

Miguel Samplón Chalmeta

# Nueva metodología de calibración de dispositivos de medida de corriente eléctrica basados en la Ley de Ampere

Departamento  
Ingeniería Eléctrica

Director/es  
Letosa Fleta, Jesús

<http://zaguan.unizar.es/collection/Tesis>





**Universidad**  
Zaragoza

Tesis Doctoral

**NUEVA METODOLOGÍA DE CALIBRACIÓN DE  
DISPOSITIVOS DE MEDIDA DE CORRIENTE  
ELÉCTRICA BASADOS EN LA LEY DE AMPERE**

Autor

**Miguel Samplón Chalmeta**

Director/es

Letosa Fleta, Jesús

**UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA**

Ingeniería Eléctrica

2015



Tesis Doctoral

---

NUEVA METODOLOGÍA DE  
CALIBRACIÓN DE DISPOSITIVOS DE  
MEDIDA DE CORRIENTE ELÉCTRICA  
BASADOS EN LA LEY DE AMPERE

---

D. Miguel Samplón Chalmeta  
Director: Dr. D. Jesús Letosa Fleta

Departamento de Ingeniería Eléctrica



**Universidad**  
Zaragoza



Salvo que se indique lo contrario, este documento está licenciado bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional. Puede ver una copia de esta licencia en <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> o enviar una carta a Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, EE.UU.

## Resumen

En esta tesis se ha estudiado la problemática de calibración de dispositivos de medida de corriente eléctrica basados en la Ley de Ampere (en adelante ALBA), con énfasis en la componente de incertidumbre asociada a la variabilidad geométrica de los conductores sobre los que pueden actuar. En una primera parte se analizan las especificaciones que deben acompañar a estos dispositivos para poder ser calibrados, y se introduce una caracterización de los mismos mediante una función respuesta que permite homogeneizar el tratamiento de la calibración independientemente de que el ALBA se comporte como un transductor o un instrumento de medida.

A continuación, se definen las características de una clase de dispositivos destinados a recrear el efecto de un conductor cualquiera sobre el ALBA mediante un conjunto de circuitos predefinidos excitados con las corrientes adecuadas. Este tipo de dispositivo es el que se utilizará para la calibración. Se establece una metodología de obtención de las corrientes óptimas a aplicar basada en el Análisis Funcional. Asimismo, se lleva a cabo un análisis paramétrico de estos sistemas de calibración en base a diferentes índices de calidad.

Finalmente se establece un método para llevar a cabo la calibración de un ALBA mediante el sistema de calibración, así como el análisis de la incertidumbre del resultado. La información de calibración permite estimar la respuesta del ALBA frente a cualquier posible excitación. En base a ello se indica la posibilidad de construir un mapa de la respuesta del ALBA frente a excitaciones formadas por hilos indefinidos ubicados en diferentes posiciones. Este mapa constituye una representación gráfica de la calidad y rendimiento del ALBA.

Los resultados obtenidos han sido contrastados por vía experimental sobre un prototipo de laboratorio, así como mediante simulaciones numéricas.

## Abstract

In this work the problem of the calibration of electric current measuring devices based on Ampere Law (hereafter denoted as ALBA) is considered. The analysis focuses on the uncertainty component associated to the geometric variability of the circuits where the current can be measured or transduced by an ALBA. In the first part, the minimum set of specifications for these devices to be calibrated are introduced, as well as a response function that enables a uniform treatment irrespective of its operation as transducer or as instrument.

It is defined a class of devices designed to recreate the effect of a circuit on an ALBA. They are composed of a set of predefined circuits excited with a suitable current that are to be used for calibration of an ALBA. Functional Analysis is used for obtaining the optimal excitation currents to be applied. Finally, a parametric analysis of these calibration systems, based on different quality parameters, are done.

It has been established the methodology to perform the calibration of an ALBA using the calibration devices, including the uncertainty analysis of the result. The calibration process provides information enough to estimate the response of an ALBA to any possible circuit. On this framework, it is possible to construct a map of the ALBA response to excitations formed by indefinite straight wires located in different positions. This map is a graphical representation of the quality and performance of ALBA.

The results of this study have been confirmed by experimental work as well as numerical simulations.



# Agradecimientos

Tradicionalmente, la página de agradecimientos es lo último que se escribe. Ahora que estoy en *ese* momento, valorando lo que es y ha sido, reconozco que todo habría resultado mucho más gris si no fuera por las personas que han estado de alguna manera al tanto y con las que he compartido esfuerzos y afanes. Cómo no mencionarlas.

A Cristina.

(Pero las palabras que emplearé para agradeceré no las voy a traicionar aquí; se las diré al oído, porque son sólo de ella y mías.)

Luego, a todos los demás. A Jesús, Antonio y Joaquín. Amigos ante todo y además de colegas. Personas con las que profesionalmente hablo el mismo idioma. Gracias a la insistencia de Antonio, vio la luz la primera publicación a partir de la cual el *karma* de la tesis parece que empezó a darse por aludido. Joaquín se unió para hacer unos pocos comentarios y acabó transmitiendo una visión profunda de buena parte de los aspectos matemáticos y volviendo del revés la modelización de los instrumentos de medida; además es el responsable del fantástico nombre de ALBA. Jesús ha sido un excelente director, aportando en su despacho rigor y sentido común en los momentos en los que me dejaba llevar por las soluciones fáciles, y con el que he compartido infinidad de cafés y servilletas emborronadas analizando cualquier dificultad que me rondara por la cabeza.

Gracias a Mayte, por las muchas veces que nos hemos sentido los dos cómplices de tener que hacer una tesis. A mi hermana Mercedes por lo que me escucha y por lo que me toma el pelo porque mi investigación trata sobre *incertidumbre*. A mis padres, sobre todo a mi padre, que siempre ha querido que fuera doctor y al que le estoy haciendo esperar mucho. Y a toda la gente que se ha interesado o, al menos, me ha escuchado pacientemente y sin perder la calma: Marta, Bernardino y Cristina, Asun, Nati, Marcos, Gemma. A Rafa y Jimena, ahora emigrantes en Canadá, dos diamantes que este país se ha permitido despilfarrar.

De acuerdo, la tesis se apoya en hombros de gigantes: Maxwell, Ampere, Biot y Savart, Faraday y Tesla, por citar algunos propios del Electromagnetismo. Pero

se ha hecho casi toda empleando software libre. Así que también se alza desde los hombros, quizá no tan gigantes pero ciertamente confortables y eficaces, de miles de programadores mas o menos anónimos, cuya principal ambición era (y es) crear un producto útil y de calidad. Además del agradecimiento, vaya por delante mi admiración por su trabajo.

El documento final se ha escrito empleando T<sub>E</sub>X<sub>S</sub> (<http://gaia.fdi.ucm.es/research/texis>) como plantilla. Dada mi tendencia a complicarme la vida, finalmente no la he usado *según las instrucciones* y he ido introduciendo modificaciones, pero indudablemente ha sido un estupendo punto de partida, evitándome mucho tiempo de investigación en los embrujos de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

Cuando el trabajo de simulación se ponía duro de verdad recurría a diversos ordenadores de sobremesa. Pero el auténtico motor (de silicio) de la tesis ha sido mi portátil Dell Latitude D830. Un Intel Core Duo a 2.2 GHz y 4 GB de RAM sobre el que tengo instalado Debian (Lenny, pero sobre todo Squeeze y Wheezy). Ha soportado las tareas de edición, programación, simulación, control de copias de respaldo y coordinación de servidores, entre otras. Y eso siendo *acarreado* de un lado para otro en su sino de portátil. No voy a expresar aquí mi agradecimiento a un objeto inanimado, mayormente por no dar argumentos al lector para cuestionar el rigor científico de lo que viene a continuación, pero, al menos, quiero manifestar mi reconocimiento hacia los diseñadores y constructores de una máquina que ha tenido un comportamiento intachable durante tantos años.

Zaragoza, enero de 2015

Miguel

# Índice

<b>Prólogo</b>	<b>XI</b>
<b>1. Incertidumbre asociada a la variabilidad geométrica</b>	<b>1</b>
1.1. El objeto del estudio. Primera aproximación . . . . .	1
1.2. Una revisión del cálculo de incertidumbre . . . . .	2
1.2.1. Patrones . . . . .	6
1.2.2. Representación metrológica de un instrumento de medida	7
1.2.3. Referencias bibliográficas . . . . .	9
1.3. Dispositivos de medida de corriente basados en la Ley de Ampere	10
1.3.1. Instrumentos de evaluación directa . . . . .	12
1.3.2. Instrumentos de evaluación indirecta . . . . .	13
1.4. Requerimientos de un ALBA . . . . .	14
1.5. Función respuesta de un dispositivo de medida basado en la Ley de Ampere . . . . .	16
1.5.1. Referencias . . . . .	17
1.5.2. Instrumento de medida . . . . .	19
1.5.3. Caracterización metrológica de la función respuesta. . . . .	19
1.6. Un nuevo método de calibración . . . . .	21
1.6.1. Revisión bibliográfica . . . . .	21
1.6.2. Descripción cualitativa del método propuesto . . . . .	22
1.7. Excitaciones equivalentes . . . . .	25
1.7.1. ALBA sin materiales magnéticos . . . . .	26
1.7.2. ALBA con materiales magnéticos lineales a lo largo del lazo de medida . . . . .	26
1.8. Formulación del objeto del estudio . . . . .	29
<b>2. Dispositivo de calibración</b>	<b>31</b>
2.1. Introducción . . . . .	31
2.2. Análisis . . . . .	32
2.2.1. Lazo de Medida . . . . .	32
2.2.2. Circuitos y corrientes . . . . .	33
2.2.3. Sistema de calibración . . . . .	38
2.2.4. Representación vectorial: El espacio Gamma . . . . .	38
2.3. Índices de calidad de un sistema de calibración . . . . .	44
2.3.1. Eficacia de los conductores auxiliares . . . . .	44
2.3.2. Respuesta frente a conductores rectilíneos indefinidos . . . . .	47

2.3.3.	Coefficiente de aptitud global . . . . .	48
2.4.	Análisis de topologías específicas . . . . .	49
2.4.1.	Circuitos de forma rectangular . . . . .	49
2.4.2.	Sistema de calibración de conductores radiales . . . . .	51
2.4.3.	Sistema de calibración con conductores en disposición anular . . . . .	57
2.4.4.	Sistema de calibración con conductores paralelos . . . . .	58
2.4.5.	Sistema de calibración con conductores en disposición mixta . . . . .	59
2.4.6.	Análisis de aptitudes . . . . .	59
2.4.7.	Lazos de medida no circulares . . . . .	61
2.4.8.	Anexo: Mapas asociados a algunos sistemas de calibración . . . . .	63
<b>3.</b>	<b>Análisis de incertidumbre</b>	<b>75</b>
3.1.	Introducción . . . . .	75
3.2.	Representación de un ALBA . . . . .	75
3.3.	Conjuntos de funciones H . . . . .	77
3.3.1.	Todas las excitaciones posibles . . . . .	78
3.3.2.	Las excitaciones que podemos generar en el laboratorio . . . . .	79
3.3.3.	Las excitaciones que debemos generar en el laboratorio . . . . .	86
3.4.	Cálculo de incertidumbre . . . . .	88
3.4.1.	Excitaciones de calibración reales . . . . .	89
3.4.2.	Linealidad del ALBA . . . . .	89
3.4.3.	Modelo matemático de la calibración . . . . .	90
3.4.4.	Coefficientes asociados a la variabilidad de la respuesta del dispositivo . . . . .	92
3.4.5.	Coefficientes asociados a la variabilidad del rango de uso . . . . .	93
3.5.	Casos de estudio . . . . .	94
3.5.1.	ALBA de N sensores homogéneamente distribuidos. . . . .	95
3.5.2.	ALBA de sensores inhomogéneamente distribuidos. . . . .	95
3.5.3.	Un ejemplo de calibración . . . . .	95
3.6.	Mapa de respuesta de un instrumento . . . . .	101
<b>4.</b>	<b>Comprobaciones experimentales</b>	<b>107</b>
4.1.	Introducción . . . . .	107
4.2.	Entorno experimental SE00.15 . . . . .	108
4.2.1.	Descripción . . . . .	108
4.2.2.	Recreación real (en el laboratorio) . . . . .	109
4.2.3.	Recreación virtual . . . . .	112
4.3.	Análisis de resultados . . . . .	114
4.3.1.	Experimentación real frente a virtual . . . . .	114
4.3.2.	Efectos marginales . . . . .	117
4.4.	Hipótesis de linealidad . . . . .	117
4.5.	Equivalencia convencional y estricta . . . . .	118
4.6.	Calibración . . . . .	119
4.6.1.	Lazos de medida no circulares . . . . .	120

---

<b>Apéndice A. Análisis de funciones H para algunas geometrías</b>	<b>135</b>
A.1. Introducción . . . . .	135
A.2. Cable vertical con lazo de medida circular . . . . .	137
A.2.1. Cable finito centrado sobre trayectoria circular . . . . .	138
A.2.2. Cable finito descentrado . . . . .	138
A.2.3. Cable infinito descentrado. Valores específicos . . . . .	139
<b>Apéndice B. Parte oculta de un instrumento de medida</b>	<b>143</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>147</b>
<b>Lista de acrónimos</b>	<b>157</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>159</b>



# Prólogo

*Inside every large program, there is a  
small program trying to get out*

Tony Hoare

La idea original de partida de la tesis que aquí se presenta se enunciaba de forma difusa como “estudiar la calibración de las bobinas multivuelta empleadas para la calibración de pinzas amperimétricas”. Esencialmente, se pretendía analizar el efecto del posicionado más o menos impreciso de la pinza con respecto a la bobina durante el proceso de calibración. Pronto ese planteamiento fue cambiando conforme se intuía que, para resolver la cuestión de la calibración con bobinas multivuelta, el problema a abordar era necesariamente más amplio.

Este documento constituye la conclusión de una etapa en una investigación que se ha extendido durante varios años, que ha dado pie a diferentes publicaciones en revistas indexadas, [Samplón-Chalmeta et al., 2014], [Samplon-Chalmeta et al., 2014a], [Samplon-Chalmeta et al., 2014b], y que aun continúa en evolución. Durante estos años he compatibilizado la dedicación a esta tarea con otras derivadas de mi trabajo como docente en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Zaragoza. Como consecuencia de ello, ha habido fases de trabajo casi exclusivo frente a otras en que el trabajo activo se reducía en beneficio fundamentalmente de mis obligaciones docentes. Aunque poder trabajar de forma continuada e ininterrumpida en su propia investigación es algo que casi nadie rechazaría, la alternativa impuesta ha propiciado de forma lateral el disponer de más tiempo para que las ideas se asentaran y evolucionaran, posiblemente a un nivel subconsciente. La redacción del documento final, su forma y estilo, obedece mayoritariamente a un criterio funcional que es lo propio en estos casos: realizar una exposición ordenada y clara de los resultados, de las conclusiones de estos años de trabajo.

En el primer año de mis estudios universitarios, uno de los profesores de entonces hizo durante la clase una pequeña digresión sobre teoría de grupos y la concluyó con la siguiente observación: “la teoría de grupos es fácil pero os faltan las definiciones adecuadas”. El profesor en cuestión, D. Javier Ota, se reveló como uno de los mejores que tuve en aquella época. Sin embargo posiblemente no fuera consciente de la bomba mental que en ese momento había hecho estallar en mi cabeza. Convencido por entonces de que en el centro de las matemáticas estaban las demostraciones, tan geniales en ocasiones, el profesor las despreciaba, las tiraba por la borda, en favor de las definiciones y los conceptos. Ahora esto me resulta evidente —entonces no— como ahora me resulta

evidente que el propósito del trabajo desarrollado en esta investigación ha sido la búsqueda de los conceptos adecuados. Armado con ellos, la formalización matemática, la interrelación de ideas ha seguido de una forma natural. Aun como experimento mental, resulta interesante considerar una redacción alternativa de este documento en la que se describiera como ha sido la evolución de las ideas, de los conceptos. Los caminos que se emprendieron de forma errónea, el esfuerzo y trabajo perdido en su falso avance, y la sensación de progresar en la vía correcta cuando las interconexiones entre conceptos surgen de forma natural.

Si nos remontamos en el tiempo en busca de los primeros esbozos, hay que situarse en el entorno del año 2002. En ese año formaba parte del Laboratorio de Metrología Eléctrica (LME) por entonces perteneciente al Departamento de Ingeniería Eléctrica. Una de mis tareas fue el establecimiento de un método de creación de hojas de cálculo para el cálculo de incertidumbre de las calibraciones que se llevaban a cabo. Este método fue el resultado de la sistemática de representación de referencias e instrumentos de medida que desarrollé por entonces y que se expone en el primer capítulo. También participé como miembro del laboratorio en el Grupo de Trabajo GT-2 del Subcomité Técnico de Calibración 1 de la Entidad Nacional de Acreditación (ENAC) encargado de estudiar la “trazabilidad de bobinas multiplicadoras de corriente para la calibración de pinzas amperimétricas”. En aquella época comenzó la comercialización, por parte de algunas empresas de instrumentación, de bobinas multiplicadoras y su popularización como método de incrementar el alcance ofrecido por los calibradores multifunción. El grupo pretendía establecer un criterio para asignar una incertidumbre a su uso en calibraciones de pinzas amperimétricas frente a una calibración directa, basada en un único cable, siendo que esto último requería de una capacidad de generación de corriente de la que no disponían muchos laboratorios. Parte de mi trabajo en ese grupo consistió en elaborar un estudio mediante simulación numérica por ordenador de la respuesta de una pinza frente a una bobina multiplicadora construida con diferentes topologías, e incluyó un cierto análisis del efecto del posicionamiento descentrado de la pinza con respecto a la bobina. Tras presentar al Subcomité Técnico de Calibración las pertinentes conclusiones, el grupo se cerró pero el problema continuó en mi cabeza.

Posteriormente, y ya desvinculado del LME, D. Jesús Letosa, D. Antonio Usón y el autor entre otros, formamos un grupo de investigación con el propósito genérico de llevar a cabo análisis, con el apoyo de simulación por ordenador, de problemas electromagnéticos orientados a la ingeniería eléctrica. Así, el primer tema en el que nos centramos fue el análisis y optimización de pinzas amperimétricas que fraguó en diversas comunicaciones a congresos [Usón et al., 2005b], [Usón et al., 2005c], [Usón et al., 2005a], [Samplón-Chalmeta et al., 2005], el artículo [Letosa et al., 2004] y la tesis doctoral de Antonio [Usón, 2007]. Posteriormente, y de forma indirecta, se nos invitó a participar en la reapertura del estudio de la calibración de pinzas mediante bobinas que ENAC pretendía acometer. Fruto de ello fue un pequeño documento de uso personal que recogía todas las ideas, incipientes por entonces, recopiladas en previsión de una posible colaboración. Aun sin constancia de que ENAC finalmente retomase el asunto, llegado el momento de buscar un tema de tesis doctoral la elección fue natural.

En su origen el problema estaba mal planteado de raíz puesto que se enunciaba en base a la incertidumbre asociada al descentramiento de conductores

en una pinza. Dos malos planteamientos: en primer lugar se consideraban como adecuados, “canónicos”, hilos conductores indefinidos, y la bobina no era sino un sistema de simularlos. En la práctica, los hilos conductores infinitos no existen, de forma que atribuirles un papel de elemento paradigmático para llevar a cabo la calibración introducía inconsistencias desde su base. Por otra parte se consideraba el efecto de “descentramiento” lo que implicaba de rondón que existía una posición centrada, y eso sólo tiene sentido para pinzas con tenaza en forma circular. Sin embargo ambas ideas estaban muy arraigadas en el ámbito ingenieril y fue difícil desprenderse de ellas. Luego siguieron más caminos erróneos: los primeros intentos de darle forma al rango de uso del instrumento fueron complicados. La introducción del coeficiente  $\eta$  (que se definirá en el capítulo 2.1) como caracterización del sistema de calibración resultó interesante, pero tanto que el cálculo de incertidumbre se trató de hacer a través de la información obtenida de él. No es posible; el coeficiente  $\eta$  no está definido en base a la respuesta del instrumento y por tanto no es aplicable. Sin embargo, hasta que no se desechó esa idea, y todo el trabajo desarrollado en base a ella, no estuve en disposición de considerar la generalización (capítulo 3.1) del espacio  $\tilde{\Gamma}$  (capítulo 2.1) mediante excitaciones virtuales, que al final ha resultado la vía adecuada de tratamiento del problema.

Por decisión e inclinación personal, en la elaboración únicamente he empleado aplicaciones de software libre, empezando por el propio sistema operativo, Linux (Debian), y siguiendo por una lista que sería prolijo enumerar aquí. La obligada excepción a esta norma ha sido el software de simulación de campos electromagnéticos y eso debido a que la alternativa libre que consideré y estudié en profundidad, Elmer (<https://csc.fi/web/elmer>), aun resultando un muy interesante programa, no aportaba las capacidades suficientes para las tareas requeridas. Con respecto al código específicamente escrito por mi parte, la metodología de calibración descrita emplea intensamente el análisis numérico y se ha articulado con un entorno de software que se ha ido construyendo poco a poco y sin él, pese a estar en bambalinas, difícilmente hubiera podido completarse este trabajo. Dado su carácter de herramienta de apoyo, el texto necesariamente recoge muy poco sobre él, pero merece dedicarle unas líneas en este momento.

Los primeros desarrollos se hicieron usando C++ con apoyo de la GSL (Gnu Scientific Library). C++ aporta una poderosa orientación a objetos, *templates* y la STL (Standard Template Library), posteriormente incorporada en su mayor parte en la C++ Standard Library. Sin embargo el ciclo de desarrollo se mostró excesivamente lento por la necesidad continua de recompilación y la escasa expresividad del lenguaje. Hay que tener en cuenta que se trataba de desarrollar un entorno de trabajo y experimentación, no una aplicación cerrada final. Por otra parte, la GSL es una biblioteca más orientada al lenguaje C que al C++ y surgieron problemas de adaptación a una estructura de objetos: los algoritmos de cuadratura, que resultan críticos, requerían funciones como parámetros y éstas no podían ser sustituidas por métodos de clase, salvo que las clases fueran estáticas. Esto impedía el uso directo de funciones encapsuladas en objetos. Las posibles soluciones que se probaron para circunvalar esta dificultad resultaron excesivamente engorrosas.

En la búsqueda de un sustituto a C++ se consideró Octave. Sin embargo, a partir de la experiencia del autor con esta herramienta en otro proyecto de investigación se descartó esta opción. Octave es un entorno de tratamiento nu-

mérico basado en un conjunto de rutinas, una librería, en las que se focaliza la atención, y a las que se accede a través de un lenguaje *ad hoc* propio. Es por ello que el lenguaje, entendido como de uso interno de Octave, no puede competir frente a otros lenguajes de programación concebidos *per se*. Por otra parte, su orientación a objetos es marginal. Siempre en mi opinión, Octave está llegando al final de su ciclo de vida aunque quedarán tareas de mantenimiento/ampliación del código existente. SciLab, con una orientación similar, fue descartada simplemente por mi falta de experiencia en ese entorno. Python resultaba cada vez mas omnipresente como lenguaje de *script* embebido en aplicaciones de alto nivel, por lo que finalmente opté por trabajar con el conjunto Python + NumPy + SciPy junto con la muy potente librería Matplotlib para la elaboración de gráficos. La elección ha demostrado ser un acierto: para ponderar la importancia nuclear de Python en este trabajo de investigación puede apuntarse que frente a las 15 000 líneas de los ficheros fuente (\*.tex) de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X empleado para elaborar el presente documento, y otros auxiliares, el número de líneas de los ficheros fuente (\*.py) de Python ha sido de unas 48 000.

Python ha resultado la amalgama de todo el trabajo con el ordenador, y se ha utilizado en varios frentes. En primer lugar, ha controlado la instrumentación en los experimentos de laboratorio. Estrictamente, el control se llevaba a cabo mediante un sistema cliente-servidor. El programa servidor, escrito por mí en C++ con un propósito de apoyo para un uso docente, homogeneizaba en una única interface los diferentes métodos *hardware* de comunicación con la instrumentación a la vez que se comunicaba con el programa cliente a través de internet. Por ello, como efecto lateral, el control de la instrumentación se podía llevar a cabo desde cualquier ordenador, inclusive fuera del laboratorio, aunque esta capacidad nunca se utilizó dado que otros aspectos de la experimentación demandaban atención presencial. En contraposición, las rutinas que actuaban de cliente estaban escritas en Python, y eran empleadas por código en este lenguaje encargado de establecer las secuencias de acciones para llevar a cabo los diversos experimentos.

Python también ha tenido un papel crucial en el ámbito de la experimentación virtual. El volumen de simulaciones mediante elementos finitos llevadas a cabo hubiera sido completamente inabordable en modo interactivo por lo que su ejecución en modo *batch* se gestionó mediante más código Python. Fuera del ámbito experimental, también se utilizó Python para poner en marcha e interconectar diversos servidores a fin de llevar a cabo cálculos en forma distribuida. Pero sobre todo, Python ha sido el encargado de modelar un conjunto de clases que hicieran realidad las ideas que se iban consolidando. Las clases, como soporte de las ideas que representaban, han evolucionado con ellas, siendo reescritas y adaptadas una y otra vez. Así, Python se ha revelado más como un sistema de comunicación bidireccional del autor con el ordenador antes que un simple lenguaje para el desarrollo de aplicaciones.

En la redacción de este documento, los conceptos y resultados se han articulado en forma de definiciones y proposiciones en aras de una presentación ordenada que, además, facilitase las referencias cruzadas a ellos. Es posible que, en un ámbito de Ciencias Exactas, el formalismo de las definiciones y demostraciones hubiese debido ser más exquisito. No obstante, pese a que se ha hecho un necesario esfuerzo de precisión, este es un estudio de orientación ingenieril y yo no pretendo ser un matemático, por lo que emplazo al lector a una lectura

amable en ese sentido.

El efecto de la variabilidad geométrica de los conductores que pueden ser aplicados a un instrumento de medida basado en la Ley de Ampere, así como su calibración, ha sido muy escasamente tratado en la literatura y, en general, de forma incompleta. Las cada vez más populares sondas Rogowsky han incrementado el interés de la comunidad científica y técnica sobre este problema. En este documento se ofrece un análisis completo y una solución práctica y adaptable, aunque inevitablemente conlleva una cierta complejidad instrumental. Que este método constituya una solución a este problema de aplicación general entre los laboratorios de calibración será algo que el tiempo desvelará y a lo que personalmente, como no, prestaré una cuidadosa atención.

El autor



# Capítulo 1

## Incertidumbre asociada a la variabilidad geométrica

### 1.1. El objeto del estudio. Primera aproximación

Para poder resolver un problema se debe empezar por definirlo. Este es nuestro caso y ésta es nuestra primera definición:

El objeto del presente documento es describir y analizar una familia de dispositivos destinados a la calibración de pinzas amperimétricas e instrumentos similares frente a descentramientos del conductor por el que circula la corriente a medir.

Esta declaración de intenciones posiblemente resulte intuitiva pero adolece de imprecisión; como ocurre en muchas ocasiones dentro del ámbito de la Física, se parte de una formulación básica, basada en convenciones preestablecidas y durante el proceso de análisis del problema surge la necesidad de introducir reformulaciones para imprimir mayor rigor o eliminar arbitrariedad. En nuestro caso en concreto para precisar lo anterior deberemos, como mínimo, responder a tres cuestiones:

- ▷ ¿Que entendemos por pinzas amperimétricas y, sobre todo, por instrumentos *similares*?
- ▷ ¿Que entendemos por descentramientos?
- ▷ ¿Que entendemos por calibración?

Así, este capítulo introductorio aspira a presentar información suficiente para responder a las cuestiones anteriores y delimitar de una manera más formal el objeto del estudio. Para ello se iniciará con una revisión de conceptos metrologicos generales orientados al cálculo de incertidumbre con objeto de encuadrar el término *calibración*, para continuar con una descripción funcional de los instrumentos a los que va destinado el sistema de calibración, y su representación metrologica y a partir de ello cobrará sentido y se precisará la idea de *descentramiento* y los efectos que produce.

## 1.2. Una revisión del cálculo de incertidumbre

En esta sección no se pretende realizar una revisión completa y sistemática de los métodos de cálculo de incertidumbre, para lo que se remite al lector a la bibliografía correspondiente, sino realizar una revisión somera de conceptos a fin de introducir una notación específica, así como una aproximación sistematizada a éste cálculo desarrollada por el autor a partir de los contenidos del GUM (Guía para la expresión de la incertidumbre en mediciones) [Joint Committee for Guides in Metrology, 2008b].

Una magnitud, entendida como atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia, es medible cuando podemos establecer una correspondencia entre ese atributo y sus propiedades físicas y un conjunto de números y sus propiedades matemáticas de forma que a cualquier cantidad de ese atributo se le asocie un único número. Esta afirmación está en la base de la Teoría de la Metrización<sup>1</sup> y ha sido fruto de un esfuerzo de concreción que se ha desarrollado fundamentalmente en la segunda parte del siglo XX. Así, la mayor parte de las magnitudes de la Física, y en particular las que nos ocupan, constituyen *sistemas de magnitudes extensivas* para las que se puede probar el Teorema de Representación, que asegura la posibilidad de establecer la asociación entre cantidades<sup>2</sup> y números, y el Teorema de Unicidad, que asegura que cualquier par de sistemas de asignación que se establezcan son proporcionales uno con respecto al otro. El Teorema de Unicidad permite establecer una cantidad arbitraria como *unidad de medida*.

Medir es el proceso mediante el cual asociamos a una cantidad concreta el número que la representa. En términos generales esto se realiza mediante la comparación de la cantidad con otra de referencia que arbitrariamente se adopta como unidad. En el ámbito de este estudio, dada una cantidad y la unidad correspondiente, asumimos la existencia de su medida, esto es, asumimos la existencia de un único número que la representa y al que denominamos *valor verdadero*. Dependiendo de factores intrínsecos y/o extrínsecos a la cantidad a medir, esta asociación se lleva a cabo por procedimientos que van desde lo simple a lo muy complejo y que harán uso de uno o varios dispositivos. Desde un punto de vista metrológico, los dispositivos se pueden clasificar en dos grupos:

- ▷ **Referencias:** Son dispositivos que presentan o generan una cantidad susceptible de ser medida.
- ▷ **Instrumentos de medida:** Son dispositivos capaces de responder con un número ante la presencia de una referencia. A este proceso normalmente nos referimos como *tomar una lectura*. Idealmente esa lectura será igual al valor verdadero de la referencia. Es interesante notar que la definición anterior implica que la caracterización principal de un instrumento de

<sup>1</sup>La Teoría de la Metrización es la encargada de estudiar las condiciones que debe cumplir una magnitud para que sea medible, pero no se entra en las metodologías o procedimientos de medida.

<sup>2</sup>Existe una cierta ambigüedad entre el término “magnitud”, que generalmente se emplea para referirse al atributo en general, y el término “cantidad”, que generalmente se emplea para referirse a una recreación particular de una magnitud. Sin embargo, dependiendo del contexto en ocasiones se emplean de forma intercambiada: “La longitud se mide en metros”, “Tiene una longitud de 12 metros”. Normalmente, sin riesgo de ambigüedad, se puede decir que “la longitud es una magnitud”, y que “la longitud es una cantidad”.

Tabla 1.1. Notación funcional y postfija en la escritura de algunas cantidades. En el texto se empleará la notación postfija.

Funcional	Postfija	Descripción
$\text{VCV}(X)$	$X \rightarrow \text{VCV}$	Valor convencionalmente verdadero de $X$
$\text{Var}(X)$	$X \rightarrow \text{S}^2$	Varianza de $X$
$\text{UE}(X)$	$X \rightarrow \text{UE}$	Incertidumbre estándar de $X$
$\text{UX}(X)$	$X \rightarrow \text{UX}$	Incertidumbre expandida de $X$

medida es que dispone de una pantalla, visualizador, o más generalmente de algún sistema mediante el que (nos) transmite el valor de la lectura.

La experiencia indica que la repetición del proceso de medida en condiciones de repetibilidad y/o reproducibilidad arroja resultados diferentes. Por ello:

- ▷ Aún asumiendo la existencia del valor verdadero del mensurando, éste no puede ser determinado.
- ▷ El resultado de una medida consistirá en un intervalo dentro del cual podemos razonablemente esperar que se encuentre el valor verdadero del mensurando o, alternativamente, un intervalo de valores que, *a la luz de nuestro conocimiento*, podemos razonablemente atribuir al mensurando.

Para describir tal intervalo se requieren dos valores siendo una posible elección el centro y la semianchura. El centro del intervalo se denomina (o se considera) el *valor convencionalmente verdadero*, mientras que su anchura vendrá caracterizada por la *incertidumbre* (que más adelante se matizará en las denominadas *incertidumbre estándar* e *incertidumbre expandida*). La tabla 1.1 muestra una notación postfija, que es la que se empleará para representar estos valores y otros asociados, en comparación con una notación funcional<sup>3</sup>. La especificación del resultado de una medida pasará por la indicación de ambos valores que, por otra parte, tienen las mismas dimensiones físicas. En adelante entenderemos los términos “medir”, “realizar una medición” y “resultado de una medida” en relación al intervalo completo, mientras que los términos “lectura” y “tomar una lectura” harán referencia a un (único) intento de asignación de un número al valor verdadero de la cantidad a medir.

De forma natural surge la necesidad de establecer una metodología para la estimación de este intervalo y, de forma añadida, para comparar, componer y en general realizar cierta álgebra con los resultados de las medidas de diferentes magnitudes. Esto va a requerir la conexión de las magnitudes (cantidades) a medir con adecuadas representaciones (u objetos) matemáticas.

<sup>3</sup>Aunque inicialmente esta notación puede parecer prolija, se ha diseñado con objeto de poder emplearla en entornos de texto plano (como el correo electrónico) que no admite sub-índices o super-índices:  $X \rightarrow \text{VCV}=2$ ,  $X \rightarrow \text{S}^2=0.12$ . Por otro lado, esta notación postfija refuerza la idea de *atributo asociado*; valor convencionalmente verdadero como atributo asociado a la variable aleatoria, frente a la idea de función aplicada a la variable aleatoria y que produce el valor convencionalmente verdadero, y así con las demás. Finalmente, la notación postfija permite diferenciar el contenido metrológico del concepto frente al puramente matemático asociado al operador que se emplea para calcularlo.

Así, la multiplicidad aleatoria de números asignables al valor verdadero de la cantidad, o bien ese estado de desconocimiento del mismo, se representa matemáticamente mediante una variable aleatoria, de forma que el valor convencionalmente verdadero se asocia a la esperanza de la variable y la incertidumbre estándar se asocia a la desviación típica. Entre ambos establecen un *intervalo de confianza* que cubrirá una probabilidad que dependerá de la función de distribución de la cantidad que se mide<sup>4</sup>. Dadas dos mediciones llevadas a cabo sobre la misma cantidad, resultará de mayor calidad, en tanto en cuanto más informativa, aquella cuyo intervalo sea menor; aquella de menor incertidumbre. Sin embargo esta comparación sólo cobra sentido cuando el intervalo de confianza que cubran ambos resultados sea igual. Con este propósito, a la hora de especificar un resultado de medida, se requiere indicar, además del valor convencionalmente verdadero, uno o ambos de los siguientes elementos:

- ▷ La función de distribución del resultado y la incertidumbre estándar (desviación típica) que junto a la esperanza (valor convencionalmente verdadero) permite determinar el intervalo de confianza correspondiente a cualquier nivel de probabilidad.
- ▷ Un nivel de probabilidad para el intervalo de confianza y un *factor de cobertura*,  $k$ , entendido como un número real positivo de forma que el intervalo  $(X \rightarrow \text{vcv} \pm kX \rightarrow \text{ue})$  cubre ese nivel de probabilidad. Precisamente se define la incertidumbre expandida como:

$$X \rightarrow \text{ux} = k X \rightarrow \text{ue} \quad (1.1)$$

Generalmente el intervalo de confianza se suele especificar para un nivel de probabilidad del 95.45 % que, para una distribución normal (gaussiana), corresponde a un factor de cobertura  $k = 2$ .

A efectos prácticos, dada una cierta cantidad, el GUM establece dos métodos o *tipos de evaluación* para determinar su valor convencionalmente verdadero e incertidumbre:

- ▷ **Evaluación tipo A.** En este caso ambos valores se determinan a partir de métodos (estimadores) estadísticos aplicados sobre series de  $N$  lecturas.

$$\begin{aligned} X \rightarrow \text{vcv} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t \\ X \rightarrow \text{s2} &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{t=1}^N (x_t - X \rightarrow \text{vcv})^2 \\ X \rightarrow \text{ue} &= \sqrt{X \rightarrow \text{s2}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde  $x_t$ ,  $t = 1 \dots N$  representan cada una de las lecturas.

La especificación del número  $N$  de lecturas a tomar no está clara mas allá de que el Teorema Central del Límite indica que es deseable que sea el mayor posible. Estableciendo un compromiso entre los requerimientos

<sup>4</sup>Hay que tener en cuenta que esa función de distribución dependerá no sólo de lo que se mide (la cantidad) sino de cómo se mide (el procedimiento), incluyendo las referencias e instrumentos de medida empleados para ello.

puros de la Estadística y una consideración realista, a efectos prácticos, del proceso de medida en cuanto a tiempo y recursos, se suele optar por llevar a cabo series de diez lecturas. Aparentemente resulta necesario conocer de forma previa la función de distribución de la magnitud para poder especificar un factor de cobertura<sup>5</sup>.

- ▷ **Evaluación tipo B.** Se utiliza cuando por algún motivo no se dispone de series de lecturas<sup>6</sup>. En este caso, a partir de información disponible fiable<sup>7</sup> se presupone *a priori* una función de distribución mediante la que se determina el resto<sup>8</sup>. A modo de ejemplo y dado que el resultado se empleará más adelante, supongamos una magnitud de la que no se pueden obtener lecturas pero que su posible rango de variación se encuentra (de forma equiprobable) entre los límites  $a \leq X \leq b$ . Podemos asumir una distribución rectangular de forma que:

$$\begin{aligned} X_{\rightarrow \text{vcv}} &= \frac{a+b}{2} \\ X_{\rightarrow \text{s}^2} &= \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{h^2}{12} \\ X_{\rightarrow \text{UE}} &= \sqrt{X_{\rightarrow \text{s}^2}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sin embargo, en la mayor parte de las situaciones de medida reales, la magnitud en la que estamos interesados no se evaluará directamente sino a través de un conjunto de magnitudes de partida (o magnitudes de entrada) de las que ésta depende y que se evaluarán mediante alguno de los métodos anteriormente expuestos. La relación funcional entre la magnitud de salida y las magnitudes de partida constituye el *modelo matemático de la medida*.

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_P) \quad (1.4)$$

donde  $Y$  es la magnitud de salida y  $X_t$ ,  $t = 1 \dots P$  son las magnitudes de las que depende. Nuevamente el GUM establece fundamentalmente dos métodos para la determinación del resultado de medida:

- ▷ **Linealización del modelo matemático.** En este caso el valor convencionalmente verdadero se obtiene mediante la aplicación de los valores convencionalmente verdaderos al modelo matemático de la medida.

$$Y_{\rightarrow \text{vcv}} = f(X_{1 \rightarrow \text{vcv}}, X_{2 \rightarrow \text{vcv}}, \dots, X_{P \rightarrow \text{vcv}}) \quad (1.5)$$

La varianza se determina a partir de una aproximación lineal del modelo matemático en torno al valor convencionalmente verdadero, lo que conduce a:

$$Y_{\rightarrow \text{s}^2} = \sum_{t=1}^P c_t^2 X_{t \rightarrow \text{s}^2} + \sum_{t=1}^P \sum_{s>t}^P c_t c_s \text{Cov}(X_t, X_s) \quad (1.6)$$

<sup>5</sup>En realidad esta necesidad no resulta tan crítica. En primer lugar porque es suficiente asegurar una distribución similar a la normal para poder asumir una distribución  $t$  de Student del resultado, y en segundo lugar porque raramente se suele dar *únicamente* este tipo de evaluación sino una evaluación indirecta que se verá más adelante.

<sup>6</sup>Por ejemplo, porque existe una incapacidad material para realizarlas.

<sup>7</sup>Información del fabricante, certificados de calibración, registros históricos...

<sup>8</sup>Este tipo de evaluación abre la puerta a una aproximación Bayesiana al cálculo de incertidumbre que queda fuera del objeto de este texto.

donde

$$c_t = \left. \frac{\partial f}{\partial X_t} \right|_{(X_1=X_1 \rightarrow \text{vcv} \quad \dots \quad X_P=X_P \rightarrow \text{vcv})} \quad (1.7)$$

y  $\text{Cov}(X_t, X_s)$  representa la covarianza entre las dos magnitudes.

A la expresión (1.6) se la suele denominar *Ley de Propagación de Varianzas*. No hay denominación equivalente para la correspondiente a los valores convencionalmente verdaderos (1.5). En general nos referiremos a ambas como *Leyes de Propagación*.

Si las magnitudes de entrada se distribuyen de forma normal, así será la distribución de la magnitud de salida; ésto se puede extrapolar para magnitudes de entrada próximas a la normalidad. Por otra parte, en caso de distribuciones mezcladas, el Teorema Central del Límite asegura la tendencia a la normalidad siempre y cuando ninguna magnitud tenga una contribución claramente preponderante sobre las demás.

De forma alternativa la distribución de salida se puede considerar una  $t$  de Student con un número de grados de libertad,  $\nu_y$ , que se estima a partir de la fórmula de Welch-Satterthwaite<sup>9</sup> [Satterthwaite, 1946]<sup>10</sup>:

$$\nu_y = \frac{(Y \rightarrow s_2)^2}{\sum_{t=1}^N \frac{(c_t \nu_t)^2}{\nu_t}} \quad (1.8)$$

donde  $\nu_t$  son los grados de libertad de la magnitud de entrada correspondiente:

⇒  $\nu_t = N - 1$  para magnitudes con evaluación tipo A.

⇒  $\nu_t \rightarrow \infty$  para magnitudes con evaluación tipo B.

- ▷ **Evaluación por Monte Carlo.** Consiste en determinar la distribución de salida a base de generar conjuntos de valores aleatorios de las magnitudes de entrada y combinarlos mediante el modelo matemático. A partir de los resultados generados se estima la distribución de salida y/o los parámetros de interés. El proceso se itera hasta alcanzar un nivel de precisión preestablecido. En muchas ocasiones este método se emplea como sistema de validación de los resultados obtenidos mediante el anterior.

### 1.2.1. Patrones

Un sistema de instrumentación puede estar constituido por un dispositivo o ser una combinación más o menos compleja de referencias e instrumentos de medida<sup>11</sup>. Sin embargo un dispositivo sólo será relevante a efectos de una medición cuando esté caracterizado desde un punto de vista metrológico, o equivalentemente, cuando se conoce la calidad (metrológica) de su operación. De un

<sup>9</sup>Para poder emplearla se requiere que las magnitudes de entrada sean además independientes.

<sup>10</sup>El GUM sugiere el uso de esta expresión para estimar los grados de libertad y así se aceptará en este documento. Sin embargo se han presentado objeciones a la misma: [Hall y Willink, 2001], [Ballico, 2000].

<sup>11</sup>En una situación real algunos de ellos pueden cumplir un papel auxiliar (proporcionar una referencia de valor desconocido que será controlada por otro instrumento, energizar el sistema...) sin relevancia metrológica de forma que no se considerarán aquí.

instrumento en estas condiciones se dice que es un *patrón* y el proceso mediante el que alcanza ese estado se denomina, de forma general, *calibración*<sup>12</sup>.

La forma de llevarla a cabo dependerá del tipo de instrumento que se trate:

- ▷ **Referencias.** Su caracterización metrológica consiste simplemente en especificar cual es su valor. Una referencia R calibrada será aquella para la que conozcamos su intervalo ( $R \rightarrow^{vcv} \pm R \rightarrow^{ux}$ ). La calibración de una referencia se lleva a cabo, por tanto, simplemente midiendo su valor.
- ▷ **Instrumentos de medida.** Intuitivamente, calibrar un instrumento de medida consiste en establecer lo bien o mal que mide y dar la especificación correspondiente. Esto se lleva a cabo enfrentándolo a una referencia patrón y comprobando la diferencia entre el valor que debe medir (el de la referencia) y el valor que mide. En este sentido podemos introducir una magnitud denominada *desviación*:

$$D_{ES} = (D)esviación = (R)referencia - (I)strumento de medida \quad (1.9)$$

Calibrar un instrumento de medida implica determinar su desviación y eso se consigue mediante un proceso de medición, constituyendo la expresión anterior el modelo matemático del procedimiento. Aplicando las leyes de propagación a (1.9) se obtiene:

$$D_{ES \rightarrow vcv} = R \rightarrow^{vcv} - I \rightarrow^{vcv} \quad (1.10)$$

$$D_{ES \rightarrow s2} = R \rightarrow^{s2} + I \rightarrow^{s2} \quad (1.11)$$

### 1.2.2. Representación metrológica de un instrumento de medida

Cuando en un procedimiento de medida se utiliza una referencia, ésta debe ser un patrón y por tanto se conoce su valor, y ese valor es su representación metrológica. Sin embargo cuando se utiliza un instrumento de medida la situación resulta más compleja. Un instrumento de medida funcionalmente se caracteriza porque es capaz de *ofrecer* lecturas de un mensurando, y a partir de esta idea nuclear vamos a construir su caracterización.

Denominaremos  $I_M$  a una magnitud genérica que representa el resultado obtenido de un instrumento de medida. Esta magnitud normalmente no la evaluaremos de forma directa sino que va a depender de otras magnitudes más básicas ( $I_M.VIS$ ,  $I_M.OC$  e  $I_M.DES$ ) que serán las que evaluaremos directamente y cuyo sentido se expone a continuación<sup>13</sup>:

<sup>12</sup>En muchas ocasiones se diferencia entre *verificación* como el proceso mediante el cual se asegura que un cierto dispositivo cumple un conjunto de especificaciones previas y *calibración* en el sentido de ajuste del dispositivo hasta que cumpla un conjunto de especificaciones previas. Una calibración en este sentido suele implicar las operaciones de verificación, ajuste y nueva verificación. Sin embargo el uso que se hace en el texto del concepto de calibración es más genérico y no implica la existencia de unas especificaciones a cumplir: calibrar simplemente implica tener (cuantitativamente) caracterizado el dispositivo.

<sup>13</sup>El otro aspecto de la notación introducida para cálculos de incertidumbre se muestra en esta expresión: La especificación de una variable aleatoria que es una componente de otra, se realizará escribiendo primero el nombre de la magnitud principal y luego el de la componente separadas por un punto.

▷  $I_M.VIS$ : La lectura que nos intenta ofrecer el instrumento de medida representa un número real y por ello con un número indefinido de cifras significativas. Sin embargo dada la imposibilidad de su visualizador (pantalla) para transmitir un número de ese tipo, se realizará algún tipo de redondeo o truncamiento hasta reducirlo a un número de dígitos adecuado para ser presentados<sup>14</sup>. En ese sentido  $I_M.VIS$  representa la parte de la información que el instrumento de medida nos comunica de forma inequívoca.

⇒ En el caso de un instrumento con visualizador digital, corresponde a las cifras que el dispositivo muestra en pantalla.

⇒ En el caso de un instrumento con visualizador analógico, corresponde a la lectura que inferimos en base al posicionamiento de la aguja en una escala graduada.

En ambos casos la evaluación de esta magnitud será de tipo A.

▷  $I_M.O_C$ : Representa lo que no podemos ver, la parte de información que el visualizador del instrumento no es capaz de mostrar o, de forma equivalente, representa lo que hay que añadirle a la información que se muestra en pantalla para obtener el resultado que internamente ha obtenido el instrumento de medida y que las limitaciones del visualizador ha truncado. Obviamente se tratará de una evaluación tipo B. Siguiendo al GUM, dado que, a falta de mayor información, todos sus valores son igualmente posibles se trata de una distribución rectangular centrada en 0 y de anchura la resolución del instrumento (en el punto de medida)  $h$ , e incorrelada con los otros componentes de  $I_M$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} I_M.O_C \rightarrow v_{CV} &= 0 \\ I_M.O_C \rightarrow s^2 &= \frac{h^2}{12} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Sin embargo estas expresiones han sido cuestionadas en los últimos años. En el apéndice B se incluye un análisis de este aspecto desde el punto de vista de la probabilidad frecuencial.

▷  $I_M.DES$  Representa la corrección, obtenida por calibración (1.9), que hay que aplicar a las lecturas. Su valor se obtendrá normalmente por medio de un certificado de calibración o de las especificaciones del fabricante. Nuevamente se trata de una evaluación tipo B.

Para obtener el modelo matemático de  $I_M$  a partir de estos componentes se puede razonar del siguiente modo: el instrumento de medida puede ser interpretado como un elemento que genera *internamente* un número real  $X$  como representación de la cantidad que está midiendo. Este número deberá ser corregido por calibración, de forma que  $I_M = I_M.X + I_M.DES$ . Sin embargo el instrumento necesita comunicar al exterior (al operario humano) esa cantidad a través de un visualizador lo que implica un truncamiento del valor, de donde

<sup>14</sup>Aunque esta descripción se identifica con visualizadores digitales, puede ser fácilmente generalizable a indicadores analógicos. En este caso si bien el instrumento sí que representa completamente el número real, es la limitada capacidad discriminadora del elemento que lee esa información (típicamente el ojo humano) la que impone el truncamiento.

$I_M \cdot X = I_M \cdot V_{IS} + I_M \cdot O_C$ , por lo que la el modelo matemático del instrumento de medida es:

$$I_M = I_M \cdot V_{IS} + I_M \cdot O_C + I_M \cdot D_{ES} \quad (1.13)$$

Aplicando las Leyes de Propagación, y suponiendo la independencia estadística entre los términos de  $I_M$ :

$$\begin{aligned} I_{M \rightarrow vcv} &= I_M \cdot V_{IS \rightarrow vcv} + I_M \cdot O_C \rightarrow vcv + I_M \cdot D_{ES \rightarrow vcv} \\ I_{M \rightarrow s^2} &= I_M \cdot V_{IS \rightarrow s^2} + I_M \cdot O_C \rightarrow s^2 + I_M \cdot D_{ES \rightarrow s^2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Cabe hacer notar un caso excepcional con respecto a lo anterior. Cuando calibramos un instrumento de medida, lo enfrentamos directa o indirectamente a una referencia patrón para determinar su desviación. El modelo matemático incluye un término, el instrumento bajo calibración, que lógicamente no es un patrón, siendo de hecho el único caso en el que un instrumento de medida no patrón puede formar parte de un procedimiento de medida y eso es debido a que el propio procedimiento tiene como objeto convertir en patrón a un instrumento no patrón. Dado que en este caso lo que se está tratando de medir es la desviación del instrumento no patrón, su representación queda reducida a la correspondiente al visualizador. Así, en este caso, el instrumento queda representado como:

$$I_M = I_M \cdot V_{IS} + I_M \cdot O_C \quad (1.15)$$

### 1.2.3. Referencias bibliográficas

Dentro de la teoría de la Metrización, la obra de referencia posiblemente es la trilogía [Krantz et al., 2006a], [Krantz et al., 2006b] y [Suppes et al., 2006]. Una excelente introducción desde un plano filosófico al problema de la Metrización puede encontrarse en [Díez, 1997a] y [Díez, 1997b]. También puede citarse [Bullock y Deckro, 2006], [Finkelstein, 2003], [Michell, 2005].

El documento que más contribuido a la homogeneización del tratamiento de la incertidumbre ha sido el GUM [Joint Committee for Guides in Metrology, 2008b] y su extensión para el tratamiento del problema a través de métodos de Monte Carlo [Joint Committee for Guides in Metrology, 2008a] y futuros desarrollos ([Bich et al., 2006]) así como el Vocabulario Internacional de Metrología [BIPM, 2008]. A partir de este documento han aparecido adaptaciones destinadas a procedimientos de calibración [European co-operation for Accreditation, 2013]. Existe abundante literatura destinada a comentar y/o discutir algunas de sus afirmaciones: [Willink, 2006], [Estler, 1999].

Una de las mayores objeciones que se le han hecho al GUM desde su publicación ha sido la inconsistencia de mezclar evaluaciones tipo A basadas en una definición frecuencial de la probabilidad [Canavos, 1994], [Mann, 2010], y evaluaciones tipo B basadas en un tratamiento bayesiano [Box y Tiao, 1992], [Lee, 2012], donde una de los mayores problemas surge en la selección de distribuciones no informativas [Jaynes, 1968]. A raíz de ello han aparecido diversos trabajos presentando un tratamiento formalmente consistente: [Weise y Wöger, 1993], [Kacker y Jones, 2003], [Lira y Wöger, 2006].

### 1.3. Dispositivos de medida de corriente basados en la Ley de Ampere

La corriente eléctrica puede definirse<sup>15</sup> como:

Dada una superficie  $S$ , se define *corriente eléctrica* como la cantidad de carga que atraviesa esa superficie en la unidad de tiempo.

A partir de esta definición podría considerarse como método de medida de corriente eléctrica un simple conteo de carga [Wangsness, 1986], sin embargo raramente se realiza de esta forma sino a través de la medida de una magnitud alternativa asociada al fenómeno de la corriente eléctrica a través de una cierta ley física que se asume como correcta. Las magnitudes habitualmente involucradas en la medición de corriente son [Ziegler et al., 2009], [Wang et al., 1995], [Ripka et al., 1996]:

- ▷ Diferencia de potencial eléctrica o balance energético cuando a la carga se le hace circular a través de un material conductor conocido.
- ▷ Campo magnético generado por la corriente.

El primer método típicamente emplea resistencias de valor conocido (shunt) sobre las que se mide la diferencia de potencial entre sus extremos o alternativamente se determina el balance energético a través del calor generado por el paso de corriente (efecto Joule). Dado que el método de calibración que se va a estudiar no está orientado a este tipo de instrumentos, no nos extenderemos más en ellos.

Para el segundo tipo, que es el nos que resulta pertinente, el campo magnético generado puede describirse mediante el valor de la inducción magnética  $\vec{B}$  o de la intensidad de campo magnético  $\vec{H}$ , estando ambos relacionados a través de la expresión:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.16)$$

donde  $\mu$  representa la permeabilidad magnética del medio y se reduce a un escalar para medios magnéticos lineales e isótropos. En ausencia de materiales ferromagnéticos el uso de uno u otro es indistinto dado que ambos son proporcionales a través de la permeabilidad magnética del medio, que se puede aproximar por la del vacío  $\mu_0$  en el muy habitual caso del aire. Sin embargo, la presencia de materiales ferromagnéticos va a constituir una complicación adicional que se tratará más adelante. Baste decir por ahora que en lo que sigue se empleará el vector  $\vec{H}$  para la representación del efecto magnético del conductor.

La ley de Biot y Savart (A.1) permite establecer una conexión entre la corriente que circula por el conductor *y su geometría*, con el campo generado. Por

<sup>15</sup>En el campo de Física normalmente no existe una definición única de la magnitud sino que depende de las magnitudes que se hayan definido previamente. En particular, en nuestro caso la corriente eléctrica podría definirse como el flujo a través de una cierta superficie de la densidad de corriente, siempre y cuando se hubiera definido de forma previa la densidad de corriente.

tanto, la medida del campo en un único punto podría emplearse para la determinación de la corriente. Sin embargo esta aproximación resulta problemática debido entre otros motivos a:

- ▷ El método requiere el conocimiento de la geometría del cable conductor, lo que no siempre es posible. Esta restricción puede superarse acercando lo suficiente al cable el sensor de campo magnético de forma que su efecto pueda aproximarse, dentro de los límites de precisión requeridos, a un conductor indefinido. En este caso se verifica:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad (1.17)$$

- ▷ La dependencia  $1/r$  del campo con la distancia al cable implica una sensibilidad grande frente a errores de posicionado del sensor si éste se coloca en un punto arbitrariamente cercano al conductor. En concreto, a partir de (1.17):

$$\frac{dI}{I} = \frac{dH}{H} + \frac{dr}{r} \quad (1.18)$$

Vemos que, asumiendo constante el error  $(dH, dr)$  asociado a los sistemas de determinación de  $H$  y  $r$ , el error relativo en la determinación de  $I$  resulta divergente cuando  $r$  tiende a cero. Por otra parte, si el sensor se coloca alejado la respuesta magnética se atenúa por lo que la determinación de  $I$  nuevamente resulta divergente dado que, en este caso,  $H$  tiende a cero.

Una mejora sobre el método anterior se basa en utilizar la Ley de Ampere Generalizada de las Ecuaciones de Maxwell [Wangsness, 1986]:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int_{S_C} \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{s} \quad (1.19)$$

donde  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ ,  $C$  es una trayectoria arbitraria cerrada con un sentido de circulación definido y  $S_C$  es cualquier superficie limitada por esa trayectoria. En situaciones habituales, la permitividad del medio toma un valor que hace que el segundo término sea despreciable salvo para campos eléctricos de alta frecuencia que quedan fuera del ámbito habitual de uso de este tipo de instrumentos y del presente trabajo, por lo que puede despreciarse.

Si se considera un camino de circulación específico, que denominaremos LM (Lazo de Medida), que rodee al conductor por el que circula la corriente que se desea medir, y considerando que toda la corriente circula por el interior del conductor<sup>16</sup>, la integral de la derecha representa la corriente que circula por el conductor y, por tanto:

$$\oint_{LM} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (1.20)$$

<sup>16</sup>Esta afirmación resulta bastante asumible: La conductividad del aire que rodea al conductor es del orden de  $1 \times 10^{-14} \text{ S m}^{-1}$  [Pawar et al., 2009] que resulta despreciable frente a la correspondiente a un buen conductor (Cu, Al,...) que es del orden de  $1 \times 10^8 \text{ S m}^{-1}$  (dato obtenido de <http://www.webelements.com/>). Mecanismos como emisión termoiónica, emisión por efecto de campo, etc... [Kuffel et al., 2000], [Naidu y Kamaraju, 2013] requieren condiciones extremas (altas temperaturas, campos electrostáticos elevados,...) por lo que su contribución tampoco es significativa.

El resultado total puede ser positivo o negativo en función de que la corriente atraviese  $S_C$  en el sentido de avance de un sacacorchos que gire en el mismo sentido en que se recorre el camino de circulación o negativa en caso contrario. Adicionalmente la corriente puede estar confinada en un hilo unidimensional o estar repartida en varios de ellos, en cuyo caso  $I$  corresponde a la suma aritmética de las corrientes de cada hilo con la asignación de signos indicada. En un caso general la corriente puede estar distribuida por lo que quedaría definida por una densidad de corriente:

$$\oint_{LM} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_{LM}} \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.21)$$

donde  $S_{LM}$  representa una superficie subtendida por el LM.

Denominaremos ALBA (Ampere Law Based Apparatus) a los dispositivos que operan de esta manera<sup>17</sup>. Podemos clasificarlos en dos grupos: instrumentos de evaluación directa e instrumentos de evaluación indirecta.

### 1.3.1. Instrumentos de evaluación directa

Estos instrumentos obtienen el resultado evaluando directamente la integral de Ampere. Una evaluación exacta conduciría a un resultado exacto si bien esto implicaría muestrear el valor  $\vec{H}$  a lo largo de un continuo de puntos, lo que no puede llevarse a cabo de forma práctica. Por ello se estima su valor a partir de un conjunto discreto de medidas obtenidas de sensores [Lenz y Edelstein, 2006], [Reig et al., 2009] que se disponen a lo largo del LM (Fig. 1.1). Típicamente, los sensores determinan el valor local del vector inducción magnética  $\vec{B}$ , a partir del cual puede obtenerse  $\vec{H}$  (1.16) La estimación del valor de la corriente se establece por tanto como:

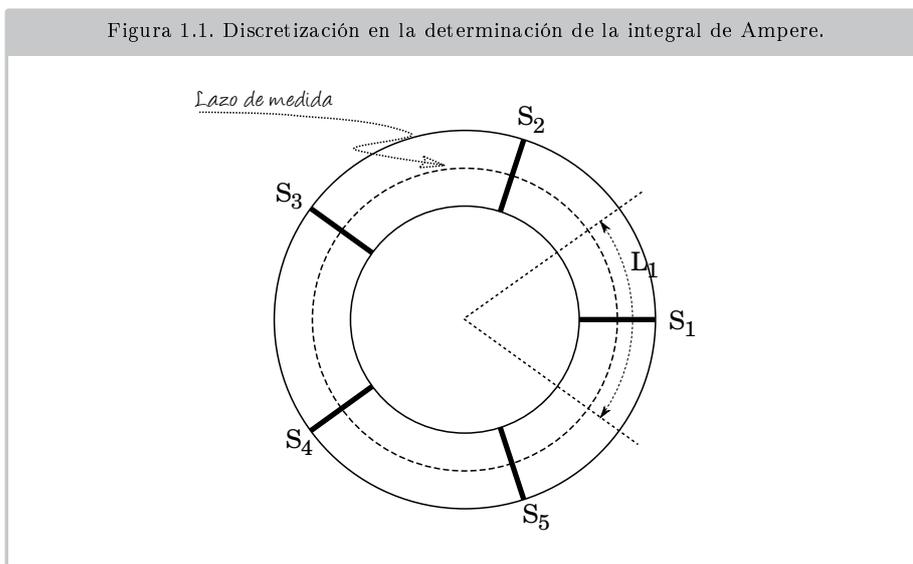
$$I \approx \sum_{k=1}^N \frac{1}{\mu_k} B_k^{(tg)} L_k \quad (1.22)$$

donde  $B_k^{(tg)}$  representa la componente de  $\vec{B}$  tangencial al camino de circulación en la posición en donde se encuentra el  $k$ -ésimo sensor y  $L_k$  la longitud del segmento del LM asociado al sensor. Asumiendo un número discreto de sensores, la expresión resulta exacta si el sistema está construido a base de materiales magnéticos lineales y el campo  $\vec{B}$  se mantiene constante a lo largo del LM. Esta situación es típica de un instrumento con un camino de integración circular que mide una corriente que fluye a través de un hilo rectilíneo suficientemente largo, centrado en el LM y ubicado perpendicularmente al mismo. Estas condiciones son excesivamente restrictivas y de darse, bastaría un único sensor para determinar el valor de la corriente. Sin embargo en muchas situaciones prácticas estas condiciones no se dan y en ese caso diferentes fuentes de error pueden evidenciarse de (1.22):

- ▷ **Discretización de la integral.** Aunque numéricamente pueden obtenerse mejores fórmulas de aproximación de la integral que la mostrada [Press

<sup>17</sup>El nombre se ha elegido a partir del acrónimo inglés “Ampere Law Based Apparatus”, que conduce a un acrónimo, ALBA, que resulta sencillo de pronunciar. Los nombres en castellano que inicialmente se intentaron, como por ejemplo, “Dispositivo Basado en la Ley de Ampere”, conducían a acrónimos, DBLA, de pronunciación imposible.

