{k,1} = \frac{\sqrt{2}}{N} \left\| \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}} e_k (-1)^i \right\|_1 = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| x_k[n] - \frac{1}{2} \hat{a}[n] e_k(-1)^k \right|. \quad (4.116)$$

1: **INICIO:** $r = 0$, $\mu_{(0)} = 1$, $\hat{\mathbf{a}}_{(0)} \in \langle \mathbf{T} \rangle$, $\hat{\sigma}_{k,1_{(0)}}^\alpha$.

$$J_{(0)} = \beta^\alpha(\alpha) \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\|\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(0)} e_i (-1)^i\|_\alpha^\alpha}{\hat{\sigma}_{i,1_{(0)}}^\alpha} + N \sum_{i=0}^{L-1} \ln \hat{\sigma}_{i,1_{(0)}}^\alpha.$$

2: $r = r + 1$.

3: **ACTUALIZACIÓN DE $\{\hat{\sigma}_{k,1}^\alpha\}$:**

$$\hat{\sigma}_{k,1_{(r)}}^\alpha = \alpha \beta^\alpha(\alpha) \frac{1}{NL} \left\| \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r-1)} e_k (-1)^k \right\|_\alpha^\alpha, \quad k = 0, \dots, L-1.$$

4: **ACTUALIZACIÓN DE $\hat{\mathbf{a}}$:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{a} = \mu_{(r-1)} \frac{2}{\sum_{i=0}^{L-1} e_i^2} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r-1)} e_i (-1)^i \right) \frac{e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,1_{(r-1)}}^\alpha} \\ \hat{\mathbf{a}}_{(r)} = \hat{\mathbf{a}}_{(r-1)} + \Delta \mathbf{a}. \end{array} \right.$$

5: **EVALUACIÓN DEL MENOS LOGARITMO DE LA VERO SIMILITUD:**

$$J_{(r)} = \beta^\alpha(\alpha) \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\|\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r)} e_i (-1)^i\|_\alpha^\alpha}{\hat{\sigma}_{i,1_{(r)}}^\alpha} + N \sum_{i=0}^{L-1} \ln \hat{\sigma}_{i,1_{(r)}}^\alpha.$$

6: **SI** $J_{(r)} \geq J_{(r-1)}$,

$$\begin{aligned} \mu_{(r)} &= \mu_{(r-1)}/2, \\ \hat{\mathbf{a}}_{(r)} &= \hat{\mathbf{a}}_{(r-1)}, \\ J_{(r)} &= J_{(r-1)}. \end{aligned}$$

SI NO

$$\mu_{(r)} = \mu_{(r-1)},$$

FIN

7: **REPETIR PASOS 2-6 HASTA QUE $\|\Delta \mathbf{a}\| < \epsilon$**

8: $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{(r)}$, $\hat{\sigma}_{i,1}^\alpha = \hat{\sigma}_{i,1_{(r)}}^\alpha$.

Algoritmo 4.2: Algoritmo basado en el método de puntuación de Fisher para la obtención de los EMV de \mathbf{a} y $\{\sigma_i\}$ bajo \mathcal{H}_1 en el modelo gaussiano generalizado no estacionario

donde $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{c}}$, y $\hat{\mathbf{c}}$ es el estimador de mínimo error absoluto (mínima norma ℓ_1).

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T}\mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_1}{\hat{\sigma}_{i,1}}. \quad (4.117)$$

Los EMV $\hat{\mathbf{c}}$ y $\{\hat{\sigma}_i\}$ pueden obtenerse mediante el Algoritmo 4.2, con las actualizaciones

$$\hat{\mathbf{a}}_{(r+1)} = \hat{\mathbf{a}}_{(r)} + \mu_r \frac{\sqrt{2}}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2(r)}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \operatorname{sgn} \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r)} e_i (-1)^i \right) \frac{e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,1(r)}}, \quad (4.118)$$

$$\hat{\sigma}_{k,1(r+1)}^{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{N} \left\| \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_{(r)} e_k (-1)^k \right\|_1. \quad (4.119)$$

El TCVG correspondiente es

$$l_G(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) = 2N \sum_{i=0}^{L-1} (\ln \hat{\sigma}_{i,0} - \ln \hat{\sigma}_{i,1}) \stackrel{\mathcal{H}_1}{\underset{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma' = 2 \ln \gamma. \quad (4.120)$$

Cuando $\mathbf{T} = \mathbf{I}_N$, el desacoplo de los coeficientes de la alternancia facilita su cálculo e interpretación. Así, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{a}[n] &= \arg \min_{a[n]} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\hat{\sigma}_{ki,1}} \left| x_i[n] - \frac{1}{2} a[n] e_i (-1)^i \right| \\ &= \arg \min_{a[n]} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{|e_i|}{\hat{\sigma}_{i,1}} |\zeta_i[n]/e_i - a[n]|, \end{aligned} \quad (4.121)$$

donde $\zeta_i[n] = 2x_i[n](-1)^i$. Por tanto, la alternancia en la muestra n -ésima es la siguiente mediana ponderada

$$\hat{a}[n] = \text{mediana} \left(\frac{|e_0|}{\hat{\sigma}_{0,1}} \diamond \frac{\zeta_0[n]}{e_0}, \frac{|e_1|}{\hat{\sigma}_{1,1}} \diamond \frac{\zeta_1[n]}{e_1}, \dots, \frac{|e_{L-1}|}{\hat{\sigma}_{L-1,1}} \diamond \frac{\zeta_{L-1}[n]}{e_{L-1}} \right), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (4.122)$$

Así, la importancia relativa de cada muestra es proporcional al valor de la evolución de la alternancia para ese latido $|e_i|$ e inversamente proporcional al nivel de ruido estimado $\hat{\sigma}_{i,1}$.

En cuanto a las aproximaciones al TCVG (detectores de Wald y de Rao) tenemos

$$T_W(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} \frac{\|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2}{2}, \quad (4.123)$$

$$T_R(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2} \frac{\|\hat{\mathbf{a}}_R\|_2^2}{2}, \quad (4.124)$$

donde

$$\hat{\mathbf{a}}_R = \frac{\sqrt{2}}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,0}} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \operatorname{sgn} (\mathbf{x}_i). \quad (4.125)$$

4.8.6. Detector TCVG clarividente.

Antes de evaluar las prestaciones de los distintos detectores nos detenemos a estudiar brevemente el TCVG clarividente, es decir, el TCVG suponiendo que el nivel de ruido en cada latido $\{\sigma_0, \dots, \sigma_{L-1}\}$ fuera conocido *a priori*. En este caso, los únicos parámetros desconocidos serían los de la señal. El EMV es entonces

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\hat{\sigma}_{i,1}^\alpha} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha. \quad (4.126)$$

El TCVG clarividente tiene la forma

$$l_{GC}(\mathbf{X}) = 2 \ln L_{GC}(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\sigma_i^\alpha} \left(\left\| \mathbf{x}_i \right\|_\alpha^\alpha - \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right). \quad (4.127)$$

Cuando el ruido es estacionario ($\sigma_i = \sigma$), el TCVG clarividente se reduce al TCVG estacionario estudiado en la Sección 4.6.

Puede comprobarse que la distribución exacta del CVG clarividente es

$$l_{GC}(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) \sim \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (4.128)$$

con el parámetro de no centralidad

$$\lambda = \frac{G_\alpha}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \|\mathbf{a}\|_2^2 = G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\mathcal{E}_i}{\sigma_i^2} = G_\alpha N L \bar{\eta}, \quad (4.129)$$

siendo $\bar{\eta} = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \eta_i$ la RSR promedio $\left(\eta_i = \frac{e_i^2 \|\mathbf{a}\|_2^2}{4N\sigma_i^2}, i = 0, \dots, L-1 \right)$.

4.8.7. Prestaciones de los detectores.

Haciendo uso de la matriz de Fisher (4.104) y del Teorema 3.3 encontramos que los estadísticos TCVG, de Wald y de Rao alcanzan asintóticamente la distribución

$$l_G(\mathbf{X}) = 2 \ln L_G(\mathbf{X}) \stackrel{a}{\sim} T_W(\mathbf{X}) \stackrel{a}{\sim} T_R(\mathbf{X}) \stackrel{a}{\sim} \begin{cases} \chi_P^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \\ \chi_P^2(\lambda) & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \end{cases}, \quad (4.130)$$

con el parámetro de no centralidad (4.129). Es interesante destacar que las prestaciones asintóticas de los tres detectores coinciden con las del TCVG clarividente (4.127).

En la situación más realista en que N y L son finitos, es de esperar que las prestaciones sean inferiores al caso clarividente, debido a la varianza en la estimación de los $\{\sigma_i\}$. Hay que tener en cuenta que en el modelo no estacionario no basta con aumentar la duración de la ventana de análisis para acercarse a las prestaciones asintóticas, ya que para estimar

los EMV de cada σ_k se utilizan N muestras observadas, independientemente del valor de L .

Los detectores estudiados para este modelo son además CFAR ante variaciones del nivel de ruido que afecten por igual a todos los latidos (ya que los estadísticos son invariantes ante un escalado en amplitud de la señal observada). Esta propiedad es válida aun para ventanas de análisis finitas. La expresión de la FDP bajo \mathcal{H}_0 (4.130) indica que en condiciones asintóticas, los detectores son también CFAR ante variaciones de ruido en cualquiera de los latidos. Esta propiedad no se cumple de forma exacta para tamaños finitos, si bien puede considerarse que son detectores cuasi-CFAR ante variaciones del nivel de ruido en cualquier latido.

Ejemplo 4.5 (TCVG no estacionario en ruido estacionario). En este ejemplo, se estudian las prestaciones de los detectores laplacianos no estacionarios de tamaño finito en ruido estacionario ($\sigma_i = \sigma$, $i = 0, \dots, L-1$). De este modo, puede estudiarse la degradación respecto a los detectores estacionarios cuando el ruido es, en efecto, estacionario.

La P_{FA} real de los detectores laplacianos no estacionarios (TCVG, de Wald y de Rao) así como para el TCVG gaussiano no estacionario se ha estimado mediante una simulación de Monte Carlo (con 10000 realizaciones de \mathbf{X} por cada punto representado) para $N = 48$, con $P = 48$, $P = 6$ y distintas duraciones de la ventana de análisis. En la Figura 4.21 se representan las P_{FA} experimentales obtenidas al aplicar los umbrales teóricos para que la P_{FA} asintótica sea de 0,05. Las tendencias encontradas son similares a las observadas en los detectores para ruido estacionario desconocido (Figura 4.16) y conocido (Figura 4.9). Sin embargo, observamos que al aumentar L , la P_{FA} de los TCVG y el test de Wald no alcanza la P_{FA} asintótica correspondiente al umbral utilizado, convergiendo a un valor mayor. Este desajuste se debe a que por mucho que aumente la longitud de la ventana de análisis, la varianza de los EMV de σ_i no disminuye, al basarse siempre en las N muestras de cada latido.

La Figura 4.22 muestra, para los mismos detectores, la P_D alcanzada con $P_{FA} = 0,05$ en función de la RSR. El umbral para tener una P_{FA} real de 0,05 se ha calculado en un conjunto de entrenamiento de 10.000 realizaciones de \mathbf{X} bajo \mathcal{H}_0 . Las curvas P_D vs η se han obtenido con 2.000 realizaciones para cada valor de η . Al comparar las gráficas con las obtenidas para σ estacionaria y desconocida (*cfr.* Figura 4.17), se aprecia una ligera degradación en los detectores no estacionarios, tanto mayor cuanto más corta es la ventana de análisis y mayor es el número de grados de libertad, pero en todos los casos menor de 1 dB. Las prestaciones del test de Rao constituyen, por tanto, una buena aproximación al TCVG. El test de Wald, sin embargo, tiene una degradación importante, especialmente en los detectores de rango N (*vid.* figuras 4.22(a), (b) y (c)). Obsérvese que el detector laplaciano de Wald para $P = 48$ y $L = 16$, tiene unas prestaciones similares al TCVG gaussiano.

Ejemplo 4.6 (TCVG laplaciano no estacionario ante un cambio brusco del nivel de ruido). En la Figura 4.23 se muestra el comportamiento de los detectores estacionarios y no estacionarios ante un cambio brusco del nivel de ruido ocurrido en la mitad de la ventana de análisis. Se han generado en este caso realizaciones de ruido laplaciano con

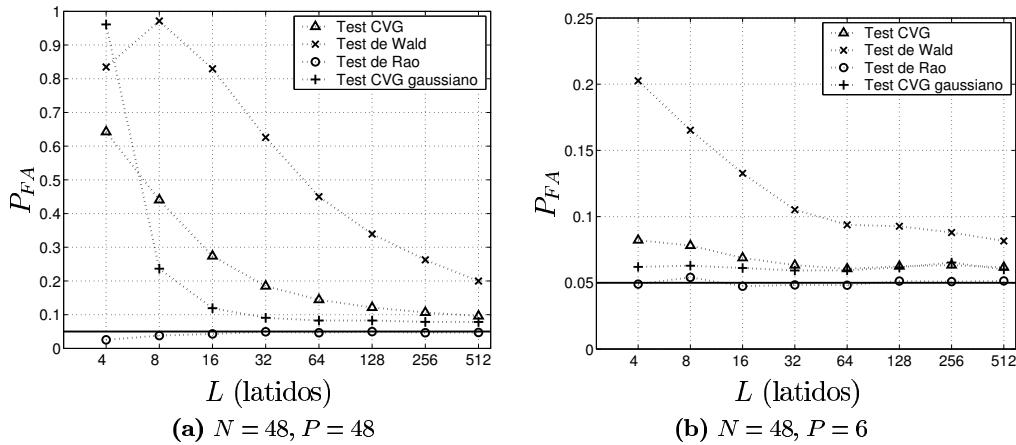


Figura 4.21: P_{FA} real obtenida por los detectores no estacionarios en ruido laplaciano estacionario, diseñando el umbral para un P_{FA} asintótica de 0,05. La línea continua indica el nivel de $P_{FA} = 0,05$.

$\sigma_i = 5 \mu V$, $i = 0, \dots, L/2 - 1$, y $\sigma_i = 20 \mu V$, $i = L/2, \dots, L - 1$, siendo $L = 32$ latidos, a los que se ha añadido una señal alterna con la forma (3.79) y la amplitud necesaria para cada valor de la RSR media $\bar{\eta}$. Se han utilizado nuevamente 10.000 realizaciones para calcular el umbral, y 2.000 para estimar cada punto de las gráficas.

En primer lugar, es de destacar que la degradación de los detectores basados en el modelo adaptativo, aunque se aprecia claramente (es del orden de 1 dB), no es tan fuerte como la observada en los detectores gaussianos donde la degradación era de más de 5 dB (cfr. Figura 3.20). En otras palabras, los modelos laplacianos se ven menos afectados que los gaussianos por la no estacionariedad del ruido. Es interesante observar que en el caso de dimensión completa, la degradación del test de Wald no estacionario es tal que su capacidad de detección es superada incluso por los tests del CVG y de Rao adaptativos.

Por tanto, puede afirmarse que los detectores no estacionarios, claramente más complejos que los detectores estacionarios, tienen una degradación despreciable ante ruido estacionario, y producen a cambio una cierta ganancia de detectabilidad (1 dB en el ejemplo) de alternancias en ruido no estacionario.

4.8.8. Prestaciones del EMV.

Las propiedades asintóticas del EMV (Teorema 3.2) permiten asegurar que el EMV de \mathbf{c} es asintóticamente normal, insesgado y eficiente. Teniendo en cuenta la cota de

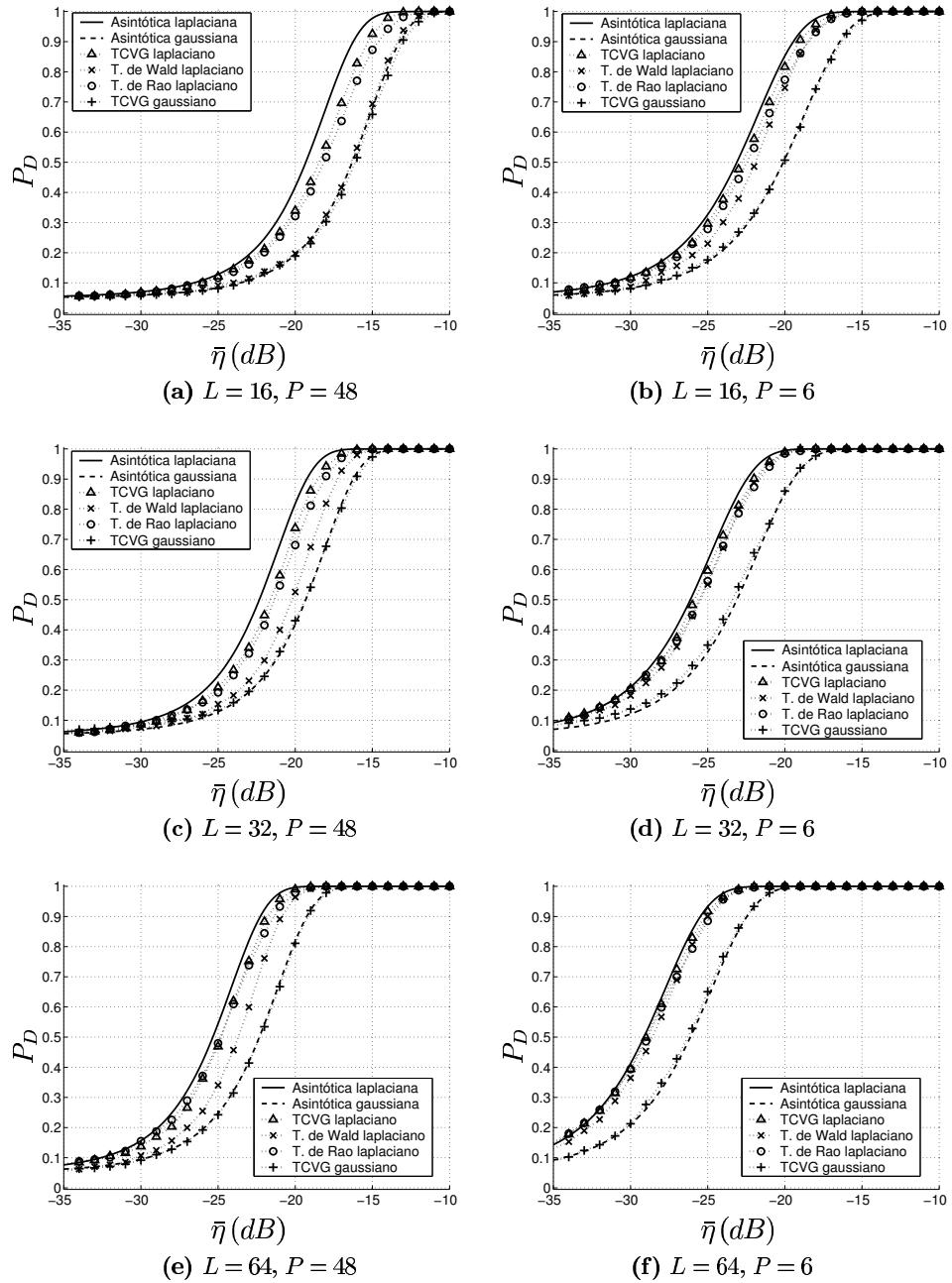


Figura 4.22: Curvas P_D vs $\bar{\eta}$ (para $P_{FA} = 0,05$) en ruido laplaciano de los detectores no estacionarios laplacianos y gaussianos, en ruido laplaciano estacionario.

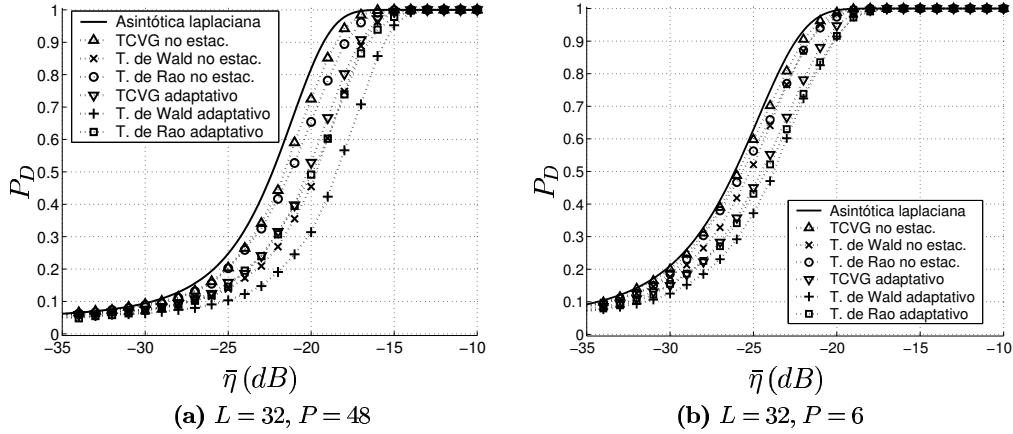


Figura 4.23: Curvas P_D vs η (para $P_{FA} = 0,05$) de los detectores laplaciános adaptativos y no estacionarios con $L = 32$ latidos, $N = 48$ muestras y subespacios de dimensiones $P = 48$ y $P = 6$.

Cramér-Rao calculada en el Apéndice 4.C, la distribución asintótica del EMV $\hat{\mathbf{c}}$ es

$$\hat{\mathbf{c}} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N} \left(\mathbf{c}, \frac{4}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \right). \quad (4.131)$$

Por tanto, el estimador de la señal alterna se aproxima asintóticamente a la distribución

$$\hat{\mathbf{a}} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N} \left(\mathbf{a}, \frac{4}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} \mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \right). \quad (4.132)$$

La varianza asintótica del error en cada muestra puede expresarse como

$$\sigma_{\varepsilon(n)}^2 = \frac{4}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} [\mathbf{T} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T]_{n,n},$$

siendo su potencia media

$$\sigma_\varepsilon^2 = E \left(\frac{1}{N} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} \right) = \frac{4}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} \frac{P}{N}. \quad (4.133)$$

La RSR asintótica del estimador puede escribirse como

$$\nu = \frac{\|\mathbf{a}\|_2^2/N}{\sigma_\epsilon^2} = \frac{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \eta_i}{P} = \frac{G_\alpha N L \bar{\eta}}{P}, \quad (4.134)$$

donde η_i es la RSR en el latido i -ésimo y $\bar{\eta}$ es la RSR media. Por tanto, la ganancia de estimación asintótica es

$$G_e = \frac{\nu}{\bar{\eta}} = L G_\alpha \frac{N}{P}, \quad (4.135)$$

donde se identifican claramente las tres aspectos que reducen el nivel de ruido en la estimación: el filtrado (no lineal) con una ventana de L latidos, el filtrado por proyección en un subespacio de señal de dimensión reducida, que produce una ganancia $\frac{N}{P}$, y la ganancia G_α debida a la no gaussianidad del ruido (3 dB en el caso laplaciano), que permite una utilización más eficiente de la información.

Ejemplo 4.7 (EMV laplaciano no estacionario). El comportamiento del EMV para ventanas de análisis finitas se estudia en el siguiente ejemplo. Se han generado realizaciones de AOT en ruido laplaciano. La forma de onda alterna ha sido la señal (3.79), con una amplitud de pico de $10 \mu V$. Se han considerado diferentes tamaños de la ventana de análisis, con $N = 48$ muestras, simulando un ruido laplaciano no estacionario con un cambio brusco de potencia a la mitad de la ventana ($\sigma_k = 5 \mu V$, $k = 0, \dots, L/2 - 1$ y $\sigma_k = 20 \mu V$, $k = L/2, \dots, L$). Además del EMV para ruido laplaciano no estacionario, se estudian las prestaciones de estimadores del EMV gaussiano no estacionario y del EMV laplaciano estacionario (que es el EMV para los modelos estacionario y adaptativo) con el objetivo de estudiar la sensibilidad de dichos EMV ante desajustes en la distribución o la estacionariedad del ruido. También se presentan las prestaciones obtenidas por el estimador de Rao (4.110), que sustituye al EMV en el test homónimo. Los resultados de esta evaluación, en términos de sesgo y desviación estándar se visualizan en la Figura 4.24.

En ella se observa que los tres EMV alcanzan un sesgo prácticamente nulo con sólo 16-32 latidos en el subespacio completo e incluso para $L = 4$ en el caso de $P = 6$. En cuanto a la desviación estándar del error, el EMV laplaciano no estacionario alcanza prácticamente la cota de Cramér-Rao para ventanas de 32 o más latidos. El EMV laplaciano estacionario también acaba acercándose a la cota de Cramér-Rao cuando crece el número de latidos empleados en la estimación. El EMV gaussiano, por su parte, converge a la cota de Cramér-Rao para el modelo gaussiano no estacionario (Apéndice 3.E), que está exactamente 3 dB por encima de la cota para el modelo laplaciano. Por otro lado, el estimador de Rao es claramente sesgado⁹, aunque presenta una buena estabilidad, con una desviación estándar cercana a la cota de Cramér-Rao¹⁰.

⁹El detector de Rao utiliza únicamente el signo de la señal, perdiéndose la información de amplitud.

¹⁰En todo caso, la desviación estándar de un estimador sesgado no está limitada por la cota de Cramér-Rao.

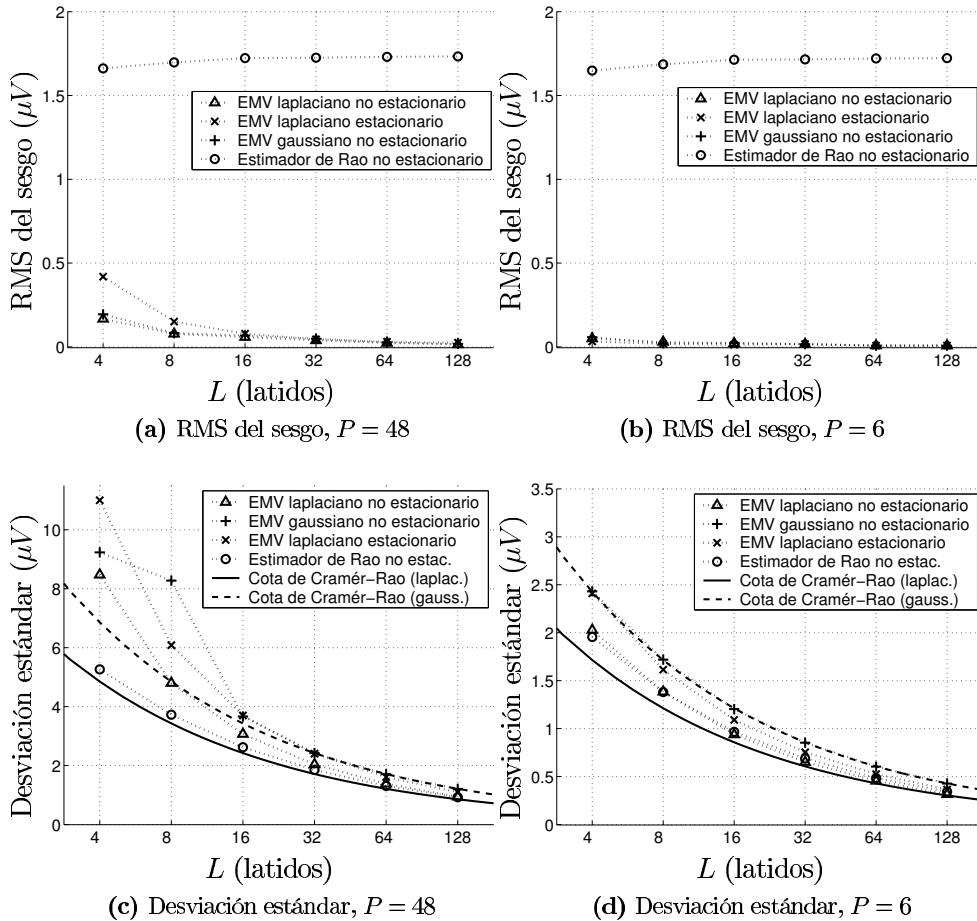


Figura 4.24: Valor RMS del sesgo $RMS(E(\mathbf{a}-\hat{\mathbf{a}}))$ (gráficas (a) y (b)) y desviación estándar del error de estimación (gráficas (c) y (d)) obtenidas experimentalmente en ruido laplaciano no estacionario por distintos EMV y el estimador de Rao para el modelo laplaciano no estacionario.

4.9. Modelos extendidos. Inclusión de la onda P.

4.9.1. Planteamiento.

Como ya hicimos en los modelos gaussianos, también en los modelos de este capítulo podemos tratar de mejorar la estimación de los parámetros de ruido incluyendo en los modelos la señal observada en otros intervalos del ciclo cardíaco (en particular, en la onda P).

Sea $\mathbf{X}^P = [\mathbf{x}_0^P, \dots, \mathbf{x}_{L-1}^P]$ la matriz formada por las L ondas P de los latidos de la ventana de observación (siendo N_P el número de muestras de la onda P). Tras eliminar el ECG de fondo, tenemos la matriz de observación global \mathbf{X}^G

$$\mathbf{X}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^P \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^P & \mathbf{x}_1^P & \dots & \mathbf{x}_{L-1}^P \\ \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_{L-1} \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

con

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i^P = \mathbf{w}_i^P, & i = 0, \dots, L-1. \\ \mathbf{x}_i = \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{Tc}}_{\mathbf{a}_i} e_i (-1)^i + \mathbf{w}_i, & i = 0, \dots, L-1. \end{cases} \quad (4.137)$$

donde los $w_i^P[n]$ y los $w_i[n]$ son variables aleatorias independientes con distribución gaussiana generalizada $\mathcal{GG}(0, \sigma_i, \alpha)$. Se asume, por tanto, estacionariedad dentro de un mismo latido.

4.9.2. Modelo gaussiano generalizado estacionario.

En este modelo se asume que la desviación estándar del ruido es conocida e igual en todos los latidos $\sigma_i = \sigma$, $i = 0, \dots, L-1$. Dado que además las muestras de ruido se asumen independientes, la información aportada por las muestras de la onda P no mejora el conocimiento del ruido que afecta al ST-T. Las muestras de la onda P son, por tanto, ignoradas en este modelo ($l_G(\mathbf{X}^G) = l_G(\mathbf{X})$, etc.).

4.9.3. Modelo gaussiano generalizado adaptativo.

En este modelo la desviación estándar del ruido (supuesta constante en la ventana de análisis) es desconocida y debe ser estimada a partir de los datos. Dada la asunción de estacionariedad intralatido, los métodos de análisis pueden aprovechar la información adicional proporcionada por las muestras de la onda P.

4.9.3.1. Detectores y estimadores.

La FDP de las señales observadas en el modelo extendido es

$$p(\mathbf{X}^G; \mathbf{c}, \sigma^2) = \left(\frac{\alpha \beta(\alpha)}{2 \Gamma(1/\alpha) \sigma} \right)^{(N+N_P)L} \quad (4.138)$$

$$\exp \left(- \left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma} \right)^\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \left(\left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha + \left\| \mathbf{x}_i^P \right\|_\alpha^\alpha \right) \right). \quad (4.139)$$

Es fácil comprobar que el EMV de \mathbf{c} no se ve influido por los datos adicionales, y viene dado por (4.69). Sin embargo, el EMV de $\hat{\sigma}$ bajo ambas hipótesis es ahora

$$\hat{\sigma}_1^\alpha = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{(N+N_P)L} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha + \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i^P \right\|_\alpha^\alpha \right) \quad (4.140)$$

$$\hat{\sigma}_0^\alpha = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{(N+N_P)L} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i \right\|_\alpha^\alpha + \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i^P \right\|_\alpha^\alpha \right). \quad (4.141)$$

El detector TCVG equivalente es

$$l_G(\mathbf{X}^G) = 2 \beta^\alpha(\alpha) \frac{\left(\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i \right\|_\alpha^\alpha - \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right)}{\hat{\sigma}_1^\alpha} \begin{cases} \gamma' & \text{if } \mathcal{H}_1 \\ \gamma & \text{if } \mathcal{H}_0 \end{cases} \quad (4.142)$$

con $\gamma' = (N+N_P)L(\gamma^{\frac{\alpha}{N+N_P}} - 1)$. La única diferencia con respecto a (4.75) es la forma de estimar $\hat{\sigma}_1^\alpha$, que ahora incluye tanto las muestras del complejo ST-T como las de la onda P.

Los tests de Wald y de Rao (4.77) y (4.78) son válidos para el modelo extendido a la onda T, sin más que sustituir los EMV $\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_0$ por sus versiones extendidas (4.140) y (4.141).

4.9.3.2. Prestaciones.

Puede comprobarse que la matriz de Fisher para el modelo extendido es

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T} & \mathbf{0}_{P \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times P} & \frac{(N+N_P)L}{\alpha \sigma^{2\alpha}} \end{bmatrix}. \quad (4.143)$$

Por tanto, las muestras adicionales sólo afectan a la partición $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta})$ de la matriz de información de Fisher (*cfr.* Apéndice 4.B). Dado el carácter diagonal por bloques de la matriz de Fisher (4.143), la submatriz $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta})$ no influye en el parámetro de no centralidad, cuyo valor es

$$\lambda = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \|\mathbf{T} \mathbf{c}\|_2^2. \quad (4.144)$$

Por tanto, las prestaciones asintóticas de los detectores de AOT son las misma si se utilizan o no las muestras de la onda P (4.92). No obstante los detectores para el modelo extendido emplean $(N+N_P)L$ muestras en las estimaciones de σ y, por tanto, sus prestaciones se aproximarán más a las asintóticas que las de los que utilizan sólo información de la repolarización.

4.9.4. Modelo gaussiano generalizado no estacionario.

Las muestras de la onda P pueden utilizarse en este modelo para estimar el nivel de ruido presente dentro de cada latido.

4.9.4.1. Detectores y estimadores.

La FDP de la señal observada en el modelo extendido es

$$p(\mathbf{X}^G; \mathbf{c}, \{\sigma_i^2\}) = \left(\frac{\alpha \beta(\alpha)}{2 \Gamma(1/\alpha)} \right)^{(N+N_P)L} \quad (4.145)$$

$$\frac{\exp \left(-\beta^\alpha (\alpha) \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\sigma_i^\alpha} \left(\left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha + \left\| \mathbf{x}_i^P \right\|_\alpha^\alpha \right) \right)}{\prod_{i=0}^{L-1} \sigma_i^{(N+N_P)}}. \quad (4.146)$$

Los EMV de \mathbf{c} y $\hat{\sigma}_{i,1}^\alpha$ bajo \mathcal{H}_1 deben cumplir

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha}{\hat{\sigma}_{i,1}^\alpha} = \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \frac{\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,1}^\alpha} \right\|_\alpha^\alpha \quad (4.147)$$

$$\hat{\sigma}_{k,1}^2 = \frac{1}{N + N_P} \left(\left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha + \left\| \mathbf{x}_i^P \right\|_\alpha^\alpha \right), \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (4.148)$$

El acoplamiento entre ambas ecuaciones obliga a utilizar procedimientos iterativos. En este caso, puede utilizarse una sencilla adaptación del Algoritmo 4.2 (Sección 4.7.4). Por otro lado, bajo \mathcal{H}_0

$$\hat{\sigma}_{k,0}^2 = \frac{1}{N + N_P} (\left\| \mathbf{x}_i \right\|_\alpha^\alpha + \left\| \mathbf{x}_i^P \right\|_\alpha^\alpha), \quad k = 0, \dots, L-1. \quad (4.149)$$

La expresión del TCVG, el test de Wald y el test de Rao tienen la misma forma que (4.102), (4.105) y (4.108) sin más que calcular los EMV según lo expresado en esta sección.

4.9.4.2. Prestaciones.

La matriz de Fisher para el modelo extendido a la onda P es

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{G_\alpha}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T} & \mathbf{0}_{P \times L} \\ \mathbf{0}_{L \times P} & \frac{N + N_P}{\alpha} \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_0^{2\alpha}}, \frac{1}{\sigma_1^{2\alpha}}, \dots, \frac{1}{\sigma_{L-1}^{2\alpha}} \right) \end{bmatrix}. \quad (4.150)$$

Al igual que en el modelo adaptativo, las muestras adicionales sólo afectan a la submatriz de Fisher $\mathbf{I}_{\theta_m \theta_m}(\boldsymbol{\theta})$ correspondiente a los parámetros molestos (cfr. Apéndice 4.C). Como la matriz de Fisher (4.150) es diagonal por bloques, la submatriz $\mathbf{I}_{\theta_m \theta_m}(\boldsymbol{\theta})$ no influye en el parámetro de no centralidad, cuyo valor es (4.144), y tampoco lo hace en la distribución asintótica del EMV de la alternancia. No obstante, para una ventana de análisis finita, la estimación de los parámetros molestos es más precisa si se utilizan las muestras de la onda P, por lo que sus prestaciones se acercan más a las asintóticas que si el análisis se limita a la repolarización.

4.10. Aplicación secuencial de los métodos estudiados.

Los métodos estudiados en las secciones previas permiten un análisis localizado en una ventana de L latidos. Para aplicarlos al ECG real debemos deslizar la ventana de observación hasta cubrir el registro completo.

4.10.1. Modelo gaussiano generalizado estacionario.

Denotando por $\mathbf{X}_l = [\mathbf{x}_{l-L+1}, \dots, \mathbf{x}_l]$, $l = L - 1, \dots, M - 1$ la matriz que contiene L latidos consecutivos, finalizando en el l -ésimo, la versión secuencial de los métodos para el modelo gaussiano generalizado estacionario son los siguientes:

$$l_G(\mathbf{X}_l) = 2 \left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma} \right)^\alpha \left(\sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_{l-L+1+i}\|_\alpha^\alpha - \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_{l-L+1+i} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_l e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right) \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_0 \end{matrix} \gtrless \gamma', \quad (4.151)$$

$$T_W(\mathbf{X}_l) = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \|\hat{\mathbf{a}}_l\|_2^2 \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_0 \end{matrix} \gtrless \gamma_W, \quad (4.152)$$

$$T_R(\mathbf{X}_l) = \frac{L}{4G_\alpha \sigma^{2\alpha-2}} \left\| \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_T \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_{l-L+1+i}) e_i (-1)^i \right\|_2^2 \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_0 \end{matrix} \gtrless \gamma_R. \quad (4.153)$$

El cálculo secuencial del EMV $\hat{\mathbf{a}}_l$ puede interpretarse como un M-filtro vectorial¹¹ adaptado a la forma del episodio $\{e_i (-1)^i\}$ y restringido a un subespacio.

$$\hat{\mathbf{a}}_l = \arg \min_{\mathbf{a}_l \in \langle \mathbf{T} \rangle} \sum_{i=0}^{L-1} \left| \mathbf{x}_{l-L+1+i} - \frac{1}{2} \mathbf{a}_l e_i (-1)^i \right|^\alpha \quad (4.154)$$

$$= \arg \min_{\mathbf{a}_l \in \langle \mathbf{T} \rangle} \sum_{i=0}^{L-1} |e_i|^\alpha \left| \frac{2 \mathbf{x}_{l-L+1+i} (-1)^i}{e_i} - \mathbf{a}_l \right|^\alpha$$

$$= \mathbf{T} \arg \min_{\mathbf{c}_l} \sum_{i=0}^{L-1} |e_i|^\alpha \left| \frac{2 \mathbf{x}_{l-L+1+i} (-1)^i}{e_i} - \mathbf{T} \mathbf{c}_l \right|^\alpha$$

$$= F_{\alpha, \{e_i\}, \langle \mathbf{T} \rangle}(\mathbf{x}_{l-L+1}, \mathbf{x}_{l-L+2}, \dots, \mathbf{x}_l). \quad (4.155)$$

¹¹Un M-filtro vectorial es la aplicación de un M-estimador vectorial en forma de ventana deslizante. Se trata de la extensión natural del M-filtro escalar.

En general, $\hat{\mathbf{a}}_l$ puede calcularse utilizando el Algoritmo 4.1 para cada desplazamiento de la ventana. Si $P = N$, el M-filtro vectorial es equivalente a un banco de N M-filtros adaptados escalares, aplicados a cada una de las muestras del complejo

$$\hat{a}_l[n] = F_{\alpha, e_i}(x_{l-L+1}[n], \dots, x_l[n]) = \arg \min_{a_l[n]} \sum_{i=0}^{L-1} |e_i|^\alpha |2x_{l-L+1+i}[n](-1)^i/e_i - a_l[n]|^\alpha. \quad (4.156)$$

El M-filtro F_{α, e_i} es un filtro lineal adaptado para $\alpha = 2$ (modelo gaussiano) y un filtro de mediana adaptado para $\alpha = 1$ (modelo laplaciano).

4.10.2. Modelo gaussiano generalizado adaptativo.

Las versiones secuenciales de los detectores TCVG, de Wald y de Rao para el modelo adaptativo son

$$l_G(\mathbf{X}_l^G) = 2\beta^\alpha \frac{\left(\sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_{l-L+1+i}\|_\alpha^\alpha - \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_{l-L+1+i} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_l e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right)}{\hat{\sigma}_1^\alpha(l)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \gamma', \quad (4.157)$$

$$T_W(\mathbf{X}_l^G) = \frac{G_\alpha L}{4\hat{\sigma}_1^2(l)} \|\hat{\mathbf{a}}_l\|_2^2 \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \gamma_W, \quad (4.158)$$

$$T_R(\mathbf{X}_l^G) = \frac{L}{4G_\alpha \hat{\sigma}_0^{2\alpha-2}(l)} \left\| \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_T \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_{l-L+i+1}) e_i (-1)^i \right\|_2^2 \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \gamma_R, \quad (4.159)$$

$l = 0, \dots, M - 1$, donde $\hat{\mathbf{a}}_l$ es la salida del M-filtro adaptado (4.154). El parámetro de dispersión del ruido se estima localmente en la ventana de L latidos

$$\hat{\sigma}_1^\alpha(l) = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{(N + N_p)L} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_{l-L+i+1} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}_l e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha + \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_{l-L+i+1}^P\|_\alpha^\alpha \right) \quad (4.160)$$

$$\hat{\sigma}_0^\alpha(l) = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{(N + N_p)L} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_{l-L+i+1}\|_\alpha^\alpha + \sum_{i=0}^{L-1} \|\mathbf{x}_{l-L+i+1}^P\|_\alpha^\alpha \right). \quad (4.161)$$

para $l = 0, \dots, M - L + 1$. La estimación temporalmente localizada del nivel de ruido permite la adaptación del detector a las variaciones lentas del ruido sin necesidad de variar el umbral.

4.10.3. Modelo gaussiano generalizado no estacionario.

Las versiones secuenciales del TCVG y el test de Wald son

$$l_G(\mathbf{X}_l^G) = \frac{2N}{\alpha} \sum_{i=0}^{L-1} (\ln \hat{\sigma}_{l-L+i+1,0}^\alpha(l) - \ln \hat{\sigma}_{l-L+i+1,1}^\alpha(l)) \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \gamma' \quad (4.162)$$

y

$$T_W(\mathbf{X}_l) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} \frac{\|\hat{\mathbf{a}}_l\|_2^2}{2} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{<}{\mathcal{H}_0}} \gamma_W. \quad (4.163)$$

Los EMV $\hat{\mathbf{a}}_l$ y $\{\hat{\sigma}_{i,1}(l)\}$ se obtienen resolviendo el sistema acoplado

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{i,1}^2(l) = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{N+N_P} \left(\|\mathbf{x}_{l-L+1+i}^{P_l}\|_2^2 + \left\| \mathbf{x}'_{l-L+1+i} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{a}}'_l e_i (-1)^i \right\|_2^2 \right) \\ \hat{\mathbf{a}}_l = \arg \min_{\mathbf{a} \in \langle \mathbf{T} \rangle} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\left\| \mathbf{x}_{l-L+1+i} - \frac{1}{2} \mathbf{a}_l e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha}{\hat{\sigma}_{i,1}^\alpha}. \end{array} \right. \quad (4.164)$$

Los EMV $\{\hat{\sigma}_{i,0}(l)\}$ se estiman como

$$\hat{\sigma}_{i,0}^\alpha(l) = \frac{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}{N+N_P} \left(\|\mathbf{x}_{l-L+1+i}^{P_l}\|_\alpha^\alpha + \|\mathbf{x}'_{l-L+1+i}\|_\alpha^\alpha \right). \quad (4.165)$$

A diferencia de los anteriores, el test de Rao puede calcularse directamente a partir de la señal observada

$$T_R(\mathbf{X}_l^G) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2(l)}} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i(-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,0}(l)} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_{l-L+i+1}) \right\|_2^2 \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{<}{\mathcal{H}_0}} \gamma_R.$$

Nótese que, en general $\hat{\sigma}_{i,1}(l+k) \neq \hat{\sigma}_{i+k,1}(l)$, ya que bajo \mathcal{H}_1 , el nivel de ruido estimado depende de la estimación de la alternancia, que a su vez varía al deslizar la ventana de análisis. Por tanto, el TCVG y el test de Wald no pueden aprovechar los valores de $\hat{\sigma}_{i,1}(l)$ calculados previamente, debiéndose estimar numéricamente la varianza en cada latido cada vez que se calcula el estadístico de detección. Sin embargo, bajo \mathcal{H}_0 , basta con estimar $\hat{\sigma}_{i,0}(l)$ una única vez por latido, ya que $\hat{\sigma}_{i,0}(l+k) = \hat{\sigma}_{i+k,0}(l)$.

4.11. Comparación con otros métodos publicados.

Los modelos de ruido gaussiano generalizado, y en particular, la propuesta de los detectores laplacianos representa una novedad respecto a los métodos propuestos en la literatura.

Los métodos propuestos en esta sección se basan en $\text{EMN}\ell_\alpha$ no lineales. Esta característica contrasta con la mayoría de los métodos encontrados en la literatura. No obstante, el paradigma de los M-filtros, permite considerar los detectores gaussianos generalizados como una generalización de los métodos basados en filtros lineales. Así, si $\mathbf{T} = \mathbf{I}_{N \times N}$,

tenemos que el EMV para los modelos estacionario y adaptativo puede expresarse como

$$\begin{aligned}
 \hat{a}[n] &= \arg \min_{a[n]} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| x_i[n] - \frac{1}{2} a[n] e_i (-1)^i \right\|_{\alpha}^{\alpha} \\
 &= \arg \min_{a[n]} \sum_{i=0}^{L-1} |e_i|^{\alpha} \left\| \underbrace{2 x_i[n] e^{-j\pi n}}_{\zeta_i[n]} / e_i - a[n] \right\|_{\alpha}^{\alpha} \\
 &= M_{\alpha} \left(|e_0|^{\alpha} \diamond \frac{\zeta_0[n]}{e_0}, |e_1|^{\alpha} \diamond \frac{\zeta_1[n]}{e_1}, |e_{L-1}|^{\alpha} \diamond \frac{\zeta_{L-1}[n]}{e_{L-1}} \right). \quad (4.166)
 \end{aligned}$$

Cada muestra de alternancia estimada $\hat{a}[n]$ puede interpretarse como una demodulación compleja generalizada, donde la señal demodulada se filtra con un M-filtro ponderado (*vid. (Gonzalez y Arce 2002)*) $M_{\alpha}(\cdot)$ en lugar de emplear un filtro lineal paso-bajo. En el modelo no estacionario, el peso que tiene cada muestra en el M-filtro es también inversamente proporcional al nivel de ruido

$$\begin{aligned}
 \hat{a}[n] &= \arg \min_{a[n]} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{\left\| x_i[n] - \frac{1}{2} a[n] e_i (-1)^i \right\|_{\alpha}^{\alpha}}{\hat{\sigma}_{i,1}^{\alpha}} \\
 &= M_{\alpha} \left(\frac{|e_0|^{\alpha}}{\hat{\sigma}_{0,1}^{\alpha}} \diamond \frac{\zeta_0[n]}{e_0}, \frac{|e_1|^{\alpha}}{\hat{\sigma}_{1,1}^{\alpha}} \diamond \frac{\zeta_1[n]}{e_1}, \frac{|e_{L-1}|^{\alpha}}{\hat{\sigma}_{L-1,1}^{\alpha}} \diamond \frac{\zeta_{L-1}[n]}{e_{L-1}} \right). \quad (4.167)
 \end{aligned}$$

En cualquiera de los dos casos, $\hat{a}[n]$ puede verse como un estimador espectral robusto de la componente a 0.5 *cpl* en cada serie $\{x_i[n]\}$. Podemos hablar, por tanto, de un M-estimador espectral.

Particularizando para el caso laplaciano, el EMV es una demodulación compleja *medianizada*, robusta ante ruido impulsivo, artefactos bruscos y latidos anómalos no eliminados. Los detectores del CVG y de Wald para los modelos estacionario y adaptativo se calculan a partir del cálculo del EMV de la alternancia, y comparten con él la robustez. En particular, el test de Wald laplaciano es proporcional a la energía de la alternancia estimada con el filtro de mediana, por lo que puede considerarse la versión laplaciana del método de la demodulación compleja (MDC). El esquema del TCVG laplaciano es claramente diferente del resto de los métodos de la literatura, y se ha comprobado que tiene mejores prestaciones que el test de Wald para ventanas de observación finitas.

El test de Rao laplaciano (4.39) trabaja con los signos de los datos observados, calculando a partir de ellos un estadístico similar al CVG gaussiano. El test resultante cuando $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ y $\{e_i\} = 1$ es

$$T_R(\mathbf{X}) = \frac{1}{2L} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \operatorname{sgn}(\mathbf{x}_i) (-1)^i \right\|_2^2 \begin{cases} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_0 \end{cases} \gtrless \gamma_R, \quad (4.168)$$

equivalente a un test basado en el conteo de cambios de signo (cruces por cero) en cada serie de amplitudes latido a latido (ya que en el sumatorio se cancelan las muestras con el

mismo signo en dos latidos consecutivos). Así, el test de Rao para estadística laplaciana presenta similitudes con la familia de detectores que agrupa al test de Rayleigh y al método de la correlación (*vid. supra* Sección 2.4.3.2, *cfr.* (2.26) y (4.168)).

Paralelamente al desarrollo de esta tesis, Nearing y Verrier publicaron el método de la media móvil modificada (Nearing y Verrier 2002) (*vid. Sección 2.4.3.3*). Aunque el planteamiento del método es heurístico, y no está basado en ningún modelo concreto, comparte un rasgo fundamental con los métodos estudiados en esta sección: utiliza una transformación no lineal (2.29) para evitar que los artefactos impulsivos presentes en el ECG degraden la estimación de la alternancia.

Como se señaló para los modelos gaussianos, el aprovechamiento de muestras de la despolarización para la estimación de los parámetros de ruido constituye otra novedad respecto a los métodos utilizados hasta el momento.

4.12. Características y validez de los modelos.

En el presente capítulo se han derivado las prestaciones teóricas asintóticas de los métodos de análisis en ruido gaussiano generalizado. Asimismo se han estudiado, mediante simulaciones de Monte Carlo, las prestaciones exactas para tamaños de datos finitos. Todo ello se ha llevado a cabo asumiendo que la señal observada cumple con los modelos respectivos. Al aplicar el análisis a señales reales, es de esperar que se produzcan desajustes entre la señal observada y los modelos, con lo que las prestaciones teóricas pueden verse degradadas. A continuación se discute la validez de los supuestos en que se sustentan los métodos, incidiendo especialmente en los métodos laplacianos.

4.12.1. Eliminación del ECG de fondo.

Como ya hicimos en los modelos gaussianos, se ha asumido que el ECG de fondo ha sido filtrado en la etapa de preprocesado. Como residuos del filtrado quedarán la variabilidad del ECG y los latidos anómalos. Dado el empleo de M-filtros robustos, los detectores para ruido supergaussiano, como el ruido laplaciano, son prácticamente insensibles a la presencia de latidos anómalos (siempre que estos se presenten en un número reducido respecto a la duración de la ventana de análisis). Por tanto, es posible realizar el análisis de AOT sin necesidad de eliminar o sustituir los latidos anómalos (asumiendo que estos forman parte del ruido observado).

No obstante, la forma en que se lleva a cabo este filtrado puede condicionar las prestaciones de los modelos no gaussianos. La utilización de un filtro paso-alto lineal puede arruinar la robustez del análisis subsecuente. Así, al filtrar linealmente las series latido a latido, si existen artefactos impulsivos (p. ej. los producidos por latidos ectópicos) la energía de los mismos se dispersa entre los latidos vecinos, siguiendo el patrón de la respuesta impulsional del filtro (se trata además, de un patrón alternante, ya que sigue la respuesta impulsional de un filtro paso alto). Aunque el filtro no lineal de análisis (por ejemplo el

filtro de mediana) es inmune a valores extremos aislados, puede generar falsas detecciones al interpretar la alta energía alterna en latidos consecutivos como un episodio de alternancias.

La solución a este problema pasa por utilizar filtros no lineales para eliminar el ECG de fondo, o bien utilizar filtros lineales muy cortos, como el diferenciador con respuesta impulsional $h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$. Este filtro mantiene la amplitud de la componente alterna, eliminando la componente repetitiva y atenuando las componentes de baja frecuencia. Como su respuesta impulsional dura tan sólo 2 latidos, cualquier artefacto impulsivo se dispersa únicamente al latido inmediatamente posterior. Por tanto, para las duraciones típicas de la ventana de análisis, las etapas de detección y estimación, basadas en un filtro de mediana para el modelo laplaciano, serán insensibles a la presencia de latidos anómalos. La utilización de un filtro diferenciador como filtro de eliminación de tendencias tiene además la ventaja de su sencillez computacional frente al uso de filtros no lineales.