Figura 1.1. Discretización en la determinación de la integral de Ampere.



et al., 1992], siempre existirá un error matemático de aproximación numérica de la misma, máxime cuando en algunas situaciones ni el número de sensores es elevado ni están uniformemente ubicados a lo largo del LM.

- ▷ **Inadecuada estimación de la permeabilidad magnética.** Si se emplean materiales magnéticos no lineales a lo largo del LM, la permeabilidad es función del nivel de excitación magnética del material y previsiblemente dependerá de la posición, mientras que el cálculo de la integral se hace en base a valores estimados en un punto concreto o directamente a valores nominales del material ferromagnético establecidos por el fabricante. Especialmente críticos son los puntos en los que el material se satura.

### 1.3.2. Instrumentos de evaluación indirecta

Estos instrumentos generan una corriente que crea un campo contrario al creado por la corriente a medir con el objeto de conseguir hacer nula la integral a lo largo del LM. En esas condiciones la corriente generada es igual a la corriente a medir. Dentro de este grupo se encuentran entre otros, los transformadores de intensidad [Ras, 2010], [Chapman, 2012], [Fraile, 2008], las pinzas amperimétricas que actúan como tales<sup>18</sup>, comparadores de corriente [Miljanic et al., 1962], [MacMartin y Kusters, 1965], [Kusters y Moore, 1961].

La interpretación de un transformador de intensidad como un ALBA puede verse como sigue: un transformador de corriente de medida ideal podría construirse de la siguiente forma. Se elige una línea de campo que rodee al cable o cables que transportan la corriente a medir. Se construye a lo largo de esa línea un solenoide de espiras independientes cuyas corrientes se ajustan de forma que el campo en generado en el centro de cada espira sea del mismo módulo pero diferente sentido al creado por los cables. De esta forma aseguramos que el campo total (el generado por la corriente a medir y el generado por el solenoide) es

<sup>18</sup>en contraposición a las pinzas amperimétricas basadas en sensores Hall.

nulo. En este caso la integral de ampere a lo largo de la trayectoria es nula y por tanto:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_P - \sum_{k=1}^N I_{S_k} = I_P - I_S \quad (1.23)$$

Un transformador de medida real trata de imitar este comportamiento, es decir, determina el campo en el centro de cada espira y ajusta la corriente que circula por ella hasta que sea nulo. El mecanismo empleado para ello es la inducción de corriente en la espira descrito por la Ley de Faraday, sin embargo aparecen diversos efectos que los desvían de este comportamiento ideal:

- ▷ El número  $N$  de espiras es discreto.
- ▷ Las espiras tienen una sección no despreciable.
- ▷ El campo muestreado no es el del centro de la espira (espiras de radio  $R \rightarrow 0$ ) sino el de la superficie subtendida por la espira, de forma que la corriente inducida en respuesta obedece a un valor promedio.
- ▷ La corriente inducida nunca puede dar pie a una cancelación completa dado que cesaría el mecanismo al no haber flujo<sup>19</sup>.
- ▷ Las espiras no se interconectan de forma que sus corrientes se adicione sino que se conectan en serie, por lo que la corriente es un efecto promedio además de depender de la resistencia de la espira.

Los comparadores de corriente funcionan de forma similar si bien disponen de bobinados adicionales para compensar el error debido a la corriente de magnetización. La homogénea distribución de los bobinados de primario y secundario en estos instrumentos así como el hecho de que no pueden desplazarse hace que la incertidumbre de descentramiento sea pequeña y esté asociada a la orientación global del dispositivo.

## 1.4. Requerimientos de un ALBA

El objeto de la siguiente sección va a ser iniciar el estudio de esta componente de incertidumbre. Sin embargo de forma previa hay que establecer qué se espera de estos instrumentos, o equivalentemente, dar una definición formal de un ALBA:

---

<sup>19</sup>Este efecto es el origen de la corriente de vacío, a partir de la cual se inician los estudios clásicos del error de este tipo de instrumentos.

Un ALBA o medidor de corriente que trabaja según la Ley de Ampere es un dispositivo destinado a la medición de corriente eléctrica que define:

- ▷ Una trayectoria cerrada, que denominaremos *lazo de medida* (LM), y un sentido de circulación para la misma.
- ▷ La forma y posición (características geométricas), frecuencia de la corriente y otros aspectos de los conductores sobre los que es capaz de operar. A este conjunto lo denominaremos rango (de medida) de uso.

El instrumento utiliza la Integral de Ampere para generar información suficiente para definir un número real que represente el valor de la corriente que transporta cualquier sistema de conductores cuyas características estén dentro de su rango de uso.

Es responsabilidad del fabricante especificar ambos aspectos. Con respecto al rango de uso se deben especificar valores máximos, mínimos, frecuencia y demás características comunes a todos los instrumentos destinados a medida de corriente eléctrica, pero además debe indicar limitaciones con respecto a los parámetros geométricos de los conductores. Esto puede hacerse mediante una o varias de las siguientes informaciones:

- ▷ Establecer restricciones sobre la zona del espacio donde pueda estar ubicada la distribución. Eso se puede establecer de forma física, con impedimentos mecánicos para que la corriente circule por la zona permitida, o bien a través del manual de uso del instrumento. En ausencia de mayor información se considerará como adecuada toda la zona físicamente accesible. Al espacio en el que puede estar ubicada la distribución de corriente lo denominaremos volumen nominal de funcionamiento.
- ▷ Establecer restricciones sobre la inhomogeneidad de la distribución de corriente a medir<sup>20</sup>. En ausencia de mayor información se considerará que ninguna subdistribución conectada de la distribución de corriente supera la corriente máxima medible por el dispositivo.
- ▷ Establecer restricciones sobre factores de influencia como son campos magnéticos exteriores y conductores exteriores al LM que deberían dar una lectura nula. En ausencia de mayor información se supondrá que el aparato está destinado a operar bajo un campo magnético igual al terrestre y que es tolerante a la presencia de un conductor exterior ubicado en cualquier punto exterior al LM que sea físicamente accesible y que no transporte una corriente superior a la máxima medible por el dispositivo.

---

<sup>20</sup>Dos cables paralelos por los que circulen corrientes en sentidos opuestos de, digamos, 10000 A y 10001 A darían como resultado un valor de corriente que puede estar dentro del rango (numérico) de uso de un instrumento no especializado pero resulta poco realista suponer que va a ser capaz dar un resultado adecuado.

## 1.5. Función respuesta de un dispositivo de medida basado en la Ley de Ampere

En esta sección se va a iniciar el análisis de la calibración de un ALBA a raíz de la cual se introducirá una representación intrínseca de estos dispositivos a efectos de poder realizar un tratamiento homogéneo de referencias e instrumentos de medida en los capítulos posteriores. Finalmente, se establecerá la conexión entre esta representación intrínseca y la representación general descrita en la sección 1.2.1.

En términos generales, el proceso de calibración de un medidor de corriente en, digamos, el punto  $I$  implica someterlo a una corriente de esa magnitud y analizar su respuesta. El experimento se realiza una serie de veces en condiciones de repetibilidad y se lleva a cabo un análisis estadístico sobre los resultados. Asegurar la repetibilidad implica entre otros aspectos que no se aplicará literalmente la misma excitación en todas las series sino que se reconstruirá cada vez la corriente de excitación ajustándola al valor del punto de calibración. Para un amperímetro cuyo funcionamiento radica en un shunt de corriente este proceso se lleva a cabo transportando la corriente mediante un cable *cualquiera* cuya sección y geometría no van a tener un efecto relevante en comparación con otras fuentes de incertidumbre y dentro de unos márgenes razonables. En un ALBA la situación es radicalmente distinta. El objetivo sigue siendo la calibración en el punto  $I$ , pero en este caso la geometría y forma del conductor sí son claramente relevantes como se ha justificado en la sección 1.3, por lo que el aseguramiento de las condiciones de repetibilidad deberá contemplar esta variabilidad en cuanto a la geometría. En otro caso debería hablarse de “calibración en el punto  $I$  cuando está sometido a un cable indefinido centrado” o “calibración en el punto  $I$  cuando está sometido a un cable indefinido centrado o no”, etc. . . . La variabilidad asociada a la geometría y posición va a constituir una fuente de incertidumbre.

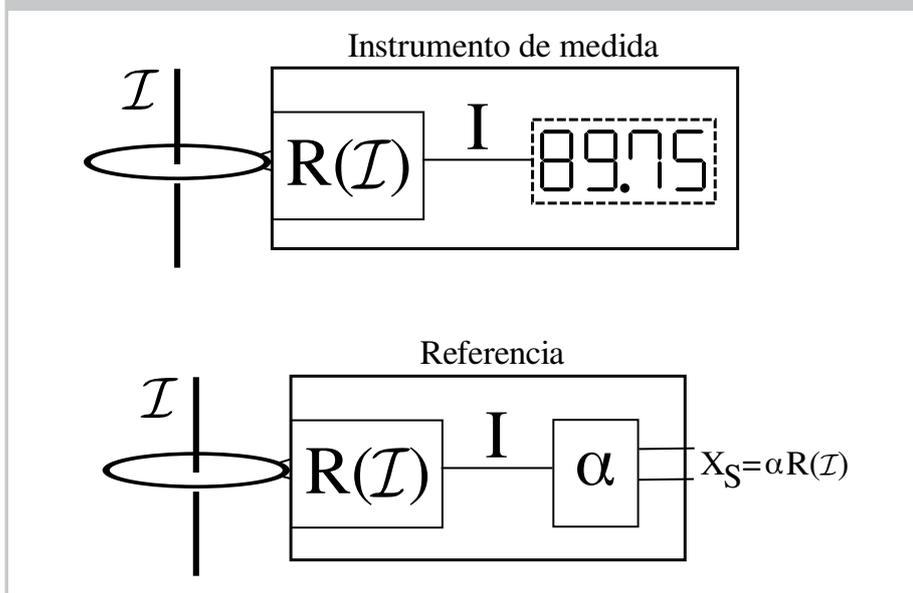
Denotaremos mediante  $\mathcal{I}$  a una excitación física real, lo que incluye sus características geométricas así como la corriente  $I$  que transporta<sup>21</sup>. Dado un cierto ALBA, podemos presuponer la existencia de una *función característica de la respuesta del dispositivo*  $R$  tal que a cada excitación física real  $\mathcal{I}$  le asigna un valor numérico  $I$ :

$$I = R(\mathcal{I}) \tag{1.24}$$

La función  $R(\mathcal{I})$  no necesariamente será accesible por el usuario y en ese sentido representa una conceptualización funcional del dispositivo a través de la que se analizará el problema de calibración del mismo y que permitirá homogeneizar el tratamiento tanto para referencias como para instrumentos de medida (ver figura 1.2). Por otra parte el número generado (podría denominarse “lectura” ó “lectura interna”) toma sentido con referencia al Teorema de Representación y Teorema de Unicidad citados al inicio de la sección 1.2.

<sup>21</sup>Nuevamente surge aquí un problema de imprecisión en la definición; ¿que significa “la corriente que transporta” cuando se aplica, por ejemplo, a dos conductores unidimensionales paralelos por los que circulan corrientes independientes?. En el próximo capítulo se presentará una aproximación más sistemática a este concepto. Baste por ahora con suponer que nuestra excitación física está constituida por un único cable conductor y en este caso la corriente que transporta es, intuitivamente, la corriente que circula por el cable.

Figura 1.2. Caracterización de un ALBA mediante la función  $R$ . Para un instrumento de medida, el resultado de  $R$  se conecta directamente al visualizador. En el caso de una referencia (un transductor), el resultado de  $R$  se multiplica por una constante de adaptación  $\alpha$  para generar la magnitud de salida  $X_S$ .



De esta forma, el problema de calibración queda dividido en dos partes:

- ▷ Calibración de la función  $R$
- ▷ A partir de lo anterior, resultado de la calibración del ALBA en función de que se trate de una referencia o de un instrumento de medida.

Dejaremos para los próximos capítulos la primera parte y nos vamos a ocupar ahora de la segunda, diferenciando si se trata de una referencia o un instrumento de medida y contrastándolo con lo que constituiría una calibración *compacta*, entendiendo por tal un formalismo que no tiene en cuenta la función  $R$ . Tal como se ha justificado previamente, la función  $R$  arrojará resultados diferentes para una misma corriente, cuando se le apliquen excitaciones  $\mathcal{I}$  con diferentes geometrías dentro del rango de uso del instrumento y que transporten la misma corriente.

### 1.5.1. Referencias

Si el dispositivo es una referencia, se va a comportar como un transductor<sup>22</sup> estableciendo una relación entre la magnitud de entrada, la intensidad  $I$  que circula por el cable a medir y la magnitud de salida ( $X_S$ ). Por tanto vendrá caracterizado por un coeficiente  $K_P$ .

$$X_S = K_P I \quad (1.25)$$

<sup>22</sup>Como ejemplo pueden considerarse las sondas amperimétricas que muchos fabricantes comercializan para se conectadas a los terminales, típicamente de tensión, de un multímetro. El dispositivo por si mismo (considerado independientemente del multímetro) es un ALBA que actúa como transductor corriente-tensión.

La utilización del dispositivo como transductor pasará por ubicar correctamente el conductor a medir respecto de la referencias y tomar las correspondientes lecturas. Para las estimación de la incertidumbre se requerirá el conocimiento de  $K_P$  o, equivalentemente, de  $K_{P \rightarrow vcv}$  y  $K_{P \rightarrow s^2}$ . Esta información debe suministrarla el fabricante en las especificaciones del instrumento o bien se debe obtener por calibración.

### 1.5.1.1. Calibración compacta

En este caso se construirá una muestra aleatoria de excitaciones que estén dentro del rango de uso del instrumento. La corriente aplicada a ellas se medirá con patrones del laboratorio ( $I_P$ ), así como la magnitud de respuesta ( $X_S$ ), por lo que se suponen conocidos los valores convencionalmente verdaderos y la varianzas de ambos. Aplicando las leyes de propagación:

$$K_{P \rightarrow vcv} = \frac{X_{S \rightarrow vcv}}{I_{P \rightarrow vcv}} \quad (1.26)$$

$$K_{P \rightarrow s^2} = \left( \frac{1}{I_{P \rightarrow vcv}} \right)^2 X_{S \rightarrow s^2} + \left( -\frac{X_{S \rightarrow vcv}}{(I_{P \rightarrow vcv})^2} \right)^2 I_{P \rightarrow s^2} \quad (1.27)$$

### 1.5.1.2. Calibración a partir de la función respuesta

Para establecer la conexión de  $X_S$  con la función  $R$  podemos suponer la existencia de una constante (teórica),  $\alpha$ , *que no introduce incertidumbre* y que sirve únicamente para hacer la adaptación entre el resultado de  $R$ , que es la fuente de toda la incertidumbre del dispositivo, y la magnitud de salida.

$$X_S = \alpha R(I) \quad (1.28)$$

El método que se va a describir en los próximos capítulos determinará el valor de  $R(I_P)$  y por tanto se encargará de obtener el valor convencionalmente verdadero y varianza de  $R(I_P)$ . La determinación de  $I_P$  se realizará mediante patrones de laboratorio. Y finalmente la constante  $\alpha$ , tal como se ha indicado, se considerará una constante de adaptación matemática y por tanto conocida sin incertidumbre.

$$K_{P \rightarrow vcv} = \alpha \frac{R_{\rightarrow vcv}}{I_{P \rightarrow vcv}} \quad (1.29)$$

$$K_{P \rightarrow s^2} = \left( \frac{\alpha}{I_{P \rightarrow vcv}} \right)^2 R_{\rightarrow s^2} + \left( -\alpha \frac{R_{\rightarrow vcv}}{(I_{P \rightarrow vcv})^2} \right)^2 I_{P \rightarrow s^2} \quad (1.30)$$

Hay que hacer notar que cuando en capítulos posteriores se indique que se está midiendo la función  $R$ , lógicamente se debe sobreentender que en realidad se mide la magnitud de salida  $X_S$  a partir de la cual se obtiene  $R = X_S/\alpha$

### 1.5.2. Instrumento de medida

En este caso la modelización del dispositivo va a ser la habitual (parte visible, oculta y desviación), donde el término de desviación lo deberá facilitar el fabricante o el correspondiente certificado de calibración.

#### 1.5.2.1. Calibración compacta

Para ello, se construirán una muestra aleatoria de excitaciones pertenecientes al rango de uso del instrumento. La corriente aplicada a ellas se medirá con patrones del laboratorio ( $I_P$ ) y se procederá según las expresiones (1.11).

#### 1.5.2.2. Calibración a partir de la función respuesta

En esta situación, se obtendrá el valor de  $R$  como magnitud indirecta *y no a través de la información suministrada por un visualizador*, por lo que no se requiere considerar efectos de truncamiento (que conduciría a las partes visible y oculta). Por tanto en este caso, pese a tratarse de un instrumento de medida, podemos considerar que  $R = V_{IS} + O_C$ . De esta forma el modelo de la calibración queda:

$$D_{ES} = I_P - R \quad (1.31)$$

y aplicando las leyes de propagación.

$$D_{ES \rightarrow v_{CV}} = I_{P \rightarrow v_{CV}} - R_{\rightarrow v_{CV}} \quad (1.32)$$

$$D_{ES \rightarrow s^2} = I_{P \rightarrow s^2} + R_{\rightarrow s^2} \quad (1.33)$$

### 1.5.3. Caracterización metrológica de la función respuesta.

Directa o indirectamente, la calibración de un ALBA pasa por determinar el valor convencionalmente verdadero y varianza de  $R$ . Idealmente

$$\text{Esp}(R(\mathcal{I})) = \int_{\sqrt{\mathcal{I}}} R(\mathcal{I}) f_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}) d\mathcal{I} \quad (1.34)$$

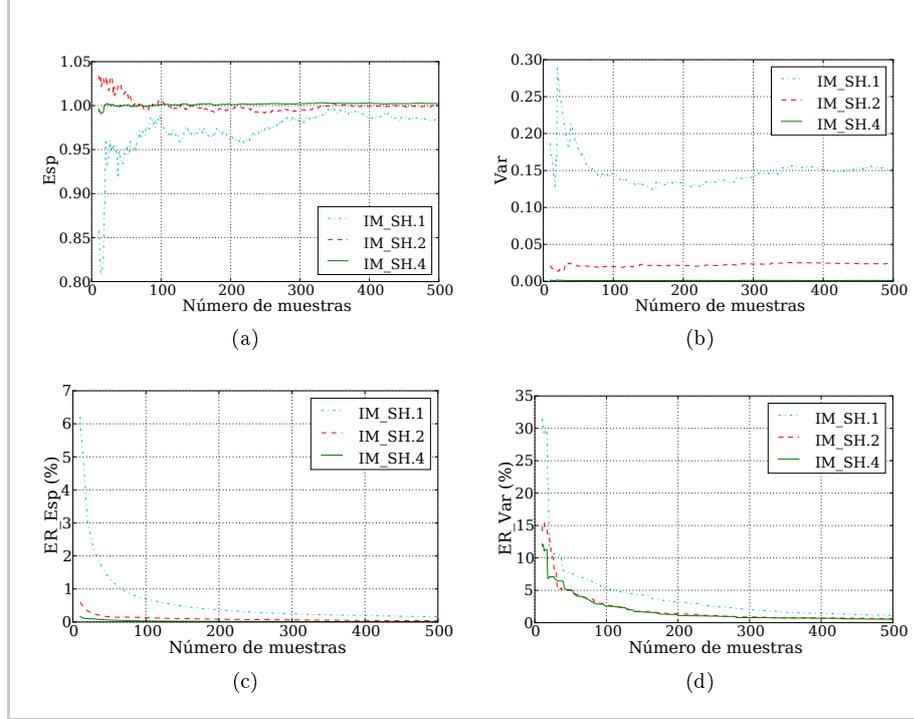
$$\text{Var}(R(\mathcal{I})) = \int_{\sqrt{\mathcal{I}}} [R(\mathcal{I}) - \text{Esp}(R(\mathcal{I}))]^2 f_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}) d\mathcal{I} \quad (1.35)$$

donde la integración se extiende a todas las excitaciones que pueden ser aplicadas a la pinza. Las excitaciones se suelen considerar equiprobables, de forma que la función densidad de probabilidad es una constante de valor:

$$f_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}) = \frac{1}{\int_{\sqrt{\mathcal{I}}} d\mathcal{I}} \quad (1.36)$$

El método más obvio para determinar el valor de estas integrales consiste en utilizar una aproximación discreta, sustituyendo las integrales por sumatorios y someter al instrumento de medida a diferentes excitaciones elegidas aleatoriamente. En esencia, esto es lo que realizan los métodos de calibración que se

Figura 1.3. Estimación de (a)  $\text{Esp}$  y (b)  $\text{Var}$ , ecuaciones (1.36) y (1.35), y errores relativos de (c)  $\text{Esp}$  y (d)  $\text{Var}$  mediante el método de Monte Carlo, en función del número de muestras.



han denominado de *calibración directa*. El error en la estimación dependerá del número de muestras. Alternativamente, el número de muestras necesarias para acotar el error dependerá de la convergencia de la integral lo que en definitiva dependerá del instrumento de medida en sí, del cual, en principio, no se tienen control en un laboratorio de calibración.

Establecer el número necesario de muestras aleatorias no es un problema sencillo<sup>23</sup>. No obstante, a efectos de ilustrar lo anterior podemos simular el proceso empleando ALBA del tipo IM\_SH.1, IM\_SH.2 y IM\_SH.4 (ver sección 3.5). Los instrumentos han sido sometidos a 500 excitaciones aleatorias de tipo rectangular (ver sección 2.4.1) y se han calculado el valor de ambas integrales, así como la estimación del error cometido en su evaluación, en función del número de excitaciones. Los resultados se muestran en la figura 1.3. Incluso considerando un instrumento de tan baja calidad como IM\_SH.1 las figuras apuntan a que un análisis basado entre 10 y 50 excitaciones podría ser suficiente para establecer el valor de la integrales<sup>24</sup>. Dada la amplia variedad de topologías de conductores a los que son sometidos los instrumentos, este proceso puede resultar inaceptable en base a criterios de tiempo y coste económico [Destefan, 1995], por lo que el

<sup>23</sup>Se trata en realidad de un problema de análisis multivariante [Anderson, 2003] como se verá en capítulos posteriores y no tiene una solución claramente establecida [Johnson y Wichern, 2007].

<sup>24</sup>En términos generales, la literatura apunta en estos casos a un número considerablemente mayor.

problema invita a considerar soluciones alternativas.

## 1.6. Un nuevo método de calibración

### 1.6.1. Revisión bibliográfica

El ALBA más considerado en la literatura con respecto a efectos geométricos posiblemente sea la bobina Rogowsky debido tanto a la gran influencia que este efecto tiene sobre ellas como el auge que este tipo de dispositivos está teniendo en los últimos años. En la literatura se encuentran diferentes trabajos para diseñar ALBA que superen al transformador convencional en base a criterios de precisión, respuesta en frecuencia [Poulichet et al., 2003], inmunidad al crosstalk, coste y otros. En ese sentido, las técnicas de compensación de flujo que condujeron al CC (Comparador de Corriente) [Miljanic et al., 1962], [MacMartin y Kusters, 1965], [Kusters y Moore, 1961], [Kusters y Moore, 1964] y similares [Ramboz, 1996], [Slomovitz, 2000], [McNeill et al., 2004], [Bera y Chattopadhyay, 2003]. En [Xiaobing et al., 2013] se realiza una compensación de efectos capacitivos asociados a los comparadores de corriente. Los DCCT (Transformador de corriente de corriente continua) también llevan diferentes bobinados de compensación [Hudson y Bouwknecht, 2005]. Igualmente resultan abundantes los análisis de topologías de ubicación de conjuntos de sensores magnéticos para la medida de corriente y eliminación de crosstalk: [Di Rienzo et al., 2001], [Bazzocchi y Rienzo, 2000], [Cristaldi et al., 2001], [Li et al., 2009], [Mlejnek et al., 2008], [Chen y Chen, 2011]. En [Gao et al., 2014] y [Chan et al., 2013] se proponen ALBA basados en tres sensores magnéticos que se ubican en las cercanías de la línea a medir; en cada instalación, el dispositivo debe calibrarse previamente para determinar sus parámetros de funcionamiento que dependerán de la posición exacta de los sensores. En [Korasli, 2007] se describe un sistema de medida de corrientes trifásicas mediante un ALBA de un solo núcleo. Cada línea se mide individualmente y se anula el efecto magnético de las otras dos mediante sendos bobinados de compensación. Los efectos de geométricos se anulan forzando una posición para el conductor principal. Se exploran técnicas de apantallado magnético en general [Canova et al., 2004] y aplicado a ALBA [Imamura et al., 1998] (con sensores magneto-ópticos), [Usón et al., 2005c], [Usón, 2007]. La variación de la respuesta de ALBA frente a descentramiento, variabilidad geométrica de los conductores de excitación o crosstalk ha sido considerada en [Givi et al., 2013], [Letosa et al., 2004], [Usón, 2007], [Samplón-Chalmeta et al., 2005] y lateralmente en algunas otras referencias [Poulichet et al., 2003]. Lee et al. [2001] mide la variabilidad de la respuesta de una bobina Rogowsky de forma elíptica bajo variaciones de su excentricidad, mientras que en [Ferković et al., 2009] se consideran descentramientos del cable rectilíneo indefinido de excitación así como inhomogeneidades en el bobinado. [Qing et al., 2006] incluye mayor variabilidad en los posicionados. En [Qu et al., 2009], [Xing et al., 2012a], [Xing et al., 2012b] se analiza el problema considerando modelos circuitales de parámetros concentrados y modelos basados en circuitos magnéticos para diferentes tipos de transformadores.

Con respecto a métodos de calibración de ALBA, en [Draxler et al., 2013] se realiza una calibración de un transformador de corriente de 20 kA empleando dos circuitos (bobinados) diferentes como excitación y se ponen de manifiesto las

diferencias del resultado asociadas a la variación geométrica. Una calibración similar se describe en [Draxler et al., 2011] pero aplicada a una bobina Rogowsky. En [Djokic et al., 2011] se realiza una calibración de varias bobinas Rogowsky a efectos de determinar a partir de que corrientes empiezan a evidenciarse respuestas no lineales. El estudio se hace con corrientes primarias geoméricamente centradas en las bobinas. [Brandolini et al., 2009] muestra el método simplificado para la calibración de transformadores de tensión y corriente de precisión industrial. No se hace referencia al posicionamiento del conductor a medir. En [Suomalainen y Hallstrom, 2008] se realiza una calibración in situ de un transformador de corriente de alta tensión empleando como uno de los patrones una bobina Rogowsky. Dado que la bobina se calibra y se usa como patrón en las mismas circunstancias, los autores estiman que el efecto asociado al posible pequeño desplazamiento de la bobina es menor, si bien no lo cuantifican. En [Zhu y Xu, 1998] se plantea un sistema de calibración para sistemas de muy alta corriente (320 kA) basado en cuatro espiras en forma de cruz que permite un cierto análisis de la sensibilidad del ALBA frente a descentramientos o campos exteriores, aunque no ofrecen resultados concretos. En [Chiampi et al., 2011] se realiza un estudio-calibración de una bobina Rogowsky frente a variabilidad geométrica a través de un método de Monte Carlo basado en 20000 muestras. Se emplea para ello un modelo FEM (Método de Elementos Finitos) validado experimentalmente. En [Galliana y Capra, 2012] se describe un sistema real de calibración de ALBA frente a la variabilidad geométrica de los conductores de excitación, aunque restringida a conductores indefinidos descentrados. Sometido a mejor conocimiento, éste es el intento mas riguroso publicado hasta ahora de afrontar este problema.

### 1.6.2. Descripción cualitativa del método propuesto

Frente a lo anterior, en los próximos capítulos se va a presentar y analizar una metodología alternativa de calibración de la función respuesta del dispositivo,  $R$ , de la que se va a hacer a continuación una descripción general con objeto de servir de guía al lector. Por ello, se ha sacrificado el excesivo rigor y la proliferación de detalles en favor de una claridad explicativa.

El proceso de calibración de un ALBA pasa por determinar su respuesta ante todas las posibles excitaciones a las que pueda ser sometido. El método directo implica construir físicamente una muestra suficientemente grande de esas excitaciones y aplicarlas directamente al dispositivo para obtener su respuesta. El método propuesto pretende “simular” todas las excitaciones a partir de un conjunto fijo (y preestablecido) de circuitos.

Se parte de la consideración de que el instrumento determina la corriente mediante la evaluación de la Integral de Ampere a lo largo de una cierta trayectoria LM. Así, un ALBA estrictamente no es un medidor de corriente eléctrica sino un medidor de campo magnético que luego interpreta como una corriente eléctrica. Por tanto desde el punto de vista del instrumento es equivalente considerar:

- ▷ Un cable conductor por el que circula una corriente.
- ▷ El campo magnético  $\vec{H}$  que crea el cable conductor a lo largo del lazo de medida.

En ese sentido es posible simular el efecto de un circuito por el que circula una corriente mediante cualquier otro sistema capaz de sintetizar el mismo campo magnético. Hay que tener en cuenta que realmente sólo estamos interesados en la componente tangencial de  $\vec{H}$  a lo largo del lazo de medida, puesto que es la que se considera en la Integral de Ampere. Esta componente define una función escalar cuya variable independiente es la coordenada de posición (en algún sistema de coordenadas) a lo largo del lazo de medida. Para aligerar la notación y salvo que se indique lo contrario, la denotaremos como  $H$ .

Como sistema de generación de  $H$  se van a emplear un conjunto de circuitos fijos sobre los que se controlará la corriente de excitación. Esencialmente puede emplearse cualquier conjunto de circuitos de forma y ubicación arbitraria, aunque más adelante se analizará qué configuraciones resultan más adecuadas. Dado que la Integral de Ampere sobre el circuito a representar es no nula, necesitamos en nuestro sistema un circuito que aporte una contribución no nula a la integral, esto es, necesitamos un circuito que corte el lazo de medida por el interior y se cierre por el exterior. A ese circuito lo denominaremos circuito principal. El resto de los circuitos no aportarán valor neto a la integral (serán circuitos que se cierran por el interior del lazo de medida) pero que ayudarán a moldear el campo  $H$  en los diferentes puntos del lazo.

Podemos definir ahora dos conjuntos de excitaciones<sup>25</sup>:

- ▷ Las excitaciones que debemos representar. Son las que quedan establecidas por el rango de uso del ALBA.
- ▷ Las excitaciones que somos capaces de sintetizar. Son las que podemos obtener variando las corrientes que se aplican a los conductores del sistema de generación.

El problema que surge es: dado un circuito que se quiere reproducir ¿que corriente debo aplicar a cada una de las espiras del sistema de calibración para obtener la mejor aproximación al campo  $H$  generado por el circuito de partida? La técnica empleada para obtener la respuesta la obtenemos mediante el Análisis Funcional [Kreyszig, 1989].

Las funciones  $H$  pueden tratarse como vectores de un cierto espacio vectorial. Y como tales, pueden expresarse como combinaciones lineales de los vectores de la base. Por otra parte, si se define un producto escalar para el espacio vectorial, éste se convierte en un espacio métrico en el cual cobra sentido hablar de la “distancia entre vectores” como el módulo de su diferencia:

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y | x - y)} \quad (1.37)$$

La introducción del producto escalar va a traer dos ventajas:

- ▷ Pueden definirse bases ortonormales para el espacio vectorial. La representación de los distintos vectores del espacio mediante ellas facilitará su manipulación.
- ▷ Puede definirse una distancia entre vectores (en nuestro caso, los vectores son funciones definidas a lo largo del lazo de medida) y tomarse como

<sup>25</sup>Emplearemos el término genérico de *excitación* para denotar a un circuito que se aplica a un ALBA o bien a un campo  $H$  que se aplica a su lazo de medida.

criterio de optimización. Una función (vector) será tanto más parecida a otra cuanto menor sea su distancia.

Habíamos definido dos conjuntos de excitaciones: Las excitaciones que éramos capaces de sintetizar y las que necesitamos reproducir. Para cada uno de ellos vamos a generar una base ortonormal que resulte adecuada:

- ▷ Las excitaciones que somos capaces de representar las obtenemos variando (adecuadamente) la corriente que se aplica a los conductores del sistema de generación. Esto es equivalente a decir que las excitaciones que somos capaces de generar son combinaciones lineales de las excitaciones obtenidas por los conductores del sistema de generación, donde las corrientes aplicadas son los coeficientes. Sin embargo las excitaciones de los conductores del sistema de generación no constituyen una base ortonormal, por lo que a partir de estos se construirá una base de ese tipo. Una vez que desarrollemos una excitación en función de esa base, mediante una operación matricial podremos saber las corrientes que hay que aplicar a los conductores para generar esa excitación.
- ▷ Las excitaciones que debemos representar están definidas fundamentalmente a partir de limitaciones geométricas: “Los conductores a medir deben tener una longitud mínima de...”, “los conductores a medir deben estar a una distancia mínima del circuito magnético de la mordaza...”, etc... Obtener una base ortonormal que resulte representativa no es una cuestión trivial y baste decir por ahora que esencialmente se han empleado funciones similares al seno y coseno en una técnica similar al desarrollo en serie de Fourier.

El sistema de generación de excitaciones dispone de un conjunto finito de conductores, lo que va a condicionar la calidad con que podrá reproducir excitaciones arbitrarias. A mayor número de conductores, mejor calidad. La calidad de una reproducción concreta vendrá representada mediante un escalar  $\eta$  cuyo valor será la distancia (relativa) entre el vector a representar y la réplica. El capítulo 2 está destinado a la descripción, análisis y optimización de este dispositivo que denominaremos, por otra parte, sistema de calibración.

El objetivo final del sistema de calibración es la calibración de un instrumento de medida en un punto, digamos  $I_0$  amperios. Esencialmente ello implica determinar la esperanza y la varianza de la función respuesta,  $R$ , evaluadas sobre todos los circuitos que pueden ser aplicados al instrumento de medida y que transportan la corriente  $I_0$ . El procedimiento ahora es sencillo. Generamos una muestra de las excitaciones posibles, las recreamos con el sistema de calibración, obtenemos la lectura del instrumento y calculamos la media y la varianza del conjunto de resultados. Dado que ahora no es necesario construir cada circuito posible, el proceso se facilita mucho, sin embargo aun resulta engorroso puesto que instrumentalmente tenemos que ser capaces de excitar todas las espiras simultáneamente con una corriente específica cada una.

Podemos superar este problema asumiendo esencialmente que el instrumento se comporta de forma lineal frente a excitaciones, esto es, que la lectura que ofrece frente a dos circuitos actuando simultáneamente es igual a la suma de las lecturas obtenidas con las excitaciones actuando independientemente. Y de la misma manera, la lectura que ofrece para un cierto circuito es  $k$  veces más

pequeña que la que se obtiene con el mismo circuito pero por el que circula una intensidad  $k$  veces mayor (veremos que estas suposiciones no resultan tan restrictivas como parecen). De esta forma, conociendo la respuesta del instrumento frente a cada uno de los circuitos del sistema de calibración *individualmente*, se puede conocer el resultado que ofrecerá frente a cualquier excitación. A partir de esta hipótesis, el capítulo 3 se dedica a sistematizar la estimación de incertidumbre (de calibración) del instrumento cuyo origen puede establecerse en:

- ▷ La dispersión de las lecturas del instrumento cuando es excitado por los diferentes circuitos del sistema de calibración. Esencialmente esta fuente está asociada a la dispersión de las lecturas del instrumento cuando se varían los parámetros geométricos.
- ▷ La dispersión de las lecturas del instrumento cuando es excitado por la misma espira. Esencialmente esta fuente de incertidumbre correspondiente a la falta de repetibilidad, está asociada a la incertidumbre de los patrones empleados por el laboratorio para calibrar el instrumento, junto con otros factores: influencia del operador, derivas térmicas, etc...
- ▷ La incertidumbre asociada a la incapacidad de reproducir todo el conjunto de excitaciones susceptibles de ser aplicadas al instrumento. Esta fuente de incertidumbre está asociada a la limitación del sistema de calibración para hacer su tarea.

## 1.7. Excitaciones equivalentes

El sistema de calibración recrea la excitación a aplicar al ALBA mediante otra *equivalente* sintetizada con los conductores de que dispone. Pero, ¿qué se entiende por excitación equivalente? Lo que se pretende expresar es que *dos excitaciones son equivalentes cuando el instrumento no es capaz de distinguir las*. Esta afirmación no sólo implica que la respuesta del instrumento a dos excitaciones equivalentes será la misma, sino que va más allá. Dado que conceptualmente el instrumento monitoriza todo el lazo de medida para evaluar la Integral de Ampere<sup>26</sup> y generar una lectura, es capaz de diferenciar excitaciones si detecta valores diferentes de campo en el mismo punto del lazo de medida<sup>27</sup>. Con todo ello podemos establecer un primer criterio de equivalencia.

Dado un ALBA, dos excitaciones son estrictamente equivalentes si generan la misma componente tangencial al mismo en todos los puntos de su lazo de medida y en presencia del ALBA.

Desde un punto de vista pragmático esta condición de equivalencia resulta difícil de asegurar a priori dado que implica un conocimiento estructural del instrumento de medida: forma del material magnético y su permeabilidad, número

<sup>26</sup>Y la calidad o no del instrumento vendrá dada por lo bien o mal que hace la monitorización y subsiguiente cálculo de la integral.

<sup>27</sup>Nótese que no se hace ningún tipo de conjetura sobre la forma en que opera internamente el instrumento (número y posición de sensores, de entrehierros...), dado que se pretende presentar un método válido para cualquiera de ellos. Por eso se considera de forma general que el instrumento monitoriza todo el lazo de medida.

y posición de gaps..., del que normalmente se carece<sup>28</sup>. Por ello se va a establecer una definición más relajada de equivalencia pero más fácil de asegurar:

Dos excitaciones son (convencionalmente) equivalentes con respecto a un lazo de medida si generan la misma componente tangencial al mismo en todos sus puntos.

Nótese que en la definición anterior se habla de lazo de medida únicamente, y no de ALBA. La equivalencia convencional se debe verificar en ausencia del ALBA, es decir con el lazo de medida ubicado en el aire para el que se asume una permeabilidad relativa de 1.0. En las secciones posteriores, cuando se hable de excitaciones equivalentes se entenderá en este sentido (convencionalmente equivalentes).

Surge una pregunta obvia. ¿Resulta justificado sustituir la equivalencia estricta, que es la que realmente queremos que se verifique, por la equivalencia convencional? Vamos a tratar de dar respuesta a esta pregunta.

La equivalencia convencional implica el estudio de la respuesta de los conductores que conforma las excitaciones *en el vacío*, mientras que la existencia de materiales magnéticos casi siempre va a alterar los campos magnéticos generados respecto al vacío. No obstante en la mayoría de las situaciones prácticas puede considerarse que una equivalencia convencional implica una equivalencia estricta porque la presencia de materiales magnéticos afecta de manera similar a dos excitaciones convencionalmente equivalentes, tal como se verá más adelante<sup>29</sup>.

### 1.7.1. ALBA sin materiales magnéticos

Este caso resulta trivial dado que, asegurada la equivalencia convencional, la ubicación del instrumento no va a introducir alteraciones de los campos generados en vacío, y por tanto se verifica la equivalencia estricta.

### 1.7.2. ALBA con materiales magnéticos lineales a lo largo del lazo de medida

Con respecto al material magnético presente en el instrumento de medida, asumimos las siguientes condiciones:

- ▷ El material magnético es lineal.
- ▷ Su forma será la de un pseudo toroide que va siguiendo la línea establecida por el lazo de medida.
- ▷ Puede tener uno o varios entrehierros.

Pretendemos analizar lo siguiente: Dadas dos excitaciones (cuyo origen está en uno o varios circuitos) para las que se verifica la equivalencia convencional,

<sup>28</sup>Incluir este conocimiento en un procedimiento de calibración implicaría como mínimo, la necesidad de desmontar el instrumento para llevarla a cabo.

<sup>29</sup>El análisis que sigue está basado en [Ciric, 1987], [Ciric, 2013], [Ciric, 2014], [Van Bladel, 1961].

¿que implicaciones tiene con respecto a la equivalencia estricta y en que grado se puede asegurar ésta? Para ello vamos a considerar el sistema constituido por las dos excitaciones aplicadas a la vez pero con las corrientes invertidas en una de ellas, de forma que en este caso la condición de equivalencia estricta implica la nulidad de la componente tangencial del campo  $\vec{H}$  a lo largo del lazo de medida en presencia del material magnético.

Empezaremos analizando las condiciones necesarias para asegurar la equivalencia estricta. Para ello procederemos dividiendo el problema en dos partes:

- ▷ **Problema interior.** Se analiza el valor del campo en la región correspondiente al material magnético (en nuestro caso, el circuito magnético completo incluyendo entrehierros). En esta región no existe ninguna corriente de excitación.
- ▷ **Problema exterior.** Se analiza el valor del campo en la región exterior al material magnético, donde sí existen corrientes de excitación pero no hay material magnético y toda la región se encuentra en el vacío.

### 1.7.2.1. Problema interior

Dado que en el interior del circuito magnético no hay corrientes de excitación, el vector  $\vec{H}$  verificará que  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ , por lo que puede ser derivado de un potencial escalar de forma que  $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi$ . El potencial  $\Phi$  será univaluado si la Integral de Ampere a lo largo del circuito magnético es nula, lo que es el caso. Por otra parte como el medio es lineal  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$  y dado que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \nabla^2\Phi$ , la ecuación que debe resolverse es  $\nabla^2\Phi = 0$  sujeta a condiciones de contorno de Dirichlet en la superficie,  $S_{ie}$ , que separa las regiones interior y exterior. La solución, en este caso, es única y en particular, para condiciones de contorno nulas, la solución es la solución trivial ( $\Phi = 0$ ).

Vamos a denotar  $\vec{H}^T$  como la componente (vectorial<sup>30</sup>) del vector  $\vec{H}$  sobre la superficie de separación de las zonas interior y exterior. Dado que:

$$\Phi_A - \Phi_B = - \int_B^A \vec{H}^T \cdot d\vec{l} \quad (1.38)$$

donde la integral se puede calcular a través de cualquier camino que conecte los puntos A y B por la superficie  $S_{ie}$ , se puede establecer lo siguiente:

- ▷ Asegurar  $\vec{H}^T = 0$  en la superficie del material magnético supone asegurar condiciones de Dirichlet nulas.
- ▷ La solución trivial implica que el potencial a lo largo del lazo de medida es nulo y por tanto implica la equivalencia estricta.

Dada la linealidad de la ecuación diferencial a resolver,  $\vec{H}$  en general y  $\vec{H}^T$  en particular, será la suma de las contribuciones de cada excitación, por lo que se puede concluir que la equivalencia estricta se producirá si las dos excitaciones generan el mismo valor de  $\vec{H}^T$  en la superficie  $S_{ie}$ . Por otra parte, dado que

<sup>30</sup>Componente vectorial se refiere aquí a la proyección del vector  $\vec{H}$  sobre la citada superficie, donde la proyección es un vector completo con su módulo, dirección y sentidos definidos. En contraposición, la componente escalar correspondería únicamente al módulo de la proyección.

en esa superficie no hay corrientes libres aplicadas, las condiciones de contorno de  $\vec{H}$  aseguran que  $\vec{H}^T$  se conserva en ambos lados de la superficie. Esto nos conecta el volumen interior con el exterior. Debemos ahora determinar a partir de la excitaciones aplicadas y en presencia de materiales magnéticos, el valor de  $\vec{H}^T$ , lo que nos lleva al problema exterior.

### 1.7.2.2. Problema exterior

Afrontamos ahora el problema exterior. Debemos resolver el valor del campo  $\vec{H}$  en el volumen (indefinido) exterior al circuito magnético pero con presencia de conductores de excitación. En este caso, las ecuaciones a resolver son  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ . La solución de la primera se puede expresar como  $\vec{H} = \vec{H}_{\text{mm}} + \vec{H}_{\text{bs}}$ , siendo  $\vec{H}_{\text{mm}}$  la solución general de la ecuación homogénea y  $\vec{H}_{\text{bs}}$  una solución particular de la ecuación inhomogénea.  $\vec{H}_{\text{bs}}$  puede calcularse a través de las ecuaciones de Biot y Savart, dado que se conocen las corrientes de excitación. Por otra parte,  $\vec{H}_{\text{mm}}$  obedece a las ecuaciones  $\vec{\nabla} \times \vec{H}_{\text{mm}} = 0$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_{\text{mm}} = 0$  y representa el efecto de la magnetización del material magnético. Dado que se está excluyendo el material magnético de la zona de cálculo, la información sobre su efecto se incluye a través de las condiciones de contorno en la superficie  $S_{\text{ie}}$ .

Las corrientes de excitación condicionan directamente el valor de  $\vec{H}_{\text{bs}}$  e indirectamente el de  $\vec{H}_{\text{mm}}$ , de forma que, para materiales lineales, si la componente vectorial tangencial a  $S_{\text{ie}}$  de  $\vec{H}_{\text{bs}}$  tiende a cero, también lo hará  $\vec{H}^T$  y el efecto del material magnético tenderá a anularse. Este hecho apunta a que la equivalencia estricta puede asegurarse si aseguramos que la componente vectorial tangencial a  $S_{\text{ie}}$  es nula en la superficie del material magnético. Y para ello basta con calcular el efecto de las corrientes en dicha superficie mediante la ecuaciones de Biot y Savart *en el vacío*.

### 1.7.2.3. Equivalencia convencional y estricta

Se acaban de revisar las condiciones de equivalencia estricta. La equivalencia convencional implica establecer el valor de  $\vec{H}^T$  en el lazo de medida situado, esencialmente, en el centro del material magnético y no en su superficie. Sin embargo existe una relación entre ambas.

Considérese una sección del circuito magnético perpendicular al lazo de medida y sea  $C$  su perímetro exterior y  $L_C$  la longitud del mismo.  $\vec{H}^T$  es una función escalar que depende del punto  $\vec{x} = (x, y, z)$  y que se puede expresar en forma de desarrollo en serie hasta el término lineal:

$$\vec{H}^T(\vec{x}) \approx \vec{H}^T(\vec{x}_0) + \nabla \vec{H}^T \cdot \Delta \vec{x} \quad (1.39)$$

Tomando como  $x_0$  el punto “central” del perímetro en el sentido que verifica:

$$\vec{x}_0 = \frac{1}{L_C} \int_C \vec{x} dl \quad (1.40)$$

entonces, el valor promedio de  $\vec{H}^T$  a lo largo del perímetro  $C$  es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_C} \int_C \vec{H}^T(\vec{x}) dl &\approx \frac{1}{L_C} \int_C \left[ \vec{H}^T(\vec{x}_0) + \nabla \vec{H}^T \cdot \Delta \vec{x} \right] dl = \\ &= \vec{H}^T(\vec{x}_0) + \nabla \vec{H}^T \cdot \left( \frac{1}{L_C} \int_C \vec{x} dl - \vec{x}_0 \right) = \\ &= \vec{H}^T(\vec{x}_0) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Recopilando los resultados más relevantes vistos hasta ahora, dadas dos excitaciones diferentes:

- ▷ Para asegurar la equivalencia estricta es suficiente con asegurar que las dos excitaciones generan el mismo valor de  $\vec{H}^T$  a lo largo de la superficie exterior del material magnético y en ausencia de éste, es decir considerando únicamente los conductores en el vacío.
- ▷ La equivalencia convencional asegura la igualdad de  $\vec{H}^T$  en el centro de todas las secciones del material magnético y en ausencia de éste. Esto implica asegurar la igualdad del promedio de los valores de  $\vec{H}^T$  a lo largo del perímetro de la sección.

Adicionalmente, la equivalencia estricta tiende a la convencional conforme la sección del material magnético se hace más pequeña. Por todo lo anterior, para el tipo de instrumentos descritos en este apartado, se considerará también satisfactoria la equivalencia convencional como criterio de equivalencia.

## 1.8. Formulación del objeto del estudio

Este capítulo se ha iniciado estableciendo el propósito de este trabajo, pero en base a una descripción intuitiva y que adolecía de imprecisión. Tras lo expuesto en las secciones anteriores estamos en disposición de concluir el capítulo con una reformulación del objeto del estudio en una forma mucho más precisa:

El objeto del presente documento es:

- ▷ Describir y analizar una clase de sistemas destinados a generar en el vacío (aire) un campo  $\vec{H}$ , cuya componente tangencial a lo largo de una cierta trayectoria cerrada sea la mejor aproximación posible a una previamente dada.
- ▷ Describir y analizar una metodología de calibración de dispositivos usados para la medida de corriente eléctrica y que se basen en la Ley de Ampere, mediante el uso de sistemas del tipo anterior. La metodología de calibración incluye la estimación de la componente de incertidumbre asociada a la variabilidad geométrica de los circuitos por los que circula la corriente a medir y que pueden ser aplicados al dispositivo de medida.



## Capítulo 2

# Dispositivo de calibración

### 2.1. Introducción

En el capítulo anterior se ha indicado la necesidad de disponer de un sistema de generar, con mayor o menor aproximación, la componente tangencial de un campo  $\vec{H}$  a lo largo de un lazo de medida. Dado que su objetivo primario va a ser su utilización para la calibración de instrumentos ALBA, a tal dispositivo lo denominaremos *sistema de calibración*. Este capítulo está dedicado a su descripción y análisis.

La especificación de las características mínimas que debe tener un sistema de calibración se hará de una forma bastante general y, en ese sentido, se puede considerar que se está describiendo más bien *una clase* de sistemas de calibración. No todas los objetos de esa clase van a ser igualmente eficaces en su trabajo, de forma que también se introducirán un conjunto de técnicas con objeto de posibilitar una búsqueda de diseños óptimos que luego se aplicarán en un cierto análisis paramétrico.

Conviene hacer notar que este capítulo está destinado a la descripción (y caracterización) de estos sistemas de calibración *como sistemas de síntesis de campos magnéticos*. No se va a entrar en *cómo usarlos para calibrar un ALBA*, asunto que será objeto del capítulo 3. Por otra parte el análisis de equivalencia de excitaciones (sección 1.6) indica que la reproducción de una cierta excitación dada puede hacerse en ausencia del instrumento de medida objeto de la calibración. Por ello en este capítulo van a desaparecer las referencias a ALBA excepto por el hecho de que son ellos los que establecen el lazo de medida sobre el que se va a operar.

El sistema de calibración es un dispositivo constituido por un conjunto de circuitos geoméricamente fijos (no se desplazan unos con respecto a otros ni con respecto al lazo de medida) pero sobre las que se tienen control sobre la corriente que circula. Dado que vamos a trabajar en condiciones equivalentes al vacío, o un sólo material lineal<sup>1</sup>, conocida la forma, posición y corriente de uno cualquiera de los circuitos es posible determinar el valor de campo que generan

---

<sup>1</sup>La situación habitual va a ser tener el sistema en una zona sin presencia de materiales magnéticos y embebida de aire. Este último es un material lineal con una permeabilidad magnética relativa de valor prácticamente la unidad. En adelante nos referiremos a esta situación como situación de vacío.

en cualquier punto a través de la ley de Biot y Savart (A.1) [Wangsness, 1986], de forma que en ocasiones nos referiremos indistintamente al circuito o al campo generado por el mismo.

## 2.2. Análisis

De forma inicial vamos a definir con precisión algunos elementos así como introducir cierta notación:

### 2.2.1. Lazo de Medida

**Definición 1.** *Definimos un lazo de medida (LM) como una trayectoria cerrada, de forma arbitraria, sobre la que se ha definido un sentido de circulación.*

Algunos comentarios:

- ▷ Una vez que se ha establecido el lazo de medida, cualquier circuito por el que circula una corriente<sup>2</sup>  $I$ , conformado mediante hilos unidimensionales o por cables gruesos o pletinas con corrientes distribuidas, puede ser representado, para nuestros propósitos, mediante una función escalar  $H^{(I)}$  definida a lo largo del lazo de medida cuyo valor es igual a la componente tangencial del vector intensidad de campo magnético  $\vec{H}$  en cada punto<sup>3</sup>.
- ▷ La definición incluye curvas cerradas que no sean planas. Sin embargo en la inmensa mayoría de los casos los lazos de medida son curvas planas y por tanto susceptibles de ser descritas en coordenadas polares, una vez establecido un sistema de referencia. Por tanto el lazo de medida vendrá representado por una función de la forma:

$$r = r_{\text{LM}}(\varphi) \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (2.1)$$

donde  $\varphi$  es la coordenada angular que actúa como variable independiente. El diferencial de longitud a lo largo de la trayectoria toma una forma.

$$dl = \frac{dl}{d\varphi} d\varphi = \sqrt{\left(\frac{dr_{\text{LM}}}{d\varphi}\right)^2 + r_{\text{LM}}^2} d\varphi \quad (2.2)$$

- ▷ La longitud total del lazo de medida la denotaremos como  $L_{\text{LM}}$ :

$$L_{\text{LM}} = \oint_{\text{LM}} dl = \int_0^{2\pi} \frac{dl}{d\varphi} d\varphi \quad (2.3)$$

<sup>2</sup>Corresponde a lo que vamos a denominar *corriente de excitación*. Ver definición 4.

<sup>3</sup>En general omitiremos la referencia a la variable independiente  $\varphi$ .

### 2.2.2. Circuitos y corrientes

Normalmente cada uno de los circuitos que conforman el sistema de calibración estará formado por hilos conductores de sección pequeña y con una cierta geometría. Sin embargo, desde un punto de vista constructivo puede ser interesante considerar situaciones más complejas en las que un circuito *esté formado por varios conductores independientes*. En este caso tenemos que definir claramente que se entiende por circuito, puesto que el concepto generalizado que vamos a introducir va a estar alejado del concepto intuitivo y convencional de circuito:

**Definición 2.** *Un circuito elemental es un cable, unidimensional o no, con una cierta geometría fija, dos terminales, denominados terminal positivo y negativo, y cuasi cerrado (en el sentido de que los dos terminales se encuentran muy próximos). Suponemos que el material del que está hecho es tal que la corriente eléctrica no fluye fuera del conductor, salvo a través de los terminales.*

Los dos terminales van a usarse para inyectar la corriente que circulará por el conductor. Los terminales positivo y negativo se usan para definir el sentido positivo de circulación de la corriente. Puesto que la carga no puede fluir fuera del material el concepto de corriente de excitación del circuito, entendido como la corriente que fluye a su través, está bien definido.

Se pretende generalizar el concepto de circuito a una colección de varios circuitos elementales<sup>4</sup> independientes. Sin embargo, cualquier generalización que se haga debe respetar dos ideas que serán cruciales en el desarrollo que va a seguir:

- ▷ Debe dar cabida a poder establecer una generalización de la idea de “corriente que circula por el cable”, que, como se ha indicado, está bien definida para un circuito elemental.
- ▷ Debe verificar que, en condiciones de vacío, la respuesta magnética del circuito depende linealmente de la corriente que circula por él.

Con estas cautelas presentes, la generalización del concepto de circuito es como sigue:

**Definición 3.** *Un circuito compuesto es un sistema formado por:*

- ▷ *un circuito elemental, que denominaremos circuito principal.*
- ▷ *un conjunto de cero o más circuitos elementales que denominaremos circuitos adicionales.*

*El sistema debe verificar que en todo momento la corriente que circula a través de cada circuito adicional es proporcional a la corriente del circuito principal. La proporcionalidad siempre es la misma para cada circuito adicional aunque puede ser diferente entre diferentes circuitos adicionales.*

Dado que un circuito elemental es un caso particular de un circuito compuesto, en adelante cuando se omita el adjetivo al referirnos a un circuito, siempre

<sup>4</sup>Nótese que el concepto de circuito elemental es un buena representación del concepto convencional o coloquial de “circuito” que, como todos los conceptos de este tipo, suele adolecer de imprecisión.

se considerará que se trata de un circuito compuesto<sup>5</sup>. Ahora, tenemos que establecer claramente dos conceptos asociados a la idea de corriente:

**Definición 4.** *La corriente de excitación de un circuito (compuesto) es la corriente que circula a través de los terminales de su circuito principal. La corriente será positiva cuando entre por el terminal positivo y salga por el negativo.*

Vamos a introducir algunas convenciones de notación que se utilizarán profusamente en lo que sigue:

Dado un circuito cuya corriente de excitación es  $I$ , su función asociada la denotaremos por  $H^{(I)}(\varphi)$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). Cuando la corriente de excitación sea la unidad, emplearemos la notación  $H^\circ$ . Estos superíndices añadidos son puramente informativos; cuando se muestran es debido a que se desea recalcar el valor de la corriente de excitación. La ausencia de cualquiera de los dos, debe interpretarse como que la corriente de excitación se desconoce o su conocimiento no resulta directamente relevante, por lo que no se indica. La elección del símbolo  $^\circ$  obedece a que recuerda a dos paréntesis,  $()$ , sin nada en su interior.

En virtud de lo anterior se puede escribir:

$$H^{(I)} = I H^\circ \quad (2.4)$$

Asumiendo que  $H^\circ$  es una componente de un campo  $\vec{H}$ , y que por tanto se mide en el SI (Sistema Internacional de Unidades) en  $\text{Am}^{-1}$ , resulta necesario que el símbolo  $I$  sea adimensional. Numéricamente debe coincidir con el valor, expresado en amperios, de la corriente de excitación del circuito<sup>6</sup>. Una manera más formal de indicar esto pasaría por denotar  $I_u$  como la unidad (dimensional) de corriente en el sistema que se esté trabajando y tomar la convención de emplear el superíndice de  $H^\circ$  cuando su corriente sea  $I_u = 1 \text{ A}$ . Entonces:

$$H^{(I)} = \frac{I}{I_u} H^{(I_u)} = I H^\circ \quad (2.5)$$

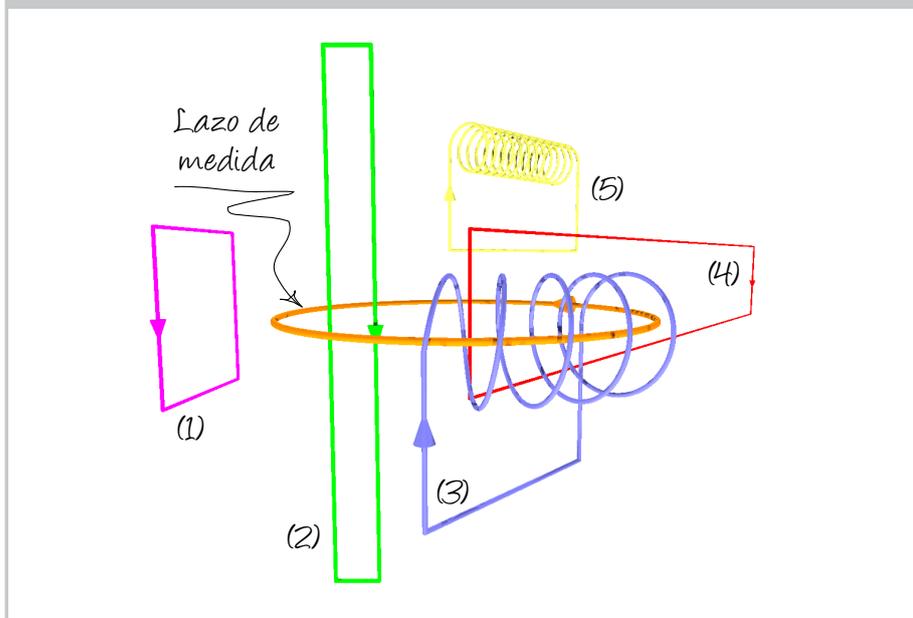
Resulta interesante y útil definir otro concepto de corriente asociado a un circuito *y a un lazo de medida*: Si aplicamos a ese circuito un instrumento de medida ideal, ¿qué lectura arrojaría?

**Definición 5.** *Dado un lazo de medida, la corriente métrica de un circuito es el valor de la Integral de Ampere del circuito, calculada sobre el lazo de medida.*

<sup>5</sup>El concepto de circuito compuesto se ha introducido porque es una generalización interesante que puede dar pie a nuevas vías de optimización del sistema de calibración. Sin embargo hay que hacer notar que todos los sistemas que se han utilizado de ejemplo en este documento, tanto para simulación numérica como para experimentación real, están contruidos exclusivamente a partir de circuitos elementales.

<sup>6</sup>Podría plantearse otra opción: considerar que  $H^{(I)}$  se mide en  $\text{Am}^{-1}$ ,  $I$  en  $\text{A}$  y  $H^\circ$  en  $\text{m}^{-1}$ . Sin embargo esta solución es menos satisfactoria dado que, como se verá, tanto  $H^{(I)}$  como  $H^\circ$  van a ser elementos de un espacio vectorial y por tanto deben ser capaz de adicionarse, por lo que deben ser homogéneos en sus unidades.

Figura 2.1. Diferencias entre corriente de excitación y corriente métrica. Para el lazo de medida circular, y suponiendo una corriente de excitación unitaria (1 A) para los cinco conductores, la corriente métrica del conductor (4) es 1 A, la del conductor (3) es  $-5$  A, y la de los restantes conductores es nula.



En concreto, suponiendo que el circuito, bajo una cierta corriente de excitación, genera sobre el lazo de medida una respuesta  $H$ , entonces:

$$I_{\text{met}} = \int_{\text{LM}} H \, dl \quad (2.6)$$

Comparando los conceptos de corriente de excitación y corriente métrica, vale la pena hacer las siguientes consideraciones.

- ▷ No necesariamente la corriente de excitación es igual a la corriente métrica. Esto se evidencia en la figura 2.1, en la que se muestra un lazo de medida y diferentes circuitos para los que, asociada a una corriente de excitación unitaria, se obtienen corrientes métricas nulas, unitarias o mayores que la unidad.
- ▷ La corriente de excitación resulta interesante en tanto en cuanto supone la excitación (en corriente) que se aplica a un circuito para obtener una cierta respuesta magnética. Por contra, la corriente métrica representa la respuesta que se espera de un instrumento de medida cuando se le aplica el circuito.
- ▷ La corriente de excitación es una magnitud con una orientación *física* en tanto que requiere de la existencia de un circuito *físico* (en el sentido de real) para cobrar sentido, y es independiente del lazo de medida. Por contra, la corriente métrica es una magnitud con una orientación *matemática*: requiere del establecimiento de un lazo de medida, pero puede

definirse para cualquier función  $H$  establecida a lo largo del mismo, independientemente de que la función tenga una conexión explícita con un circuito físico real o no.

- ▷ La corriente métrica es proporcional al valor medio de  $H$  a lo largo del lazo de medida,  $\overline{H}$ :

$$I_{\text{met}} = \oint_{\text{LM}} H dl = L_{\text{LM}} \overline{H} \quad (2.7)$$

- ▷ Ambas son proporcionales, como se demuestra en la proposición que sigue (Proposición 2.2.1).