4.12.2. Modelo de ruido.

4.12.2.1. Distribución laplaciana.

La búsqueda de metodologías robustas a la par que matemáticamente tratables y computacionalmente simples, nos ha llevado a estudiar con interés especial la distribución de ruido laplaciana. No se pretende con ello que la distribución laplaciana sea el mejor modelo posible para el ruido real presente en el ECG, sino llegar a una solución de compromiso, entre la adecuación a la distribución del ruido real, que es esencialmente supergaussiana (*vid. infra* Sección 5.3) y la sencillez de los métodos derivados. Las simulaciones de Monte Carlo realizadas en este capítulo tienen la limitación de que asumen una perfecta adecuación entre la FDP del ruido simulado y la asumida en los modelos respectivos. El comportamiento ante ruido real se estudia mediante simuladores más realistas en el Capítulo 5.

4.12.2.2. Conocimiento y estacionariedad de σ .

El modelo estacionario asume que la desviación estándar del ruido es conocida y constante. Por tanto, los detectores deben diseñarse para un valor nominal $\sigma = \sigma_{\text{nom}}$. Si el ruido en la señal observada tiene una desviación estándar σ_{obs} , tenemos que la P_{FA} asintótica para el TCVG es de

$$P_{FA} = Pr(l_G(\mathbf{X}) > \gamma') = Q_{\chi_P^2} \left(\gamma' \frac{\sigma_{\text{nom}}^\alpha}{\sigma_{\text{obs}}^\alpha} \right). \quad (4.169)$$

La expresión (4.169) indica que la sensibilidad ante variaciones del nivel de ruido es menor cuanto menor es el parámetro de forma α . Así, el TCVG laplaciano estacionario es algo menos sensible que el TCVG gaussiano estacionario ante variaciones del nivel de ruido.

La Figura 4.25 muestra la sensibilidad de la P_{FA} del TCVG laplaciano estacionario ante desajustes respecto al nivel de ruido nominal $\Delta = 10 \log(\sigma_{\text{obs}}^2 / \sigma_{\text{nom}}^2)$ (dB). El TCVG laplaciano precisa un desajuste doble para que el efecto en la P_{FA} sea el mismo que en el TCVG gaussiano (*cfr.* Figuras 4.25 y 3.27).

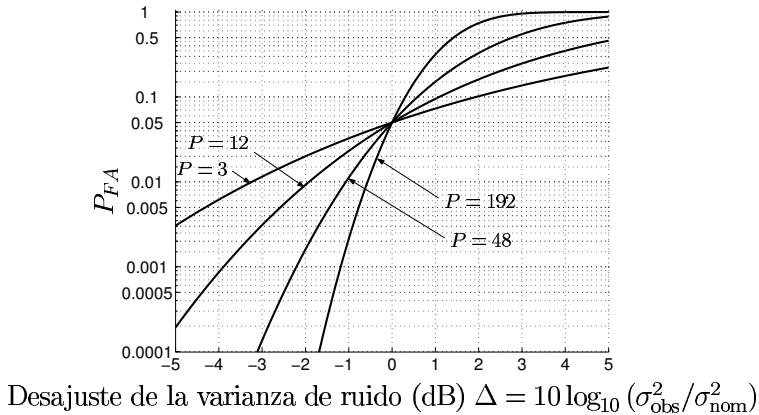


Figura 4.25: Sensibilidad de la P_{FA} al desajuste de la varianza de ruido real respecto a la varianza de diseño para una P_{FA} nominal de 0,05.

El estadístico del test de Wald estacionario es inversamente proporcional al valor de σ^2 para cualquier α . Por tanto, su sensibilidad asintótica ante variaciones del nivel de ruido coincide con la de los modelos gaussianos (Figura 3.27). El estadístico del test de Rao, por su parte, depende inversamente de $\sigma^{2\alpha-2}$. Por tanto, el test de Rao laplaciano (detector de signo) es totalmente insensible a las variaciones de σ respecto al valor nominal¹². El EMV de la AOT tampoco depende del valor nominal de σ .

El modelo adaptativo (Sección 4.7) considera que σ es desconocida, aunque estacionaria en la ventana de observación. Se consiguen así detectores adaptativos que mantienen la P_{FA} constante (CFAR) ante fluctuaciones lentas del nivel de ruido. Esto se consigue merced a una mínima degradación de las prestaciones respecto a los detectores estacionarios (*cfr.* Figuras 4.10 y 4.17). Para tener un detector adaptativo y asintóticamente CFAR ante variaciones transitorias del nivel de ruido, hay que recurrir al modelo no estacionario (Sección 4.8). No obstante, las diferencias entre los detectores laplacianos adaptativos y los detectores laplacianos no estacionarios son bastante menores que las observadas entre los detectores gaussianos homólogos (Ejemplo 4.6, Figura 4.23).

4.12.2.3. Correlación intralatido.

En los modelos gaussianos generalizados se ha obviado la posible correlación entre las muestras de un mismo latido, dada la dificultad de su tratamiento matemático. En la

¹²De hecho, el test de Rao para el modelo laplaciano estacionario coincide con el correspondiente al modelo adaptativo.

literatura sobre detección en ruido no gaussiano, encontramos alternativas en las que lo que se modela no es el ruido observado, sino la señal de entrada a un filtro coloreador que genera el ruido observado. Así, Kay y Sengupta proponen modelar el ruido observado como $\mathbf{w}_i = \mathbf{D} \mathbf{w}'_i$, donde \mathbf{w}'_i es un vector de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con una cierta distribución no gaussiana (Kay y Sengupta 1993). Del mismo modo, podríamos asumir que los modelos estudiados en este capítulo se refieren a las señales blanqueadas, que tras pasar por un filtro coloreador generan la señal observada. Ha de notarse, sin embargo, que asumiendo que \mathbf{w}'_i es gaussiana generalizada, la estadística del ruido observado \mathbf{w}_i no será ya gaussiana generalizada. De todos modos, se ha mostrado para ruido gaussiano (Sección 3.10.2.6) que el funcionamiento de los detectores para ruido incorrelado son robustos aun cuando el ruido está correlado, y la degradación es mínima al reducir la dimensión del subespacio de señal.

4.12.3. Modelo de señal (AOT).

El modelo de señal alternaente en los modelos gaussianos generalizados es el mismo que en los modelos gaussianos del Capítulo 3. Los desajustes respecto al modelo (no estacionariedad de la morfología alternaente, desajustes en la evolución $\{e_i\}$ y el subespacio $\langle \mathbf{T} \rangle$) se traducen en sesgos de los EMV y degradaciones en las prestaciones de los detectores, de forma similar a lo estudiado en la Sección 3.10.3.

4.12.4. Comportamiento ante latidos anómalos y artefactos impulsivos.

Los EMV de los modelos laplacianos son intrínsecamente robustos ante latidos anómalos, artefactos impulsivos o ráfagas cortas de ruido que afecten a un número reducido de latidos, ya que están basados en filtros de mediana. Esta robustez se traduce en los estadísticos de decisión. Así, el TCVG estacionario es prácticamente insensible a latidos anómalos. En el caso del modelo adaptativo (σ desconocida), el numerador no se ve afectado por los latidos anómalos, pero éstos, al no ser considerados como parte de la alternancia, pasan a engrosar la estimación del nivel de ruido $\hat{\sigma}_1$, incrementando el denominador y haciendo que el detector se insensibilice temporalmente mientras haya latidos anómalos en la ventana de análisis. Algo similar sucede en los detectores no estacionarios, pero el latido anómalo será ignorado en el detector si el latido anómalo eleva el nivel de ruido estimado en el latido por encima del estimado en el resto de latidos. Estas características podrán comprobarse en el Capítulo 5.

4.12.5. Complejidad computacional.

La complejidad computacional es una gran limitación de los métodos no gaussianos. Se ha comprobado, sin embargo, que en el caso particular de $\alpha = 1$, con subespacio

completo $\mathbf{T} = \mathbf{I}_N$, los métodos resultantes se basan en expresiones matemáticamente tratables y computacionalmente asequibles. En cuanto a los diferentes modelos de ruido, la complejidad de los métodos adaptativos es similar a la de los métodos estacionarios. Los detectores TCVG y de Wald para ruido no estacionario tienen una complejidad mayor debido al acople existente entre las ecuaciones de verosimilitud de la señal alternante y los niveles de ruido bajo \mathcal{H}_1 . Además, no es posible asegurar la convergencia del algoritmo al EMV no puede asegurarse, ya que pueden existir mínimos locales. Todas estas circunstancias suponen un salto cualitativo en la complejidad de la metodología. Este aspecto no es especialmente importante si el procesado se realiza fuera de línea, pero adquiere una relevancia primordial si el análisis se pretende realizar en tiempo real.

El test de Rao es una excepción a lo anteriormente dicho, ya que proporciona un detector cuasi-óptimo, y computacionalmente muy sencillo para cualesquiera valores de α , \mathbf{T} y $\{e_i\}$, tanto para ruido estacionario como no estacionario. El principal inconveniente es que no proporciona una forma de estimar la alternancia de forma fiable. El estimador de Rao no puede considerarse una opción ya que es un estimador sesgado, especialmente cuando la relación señal a ruido es alta. La solución pasa por utilizar el EMV u otro estimador no sesgado en los fragmentos de señal en los que el test de Rao haya detectado alternancias.

4.13. Conclusiones.

En este capítulo se han planteado modelos de señal alternante en ruido gaussiano generalizado, y se han derivado los métodos de estimación y detección, siguiendo los paradigmas del EMV y el TCVG (así como otros detectores asintóticamente equivalentes).

Nos hemos interesado especialmente en las distribuciones supergaussianas ($\alpha < 2$). En ellas el EMV (basado en la minimización de la norma ℓ_α), tiende a minusvalorar la importancia de los valores extremos en la estimación. Esta característica es deseable en el procesado del ECG, ya que la distribución de ruido tiende a ser leptocúrtica, presentando, además, un comportamiento impulsivo si se procesan latidos ectópicos o artefactos bruscos.

Si se emplean detectores y estimadores gaussianos en ruido no gaussiano, las prestaciones son asintóticamente las mismas que las obtenidas en ruido gaussiano. Sin embargo, la no gaussianidad del ruido permite utilizar las muestras observadas de un modo más eficiente si se emplean detectores y estimadores derivados para los modelos no gaussianos. Esta mejora de la eficiencia viene cuantificada en las distribuciones gaussianas generalizadas por la ganancia G_α (4.37).

De entre las distribuciones gaussianas generalizadas leptocúrticas, la distribución laplaciana es de gran interés, por combinar la robustez con una relativa tratabilidad matemática y sencillez computacional. Los métodos derivados para esta distribución están basados en filtros no lineales que son generalizaciones del filtro de mediana.

Las asunciones respecto al conocimiento previo del ruido y al grado de estacionariedad del mismo discurren paralelas a las del capítulo 3. Se han estudiado tres modelos (estacionario, adaptativo y no estacionario). Particularizando para la estadística laplaciana, sus características fundamentales son:

- El modelo laplaciano estacionario conduce a estadísticos no adaptativos y sensibles a variaciones en el nivel de ruido (no CFAR). Los detectores TCVG y de Wald se basan en filtros de mediana si $\mathbf{T} = \mathbb{I}_N$, y deben calcularse numéricamente si el subespacio de señal es de rango reducido. El test de Rao laplaciano es un detector CFAR y se calcula de forma sencilla con independencia del subespacio de señal (utiliza únicamente el signo de la señal observada).
- El modelo laplaciano adaptativo conduce a estadísticos del CVG y de Wald similares a los anteriores, pero adaptativos y CFAR ante variaciones lentas del nivel de ruido. Esto se consigue a cambio de una degradación mínima respecto a las prestaciones con el modelo estacionario. El estadístico de Rao adaptativo es el mismo que para el modelo estacionario.
- El modelo laplaciano no estacionario proporciona detectores y estimadores eficientes ante episodios de ruido no estacionario. El coste a pagar es un aumento sustancial de la complejidad computacional (incluso asumiendo que el subespacio de señal es de rango N) en los tests del CVG y de Wald. El test de Rao laplaciano es una alternativa sencilla, que alcanza prestaciones similares al TCVG (y mejores que el detector de Wald).

Los métodos derivados en este capítulo constituyen una novedad respecto a los métodos publicados en la literatura, tanto por el enfoque basado en modelos de señal no gaussianos, como por la robustez de las metodologías. Tan sólo el recientemente propuesto método de la media móvil modificada comparte la utilización de filtros no lineales para limitar el efecto de los artefactos impulsivos. En el capítulo 5 se presentan los resultados de diversos estudios de simulación que, basados en señales reales y ruido registrado, permitirán evaluar de forma más realista las diferencias entre las distintas metodologías derivadas en los Capítulos 3 y 4, así como con otros detectores relevantes en la literatura sobre AOT.

Apéndice 4.A Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano generalizado adaptativo.

Calculamos en primer lugar la derivada parcial del logaritmo de la FDP (4.24) respecto a los parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{c}$

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} = \frac{1}{2\sigma^\alpha} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right) e_i (-1)^i \quad (4.A.1)$$

donde $\mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x})$ es el resultado de aplicar la no linealidad definida por (4.32) a los elementos de \mathbf{x} . A partir de la definición de la matriz de Fisher (3.16), calculamos sus componentes como

$$E \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \right) = \frac{1}{4\sigma^{2\alpha}} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{T}^T \mathbf{G}(i, l) \mathbf{T} e_i e_l (-1)^{i+l}, \quad (4.A.2)$$

donde $\mathbf{G}(i, l) = E \left[\mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right) \left(\mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_l - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_l (-1)^l \right) \right)^T \right]$. La matriz $\mathbf{G}(i, l)$ tiene dimensiones $N \times N$ y sus elementos son $[G(i, l)]_{nm}$, $n, m = 0, \dots, N - 1$. Teniendo en cuenta que $E(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i$, podemos escribir

$$\mathbf{G}(i, l) = E \left[\mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - E(\mathbf{x}_i) \right) \left(\mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_l - E(\mathbf{x}_l) \right) \right)^T \right]. \quad (4.A.3)$$

Las muestras $x_i[n]$ y $x_l[m]$ son independientes si $i \neq l$ ó $n \neq m$. Por tanto,

$$\begin{aligned} [G(i, l)]_{nm} &= E[g_\alpha(x_i[n] - E(x_i[n])) g_\alpha(x_l[m] - E(x_l[m)))] \\ &= E[g_\alpha(x_i[n] - E(x_i[n)))] E[g_\alpha(x_l[m] - E(x_l[m)))] , \quad i \neq l, \quad n \neq m. \end{aligned} \quad (4.A.4)$$

Pero

$$E[g_\alpha(x_i[n] - E(x_i[n)))] = \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(x_i[n] - E(x_i[n))) p_{x_i[n]}(x_i[n] - E(x_i[n])) dx_i[n] = 0, \quad (4.A.5)$$

ya que $g_\alpha(x)$ es una función impar, y la FDP de $x_i[n]$ tiene simetría par respecto a su valor medio. Por tanto, $\mathbf{G}(i, l) = \mathbf{0}_{N \times N}$, si $i \neq l$, y las $\mathbf{G}(i, i)$ son matrices diagonales. Los

elementos de la diagonal son

$$\begin{aligned}
 [G(i, i)]_{nn} &= E[g_\alpha^2(x_i[n] - E(x_i[n]))] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha^2(x_i[n] - E(x_i[n])) p_{x_i[n]}(x_i[n] - E(x_i[n])) dx_i[n] \\
 &= \alpha^2 \beta^{2\alpha}(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} (x_i[n] - E(x_i[n]))^{2\alpha-2} p_{x_i[n]}(x_i[n] - E(x_i[n])) dx_i[n] \\
 &\quad (w = x_i[n] - E(x_i[n]), dw = dx_i[n]) \\
 &= \alpha^2 \beta^{2\alpha}(\alpha) \frac{\alpha \beta(\alpha)}{2 \Gamma(1/\alpha) \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} w^{2\alpha-2} \exp\left(-\left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma}\right)^\alpha |w|^\alpha\right) dw \\
 &\quad (v = w^\alpha, dv = \alpha w^{\alpha-1} dw) \\
 &= \frac{\alpha^2 \beta^{2\alpha+1}(\alpha)}{\Gamma(1/\alpha) \sigma} \int_0^{\infty} v^{1-\frac{1}{\alpha}} \exp\left(-\left(\frac{\beta(\alpha)}{\sigma}\right)^\alpha v\right) dv. \tag{4.A.6}
 \end{aligned}$$

$$= \sigma^{2\alpha-2} \alpha^2 \frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha}) \Gamma(2 - \frac{1}{\alpha})}{\Gamma^2(1/\alpha)} = \sigma^{2\alpha-2} G_\alpha \tag{4.A.7}$$

Utilizando la relación $\int_0^\infty x^\nu \exp(-ax) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+1}}$, tenemos

$$[G(i, i)]_{nn} = \sigma^{2\alpha-2} \alpha^2 \frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha}) \Gamma(2 - \frac{1}{\alpha})}{\Gamma^2(1/\alpha)} = \sigma^{2\alpha-2} G_\alpha, \tag{4.A.8}$$

definiendo

$$G_\alpha = \alpha^2 \frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha}) \Gamma(2 - \frac{1}{\alpha})}{\Gamma^2(1/\alpha)}. \tag{4.A.9}$$

Por tanto, la matriz de información de Fisher (3.17) es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I}(\mathbf{c}) &= E\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}}\right) \\
 &= \frac{1}{4\sigma^{2\alpha}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{T}^T \mathbf{G}(i, i) \mathbf{T} e_i^2, = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T}. \tag{4.A.10}
 \end{aligned}$$

De la matriz de Fisher podemos obtener:

- La cota de Cramér-Rao. Para cualquier estimador insesgado $\tilde{\mathbf{c}}$, tenemos que

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{c}}} - \frac{4\sigma^2}{G_\alpha L} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \geq 0$$

es una matriz definida positiva. Así, para una base ortonormal, tenemos que

$$Var(\tilde{c}_p) \geq \frac{4\sigma^2}{G_\alpha L}. \tag{4.A.11}$$

- El estadístico del test de Wald (3.27)

$$T_W = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \quad \hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2. \quad (4.A.12)$$

- El estadístico del test de Rao (3.29). Teniendo en cuenta que

$$-\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=\mathbf{0}} = -\frac{1}{2\sigma^\alpha} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i, \quad (4.A.13)$$

Así, estadístico de Rao es

$$\begin{aligned} T_R &= \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=\mathbf{0}} \right)^T \frac{4\sigma^2}{G_\alpha L} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \left(-\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=\mathbf{0}} \right) \\ &= \frac{4\sigma^2}{G_\alpha L} \left\| \frac{1}{2\sigma^\alpha} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_T \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i \right\|_2^2 \\ &= \frac{L}{4G_\alpha \sigma^{2\alpha-2}} \left\| \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_T \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.A.14)$$

- El parámetro de no centralidad (3.24) de la distribución asintótica del TCVG (y de los tests de Wald y de Rao):

$$\lambda = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \mathbf{c}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{c} = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}\|_2^2. \quad (4.A.15)$$

Apéndice 4.B Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano generalizado no estacionario.

En el modelo gaussiano generalizado adaptativo los parámetros desconocidos son \mathbf{c} (parámetros de señal) y σ (parámetro molesta). Por conveniencia, consideramos el parámetro molesto equivalente σ^α , de forma que $\boldsymbol{\theta} = \{\mathbf{c}, \sigma^\alpha\}$. Calculamos en primer lugar las derivadas parciales del logaritmo de la FDP (4.66) respecto a ellos

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} = \frac{1}{2\sigma^\alpha} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right) e_i (-1)^i \quad (4.B.1)$$

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^\alpha} = -\frac{NL}{\alpha \sigma^\alpha} + \beta^\alpha(\alpha) \frac{1}{\sigma^{2\alpha}} \sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha. \quad (4.B.2)$$

Las componentes de la partición $\mathbf{I}_{\theta_s \theta_s}$ de la matriz de Fisher se han obtenido ya en el Apéndice 4.A

$$E \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \right] = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T}. \quad (4.B.3)$$

El resto de componentes son

$$\begin{aligned} -E \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^\alpha} \right) \right] &= -E \left[\frac{\partial}{\partial \sigma^\alpha} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \right] \\ &= \frac{1}{2\sigma^{2\alpha}} \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{T}^T E \left(\mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right) \right) e_i (-1)^i = \mathbf{0}_{P \times 1} \end{aligned} \quad (4.B.4)$$

$$-E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\sigma^\alpha)^2} \right] = \frac{NL}{\alpha \sigma^{2\alpha}} + 2\beta^\alpha(\alpha) \frac{1}{\sigma^{3\alpha}} E \left[\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right]. \quad (4.B.5)$$

Pero

$$E \left[\sum_{i=0}^{L-1} \left\| \mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha \right] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{L-1} M'_\alpha = NLM'_\alpha,$$

donde $M'_\alpha = \frac{\sigma^\alpha}{\beta^\alpha(\alpha)} \frac{\Gamma(1+1/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} = \frac{\sigma^\alpha}{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}$ es el momento centrado absoluto de orden α de $x_i[n]$ (4.8). Por tanto,

$$\begin{aligned} -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\sigma^\alpha)^2} \right] &= -\frac{NL}{\alpha \sigma^{2\alpha}} + 2\frac{NL}{\alpha \sigma^{2\alpha}} \\ &= \frac{NL}{\alpha \sigma^{2\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.B.6)$$

De tal modo que la matriz de Fisher (3.17) es

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T} & \mathbf{0}_{P \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times P} & \frac{NL}{\alpha \sigma^{2\alpha}} \end{bmatrix}, \quad (4.B.7)$$

con $\mathbf{I}_{\theta_s \theta_s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T}$ para los parámetros de señal, $\mathbf{I}_{\theta_m \theta_m}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{NL}{\alpha \sigma^{2\alpha}}$ para el parámetro molesto σ^α , y términos cruzados nulos $\mathbf{I}_{\theta_s \theta_m}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{P \times 1}$, $\mathbf{I}_{\theta_m \theta_s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{1 \times P}$. De la matriz de Fisher obtenemos:

- La cota de Cramér-Rao. Para cualesquiera estimadores insesgados $\check{\mathbf{c}}$ y $\tilde{\sigma}^\alpha$,

$$\mathbf{C}_{\check{\mathbf{c}}} - \frac{4\sigma^2}{G_\alpha L} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \geq \mathbf{0} \quad (4.B.8)$$

y

$$\text{var}(\tilde{\sigma}^\alpha) \geq \frac{\alpha \sigma^{2\alpha}}{NL}. \quad (4.B.9)$$

- El estadístico del test de Wald (3.27) es

$$T_W = \frac{G_\alpha L}{4\hat{\sigma}_1^2} \quad \widehat{\mathbf{c}}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \widehat{\mathbf{c}} = \frac{G_\alpha L}{4\hat{\sigma}_1^2} \|\widehat{\mathbf{a}}\|_2^2. \quad (4.B.10)$$

- El estadístico del test de Rao (3.29) es

$$\begin{aligned} T_R &= \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \bigg|_{\substack{\mathbf{c}=\mathbf{0} \\ \sigma=\hat{\sigma}_0}} \right)^T \frac{4\sigma^2}{G_\alpha L} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \bigg|_{\sigma=\hat{\sigma}_0} \left(-\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \bigg|_{\substack{\mathbf{c}=\mathbf{0} \\ \sigma=\hat{\sigma}_0}} \right) \\ &= \frac{4\hat{\sigma}_0^2}{G_\alpha L} \left\| \frac{1}{2\hat{\sigma}_0^\alpha} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i \right\|_2^2 \\ &= \frac{L}{4G_\alpha \hat{\sigma}_0^{2\alpha-2}} \left\| \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) e_i (-1)^i \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.B.11)$$

- El parámetro de no centralidad (3.24) de la distribución asintótica del TCVG (y de los tests de Wald y de Rao) es el mismo que en el caso de varianza conocida.

$$\lambda = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \mathbf{c}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{c} = \frac{G_\alpha L}{4\sigma^2} \|\mathbf{a}\|_2^2, \quad (4.B.12)$$

Apéndice 4.C Matriz de información de Fisher para el modelo gaussiano generalizado no estacionario.

En este modelo, los parámetros de señal son $\boldsymbol{\theta}_s = \mathbf{c}$, siendo $\boldsymbol{\theta}_m = [\sigma_0^\alpha, \dots, \sigma_{L-1}^\alpha]$ los parámetros molestos. Calculamos en primer lugar las derivadas parciales del logaritmo de la FDP (4.94) respecto a los parámetros desconocidos

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i (-1)^i}{\sigma_i^\alpha} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right) \quad (4.C.1)$$

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_j^\alpha} = -\frac{N}{\alpha \sigma_j^\alpha} + \beta^\alpha(\alpha) \frac{1}{\sigma_j^{2\alpha}} \left\| \mathbf{x}_j - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_j (-1)^i \right\|_\alpha^\alpha, \quad j = 0, \dots, L-1. \quad (4.C.2)$$

Las componentes de la matriz de Fisher se derivan a continuación. Para los parámetros de señal,

$$E \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \right) = -\frac{1}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} \frac{e_i e_l}{\sigma_i^\alpha \sigma_l^\alpha} (-1)^{i+l} \mathbf{T}^T \mathbf{G}(i, l) \mathbf{T}, \quad (4.C.3)$$

donde

$$\mathbf{G}(i, l) = E \left(\mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_i (-1)^i \right) \left(\mathbf{g}_\alpha \left(\mathbf{x}_l - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_l (-1)^l \right) \right)^T \right) \quad (4.C.4)$$

$$= E \left(\mathbf{g}_\alpha (\mathbf{x}_i - E(\mathbf{x}_i)) (\mathbf{g}_\alpha (\mathbf{x}_l - E(\mathbf{x}_l)))^T \right). \quad (4.C.5)$$

Dado que

$$[\mathbf{G}(i, l)]_{nm} = E [g_\alpha (x_i[n] - a_i[n]) g_\alpha (x_l[m] - a_l[m])] = \delta_{i-l} \delta_{n-m} \sigma_i^{2\alpha-2} G_\alpha,$$

(vid. Apéndice 4.A), tenemos que $\mathbf{G}(i, l) = G_\alpha \sigma_i^{2\alpha-2} \delta_{i-l} \mathbb{I}_N$ y

$$E \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \right) = \frac{G_\alpha \mathbf{T}^T \mathbf{T}}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.C.6)$$

El resto de componentes son

$$-E \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_i^\alpha \partial \sigma_j^\alpha} \right\} = 0, \quad i \neq j. \quad (4.C.7)$$

$$\begin{aligned} -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\sigma_j^\alpha)^2} \right\} &= -\frac{N}{\alpha \sigma_j^{2\alpha}} \\ &\quad + 2 \beta^\alpha(\alpha) \frac{1}{\sigma_j^{3\alpha}} E \left\{ \left\| \mathbf{x}_j - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_j (-1)^j \right\|_\alpha^\alpha \right\} \end{aligned} \quad (4.C.8)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} E \left\{ \left\| \mathbf{x}_j - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{c} e_j (-1)^j \right\|_\alpha^\alpha \right\} &= E \left\{ \left\| \mathbf{x}_j - E(\mathbf{x}_j) \right\|_\alpha^\alpha \right\} \\ &\quad \sum_{n=0}^{N-1} M'_\alpha = NM'_\alpha \end{aligned} \quad (4.C.9)$$

$$= N \frac{\sigma_j^\alpha}{\beta^\alpha(\alpha)} \frac{\Gamma(1+1/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} = N \frac{\sigma_j^\alpha}{\alpha \beta^\alpha(\alpha)}, \quad (4.C.10)$$

de modo que

$$-E \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial (\sigma_j^\alpha)^2} \right\} = -\frac{N}{\alpha \sigma_j^{2\alpha}} + 2 \frac{N}{\alpha \sigma_j^{2\alpha}} = \frac{N}{\alpha \sigma_j^{2\alpha}} \quad (4.C.11)$$

Finalmente, las componentes cruzadas son

$$\begin{aligned} -E \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_j^\alpha} \right\} &= -E \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma_j^\alpha} \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \right\}^T \\ &= \frac{e_j (-1)^j}{2 \sigma_j^{2\alpha}} \mathbf{T}^T E (\mathbf{g}_\alpha (\mathbf{x}_i - E(\mathbf{x}_i))) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.C.12)$$

de manera que la matriz de Fisher (3.17) es

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{G_\alpha}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T} & \mathbf{0}_{P \times L} \\ \mathbf{0}_{L \times P} & \frac{N}{\alpha} \boldsymbol{\Sigma}^{-2\alpha} \end{bmatrix}, \quad (4.C.13)$$

donde $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_0, \dots, \sigma_{L-1})$. Así, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{G_\alpha}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \mathbf{T}^T \mathbf{T}$ para los parámetros de señal, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{\alpha} \boldsymbol{\Sigma}^{-2\alpha}$ para el parámetro molesto, y términos cruzados nulos $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_s \boldsymbol{\theta}_m}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{P \times L}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_m \boldsymbol{\theta}_s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}_{L \times P}$. De la matriz de Fisher obtenemos

- La cota de Cramér-Rao. Para cualesquiera estimadores insesgados $\check{\mathbf{c}}$ y $\{\check{\sigma}_i^\alpha\}$,

$$\mathbf{C}_{\check{\mathbf{c}}} - \frac{4(\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1}}{\sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2}} \geq 0, \quad (4.C.14)$$

y

$$\text{var}(\check{\sigma}_i^\alpha) \geq \frac{\alpha \sigma_i^{2\alpha}}{N}, i = 0, \dots, L-1. \quad (4.C.15)$$

- El estadístico del test de Wald (3.27) es

$$T_W(\mathbf{X}) = \frac{G_\alpha}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} \hat{\mathbf{c}}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} = \frac{G_\alpha}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,1}^2} \|\hat{\mathbf{a}}\|_2^2. \quad (4.C.16)$$

- El test de Rao (3.29) es

$$\begin{aligned} T_R(\mathbf{X}) &= \frac{1}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}} \left\| \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i(-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,0}^\alpha} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) \right\|_2^2 \\ &= \frac{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}}{4} \left\| \frac{2}{G_\alpha \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{i,0}^2}} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i(-1)^i}{\hat{\sigma}_{i,0}^\alpha} \mathcal{P}_{\mathbf{T}} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}_i) \right\|_2^2 \quad (4.C.17) \end{aligned}$$

- El parámetro de no centralidad (3.24) de la distribución asintótica del TCVG (y de los tests de Wald y de Rao) es

$$\lambda = \frac{G_\alpha}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \mathbf{c}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{c} = \frac{G_\alpha}{4} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} \|\mathbf{a}\|_2^2. \quad (4.C.18)$$

Capítulo 5

Evaluación de prestaciones.

5.1. Introducción.

En los capítulos anteriores se ha estudiado el problema de la detección y la estimación de alternancias de onda T desde el punto de vista de la teoría estadística de la detección. Se trata de un enfoque basado en modelos, de forma que las metodologías derivadas son apropiadas para unos determinados modelos de la señal y del ruido. Se han estudiado las prestaciones teóricas y experimentales de los detectores cuando las componentes de la señal observada (el ECG de fondo, la alternancia y el ruido) cumplen con el modelo estudiado, y algunos desajustes fácilmente modelables. No obstante, el estudio metodológico debe completarse mediante una validación de los métodos de análisis en condiciones más realistas.

La validación de los métodos mediante el análisis de señales ECG reales con AOT no es posible dada la carencia de bases de datos anotadas. La baja amplitud de la alternancia, en ocasiones por debajo del nivel de ruido, dificulta la posibilidad de obtener una base de datos con anotaciones de los episodios alternantes que se producen en el ECG. Por tanto, la validación debe realizarse sobre alternancias simuladas, donde las características de la señal deseada (la presencia o no de AOT, su amplitud y su forma de onda) están controladas.

Diversos autores han utilizado estudios de simulación para evaluar las prestaciones de los métodos de análisis de AOT (*vid. supra* Sección 2.5). La gran mayoría de estos estudios genera el ECG mediante latidos repetitivos sobre los que se simula la alternancia y a los que se añade ruido sintético (generalmente blanco, gaussiano y estacionario). La utilización de ruido sintético no permite simular las condiciones de no estacionariedad que se observan en un entorno clínico. En este capítulo se presentan los resultados de una serie de estudios de simulación realizados en condiciones de ruido realistas. Se utilizan para ello dos simuladores. En el primero el ECG es estacionario (simulado por repetición periódica de un mismo latido). Sobre este ECG de fondo se simula la alternancia y se añade ruido procedente de una base de datos de ruido fisiológico. La segunda simulación introduce las posibles variaciones fisiológicas del ECG de fondo. Para ello, se ha utilizado

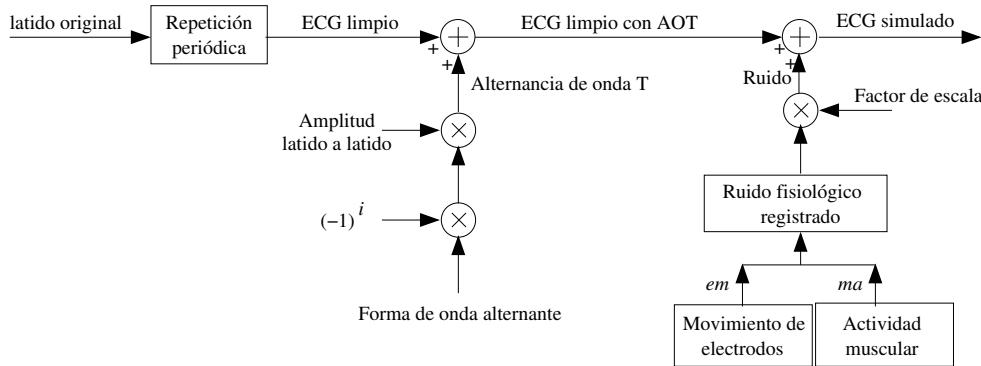


Figura 5.1: Esquema del Simulador 1 (AOT en ECG periódico con ruido fisiológico registrado).

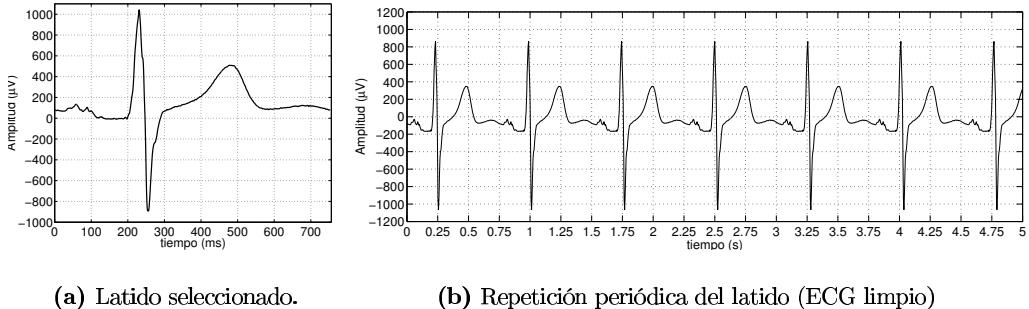
una base de datos de sujetos sanos sin AOT a la que se añade únicamente una señal alterante simulada. De este modo se tiene en cuenta la propia variabilidad fisiológica del ECG así como el ruido registrado en la derivación correspondiente. Por último, se utilizan las señales de ejemplo *Sig1*, *Sig2* y *Sig3*, utilizadas en el Capítulo 2 para ilustrar el funcionamiento de los métodos al analizar una alternancia transitoria real, en presencia de latidos ectópicos y ráfagas de ruido.

El capítulo se estructura del siguiente modo. Los esquemas de simulación utilizados para validar los métodos se presentan en la Sección 5.2. En la Sección 5.3 se caracteriza la distribución estadística, espectro y estacionariedad de dos tipos de ruido encontrados típicamente en el ECG: el ruido muscular y los artefactos de movimiento. Los estudios de simulación llevados a cabo en la Sección 5.4 permiten evaluar las prestaciones de los métodos en el análisis de AOT estacionaria. El comportamiento para AOT transitorias se estudia en la Sección 5.5. En dicha sección también se ilustra el comportamiento de los métodos en presencia de ráfagas de ruido y latidos ectópicos. El capítulo finaliza con las conclusiones, formuladas en la Sección 5.6.

5.2. Simuladores y conjuntos de datos.

5.2.1. Simulación de AOT en ruido fisiológico controlado (Simulador 1).

Para evaluar los detectores de alternancias bajo diferentes condiciones controladas de ruido, se propone la simulación de señales con el esquema de la Figura 5.1 (Simulador 1). Se generan segmentos de ECG limpios mediante la repetición y ensamblado de un único latido procedente de un registro real. La señal simulada final se forma al añadir a esta señal limpia una alternancia simulada y ruido fisiológico registrado.



(a) Latido seleccionado.

(b) Repetición periódica del latido (ECG limpio)

Figura 5.2: Generación del ECG limpio como la repetición periódica de un latido.**5.2.1.1. Generación de la señal limpia.**

Se ha escogido un latido procedente de un registro de alta resolución en reposo ($F_s = 1000 \text{ Hz}$, Resolución de amplitud: $0,6 \mu V$), y posteriormente se ha diezmado por 4 de manera que la frecuencia de muestreo final es de $F_s = 250 \text{ Hz}$. El latido utilizado se muestra en la Figura 5.2(a). La repetición periódica del latido conforma el ECG limpio sin alternancias (Figura 5.2(b)).

5.2.1.2. Simulación de AOT.

Se ha seleccionado manualmente una ventana de 64 muestras (256 ms) que cubre el segmento ST y la onda T (Figura 5.3(a)). La alternancia se simula añadiendo y sustrayendo alternativamente una forma de onda con la amplitud y forma deseadas en el intervalo del complejo ST-T. Si se desea simular una alternancia no estacionaria (o simplemente un episodio que empieza en un momento dado y acaba posteriormente), la amplitud de la forma de onda alternante puede ser modulada latido a latido. La Figura 5.3 ilustra el proceso de síntesis del ECG con AOT. La forma de onda utilizada corresponde a la señal de ejemplo (3.79) para $N = 64$, con una amplitud RMS de $50 \mu V$. El ECG limpio con AOT correspondiente puede verse en la Figura 5.4.

5.2.1.3. Generación de la señal ruidosa.

Se consideran dos fuentes de *ruido fisiológico* (ruido procedente de la actividad muscular y ruido debido a los movimientos de los electrodos) procedentes de la base de datos NOISE STRESS TEST DATABASE (NSTDB) (Moody y Mark 1990). La base de datos NSTDB contiene tres registros de ruido fisiológico adquiridos mediante un sistema Holter en un sujeto con los electrodos colocados en posiciones donde la actividad eléctrica del corazón apenas era perceptible (Moody *et al.* 1984). Cada registro tiene una duración de 30 minutos y consta de dos canales adquiridos con una tasa de muestreo de 360 Hz . En cada registro hay un tipo de ruido predominante, que da nombre al mismo. Así, el registro *bw* (*baseline wander*) contiene variaciones de línea de base, en el registro *em* (*electrode*

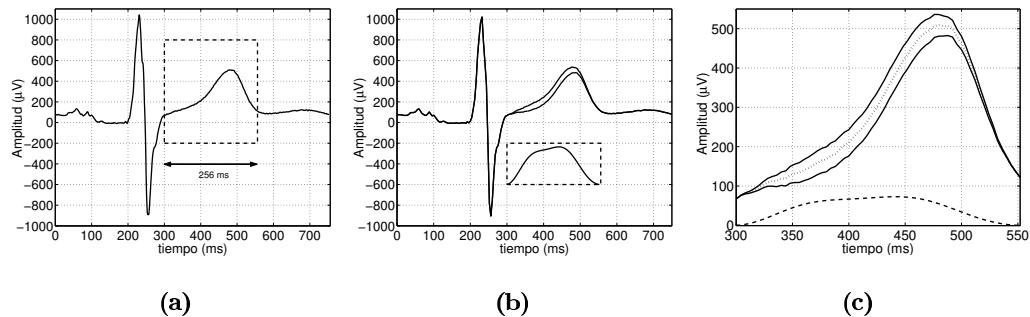


Figura 5.3: Proceso de síntesis del ECG con AOT. (a) Latido seleccionado con indicación del complejo ST-T. (b) Superposición de dos latidos consecutivos con una AOT simulada de $50 \mu V$ (RMS). La forma de onda alterna simulada (3.79) se representa en el recuadro (amplificada $\times 5$). (c) Superposición de los complejos ST-T de dos latidos consecutivos con AOT (en línea continua) y del latido original (en línea de puntos). La señal alterna se representa con la misma escala en línea discontinua.

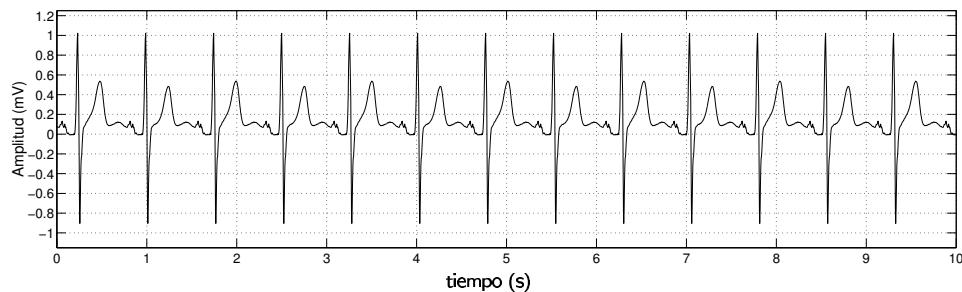


Figura 5.4: ECG limpio con una AOT de $50 \mu V$ RMS.

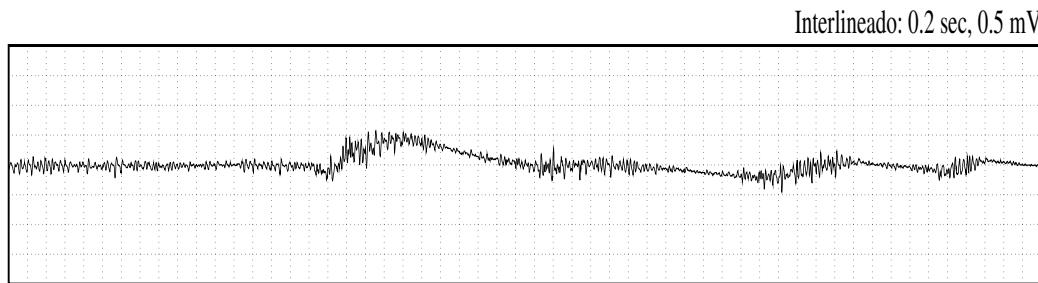


Figura 5.5: Ejemplo del registro *ma* (*muscular activity*) de la base de datos NSTDB.

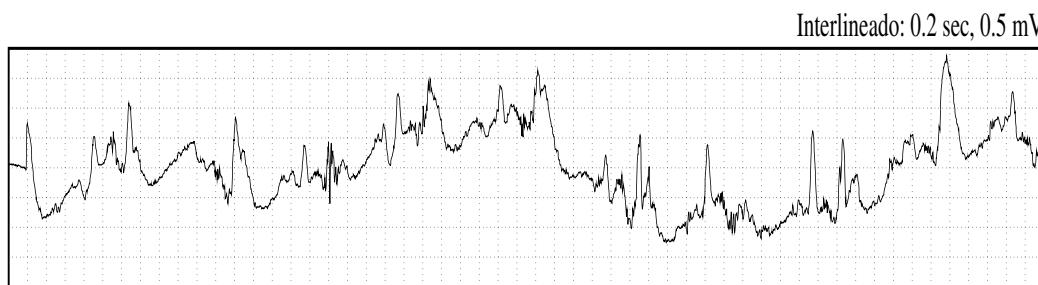


Figura 5.6: Ejemplo del registro *em* (*electrode motion*) de la base de datos NSTDB.

motion) predominan los artefactos de movimiento y en el registro *ma* (*muscular activity*) la componente predominante se debe a la actividad muscular (EMG). Utilizaremos los dos últimos ya que asumimos que la línea de base ha sido corregida en el preprocesado.

El registro *ma* contiene principalmente actividad eléctrica muscular o electromiograma (EMG), con un espectro que se solapa con el de la señal ECG, pero que se extiende a frecuencias más elevadas. En la figura 5.5 se ofrece un detalle del registro *ma*.

El registro *em* contiene artefactos de movimiento de los electrodos (usualmente el resultado de fuerzas mecánicas intermitentes sobre los electrodos), con cantidades significativas de variaciones de la línea de base y ruido muscular. En la figura 5.6 se puede observar un detalle del registro *em*.

Para poder añadir el ruido al ECG limpio con AOT, es preciso realizar en primer lugar un remuestreo de los registros de ruido, ya que la señal limpia corresponde a una tasa de muestreo de 250 Hz. Interpolando dos veces por 5 y diezmando dos veces por 6 (de forma intercalada) se alcanza la tasa de muestreo deseada.

Tal como advierten los diseñadores de la base de datos (Moody *et al.* 1984), las variaciones de baja frecuencia (que tienen una gran amplitud en algunas partes de los registros) pueden falsear el nivel de ruido *ma* o *em* que efectivamente estamos añadiendo al ECG limpio. Así, antes de añadir el ruido al ECG limpio se filtran estas variaciones de baja

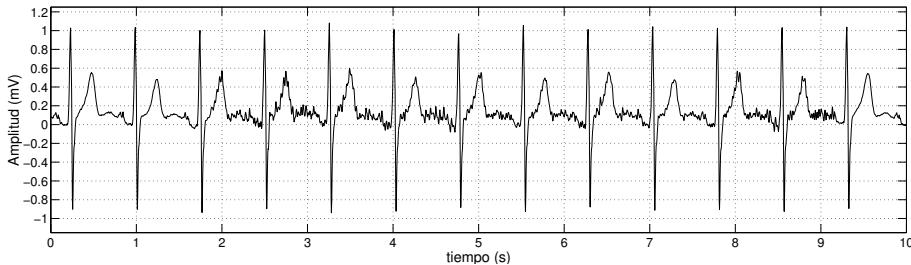


Figura 5.7: ECG simulado con AOT y ruido muscular. La señal limpia utilizada es el ECG de la Figura 5.4. Se ha sumado ruido *em* con un valor RMS nominal de $20 \mu V$ (de manera que la relación de señal alterna a ruido es de 7,95 dB).

frecuencia (componente continua y variaciones de línea de base)¹. De este modo, se puede controlar el nivel de ruido que realmente va a afectar a la etapa de análisis, ya que la fluctuación de la línea de base se elimina en el preprocesado.

La señal de ruido resultante en cada una de las derivaciones se escala en amplitud de tal forma que la potencia media calculada en todo el registro (30 minutos) sea igual a la potencia de ruido nominal que se quiere simular. El propósito es mantener el realismo de la simulación, ya que la señal ECG real experimenta variaciones notables en el nivel de ruido, especialmente en registros ambulatorios o pruebas de esfuerzo. Si la señal se normalizara en fragmentos más cortos, estaríamos perdiendo la capacidad de simular la no estacionariedad a largo plazo. Así, ha de tenerse en cuenta que cuando hablamos de una RSR en el contexto de estas simulaciones, se trata de una relación entre la potencia de señal y la potencia media de todo el registro de ruido, pero para un fragmento concreto de la señal, la RSR puede ser muy diferente.

La Figura 5.7 muestra la simulación de una señal con AOT (en concreto, la representada en la Figura 5.4) contaminada por ruido muscular. El nivel de ruido simulado nominal es de $20 \mu V$ RMS. Puede observarse que el ruido aparece en ráfagas que afectan a varios latidos consecutivos mientras que otros apenas están contaminados.

En la Figura 5.8 se ha simulado ruido del tipo *movimiento de electrodos* sobre la misma señal limpia. Se producen importantes distorsiones en la morfología de la repolarización, ya que este tipo de ruido tiene un espectro solapado con el del ECG (*vid. Figura 1.5*).

En el simulador descrito se pueden controlar los parámetros de la alternancia (amplitud, evolución y forma) y del ruido (el tipo de ruido y su potencia nominal) en la señal simulada. Esto permite controlar la calidad de la señal de cara a la obtención de las prestaciones de las diversas metodologías. Además, la utilización de ruido fisiológico registrado da realismo a la señal simulada, ya que se utiliza ruido no estacionario, de características similares a las que encontramos en el ECG adquirido en entornos ruidosos

¹Para ello se utiliza la técnica descrita en (Sörnmo 1993) consistente en sustraer a la señal una estimación de la línea de base obtenida filtrando paso-bajo una versión diezmada de la señal. Eliminamos de este modo las componentes por debajo de 2 Hz.

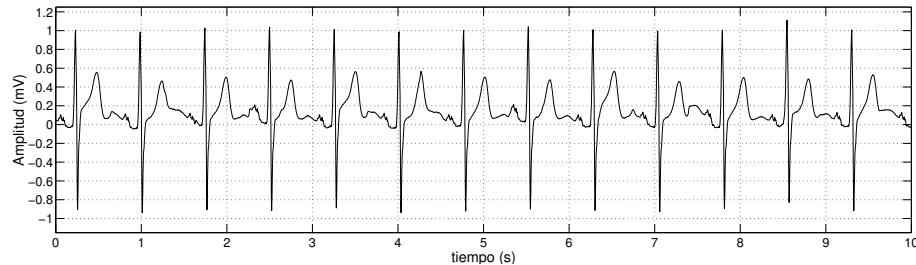


Figura 5.8: ECG simulado con AOT y artefactos de movimiento. La señal limpia utilizada es el ECG de la Figura 5.4. Se ha sumado ruido *em* con un valor RMS nominal de $20\mu V$ (de manera que la relación de señal alterna a ruido es de 7,95 dB).

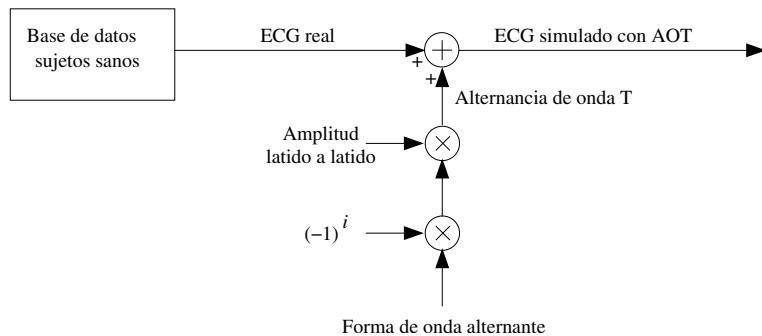


Figura 5.9: Esquema de la simulación de alternancias sobre un ECG real.

(ECG ambulatorio, prueba de esfuerzo). No obstante, el simulador está limitado por el hecho de que el ECG limpio no presenta variabilidad fisiológica, es decir, no hay variaciones dinámicas del ECG de fondo, que sí aparecen en los registros reales y pueden alterar el comportamiento del análisis. Para completar la caracterización se propone un segundo simulador.

5.2.2. Simulación de AOT en señales reales (Simulador 2).

El siguiente esquema de simulación (Simulador 2) consiste en utilizar señales reales² y simular en ellas episodios de AOT (Figura 5.9). Nótese que la variabilidad fisiológica del ECG y el ruido presentes en la señal simulada proceden de señales reales, siendo la AOT la única componente simulada.

²Se asume que no hay AOT en el ECG original. Para ello se utilizan señales ECG de sujetos sanos.

5.2.2.1. Base de datos de sujetos sanos.

Para minimizar la posibilidad de que el ECG de fondo presente alternancias, se ha utilizado para este estudio la base de datos de voluntarios sanos *Politecnico-Ca'Granda VCG/ECG Database* (Pinciroli y Rossi 1992) recopilada por el Instituto Politécnico de Milán y el Hospital Ca'Granda de la misma ciudad para estudiar la variabilidad del ECG. Se trata de 23 registros Holter de 30 minutos de duración. Se registraron las tres derivaciones ortogonales X, Y y Z (corregidas con el sistema de Frank, *vid. Tabla 1.1*), digitalizadas con una frecuencia de muestreo de 500 Hz y $2,4\mu\text{V}/\text{ADU}$. Los sujetos fueron voluntarios sanos con una edad media de 23 ± 2 años. Todos los registros presentan un ritmo sinusal con frecuencia cardíaca <100 latidos por minuto (lpm), siendo el ritmo cardíaco medio $71,6 \pm 10,0$ lpm (media \pm desviación estándar). Dado que las AOT en sujetos normales sólo se han reportado en ritmos cardíacos elevados (≥ 120 lpm) (Caref *et al.* 1997), asumiremos que cualquier detección de AOT sobre esta señal es un falso positivo (falsa alarma). Otra característica de la base de datos es que no contiene latidos ectópicos.