**Proposición 2.2.1.** *En un circuito, la corriente métrica y la corriente de excitación son proporcionales:*

$$I_{\text{met}} = \zeta I_{\text{exc}} \quad (2.8)$$

donde  $\zeta$  es una constante propia del circuito e independiente del valor de  $I_{\text{exc}}$ . Puede ocurrir que  $\zeta = 0$  en cuyo caso la corriente métrica siempre es cero para cualquier valor de  $I_{\text{exc}}$ .

*Demostración.* Comenzaremos demostrándolo para un circuito elemental. Supongamos que se le aplica un potencial  $V \neq 0$  en un terminal (A), considerando el otro (B) como referencia ( $V = 0$ ), y vamos a determinar el potencial eléctrico  $\phi$  en su interior. A partir de la ecuación de continuidad y en condiciones estacionarias,  $\phi$  verifica lo siguiente:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\sigma \overrightarrow{\nabla \phi}) = 0 \quad (2.9)$$

sometido a las condiciones de contorno

$$\phi = V \quad (\text{en la superficie del primer terminal, } S_A) \quad (2.10)$$

$$\phi = 0 \quad (\text{en la superficie del segundo terminal, } S_B) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{en la superficie lateral}) \quad (2.12)$$

donde en la última condición,  $n$  representa la dirección normal a la superficie. Esta condición expresa simplemente que el vector densidad de corriente debe ser tangente a la superficie lateral (la corriente no puede salirse del conductor). A partir de las ecuaciones se comprueba que multiplicar el potencial aplicado  $V$  por una constante implica multiplicar la solución por la misma constante. Por tanto  $\phi$  depende del valor (escalar) de  $V$  y de la configuración geométrica del conductor (incluyendo la dependencia espacial de la conductividad). El cociente entre la  $V$  y la intensidad de excitación (que constituye la resistencia del conductor) es:

$$R = \frac{V}{I_{\text{exc}}} = \frac{\int_B^A \overrightarrow{\nabla \phi} \cdot d\vec{l}}{\int_{S_A} \sigma \overrightarrow{\nabla \phi} \cdot d\vec{S}_A} \quad (2.13)$$

donde la integral del numerador recorre una línea de campo eléctrico dentro del conductor. De la expresión anterior se concluye que  $R$  depende únicamente de

parámetros geométricos. Dado que  $I = V/R$ , a partir de lo anterior, podemos expresar el potencial en el interior del conductor como:  $\phi = I_{\text{exc}}\phi_1$ , donde  $\phi_1$  es el potencial asociado a una corriente  $I_{\text{exc}} = 1$ .

La corriente métrica se puede expresar como el flujo de  $\vec{J}$  en una superficie  $S$  que se apoye en el lazo de medida, luego

$$\begin{aligned} I_{\text{met}} &= - \int_S \sigma \overrightarrow{\nabla} \phi \cdot d\vec{S} \\ &= I_{\text{exc}} \left( - \int_{S'} \sigma \overrightarrow{\nabla} \phi_1 \cdot d\vec{S} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde  $S'$  corresponde a la superficie total de todos los cortes del volumen del conductor con las superficie de integración  $S$ . El término entre paréntesis es un término geométrico (independiente de  $I_{\text{exc}}$ ) y constituye la constante de proporcionalidad buscada.

Consideremos ahora un circuito compuesto. Según hemos visto, para cada uno de los circuitos elementales que lo compone se verifica  $I_{\text{met}k} = \zeta_k I_{\text{exc}k}$ . Por otra parte, en un circuito compuesto la corriente (de excitación) de cada circuito elemental es proporcional a la corriente de excitación del principal, por tanto:

$$\begin{aligned} I_{\text{met}} &= \sum_{s=1}^N I_{\text{met}s} = \sum_{s=1}^N \zeta_s I_{\text{exc}s} = \\ &= \sum_{s=1}^N \zeta_s \delta_s I_{\text{exc}1} = \left( \sum_{s=1}^N \zeta_s \delta_s \right) I_{\text{exc}} = \zeta I_{\text{exc}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde  $I_{\text{exc}1}$  es la corriente de excitación del circuito principal (que por definición es la corriente de excitación de todo el circuito) y  $\delta_s$  son los coeficientes de proporcionalidad entre las corrientes de excitación de los circuitos auxiliares y el principal (siendo  $\delta_1 = 1$ ).  $\square$

En la misma línea que para la corriente de excitación, podemos introducir una nueva convención de notación:

Dado un circuito cuya corriente métrica sea  $I$ , su función asociada la denotaremos como  $H^{\{I\}}$ . Cuando la corriente métrica sea la unidad, emplearemos la notación  $H^\diamond$  y no se utilizará superíndice cuando la corriente métrica sea desconocida o no sea relevante. La elección del símbolo  $\diamond$  obedece a que recuerda a dos llaves,  $\{\}$ , sin nada en su interior.

A partir de lo anterior, también se puede expresar:

$$H^{\{I\}} = I H^\diamond \quad (2.16)$$

con las mismas cautelas dimensionales que en el caso de la corriente de excitación.

Finalmente conviene resaltar que el coeficiente  $\zeta$  *no necesariamente representa el número de espiras de que consta el circuito*, aunque puede coincidir. En particular, para el circuito de color amarillo de la figura 2.1 se tiene que  $\zeta = 0$ , pese a que su número de espiras es claramente mayor que uno.

### 2.2.3. Sistema de calibración

Podemos ahora presentar una definición formal de sistema de calibración:

**Definición 6.** *Un sistema de calibración de orden  $N$  es un sistema para el que se ha establecido lo siguiente:*

- ▷ *Un lazo de medida.*
- ▷ *Un conjunto  $\{C_k\}$ ,  $k = 0 \dots N - 1$  de circuitos. Al primer circuito,  $C_0$ , se le denomina *circuito principal*. Los circuitos restantes  $C_k$ ,  $k \neq 0$  se denominan *circuitos auxiliares*.*

*Los circuitos verifican lo siguiente:*

1. *Cuando la corriente de excitación del circuito principal no es nula, su corriente métrica tampoco lo es.*
2. *La corriente métrica de los circuitos auxiliares siempre es nula independientemente del valor de la corriente de excitación.*
3. *No existe ningún conjunto no nulo de corrientes de excitación  $\{I_k\}$  que al ser aplicadas al conjunto de circuitos del sistema de calibración generen la función nula:  $H(\varphi) = 0$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ )*

Aunque este capítulo no pretende entrar en la problemática de calibración de un ALBA, dado que el sistema de calibración se ha diseñado para esa función, vamos a considerar el sentido de la anterior definición bajo esa óptica. Si bien el sistema de calibración debe tener establecido un lazo de medida, en realidad el ALBA a calibrar es el que lo impone y el sistema de calibración se construye a partir de él. Para llevar a cabo la calibración en un cierto punto  $I_0$  por un método directo, consideraríamos un circuito de una muestra aleatoria de circuitos posibles, lo excitaríamos con una corriente de excitación tal que diera pie a una corriente métrica  $I_0$ , comprobaríamos la respuesta que da el instrumento y repetiríamos el proceso para cada circuito de la muestra. Dado que la corriente métrica es, obviamente, no nula, el circuito estará abrazado por el lazo de medida en algún punto pero se cerrará por fuera de él.

El objeto del sistema de calibración es recrear el efecto de ese circuito. Dado que todos los circuitos auxiliares tienen una corriente métrica nula, el objeto del circuito principal es establecer el valor medio de  $H$  a lo largo del lazo de medida. Desde el punto de vista del ALBA, el circuito principal va a establecer el punto de trabajo de su material magnético (no lineal) en caso de que disponga de él. El objeto de los circuitos auxiliares va a ser modular y afinar esa primera aproximación a  $H^{\{I_0\}}$  creada por el circuito principal. Finalmente, la cautela expresada en la definición 6, apartado 3, pretende asegurar que todos los circuitos del sistema de calibración aportan algo útil, o dicho de otra manera, el efecto de ningún circuito puede ser completamente reproducido por los demás.

### 2.2.4. Representación vectorial: El espacio $\tilde{\Gamma}$

Dado un circuito con corriente métrica  $I_0$ , que genera una  $H^{\{I_0\}}$  que pretendemos representar con el sistema de calibración, surgen dos cuestiones a resolver:

- ▷ ¿Que corrientes de excitación  $\{I_k\}$  hay que aplicar a cada circuito del sistema de calibración a fin de obtener la mejor aproximación a  $H^{I_0}$ ?
- ▷ ¿Cómo de buena es esa aproximación?

Para responder a estas cuestiones vamos a introducir un formalismo vectorial en el tratamiento de las funciones  $H$

**Definición 7.**  $\Theta_G$  es el conjunto de funciones  $H$  de cuadrado integrable definidas sobre el lazo de medida.

Es interesante notar que, a partir de esta definición, todas las funciones  $H \in \Theta_G$  tienen definida corriente métrica, pero, tal como se ha comentado previamente, no necesariamente tienen definida una corriente de excitación dado que la función  $H$  puede no estar asociada a ningún circuito concreto. Por otra parte, dada una función  $H$  genérica puede existir dos o más circuitos con diferentes corrientes de excitación que la generen.

**Definición 8.** Dadas  $H_1, H_2 \in \Theta_G$ , se define el producto escalar como:

$$(H_1 | H_2) = \frac{1}{L_{LM}} \oint_{LM} H_1 H_2 dl \quad (2.17)$$

Dadas las definiciones 7 y 8, el conjunto  $\Theta_G$  es un espacio vectorial (sobre  $\mathbb{R}$ ) y métrico con la distancia inducida por la norma. Vamos a introducir ahora el espacio  $\tilde{\Gamma}$  cuyo objeto es representar todas las funciones  $H$  que podemos sintetizar con un sistema de calibración.

**Definición 9.** Dado un sistema de calibración de orden  $N$ , se denominan circuitos aislados a cada uno de los circuitos  $C_k$ ,  $k = 0 \dots N - 1$ . Igualmente, a las funciones generadas por dichos circuitos cuando se les aplica una intensidad de excitación unitaria se les denomina excitaciones aisladas unitarias (o simplemente, excitaciones aisladas). Se denotarán como  $\tilde{H}E_k^\circ$ ,  $k = 0 \dots N - 1$ .

**Definición 10.** Dado un sistema de calibración de orden  $N$ , se define el espacio  $\tilde{\Gamma}$  como el conjunto de funciones generadas mediante combinaciones lineales de las funciones  $\tilde{H}E_k^\circ$ ,  $k = 0 \dots N - 1$

Debido a que las funciones  $\tilde{H}E_k^\circ$  están definidas para una corriente de excitación unitaria, los coeficientes de la combinación lineal corresponden a las corrientes de excitación que hay que aplicar a cada conductor  $C_k$  para generar cada uno de los elementos de  $\tilde{\Gamma}$ . Por otra parte, la condición expresada en la definición 6, apartado 3, asegura la independencia lineal de las excitaciones aisladas por lo que la dimensión,  $N_{\tilde{\Gamma}}$ , del espacio  $\tilde{\Gamma}$ , es igual al orden del sistema de calibración ( $N$ ).

El espacio  $\tilde{\Gamma}$  será ampliado en el capítulo 3 a un espacio mayor que se denotará  $\Gamma$ . A efectos de notación, el símbolo “ $\sim$ ” en  $\tilde{\Gamma}$  indica que se trata de la versión reducida mientras que su ausencia indicará que se trata de la versión ampliada. Esta convención se hace extensiva a otros elementos que se definirán en lo que sigue.

A partir de las excitaciones  $\tilde{\mathbf{H}}_k^\circ$  podemos generar una base ortonormal de vectores<sup>7</sup>  $\tilde{g}_n$  mediante el algoritmo de Gram-Schmidt de forma que:

$$\tilde{g}_k = \sum_{s=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} \tilde{\lambda}_{ks} \tilde{\mathbf{H}}_s^\circ \Rightarrow \tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{\Lambda}}' \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}^\circ \quad (2.18)$$

donde  $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}^\circ$  es el vector<sup>8</sup> de excitaciones aisladas:

$$\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}^\circ = [\tilde{\mathbf{H}}_{E_0}^\circ, \tilde{\mathbf{H}}_{E_1}^\circ, \dots, \tilde{\mathbf{H}}_{E_{N_{\tilde{\Gamma}}-1}}^\circ] \quad (2.19)$$

y  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}'$  es una matriz<sup>9</sup> cuadrada de dimensión  $N_{\tilde{\Gamma}}$ , construida con los coeficientes  $\tilde{\lambda}_{ks}$ .

Una función  $H \in \tilde{\Gamma}$  podrá expresarse como:

$$H = \sum_{n=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} (H | \tilde{g}_n) \tilde{g}_n \quad \forall H \in \tilde{\Gamma} \quad (2.20)$$

De forma particular, si la función tiene definida una corriente de excitación  $I$ , entonces este desarrollo lo expresaremos como:

$$H^{(I)} = IH^\circ = I \sum_{n=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} \tilde{\gamma}_n \tilde{g}_n = I \tilde{\gamma}^T \tilde{\mathbf{g}} \quad (2.21)$$

con  $\tilde{\gamma}$  definido<sup>10</sup> como el vector:

$$\tilde{\gamma} = [(H^\circ | \tilde{g}_k)] \quad k = 0, \dots, N_{\tilde{\Gamma}} - 1 \quad (2.22)$$

y por tanto, utilizando (2.18), se obtiene:

$$H^{(I)} = I \tilde{\gamma}^T \tilde{\mathbf{\Lambda}}' \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}^\circ \quad (2.23)$$

El producto  $I \tilde{\gamma}^T \tilde{\mathbf{\Lambda}}'$  es un vector fila de dimensión  $N_{\tilde{\Gamma}}$  cuyos elementos son coeficientes que indican el valor de corriente que hay que inyectar (corriente de excitación) por cada conductor para reproducir la excitación  $H^{(I)}$ . Podemos deducir algunas propiedades de estos coeficientes:

<sup>7</sup> Puede hacerse mediante diferentes algoritmos. El clásico de Gram-Schmidt resulta numéricamente inestable por lo que en general se utiliza el algoritmo de Gram-Schmidt Modificado [Trefethen y Bau, 1997]. El método de Householder [Burden y Faires, 2010] está considerado como uno de los mejores algoritmos del siglo [Cipra, 2000]. En los cálculos numéricos llevados a cabo para el presente documento se he empleado el algoritmo modificado de Gram-Schmidt.

<sup>8</sup> Para distinguir entre vectores fila o columna, se seguirá la convención de utilizar el superíndice de transposición  $T$  para los primeros y ningún superíndice para los segundos.

<sup>9</sup> El motivo del empleo de la tilde para la matriz  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}'$  así como para los coeficientes  $\tilde{\lambda}$  se debe a que en el capítulo 3 estos valores se redefinirán de una forma ligeramente diferente para dar mayor generalidad al desarrollo.

<sup>10</sup> Es importante notar que  $\tilde{\gamma}$  se ha definido a partir de la corriente de excitación, aunque desde el punto de vista de la calibración, la corriente de mayor interés es la corriente métrica asociada a la excitación a reproducir. No obstante no es problemático pasar de una a otra corriente atendiendo a (2.8) y al hecho de que la excitación a reproducir tiene una corriente métrica no nula.

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $H^{\{I_0\}} \in \tilde{\Gamma}$  la función asociada a un cierto circuito de coeficiente de proporcionalidad entre corriente de excitación y corriente métrica  $\zeta$ . El primer elemento del vector  $\tilde{\gamma}^T \tilde{\Lambda}'$  es igual a  $\zeta/\zeta_0$ , donde  $\zeta_0$  es el coeficiente correspondiente de la excitación aislada principal del sistema de calibración.*

*Demostración.* El valor de la integral de Ampere aplicado a  $H^{\{I_0\}}$  debe valer  $I_0$ . Dado que  $H^{\{I_0\}} = H^{(I_0/\zeta)}$ , se tiene:

$$I_0 = \oint_{\text{LM}} H^{\{I_0\}} dl = \oint_{\text{LM}} \frac{I_0}{\zeta} \tilde{\gamma}^T \tilde{\Lambda}' \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{E}^\circ dl = \frac{I_0}{\zeta} \tilde{\gamma}^T \tilde{\Lambda}' \oint_{\text{LM}} \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{E}^\circ dl \quad (2.24)$$

pero tal como se ha definido el sistema de calibración, todas las integrales son nulas excepto la asociada al conductor  $C_0$ , luego

$$I_0 = \frac{I_0}{\zeta} \tilde{\gamma}^T \tilde{\Lambda}' [I_{\text{met}0}, 0, \dots, 0]^T \quad (2.25)$$

pero la  $I_{\text{exc}}$  de la función  $\tilde{\mathbf{H}} \mathbf{E}_0$  es la unidad, por tanto:

$$\left[ \tilde{\gamma}^T \tilde{\Lambda}' \right]_0 = \frac{\zeta}{\zeta_0} \quad (2.26)$$

□

La proposición anterior se resume en lo siguiente: la  $I_{\text{met}}$  de  $H^{\{I_0\}}$  es  $I_0$ . De todos los circuitos aislados, el único que aporta un valor no nulo a la Integral de Ampere es el principal, luego la  $I_{\text{met}}$  de la excitación generada con el circuito principal debe ser  $I_0$ . Los coeficientes  $\zeta$  y  $\zeta_0$ , aparecen para realizar la adaptación entre corrientes de excitación y corrientes métricas.

$\tilde{\Gamma}$  idealmente debería ser igual a  $\Theta_G$  a fin de que cualquier función  $H$  se pudiera representar mediante el sistema de excitación. Claramente esto no va a ser posible dado que disponemos de un conjunto finito de circuitos aislados que dan pie a un espacio vectorial de dimensión  $N_{\tilde{\Gamma}}$  finito y que lógicamente va a ser un subconjunto de  $\Theta_G$  que tiene dimensión infinita. Por tanto, dada una  $H$ , lo que necesitamos ahora es caracterizar la calidad del sistema de calibración en base a la cantidad de excitación que es capaz de reproducir. Las dos siguientes proposiciones de álgebra básica nos van a servir para ello:

**Proposición 2.2.3.** *Dada una  $H \in \Theta_G$ , ésta puede descomponerse en dos componentes ortogonales:*

$$H = H^{\parallel} + H^{\perp} \quad (2.27)$$

donde  $H^{\parallel} \in \tilde{\Gamma}$

*Demostración.* Definiendo

$$H^{\parallel} = \sum_{n=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} (H | \tilde{g}_n) \tilde{g}_n \quad (2.28)$$

$$H^{\perp} = H - H^{\parallel} \quad (2.29)$$

claramente se verifica la descomposición. Por otra parte:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{H}^{\parallel} | \mathbf{H}^{\perp}) &= (\mathbf{H}^{\parallel} | \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\parallel}) = \\
&= \left( \sum_{n=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} (\mathbf{H} | \tilde{g}_n) \tilde{g}_n | \mathbf{H} \right) - \left( \sum_{n=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} (\mathbf{H} | \tilde{g}_n) \tilde{g}_n \left| \sum_{k=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} (\mathbf{H} | \tilde{g}_k) \tilde{g}_k \right. \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} (\mathbf{H} | \tilde{g}_n) (\tilde{g}_n | \mathbf{H}) - \sum_{n=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} \sum_{k=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} (\mathbf{H} | \tilde{g}_n) (\mathbf{H} | \tilde{g}_k) (\tilde{g}_n | \tilde{g}_k) \\
&= \sum_{n=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} (\mathbf{H} | \tilde{g}_n)^2 - \sum_{n=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} \sum_{k=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} (\mathbf{H} | \tilde{g}_n) (\tilde{g}_k | \mathbf{H}) \delta_{nk} = 0 \quad (2.30)
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la ortogonalidad.  $\square$

**Proposición 2.2.4.** *Sea  $\mathbf{H} \in \Theta_G$ ,  $\nexists \mathbf{H}' \in \tilde{\Gamma}, \mathbf{H}' \neq \mathbf{H}^{\parallel} \rightarrow d(\mathbf{H}, \mathbf{H}') < d(\mathbf{H}, \mathbf{H}^{\parallel})$   
(La distancia de  $\mathbf{H}^{\parallel}$  con  $\mathbf{H}$  es la mínima posible para todos los vectores de  $\tilde{\Gamma}$ )*

*Demostración.* Sea  $\mathbf{H}'$  un vector cualquiera de  $\tilde{\Gamma}$ .  $\mathbf{H}'$  puede expresarse como  $\mathbf{H}' = \mathbf{H}^{\parallel} + \mathbf{H}^e$  con  $\mathbf{H}^e \in \tilde{\Gamma}$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{H}, \mathbf{H}')^2 &= \|\mathbf{H} - \mathbf{H}'\|^2 = \|\mathbf{H}^{\parallel} + \mathbf{H}^{\perp} - (\mathbf{H}^{\parallel} + \mathbf{H}^e)\|^2 = \\
&= \|\mathbf{H}^{\perp}\|^2 + \|\mathbf{H}^e\|^2 - 2(\mathbf{H}^{\perp} | \mathbf{H}^e) \quad (2.31)
\end{aligned}$$

pero dado que  $\mathbf{H}^{\perp} = \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\parallel}$  y como  $\mathbf{H}^{\perp}$  es ortogonal con  $\mathbf{H}^{\parallel}$  entonces  $\|\mathbf{H}^{\perp}\|^2 = \|\mathbf{H}\|^2 - \|\mathbf{H}^{\parallel}\|^2$ . Por otra parte  $\mathbf{H}^{\perp}$  también es ortogonal con  $\mathbf{H}^e$ . Aplicando todo ello:

$$d(\mathbf{H}, \mathbf{H}')^2 = \|\mathbf{H}\|^2 - \|\mathbf{H}^{\parallel}\|^2 + \|\mathbf{H}^e\|^2 \quad (2.32)$$

y el vector de distancia mínima es aquel que  $\|\mathbf{H}^e\| = 0 \Rightarrow \mathbf{H}^e = 0$ , que corresponde a  $\mathbf{H}' = \mathbf{H}^{\parallel}$ .  $\square$

Las proposiciones anteriores nos indican que, dada una función  $\mathbf{H}$  que se desea reproducir con el sistema de calibración:

▷ la mejor recreación que podemos hacer de ella viene dada por (2.28),

▷ la parte que no podemos reproducir es  $\mathbf{H}^{\perp}$ .

Como resultado auxiliar, es interesante notar que la corriente métrica de  $\mathbf{H}$  y la de  $\mathbf{H}^{\parallel}$  no son necesariamente iguales, lo que intuitivamente se justifica dado que  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{H}^{\parallel}$  no son la misma función; la segunda es una aproximación de la primera<sup>11</sup>.

$\mathbf{H}^{(I)\perp}$  es deseable que sea lo menor posible puesto que su presencia va a indicar la mayor o menor calidad del sistema de calibración con respecto a una cierta excitación. Introduciremos una nueva magnitud que incorpore esta información y que resulte más manejable:

<sup>11</sup>Esto se verá en mayor detalle en la Proposición 3.3.1.

**Definición 11.** Dada una excitación  $\mathbf{H}^{\{I\}} \in \Theta_G$ , y un espacio  $\tilde{\Gamma}$ , se define el coeficiente  $\eta$  como

$$\eta = \frac{\|\mathbf{H}^{\{I\}^\perp}\|}{\|\mathbf{H}^{\{I\}}\|} = \sqrt{\frac{(\mathbf{H}^{\{I\}^\perp} | \mathbf{H}^{\{I\}^\perp})}{(\mathbf{H}^{\{I\}} | \mathbf{H}^{\{I\}})}} \quad (2.33)$$

El coeficiente  $\eta$  exhibe las siguientes propiedades:

- ▷ Es un escalar adimensional.
- ▷ Es independiente del valor de la corriente métrica<sup>12</sup>  $I$  asociada a la excitación.
- ▷  $0 \leq \eta \leq 1$

Dado que normalmente dispondremos de las funciones  $\mathbf{H}^{\{I\}}$ , objeto de estudio, y de las excitaciones base  $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}^\circ$ , que son las físicamente recreables, resulta interesante notar que, a partir de (2.27),  $\eta$  también puede expresarse como:

$$\eta = \sqrt{\frac{(\mathbf{H}^{\{I\}} - \mathbf{H}^{\{I\}^\parallel} | \mathbf{H}^{\{I\}} - \mathbf{H}^{\{I\}^\parallel})}{(\mathbf{H}^{\{I\}} | \mathbf{H}^{\{I\}})}} \quad (2.34)$$

También puede considerarse definir un coeficiente complementario al anterior:

**Definición 12.** Dada una excitación  $\mathbf{H}^{\{I\}} \in \Theta_G$ , y espacio un  $\tilde{\Gamma}$ , se define el coeficiente  $\check{\eta}$  como:

$$\check{\eta} = \frac{\|\mathbf{H}^{\{I\}^\parallel}\|}{\|\mathbf{H}^{\{I\}}\|} = \sqrt{1 - \eta^2} \quad (2.35)$$

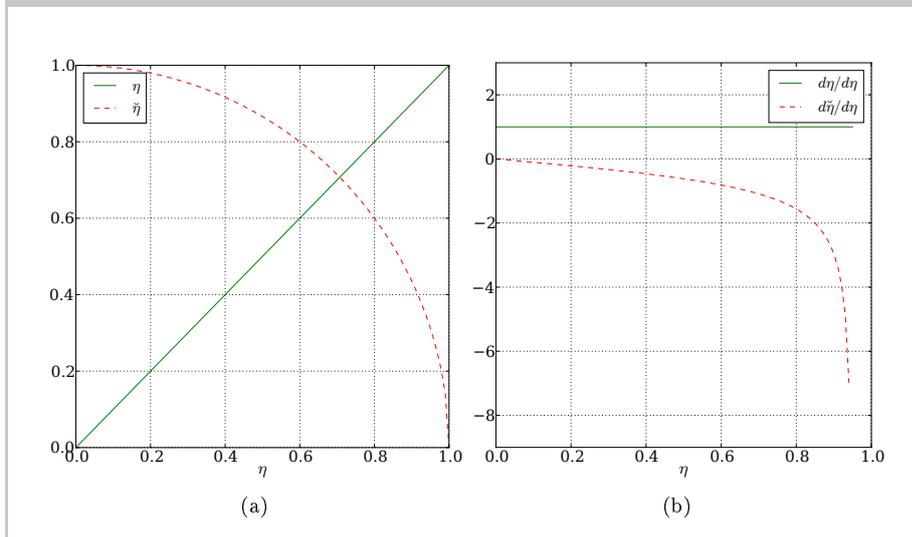
El coeficiente  $\check{\eta}$  exhibe las mismas propiedades que  $\eta$ . Ambos coeficientes dan una indicación de la capacidad de un espacio  $\tilde{\Gamma}$  para representar una cierta excitación. En particular, cuando  $\tilde{\Gamma}$  es muy capaz de representar la excitación, entonces  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\check{\eta} \rightarrow 1$ . Por el contrario cuando el  $\tilde{\Gamma}$  no es muy capaz de representar la excitación, se da el comportamiento inverso:  $\eta \rightarrow 1$ ,  $\check{\eta} \rightarrow 0$ . ¿Cual de los dos coeficientes es más adecuado? Esta cuestión se puede analizar considerando que  $\eta^2 + \check{\eta}^2 = 1$ . Diferenciando esa igualdad se tiene:

$$2\eta d\eta + 2\check{\eta} d\check{\eta} = 0 \quad \implies \quad \left| \frac{d\eta}{d\check{\eta}} \right| = \left| \frac{\check{\eta}}{\eta} \right| \quad (2.36)$$

Conforme  $\tilde{\Gamma}$  es más capaz de representar la excitación,  $|d\eta/d\check{\eta}| \rightarrow \infty$ , lo que implica que, en esa situación, el coeficiente  $\eta$  es *mucho más sensible como coeficiente de representación*. Invirtiendo el cociente se llega a la conclusión inversa; conforme  $\tilde{\Gamma}$  es menos capaz de representar la excitación, el coeficiente  $\check{\eta}$  es mucho más sensible como coeficiente de representación. Alternativamente, esto también puede evidenciarse presuponiendo (de forma arbitraria) una variación lineal de  $\eta$  y comparándola con los valores correspondientes para  $\check{\eta}$ . En concreto, se ha

<sup>12</sup>Y en su caso, de la corriente de excitación.

Figura 2.2. Izquierda: Variación del valor  $\check{\eta}$  en comparación a  $\eta$ . Derecha: Variación del valor de la derivada de  $\check{\eta}$  en comparación al de la derivada de  $\eta$ .



representado  $\check{\eta}$  en función de  $\eta$ ,  $0 \leq \eta \leq 1.0$ . En la figura 2.2 se muestran las representaciones paramétricas de las dos funciones así como sus derivadas. Para valores bajos de  $\eta$ , éste coeficiente es mejor frente a  $\check{\eta}$  dado que presenta un valor mayor de la derivada (por tanto resulta más sensible), mientras que para valores altos el efecto es inverso. Finalmente, el valor específico de  $\eta$  a partir del cual es mejor emplear un coeficiente u otro se puede obtener imponiendo la condición de que  $|d\eta/d\check{\eta}| = 1$ , lo que conduce a un valor de  $\eta = 1/\sqrt{2} \approx 0.7$ .

## 2.3. Índices de calidad de un sistema de calibración

El sistema de calibración que se ha planteado resulta bastante general en el sentido que impone pocas restricciones con respecto a los conductores a usar. Sin embargo la capacidad de reproducción de excitaciones cualesquiera lógicamente dependerá del número de conductores que lo formen así como de la forma y disposición geométrica de los mismos. Un mayor número de conductores facilitará la síntesis de excitaciones pero sin embargo el incremento va a introducir complejidades constructivas que pudiera ser deseable evitar. El punto óptimo se encontrará en algún lugar entre estas dos tendencias: simplicidad constructiva y capacidad de síntesis. En esta sección se pretenden introducir algunas técnicas que faciliten la búsqueda de ese óptimo.

### 2.3.1. Eficacia de los conductores auxiliares

A partir de las excitaciones obtenidas de los  $N$  conductores que conforman el sistema de calibración y puesto que se exige que sean linealmente independientes, obtenemos un espacio  $N$ -dimensional mediante el que tratamos de cubrir

todas las excitaciones posibles. En ese sentido cualquier conjunto de  $N$  espiras (independientes) conducirá a un espacio de esas dimensiones, si bien el espacio generado en concreto variará de conjunto en conjunto.

Aunque todas las excitaciones son igualmente importantes en tanto en cuanto aportan una dimensión más al espacio, nos podemos preguntar ¿cómo de eficaz es un conductor específico a la hora de aportar esa nueva dimensión? El concepto de eficacia de un circuito podemos establecerlo en base a la siguiente idea: *un circuito del sistema de calibración resultará tanto más eficaz cuanto menor sea la corriente que haya que inyectarle para reproducir cualquier excitación*. La siguiente proposición, además de precisar la idea anterior, proporciona una base cuantitativa para generar índices de calidad de un sistema de calibración:

**Proposición 2.3.1.** *Dada una excitación  $H^{\{I_0\}} \in \Theta_G$ , la intensidad de excitación,  $I_{exc,k}$ , que hay que aplicar al conductor  $C_k$  de un sistema de calibración para reproducir  $H^{\{I_0\}}$  viene dada por la expresión:*

$$I_{exc,k} = I_0 \|H^{\{1\}}\| (\hat{u}_H \mid \hat{u}_k^\perp) \frac{1}{\eta_k \|\tilde{H}E_k^\circ\|} \quad (2.37)$$

donde  $\hat{u}_H$  es el vector unitario en la dirección de  $H^{\{I_0\}}$ ,  $\tilde{H}E_k^\circ$  es la excitación generada por el conductor  $C_k$  bajo una corriente de excitación unitaria,  $\eta_k$  es el coeficiente  $\eta$  del circuito  $C_k$  con respecto al espacio  $\tilde{\Gamma}_k$  generado por todos los demás circuitos y  $\hat{u}_k^\perp$  es el vector unitario en la dirección de la componente perpendicular del vector  $\tilde{H}E_k^\circ$  con respecto a  $\tilde{\Gamma}_k$ .

*Demostración.* La excitación  $\tilde{H}E_k^\circ$  asociada al circuito  $C_k$  acepta una descomposición con respecto al espacio  $\tilde{\Gamma}_k$  de la forma:  $\tilde{H}E_k^\circ = \tilde{H}E_k^{\circ\parallel} + \tilde{H}E_k^{\circ\perp}$ , donde  $\tilde{H}E_k^{\circ\perp}$  es la componente de  $\tilde{H}E_k^\circ$  ortogonal a todas las demás excitaciones del sistema de calibración.

Teniendo en cuenta que  $\eta_k = \|\tilde{H}E_k^{\circ\perp}\|/\|\tilde{H}E_k^\circ\|$ , se puede expresar:

$$\hat{u}_k^\perp = \frac{\tilde{H}E_k^{\circ\perp}}{\|\tilde{H}E_k^{\circ\perp}\|} = \frac{\tilde{H}E_k^{\circ\perp}}{\eta_k \|\tilde{H}E_k^\circ\|}$$

$H^{\{I_0\}}$  puede descomponerse como  $H^{\{I_0\}} = \alpha \tilde{H}E_k^{\circ\parallel} + \beta \tilde{H}E_k^{\circ\perp}$ , pero dado que únicamente el conductor  $C_k$  aporta componente en la dirección  $\tilde{H}E_k^{\circ\perp}$ , necesariamente  $\beta = I_{exc,k}$ . Por tanto:

$$H^{\{I_0\}} = \alpha \tilde{H}E_k^{\circ\parallel} + I_{exc,k} \tilde{H}E_k^{\circ\perp} = \alpha \tilde{H}E_k^{\circ\parallel} + I_{exc,k} \eta_k \|\tilde{H}E_k^\circ\| \hat{u}_k^\perp$$

Dado que  $H^{\{I_0\}} = I_0 H^{\{1\}}$ , finalmente:

$$(I_0 H^{\{1\}} \mid \hat{u}_k^\perp) = I_{exc,k} \eta_k \|\tilde{H}E_k^\circ\|$$

de donde se obtiene la expresión buscada.  $\square$

De los cuatro términos que aparecen en la expresión (2.37), el primero corresponde a la corriente total asociada a la excitación a representar, el segundo representa lo *intrínsecamente* grande que es la excitación a representar y el tercero, el producto escalar, nos da una indicación de proporción de excitación

de la que debe hacerse cargo  $C_k$ . Dado que  $H^{\{I_0\}}$  es una excitación genérica (puede ser cualquiera), los factores anteriores no son representativos de cara a determinar la eficacia del conductor  $C_k$ , por lo que ésta viene caracterizada por  $(\eta_k \|\tilde{H}E_k^\circ\|)^{-1}$ .

Por otra parte normalmente el diseño del conductor principal va a venir condicionado por otra serie de factores (homogeneidad del campo magnético a lo largo del circuito magnético, etc...) por lo que su eficacia en ese sentido no resulta una condición de diseño prioritaria. En cualquier caso y dado que es el único que aporta una Integral de Ampere no nula, su eficacia va a ser, en general, elevada.

Con respecto a los conductores auxiliares, serán tanto más eficaces en su desempeño cuanto menor sea la corriente de excitación que hay que aplicarles para conseguir el efecto deseado. De forma compacta podemos definir un índice de eficacia asociado a cada conductor como:

$$\tau_k = L_{LM} \|\tilde{H}E_k^\circ\| \eta_k \quad (0 < \tau_k < \infty) \quad (2.38)$$

donde el factor  $L_{LM}$  puede interpretarse como una constante dimensional que se incluye a efectos de que el coeficiente resulte adimensional. Deseamos que  $\tau_k$  sea lo mayor posible, y lo será cuanto mayor sea cada uno de sus factores.

- ▷  $\|\tilde{H}E_k^\circ\|$ . Corresponde al módulo de la excitación. Conseguir que el módulo de  $\tilde{H}E_k^\circ$  sea lo mayor posible, implica que su variabilidad con respecto al valor medio, que es cero<sup>13</sup>, sea lo mayor posible. Dado que  $\tilde{H}E_k^\circ$  es la función H generada por el conductor  $C_k$  cuando se le aplica una corriente de excitación unitaria, esto puede obtenerse de dos maneras:
  - ▷ Sustituir conductores formados por una espira por bobinados de  $N$  espiras (con lo que la corriente de excitación necesaria se reduce en un factor  $1/N$ ).
  - ▷ Acercar el conductor al lazo de medida, de forma que los perfiles de H generados sobre éste son más abruptos. El módulo de  $\tilde{H}E_k^\circ$  dependerá fundamentalmente de lo cerca o lejos que se encuentren los conductores que conforman  $C_k$  del lazo de medida. Para un hilo indefinido (ver apartado A.2.3 del apéndice A) el módulo crece muy rápidamente para distancias menores del 10 % del valor del radio de curvatura del lazo de medida<sup>14</sup>, pero también crece su derivada por lo que el beneficio asociado al incremento del módulo se contrapone con la sensibilidad en la ubicación del conductor a la hora de construir el prototipo.
- ▷  $\eta_k$ . Indica el nivel de independencia del conductor frente al resto. Puesto que se trata de un coeficiente  $\eta$  su valor está acotado entre 0 y 1, siendo éste último el óptimo.

A fin de tener un único índice que nos caracterice la eficacia del sistema (y no uno por cada excitación aislada auxiliar) se pueden considerar las siguientes opciones:

<sup>13</sup>Estamos considerando únicamente lo conductores aislados auxiliares.

<sup>14</sup>El análisis que se hace en el apéndice emplea lazos de medida circulares y las conclusiones se obtienen sobre distancias relativas con respecto al valor del radio del lazo de medida. En el caso general, para puntos suficientemente cercanos al lazo de medida éste se equipara a la circunferencia de radio igual al radio de curvatura.

- ▷  $\tau_{\min}$  (Índice de eficacia mínimo): El valor mínimo de los coeficientes de eficacia de todos los conductores del sistema de calibración.

$$\tau_{\min} = \min\{\tau_k, k = 0, \dots, N_{\tilde{\Gamma}} - 1\} \quad (2.39)$$

Este índice fundamentalmente nos va a dar una indicación relativa sobre la posibilidad de sustituir un conductor (el de índice de menor valor) por otro a fin de mejorar el sistema.

- ▷  $\tau'_p$  (Índice promedio total): Promedio de los índices de eficacia de todos los conductores incluyendo el del conductor principal.

$$\tau'_p = \frac{1}{N_{\tilde{\Gamma}}} \sum_{k=0}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} \tau_k \quad (2.40)$$

Este índice nos dará una medida globalizadora de la eficacia del sistema, pero la inclusión del conductor principal (cuyo módulo será habitualmente mucho mayor que el de los conductores auxiliares) va a ofrecer una información enmascarada. Por ello también se considera el siguiente:

- ▷  $\tau_p$  (Índice promedio): Promedio de los índices de eficacia de todos los conductores auxiliares.

$$\tau_p = \frac{1}{N_{\tilde{\Gamma}} - 1} \sum_{k=1}^{N_{\tilde{\Gamma}}-1} \tau_k \quad (2.41)$$

Este índice va a dar una adecuada visión de conjunta del sistema si bien, al tratarse de un promedio, puede enmascarar valores bajos de algún conductor (que podría ser reemplazado).

A tenor de lo anterior, se considerará  $\tau_p$  como índice global de eficacia. Sin embargo es un coeficiente con un rango de variación entre  $0 \leq \tau_p \leq \infty$  y sería deseable disponer de un *coeficiente de aptitud*,  $\varepsilon_\tau$ , asociado al índice global de eficacia con un rango de variación entre 0 y 1, donde 0 indica pésima aptitud y 1 indica aptitud óptima. De esta forma se define:

$$\varepsilon_\tau = 1 - e^{-\tau_p} \quad (2.42)$$

### 2.3.2. Respuesta frente a conductores rectilíneos indefinidos. Mapas de $\eta_\infty$

A fin de poder tener una visualización gráfica de la capacidad de representación de un sistema de calibración con respecto al posicionamiento del conductor de excitación, se puede considerar como emblemática (aunque físicamente irreal) una excitación consistente en un hilo recto indefinido de sección despreciable perpendicular al plano que contiene el lazo de medida. La posición de ese conductor viene especificada por su punto de intersección con el plano<sup>15</sup>  $XY$  en el que suponemos que se halla el lazo de medida. Al punto le podemos

<sup>15</sup>Se presupone un lazo de medida plano, que como ya se ha indicado, son los más habituales.

asociar el valor del correspondiente coeficiente  $\eta$ . Este proceso puede extenderse a todos los puntos interiores del lazo de medida, o restringirlos a aquellos que entren dentro del rango de uso del ALBA, pero en cualquier caso queda definida una función  $\eta_\infty(x, y)$  donde el subíndice con la indicación de infinito se ha añadido para resaltar que corresponde al valor de  $\eta$  para un cable indefinido. Lógicamente este tipo de conductores son como mucho un subconjunto de todas las posibles excitaciones aplicables, pero esencialmente se puede concluir que las zonas en las que el valor de  $\eta_\infty$  sea próximo a la unidad corresponderán a aquellas en las que el sistema de calibración tiene problemas de representación en caso de colocarse un conductor (de cualquier tipo) por ese entorno<sup>16</sup>.

A partir de la función  $\eta_\infty(x, y)$  pueden introducirse dos parámetros adicionales para la caracterización global de la aptitud del sistema:

- ▷  $\varepsilon_\eta$ : A partir del promedio de los valores de  $\eta_\infty(x, y)$  en todo su rango de variación,  $\overline{\eta_\infty}$ , o, equivalentemente, el promedio de la capacidad de representación de excitaciones del sistema de calibración con respecto a todos los puntos en los que se puede ubicar una excitación, se define el coeficiente de aptitud  $0 < \varepsilon_\eta < 1$ :

$$\varepsilon_\eta = 1 - \overline{\eta_\infty} \quad (2.43)$$

- ▷  $\varepsilon_\sigma$ : Aunque el parámetro anterior nos da una visión global del comportamiento, es deseable también que el sistema de calibración presente un comportamiento lo más homogéneo posible en todos los puntos en los que se ubique el conductor. Esta información puede representarse mediante la desviación típica de  $\eta_\infty$ ,  $\sigma(\eta_\infty)$ . Puesto que nuevamente deseamos asociar valores cercanos a 1 a buen comportamiento (y por tanto, poca desviación típica), se define el coeficiente  $0 < \varepsilon_\sigma < 1$ :

$$\varepsilon_\sigma = 1 - \sigma(\eta_\infty) \quad (2.44)$$

### 2.3.3. Coeficiente de aptitud global

Los coeficientes de aptitud introducidos en apartado anterior hacían hincapié en diferentes aspectos del sistema de calibración y todos presentaban un rango de variación entre 0 (asociado a una aptitud pésima) y 1 (asociado a una aptitud óptima). Resultaría interesante disponer de un único coeficiente global de aptitud del sistema de calibración,  $\varepsilon$ , con el mismo rango de variación y la misma interpretación de sus límites.  $\varepsilon$  debería estar compuesto de una suma ponderada de los diversos factores vistos de forma que se pueda adaptar a diferentes requerimientos de diseño mediante la variación de los factores de peso de cada contribución. De esta forma se ha definido el coeficiente de aptitud del sistema de calibración,  $\varepsilon$ , como:

$$\varepsilon = \max \left\{ 0, \frac{1}{1 - \varepsilon_0} \left( \frac{k_\eta \varepsilon_\eta + k_\sigma \varepsilon_\sigma + k_\tau \varepsilon_\tau}{k_\eta + k_\sigma + k_\tau} - \varepsilon_0 \right) \right\} \quad (2.45)$$

<sup>16</sup>De forma equivalente puede definirse una función  $\check{\eta}_\infty(x, y)$  (ver Def. 12). Sin embargo, para sistemas con  $\eta$  mayor que 0.7 resulta más adecuada la descripción a través de  $\eta$ , tal y como se ha discutido al final de la sección 2.2.4.

donde  $k_\eta, k_\sigma, k_\tau$  son factores de ponderación.  $\varepsilon_0$  es un valor umbral de aptitud por debajo del cual se considera la configuración como inaceptable: en caso de resultar negativo el término de la derecha de la función máx, el resultado se ajustará a cero. El factor de normalización  $(1 - \varepsilon_0)^{-1}$  se añade a fin de que  $\varepsilon$  tenga un valor máximo de 1.

## 2.4. Análisis de topologías específicas

Esta sección pretende aplicar los resultados de las secciones anteriores a sistemas de calibración concretos, esto es, sistemas de calibración con geometrías definidas de sus circuitos, a fin de hacer un cierto análisis paramétrico de los mismos. Por ello, salvo que explícitamente se indique lo contrario, se van a mantener constantes las siguientes características en todos ellos:

- ▷ El circuito principal, en forma y orientación.
- ▷ El número de circuitos auxiliares, o equivalentemente, el orden del sistema de calibración. No obstante, en la medida en que sea posible, el sistema de calibración se definirá de forma genérica independientemente del orden. Por otra parte los circuitos auxiliares estarán compuestos de una única espira; no serán bobinados.
- ▷ El lazo de medida. Va a ser circular y de radio<sup>17</sup>  $R_{LM} = 3.155$  cm.

Adicionalmente, el primero de estos sistemas se va a usar para ilustrar de forma más detallada los análisis, magnitudes y excitaciones introducidos previamente, por lo que la extensión con que se va a tratar será, lógicamente, mayor. Las representaciones gráficas de la eficacia los sistemas se han trasladado al final de la sección debido a su tamaño y a efectos de dar mayor continuidad al texto.

### 2.4.1. Circuitos de forma rectangular

La definición de sistema de calibración (definición 6) no incluye prácticamente ninguna ligadura en la forma que deben tener los circuitos que lo conforman salvo el que deban tener corriente métrica nula en algunos casos, o no nula en otros. Por tanto, la geometría con la que se los diseñe puede ser cualquiera. Sin embargo, desde un punto de vista constructivo, resultan especialmente sencillos los circuitos de forma rectangular. Es por ello que todos los sistemas de calibración que siguen van a estar compuestos por circuitos de esta forma. Resulta de interés establecer un conjunto de coordenadas que los definan unívocamente en forma y posición.

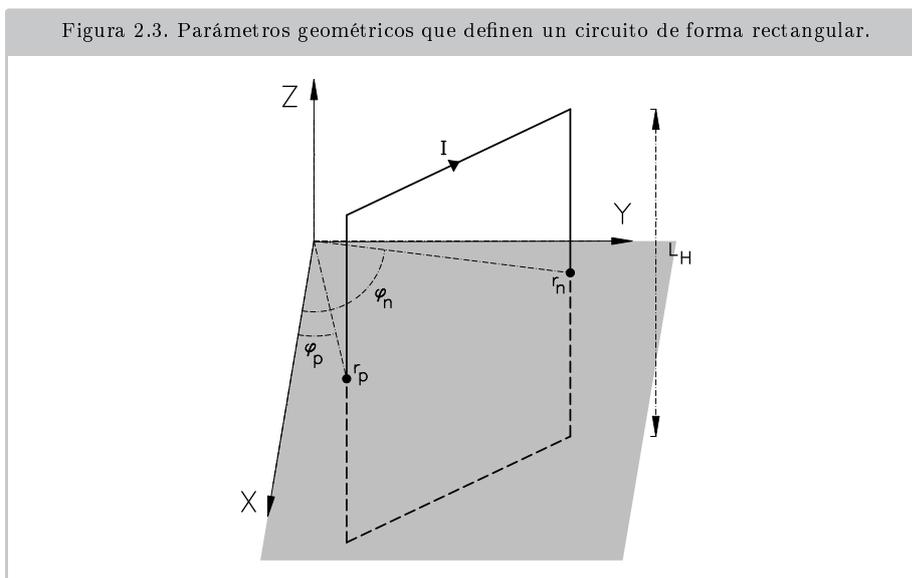
**Definición 13.** *Dado un lazo de medida plano, se define un circuito rectangular (o una espira rectangular) como un circuito elemental con las siguientes características:*

- ▷ *Está formado por un cable unidimensional modelado en forma de rectángulo.*

---

<sup>17</sup>Esta elección viene motivada por ser el lazo de medida asociado a un toroide magnético de un cierto material que se ha usado en las comprobaciones experimentales en el laboratorio.

Figura 2.3. Parámetros geométricos que definen un circuito de forma rectangular.



- ▷ *Sólo tiene una espira.*
- ▷ *Dos lados del rectángulo son paralelos al plano del lazo de medida y los otros dos son perpendiculares. (Por tanto el plano que contiene el rectángulo es perpendicular al plano que contiene el lazo de medida).*
- ▷ *Se denomina lado positivo del rectángulo al lado perpendicular al lazo de medida en el que una corriente positiva avanza en el sentido de avance de un sacacorchos que gire en el sentido de circulación definido por el lazo de medida. El otro lado perpendicular se denomina lado negativo.*

A partir de la segunda característica de la definición se puede ver que  $\zeta$  valdrá  $0$  ó  $\pm 1$  dependiendo de la posición del circuito rectangular con respecto al lazo de medida. Por otra parte, dado que el lazo de medida es plano, en general supondremos que está situado en el plano  $Z = 0$  y que su sentido de circulación, visto desde el eje  $+Z$ , es el contrario a las agujas del reloj. Los lados positivo y negativo del circuito rectangular serán paralelos al eje  $Z$ , siendo el positivo aquel en el que la corriente circule en la dirección positiva del eje  $Z$ . Los otros dos lados serán paralelos al plano  $Z = 0$ .

La espira rectangular vendrá caracterizada por 5 coeficientes: las coordenadas polares de los cortes de los lados positivo y negativo con el plano  $Z = 0$  y la longitud *total* de estos lados. En la tabla 2.1 se muestra la simbología utilizada para estos coeficientes y en la figura 2.3 se recoge una representación gráfica. Aunque por simplicidad se ha denominado a estos circuitos como circuitos rectangulares, es importante notar que no cualquier circuito de forma rectangular encaja en esta clase, dado que también implica una orientación concreta con respecto a un lazo de medida (el cual, además, ha de ser plano).

Tabla 2.1. Parámetros de un circuito rectangular (ver figura 2.3).

Símbolo	Descripción
$r_p$	Coordenada radial del lado positivo
$\varphi_p$	Coordenada angular del lado positivo
$r_n$	Coordenada radial del lado negativo
$\varphi_n$	Coordenada angular del lado negativo
$L_H$	Longitud total de los lados positivo y negativo

Tabla 2.2. Parámetros del sistema de calibración SCR00.N.

Lazo de medida: tipo circular					
$R_{LM}$	3.155	cm			
Circuito principal: tipo rectangular					
$r_p$	0	cm	$\varphi_p$	0	rad
$r_n$	20.0	cm	$\varphi_n$	0	rad
$L_H$	25.0	cm			
Circuitos auxiliares: tipo rectangular					
$r_p$	0.5	cm	$\varphi_p$	$\frac{2\pi(k-1)}{N-1}$	$k = 1, \dots, N-1$ rad
$r_n$	1.7	cm	$\varphi_n$	$\frac{2\pi(k-1)}{N-1}$	$k = 1, \dots, N-1$ rad
$L_H$	20.0	cm			

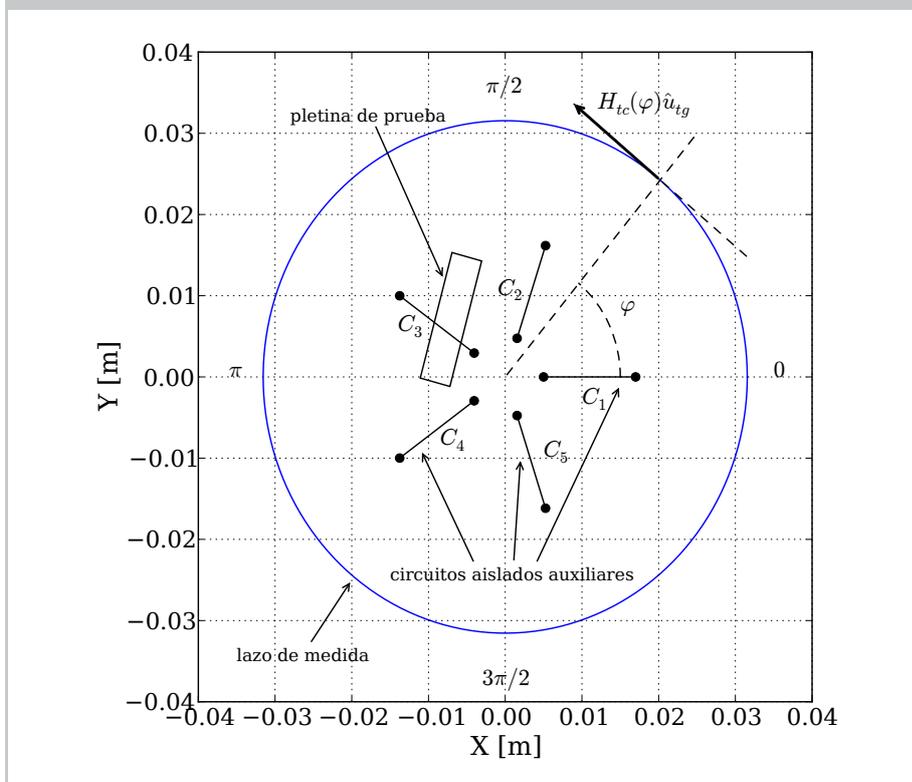
### 2.4.2. SCR00.N. Sistema de calibración de conductores radiales

El acrónimo corresponde a Sistema de Calibración con N conductores Radiales (subtipo 00). Está constituido por un lazo de medida circular y conductores rectangulares. Los conductores auxiliares están distribuidos radialmente. Los parámetros que definen sus elementos vienen recogidos en la tabla 2.2. En la figura 2.4 se muestra una visión 2D del sistema de calibración SCR00.6 y en la figura 2.5 se muestran diferentes vistas 3D de éste último.

El espacio  $\tilde{\Gamma}$  (ver definición 10) asociado al sistema de calibración corresponde a todas las funciones H que podemos generar como combinaciones lineales de las excitaciones aisladas (ver Def 9), que son las funciones  $\tilde{H}E^\circ$  generadas por los conductores aislados cuando se les aplica una corriente de excitación unitaria  $I_{exc} = 1$ . La forma de estas funciones se muestra en la figura 2.6. Dada la simetría geométrica del sistema de calibración, las funciones asociadas a las espiras auxiliares son todas iguales salvo un desplazamiento a lo largo de  $\varphi$ . Lógicamente si se aumenta la corriente de excitación por una de las espiras, la función que se obtendrá aumentará proporcionalmente.

La corriente métrica de las excitaciones auxiliares ( $\tilde{H}E_1^\circ, \dots, \tilde{H}E_5^\circ$ ) es  $I_{met} = 0$ . Dado que la corriente métrica corresponde al valor de Integral de Ampere de

Figura 2.4. Visión 2D de SCR00.6 junto con la posición de la pletina rectangular indefinida usada como excitación a reproducir.



la excitación, el valor promedio de cada una de ellas debe ser nulo y por tanto fluctúan en torno a ese valor. En el caso de la excitación aislada principal,  $\tilde{H}E_0^\circ$ , la corriente métrica no es nula. Tal como se ha definido el conductor principal,  $\zeta_0 = 1$  (ver Prop. 2.2.1), por lo que la corriente métrica es la unidad. Por ello esta excitación fluctúa en torno a la línea de  $1/L_{LM} = 1/(2\pi R_{LM}) \approx 5.0 \text{ A/m}$

En la figura 2.7 se hace una representación esquemática de este sistema de calibración junto con las excitaciones aisladas, donde queda patente que éstas últimas se acentúan en los puntos del lazo de medida en los que el correspondiente conductor se halla más cerca.

Las excitaciones aisladas  $\tilde{H}E^\circ$  no constituyen un sistema de representación cómodo del espacio  $\tilde{\Gamma}$  dado que no ortogonales. Por tanto a partir de ellas se genera una base ortonormal  $\tilde{\mathbf{g}}$  (2.18). Los coeficientes de la matriz  $\tilde{\mathbf{A}}'$  quedan recogidos en la tabla 2.3, y las funciones  $\tilde{\mathbf{g}} = [\tilde{g}_k]$ ,  $k = 1, \dots, N_{\tilde{\Gamma}}$  se muestran en la figura 2.8.

Consideremos una excitación específica que se desee reproducir con este sistema. En concreto se va a considerar una pletina rectangular de longitud indefinida, anchura  $\Delta X = 1.6 \text{ cm}$  y espesor  $\Delta Y = 0.4 \text{ cm}$ , cuyo centro se ha ubicado en las coordenadas rectangulares  $x = -0.7071 \text{ cm}$ ,  $y = 0.7071 \text{ cm}$  (coordenadas polares  $r = 1.0 \text{ cm}$ ,  $\varphi = 135^\circ$ ) y se le ha aplicado una rotación de  $75^\circ$ , Fig. 2.4. Por la pletina circula una  $I_{exc} = I_{met} = 1 \text{ A}$ . La función  $H_P$  asociada a esta excitación se muestra en la figura 2.9.

Figura 2.5. Diversas imágenes 3D del sistema de calibración SCR00.6. El conductor aislado principal se muestra en rojo, los conductores aislados auxiliares se muestran en azul y el lazo de medida en naranja.

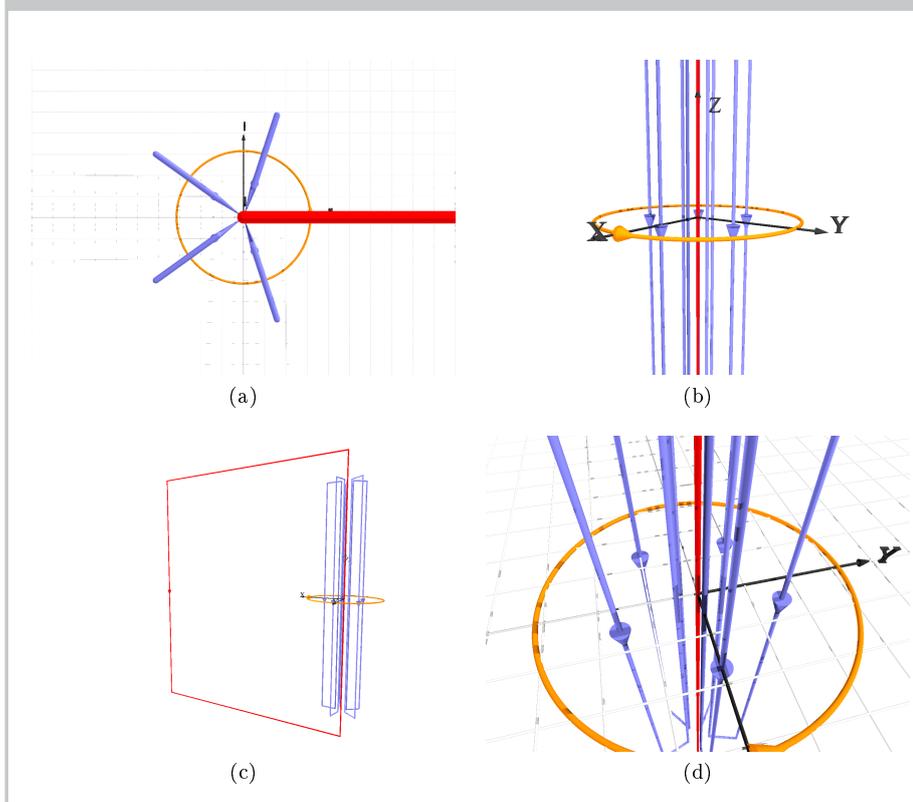
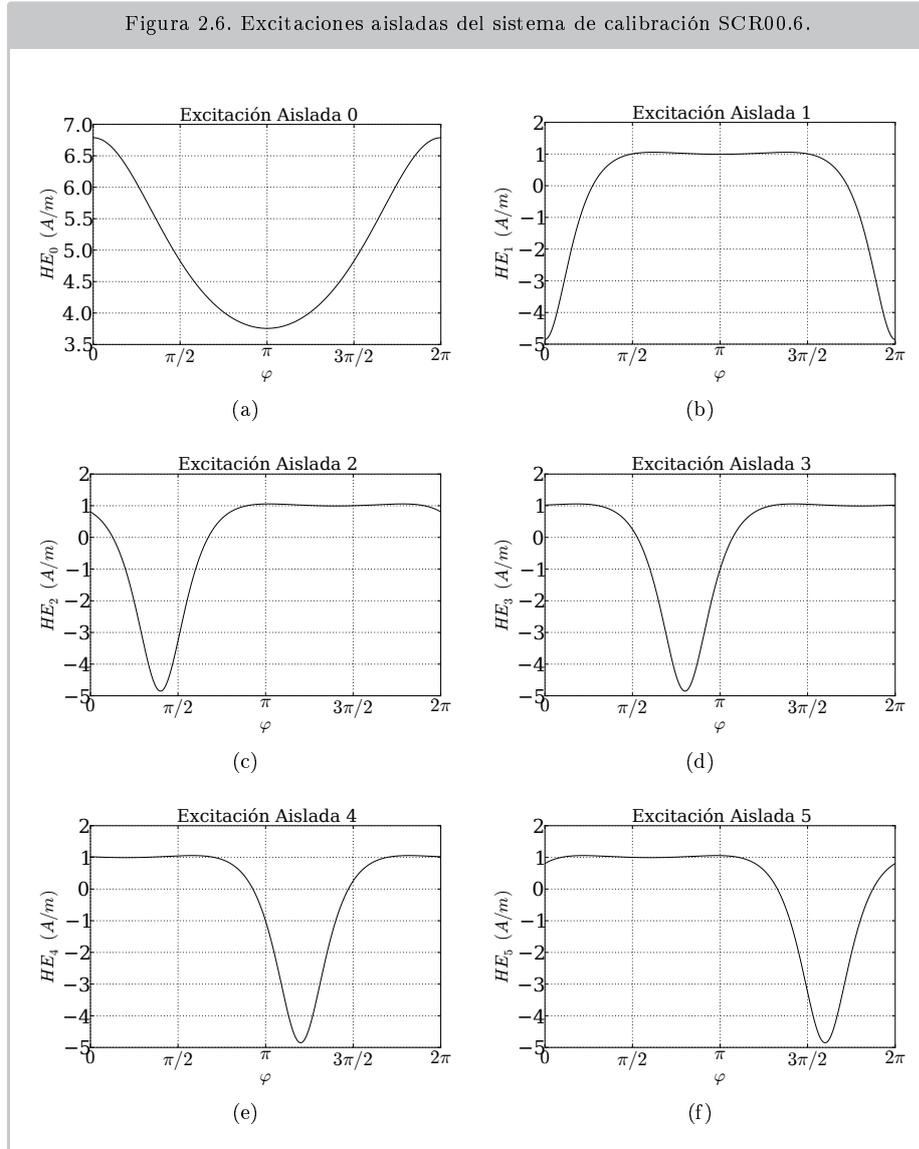


Tabla 2.3. Coeficientes de la matrix  $\Lambda'$  de SCR00.6.