Una exploración visual de las señales permite determinar que la calidad de las mismas es desigual en las tres derivaciones registradas. Así, las señales se caracterizan por tener un elevado nivel de ruido en la derivación Y. Las otras dos derivaciones presentan un nivel menor. La Figura 5.10 muestra un fragmento de señal (registro p008_0), donde se aprecia la diferente calidad de las señales. El canal X contiene una señal muy limpia en el fragmento representado, mientras que la señal en el canal Y presenta, a ráfagas, niveles elevados de artefactos de movimiento, ruido muscular y variaciones de línea de base. El canal Z tiene una calidad intermedia, observándose una ráfaga de ruido muscular.

5.2.2.2. Simulación de AOT.

El procedimiento es similar al utilizado sobre un latido repetido. La base de datos está provista de anotaciones de QRS obtenidas automáticamente y revisadas manualmente. A partir de estas anotaciones, se definen en cada latido una ventana de 256 ms (128 muestras) comenzando 60 ms (30 muestras) después del punto fiducial del QRS. La alternancia se genera sumando y restando alternativamente una forma de onda al ECG en la ventana seleccionada. La Figura 5.11 muestra el mismo fragmento de ECG que la Figura 5.10 donde ahora se ha simulado un episodio de AOT con una amplitud³ de $50\mu\text{V}$ (RMS).

Este simulador presenta la ventaja de su realismo, tanto en las condiciones de ruido como en el ECG de fondo, ya que ambos proceden directamente de señales registradas. La única componente simulada es la alternancia. Por otro lado, a diferencia del simulador anterior, ya no se tiene control sobre el nivel de ruido. Los únicos parámetros controlables son los de la alternancia (amplitud, forma, duración y evolución).

Es preciso señalar, por último, que las señales de la base de datos carecen de latidos ventriculares prematuros, comunes en registros ambulatorios y que pueden afectar gra-

³La alternancia simulada es la que venimos utilizando como ejemplo dada por (3.79), con $N = 128$ muestras.

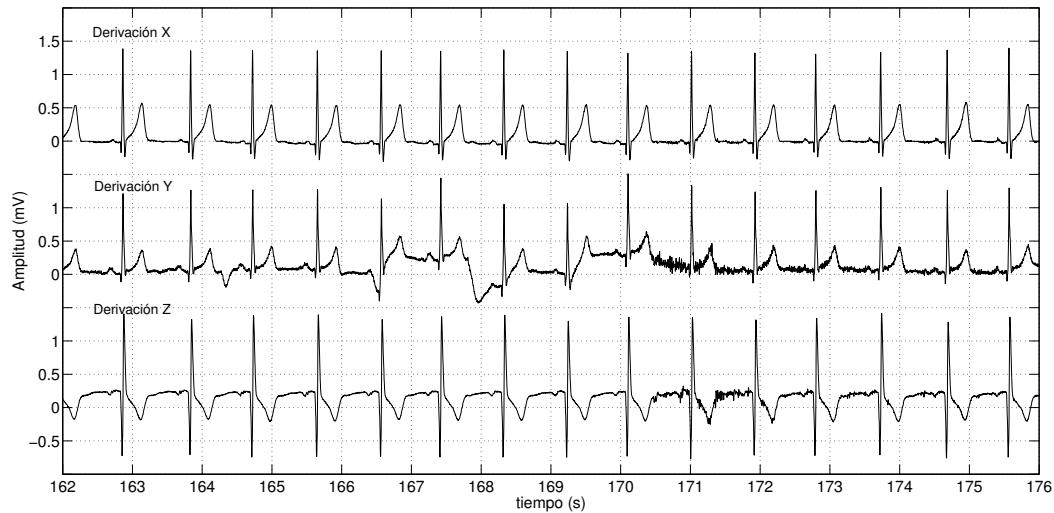


Figura 5.10: Fragmento de señal del registro p008_0 de la base de datos Politécnico-Ca'Granda.

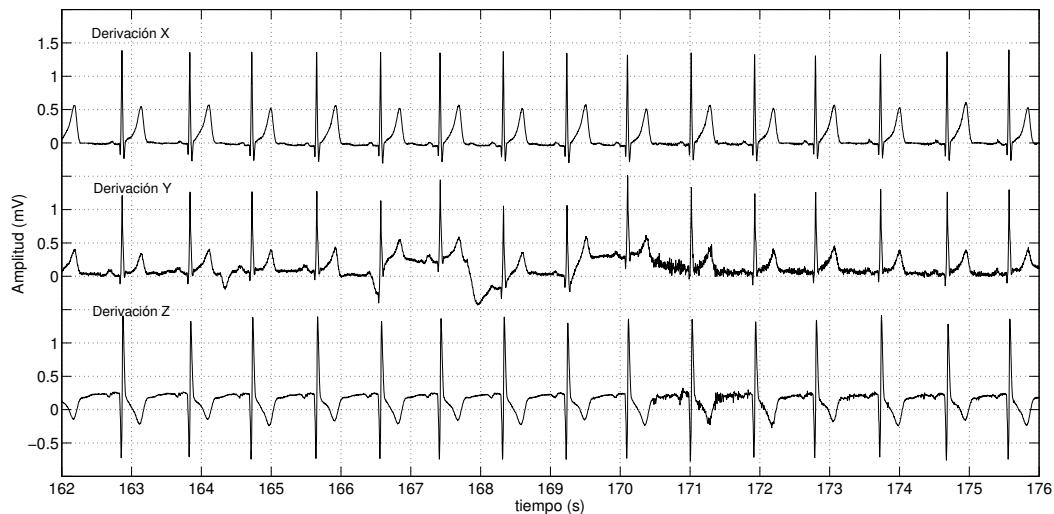


Figura 5.11: Fragmento de señal de la Figura 5.10 en la que se han simulado AOT de $50 \mu V$.

vemente a las prestaciones del análisis de AOT. El estudio del efecto de estos latidos se abordará posteriormente (Sección 5.5.3).

5.2.3. Señal ECG real con simulación de latidos ectópicos y ráfagas de ruido.

El último conjunto de datos utilizado está formado por las señales *Sig1* (señal ECG registrada con AOT), *Sig2* (la señal *Sig1* con simulación de latidos ectópicos) y *Sig3* (la señal *Sig1* a la que se añaden ráfagas de ruido), ya descritas y empleadas en la Sección 2.4.5 (Capítulo 2). La señal *Sig1* pertenece a la base de datos *STAFF-III*, que es analizada en su totalidad en el Capítulo 6.

5.3. Caracterización del ruido fisiológico.

La mayoría de los métodos habituales para analizar el ECG se basan en las asunciones de ruido blanco gaussiano y estacionario. La utilización de estos modelos, aun con la certeza de que no son fieles a las características del ruido real, se fundamenta en argumentos de simplicidad y en la dificultad de encontrar modelos realistas, dada la naturaleza heterogénea del ruido fisiológico.

En los capítulos 3 y 4 se han estudiado modelos con asunciones diferentes sobre la distribución, correlación y estacionariedad del ruido presente en el ECG. No obstante, los modelos estudiados no pretenden ofrecer una representación perfecta del ruido (misión imposible dada su heterogeneidad), sino más bien encontrar metodologías robustas utilizando modelos más realistas.

En esta sección abordamos la caracterización del ruido fisiológico desde el punto de vista de su distribución estadística, su densidad espectral y la estacionariedad del nivel de ruido. Estudiamos para ello las fuentes de ruido registrado utilizadas en este capítulo.

5.3.1. Caracterización espectral.

Partimos de los registros *ma* y *em* filtrados paso-alto como se ha indicado para eliminar la línea de base. Para analizar las características espectrales de los mismos, se han dividido los registros en fragmentos de 30 segundos con un solapamiento del 50% y se ha calculado el periodograma de cada fragmento. La Figura 5.12 muestra el promedio de los periodogramas para cada derivación⁴.

Como se aprecia en la Figura 5.12 (gráficas (a) y (b)), pueden distinguirse en el registro *ma* varias componentes con características espectrales diferenciadas. En primer lugar, existe una componente residual de baja frecuencia ($< 10 \text{ Hz}$) procedente de las variaciones de línea de base y artefactos presentes en el registro. Una parte de esta componente ha

⁴Este procedimiento es equivalente al método de Welch de estimación espectral.

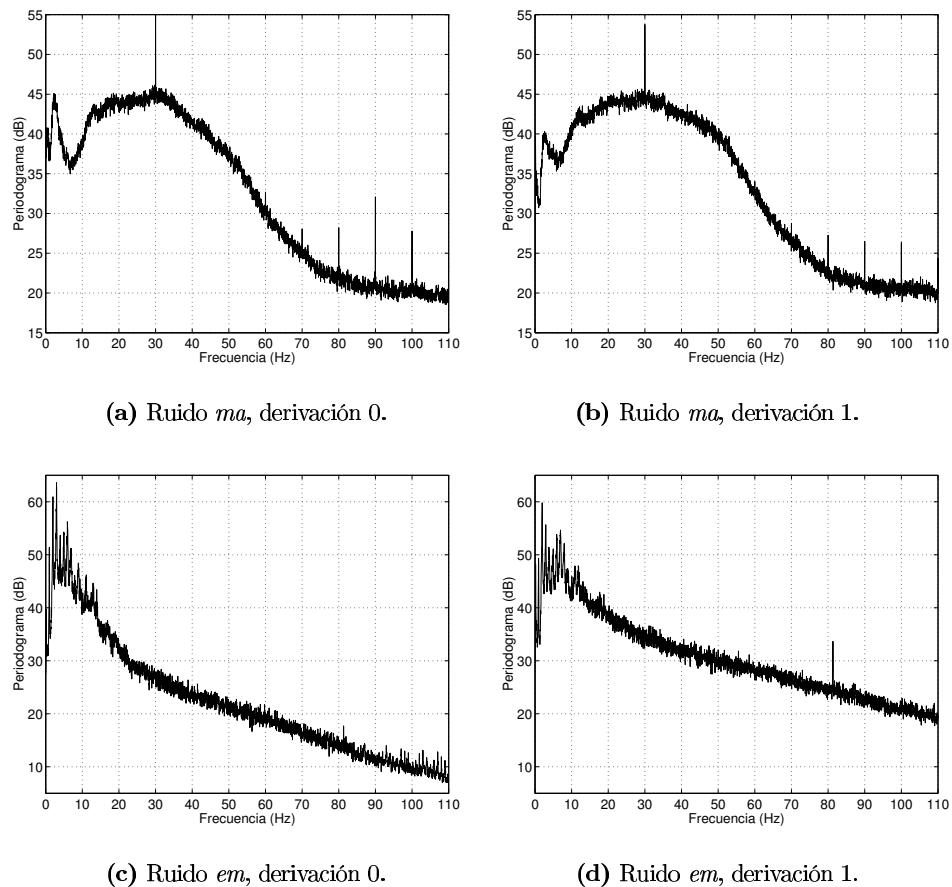


Figura 5.12: Espectro medio de los registros de ruido *ma* y *em*.

sido atenuada mediante el filtro paso-alto al que se alude en la Sección 5.2.1.3, pero todavía presenta niveles importantes a frecuencias que se observa hasta los 7 u 8 Hz . La componente de ruido propiamente muscular se extiende desde aproximadamente los 10 Hz hasta los 50 Hz , donde se aprecia un decaimiento importante. Este decaimiento puede deberse a la función de transferencia del sistema de adquisición. Finalmente, destacar el tono que aparece a la frecuencia de 30 Hz producido por las interferencias de red eléctrica de 60 Hz ⁵. En lo que al ruido de movimiento de electrodos respecta (gráficas (c) y (d)), su espectro alcanza únicamente los 10 ó 15 Hz , decayendo claramente para frecuencias mayores.

5.3.2. Distribución estadística.

Para medir el grado de desviación de la gaussianidad del ruido, estudiamos los coeficientes de asimetría⁶ (*skewness*) y de apuntamiento o curtosis⁷ (*kurtosis*), que son nulos para la distribución normal. Asimismo, representamos los histogramas de las muestras de ruido, comparándolos con las distribuciones gaussiana y laplaciana.

Puesto que los coeficientes de asimetría y apuntamiento de una señal pueden depender del intervalo de observación, calculamos dichos coeficientes en todo el registro de 30 minutos, y dividiendo éste en fragmentos de 30 segundos, y de 1, 2 y 5 minutos respectivamente. Asimismo el filtrado paso-bajo llevado a cabo por el sistema de adquisición y/o el preprocesado de la señal puede modificar los estadísticos de orden superior. Por tanto, se estudian también las características de los citados registros filtrados paso-bajo con frecuencias de corte de 50 Hz y 20 Hz. Para cada fragmento de ruido $w[n]$, $n = 0 \dots M - 1$, los coeficientes de asimetría y curtosis se estiman, respectivamente, con las expresiones

$$S_w = \frac{\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} (w[n] - m_w)^3}{s_w^3} \quad (5.1)$$

$$K_w = \frac{\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} (w[n] - m_w)^4}{s_w^4} - 3, \quad (5.2)$$

donde m_w , s_w son la media y desviación estándar muestrales del fragmento analizado.

Las Tablas 5.1 y 5.2 recogen, respectivamente, los coeficientes de asimetría y curtosis de los registros *ma* y *em* (media \pm desviación estándar en todos los fragmentos en que se divide cada registro) para cada uno de los soportes temporo-frecuenciales. En la Figu-

⁵Estas señales fueron adquiridas analógicamente (en cinta) con un equipo ambulatorio alimentado por baterías (por tanto, sin que existan interferencias de red eléctrica). En una segunda fase, las cintas fueron reproducidas y digitalizadas al doble de la velocidad de grabación. De ahí que la interferencia de red, que procede del reproductor, aparezca a la frecuencia de 30 Hz .

⁶El coeficiente de asimetría o *skewness* se define como $\varsigma = M_3/M_2^{3/2}$ donde M_k es el momento central de orden k .

⁷Nos referimos a la curtosis de Fisher o exceso de curtosis definida en (4.10).

Coeficiente de asimetría (ruido *ma*)

	Derivación 0			Derivación 1		
	Sin filtrar	Filtro 50 Hz	Filtro 20 Hz	Sin filtrar	Filtro 50 Hz	Filtro 20 Hz
30 min	-0,28	-0,27	-0,67	-0,08	-0,10	-0,28
5 min	-0,31 ± 0,14	-0,29 ± 0,12	-0,69 ± 0,27	-0,09 ± 0,05	-0,10 ± 0,04	-0,30 ± 0,12
2 min	-0,33 ± 0,20	-0,31 ± 0,18	-0,71 ± 0,32	-0,11 ± 0,10	-0,12 ± 0,08	-0,32 ± 0,19
1 min	-0,34 ± 0,26	-0,33 ± 0,25	-0,72 ± 0,47	-0,11 ± 0,13	-0,11 ± 0,11	-0,31 ± 0,21
30 s	-0,35 ± 0,40	-0,34 ± 0,41	-0,71 ± 0,71	-0,11 ± 0,17	-0,13 ± 0,17	-0,30 ± 0,27

Coeficiente de curtosis (ruido *ma*)

	Derivación 0			Derivación 1		
	Sin filtrar	Filtro 50 Hz	Filtro 20 Hz	Sin filtrar	Filtro 50 Hz	Filtro 20 Hz
30 min	7,1	7,1	10,4	7,3	7,3	7,7
5 min	7,0 ± 1,1	7,0 ± 1,1	9,5 ± 3,1	7,1 ± 1,1	7,0 ± 1,1	7,6 ± 1,3
2 min	7,0 ± 2,1	7,0 ± 2,1	9,4 ± 3,8	7,0 ± 2,0	7,0 ± 2,1	7,3 ± 2,1
1 min	7,2 ± 3,3	7,2 ± 3,3	9,3 ± 6,1	6,9 ± 2,2	6,9 ± 2,3	7,2 ± 2,3
30 s	7,1 ± 5,0	7,1 ± 5,4	9,1 ± 11,1	7,3 ± 4,9	7,2 ± 5,0	7,5 ± 5,6

Tabla 5.1: Coeficientes de asimetría y curtosis (media ± desviación estándar) del ruido de actividad muscular.Coeficiente de asimetría (ruido *em*)

	Derivación 0			Derivación 1		
	Sin filtrar	Filtro 50 Hz	Filtro 20 Hz	Sin filtrar	Filtro 50 Hz	Filtro 20 Hz
30 min	1,14	1,17	1,15	0,37	0,41	0,45
5 min	1,00 ± 0,14	1,03 ± 0,14	1,02 ± 0,12	0,35 ± 0,12	0,39 ± 0,12	0,43 ± 0,13
2 min	0,98 ± 0,26	1,00 ± 0,25	0,99 ± 0,24	0,34 ± 0,14	0,38 ± 0,15	0,41 ± 0,15
1 min	0,92 ± 0,32	0,95 ± 0,31	0,94 ± 0,30	0,32 ± 0,18	0,36 ± 0,18	0,39 ± 0,19
30 s	0,92 ± 0,35	0,95 ± 0,35	0,95 ± 0,34	0,31 ± 0,20	0,35 ± 0,21	0,38 ± 0,22

Coeficiente de curtosis (ruido *em*)

	Derivación 0			Derivación 1		
	Sin filtrar	Filtro 50 Hz	Filtro 20 Hz	Sin filtrar	Filtro 50 Hz	Filtro 20 Hz
30 min	4,2	4,5	4,5	1,2	1,5	1,3
5 min	3,5 ± 0,8	3,7 ± 0,8	3,7 ± 0,9	1,2 ± 0,5	1,4 ± 0,5	1,2 ± 0,5
2 min	3,5 ± 1,6	3,7 ± 1,6	3,7 ± 1,7	1,1 ± 0,5	1,3 ± 0,6	1,2 ± 0,6
1 min	2,9 ± 0,9	3,1 ± 1,0	3,0 ± 1,0	1,0 ± 0,8	1,2 ± 0,8	1,1 ± 0,8
30 s	2,8 ± 1,3	3,0 ± 1,3	3,0 ± 1,4	0,9 ± 0,7	1,1 ± 0,8	0,9 ± 0,8

Tabla 5.2: Coeficientes de asimetría y curtosis (media ± desviación estándar) del ruido de artefactos de movimiento.

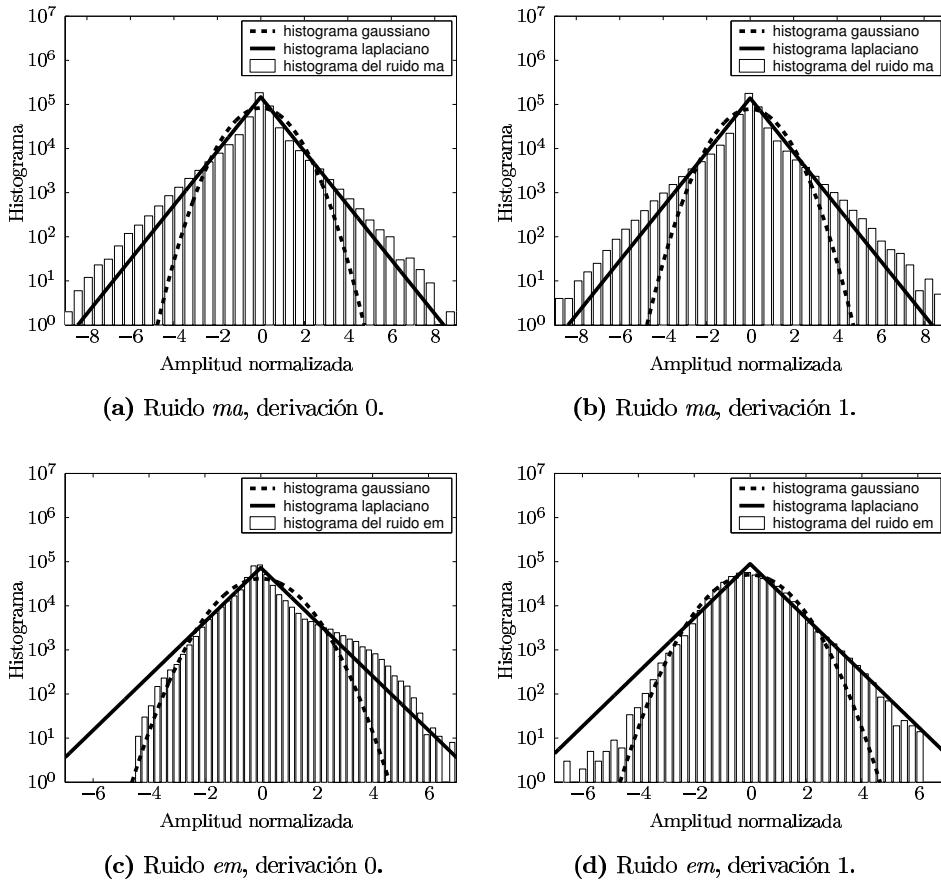


Figura 5.13: Histogramas de los registros de ruido *ma* y *em*, comparados con los histogramas de variables aleatorias gaussianas y laplácianas con la misma media y desviación estándar.

ra 5.13 se representan los histogramas de las dos derivaciones disponibles en cada registro de ruido.

De la Tabla 5.1 y las gráficas (a) y (b) de la Figura 5.13 se desprende que el ruido de actividad muscular posee una distribución esencialmente simétrica y claramente leptocúrtica (exceso de curtosis medio de aproximadamente 7 en las dos derivaciones, en intervalos de medida entre 30 s y 30 min). Por tanto, el ruido del registro *ma* tiene una característica superlaplaciana en sus dos derivaciones. Los valores medidos apenas varían al quedarnos con las componentes menores de 50 Hz. De hecho, el grueso de la energía del ruido *ma* se encuentra en la banda DC - 50 Hz (Figura 5.12(a)). Al filtrar las componentes de frecuencia mayor de 20 Hz, se observa un ligero incremento del coeficiente de curtosis así como de la asimetría en la derivación 0. El incremento de curtosis sugiere que la componente debida a la variación de línea de base y otros artefactos es todavía más leptocúrtica que el resto de componentes del registro.

Las dos derivaciones contenidas en el registro de ruido *em* tienen una distribución diferente. La derivación 0 es claramente asimétrica, con una curtosis media similar a la del ruido laplaciano. La derivación 1 es algo más simétrica, y sólo es ligeramente supergaussiana. Las diferencias encontradas al cambiar el intervalo de observación y/o al filtrar paso-bajo la señal son despreciables.

5.3.3. Estacionariedad del nivel de ruido.

Por último, estudiamos el grado de estacionariedad del nivel de ruido. Para ello estimamos, muestra a muestra, el nivel de ruido local como el valor RMS del ruido en una ventana de 1 segundo ($N_s = 250$ muestras). Así, para una señal de ruido $w[n]$, el nivel de ruido localizado viene dado por

$$s_{\text{RMS}}[n] = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N_s}{2}}^{\frac{N_s}{2}-1} w^2[n+k]}, \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (5.3)$$

En la Figura 5.14 se representa la función de autocovarianza normalizada del nivel de ruido localizado $s_{\text{RMS}}[n]$ para los registros de ruido objeto de estudio.

La gráfica correspondiente al ruido *ma* muestra que el nivel de ruido en dos instantes está totalmente incorrelado cuando median entre ellos unos pocos segundos. En un sólo segundo, la covarianza entre los niveles de ruido decae hasta 0.3, siendo prácticamente nula a los 5 segundos (si bien el primer cruce por cero no se produce hasta retardos de entre los 15 y los 20 segundos). Para un ritmo cardíaco de 80 lpm, esto significa que el nivel de ruido en un latido está incorrelado con el nivel de ruido 6 ó 7 latidos más tarde. El comportamiento del nivel de ruido en el registro *em* es algo más estacionario. En la derivación 0, la covarianza es de 0.5 para una separación de 20 segundos, y el cruce por cero se produce para un retardo de 200 segundos. Sin embargo, en la derivación 1, la covarianza se reduce a 0.5 con sólo 3 segundos de separación, produciéndose el primer cruce por cero para un retardo de 50 s. Estos valores pueden dar una idea de cuál es el máximo valor de la ventana de análisis que permite considerar que el nivel de ruido es estacionario.

Dado que ambos tipos de ruido se producen en ráfagas, el tiempo hasta que desaparece la correlación del nivel de ruido proporciona una estimación de la duración media de las mismas (de 5 a 10 segundos en el registro de ruido *ma* y de 1 a 3 minutos en el registro *em*). A nuestro juicio, los valores de estacionariedad observados en la Figura 5.14 responden más al tipo de actividad realizada durante el registro Holter que a las características propias del ruido muscular y de movimiento de electrodos. Así, el grado de estacionariedad del ruido de movimiento de electrodos no es el mismo si se está realizando una actividad repetitiva (como el pedaleo en una bicicleta) o si el Holter recoge los movimientos espontáneos del paciente. No obstante, el grado de estacionariedad observado permite explicar el comportamiento de algunos detectores ante señales contaminadas con estos dos registros de ruido.

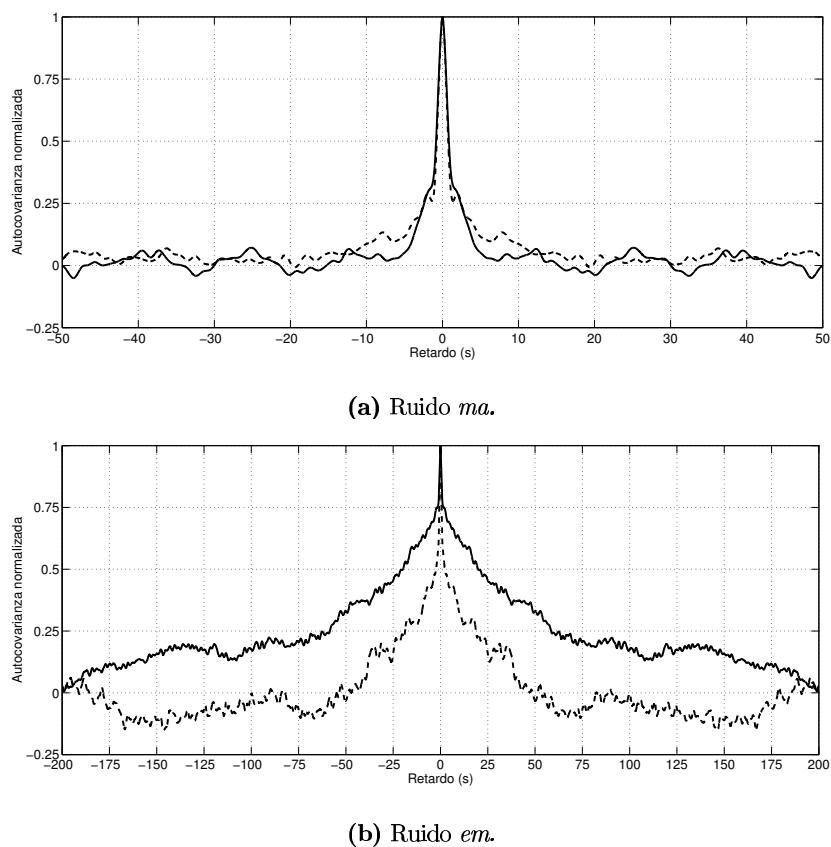


Figura 5.14: Funciones de autocovarianza del nivel de ruido local en los registros *ma* y *em*.

5.4. Evaluación de los métodos en AOT estacionarias.

En esta sección nos centramos en el comportamiento de los métodos cuando la AOT es constante dentro de la ventana de análisis de L latidos. Esta asunción se cumple cuando se analiza un episodio alternaente de amplitud constante cuya duración es mayor que la de la ventana de análisis. El estudio de AOT transitorias y la presencia de latidos anómalos se realiza más adelante (Sección 5.5).

5.4.1. Validación en ruido de actividad muscular y movimiento de electrodos (Simulador 1).

5.4.1.1. Configuración del estudio.

Estudiamos en primer lugar el comportamiento de las metodologías propuestas en los capítulos 3 y 4 en presencia de ruido fisiológico controlado. Para ello utilizamos el Simulador 1, presentado en la Sección 5.2.1, que permite además estudiar separadamente los dos tipos de ruido (*actividad muscular* y *movimiento de electrodos*).

Métodos evaluados. Se evalúan en primer lugar las prestaciones de los detectores CVG y de Rao para los modelos gaussianos y laplacianos correspondientes a los tres niveles de estacionariedad: modelo estacionario, modelo adaptativo y modelo no estacionario. Se han implementado las versiones de los detectores que utilizan la información de la despolarización (onda P) además del complejo ST-T con la idea de aprovechar eficientemente los datos disponibles. A continuación se estudia el comportamiento de los estimadores de máxima verosimilitud para los modelos propuestos.

Se han utilizado ventanas de análisis de $L \in \{16, 32, 64, 128\}$ latidos. En cuanto al modelo de alternancia, se consideran dos posibilidades: en la primera, se acepta como subespacio de alternancias todo el espacio de señal (detectores de energía alternaente, con $P = N = 64$), y en el segundo se reducen los grados de libertad, asumiendo un subespacio paso-bajo para la señal alternaente (detectores de subespacio). En concreto, se utiliza el subespacio engendrado por las $P = 8$ primeras bases de la transformada discreta coseño (TDC). Dada la duración de la ventana utilizada para segmentar el complejo ST-T (256 ms), el subespacio de alternancias acoge componentes frecuenciales hasta aproximadamente 15 Hz.

Configuración del simulador. Para cada valor de la duración L de la ventana de análisis, se generan fragmentos de L latidos con AOT de amplitud constante mediante el procedimiento descrito en la Sección 5.2.1. La forma de onda alternaente empleada en la simulación es la expresada por (3.79), que ha sido ya utilizada en algunos ejemplos de los capítulos 3 y 4. A cada fragmento de señal limpia simulada se suman muestras de ruido consecutivas procedentes de uno de los registros de ruido (*ma* o *em*) una vez eliminada la línea de base. Las muestras de ruido se escalan de manera que el nivel medio de ruido

en todo el registro (30 minutos) sea de $20 \mu V$ (RMS). La muestra de inicio, así como la derivación (de las dos disponibles en cada registro) de la que se obtiene el ruido se seleccionan aleatoriamente en cada fragmento simulado. Así, para cada duración L y tipo de ruido, se han generado 2000 realizaciones de ruido para simular señales sin AOT (bajo la hipótesis \mathcal{H}_0) y 2000 realizaciones distintas para simular señales con AOT (bajo la hipótesis \mathcal{H}_1). Se han reproducido las simulaciones bajo \mathcal{H}_1 para valores de RSR nominal desde -40 dB hasta 20 dB. La RSR nominal η_{nom} se define como⁸

$$\eta_{\text{nom}} = \frac{\frac{\|a\|_2^2}{4N}}{P_{\text{rui,nom}}} = \frac{(\text{RMS}(a[n]))^2}{4 P_{\text{rui,nom}}}. \quad (5.4)$$

Por tanto, las alternancias simuladas tienen amplitudes desde $0,4 \mu V$ (RSR=-40 dB) hasta $400 \mu V$ (RSR=20 dB).

5.4.1.2. Evaluación de los detectores.

Dados unos niveles de señal alternante y de ruido, las prestaciones de un detector (es decir, sus probabilidades de detección P_D y de falsa alarma P_{FA}) dependen del umbral seleccionado γ . A menudo, las prestaciones en detección se caracterizan y representan gráficamente mediante la denominada característica de funcionamiento del receptor o curva ROC (*Receiver Operating Characteristics*), formada por los pares (P_{FA}, P_D) obtenidos para distintos valores del umbral γ .

Así, la Figura 5.15 muestra las curvas ROC en ruido ma de los 6 TCVG estudiados para distintos tamaños de ventana y grados de libertad ($L = 32, 128, P = 8, 64$).

Las curvas ROC permiten comparar de forma directa detectores sobre señales con una determinada calidad. Así, observamos en la Figura 5.15 que, en presencia de ruido ma , los dos detectores no estacionarios (gaussiano y laplaciano) obtienen las mejores prestaciones. Del resto de los modelos estudiados, encontramos que los detectores laplacianos funcionan apreciablemente mejor que aquéllos fundamentados en modelos gaussianos. Al comparar las distintas gráficas se observa también la mejora de las prestaciones experimentada al aumentar la duración de la ventana y/o reducir el número de grados de libertad.

No obstante, una caracterización completa requiere estudiar la evolución de las prestaciones para distintos niveles de señal y ruido. Para ello, es conveniente cuantificar las prestaciones de los detectores con parámetros fácilmente comparables, de forma que se pueda estudiar su dependencia con los niveles de alternancia y ruido.

A este respecto se utilizan en la literatura sobre detección diversos parámetros que resumen la información representada en las curvas ROC y que son utilizados como cifra de mérito del detector para una relación señal a ruido dada. Entre ellos, el área bajo la curva ROC es probablemente el más utilizado en el ámbito biomédico. Las diferencias de área entre distintos métodos son, no obstante, difíciles de interpretar en términos de probabilidades de error y ganancias. Lo mismo podemos decir de otros parámetros como la

⁸El factor 4 que aparece en el denominador se debe al convenio por el que se define la alternancia como la diferencia entre la amplitud de dos latidos consecutivos.

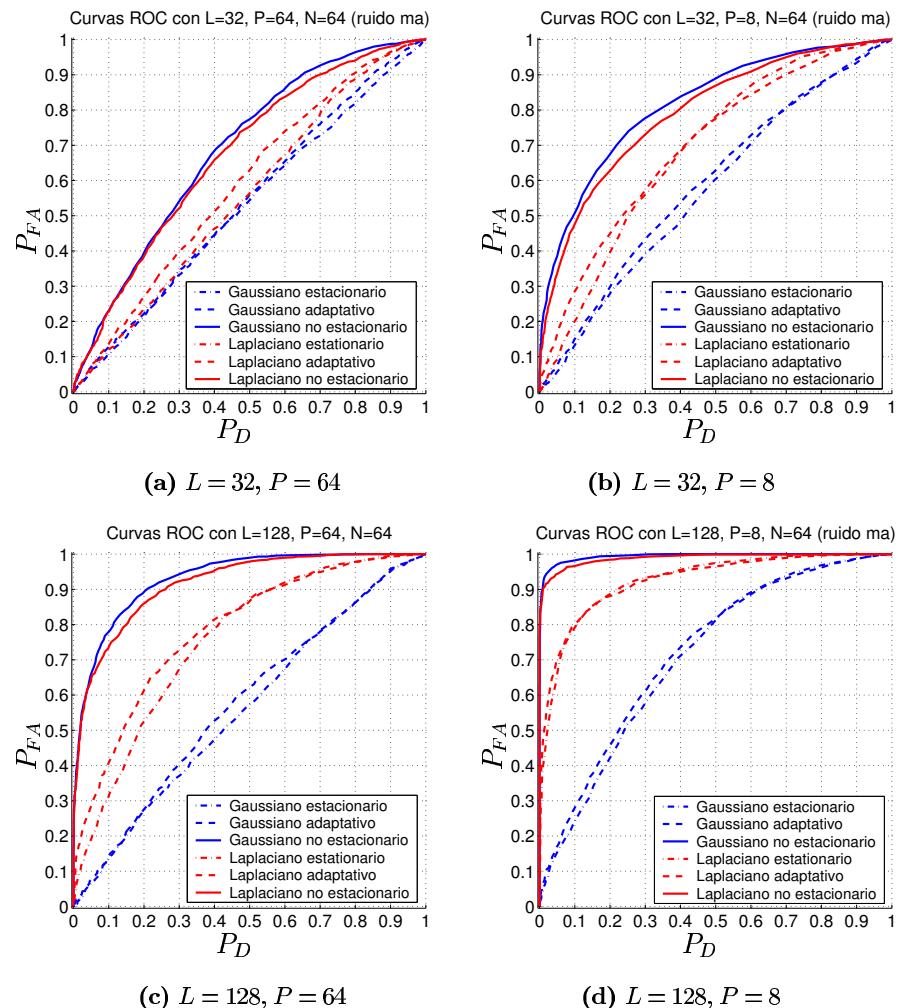


Figura 5.15: Curvas ROC experimentales de los TCVG para una señal alterna de $4 \mu V$ (RMS) en ruido de actividad muscular ($\eta_{\text{nom}} = -20 \text{ dB}$).

máxima distancia entre la curva ROC y la recta $P_D = P_{FA}$ (la correspondiente a un detector puramente aleatorio) (Frisch y Messer 1994). Otros autores caracterizan los detectores calculando la separación estadística entre los estadísticos de detección obtenidos bajo las dos hipótesis. Por ejemplo, el parámetro de deflexión $d = \frac{E(T(\mathbf{X}), \mathcal{H}_1) - E(T(\mathbf{X}), \mathcal{H}_0)}{\sqrt{Var(T(\mathbf{X}), \mathcal{H}_0)}}$ (Kay 1998), o la relación señal a ruido $SNR = \frac{E(T(\mathbf{X}), \mathcal{H}_1) - E(T(\mathbf{X}), \mathcal{H}_0)}{\sqrt{(Var(T(\mathbf{X}), \mathcal{H}_1) + Var(T(\mathbf{X}), \mathcal{H}_0))/2}}$ (Frisch y Messer 1993). Sin embargo, la caracterización por medio de estos parámetros no es adecuada para comparar prestaciones cuando los estadísticos tienen distinta FDP⁹, y no es sencillo relacionar los valores de estos parámetros con las prestaciones en términos de probabilidades de detección y falsa alarma (salvo en el caso de estadísticos con distribución gaussiana (Kay 1998, Sección 4.3)).

Debe tenerse en cuenta, además, que el punto de operación óptimo dentro de la curva ROC puede ser diferente según las aplicaciones¹⁰. En detección de alternancias, consideramos que es preciso mantener limitada la P_{FA} , tal como establece el criterio de Neymann-Pearson. Por tanto, optamos por caracterizar las prestaciones mediante la P_D alcanzada con una P_{FA} dada, correspondiente al punto de corte de la curva ROC con la recta vertical situada en la abscisa P_{FA} . Este parámetro permite comparar la capacidad de detección alcanzable con los detectores en función de la relación señal a ruido (curva P_D vs η_{nom}). En los resultados presentados en el resto de este capítulo se ha seleccionado un valor de $P_{FA} = 0,01$.

Detectores TCVG. Las Figuras 5.16 y 5.17 muestran las curvas P_D vs η_{nom} (para $P_{FA} = 0,01$) en ruido *ma* y *em* respectivamente. Se representan gráficas para duraciones de la ventana $L \in \{16, 32, 64, 128\}$ y dimensiones del subespacio de señal $P \in \{8, 64\}$.

Detectores de Rao. Se ha demostrado en los capítulos previos que las prestaciones de los detectores TCVG y de Rao son similares y asintóticamente idénticas cuando el ruido se ajusta al modelo correspondiente. A continuación se compara la capacidad de detección en ruido fisiológico de los tests del CVG y de Rao para los modelos estudiados en que ambas estrategias conducen a detectores diferentes (modelo gaussiano no estacionario, modelo laplaciano adaptativo y modelo laplaciano no estacionario). Los tests de Rao son más sencillos computacionalmente, y tienen la ventaja de que sólo se requiere estimar los parámetros molestos bajo la hipótesis \mathcal{H}_0 , sorteándose así la necesidad de maximizar la verosimilitud de parámetros acoplados.

⁹En particular, pueden llevar a interpretaciones incorrectas cuando los estadísticos de detección, como es el caso que nos ocupa son no simétricos y leptocúrticos.

¹⁰Así, por ejemplo, en los detectores utilizados en comunicaciones existe una simetría entre los dos tipos de errores ('detectar un 1 cuando se transmite 0' y 'detectar un 0 cuando se transmite 1'). Debido a esta simetría interesa reducir por igual ambas probabilidades de error, y la operación óptima del detector se sitúa en la parte de la ROC más cercana al vértice ($P_D = 1, P_{FA} = 0$). En otras aplicaciones, como la detección radar, interesa mantener constante la tasa de falsas alarmas, por lo que el punto de operación deseado viene dado por el corte entre la curva ROC y el valor de P_{FA} deseado.

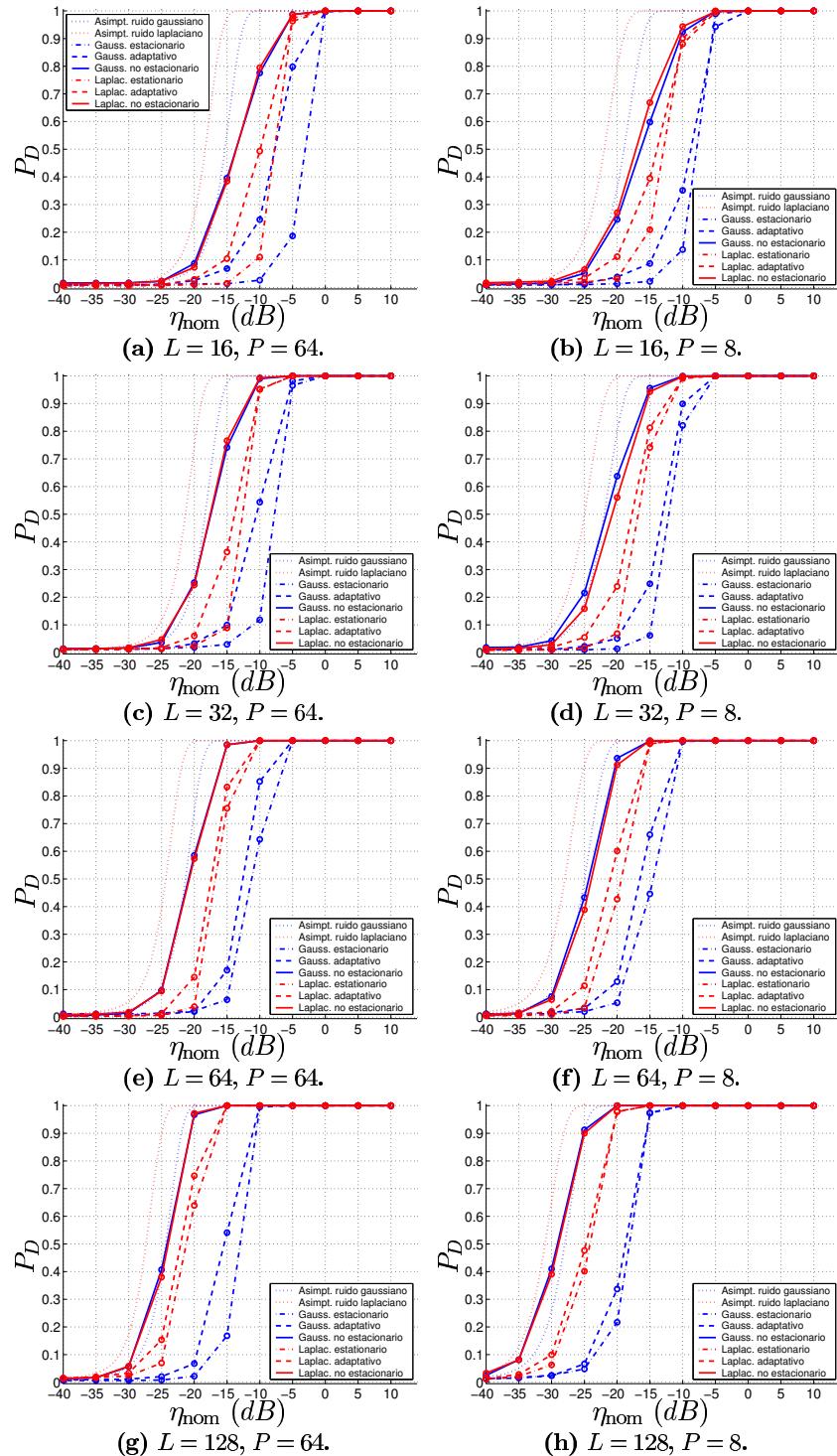


Figura 5.16: Curvas P_D vs η_{nom} ($P_{FA} = 0,01$) de los TCVG en ruido de actividad muscular.

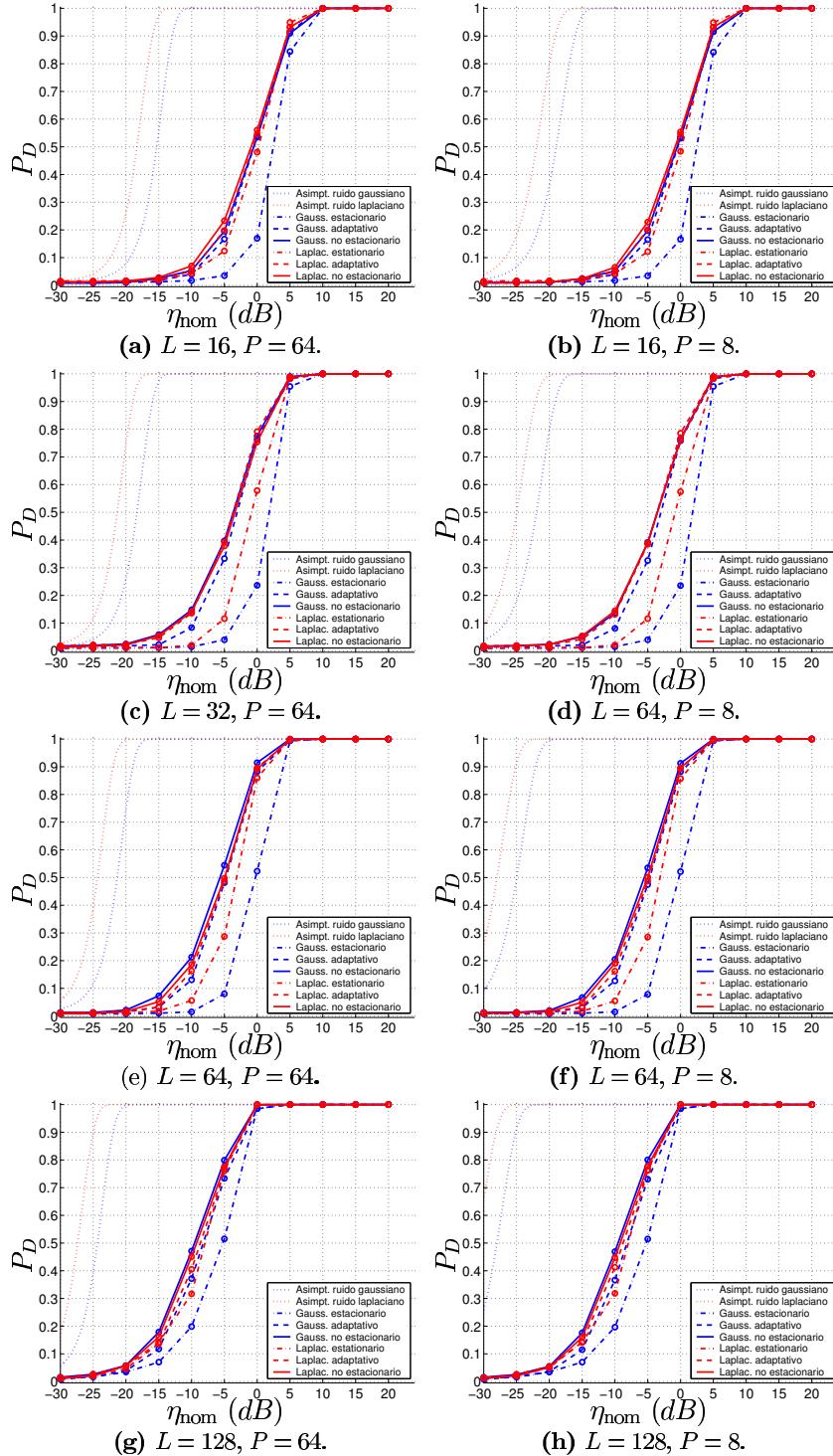


Figura 5.17: Curvas P_D vs η_{nom} de los TCVG en ruido de movimiento de electrodos.

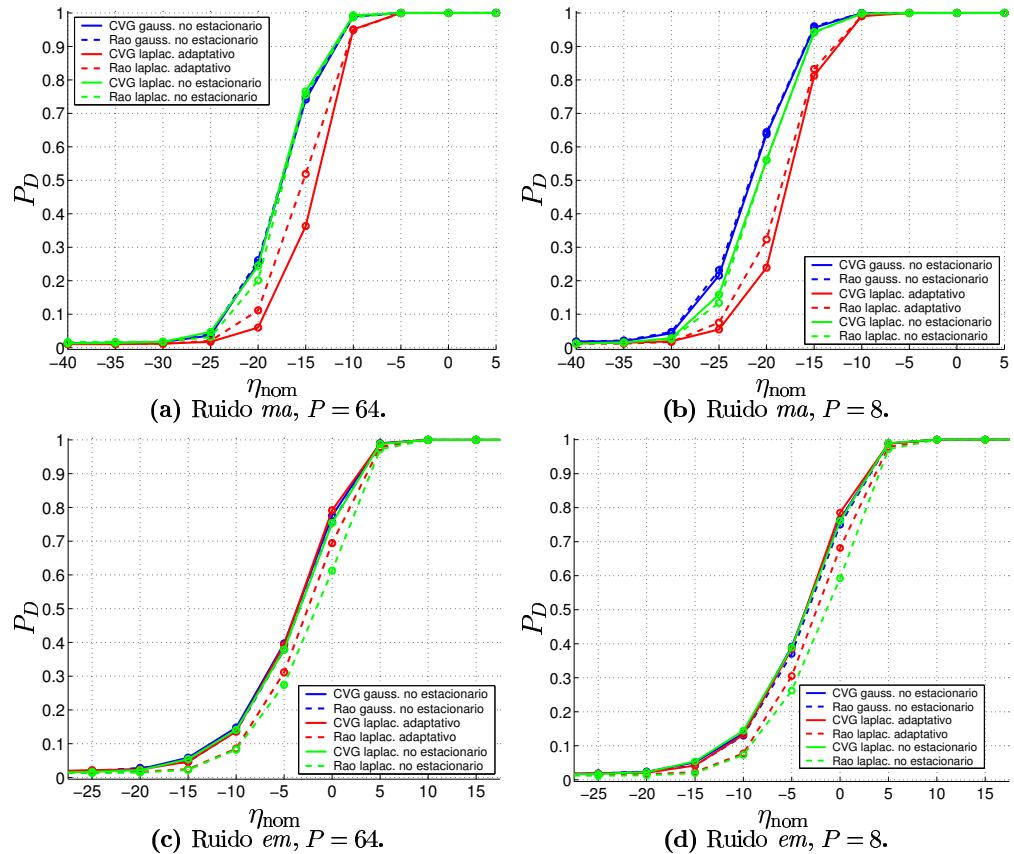


Figura 5.18: Comparación de las prestaciones de los detectores CVG y de Rao para $L = 32$.

Se representan en la Figura 5.18 las curvas P_D vs η_{nom} de los detectores TCVG y de Rao para $L = 32$ latidos y $P = 8$ en ruido *ma* y *em*.

Las Figuras 5.16, 5.17 y 5.18 permiten formular algunas conclusiones sobre el comportamiento de los detectores en ruido fisiológico. En primer lugar podemos destacar que el ruido de movimiento de electrodos es mucho más perjudicial para la detección de AOT que el ruido muscular. Así, con una ventana de $L = 32$ latidos una AOT con una RSR nominal $\eta_{\text{nom}} = -5 \text{ dB}$ en ruido *ma* presenta una $P_D \simeq 1$ con $P_{FA} = 0,01$. Un episodio alternante con la misma RSR nominal en ruido *em* sólo alcanza en el mejor de los casos $P_D = 0,4$ con $P_{FA} = 0,01$. Si exigimos $P_{FA} = 0,01$, la AOT en ruido *em* es prácticamente indetectable para $\eta_{\text{nom}} = -15 \text{ dB}$, mientras que en ruido *ma* se pueden alcanzar $P_D = 0,75$ con $P = 64$ y $P_D = 0,95$ con $P = 8$. Las diferencias observadas concuerdan con el solapamiento existente entre los espectros de cada tipo de ruido y la señal a detectar. Como se aprecia en la Figura 5.12, el ruido *em* tiene su energía esencialmente en

frecuencias menores de 15 Hz , por lo que su espectro está esencialmente solapado con el de la alternancia. La mayor parte de la energía del ruido *ma*, por su parte, se sitúa por encima de los 10 Hz , por lo que el solapamiento con la alternancia es sólo parcial.

En la Figura 5.16 se aprecia la superioridad de los modelos no estacionarios (gaussiano y estacionario) para detectar AOT en ruido muscular. Con ambos modelos, las prestaciones están muy cercanas al comportamiento asintótico teórico (líneas de puntos). Del resto de modelos, cabe destacar que los modelos laplacianos superan claramente a los gaussianos. El detector laplaciano estacionario mejora incluso las prestaciones del detector gaussiano adaptativo. Por otro lado, cuando el ruido es debido al movimiento de los electrodos (Figura 5.17) apenas encontramos diferencias entre los detectores no estacionarios y los detectores adaptativos, tanto laplacianos como gaussianos. Los detectores estacionarios sí sufren una cierta degradación, que es mayor en el caso del modelo gaussiano estacionario.