0.19400	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.03357	0.58727	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.01102	0.08139	0.58451	0.00000	0.00000	0.00000
-0.01060	0.22822	0.11018	0.62948	0.00000	0.00000
-0.01428	0.39878	0.34854	0.28631	0.74937	0.00000
0.00152	1.09313	1.13016	1.12973	1.09222	1.32383

Queremos testear la respuesta de un ALBA a esta pletina. Instalar esa pletina en el laboratorio puede ser engorroso por sus dimensiones así como por el hecho de que no va a ser el único circuito para el que queremos probar el instrumento. Por ello pretendemos simular su efecto mediante el sistema de calibración. Esto es, queremos reproducir su función  $H_P$ . Esta se puede descomponer (ver proposición 2.2.3) en una parte que pertenece a  $\tilde{\Gamma}$  ( $H_P^\parallel$ , parte paralela) y la parte restante ( $H_P^\perp$ , parte perpendicular), donde la parte paralela constituye la mejor aproximación a  $H_P$  que podemos conseguir con el sistema de calibración.

Figura 2.6. Excitaciones aisladas del sistema de calibración SCR00.6.



¿Que corrientes hay que aplicar a cada una de las excitaciones aisladas para reproducirla? La expresión (2.20) nos da los coeficientes con respecto a la base ortonormal, cuyo valor se muestra en la tabla 2.4, si bien estos valores no nos resultan demasiado útiles a efectos prácticos. La expresión (2.18) nos da los valores de los coeficientes del desarrollo de  $H_P^{\parallel}$  con respecto a las excitaciones aisladas. Esos coeficientes, que vienen recogidos en la tabla 2.5, corresponden a las corrientes de excitación a aplicar. En la figura 2.9 se muestran las funciones  $H_P$ ,  $H_P^{\parallel}$  y  $H_P^{\perp}$ .

Es interesante notar que en este sistema de calibración las excitaciones aisladas son esencialmente nulas excepto en un intervalo angular pequeño. Por ello, al tratar de reproducir una cierta excitación,  $H_p$  en este caso, el papel de cada

Figura 2.7. Vista esquemática (2D) vista desde el eje +Z, del sistema de calibración SCR00.6. En azul se muestra el lazo de medida y en colores diferentes los conductores auxiliares. No se muestra el conductor principal. También se muestran las funciones de excitación  $\tilde{H}E_k^{\circ}$  de los conductores auxiliares (con el trazo en el color correspondiente) así como la del conductor principal (línea verde exterior).

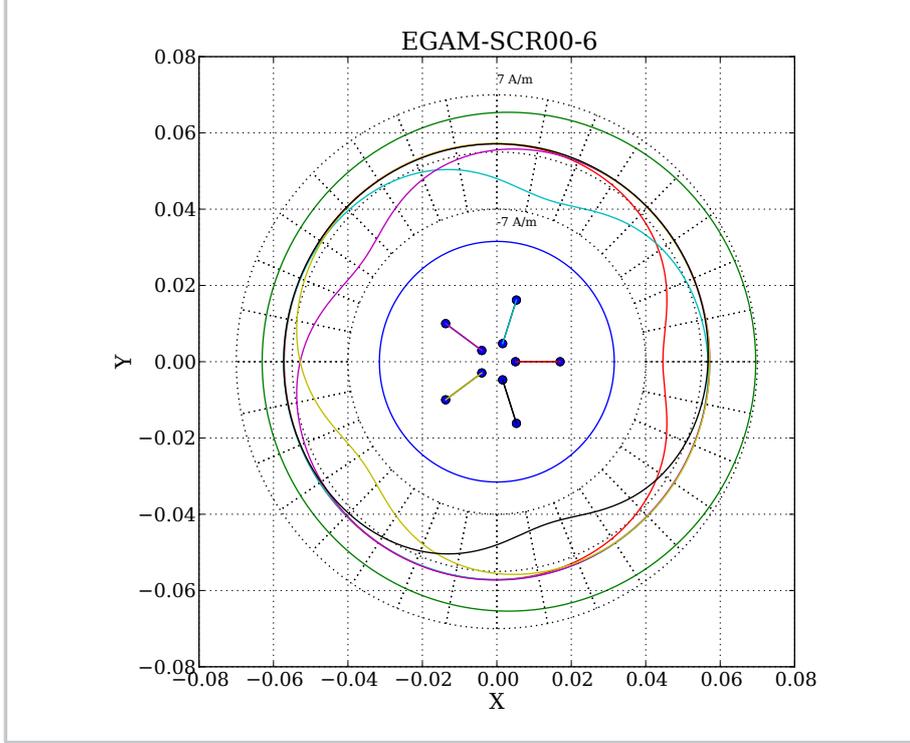


Tabla 2.4. Coeficientes de la descomposición de la función  $H_p$  del conductor de prueba con respecto a la base ortonormal de SCR00.6.

$\tilde{g}_0$	$\tilde{g}_1$	$\tilde{g}_2$	$\tilde{g}_3$	$\tilde{g}_4$	$\tilde{g}_5$
4.77263	1.43998	0.08037	-1.16599	-0.54881	0.22383

excitación aislada es el de reproducir la parte de  $H_p$  que recae en ese intervalo. Este comportamiento es similar al de los splines [Unser, 1999], o los wavelets de Haar [Unser y Blu, 2003], [Kaiser, 1994]. En concreto, los valores de corriente más elevados en la tabla 2.5 corresponden a  $\tilde{H}E_3^{\circ}$  que es el conductor más próximo al punto donde  $H_p$  alcanza un valor mayor. El valor de corriente a aplicar a  $\tilde{H}E_1^{\circ}$  es debido a que este conductor se encarga de compensar el exceso introducido por la asimetría de la excitación principal  $\tilde{H}E_0^{\circ}$ .

Finalmente, el valor de  $\eta$  (ver Def. 11) para la pletina es de  $\eta = 0.1014^{18}$ .

<sup>18</sup>A la vista de la definición de  $\eta$ , existe una tentación de interpretar ese valor en el sentido de que el sistema de calibración es incapaz de reproducir el 10.14% de  $H_p$ . Sin embargo esta interpretación, aunque intuitiva y en ese sentido, útil, no puede tomarse de una forma estrictamente literal. En efecto, el valor de  $\tilde{\eta}$  (ver Def. 12) toma un valor de  $\tilde{\eta} = 0.9948$ , e

Figura 2.8. Funciones  $\tilde{g}_k$ ,  $k = 1, \dots, N_{\tilde{\Gamma}}$  correspondientes a la base ortonormal del espacio  $\tilde{\Gamma}$  del sistema de calibración SCR00.6.

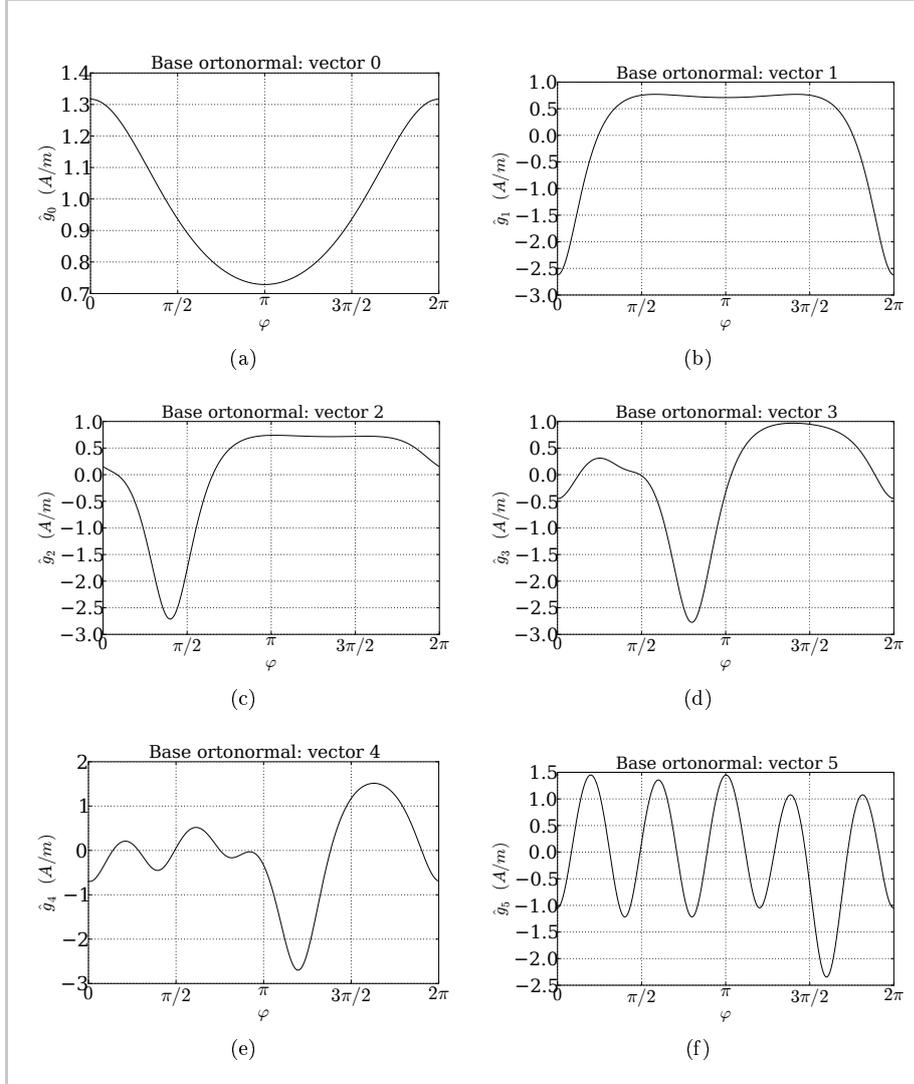
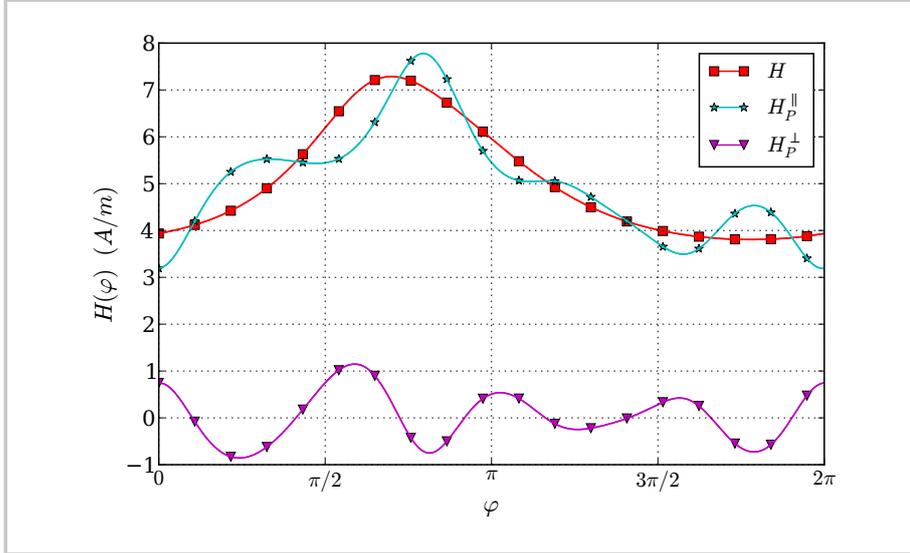


Tabla 2.5.  $I_{\text{exc}}$  (en A) a aplicar a las excitaciones aisladas de SCR00.6 a fin de obtener la mejor aproximación posible ( $H_P^{\parallel}$ ) al efecto del conductor de prueba ( $H_P$ )

$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
0.99563	0.61192	-0.01980	-0.63822	-0.16679	0.29632

igualmente podría interpretarse como que el sistema de calibración es capaz de reproducir el 99.48% de  $H_P$  y claramente ambos valores no suman la unidad, puesto que su composición debe ser cuadrática:  $\eta^2 + \check{\eta}^2 = 1$ .

Figura 2.9. Función  $H_p$  del conductor de prueba y funciones  $H_p^{\parallel}$  y  $H_p^{\perp}$  de la descomposición según SCR00.6.



El proceso de cálculo de  $\eta$  puede repetirse considerando un hilo indefinido perpendicular al plano del lazo de medida al que corta en un único punto. Asociando el valor obtenido a ese punto y repitiendo el proceso para todos los puntos podemos obtener un mapa de  $\eta_{\infty}$  (ver sección 2.3.2) que nos ofrece una cierta indicación del comportamiento del sistema de calibración en función de la posición en que se ubica el conductor a reproducir con respecto a él. Alternativamente, nos ofrece una visión de las zonas en las que el sistema se comporta mejor o peor. En la figura 2.12 se muestran los mapas de  $\eta$  y  $\check{\eta}$  en versión 2D (mapas de isolíneas de  $\eta$ ) y en versión 3D<sup>19</sup>. Es interesante notar que los valores de  $\eta$  en este sistema son inferiores a 0.7. A raíz de la discusión llevada a cabo al final de la sección 2.2.4, esto implica que  $\eta$  es mejor coeficiente para la descripción de este sistema que  $\check{\eta}$ , como se pone en evidencia en las gráficas (3D) de la figura: la correspondiente a  $\eta$ , que resulta más abrupta, muestra más claramente las zonas en las que el sistema se comporta mejor o peor.

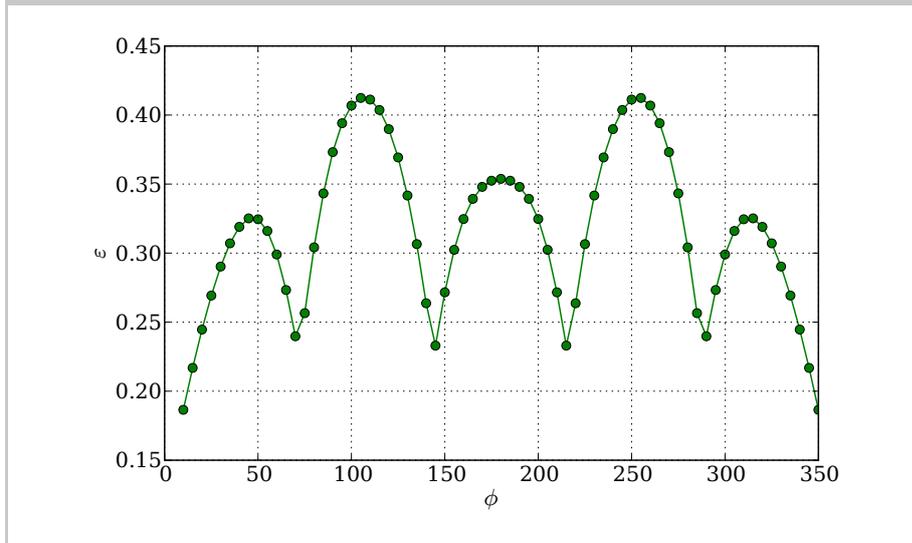
### 2.4.3. SCA00.N< $\phi$ >SCA00.N< $\phi$ >. Sistema de calibración con conductores en disposición anular

El acrónimo corresponde a Sistema de Calibración con N conductores en disposición Anular, donde cada conductor abarca un ángulo  $\phi$ . Está constituido por un lazo de medida circular y conductores rectangulares. Los conductores auxiliares están distribuidos a lo largo de un anillo concéntrico al lazo de medida y cada uno abarca un ángulo  $\phi$ . Los parámetros que definen sus elementos vienen recogidos en la tabla 2.6. En la figura 2.10 se muestra la variación de la aptitud de este sistema en función del parámetro  $\phi$ . La gráfica presenta cinco máximos cuyas configuraciones se muestran en las figuras 2.13, 2.14, 2.15, 2.16 y 2.17.

<sup>19</sup>Para facilitar la lectura del texto las figuras de este tipo de este sistema de calibración y los que siguen, se han trasladado a la sección 2.4.8.

Tabla 2.6. Parámetros del sistema de calibración SCA00.N $\langle\phi\rangle$ .

Lazo de medida: tipo circular					
$R_{LM}$	3.155 cm				
Circuito principal: tipo rectangular					
$r_p$	0	cm	$\varphi_p$	0	rad
$r_n$	20.0	cm	$\varphi_n$	0	rad
$L_H$	25.0 cm				
Circuitos auxiliares: tipo rectangular					
$r_p$	1.7	cm	$\varphi_p$	$\frac{2\pi(k-1)}{N-1}$	$k = 1, \dots, N-1$ rad
$r_n$	1.7	cm	$\varphi_n$	$\frac{2\pi(k-1)}{N-1} + \phi$	$k = 1, \dots, N-1$ rad
$L_H$	20.0 cm				

Figura 2.10. Valor de la aptitud,  $\varepsilon$ , del sistema de calibración SCA00.6 $\langle\phi\rangle$  en función de  $\phi$ .

Las dos últimas son simétricas con respecto a las dos primeras; de hecho son la misma configuración de circuitos auxiliares salvo una rotación.

#### 2.4.4. SPA00.N. Sistema de calibración con conductores paralelos

El acrónimo corresponde a Sistema de calibración con conductores en disposición PAralela. Está constituido por un lazo de medida circular y conductores rectangulares. Los conductores auxiliares están orientados de forma que los lados paralelos al plano  $Z = 0$  también son paralelos al eje X y equiespaciados unos con otros. Los parámetros que definen sus elementos vienen recogidos en

Tabla 2.7. Parámetros del sistema de calibración SPA00.N.

Lazo de medida: tipo circular					
$R_{LM}$	3.155	cm			
Circuito principal: tipo rectangular					
$r_p$	0	cm	$\varphi_p$	0	rad
$r_n$	20.0	cm	$\varphi_n$	0	rad
$L_H$	25.0	cm			
Circuitos auxiliares: tipo rectangular					
$r_p$	1.7	cm	$\varphi_p$	$\frac{\pi k}{N}$	$k = 1, \dots, N - 1$ rad
$r_n$	1.7	cm	$\varphi_n$	$2\pi - \frac{\pi k}{N}$	$k = 1, \dots, N - 1$ rad
$L_H$	20.0	cm			

la tabla 2.7. En la figura 2.18 se muestran los mapas de  $\eta_\infty$ .

#### 2.4.5. SMI00.N. Sistema de calibración con conductores en disposición mixta

El acrónimo corresponde a Sistema de calibración con conductores en disposición Mixta. Está constituido por un lazo de medida circular y conductores rectangulares. Los conductores auxiliares están en una disposición mezclada entre SCR00.N y SCA00.N $\langle\phi\rangle$ , en este último caso con la mayor apertura angular posible. El número total de conductores (N) debe ser par, o, equivalentemente, el numero de conductores auxiliares debe ser impar. Los parámetros que definen sus elementos vienen recogidos en la tabla 2.8. En la figura 2.19 se muestran los mapas de  $\eta_\infty$ .

#### 2.4.6. Análisis de aptitudes

Para los sistemas descritos anteriormente se ha llevado a cabo el cálculo de los índices de aptitud global,  $\varepsilon$  (sección 2.3.3), así como de los índices parciales,  $\varepsilon_\tau$  (sección 2.3.1),  $\varepsilon_\eta$  y  $\varepsilon_\sigma$  (sección 2.3.2). Para ello se ha considerando que el rango de uso sólo permite la ubicación de conductores en una zona circular de radio 2 cm interior al lazo de medida. El cálculo de la función  $\eta_\infty(x, y)$  se ha hecho partiendo de una región cuadrada de lado igual al diámetro del lazo de medida ( $\varnothing = 6.31$  cm) de los sistemas de calibración. Esa zona se ha discretizado en una matriz de  $150 \times 150$  puntos, de la cual se han excluido los puntos exteriores a la zona circular interior. Con los puntos interiores restantes se han calculado  $\varepsilon_\eta$  y  $\varepsilon_\sigma$ . Nótese que el coeficiente  $\varepsilon_\tau$  es intrínseco del sistema de calibración y no depende de una zona interior o de una discretización de la misma. Los resultados obtenidos se muestran, en orden descendente de aptitudes globales, en la tabla 2.9.

Del análisis de los resultados podemos apuntar un conjunto de observaciones cualitativas:

Tabla 2.8. Parámetros del sistema de calibración SMI00.N.

Lazo de medida: tipo circular				
$R_{LM}$	3.155	cm		
Circuito principal: tipo rectangular				
$r_p$	0	cm	$\varphi_p$	0 rad
$r_n$	20.0	cm	$\varphi_n$	0 rad
$L_H$	25.0	cm		
Circuitos auxiliares: tipo rectangular				
$r_p$	0.5	$k = 1, \dots, \frac{N}{2}$		cm
	2.7	$k = \frac{N+2}{2}, \dots, N-1$		
$\varphi_p$	$\frac{4\pi(k-1)}{N}$	$k = 1, \dots, \frac{N}{2}$		rad
	$\frac{\pi(2k+2-N)}{N}$	$k = \frac{N+2}{2}, \dots, N-1$		
$r_n$	1.7			cm
$\varphi_n$	$\frac{4\pi(k-1)}{N}$	$k = 1, \dots, \frac{N}{2}$		rad
	$\frac{\pi(2k+4-N)}{N}$	$k = \frac{N+2}{2}, \dots, N-1$		
$L_H$	20.0			cm

Tabla 2.9. Coeficientes de aptitud de diversos sistemas de calibración. Se muestran ordenados de mayor a menor según el coeficiente de aptitud global (ver sección 2.3.3).

Sistema	$\varepsilon$	$\varepsilon_\eta$	$\varepsilon_\sigma$	$\varepsilon_\tau$
SMI00.6	0.46684	0.97483	0.95097	0.32479
SCA00.6<315>	0.41238	0.97141	0.94726	0.25708
SCA00.6<110>	0.41120	0.97077	0.94695	0.25753
SCA00.6<180>	0.35378	0.95618	0.92194	0.24021
SCA00.6<45>	0.32516	0.94825	0.91118	0.23181
SCA00.6<255>	0.32516	0.94825	0.91118	0.23181
SCR00.6	0.30458	0.96232	0.93092	0.13901
SPA00.6	0.19871	0.91602	0.85099	0.19900

▷ La ordenación de los sistemas de calibración a partir del índice global o de los parciales conduce esencialmente al mismo resultado. Esto puede interpretarse como que los índices no son demasiado significativos individualmente: Un índice bueno en un aspecto indica índices buenos en los otros. En ese sentido, la aptitud de un sistema, en comparación con otros, no resulta demasiado sensible a los coeficientes de ponderación empleados para determinar la aptitud global.

▷ Las configuraciones de mayor eficacia corresponden a conductores auxiliares cuyos lados positivo y negativo se encuentren lo más cerca posible del lazo de medida (es lo que se ocurre en los sistemas SCA00.6<315>

y SCA00.6<110>. Sin embargo el sistema SMI00.6 presenta conductores situados en zonas internas y es mejor. No obstante ya se ha indicado que, a mayor cercanía en la ubicación de los conductores auxiliares con respecto al lazo de medida, mayor sensibilidad hay con respecto a los errores de posicionamiento lo que dificulta la construcción del prototipo.

- ▷ Asimismo, las configuraciones de mayor eficacia corresponden a conductores auxiliares que crucen toda la zona interna: ocurre con SMI00.6 y SCA00.6<110>. Sin embargo no sucede en SCA00.6<315>, que tiene buena aptitud y sin embargo sus conductores son muy periféricos. SCA00.6<180> presenta una gran cantidad de cruces y sin embargo no es muy buen sistema.

Adicionalmente se ha llevado a cabo un proceso de búsqueda de óptimo mediante algoritmos genéticos. Para ello se requiere codificar un sistema de calibración en un “cromosoma” o secuencia de números enteros lo que se ha conseguido como sigue: Las espiras auxiliares se han ubicado entre los radios 0.5 cm y 1.7 cm (que son los mismos que los de los sistemas SCR00.N). Ese intervalo se ha discretizado en 7 subintervalos y el intervalo angular (entre 0 y  $2\pi$ ) se ha discretizado en 36 subintervalos. De esta forma ha podido codificar la posición de una espira auxiliar mediante 4 números enteros.

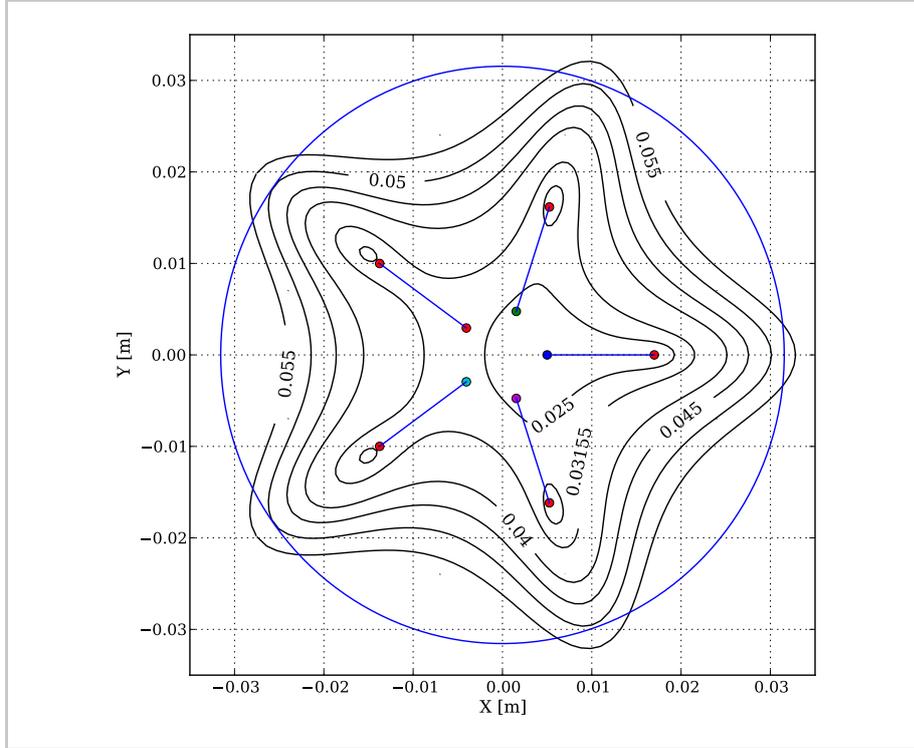
Un *cromosoma* (secuencia) de 20 números enteros, cuyos valores están entre esos límites, codifican un sistema de calibración completo de orden 6. La espira principal está fija, en la misma posición de los sistemas anteriores, y por tanto no requiere ser codificada. A partir de aquí se ha creado un *bioespacio* de 300 cromosomas que se ha hecho evolucionar con una probabilidad de mutación de  $P_{\text{mut}} = 0.03$  y una probabilidad de cruce de  $P_{\text{cru}} = 0.4$ . Los resultados obtenidos se muestran en la figura 2.21. En ella, en principio, parece que se reafirman las hipótesis de la bondad de la ubicación de los conductores en puntos cercanos al lazo de medida y de la presencia de cruces. Sin embargo hay que tener en cuenta que la aptitud del mejor individuo, tras 166 generaciones, ha sido de  $\varepsilon = 0.2043$ , ( $\varepsilon_{\eta} = 0.8581$ ,  $\varepsilon_{\sigma} = 0.7494$ ,  $\varepsilon_{\tau} = 0.4827$ ), muy inferior en general a las aptitudes de los sistemas anteriores.

### 2.4.7. Lazos de medida no circulares

Hasta ahora los lazos de medida que se han considerado en los diferentes sistemas concretos han sido circulares. Sin embargo, las topologías posibles de los lazos de medida pueden ser bastante variadas en función del tipo de instrumento que se trate. En particular, las pinzas amperimétricas suelen presentar circuitos magnéticos ubicados en sus tenazas y con forma más o menos ovalada. La definición y análisis del sistema de calibración que se ha llevado a cabo permite utilizar lazos de medida de cualquier tipo siempre y cuando se verifique la definición 1.

Para ilustrar lo anterior se ha considerado un sistema de calibración del tipo SCR00.6 pero aplicado a un lazo de medida que se ha definido en base a un cierto modelo de pinza comercial. La figura 2.20 muestra visiones 2D y 3D del mapa de  $\eta_{\infty}$ . En la figura 2D se muestra, además, el lazo de medida circular empleado en los sistemas anteriores a efectos de comparación. Observando los resultados con respecto a los correspondientes al lazo circular (figura 2.12), se pueden considerar las siguientes conclusiones:

Figura 2.11. 0.1  $\eta$ -isolíneas correspondientes a un sistema de calibración SCR00.6 pero sobre lazos de medida circulares de diferentes radios cuyo valor se muestra en la etiqueta de la isolínea. A efectos de referencia, se muestra el lazo de medida de radio  $R_{LM} = 3.155$  cm.



- ▷ El mapa de  $\eta_\infty$  es similar al correspondiente al lazo circular pero deformado para seguir la forma del lazo de medida.
- ▷ La capacidad de simulación de circuitos del sistema es peor, lo que se evidencia por el hecho que se obtienen valores globalmente mayores de  $\eta_\infty$  y en ese sentido se han tenido que mostrar isolíneas de mayor valor.
- ▷ En términos generales las isolíneas se estiran en las zonas en que el lazo de medida está más alejado de los conductores y se comprimen en las zonas en que se encuentra cerca. Esta conclusión puede considerarse en mayor detalle analizando la evolución de una isolínea de un sistema de calibración cuando se establece para lazos de medida progresivamente mayores. Esto se ha llevado a cabo, en concreto, para el sistema SCR00.6, al que se le han asociado lazos de medida de radios  $R_{LM} = 0.025, 0.03155, 0.04, 0.045, 0.05$  y  $0.055$  cm y se ha estudiado la evolución de la isolínea de valor  $\eta = 0.1$ . En la figura 2.11 se muestran gráficamente estos resultados, donde la etiqueta de cada isolínea responde al radio del lazo de medida (y no al valor de la isolínea, que es de  $\eta = 0.1$  en todos los casos). Adicionalmente, en la tabla 2.10 se muestra la evolución del corte de las diferentes isolíneas con el eje X positivo<sup>20</sup>. Se puede observar que, conforme el lazo de medida se aleja

<sup>20</sup>Este parámetro también da una cierta idea del área total englobada por la isolínea.

Tabla 2.10. Valores de la coordenada  $x$  del corte de la isolínea  $\eta = 0.1$  con el eje  $X$  positivo asociados al sistema de calibración SCR00.6 pero con lazos de medida circulares de diferente radio.  $R_{LM}$  es el radio de lazo de medida en cm,  $r$  es el valor absoluto del punto de corte, también en cm y  $\rho$  es el valor relativo  $\rho = r/R_{LM}$ .

$R_{LM}$	2.50	3.15	4.00	4.50	5.00	5.50
$r$	1.92	2.15	2.51	2.71	3.01	3.28
$\rho$	0.77	0.68	0.63	0.61	0.60	0.60

de la zona en que están ubicados los conductores auxiliares, el punto de corte aumenta de forma absoluta, aunque disminuye en valor relativo. Por otra parte es interesante notar que se estabiliza para valores lejanos.

#### 2.4.8. Anexo: Mapas $\eta$ y $\check{\eta}$ de algunos sistemas de calibración

Figura 2.12. Mapas 2D y 3D de  $\eta_\infty$  y  $\check{\eta}_\infty$ , y coeficiente de aptitud de SCR00.6. Para una mejor apreciación de los resultados se ha dibujado  $-\eta_\infty$  en el mapa 3D.

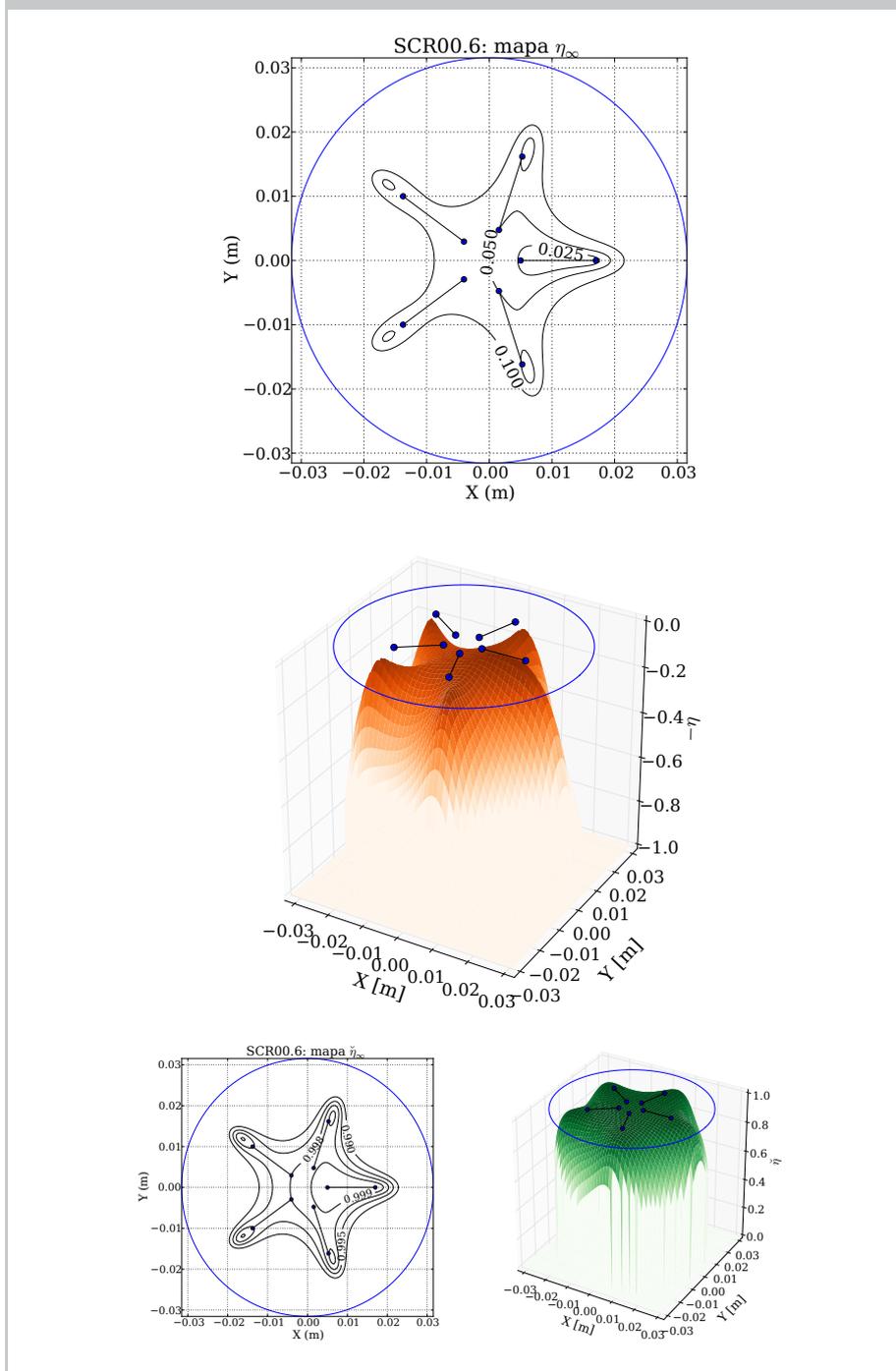


Figura 2.13. Mapas 2D y 3D de  $\eta_\infty$  y  $\check{\eta}_\infty$ , y coeficiente de aptitud de SCA00.6<45>. Para una mejor apreciación de los resultados se ha se ha dibujado  $-\eta_\infty$  en el mapa 3D.

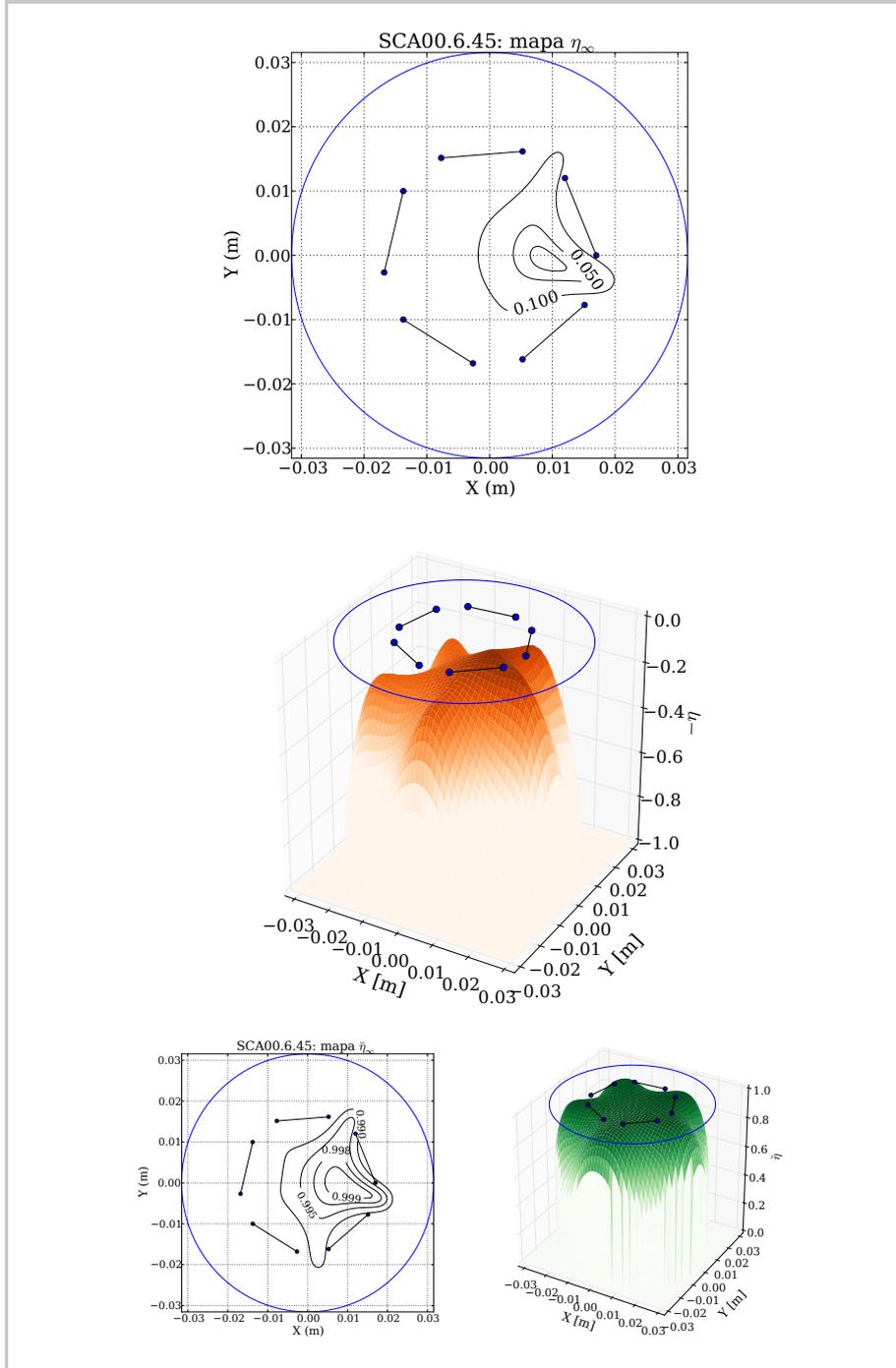


Figura 2.14. Mapas 2D y 3D de  $\eta_\infty$  y  $\check{\eta}_\infty$ , y coeficiente de aptitud de SCA00.6<110>. Para una mejor apreciación de los resultados se ha se ha dibujado  $-\eta_\infty$  en el mapa 3D.

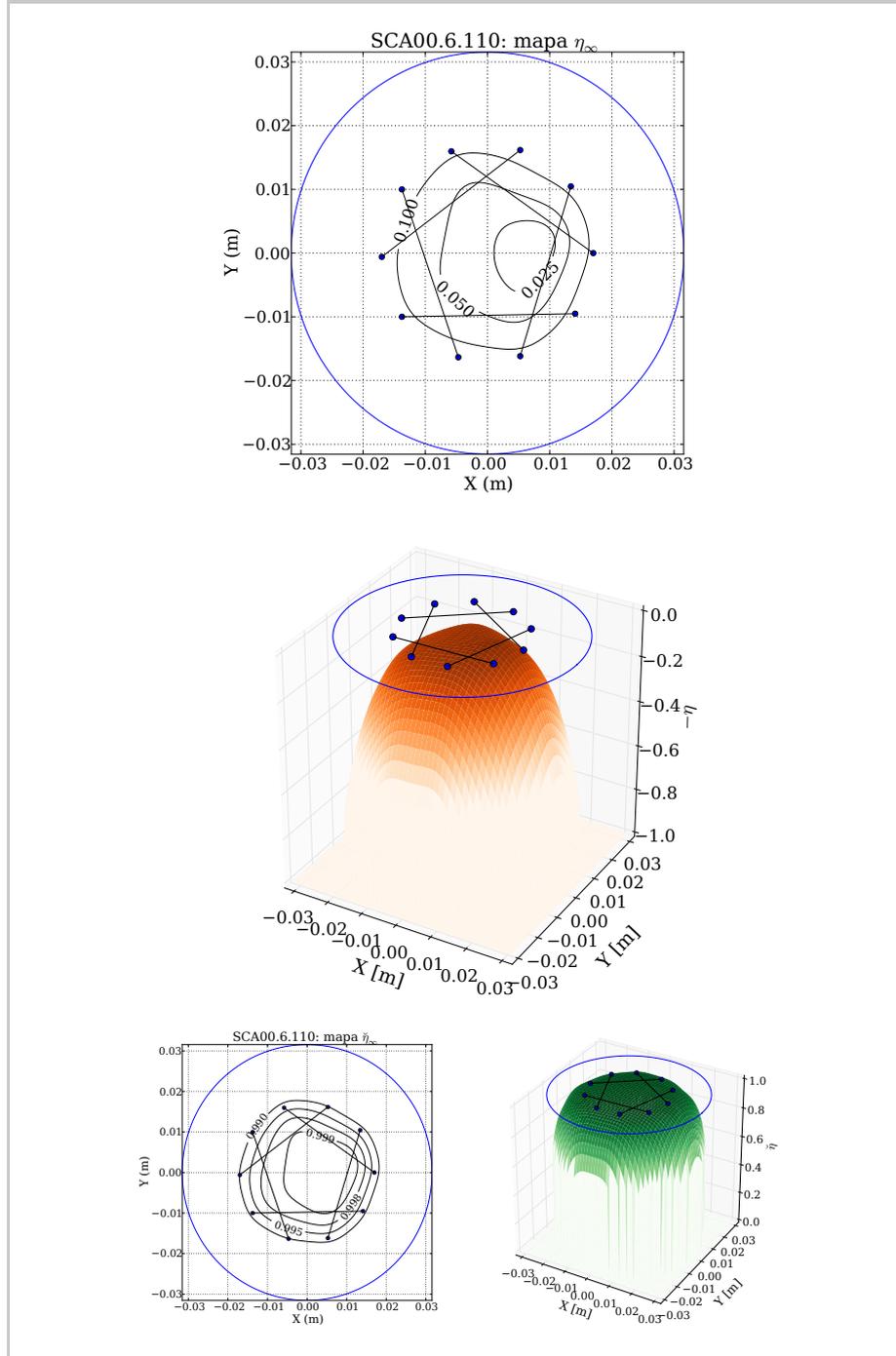


Figura 2.15. Mapas 2D y 3D de  $\eta_\infty$  y  $\check{\eta}_\infty$ , y coeficiente de aptitud de SCA00.6<180>. Para una mejor apreciación de los resultados se ha se ha dibujado  $-\eta_\infty$  en el mapa 3D.

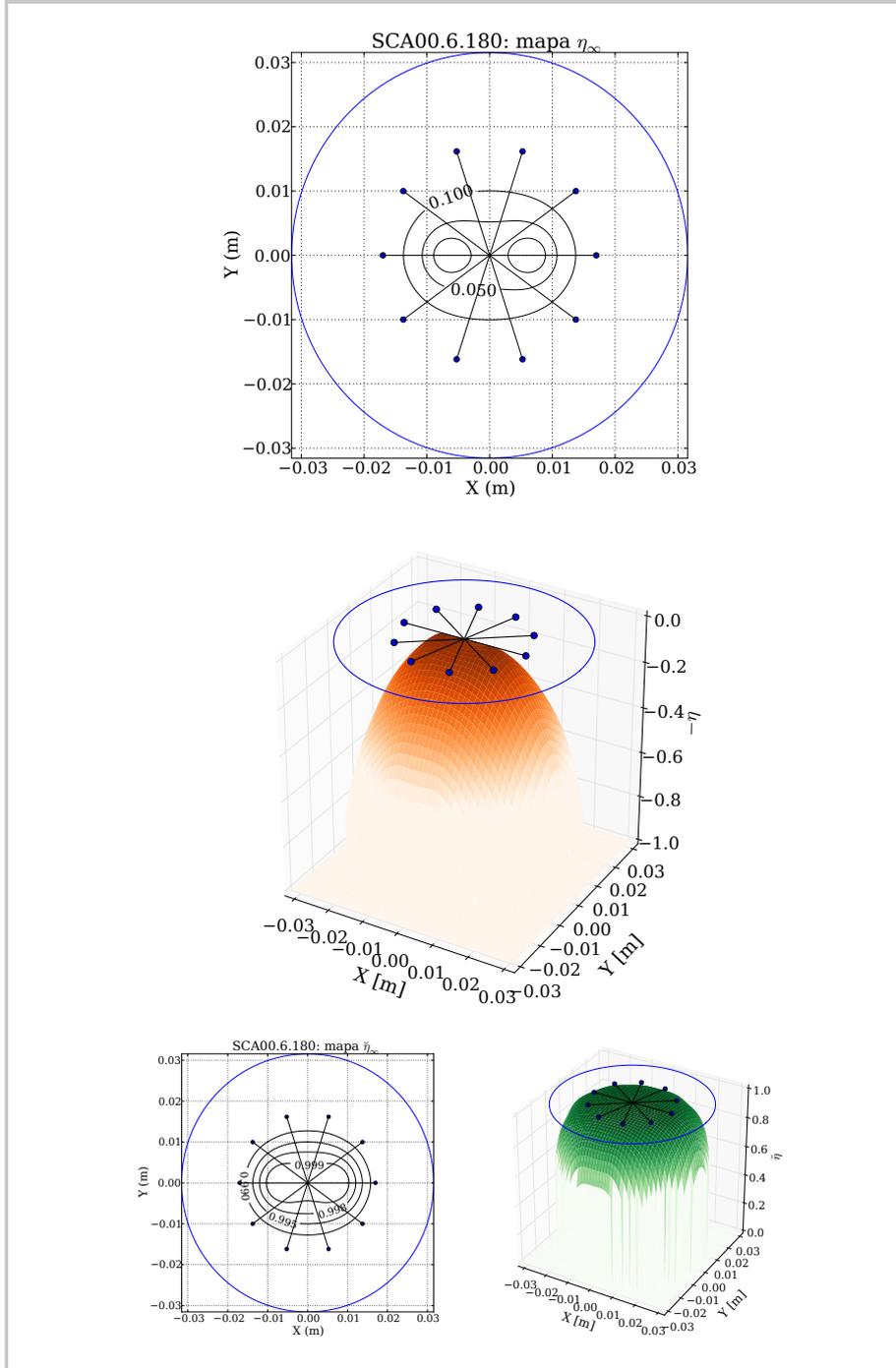


Figura 2.16. Mapas 2D y 3D de  $\eta_\infty$  y  $\check{\eta}_\infty$ , y coeficiente de aptitud de SCA00.6<255>. Para una mejor apreciación de los resultados se ha se ha dibujado  $-\eta_\infty$  en el mapa 3D.

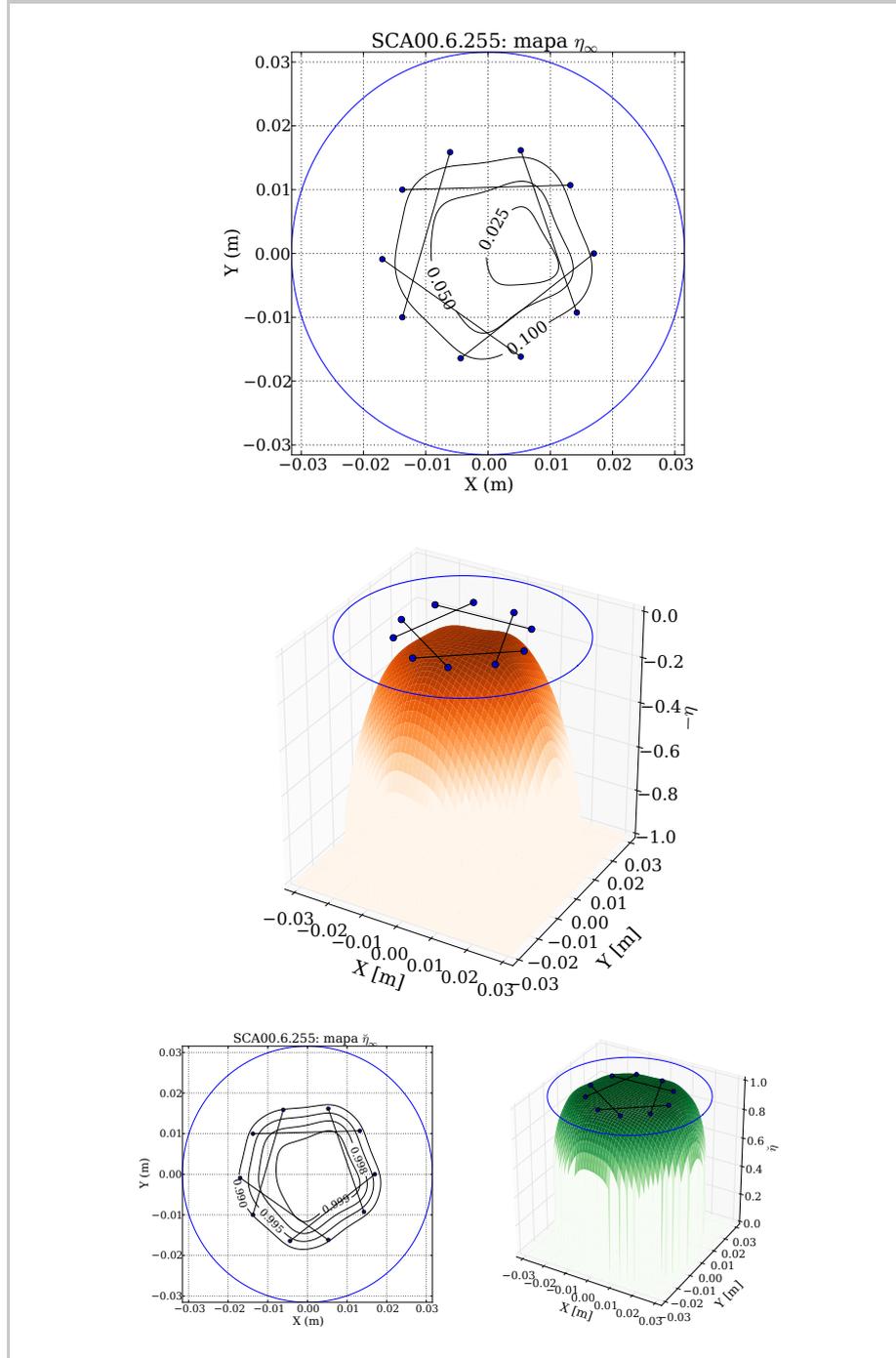


Figura 2.17. Mapas 2D y 3D de  $\eta_\infty$  y  $\check{\eta}_\infty$ , y coeficiente de aptitud de SCA00.6<315>. Para una mejor apreciación de los resultados se ha se ha dibujado  $-\eta_\infty$  en el mapa 3D.

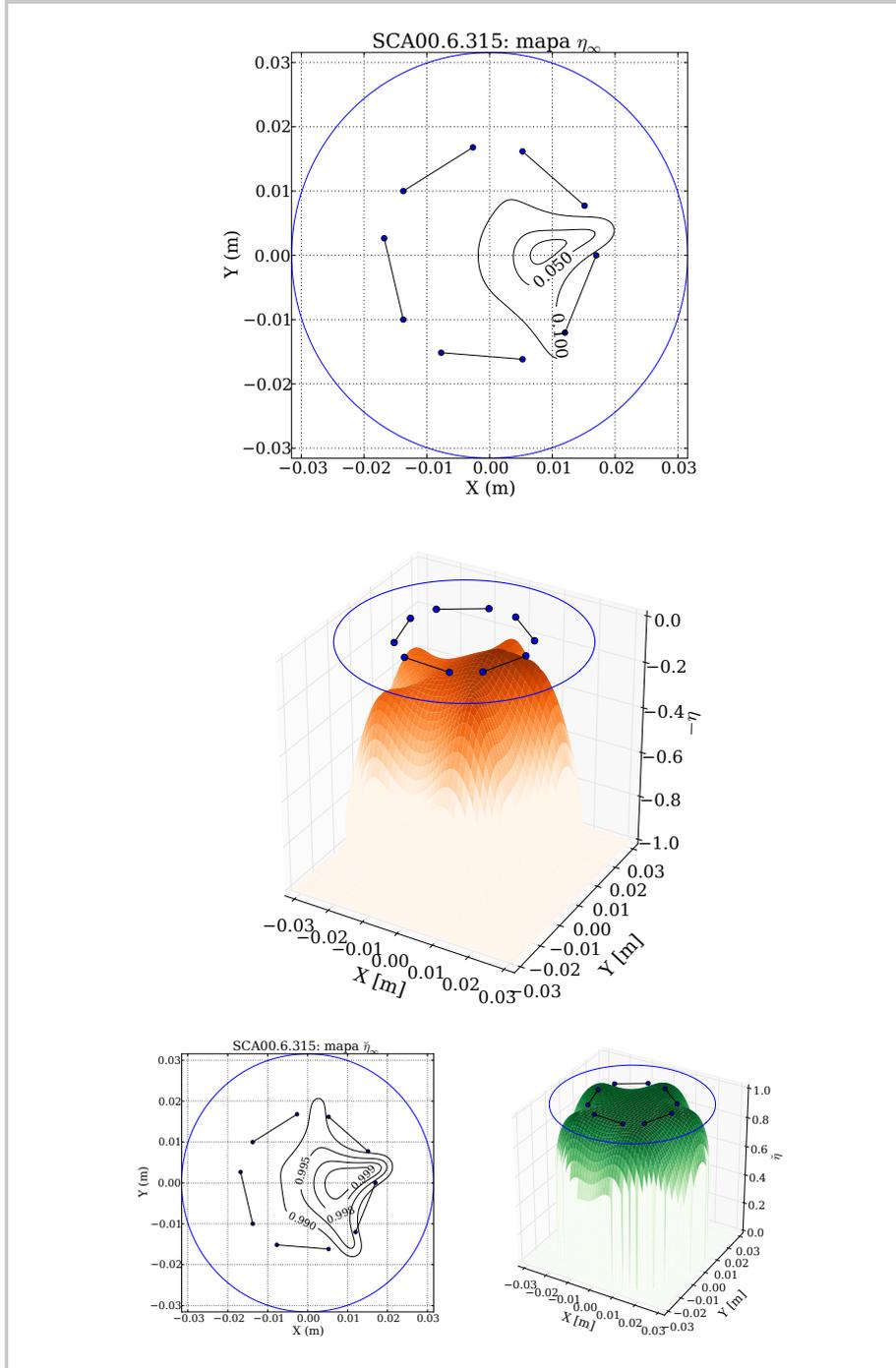


Figura 2.18. Mapas 2D y 3D de  $\eta_\infty$  y  $\check{\eta}_\infty$  de SPA00.6. Para una mejor apreciación de los resultados se ha se ha dibujado  $-\eta_\infty$  en el mapa 3D.

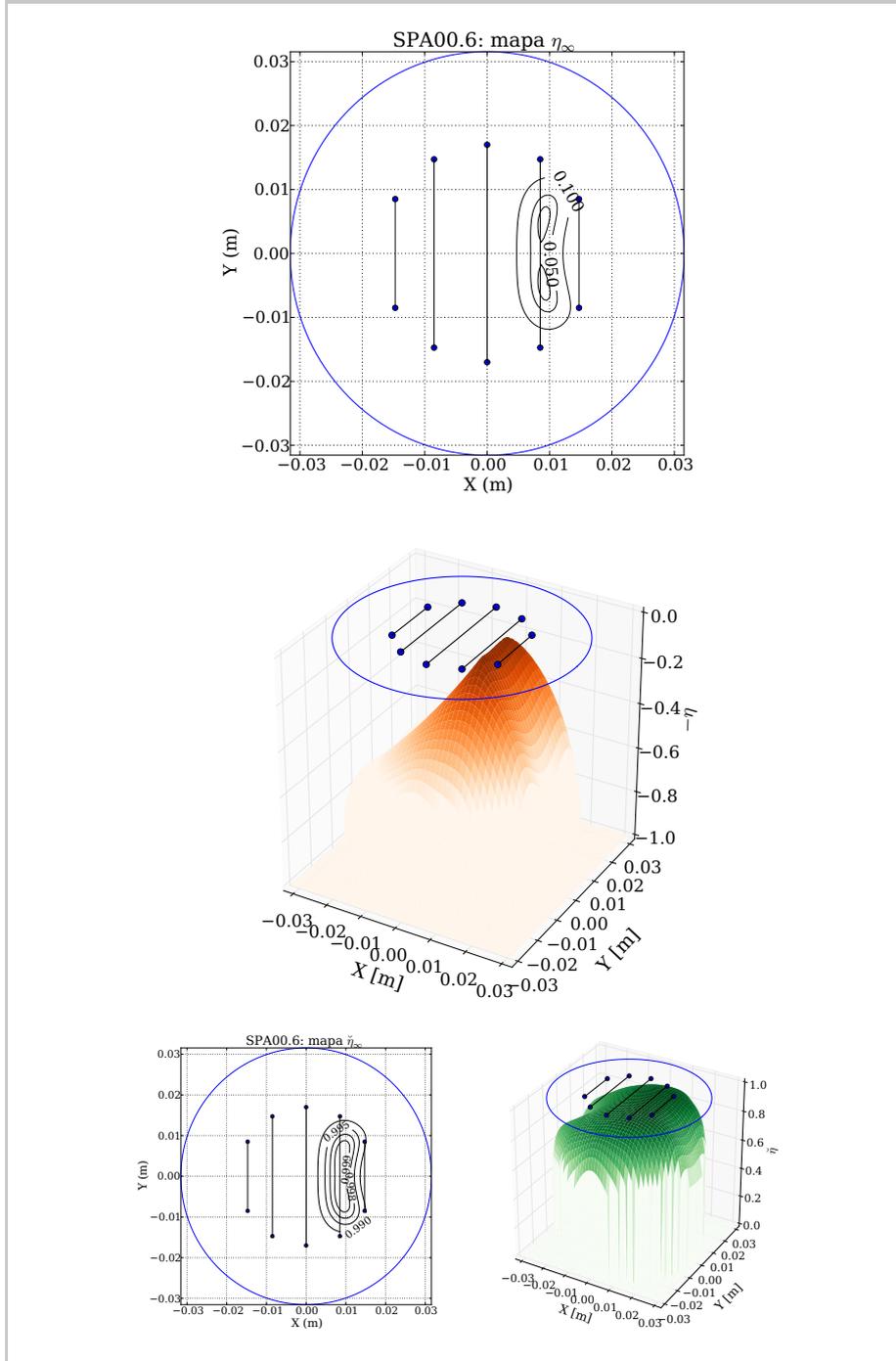


Figura 2.19. Mapas 2D y 3D de  $\eta_\infty$  y  $\tilde{\eta}_\infty$  de SMI00.6. Para una mejor apreciación de los resultados se ha dibujado  $-\eta_\infty$  en el mapa 3D.

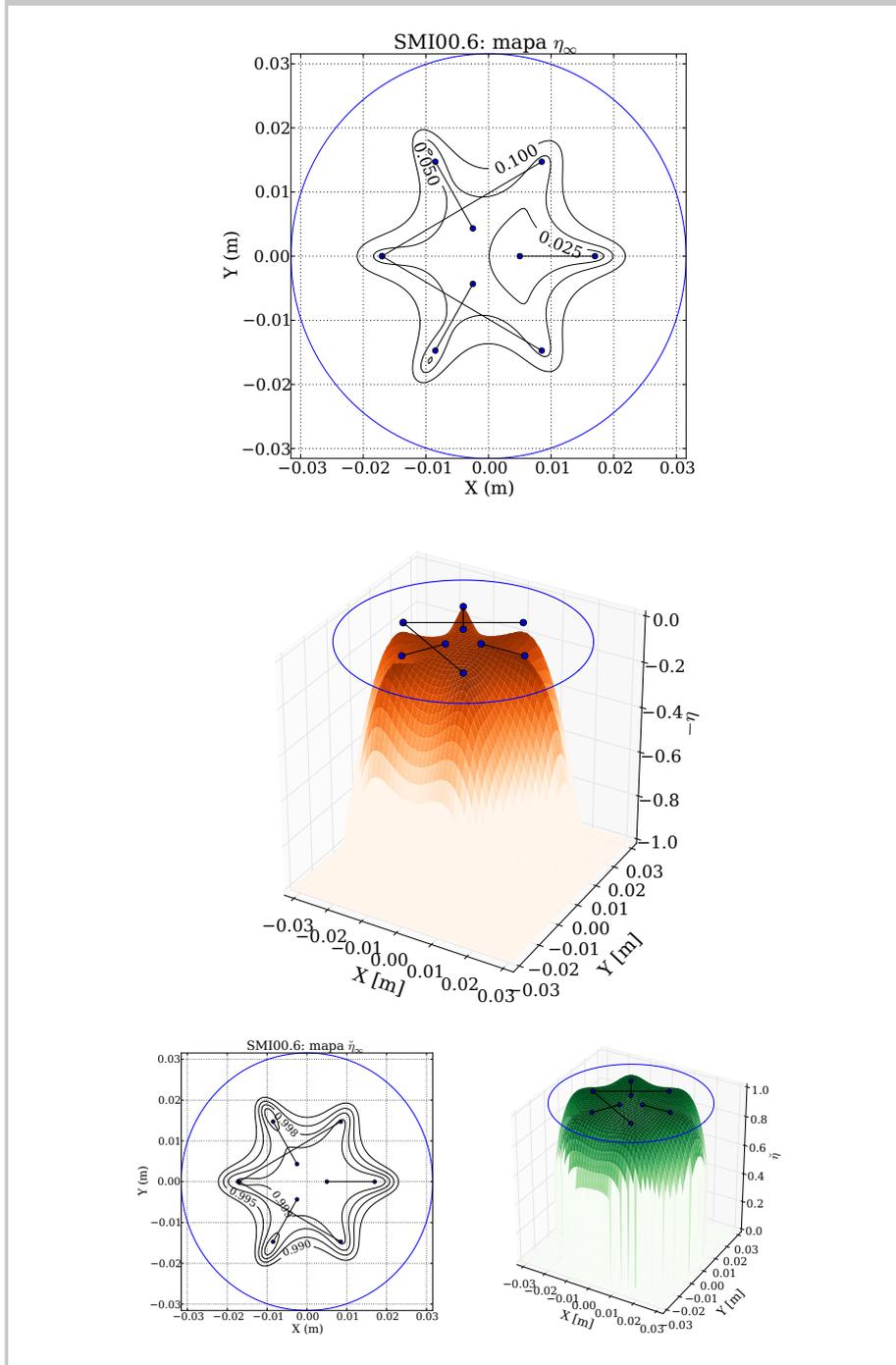


Figura 2.20. Mapas 2D y 3D de  $\eta_\infty$  de SCR00.6 pero aplicado a un lazo de medida con forma de tenaza de pinza amperimétrica. Para una mejor apreciación de los resultados se ha se ha dibujado  $-\eta_\infty$  en el mapa 3D. En la vista 2D se ha representado también el lazo de medida circular empleado en el sistema SCR00.6 (ver figura 2.12).