El distinto comportamiento de los métodos estudiados ante los dos tipos de ruido puede explicarse por las características de los registros de ruido utilizados. Así, el nivel de ruido en el registro de ruido muscular sólo está correlado en intervalos cortos de tiempo (6 ó 7 latidos), según se aprecia en la Figura 5.14(a). Este ruido se produce en ráfagas cortas y por tanto está mejor modelado mediante los modelos no estacionarios que con los modelos adaptativos y estacionarios. No obstante, los detectores laplacianos son robustos ante ráfagas cortas de ruido, ya que el filtro de mediana es insensible a los valores extremos si éstos son pocos en relación con el tamaño de la ventana. La autocorrelación del nivel de ruido en el registro *em* decae mucho más lentamente, de forma que la asunción de estacionariedad dentro de la ventana de análisis se ajusta más a las características de este registro. Esto explica que en la Figura 5.17 los detectores adaptativos se comporten igual de bien que los detectores no estacionarios.

La reducción de la dimensión del subespacio de señal supone una ganancia clara de detección en el ruido *ma* (Figura 5.16), del mismo orden de la ganancia teórica (compárense las líneas de puntos para subespacio completo y reducido). Sin embargo, en el caso del ruido *em*, los detectores de subespacio reducido tienen las mismas prestaciones que los detectores en el espacio completo. Este comportamiento puede explicarse atendiendo al espectro del ruido *em* (Figura 5.12), e interpretando la proyección en el subespacio de señal como un filtro lineal. Para el subespacio formado por las funciones base de la TDC, el filtro equivalente para $P = 6$ es paso-bajo con una frecuencia de corte de aproximadamente 15 Hz . En la Figura 5.12 se observa que el espectro del ruido *em* decae rápidamente a partir de los 15 Hz , por lo que la potencia de ruido proyectada es aproximadamente igual a la potencia de ruido original.

Como era de esperar, la capacidad de detección aumenta conforme crece la duración de la ventana de análisis. No obstante, conviene recordar que estamos simulando una alternancia estacionaria cuya duración es al menos igual a la de la ventana de análisis. En la Sección 5.5 se estudia el comportamiento ante alternancias transitorias de distintas duraciones.

Finalmente se ha comprobado que las curvas P_D vs η_{nom} de los detectores de Rao en

ruido fisiológico son similares a las obtenidas con el TCVG. En el caso del ruido *em*, los detectores de Rao laplacianos (basados en la demodulación del signo de la señal) tienen una ligera degradación (de 2 a 2.5 dB) con respecto a los TCVG laplacianos (basados en la mediana de la serie demodulada).

5.4.1.3. Evaluación de los EMV.

El EMV es un estimador asintóticamente eficiente para un modelo dado (Teorema 3.2). Dado que el ruido real no se ajusta exactamente a ninguno de los modelos estudiados, es preciso validar el comportamiento de los distintos EMV estudiados en ruido fisiológico.

Se ha simulado una forma de onda alterna de amplitud 20 μV (RMS) en 2000 realizaciones de cada tipo de ruido con $\eta_{\text{nom}} = 0$ dB. Las Figuras 5.19 y 5.20 muestran la señal estimada media y la desviación estándar en cada una de sus muestras. Además, para ilustrar el nivel de ruido presente en la estimación se muestran las formas de onda estimadas en 10 de las realizaciones.

Como ya se hiciera en las simulaciones de los capítulos 3 y 4, analizamos por separado dos componentes del error: el sesgo y la desviación estándar del error en cada muestra de la señal estimada. Para ello utilizamos las señales estimadas en 2000 realizaciones. En las Figuras 5.21 y 5.22 se muestran, para los dos tipos de ruido estudiados, los valores RMS del sesgo y de la desviación estándar en todo el complejo ST-T.

Por último, estudiamos el error cometido al estimar la amplitud de la alternancia de forma global en todo el complejo ST-T. La opción más utilizada para resumir la amplitud de AOT es el valor RMS de la alternancia en todo el complejo ST-T

$$\hat{V}_{\text{RMS}}(l) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_l^2[n]}. \quad (5.5)$$

Otras posibilidades utilizadas en la literatura son el máximo del valor absoluto de la alternancia

$$\hat{V}_{\text{max}}(l) = \max_{n=0}^{N-1} |\hat{a}_l[n]|. \quad (5.6)$$

y el valor medio

$$\hat{V}_{\text{ave}}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_l[n]. \quad (5.7)$$

Las Tablas 5.3, 5.4 y 5.5 recogen la amplitud de AOT estimada (media \pm desviación estándar) caracterizada según los parámetros \hat{V}_{RMS} , \hat{V}_{max} y \hat{V}_{ave} , utilizando los distintos EMV estudiados.

En los ejemplos de las Figuras 5.19 y 5.20 se observa que los estimadores son esencialmente insesgados. La estimación de las alternancias en ruido muscular tiene un error importante de alta frecuencia que queda atenuado al utilizar modelos con subespacio de señal paso-bajo. Por el contrario, el error de estimación en las señales con ruido *em* es,

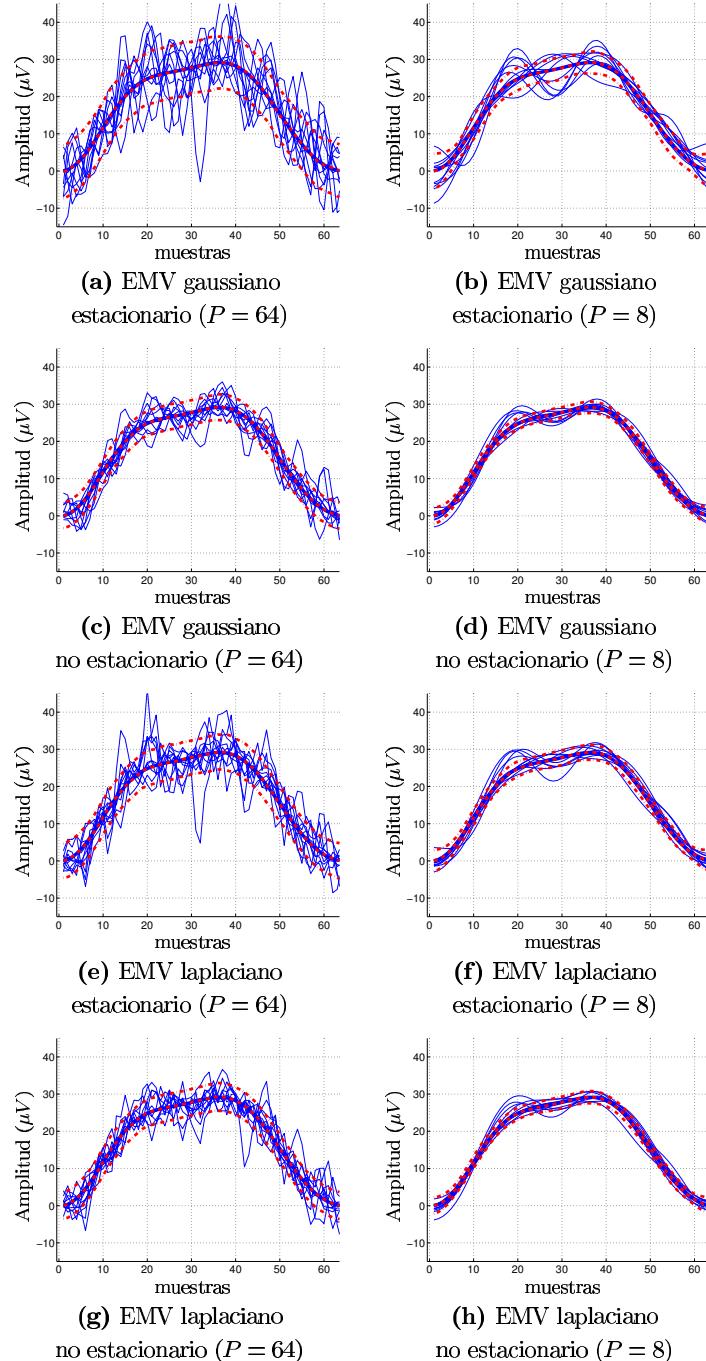


Figura 5.19: Prestaciones de los EMV de la alternancia en ruido de actividad muscular (registro *ma*). En azul se muestra la señal simulada (línea gruesa), y las estimaciones correspondientes a 10 estimaciones (línea delgada). En rojo se muestra la señal estimada media en 2000 realizaciones y el intervalo correspondiente a ± 1 desviación estándar.

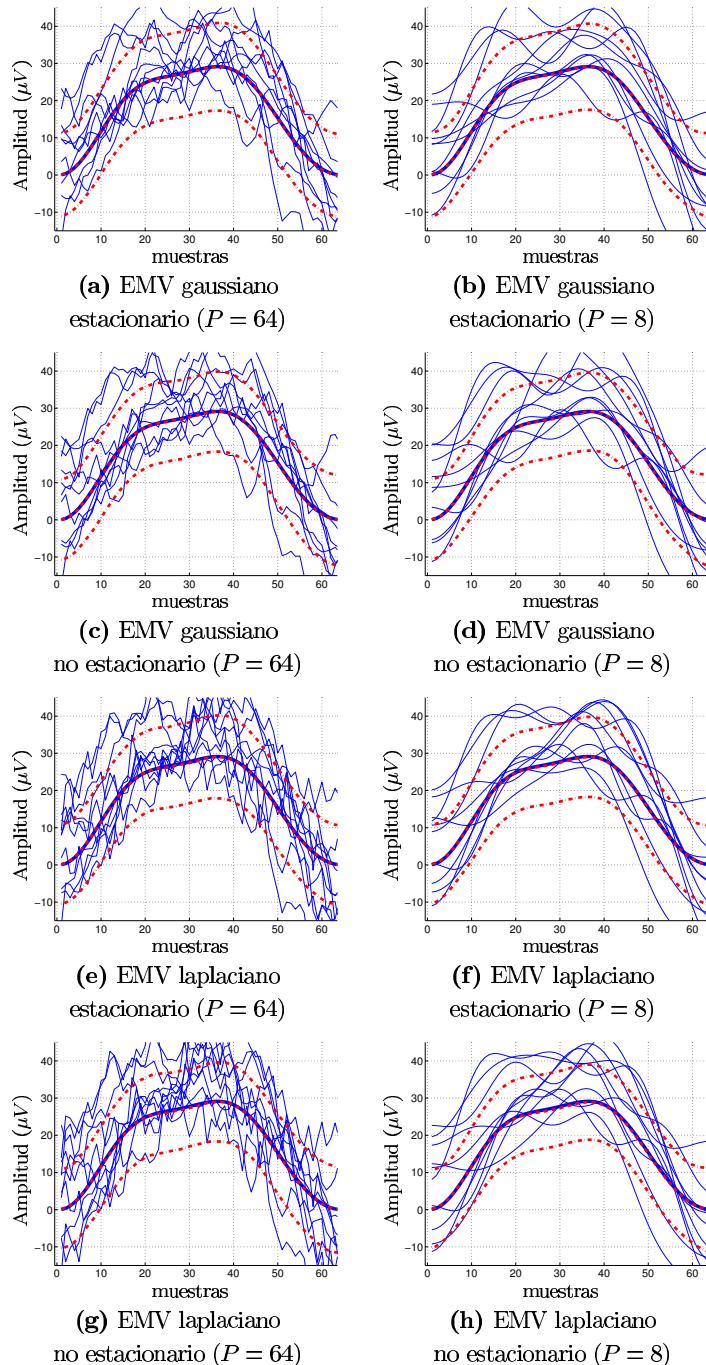


Figura 5.20: Prestaciones de los EMV de la alternancia en ruido de movimiento de electrodos (registro *em*). En azul se muestra la señal simulada (línea gruesa), y las estimaciones correspondientes a 10 estimaciones (línea delgada). En rojo se muestra la señal estimada media en 2000 realizaciones y el intervalo correspondiente a ± 1 desviación estándar.

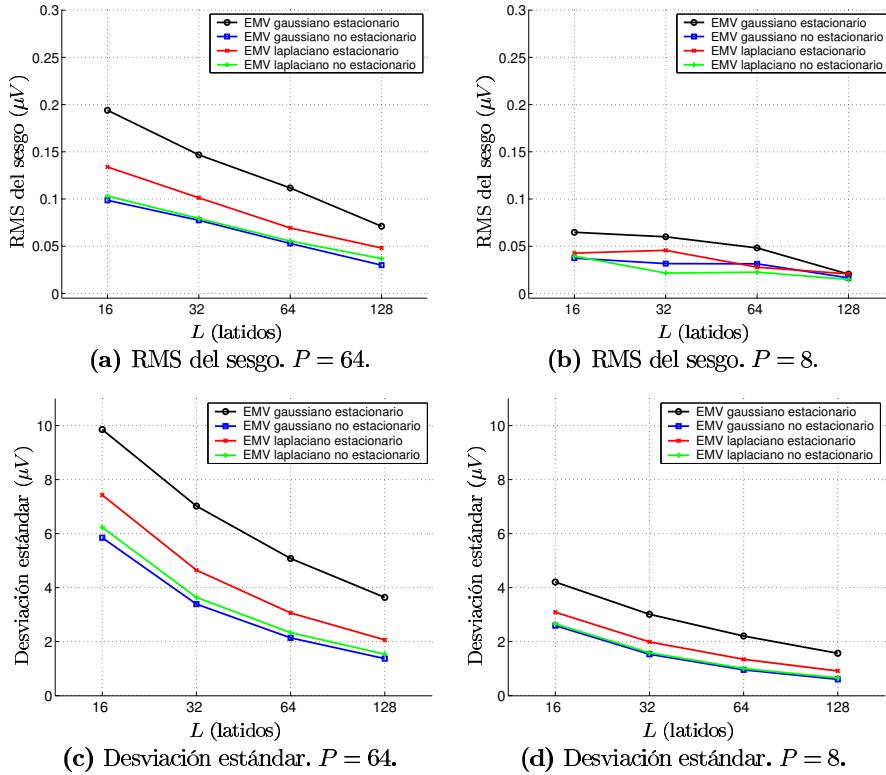


Figura 5.21: Valor RMS del sesgo y desviación estándar del error de estimación en función de la duración de la ventana de análisis (registro de ruido *ma*).

$\hat{V}_{\text{RMS}} (\mu\text{V})$	Ruido <i>ma</i>		Ruido <i>em</i>	
	<i>P</i> = 8	<i>P</i> = 64	<i>P</i> = 8	<i>P</i> = 64
Gaussiano estacionario	$20,2 \pm 1,0$	$21,2 \pm 1,1$	$22,0 \pm 6,3$	$22,1 \pm 6,3$
Gaussiano no estacionario	$20,1 \pm 0,5$	$20,3 \pm 0,6$	$21,7 \pm 6,2$	$21,9 \pm 6,2$
Laplaciano estacionario	$20,1 \pm 0,7$	$20,5 \pm 0,8$	$21,6 \pm 6,1$	$21,8 \pm 6,1$
Laplaciano no estacionario	$20,1 \pm 0,6$	$20,3 \pm 0,6$	$21,4 \pm 6,1$	$21,7 \pm 6,0$
V_{RMS} de la señal simulada: $20 \mu\text{V}$				

Tabla 5.3: Valor RMS de la AOT estimada mediante los distintos EMV estudiados (media \pm desviación estándar) para una $\eta_{\text{nom}} = 0 \text{ dB}$, con una ventana de análisis de $L = 32$ latidos.

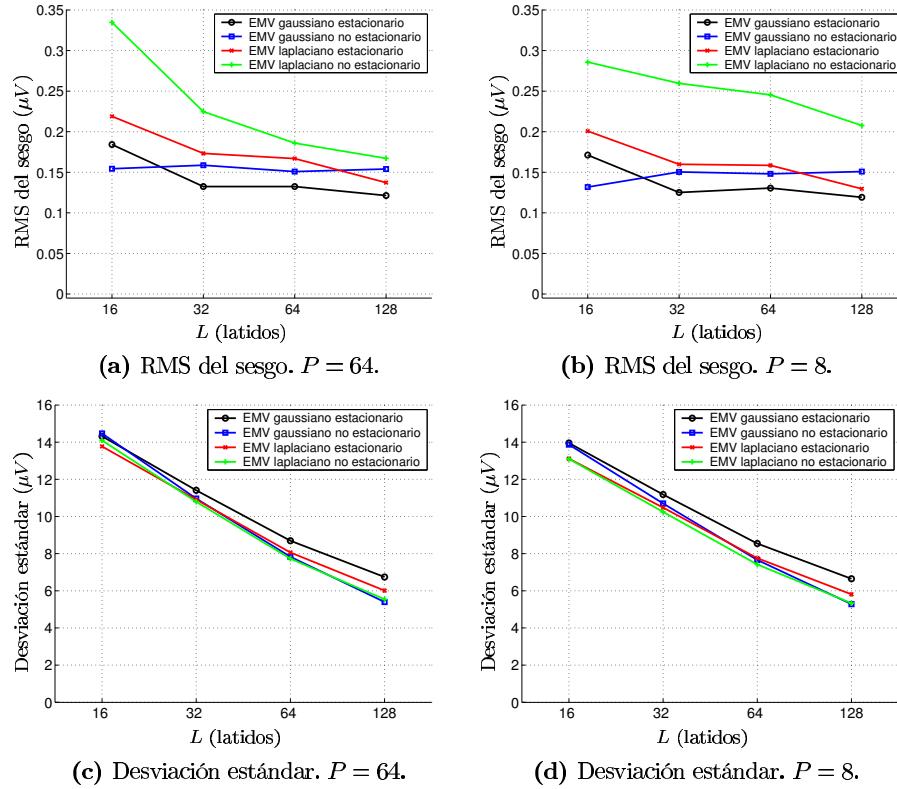


Figura 5.22: Valor RMS del sesgo y desviación estándar del error de estimación en función de la duración de la ventana de análisis (registro de ruido *em*).

\hat{V}_{\max} (μV)	Ruido <i>ma</i>		Ruido <i>em</i>	
	$P = 8$	$P = 64$	$P = 8$	$P = 64$
Gaussiano estacionario	$31,0 \pm 2,4$	$40,2 \pm 5,0$	$35,2 \pm 10,2$	$37,2 \pm 10,2$
Gaussiano no estacionario	$29,7 \pm 1,4$	$33,4 \pm 3,1$	$34,3 \pm 9,6$	$36,4 \pm 9,8$
Laplaciano estacionario	$30,0 \pm 1,7$	$36,2 \pm 4,4$	$34,1 \pm 9,6$	$37,7 \pm 10,0$
Laplaciano no estacionario	$29,7 \pm 1,5$	$34,2 \pm 3,3$	$33,6 \pm 9,1$	$37,5 \pm 9,8$
V_{\max} de la señal simulada: $29.15 \mu V$				

Tabla 5.4: Valor máximo de la AOT estimada mediante los distintos EMV estudiados (media \pm desviación estándar) para una $\eta_{\text{nom}} = 0 \text{ dB}$, con una ventana de análisis de $L = 32$ latidos.

$\widehat{V}_{\text{ave}} (\mu\text{V})$	Ruido <i>ma</i>		Ruido <i>em</i>	
	<i>P</i> = 8	<i>P</i> = 64	<i>P</i> = 8	<i>P</i> = 64
Gaussiano estacionario	17,1 ± 0,9	17,1 ± 0,9	17,0 ± 6,2	17,0 ± 6,2
Gaussiano no estacionario	17,1 ± 0,5	17,1 ± 0,5	17,0 ± 6,4	17,0 ± 6,4
Laplaciano estacionario	17,1 ± 0,7	17,1 ± 0,7	17,0 ± 6,0	17,0 ± 6,0
Laplaciano no estacionario	17,1 ± 0,5	17,1 ± 0,5	16,9 ± 6,2	16,9 ± 6,3
V_{ave} de la señal simulada: 17.1 μV				

Tabla 5.5: Valor media de la AOT estimada mediante los distintos EMV estudiados (media ± desviación estándar) para una $\eta_{\text{nom}} = 0 \text{ dB}$, con una ventana de análisis de $L = 32$ latidos.

en buena medida, de baja frecuencia. Por eso, aunque se puede suavizar la estimación reduciendo la dimensión del subespacio de señal, la energía del error no disminuye apreciablemente.

El sesgo, estimado con 2000 realizaciones de ruido, es muy reducido, menor de 0.35 μV (RMS) en todos los casos y disminuye al aumentar el tamaño de la ventana de estimación (gráficas (a) y (b) de las figuras 5.21 y 5.22). En el ruido de tipo muscular el sesgo se reduce claramente al reducir la dimensión del subespacio de señal. En este tipo de ruido, el mayor sesgo se tiene con el EMV gaussiano estacionario, mientras que en ruido de movimiento de electrodos, el mayor sesgo se ha encontrado para el estimador laplaciano no estacionario.

El error RMS en la forma de onda alterna sigue una trayectoria descendente al aumentar el número de latidos utilizados en la estimación (gráficas (c) y (d) de las figuras 5.21 y 5.22). En todos los estimadores estudiados el error es mayor cuando el ruido es de tipo movimiento de electrodos que cuando es ruido muscular. Además, en este último caso puede reducirse el error RMS en más del 50 % utilizando el subespacio paso-bajo con $P = 8$. Por tanto, el efecto de la proyección en el subespacio de señal puede cuantificarse en una ganancia de más de 6 dB. En el caso del ruido *em*, la reducción del error RMS es despreciable.

En cuanto a las diferencias entre los distintos EMV, tenemos que éstas son mayores en la simulación de ruido muscular (Figura 5.21, gráficas (c) y (d)). Como ya sucediera en detección, los modelos no estacionarios (con estimación iterativa) presentan una ligera ventaja respecto al modelo laplaciano estacionario (demodulación más filtro de mediana), y el EMV para el modelo gaussiano estacionario (demodulación más filtro lineal) arroja un resultado claramente peor. En las simulaciones con ruido *em* las diferencias entre métodos son mínimas, siendo de nuevo el modelo gaussiano estacionario el que presenta un mayor error (Figura 5.22, gráficas (c) y (d)).

En la mayor parte de los estudios sobre alternancias se proporciona únicamente una estimación de la amplitud de AOT en todo el complejo ST-T. El valor RMS y el valor medio de la AOT realizan un promediado temporal a lo largo del complejo, disminuyendo la varianza del estimador (Tablas 5.3 y 5.5). La amplitud máxima de AOT es un parámetro

más sensible al ruido, ya que se toma el valor de una sola muestra (Tabla 5.4). Es, por tanto, recomendable utilizar un valor medio (lineal o cuadrático) de la alternancia total. La amplitud media tiene la ventaja de que conserva el signo de la alternancia, con lo que permite realizar estudios sobre la fase relativa de la alternancia en distintas derivaciones (*vid. infra*. Capítulo 6). Sin embargo, puede llevar a subestimar o incluso ignorar la alternancia si ésta es bifásica. El valor RMS es robusto ante la forma de onda de la alternancia, si bien llega a sobreestimar ligeramente la amplitud RMS debido al error cuadrático medio del error de estimación. La varianza de los tres parámetros es sensiblemente mayor cuando el ruido es del tipo *em*.

5.4.1.4. Modelos de subespacio *vs* diezmado de la señal.

En la validación previa se ha comprobado que las prestaciones de los detectores y estimadores pueden mejorarse restringiendo el espacio de alternancias a un subespacio paso-bajo. La mejora es notoria en el caso del ruido de actividad muscular, ya que buena parte de su energía se sitúa fuera de la banda espectral ocupada por las señales alternantes.

La utilización de modelos lineales de dimensión reducida también tiene implicaciones en cuanto a la implementación de los métodos. En el caso de los modelos gaussianos, los detectores y estimadores basados en subespacios pueden implementarse mediante una etapa lineal de reducción de datos (*vid. esquema de la Figura 3.4*), estimándose la alternancia en el dominio transformado¹¹. Esto permite reducir la complejidad computacional del algoritmo. Por otro lado, en los modelos laplacianos, hemos visto cómo la utilización de subespacios de dimensión reducida complica la estimación de máxima verosimilitud de la AOT, ya que obliga a utilizar algoritmos iterativos que multiplican la carga computacional de la misma¹².

Para evitar la utilización de algoritmos iterativos se propone emplear un esquema de análisis basado en el esquema general de la Figura 2.5 en el que, tras el preprocesado, se aplica a la señal una etapa de reducción de datos, y a continuación se aplican las técnicas de análisis de AOT. Para simplificar el proceso, se propone que la etapa de reducción de datos sea un diezmado de la señal (previo filtrado paso-bajo). En el modelo gaussiano estacionario se ha comprobado que realizar el análisis de alternancias sobre la señal diezmada equivale al análisis sobre la señal original utilizando un modelo lineal en el que la alternancia pertenece a un subespacio paso-bajo (Sección 3.10.4, página 147). Para el resto de modelos, las dos implementaciones (detector de subespacio *vs* diezmado + detector de espacio completo) no son estrictamente equivalentes.

A continuación se comparan ambas estrategias de análisis en ruido de tipo *ma*¹³. En

¹¹En el caso de la transformada discreta coseno se estima la alternancia en las series latido a latido de cada uno de los P primeros coeficientes de la transformada, realizándose a continuación la transformada inversa para volver al dominio original.

¹²Por el contrario, si se utiliza el espacio de señal completo, el EMV puede implementarse con filtros de mediana aplicados a las series demoduladas.

¹³Utilizamos este ruido en esta validación ya que en él, dadas sus características espectrales, es donde se encuentra la mejora más importante por utilizar un subespacio de dimensión reducida.

$\hat{V}_{\text{RMS}} (\mu\text{V})$	Señal diezmada $P = 8$	
	Ruido <i>ma</i>	Ruido <i>em</i>
Gaussiano estacionario	$20,1 \pm 1,0$	$21,4 \pm 6,1$
Gaussiano no estacionario	$19,9 \pm 0,4$	$21,4 \pm 6,3$
Laplaciano estacionario	$19,9 \pm 0,7$	$21,3 \pm 6,0$
Laplaciano no estacionario	$19,9 \pm 0,5$	$21,2 \pm 6,3$
V_{RMS} de la señal simulada: $20 \mu\text{V}$		

Tabla 5.6: Valor RMS estimado mediante los distintos EMV estudiados (media \pm desviación estándar) aplicados sobre la señal diezmada para una $\eta_{\text{nom}} = 0 \text{ dB}$. El tamaño de la ventana de análisis es de $L = 32$ latidos.

concreto, la etapa de reducción de datos consiste en dividir el complejo ST-T y la onda P en intervalos de 32 ms (8 muestras) y promediar las muestras de cada intervalo. Esta etapa equivale a aplicar un filtro de media móvil de 32 ms y diezmar por 8. La frecuencia de muestreo equivalente es de $31,25 \text{ Hz}$, de modo que se representan componentes frecuenciales de hasta aproximadamente 15 Hz . Tras la etapa de reducción de datos quedan 8 muestras del complejo ST-T y 5 muestras en la onda P. Sobre estos datos se aplican los distintos métodos estudiados, ahora sí, sobre el espacio de señal completo ($N = P = 8$).

Detección. La Figura 5.23 muestra las curvas P_D vs η_{nom} para los diferentes modelos. En el modelo gaussiano estacionario ambas estrategias generan, como es previsible, resultados equivalentes¹⁴. Para el resto de modelos de ruido, los detectores aplicados sobre la señal diezmada llegan incluso a superar las prestaciones de los detectores de subespacio.

Estimación. El EMV de la alternancia en la señal diezmada no es sino una versión diezmada de la forma de onda alternante. La representación diezmada debería ser suficiente para estudiar la distribución temporal de la AOT en la repolarización en la mayoría de las aplicaciones. No obstante, puede recuperarse la forma de onda a la frecuencia de muestreo original sin más que interpolar adecuadamente la señal estimada.

La Tabla 5.6 recoge la amplitud \hat{V}_{RMS} estimada (media \pm desviación estándar en 2000 realizaciones) con los distintos métodos aplicados sobre la señal diezmada cuando se simula una alternancia de $V_{\text{RMS}} = 20 \mu\text{V}$. Puede comprobarse que los resultados son equivalentes a los obtenidos en la Tabla 5.3, verificándose que el diezmado no produce pérdida alguna en la energía alternante estimada, ni merma en la precisión de la misma.

¹⁴Los resultados no son idénticos ya que la respuesta del filtro equivalente de la TDC truncada no es exactamente igual al filtro de media móvil utilizado en el diezmado.

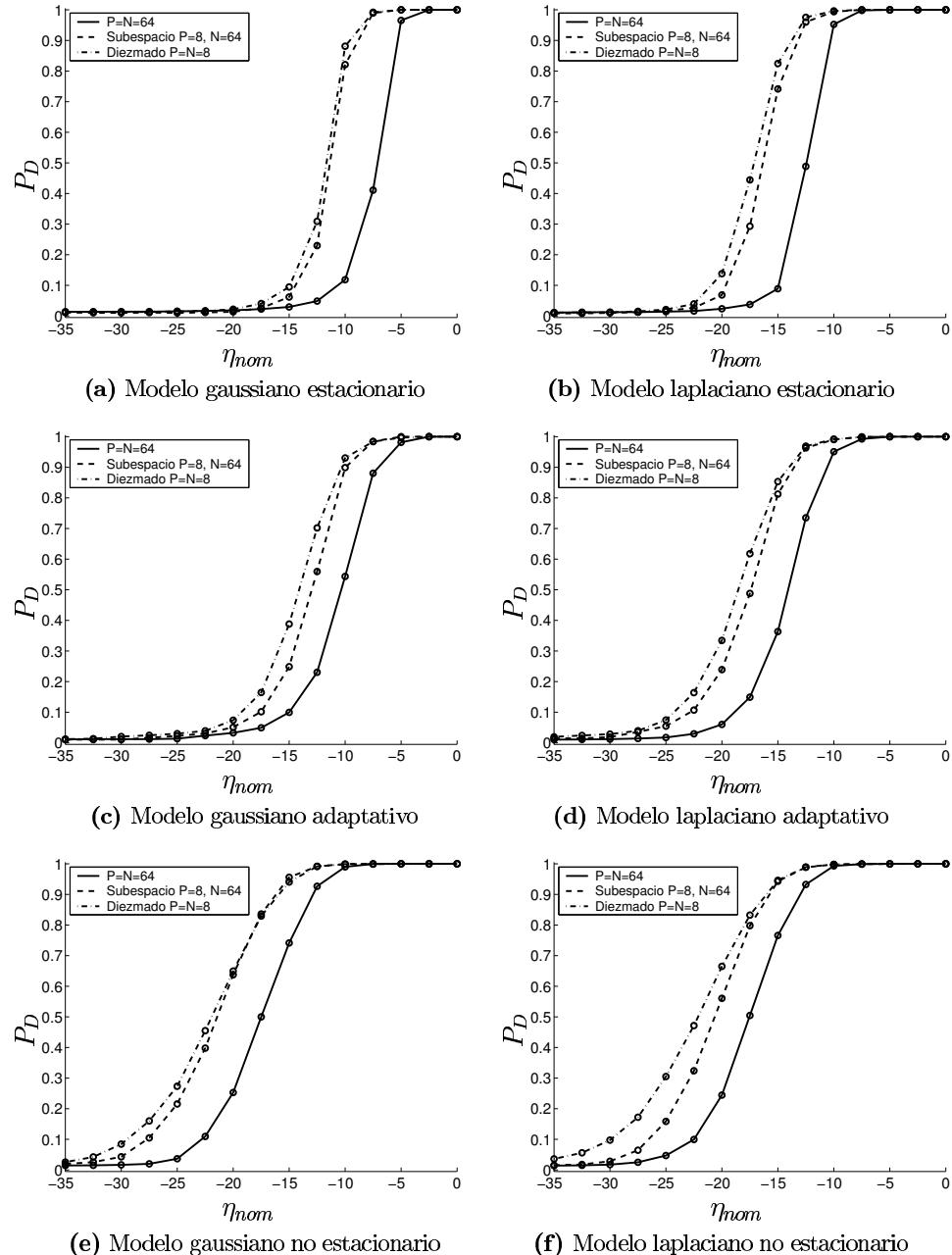


Figura 5.23: Curvas P_D vs η_{nom} obtenidas con diferentes modelos de señal: espacio completo (línea continua), subespacio con $P = 8$ (línea discontinua) y espacio completo tras diezmar la señal (línea de puntos y rayas).

	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$
Conjunto de entrenamiento	4149	2067	1023	498
Conjunto de prueba	4458	2220	1101	540

Tabla 5.7: Número de fragmentos utilizados en los conjuntos de entrenamiento y prueba según el tamaño de la ventana de análisis.

5.4.2. Validación en registros ECG reales (Simulador 2).

5.4.2.1. Configuración del estudio.

A continuación pasamos a validar los métodos propuestos en registros ECG reales utilizando el simulador más realista descrito en la Sección 5.2.2. Para la evaluación de los detectores se ha dividido la base de datos en dos partes: un conjunto de entrenamiento con los 11 primeros registros y un conjunto de prueba con los 12 registros restantes de la base de datos. En el conjunto de entrenamiento se estudiará la relación entre la P_{FA} y el umbral, y se escogerá éste para cada método de forma que la tasa de falsas alarmas en el conjunto de entrenamiento sea la deseada. La P_D se estudiará en el conjunto de prueba, en el que se simularán alternancias de distintas amplitudes. Se utilizarán los umbrales de detección calculados en el conjunto de entrenamiento. La evaluación de los estimadores se realiza en toda la base de datos (23 registros).

Métodos evaluados. Se estudian de nuevo las prestaciones de los detectores del CVG y de Rao, y los estimadores de MV para los modelos estudiados. De nuevo se utilizan los valores $L \in \{16, 32, 64, 128\}$. Los métodos se aplican sobre la señal diezmada tal y como se ha descrito en la Sección 5.4.1.4, ya que de este modo es posible obtener prestaciones similares a los detectores de subespacio paso-bajo reduciendo el coste computacional, especialmente en los modelos laplacianos. Dado que se emplean señales muestreadas a 500 Hz, diezmamos la señal en un factor 16 en la etapa de reducción de datos, quedando 8 muestras en el complejo ST-T y 5 muestras en la onda P.

Configuración del simulador. Se dividen las señales de los conjuntos de entrenamiento y prueba en intervalos de L latidos consecutivos no solapados. De cada intervalo de L latidos obtenemos 3 fragmentos de ECG correspondientes a las tres derivaciones ortogonales. La Tabla 5.7 indica el número de fragmentos que componen los conjuntos de entrenamiento y prueba para cada tamaño de la ventana.

El conjunto de entrenamiento no requiere ningún tipo de simulación, mientras que en los fragmentos del conjunto de prueba se simulan alternancias de amplitud constante. Se han simulado las siguientes amplitudes RMS de AOT: $V_{RMS} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12.5, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 80, 100\} \mu V$, utilizándose de nuevo la señal (3.79) como forma de onda alterna.

5.4.2.2. Evaluación de los detectores.

Probabilidad de falsa alarma. El estudio de los estadísticos de detección en el conjunto de entrenamiento sin AOT (hipótesis \mathcal{H}_0) permite evaluar la relación entre el umbral y la tasa de falsas alarmas. Las curvas de P_{FA} en función del umbral obtenidas por los detectores en la base de datos de ECG normales se muestran en las Figuras 5.24 ($L = 32$). Se exponen las curvas experimentales en las tres derivaciones por separado y en el conjunto de los fragmentos de las tres. Junto a ellas, se ha dibujado en línea discontinua la curva teórica asintótica para el caso de que el ruido se ajustara exactamente al modelo considerado en cada gráfica¹⁵.

De la Figura 5.24 podemos destacar que, dado un umbral, la P_{FA} varía fuertemente en función de la derivación considerada en los métodos estacionarios (gráficas (a) y (b)), debido a las diferencias en el nivel de ruido de cada canal. Por el contrario, las curvas P_{FA} vs γ de los detectores adaptativos y no estacionarios (gráficas (c)-(f)) sí son prácticamente invariantes con la derivación considerada a pesar de las diferencias en su nivel de ruido (característica CFAR).

Probabilidad de detección. Curvas P_D vs amplitud de alternancia. La Figura 5.25 muestra la curva P_D vs V_{RMS} para $P_{FA} = 0,01$ de los detectores del CVG y de Rao en señales reales con alternancia estacionaria simulada. La Figura 5.26 permite la comparación directa de las curvas obtenidas con los TCVG y los tests de Rao correspondientes a un mismo modelo.

Dado que la calidad de las señales en las tres derivaciones es manifiestamente distinta, se presentan a continuación las curvas P_D vs V_{RMS} obtenidas en cada derivación por separado para el detector con $L = 32$ (Figura 5.27). Los umbrales utilizados son los mismos que en la Figura 5.25, es decir, se han calculado en el conjunto de entrenamiento formado por fragmentos de señal procedentes de las tres derivaciones.

En las gráficas de la Figura 5.25 correspondientes a los tests CVG se aprecia que los detectores estacionarios, y especialmente el test gaussiano estacionario, son insensibles ante niveles bajos de alternancias. La razón de este comportamiento hay que buscarla en el hecho de que el estadístico de detección es sensible al nivel de ruido. Por tanto, para tener acotada la probabilidad de falsa alarma en el conjunto de entrenamiento es preciso fijar un umbral suficientemente alto. En los detectores adaptativos y no estacionarios el estadístico de detección está normalizado por el nivel de ruido. De este modo, un mismo umbral¹⁶ permite que el detector sea sensible a alternancias de baja amplitud cuando el nivel de ruido es menor y que se insensibilice para evitar falsas alarmas cuando el nivel de ruido es mayor. Este efecto puede observarse muy bien en la Figura 5.27 (gráficas (a), (c) y (d)). Para $L = 32$, la transición de no detección a detección en el detector gaussiano estacionario se produce en torno a los $40 \mu V$ en las tres derivaciones. En el caso del

¹⁵En los modelos estacionarios, donde se asume conocido el nivel de ruido, se ha considerado arbitrariamente la curva teórica para un nivel de ruido de $\sigma = 20 \mu V$.

¹⁶El umbral en los métodos adaptativos y no estacionarios puede interpretarse como la relación de energía alterna a ruido mínima para considerar la alternancia significativa.

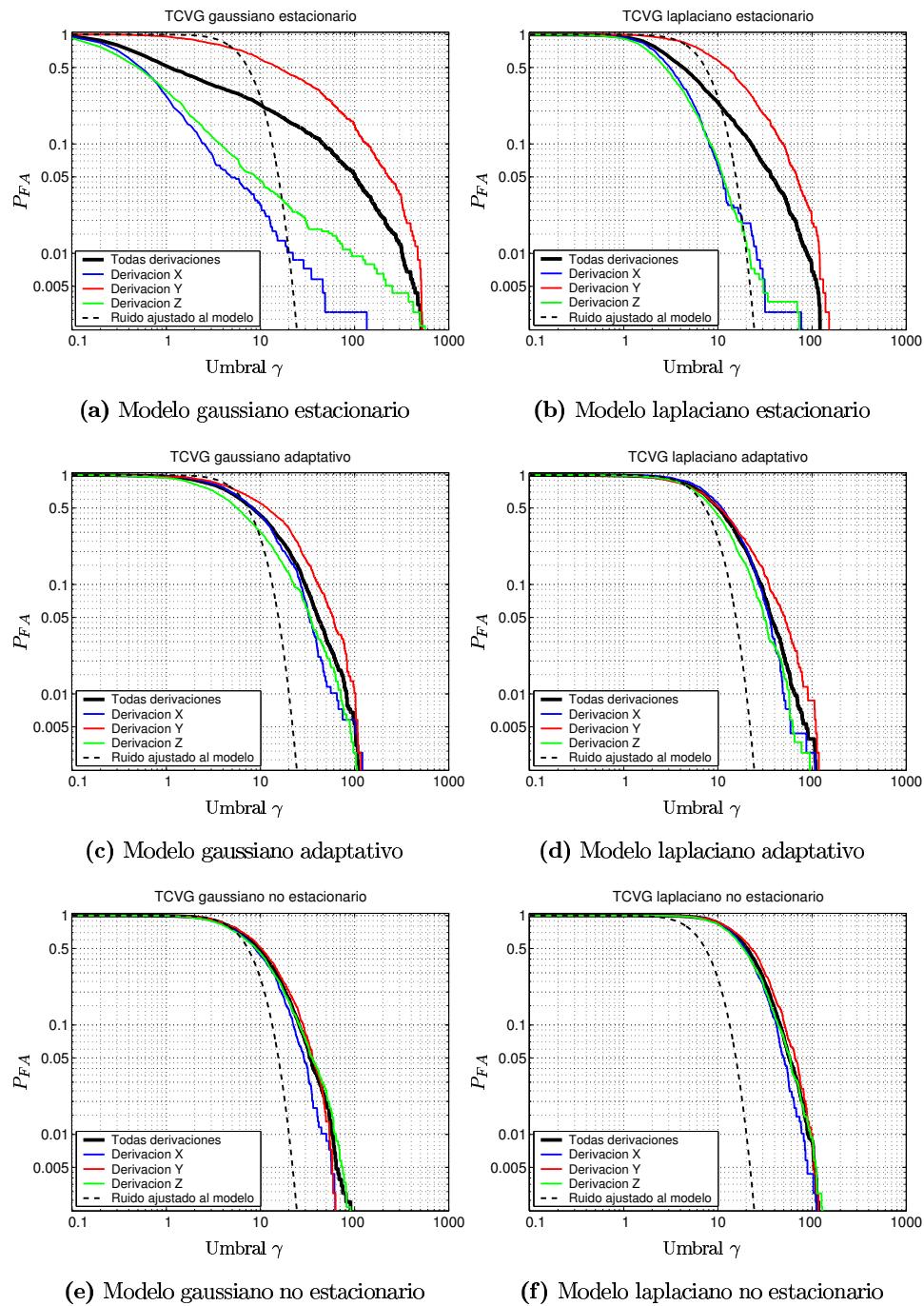


Figura 5.24: Curvas P_{FA} vs γ teóricas y experimentales obtenidas en registros ECG reales.

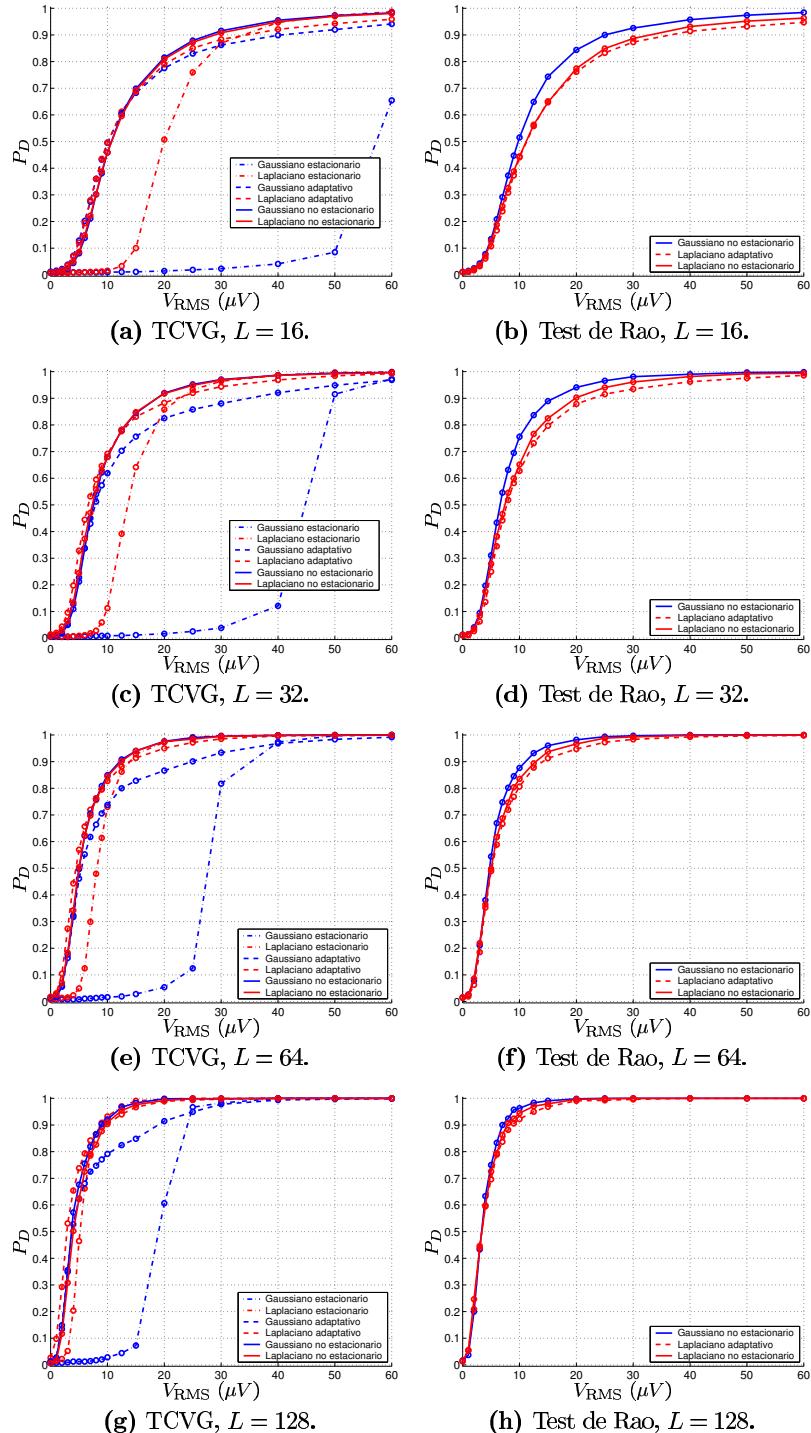


Figura 5.25: Curvas P_D vs V_{RMS} para $P_{FA} = 0,01$ de los detectores CVG y de Rao.

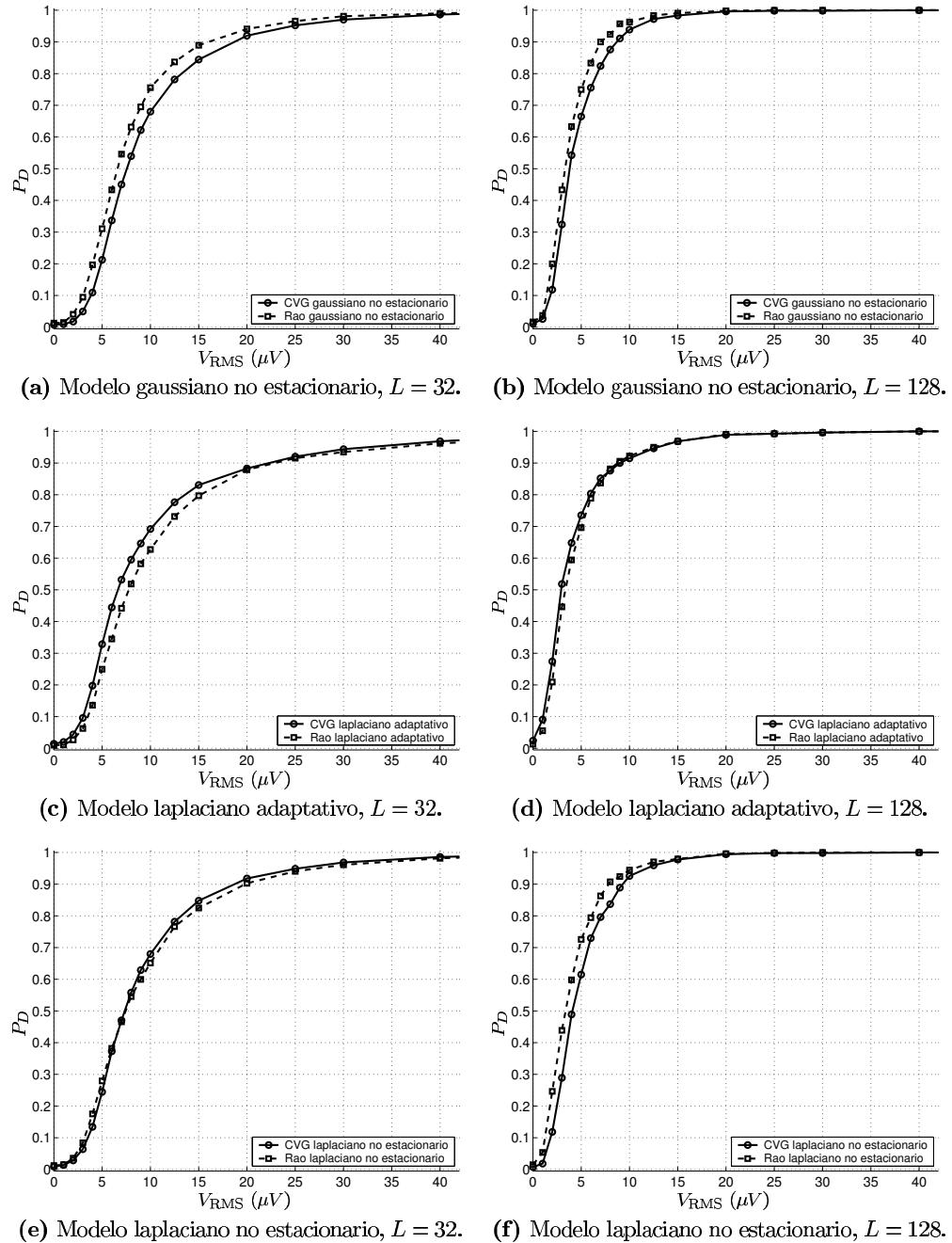


Figura 5.26: Curvas P_D vs V_{RMS} para $P_{FA} = 0,01$ de los detectores CVG y los correspondientes tests de Rao con $L = 32$ y $L = 128$.

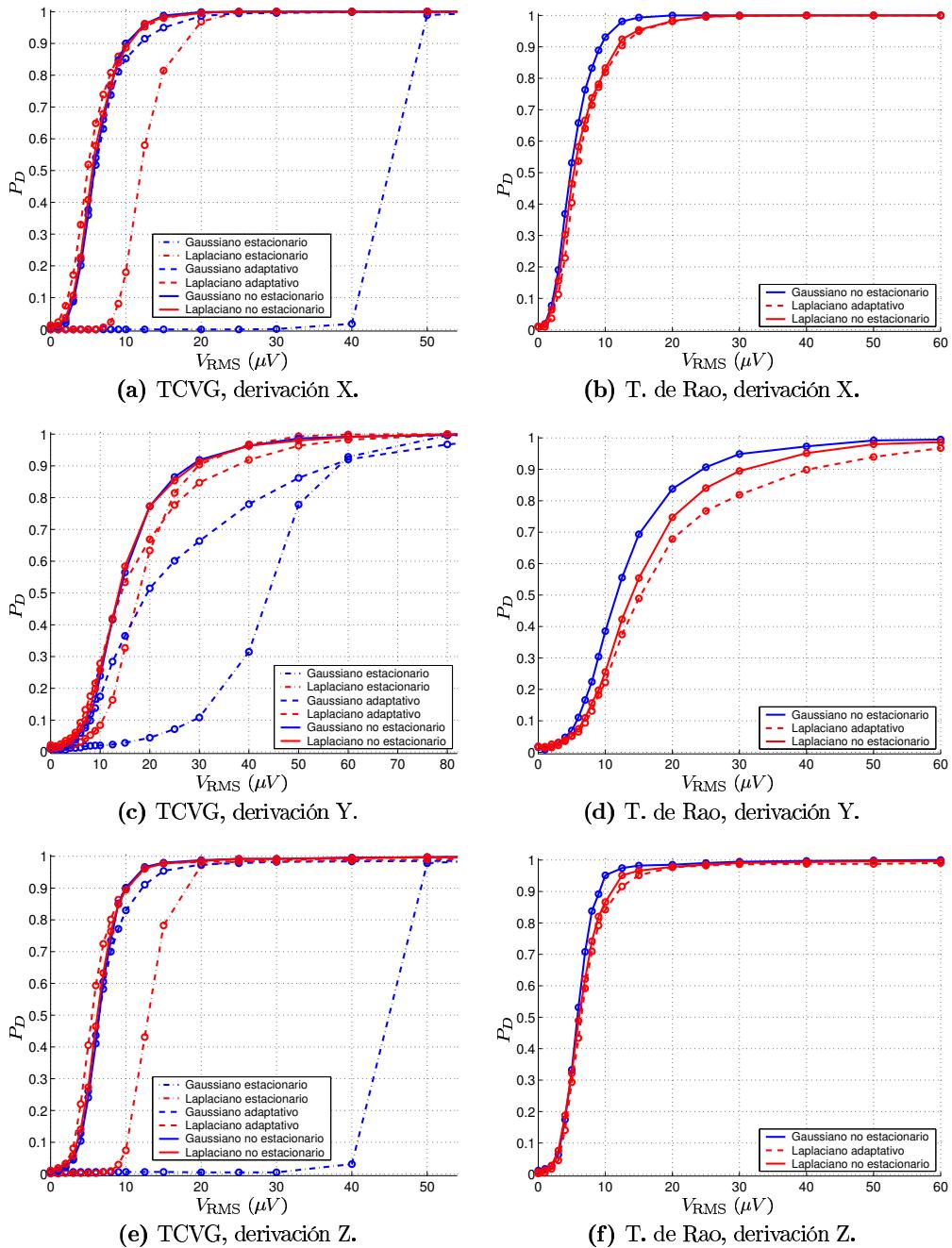


Figura 5.27: Curvas P_D vs V_{RMS} para $P_{FA} = 0,01$ en las tres derivaciones ortogonales.

detector laplaciano estacionario esta transición se produce cuando la alternancia alcanza los $15 \mu V$. Los detectores adaptativos y no estacionarios realizan esta transición para alternancias de $5 \mu V$ en las derivaciones X y Z (las menos ruidosas), y en la derivación Y (más ruidosa) son sólo sensibles ante alternancias de más de $15 \mu V$. De este modo se consigue un mejor comportamiento global para una P_{FA} dada.