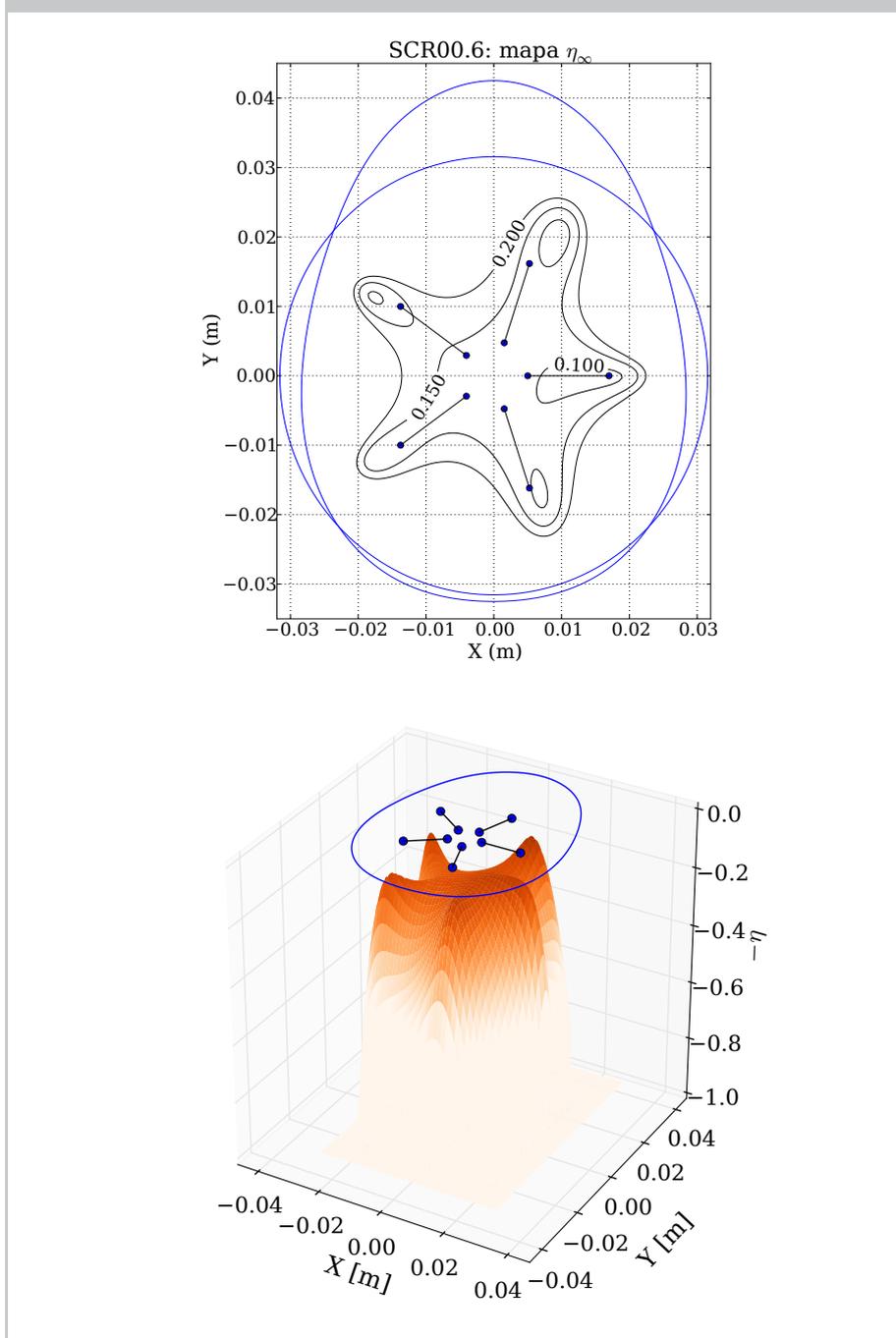
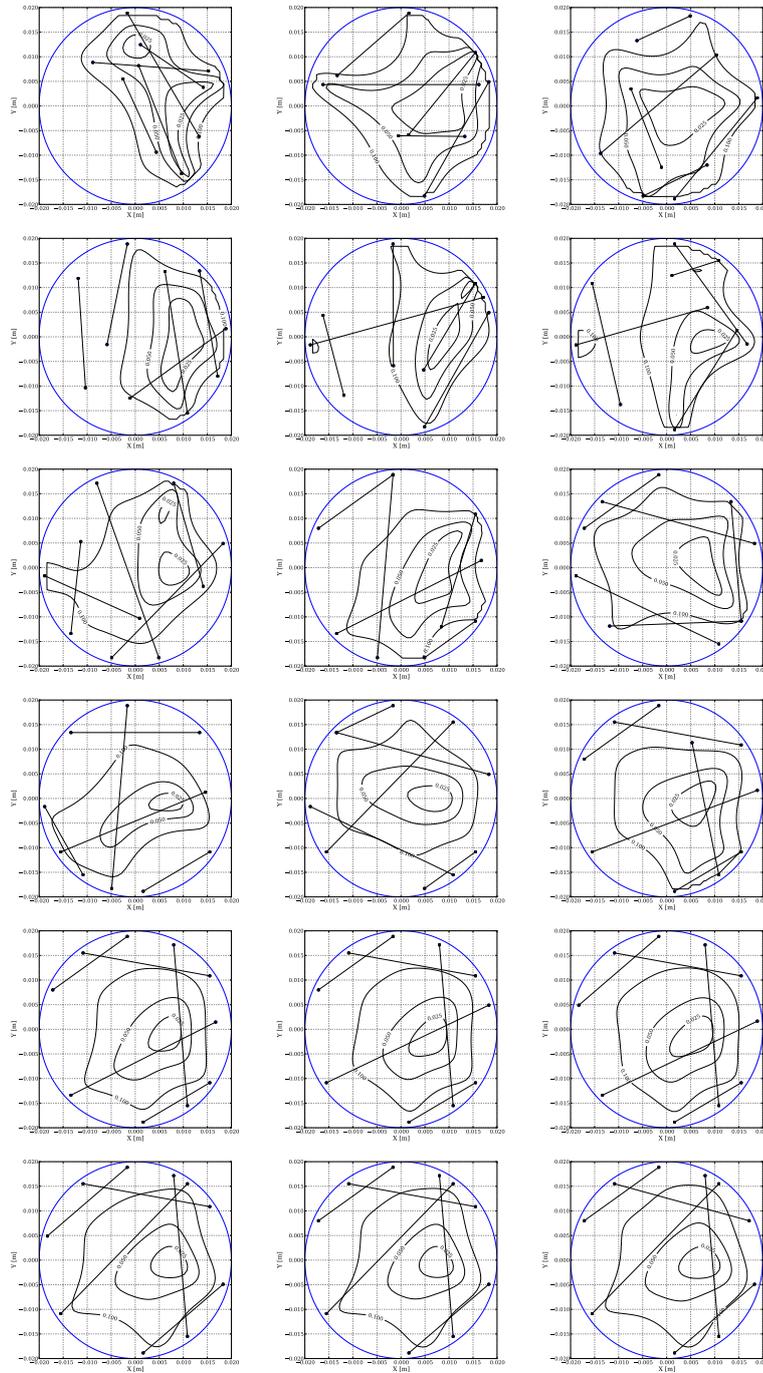


Figura 2.21. Búsqueda de óptimo de un sistema de calibración mediante algoritmos genéticos. El espécimen menos evolucionado se encuentra arriba a la izquierda y el más evolucionado abajo a la derecha. El sentido de la progresión es de izquierda a derecha y de arriba a abajo.





## Capítulo 3

# Análisis de incertidumbre

### 3.1. Introducción

En el capítulo 2 se describió un dispositivo, cuyo propósito era la calibración de un ALBA, capaz de generar de forma aproximada a lo largo de un lazo de medida un campo magnético. El capítulo se centraba en la descripción y optimización del dispositivo atendiendo a su funcionalidad, recreación de un campo magnético, y no al uso para el que se ha diseñado. Por otra parte, se introdujeron conceptos y un formalismo matemático adecuados para la descripción del sistema.

En contraste, el presente capítulo se va centrar en el uso y análisis del dispositivo en tanto en cuanto a su propósito: la calibración de un ALBA. Para ello se partirá de los objetos matemáticos vistos hasta ahora pero se extenderán en función de las nuevas necesidades de representación que surjan.

El actor principal del proceso de calibración y el que va a condicionar a los demás, es el instrumento, el ALBA, del cual ya se progresó hacia una definición precisa en el capítulo 1. La sección 3.2 del presente va a estar dedicada, fundamentalmente, a su caracterización matemática.

La sección 3.3 revisará y ampliará las estructuras matemáticas que necesitamos para representar los diferentes tipos de excitaciones que entran en juego en el proceso de calibración y todo eso confluirá en la sección 3.4 en la que se realizará la estimación de incertidumbre del proceso, que surgirá de una aplicación natural de los contenidos de las secciones anteriores. Finalmente, en las secciones 3.5 y 3.6 se aplicará lo anterior a un ALBA a efectos tanto de ilustración de lo expuesto como de comprobación.

### 3.2. Representación de un ALBA

Vamos a iniciar la sección retomando las ideas que se expusieron en la sección 1.4, a fin de establecer la definición precisa de un ALBA atendiendo tanto a funcionalidad como a las características lo distinguen de los demás tipos de medidores de corriente eléctrica (basados en otros principios). El establecimiento claro de sus características va a tener un doble propósito: por un lado, identificar los dispositivos para los que es aplicable el método de calibración que se va a

exponer, y, por otro lado, establecer los requerimientos mínimos que espera de ellos durante el proceso de calibración.

**Definición 14.** *Un instrumento de medida de corriente eléctrica basado en la Ley de Ampere (ALBA) es un dispositivo que:*

- ▷ *establece los siguientes elementos:*
  - ▷▷ *Un lazo de medida.*
  - ▷▷ *Un rango de uso que define el conjunto de circuitos que pueden ser aplicados al instrumento y para los que se espera que el instrumento de una respuesta adecuada, atendiendo a:*
    - ▷▷▷ *Características geométricas y posicionado con respecto al lazo de medida. Las características geométricas incluyen limitaciones con respecto a la corriente de excitación y/o limitaciones con respecto a la inhomogeneidad de la densidad de corriente de excitación. Se denominará a estos factores la variabilidad geométrica del rango de uso. Por extensión se denominará de esa forma, rango de uso, al conjunto de conductores que cumplen esas características y que por tanto pueden ser aplicados al instrumento.*
    - ▷▷▷ *Valores mínimo y máximo de la corriente métrica que se le puede aplicar.*
    - ▷▷▷ *Frecuencia de excitación (y otros factores).*
- ▷ *utiliza la Integral de Ampere a fin de generar información suficiente para indicar un número real que represente el valor de la corriente métrica de cualquier sistema de conductores/distribución de corriente que pertenezca a su rango de uso.*

Con respecto a esta definición, cabe hacer notar que el último párrafo se ha redactado deliberadamente evitando afirmar que el ALBA da una indicación numérica directa, dado que eso solo ocurre en los instrumentos de medida. Un ALBA que sea una referencia (un transductor) no dispone de visualizador y por tanto no da información numérica directamente. En cambio genera una magnitud de salida, por ejemplo una tensión, a partir de la que se pueda inferir el número correspondiente, por ejemplo mediante un voltímetro.

La variabilidad geométrica del rango de uso es característica de este tipo de instrumentos y resulta una componente crítica de su incertidumbre. El proceso de calibración que se va a describir se centra en la componente de incertidumbre asociada a esa variabilidad.

Los lazos de medida han estado presentes en prácticamente toda la exposición: la función  $H$  asociada a un circuito y su corriente métrica se establecen en base a ellos. Igualmente, un sistema de calibración requiere el establecimiento de uno y en definitiva un ALBA es, esencialmente, un lazo de medida al que se le asocia un rango de uso. Todos estos elementos tienen que estar basados en el mismo lazo de medida y *es el ALBA objeto de calibración el que se lo impone a los demás.*

Dada una cierta excitación  $H^{\{I_0\}}$  generada por un circuito perteneciente al rango de uso del instrumento, la respuesta del instrumento se puede representar mediante un funcional  $R(H^{\{I_0\}})$ . Dado que el instrumento opera estimando la

Integral de Ampere, conviene expresar el funcional de forma local con respecto a ésta. Para ello se puede hacer uso de una función  $R_\varphi$ , asociada a los sensores de campo que utiliza el instrumento, cuyos parámetros son la intensidad de campo magnético y la posición. De esta forma:

$$R(H^{\{I_0\}}) = \int_0^{2\pi} R_\varphi(H^{\{I_0\}}, \varphi) \frac{dl}{d\varphi} d\varphi \quad (3.1)$$

$R_\varphi$  se puede aproximar mediante su desarrollo en serie de Taylor con respecto a una función específica  $H_0^{\{I_0\}}$  que se elegirá como  $H_0^{\{I_0\}} = (I_0/\zeta_0)\tilde{H}E_0^\circ$ :

$$R_\varphi(H^{\{I_0\}}, \varphi) = R_\varphi(H_0^{\{I_0\}}, \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\varphi)(H^{\{I_0\}} - H_0^{\{I_0\}})^n + \epsilon' \quad (3.2)$$

siendo  $\epsilon'$  el error cometido que incluye componentes estocásticos así como otros efectos no considerados. Asumiendo la aproximación de primer orden de la respuesta se tiene:

$$R = R'_0 + \int_0^{2\pi} c_1(\varphi)(H^{\{I_0\}} - H_0^{\{I_0\}}) \frac{dl}{d\varphi} d\varphi + \epsilon \quad (3.3)$$

donde  $\epsilon$  representa el error total de la aproximación, incluyendo el efecto de  $\epsilon'$  y

$$R'_0 = \frac{I_0}{\zeta_0} \int_0^{2\pi} \tilde{H}E_0^\circ \frac{dl}{d\varphi} d\varphi = I_0 \quad (3.4)$$

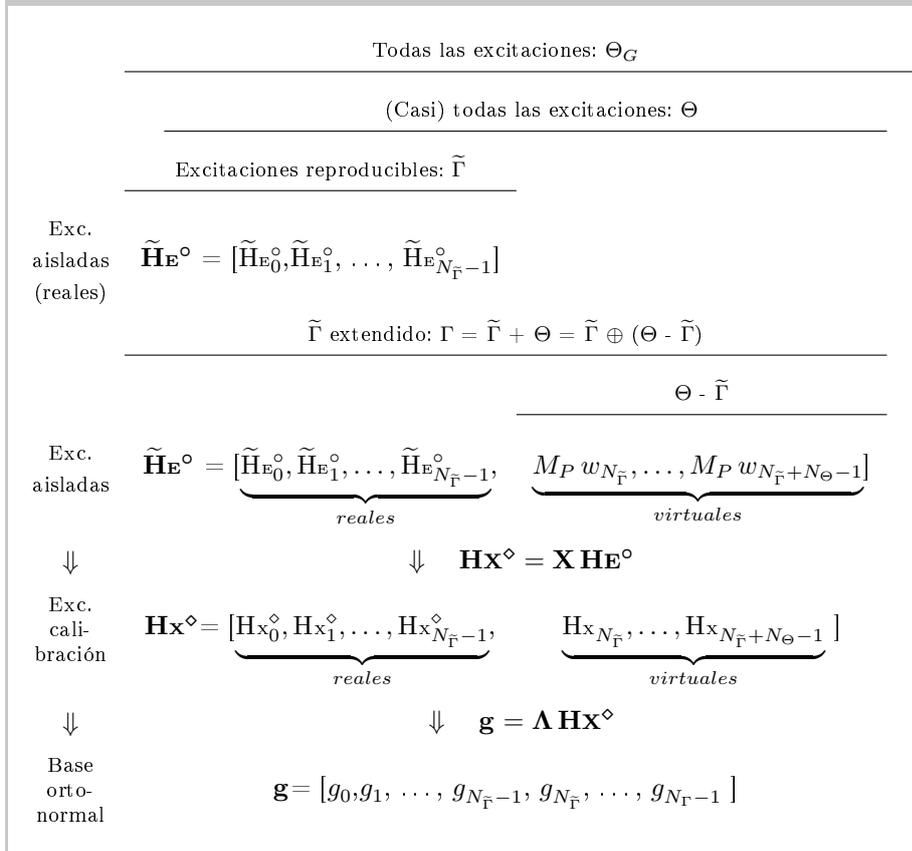
### 3.3. Conjuntos de funciones H

Para no perder de vista nuestro objetivo, vale recordar que pretendemos la calibración del ALBA para una corriente métrica  $I_0$ , lo que implica evaluar el valor convencionalmente verdadero (1.36) y la varianza (1.35) de  $R$ , considerando todos los circuitos que constituyen su rango de uso cuando disponen de una corriente métrica  $I_0$ . Para ello no emplearemos excitaciones provenientes de circuitos reales sino que simularemos estos últimos a partir del sistema de calibración estableciendo una equivalencia convencional entre ambas excitaciones, tal y como se ha justificado en la sección 1.7. Sin embargo, antes de entrar en esta problemática tenemos que buscar representaciones a diferentes conjuntos de funciones H.

Establecido un lazo de medida, describimos y manejamos los circuitos a partir de sus funciones H asociadas. Esta sección pretende introducir y revisar algunos conjuntos de estas funciones, cuyo objeto es representar de una manera formal las siguientes agrupaciones, establecidas a partir de las siguientes descripciones intuitivas:

- ▷ Todas las excitaciones posibles  $(\Theta_G, \Theta)$ .
- ▷ Las excitaciones que somos capaces de reproducir en el laboratorio  $(\tilde{\Gamma}, \Gamma)$ .
- ▷ Las excitaciones que debemos reproducir en el laboratorio para llevar a cabo la calibración  $(\Xi, \Xi\{I_0\})$ .

Figura 3.1. Relación entre los diferentes espacios definidos en las secciones 3.3 y 3.3.3 y la bases empleadas para construirlos y representarlos.



Algunos de ellos ya se han utilizado en el capítulo anterior, sin embargo vamos a volver a revisarlos bajo la óptica de las necesidades de este capítulo que, de hecho, nos llevará a ampliar el alcance de alguno de ellos.

### 3.3.1. Todas las excitaciones posibles: Los espacios $\Theta_G$ y $\Theta$ .

El espacio vectorial  $\Theta_G$  (ver definición 7) constituye el marco en el que encuadramos todo el análisis y en ese sentido incluye todas las posibles funciones que se pueden obtener mediante circuitos físicos reales.

Vamos a generar una base de funciones que nos definan el espacio. Una elección natural<sup>1</sup> corresponde al conjunto de funciones:  $\sin(n\varphi), \cos(n\varphi)$  con  $n$  un valor entero, que constituye la base del desarrollo en serie de Fourier. Sin embargo en nuestro caso el producto escalar no está definido a lo largo del intervalo  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  sino a lo largo de la longitud del lazo de medida, por lo

<sup>1</sup>Aunque no única.

que se va a definir un conjunto alternativo de funciones en base a ellas:

$$\begin{aligned} \text{ctelm}(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{dl}{d\varphi} \right)^{-1} \\ \text{sinlm}(n\varphi) &= \sin(n\varphi) \left( \frac{dl}{d\varphi} \right)^{-1} \\ \text{coslm}(n\varphi) &= \cos(n\varphi) \left( \frac{dl}{d\varphi} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde el factor  $dl/d\varphi$  se ha definido en (2.2). Estas funciones se pueden interpretar como las equivalentes del desarrollo de Fourier si bien no son ortogonales (con respecto a la definición 8 de producto escalar). El valor de la Integral de Ampere de  $\text{ctelm}(\varphi)$  es la unidad, mientras que para las otras resulta nula. Las funciones son, además, linealmente independientes.

$\Theta_G$  es un espacio vectorial de dimensión infinita, lo que resulta una complicación matemática que puede ser evitada a efectos prácticos si asumimos un cierto nivel de aproximación. Pese a la definición general que se ha dado a  $\Theta_G$ , en realidad buscamos un espacio que sea capaz de representar todas las posibles excitaciones generadas por circuitos con geometrías razonables desde un punto de vista de aplicación real<sup>2</sup>, lo que conduce a funciones H suaves y poco patológicas. Estas funciones pueden ser adecuadamente representadas con los primeros valores enteros de  $n$  de las funciones (3.5). Así, podemos generar un espacio  $\Theta$  alternativo a  $\Theta_G$  pero con esencialmente la misma capacidad de representación mediante la elección de un número finito de ellas de forma que el error al realizar la aproximación de funciones H sea despreciable<sup>3</sup>.

**Definición 15.** *Se define el espacio  $\Theta$ , de dimensión finita  $N_\Theta$  (con  $N_\Theta$  un entero impar), como el espacio generado por la funciones:*

$$\mathbf{H}_\Theta^T = \left[ \text{ctelm}(\varphi), \text{sinlm}(\varphi), \text{coslm}(\varphi), \dots, \text{sinlm}\left(\frac{N_\Theta - 1}{2}\varphi\right), \text{coslm}\left(\frac{N_\Theta - 1}{2}\varphi\right) \right] \quad (3.6)$$

### 3.3.2. Las excitaciones que podemos generar en el laboratorio: Los espacios $\tilde{\Gamma}$ y $\Gamma$ .

#### 3.3.2.1. El espacio $\tilde{\Gamma}$

El espacio  $\tilde{\Gamma}$  fue establecido en la definición 10 y corresponde a todas las excitaciones que podemos generar en el laboratorio mediante la aplicación de diferentes conjuntos de corrientes de excitación a los circuitos aislados del sistema de calibración. La calibración del instrumento pasa por aplicar esas excitaciones al ALBA y comprobar su respuesta. Dada la linealidad aproximada

<sup>2</sup>Un bobinado de billones de espiras excitado con corrientes de nanoamperios es un caso que muy difícilmente tendrá que afrontar un ALBA. O dos cables paralelos ubicados dentro del lazo de medida y por los que circulase una cantidad de billones de Amperios en sentidos opuestos.

<sup>3</sup>Más adelante se verá un análisis numérico que muestra que es suficiente con utilizar hasta el "armónico" 10, es decir emplear 20 funciones seno/coseno más la función constante.

del instrumento de medida, según se desprende de la representación aproximada dada por (3.3), esto se va a traducir en *conocer la respuesta a cada una de las excitaciones aisladas de forma independiente*. Sin embargo, el término  $R_0$  de (3.3) implica que el instrumento requiere estar polarizado en torno a su punto de trabajo para poder tomar una lectura de él. Por ello, en la práctica, cuando se emplee el sistema de calibración sobre un instrumento no se van a aplicar las excitaciones de forma individual sino siempre en conjunción con  $\tilde{H}_{E_0}$  que será la encargada de polarizarlo en el punto de trabajo. Así:

**Definición 16.** *Dado un sistema de calibración de orden  $N$  y un punto de calibración  $I_0$ , se definen como **excitaciones de calibración reales**, y se denotan como  $\tilde{H}_{X_k}^{\{I_0\}}$ ,  $k = 0 \dots N_{\tilde{\Gamma}} - 1$ , a las  $N_{\tilde{\Gamma}}$  excitaciones a las que se someterá al ALBA durante el proceso de calibración y que verifican las siguientes propiedades:*

- ▷ *Cada una de ellas está generada a partir de uno o más circuitos aislados del sistema de calibración.*
- ▷ *Son linealmente independientes entre sí.*
- ▷ *Su corriente métrica es  $I_0$ .*

Congruentemente con nuestras convenciones de notación, a las excitaciones de calibración escaladas a corriente métrica unitaria se denotarán como  $\tilde{H}_{X_k}^\diamond$  y se les denomina excitaciones de calibración unitarias. Introduciendo una notación matricial:

$$\tilde{H}_{X^{\{I_0\}}} = I_0 \tilde{H}_{X^\diamond} = I_0 [\tilde{H}_{X_0}^\diamond, \tilde{H}_{X_1}^\diamond, \dots, \tilde{H}_{X_{N_{\tilde{\Gamma}}-1}}^\diamond] \quad (3.7)$$

La definición 16 anterior no impone ninguna forma de construir las excitaciones de calibración a partir de las excitaciones aisladas, siempre y cuando se verifiquen las propiedades indicadas. En cualquier caso la relación entre ambas puede representarse mediante una matriz  $\tilde{X}$ , de forma que:

$$\tilde{H}_{X^\diamond} = \tilde{X} \tilde{H}_{E^\diamond} \quad (3.8)$$

y por tanto:

$$\tilde{H}_{X^{\{I_0\}}} = I_0 \tilde{H}_{X^\diamond} = I_0 \tilde{X} \tilde{H}_{E^\diamond} \quad (3.9)$$

Es interesante notar que la corriente de excitación resulta más importante que la corriente métrica para las excitaciones aisladas, dado que vamos a estar interesados en el valor de la corriente que deberemos aplicar a los circuitos para sintetizar una  $H$  dada. Sin embargo la corriente métrica resulta más relevante para las excitaciones de calibración, puesto que estamos interesados en conseguir una lectura específica,  $I_0$  o próxima, en el instrumento. Así, la matriz  $\tilde{X}$  cumple un doble papel: por un lado define cómo van construirse las excitaciones de calibración que se aplicarán al ALBA y por otro establece la conexión entre las corrientes de excitación y las corrientes métricas.

Para el espacio  $\tilde{\Gamma}$  habíamos obtenido una base ortonormal cuya relación con las excitaciones aisladas venía recogida en (2.18). La relación entre esta base ortonormal y las excitaciones de calibración se obtiene de forma directa:

$$\tilde{g} = \tilde{\Lambda}' \tilde{H}_{E^\diamond} = \tilde{\Lambda}' \tilde{X}^{-1} \tilde{H}_{X^\diamond} = \tilde{\Lambda} \tilde{H}_{X^\diamond} \quad (3.10)$$

Dada una excitación  $H^{(I)} \in \tilde{\Gamma}$ , ya vimos en la ecuación (2.23), que podía expresarse como:

$$H^{(I)} = I\tilde{\gamma}^T\tilde{\mathbf{g}} \quad (3.11)$$

Podemos ahora expresar esa relación en base a la corriente métrica y las excitaciones de calibración:

$$H^{\{I_0\}} = \frac{I_0}{\zeta}\tilde{\gamma}^T\tilde{\mathbf{g}} = \frac{I_0}{\zeta}\tilde{\gamma}^T\tilde{\Lambda}\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}^\diamond = \frac{1}{\zeta}\tilde{\gamma}^T\tilde{\Lambda}\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}^{\{I_0\}} \quad (3.12)$$

La proposición 2.2.2 ponía de manifiesto el siguiente hecho intuitivo: supongamos un sistema de calibración en el que la espira principal tiene  $\zeta_0 = 1$ , es decir, no es un bobinado. Por otra parte supongamos un circuito a reproducir, también sin bobinados ( $\zeta = 1$ ), y *que puede ser reproducido completamente por el sistema de calibración*. Si el circuito tiene una corriente de excitación (y métrica) de valor  $I_0$ , y dado que únicamente el circuito principal posee Integral de Ampere no nula<sup>4</sup>, entonces necesariamente se debe aplicar una corriente  $I_0$  al circuito principal para reproducir la excitación<sup>5</sup>. Esto ya no necesariamente tiene que ocurrir cuando la excitación, o la función  $\text{ctelm}()$ , no pertenece al espacio  $\tilde{\Gamma}$  sino que puede ser cualquiera. Por tanto, la excitación no es completamente reproducible por el sistema de calibración. La siguiente proposición, que es una extensión de la proposición 2.2.2, incide en este aspecto.

**Proposición 3.3.1.** *Sea  $H^{\{I_0\}} \in \Theta_G$ , cuya  $H^{\parallel}$  tiene coeficientes de proyección  $\tilde{\gamma}$  en la base ortogonal  $\tilde{\gamma}$ . Entonces, el primer elemento del vector  $\tilde{\gamma}^T\tilde{\Lambda}\tilde{\mathbf{X}}$  tiene un valor:*

$$\left[\tilde{\gamma}^T\tilde{\Lambda}\tilde{\mathbf{X}}\right]_0 = 1 - \oint_{\text{LM}} H^\perp dl \quad (3.13)$$

*Demostración.* Tal como se ha visto en la proposición 2.2.2, el valor del primer coeficiente es igual a la Integral de Ampere de  $H^\parallel$ . Pero

$$\oint_{\text{LM}} H^\parallel dl = \oint_{\text{LM}} (H - H^\perp) dl = 1 - \oint_{\text{LM}} H^\perp dl \quad (3.14)$$

□

### Una posible elección de $\tilde{\mathbf{X}}$

Antes de seguir adelante vamos a analizar una posible elección para las corrientes de calibración o, equivalentemente, para la matriz  $\tilde{\mathbf{X}}$ . Dado que queremos tener el dispositivo polarizado en su punto de trabajo y que ese es el objeto del circuito aislado principal, habrá que incluir  $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}_0^\diamond$  escalado de forma que genere una corriente métrica  $I_0$ , por tanto  $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}_0^{\{I_0\}} = (I_0/\zeta_0)\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}_0^\diamond$ . Para obtener la respuesta del instrumento ante el circuito aislado principal aplicaremos

<sup>4</sup>En un lenguaje más electrotécnico tenderíamos a decir que es el único que aporta “componente de continua”.

<sup>5</sup>La redacción de la proposición oscurece este significado dado que debe considerar circuitos con cualquier valor de  $\eta$ .

esa excitación. Posteriormente, para obtener la respuesta del circuito ante el resto de los circuitos aislados aplicaremos esa excitación más una fracción de las excitaciones auxiliares. El problema es ¿cuanta fracción? ¿Fracción de que? Dado que las excitaciones auxiliares tienen una corriente métrica  $I_{\text{met}}$  nula, el único criterio comparativo son los módulos de las funciones. Vamos a obtener un valor aproximado de ese módulo:

A partir de la definición de corriente métrica es fácil ver que el valor medio de  $\tilde{\text{H}}X_0^{\{I_0\}}$  es  $\overline{\tilde{\text{H}}X_0^{\{I_0\}}} = I_0/L_{\text{LM}}$ . Luego:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\text{H}}X_0^{\{I_0\}}\|^2 &= \|\overline{\tilde{\text{H}}X_0^{\{I_0\}}} + \Delta\text{H}\|^2 = \left(\frac{I_0}{L_{\text{LM}}}\right)^2 + \|\Delta\text{H}\|^2 + 2\left(\frac{I_0}{L_{\text{LM}}}\right) \Delta\text{H} \\ &= \left(\frac{I_0}{L_{\text{LM}}}\right)^2 + \|\Delta\text{H}\|^2 + 2\frac{I_0}{L_{\text{LM}}}\frac{1}{L_{\text{LM}}}\oint_{\text{LM}} \Delta\text{H}dl \end{aligned} \quad (3.15)$$

La última integral es nula, precisamente porque hemos expresado  $\tilde{\text{H}}X_0^{\{I_0\}}$  como la suma de su valor medio más una perturbación. Por otra parte, suponiendo que construimos el circuito principal de forma que la perturbación no sea muy grande<sup>6</sup>.

$$\|\tilde{\text{H}}X_0^{\{I_0\}}\| \approx \frac{I_0}{L_{\text{LM}}} \quad (3.16)$$

Para las restantes excitaciones de calibración vamos a considerar que queremos construirlas con la principal más una fracción,  $\beta'$ , del módulo de las auxiliares. La pregunta que surge es ¿que corriente,  $I_{E_k}$ , hay que aplicar a la excitación auxiliar para conseguir ese módulo?. Dado que la corriente de excitación necesaria para conseguir  $\text{HE}_k^\circ$  es la unidad, entonces:

$$I_{E_k} = \beta' \frac{\|\tilde{\text{H}}X_0^{\{I_0\}}\|}{\|\tilde{\text{H}}E_k^\circ\|} = \frac{I_0}{I_0} \beta' \frac{\|\tilde{\text{H}}X_0^{\{I_0\}}\|}{\|\tilde{\text{H}}E_k^\circ\|} \quad (3.17)$$

Expresando la corriente a aplicar como una proporción,  $\beta_k$ , de la corriente nominal, tenemos que a cada excitación auxiliar hay que aplicarle una corriente:  $I_{E_k} = \beta_k I_0$ , con:

$$\beta_k = \frac{\beta'}{I_0} \frac{\|\tilde{\text{H}}X_0^{\{I_0\}}\|}{\|\tilde{\text{H}}E_k^\circ\|} \approx \frac{\beta'}{L_{\text{LM}}\|\tilde{\text{H}}E_k^\circ\|} \quad (3.18)$$

Esto conlleva a la necesidad de aplicar corrientes distintas ( $I_0\beta_k$ ) a cada excitación auxiliar, lo que va resultar incómodo desde un punto de vista práctico. En los casos en los que los módulos de las excitaciones auxiliares son comparables (y por tanto las corrientes  $I_{E_k}$ ), podemos tomar finalmente el coeficiente  $\beta$  como el promedio de todos los  $\beta_k$ . Con ello, la matriz  $\tilde{\mathbf{X}}$  puede definirse como:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1/\zeta_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/\zeta_0 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 1/\zeta_0 & 0 & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1/\zeta_0 & 0 & 0 & \dots & \beta \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

<sup>6</sup>Esta aproximación puede ser controvertida para circuitos en los que alguna de sus partes se halle cerca del lazo de medida. Ver la sección A.2.3.

### 3.3.2.2. El espacio $\Gamma$

#### Extensión de $\tilde{\Gamma}$

Atendiendo a que la dimensión del espacio  $\tilde{\Gamma}$  es menor que la dimensión del espacio  $\Theta$  ( $N_{\tilde{\Gamma}} < N_{\Theta}$ ), se puede deducir que  $\tilde{\Gamma}$  no es capaz de reproducir completamente todos los elementos de  $\Theta$ . Igualmente, tampoco será capaz de reproducir el conjunto de excitaciones que componen el rango de uso del instrumento a calibrar, por lo que no podemos testear el instrumento de medida con respecto a todas sus posibles excitaciones de forma completa. Inevitablemente ésto se va a traducir en una componente de incertidumbre que debemos estimar.

La estrategia que vamos a utilizar para determinar esa incertidumbre consiste en generar un espacio  $\tilde{\Gamma}$  *extendido* a base de añadirle excitaciones aisladas *virtuales* de forma que cubra todo el espacio  $\Theta$  (y por tanto el rango de uso del ALBA). En ese sentido vamos a definir  $\Gamma$  como el espacio generado por los mismos vectores que  $\tilde{\Gamma}$ , junto con un conjunto adicional de vectores que, por sí mismos, generan el (sub)espacio  $\Theta - \tilde{\Gamma}$ .

Los vectores añadidos actuarán como un conjunto de excitaciones aisladas ficticias. Como se ha indicado, en el proceso de calibración necesitamos saber la respuesta del instrumento de medida a las excitaciones aisladas (aunque las aplicamos a través de las excitaciones de calibración), *dando pie a una evaluación tipo A* de su incertidumbre. Las excitaciones añadidas, *funcionalmente*, tendrán el mismo papel (excitaciones que aplicamos al instrumento durante la calibración) pero al no poder aplicarlas físicamente *se realizará una evaluación tipo B* de su contribución a la incertidumbre. Esto se analizará en el próximo apartado; vamos ahora a centrarnos en la definición del nuevo espacio  $\Gamma$  como una extensión del espacio  $\tilde{\Gamma}$ . Para ello estableceremos el conjunto de vectores que lo definen y a partir del cual generaremos la correspondiente base ortonormal.

El procedimiento de definición de las nuevas excitaciones aisladas busca construir el espacio  $\Gamma$  como una suma de dos subespacios ortogonales porque esta característica facilitará su utilización en las secciones posteriores. Para ello se utilizan los siguientes pasos<sup>7</sup>:

1. Construir las excitaciones:

$$\begin{aligned} & [\tilde{H}X_0^\circ, \tilde{H}X_1^\circ, \dots, \tilde{H}X_{N_{\tilde{\Gamma}}-1}^\circ, \sin\text{lm}(\varphi), \cos\text{lm}(\varphi), \dots \\ & \quad \sin\text{lm}(\frac{N_{\Theta}-1}{2}\varphi), \cos\text{lm}(\frac{N_{\Theta}-1}{2}\varphi)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde las excitaciones  $\tilde{H}X_k^\circ$  son las excitaciones de calibración del espacio  $\tilde{\Gamma}$  de partida.

2. Construir una base ortonormal utilizando el algoritmo de Gram-Schmidt modificado:

$$[w_0, w_1, \dots, w_{N_{\tilde{\Gamma}}-1}, w_{N_{\tilde{\Gamma}}}, \dots, w_{N_{\tilde{\Gamma}}+N_{\Theta}-1}] \quad (3.21)$$

Dada la naturaleza del algoritmo de Gram-Schmidt modificado, los primeros  $N_{\tilde{\Gamma}}$  vectores cubren todo el espacio  $\tilde{\Gamma}$ . Puesto que se trata de una

<sup>7</sup>Para no sobrecargar la notación se han mantenido los mismos identificadores de vectores y bases para el espacio  $\tilde{\Gamma}$  y  $\Gamma$ .

base ortonormal, los restantes  $N_\Theta - 1$  generan exclusivamente  $\Theta - \tilde{\Gamma}$  y son nuestros candidatos a nuevas excitaciones de aisladas. Sin embargo a efectos de que resulten comparables a sus homólogos del espacio no extendido deseamos que tengan un módulo similar a los primeros, por lo que los vamos a multiplicar por una constante  $M_P$  que vamos a determinar:

3. Determinar  $M_P$  como el módulo promedio de:

$$[\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_0^\diamond - \frac{1}{L_{LM}}, \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_1^\diamond - \frac{1}{L_{LM}}, \dots, \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}_{N_{\tilde{\Gamma}}-1}^\diamond - \frac{1}{L_{LM}}] \quad (3.22)$$

4. Finalmente, generamos el nuevo conjunto de excitaciones aisladas:

$$\mathbf{HE}^\circ = [\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}_0^\circ, \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}_1^\circ, \dots, \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}_{N_{\tilde{\Gamma}}-1}^\circ, M_P w_{N_{\tilde{\Gamma}}}, \dots, M_P w_{N_{\tilde{\Gamma}}+N_\Theta-1}] \quad (3.23)$$

donde las excitaciones  $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}_k^\circ$  son las excitaciones aisladas del espacio  $\tilde{\Gamma}$  de partida.

**Definición 17.** *Dado un sistema de calibración de orden  $N$ , se define el espacio  $\Gamma$  como el conjunto de funciones generadas mediante combinaciones lineales de las funciones:*

$$\mathbf{HE}^\circ = [\mathbf{H}\mathbf{E}_0^\circ, \mathbf{H}\mathbf{E}_1^\circ, \dots, \mathbf{H}\mathbf{E}_{N-1}^\circ, M_P w_N, \dots, M_P w_{N+N_\Theta-1}] \quad (3.24)$$

*Las primeras  $N$  excitaciones corresponden a las producidas por los circuitos aislados del sistema de calibración bajo corriente de excitación unitaria y se denomina excitaciones aisladas reales. En contraposición, al resto se les denomina excitaciones aisladas virtuales.*

Cabe hacer dos consideraciones de notación con respecto a la definición anterior:

- ▷ Obviamente,  $\mathbf{H}\mathbf{E}_k^\circ = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}_k^\circ$ ,  $k = 0, \dots, N$ . Se les elimina<sup>8</sup> el símbolo “ $\sim$ ” dado que ahora nos referimos a ellas en el contexto del espacio extendido  $\Gamma$ .
- ▷ Dado que las excitaciones aisladas virtuales no están basadas en un circuito real, no tienen definida una corriente de excitación. Por ello el símbolo  $^\circ$  del vector  $\mathbf{HE}^\circ$  podría ser cuestionable. Sin embargo se mantiene por equivalencia con el correspondiente del espacio reducido  $\tilde{\Gamma}$ , así como por el hecho de que las excitaciones reales, sí que están definidas para una corriente de excitación unitaria.

En un proceso homólogo al seguido con  $\tilde{\Gamma}$  construimos las excitaciones de calibración extendidas mediante la definición de la correspondiente matriz  $\mathbf{X}$  extendida, entendida como una ampliación de la matriz  $\mathbf{X}$  anterior:

$$\mathbf{HX}^{\{\mathbf{I}_0\}} = \mathbf{I}_0 \mathbf{HX}^\diamond = \mathbf{I}_0 \mathbf{X} \mathbf{HE}^\circ \quad (3.25)$$

pero en este caso, y con vistas al cálculo de incertidumbre que se analizará más adelante, se requiere que se cumplan las siguientes condiciones:

<sup>8</sup>En realidad, dado que son la misma, se mantendrá o eliminará el símbolo  $\sim$  en función de que se pretenda hacer hincapié en su pertenencia al espacio extendido o a que se trata de excitaciones aisladas reales.

- ▷ Las primeras  $N$  excitaciones de calibración deben ser reales (ver definición 16), y por tanto se deben construir utilizando únicamente excitaciones aisladas reales.
- ▷ El resto de las excitaciones de calibración, que denominaremos *excitaciones de calibración virtuales*, se deben construir utilizando únicamente excitaciones aisladas virtuales.

Las excitaciones de calibración virtuales no van a ser recreables en el laboratorio y por tanto no van a poder ser aplicadas al ALBA durante el proceso de calibración (lo que conducirá a una evaluación tipo B de su efecto). Por este motivo, tampoco es necesario que su corriente métrica sea  $I_0$ . En ese sentido nuevamente vuelve a ser cuestionable el superíndice  $\{I_0\}$  ó  $\diamond$ , aunque igualmente a lo hecho con las excitaciones aisladas, se mantienen ambos símbolos por equivalencia con el espacio  $\tilde{\Gamma}$ , así como por el hecho que de las excitaciones de calibración reales sí tienen una corriente métrica de valor  $I_0$ .

### Una posible elección de $\mathbf{X}$

Dado que las excitaciones de calibración virtuales no se van a aplicar realmente al ALBA, no requieren que se les añada la excitación  $\text{HE}_0$  para polarizar el instrumento, por lo que podemos extender la matriz  $\tilde{\mathbf{X}}$  definida en (3.19) como:

$$\mathbf{X} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1/\zeta_0 & & & & & \\ 1/\zeta_0 & \beta & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 1/\zeta_0 & & & \beta & & \\ \hline & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{X}} & \mathbf{0}_{N_{\tilde{\Gamma}} \times N_{\mathbf{e}}} \\ \hline \mathbf{0}_{N_{\mathbf{e}} \times N_{\tilde{\Gamma}}} & \mathbf{1}_{N_{\mathbf{e}} \times N_{\mathbf{e}}} \end{array} \right] \quad (3.26)$$

### Generalización de las expresiones de $\tilde{\Gamma}$

El desarrollo realizado para  $\tilde{\Gamma}$  se adapta fácilmente a  $\Gamma$ :

- ▷ A partir de las excitaciones de calibración, y mediante el algoritmo de Gram-Schmidt modificado, podemos generar una base ortornormal  $\mathbf{g}$ , de forma que (adaptación de la ecuación (3.10)):

$$\mathbf{g} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{H} \mathbf{x}^\diamond \quad (3.27)$$

- ▷ Una excitación  $H^{(I)}$  podrá expresarse en función de la base  $\mathbf{g}$  como (adaptación de la ecuación (3.11)):

$$H^{(I)} = I\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{g} \quad (3.28)$$

- ▷ Finalmente, una excitación con corriente métrica  $I_0$  puede expresarse en función de las excitaciones de calibración como (adaptación de la ecuación (3.12)):

$$H^{\{I_0\}} = \frac{I_0}{\zeta} \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{H} \mathbf{x}^\circ = \frac{1}{\zeta} \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{H} \mathbf{x}^{\{I_0\}} \quad (3.29)$$

### 3.3.3. Las excitaciones que debemos generar en el laboratorio: El conjunto $\Xi\{I_0\}$

**Definición 18.** Dado un ALBA, el conjunto  $\Xi$  es el conjunto de todas las funciones  $H$  que constituyen su rango de uso.

El conjunto  $\Xi$  de un ALBA concreto vendrá definido por el fabricante del instrumento de una forma esencialmente descriptiva<sup>9</sup>, indicando, por ejemplo, distancias mínimas de acercamiento de los conductores a medir al circuito magnético de la tenaza, formas de las pletinas conductoras, etc...

La calibración de un ALBA se realiza en un punto concreto de medida, de ahí que nos resulte relevante una especificación más restringida del rango de uso:

**Definición 19.** Dado un ALBA, el conjunto  $\Xi\{I_0\}$  es el conjunto de todas las funciones  $H^{\{I_0\}}$  que constituyen su rango de uso (y cuya corriente métrica es  $I_0$ ).

Claramente  $\Xi\{I_0\}$  no constituye un espacio vectorial dado que una función construida como suma de dos funciones pertenecientes a  $\Xi\{I_0\}$  tendrá una corriente métrica  $2I_0$  y por tanto no está incluida en  $\Xi\{I_0\}$ .

En esta sección vamos a buscar una descripción basada en una base ortonormal de funciones y para ello partiremos del espacio  $\Theta$ . Dado que  $\Xi\{I_0\} \subset \Theta_G$ , esencialmente y en alto grado se cumplirá que  $\Xi\{I_0\} \subset \Theta$ . A partir de las excitaciones que definen  $\Theta$  (ecuación (3.6)) puede generarse una base ortonormal  $\mathbf{a}$ , de forma que una excitación  $H^{\{I_0\}} \in \Xi\{I_0\}$  puede desarrollarse como:

$$H^{\{I_0\}} = \frac{I_0}{\zeta} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a} \iff H^\circ = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a} \quad (3.30)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}$  es el vector de coeficientes. Nótese que  $H^{\{I_0\}}$  tiene su base en un circuito físico real y su corriente métrica es no nula, por lo que el coeficiente  $\zeta$  está definido.

Para caracterizar  $\Xi\{I_0\}$ , se genera una muestra aleatoria de excitaciones y se obtiene una matriz cuyas filas son los vectores  $\boldsymbol{\alpha}$  de cada excitación. A partir

<sup>9</sup>O no vendrá establecido en absoluto. De hecho esta situación es la más probable, por lo que en este caso, a efectos de calibración, se tendrá que optar por un conjunto  $\Xi$  por defecto.

de esta matriz puede obtenerse un vector de valores convencionalmente verdaderos,  $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \text{vcv}$ , y una matriz de covarianzas,  $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}}$ , suficientes para caracterizar el conjunto. El proceso podría detenerse aquí, sin embargo resulta interesante<sup>10</sup> aplicar una técnica de PCA (Análisis de Componentes Principales) [Jolliffe, 2002], [Smith, 2002], [Shlens, 2005]. Gracias a ella podremos obtener una nueva base de ortonormal de vectores  $\mathbf{q}$ , mediante la que describiremos  $\Xi\{I_0\}$ , y en la que los vectores son incorrelados unos con otros. La matriz de covarianzas, expresada en esta base, será diagonal.

Para aplicar PCA, se determinan los valores y vectores propios de  $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}}$ . Los vectores propios  $\mathbf{q}$  constituyen la citada base ortonormal incorrelada. Podemos por tanto expresar:

$$\mathbf{H}^{\{I_0\}} = \frac{I_0}{\zeta} \mathbf{p}^T \mathbf{q} \quad (3.31)$$

siendo  $\mathbf{p}$  los coeficientes de  $\mathbf{H}^{\{I_0\}}$  expresados en la nueva base. En este caso, la matriz de covarianzas  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{p}\mathbf{p}}$  es una matriz diagonal con los valores propios de  $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}}$  como diagonal principal.

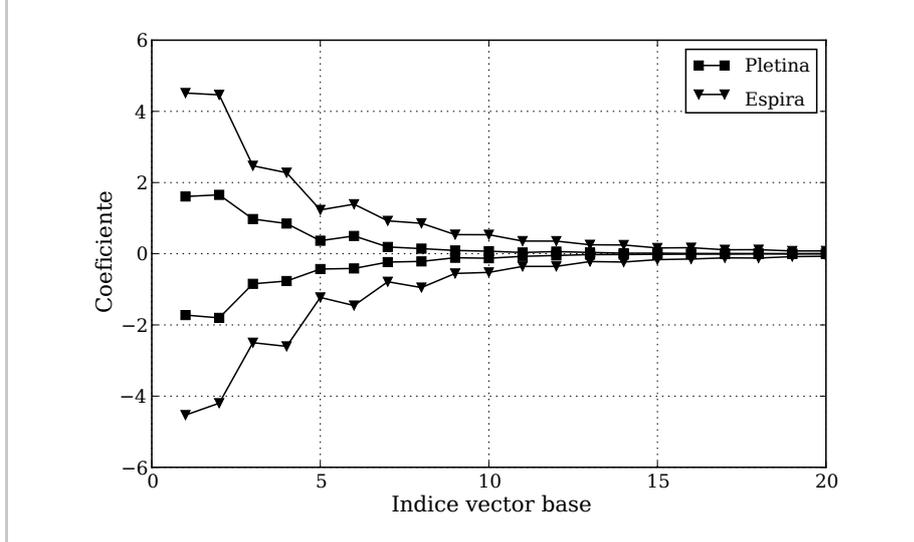
Una vez esbozado el procedimiento a seguir, cabe hacer algunas consideraciones:

- ▷ **Sobre las excitaciones aleatorias.** Para evaluar el conjunto  $\Xi\{I_0\}$  se realiza una muestra de excitaciones aleatorias. Estas las podemos clasificar en excitaciones basadas en hilos de radio nulo (espiras) y excitaciones basadas en distribuciones de corriente (pletinas). Las funciones H generadas por las pletinas tienden a ser más suaves que las correspondientes a los hilos indefinidos. En concreto, las últimas divergen a infinito según nos acercamos al hilo (ver anexo A) y de ahí que su contenido armónico sea más rico. En la figura 3.2 se muestra los valores máximos y mínimos de los coeficientes (salvo el inicial) del desarrollo de una muestra de excitaciones aleatorias del rango de uso de un cierto ALBA con respecto a la base de la representación de su conjunto  $\Xi\{I_0\}$ . La muestra tenía un tamaño de 5000 excitaciones de cada tipo. Se observa como las líneas de máximo y mínimo de las pletinas son interiores a las de las espiras. En consecuencia, en el procedimiento de determinación del conjunto  $\Xi\{I_0\}$  que se ha indicado anteriormente resulta suficiente realizar el muestreo únicamente sobre las espiras.
- ▷ **Sobre la obtención de las componentes principales.** Mediante el análisis de componentes principales se pretende encontrar las direcciones ortogonales en la cuales la variabilidad de la muestra es mayor, y en ese sentido, lo habitual es ordenar la base generada mediante PCA en orden decreciente de valores propios. El primer elemento de la base de partida es el único cuya Integral de Ampere es distinta de cero, de forma que el coeficiente de todas las excitaciones con respecto a ese vector es prácticamente igual a uno<sup>11</sup> y por tanto su variabilidad es nula, por lo que la técnica de PCA lo descarta. Sin embargo nos resulta interesante que la base final del conjunto  $\Xi\{I_0\}$  mantenga ese vector como vector inicial puesto que es el que incorpora la información sobre el término constante de la excitación. Por ello el procedimiento real que se utiliza consiste en aplicar PCA a

<sup>10</sup>El interés se pondrá de manifiesto más adelante.

<sup>11</sup>La igualdad sería exacta si  $\Xi\{I_0\} \subset \Theta$ , pero esto sólo se verifica de forma aproximada.

Figura 3.2. Valores máximos y mínimos de los coeficientes del desarrollo de una muestra de excitaciones (espiras y pletinas) del instrumento IM\_SH.1 con respecto a la base del conjunto  $\Xi\{I_0\}$ .



todas las componentes de las excitaciones excepto a la inicial. A la base así obtenida (y ordenada según valores propios descendentes) se le añade al inicio el vector inicial y finalmente se construye el espacio.

- ▷ **Sobre el número de componentes a usar.** Al aplicar PCA, se parte de una descripción basada en  $N_{\Theta}$  vectores y se genera una nueva base *del mismo número de vectores*. Sin embargo PCA tiene su mayor aplicación en la obtención de representaciones óptimas de conjuntos de datos. En ese sentido, los vectores que tienen asociados valores propios de valor bajo implican que aportan poca variabilidad y se pueden eliminar sin que la capacidad de representación del conjunto  $\Xi\{I_0\}$  por parte de los vectores restantes se resienta mucho. En ese sentido se puede reducir el número de componentes de esta base a un número  $N_{\Xi} \leq N_{\Theta}$ . Pese a ello, no es la reducción del número de vectores de representación el objetivo fundamental por el que se utiliza aquí PCA por lo que no se descartará ninguno<sup>12</sup> y por tanto  $N_{\Xi} = N_{\Theta}$ .

### 3.4. Cálculo de incertidumbre

Para poder llevar a cabo la calibración de un ALBA concreto con un sistema de calibración específico o, en particular, para poder llevar adelante la estimación de valores convencionalmente verdaderos e incertidumbre del resultado se deben verificar una serie de condiciones asociadas a la *interacción* entre ambos elementos.

<sup>12</sup>Por otra parte, en las pruebas que se han llevado a cabo, no se han encontrado componentes claramente despreciables.

### 3.4.1. Excitaciones de calibración reales

Los resultados de la calibración se van a construir en base a la respuesta del ALBA frente a las excitaciones de calibración. Como necesitamos que esa respuesta resulte significativa, se debe verificar que las excitaciones de calibración reales (ver definición 16) pertenecen al rango de uso del ALBA

$$\tilde{H}X_k^{\{I_0\}} \in \Xi\{I_0\} \quad , \quad k = 0 \dots N_{\tilde{X}} - 1 \quad (3.32)$$

### 3.4.2. Linealidad del ALBA

Para poder llevar a cabo el análisis de incertidumbre en las secciones posteriores, necesitamos que el ALBA se comporte de forma lineal. Esto es algo que estamos asumiendo dado que suponemos que la aproximación de primer orden establecida en (3.3) resulta suficiente. No obstante, podemos plantear otra aproximación alternativa a la condición de linealidad que nos resultará más útil en la sección 4.4 del capítulo 4.

**Definición 20.** *Un ALBA es lineal si  $\forall H_1 \wedge H_2 \in \Xi, \forall k_1 \wedge k_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $k_1 H_1 + k_2 H_2 \in \Xi$ , se cumple:*

$$R(k_1 H_1 + k_2 H_2) = k_1 R(H_1) + k_2 R(H_2) \quad (3.33)$$

Esta condición difícilmente puede ser asumible por el instrumento si está construido en base a materiales o sensores no lineales o saturables, salvo que se imponga alguna condición adicional sobre  $k_1$  y  $k_2$ , por ejemplo  $k_1 + k_2 \approx 1$ . Sin embargo, dado que lo que se persigue es su calibración en un punto  $I_0$ , en lo que realmente estamos interesados es en el comportamiento lineal del instrumento *una vez polarizado en el punto de calibración* y dentro del rango de uso del instrumento. Esta condición de linealidad resulta menos restrictiva que la anterior, de forma que podemos establecer una definición más relajada:

**Definición 21.** *Un ALBA es lineal con respecto a un sistema de calibración y en el entorno de  $I_0$  si, dados dos números reales  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ , para cada par de excitaciones aisladas reales  $(HE_{s_1}^\circ \wedge HE_{s_2}^\circ)$  distintas de la principal y distintas entre sí ( $0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0$ ) se cumple:*

$$\begin{aligned} R\left(\frac{I_0}{\zeta_0} HE_0^\circ + k_1 HE_{s_1}^\circ + k_2 HE_{s_2}^\circ\right) &= R\left(\frac{I_0}{\zeta_0} HE_0^\circ\right) + \\ &+ k_1 \left[ R\left(\frac{I_0}{\zeta_0} HE_0^\circ + HE_{s_1}^\circ\right) - R\left(\frac{I_0}{\zeta_0} HE_0^\circ\right) \right] + \\ &+ k_2 \left[ R\left(\frac{I_0}{\zeta_0} HE_0^\circ + HE_{s_2}^\circ\right) - R\left(\frac{I_0}{\zeta_0} HE_0^\circ\right) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

bajo las siguientes consideraciones:

- ▷ Las funciones que se aplican a la función respuesta  $R$  del ALBA deben pertenecer a su rango de uso.

- ▷ Los valores que pueden tomar los números reales  $k_1, k_2$  quedan restringidos a los que hacen que la función  $\frac{I_0}{\zeta_0} \text{HE}_0^\circ + k_1 \text{HE}_{s_1}^\circ + k_2 \text{HE}_{s_2}^\circ$  pertenezca al rango de uso del ALBA.

Es interesante hacer notar que el punto de operación viene establecido por la excitación  $(I_0/\zeta_0)\tilde{\text{HE}}_0^\circ$ , motivo por el cual se ha incluido al sistema de calibración en la definición.

Pese a todo, dado que la función  $R$  es una característica constructiva del ALBA, depende del fabricante, lo que imposibilita establecer la validez de la aproximación de forma general. Sin embargo pueden considerarse los siguientes hechos que avalan la plausibilidad de un comportamiento lineal:

- ▷ Las ecuaciones de Maxwell aseguran la linealidad de los campos magnéticos generados con respecto a la corriente de forma general en ausencia de materiales magnéticos no lineales, de forma que, en ese caso, la condición se cumple de forma natural.
- ▷ La calibración se llevará a cabo inyectando corrientes por los circuitos auxiliares del sistema de calibración, cuyo valor será una fracción de la corriente  $I_0$ . Así, los circuitos auxiliares generaran pequeñas perturbaciones al campo magnético establecido por el circuito principal y el desarrollo de la función respuesta puede cortarse en el término de primer orden.
- ▷ Presumiblemente, el fabricante, al diseñar el instrumento de medida aun empleando materiales magnéticos no lineales, busca un comportamiento razonablemente lineal por lo que no forzará a trabajar al instrumento en zonas fuertemente no lineales.

### 3.4.3. Modelo matemático de la calibración

Para realizar la calibración de instrumento necesitamos conocer su respuesta frente a todas las excitaciones  $\Xi\{I_0\}$ , pero ya hemos visto que esas excitaciones pueden reconstruirse mediante el espacio  $\Gamma$ . El espacio tiene su origen en las excitaciones (circuitos) aisladas del sistema de calibración y, dada la linealidad de la respuesta del ALBA, sólo necesitamos conocer su respuesta frente a las excitaciones aisladas para poder reconstruir la respuesta frente a cualquier excitación. Sin embargo, dada la necesidad de tener el instrumento polarizado en su punto de operación, éstas no se pueden aplicar directamente, por lo que tenemos que recurrir a las excitaciones de calibración.

A efectos de notación denominaremos<sup>13</sup>:

$$R(\mathbf{HX}^{\{I_0\}}) = R_{\mathbf{X}}^{\{I_0\}} \quad (3.35)$$

en particular, tal como hemos definido la matriz  $\mathbf{X}$  en la ecuación (3.26), podemos denotar:

$$R_0 = I_0 R(\text{HX}_0^\circ) = \frac{I_0}{\zeta_0} R(\text{HE}_0^\circ) \quad (3.36)$$

sin embargo  $R_0 \neq R_0'$ , que se ha definido en la ecuación (3.4), dado que el primero corresponde a la respuesta real del instrumento frente a la primera excitación

<sup>13</sup>Nuevamente tenemos un abuso de notación en favor de la claridad expositiva. La función  $R$  lógicamente no tiene definida una corriente métrica, de forma que el símbolo  $R_{\mathbf{X}}^{\{I_0\}}$  debe interpretarse como que  $R$  se ha aplicado a excitaciones con corriente métrica  $I_0$ .

de calibración, mientras que  $R'_0$  es la respuesta de un ALBA ideal frente a esa excitación<sup>14</sup>.

Dada una cierta excitación  $H^{\{I_0\}}$  perteneciente al rango de uso del instrumento, a partir de la ecuación (3.12) y teniendo en cuenta la linealidad de la respuesta del ALBA, se puede escribir:

$$R(H^{\{I_0\}}) = \frac{1}{\zeta} \gamma^T \Lambda R_{\mathbf{X}}^{\{I_0\}} \quad (3.37)$$

La expresión anterior constituye nuestro modelo matemático de la medida. A partir de aquí podemos calcular el valor convencionalmente verdadero:

$$R_{\rightarrow \text{vcv}} = \frac{1}{\zeta} \gamma^{\text{T} \rightarrow \text{vcv}} \Lambda R_{\mathbf{X}}^{\{I_0\} \rightarrow \text{vcv}} \quad (3.38)$$

Y la varianza<sup>15</sup>:

$$\begin{aligned} R_{\rightarrow S_2} = & \underbrace{\frac{1}{\zeta^2} \gamma^{\text{T} \rightarrow \text{vcv}} \Lambda \Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \Lambda^T \gamma_{\rightarrow \text{vcv}}}_{S_{2_X}} + \\ & + \underbrace{\frac{1}{\zeta^2} R_{\mathbf{X}}^{\{I_0\} \text{T} \rightarrow \text{vcv}} \Lambda^T \Sigma_{\gamma\gamma} \Lambda R_{\mathbf{X}}^{\{I_0\} \rightarrow \text{vcv}}}_{S_{2_\gamma}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

La varianza resulta de la composición de dos fuentes de incertidumbre asociadas a cada uno de los sumandos:

- ▷  $S_{2_X}$ : Puede interpretarse como la varianza asociada a la dispersión de las lecturas obtenidas del ALBA cuando se aplica la misma excitación. Además de la variabilidad intrínseca del ALBA, también van a ser responsables de esta variación tanto la estabilidad de los patrones del laboratorio al generar las corrientes de excitación, como la variabilidad intrínseca de los patrones encargados de medir la respuesta del ALBA, en caso de tratarse de un instrumento que se comporte como una referencia/transductor.
- ▷  $S_{2_\gamma}$ : Está asociado a la dispersión de las lecturas que se produce cuando se aplican diferentes excitaciones al instrumento. Este es el término que recoge la incertidumbre asociada al “descentramiento” o más propiamente a la variabilidad geométrica de las excitaciones pertenecientes al rango de uso.

Vamos a revisar cada uno de los términos que componen la expresión y la forma de determinarlos.

<sup>14</sup>Y por eso  $R'_0 = I_0$ .

<sup>15</sup>Conviene recordar aquí que, dado un vector de variables aleatorias  $\mathbf{X}$ , un vector de constantes  $\mathbf{a}$ , y una variable aleatoria,  $Y$ , definida como:  $Y = \mathbf{a}^T \mathbf{X}$ , se verifica que:

$$\triangleright Y_{\rightarrow \text{vcv}} = \text{Esp}(Y) = \mathbf{a}^T \text{Esp}(\mathbf{X})$$

$$\triangleright Y_{\rightarrow S_2} = \text{Var}(Y) = \mathbf{a}^T \Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \mathbf{a}$$

con  $\Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$  la matriz de covarianzas de  $\mathbf{X}$ .

### 3.4.4. Coeficientes asociados a la variabilidad del dispositivo: $\mathbf{R}_X^{\{I_0\} \rightarrow \text{vcv}}$ y $\Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$

Estos términos están asociados a la respuesta del instrumento de medida ante las diferentes excitaciones de calibración  $\mathbf{H}\mathbf{X}^{\{I_0\}}$  del espacio  $\Gamma$ .

Las primeras  $N_{\bar{\Gamma}}$  son excitaciones reales de forma que, tras colocar el ALBA en el dispositivo de calibración se procederá a inyectar corriente a los conductores para conformar las diferentes  $\mathbf{H}\mathbf{X}_k^{\{I_0\}}$ ,  $k = 0 \dots, N_{\bar{\Gamma}} - 1$  de forma aleatoria<sup>16</sup>, completando un total de  $N$  lecturas para cada excitación. A partir de aquí para cada una de ellas se procederá bajo el modelo de medida habitual:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_{X_k}^{\{I_0\}} &= V_{\text{IS}} + O_C && \text{(Inst. medida)} \\ \mathbf{R}_{X_k}^{\{I_0\}} &= V_{\text{IS}} + O_C + D_{\text{ES}} && \text{(Referencia)} \end{aligned} \right\} k = 0, \dots, N_{\bar{\Gamma}} - 1 \quad (3.40)$$

obteniéndose  $\mathbf{R}_{X_k}^{\{I_0\} \rightarrow \text{vcv}}$  y  $\mathbf{R}_{X_k}^{\{I_0\} \rightarrow s_2}$

El resto de excitaciones, las excitaciones de calibración virtuales, no tienen una representación física en el sistema de calibración de forma que debemos recurrir a una evaluación tipo **B**, considerando que la única fuente de información proviene del resto de lecturas. Esto, en última instancia, es aventurado dado que estamos tratando de estimar los resultados a unas excitaciones *ortogonales* a las excitaciones para las que tenemos respuesta del instrumento y por tanto cabe suponer que la conexión entre ambas es esencialmente nula y por tanto arriesgada cualquier suposición. Por ello en general es preferible que la proyección de  $\Xi\{I_0\}$  sobre la parte extendida de  $\Gamma$  sea lo más pequeña posible, de forma que su contribución a la incertidumbre total sea también pequeña. Una vez establecidas estas cautelas, como resultado de la lectura de excitaciones de calibración virtuales, se propone lo siguiente:

- ▷ Para el valor convencionalmente verdadero, se puede considerar el valor ideal que debería tener la respuesta del instrumento, esto es, el valor de la Integral de Ampere aplicada a la excitación (la corriente métrica):

$$\mathbf{R}_{X_k}^{\{I_0\} \rightarrow \text{vcv}} = \int_0^{2\pi} M_P g_k \frac{dl}{d\varphi} d\varphi \quad k = N_{\bar{\Gamma}}, \dots, N_{\Gamma} - 1 \quad (3.41)$$

Las Integrales de Ampere no presentan dificultad para calcularlas numéricamente. No obstante, si se verifica que  $\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{E}_0^\circ \approx \text{ctelm}(\varphi)$ , lo que resultará razonable en muchos casos, entonces las integrales tendrán un valor pequeño y se puede considerar  $\mathbf{R}_{X_k}^{\{I_0\} \rightarrow \text{vcv}} = 0$

- ▷ La varianza tiene que dar una indicación del nivel de dispersión que puede tener el valor convencionalmente verdadero de la correspondiente excitación de calibración virtual. A falta de mayor información, la varianza de los valores convencionalmente verdaderos de las lecturas hechas sobre las excitaciones de calibración reales nos aporta información de la variabilidad

<sup>16</sup>Se aplicarán las excitaciones de calibración, una tras otra y en orden aleatorio hasta obtener una lectura para cada una de ellas. Se aplicarán nuevamente, una tras otra y en un orden distinto (aleatorio) hasta conseguir la segunda lectura para cada una de ellas. Y así se continuará el proceso hasta disponer de las  $N$  lecturas para cada una de ellas.

de las respuestas del instrumento frente a un conjunto de excitaciones conocidas y que se puede extrapolar a las desconocidas. Adicionalmente, es una magnitud dimensionalmente homogénea con la que buscamos, y por otra parte nos da una medida de la calidad del instrumento que estamos calibrando de forma que, finalmente, se puede considerar<sup>17</sup>:

$$\mathbf{R}_{X_k}^{\{I_0\} \rightarrow s_2} = K_E \underbrace{\text{var}\left(\mathbf{R}_{X_t}^{\{I_0\} \rightarrow \text{vcv}}\right)}_{t=0, \dots, N_{\bar{\Gamma}}-1} \quad k = N_{\bar{\Gamma}}, \dots, N_{\Gamma} - 1 \quad (3.42)$$

donde  $K_E$  es un coeficiente de cobertura que se elige suficientemente grande como para tener confianza de que se cubren los valores que podrían resultar caso de aplicar realmente al ALBA esas excitaciones virtuales.

A partir de estos resultados, y asumiendo la independencia en la toma de lecturas, la matriz de covarianzas  $\Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$  se construirá como una matriz diagonal con las varianzas indicadas en la diagonal.

### 3.4.5. Coeficientes asociados a la variabilidad del rango de uso: $\gamma^{\rightarrow \text{vcv}}$ y $\Sigma_{\gamma\gamma}$

Estos coeficientes recogen la variabilidad del conjunto  $\Xi\{I_0\}$  proyectada sobre el dispositivo de calibración. Su cálculo pasa por establecer una muestra aleatoria de circuitos, y analizar para esa muestra los coeficientes  $\gamma$  correspondientes al desarrollo de la función  $H$  del circuito con respecto a la base ortogonal del sistema de calibración. En concreto:

1. A partir de la definición *por descripción* de  $\Xi\{I_0\}$ , se genera una muestra aleatoria, de tamaño  $N_m$ , de funciones  $\mathbf{H}_s^{\{I_0\}} \in \Xi\{I_0\} \quad s = 1 \dots N_m$ .
2. Se desarrolla cada función según la base de  $\Gamma$  (ver ecuación equivalente (2.20)):

$$\mathbf{H}_s^{\{I_0\}} = \frac{I_0}{\zeta} \sum_{t=0}^{N_{\Gamma}-1} \gamma_{st} g_t \quad (3.43)$$

Esta es la parte más costosa desde un punto de vista computacional.

3. Se calcular  $\gamma^{\rightarrow \text{vcv}} = [\gamma_t^{\rightarrow \text{vcv}}]$  y  $\Sigma_{\gamma\gamma}$  como el valor convencionalmente verdadero y matriz de covarianza de los coeficientes  $\gamma_{st}$ .

Dado que estamos realizando el cálculo directamente sobre la base ortogonal asociada al sistema de calibración, los coeficientes de proyección están vinculados a ella. En principio, un cambio de sistema de calibración implicaría la necesidad de recalcular los coeficientes. Adicionalmente, y desde un punto de vista más general, resultaría interesante disponer de una caracterización del conjunto

<sup>17</sup>Sólo se ha considerado la variabilidad de los valores convencionalmente verdaderos de las diferentes excitaciones de calibración. También podría considerarse la variabilidad de las lecturas tomadas para cada excitación de calibración, lo que en definitiva correspondería a considerar la variabilidad de todas las lecturas tomadas sobre todas las excitaciones de calibración. En general la variabilidad asociada a este término adicional será mucho menor que la variabilidad de los valores convencionalmente verdaderos, de forma que, finalmente, se ha optado por mantener únicamente este término.

$\Xi\{I_0\}$  que fuera independiente del sistema de calibración sobre el que se va a aplicar. Por ello el método que se propone pasa por realizar el proceso descrito anteriormente pero sobre la base  $\mathbf{q}$  (3.31) que es propia del conjunto  $\Xi\{I_0\}$ . De esta forma obtenemos  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{vcv}$  y  $\Sigma_{\mathbf{pp}}$  en un proceso que es computacionalmente costoso, pero que nos aporta una representación de  $\Xi\{I_0\}$  independiente de  $\Gamma$ . Ahora el problema radica en obtener  $\gamma \rightarrow \mathbf{vcv}$  y  $\Sigma_{\gamma\gamma}$  a partir de  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{vcv}$  y  $\Sigma_{\mathbf{pp}}$ . Esto se realiza de la siguiente manera:

Dada  $H^{\{I_0\}} = (I_0/\zeta)H^\circ \in \Xi\{I_0\}$ , tenemos que  $H^\circ = \gamma^T \mathbf{g}$  por lo que

$$\gamma = (H^\circ \mid \mathbf{g}) \quad (3.44)$$

pero como  $H^\circ = \mathbf{p}^T \mathbf{q}$ , entonces

$$\gamma = (\mathbf{p}^T \mathbf{q} \mid \mathbf{g}) = \mathbf{p}^T (\mathbf{q} \mid \mathbf{g}) \quad (3.45)$$

Denominando

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{q} \mid \mathbf{g}) = \\ &= \begin{bmatrix} (q_0 \mid g_0) & (q_0 \mid g_1) & \dots & (q_0 \mid g_{N_{\bar{\Gamma}}-1}) \\ (q_1 \mid g_0) & (q_1 \mid g_1) & \dots & (q_1 \mid g_{N_{\bar{\Gamma}}-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (q_{N_{\Xi}-1} \mid g_0) & (q_{N_{\Xi}-1} \mid g_1) & \dots & (q_{N_{\Xi}-1} \mid g_{N_{\bar{\Gamma}}-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

se puede expresar:

$$\gamma = \mathbf{M}^T \mathbf{p} \quad (3.47)$$

y por tanto

$$\gamma \rightarrow \mathbf{vcv} = \mathbf{M}^T \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{vcv} \quad (3.48)$$

$$\Sigma_{\gamma\gamma} = \mathbf{M}^T \Sigma_{\mathbf{pp}} \mathbf{M} \quad (3.49)$$

### 3.5. Caso de estudio: ALBA IM\_SH.N y ALBA IM\_SITA

Para ilustrar lo que se ha expuesto en las secciones precedentes se va a presentar dos casos de estudio para que sirvan de ejemplo. Los ALBA que se van a utilizar serán objeto de simulación numérica (experimentación virtual) para determinar el valor de sus funciones respuesta  $\mathbf{R}^{18}$ .

Se ha evitado la introducción de materiales magnéticos para facilitar aún más las simulaciones al poderlas llevar a cabo usando simplemente la ley de Biot y Savart (A.1) en vez de tener que recurrir a simulaciones usando el método de Elementos Finitos o similares [Ekman, 2003].

<sup>18</sup>De esta forma podemos enfrentarlos a diferentes situaciones experimentales de una forma más fácil que en una experimentación (real) en el laboratorio. En el capítulo 4 se justifica la equivalencia de ambos métodos.

### 3.5.1. ALBA IM\_SH.N (N sensores homogéneamente distribuidos)

A los ALBA de este tipo los denominaremos de forma genérica IM\_SH.N. Corresponden a una familia de instrumentos de medida<sup>19</sup> caracterizados por el número ( $N$ ) de sensores magnéticos que incorpora. El nombre responde a Instrumento de Medida de N Sensores Homogéneamente distribuidos. Están constituidos por un núcleo *no magnético* en forma de toroide circular de sección rectangular (fig. 3.3). Las dimensiones son coincidentes con un modelo concreto de núcleo de polvo de hierro fabricado por la empresa Micrometals [Micrometals, 2014]<sup>20</sup>. Los sensores están ubicados a lo largo del lazo de medida de forma que miden la componente tangencial al lazo de la inducción magnética<sup>21</sup>  $\vec{B}$ . La lectura ofrecida por el ALBA corresponde al promedio de las lecturas de los sensores:

$$I = \mu_0 L_{LM} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N B_k \quad (3.50)$$

El espacio  $\Xi\{I_0\}$  se ha caracterizado en base a una muestra aleatoria de  $N_m = 200\,000$  excitaciones de tipo espira rectangular. Las dimensiones y otros parámetros están recogidos en la tabla 3.1.

### 3.5.2. ALBA IM\_SITA (Sensores Inhomogeneamente distribuidos (distribución Tipo A))

Los ALBA que denominamos IM\_SITA (acrónimo de Sensores Inhomogéneamente distribuidos, con distribución Tipo A) son geoméricamente similares a los anteriores, pero dispone de cinco sensores ubicados asimétricamente a lo largo del lazo de medida. Por otra parte su rango nominal de funcionamiento incluye todos los puntos interiores al lazo de medida excepto aquellos que están impedidos mecánicamente por la presencia del material magnético. En la tabla 3.2 se muestran los parámetros propios de este sistema y en la figura 3.4 se muestra una visión 3D del mismo.

### 3.5.3. Un ejemplo de calibración: calibración de IM\_SH.3 mediante SCR00.6

Se ha llevado a cabo la calibración del ALBA IM\_SH.3 mediante un dispositivo de calibración SCR00.6, formado por 6 excitaciones aisladas reales y 20 excitaciones aisladas virtuales correspondientes al espacio extendido. Conviene notar que todos los circuitos del sistema de calibración tienen una  $\zeta = 1$ .

Al aplicar las excitaciones de calibración al ALBA se obtiene el vector  $R_{\mathbf{X}}^{\{I_0\} \rightarrow \text{vcv}}$  (ver sección 3.4.4) que se muestra en la tabla 3.3. Para la matriz

<sup>19</sup>En contraposición con “referencias”, ver sección 1.2.

<sup>20</sup>Dado que el material es no-magnético, podría omitirse. Se ha mantenido porque permite “dar forma” al instrumento y porque un toroide de esas dimensiones, pero de material magnético, se ha empleado en el prototipo desarrollado para la experimentación real.

<sup>21</sup>Los sensores reales miden la inducción magnética. Dado que se va a hacer una experimentación virtual no sería mayor problema considerar un sensor virtual que midiera  $\vec{H}$  pero se ha tratado de mantener un símil con la realidad. En cualquier caso dado que no hay materiales magnéticos presentes, ambos vectores son proporcionales a través de la permeabilidad del vacío.

Tabla 3.1. Dimensiones del ALBA IM\_SH.N.

Lazo de medida: circular			
$R_{LM}$	3.155	cm	Radio del LM
Sensores			
$N$	$N$	-	Número de sensores
$\varphi_k$	$3\pi/2$	rad	Posición de los sensores ( $k = 1$ )
	$2\pi(k - 1)/N$	rad	Posición de los sensores ( $k = 2 \dots N$ )
Circuito magnético			
$R_{INT}$	2.45	cm	Radio interior
$R_{EXT}$	3.86	cm	Radio exterior
$h$	2.54	cm	Altura
$\mu_r$	1	-	Permeabilidad relativa
Rango de funcionamiento. Parámetros geométricos			
$R_{INT}$	1.715	cm	Radio interior
$R_{EMI}$	4.595	cm	Radio exterior menor
$R_{EMA}$	36.145	cm	Radio exterior mayor
$H_{MIN}$	4.010	cm	Altura mínima (por arriba y por abajo)
$H_{MAX}$	65.98	cm	Altura máxima (por arriba y por abajo)

de covarianzas  $\Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ , se ha considerado una matriz diagonal: los primeros seis elementos tienen un valor nulo (dado que son lecturas obtenidas por simulación), y para las posiciones correspondientes a las excitaciones de calibración virtuales se ha considerado lo propuesto en la sección 3.4.4, ecuaciones (3.41) y (3.42) con  $K_E = 1$ , lo que arroja un valor<sup>22</sup> de  $4.844 \text{ A}^2$ . El resultado total de la calibración se muestra en la tabla 3.4. Dado que no estamos considerando incertidumbre en el valor de la corriente patrón de calibración<sup>23</sup>, prácticamente todo el origen de la incertidumbre proviene del término  $S2_\gamma$  correspondiente a la variabilidad geométrica<sup>24</sup> de  $\Xi\{I_0\}$ , que, por otra parte, es la que tratamos de ilustrar y en la que estamos interesados.

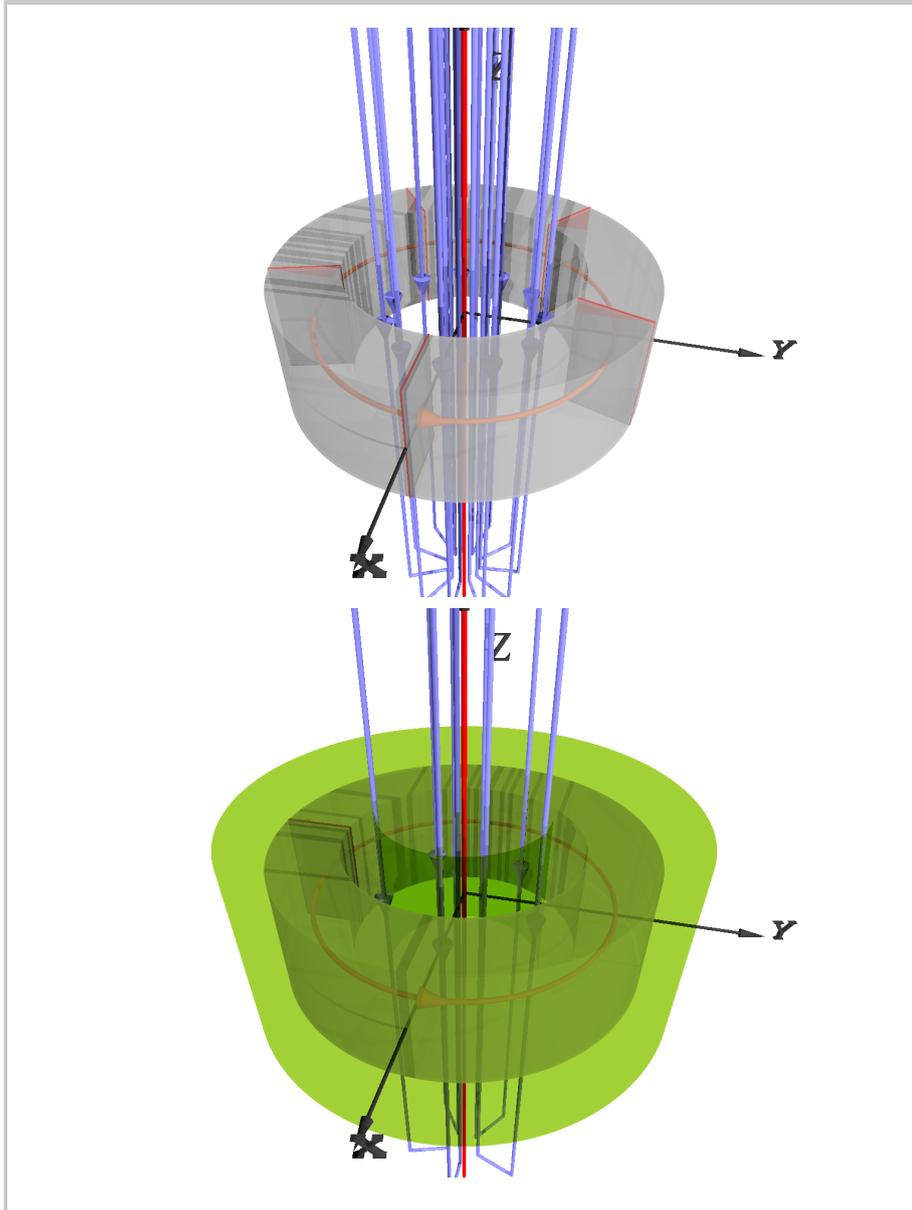
Para evidenciarlo, supongamos que durante el proceso de calibración el laboratorio aplica a las excitaciones de calibración una corriente métrica de  $I_0 = 100 \text{ A}$  pero con una incertidumbre tal que da pie a una incertidumbre expandida relativa del 1% en las lecturas obtenidas por el ALBA para cada

<sup>22</sup>Este valor puede parecer elevado en comparación con las varianzas que se han establecido para las excitaciones de calibración reales. Sin embargo hay que tener en cuenta que su incidencia no es grande dado que la proyección del conjunto  $\Xi\{I_0\}$  sobre el espacio generado por las excitaciones de calibración virtuales es pequeño en comparación con la proyección del mismo conjunto sobre el espacio generado por las excitaciones de calibración reales.

<sup>23</sup>Al fin y al cabo se trata de una simulación. La componente de incertidumbre en la corriente patrón asociada a la fluctuación de esa corriente se reflejaría en una variabilidad de las lecturas del ALBA, que se han considerado constantes.

<sup>24</sup>La matización expresada con “prácticamente” se justifica por varianza asociada a las excitaciones de calibración virtuales. Este efecto no es muy grande, en cualquier caso.

Figura 3.3. Dos vistas del instrumento IM\_SH.5 con el sistema de calibración SCR00.12 (arriba) y del IM\_SH.1 con el sistema de calibración SCR00.6 (abajo). Para el primer caso se muestra en gris la zona correspondiente al material magnético, aunque se considera que tiene permeabilidad relativa  $\mu_r = 1$ . En el segundo caso se muestra en verde la zona excluida por el rango nominal de funcionamiento.



excitación de calibración real. Los valores de la diagonal de la matriz (diagonal)  $\Sigma_{XX}$  se muestran en la tabla 3.5 y los resultados de la calibración en este caso se muestran en la tabla 3.6. Lógicamente la variabilidad geométrica permanece inalterable aunque sigue siendo la componente predominante de la incertidumbre total de calibración.

Tabla 3.2. Dimensiones del ALBA IM\_SITA.

Lazo de medida: circular			
$R_{LM}$	3.155	cm	Radio del LM
Sensores			
$N$	5	-	Número de sensores
$\varphi$	115, 130, 250, 270, 290	rad	Posición de los sensores
Circuito magnético			
$R_{INT}$	2.45	cm	Radio interior
$R_{EXT}$	3.86	cm	Radio exterior
$h$	2.54	cm	Altura
$\mu_r$	1	-	Permeabilidad relativa
Rango de funcionamiento. Parámetros geométricos			
$R_{INT}$	2.45	cm	Radio interior
$R_{EMI}$	3.86	cm	Radio exterior menor
$R_{EMA}$	35.41	cm	Radio exterior mayor
$H_{MIN}$	2.54	cm	Altura mínima (por arriba y por abajo)
$H_{MAX}$	64.51	cm	Altura máxima (por arriba y por abajo)

Tabla 3.3. Calibración de IM\_SH.3 mediante SCR00.6 en el punto  $I_0 = 100$  A: vector de valores convencionalmente verdaderos de las lecturas de calibración (expresadas en A), obtenidas por simulación numérica; se muestran únicamente las lecturas sobre excitaciones reales. Para el resto de las excitaciones (excitaciones virtuales) se considera un valor convencionalmente verdadero de cero.

	HX <sub>0</sub>	HX <sub>1</sub>	HX <sub>2</sub>	HX <sub>3</sub>	HX <sub>4</sub>	HX <sub>5</sub>
$R_{\mathbf{x}}^{\{I_0\} \rightarrow \text{vcv}}$	100.656	97.028	102.956	100.166	100.166	102.956

Tabla 3.4. Calibración de IM\_SH.3 mediante SCR00.6 en el punto  $I_0 = 100$  A: Resultados

$R \rightarrow \text{vcv}$	$R \rightarrow \text{ux} (k=2)$	$S2_X$	$S2_\gamma$
96.157	14.438	0.252	51.860

La incertidumbre expandida total del ALBA se sitúa en torno al 15 %, fundamentalmente asociado a la variabilidad geométrica, lo que evidencia la mala calidad del instrumento. Para mejorar el instrumento se debería incrementar la

Figura 3.4. Imagen 3D del ALBA IM\_SITA con el sistema de calibración SCR00.4. Se muestra el núcleo magnético (de permeabilidad relativa  $\mu_r = 1$  y la posición de los sensores (bloques rojos). La zona excluida por el rango nominal de funcionamiento es coincidente con el núcleo magnético, por lo que no se dibuja.

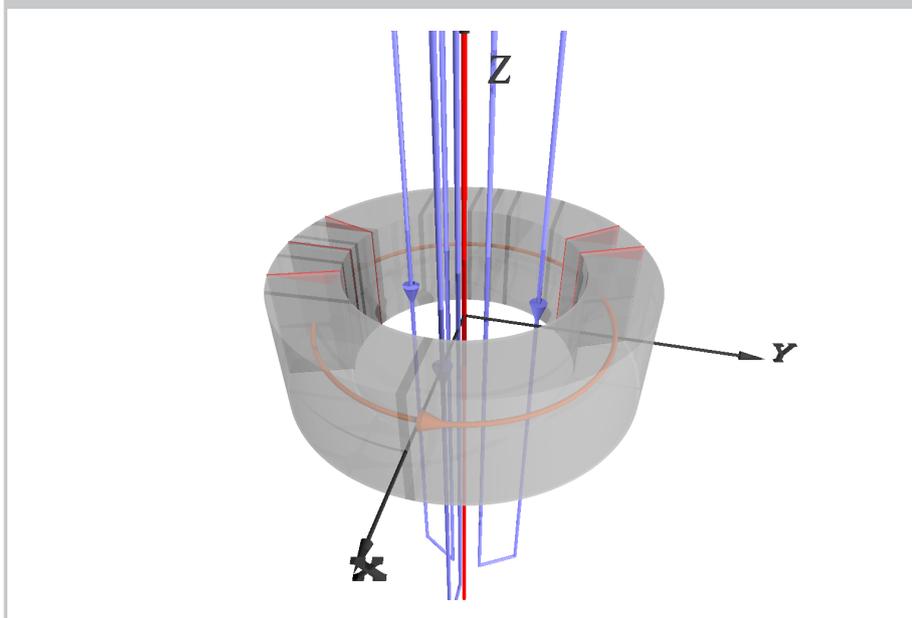


Tabla 3.5. Calibración de IM\_SH.3 mediante SCR00.6 en el punto  $I_0 = 100$  A, asumiendo un 1% de incertidumbre expandida en el establecimiento de la corriente patrón: Diagonal de la matriz de covarianzas de  $\Sigma_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$

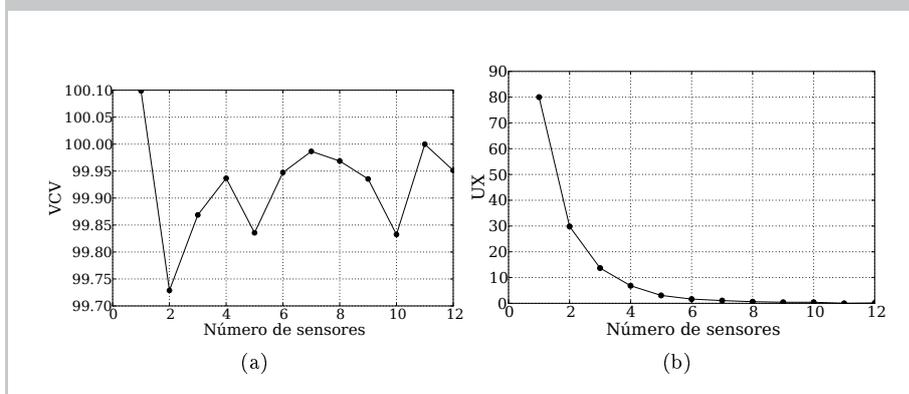
(0, 0)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	(4, 4)	(5, 5)	(k, k) $k = N_{\Gamma} \dots N_{\Gamma} - 1$
0.253	0.235	0.265	0.251	0.251	0.265	4.844

Tabla 3.6. Calibración de IM\_SH.3 mediante SCR00.6 en el punto  $I_0 = 100$  A, asumiendo un 1% de incertidumbre expandida en el establecimiento de la corriente patrón: Resultados

R $\rightarrow$ V <sub>CV</sub>	R $\rightarrow$ U <sub>X</sub> (k=2)	S <sub>2<sub>X</sub></sub>	S <sub>2<sub>γ</sub></sub>
96.157	14.673	1.965	51.860

permeabilidad del circuito magnético o aumentar el número de sensores; cualquier modificación que mejore la estimación de la Integral de Ampere. En ese sentido se ha realizado una calibración de una serie de instrumentos IM\_SH.N con un número de sensores entre 1 y 12, y se han aplicado al sistema de calibración SCR00.12. Su espacio  $\Xi\{I_0\}$  se ha caracterizado mediante 200 000 muestras aleatorias. En la figura 3.5 se muestran los resultados. Todos los instrumentos exhiben un valor convencionalmente verdadero en torno al valor  $I_0$  pero la in-

Figura 3.5. Valor convencionalmente verdadero (izq.) e incertidumbre expandida (dcha.) de la función  $R()$  de la series de instrumentos IM\_SH.1- IM\_SH.12 obtenido por calibración mediante SCR00.12 en el punto  $I_0 = 100$  A. Representación en función del número de sensores del instrumento.



certidumbre expandida es grande para dispositivos con un número de sensores bajo y se reduce progresivamente con el incremento de éstos.

### 3.5.3.1. Simetría de rotación

Durante el proceso de calibración hay que colocar el instrumento en una posición y orientación específica con respecto al sistema de calibración, dado que es con respecto a esa posición con la que se han calculado todos los elementos matemáticos (matrices, etc, ...) internos del sistema de calibración.

Sin embargo, si el instrumento muestra algún tipo de simetría, los resultados de calibración deberían ser, idealmente, constantes bajo modificaciones que obedezcan a esa simetría<sup>25</sup>. En los instrumentos anteriores existe una simetría de rotación con respecto al centro del lazo de medida, por lo que no deberían detectarse grandes variaciones con respecto a los resultados de calibración. En ese sentido, en la figura 3.6 se muestran los resultados de calibración obtenidos en función del ángulo de posicionamiento de un instrumento IM\_SH.3. Puede observarse que la variación en el valor convencionalmente verdadero es inferior al 0.25 %, que resulta muy inferior a la incertidumbre expandida de calibración, que se sitúa en torno al 13.7 %.

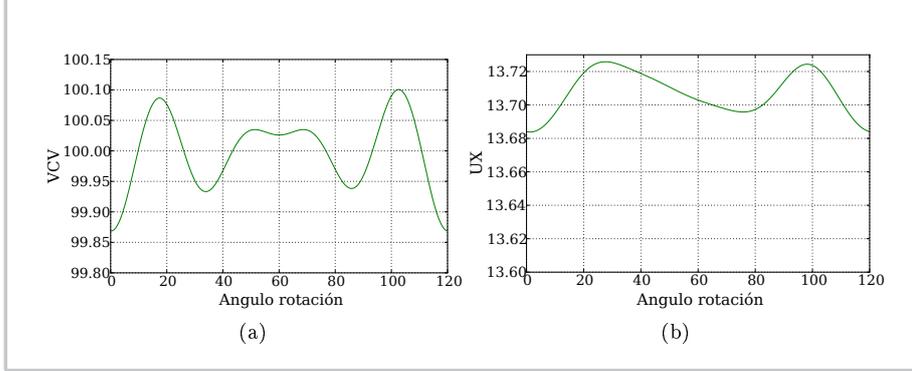
### 3.5.3.2. Tamaño muestral para la caracterización de $\Xi\{I_0\}$

Para llevar a cabo la calibración de un ALBA el rango de uso debe estar adecuadamente caracterizado. El paso de una representación basada en reglas geométricas descriptivas a un conjunto de coeficientes asociados a la base del espacio  $\Theta$  se hace a través de una muestra aleatoria. Hasta este momento el tamaño de la muestra se ha tomado de 200 000 sin mayor justificación<sup>26</sup> sin

<sup>25</sup>El instrumento de medida viene caracterizado por el lazo de medida y por el rango de uso. La simetría la deben obedecer estos dos elementos. Ello no implica que haya que atender, por ejemplo, a la posición de los sensores dentro del lazo de medida, dado que eso es una característica constructiva interna del ALBA que no es relevante para la caracterización del sistema de calibración.

<sup>26</sup>Idealmente debería considerarse lo mayor posible sujeto al costo computacional.

Figura 3.6. Valor convencionalmente verdadero (izq.) e incertidumbre expandida (dcha.) obtenidos por calibración de un instrumento IM\_SH.3 en el punto  $I_0 = 100$  A mediante un sistema SCR00.12, en función del ángulo en que se posiciona el instrumento. Inicialmente los sensores están colocados en 0, 120 y 240 grados y luego el instrumento se va rotando los grados indicados en abcisas.



embargo resulta evidente que los resultados de la calibración deberían fluctuar en función del tamaño de la muestra, estabilizándose progresivamente según crece ésta<sup>27</sup>.

Para hacer un comprobación mediante experimentación virtual se ha considerado un ALBA de tipo IM\_SITA. El espacio  $\Xi\{I_0\}$  de este instrumento se ha caracterizado con un tamaño muestral progresivamente mayor y se ha procedido a su calibración. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3.7, en la que se indica la variación relativa tanto del valor convencionalmente verdadero como de la incertidumbre de calibración con respecto a los valores obtenidos para el tamaño muestral mayor. La figura apunta a que un tamaño muestral del orden de  $10^4$  puede ser adecuado<sup>28</sup>.

### 3.6. Mapa de respuesta de un instrumento

Supongamos que disponemos de un ALBA que ha sido sometido a calibración y del que conocemos por tanto  $\mathbf{R}_{\mathbf{x} \rightarrow \text{vcv}}$  y  $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ . El problema que se plantea es ¿que estimación podemos hacer sobre la respuesta que emitiría el instrumento frente a una excitación genérica  $\mathbf{H}^{\{I_0\}}$ ?

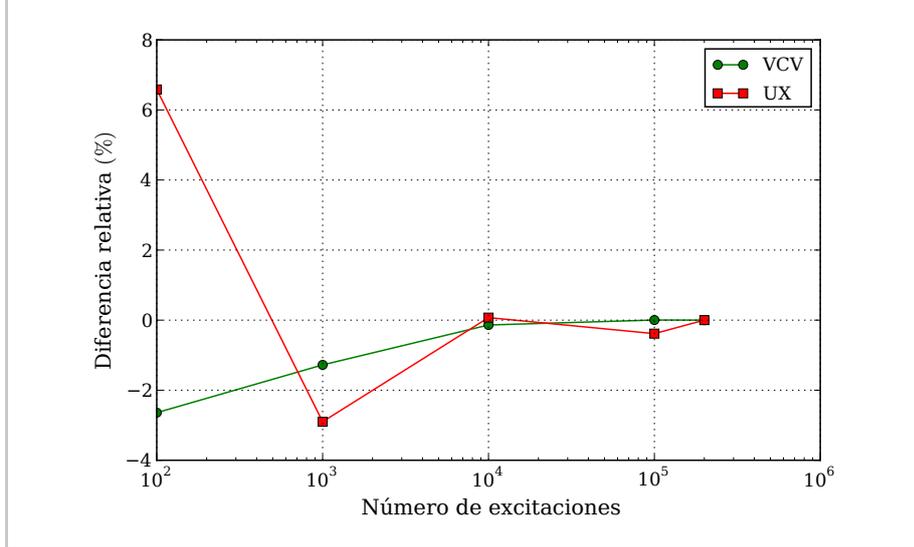
Si analizamos la excitación con respecto a la base del espacio  $\Gamma$  obtendremos un vector de coeficientes *constant*es  $\boldsymbol{\gamma}$ . A partir de aquí, la ecuación (3.37) nos ofrece la solución, por lo que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{H}^{\{I_0\}}) \rightarrow \text{vcv} = \frac{1}{\zeta} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}_{\mathbf{x} \rightarrow \text{vcv}} \quad (3.51)$$

<sup>27</sup>De forma equivalente, según crece el tamaño de la muestra los coeficientes que caracterizan al espacio  $\Xi\{I_0\}$  se van estabilizando.

<sup>28</sup>Sin embargo, y a falta de un análisis en mayor profundidad en este sentido, las caracterizaciones de  $\Xi\{I_0\}$  que se han realizado se basaban en un tamaño muestral un orden de magnitud mayor,  $10^5$ , que constituía un compromiso entre el tamaño muestral elevado y un tiempo de cómputo razonable. Este último, con lo equipos informáticos de que se ha dispuesto, se cifraba en unos pocos días.

Figura 3.7. Dependencia de los resultados de calibración de un ALBA específico en función del tamaño de la muestra de excitaciones con la que se ha calculado el espacio  $\Xi\{I_0\}$ .



$$R(H^{\{I_0\}})_{\rightarrow s_2} = \frac{1}{\zeta^2} \gamma^T \Lambda \Sigma_{\mathbf{xx}} \Lambda^T \gamma \quad (3.52)$$

donde hay que tener en cuenta que ahora  $\gamma$  es una constante, no una variable aleatoria.

Las expresiones anteriores permiten hacer una representación gráfica del comportamiento del instrumento de medida, de una forma similar a como se hizo en el capítulo 2, sección 2.3.2, a base de asociar a cada punto de la superficie delimitada por el lazo de medida<sup>29</sup> una excitación específica y predeterminada (típicamente un conductor unidimensional infinitamente largo con  $\zeta = 1$ ), estimar la respuesta del instrumento a con respecto a ese conductor, y construir el correspondiente mapa 2D.

En este sentido, en la figura 3.8 se muestra el mapa de respuesta de un ALBA de tipo IM\_SITA calibrado con un sistema SCR00.12. En la parte superior de la figura se muestra el mapa de valores convencionalmente verdaderos, obtenidos a partir de (3.51). Como resultaba esperable la respuesta del ALBA crece fuertemente en las zonas cercanas a los sensores de campo magnético. Por otra parte, a partir de la expresión (3.51) se puede obtener la incertidumbre expandida para cada punto, lo que permite establecer su intervalo de incertidumbre. De esta forma la imagen central izquierda de la figura muestra el mapa construido con los valores correspondientes al límite inferior del intervalo de incertidumbre, mientras que la imagen central derecha muestra el mapa correspondiente al límite superior. Es interesante insistir en que esos tres mapas corresponden a la respuesta del instrumento *estimada a partir de los resultados de la calibración*. Aunque entra de lleno en el apartado de comprobaciones experimentales, a los

<sup>29</sup>Nuevamente suponemos un lazo de medida plano. Por otra parte los puntos interiores deberían estar restringidos a aquellos permitidos por el rango del uso del instrumento.

que se dedicará el capítulo 4, vale la pena comparar las imágenes anteriores con el mapa de respuesta construido con *la respuesta real que da el ALBA frente a cada excitación*<sup>30</sup>. Este resultado es el que muestra la imagen inferior de la figura 3.8. Puede comprobarse que el grado de coincidencia es bueno.

En la línea anterior, la figura 3.9 muestra los mapas de respuesta de ALBA de tipo IM\_SH.N dotados de uno a doce sensores. El mapa se ha restringido a una zona circular de radio 1.75 cm. Resulta interesante ver como la calidad de los ALBA mejora drásticamente con el número de sensores. En concreto, para IM\_SH.1 la corriente medida presenta una variación superior a 100 A, mientras que para IM\_SH.12 la fluctuación es de unos 0.2 A.

---

<sup>30</sup>En este caso el adjetivo “real” debe entenderse en contraposición a “estimada por el sistema de calibración”. Dado que el ALBA no tiene materiales magnéticos, la respuesta se puede obtener numéricamente mediante la Ley de Biot y Savart.

Figura 3.8. Mapas de respuesta de un ALBA de tipo IM\_SITA al serle aplicado una excitación en forma de hilo rectilíneo indefinido transportando una  $I_0 = 100$  A. La calibración se ha llevado a cabo con un sistema SCR00.12. En todos los casos se muestra el mapa asociado a una circular de radio 2.45 cm interior al lazo de medida. Se muestra asimismo el lazo de medida y la posición de los sensores en este ALBA. En los mapas de colores, el rojo se satura para corrientes de superiores a 120 A y el azul para corrientes inferiores a 80 A. Arriba: Valores convencionalmente verdaderos estimados a partir de una calibración mediante un SCR00.6. Centro izquierda: Valores inferiores del intervalo de incertidumbre. Centro derecha: Valores superiores del intervalo de incertidumbre. Abajo: Valores directamente calculados (no estimados) de la respuesta del ALBA frente a las excitaciones.

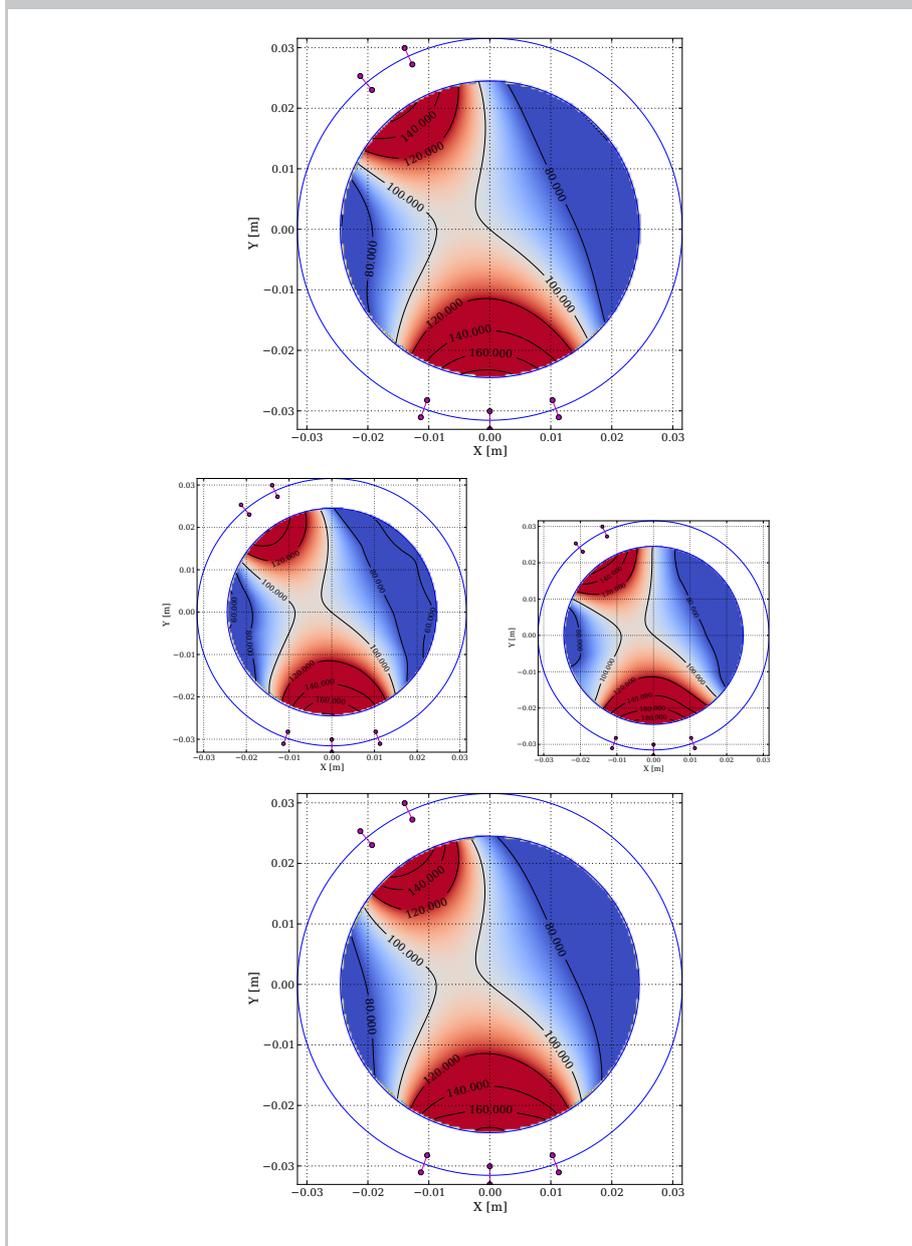
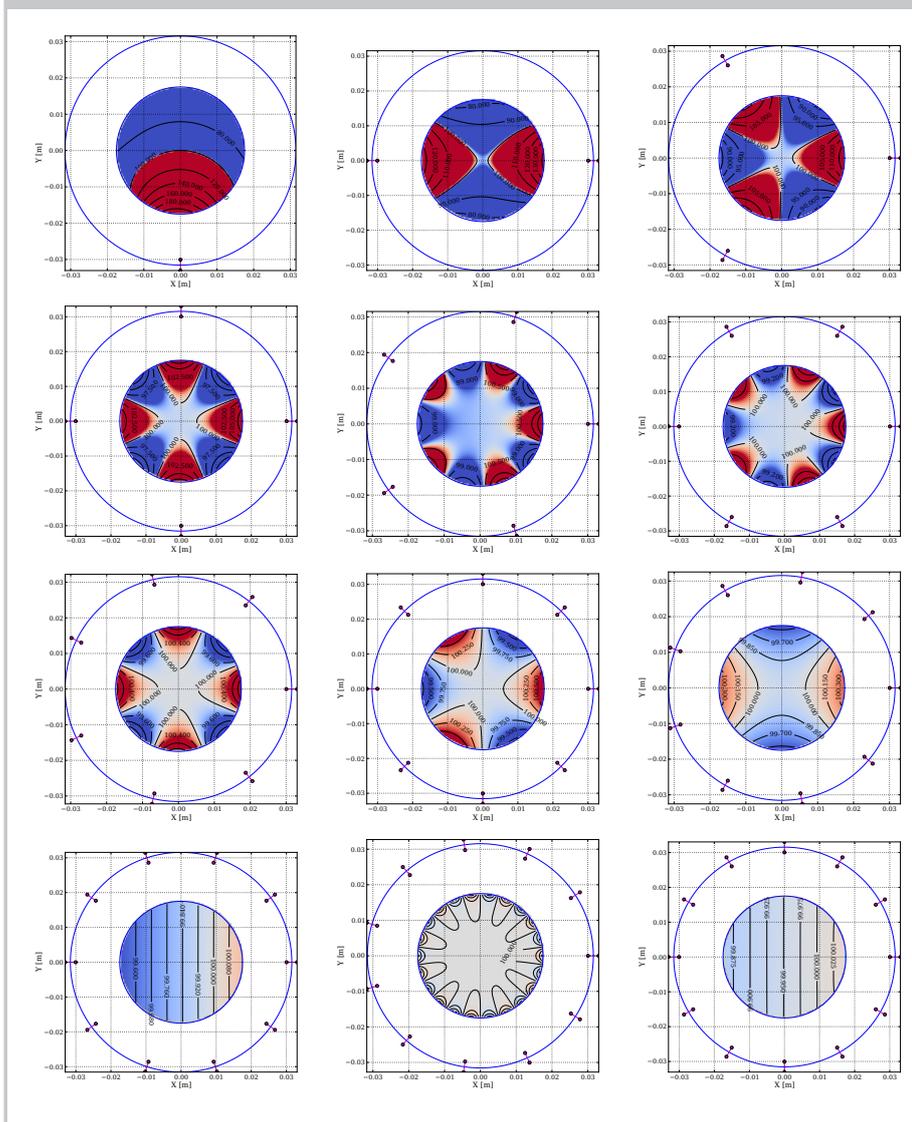


Figura 3.9. Mapa de respuesta de intensidad estimada de ALBA de tipo IM\_SH.N dotados desde 1 hasta 12 sensores. La calibración se ha llevado a cabo con un sistema SCR00.12. El mapa se ha restringido a una zona circular de radio 1.75 cm. Para resaltar las diferencias de calidad de los instrumentos en función del número de sensores, en los mapas de colores, el rojo se satura para corrientes superiores a 100.5 A, y el azul para corrientes inferiores a 99.5 A.





## Capítulo 4

# Comprobaciones experimentales

### 4.1. Introducción

Los resultados presentados en los capítulos previos requieren de una contrastación experimental que avalen las aproximaciones tomadas. Esto puede llevarse a cabo a dos niveles, que denominaremos experimentación real y experimentación virtual.

La experimentación real implica la construcción en el laboratorio de un prototipo sobre el que se realizan mediciones. Este proceso implica un uso generoso de recursos de todo tipo y en especial de tiempo, que se emplea tanto para la construcción y puesta a punto del prototipo como para el proceso de toma de lecturas. Como consecuencia, la cantidad de casos -experimentos- que pueden afrontarse es necesariamente limitado. Pese a ello, la experimentación real se erige como la vía de validación definitiva.

Por contra, la experimentación virtual recrea el prototipo en un entorno alternativo puramente numérico y lo somete a las leyes físicas pertinentes mediante su modelización matemática y resolución numérica. Los experimentos llevados a cabo de esta forma son necesariamente más versátiles, requieren menos tiempo, y permiten afrontar situaciones difícilmente reproducibles de forma real.

Sin embargo, los experimentos virtuales también demandan un esfuerzo previo. Por ejemplo, las simulaciones ejecutadas mediante el método de elementos finitos, requieren de una puesta a punto -un andamiaje- en aspectos asociados a la formulación puramente matemática del problema y que se hallan en un nivel más profundo que la codificación en sí de las leyes físicas. Puede citarse en ese sentido, las dimensiones del modelo, especialmente del exterior del mismo, así como la estructura del mallado que se empleará. Una buena codificación de la física del problema pero con un mal tratamiento de estos aspectos puede conducir a resultados erróneos o fuera de la precisión mínima requerida. Es por ello que se necesita de algún tipo de indicador sobre si el andamiaje empleado es adecuado. Así, la contrastación con resultados experimentales reales resulta la más definitiva, aun sometida a la limitación de los errores experimentales. A falta de ella, y circunscribiéndose al ámbito puramente virtual, el empleo de

mallados progresivamente más finos, el cambio de las condiciones de contorno para problemas acotados en puntos muy alejados y la evaluación (numérica) de la Integral de Ampere sobre conductores de corriente conocida, constituyen algunas de las alternativas.

En un intento de tratar de aprovechar los mejor de ambas metodologías, se ha optado por la siguiente aproximación: En una primera instancia se construyó un prototipo sobre el que se tomaron un conjunto de medidas en relación a experimentos específicos. Estas medidas se emplearon para la validación de un modelo virtual mediante el que, a través de pequeñas modificaciones, se completaron el resto de experimentos.

En la primera sección de este capítulo se van a describir los entornos experimentales, real y virtual, recreados, para pasar a analizar la validez del segundo con respecto al primero. En las secciones subsiguientes se empleará la experimentación virtual para analizar las hipótesis y resultados obtenidos mediante el sistema de calibración.

## 4.2. Entorno experimental SE00.15

### 4.2.1. Descripción

El acrónimo corresponde a Sistema Experimental de 15 conductores. Los parámetros que definen el sistema de calibración vienen recogidos en la tabla 4.1. Este sistema se va aplicar sobre un ALBA de tipo IM\_SH.1 (ver sección 3.5), pero con un núcleo magnético de permeabilidad relativa mayor que la unidad. Estructuralmente, el instrumento actúa como un transductor de inducción magnética a intensidad, caracterizado por una ecuación:

$$I = K_{ALBA} B \quad (4.1)$$

Su rango de uso se ha establecido como el conjunto de circuitos rectangulares (ver sección 2.4.1) que cumplan las siguientes condiciones:

- ▷ El lado que corta al lazo de medida debe verificar:

$$0.0 \text{ cm} \leq \min(r_p, r_n) \leq 0.7 R_{LM} = 2.205 \text{ cm}$$

- ▷ El lado exterior al lazo de medida debe verificar:

$$4.105 \text{ cm} = 1.3 R_{LM} \leq \max(r_p, r_n) \leq 11.6 R_{LM} = 36.65 \text{ cm}$$

- ▷ La altura total de la espira debe verificar:

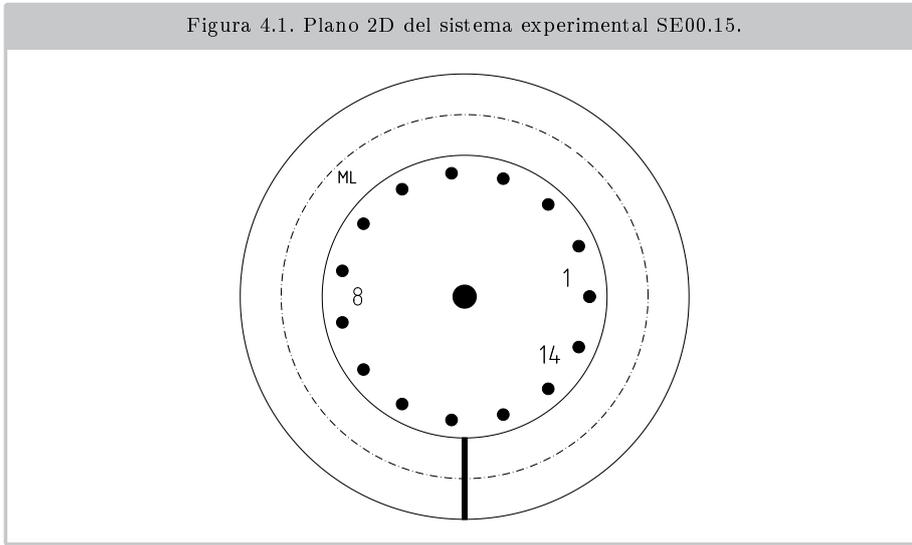
$$3.03 \text{ cm} = 0.96 R_{LM} \leq L_H \leq 20.96 R_{LM} = 66.13 \text{ cm}$$

Si bien esta elección de rango de uso resulta un poco arbitraria, ha sido elegida de forma que represente a la mayor parte de las situaciones prácticas. En las figuras 4.1 y 4.2 se muestra este sistema desde diversas perspectivas.

Tabla 4.1. Dimensiones del sistema de calibración SE00.15.

Lazo de medida: circular			
$R_{LM}$	3.155	cm	
Circuito principal: Espira rectangular		Circuitos auxiliares: Espira rectangular	
$r_p$	0	cm	$r_p$ 2.15 cm
$\varphi_p$	0	°	$\varphi_p$ $24k$ $k = 1 \dots 14$ °
$r_n$	20	cm	$r_n$ 2.15 cm
$\varphi_n$	0	°	$\varphi_n$ $24(k+1)$ $k = 1 \dots 14$ °
$L_H$	80	cm	$L_H$ 40.0 cm

Figura 4.1. Plano 2D del sistema experimental SE00.15.

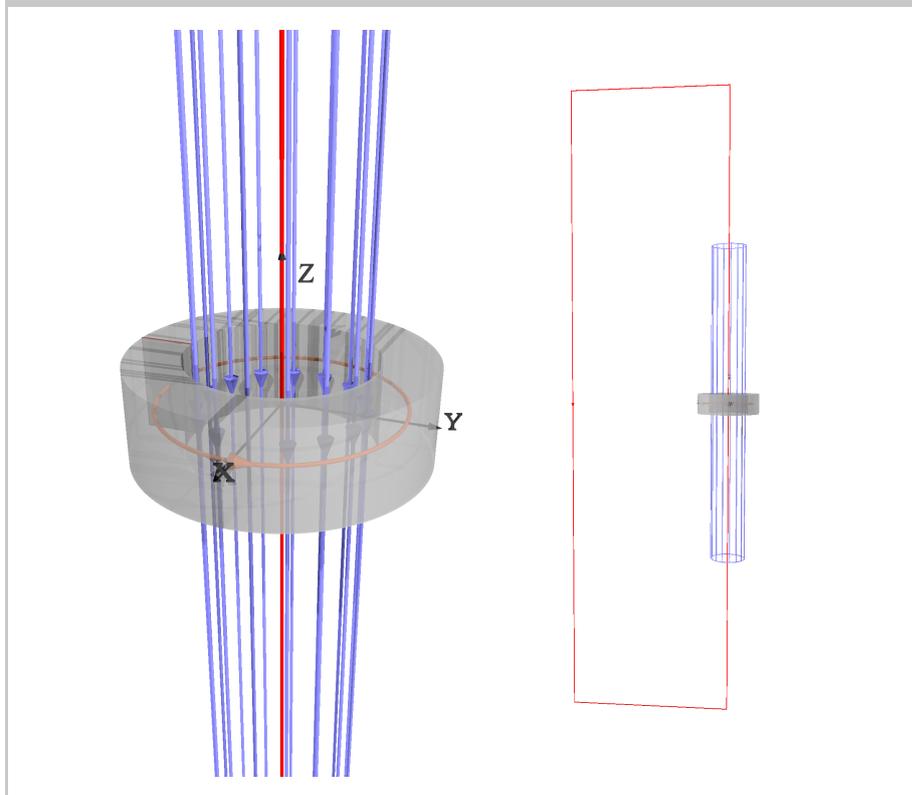


#### 4.2.2. Recreación real (en el laboratorio)

En la figura 4.3 se muestra una visión del prototipo construido en el laboratorio. Para la espira principal se ha empleado una barra circular de cobre de 5 mm de diámetro. La corriente de excitación se ha transportado mediante dos cables de sección superior, 8 mm, que se han mantenido paralelos para minimizar el campo residual generado. La conexión se ha realizado por presión mecánica. Las espiras auxiliares se han construido mediante parejas de hilos de cobre esmaltado. Dada la ubicación de las espiras, cada hilo individual es compartido por dos espiras<sup>1</sup>. Las posiciones relativas de los hilos entre sí y con respecto a la espira principal se han asegurado mediante placas de circuito impreso taladradas. Cada pareja de hilos que conforman una espira están unidos por la parte superior mediante un cordón de soldadura y por la parte inferior mediante sendos cables flexibles que se usan para la inyección de la corriente. Estos cables se han trenzado para minimizar el efecto del campo magnético generado por ellos.

<sup>1</sup>Lógicamente, en ningún experimento real se excitó simultáneamente dos espiras que tuvieran un hilo compartido.

Figura 4.2. Diferentes imágenes 3D del sistema de calibración SE00.15 aplicado al prototipo de ALBA.



Dado que el sistema está ideado para que únicamente estuviese excitada una espira auxiliar cada vez, y dado que cada hilo está compartido por dos espiras, la pista de soldadura superior conecta todos los hilos.

Para excitar a la espira principal se requería el uso de una fuente de corriente controlable mediante un ordenador. Sin embargo, las fuentes programables de las que se disponía no tenían la posibilidad de generar los valores elevados de corriente necesarios. Sí que se disponía de una fuente conmutada de tensión, modelo HRPG-450-3.3, de tensión nominal 3.3 V y corriente máxima nominal de 90 A, aunque en la práctica era capaz de suministrar una corriente algo superior. La fuente disponía de una capacidad limitada de control mediante un potenciómetro para realizar un ajuste fino de la tensión de salida, lo que permitía una pequeña variación alrededor de su tensión nominal de salida. De forma adicional, disponía de un control digital de activación/desactivación mediante la aplicación o no de un cortocircuito entre un par de terminales accesibles en su carcasa. la utilización de esta fuente como sistema de generación de la corriente que tenía que circular por la espira principal traía consigo tres efectos indeseables:

- La corriente dependía de la resistencia de la espira principal (prácticamente un cortocircuito) y de los contactos de las conexiones. Se añadió al conjunto un cable de NiCrom a efectos de incluir una componente resis-

tiva que fuera dominante, y permitiese el ajuste de la corriente al valor deseado. Pese a todo, cada reconexión, recableado del sistema o cualquier operación que implicase la apertura y cierre de los contactos, conllevaba una variación de la resistencia total que obligaba a nuevos reajustes.

- Dado que se trataba de corrientes grandes para la sección del conductor, el efecto de variación de la resistencia del cable (y por tanto de la corriente que circulaba) con respecto al calentamiento del cable resultaba notorio. Concretamente, los aproximadamente 300 W generados por la fuente se disipaban en el cable de NiCrom, que alcanzaba temperaturas elevadas<sup>2</sup>.
- El sistema así constituido no podía controlarse mediante ordenador.

Por todo ello, se ha conformado un sistema mixto capaz de comportarse como una fuente programable de la siguiente forma: Se conecta la fuente de tensión a la espira principal y se añade en paralelo una fuente de corriente programable Agilent E3632A cuya corriente nominal máxima, 7 A, es muy inferior a la total requerida. Al activar la espira principal, la corriente que circula es continuamente monitorizada mediante un transductor corriente-corriente Honeywell CSNR151 cuya salida se mide mediante un DMM Agilent 34401A. De esta forma la fuente de tensión se ajusta al inicio para dar una corriente levemente inferior al valor (de corriente) deseado y el ordenador va reconfigurando la salida de la fuente de corriente programable a fin de estabilizar la corriente total por la espira a su valor nominal<sup>3</sup>. La desactivación de la corriente en la espira principal se realiza desactivando simultáneamente la fuente de corriente y la fuente de tensión, esta última mediante sus entradas digitales de activación/desactivación, que a su vez se gestionan a través del ordenador usando una placa Velleman K8055.

La corriente para excitar las espiras auxiliares se obtiene directamente de una fuente programable HP-6652A con capacidad de generación de hasta 25 A, que además realiza las funciones de monitorización y medida de la corriente generada. La conexión de la corriente con la espira auxiliar concreta que se fuera a utilizar se realiza mediante un conjunto de relés controlados por una unidad de entradas/salidas digitales Agilent U2121A.

El ALBA bajo calibración se ha construido mediante un toroide Yellow-White de la empresa Micrometals [Micrometals, 2014] al que se le ha practicado una ranura (gap) de 2 mm para ubicar el sensor de campo magnético. Tras cada punto de medida el toroide presenta una magnetización remanente no despreciable que impone la necesidad de realizar una desmagnetización previa. Para ello se ha bobinado alrededor del toroide magnético alrededor de un centenar de espiras usando hilo esmaltado fino. Así, antes de cada punto de medida, se desactivan todas las excitaciones por las espiras y se aplica al bobinado de desmagnetización una corriente sinusoidal de amplitud exponencialmente decreciente. La señal se obtiene de un generador de señal Tektronik AFG 310 que se aplica a través de un amplificador (de audio) Velleman K4003, lo que permite

---

<sup>2</sup>Se ponía al rojo vivo.

<sup>3</sup>En un primer diseño del sistema, el control se realizó de una forma completamente diferente y que prescindía de la fuente programable Agilent. En concreto, la estabilización se llevó a cabo activando un ventilador que refrigeraba la resistencia de Nicrom, lo que reducía la resistencia e incrementaba la corriente. Al apagar el ventilador, la temperatura, y por tanto la resistencia, aumentaba y se reducía la corriente. Este método, aunque tosco, era completamente funcional. Sin embargo no resultó flexible en su aplicación y daba pie a tiempos de estabilización muy largos, por lo que se descartó en favor del sistema descrito en el texto.

generar una corriente apreciablemente mayor, del orden de 1 A, a la obtenible directamente del generador.