Los dos detectores no estacionarios, junto con el detector laplaciano adaptativo alcanzan las mejores prestaciones en todos los casos, con diferencias mínimas entre ellos. El modelo laplaciano adaptativo consigue paliar el efecto de la no estacionariedad del ruido gracias a la robustez de la estimación ante valores extremos, comportándose prácticamente tan bien como los más complejos detectores no estacionarios. Sin embargo, el detector gaussiano adaptativo no alcanza las prestaciones de su homólogo laplaciano.

Por otra parte, se comprueba (Figura 5.26) que, también en el ECG real, los detectores de Rao para los modelos gaussiano no estacionario, laplaciano adaptativo y laplaciano no estacionario constituyen una muy buena aproximación a los detectores CVG, superando en algunos casos sus prestaciones experimentales. Dada su sencillez computacional, suponen una alternativa interesante, especialmente en los modelos no estacionarios que precisan de un procedimiento iterativo de maximización de la verosimilitud.

5.4.2.3. Evaluación de los EMV.

Se ha simulado una AOT de $20 \mu V$ en cada derivación de todos los registros de la base de datos. Los EMV obtenidos son las versiones diezmadas (con una frecuencia equivalente de muestreo de $31,25 Hz$). Para comparar las formas de onda estimadas con la forma de onda original se remuestrean éstas a la frecuencia de muestreo original (mediante una interpolación por 16). La Figura 5.28 ilustra el proceso de remuestreo. En la gráfica (a) se representan las versiones diezmadas del EMV laplaciano estacionario en 10 realizaciones distintas. Las líneas rojas discontinuas corresponden a la media y a la media más/menos una desviación estándar de las formas de onda estimadas en toda la base de datos. En la gráfica (b) se ven las mismas formas de onda una vez interpoladas a la frecuencia de muestreo del ECG original. Las líneas rojas representan de nuevo la media más/menos una desviación estándar después de interpolar, mientras que la línea continua negra es la señal simulada original.

La Figura 5.29 muestra el valor RMS del sesgo y de la desviación estándar del error de estimación (tras interpolar) en todo el complejo ST-T.

Finalmente, estudiamos el error cometido al estimar la amplitud global de la AOT en todo el complejo ST-T. Los valores RMS (media \pm desviación estándar) que se ofrecen en la Tabla 5.8 se han calculado directamente en la señal diezmada.

De los datos experimentales mostrados en la Figura 5.29 se desprende que los estimadores estacionarios son prácticamente insesgados, mientras que los no estacionarios, especialmente el EMV laplaciano no estacionario, presentan un cierto sesgo que se hace más evidente para ventanas de análisis cortas.

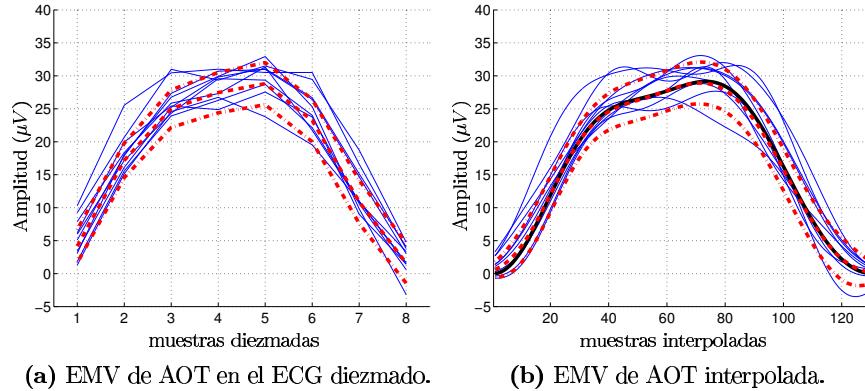


Figura 5.28: Media \pm desviación estándar de la forma de onda alterna estimada en toda la base de datos. Se representan asimismo las estimaciones correspondientes a 10 realizaciones.

\widehat{V}_{RMS} (μV)		Señal diezmada $P = 8$			
Modelos		Derivación X	Derivación Y	Derivación Z	Total
Gaussiano estacionario		$20,1 \pm 2,3$	$23,8 \pm 11,2$	$20,3 \pm 3,5$	$21,4 \pm 7,1$
Gaussiano no estacionario		$20,0 \pm 2,4$	$20,9 \pm 6,3$	$19,8 \pm 3,0$	$20,2 \pm 4,3$
Laplaciano estacionario		$20,1 \pm 2,1$	$21,5 \pm 7,0$	$20,2 \pm 2,6$	$20,6 \pm 4,5$
Laplaciano no estacionario		$19,6 \pm 2,5$	$19,9 \pm 6,1$	$18,8 \pm 3,1$	$19,4 \pm 4,2$
V_{RMS} de la señal simulada: $20 \mu V$					

Tabla 5.8: Estimación de la amplitud de AOT \widehat{V}_{RMS} (media \pm desviación estándar) en el ECG diezmado mediante los distintos EMV estudiados. El tamaño de la ventana de análisis es de $L = 32$ latidos y la alternancia simulada es de $V_{RMS} = 20 \mu V$.

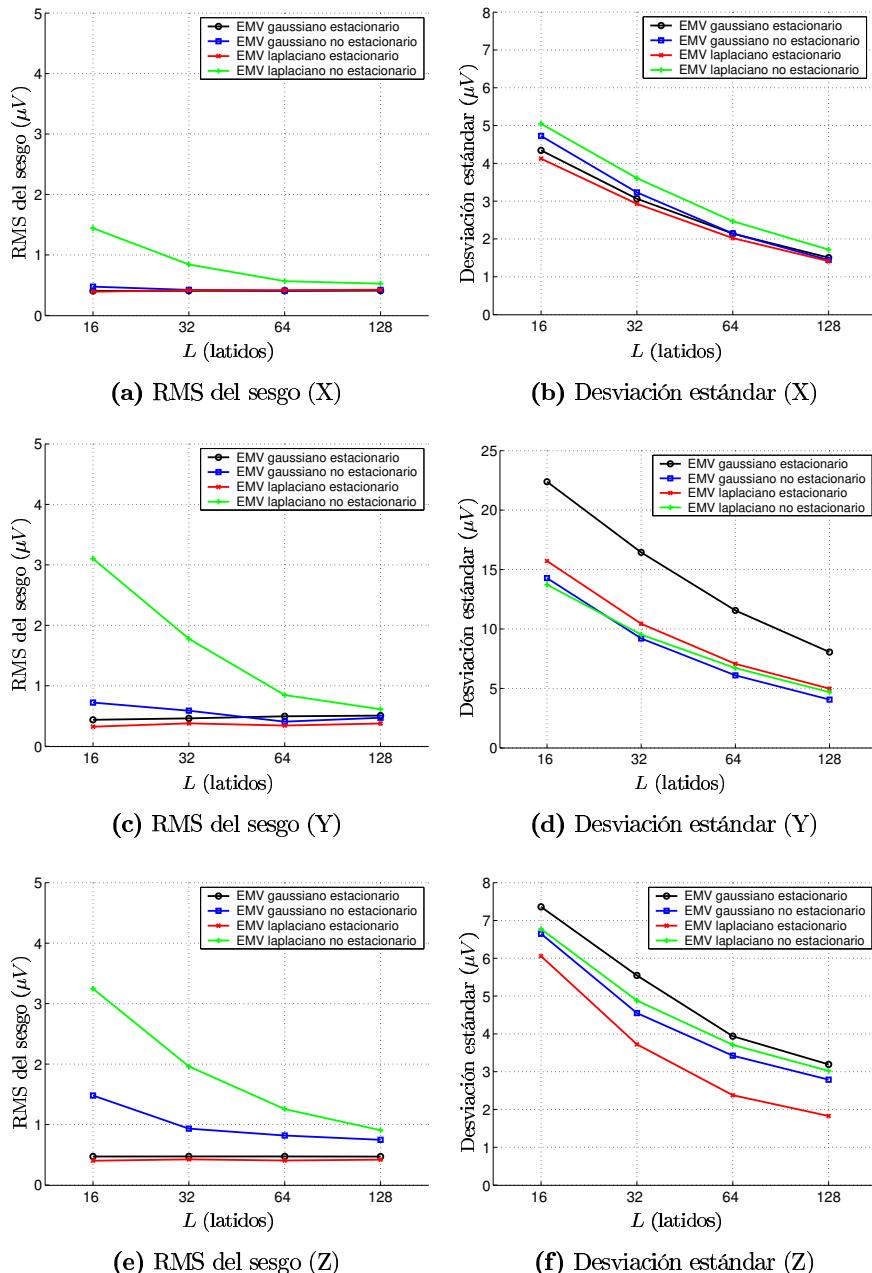


Figura 5.29: Valores RMS del sesgo y la desviación estándar de los EMV en para las tres derivaciones.

En cuanto a la desviación estándar, observamos que en situaciones de ruido moderado (derivaciones X y Z) las diferencias entre los cuatro EMV son mínimas. Sin embargo, las curvas experimentales en la ruidosa derivación Y evidencian que en situaciones extremas el EMV gaussiano estacionario (que corresponde a los modelos gaussiano estacionario y adaptativo) tiene un error de estimación claramente superior al de los otros estimadores (la diferencia es de aproximadamente 4 dB para todos los tamaños de ventana).

El error cometido al calcular la amplitud \hat{V}_{RMS} con el EMV gaussiano estacionario (estimador de mínimo error cuadrático) es claramente mayor que con los demás métodos, especialmente en la derivación Y. Los otros tres EMV tienen un comportamiento global similar (Tabla 5.8).

De estos datos se desprende que el EMV laplaciano estacionario¹⁷ (estimador de mínimo error absoluto) presenta dos características recomendables: su sencillez, ya que consiste en aplicar un filtro de mediana a las series latido a latido demoduladas del complejo ST-T y sus buenas prestaciones, ya que alcanza un comportamiento similar al de los costosos EMV no estacionarios.

5.4.3. Comparación con otros métodos utilizados en la literatura.

En esta sección comparamos los resultados anteriores con los obtenidos por otros métodos publicados en la literatura. En concreto, nos centramos en los tres métodos más extendidos en la realización de estudios clínicos: el método espectral (ME), el método de la demodulación compleja (MDC) y el método de la media móvil modificada (MMM). Como se desprende de la discusión llevada a cabo en la Sección 3.9, el MDC es equivalente al TCVG para el modelo estacionario gaussiano. En particular el detector gaussiano estacionario utilizado en las simulaciones de este capítulo equivale al MDC donde el filtro paso-bajo utilizado es un filtro de media móvil de L latidos. La validación llevada a cabo en el presente capítulo indica que se trata del método más sensible al nivel de ruido y la no estacionariedad del mismo de cuantos hemos estudiado.

A continuación se evalúa el comportamiento del ME y el método MMM sobre las señales de la base de datos Politécnico-Ca'Granda en las mismas condiciones que el resto de métodos. Se trata de los únicos métodos que están siendo utilizados en la actualidad por equipos comerciales. El ME es utilizado por los equipos CH2000 y Heartwave de la empresa Cambridge Heart (Bedford, MA) y el MMM está implementado en el equipo CASE-8000 de General Electric Medical Systems (Milwaukee, WI).

5.4.3.1. Método espectral.

Como se ha discutido en el capítulo 2 y en la Sección 3.9, el método espectral pertenece al mismo paradigma que el método de la demodulación compleja (detectores basados en la transformada de Fourier localizada o, equivalentemente, en el filtrado lineal paso-alto

¹⁷Recuérdese que, aun siendo un estimador estacionario, es también el EMV para el modelo adaptativo.

de las series latido a latido) pero es capaz de adaptarse al nivel de ruido en la ventana de análisis. Por tanto, el modelo de señal subyacente al ME es muy próximo al modelo gaussiano adaptativo propuesto en esta tesis.

Configuración del estudio. En la bibliografía, podemos encontrar el ME aplicado en ventanas de 64 y de 128 latidos. Dado que las prestaciones de un método dependen de la duración de la ventana de análisis, consideramos necesario comparar las diferentes técnicas con las mismas duraciones, evitando así que la comparación de métodos se vea sesgada por la diferencia en las mismas. Por tanto, hemos implementado el ME para las mismas duraciones que el resto de métodos ($L \in \{16, 32, 64, 128\}$). Para ello, la ventana espectral en la que se mide el pedestal de ruido y su varianza se ha definido del mismo modo que en (Narayan y Smith 1999b), y se ha adaptado a las distintas ventanas de análisis (ya que al variar L cambia el número de puntos de la transformada discreta de Fourier) (Narayan y Smith 1999b). El método espectral proporciona dos estadísticos, el ratio de alternancia o TWAR (2.10) y la amplitud RMS de la alternancia (2.32).

Probabilidad de falsa alarma y umbrales. Un criterio ampliamente utilizado en los estudios que emplean el método espectral consiste en considerar la existencia de la misma si $\text{TWAR} \geq 3$ (Rosenbaum *et al.* 1994). Hemos calculado la tasa de falsas alarmas obtenidas al aplicar dicho umbral en el conjunto de entrenamiento de la base de datos Politécnico-Ca'Granda. Para una ventana de $L = 16$ latidos, tenemos $P_{FA} = 0,14$; para $L = 32$ latidos, $P_{FA} = 0,10$; para $L = 64$ latidos, $P_{FA} = 0,07$ y finalmente, para $L = 128$ latidos se obtiene una $P_{FA} = 0,05$. Estos datos indican que el ME con los parámetros típicamente utilizados en la literatura ($L = 128$ y la regla de decisión $\text{TWAR} \geq 3$) genera tasas de falsas alarmas del 5 %. Se concluye además que, si se quiere mantener la P_{FA} , el umbral ha de ser adaptado cuando se modifica el número de latidos de la ventana de análisis. El estadístico TWAR del ME es invariante ante un escalado de la señal. Por tanto, el ME es un detector CFAR. Esta característica ha sido comprobada en el conjunto de entrenamiento, donde la condición $\text{TWAR} \geq 3$ para $L = 32$ ofrece unos valores de P_{FA} en las derivaciones X, Y y Z de 0,10, 0,11 y 0,08, respectivamente.

Para comparar en igualdad de condiciones con los métodos derivados en esta tesis, utilizaremos el mismo procedimiento para seleccionar el umbral: se escoge el umbral γ_{TWAR} tal que la tasa de falsas alarmas en el conjunto de entrenamiento sea de 0,01. Los valores de γ_{TWAR} obtenidos al imponer esta condición son 26 ($L = 16$), 14,4 ($L = 32$), 8,2 ($L = 64$) y 8,4 ($L = 128$).

Probabilidad de detección. En la Figura 5.30 se presentan las curvas P_D vs V_{RMS} del método espectral junto con algunos de los detectores TCVG propuestos en esta tesis. Para facilitar la legibilidad de las gráficas, dibujamos únicamente las curvas de los tres detectores gaussianos (que son métodos basados, como el ME, en filtros lineales) y del detector laplaciano adaptativo, que comparte con el ME su capacidad de adaptación

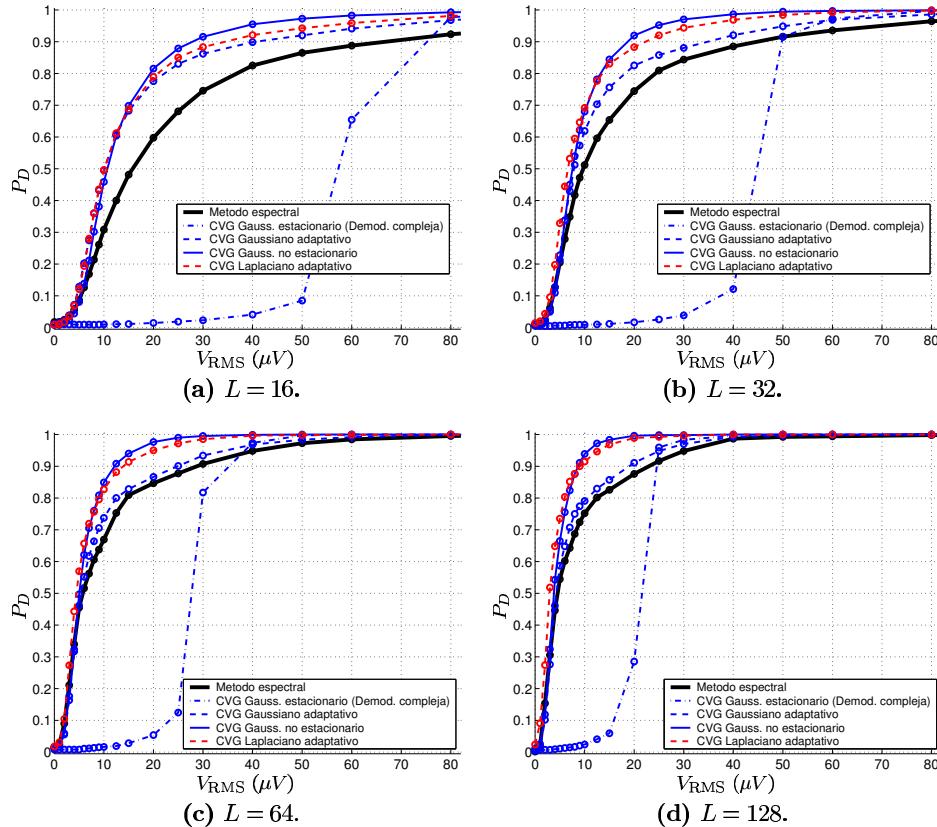


Figura 5.30: Curvas P_D vs V_{RMS} para $P_{FA} = 0,01$ obtenidas con el método espectral (línea gruesa negra) y comparación con los TCVG de algunos de los modelos estudiados.

al nivel de ruido. Las curvas correspondientes al resto de modelos pueden verse en la Figura 5.25.

Estimación de la amplitud de alternancia. La Tabla 5.9 presenta la media y desviación estándar del estimador de amplitud de alternancia del ME, dado por la expresión (2.32), para una alternancia simulada de $20\mu V$ (RMS).

Como se ha indicado, el modelo gaussiano adaptativo es el más cercano al modelo subyacente al ME. En la Figura 5.30 se observa que en ventanas de 64 y 128 latidos (gráficas (c) y (d)), la curva de detección del ME está muy cerca, aunque algo por debajo, de la curva correspondiente al detector gaussiano adaptativo. La degradación del ME se acentúa al reducir el tamaño de la ventana. También se observa una clara ventaja del ME sobre el MDC, ya que este último no es capaz de adaptarse a los distintos niveles de ruido. Sin embargo, la capacidad de detección del método espectral se ve claramente superada por los detectores no estacionarios y el detector laplaciano adaptativo. Desde el

Método espectral				
Ventana	Derivación X	Derivación Y	Derivación Z	Todas derivaciones
$L = 16$	$19,8 \pm 3,3$	$21,0 \pm 14,0$	$19,7 \pm 4,6$	$20,1 \pm 8,7$
$L = 32$	$19,8 \pm 2,4$	$19,7 \pm 11,6$	$19,8 \pm 3,4$	$19,8 \pm 7,1$
$L = 64$	$19,9 \pm 1,8$	$19,4 \pm 9,1$	$19,8 \pm 2,6$	$19,7 \pm 5,5$
$L = 128$	$20,0 \pm 1,2$	$19,7 \pm 6,5$	$19,9 \pm 1,9$	$19,8 \pm 4,0$
\widehat{V}_{RMS} de la señal simulada: $20 \mu\text{V}$				

Tabla 5.9: Estimación de la amplitud de AOT \widehat{V}_{RMS} (media \pm desviación estándar) en el ECG diezmado con el método espectral. El valor RMS de la alternancia simulada es $V_{\text{RMS}} = 20 \mu\text{V}$.

punto de vista de la estimación, la desviación estándar del estimador \widehat{V}_{RMS} es del mismo orden de la correspondiente al EMV gaussiano estacionario, pero claramente mayor que la del EMV laplaciano estacionario, especialmente en la derivación Y (*vid. Tabla 5.8*).

5.4.3.2. Método de la media móvil modificada.

El método MMM limita el efecto de los valores extremos aplicando la transformación no lineal (2.29). Sin embargo, en ausencia de valores extremos, el filtrado llevado a cabo por el método MMM es lineal. El método comparte la robustez ante valores extremos con los modelos laplacianos, aunque su modelo subyacente en ausencia de tales valores es esencialmente gaussiano (comportamiento lineal). Por otra parte, el estadístico de detección (2.31) no tiene en cuenta el nivel de ruido presente en la ventana de análisis, por lo que el modelo de ruido subyacente es estacionario.

Configuración del estudio. La función de transferencia equivalente del filtro aplicado por este método cuando opera de forma lineal es la del filtro IIR

$$H_{\text{hpf}}(z) = \rho \frac{1 - z^{-1}}{1 - (1 - \rho)z^{-2}}. \quad (5.8)$$

La respuesta impulsional correspondiente viene dada por

$$h_{\text{hpf}}[n] = \begin{cases} \rho(1 - \rho)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \geq 0 \text{ y par} \\ -\rho(1 - \rho)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \geq 0 \text{ e impar} \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}. \quad (5.9)$$

El parámetro ρ puede interpretarse como un factor de suavizado mientras que $1 - \rho$ es un factor de olvido. La duración efectiva de la ventana de análisis puede calcularse como

$$L_{\text{ef}} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\text{hpf}}^2[n]}{\max(h_{\text{hpf}}^2[n])} = \frac{2\rho^2 \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho)^{2n}}{\rho^2} = \frac{2}{1 - (1 - \rho)^2}. \quad (5.10)$$

Si $\rho \ll 1$, podemos realizar la aproximación $L_{\text{ef}} \approx \frac{1}{\rho}$.

Los autores del método lo emplean con $\rho = 1/8$ en (Nearing y Verrier 2002), correspondiente a una longitud efectiva de aproximadamente 8 latidos (el valor exacto con la expresión (5.10) es de 8.53). No obstante, en una publicación reciente se proponen valores entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{64}$ en función del compromiso entre eliminación de ruido y seguimiento de la alternancia (Kaiser *et al.* 2004).

Para comparar con el resto de métodos estudiados, seleccionamos los valores $\rho \in \{\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}\}$ de modo que las longitudes efectivas coincidan con los tamaños de las ventanas finitas utilizadas por el resto de métodos $L_{\text{ef}} \in \{16, 32, 64, 128\}$.

Por último, el parámetro K controla la zona de saturación de la función no lineal $g(x)$ (2.29) que se aplica a la innovación a la hora de actualizar el valor de la media móvil

$$\bar{y}_t[p] = \bar{y}_{t-2}[p] + g(\rho(y_{t-2}[p] - \bar{y}_{t-2}[p])). \quad (5.11)$$

Debe interpretarse como la variación máxima permitida de la media móvil al procesar un nuevo latido. Así, en los ejemplos del capítulo 2, se ha considerado $K_0 = 20 \mu V$, con un factor de suavizado $\rho_0 = \frac{1}{8}$. Esto indica que la saturación se alcanza cuando la diferencia entre una muestra del nuevo latido y la muestra correspondiente del latido promediado que sea mayor que $K_0/\rho_0 = 160 \mu V$. Por tanto, la actualización del latido promedio no supere nunca los $20 \mu V$. Si se mantiene un mismo valor $K = K_0$ para todos los valores de ρ , estamos cambiando la condición de saturación. Así, para $\rho = 64$, tenemos que el filtro funciona linealmente siempre que la innovación del nuevo latido no supera los $K_0/\rho = 1280 \mu V$. En la práctica, este valor de saturación tan alto convertiría al filtro en lineal¹⁸, perdiendo las características deseables de robustez de la estrategia seguida. Por esta razón, hemos decidido modificar el valor de K en función de ρ como $K(\rho) = \rho_0 K_0 / \rho = 160 / \rho$.

Siguiendo las indicaciones dadas en (Nearing y Verrier 2002), la alternancia se estima en cada latido como la diferencia entre los latidos promediados par e impar (2.30), y el estadístico de detección es el valor absoluto máximo de esa diferencia (2.31).

El método se aplica en las señales de los conjuntos de entrenamiento y de prueba, obteniéndose un valor del estadístico de detección para cada latido. Esta serie de valores se diezma para tener un valor del estadístico por cada L_{ef} latidos, del mismo modo que en el resto de métodos.

Probabilidad de detección. Las curvas P_D vs V_{RMS} del método MMM, el MDC (modelo gaussiano estacionario) y los tres modelos laplacianos estudiados¹⁹ se muestran en la Figura 5.31 .

¹⁸En ese caso, el método MMM se convierte en un caso particular de demodulación compleja.

¹⁹Nos centramos en la comparación con los métodos laplacianos, ya que comparten con el método MMM la robustez ante valores extremos. No obstante, las curvas de los otros modelos gaussianos están dibujadas en la Figura 5.25.

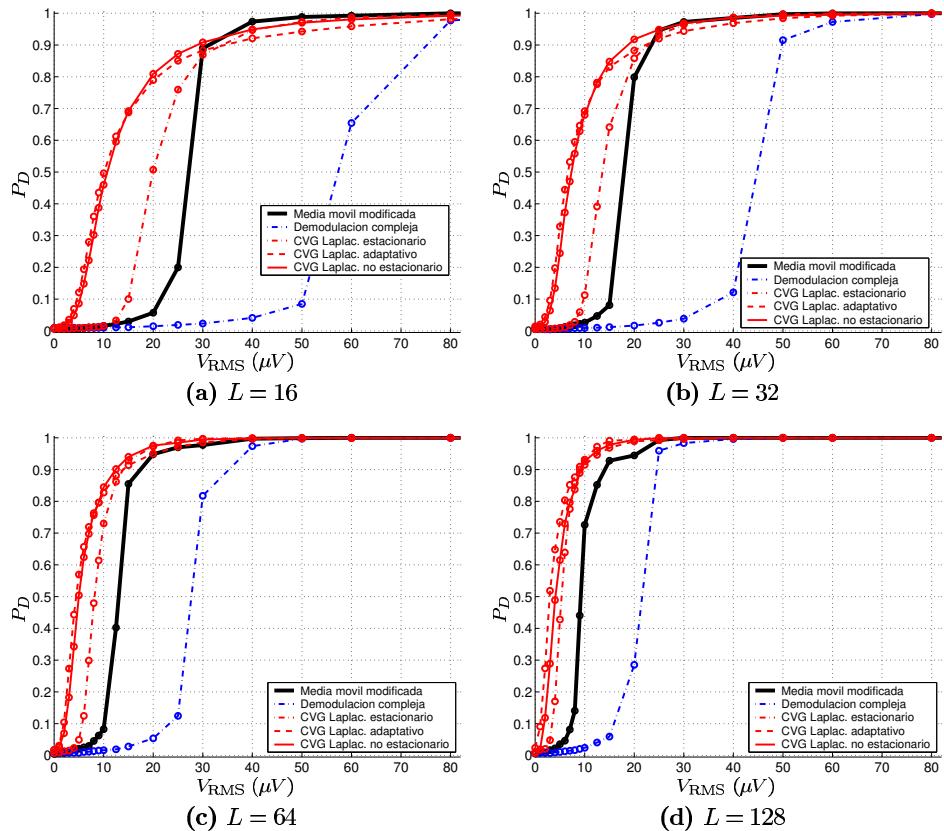


Figura 5.31: Curvas P_D vs V_{RMS} obtenidas con el método de la media móvil modificada (línea gruesa negra) y comparación con el MDC y los TCVG correspondientes a modelos laplacianos.

\widehat{V}_{RMS} (μV)	Método de la media móvil modificada				
	Ventana	Derivación X	Derivación Y	Derivación Z	Todas derivaciones
$L = 16$	$20,0 \pm 1,7$	$21,9 \pm 8,2$	$20,1 \pm 2,4$	$20,7 \pm 5,1$	
$L = 32$	$20,0 \pm 1,3$	$21,1 \pm 6,2$	$20,0 \pm 1,8$	$20,4 \pm 3,8$	
$L = 64$	$20,0 \pm 1,0$	$20,7 \pm 4,5$	$20,0 \pm 1,5$	$20,2 \pm 2,8$	
$L = 128$	$20,0 \pm 0,7$	$20,6 \pm 3,5$	$19,9 \pm 1,2$	$20,2 \pm 2,1$	
V_{RMS} de la señal simulada: $20 \mu V$					

Tabla 5.10: Estimación de la amplitud de AOT \widehat{V}_{RMS} (media \pm desviación estándar) en el ECG diezmado con el método de la media móvil modificada. El valor RMS de la alternancia simulada es $V_{RMS} = 20 \mu V$.

Estimación de la amplitud de alternancia. La Tabla 5.9 presenta la media y desviación estándar del estimador de amplitud de alternancia del método MMM, para una alternancia simulada de $20 \mu V$ (RMS).

Como era de esperar, las prestaciones en detección del método MMM se sitúan entre las de los detectores estacionarios gaussiano y laplaciano. El método funciona claramente mejor que el detector para el modelo gaussiano estacionario (demodulación compleja), pero está por debajo de cualquiera de los detectores laplacianos. En cuanto a la estimación, el error cometido por el MMM es algo menor que el del método laplaciano estacionario para la misma duración efectiva de la ventana, indicando que, para una determinada L_{ef} , el filtro exponencial filtra más el ruido que los filtros de ventana rectangular (cfr. Tablas 5.8 y 5.31).

5.5. Evaluación de los métodos en AOT transitoria.

Cuando la AOT es estacionaria, los detectores funcionan tanto mejor cuanto mayor sea la duración de la ventana L . En el ECG real, la duración de los episodios es muy variable, pudiendo comprender desde unos pocos segundos hasta decenas de minutos. Si la duración de la alternancia es menor que la ventana de análisis, los métodos tienden a subestimar la componente alterante y pierden sensibilidad. Por tanto, el valor de L seleccionado indica el mínimo tamaño de la alternancia que puede ser detectada sin pérdida de sensibilidad. Por otro lado, la capacidad de seguimiento de las variaciones que experimenta la alternancia a lo largo del episodio depende de la duración de la ventana de análisis. A continuación se estudian ambos aspectos.

5.5.1. Detección de episodios transitorios.

5.5.1.1. Configuración del estudio.

En primer lugar, estudiamos el comportamiento de los métodos ante episodios de duración limitada en función de la ventana de análisis. Empleamos para ello el Simulador 2,

basado en señales ECG reales (Sección 5.2.2).

Métodos evaluados. Evaluamos los detectores TCVG para los modelos adaptativos y no estacionarios y el ME, utilizando ventanas de análisis de $L \in \{16, 32, 64, 128\}$ y diezmando previamente la señal ECG.

Configuración del simulador. Se dividen las señales de los conjuntos de entrenamiento y prueba en intervalos de L latidos consecutivos no solapados. En las señales de prueba, se simulan episodios de alternancias de amplitud constante $V_{RMS} = 20 \mu V$ y duración limitada a L_{obs} latidos, donde $L_{obs} = \{16, 24, 32, 48, 64, 96\}$ latidos. En cada caso, si $L_{obs} \geq L$ tenemos una alternancia constante en la ventana de análisis, situación equivalente a tener una AOT estacionaria. Por el contrario, si $L_{obs} < L$, se simula un episodio de L_{obs} latidos centrado en la ventana de forma que ésta contiene L_{obs} latidos alternantes y $L - L_{obs}$ latidos sin alternancia.

Curvas P_D vs L . En la Figura 5.32 se muestran las probabilidades de detección alcanzables por los distintos detectores con $P_{FA} = 0,01$ para distintas duraciones L_{obs} del episodio alternante en función del número de latidos de la ventana de análisis.

Como era de esperar, las mejores prestaciones se obtienen para los tamaños de ventana más cercanos a la duración de la alternancia simulada. Es interesante observar que cuando el episodio alternante no cubre toda la duración de la ventana de análisis, la detectabilidad del episodio desciende drásticamente en el ME y los métodos no estacionarios, mientras que la capacidad de detección de los métodos adaptativos disminuye más lentamente. Así, los métodos adaptativos superan las prestaciones de los no estacionarios ante episodios de AOT más cortos que la ventana de análisis.

Así, en la gráfica (b) observamos que mientras un episodio de AOT de $20 \mu V$ y 24 latidos de duración se detecta con la misma probabilidad ($P_D \approx 0,8$ para $P_{FA} = 0,01$) por todos los detectores TCVG utilizando una ventana de 32 latidos, al utilizar una ventana de 64 latidos el episodio es más detectable por los detectores adaptativos ($P_D \approx 0,60$ con $P_{FA} = 0,01$) que por los no estacionarios ($P_D \approx 0,25$ para $P_{FA} = 0,01$).

Si consideramos una ventana de análisis de 64 latidos, tenemos que los dos detectores laplacianos se comportan de forma similar para episodios de más de 64 latidos ($P_D = 0,98$ el no estacionario vs $P_D = 0,95$ el adaptativo). Si el episodio es de 48 latidos (75 % de la ventana), su detectabilidad disminuye, aunque sigue siendo similar en ambos métodos ($P_D = 0,92$ el no estacionario vs $P_D = 0,90$ el adaptativo). Al reducir la duración a 32 latidos (50 % de la ventana), el detector no estacionario tiene una $P_D = 0,61$, que se reduce a $P_D = 0,26$ para 24 latidos, mientras que el detector laplaciano adaptativo obtiene probabilidades de detección de $P_D = 0,78$ y $P_D = 0,62$ respectivamente.

Estos resultados nos indican también el comportamiento de los detectores aplicados secuencialmente en el inicio y final de un episodio alternante. En los bordes del episodio la ventana de análisis no es homogénea (contiene latidos alternantes y latidos no alternantes).

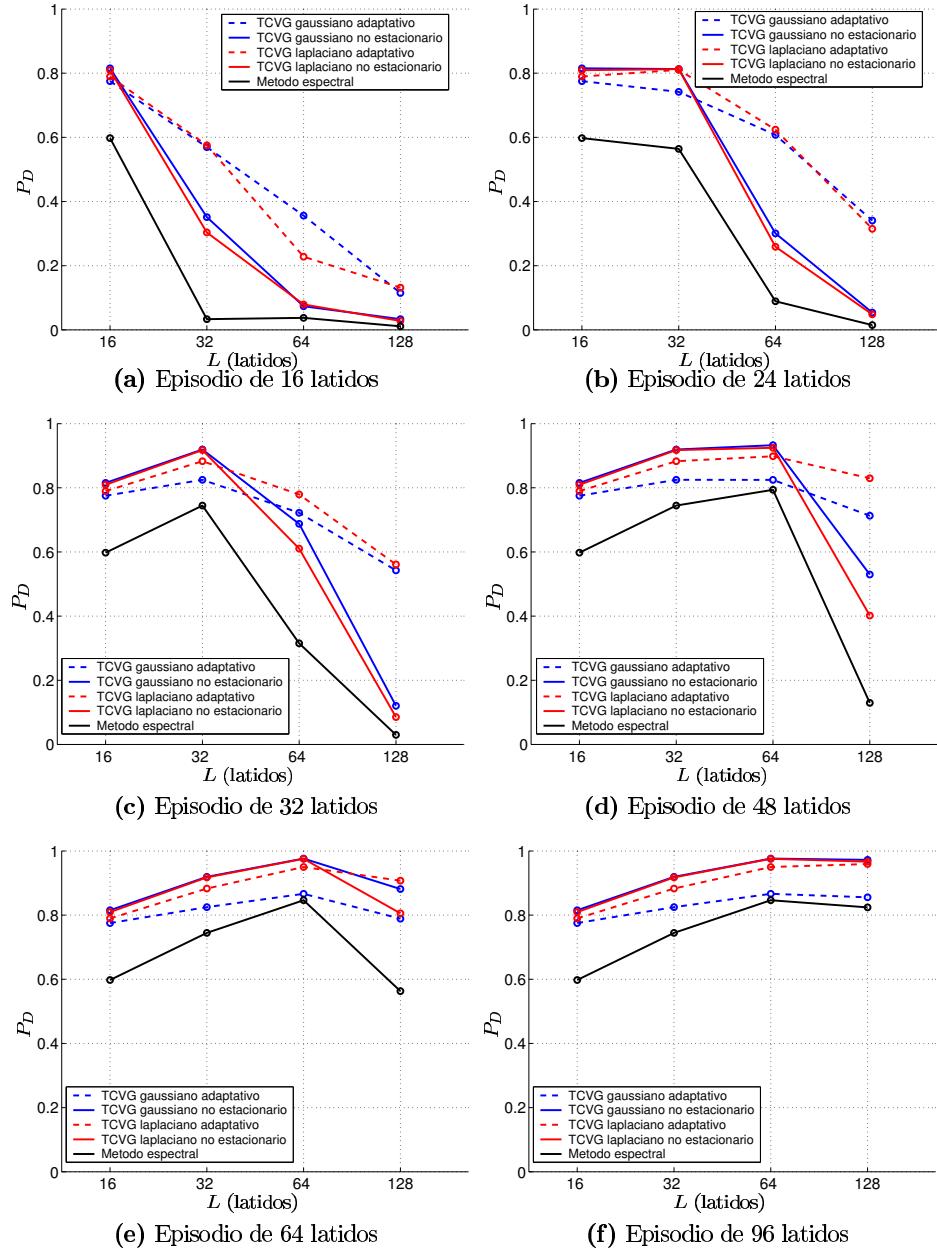


Figura 5.32: P_D para $P_{FA} = 0,01$ en función del número de latidos de la ventana de análisis para distintos métodos y duraciones L_{obs} del episodio alternante simulado.

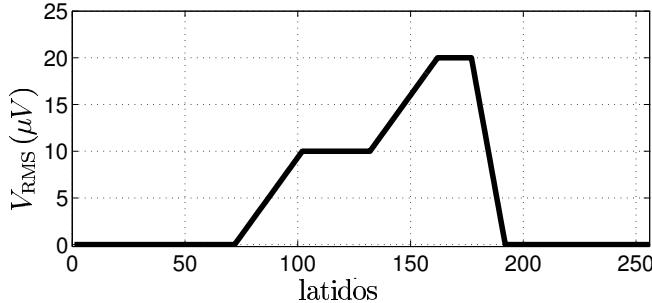


Figura 5.33: Evolución de la amplitud V_{RMS} en los episodios simulados.

Los resultados sugieren que los detectores adaptativos son capaces de detectar el episodio aun cuando la ventana de análisis todavía no se ha llenado de latidos alternantes.

5.5.2. Seguimiento de la amplitud alternante.

5.5.2.1. Configuración del estudio.

En este estudio se analiza la capacidad de seguimiento de los diferentes métodos ante cambios en la amplitud alternante. Para ello, empleamos el Simulador 2, basado en señales ECG reales.

Métodos evaluados. Estudiamos los estimadores de máxima verosimilitud para los modelos estudiados junto con los estimadores asociados a los métodos espectral y de la media móvil modificada. Se utilizan ventanas de análisis de $L \in \{16, 32, 64, 128\}$ latidos, diezmando previamente la señal ECG. Los distintos métodos se aplican en su versión secuencial, utilizando una ventana deslizante latido a latido.

Configuración del simulador. Las señales de la derivación X de los 23 registros de la base de datos Politécnico-Ca'Granda se han dividido en fragmentos de 256 latidos, en los que se ha simulado el episodio transitorio de AOT cuya evolución latido a latido se muestra en la Figura 5.33. De este modo, se tienen 156 fragmentos de ECG, todos con un episodio de alternancias idéntico: el episodio comienza a partir del latido número 65, con una amplitud que aumenta linealmente durante 30 latidos, hasta llegar a los $10 \mu V$ (RMS). A continuación, hay una fase de AOT constante de 30 latidos, y de nuevo un aumento de amplitud de otros 30 latidos, hasta que la amplitud se sitúa en $20 \mu V$. Así permanece durante 15 latidos, hasta que el episodio finaliza desapareciendo la alternancia en los siguientes 15 latidos. Los últimos 64 latidos del fragmento están libres de alternancia.

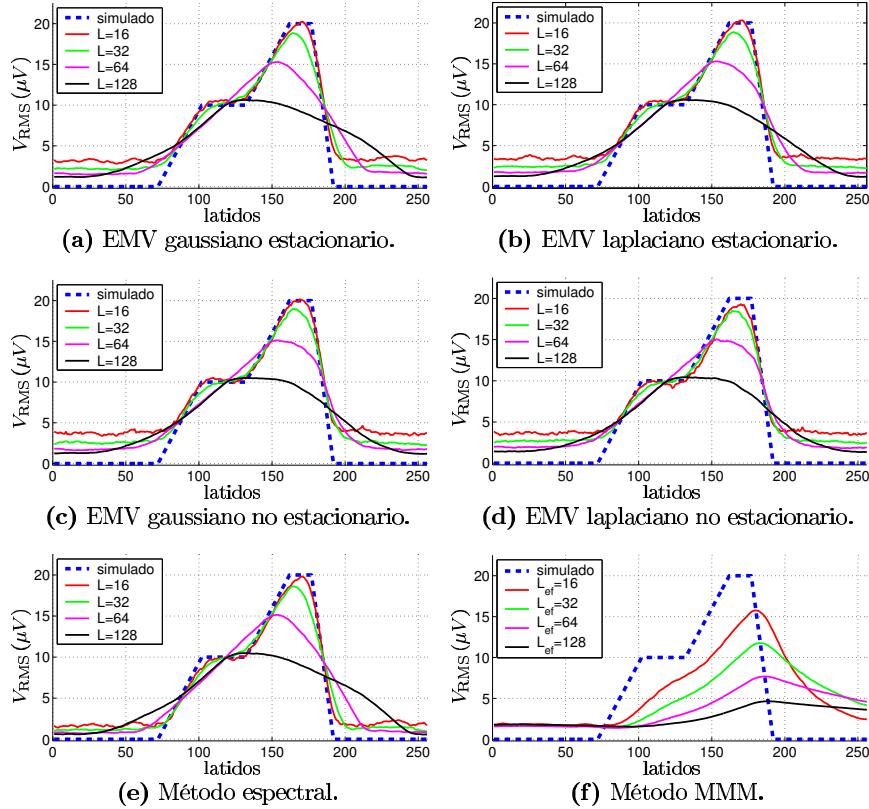


Figura 5.34: Evolución de la amplitud de AOT estimada \hat{V}_{RMS} para el episodio simulado de la Figura 5.33.

Seguimiento. La Figura 5.34 ilustra las evoluciones promedio latido a latido de la amplitud estimada \hat{V}_{RMS} para distintos métodos de análisis y duraciones de la ventana. En los métodos que utilizan una ventana rectangular (todos menos el MMM) se ha compensado el retardo producido de la ventana de análisis ($L/2$).

En la Figura 5.34 se aprecia claramente el efecto del filtrado de la evolución temporal debido a la ventana de análisis. Mientras las ventanas de 16 ó 32 latidos permiten un correcto seguimiento de la alternancia simulada, las variaciones rápidas y la forma del episodio se pierden al utilizar ventanas mayores. Por otro lado, las ventanas de mayor duración permiten una estimación menos ruidosa. Esto se aprecia claramente en los tramos inicial y final de las gráficas, donde la alternancia simulada es nula y el valor \hat{V}_{RMS} medido se debe únicamente al ruido.

Por tanto, la elección de la duración de la ventana más adecuada debe hacerse de acuerdo con el tipo de señal y la información que se desea obtener de ella. Así, si se desea seguir la evolución dinámica de la alternancia, no deben utilizarse ventanas más largas de

32 latidos. Si se trata simplemente de detectar episodios sin realizar un seguimiento de la amplitud, la duración óptima de la ventana se corresponde con la duración mínima de los episodios que se desean detectar.

Si se desean detectar alternancias de una cierta duración mínima (por ejemplo, episodios de más de 2 minutos en registros Holter), y al mismo tiempo realizar un seguimiento dinámico de su amplitud, se produce un compromiso. Por un lado, interesa utilizar ventanas cortas para no sacrificar la capacidad de seguimiento, pero por otro lado, al reducir la duración de la ventana se pierde capacidad de detección para una P_{FA} dada. Una solución a este compromiso consiste en utilizar ventanas de corta duración y aplicar *a posteriori* una regla heurística para eliminar las posibles falsas alarmas que generan episodios cortos. Por ejemplo, puede exigirse que sólo considere detección de AOT si el estadístico supera el umbral en un número mínimo de latidos consecutivos.

5.5.3. Episodio de AOT transitorio en presencia de ráfagas de ruido y latidos ectópicos.

Para finalizar la validación de los métodos, aplicaremos los métodos derivados en la presente tesis sobre las señales *Sig1*, *Sig2* y *Sig3*, ya utilizadas en el Capítulo 2 para ilustrar el funcionamiento de los distintos métodos encontrados en la literatura. La señal *Sig1* es un fragmento ECG real con un episodio de AOT adquirido durante una intervención de angioplastia coronaria y perteneciente a la base de datos STAFF-III, que será analizada en el Capítulo 6. Las señales *Sig2* y *Sig3* están basadas en *Sig1*, a la que se han añadido artificialmente latidos ectópicos (con y sin cambio de fase de la alternancia) y ráfagas de ruido respectivamente (*vid.* Sección 2.4.5, donde se describen los detalles de estas señales).

Aunque la aplicación de los métodos a las señales *Sig1*, *Sig2* y *Sig3* no permite extraer conclusiones generales, sí permite observar y comparar el funcionamiento de los distintos métodos ante circunstancias que generalmente degradan sus prestaciones, como las ráfagas de ruido y los latidos ectópicos.

5.5.3.1. Preprocesado de las señales y configuración de los métodos.

El preprocesado aplicado a las señales es igual para todos los métodos, y está descrito en la Sección 2.4.5, con la única diferencia de que, en la subetapa de segmentación, se extrae el intervalo de la onda P (120 ms) además del complejo ST-T. Las señales son diezmadas en un factor 8, de forma que la frecuencia de muestreo resultante es de 125 Hz.

Los métodos se aplican en esta sección con ventanas de análisis de 32 latidos de duración, utilizan la onda P, y asumen que la alternancia es constante en la ventana de análisis ($e_i = 1$) y que el subespacio de señal es de rango completo (en la señal diezmada).

5.5.3.2. Análisis de AOT en el episodio original y con ráfagas de ruido.

La Figura 5.35 muestra la evolución $l_G(\mathbf{X}_l)$ de los 6 estadísticos del TCVG en las señales *Sig1* y *Sig3*. La evolución de la amplitud estimada $\hat{V}_{\text{RMS}}(l)$ con los 4 EMV se recoge en la Figura 5.36.

El detector gaussiano estacionario (equivalente al método de la demodulación compleja) es muy sensible a las ráfagas de ruido, tanto dentro como fuera de un episodio alternante. Si la ráfaga se produce en ausencia de AOT, el estadístico aumenta su valor, corriendo el riesgo de detectar un falso episodio (Figura 5.35(a), alrededor del minuto 2). En el ejemplo, la amplitud estimada del falso positivo es de más de $35 \mu V$ (Figura 5.36(a)). Si la ráfaga de ruido intenso se produce dentro de un episodio de AOT observamos cómo el estadístico de detección aumenta, haciendo la alternancia todavía más detectable, pero se produce una distorsión importante en la estimación donde se sobreestima la magnitud de la alternancia.

El detector laplaciano estacionario también se ve afectado por los episodios de ruido intenso, si bien en menor medida, como puede observarse en la (Figura 5.35(b)). Se advierte una mayor tolerancia al ruido en ausencia de AOT, aunque todavía es posible que se produzcan falsas detecciones. Si el ruido intenso se produce dentro de la alternancia, el estadístico puede incluso adquirir valores inferiores a los obtenidos en ausencia de ruido. Esta ventaja sobre el detector gaussiano estacionario (aun tratándose de ruido gaussiano) puede explicarse acudiendo a la expresión del TCVG (4.57). Cuando el nivel de alternancia es mayor que el de ruido, contribuyen al estadístico aproximadamente la mitad de las muestras demoduladas. Sin embargo, el ruido intenso puede hacer que algunas de las muestras de la serie demodulada pasen a tener el signo contrario al del valor mediano, con lo que dejan de contribuir al estadístico. De ahí la disminución observada durante el cuarto minuto en la Figura 5.35(b). No obstante, el grado de sobreestimación de la magnitud de la alternancia es similar al modelo gaussiano (Figura 5.36(b)).

Los estadísticos de detección de los detectores adaptativos están normalizados por el nivel de ruido estimado localmente. Esto permite al detector adaptarse al ruido, requiriendo una mayor energía de alternancia para que ésta sea detectada cuando el nivel de ruido aumenta. En las gráficas (c) y (d) de la Figura 5.35 se constata que los detectores no se ven afectados por el aumento súbito del nivel de ruido (detectores CFAR), evitando falsas detecciones. El precio a pagar, como se aprecia en la ráfaga de ruido del minuto 4, es la insensibilización del detector cuando el episodio ruidoso se produce durante un episodio de alternancia. Interpretando los detectores adaptativos como una versión de los detectores estacionarios con umbral variable, tendríamos los estadísticos de las gráficas (a) y (b), pero con un umbral que experimentaría un aumento considerable en los episodios de ruido. La Figura 2.10 (pág. 53) muestra este mismo comportamiento para el método espectral.

Los modelos no estacionarios siguen un patrón de comportamiento muy similar. Como se pudo comprobar en los Capítulos 3 y 4, la superioridad de los modelos no estacionarios se hace patente especialmente ante ráfagas más cortas que la duración de la ventana (no es el caso de la señal *Sig2*).

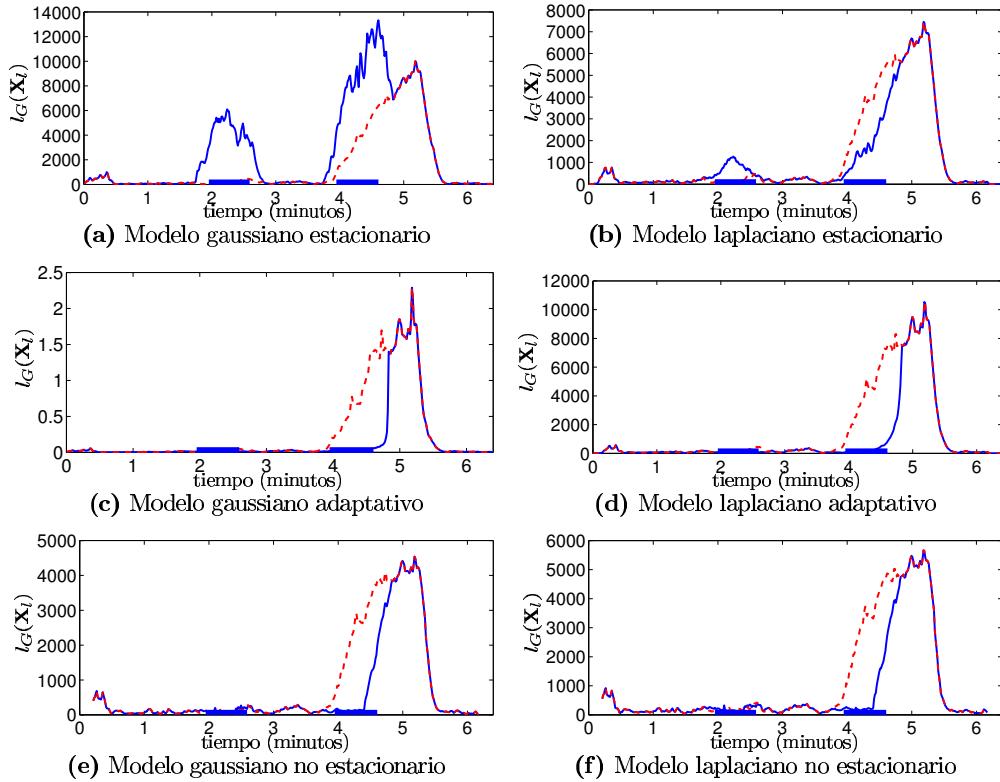


Figura 5.35: Evolución temporal de los estadísticos TCVG en la señal original *Sig1* (línea roja discontinua) y la señal contaminada *Sig3* (línea azul continua). Las líneas horizontales indican la localización temporal de las ráfagas de ruido.

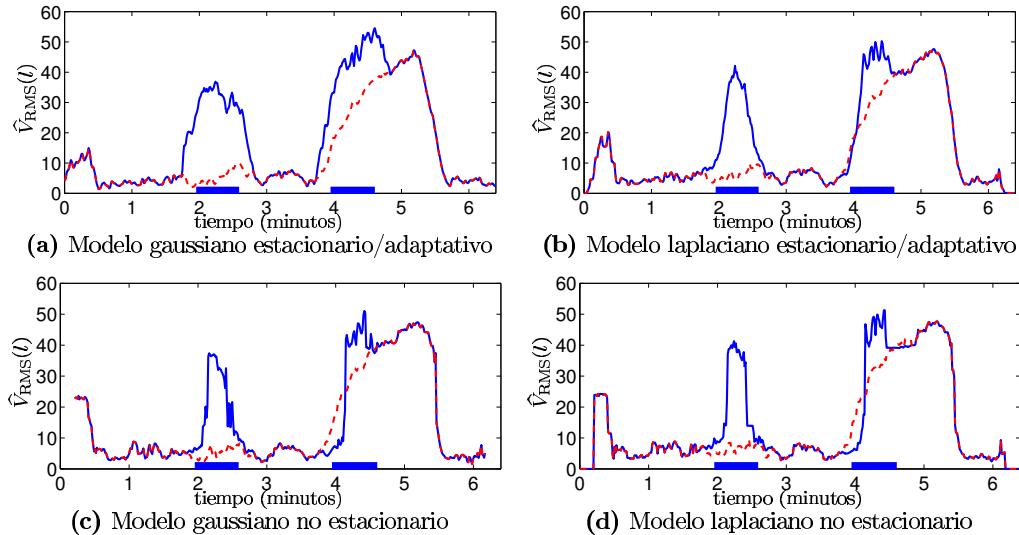


Figura 5.36: Evolución temporal de la amplitud RMS de AOT estimada $\hat{V}_{\text{RMS}}(l)$ en las señales *Sig1* (línea roja discontinua) y *Sig3* (línea azul continua).

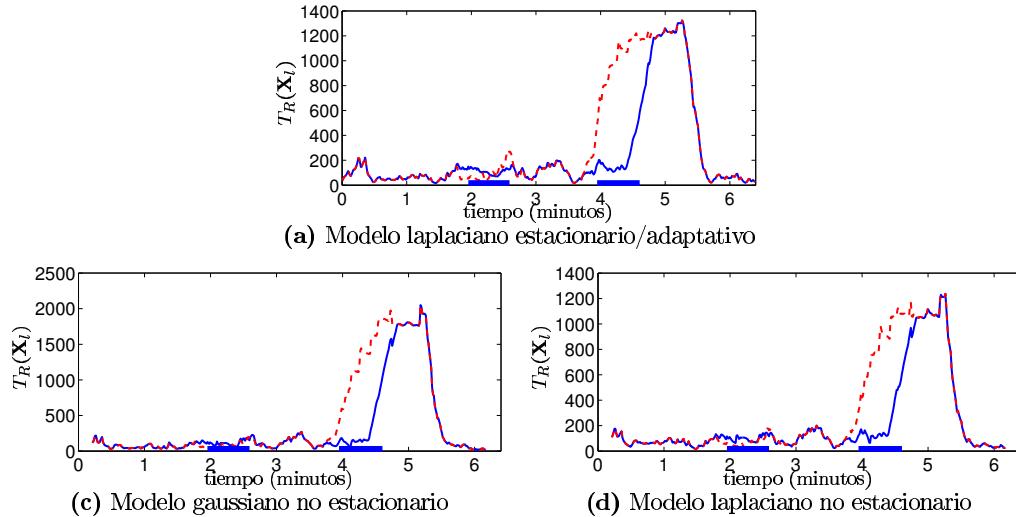


Figura 5.37: Evolución de los estadísticos de Rao $T_R(\mathbf{X}_l)$ en la señal original (línea roja discontinua) y la señal contaminada (línea azul continua).

En la Figura 5.36 podemos observar que el efecto del ruido es muy similar en todos los EMV. Las diferencias principales se observan en las transiciones, cuando la ventana de análisis contiene latidos muy ruidosos y latidos poco ruidosos. El EMV gaussiano estacionario se ve afectado por los latidos ruidosos. El EMV laplaciano estacionario puede soportar la existencia de algunos *outliers* debidos al ruido, por lo que la duración del falso episodio es menor. Finalmente, en los EMV no estacionarios los latidos más ruidosos tienen un peso menor en el M-filtro ponderado, de forma que estos son ignorados hasta que la ventana se encuentra totalmente inmersa en el ruido. Obsérvense las diferentes duraciones del falso episodio en la Figura 5.36, y en particular, el cambio brusco que se produce en la estimación cuando la ventana de análisis de los métodos no estacionarios se introduce por completo en el episodio ruidoso.

La Figura 5.37 muestra el comportamiento de los detectores de Rao, similar al de sus homólogos TCVG.

5.5.3.3. Análisis de AOT con latidos ectópicos.

El efecto que la presencia de los 4 latidos ectópicos simulados en la señal *Sig2* tiene sobre la detección y estimación de AOT se recoge en las Figuras 5.38 y 5.39, respectivamente.

Cuando el método de análisis procesa un latido ectópico fuera de los episodios de alternancias, su comportamiento depende de la respuesta ante impulsos de los M-filtros. Cuando el ectópico se produce dentro del episodio de alternancias el efecto observado depende además de si rompe o no la fase de la alternancia y, en este último caso, de si los

artefactos impulsivos se producen en la dirección que correspondería al latido alternante o en la opuesta. De los 4 latidos simulados, los dos primeros se producen antes del inicio del episodio alternante y los dos últimos dentro del episodio. De éstos, el primero mantiene la fase de la alternancia (patrón ABXBA, donde X es el latido ectópico) y en el último se produce una ruptura de la fase (patrón ABXAB).

En el TCVG gaussiano estacionario (Figura 5.38(a)) observamos cómo la energía de los dos primeros latidos ectópicos (fuera de la AOT) se dispersa entre los latidos vecinos, siguiendo la forma de la ventana de análisis (rectangular en este caso). En los falsos episodios el valor del estadístico de detección alcanza un nivel similar al que se obtiene en el episodio de alternancia real en ausencia de ectópicos. La amplitud RMS de los falsos episodios es de $40 \mu V$ (Figura 5.39(a)). De los dos ectópicos simulados durante el episodio alternante, el primero sobreestima la alternancia medida. El segundo produce un cambio de fase, de manera que tiende a disminuir la alternancia medida antes del ectópico, y a aumentar la medida después del mismo.

El TCVG laplaciano estacionario se basa en un filtro de mediana. Como se puede ver en la Figura 5.38(b), el método es insensible a los ectópicos cuando no hay alternancia (se elimina el riesgo de falsas alarmas) y durante episodios de AOT. La ranura observada en la posición del último ectópico se debe al cambio de fase de la alternancia. El cambio de fase produce un cambio de signo en la estimación. Una vez filtrado con el filtro de mediana, el cambio de signo se manifiesta como una muesca en la magnitud de la alternancia (Figura 5.39(b)) y en el estadístico de detección. Esta muesca puede hacer que se detecten dos episodios en lugar de uno sólo. No obstante, esta separación puede solucionarse utilizando una regla de postprocesado que *combine* dos episodios cuando la separación entre los mismos sea menor o igual a la duración de la ventana de análisis. Estos efectos ya se observaron en la Sección 2.4.5, al estudiar el efecto de los latidos ectópicos en los métodos publicados en la literatura (*cfr.* Figura 2.9, para un método basado en la TFL, con una ventana de Hanning y la Figura 2.12, correspondiente al método MMM, que es también un método robusto ante ectópicos).

En el TCVG gaussiano adaptativo (Figura 5.39(c)) la presencia de un latido ectópico eleva la estimación de ruido, ya que éste se calcula con los datos observados una vez sustraída la alternancia espuria estimada. Esto provoca la insensibilización del detector mientras la ventana de análisis incluya el latido anómalo. En el caso del TCVG laplaciano adaptativo (Figura 5.39(d)), dado que el estimador ignora el latido ectópico, su energía contribuye a la estimación del nivel de ruido, aumentando la energía necesaria para detectar AOT. Ambos métodos acaban detectando más de un episodio, si bien éstos pueden combinarse utilizando sencillas reglas de postprocesado.

Los TCVG no estacionarios son inmunes a los latidos ectópicos, ya que éstos son interpretados como ruido de gran amplitud presente en un latido concreto. Gracias a la posibilidad de ponderar las muestras de cada latido en función del nivel de ruido estimado, los EMV no estacionarios pueden ignorar el latido ectópico. Tan sólo se observan en los TCVG las muescas debidas al salto de fase (Figura 5.38(e) y (f)), mientras que el EMV

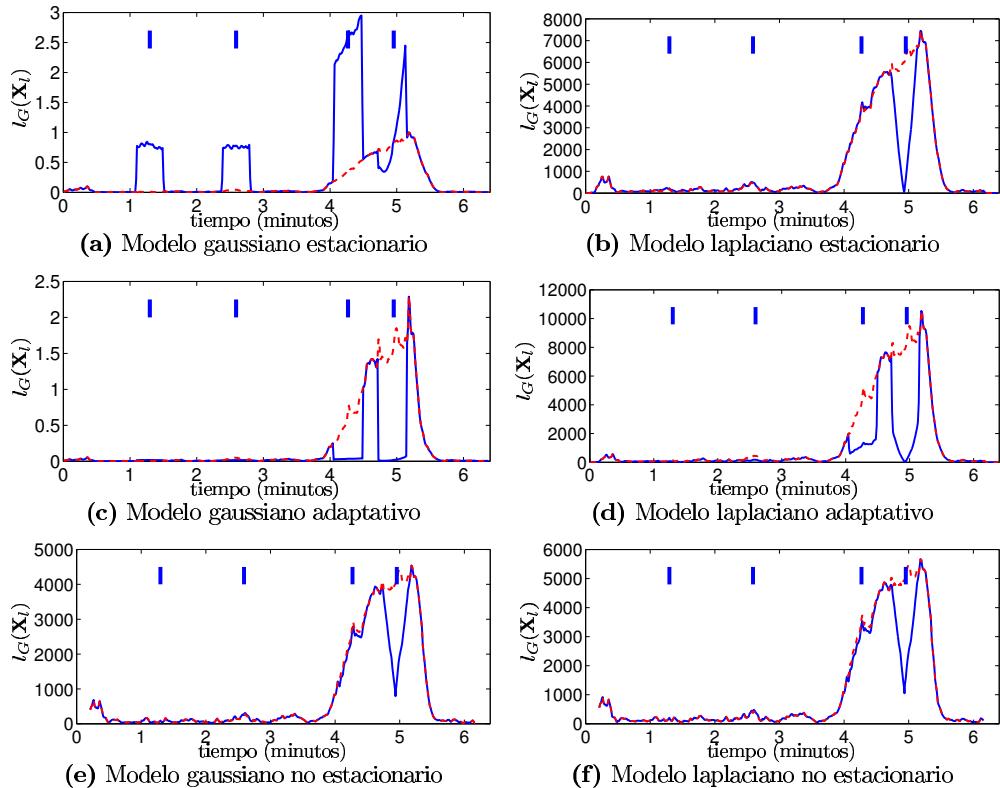


Figura 5.38: Evolución temporal de los estadísticos TCVG en la señal original (línea roja discontinua) y la señal contaminada por dos ráfagas de ruido (línea azul continua). Las líneas horizontales indican la localización temporal de las ráfagas.

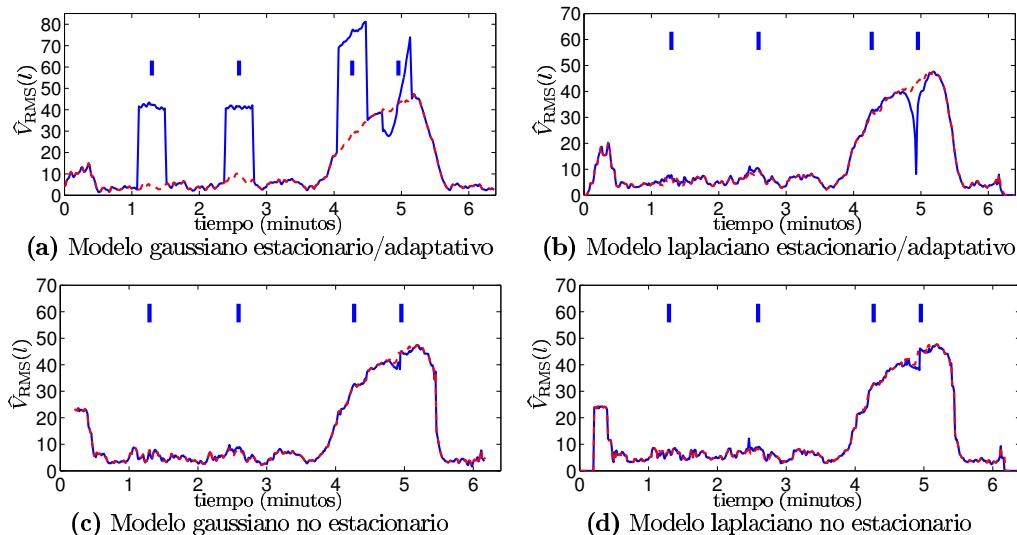


Figura 5.39: Evolución temporal de la amplitud RMS de AOT estimada $\hat{V}_{\text{RMS}}(l)$ en la señal original (línea roja discontinua) y la señal contaminada (línea azul continua).

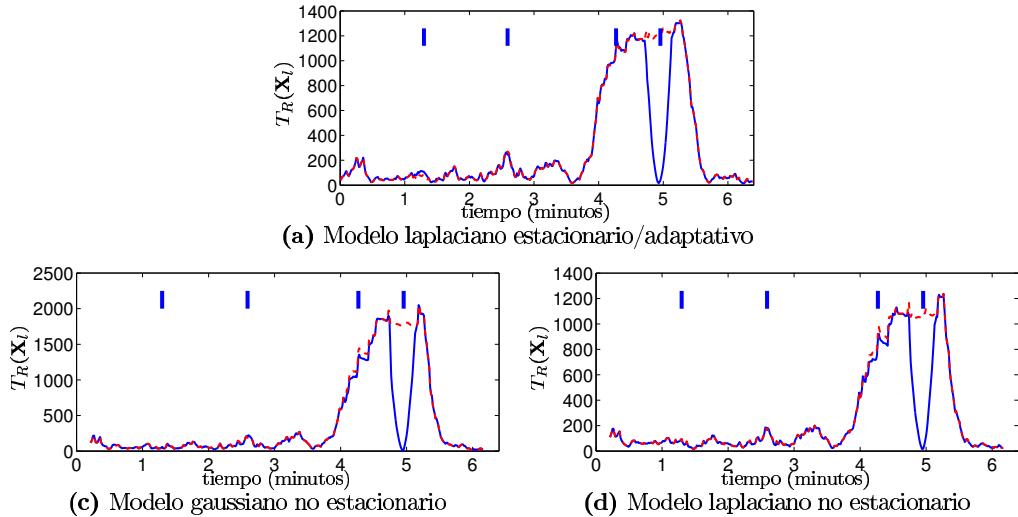


Figura 5.40: Evolución de los estadísticos de Rao $T_R(\mathbf{X}_l)$ en la señal original (línea roja discontinua) y la señal contaminada (línea azul continua).

ni siquiera se ve afectado por el cambio de fase²⁰. Los tests de Rao son también inmunes ante la presencia de ectópicos, observándose únicamente el efecto de los cambios de fase (Figura 5.40).

El problema de los latidos ectópicos y otras anomalías del ECG se solventa en la literatura bien eliminando los latidos anómalos, bien sustituyéndolos por un latido patrón. La Figura 5.41 permite comparar el resultado de ambas estrategias en el nivel de AOT estimado. El patrón utilizado para sustituir los ectópicos ha sido el latido mediano calculado en tramos de 128 latidos. Puede observarse como, en cualquiera de las dos estrategias, el único efecto observado es el de los cambios de fase. Al sustituir un latido ectópico se mantienen las fases relativas de los latidos de alrededor. Sin embargo, al eliminar los latidos ectópicos provocamos un cambio de fase donde no lo había y cancelamos los cambios de fase existentes en la señal original. Comparando las Figuras 5.41 y 5.39 comprobamos que la estimación mediante los EMV laplacianos y el EMV gaussiano no estacionario es equivalente a la obtenida sustituyendo los latidos ectópicos por un latido patrón. La sustitución o eliminación de latidos tan sólo mejora la estimación respecto al EMV gaussiano estacionario/adaptativo.

²⁰El EMV tiende a considerar que la fase de la alternancia es la observada en la mayoría de los latidos. Por tanto, se sobreestima el nivel de ruido en los latidos con fase contraria, y por tanto, tienen un coeficiente de ponderación muy pequeño respecto a los latidos con la fase mayoritaria.

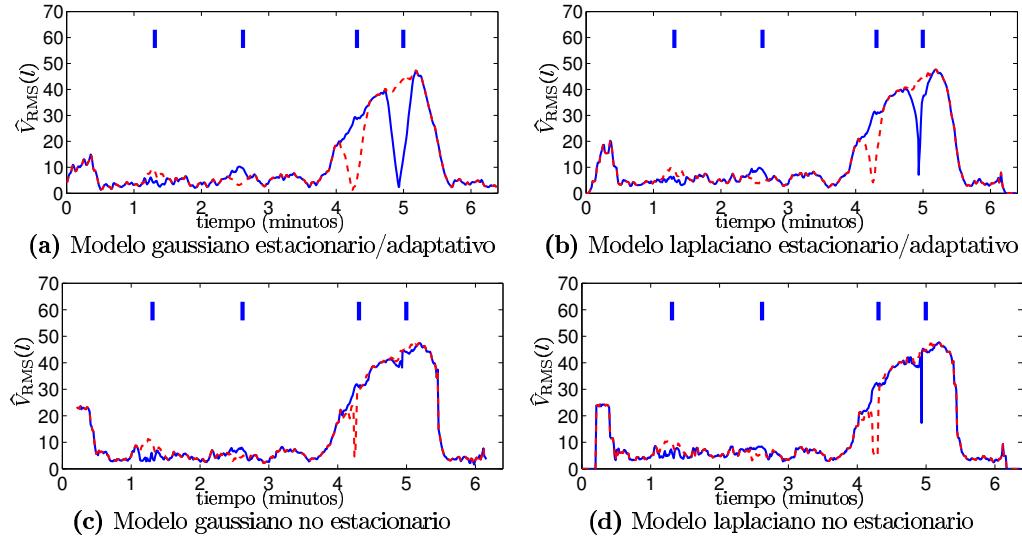


Figura 5.41: Evolución temporal de la amplitud RMS de AOT estimada $\hat{V}_{\text{RMS}}(l)$ en la señal con latidos ectópicos, utilizando las estrategias de eliminación (línea roja discontinua) y sustitución (línea azul continua) de los latidos ectópicos.

5.6. Conclusiones.

Mediante la utilización de simuladores realistas de la señal ECG, hemos inspeccionado el comportamiento de los métodos de análisis derivados en los capítulos anteriores, evaluando sus prestaciones y validando algunas de las conclusiones obtenidas de los estudios teóricos previos.

Dada la ausencia de un *patrón de oro* y/o de bases de datos con anotaciones de AOT, la validación metodológica de los detectores y estimadores requiere el diseño de estudios de simulación. En el diseño de los simuladores se han tenido en cuenta las pautas establecidas en la Sección 2.5. El objetivo ha sido poder controlar la señal alterna simula sin comprometer el grado de realismo de las señales simuladas, y evitando la sobreadaptación de las señales simuladas a los modelos estudiados.

La característica común de los dos simuladores utilizados ha sido el empleo de ruido real, bien registrado de forma independiente (Simulador 1), bien registrado conjuntamente con el ECG (Simulador 2). El primer simulador permite un cierto control sobre el tipo de ruido simulado y su nivel de ruido medio, pero no tiene en cuenta las variaciones temporales del ECG de fondo. El segundo simulador está basado en registros ECG reales, aumentando su realismo a costa de perder control sobre el ruido.

Se han estudiado las características estadísticas de dos registros de la NSTDB: el registro *ma*, compuesto mayoritariamente de ruido muscular y el registro *em* que recoge esencialmente artefactos de movimiento. Se ha comprobado que ambos tipos de ruido tienen una distribución leptocúrtica (acentuada en el caso del ruido muscular). Mientras el

espectro del ruido muscular se extiende más allá de los 50 Hz , los artefactos de movimiento tiene un espectro limitado por debajo de los 15 Hz . Se ha constatado también que el nivel de ruido promediado en 1 segundo es más estacionario a largo plazo en el registro *em* (quizá debido al protocolo de movimientos utilizado en su adquisición) que en el registro *ma*.

La simulación selectiva de señales con dos tipos de ruido registrado estadísticamente diferentes ha permitido constatar algunas diferencias significativas en el comportamiento de los detectores.

- Las mejores prestaciones en ruido muscular son alcanzadas por los métodos no estacionarios, cuyo comportamiento es cercano al teórico. Entre el resto de métodos, son los basados en modelos laplacianos los que mejor funcionan. Introduciendo en el modelo información *a priori* sobre el espectro de señal (asumiendo que la alternancia pertenece a un subespacio paso-bajo con frecuencia de corte efectiva de 15 Hz) se han conseguido mejoras de en torno a 6 dB tanto en detección como en estimación.
- Todos los métodos estudiados experimentan degradaciones importantes ante el ruido de movimiento de electrodos. Las diferencias entre los métodos adaptativos y no estacionarios son mínimas en este tipo de ruido. Dada la baja frecuencia del ruido, cuyo espectro se solapa por completo con el de la señal alterante, la introducción de modelos de señal paso-bajo de dimensión reducida apenas tiene efecto en las prestaciones observadas.

Se ha comprobado que el diezmado de la señal, utilizado como etapa de reducción de datos previo al análisis, constituye una sencilla aproximación a los detectores de subespacio cuando éstos únicamente incorporan la característica paso-bajo de la señal. El interés de este resultado radica en que permite simplificar los métodos laplacianos.

Mediante el simulador de alternancias sobre señales reales hemos constatado la característica CFAR de los detectores adaptativos y no estacionarios. El detector gaussiano estacionario, que corresponde al conocido método de la demodulación compleja, es especialmente sensible a las variaciones del nivel de ruido. Esto limita su capacidad de detección de alternancias de baja amplitud, ya que para mantener acotada la probabilidad de falsa alarma es preciso aumentar el umbral de detección. En las condiciones del estudio y para una ventana de duración $L = 32$, sólo son detectables con $P_D > 0,5$, manteniendo manteniendo una $P_{FA} = 0,01$, las AOT por encima de los $40 \mu V$. El detector laplaciano estacionario, aunque no es CFAR, soporta mejor las variaciones de ruido, permitiendo detectar alternancias por encima de los $15 \mu V$ en cualquier derivación para $P_{FA} = 0,01$. Por otro lado, los modelos adaptativos y no estacionarios conducen a detectores CFAR, de forma que su sensibilidad depende del nivel de ruido estimado. Así, en las derivaciones menos ruidosas (X y Z en la base de datos utilizada) son detectables las AOT de tan sólo $5 \mu V$, mientras que en la derivación Y se precisa una amplitud de al menos $15 \mu V$ para que la alternancia sea detectada con $P_D = 0,5$. Sobre las mismas señales simuladas, se han aplicado dos de los tres métodos más ampliamente utilizados en la literatura: el métodopectral y el método de la media móvil modificada, ya que el método de la demodulación

compleja es un caso particular del TCVG gaussiano estacionario. Las prestaciones del método espectral (que es un detector CFAR) se ubican cerca, aunque ligeramente por debajo de las obtenidas por el método gaussiano adaptativo. Por otro lado el comportamiento del método MMM es algo inferior al del TCVG laplaciano estacionario, pero claramente superior al TCVG gaussiano estacionario.

Se han estudiado asimismo dos aspectos muy relacionados con la duración de la ventana de análisis: la detectabilidad de episodios transitorios y la capacidad de seguimiento de las variaciones de la AOT. Ambos aspectos han de tenerse en cuenta a la hora de diseñar la duración de la ventana de análisis.

Finalmente, hemos examinado el comportamiento de los métodos de análisis de AOT ante ráfagas de ruido intenso y latidos ectópicos, mediante el procesado de las señales de prueba ya utilizadas en el Capítulo 2.

El realismo de los simuladores utilizados ha permitido obtener una evaluación fiable de los métodos estudiados. Se ha mostrado que los métodos derivados de los modelos laplacianos superan a los métodos comúnmente utilizados para analizar las AOT. De entre los métodos gaussianos, tan sólo los derivados del modelo no estacionario alcanzan las mismas prestaciones que los laplacianos.

Los estudios de simulación realizados en este capítulo han mostrado que el modelo laplaciano adaptativo permite combinar la robustez de los métodos laplacianos con la simplicidad computacional, ya que no requiere utilizar algoritmos iterativos. Así, se han seleccionado el detector TCVG y el EMV derivados para el modelo adaptativo para realizar el estudio presentado en el Capítulo 6, donde se estudian las características espacio-temporales de la AOT inducida por la isquemia de miocardio.

Capítulo 6

Alternancias de onda T e isquemia de miocardio.

6.1. Introducción.

La isquemia de miocardio se produce por una carencia de oxígeno en las células del músculo cardiaco. La oclusión transitoria de una arteria coronaria puede resultar en isquemia reversible y una obstrucción prolongada puede desembocar en infarto de miocardio con sus posteriores secuelas. Ya se describió en el primer capítulo que la isquemia produce cambios en el ECG debidos a las alteraciones electrofisiológicas que se producen en las células isquémicas.

Diferentes condiciones patológicas relacionadas con la isquemia pueden inducir alterancias de onda T. Así, se han reportado alternancias durante angina estable (Verrier *et al.* 1996a; Ikeda *et al.* 2000a; Martínez *et al.* 2000b), angina de Prinzmetal (Kleinfeld y Rozanski 1977; Rozanski y Kleinfeld 1982; Turitto y El-Sherif 1988), oclusión de un puente coronario (*bypass*) (Sutton *et al.* 1991), angioplastia coronaria (Joyal *et al.* 1984; Okino *et al.* 1992; Kwan *et al.* 1995) y en pacientes con infarto de miocardio previo (Ikeda *et al.* 2000b; Verrier *et al.* 2003).

En la literatura se ha mostrado que la alternancia en el miocardio isquémico es un fenómeno regional, confinado a la región hipoperfundida (Dilly y Lab 1988; Konta *et al.* 1990; Sutton *et al.* 1991). Los experimentos con animales de Carson *et al.*, y Dilly y Lab han evidenciado que la alternancia en el ECG de superficie inducida por la isquemia se debe a la alternancia existente en la morfología del potencial de acción (Carson *et al.* 1986; Dilly y Lab 1988). Sutton *et al.* grabaron alternancias en el potencial de acción al realizar oclusiones transitorias en intervenciones quirúrgicas de injerto de puente coronario (*coronary artery bypass grafting*) (Sutton *et al.* 1991). En cuanto al fundamento iónico de las alternancias del potencial de acción, algunos estudios subrayan el papel primordial del ciclo del calcio intracelular (Hashimoto *et al.* 1983; Salerno *et al.* 1986; Dilly y Lab 1988; Lee *et al.* 1988; Qian *et al.* 2001), si bien pueden estar involucrados otros mecanismos iónicos (Verrier y Nearing 1994).

La angioplastia coronaria transluminal percutánea o PTCA (*percutaneous transluminal coronary angioplasty*) proporciona un modelo excelente para investigar el proceso isquémico. La oclusión coronaria súbita y completa que se produce al inflar el globo en una arteria coronaria permite el estudio de los cambios electrofisiológicos que acaecen durante los primeros minutos de la isquemia aguda transmural. Adicionalmente, la PTCA permite recoger información muy valiosa sobre las características espacio-temporales de la isquemia, ya que la oclusión coronaria está perfectamente definida tanto en tiempo (ya que el periodo de oclusión es conocido) como en espacio (también se conoce la localización de la oclusión). En la literatura, podemos encontrar hasta 1992 algunos casos clínicos aislados de AOT inducidas durante intervenciones de PTCA (Joyal *et al.* 1984; Okamoto *et al.* 1991; Shah *et al.* 1991; Sochanski *et al.* 1992). Desde entonces, algunos autores han estudiado este fenómeno en cohortes de pacientes más amplias (Gilchrist 1991; Okino *et al.* 1992; Nearing *et al.* 1994; Kwan *et al.* 1995; Shah y Subramanyan 1995; Kwan *et al.* 1999), tanto en el ECG de superficie como en el ECG intracoronario (ic-ECG). Las prevalencias referidas en los citados trabajos presentan un amplio grado de variación (del 1.2% al 27% en el ECG de superficie, y del 7.7% al 43% en el ic-ECG). A excepción de (Nearing *et al.* 1994), donde se utiliza el método de la demodulación compleja para cuantificar la alternancia, en el resto de trabajos sólo se consideran alternancias visibles, sin cuantificar su magnitud.

En el presente capítulo pretendemos explorar las características espacio-temporales de la AOT inducida por la isquemia en el ECG estándar de 12 derivaciones. Para ello, utilizamos la oclusión coronaria causada por el inflado y desinflado del globo durante la angioplastia como modelo para estudiar el proceso de la isquemia aguda de miocardio y la posterior reperfusión del miocardio.

El estudio involucra, por tanto, pacientes sometidos a una PTCA en alguna de las arterias coronarias principales. Los objetivos del estudio son

1. Cuantificar la prevalencia y magnitud de la AOT en los primeros minutos de la isquemia transmural.
2. Caracterizar e investigar la evolución de la AOT durante la oclusión.
3. Estudiar la relación entre la localización de la isquemia y la AOT medida en el ECG.

Utilizamos para ello el detector TCVG y el EMV para el modelo laplaciano adaptativo desarrollado en la Sección 4.7. Los episodios de AOT se analizan en tres dominios: A) la evolución latido a latido de la amplitud de AOT en función del tiempo de oclusión (análisis temporal), B) la distribución espacial de la amplitud de AOT en las derivaciones estándar del ECG (análisis de la distribución por derivaciones) y C) la forma de onda alternante, es decir, la distribución de la AOT en el intervalo de repolarización (análisis de la forma de onda).

6.2. Anatomía de la circulación coronaria.

La arteria aorta recibe la sangre del ventrículo izquierdo y la distribuye por todo el organismo (circulación mayor). Para ello, se ramifica en arterias tributarias más pequeñas, que llevan la sangre a los distintos órganos. Las primeras ramificaciones de la aorta son las arterias coronarias, que abastecen de sangre al músculo cardiaco. La Figura 6.1 muestra la disposición más común de las arterias coronarias. Podemos hablar de dos ramificaciones de la aorta: la arteria coronaria derecha (RCA, *right coronary artery*) y la arteria coronaria izquierda, que tiene un tronco común corto (MLCA, *main left coronary artery*) y se subdivide enseguida en dos arterias: la descendente anterior izquierda (LAD, *left anterior descending*) y la circunfleja izquierda (LCX, *left circumflex*). Cada una de las tres arterias principales: LAD, LCX y RCA, tiene otras ramificaciones secundarias (ramas diagonales, septales, etc.). La disposición de las arterias y las regiones irrigadas por las mismas puede variar considerablemente entre personas. Así, por ejemplo, la parte posterior del corazón es abastecida por una arteria denominada rama posterior descendente, que es una ramificación de la RCA en el 85 % de las personas, mientras que en el porcentaje restante, esta rama parte de la arteria circunfleja izquierda. A esta característica se la denomina dominancia derecha o izquierda, respectivamente. La posición dentro de una de las arterias principales suele indicarse mediante los adjetivos proximal y distal, que hacen referencia a posiciones cercanas o lejanas a la arteria aorta.

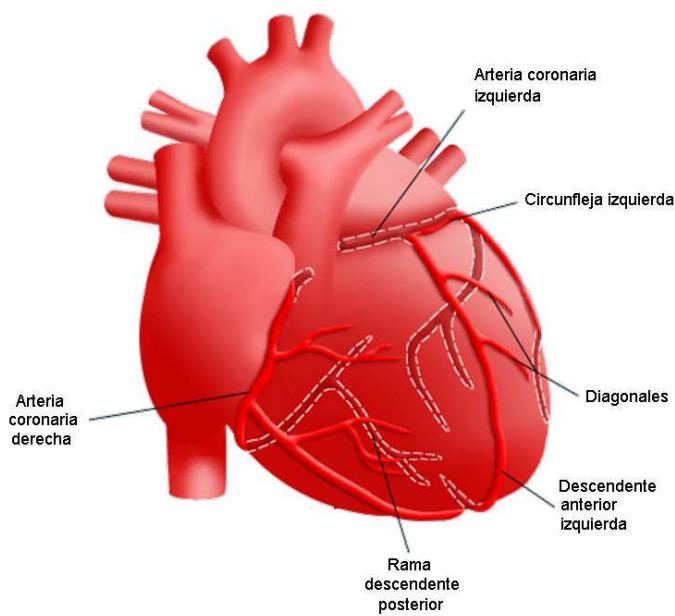


Figura 6.1: Anatomía coronaria de un corazón con dominancia derecha.

Cuando el estrechamiento de la arteria tiene lugar de forma lenta y progresiva (en un periodo de días o semanas, pueden desarrollarse canales colaterales entre la rama ocluida de la arteria coronaria y otra cuyo flujo sanguíneo sea correcto, de forma que se atenúa o reduzca el efecto de la necrosis (Berne y Levy 1992). Este fenómeno se conoce como reclutamiento de vasos colaterales. Algunos pacientes con cardiopatía isquémica pueden haber desarrollado estos vasos, reduciéndose el efecto que tiene la oclusión en el miocardio.

6.3. Base de datos.

6.3.1. Población de estudio.

Los datos analizados pertenecen al estudio STAFF-III. La población de este estudio está formada por 102 pacientes del Charleston Area Medical Center (West Virginia, EE.UU.) sometidos a una PTCA con oclusión prolongada (mayor de 100 segundos) en una de sus arterias coronarias principales (*vid. Figura 6.1*). El periodo de oclusión fue considerablemente mayor que el de los procedimientos habituales de PTCA, ya que el protocolo incluía una única oclusión prolongada en lugar de una serie de oclusiones breves.

Se excluyeron del estudio 7 pacientes por diversas causas: posición incorrecta de los electrodos (3 casos), bigeminismo en el ECG (3 casos) y pérdida de señal (1 caso). Los 95 pacientes restantes (60 hombres y 35 mujeres), con edades comprendidas entre los 32 y los 85 años (media 60 ± 11 años) fueron incluidos en nuestro estudio. El intervalo medio de inflado fue de 4 min 28 s con una desviación estándar de 74 s.

La localización de las oclusiones en las 95 angioplastias se distribuye del siguiente modo: 2 pacientes con oclusión en el tronco común de la arteria coronaria izquierda, 29 pacientes en la arteria descendente anterior izquierda (subgrupo LAD), de las cuales 22 fueron proximales y 7 distales, 19 pacientes en la arteria circunfleja izquierda (subgrupo LCX), 10 proximales y 9 distales, y 45 pacientes con oclusión en la arteria coronaria derecha (subgrupo RCA), de las que 20 fueron proximales y 25 distales.

Según el criterio de cribado de Selvester (Selvester *et al.* 1985; Anderson *et al.* 1988), 34 pacientes (36 %) presentaron evidencias de infarto previo de miocardio en el ECG estándar registrado al ingresar en el hospital.

6.3.2. Adquisición del ECG.

Se adquirieron dos registros ECG por cada paciente, ambos en reposo y en posición supina: un ECG de control de cinco minutos registrado antes de la angioplastia y el ECG durante la intervención de PTCA. De este modo, utilizamos a cada paciente como su propio control.

Las señales se registraron con un equipo de Siemens-Elema AB (Solna, Suecia). Las nueve derivaciones estándar V1-V6, I, II y III fueron digitalizadas con una frecuencia de muestreo de 1 kHz y una resolución en amplitud de $0.6 \mu\text{V}$.

Las derivaciones aVF, aVL y aVR se han calculado a partir de las derivaciones I, II y III (*vid. Tabla 1.1*). Además, se han sintetizado las derivaciones ortogonales X, Y y Z a partir de las derivaciones estándar utilizando la técnica de Dower inversa (Edenbrandt y Pahlm 1988).

6.4. Métodos

6.4.1. Análisis de AOT. Modelo laplaciano adaptativo.

Para llevar a cabo el análisis, se han utilizado las metodologías derivadas para el modelo de señal laplaciano adaptativo (σ desconocida), incluyendo también las muestras de la onda P. Así, se emplea el TCVG (4.88) para la detección la presencia de AOT y el EMV (4.51) para estimar su amplitud. Se ha escogido este paradigma por su robustez, capacidad de adaptación a las variaciones del ruido y relativa simplicidad. No se justifica la utilización los modelos de ruido no estacionarios, ya que los registros se realizan con el paciente en reposo. A continuación se describen los detalles de las tres etapas en que, siguiendo el esquema propuesto en el Capítulo 2, puede dividirse el método de análisis de AOT.

6.4.1.1. Preprocesado.

En primer lugar, se ha determinado el punto fiducial de los complejos QRS utilizando un algoritmo basado en la transformada wavelet, descrito y validado en (Martínez *et al.* 2004a). A continuación, se ha adoptado la técnica de interpolación con splines cúbicas para eliminar las variaciones de línea de base.

Los complejos ST-T se han segmentado mediante una ventana de 450 ms de duración a partir del punto fiducial del QRS. A continuación se han alineado los complejos utilizando un método en dos pasos, basado en la maximización de la correlación cruzada entre cada complejo y el complejo ST-T promedio. De este modo se genera la matriz $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{M-1}]$, donde $\mathbf{x}_i = [x_i[0] \dots x_i[N-1]]^T$ es el complejo ST-T alineado correspondiente al latido i -ésimo ($N = 450$ muestras) y M es el número de latidos del registro.

Por último, las filas de ambas matrices han sido filtradas calculando la diferencia entre cada complejo ST-T alineado con el anterior. Este filtrado permite eliminar el ECG de fondo, así como otras variaciones lentas del ECG.

6.4.1.2. Reducción de datos.

En esta etapa se filtran paso-bajo las $N = 450$ muestras de cada complejo y se diezman por 8 para reducir el ruido fuera de banda, así como también la carga computacional del método. Siguiendo la convención utilizada en esta tesis, denotamos la matriz de complejos

diezmados por $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_0 \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{M-1}]$. En el proceso de diezmado no se pierde información útil, debido a la característica paso-bajo de la AOT (Nearing *et al.* 1996). Tras la reducción de datos, el número de muestras de cada complejo es de $P = 56$.

6.4.1.3. Análisis de AOT: detección y estimación.

Para permitir el seguimiento de los cambios dinámicos de la alternancia se define una ventana deslizante de análisis de $L = 32$ latidos, asumiendo que la alternancia es constante dentro de ella ($e_i = 1$, $i = 0, \dots, L - 1$). Denotamos por

$$\mathbf{Y}_l = [\mathbf{y}_{l-L+1} \dots \mathbf{y}_l] \quad (6.1)$$

la matriz $P \times L$ con las muestras diezmadas de los últimos L latidos finalizando en el latido l -ésimo. Para cada valor de l se calcula el TCVG y el EMV en la matriz \mathbf{Y}_l .

El EMV de la alternancia en cada muestra diezmada se calcula demodulando la serie latido a latido y aplicando un filtro de mediana

$$\hat{v}_l[p] = \text{mediana} (y_{l-L+1}[p] (-1)^0, y_{l-L+2}[p] (-1)^1, y_l[p] (-1)^{L-1}), p = 0, \dots, P - 1. \quad (6.2)$$

Como medida global del nivel de AOT en el complejo ST-T completo, calculamos la amplitud RMS de la alternancia

$$\hat{V}_l = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \hat{v}_l^2[p].} \quad (6.3)$$

Al analizar la distribución de la alternancia por derivaciones, es interesante conocer también la fase relativa de la AOT en las diferentes derivaciones (es decir, si la alternancia es concordante o discordante). Para ello se requiere preservar el signo, por lo que utilizamos como medida el nivel medio de AOT a lo largo del complejo ST-T

$$\bar{V}_l = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \hat{v}_l[p]. \quad (6.4)$$

El TCVG para este modelo puede expresarse como (*vid. Sección 4.7.5*)

$$T(\mathbf{Y}_l) = \frac{2\sqrt{2}}{\hat{\sigma}_1(l)} \sum_{p=0}^{P-1} T_p(l) \stackrel{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \stackrel{\mathcal{H}_0}{\lessgtr} \gamma', \quad (6.5)$$

donde $T_l(p)$ se calcula en cada muestra del complejo ST-T como

$$T_p(l) = \sum_{i \in B} |2 y_{l-L+1+i}[p] (-1)^i| \quad (6.6)$$

$$B = \{i ; i \in \{0, \dots, L-1\} \text{ y } \min(0, \hat{v}_l[p]) < y_{l-L+1+i}[p](-1)^i < \max(0, \hat{v}_l[p])\} .$$

Por tanto, contribuyen a incrementar el valor de $T_p(l)$ los valores absolutos de los términos de la serie demodulada $\{2y_{l-L+1+i}[p](-1)^i\}_{i=0}^{L-1}$ cuyo valor está entre 0 y $\hat{v}_l[p]$.

El estadístico está normalizado por $\hat{\sigma}_1(l)$, el EMV bajo la hipótesis \mathcal{H}_1 de la desviación estándar del ruido en la ventana de análisis. Éste se calcula como

$$\hat{\sigma}_1(l) = \frac{\sqrt{2}}{L(P+P_p)} \sum_{i=0}^{L-1} \left(\sum_{p=0}^{P-1} |y_{l-L+1+i}[p] - \hat{v}_l[p](-1)^i| + \sum_{p=0}^{P_p-1} |y_{l-L+1+i}^p[p]| \right) . \quad (6.7)$$

Hemos utilizado para ello también las muestras de la onda P, segmentadas con una ventana de 120 ms (entre 200 ms y 80 ms antes del punto fiducial del QRS), filtradas y diezmadas por 8 del mismo modo que las muestras del complejo ST-T. Se ha denotado por $y_i^P[p]$ la muestra diezmada p -ésima de la onda P del latido i -ésimo, siendo $P_p = 15$ el número total de muestras de la onda P tras el diezmado.

El estadístico $T(\mathbf{Y}_l)$ mide así la significación estadística de la AOT estimada y depende del nivel de ruido $\hat{\sigma}_1(l)$ estimado adaptativamente conforme la ventana de análisis se desliza a lo largo del registro. Se considera la presencia de AOT en la ventana de análisis si $T(\mathbf{Y}_l)$ está por encima de un umbral fijo γ'

$$T(\mathbf{Y}_l) \stackrel{\mathcal{H}_1}{\stackrel{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \gamma' , \quad (6.8)$$

cuyo valor se ha seleccionado de acuerdo con las validaciones realizadas en el Capítulo 5. Para considerar que un episodio de AOT es significativo, se requiere además que $T(\mathbf{Y}_l)$ supere el umbral en al menos 32 latidos consecutivos. De este modo, se eliminan posibles episodios espurios.

El procedimiento descrito se ha aplicado a cada derivación de todos los ECG incluidos en el análisis. En el resto del capítulo utilizaremos un subíndice adicional (como por ejemplo, $T_k(\mathbf{Y}_l)$, $\hat{v}_{l,k}[p]$, $\hat{V}_{l,k}...$) para indicar que se trata de la derivación k -ésima.

6.4.2. Análisis temporal.

La evolución de la alternancia durante el registro se define como la serie latido a latido de la amplitud de la AOT $\hat{V}_{l,k}$, $l = 0, \dots, M-1$. Para el análisis temporal, se ha seleccionado en cada registro con AOT, entre las 12 derivaciones estándar, aquélla en la que se alcanza el máximo nivel de alternancia (derivación k_{\max}). Al representar la evolución de la alternancia respecto a referencias temporales como el inicio o final de la PTCA, se ha compensado el retardo del filtro de mediana, adelantando la evolución $\hat{V}_{l,k_{\max}}$ en un total de $L/2$ latidos.

6.4.3. Análisis de la distribución por derivaciones y de la forma de onda alternante.

La relación entre la localización de la oclusión y las características espaciales de la AOT se ha estudiado analizando tanto la distribución por derivaciones como la forma de onda alternante en el máximo de cada episodio alternante (latido l_{\max}).

La distribución por derivaciones de la AOT se define como la amplitud de AOT media a lo largo del complejo ST-T $\bar{V}_{l_{\max},k}$ en las diferentes derivaciones. Por otro lado, la forma de onda alternante se define como el vector de alternancia en el máximo del episodio y en la derivación con máxima amplitud de AOT $\hat{v}_{l_{\max},k_{\max}}[p]$. Para permitir la comparación entre pacientes, tanto la distribución por derivaciones como la distribución temporal en el complejo ST-T se han normalizado en amplitud de forma que su valor máximo sea 1.

6.4.4. Métodos estadísticos.

Los datos numéricos se expresan en este capítulo como media \pm una desviación estándar. Para comprobar la significación de las diferencia entre grupos se han empleado los tests estadísticos no paramétricos bilaterales de Wilcoxon, de Kruskal-Wallis y el test U de Mann-Whitney. Se ha utilizado el test exacto de Fisher para las tablas de contingencia 2×2 , y el test de McNemar para la comparación entre registros de control y registros de PTCA. Se define la significación estadística como $p < 0,05$.

6.5. Resultados.

6.5.1. Episodios de AOT.

Se han detectado episodios de AOT durante isquemia aguda en 32 de los 95 registros de PTCA (33.7%), mientras que no se encontró ningún episodio en los 95 registros de control adquiridos antes de la cateterización (test de McNemar: $p = 5 \cdot 10^{-10}$). En la Tabla 6.1 se presenta el número de pacientes que manifestaron AOT durante la oclusión en la población total de estudio y en los subconjuntos definidos por el tipo de oclusión (arteria ocluida y localización proximal o distal de la oclusión), sexo y evidencia de infarto previo en el ECG.

La prevalencia de la AOT es mayor durante las oclusiones de la arteria LAD (51.7% de los pacientes) que en el resto de arterias (26.6% de los casos) (test exacto de Fisher: $p = 0,02$). También son significativas las diferencias de prevalencia encontradas entre las oclusiones en la arteria LAD proximal (68.2%) y las oclusiones en el resto de localizaciones (23.3%, $p = 2 \cdot 10^{-4}$) y entre las localizaciones proximales y distales de la arteria LAD ($p = 0,002$). Sin embargo, no se encontraron diferencias significativas entre localizaciones proximales y distales en las arterias RCA y LCX. Se aprecian diferencias entre las incidencias en hombres y mujeres (38.3% vs 25.7%, NS) y entre pacientes con y sin

		pacientes	AOT (%)	No AOT (%)	
MLCA		2	0 (0 %)	2 (100 %)	
LAD		29	15 (51.7 %)	14 (48.3 %)	*
	proximal	22	15	7	†/‡
	distal	7	0	7	
LCX		19	5 (26.3 %)	14 (73.7 %)	
	proximal	10	2	8	
	distal	9	3	6	
RCA		45	12 (26.7 %)	33 (73.3 %)	
	proximal	20	5	15	
	distal	25	7	18	
Hombre		60	23 (38.3 %)	37 (61.7 %)	
Mujer		35	9 (25.7 %)	26 (74.3 %)	
Infarto previo	sí	34	15 (44.1 %)	19 (55.9 %)	
	no	61	17 (27.9 %)	44 (72.1 %)	
Total		95	32 (33.7 %)	63 (66.3 %)	

* $p = 0,02$ LAD vs otras localizaciones (test exacto de Fisher)

† $p = 0,002$ LAD proximal vs LAD distal (test exacto de Fisher)

‡ $p = 2 \cdot 10^{-4}$ LAD proximal vs otras localizaciones (test exacto de Fisher).

Tabla 6.1: Presencia de AOT durante la PTCA en el grupo de estudio en función de la arteria ocluida, localización de la oclusión, sexo y evidencia electrocardiográfica de infarto previo.

evidencia electrocardiográfica de infarto previo (44.1 % vs 27.9 %, NS), pero en ninguno de los dos casos las diferencias son estadísticamente significativas. La distribución de hombres y mujeres y de pacientes con infarto previo es similar en los subgrupos por arteria ocluida.

La duración media del inflado del globo fue similar en todos los grupos (LAD: 241±74 s, RCA: 281 ± 80 s, LCX: 276 ± 44 s) (test de Kruskal-Wallis, NS). No se han encontrado diferencias en la duración de la oclusión en pacientes que manifestaron AOT (271 ± 84 s) respecto a los que no mostraron AOT (265 ± 68 s) (test U de Mann-Whitney, NS).

Tampoco se han encontrado diferencias significativas de ritmo cardiaco en los subgrupos clasificados por arteria ocluida (LAD: 75,2 ± 15,3 lpm; LCX: 79,2 ± 13,5 lpm; RCA: 73,1 ± 12,9 lpm; test de Kruskal-Wallis, NS) ni entre pacientes con y sin AOT (pacientes con AOT: 77,7±11,3 lpm; pacientes sin AOT: 73,2±15,0 lpm; test U de Mann-Whitney, NS). La Tabla 6.2 muestra el ritmo cardiaco medio durante los registros de control y PTCA, así como al inicio de los episodios de AOT detectados. Se observa un incremento medio de 3,5±9,6 lpm (test de Wilcoxon: $p = 2 \cdot 10^{-5}$) en los registros de PTCA respecto al ritmo cardiaco en los registros de control. Sin embargo, la magnitud del incremento no discrimina entre pacientes con y sin AOT en el registro de PTCA (test U de Mann-Whitney: $p = 0,2$). El ritmo cardiaco medio al inicio de los episodios de AOT es de 79,1 ± 12,6 lpm.

pacientes	\overline{HR} (control) (lpm)	\overline{HR} (PTCA) (lpm)	ΔHR (lpm)	HR (inicio de AOT) (lpm)
todos ($n=95$)	71,2 ± 13,1	74,7 ± 14,0	3,5 ± 9,5	
con AOT ($n=32$)	71,9 ± 10,5	77,7 ± 11,3	5,8 ± 8,4	79,1 ± 12,6
sin AOT ($n=63$)	70,8 ± 14,4	73,2 ± 15,0	2,4 ± 9,9	
p -valor*	0,49	0,07	0,2	-

* Test U de Mann-Whitney entre pacientes con AOT y sin AOT.

Tabla 6.2: Ritmo cardiaco medio \overline{HR} en los registros de control y de PTCA, variación del ritmo cardiaco $\Delta HR = \overline{HR}$ (PTCA) - \overline{HR} (control) y ritmo cardiaco medio al inicio de los episodios de AOT.

La amplitud RMS máxima de la AOT en cada paciente tiene un gran rango de variación en el grupo de estudio: desde 10 μV hasta 1533 μV (media: 192 μV , mediana: 68 μV). El diagrama de cajas de cada subgrupo se representa en la Figura 6.2. Nótese el valor extremo aislado en el subgrupo de los pacientes con oclusión en la arteria LAD, con una amplitud de más de 1,5 mV. Se han encontrado diferencias significativas en función de la arteria ocluida (LAD: 331±387 μV , amplitud mediana = 199 μV ; LCX: 90±90 μV , amplitud mediana = 29 μV ; RCA: 63±63 μV , amplitud mediana = 47 μV ; test de Kruskal-Wallis, $p = 0,007$). No obstante, las diferencias entre los grupos con y sin evidencia de infarto de miocardio no fueron significativas (MI: 180±385 μV , no MI: 203±201 μV ; test U de Mann-Whitney: NS).

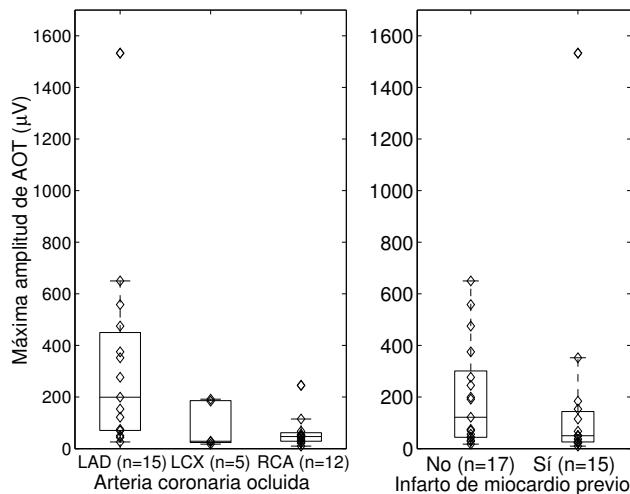


Figura 6.2: Diagrama de cajas de las amplitudes de AOT máximas en cada paciente, clasificadas según la arteria ocluida y según la evidencia electrocardiográfica de un infarto previo de miocardio.

6.5.2. Análisis de la evolución de AOT.

En las 32 oclusiones en las que aparecieron AOT, la duración media de los episodios de AOT es de 2 min 21 s \pm 79 s, observándose episodios desde tan sólo 25 s hasta 375 s. El inicio del episodio se produce desde 25 s hasta 245 s después de la oclusión (en media, 2 min 6 s \pm 64 s). Sólo 5 episodios comenzaron en el primer minuto de oclusión, 10 episodios lo hicieron en el segundo minuto, 11 durante el tercero y 4 y 3, respectivamente, en los minutos cuarto y quinto desde el inicio de la oclusión. El 90% de la amplitud máxima se alcanza a los 3 min 15 s \pm 65 s después del inflado del globo (69 s \pm 47 s después del inicio del episodio).