Para medida del campo en el gap se utiliza un sensor Hall Honeywell SS94A2. El sensor se comporta como un transductor inducción magnética a tensión de respuesta lineal: en ausencia de campo aplicado presenta una salida nominalmente igual a la mitad de la tensión de alimentación y una pendiente ratiométrica, de forma que la relación entre la tensión de salida y el campo aplicado viene dado por:

$$B = 0.016 \frac{V - \frac{V_{cc}}{2}}{V_{cc}} \quad (4.2)$$

donde la tensión medida ( $V$ ) y la tensión de alimentación  $V_{cc}$  se expresan en voltios y el valor de la inducción magnética,  $B$ , en teslas. El sensor se alimenta a una tensión de 10.06 V mediante una fuente Agilent E3646A. Las lecturas se han realizado usando dos sensores diferentes del mismo fabricante y modelo que, de forma arbitraria, se han denominado sensor principal y sensor auxiliar.

Toda la adquisición de medidas se ha automatizado [Keithley] empleando un ordenador [Atchison, 1996], [Hughes, 2010]. Los experimentos se llevan a cabo de forma semiatendida, o completamente automática en ocasiones. La variedad de dispositivos empleados así como sus capacidades han forzado el uso simultáneo de diferentes protocolos de comunicación: mandatos SCPI<sup>4</sup> a través de un enlace USB con GPIB<sup>5</sup> (DMM 34401A, Generador Tektronix, fuente HP 62XXX), USBTMC<sup>6</sup> [Keysight](Agilent A2121), RS232 [Campbell, 1987] (fuente HPE3632A). Finalmente para la tarjeta Velleman k8055 ha tenido que emplearse un protocolo privativo del propio fabricante mediante una librería escrita para linux<sup>7</sup>.

### 4.2.3. Recreación virtual

Las simulaciones numéricas se afrontaron de forma diferente en función del tipo de sistema a recrear. En los casos en que el sistema estaba constituido únicamente por cables conductores, el cálculo de los campos magnéticos se hizo directamente a través de la ley de Biot y Savart (A.1) empleando el lenguaje de programación Python [Lutz, 2013] y las librerías numpy<sup>8</sup> [Oliphant, 2007] y scipy<sup>9</sup>. Específicamente, para cada conductor del sistema, se calculó el valor de la componente tangencial del campo en 5000 puntos<sup>10</sup> distribuidos a lo largo del lazo de medida y se hicieron interpolaciones para el resto. Dada la fiabilidad actual de los algoritmos de integración numérica y de extrapolación (actuando por otra parte sobre funciones matemáticamente suaves, es decir sin discontinuidades), estos resultados no requieren mayor contrastación.

En presencia de materiales no lineales, el cálculo de campos se llevó a cabo mediante el método de elementos finitos (FEM) [Silvester y Ferrari, 1996], [Zienkiewicz, 1993], [Trowbridge y Sykulski, 2006] a través del paquete de software OPERA de Cobham. La forma en que se representó el modelo fue la siguiente:

<sup>4</sup><http://www.ivifoundation.org/scpi/default.aspx>

<sup>5</sup><http://linux-gpib.sourceforge.net/>

<sup>6</sup>[http://www.keysight.com/upload/cmc\\_upload/All/usbtmc.html](http://www.keysight.com/upload/cmc_upload/All/usbtmc.html)

<sup>7</sup><http://libk8055.sourceforge.net/>

<sup>8</sup><http://www.scipy.org/>

<sup>9</sup><http://www.scipy.org/>

<sup>10</sup>Realmente esta número es muy elevado y podría reducirse [Unser, 2000].

- ▷ **Conductores:** Se modelaron mediante hilos de sección cuadrada de lado 0.1 mm.
- ▷ **Toroide magnético:** El toroide se simuló empleando las dimensiones indicadas por el fabricante en el catálogo, aunque hay que tener en cuenta que estas dimensiones incluyen la capa protectora no magnética. Por otra parte el toroide real presenta un pequeño biselado en las aristas que tampoco se tuvo en cuenta. No parece que ninguno de estas dos detalles vayan a aportar diferencias significativas en el resultado. Para este material se empleó un mallado de 1.6 mm.
- ▷ **Gap:** El gap es quizá el elemento más crítico dado que es en su centro donde se va a calcular el valor de la inducción magnética. Se han empleado las mismas dimensiones del gap del toroide real. Para representarlo se han utilizado 4 bloques de dimensión y mallado decrecientes. Cada uno de los bloques están definidos por unas dimensiones geométricas iguales a las del gap completo pero multiplicadas por un factor de escala de valor: 1.0, 0.1, 0.01 y 0.001. Cada uno de ellos presentaba un mallado de 1.0, 0.1, 0.0301 y 0.002 mm respectivamente.
- ▷ **Éter:** Se ha denominado así al resto del espacio, ocupado por un material de permeabilidad magnética relativa  $\mu_r = 1$ , que delimita a los demás elementos y que establece los límites geométricos de la simulación. El éter está definido por cilindros concéntricos con el eje axial del toroide. Las dimensiones de los cilindros se definieron en base al valor del radio exterior del toroide de forma que el primer cilindro tiene un radio y una altura de 1.1 veces dicho radio exterior. Para los dos cilindros restantes el factor de escala era de 4 y 40. Con respecto al tamaño del mallado, los valores fueron, de cilindro interior a exterior, de 5, 40 y 100 mm.
- ▷ **Condiciones de contorno:** Se impuso la condición de que el campo inducción magnética fuese tangencial en la superficie del cilindro exterior del éter<sup>11</sup>.

#### 4.2.3.1. Caracterización del material magnético

El toroide es un composite a base de polvo de hierro de bajo precio y propósito general, orientado fundamentalmente a la construcción de inductancias. Su código de catálogo es el 26, si bien se le identifica más habitualmente por los colores, “yellow-white” en este caso, empleados en su capa de recubrimiento.

Para caracterizarlo, el fabricante ofrece diferentes curvas de respuesta del material así como funciones de aproximación de las mismas que se escalan a partir de la denominada *permeabilidad inicial*,  $\mu_i$ , del material. Para el material que nos ocupa toma un valor de  $75.0 \pm 7.5$ . La curva que ofrece la permeabilidad relativa ( $\mu_r$ ) del material frente al campo inducción magnética,  $B$ , aplicado

<sup>11</sup>También se hicieron algunas simulaciones de prueba forzando condiciones de campo normal a la superficie exterior sin que se produjesen grandes diferencias con los resultados. Esto da una indicación de que el tamaño del cilindro exterior, y por ende del espacio virtual de simulación, puede ser adecuado.

puede aproximarse por:

$$\mu_r = \frac{\mu_i}{100} \sqrt{\frac{a + cB + eB^2}{1 + bB + dB^2}} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} a &= 10600 \\ b &= 0.721 \\ c &= 37.8 \cdot 10^4 \\ d &= -0.774 \\ e &= -3.35 \cdot 10^5 \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde el valor de  $B$  representa la amplitud de un campo sinusoidalmente variable en el tiempo, expresada en teslas. Hay que hacer notar que la curva es el resultado de medidas a una frecuencia entre los 60 Hz y los 10 kHz, mientras que las medidas en laboratorio se hicieron en corriente continua. En la figura 4.4 se representa esta expresión para los valores típico, máximo y mínimo de la permeabilidad inicial.

A partir de la expresión (4.3) puede obtenerse la curva de magnetización  $B = B(H)$  del material mediante la resolución de la ecuación no lineal:

$$\mu_r(B) = \mu_0 \frac{B}{H} \quad (4.4)$$

que conduce a las curvas que se muestran en la figura 4.5. . Estas curvas son las que se han empleado en las diferentes simulaciones (no lineales) del sistema por el método de elementos finitos.

### 4.3. Análisis de resultados

#### 4.3.1. Experimentación real frente a virtual

Puesto que se pretende validar el ámbito virtual mediante la contrastación de un experimento (virtual) con su equivalente real, se requiere disponer de un elemento numérico y gráfico de comparación entre los resultados obtenidos mediante ambos tipos de experimentaciones. Para ello se han utilizado el juego de lecturas que se obtendrían en un proceso normal de calibración, es decir la lectura del instrumento de medida cuando está sometido a las excitaciones de calibración. La calibración se va a realizar en el punto  $I_0 = 90$  A y con un coeficiente  $\beta = 0.2$ , lo que implica que las excitaciones de calibración se han construido aplicando la corriente nominal a la espira principal y una corriente de 18 A a las auxiliares.

Dado que se trata de un ALBA el resultado de las medidas debería ser una corriente, que se obtendría de la expresión 4.1, una vez fijada la constante  $K_{ALBA}$ . Sin embargo dado que el valor de esa constante se establecerá más adelante, la comparación entre los resultados virtuales y los reales se llevará a cabo directamente a través del valor de la inducción  $B$  en el centro del gap.

En el caso de la experimentación real, la toma de lecturas se hizo mediante el siguiente procedimiento:

1. Desmagnetización del núcleo.
2. Lectura de  $B$  en ausencia de excitación ( $B_{CERO}$ ).

3. Activación de la fuente de corriente principal.
4. Pausa de estabilización térmica.
5. Activación de la fuente de corriente adicional y estabilización de la corriente principal a su valor nominal.
6. Selección de una espira auxiliar al azar (o ninguna para el primer punto).
7. Lectura de la corriente principal.
8. Activación de la corriente auxiliar.
9. Lectura de la corriente auxiliar.
10. Lectura de  $B_E$ .

Este proceso se ha iterado hasta completar todas las espiras, constituyendo el conjunto de resultados una serie de lecturas. Nuevamente el proceso se repite hasta completar un número de series. El resultado final se obtiene restando a la lectura obtenida bajo excitación de corriente, la lectura obtenida sin excitación:  $B = B_E - B_{\text{CERO}}$  y todo ello promediado al conjunto de las series.

En la figura 4.6 se muestran los resultados obtenidos mediante simulación con las curvas de permeabilidad máxima, mínima y típica, así como las medidas llevadas a cabo mediante dos sensores diferentes del mismo modelo y en sesiones diferentes. Para cada sensor se realizaron 15 series de lecturas siguiendo el procedimiento antes descrito. Si bien ambas series están desplazadas hacia valores altos de permeabilidad, son compatibles con las tolerancias manifestadas por el fabricante. A la vista de los resultados se optó por establecer la permeabilidad inicial del toroide para futuras simulaciones en un valor de 81.5. En la tabla 4.2 se muestran los valores medidos para los dos sensores así como los obtenidos mediante simulación FEM y en la figura 4.7 se muestran esos valores de forma gráfica.

La estimación de la incertidumbre de los resultados experimentales se ha llevado a cabo de la siguiente forma: La inducción magnética medida es proporcional a la corriente aplicada, por tanto:

$$B_0 = I_0 \frac{B}{I} = I_0 \frac{K_H V_H}{K_I I_S} \quad (4.5)$$

donde  $B_0$  es la inducción medida para una corriente (arbitraria)  $I_0$ ,  $K_H$  es el coeficiente de transducción del sensor Hall,  $V_H$  es la tensión medida a la salida del sensor Hall,  $K_I$  es el coeficiente de transducción del sensor de corriente Honeywell CSNR151 y  $I_S$  es la corriente medida a la salida de ese sensor. A partir de (4.5) la incertidumbre estándar relativa puede expresarse como:

$$B_{0 \rightarrow \text{UEr}} = \sqrt{(K_{H \rightarrow \text{UEr}})^2 + (V_{H \rightarrow \text{UEr}})^2 + (K_{I \rightarrow \text{UEr}})^2 + (I_{S \rightarrow \text{UEr}})^2} \quad (4.6)$$

De las especificaciones de los sensores se puede establecer que  $K_{H \rightarrow \text{UEr}} = 1.5 \%$  y  $K_{I \rightarrow \text{UEr}} = 0.25 \%$ . Haciendo una evaluación tipo A de las lecturas experimentales, se tiene que  $V_{H \rightarrow \text{UEr}} \approx 0.25 \%$ ; una evaluación tipo B de las especificaciones

Tabla 4.2. Resultados experimentales obtenidos del promediado de lecturas de dos sensores diferentes y los obtenidos por simulación FEM. La última columna muestra la lectura en A que arrojaría el ALBA una vez que se le asocie el coeficiente de transducción, ecuación (4.1), indicado en (4.8).

$HX_k$	Sensor 1 [mT]	Sensor 2 [mT]	FEM [mT]	I [A]
0	24.417	24.670	24.573	90.000
1	24.549	24.801	24.644	90.259
2	24.499	24.760	24.620	90.173
3	24.476	24.731	24.599	90.095
4	24.456	24.700	24.579	90.022
5	24.425	24.675	24.559	89.948
6	24.417	24.657	24.538	89.872
7	24.380	24.610	24.516	89.790
8	24.342	24.579	24.490	89.695
9	24.311	24.570	24.458	89.577
10	24.245	24.482	24.411	89.406
11	24.192	24.450	24.331	89.114
12	24.519	24.750	24.704	90.480
13	24.726	24.973	24.770	90.721
14	24.631	24.877	24.709	90.498

del multímetro que mide la tensión del sensor Hall aporta un contribución despreciable. Con respecto a la medición de corriente a la salida del sensor de corriente arroja un valor despreciable para ambas contribuciones (variabilidad de las lecturas y especificaciones del instrumento). Componiendo todas estas componentes obtenemos una incertidumbre expandida total de:

$$B_{0 \rightarrow ux_r} = 3.1 \% \implies B_{0 \rightarrow ux} = 0.74 \text{ mT} \quad (k = 2) \quad (4.7)$$

Los resultados obtenidos por simulación FEM son compatibles con este valor de incertidumbre, por lo que se considera validada la experimentación virtual a los efectos de análisis de lo expuesto en los capítulos precedentes: en adelante se tomarán los valores obtenidos mediante simulaciones FEM como resultados experimentales genéricos.

Por otra parte la constante de transducción del ALBA (4.1) podemos fijarla<sup>12</sup> a un valor de:

$$K_{ALBA} = 3662.53 \text{ AT}^{-1} \quad (4.8)$$

de forma que la lectura del instrumento de medida, sometido a la corriente nominal circulando por el circuito aislado principal, ofrezca precisamente ese valor. En la tabla 4.2 se muestran las lecturas en amperios que mostraría el instrumento.

<sup>12</sup>Al fin y al cabo somos los “fabricantes” del dispositivo; solo nos restaría incorporar la electrónica que multiplicase las lecturas obtenidas del sensor magnético por esta constante y mostrarlas a través de un visualizador.

### 4.3.2. Efectos marginales

Se ha investigado mediante experimentación virtual, la posible incidencia de dos efectos que no se han considerado en la estimación de incertidumbre.

- ▷ **Posicionamiento de las espiras.** En el cálculo anterior no se han tenido en cuenta las pequeñas imprecisiones en la ubicación de los conductores auxiliares cometidas en la construcción del prototipo. Para evaluar su posible efecto en los resultados se realizaron una serie de simulaciones en las que la posición de cada rama de cada espira auxiliar se desplazaba en el eje X en una cantidad aleatoria y luego se aplicaba un nuevo desplazamiento en Y igualmente aleatorio. Los desplazamientos se encontraban en el rango  $-0.75 \text{ mm} \leq DX, DY \leq 0.75 \text{ mm}$ . Los resultados pueden verse en la figura 4.8. Lógicamente el sistema es más sensible para las variaciones en el posicionamiento de las excitaciones de calibración más próximas al sensor (espiras 11 y 12, ver figura 4.1), aunque la fluctuación resulta menor que la incertidumbre expandida de los resultados experimentales.
- ▷ **Posicionamiento del sensor.** La medida del campo B debe hacerse en el centro del gap y para ello se habilitaron en el prototipo unos topes mecánicos. Pese a todo se ha analizado mediante FEM la variación de la respuesta del sensor con respecto al error de posicionamiento dentro de un rango de  $\pm 2.0 \text{ mm}$ , que en cualquier caso es muy superior a los errores de posicionamiento reales. Los resultados de las simulaciones se muestran en la figura 4.9. Nuevamente, el error asociado al posicionamiento del sensor es inferior a la incertidumbre experimental.
- ▷ **Posicionamiento del instrumento de medida.** El posicionamiento del toroide con respecto al sistema de calibración se hizo manualmente y con bastante cuidado, pero inevitablemente se incurre en cierta imprecisión, que, no obstante, está atenuada dado que los resultados están promediados para todas las series de lecturas y el toroide se recolocaba al inicio de cada serie. Por ello, para estimar el rango de variabilidad de la curva de salida con respecto al posicionamiento, se llevaron a cabo un conjunto de simulaciones en las que el toroide se descentraba mediante desplazamientos lineales y angulares. En concreto se le aplicaba una rotación aleatoria dentro de un rango de  $(0.48^\circ < \Delta\varphi < 2.4^\circ)^{13}$  y posteriormente desplazamientos aleatorios en el eje X e Y en un rango de  $(-0.75 \text{ mm} < \Delta x, \Delta y < 0.75 \text{ mm})$ . En la figura 4.10 se muestran los resultados obtenidos. Nuevamente puede comprobarse que la variabilidad debida a este efecto se encuentra en la banda de variación de lecturas debida al cambio de sensores.

## 4.4. Hipótesis de linealidad

El sistema de calibración se apoya en la hipótesis de comportamiento lineal del instrumento, al menos en el entorno del punto de trabajo. Para verificar esta hipótesis en nuestro sistema experimental, dotado de un material magnético no lineal, se ha procedido en base a la definición 21:

<sup>13</sup>Esos valores corresponden al 2% y al 10% del ángulo subtendido por dos conductores adyacentes.

- ▷ Se seleccionaron dos excitaciones aisladas auxiliares de índices  $s_1$  y  $s_2$
- ▷ Se determinó la respuesta ( $L_0$ ) del instrumento<sup>14</sup> bajo la excitación de la excitación aislada principal sometida a la corriente nominal  $I_0$ .

$$L_0 = R(I_0 \tilde{H}E_0^\circ) \quad (4.9)$$

- ▷ Se determinó la respuesta del instrumento bajo la excitación de la espira principal y cada una de las espiras auxiliares ( $L_{s_1}$  y  $L_{s_2}$ ), sometidas estas últimas a la excitación  $\beta I_0$

$$\begin{aligned} L_{s_1} &= R(I_0 \tilde{H}E_0^\circ + I_0 \beta \tilde{H}E_{s_1}^\circ) \\ L_{s_2} &= R(I_0 \tilde{H}E_0^\circ + I_0 \beta \tilde{H}E_{s_2}^\circ) \end{aligned} \quad (4.10)$$

- ▷ Se determinó la respuesta del instrumento bajo la excitación de la espira principal y las dos espiras auxiliares ( $L_{s_1 s_2}$ ), sometidas estas últimas a la excitación  $\beta I_0$

$$L_{s_1 s_2} = R(I_0 \tilde{H}E_0^\circ + I_0 \beta \tilde{H}E_{s_1}^\circ + I_0 \beta \tilde{H}E_{s_2}^\circ) \quad (4.11)$$

- ▷ Se determinó el error relativo de linealidad  $\epsilon_{lin}$

$$\epsilon_{lin} = \left| \frac{L_{s_1 s_2} - (L_{s_1} + L_{s_2} - L_0)}{L_{s_1 s_2}} \right| \quad (4.12)$$

Este proceso se realizó para todas las parejas de espiras. En la figura 4.11 se muestran estos resultados. El error máximo se verifica para  $s_1 = 10$  y  $s_2 = 11$  con un valor de  $\epsilon_{lin} = 2.0 \times 10^{-5}$ , que resulta despreciable.

## 4.5. Equivalencia convencional y estricta

En el proceso de calibración utilizamos la equivalencia convencional para obtener una (la mejor) reproducción de un cierto circuito mediante el sistema de calibración, bajo la hipótesis de que, verificada la equivalencia convencional, se verificará razonablemente bien la equivalencia estricta.

Para comprobar esto, se ha elegido una espira al azar, cuyos parámetros geométricos se muestran en la tabla 4.3, perteneciente al rango de uso del instrumento y se ha comparado la similitud entre la función  $B(\varphi) = \mu_0 H^\circ(\varphi)$  generada por la espira, y la generada por el sistema de calibración SE00.15 emulando a la espira, todo ello sin presencia de materiales magnéticos (equivalencia convencional). Posteriormente se han llevado a cabo las simulaciones adecuadas para obtener el valor de la  $B(\varphi)$  en ambos casos (espira y simulación) pero en presencia del ALBA, lo que implica la presencia de su material magnético y gap (equivalencia estricta).

<sup>14</sup>Recuérdese que todos los circuitos del sistema de calibración, así como los empleados para las comprobaciones experimentales, tienen un coeficiente  $\zeta$  nulo o unitario.

Tabla 4.3. Parámetros geométricos de la excitación de prueba aplicada a SE00.15.

$r_p$	$\varphi_p$	$r_n$	$\varphi_n$	$L_H$	$I_{exc}$
1.603 cm	14.103°	18.799 cm	135.223°	52.274 cm	90 A

Tabla 4.4. Resultado de la calibración correspondiente al sistema experimental SE00.15.

IM $\rightarrow$ V <sub>CV</sub>	IM $\rightarrow$ U <sub>E</sub>	IM $\rightarrow$ U <sub>X</sub> ( $k = 2$ )	$K_E$
90.091 A	3.384 A	6.767 A	1.0

En la figura 4.12 se muestran los resultados obtenidos, tanto para la equivalencia convencional como para la estricta así como las diferencias relativa entre ambas. Aun siendo un resultado esperable<sup>15</sup>, resulta notable comprobar que el material magnético tiene, en general, el efecto de mejorar el grado de adecuación de las funciones obtenidas por la espira y su simulación.

## 4.6. Calibración

Para llevar a cabo la calibración del sistema SE00.15 se debe caracterizar el rango de uso del ALBA mediante una muestra aleatoria que, como es habitual, se ha tomado de un tamaño 200 000. Puesto que ya se ha validado la experimentación virtual, como lecturas del instrumento frente a las excitaciones de calibración, se han considerado los resultados de las simulaciones FEM recogidas en la tabla 4.2, y para las que se ha asumido una varianza y covarianza nulas a fin de eliminar las fuentes de incertidumbre que no sean las propias de la variabilidad geométrica del rango de uso. El coeficiente  $K_E$ , ecuación (3.42), se ha fijado a un valor de 1.0. Con todo ello, los resultados de la calibración se recogen en la tabla 4.4.

A efectos de comprobar este resultado, se han generado un total de 100 circuitos aleatorios pertenecientes al rango de uso y se ha determinado, mediante simulación FEM, la respuesta del instrumento frente a ellos. En 98 de los casos el resultado obtenido ha quedado dentro del intervalo establecido por la incertidumbre expandida, lo que resulta congruente con el intervalo de confianza estimado ( $\approx 95\%$ ). En la figura 4.13 se muestra el sistema de calibración, el ALBA y los circuitos empleados en la prueba, estos últimos en color verde salvo los dos cuya respuesta queda fuera del intervalo de calibración, que se muestran en color magenta.

<sup>15</sup>El campo en un toroide (no necesariamente circular) de permeabilidad infinita dependerá de la corriente abrazada y de su geometría, pero no de la ubicación de la corriente atrapada Van Bladel [2007], lo que implica una equivalencia estricta exacta. En ese sentido es de esperar que conforme aumenta el valor de la permeabilidad del medio, mejore la equivalencia estricta. Y la equivalencia convencional puede entenderse como una equivalencia estricta para  $\mu = \mu_0$ .

### 4.6.1. Lazos de medida no circulares. Sistema experimental SEPAC

Se ha llevado a cabo, mediante simulación por ordenador, la calibración de un ALBA con un lazo de medida en forma de tenaza, al estilo de una pinza amperimétrica. El sistema de calibración es de tipo SE00.15, y al conjunto de ambos elementos (sistema de calibración y pinza) se le ha denominado SEPAC. El ALBA disponía de un único sensor ubicado en el centro de un gap de 2 mm, ubicado en la coordenada  $\varphi = 270^\circ$ . El material magnético se ha elegido de las mismas características que el del toroide Yellow-White de Micrometals. El lazo de medida se ha establecido como la trayectoria que pasa por el centro del material magnético. La altura del material magnético es de 2.54 cm. Su forma y anchura, así como el lazo de medida, se recogen en la figura 4.14, en la que se muestra una visión 3D del sistema. El punto de calibración ha sido  $I_0 = 90$  A. El rango de uso se ha elegido de forma similar al del sistema SE00.15 salvo que se ha permitido a los conductores acercarse hasta los límites mecánicos impuestos por el material magnético. En la tabla 4.5 se recogen las lecturas obtenidas de las excitaciones de calibración tanto en forma de lecturas directa del sensor de inducción magnética situado en el gap, como en forma de la lectura que arrojaría el ALBA si se le fija una constante de transducción<sup>16</sup> de valor  $K_{\text{ALBA}} = 5303.48 \text{ A T}^{-1}$ . La calibración arroja un valor convencionalmente verdadero de  $I \rightarrow v_{\text{CV}} = 89.9$  A y una incertidumbre expandida de  $I \rightarrow u_{\text{X}} = 23.5$  A. Nuevamente, el elevado intervalo de incertidumbre es debido a la composición de las siguientes causas:

- ▷ El material magnético no presenta una permeabilidad excesivamente elevada.
- ▷ El gap es grande.
- ▷ Se ha planteado un rango de medida razonablemente exigente, al permitir a los conductores acercarse todo lo posible al material magnético.

Puede resultar sorprendente una incertidumbre expandida tan elevada con respecto a la fluctuación de las lecturas obtenidas a partir de las excitaciones de calibración. Sin embargo hay que tener en cuenta que éstas últimas esencialmente corresponden a la excitación de la espira principal a la que se le añade una pequeña perturbación, mientras que la calibración está considerando circuitos transportando la corriente nominal y situados en todos los puntos permitidos por el rango de uso. Esto resulta más evidente al observar el mapa de respuesta estimada del ALBA que se muestra en la figura 4.15. Como puede observarse la respuesta fluctúa, dependiendo de la posición en que se ubique el conductor indefinido, entre 72 A hasta por encima de los 112 A.

<sup>16</sup>La constante de transducción se ha elegido de forma que la respuesta del instrumento a la excitación de calibración principal sea igual a la corriente nominal.

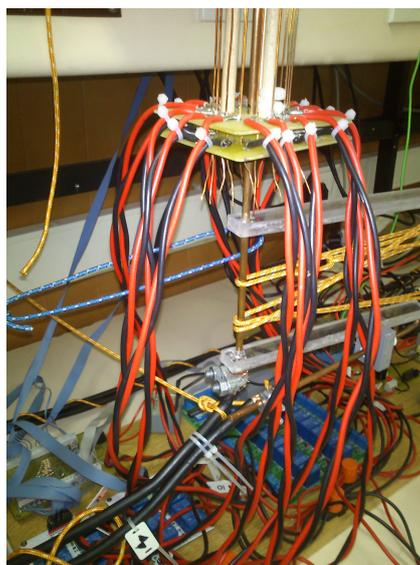
Tabla 4.5. Lecturas obtenidas por simulación correspondientes a la calibración hecha en un sistema SEPAC. Para cada excitación de calibración se muestran los resultados correspondientes a la lectura del sensor Hall, y la lectura en amperios que ofrecería el instrumento (si se ajustase su constante de transducción  $K_{ALBA}$  de forma que la excitación de calibración principal arrojarase una lectura igual a la corriente nominal).

$HX_k$	FEM [mT]	Exp [A]
0	16.970	90.000
1	17.150	90.952
2	17.091	90.639
3	17.033	90.335
4	16.985	90.076
5	16.938	89.831
6	16.885	89.549
7	16.825	89.227
8	16.766	88.919
9	16.711	88.626
10	16.652	88.310
11	16.651	88.308
12	17.110	90.739
13	17.309	91.797
14	17.257	91.521

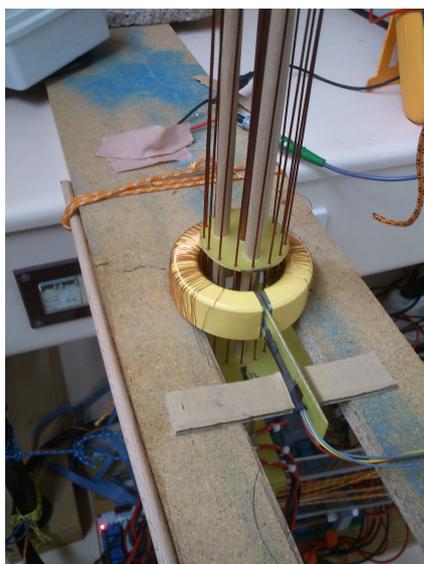
Figura 4.3. Sistema experimental real. a): Visión de conjunto. En la parte inferior se muestran el conjunto de relés empleados para la conexión de la corriente de excitación a cada circuito auxiliar. b): Detalle de la conexión de la corriente de excitación a los circuitos auxiliares (pares de cables rojo/negro) y al circuito principal (par de cables negros gruesos). c): Detalle del ALBA formado por el núcleo de material magnético Yellow-White. Se muestra el gap, el sensor Hall insertado y el bobinado de desmagnetización del toroide. d): Visión de conjunto. En la parte trasera se muestran las fuentes de alimentación y DMM empleados para las excitaciones y las medidas de los diferentes sensores.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.4. Valor de la permeabilidad relativa del material Yellow-White con respecto al valor de la inducción magnética. Se muestran las curvas asociadas a los valores máximo, mínimo y típico de la permeabilidad inicial.

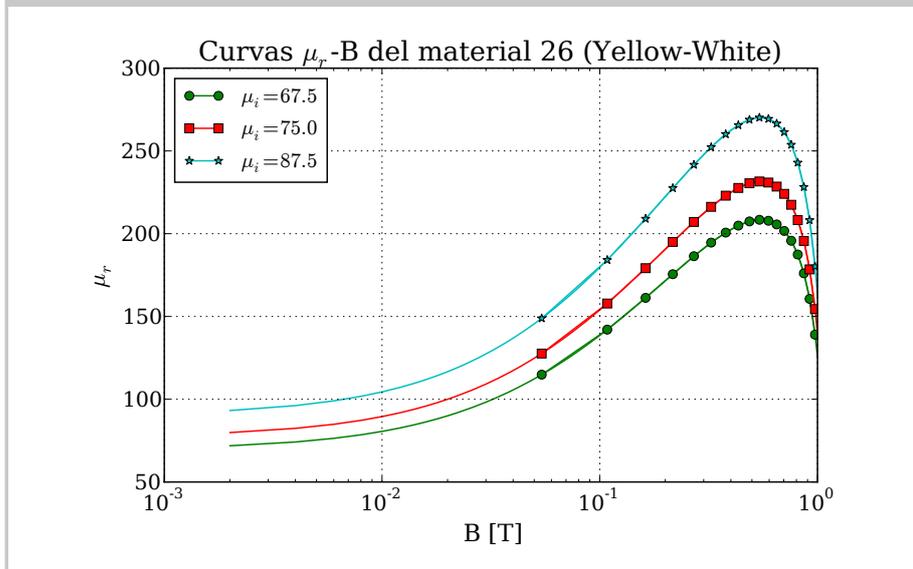


Figura 4.5. Curva de magnetización del material Yellow-White para los valores máximo, mínimo y típico de la permeabilidad inicial.

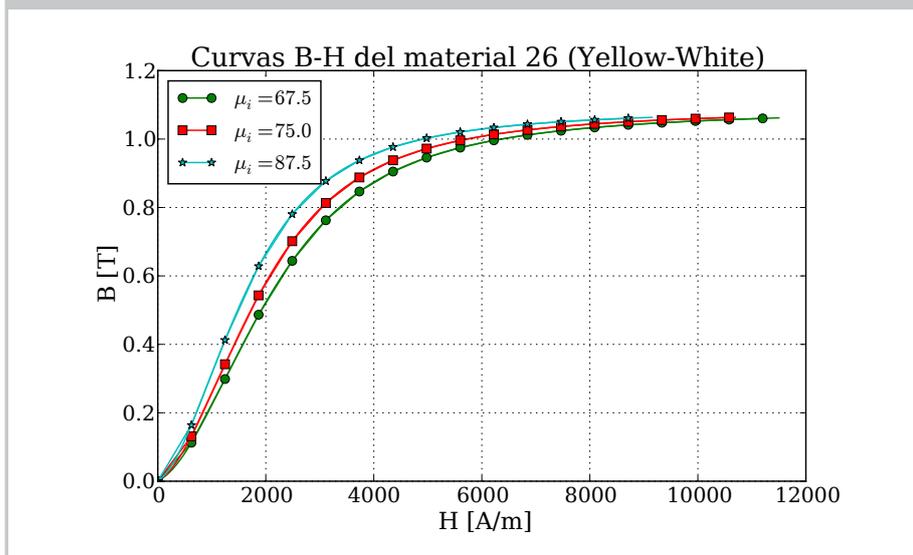


Figura 4.6. Valor del campo obtenido para cada excitación de calibración. Se muestran los resultados obtenidos por simulación (no lineal) con la curva de permeabilidad típica y sus valores mínimos y máximos según la tolerancia publicada por el fabricante. Se muestran asimismo los resultados obtenidos experimentalmente. En este caso la valores se han obtenido para dos sensores diferentes del mismo modelo y son el resultado del promediado de todas las series de lecturas que se hicieron para cada sensor.

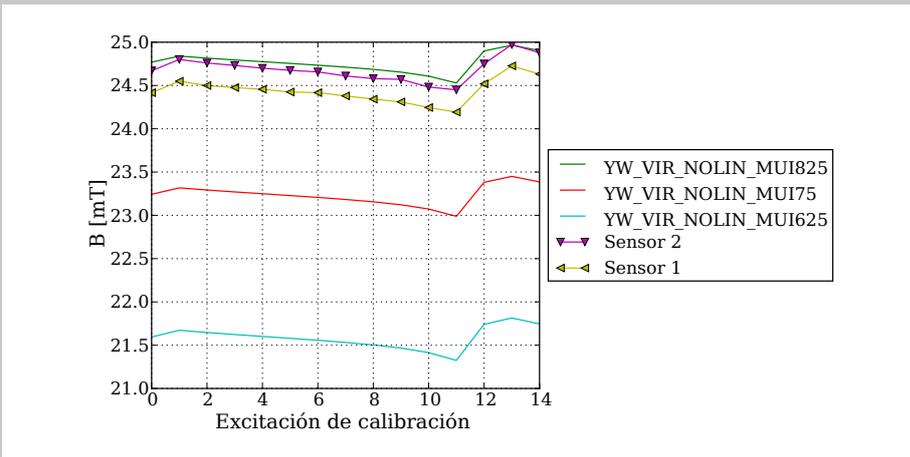


Figura 4.7. Valor del campo obtenido para cada excitación de calibración. Se muestran los resultados obtenidos por simulación (no lineal) empleando la curva de permeabilidad de referencia  $\mu_i = 81.5$ . Se muestran asimismo los resultados obtenidos experimentalmente. En este caso la valores se han obtenido para dos sensores diferentes del mismo modelo y son el resultado del promediado de todas las series de lecturas que se hicieron para cada sensor. La escala en amperios corresponde a la equivalencia dada por (4.1).

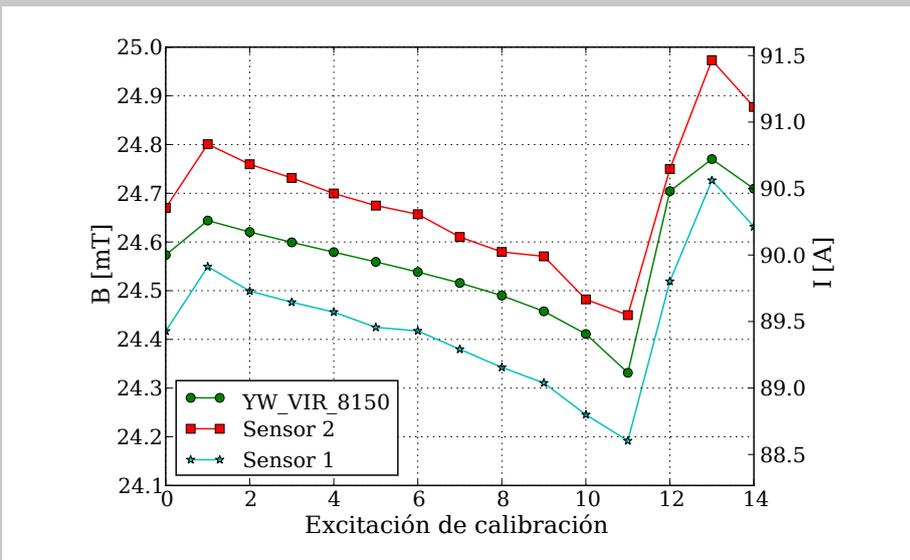


Figura 4.8. Dispersión de valores obtenidos para cada excitación de calibración frente a pequeñas imprecisiones en la ubicación de los circuitos auxiliares del sistema de calibración. Se muestran los resultados obtenidos por simulación (no lineal) empleando la curva de permeabilidad de referencia  $\mu_i = 81.5$ . Se muestran también los valores obtenidos cuando se aplica un error de posicionamiento aleatorio ( $-0.75 \text{ mm} \leq \Delta X, \Delta Y \leq 0.75 \text{ mm}$ ) de cada rama de las espiras auxiliares. La escala en amperios corresponde a la equivalencia dada por (4.1).

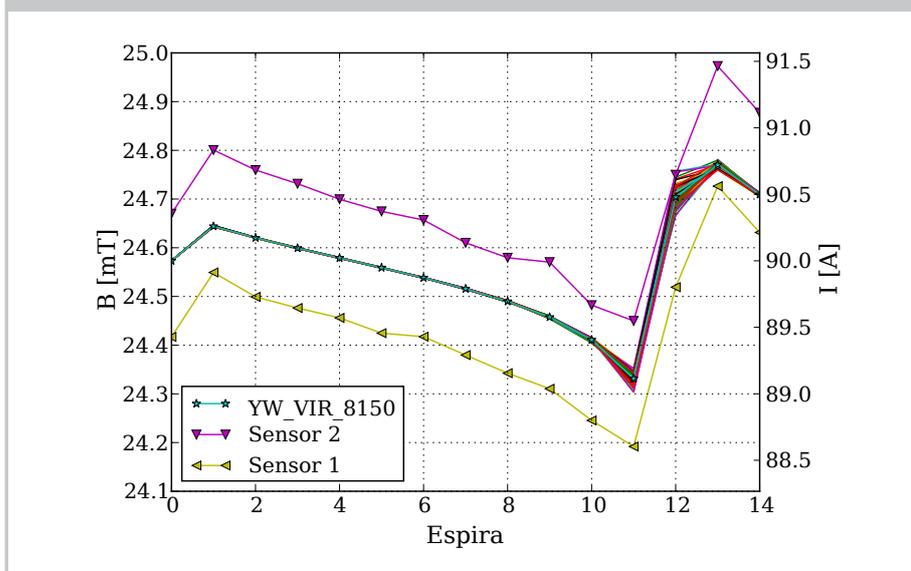


Figura 4.9. Variación de valores obtenidos para cada excitación de calibración frente a pequeños desplazamientos de la posición del sensor Hall del ALBA. Se muestran los resultados obtenidos por simulación (no lineal) empleando la curva de permeabilidad de referencia  $\mu_i = 81.5$ . Se muestran también los valores obtenidos cuando se aplica un error de posicionamiento del sensor de medida de la inducción con respecto al gap ( $-2.0 \text{ mm} \leq \Delta Y \leq 2.0 \text{ mm}$ ). La escala en amperios corresponde a la equivalencia dada por (4.1).

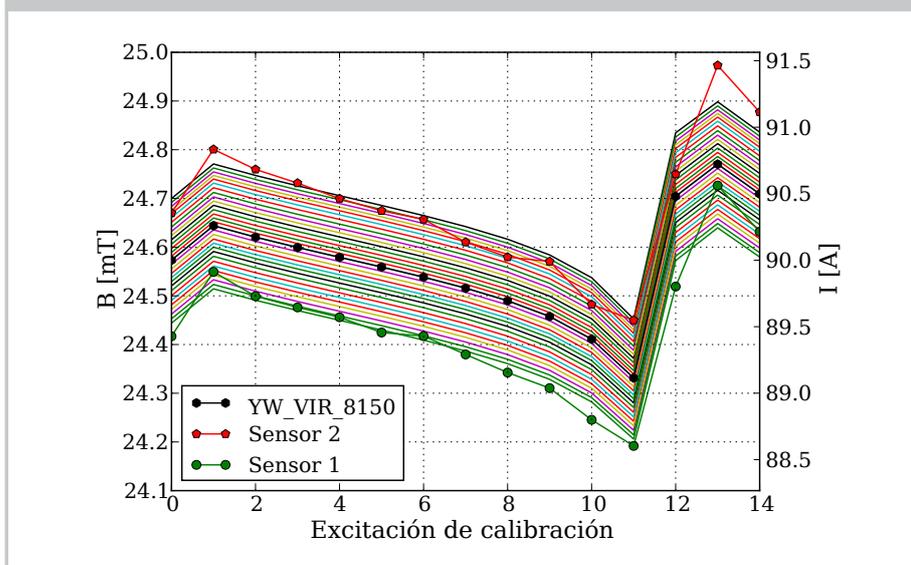


Figura 4.10. Dispersión de valores obtenidos para cada excitación de calibración frente a imprecisiones de posicionamiento del ALBA con respecto al sistema de calibración. Se muestran los resultados obtenidos por simulación (no lineal) empleando la curva de permeabilidad de referencia  $\mu_i = 81.5$ , así como los resultados obtenidos experimentalmente. Se muestran asimismo los resultados obtenidos por simulación cuando al ALBA se le aplican pequeños desplazamientos aleatorios ( $\pm 0.75$  mm) en los ejes X e Y, así como una pequeña rotación aleatoria ( $0.48^\circ < \Delta\varphi < 2.4^\circ$ ). La escala en amperios corresponde a la equivalencia dada por (4.1).

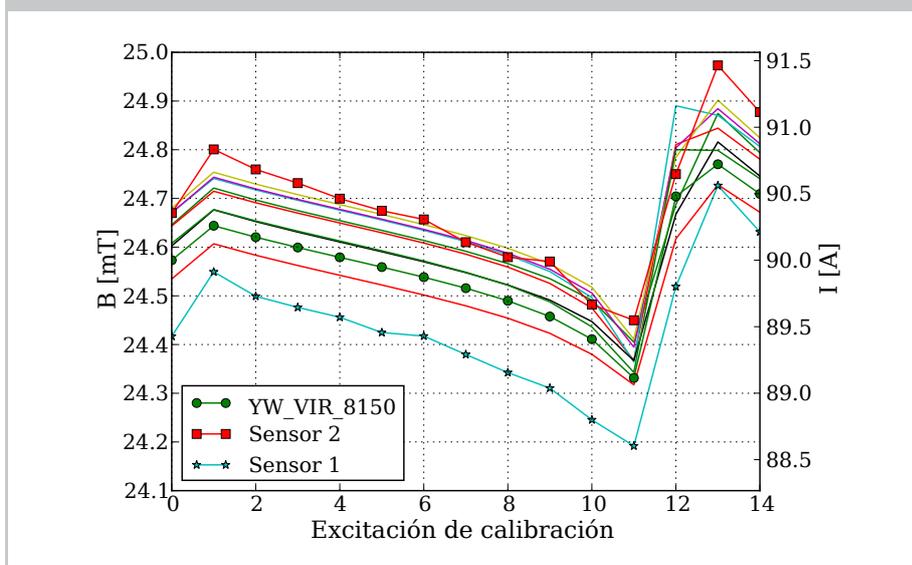


Figura 4.11. Error en  $10^{-6}$  (ppm) de linealidad del ALBA para cada pareja de circuitos auxiliares.

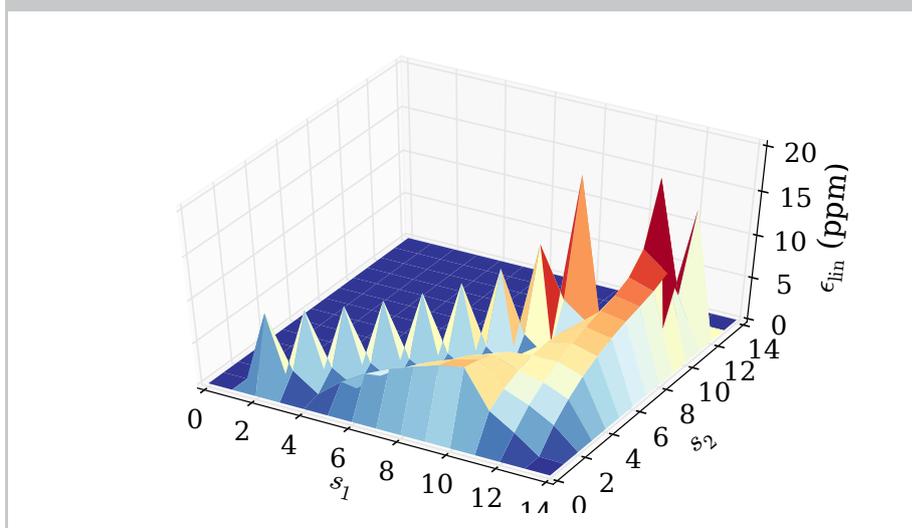


Figura 4.12. Valores de la componente tangencial al lazo de medida generado por una espira aleatoria y el sistema de calibración emulando a dicha espira bajo condiciones de equivalencia convencional (arriba) y equivalencia estricta (centro). Abajo: error relativo entre el valor de H del la espira a simular y de la simulación, para condiciones de equivalencia convencional y de equivalencia estricta.

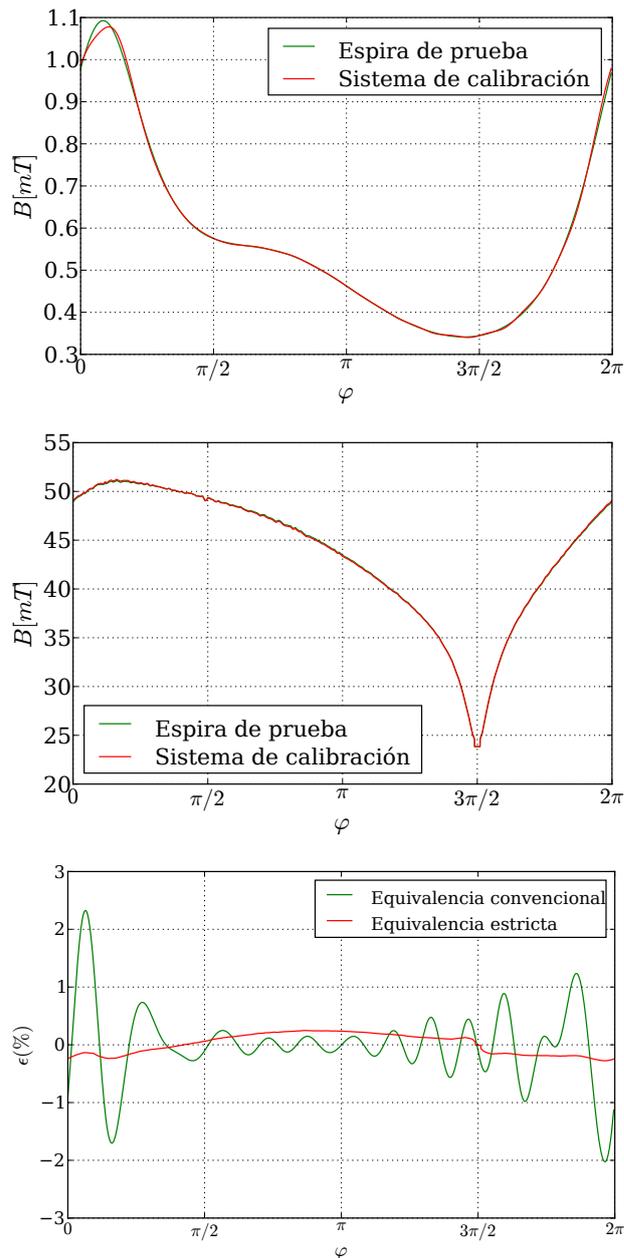


Figura 4.13. Conductores de test empleados para comprobar los resultados de la calibración de SE00.15. En color magenta se muestran los dos casos en que la lectura arrojada por el instrumento se encuentra dentro del intervalo de calibración.

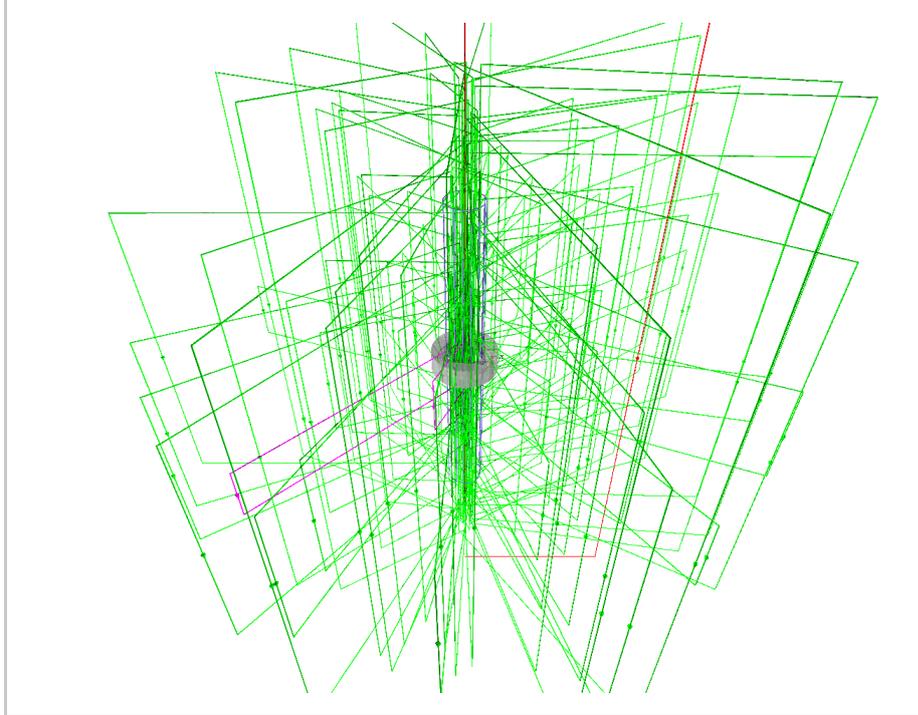


Figura 4.14. Una visión 3D del sistema SEPAC constituido por el sistema de calibración SE00.15 aplicado a un ALBA con un lazo de medida en forma de tenaza de pinza amperimétrica.

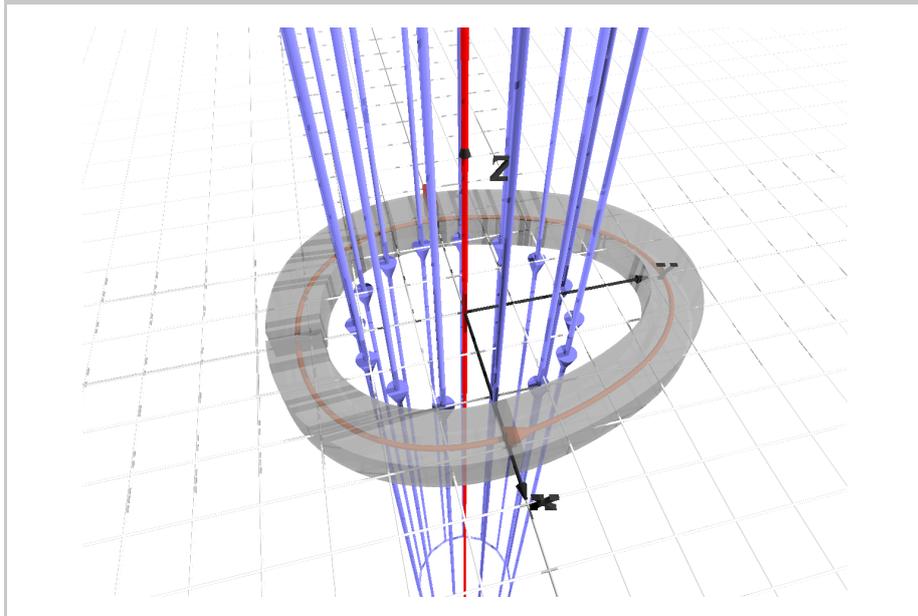
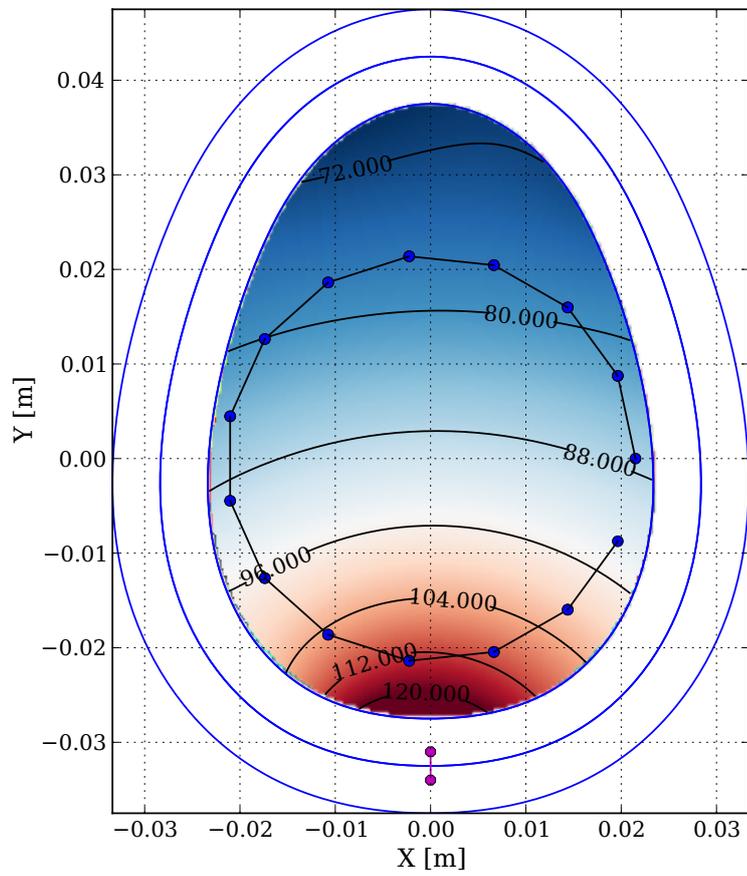


Figura 4.15. Mapa de respuesta del ALBA correspondiente a un sistema SEPAC. Se muestra asimismo el lazo de medida, los límites del material magnético y la ubicación del único sensor de campo. También se muestran los conductores auxiliares que conforman el sistema de calibración.





# Compendio

Para hacer un balance final del trabajo que se ha llevado a cabo, se ha optado por articularlo en varias partes. En primer lugar se realizará una enumeración de las aportaciones concretas más significativas que se han hecho. Seguidamente se expondrá un conjunto de conclusiones que constituyen un resumen del trabajo llevado a cabo en tanto en cuanto a desarrollo y resultados en el tema de la calibración de dispositivos de medida de corriente basados en la Ley de Ampere. A continuación se plantearán un conjunto de líneas futuras de trabajo que se podrían establecer. Finalmente, y en un plano más subjetivo y cercano al ámbito de la opinión, se concluirá con un conjunto de comentarios que el desarrollo del presente trabajo han suscitado en el autor.

## Aportaciones

- ▷ Se ha introducido una sistematización del análisis de incertidumbre mediante la clasificación de los dispositivos metrológicos en referencias e instrumentos de medida. Adicionalmente se han descrito estos últimos como el resultado de la composición de tres componentes: parte visible, parte oculta y desviación.
- ▷ Se ha llevado a cabo un análisis conceptual del problema de calibración de instrumentos del tipo “pinzas amperimétricas” frente a “descentramientos” para dar pie a una formulación mucho más precisa, que generaliza la idea de pinza amperimétrica e instrumentos similares al de dispositivo de medida de corriente eléctrica basado en la Ley de Ampere (ALBA), introduciendo los conceptos nucleares de lazo de medida y rango de uso. Igualmente se ha generalizado la idea restringida de “descentramientos” al más general concepto de variabilidad geométrica.
- ▷ Se ha mostrado la posibilidad de reproducir el efecto de un cierto circuito sobre uno de estos instrumentos mediante un conjunto alternativo de circuitos. Para ello se ha introducido los conceptos de equivalencia convencional y estricta, y se ha analizado su relación.
- ▷ Se ha definido una *clase* de dispositivos, denominados sistemas de calibración, destinados a realizar la simulación de circuitos cualesquiera sobre un ALBA y que serán utilizados para llevar a cabo la calibración. La definición de la clase de dispositivos se ha hecho de la forma menos restrictiva posible de forma que puede dar pie a una gran cantidad de diseños diferentes según las necesidades.

- ▷ Se ha establecido, con ayuda del Análisis Funcional, la metodología de cálculo para determinar las corrientes de excitación necesarias a aplicar al sistema de calibración para simular una corriente específica.
- ▷ Se han definido diferentes parámetros de calidad asociados a un sistema de calibración dado y en base a ellos se ha llevado a cabo un análisis paramétrico de los mismos.
- ▷ Se ha descrito la metodología de calibración de un ALBA empleando el sistema de calibración, así como su cálculo de incertidumbre asociado.
- ▷ Se ha establecido una forma de estimar la respuesta de un ALBA a un circuito específico sin necesidad de recrear físicamente el circuito. Para ello únicamente se emplean las respuestas obtenidas por el ALBA durante el proceso de calibración. Mediante esta técnica se han definido los mapas de respuesta del ALBA que pueden ser utilizados por un fabricante como herramienta visual de análisis y optimización.

## Conclusiones

En este trabajo se ha abordado el estudio de la calibración de medidores de corriente de tipo pinzas amperimétricas y similares. Para ello se ha llevado a cabo un análisis previo tendente a dotar de precisión al planteamiento del problema. En primer lugar se ha diferenciado al conjunto de dispositivos para los que va a ser aplicable el método de calibración, denotándolos como ALBA (Ampere Law Based Apparatus) y caracterizándolos por el hecho de que operan mediante la evaluación de la Ley de Ampere. Cada uno de ellos debe definir un lazo de medida (esencialmente el camino de integración de la Ley de Ampere) así como el rango de uso o conjunto de circuitos y corrientes que se les puede aplicar. La variabilidad de la respuesta de un ALBA frente a su rango de uso va asociada principalmente a la variabilidad geométrica de los circuitos, lo que implica la presencia de una componente de incertidumbre específica de este tipo de dispositivos.

Para llevar a cabo la calibración se debe enfrentar al ALBA a diferentes circuitos pertenecientes a su rango de uso. Para evitar la engorrosa construcción de cada uno de ellos en el laboratorio se ha definido una clase de dispositivos (denominados sistemas de calibración) destinados a simular, mediante un conjunto de circuitos fijos, la excitación que generaría un circuito cualquiera en el ALBA. Se han analizado las condiciones de equivalencia, desde el punto de vista del medidor, de la excitación a simular y la resultante de la simulación. Se han introducido indicadores de calidad asociados a los sistemas de calibración y, en base a ellos, se ha llevado a cabo un análisis paramétrico tendente a establecer diseños optimizados de los mismos.

Finalmente, se ha establecido el procedimiento a emplear para llevar a cabo la calibración de un ALBA mediante el sistema de calibración, así como el análisis de la incertidumbre del resultado. La información de calibración permite estimar la respuesta del ALBA frente a cualquier posible excitación. En base a ello es posible construir un mapa de la respuesta ALBA frente a excitaciones formadas por hilos indefinidos ubicados en diferentes posiciones. Este mapa constituye una representación gráfica de la calidad y rendimiento del ALBA.

## Líneas futuras

Haciendo propio el dicho popular de que nunca se acaba una tesis como ésta, simplemente se deja de trabajar en ella, durante la elaboración de este trabajo han ido surgiendo múltiples líneas de trabajo que no se han atendido simplemente para dar una cierta terminación a la misma. A continuación cito algunas de esas líneas en las que sería interesante introducirse en un futuro.

- ▷ Estudiar en profundidad la caracterización del conjunto de excitaciones que representan el rango de uso del instrumento,  $\Xi\{I_0\}$ , lo que incluye:
  - ▷ Considerar la inclusión de otro tipo de conductores (pletinas, conductores de sección circular gruesa), conductores inclinados con respecto al plano del lazo de medida e incluso geometrías más exóticas como podrían ser bobinados en torno al circuito magnético del ALBA.
  - ▷ Búsqueda de bases ortonormales en las que el conjunto pueda ser representado de forma eficiente.
  - ▷ Análisis en profundidad del tamaño mínimo de la muestra necesario para caracterizarlo.
  - ▷ Estudio de formas estandarizadas mediante las que un fabricante puede indicar la definición geométrica del lazo de medida, así como el rango de uso. En este último caso, probablemente definiendo una zona prohibida para la ubicación de los conductores antes que una zona permitida.
- ▷ La descripción del lazo de medida como una única trayectoria puede resultar demasiado restrictiva. Realmente el lazo de medida resulta crítico para poder establecer la definición de producto escalar. Por tanto podrían buscarse generalizaciones a la idea de lazo de medida a través de definiciones alternativas del producto escalar. En particular, podrían definirse un conjunto discreto de  $N$  lazos de medida paralelos que abarcasen todo el material magnético y definir el producto escalar como:

$$(\mathbf{H}_A | \mathbf{H}_B) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{L_{LMk}} \oint_{LM_k} \mathbf{H}_A \mathbf{H}_B dl$$

Inclusive, a partir de lo anterior, la generalización a una integral de volumen extendida a todo el material magnético es directa. Sin embargo todo ello implica un coste computacional.

- ▷ En ningún momento se han considerado conductores exteriores al lazo de medida ni su efecto. Esto podría resultar interesante por dos motivos: en primer lugar podría considerarse incluir estos conductores dentro del rango de uso del ALBA. En segundo lugar el sistema en sí podría ser utilizado como método flexible de ensayo de ALBA frente a efectos de crosstalk. En cualquier caso, la impresión del autor es que simular conductores exteriores al lazo de medida con conductores interiores no va a resultar tan eficiente. En esa línea resultaría interesante investigar diseños de sistemas de calibración en los que alguno de sus circuitos auxiliares estuviera fuera del lazo.

- ▷ Se puede profundizar en la formalización matemática de este estudio: La representación del funcional del ALBA podría incluir efectos de segundo orden. Las funciones  $H$  de las excitaciones aisladas pueden conectarse con desarrollo tipo wavelet o spline.
- ▷ Estudiar diseños estandarizados de sistemas de calibración que se adecuasen a ALBA comerciales de uso común.