El final de los episodios con respecto al final de la oclusión varía entre -75 s y +24 s, donde los tiempos negativos se refieren a instantes anteriores al desinflado del globo. De los 32 episodios, 27 (es decir, el 84%) desaparecieron en el intervalo que va desde 5 s antes del desinflado hasta 25 s después de él (en media, 6 s \pm 7 s después del final de la oclusión), mientras que sólo cinco lo hicieron con una antelación mayor de 15 segundos con respecto al final de la oclusión.

Se encontraron diferencias intergrupos en el retardo del inicio de la AOT con respecto al inicio de la isquemia aguda, pero no en la duración de la alternancia ni en el tiempo de reacción a la reperfusión. Los episodios debidos a oclusiones de la arteria LAD son los más rápidos, con un retardo medio de 91 s \pm 40 s desde el inicio de la oclusión. Los retardos para oclusiones en las arterias LCX y RCA fueron, respectivamente 120 s \pm 55 s y 172 s \pm 66 s (test de Kruskal-Wallis: $p = 0,009$).

La Figura 6.3 muestra la respuesta promediada de la evolución de la alternancia a

la isquemia aguda (Figura 6.3(a)) y a la reperfusión (Figura 6.3(b)). Para ello, se han alineado todos los episodios de forma que el origen corresponde al inflado del globo en la Figura 6.3(a) y al desinflado del mismo en la Figura 6.3(b). En ambas gráficas se representa en la parte superior el número de oclusiones y el número de episodios existentes en un determinado momento. Nótese que en la Figura 6.3(a) los promedios después del quinto minuto tienen una significación limitada, ya que el número de registros promediados disminuye rápidamente después de ese tiempo.

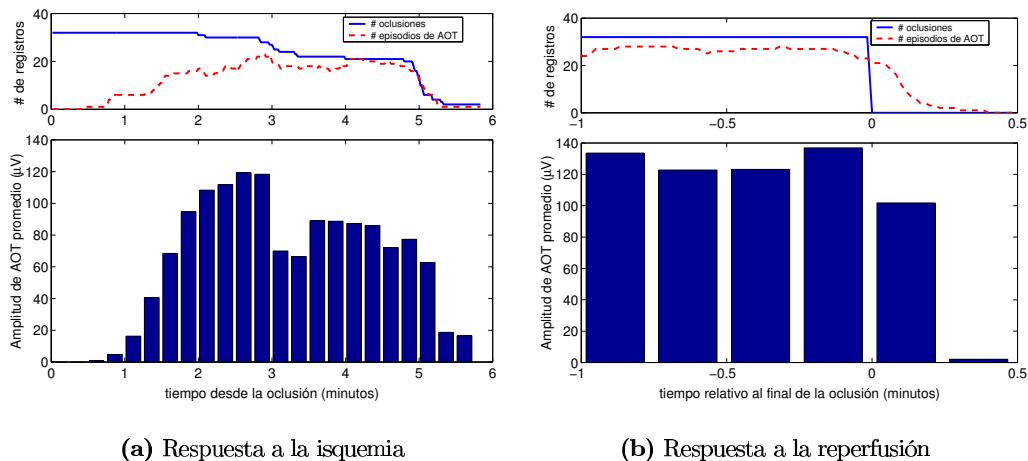


Figura 6.3: Evolución promediada de la amplitud de AOT en función del tiempo transcurrido desde el comienzo de la oclusión (a) y en función del tiempo relativo al final de la oclusión (b). Las gráficas superiores indican el número de registros con oclusión (línea continua) y con AOT (línea discontinua) en un instante dado.

Dado que los episodios de AOT encontrados presentan un amplio rango de amplitudes (*vid. Figura 6.2*), las evoluciones con mayor amplitud pueden enmascarar las evoluciones con amplitudes más bajas al hacer el promedio de las mismas. La Figura 6.4 es una representación alternativa de la evolución, en la que cada episodio ha sido normalizado de manera que su valor máximo es 1. Por tanto, las gráficas (a) y (b) muestran, respectivamente, la respuesta normalizada media del fenómeno de AOT a la isquemia aguda (a) y a la reperfusión (b).

6.5.3. Análisis espacial.

La Figura 6.5 muestra la media y la desviación estándar de la distribución de AOT por derivaciones en los tres subgrupos correspondientes a las tres arterias coronarias principales. En el subgrupo LAD, la AOT es predominante en las derivaciones precordiales *anteriores* V2-V4, dando una idea de la localización de la región dañada; en el subgrupo LCX, la alternancia máxima se encuentra en las derivaciones V4-V6, mientras que en el subgrupo RCA, las máximas amplitudes se midieron en V1-V3 así como en las derivaciones frontales II-aVF-III.

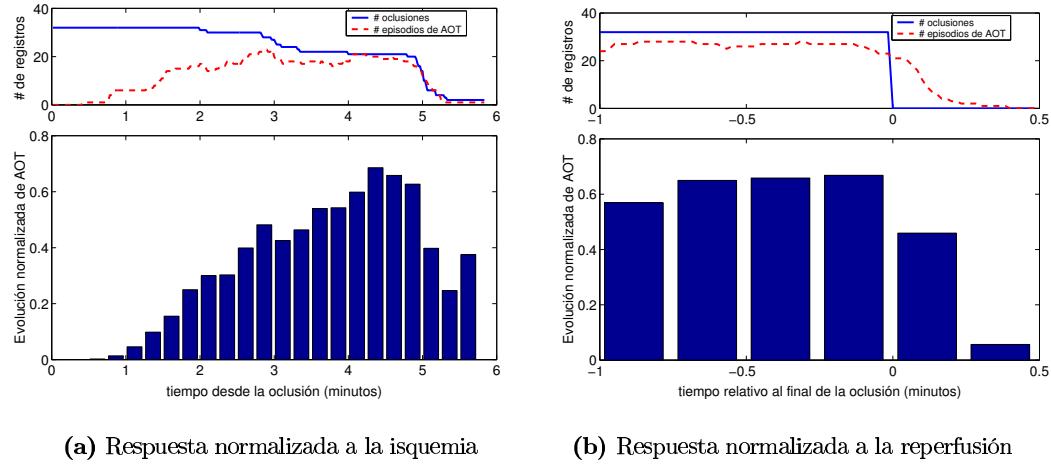


Figura 6.4: Representación similar a la Figura 6.3, pero normalizando las evoluciones latido a latido antes de promediar.

La Figura 6.6 muestra, para cada arteria ocluida, el porcentaje de episodios que se han detectado en cada derivación, así como el porcentaje de episodios en los que el nivel máximo de alternancia se produce en una derivación determinada.

En la Figura 6.7 se muestran las proyecciones frontal, transversal y sagital del eje eléctrico normalizado de la alternancia para las oclusiones en cada una de las tres arterias coronarias principales. Las líneas representan los vectores medios en cada uno de los subgrupos (LAD, LCX y RCA). Los sectores circulares cubren dos desviaciones estándar, tanto en magnitud como en ángulo del eje eléctrico.

En la Figura 6.8 se presentan la media y desviación estándar de las formas de onda de AOT normalizadas para cada arteria ocluida. Las formas de onda medidas en V4 en tres pacientes en la máxima amplitud del episodio se muestran en la Figura 6.9. Se presentan también dos latidos superpuestos correspondientes al máximo del episodio, para poder comparar las formas de onda del ECG y de la AOT. Se observa en los ejemplos que el contenido frecuencial de la alternancia es similar al de la onda T. Sin embargo, la forma de onda alterna se presenta algo avanzada respecto a la onda T, iniciándose ya en la parte final del complejo QRS.

Puede observarse en la Figura 6.8 que la alternancia inducida por oclusiones en las arterias LAD y LCX se concentra en los primeros 250 ms después del punto fiducial del QRS, correspondientes al final del QRS, complejo ST-T y primera mitad de la onda T. La distribución temporal de la alternancia debida a la oclusión de la arteria RCA se extiende hasta muestras más alejadas del complejo QRS.

Cuantificamos la distribución temporal de la alternancia mediante los intervalos transcurridos entre el punto fiducial del QRS y los instantes temporales en que el área acumulada bajo la forma de onda alterna alcanza un 10%, un 50% y un 90% del área total ($t_{0,1}$, $t_{0,5}$ y $t_{0,9}$, respectivamente). Los valores correspondientes a cada subgrupo de

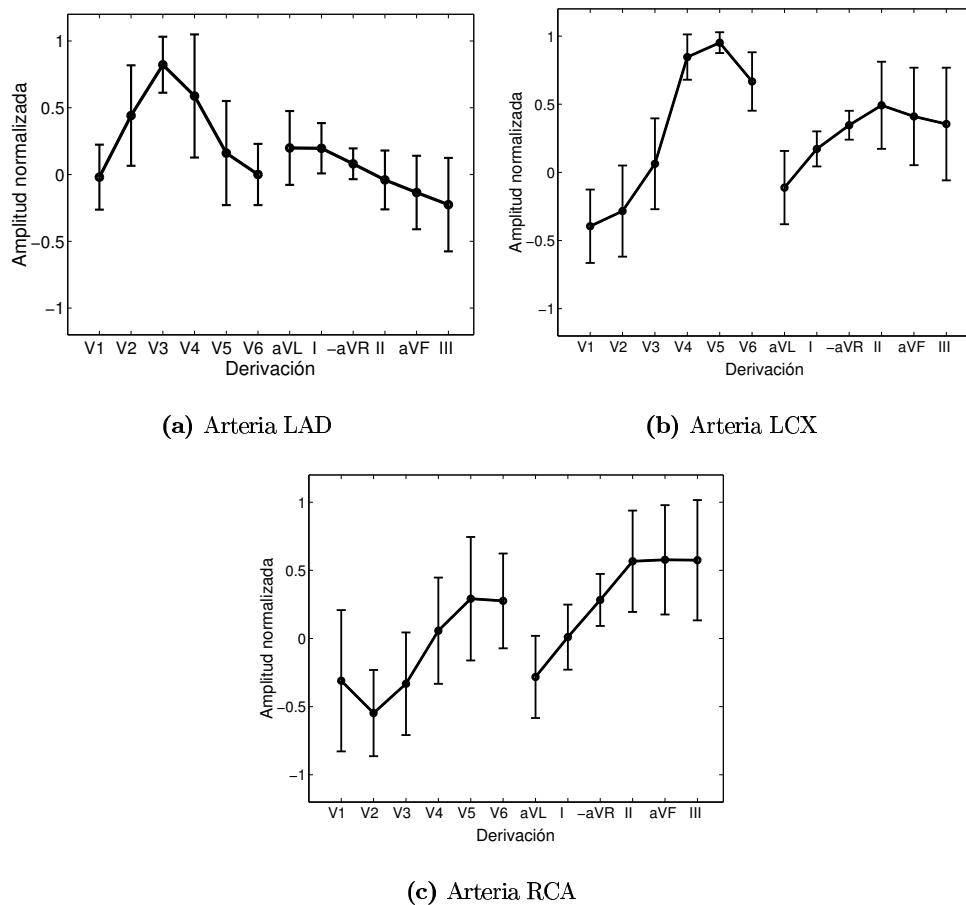


Figura 6.5: Distribución normalizada por derivaciones de la amplitud de AOT, promediada en cada subgrupo según la arteria ocluida. Las barras de error representan ± 1 desviación estándar.

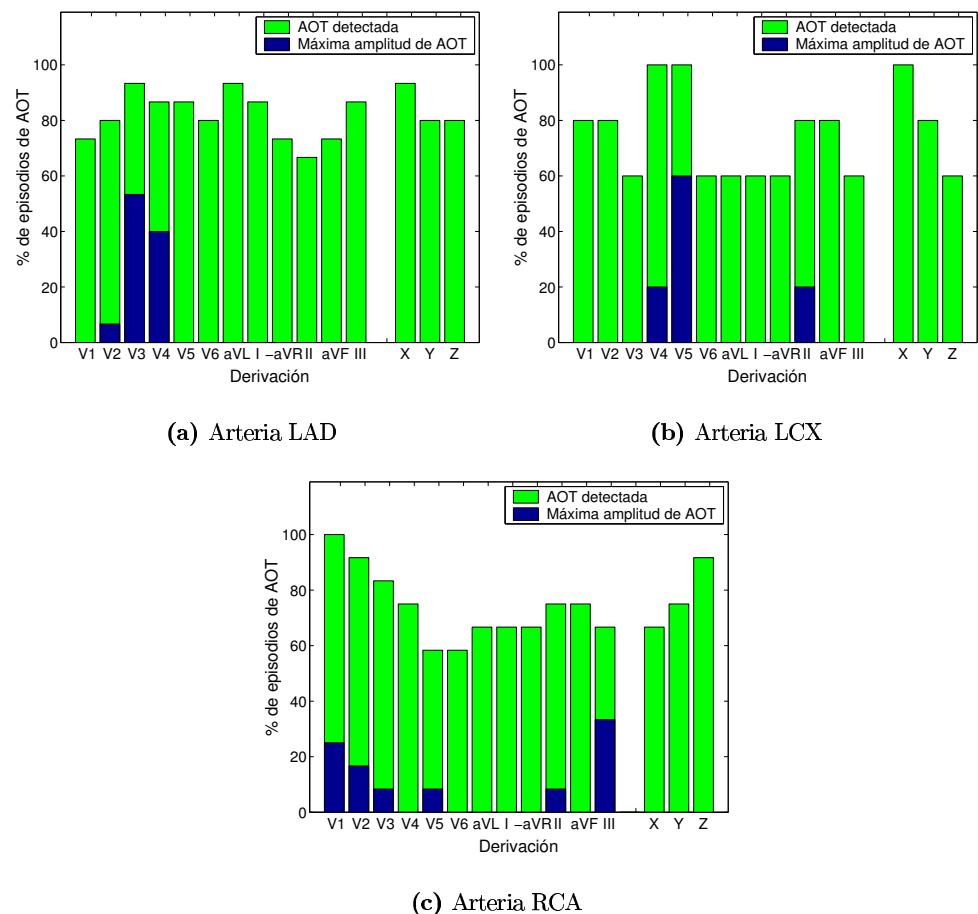


Figura 6.6: Porcentaje de episodios detectados en cada derivación respecto del total de episodios alternantes (barras claras). También se representa el porcentaje de episodios con máxima amplitud alterante en una determinada derivación (barras oscuras).

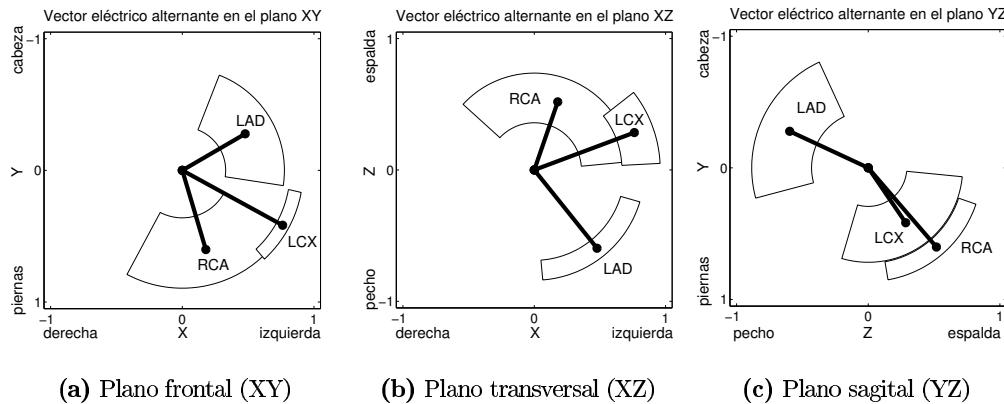


Figura 6.7: Promedio del eje eléctrico normalizado de la AOT en función de la arteria ocluida. Se representan las proyecciones en los planos frontal, transversal y sagital. Los sectores circulares cubren 2 desviaciones estándar (± 1 desviación estándar respecto a la media) de la magnitud y ángulo del eje eléctrico en cada plano.

pacientes se muestran en la Tabla 6.3. Se observan diferencias significativas en los tres parámetros en función de la arteria ocluida (test de Kruskal-Wallis). El análisis por pares de grupos revela que las diferencias son significativas entre los subgrupos LAD y RCA.

Parámetro	Subgrupo	$r = 0,1$	$r = 0,5$	$r = 0,9$
t_r (ms)	LAD	88 \pm 30	184 \pm 44	267 \pm 51
	LCX	104 \pm 11	195 \pm 18	290 \pm 26
	RCA	122 \pm 36	236 \pm 59	338 \pm 84
p (Kruskal-Wallis)	todos	0,036	0,025	0,019
p (U de Mann-Whitney)	LAD vs RCA	0,02	0,012	0,007
p (U de Mann-Whitney)	LAD vs LCX	0,119	0,197	0,197
p (U de Mann-Whitney)	LCX vs RCA	0,234	0,160	0,195

Tabla 6.3: Tiempo tras el punto fiducial del QRS en el cual el área acumulada bajo la forma de onda alternante alcanza el 10 %, el 50 % y el 90 % del área total.

6.6. Discusión.

Las primeras caracterizaciones de la AOT inducida por la oclusión de una de las arterias coronarias principales son fruto de estudios experimentales realizados en animales (Hellerstein y Liebow 1950; Cinca *et al.* 1980; Hashimoto *et al.* 1983; Adam *et al.* 1984; Carson *et al.* 1986). La observación de AOT en registros ambulatorios durante episodios de angina de Prinzmetal también aportó datos valiosos sobre los tiempos de aparición de la alternancia (Rozanski y Kleinfeld 1982; Salerno *et al.* 1986; Turitto y El-Sherif 1988).

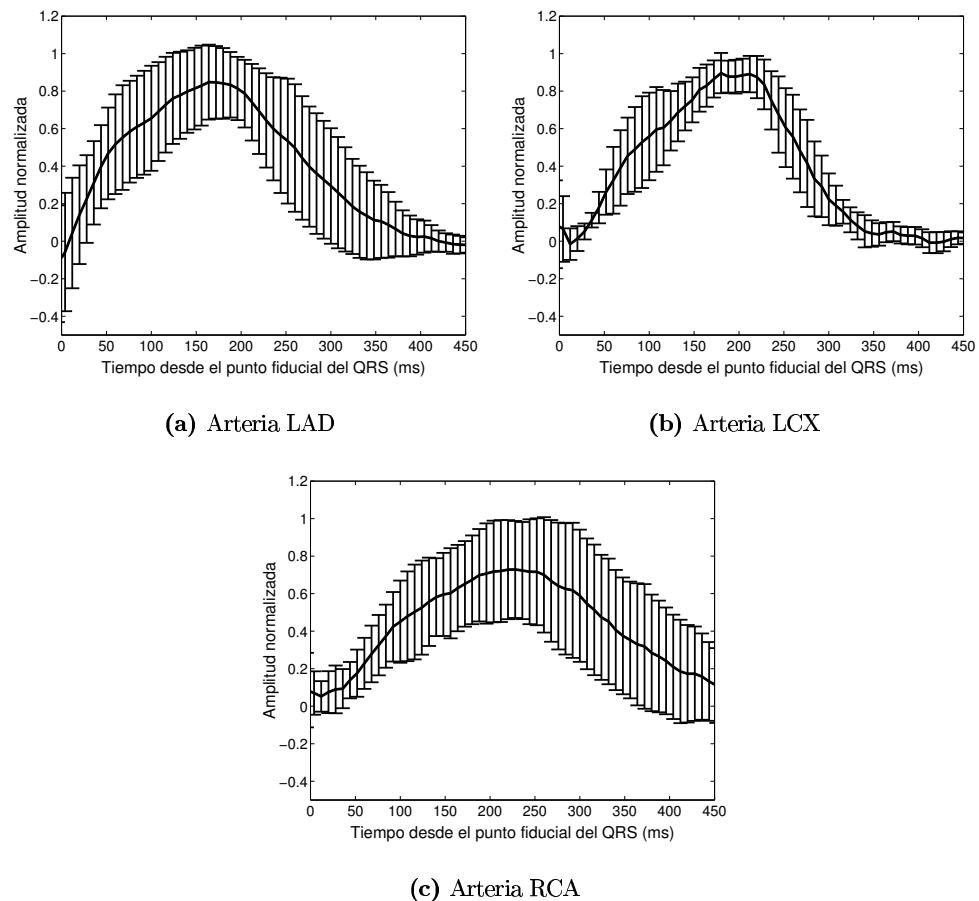


Figura 6.8: Promedio de las formas de onda alternantes normalizadas, para cada arteria ocluida. Las barras de error representan ± 1 desviación estándar de las formas de onda alternantes.

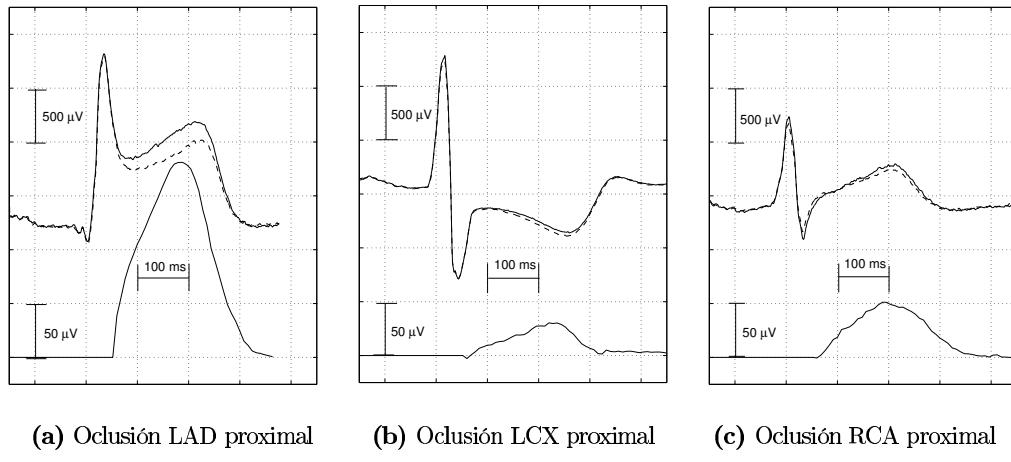


Figura 6.9: Ejemplo de AOT en tres pacientes del grupo de estudio con oclusiones en las tres arterias coronarias principales. Se muestran superpuestos dos latidos consecutivos registrados en la derivación V4, en el máximo de la evolución de la alternancia, junto con la forma de onda alternante estimada con el EMV para el modelo laplaciano adaptativo. Nótese que la señal alternante ha sido amplificada en un factor $\times 10$.

Hasta el inicio de los años 90, apenas se documentan algunos casos de alternancias durante intervenciones de PTCA (Joyal *et al.* 1984; Okamoto *et al.* 1991; Shah *et al.* 1991; Sochanski *et al.* 1992). Gilchrist reporta 5 casos con AOT en una serie de 407 inflados consecutivos monitorizados (Gilchrist 1991). Shah y Subramanyan documentan 9 casos de alternancia visual en 78 pacientes (Shah y Subramanyan 1995). En ambos estudios, sólo se monitorizan algunas derivaciones, y no se realiza ninguna cuantificación de la alternancia.

Los estudios realizados por Okino *et al.* (Okino *et al.* 1992), Nearing *et al.* (Nearing *et al.* 1994) y Kwan *et al.* (Kwan *et al.* 1995) proporcionan información más detallada sobre el fenómeno de la AOT inducida durante una PTCA. En los dos primeros sólo se estudian oclusiones de la arteria LAD (41 y 7 casos, respectivamente). El estudio de Kwan se realizó sobre 65 pacientes con lesiones en las tres arterias coronarias principales, pero sólo se documentan alternancias en la arteria LAD proximal.

En el presente estudio se describen las características espacio-temporales de la AOT durante intervenciones de PTCA en las tres arterias coronarias principales, extendiendo y complementando los trabajos previos. Además, la metodología de detección y estimación empleada nos ha permitido medir alternancias no visibles (del nivel de unos pocos microvoltios en algunos casos), cuantificando en cada episodio la evolución temporal, la distribución espacial por derivaciones y la forma de onda alternante. De los trabajos previos sobre alternancias en PTCA, sólo el grupo de Nearing y Verrier (Nearing *et al.* 1994) había medido alternancias no visibles, utilizando para ello el método de la demodulación compleja.

6.6.1. Metodología de análisis.

En este trabajo hemos utilizado el detector del cociente de verosimilitudes generalizadas y el estimador de máxima verosimilitud derivados para un modelo de señal laplaciano y adaptativo (Sección 4.7). Se ha mostrado en las simulaciones con ruido real llevadas a cabo en el Capítulo 5 que el detector CVG para el modelo laplaciano adaptativo mejora las prestaciones de otros métodos clásicos como el método espectral o el método de la demodulación compleja, cuyo modelo subyacente es gaussiano.

Entre los rasgos del método aplicado, podemos subrayar su robustez intrínseca ante valores extremos como los producidos por ráfagas de ruido muscular, artefactos súbitos o latidos ectópicos. De este modo, no ha sido necesario implementar ningún tipo de protección adicional ante estos tipos de perturbaciones. Debido al modelo escogido, la sensibilidad del detector se adapta al nivel de ruido en cada tramo de señal. En el presente estudio, se han medido alternancias de tan sólo $5 \mu V$ utilizando electrodos estándar. La selección de una ventana de análisis de 32 latidos permite detectar episodios con duraciones del orden de medio minuto, así como realizar un seguimiento adecuado de la evolución de los mismos conforme aumenta el tiempo de oclusión.

6.6.2. Incidencia y magnitud.

En el grupo de pacientes estudiados, hemos encontrado una incidencia de AOT del 34 % en el ECG de superficie durante PTCA. La máxima incidencia se produce en oclusiones de la arteria LAD (*vid. Tabla 6.1*). Además, las mayores amplitudes también se han medido durante oclusiones en esta arteria (Figura 6.2). Estos resultados pueden explicarse por el hecho de que la arteria LAD perfunde una región del miocardio más amplia que las otras arterias coronarias, y por tanto, su oclusión resulta en una mayor área de miocardio isquémico. Este resultado apoya la hipótesis de que es preciso que una amplia región del miocardio se vea afectada para que se observen alternancias en el ECG de superficie (Kwan *et al.* 1995; Shah y Subramanyan 1995; Kwan *et al.* 1999).

En la misma línea, observamos que la incidencia alcanza un 68 % cuando la oclusión de la LAD es proximal (15 de 22 pacientes; $p = 0.002$ en comparación con oclusiones en la LAD distal y $p = 0,001$ en comparación con el resto de oclusiones). Esto refuerza la hipótesis anterior, ya que la extensión de miocardio afectada por una oclusión proximal es mayor que en el caso de una oclusión distal. No obstante, las diferencias entre oclusiones proximales y distales no son significativas en las otras arterias. Además, ninguno de los dos pacientes con oclusión en el tronco común de la arteria coronaria izquierda presentaron alternancias. El bajo número de casos impide concluir nada de este dato, si bien podría explicarse por el reclutamiento de vasos colaterales.

Estudios anteriores sugieren una prevalencia de AOT en el ECG de superficie durante PTCA menor que el 34 % observado en este estudio. Gilchrist encontró alternancias del segmento ST visibles en sólo un 1.2 % de 407 oclusiones monitorizadas (Gilchrist 1991). Las alternancias se distribuyen de la siguiente forma: 4 de 195 oclusiones en la arteria LAD, 1 de 102 oclusiones de la LCX y ninguna en las 110 oclusiones de la RCA. Estos

datos de prevalencia contrastan con los de Okino *et al.*, que encontraron alternancias prominentes del segmento T (con una diferencia entre un latido y el siguiente ≥ 0.2 mV) en un 27 % de los 41 pacientes con oclusión en la arteria LAD (Okino *et al.* 1992).

En el ECG intracoronario se documentan magnitudes e incidencias mayores que en el ECG de superficie. Shah y Subramanyan encontraron alternancias visibles en el ECG de superficie (≥ 0.1 mV) en 6 de 78 pacientes (7.7 %), pero también encontraron 3 pacientes con AOT visible en el ic-ECG pero no en el ECG de superficie (Shah y Subramanyan 1995). Kwan *et al.* encontraron alternancias visibles (≥ 0.1 mV) en el ic-ECG en 5 de las 65 lesiones estudiadas (7.7 %) (Kwan *et al.* 1995). Es de destacar que los 5 casos documentados se observaron en oclusiones en la arteria LAD proximal (con una prevalencia del 55.5 % en el total de oclusiones LAD proximales). Sólo en dos de esos casos la alternancia era también visible en el ECG (3.1 % del grupo total estudiado y un 22.2 % del subgrupo LAD proximal). En un trabajo posterior, Kwan y sus colaboradores encontraron AOT visibles en el ic-ECG (≥ 0.1 mV) en 6 de 14 PTCA con oclusión de la arteria LAD proximal (43 % de incidencia), en contraste con un grupo de 11 pacientes sometidos a angioplastia de globo con perfusión¹ en los que no se observaron alternancias.

La diversidad en las prevalencias presentadas en la literatura puede explicarse por la diferente sensibilidad a las alternancias de baja amplitud. Utilizando el modelo laplaciano adaptativo, hemos sido capaces de detectar inicios de episodios de tan sólo 5 μ V, siendo la amplitud máxima de algunos episodios tan baja como 9.7 μ V. Si asumimos un umbral de detección visual de 100 μ V (como en (Kwan *et al.* 1995; Shah y Subramanyan 1995; Kwan *et al.* 1999)), el número de episodios visibles en nuestro grupo de pacientes se reduciría a 14 (durante 10 oclusiones de la arteria LAD, 2 de la LCX y 2 de la RCA). Sólo 8 de los pacientes de nuestro grupo de estudio (7 LAD, 0 LCX, 1 RCA) manifestaron alternancias $\geq 200\mu$ V en el ECG (que es el umbral utilizado en (Okino *et al.* 1992)). Por tanto, la prevalencia de AOT visibles concuerda con la encontrada en (Okino *et al.* 1992) en ECG de 12 derivaciones. La mejora de sensibilidad debida a la metodología de análisis empleada nos ha permitido detectar alternancias de baja amplitud en el ECG de superficie, alcanzando una prevalencia similar a las reportadas en el ic-ECG.

La baja sensibilidad del análisis visual y la mayor amplitud de AOT medida en las oclusiones de la arteria LAD pueden explicar por qué la gran mayoría de los casos de AOT durante PTCA documentados en la literatura corresponden a oclusiones de la arteria LAD (principalmente en localizaciones proximales) (Okamoto *et al.* 1991; Gilchrist 1991; Sochanski *et al.* 1992; Okino *et al.* 1992; Kwan *et al.* 1995, 1999).

Otras causas que pueden explicar la baja incidencia en algunos estudios son la imposibilidad de monitorizar todas las derivaciones (como se ha observado, las diferencias en amplitud entre las distintas derivaciones son importantes) y la realización de oclusiones cortas (ya que es preciso un cierto tiempo de isquemia para que aparezca la alternancia).

¹Una variación de la PTCA en la que se inserta en la arteria un catéter que permite la perfusión del miocardio durante el inflado del globo.

6.6.3. Evolución de la alternancia. Respuesta a la oclusión y a la reperfusión.

Hasta donde conocemos, la evolución temporal de la AOT inducida por la PTCA en humanos no había sido cuantificada previamente. Nuestro estudio revela que la manifestación de la AOT en el ECG en respuesta a la hipoperfusión está retardada con respecto al inflado del globo (2 min 14 s \pm 70 s), alcanzándose el 90 % de la amplitud máxima, en media, 1 minuto más tarde. Además, la amplitud de AOT crece al aumentar el tiempo de oclusión (Figuras 6.3(a) y 6.4(a)), indicando un incremento progresivo en la inestabilidad eléctrica del miocardio. En la mayor parte de los registros con AOT (79 %), la alternancia continuó hasta el final de la oclusión, donde se alcanza la amplitud máxima (Figura 6.4(b)). La respuesta observada a la reperfusión es más rápida que la respuesta a la oclusión (*cfr.* las dos gráficas de la Figura 6.4), de tal forma que en todos los casos la AOT ha desaparecido en los primeros 25 segundos tras el fin de la oclusión.

Los datos arrojados por el estudio concuerdan con las observaciones de algunos autores, que indican que la alternancia aparece en el ECG sólo después de un cierto tiempo de oclusión. Gilchrist documenta inicios de alternancias en el rango 55 s - 120 s después de la oclusión (Gilchrist 1991). Okino describe la aparición de alternancias del segmento ST después de 47 s \pm 22 s de oclusión (Okino *et al.* 1992). En (Kwan *et al.* 1995), se observaron alternancias en el ic-ECG sólo a partir de 130 s tras el inflado del globo (174 s \pm 57 s). Nearing y Verrier encontraron, en un estudio con 7 pacientes, un incremento evidente en el nivel de AOT en los dos primeros minutos de oclusión (Nearing *et al.* 1994).

La alternancia persiste generalmente hasta el final de la oclusión (Gilchrist 1991; Nearing *et al.* 1994; Kwan *et al.* 1995; Okino *et al.* 1992), instante al que se llega con la máxima amplitud (Okino *et al.* 1992). Shah *et al.* observaron que la alternancia se produce coincidiendo con el tiempo de elevación máxima del segmento ST (Shah y Subramanyan 1995).

Como respuesta al desinflado del globo se documenta una rápida disminución del nivel de alternancia en (Kwan *et al.* 1995; Shah y Subramanyan 1995; Okino *et al.* 1992) concordando con nuestros resultados. Nearing *et al.* (Nearing *et al.* 1994) describen, no obstante, un incremento abrupto de la alternancia, de menos de un minuto de duración, seguido de un rápido desvanecimiento de la misma. Los autores atribuyen esta *alternancia de reperfusión* a la presencia de productos de desecho de la isquemia celular inmediatamente después del reinicio de la perfusión. En el presente estudio, no hemos encontrado en ningún caso este incremento súbito en respuesta a la reperfusión.

Se han descrito patrones temporales similares en estudios experimentales con animales, con oclusiones de 8-10 minutos (Smith *et al.* 1988; Nearing *et al.* 1994). Los autores observan que la magnitud de alternancia se incrementa sólo en los cuatro primeros minutos de oclusión (Nearing *et al.* 1994), permaneciendo estable en el resto. En un reciente estudio experimental, Nearing y Verrier encontraron oscilaciones con períodos de 3 y 4 latidos, así como variaciones más complejas, en 5 perros. Estas periodicidades aparecieron en media 3.48 minutos después de la oclusión, aproximadamente un minuto antes del inicio de episodios de fibrilación ventricular (Nearing y Verrier 2003a). En el presente trabajo

no se han encontrado, vía inspección visual, evidencias de periodicidades mayores de 2 latidos.

Turitto *et al.* reportan un patrón similar en isquemia variante ambulatoria (angina de Prinzmetal) (Turitto y El-Sherif 1988), donde el episodio alternante aparece en la fase de oclusión, próximo al instante de máxima desviación del segmento ST, y desaparece con la reperfusión.

La temporización de la AOT contrasta con la evolución de otros cambios en la repolarización inducidos por la isquemia en el ECG, por ejemplo, la elevación del segmento ST y otros cambios morfológicos de la repolarización. En ellos, el 60% de la variación total aparece en el primer minuto de oclusión (García *et al.* 2000b).

La no inmediatez de la alternancia, que requiere una cierta duración de la oclusión para ser observada en el ECG de superficie ha sido atribuida a la necesidad de un cierto nivel de isquemia para su aparición (Gilchrist 1991; Kwan *et al.* 1995), de acuerdo con las observaciones de Turitto durante episodios de angina de Prinzmetal (Turitto y El-Sherif 1988). Algunos autores también han relacionado la presencia de alternancias con las diferentes fases de riesgo arrítmico que se producen durante la isquemia, en particular con la fase 1A, que se extiende desde el 2º al 10º minuto tras la oclusión (Dilly y Lab 1988; Nearing *et al.* 1994). Otros rasgos de la repolarización, como la recientemente propuesta heterogeneidad interderivacional de la onda T parecen seguir un patrón temporal igualmente retardado (Nearing y Verrier 2003b).

El retardo observado en la detección de AOT podría explicarse por la sensibilidad de los métodos aplicados en el ECG de superficie. Sin embargo, algunos estudios experimentales en corazones animales han mostrado que la isquemia total del tejido cardíaco produce alternancias en la concentración de calcio intracelular a partir de los 2-3 minutos tras la oclusión (Lee *et al.* 1988; Qian *et al.* 2001). Estos resultados parecen apoyar el postulado de que se precisa una cierta duración de isquemia para inducir alternancias eléctricas (Kwan *et al.* 1995).

Esta característica permite explicar la baja prevalencia de la alternancia en oclusiones y/o ataques isquémicos de corta duración (< 1-2 min.). En nuestro estudio, donde todos los episodios duran más de 1.5 minutos, no se encontró ninguna relación significativa entre la duración de la alternancia y la presencia de AOT. Otros autores tampoco encontraron dependencias con la duración del episodio (Okino *et al.* 1992; Kwan *et al.* 1995).

6.6.4. Distribución por derivaciones.

Es bien conocido que la alternancia es un fenómeno específico en las regiones isquémicas del miocardio (Dilly y Lab 1988; Konta *et al.* 1990; Sutton *et al.* 1991; Nearing *et al.* 1994). La distribución de la AOT por derivaciones indica cómo se proyecta la actividad eléctrica alternante en los vectores directores de las distintas derivaciones. Los resultados han mostrado diferencias marcadas en la distribución por derivaciones dependiendo de la arteria ocluida.

En las oclusiones de la arteria LAD, la AOT es predominante en las derivaciones precordiales V2-V4 (Figura 6.5(a)), que exploran la pared anterior del ventrículo izquierdo. La máxima amplitud se produce en la derivación V3 en un 60% de los episodios, en la V4 en un 33% y en la V2 en un 7% (Figura 6.6(a)). La AOT inducida por oclusiones de la arteria LCX es especialmente prominente en las derivaciones precordiales V4-V6, que miran hacia la pared lateral. La mitad de estos episodios tienen su máxima amplitud en la derivación V5. En las oclusiones de la RCA, la alternancia está distribuida de forma más uniforme, sin ser especialmente prominente en ninguna de las derivaciones. Los valores máximos se encuentran en las derivaciones precordiales V1-V3 y las frontales II-aVF-III.

En general, las amplitudes máximas se observan en las derivaciones precordiales más cercanas a la región del miocardio irrigada por la arteria ocluida. En las oclusiones de las arterias LCX y RCA, puede apreciarse la discordancia en la fase de la alternancia en las derivaciones precordiales del lado derecho (V1-V2) y del lado izquierdo (V5-V6). Por el contrario, la AOT es concordante en las derivaciones precordiales cuando la arteria ocluida es la LAD.

El vector eléctrico medio de la alternancia presenta una orientación diferente en cada uno de los subgrupos (Figura 6.7) indicando la dirección principal de la alternancia.

La mayor amplitud de la alternancia en las llamadas *derivaciones anteriores* ya había sido documentada en trabajos previos, en oclusiones de la arteria LAD (Joyal *et al.* 1984; Okamoto *et al.* 1991). Nearing y Verrier (Nearing *et al.* 1994) cuantificaron también la distribución por derivaciones en 7 oclusiones de la arteria LAD: la máxima amplitud se produce también en las derivaciones V3 y V4, seguidas por la V2. La magnitud medida en el resto de las derivaciones monitorizadas (V1, V4, V6, II y las derivaciones ortogonales de Frank) fue manifiestamente menor. Hasta donde conocemos, no existe ningún estudio previo de la distribución por derivaciones de la alternancia inducida por oclusión de las arterias LCX y RCA.

Nearing y Verrier indican que la AOT se detecta mejor en las derivaciones precordiales que en las frontales u ortogonales (Nearing *et al.* 1994). No obstante, con la metodología empleada en este trabajo se han detectado al menos un 60% de los episodios incluso en las derivaciones donde la AOT es de menor amplitud (Figura 6.6).

Los resultados sugieren una cierta capacidad de la AOT para indicar la localización de la isquemia. En la literatura pueden encontrarse patrones análogos de variación espacial por derivaciones para otros rasgos inducidos por la oclusión coronaria, como la desviación de ST (García *et al.* 1999), la variación de los coeficientes de Karhunen-Loève (García *et al.* 1999) o la componente de alta frecuencia del QRS (Pettersson *et al.* 2000).

6.6.5. Análisis de la forma de onda alternante.

La distribución temporal de la alternancia en el intervalo de repolarización ha sido objeto de muy poco estudio en la literatura. La mayor parte de los estudios de AOT inducida por PTCA se limitan a medir la diferencia latido a latido en el nivel de ST

(alternancia del segmento ST) (Kwan *et al.* 1995, 1999; Shah y Subramanyan 1995; Okino *et al.* 1992).

Nuestro análisis ha mostrado que existen diferencias significativas en función de la arteria ocluida. La alternancia está limitada a los primeros 300-350 ms tras el punto fiducial del QRS en las oclusiones de arterias LAD y LCX. Por otro lado, la AOT producida por oclusión de la RCA es más ancha, está algo más retardada y se extiende hasta alcanzar los 400 ms tras el QRS. (Tabla 6.3).

La interpretación de estos resultados no es sencilla. Las diferencias en la distribución temporal podrían achacarse a la secuencia de repolarización del miocardio. De este modo, la forma de onda alternante estaría relacionada con la localización de la región eléctricamente inestable en el camino de propagación de la repolarización. Utilizando el MDC, Nearing y Verrier encontraron que la alternancia era mayor en la primera mitad de la onda T (periodo vulnerable de la repolarización), permaneciendo uniforme durante la segunda mitad (Nearing *et al.* 1994). Los autores sugieren que la presencia de alternancias en el periodo vulnerable de la repolarización indica una mayor vulnerabilidad cardiaca. En pacientes sometidos a estimulación eléctrica programada, Narayan y Smith observaron que la distribución de la alternancia en la parte final de la repolarización predecía la inducibilidad de taquicardia ventricular más específicamente que la alternancia distribuida al inicio de la misma (Narayan y Smith 1999a). Según los autores, las distribuciones tardías podrían reflejar una predisposición al fraccionamiento de frentes de onda y a la reentrada.

6.6.6. Otras consideraciones.

Algunos estudios en animales y humanos indican que la incidencia y magnitud de AOT son mayores cuando se incrementa el ritmo cardíaco (Nearing *et al.* 1994; Kavesh *et al.* 1998). También el ritmo cardíaco al que aparece la AOT parece representar un papel importante en la medida del riesgo (Rosenbaum *et al.* 1994; Kavesh *et al.* 1998; Narayan y Smith 2000; Kaufman *et al.* 2000), siendo éste mayor cuando las AOT aparecen en ritmos más bajos. En este estudio, los pacientes presentaban ritmo sinusal espontáneo ($71,2 \pm 13,1$ lpm en el registro de control). El ritmo se incrementó en un 6.3% durante el registro de PTCA. No obstante, el ritmo cardíaco medio al inicio de los episodios de alternancia es de 79 lpm, muy por debajo de los ritmos que se suelen provocar en los pacientes (mediante estimulación controlada, esfuerzo o estrés farmacológico) para inducir alternancias. Se muestra, por tanto, que en el corazón isquémico, la AOT puede observarse en reposo, sin que sea preciso elevar el ritmo cardíaco del paciente.

6.6.7. Limitaciones.

En este trabajo, los pacientes son sus propios controles. El análisis de dos registros ECG del mismo paciente permite el estudio de las características diferenciales en isquemia aguda. Dado que los sujetos del grupo de estudio son pacientes con cardiopatía isquémica y alto grado de oclusión coronaria, no se puede asumir una perfusión perfecta ni siquiera

en los registros de control. No obstante, no se encontraron alternancias en los registros de control. Esto podría deberse a que los pacientes estaban en reposo, asegurándose un correcto balance en el suministro de oxígeno a pesar de su cardiopatía.

Algunos pacientes del grupo de estudio presentan evidencia de infarto de miocardio. Esto puede haber influido en la prevalencia y distribución de AOT. No obstante, no se han detectado AOT en los registros de control, por lo que la alternancia debe ser atribuida a la oclusión. La AOT es más prevalente en pacientes con infarto previo, pero la diferencia no es estadísticamente significativa.

No se dispone de registros de la medicación de cada paciente. Aunque se sabe que los bloqueantes del calcio pueden inhibir las AOT (Hashimoto *et al.* 1983), algunos pacientes con AOT en los estudios de (Kwan *et al.* 1995; Okamoto *et al.* 1991; Okino *et al.* 1992) habían tomado bloqueantes del calcio el día de la intervención.

Algunos estudios han relacionado la presencia de AOT durante la isquemia con la predisposición a sufrir arritmias ventriculares (Kleinfeld y Rozanski 1977; Salerno *et al.* 1986; Turitto y El-Sherif 1988; Rosenbaum *et al.* 1994; Nearing *et al.* 1994; Nearing y Verrier 2003a). En este estudio no contamos con información sobre la arritmogenicidad de los pacientes, ni datos de seguimiento de los mismos, que permitirían evaluar si la AOT inducida por isquemia puede predecir un elevado riesgo de sufrir arritmias malignas.

El análisis espacial realizado en el ECG de superficie presenta algunas limitaciones: la forma del torso, la anatomía de las arterias coronarias y otros vasos menores (dominancia izquierda o derecha), o la existencia de circulación colateral presentan una clara variabilidad entre sujetos (Birnbaum y Sclarovsky 1997). Además, algunas regiones del miocardio pueden ser abastecidas por más de una arteria. Por tanto, las regiones afectadas por una oclusión similar no son necesariamente las mismas en pacientes diferentes. A pesar de ello, los resultados indican que la AOT observada tiene una dependencia clara con la localización de la oclusión.

Es preciso notar que la configuración de electrodos estándar utilizada en este estudio muestrea adecuadamente las paredes anterior y lateral del corazón, que son las regiones abastecidas por la arteria LAD, y en parte por la LCX. Las regiones inferior y posterior del miocardio, irrigadas por las arterias RCA y LCX no quedan tan bien caracterizadas en el ECG estándar de 12 derivaciones. La colocación de electrodos en la espalda del paciente o la utilización de mapas de potenciales superficiales (*body surface potential maps*) permitirían una mejor representación en los casos de isquemia con localización inferior o posterior.

El número de casos estudiados es significativamente mayor que en otros estudios. Sin embargo, al estar distribuidos entre las tres arterias coronarias principales, el número de casos no es suficientemente grande como para realizar análisis más detallados, por ejemplo, de las diferencias entre oclusiones proximales y distales, o la influencia de la localización del infarto en los pacientes con infarto de miocardio previo.

6.7. Conclusión

En este trabajo se han analizado las características electrocardiográficas de las alternancias de la repolarización inducidas durante intervenciones de PTCA. Se han considerado tres dimensiones: la evolución temporal, la distribución por derivaciones y la forma de onda alternante. El análisis de estos rasgos ha permitido caracterizar este fenómeno transitorio y regional durante los primeros minutos de isquemia aguda.

Capítulo 7

Conclusiones y líneas futuras.

A continuación se resumen las conclusiones y aportaciones más relevantes que se derivan de la presente tesis, así como las posibles líneas de extensión de la misma.

7.1. Conclusiones.

Revisión metodológica. A partir de la revisión y estudio de los métodos existentes en la literatura se ha abordado la sistematización de los mismos. Se ha propuesto para ello un esquema generalizado dividido en tres etapas: preprocesado, reducción de datos y análisis. Sirviéndonos de él hemos identificado los principios básicos de la detección y la estimación, desligándolos de otros procedimientos auxiliares y parámetros heurísticos. El estudio de los métodos ha probado las similitudes existentes entre algunos de ellos, a pesar de partir de planteamientos teóricos diferentes. Se han clasificado los métodos de análisis en función de tres paradigmas: basados en la transformada de Fourier localizada (o equivalentemente, en filtros lineales), basados en el conteo de cambios de signo y basados en filtros no lineales. La mayor parte de los métodos publicados (incluyendo el método espectral y el método de la demodulación compleja) pertenecen al primer grupo. Se han analizado sus puntos comunes y discutido los orígenes de las diferencias de comportamiento reportadas en la literatura: éstas radican esencialmente en dos aspectos: 1) la selección del tamaño de la ventana de análisis, donde se encuentra el clásico compromiso entre seguimiento dinámico y filtrado del ruido, y 2) en el empleo de un umbral fijo o adaptativo en función del nivel de ruido. Los detectores basados en un umbral fijo tienen mayores dificultades para discriminar la alternancia del ruido. Asimismo, se ha puesto de manifiesto la falta de robustez de los métodos basados en filtros lineales ante la presencia de artefactos impulsivos como los provocados por latidos ectópicos no rechazados.

Nuevas metodologías. Estrategia basada en modelos estadísticos. La búsqueda de nuevas metodologías se ha enfocado desde una estrategia basada en modelos, con la hipótesis de partida de que la aplicación de las técnicas estadísticas de las teorías de la detección y la estimación a modelos más fieles a las características de la señal real nos

proporcionarían métodos de análisis más fiables y robustos. Se ha considerado un modelo de AOT lineal, y diversos modelos de ruido en función de su distribución y grado de estacionariedad. Se han derivado los estimadores de máxima verosimilitud de la alternancia y los detectores basados en el test del cociente de verosimilitudes generalizadas. Además del TCVG, se han derivado los tests asintóticamente equivalentes de Wald y de Rao. De especial interés han resultado los tests de Rao, ya que son de muy fácil implementación para cualquiera de los modelos estudiados y han alcanzado experimentalmente prestaciones similares a los TCVG.

Se han derivado las prestaciones teóricas de los detectores y estimadores propuestos para cada modelo, de forma exacta, o bien utilizando las propiedades asintóticas de los detectores. Para validar el grado de acercamiento a las prestaciones asintóticas se han utilizado simulaciones de Monte Carlo. También se han estudiado, teórica y experimentalmente, los efectos de distintos tipos de desajustes entre la señal y el modelo como los desacuerdos en la duración y evolución de la señal, el subespacio de señal, la matriz de covarianza de ruido...

La utilización de un modelo lineal para la AOT permite caracterizar la señal a detectar/estimar como perteneciente a un subespacio de señal. Esto permite agregar al modelo información a priori sobre las señales, reduciendo los grados de libertad y permitiendo el filtrado de la fracción de ruido proyectada fuera del subespacio de señal. De este modo se consiguen ganancias energéticas tanto en detección como en estimación.

Se han propuesto detectores y estimadores para la familia de ruido gaussiano generalizado, de la que forman parte la distribución gaussiana y la laplaciana. Una de las aportaciones básicas de la tesis ha sido la propuesta de detectores y estimadores para ruido laplaciano. Las técnicas derivadas de los modelos laplaciános son relativamente simples y tratables a la par que robustas y han mostrado su superioridad respecto a las técnicas gaussianas, basadas en filtros lineales. Los EMV para esta distribución están basados en la minimización del error absoluto medio, y consisten en filtros ponderados de mediana, adaptados a la forma del episodio y aplicados sobre la señal demodulada. De esta forma, la estimación resulta inmune ante valores extremos, artefactos impulsivos o latidos ectópicos. Esta robustez también se traslada a los correspondientes estadísticos de detección. La utilización de distribuciones gaussianas generalizadas todavía más leptocúrticas, y por tanto más robustas, se ha desestimado por su complejidad y la presencia de mínimos locales en las funciones criterio, si bien la derivación de los métodos y el estudio teórico asintótico se han realizado de forma genérica para la familia gaussiana generalizada.

El comportamiento ante las inevitables fluctuaciones de ruido depende del modelo considerado. Los detectores para modelos estacionarios no son capaces de adaptarse a las mismas, por lo que la probabilidad de falsa alarma puede variar dramáticamente incluso para fluctuaciones moderadas del nivel de ruido. Esta sensibilidad con el nivel de ruido observado es menor para el modelo laplaciano estacionario, como se ha mostrado tanto teórica como experimentalmente. Este inconveniente ha sido solventado asumiendo en los modelos el desconocimiento del nivel de ruido. Los detectores así derivados son adaptativos y mantienen la probabilidad de falsa alarma constante independientemente del nivel de ruido (detectores CFAR).

Se han propuesto también detectores y estimadores para modelos de ruido no estacionarios, aumentando el número de parámetros desconocidos del modelo de ruido. Los modelos resultantes son también CFAR ante la presencia de ráfagas de ruido de duración menor que la ventana de análisis. La superioridad de estos métodos se ha mostrado ante la presencia de ráfagas de ruido de corta duración. Por otro lado, el cálculo del EMV en estos métodos requiere la utilización de procedimientos numéricos, incrementándose el coste computacional del análisis.

Otra novedad metodológica de la tesis consiste en extender los modelos de señal y las técnicas derivadas de ellos para utilizar las muestras de otros intervalos del ECG como *señal de entrenamiento*. En particular, las muestras de la onda P pueden utilizarse para mejorar la estimación del nivel de ruido en los detectores CFAR, y aproximar sus prestaciones a las asintóticas.

Los métodos gaussianos, basados en filtros lineales, forman parte del paradigma de métodos basados en la transformada de Fourier localizada. De hecho, el método de la demodulación compleja es equivalente al TCVG/EMV para el modelo gaussiano estacionario. Del mismo modo, el funcionamiento del método espectral es similar, salvo en la forma concreta de estimar el nivel de ruido, al detector derivado del modelo gaussiano adaptativo. No existe en la literatura ningún método que tenga en cuenta la no estacionariedad y/o no gaussianidad del ruido. Únicamente el método de la media móvil modificada, basado en un filtrado no lineal, puede considerarse un método adecuado para estadísticas leptocúrticas.

Se ha comprobado que el diezmado de la señal, utilizado como etapa de reducción de datos previo al análisis, constituye una sencilla aproximación a los detectores de subespacio cuando éstos únicamente incorporan la característica paso-bajo de la señal. El interés de este resultado radica en que permite simplificar los métodos laplacianos.

Evaluación de prestaciones. Las prestaciones de los métodos propuestos han sido evaluadas mediante estudios de simulación donde las características de la alternancia están controladas. Como una de las aportaciones de esta tesis se han propuesto dos simuladores realistas de señales ECG: en el primero, el ECG de fondo es estacionario y el ruido utilizado procede de una base de datos de registros de ruido fisiológico. En el segundo, se han utilizado señales reales de voluntarios sanos. El realismo de los simuladores supone una diferencia metodológica importante respecto a otros trabajos de validación, y ha permitido evaluar de forma fiable los métodos estudiados.

En estas señales ECG simuladas se han evaluado las prestaciones en diversas configuraciones experimentales (alternancia estacionaria, episodios transitorios, distintos tipos de ruido...) de los detectores y estimadores en función de la relación señal a ruido (en el caso de tener controlado el nivel de ruido) o de la amplitud de la alternancia (en el caso de las señales reales). Los métodos que han alcanzado las mejores prestaciones han sido los métodos no estacionarios, tanto gaussianos como laplacianos, así como la metodología basada en el método laplaciano adaptativo.

El simulador basado en señales reales se ha utilizado también como banco de pruebas

para comparar en igualdad de condiciones los métodos derivados en la presente tesis con los métodos más ampliamente utilizados en la literatura. Se ha comprobado que cualquiera de los métodos basados en modelos laplacianos y/o modelos no estacionarios supera las prestaciones obtenidas por el método espectral, el método de la demodulación complejo o el método de la media móvil modificada para una misma duración de la ventana de análisis. Asimismo, se ha inspeccionado el comportamiento de los métodos propuestos ante la presencia de latidos ectópicos y ráfagas de ruido intenso.

Alternancias de onda T e isquemia de miocardio. El estudio clínico presentado en el Capítulo 6 ha servido para estudiar las características electrocardiográficas de las AOT inducidas durante la angioplastia coronaria. En relación con otros trabajos previos, podemos destacar la amplitud del estudio, incluyendo subgrupos de pacientes con oclusión en las tres arterias coronarias. La duración de las oclusiones, mayor de lo acostumbrado, permite una mejor caracterización de la evolución del fenómeno. Por otro lado, la cuantificación de la evolución de la alternancia, su distribución temporal y su distribución por derivaciones constituye una aportación novedosa del presente trabajo.

Del estudio se desprende que la presencia de alternancias durante la PTCA es más común (34 % de las oclusiones) de lo que indican algunos estudios previos. La razón de estas diferencias puede encontrarse en la mejora de sensibilidad obtenida por el TCVG laplaciano adaptativo, que ha permitido detectar alternancias de amplitud superior a $5 \mu\text{V}$. La mayor prevalencia de AOT se ha encontrado en pacientes con oclusión de la arteria LAD (52%). Este resultado avala la hipótesis de que es preciso que una amplia región del miocardio se vea afectada para que las alternancias se manifiesten en el ECG de superficie. Es reseñable el hecho de que los episodios de AOT se han observado en reposo, con un ritmo cardíaco medio de 79 lpm, muy por debajo de los ritmos a los que suele aparecer este fenómeno.

Se ha cuantificado la evolución temporal de la AOT inducida por la PTCA. La AOT se manifiesta retardada en una media de 2 minutos respecto al inicio de la hipoperfusión. Este retardo sugiere, en concordancia con algunos estudios experimentales previos, que es preciso un nivel mínimo de isquemia para que se produzca el fenómeno alternante. También se ha observado que la amplitud de AOT crece al aumentar el tiempo de oclusión, alcanzándose la amplitud máxima al final de la misma. La respuesta a la reperfusión consiste en una rápida disminución del nivel de alternancia, que desaparece en los primeros 25 segundos tras el fin de la oclusión. No se ha encontrado el incremento abrupto de la alternancia reportado por Nearing y Verrier en algunos estudios previos.

El estudio de la distribución por derivaciones en función de la arteria ocluida ha corroborado que la alternancia es un fenómeno regional, que tiene su origen en la región hipoperfundida del miocardio. El vector eléctrico medio de la alternancia presenta una orientación diferente en cada uno de los subgrupos de arteria ocluida indicando la dirección del eje principal de la alternancia. También se han encontrado diferencias significativas en la distribución temporal de la alternancia durante la repolarización.

Conclusión general. Para concluir, podemos destacar que, aplicando las herramientas estadísticas de las teorías de la detección y la estimación a modelos realistas del ECG alternante y el ruido, hemos obtenido metodologías robustas que mejoran las prestaciones de los métodos utilizados hasta la fecha. El método basado en el TCVG y el EMV para el modelo laplaciano adaptativo es particularmente atractivo, ya que es un método sencillo basado en filtros de mediana y alcanza las mismas prestaciones que los métodos no estacionarios. Con él se han detectado alternancias del orden de $5 \mu V$, tanto en simulación como en señales ECG reales.

7.2. Líneas futuras.

En la realización de esta tesis se han encontrado problemas, ramificaciones y nuevas áreas de interés que no han podido ser estudiadas con la profundidad requerida por alejarse de los objetivos propuestos o por limitaciones de tiempo. Algunas de estas líneas han sido o están siendo abordadas coincidiendo en el tiempo con la finalización de esta tesis. A continuación describimos algunas líneas que pueden servir para extender el presente trabajo.

- Los modelos utilizados caracterizan de forma independiente la señal ECG registrada en cada derivación. Sin embargo, dado que las señales registradas en el ECG recogen distintas perspectivas de un mismo fenómeno, la extensión natural de este trabajo consiste en modelar conjuntamente la señal en los distintos canales, obteniendo de este modo métodos multiderivacionales de análisis de AOT. El estudio de la distribución espacial del fenómeno llevado a cabo en el Capítulo 6 junto con la metodología de detección multicanal propuesta en (Olmos *et al.* 2002) podrían constituir el punto de partida.
- La duración de la ventana de análisis es un parámetro de diseño crítico. Las prestaciones óptimas se alcanzan cuando la duración de la ventana está adaptada a la duración del episodio a detectar. Dado que esta duración es un parámetro desconocido, puede incluirse en el modelo como un grado de libertad adicional. Los métodos resultantes están basados en bancos de M-filtros a distinta escala.
- La señal alternante se ha modelado como perteneciente a un subespacio. Los modelos lineales ofrecen la posibilidad de introducir información a priori sobre la forma de onda de la alternancia. En esta tesis únicamente se ha introducido la limitación espectral de la alternancia, utilizando subespacios de señal paso-bajo. Utilizando una base de datos de señales alternantes como conjunto de entrenamiento (por ejemplo, las señales estimadas en el estudio del Capítulo 6), puede buscarse un modelo lineal óptimo de dimensión reducida (por ejemplo, la base de Karhunen-Loève) y utilizar los métodos adaptados al subespacio resultante.
- La isquemia de miocardio se manifiesta mediante distintos cambios en el ECG de superficie (desviación de ST, variaciones morfológicas, variaciones las componentes

del ECG de alta frecuencia). El estudio conjunto de estos cambios durante la PTCA puede arrojar luz sobre los mecanismos electrofisiológicos implicados. En (Martínez *et al.* 2004b) pueden encontrarse algunos resultados preliminares no incluidos en esta tesis, donde se estudian conjuntamente las características espacio-temporales de la AOT y la desviación del segmento ST, así como la correlación entre las magnitudes de ambos fenómenos.

- Como parte de los estudios preliminares de esta tesis, se analizó con el método de la demodulación compleja la base de datos *European ST-T Database* (Taddei *et al.* 1989), formada por fragmentos de registros ECG ambulatorios con anotaciones de los episodios isquémicos (Martínez *et al.* 2000b). Recientemente ha sido publicada la base de datos *Long Term ST Database* formada por registros Holter de 24 horas con anotaciones de isquemia (Jager *et al.* 2003). Esta base de datos puede ser un banco de pruebas muy interesante para caracterizar la AOT en isquemia ambulatoria utilizando los métodos robustos derivados en esta tesis.
- Para algunos de los pacientes de la base de datos de STAFF-III se han tomado imágenes de escintigrafía de miocardio antes y durante la oclusión (inyectando al paciente 99mTc-sestamibi). A partir de ellas es posible construir un mapa de perfusión y cuantificar la severidad y extensión de la isquemia (Persson *et al.* 2002). Utilizando estos datos puede correlacionarse la presencia y amplitud de alternancia con la severidad y/o extensión de la isquemia, así como realizar un estudio de la distribución espacial teniendo en cuenta el mapa de hipoperfusión de cada paciente, solventando así las limitaciones debidas a la variabilidad anatómica entre pacientes.
- Una línea de aplicación de la tesis consiste en aplicar los algoritmos propuestos para medir alternancias como índice de riesgo de muerte súbita en registros ambulatorios (Holter de 24 horas). Para ello, estamos participando en el proyecto multicéntrico MUSIC (Muerte súbita en insuficiencia cardiaca), dentro de la Red de Investigación del FIS “Características epidemiológicas, fisiopatológicas, clínicas y anatopatológicas de la muerte súbita en España” (FIS G03/78). El proyecto involucra alrededor de 1000 pacientes, con seguimiento de su evolución.
- Para conocer la viabilidad del análisis de AOT en registros ambulatorios como predictor de riesgo, es interesante comparar los resultados de AOT ambulatoria con los obtenidos mediante el procedimiento de prueba de esfuerzo. Esta línea está actualmente activa, en su fase de adquisición de datos, como parte del proyecto FIS PI04/0689 “Validación del análisis de la alternancia de la onda T mediante registro de Holter”, en colaboración con el Servicio de Cardiología del Hospital Universitario de Valme (Sevilla).

Nomenclatura.

Símbolos.

$*$	convolución
$\hat{\cdot}$	estimador
$\hat{\wedge}$	estimador de máxima verosimilitud (EMV)
\sim	denota <i>está distribuido según</i>
$\stackrel{a}{\sim}$	denota <i>está distribuido asintóticamente según</i>
$x \rightarrow K$	x tiende a K
\otimes	producto de Kronecker
$\arg \max_{\theta} f(\theta)$	el valor de θ que maximiza $f(\theta)$
$\arg \min_{\theta} f(\theta)$	el valor de θ que minimiza $f(\theta)$

Notación vectorial y matricial.

x	variable escalar
\mathbf{x}	vector columna
\mathbf{x}^T	vector fila, transpuesta de un vector columna
\mathbf{x}'	vector blanqueado
$x[n]$	elemento n -ésimo del vector \mathbf{x}
$\ \mathbf{x}\ _{\alpha}$	norma α de un vector
$\ \mathbf{x}\ _{\mathbf{W}}$	norma cuadrática inducida por el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}}$
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	producto escalar de \mathbf{x} e \mathbf{y}
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{W}}$	producto escalar de \mathbf{x} e \mathbf{y} ponderado por \mathbf{W}
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$	gradiente vectorial con respecto a \mathbf{x}
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T}$	hessiano con respecto a \mathbf{x}
\mathbf{A}	matriz
\mathbf{A}^T	matriz transpuesta

\mathbf{A}^{-1}	matriz inversa
$[\mathbf{A}]_{ij}$	elemento i, j de la matriz \mathbf{A}
$\langle \mathbf{A} \rangle$	subespacio engendrado por los vectores columna de \mathbf{A}
$tr(\mathbf{A})$	traza de la matriz \mathbf{A}
$\det(\mathbf{A})$	determinante de la matriz \mathbf{A}
$\text{vec}(\mathbf{A})$	vector $NM \times 1$ obtenido apilando las columnas de la matriz $N \times M$ \mathbf{A}
$\mathbf{A} \geq 0$	la matriz \mathbf{A} es semidefinida positiva
$\mathbf{A} > 0$	la matriz \mathbf{A} es definida positiva
$\text{diag}(d_0 \dots d_{N-1})$	matriz diagonal $N \times N$ con los valores d_0, \dots, d_{N-1} en su diagonal principal
$\mathbf{0}_{N \times M}$	matriz (o vector, en su caso) de ceros de dimensiones $(N \times M)$
\mathbb{I}_N	matriz identidad $N \times N$

Notación estadística.

$E(x)$	esperanza de la variable aleatoria x
$\text{var}(x)$	varianza de la variable aleatoria x
$\text{cov}(x, y)$	covarianza de las variables aleatorias x e y
\mathbf{C}_x	matriz de covarianzas de \mathbf{x}
χ_n^2	distribución ji-cuadrado central con n grados de libertad
$\chi_n'^2(\lambda)$	distribución ji-cuadrado no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad λ
$F_{n,m}$	distribución F con n grados de libertad en el numerador y m grados de libertad en el denominador
$F'_{n,m}(\lambda)$	distribución F no central, con n grados de libertad en el numerador, m grados de libertad en el denominador y parámetro de no centralidad λ
$\chi_n'^2(\lambda)$	distribución ji-cuadrado no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad λ
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	distribución gaussiana (normal) de media μ y varianza σ^2
$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$	distribución gaussiana (normal) multivariante de media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianzas \mathbf{C}
$\mathcal{GG}(\mu, \sigma, \alpha)$	distribución gaussiana generalizada de media μ , desviación estándar σ y parámetro de forma α
$\mathcal{L}(\mu, \sigma)$	distribución laplaciana de media μ y desviación estándar σ
$\mathcal{U}(a, b)$	distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$
$Q_X(x)$	probabilidad de que una variable aleatoria distribuida según $X \in (\chi_n^2, \chi_n'^2(\lambda), F_{n,m}, F'_{n,m}(\lambda) \dots)$ exceda el valor de x

$Q(x)$	probabilidad de que una variable aleatoria gaussiana estandarizada $\mathcal{N}(0, 1)$ exceda el valor de x
$Pr\{ \}$	probabilidad
$p(x)$	función de densidad de probabilidad de x
$p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$	función de densidad de probabilidad de \mathbf{x} en función del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$
$p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}, \mathcal{H}_i)$	función de densidad de probabilidad de \mathbf{x} en función del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$ cuando la hipótesis \mathcal{H}_i es cierta
\mathcal{H}_0	hipótesis nula (en problemas de detección: <i>no está presente la señal</i>)
\mathcal{H}_1	hipótesis alternativa (en problemas de detección: <i>está presente la señal</i>)
P_D	probabilidad de detección
P_{FA}	probabilidad de falsa alarma

Notación de variables, parámetros y funciones.

α	parámetro de forma de las distribuciones gaussianas generalizadas. parámetro de correlación de un proceso AR(1)
β	variable utilizada en la definición de la distribución gaussiana generalizada (es función de α)
γ	umbral de detección
$\delta[n]$	secuencia delta de Kronecker (impulso discreto)
δ_{ij}	delta de Kronecker
λ	parámetro de no centralidad
π	valor propio
η	relación señal a ruido (RSR)
ν	relación señal a ruido de la estimación
$\boldsymbol{\theta}$	vector de parámetros desconocidos
$\boldsymbol{\theta}_s$	vector de parámetros desconocidos de la señal
$\boldsymbol{\theta}_m$	vector de parámetros molestos
ε	error de estimación
μ	media
σ	desviación estándar
σ^2	varianza
$\sigma_{\varepsilon(n)}^2$	varianza del error de estimación en la muestra n -ésima
σ_{ε}^2	varianza media del error de estimación en todo el complejo ST-T
κ	coeficiente de curtosis o apuntamiento (curtosis de Fisher o exceso de curtosis)
κ_P	curtosis de Pearson

Δx_i	diferencia $x_i - x_{i-1}$
$\Gamma(x)$	función gamma $\Gamma(\mathbf{x}) = \int_0^\infty u^{x-1} \exp(-u) du$
\mathbf{a}	vector de AOT (forma de onda alternante)
$a[n]$	muestra n -ésima de la forma de onda alternante
e_i	evolución de la alternancia en la ventana de análisis
f	frecuencia discreta
j	$\sqrt{-1}$.
$l_G(\mathbf{X})$	estadístico equivalente al cociente de verosimilitudes generalizado
$sgn(x)$	función signo
$\text{sgn}(\mathbf{x})$	función signo aplicada elemento a elemento al vector \mathbf{x}
$\hat{v}_i[p]$	amplitud de alternancia estimada en la serie latido a latido del coeficiente p -ésimo
\mathbf{w}_i	vector de ruido correspondiente al latido i -ésimo
$w_i[n]$	muestra de ruido n -ésima del complejo ST-T i -ésimo
\mathbf{x}_i	complejo ST-T i -ésimo
$x_i[n]$	muestra n -ésima del complejo ST-T i -ésimo
\mathbf{x}_i^P	onda P i -ésima
\mathbf{y}_i	coeficientes transformados del complejo ST-T i -ésimo
$y_i[p]$	coeficiente p -ésimo del complejo ST-T i -ésimo \mathbf{X} matriz de complejos ST-T
$z_l[p]$	estadístico de detección correspondiente a la serie latido a latido del coeficiente p -ésimo en la ventana de análisis que finaliza en el latido l -ésimo
\mathcal{E}	energía de la señal alternante
\mathcal{E}'	energía de la señal alternante blanqueada
$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$	matriz de información de Fisher del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$
$L_G(\mathbf{X})$	cociente de verosimilitudes generalizado (CVG)
L	duración de la ventana de análisis (en latidos)
L_{ef}	duración efectiva de la ventana de análisis (en latidos)
M	número de latidos del registro a analizar
M_k	momento centrado de orden k
M'_k	momento centrado absoluto de orden k
N	número de muestras del complejo ST-T
N_P	número de muestras de la onda P
P	número de grados de libertad del modelo de señal. Número de coeficientes transformados
\mathcal{P}_S	matriz de proyección en el subespacio S
$\mathcal{P}_{S, \mathbf{c}_w}$	matriz de proyección oblicua en el subespacio S

T	matriz de observación del modelo lineal
$T(\mathbf{X})$	estadístico de detección
$T_{NP}(\mathbf{X})$	estadístico del detector de Neyman-Pearson
$T_R(\mathbf{X})$	estadístico del test de Rao
$T_W(\mathbf{X})$	estadístico de Wald
\hat{V}_l	amplitud de alternancia estimada globalmente
$X_w[p, l]$	Transformada de Fourier localizada evaluada en $f = 0,5 \text{ cpl}$ de la serie $\{x_i[p]\}, i = l - L + 1 \dots l$, utilizando la ventana de análisis w
X	matriz de complejos ST-T
\mathbf{X}_l	matriz de complejos ST-T que finaliza en el latido l -ésimo
\mathbf{X}^P	matriz de ondas P
\mathbf{X}^G	matriz de ondas P y complejos ST-T
Y	matriz de coeficientes transformados de los complejos ST-T
Z_l	estadístico de detección global en la ventana de análisis que finaliza en el latido l -ésimo

Abreviaturas y acrónimos.

<i>cfr.</i>	compárese con (confer)
cpl	ciclos por latido
<i>em</i>	movimiento de electrodos (electrode motion)
<i>ma</i>	actividad muscular (muscular activity)
<i>vid.</i>	véase (vide)
ACI	índice de correlación de alternancia (alternans correlation index)
AOT	alternancia de onda T
AR	proceso autorregresivo
CFAR	tasa de falsa alarma constante (constant false alarm rate)
CV	cociente de verosimilitudes
CVG	cociente de verosimilitudes generalizado
ECG	electrocardiograma
EEF	estudio electrofisiológico
EMG	electromiograma
DAI	desfibrilador automático implantable
DC	componente continua (direct current)
EIMV	estimador insesgado de mínima varianza
EMC	estimador de mínimos cuadrados
EMCG	estimador de mínimos cuadrados generalizados

EMN ℓ_α	estimador de mínima norma ℓ_α
EMV	estimador de máxima verosimilitud
FDP	función de densidad de probabilidad
FLVTP	filtro lineal variante en el tiempo periódico
KL	Karhunen Loève (transformada)
LAD	arteria coronaria anterior izquierda descendente (Left Anterior Descendant)
LCX	arteria coronaria circunfleja izquierda (Left Circunflex)
MC	método de la correlación
MDC	método de la demodulación compleja
MDC-KL	método de la demodulación compleja aplicado sobre las series de KL
ME	método espectral
ME-E	método espectral aplicado sobre las series de energía
ME-KL	método espectral aplicado sobre las series de KL
MFC	método del filtrado de Capon
MMM	método de la media móvil modificada
MMP	método de los mapas de Poincaré
MTE	método de los tests estadísticos
MTP	método de la transformada de periodicidad
MLCA	tronco comun de la arteria coronaria izquierda (Main Left Coronary Artery)
MSC	muerte súbita cardíaca
RCA	arteria coronaria derecha (Right Coronary Artery)
RMS	valor eficaz, raíz cuadrática media (root mean square)
ROC	característica de operación del receptor (<i>receiver operating characteristic</i>)
TWAR	ratio de alternancias de onda T (T wave alternans ratio)
TCVG	test del cociente de verosimilitudes generalizado
TDC	transformada discreta coseno
TDF	transformada discreta de Fourier
TFL	transformada de Fourier localizada
UMP	detector uniformemente más potente
RSR	relación señal a ruido
RER	relación de energía de señal a ruido

Bibliografía

- K. Adachi, Y. Ohnisch, T. Shima, K. Yamashiro, A. Takei, N. Tamura y M. Yokoyama** (1999). Determinant of microvolt-level T-wave alternans in patients with dilated cardiomyopathy. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 34(2):374–80.
- D. R. Adam, S. Akselrod y R. J. Cohen** (1981). Estimation of ventricular vulnerability to fibrillation through T-wave time series analysis. En *Computers in Cardiology*, tomo 8, 307–310. IEEE.
- D. R. Adam, A. O. Powell, H. Gordon y R. J. Cohen** (1982). Ventricular fibrillation and fluctuations in the magnitude of the repolarization vector. En *Computers in Cardiology*, tomo 9, 241–244. IEEE.
- D. R. Adam, J. M. Smith, S. Akselrod, S. Nyberg, A. O. Powell y R. J. Cohen** (1984). Fluctuations in T-wave morphology and susceptibility to ventricular fibrillation. *J. Electrocardiol.*, 17:209–18.
- American Heart Association** (2001). *2002 heart and stroke statistical update*. American Heart Association, Dallas.
- W. Anderson, N. Wagner y K. Lee** (1988). Evaluation of a QRS scoring system for estimating myocardial infarct size. VI: Identification of screening criteria for non-acute myocardial infarcts. *Am. J. Cardiol.*, 61(10):729–733.
- A. A. Armoundas, M. Osaka, T. Mela, D. S. Rosenbaum, J. N. Ruskin, H. Garan y R. J. Cohen** (1998a). T-wave alternans and dispersion of the QT interval as risk stratification markers in patients susceptible to sustained ventricular arrhythmias. *Am. J. Cardiol.*, 82:1127–1129.
- A. A. Armoundas, D. S. Rosenbaum, J. N. Ruskin, H. Garan y R. J. Cohen** (1998b). Prognostic significance of electrical alternans versus signal averaged electrocardiography in predicting the outcome of electrophysiological testing and arrhythmia-free survival. *Heart*, 80(3):251–256.
- A. Bayés** (1992). *Tratado de Electrocardiografía Clínica*. Ed. Científico-Técnica, Barcelona, Spain.
- A. Bayés y J. Guindo** (1989). *Sudden Cardiac Death*. MCR, Spain.

- E. Berbari y P. Lander** (1992). The state of the art in high resolution electrocardiography. En *Proc. 14th Ann. Int. Conf. IEEE Eng. Med. Biol. Soc.*, 488–492. IEEE-EMBS.
- R. M. Berne y M. Levy** (1992). *Cardiovascular Physiology*. Mosby-Year Book, St Louis.
- Y. Birnbaum y S. Sclarovsky** (1997). The initial electrocardiographic pattern in acute myocardial infarction: Correlation with the underlying coronary anatomy and prognosis. *Ann. Noninvasive Electrocardiol.*, 2(3):279–91.
- L. Burattini** (1998). *Electrocardiographic T wave alternans detection and significance*. Tesis Doctoral, University of Rochester, Rochester NY.
- L. Burattini, W. Zareba, J. P. Couderc, J. A. Konecki y A. J. Moss** (1998a). Optimizing ECG signal sampling frequency for T-wave alternans detection. En *Computers in Cardiology*, tomo 25, 721–724. IEEE.
- L. Burattini, W. Zareba, J. P. Couderc, E. L. Titlebaum y A. J. Moss** (1997). Computer detection of non-stationary T-wave alternans using a new correlative method. En *Computers in Cardiology*, tomo 24, 657–660. IEEE.
- L. Burattini, W. Zareba y A. J. Moss** (1999). Correlation method for detection of transient T-wave alternans in digital Holter ECG recordings. *Ann. Electrocardiol.*, 4(4):416–426.
- L. Burattini, W. Zareba, E. J. Rashba, J. P. Couderc, J. Konecki y A. J. Moss** (1998b). ECG features of microvolt T-wave alternans in coronary artery disease and Long QT Syndrome patients. *J. Electrocardiol.*, 31(Supplement):114–120.
- E. B. Caref, V. Stoyanovsky, R. J. Cohen y N. El-Sherif** (1997). Incidence of T-wave alternans in normal subjects, and effect of heart rate on onset. *Circulation*, 96(8):3256.
- D. L. Carson, R. Cardinal, P. Savard y M. Vermeulen** (1986). Characterisation of unipolar waveform alternation in acutely ischaemic porcine myocardium. *Cardiovasc. Res.*, 20(7):521–527.
- J. Cinca, M. J. Janse, H. Moréna, J. Candell, V. Valle y D. Durrer** (1980). Mechanism and time course of the early electrical changes during acute coronary artery occlusion. An attempt to correlate the early ECG changes in man to the cellular electrophysiology in the pig. *Chest*, 77(4):499–505.
- M. Coch, S. Weber, L. Buck y B. Waldecker** (1998). Assessment of T-wave alternation using atropine. *Circulation*, 98(17 (Suppl.)):I-442.
- A. Cohen** (1986). *Biomedical Signal Processing*, tomo I and II. CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida.

- L. Cromwell, F. J. Weibel y E. A. Pfeiffer** (1980). *Biomedical Instrumentation and Measurements*. Prentice Hall, New Jersey.
- S. G. Dilly y M. J. Lab** (1988). Electrophysiological alternans and restitution during acute regional ischaemia in myocardium of anaesthetized pig. *J. Physiol.*, 402:315–333.
- G. Dower, H. Machado y J. Osborne** (1980). On deriving the electrocardiogram from vectorcardiographic leads. *Clin. Cardiol.*, 3:87–95.
- L. Edenbrandt y O. Pahlm** (1988). Vectorcardiogram synthesized from a 12-lead ECG: superiority of the inverse Dower matrix. *J. Electrocardiol.*, 21:361–367.
- N. A. Estes III, G. Michaud, D. P. Zipes, N. El-Sherif, F. J. Venditti, D. S. Rosenbaum et al.** (1997). Electrical alternans during rest and exercise as predictors of vulnerability to ventricular arrhythmias. *American Journal of Cardiology*, 80(10):1314–1318.
- D. E. Euler** (1999). Cardiac alternans: mechanisms and pathophysiological significance. *Cardiovasc. Res.*, 42:583–590.
- M. Frisch y H. Messer** (1993). Transient signal detection using prior information in the likelihood ratio test. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41(6):2177–2192.
- M. Frisch y H. Messer** (1994). Detection of a known transient signal of unknown scaling and arrival time. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(7):1859–1863.
- J. García, J. A. Serrano, S. del Castillo, J. L. Cantalapiedra, J. Villacastín, J. Almendral et al.** (2000a). Predictores de muerte súbita en la enfermedad coronaria. *Rev. Esp. Cardiol.*, 53(3):440–462.
- J. García, G. Wagner, L. Sörnmo, P. Lander y P. Laguna** (1999). Identification of the occluded artery in patients with myocardial ischemia induced by prolonged PTCA using traditional vs. transformed ECG-based indexes. *Comput. Biomed. Res.*, 32(5):470–482.
- J. García, G. Wagner, L. Sörnmo, S. Olmos, P. Lander y P. Laguna** (2000b). Temporal evolution of traditional vs. transformed ECG-based indexes in patients with induced myocardial ischemia. *J. Electrocardiol.*, 33(1):37–47.
- I. C. Gilchrist** (1991). Prevalence and significance of st-segment alternans during coronary angioplasty. *Am. J. Cardiol.*, 68(15):1534–1535.
- M. R. Gold, D. M. Bloomfield, K. Anderson, N. El Sherif, D. Wilber, E. Kaufman, M. Greenberg y D. Rosenbaum** (2000). A comparison of T-wave alternans, signal averaged electrocardiography and programmed ventricular stimulation for arrhythmia risk stratification. *J Am Coll Cardiol.*, 36(7):2247–2253.

- J. G. Gonzalez y G. R. Arce** (2002). Statistically-efficient filtering in impulsive environments weighted myriad filters. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2002(1):4–20.
- W. W. Hamburger, L. N. Katz y O. Saphir** (1936). Electrical alternans: a clinical study with a report of two necropsies. *JAMA*, 106:902–905.
- H. Hashimoto, K. Suzuki, S. Miyake y M. Nakashima** (1983). Effects of calcium antagonists on the electrical alternans of the ST segment and on associated mechanical alternans during acute coronary occlusion in dogs. *Circulation*, 68(3):667–672.
- H. K. Hellerstein y J. M. Liebow** (1950). Electrical alternation in experimental coronary artery occlusion. *Am J. Physiol*, 160:366–374.
- H. E. Hering** (1909). Experimentelle studien an Säugetieren über das Elektrocardiogram. *Zeitschrift für experimentelle Pathologie und Therapie*, 7:363–378.
- Y. Hirayama, H. Saitoh, H. Atarashi y H. Hayakawa** (1993). Electrical and mechanical alternans in canine myocardium invivo. Dependence on intracellular calcium cycling. *Circulation*, 88:2894–2902.
- S. H. Hohnloser, T. Klingenheben, L. Yi-Gang, M. Zabel, J. Peetermans y R. J. Cohen** (1998). T-wave alternans as a predictor of recurrent ventricular tachyarrhythmias in ICD recipients: Prospective comparison with conventional risk markers. *J. Cardiovasc. Electrophysiol.*, 9:1258–1268.
- P. J. Huber** (1981). *Robust Statistics*. Wiley, New York.
- T. Ikeda, K. Kumagai, M. Takami, N. Tezuka, T. Nakae, T. Sakata et al.** (2000a). Lack of an association between T-wave alternans and ST-segment depression during exercise-induced ambulatory ischemia. *J. Electrocardiol.*, 33(3):261–267.
- T. Ikeda, H. Saito, K. Tanno, H. Shimizu, J. Watanabe, Y. Ohnishi, Y. Kasamaki y Y. Ozawa** (2002). T-wave alternans as a predictor for sudden cardiac death after myocardial infarction. *Am. J. Cardiol.*, 89:79–82.
- T. Ikeda, T. Sakata, M. Takami, N. Kondo, N. Tezuka, T. Nakae et al.** (2000b). Combined assesmet of the T-wave alternans and late potentials used to predict arrhythmic events after myocardial infarction. A prospective study. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 35(3):722–730.
- Instituto Nacional de Estadística** (2005). *Defunciones según la causa de muerte. Año 2002*. INE. CD-ROM (datos disponibles en <http://www.ine.es/inebase>).
- F. Jager, A. Taddei, G. B. Moody, M. Emdin, G. Antolic, R. Dorn et al.** (2003). Long-term ST database: a reference for the development and evaluation of automated ischaemia detectors and for the study of the dynamics of myocardial ischaemia. *Med. Biol. Eng. Comput.*, 41(2):172–183.

- M. Joyal, R. L. Feldman y C. J. Pepine** (1984). ST-segment alternans during percutaneous transluminal coronary angioplasty. *Am. J. Cardiol.*, 54:915–916.
- W. Kaiser, M. Findeis y B. Young** (2004). Improving T-wave alternans measurement quality by reducing noise and artifacts. En *Proceedings of Computers in Cardiology 2004*, tomo 31, 445–448. IEEE Press, Piscataway NJ.
- H. H. Kalter y M. L. Schwartz** (1948). Electrical alternans. *N. Y. State J. Med.*, 1:1164–1166.
- K. Karhunen** (1947). Über linearen methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae Series A*, 1(2). English translation by I. Selin, On linear methods in probability theory, The Rand Corp., Doc. T-131, Aug, 1960.
- E. S. Kaufman, J. A. Mackall, B. Julka, C. Drabek y D. S. Rosenbaum** (2000). Influence of heart rate and sympathetic stimulation on arrhythmogenic T wave alternans. *Am J. Physiol. Heart Circ. Physiol.*, 279:H1248–H1255.
- N. G. Kavesh, S. R. Shorofsky, S. E. Sarang y M. R. Gold** (1998). Effect of heart rate on T wave alternans. *J. Cardiovasc. Electrophysiol.*, 9:703–708.
- S. M. Kay** (1993). *Fundamentals of statistical signal processing*, tomo I-Estimation theory. Prentice-Hall.
- S. M. Kay** (1998). *Fundamentals of statistical signal processing*, tomo II-Detection theory. Prentice-Hall.
- S. M. Kay y D. Sengupta** (1993). Detection in incompletely characterized colored non-Gaussian noise via parametric modeling. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41(10):3066–3070.
- B. Kedem** (1986). Spectral analysis and discrimination by zero-crossings. *Proc. IEEE*, 74(11):1477–1493.
- E. Kelly** (1986). An adaptive detection algorithm. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 22(1):115–127.
- B.-U. Köhler, C. Hennig y R. Orglmeister** (2002). The principles of software QRS detection. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 21(1):42–57.
- M. J. Kleinfeld y J. J. Rozanski** (1977). Alternans of the ST segment in Prinzmetal's angina. *Circulation*, 55(4):574–577.
- T. Klingenheben, M. Zabel, R. B. D'Agostino, R. J. Cohen y S. H. Hohnloser** (2000). Predictive value of T-wave alternans for arrhythmic events in patients with congestive heart failure. *Lancet*, 356:651–652.

- T. Konta, K. Ikeda, K. Nakamura, K. Honma, I. Kubota y S. Yasui** (1990). Significance of discordant ST alternans in ventricular fibrillation. *Circulation*, 82:2185–2189.
- W. J. Kop, D. S. Krantz, B. D. Nearing, J. S. Gottdiener, J. F. Quigley, M. O'Callahan et al.** (2004). Effects of acute mental stress and exercise on T-wave alternans in patients with implantable cardioverter defibrillators and controls. *Circulation*, 109:1864–1869.
- S. Kraut, L. Scharf y L. McWhorter** (2001). Adaptive subspace detectors. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 49(1):1–15.
- T. Kwan, A. Feit, M. Alam, E. Afflu y L. T. Clark** (1999). ST-T alternans and myocardial ischemia. *Angiology*, 50(3):217–222.
- T. Kwan, A. Feit, H. Chadow, F. Chio, M. S. Huber, M. Chebacio, S. Breitbart y R. A. Stein** (1995). Intracoronary ST-T alternans during coronary balloon angioplasty. *Cathet. Cardiovasc. Diagn.*, 35:121–126.
- P. Laguna, M. Ruiz, G. B. Moody y R. G. Mark** (1996). Repolarization alternans detection using the KL transform and the beatquency spectrum. En *Proceedings of Computers in Cardiology 1996*, tomo 23, 673–676.
- H. C. Lee, R. Mohabir, N. Smith, M. R. Franz y W. T. Clusin** (1988). Effect of ischemia on calcium-dependent fluorescence transients in rabbit hearts containing indo 1. correlation with monophasic action potentials and contraction. *Circulation*, 78(4):1047–1059.
- Y. H. Lee y S. A. Kassam** (1985). Generalized median filtering and related nonlinear filtering techniques. *IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Process.*, 33(3):672–683.
- T. Lewis** (1910). Notes upon alternation of the heart. *Quart. J. Med.*, 4:141–144.
- M. J. Lisenby y P. C. Richardson** (1977). The beatquency domain: an unusual application of the fast Fourier transform. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 24:405–408.
- E. Locati, L. Burattini y W. Zareba** (1998). Identification of T-wave alternans: Review of methods and clinical perspectives. En **E. Adornato** (ed.), *Rhythm control: from cardiac evaluation to treatment*, 173–184. Edizioni Luigi Pozzi, Roma.
- M. Loeve** (1945). Sur les fonctions aléatoires stationnaires de second order. *Rev. Sci.*, 83:297–310.
- J. Marrugat, R. Elosua y M. Gil** (1999). Epidemiología de la muerte súbita cardíaca en España. *Rev. Esp. Cardiol.*, 52(9):717–725.
- J. P. Martínez, R. Almeida, S. Olmos, A. P. Rocha y P. Laguna** (2004a). A wavelet-based ECG delineator: Evaluation on standard databases. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 51(4):570–581.

- J. P. Martínez y S. Olmos** (2002). A robust T-wave alternans detector based on the GLRT for Laplacian noise distribution. En *Proceedings of Computers in Cardiology 2002*, 677–680. IEEE press, Piscataway NJ.
- J. P. Martínez y S. Olmos** (2003). Detection of T wave alternans in non-stationary noise: A GLRT approach. En *Proceedings of Computers in Cardiology 2003*, 161–164. IEEE press, Piscataway NJ.
- J. P. Martínez y S. Olmos** (2005). Methodological principles of T wave alternans analysis. A unified framework. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 52(4):599–613.
- J. P. Martínez, S. Olmos y P. Laguna** (2000a). Simulation study and performance evaluation of T-wave alternans detectors. En *Proc. 22nd Ann. Int. Conf. IEEE Eng. Med. Biol. Soc. (CD-ROM)*. IEEE.
- J. P. Martínez, S. Olmos y P. Laguna** (2000b). T wave alternans detection: a simulation study and analysis of the European ST-T database. En *Computers in Cardiology*, tomo 27, 155–158. IEEE.
- J. P. Martínez, S. Olmos y P. Laguna** (2002). T wave alternans and acute ischemia in patients undergoing angioplasty. En *Proceedings of Computers in Cardiology 2002*, tomo 29, 569–572. IEEE Press, Piscataway NJ.
- J. P. Martínez, S. Olmos, G. Wagner y P. Laguna** (2004b). Caracterización espaciotemporal del desplazamiento de ST y las alternancias de onda T en el ECG durante isquemia aguda de miocardio. En *XXII Congreso Anual de la Sociedad Española de Ingeniería Biomédica*, 203–206.
- J. P. Martínez, S. Olmos, G. Wagner y P. Laguna** (2005). Characterization of repolarization alternans during ischemia: time-course and spatial analysis. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, En revisión.
- G. B. Moody y R. G. Mark** (1990). The MIT-BIH arrhythmia database on CD-ROM and software for use with it. En *Computers in Cardiology*, 185–188. IEEE Computer Society Press.
- G. B. Moody, W. Muldrow y R. G. Mark** (1984). A noise stress test for arrhythmia detectors. En *Computers in Cardiology*, 381–384. IEEE Computer Society Press.
- T. Moon y W. Stirling** (2000). *Mathematical methods and algorithms for signal processing*. Prentice Hall, New Jersey.
- R. Mrowka, H. Theres, A. Patzak y G. Baumann** (1998). Alternans-like phenomena due to filtering of electrocardiographic data. En *Computers in Cardiology 1998*, 725–727. IEEE Computer Society Press.
- A. I. Mushlin, W. J. Hall, J. Zwanziger, E. Gajary, M. Andrews, R. Marron, K. H. Zou y A. J. Moss** (1998). Cost-effectiveness of automatic implantable cardiac defibrillators: results from MADIT. *Circulation*, 97:2129–2135.

- S. M. Narayan, B. D. Lindsay y J. M. Smith** (1999). Demonstration of the proarrhythmic preconditioning of single premature extrastimuli by use of the magnitude, phase and distribution of repolarization alternans. *Circulation*, 100:1887–1893.
- S. M. Narayan y J. M. Smith** (1999a). Differing rate dependence and temporal distribution of repolarization alternans in patients with and without ventricular tachycardia. *J. Cardiovasc. Electrophysiol.*, 10(1):61–71.
- S. M. Narayan y J. M. Smith** (1999b). Spectral analysis of periodic fluctuations in electrocardiographic repolarization. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 46(2):203–212.
- S. M. Narayan y J. M. Smith** (2000). Exploiting rate-related hysteresis in repolarization alternans to improve risk stratification for ventricular tachycardia. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 35(6):1485–1492.
- F. Navarro-López, J. Cinca, G. Sanz, A. Periz, J. Magriña y A. Betriu** (1978). Isolated T wave alternans. *Am. Heart J.*, 95(3):369–374.
- B. D. Nearing, A. H. Huang y R. L. Verrier** (1991). Dynamic tracking of cardiac vulnerability by complex demodulation of the T wave. *Science*, 252(5004):437–440.
- B. D. Nearing, S. N. Oesterle y R. L. Verrier** (1994). Quantification of ischaemia induced vulnerability by precordial T wave alternans analysis in dog and human. *Cardiovasc. Res.*, 28:1440–1449.
- B. D. Nearing, P. H. Stone y R. L. Verrier** (1996). Frequency-response characteristics required for detection of T-wave alternans during ambulatory ECG monitoring. *Ann. Noninvasive Electrocardiol.*, 1(2 Pt. 1):103–112.
- B. D. Nearing y R. L. Verrier** (1993). Personal computer system for tracking cardiac vulnerability by complex demodulation of the T wave. *J. Appl. Physiol.*, 74(5):2606–2612.
- B. D. Nearing y R. L. Verrier** (2002). Modified moving average analysis of T-wave alternans to predict ventricular fibrillation with high accuracy. *J. Appl. Physiol.*, 92(2):541–549.
- B. D. Nearing y R. L. Verrier** (2003a). Progressive increases in complexity of T-wave oscillations herald ischemia-induced ventricular fibrillation. *Circ. Res.*, 91:727–732.
- B. D. Nearing y R. L. Verrier** (2003b). Tracking cardiac electrical instability by computing interlead heterogeneity of T-wave morphology. *J. Appl. Physiol.*, 95:2265–2272.
- S. Okamoto, M. Inden, T. Konishi y T. Nakano** (1991). ST segment alternans during percutaneous transluminal coronary angioplasty—a case report. *Angiology*, 42(1):30–34.

- H. Okino, S. Arima, H. Yamaguchi, S. Nakao y H. Tanaka** (1992). Marked alternans of the elevated ST segment during occlusion of the left anterior descending coronary artery in percutaneous transluminal coronary angioplasty: clinical background and electrocardiographic features. *Int. J. Cardiol.*, 37:23–32.
- S. Olmos, J. Garcia, R. Jané y P. Laguna** (1999a). ECG signal compression plus noise filtering with truncated orthogonal expansions. *Signal Processing*, 79(1):97–115.
- S. Olmos, J. Garcia, R. Jané y P. Laguna** (1999b). Truncated orthogonal expansions of recurrent signals: Equivalence to a linear time-variant periodic filter. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47:3164–3172.
- S. Olmos, J. P. Martínez y L. Sörnmo** (2002). Subspace detectors for multichannel signals. En *Proc. of the 11th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, tomo II, 645–648.
- J. M. Pastore, S. D. Girouard, K. R. Laurita, F. G. Akar y D. S. Rosenbaum** (1999). Mechanism linking T-wave alternans to the genesis of cardiac fibrillation. *Circulation*, 99:1385–1394.
- E. Persson, J. Palmer, J. Pettersson, S. G. Warren, S. Borges-Neto, G. S. Wagner y O. Pahlm** (2002). Quantification of myocardial hypoperfusion with 99mTc-sestamibi in patients undergoing prolonged coronary artery balloon occlusion. *Nuclear Medicine Communications*, 23(3):219–228.
- J. Pettersson, O. Pahlm, E. Carro, L. Edenbrandt, M. Ringborn, L. Sörnmo, S. Warren y G. Wagner** (2000). Changes in high-frequency QRS components are more sensitive than ST-segment deviation for detecting acute coronary artery occlusion. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 36(6):1827–1834.
- Q. Pham, K. J. Quan y D. S. Rosenbaum** (2003). T-wave alternans: marker, mechanism, and methodology for predicting sudden cardiac death. *J. Electrocardiol.*, 36(Supplement):75–81.
- F. Pinciroli y R. Rossi** (1992). Politecnico Cà Granda VCG/ECG Database and Poli-Medlav VCG/Resp Database. CD-ROM.
- S. G. Priori, E. Aliot, C. Blomstrom-Lundqvist, L. Bossaert, G. Breithardt, P. Brugada et al.** (2001). Task Force on sudden cardiac death of the European Society of Cardiology. *Eur. Heart J.*, 22(16):1374–1450.
- Y.-W. Qian, W. T. Clusin, S.-P. Lin, J. Han y R. J. Sung** (2001). Spatial Heterogeneity of calcium transient alternans during the early phase of myocardial ischemia in the blood-perfused rabbit heart. *Circulation*, 104:2082–2087.
- D. S. Rosenbaum, P. Albrecht y R. J. Cohen** (1996). Predicting sudden cardiac death from T wave alternans of the surface electrocardiogram: promise and pitfalls. *J. Cardiovasc. Electrophysiol.*, 7(11):1095–1111.

- D. S. Rosenbaum, X. Fang y J. A. Mackall** (1995). How to detect ECG T-wave alternans in patients at risk for sudden cardiac death. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 25(2 [suppl. 1]):409A. Abstract.
- D. S. Rosenbaum, L. E. Jackson, J. M. Smith, H. Garan, J. N. Ruskin y R. J. Cohen** (1994). Electrical alternans and vulnerability to ventricular arrhythmias. *N. Engl. J. Med.*, 330(4):235–41.
- J. Rozanski y M. Kleinfeld** (1982). Alternans of the ST segment of T wave. a sign of electrical instability in Prinzmetal's angina. *Pacing Clin. Electrophysiol.*, 5(3):359–365.
- J. A. Salerno, M. Previtali, C. Panciroli, C. Klfersy, M. Chimienti, M. Regazzi et al.** (1986). Ventricular arrhythmias during acute myocardial ischaemia in man. the role and significance of R-ST-T alternans and the prevention of ischaemic sudden death by medical treatment. *Eur. Heart J.*, 7(Suppl A):63–75.
- L. Scharf** (1991). *Statistical signal processing: detection, estimation and time series analysis*. Addison-Wesley.
- L. Scharf y B. Friedlander** (1994). Matched subspace detectors. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 42(8):2146–2157.
- P. J. Schwartz y A. Malliani** (1975). Electrical alternation of the T-wave: Clinical and experimental evidence of its relationship with the sympathetic nervous system and with the Long Q-T Syndrome. *Am. Heart J.*, 89(1):45–50.
- R. Selvester, G. Wagner y N. Hindman** (1985). The development and application of the Selvester QRS scoring system for estimating myocardial infarct size. *Arch. Intern. Med.*, 145:1877–1881.
- W. A. Sethares y T. W. Staley** (1999). Periodicity transforms. *IEEE Tran Sig Process*, 47(11):2953–2964.
- D. Shah y K. Subramanyan** (1995). Significance of ST alternans during percutaneous transluminal coronary angioplasty. *Indian Heart J.*, 47(3):248–252.
- D. C. Shah, P. Ramachandran y K. Subramanyan** (1991). ST segment alternans during percutaneous transluminal coronary angioplasty. *Indian Heart J.*, 43(2):121–122.
- W. Shimizu y C. Antzelevitch** (1999). Cellular and ionic basis for T-wave alternans under Long-QT conditions. *Circulation*, 99(11):1499–1507.
- J. M. Smith, E. A. Clancy, C. R. Valeri, J. N. Ruskin y R. J. Cohen** (1988). Electrical alternans and cardiac electrical instability. *Circulation*, 77(1):110–121.
- M. Sochanski, T. Feldman, K. G. Chua, A. Benn y R. Childers** (1992). ST segment alternans during coronary angioplasty. *Cathet. Cardiovasc. Diagn.*, 27(1):45–48.

- L. Sörnmo** (1993). Time-varying digital filtering of ECG baseline wander. *Med. Biol. Eng. Comput.*, 31:503–508.
- T. Srikanth, D. Lin, N. Kanaan y H. Gu** (2002a). Estimation of low level alternans using periodicity transform - Simulation and european ST/T database results. En *Proc. 24th Ann. Int. Conf. IEEE Eng. Med. Biol. Soc.*, 1407–1408. IEEE.
- T. Srikanth, D. Lin, N. Kanaan y H. Gu** (2002b). Presence of T wave alternans in the statistical context - A new approach to low amplitude alternans measurement. En *Computers in Cardiology*, tomo 29, 681–684. IEEE.
- P. Stoica y R. Moses** (1997). *Introduction to spectral analysis*. Prentice-Hall, NJ (USA).
- P. Strumillo y J. Ruta** (2002). Poincaré mapping for detecting abnormal dynamics of cardiac repolarization. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 21(1):62–65.
- B. Surawicz y C. Fisch** (1992). Cardiac alternans: Diverse mechanisms and clinical manifestations. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 20:483–499.
- P. M. Sutton, P. Taggart, M. Lab, M. E. Runnalls, W. O'Brien y T. Treasure** (1991). Alternans of epicardial repolarization as a localized phenomenon in man. *Eur. Heart. J.*, 12(1):70–78.
- A. Taddei, A. Biagini, G. Distanti, C. Marchesi, M. Mazzei, P. Pisani, N. Roggero y C. Zelenberg** (1989). An annotated database aimed at performance evaluation of algorithms for ST-T change analysis. En *Computers in Cardiology*, 117–120. IEEE Computer Society Press.
- M. Takagi y J. Yoshikawa** (2003). T wave alternans and ventricular tachyarrhythmia risk stratification: A review. *Indian Pacing Electrophysiol. J.*, 3(2):67–73.
- N. V. Thakor, J. G. Webster y W. J. Tompkins** (1984). Estimation of QRS complex power spectrum for design of a QRS filter. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 31(11):702–706.
- C. W. Therrien** (1992). *Discrete random signals and statistical signal processing*. Prentice-Hall, New Jersey.
- H. van Trees** (1968). *Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I*. John. Wiley & Sons, New York.
- G. Turitto y N. El-Sherif** (1988). Alternans of the ST segment in variant angina. incidence, time course and relation to ventricular arrhythmias during ambulatory electrocardiographic recording. *Chest*, 93:587–591.
- R. L. Verrier y B. D. Nearing** (1994). Electrophysiologic basis for T wave alternans as an index of vulnerability to ventricular fibrillation. *J. Cardiovasc. Electrophysiol.*, 5:445–461.

- R. L. Verrier, B. D. Nearing, M. T. LaRovere, G. D. Pinna, M. A. Mittelman, J. T. Bigger y P. J. Schwartz** (2003). Ambulatory electrocardiogram-based tracking of T wave alternans in postmyocardial infarction patients to assess risk of cardiac arrest or arrhythmic death. *J. Cardiovasc. Electrophysiol.*, 14(7):705–711.
- R. L. Verrier, B. D. Nearing, G. MacCallum y P. H. Stone** (1996a). T-wave alternans during ambulatory ischemia in patients with stable coronary disease. *Ann. Noninvasive Electrocardiol.*, 1(2 Pt. 1):113–120.
- R. L. Verrier, W. Zareba y B. D. Nearing** (1996b). T-wave alternans monitoring to assess risk for ventricular tachycardia and fibrillation. En **A. J. Moss y S. Stern** (eds.), *Noninvasive Electrocardiology. Clinical Aspects of Holter Monitoring*, capítulo 25, 445–464. W. B. Saunders Company Ltd, London, UK.
- M. V. Walker y D. S. Rosenbaum** (2003). Repolarization alternans: implications for the mechanism and prevention of sudden cardiac death. *Cardiovasc. Res.*, 57:599–614.
- S. Weber, H. Tillmanns y B. Waldecker** (2003). Prevalence of T wave alternans in healthy subjects. *Pacing and Clinical Electrophysiology*, 26(1p1):49–51.
- J. G. Webster** (1988). *Encyclopedia of Medical Devices and Instrumentation*. John Wiley & Sons, New York.
- J. G. Webster** (1992). *Medical Instrumentation. Application and Design*. Houghton Mifflin, Boston.
- L. Yin, R. Yang, M. Gabbouj y Y. Neuvo** (1996). Weighted median filters: A tutorial. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 43:115–127.
- W. Zareba, A. J. Moss, S. Le Cessie y W. Hall** (1994). T wave alternans in idiopathic long QT syndrome. *J. Am. Coll. Cardiol.*, 23(7):1541–1546.
- D. P. Zipes y H. J. J. Wellens** (1998). Sudden cardiac death. *Circulation*, 98(21):2334–2351.

Finis coronat opus.