## Comentarios adicionales

En este apartado se pretende apuntar lo que, a juicio del autor, son “conclusiones sobre las conclusiones”, o un conjunto de comentarios sobre lo expuesto que, sin por ello restarles importancia, no tienen la fuerza de una declaración objetiva.

- ▷ No se puede calibrar un ALBA sin establecer su lazo de medida y su rango de uso. Es responsabilidad del fabricante especificar ambas. Sin embargo, en la práctica, esto ni se hace ni es previsible que se haga en un futuro inmediato. Por ello va a ser necesario establecer valores por defecto de ambos elementos, especialmente del segundo.
- ▷ Aunque a priori se han ofrecido herramientas para poder realizar una calibración con un sistema de calibración de cualquier orden, la extensión del espacio  $\tilde{\Gamma}$  mediante excitaciones virtuales es problemático desde el punto de vista del cálculo de incertidumbre. La estimación de la respuesta del ALBA frente a esas excitaciones se tiene que hacer mediante suposiciones (evaluación tipo B) sobre algo de lo que, en el fondo, no tenemos ningún conocimiento. La única forma de evitar el problema va a ser con sistemas de calibración de orden suficientemente grande pese a tener la contrapartida de incrementar la complejidad del dispositivo.
- ▷ Para la construcción del sistema de calibración se puede optar por un sistema que permita desplazar los conductores auxiliares para conformar cualquier configuración o bien por un sistema de conductores fijos. La primera solución resulta más flexible, pero más compleja, y por ello debería restringirse a entornos de estudio de este sistema de calibración. Los sistemas de calibración “de producción” deberían construirse mediante sistemas de conductores fijos.
- ▷ Aunque la orientación de este trabajo ha pivotado en la calibración de ALBA, el sistema se puede emplear como una herramienta de evaluación y optimización en entornos de diseño y fabricación de ALBA.
- ▷ Todos los resultados se han obtenido en corriente continua. Su traslado a calibración en (baja) frecuencia es directo. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, introduce, entre otras, la complicación adicional de necesitar mantener en fase las corrientes de excitación en todos los circuitos del sistema de calibración.

# Apéndice A

## Análisis de funciones H para algunas geometrías

### A.1. Introducción

El objeto de este apéndice es analizar el valor de las funciones H creadas por circuitos de cierta geometría (especialmente hilos indefinidos) con objeto de poder extraer algunas conclusiones generales con respecto a su uso como parte de los sistemas de calibración.

Históricamente, en procesos de calibración de ALBA ha sido habitual tomar como excitación *canónica* un hilo indefinido. En la práctica un sistema así no se puede recrear sino de forma aproximada a través de hilos suficientemente largos, por lo que se analizará los límites de validez de tal aproximación. A lo largo del apéndice y salvo que se indique lo contrario, como lazo de medida *paradigmático* se considerará uno de forma circular. Por otra parte, de forma general y dado que no consideramos la presencia de medios magnéticos, el valor de  $\vec{H}$  puede determinarse a partir de la Ley de Biot y Savart [Feynman et al., 2005]:

$$\vec{H}(\vec{r}_c) = \frac{I_{\text{exc}}}{4\pi} \int_{\text{Circuito}} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_c - \vec{r}_f)}{|\vec{r}_c - \vec{r}_f|^3} \quad (\text{A.1})$$

donde  $\vec{r}_c$  es el vector que indica la posición del *punto campo* o punto donde se va a calcular el campo y  $\vec{r}_f$  es el vector que indica la posición del *punto fuente* o punto del elemento de corriente que genera el campo (figura A.1). El punto fuente corresponde a la variable de integración.  $d\vec{l}$  representa un diferencial de la trayectoria definida por el circuito y recorrida en el sentido de la corriente que circula. La integración puede llevarse a cabo fácilmente de forma numérica, y de forma analítica para algunos casos. De especial relevancia entre estos últimos se encuentra el caso de un cable conductor recto, que si bien no puede tener existencia física como circuito completo<sup>1</sup>, puede usarse para determinar el campo creado por cualquier geometría mediante su aproximación por tramos rectos. Para representar este caso vamos a introducir algo de notación: el cable

---

<sup>1</sup>La condición de corriente eléctrica estacionaria obliga a que  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$  por lo que las líneas de  $\vec{J}$  deben ser cerradas y, si consideramos únicamente circuitos formados por cables conductores, implica que éstos deben formar trayectorias geométricas cerradas.

Figura A.1. Vectores fuente y campo para la integral de Biot y Savart (A.1).

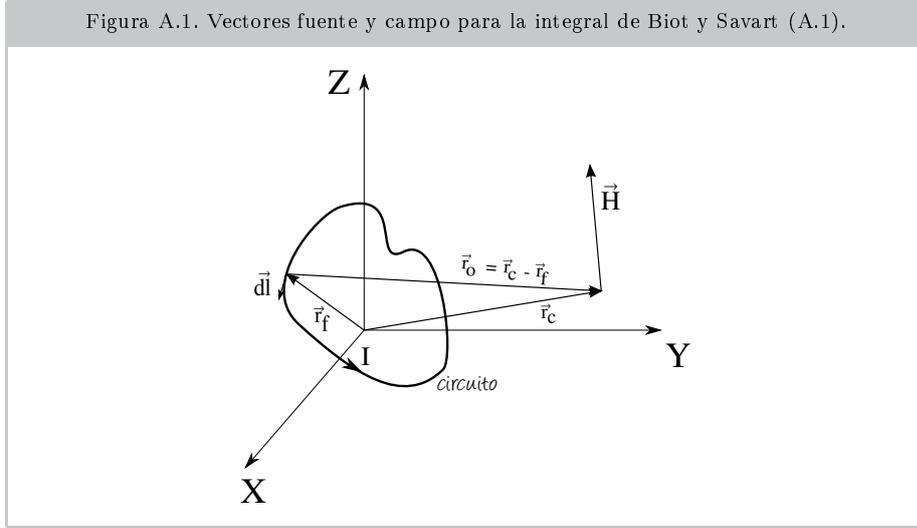
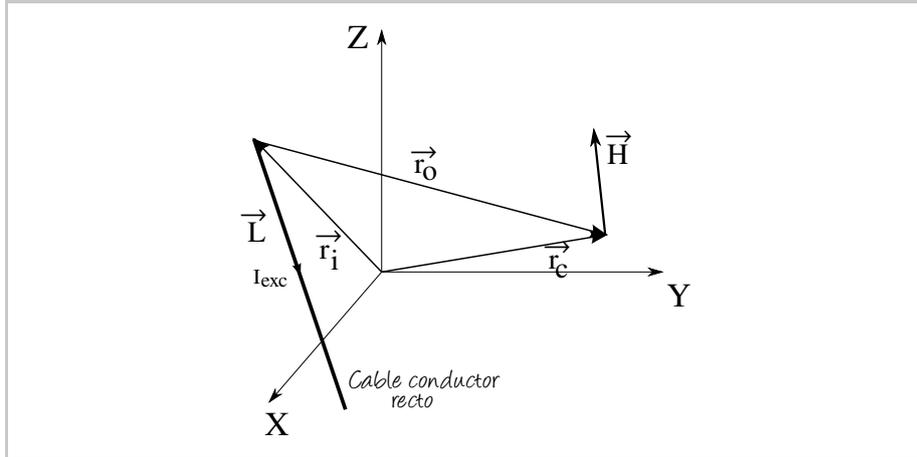


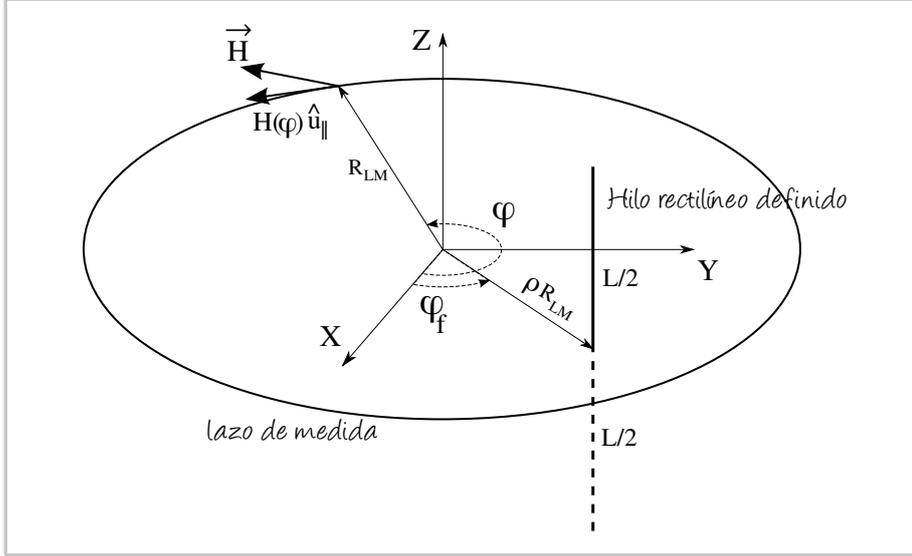
Figura A.2. Vectores y parámetros para el cálculo del campo creado en un punto por un hilo rectilíneo definido (A.2).



conductor recto vendrá representado por un vector  $\vec{L}$  cuyo módulo corresponde con la longitud del cable y su sentido con el sentido de la corriente de excitación  $I_{exc}$ . El cable está situado en la coordenada  $\vec{r}_i$  (es decir el punto inicial del cable es  $\vec{r}_i$  y el punto final es  $\vec{r}_i + \vec{L}$ ). Finalmente definiremos  $\vec{r}_0 = \vec{r}_c - \vec{r}_i$ , donde  $\vec{r}_c$  es el citado punto campo, tal como recoge la figura A.2. A partir de estos valores el resultado que arroja (A.1) [Lieberherr, 2010] es:

$$\vec{H}(\vec{r}_c) = \frac{I_{exc}}{4\pi} \frac{\vec{L} \times \vec{r}_0}{L^2 r_0^2 - (\vec{L} \cdot \vec{r}_0)^2} \left( \frac{L^2 - \vec{L} \cdot \vec{r}_0}{\sqrt{L^2 - 2\vec{L} \cdot \vec{r}_0 - r_0^2}} + \frac{\vec{L} \cdot \vec{r}_0}{r_0} \right) \quad (A.2)$$

Figura A.3. Hilo recto descentrado con lazo de medida circular; parámetros geométricos y coordenadas.



## A.2. Cable vertical con lazo de medida circular

Supongamos ahora un lazo de medida circular caracterizado por un radio  $R_{LM}$  con centro en el origen de coordenadas y situado en el plano  $Z = 0$ . Consideremos un hilo rectilíneo finito de longitud  $L$  perpendicular al lazo de medida y que se extiende  $L/2$  por encima y por debajo de éste. El hilo corta a la superficie interior del lazo de medida en un punto de coordenadas polares  $(r, \varphi_f)$ , tal como muestra la figura A.3.

Denominando  $\hat{u}_{\parallel}$ , al vector unitario tangencial a la trayectoria, la función  $H$  puede determinarse a partir de (A.2) como  $H = \vec{H}(\vec{r}_c) \cdot \hat{u}_{\parallel}(\vec{r}_c)$ . El resultado que se obtiene es el que sigue, donde se ha normalizado la coordenada radial a  $\rho = r/R_{LM}$

$$H(\varphi; \rho, \varphi_f) = H_{\infty} F_D F_L \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\begin{aligned} H_{\infty} &= \frac{I}{2\pi R_{ML}} \\ F_D &= \left[ \frac{1}{2} \frac{1 - \rho \cos(\varphi - \varphi_f)}{\frac{\rho^2 - 1}{2} + (1 - \rho \cos(\varphi - \varphi_f))} \right] \\ F_L &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R_{LM}}{L}\right)^2 \left[\frac{\rho^2 - 1}{2} + (1 - \rho \cos(\varphi - \varphi_f))\right]}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La expresión (A.3) está compuesta de tres factores.  $H_{\infty}$  corresponde a la expresión que se hubiera obtendría en caso de disponer de un hilo de longitud  $L \rightarrow \infty$  y situado en el origen de coordenadas.  $F_D$  introduce el efecto de descentramiento del cable de longitud infinita y  $F_L$  introduce la corrección debida

a disponer de un cable de longitud finita. A partir de esta expresión vamos a analizar diferentes casos:

### A.2.1. Cable finito centrado sobre trayectoria circular

Supongamos que el cable de excitación está situado en el origen de coordenadas. En ese caso  $\rho = 0$  y (A.3) se reduce a:

$$H_{\parallel} = \frac{I}{2\pi R_{LM}} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{R_{LM}}{L}\right)^2}} = H_{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{R_{LM}}{L}\right)^2}} \quad (\text{A.5})$$

donde  $H_{\infty}$  es el campo que crearía un hilo indefinido. Empleando esta expresión podemos analizar la longitud de cable necesaria para recrear en el laboratorio el comportamiento de un hilo indefinido hasta un cierto grado de aproximación. En concreto, el resultado anterior puede expresarse de forma genérica como

$$A(\gamma) = A_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2}} \quad (\text{A.6})$$

donde

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} A(\gamma) = A_0 \quad (\text{A.7})$$

El valor de  $\gamma$  a partir del cual se cumple que la diferencia relativa entre  $A(\gamma)$  y  $A_0$  es inferior a un cierto  $\varepsilon_{\text{rel}}$  se obtiene de:

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \frac{A_0 - A(\gamma)}{A_0} \quad (\text{A.8})$$

que conduce a

$$\gamma = \left[ \frac{1}{(1 - \varepsilon_{\text{rel}})^2} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.9})$$

La figura A.4 muestra la función (A.9) para diferentes valores de  $\varepsilon_{\text{rel}}$  expresados en tanto por ciento. A modo de ejemplo, si queremos recrear un hilo infinito mediante un hilo finito con un error relativo inferior a 0.1% vamos a necesitar

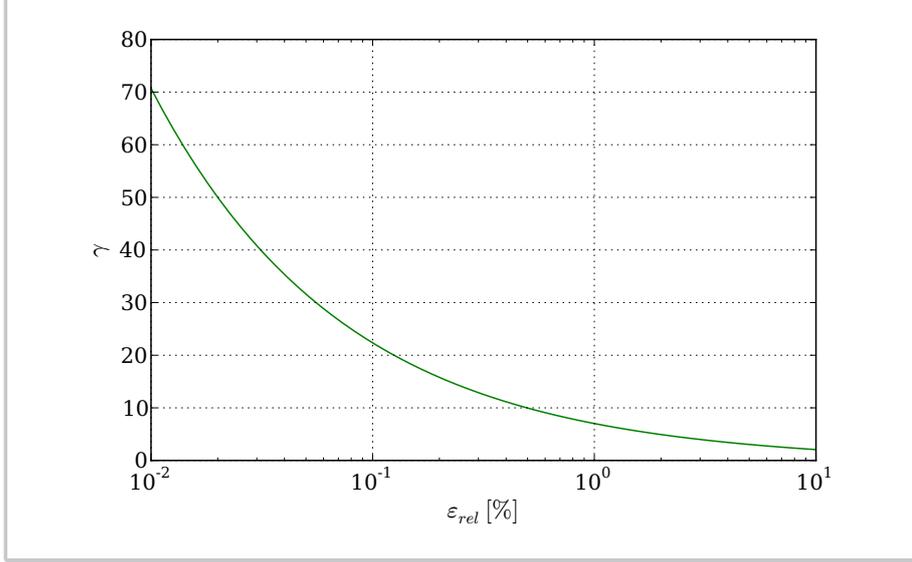
$$\gamma = \frac{L}{2R_{LM}} \approx 23 \quad \Rightarrow \quad L \geq 46R_{LM} \quad (\text{A.10})$$

lo que constituye longitudes grandes: para un  $R_{LM} = 3.155$  cm, requiere una longitud 1.45 m, que no resulta inviable pero sí incómoda a efectos prácticos.

### A.2.2. Cable finito descentrado

En el caso de hilos en el interior de la trayectoria, ( $0 < \rho < 1$ ) y en los casos habituales en que se verifique que la longitud del cable es muy superior al radio del lazo de medida ( $L \gg R_{LM}$ ) el efecto del descentramiento viene recogido fundamentalmente en el factor  $F_D$  de (A.3), dado que el cociente  $2R_{LM}/L$  hace que  $F_L \rightarrow 1$ .

Figura A.4. Representación gráfica de la función A.9 con la variable  $\varepsilon_{rel}$  expresada en tanto por ciento.



### A.2.3. Cable infinito descentrado. Valores específicos

Vamos a terminar viendo algunos valores específicos del cable infinito descentrado cuyo campo  $H$  tangencial al lazo de medida es:

$$H(\varphi; \rho, \varphi_f) = \frac{I_{exc}}{2\pi R_{LM}} \left[ \frac{1 - \rho \cos(\varphi - \varphi_f)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\varphi - \varphi_f)} \right] \quad (A.11)$$

En la figura A.5, se ha representado la función (A.11) en función de  $\varphi$  suponiendo un radio y corriente unitarias ( $R_{LM} = 1.0 \text{ m}$ ,  $I_{exc} = 1.0 \text{ A}$ ),  $\varphi_f = \pi$  (<sup>2</sup>), y diferentes valores de  $\rho$ . La función presenta una divergencia para  $\rho = 1$ . Por otra parte, para cualquier valor de  $\rho$  la Integral de Ampere de  $H$  es la unidad, por lo que conforme  $\rho \rightarrow 1$ , el pico en  $\varphi = \varphi_f = \pi$  se hace más alto y las zonas alejadas del pico toman un valor progresivamente menor.

El módulo<sup>3</sup> de  $H$ , en función de  $\rho$ , vale:

$$|H| = \frac{H_\infty}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2 - \rho^2}{1 - \rho^2}} \quad (A.12)$$

<sup>2</sup>Dado que el lazo de medida es circular, el valor de la coordenada  $\varphi_f$  es irrelevante. Se ha elegido  $\varphi_f = \pi$  para facilitar la lectura de la gráfica.

<sup>3</sup>El módulo corresponde a la raíz cuadrada del producto escalar de la función  $H$  consigo misma. El producto escalar ya ha sido definido en capítulos previos. Sin embargo, a fin de que este apéndice sea lo más autocontenido posible, se incluye aquí la expresión del módulo de  $H$ :

$$|H| = \sqrt{\frac{1}{L_{LM}} \oint_{LM} H^2 dl}$$

donde la integral se extiende a todo el lazo de medida,  $L_{LM}$  es la longitud del lazo y  $dl$  es el diferencial de longitud a lo largo del lazo.

Figura A.5. Función  $H$  definida sobre un lazo de medida circular de  $R_{LM} = 1.0$ , creado por un conductor rectilíneo indefinido de  $I_{exc} = 1$ , situado en  $\varphi_f = \pi$  y diferentes valores de  $\rho = r/R_{LM}$ .

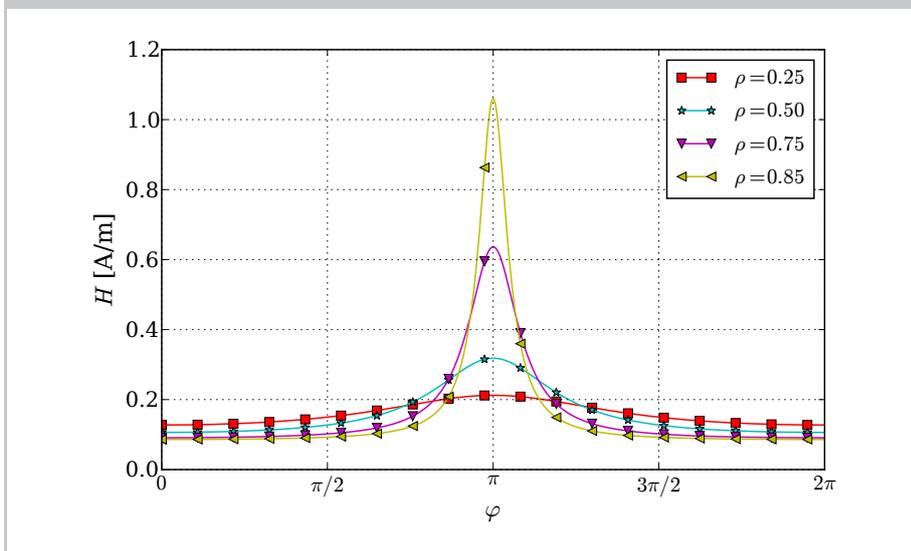
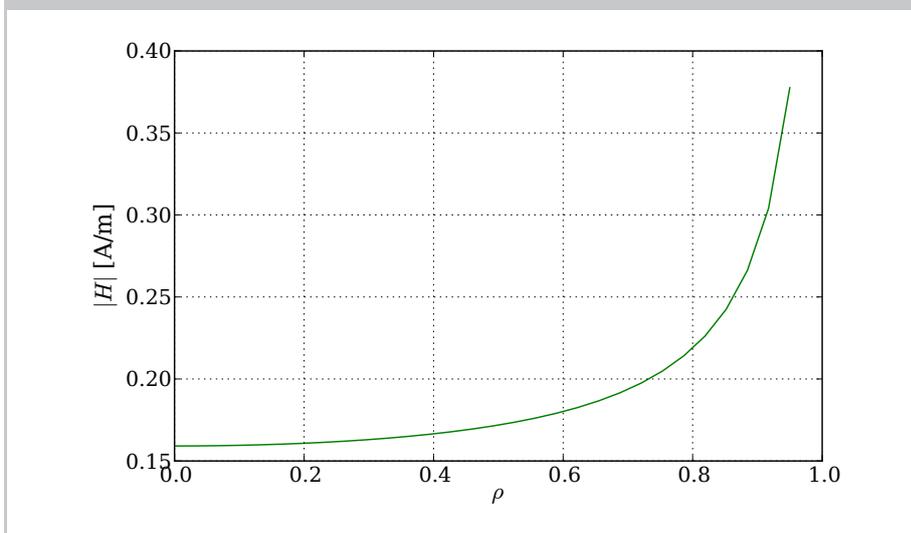


Figura A.6. Módulo, en función de  $\rho = r/R_{LM}$  de la función  $H$  definida sobre un lazo de medida circular de  $R_{LM} = 1.0$ , creado por un conductor rectilíneo indefinido de  $I_{exc} = 1$ .

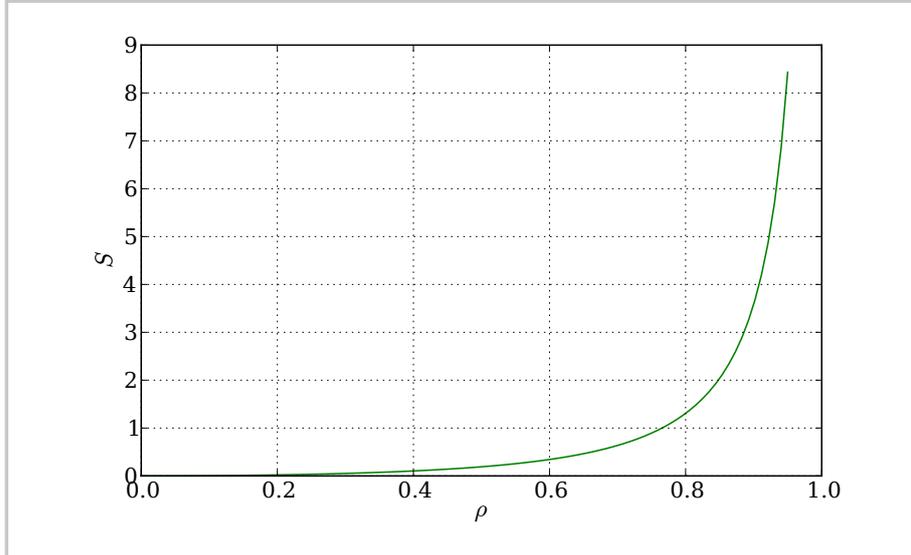


que se ha representado en la figura A.12, también considerando  $R_{LM} = 1.0$ ,  $I_{exc} = 1$ .

Resulta interesante estimar la sensibilidad del valor de  $|H|$  con respecto a variaciones de  $\rho$ . En concreto:

$$\frac{d|H|}{|H|} = \frac{\rho}{|H|} \frac{d|H|}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = S \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{A.13})$$

Figura A.7. Coeficiente de sensibilidad  $S$  con respecto a  $\rho$ , en función de  $\rho = r/R_{LM}$  del módulo de la función  $H$  definida sobre un lazo de medida circular de  $R_{LM} = 1.0$ , creado por un conductor rectilíneo indefinido de  $I_{exc} = 1$ , situado en  $\varphi_f = 0$ .



con

$$S = \frac{\rho^2}{(2 - \rho^2)(1 - \rho^2)} \quad (\text{A.14})$$

Esta función se ha representado en la figura A.7. Analizando esta gráfica se pone de manifiesto el problema (práctico) de tratar de situar un hilo conductor muy próximo al lazo de medida, dado que pequeñas imprecisiones en el posicionamiento pueden dar pie a grandes variaciones del módulo de  $H$ . En concreto, consideremos un lazo de medida circular de  $\approx 3.0$  cm. El sistema mediante el cual posicionamos un cable con respecto al lazo de medida supongamos que presenta una tolerancia absoluta de posicionamiento del cable de  $\approx 0.5$  mm, lo que en términos relativos, y considerando que el cable se va a colocar en la proximidad del lazo de medida, implica un error relativo de  $100(0.05)/(3) \approx 1.66\%$ . En ese caso, si deseamos mantener un error en el módulo de  $H$  por debajo de  $\approx 1.0\%$ , entonces  $S < 0.6 \Rightarrow \rho \lesssim 0.69$ .



## Apéndice B

# Parte oculta de un instrumento de medida

El problema de la representación y determinación de la incertidumbre asociada a la resolución de un instrumento ha sido objeto de revisión y análisis en los últimos años, especialmente en su adaptación bayesiana: [Lira, 2006], [Taraldsen, 2006], [Cordero et al., 2006], [Willink, 2007], [Lira, 2012]. En esa línea, en este apéndice se va a hacer una revisión desde un punto de vista de probabilidad frecuencial, de la caracterización de la componente oculta de un instrumento de medida.

Dada una variable aleatoria continua  $X$  con función de distribución  $f_X$ , se aplica sobre esta variable un función de redondeo o truncamiento  $D_{IS}(X)$  con objeto de mostrarla en un visualizador. Así, la variable  $X$  puede expresarse como:

$$X = D_{IS}(X) + [X - D_{IS}(X)] = V_{IS} + O_C \quad (B.1)$$

Debemos definir con precisión la función  $D_{IS}$  para lo que tenemos que considerar lo siguiente:

- ▷ La función no está definida fuera del rango de visualización del visualizador (situación en el que el visualizador da un indicación “OL” o similar de fuera de rango).
- ▷ La función divide este intervalo en un conjunto discreto de forma que todos los valores de  $X$  pertenecientes al mismo intervalo los representa por el valor central del intervalo. El número de intervalos es  $N$ .
- ▷ Todos los intervalos tienen el mismo tamaño  $h$  denominado *resolución* del visualizador.
- ▷ El conjunto de valores centrales de los intervalos o conjunto de valores visualizables en el visualizador está definido por el conjunto:

$$\{v_k = x_I + k h \quad \forall k \in (0, \dots, N - 1)\} \quad (B.2)$$

▷ El dominio de la función viene establecido por el intervalo:

$$[x_I - h/2, x_I + (N - 1/2)h] \quad (\text{B.3})$$

▷ A partir de lo anterior, la función viene definida como:

$$D_{\text{IS}}(X) = v_k \quad X \in (v_k - h/2, v_k + h/2], \quad (k = 0, \dots, N - 1) \quad (\text{B.4})$$

Pese a lo anterior, por comodidad, supondremos que el dominio de  $D_{\text{IS}}$  es toda la recta real pero que  $f_X$  es nula fuera del intervalo que representa los límites del visualizador. Esta suposición también podría interpretarse como que la magnitud a medir se aplica al instrumento de medida configurado en la escala/rango correcto.

Dada una ocurrencia de  $X$  *automáticamente se establecen de forma determinista los valores de  $V_{\text{IS}}$  y  $O_C$* , de forma que la información necesaria para determinar la densidad de probabilidad de ocurrencia de ese par de valores está incluida en  $f_X$ .

$X$  es una variable aleatoria continua pero  $V_{\text{IS}} = D_{\text{IS}}(X)$  es una variable aleatoria discreta, donde cada  $v_k$  tendrá asignada una probabilidad de:

$$P(v_k) = \int_{v_k - h/2}^{v_k + h/2} f_X(x) dx \quad (\text{B.5})$$

Consideremos ahora la variable aleatoria  $O_C$  definida como  $O_C = X - V_{\text{IS}}$  y que toma valores en el intervalo  $(-h/2, h/2]$ . Supongamos que  $V_{\text{IS}}$  cobra un cierto valor  $V_k$ , entonces la probabilidad de que  $O_C$  tome un cierto valor  $x$  es:

$$f_{O_C|v_k}(o) = \frac{f_X(v_k + o)}{\int_{-h/2}^{+h/2} f_X(v_k + o) dx} = \frac{f_X(v_k + o)}{P(v_k)} \quad (\text{B.6})$$

y por tanto

$$f_{O_C}(o) = \sum_{k=0}^{N-1} f_{O_C|v_k} P(v_k) = \sum_{k=0}^N f_X(v_k + o) \quad (\text{B.7})$$

Deseamos ahora calcular los primeros momentos de  $O_C$  sin hacer demasiadas suposiciones sobre  $f_X$  puesto que es desconocida a priori. Suponiendo que el intervalo  $h$  es pequeño<sup>1</sup>, *vamos a asumir una aproximación lineal de  $f_X$* :

$$f_X(v_k + o) \approx f_X(v_k) + o f'_X(v_k) \quad (\text{B.8})$$

Dado un intervalo específico, vamos a calcular la integral correspondiente a los momentos de orden  $n$  alrededor de 0, que nos resultará de utilidad en lo que

<sup>1</sup>Esta suposición, que resulta razonable en la mayor parte de los casos, establece el límite de aplicabilidad de este desarrollo.

sigue:

$$\mu'_n = \int_{-h/2}^{+h/2} t^n [f_X(v_k) + t f'_X(v_k)] dt = \begin{cases} f_X(v_k) \frac{2}{n+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{(n+1)} & (\text{n par}) \\ f'_X(v_k) \frac{2}{n+2} \left(\frac{h}{2}\right)^{(n+2)} & (\text{n impar}) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

El valor esperado de la parte oculta (momento de orden 1):

$$\text{Esp}(\text{O}_C) = \int_{-h/2}^{h/2} o f_{\text{O}_C}(o) do = \int_{-h/2}^{h/2} o \sum_{k=0}^{N-1} f_X(v_k + o) do = \frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{N-1} f'_X(v_k) \quad (\text{B.10})$$

Atendiendo a que

$$h \sum_{k=0}^{N-1} f'_X(v_k) \approx \int_{-\infty}^{\infty} f'_X(x) dx = f_X(\infty) - f_X(-\infty) \quad (\text{B.11})$$

pero  $f_X(-\infty) = f_X(\infty) = 0$  dado que son funciones densidad de probabilidad, por lo que el valor esperado es nulo. Asumiendo un valor esperado nulo, la varianza vale:

$$\text{var}(\text{O}_C) = \int_{-h/2}^{h/2} x^2 \sum_{k=0}^{N-1} f_X(v_k + o) = \frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{N-1} f_X(v_k) \quad (\text{B.12})$$

Nuevamente, considerando que:

$$h \sum_{k=0}^{N-1} f_X(V_k) \approx \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (\text{B.13})$$

tenemos<sup>2</sup>:

$$\text{var}(\text{O}_C) = \frac{h^2}{12} \quad (\text{B.14})$$

Vamos a determinar ahora la covarianza entre la parte visible y la parte oculta. Para ello necesito conocer la función de distribución conjunta. Pero dado que a partir de la variable aleatoria  $X$  generamos  $V_{\text{IS}}$  y  $\text{O}_C$  simultáneamente, invirtiendo el argumento, la probabilidad de que ocurra simultáneamente un valor de  $V_{\text{IS}}$  y de  $\text{O}_C$  es precisamente el valor de  $f_X$  aplicado a la suma. De esta forma, asumiendo un valor nulo para la esperanza de la parte oculta y llamando

<sup>2</sup>Este resultado es exacto suponiendo una distribución rectangular de  $X$  dentro de cada intervalo de resolución del instrumento. Esta es la conjetura que hace el GUM.

$\bar{V}$  a la esperanza de la  $V_{IS}$ :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(V_{IS}, O_C) &= \int_{-\infty}^{\infty} [V_{IS} - \bar{V}] O_C f_X(x) dx = \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} [V_k - \bar{V}] \int_{-h/2}^{h/2} o f_X(V_k + o) do = \\
 &= \frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{N-1} [v_k - \bar{V}] f'_X(v_k) \\
 &= \frac{h^3}{12} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} v_k f'_X(v_k) - \bar{V} \sum_{k=0}^{N-1} f'_X(v_k) \right\} \quad (\text{B.15})
 \end{aligned}$$

La derivada de una una función de distribución constante es nula y por tanto lo es la covarianza. En caso contrario, ya se ha justificado anteriormente que el segundo sumatorio es (aproximadamente) nulo. Con respecto al primero, aproximando a una integral e integrando por partes:

$$\begin{aligned}
 h \sum_{k=0}^{N-1} V_k f'_X(v_k) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} x f'_X(x) dx = \\
 &= x f_X(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \quad (\text{B.16})
 \end{aligned}$$

De la sustracción que constituye el resultado, la integral del sustraendo es trivialmente la unidad dado que se trata de una función densidad de probabilidad. Con respecto al minuendo, dado que  $f_X$  está acotada y es integrable, en los extremos tiene que tender a cero con una potencia mayor que la unidad. Por tanto el minuendo es nulo y el valor de expresión (B.16) es -1. Finalmente:

$$\text{Cov}(V_{IS}, O_C) = -\frac{h^2}{12} \quad (\text{B.17})$$

# Lista de símbolos

$\emptyset$	Diámetro de una circunferencia, página 59
$\vec{\nabla} \cdot \vec{X}$	Divergencia de un vector $\vec{X}$ , página 27
$\vec{\nabla}\Phi$	Gradiente de un campo escalar $\Phi$ , página 27
$\nabla^2\Phi$	Laplaciano de un campo escalar $\Phi$ , página 27
$(x   y)$	Producto escalar entre los vectores $x$ e $y$ , página 23
$\vec{\nabla} \times \vec{X}$	Rotacional de un vector $\vec{X}$ , página 27
$\oplus$	Operador suma ortogonal de espacios vectoriales, página 78
$\rightarrow_{S^2}$	Varianza de una magnitud, página 3
$\rightarrow_{UE}$	Incertidumbre estándar de una magnitud, página 3
$\rightarrow_{UE_r}$	Incertidumbre estándar relativa de una magnitud, página 115
$\rightarrow_{UX}$	Incertidumbre expandida una magnitud, página 3
$\rightarrow_{UX_r}$	Incertidumbre expandida relativa de una magnitud, página 116
$\rightarrow_{VCV}$	Valor convencionalmente verdadero de una magnitud, página 3
$\alpha$	Constante definida sobre un ALBA transductor para adaptar la respuesta de su función característica a la magnitud de salida del transductor, página 18
$\alpha, \beta$	Coefficientes de propósito general, página 45
$\alpha$	Vector de coeficientes del desarrollo de una función H del rango nominal de uso del ALBA con respecto a la base del espacio $\Theta$ , página 86
$\beta$	Promedio de los valores $\beta_k$ establecidos para cada excitación aislada auxiliar, página 82
$\beta'$	Fracción del módulo de una excitación aislada auxiliar con la que se desea construir la excitación de calibración, página 82
$\beta_k$	Fracción de la corriente nominal $I_0$ que hay que aplicar a una excitación aislada auxiliar, página 82

$B_E$	Lectura obtenida del sensor Hall del sistema experimental cuando se aplica una cierta excitación, página 115
$B_{\text{CERO}}$	Lectura obtenida del sensor Hall del sistema experimental en ausencia de excitación (lectura de cero), página 114
$\Xi\{I_0\}$	Conjunto de funciones $H$ pertenecientes al rango de uso de un ALBA y cuya corriente métrica es $I_0$ , página 86
$\Xi$	Conjunto de funciones $H$ que constituyen el rango de uso de un ALBA. Conjunto de excitaciones para las que el instrumento debe dar una respuesta adecuada, página 86
$\Delta H$	Componente de $H$ cuya Integral de Ampere es nula, página 82
$\delta_s$	Coefficiente de proporcionalidad entre la corriente de excitación del circuito principal de un circuito compuesto y su $s$ -ésimo circuito adicional, página 37
$\varepsilon$	Coefficiente global de aptitud de un sistema de calibración, página 48
$\varepsilon_\eta$	Coefficiente de aptitud, asociado al promedio de $\eta_\infty$ , de un sistema de calibración, página 48
$\varepsilon_\sigma$	Coefficiente de aptitud, asociado a la dispersión de los valores de $\eta_\infty$ , de un sistema de calibración, página 48
$\varepsilon_\tau$	Coefficiente de aptitud asociado al índice global de eficacia $\tau_p$ , página 47
$\varepsilon_0$	Valor umbral del coeficiente de aptitud de un sistema de calibración, página 49
$\epsilon$	Error total de la linealización de $R_\varphi$ , página 77
$\epsilon'$	Error cometido en el desarrollo en serie de la función $R_\varphi$ , página 77
$\epsilon_{lin}$	Error de linealidad del ALBA, página 118
$\eta$	Cociente entre el módulo de la parte perpendicular de un vector $H$ con respecto al espacio $\tilde{\Gamma}$ y el módulo del vector completo, página 43
$\tilde{\eta}$	Cociente entre el módulo de la parte paralela de un vector $H$ con respecto al espacio $\tilde{\Gamma}$ y el módulo del vector completo, página 43
$\eta_\infty$	Coefficiente $\eta$ correspondiente a un hilo rectilíneo indefinido ubicado perpendicularmente al lazo de medida, página 48
$\overline{\eta_\infty}$	Promedio de $\eta_\infty$ , página 48
$\varepsilon_{rel}$	Error relativo (genérico), página 138
$\Phi$	Potencial escalar, página 27

$\phi$	Angulo abarcado por cada circuito auxiliar en un sistema de calibración SCA00.N $\langle\phi\rangle$ , página 57
$\phi$	Potencial electrostático, página 36
$\Phi_A, \Phi_B$	Valor del potencial escalar $\Phi$ en los puntos $A$ y $B$ , página 27
$\varphi$	Coordenada polar que identifica cada punto del lazo de medida, página 32
$\varphi_n$	Coordenada angular del conductor negativo de un circuito rectangular, página 50
$\varphi_p$	Coordenada angular del conductor positivo de un circuito rectangular, página 50
$\gamma_n$	Coefficiente n-ésimo del desarrollo de una función $H^\circ$ , con respecto a la base ortonormal de vectores $g$ de un sistema de calibración, para el espacio $\Gamma$ , página 86
$\tilde{\Gamma}$	Espacio vectorial generado por todas las excitaciones aisladas (reales) de un sistema de calibración, página 38
$\Gamma$	Extensión del espacio $\tilde{\Gamma}$ para que cubra todo el espacio $\Theta$ , página 83
$\tilde{\gamma}$	Vector (en el sentido de estadística multivariante) de coeficientes del desarrollo de una función $H^\circ$ , con respecto a la base ortonormal $\tilde{g}$ de un sistema de calibración, página 40
$\tilde{\gamma}_n$	Coefficiente n-ésimo del desarrollo de una función $H^\circ$ , con respecto a la base ortonormal de vectores $\tilde{g}$ de un sistema de calibración, para el espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 40
$\gamma$	Vector (en el sentido de estadística multivariante) de coeficientes del desarrollo de una función $H^\circ$ , con respecto a la base ortonormal $g$ de un sistema de calibración, página 86
$\lambda'_{ks}$	Coefficiente s-ésimo de la combinación lineal que expresa el vector $\tilde{g}_k$ en función de las excitaciones aisladas $\tilde{H}_E$ , página 40
$\tilde{\Lambda}'$	Matriz de coeficientes $\tilde{\lambda}'_{ks}$ que establece la relación entre las excitaciones aisladas y la base ortonormal del espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 40
$\tilde{\Lambda}$	Matriz de relación entre el vector de vectores de la base ortonormal $\tilde{g}$ y el vector de las excitaciones de calibración, para el espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 81
$\Lambda$	Matriz de relación entre la base ortonormal del espacio $\Gamma$ y las excitaciones de calibración unitarias, página 85
$\mu$	Permeabilidad magnética, página 10
$\mu'_n$	Momento de orden n centrado en 0 de una variable aleatoria, página 145

$\mu_i$	Permeabilidad magnética inicial (para la caracterización de un material composite magnético, página 114
$\mu_r$	Permeabilidad magnética relativa, página 114
$\mu_r$	Permeabilidad magnética relativa, página 114
$\nu$	Grados de libertad de una magnitud, página 6
$\rho$	En un lazo de medida circular, coordenada radial normalizada: $\rho = r/R_{LM}$ , página 63
$\Sigma_{\alpha\alpha}$	Matriz de covarianzas de los vectores $\alpha$ de una muestra aleatoria, página 86
$\Sigma_{\gamma\gamma}$	Matriz de covarianzas del vector de coeficientes $\gamma$ , página 91
$\Sigma_{pp}$	Matriz de covarianzas de los vectores $p$ de una muestra aleatoria, página 87
$\Sigma_{XX}$	Matriz de covarianzas del vector de lecturas obtenidas del ALBA sobre las excitaciones de calibración, página 91
$\sigma$	Conductividad eléctrica de un material, página 36
$\sigma(\eta_\infty)$	Desviación típica de los valores $\eta_\infty$ , página 48
$\Theta$	Proyección del espacio $\Theta_G$ sobre un espacio de dimensión finita. Espacio equivalente a $\Theta_G$ , de dimensión finita pero suficientemente grande como para asumir el error de la aproximación, página 79
$\tau_k$	Índice de eficacia del conductor k-ésimo de un sistema de calibración, página 46
$\tau_{\min}$	Índice de eficacia mínimo de un sistema de calibración, página 47
$\tau_p$	Índice de eficacia promedio ó índice de eficacia global de un sistema de calibración, página 47
$\tau'_p$	Índice de eficacia promedio total un sistema de calibración, página 47
$\Theta_G$	Conjunto de funciones H de cuadrado integrable definidas sobre el lazo de medida, página 39
$\zeta$	Constante de proporcionalidad entre la corriente de excitación y la corriente métrica en un circuito, página 36
$\zeta_0$	Coficiente $\zeta$ del circuito principal de un sistema de calibración, página 41
$\mathbf{a}$	Base ortonormal del espacio $\Theta$ , página 86
$a$	Límite inferior de una distribución rectangular, página 5
$\vec{B}$	Campo inducción magnética, página 10

$B_k^{(tg)}$	Componente tangencial del campo inducción magnética a una cierta trayectoria, página 13
$b$	Límite superior de una distribución rectangular, página 5
$C_0$	Circuito principal de un sistema de calibración, página 38
$C_k$	$k$ -ésimo circuito auxiliar de un sistema de calibración. ( $k = 1 \dots$ ), página 38
$Cov(X_t, X_s)$	Covarianza entre las magnitudes $X_t$ y $X_s$ , página 6
$C$	Trayectoria de circulación genérica, página 11
$c_n$	Coefficiente $n$ -ésimo del desarrollo en serie de la función $R_\varphi$ , página 77
$c_t$	Coefficiente de sensibilidad de la magnitud $t$ -ésima, página 6
$L_C$	Longitud de una cierta trayectoria $C$ , página 28
$D_{ES}$	Magnitud representativa de la desviación de un instrumento, página 7
$D_{IS}$	Función de redondeo, página 143
$\vec{D}$	Campo desplazamiento eléctrico, página 11
$d(x, y)$	Distancia entre los vectores $x$ e $y$ , página 23
$dl$	Diferencial de longitud, página 32
$Esp()$	Esperanza matemática (estadística), página 19
$f'_X$	Primera derivada de la función densidad de probabilidad $f_X$ , página 146
$F_D$	Factor de corrección del campo debido al descentramiento del hilo indefinido, página 137
$F_L$	Factor de corrección del campo debido a que el cable rectilíneo es finito, página 137
$f_X(x)$	Función densidad de probabilidad de la variable aleatoria $X$ , página 144
$f_{\mathcal{I}}$	(Función) Distribución de probabilidad del conjunto constituido por todas las $\mathcal{I}$ aplicable a un ALBA, página 19
$\tilde{\mathbf{g}}$	Vector (en el sentido de estadística multivariante) de vectores $\tilde{g}_k$ correspondientes a un espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 40
$\tilde{g}_n$	$n$ -ésimo vector de la base ortonormal de vectores correspondiente a un espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 40
$\mathbf{g}$	Base ortonormal asociada al espacio $\Gamma$ , página 85

$H^\circ$	Función H generada por un circuito cuya corriente de excitación es la unidad (en las unidades de trabajo), página 34
$H_0^{\{I_0\}}$	Función en torno al que se desarrolla el funcional $R()$ , página 77
$H_P$	Función H generada por un conductor (pletina) usada como test usada como test, página 53
$H^{(I)}$	Función H generada por un circuito con corriente de excitación $I$ , página 32
$H^\diamond$	Función H cuya corriente métrica es la unidad, página 37
$H^{\{I\}}$	Función H cuya corriente métrica es $I$ , página 37
$H^{\parallel}$	Componente paralela de un vector H con respecto al espacio $\tilde{\Gamma}$ . (Es una descomposición algebraica, no geométrica), página 41
$H^\perp$	Componente perpendicular un vector H con respecto al espacio $\tilde{\Gamma}$ . (Es una descomposición algebraica, no geométrica), página 41
H	Función, con dimensiones de intensidad de campo magnético, definida a lo largo del lazo de medida. Cuando esté asociada a un circuito, corresponde con el valor de la componente tangencial al lazo de medida del campo $\vec{H}$ generado por el circuito. También nos referimos a ella como una <i>excitación</i> , página 32
$\tilde{H}E_k^\circ$	Función generada por el k-ésimo circuito aislado (real) de un sistema de calibración cuando tienen una corriente de excitación unitaria, página 39
$HE_k^\circ$	k-ésima excitación aislada correspondientes al espacio extendido $\Gamma$ . $HE_k^\circ = \tilde{H}E_k^\circ$ para $k = 1 \dots N_{\tilde{\Gamma}} - 1$ , página 84
$\vec{H}$	Campo intensidad de campo magnético, página 10
$\vec{H}_{bs}$	Componente de $\vec{H}$ debida a la presencia de conductores, página 27
$\vec{H}_{mm}$	Componente de $\vec{H}$ debida a la presencia de medios magnéticos, página 27, 28
H	Módulo del campo intensidad de campo magnético, página 11
$\vec{H}^T$	Componente del vector $\vec{H}$ sobre la superficie $S_{ie}$ , página 27
$\bar{H}$	Valor medio de la función H, página 36
$\tilde{H}E^\circ$	Vector (en el sentido de estadística multivariante) de vectores $\tilde{H}E_s$ , correspondientes al espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 40
$\tilde{H}X^{\{I_0\}}$	Vector (en el sentido de estadística multivariante) de excitaciones de calibración, correspondientes al espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 80
$h$	Anchura de una distribución rectangular, página 5

$h$	Resolución del visualizador de un instrumento de medida, página 143
$H_\infty$	Campo creado por un cable rectilíneo indefinido, página 137
$\tilde{H}X_k$	k-ésima excitación de calibración real, asociada al espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 80
$\mathbf{HE}^\circ$	Vector de excitaciones aisladas unitarias correspondientes al espacio $\Gamma$ , página 84
$\mathbf{HX}$	Vector (en el sentido de estadística multivariante) de excitaciones de calibración con corriente métrica unitaria, correspondientes al espacio $\Gamma$ , página 84
$\mathbf{HX}^\diamond$	Excitaciones de calibración unitarias correspondientes al espacio $\Gamma$ , página 84
$\tilde{\mathbf{HX}}^\diamond$	Vector (en el sentido de estadística multivariante) de excitaciones de calibración con corriente métrica unitaria, correspondientes al espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 80
$\mathcal{I}$	Excitación/circuito físico real (no hace referencia únicamente a su corriente sino al objeto en sí, página 16)
$I_{\text{exc}}$	Corriente de excitación de un circuito, página 36
$I_{E_k}$	Corriente de excitación a aplicar al circuito k-ésimo de un sistema de calibración, página 39
$I_M$	Representación metrológica de un instrumento de medida, página 7
$I_{M\cdot D_{ES}}$	Magnitud representativa de la desviación de un instrumento de medida, página 8
$I_{\text{met}}$	Corriente métrica, página 35
$I_{M\cdot O_C}$	Magnitud representativa de la parte oculta de un instrumento de medida, página 8
$I_{M\cdot V_{IS}}$	Magnitud representativa de la parte visible de un instrumento de medida, página 8
$I$	Intensidad de corriente, página 11
$I_0$	Corriente del punto en el que se va a calibrar un ALBA, página 24
$I_S$	Lectura del DMM conectado a la salida del sensor de corriente del sistema experimental, página 115
$I_u$	Corriente de valor unitario en las unidades de trabajo, página 34
$I_P$	Corriente de primario de un transformador, página 14
$I_S$	Corriente de secundario de un transformador, página 14

$\vec{J}$	Densidad de corriente eléctrica, página 11
$k$	Factor de cobertura de un intervalo de incertidumbre, página 4
$k_\eta$	Factor de ponderación del coeficiente de aptitud $\varepsilon_\eta$ en el coeficiente de aptitud global, página 49
$k_\sigma$	Factor de ponderación del coeficiente de aptitud $\varepsilon_\sigma$ en el coeficiente de aptitud global, página 49
$k_\tau$	Factor de ponderación del coeficiente de aptitud $\varepsilon_\tau$ en el coeficiente de aptitud global, página 49
$K_E$	Coficiente de cobertura para establecer la variancia de la respuesta del ALBA a las excitaciones de calibración virtuales, página 93
$K_H$	Coficiente de transducción del sensor Hall del sistema experimental, página 115
$K_I$	Coficiente de transducción del sensor de corriente del sistema experimental, página 115
$K_P$	Coficiente de transducción de un transductor, página 18
$K_{ALBA}$	Coficiente de transducción del ALBA del sistema experimental SE00.15, página 108
$\vec{L}$	Vector que indica la longitud y orientación de un cable rectilíneo finito, página 136
$L_{LM}$	Longitud del lazo de medida, página 32
$L_0$	Lectura del ALBA cuando se le aplica el circuito principal del sistema de calibración, página 118
$L_H$	Altura total de un circuito rectangular, página 50
$L_{s_1 s_2}$	Lectura del ALBA cuando se le aplica el circuito principal del sistema de calibración junto con dos de los circuitos auxiliares excitados con una fracción de la corriente total, página 118
$L_{s_1}, L_{s_2}$	Lectura del ALBA cuando se le aplica el circuito principal del sistema de calibración junto con uno de los circuitos auxiliares excitado con una fracción de la corriente total, página 118
$\mathbf{M}$	Matriz de relación entre el vector de coeficientes $\mathbf{q}$ y $\mathbf{g}$ , página 94
$M_P$	Factor multiplicativo a aplicar a la excitaciones aisladas virtuales ortonormales de un sistema de calibración a fin de que las excitaciones de calibración tengan un módulo similar a las excitaciones aisladas auxiliares reales, página 84
$N_{\tilde{\Gamma}}$	Dimensión del espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 39
$N_\Theta$	Dimensión del espacio $\Theta$ , página 79

$N_{\Xi}$	Número de vectores de la base usadas para describir el conjunto $\Xi\{I_0\}$ , página 88
$N$	Número (genérico) de elementos de una colección, página 4
$o$	Suceso de la variable aleatoria que representa la parte oculta $O_C$ , página 144
$\mathbf{p}$	Vector del coeficientes del desarrollo de una función $H$ del rango de uso del ALBA sobre la base $\mathbf{q}$ , página 87
$P(x)$	Probabilidad del evento $x$ de una variable aleatoria discreta, página 144
$P_{\text{cru}}$	Probabilidad de cruce (para un algoritmo genético), página 61
$P_{\text{mut}}$	Probabilidad de mutación (para un algoritmo genético), página 61
$\mathbf{q}$	Base ortonormal (incorrelada) para representar el conjunto $\Xi\{I_0\}$ , página 87
$R$	Magnitud representativa de una referencia., página 7
$R_{\varphi}$	Función asociada a cada punto $\varphi$ del funcional $R()$ , página 77
$R'_0$	Término constante del desarrollo del funcional $R$ , página 77
$R()$	Función respuesta característica de un ALBA, página 16
$R_0$	Respuesta del ALBA frente a la primera excitación de calibración, $HE_0^{\circ}$ , página 90
$\vec{r}_0$	Vector que identifica el punto donde está el origen del cable rectilíneo que crea el campo, página 136
$\vec{r}_c$	Punto campo. Vector que identifica el punto donde se va a calcular el campo, página 135
$\vec{r}_f$	Punto fuente. Vector que identifica el punto donde está el elemento que crea el campo, página 135
$r_{\text{LM}}(\varphi)$	Función (en coordenadas polares) que define/representa el lazo de medida, página 32
$R_{\mathbf{X}}^{\{I_0\}}$	Vector construido con las lecturas obtenidas por el ALBA a las excitaciones de calibración, página 90
$R$	Resistencia eléctrica, página 36
$r$	Coordenada radial (sistema de coordenadas polares, cilíndricas o esféricas, página 11
$r_n$	Coordenada radial del conductor negativo de un circuito rectangular, página 50
$r_p$	Coordenada radial del conductor positivo de un circuito rectangular, página 50

---

$R_{LM}$	Radio del lazo de medida, en un lazo de medida circular, página 49
$S$	Coficiente de sensibilidad, página 141
$S2_\gamma$	Segundo sumando de la varianza de la función R, asociado a la variabilidad geométrica del rango nominal de funcionamiento., página 91
$S2_X$	Primer sumando de la varianza de la función R, asociado a la variabilidad de las lecturas obtenidas por el ALBA, página 91
$S_{LM}$	Superficie limitada por un lazo de medida, página 12
$S_C$	Superficie limitada por una cierta trayectoria $C$ , página 11
$S_{ie}$	Superficie de separación entre las regiones interior y exterior, página 27
$\hat{u}_H$	Vector unitario en la dirección (algebraica, no espacial) de H, página 45
$\bar{V}$	Esperanza de la variable aleatoria $V_{IS}$ , página 146
$V$	Tensión medida del sensor Hall del ALBA del sistema experimental SE00.15, página 112
$V_H$	Lectura del DMM conectado a al sensor Hall del sistema experimental, página 115
$v_k$	(Conjunto discreto de) valores visualizables por el visualizador de un instrumento de medida, página 143
$V_{cc}$	Tensión de alimentación aplicada al sensor Hall del ALBA del sistema experimental SE00.15, página 112
$\text{var}()$	Varianza matemática (estadística), página 19
$X_t$	t-ésima magnitud o cantidad de la que depende otra, página 5
$X_S$	Magnitud de salida de un transductor, página 18
$\mathbf{X}$	Matriz de relación entre las excitaciones unitarias de calibración y las excitaciones unitarias aisladas para el espacio $\Gamma$ , página 84
$\tilde{\mathbf{X}}$	Matriz de relación entre el vector de excitaciones de calibración y el vector de excitaciones aisladas, para el espacio $\tilde{\Gamma}$ , página 80
$Y$	Magnitud o cantidad dependiente, página 5

# Lista de acrónimos

ALBA	.....	Ampere Law Based Apparatus
CC	.....	Comparador de Corriente
DCCT	.....	Transformador de corriente de corriente continua
DMM	.....	Multímetro digital (Digital MultiMeter)
ENAC	.....	Entidad Nacional de Acreditación
FEM	.....	Método de Elementos Finitos
GPIB	.....	General Purpose Interface Bus
GUM	.....	Guía para la expresión de la incertidumbre en mediciones
LM	.....	Lazo de Medida
LME	.....	Laboratorio de Metrología Eléctrica
PCA	.....	Análisis de Componentes Principales
SCA00.N	< $\phi$ >	Sistema de calibración con N conductores en posición anular. Cada conductor cubre un ángulo $\phi$
SCPI	.....	Standard Commands for Programmable Instruments
SCR00.N	.....	Sistema de calibración con N conductores Radiales
SE00.15	.....	Sistema Experimental de 15 conductores
IM_SH.N	.....	ALBA construido con N sensores homogéneamente distribuidos
SI	.....	Sistema Internacional de Unidades
IM_SITA	.....	ALBA construido con N sensores inhomogéneamente distribuidos con distribución tipo A.
SMI00.N	.....	Sistema de calibración con N conductores en disposición mixta
SPA00.N	.....	Sistema de calibración con N conductores en disposición paralela
USB	.....	Universal Serial Bus
USBTMC	.....	Universal Serial Bus Test and Measurement Class



# Bibliografía

- ANDERSON, T. W. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis (Wiley Series in Probability and Statistics)*. Wiley-Interscience, 3 edición, 2003. ISBN 9780471360919.
- ATCHISON, L. *Object-Oriented Test & Measurement Software Development in C++*. Prentice Hall PTR, 1996. ISBN 9780132279505.
- BALLICO, M. Limitations of the welch-satterthwaite approximation for measurement uncertainty calculations. *Metrologia*, vol. 37(1), página 61, 2000.
- BAZZOCCHI, R. y RIENZO, L. D. Interference rejection algorithm for current measurement using magnetic sensor arrays. *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 85, páginas 38–41, 2000. ISSN 0924-4247.
- BERA, S. y CHATTOPADHYAY, S. Study of an accurate dc busbar current measurement technique by using a transducer based network. *Measurement*, vol. 34(3), páginas 255 – 261, 2003. ISSN 0263-2241.
- BICH, W., COX, M. G. y HARRIS, P. M. Evolution of the 'guide to the expression of uncertainty in measurement '. *Metrologia*, vol. 43(4), 2006.
- BIPM, editor. *Vocabulario Internacional de Metrología (Traducción al español)*. Centro Español de Metrología (CEM), 1 edición, 2008. ISBN 9267101889. Grupo de Trabajo 2 del Comité Conjunto de Guías en Metrología (JCG-M/WG 2).
- BOX, G. E. P. y TIAO, G. C. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Wiley-Interscience, 1 edición, 1992. ISBN 9780471574286.
- BRANDOLINI, A., FAIFER, M. y OTTOBONI, R. A simple method for the calibration of traditional and electronic measurement current and voltage transformers. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 58(5), páginas 1345–1353, 2009. ISSN 0018-9456.
- BULLOCK, R. y DECKRO, R. Foundations for system measurement. *Measurement*, vol. 39(8), páginas 701 – 709, 2006. ISSN 0263-2241.
- BURDEN, R. L. y FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 9 edición, 2010. ISBN 9780538733519.
- CAMPBELL, J. *El libro del RS 232*. Anaya Multimedia, 1987 edición, 1987.

- CANAVOS. *Probabilidad y Estadística - Aplicaciones y Metodos (Spanish Edition)*. McGraw-Hill Companies, 1994. ISBN 9789684518568.
- CANOVA, A., GRUOSSO, G. y REPETTO, M. Optimal shielding of low frequency fields. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 23(1), páginas 173–186, 2004.
- CHAN, J., TSE, N. y LAI, L. A coreless electric current sensor with circular conductor positioning calibration. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 62(11), páginas 2922–2928, 2013. ISSN 0018-9456.
- CHAPMAN. *Máquinas Eléctricas*. McGraw-Hill / Interamericana de España, S.A., 5 edición, 2012. ISBN 9786071507242.
- CHEN, K.-L. y CHEN, N. A new method for power current measurement using a coreless hall effect current transformer. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 60(1), páginas 158–169, 2011.
- CHIAMPI, M., CROTTI, G. y MORANDO, A. Evaluation of flexible rogowski coil performances in power frequency applications. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 60(3), páginas 854–862, 2011. ISSN 0018-9456.
- CIPRA, B. A. The best of the 20th century: Editors name top 10 algorithms. *SIAM News*, vol. 33(4), 2000.
- CIRIC, I. New models for current distributions and scalar potential formulations of magnetic field problems. *Journal of Applied Physics*, vol. 61(8), páginas 2709–2717, 1987. ISSN 0021-8979.
- CIRIC, I. A new scalar potential modeling technique for magnetic fields due to arbitrary distributions of electric current. *Magnetics Letters, IEEE*, vol. 4, páginas 0500104–0500104, 2013. ISSN 1949-307X.
- CIRIC, I. Scalar potential formulations for magnetic fields produced by arbitrary electric current distributions in the presence of ferromagnetic bodies. *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 50(1), páginas 1–6, 2014. ISSN 0018-9464.
- CORDERO, R. R., SECKMEYER, G. y LABBE, F. Effect of the resolution on the uncertainty evaluation. *Metrologia*, vol. 43(6), página L33, 2006.
- CRISTALDI, L., FERRERO, A., LAZZARONI, M. y OTTOBONI, R. A linearization method for commercial hall-effect current transducers. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 50(5), páginas 1149–1153, 2001. ISSN 0018-9456.
- DESTEFAN, D. Calibration and testing facility for resistance welding current monitors. En *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 1995. IMTC/95. Proceedings. Integrating Intelligent Instrumentation and Control., IEEE*, páginas 440–. 1995.
- DI RIENZO, L., BAZZOCCHI, R. y MANARA, A. Circular arrays of magnetic sensors for current measurement. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 50(5), páginas 1093–1096, 2001.

- DÍEZ, J. A. A hundred years of numbers. an historical introduction to measurement theory 1887-1990: Part i: The formation period. two lines of research: Axiomatics and real morphisms, scales and invariance. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, vol. 28(1), páginas 167 – 185, 1997a. ISSN 0039-3681.
- DÍEZ, J. A. A hundred years of numbers. an historical introduction to measurement theory 1887-1990: Part ii: Suppes and the mature theory. representation and uniqueness. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, vol. 28(2), páginas 237 – 265, 1997b. ISSN 0039-3681.
- DJOKIC, B., RAMBOZ, J. y DESTEFAN, D. To what extent can the current amplitude linearity of rogowski coils be verified? *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 60(7), páginas 2409–2414, 2011. ISSN 0018-9456.
- DRAXLER, K., STYBLIKOVA, R., HLAVACEK, J. y PROCHAZKA, R. Calibration of rogowski coils with an integrator at high currents. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 60(7), páginas 2434–2438, 2011.
- DRAXLER, K., STYBLIKOVA, R., RADA, V., KUCERA, J. y ODEHNAL, M. Using a current loop and homogeneous primary winding for calibrating a current transformer. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 62(6), páginas 1658–1663, 2013. ISSN 0018-9456.
- EKMAN, J. *Electromagnetic Modeling Using the Partial Element Equivalent Circuit Method*. Tesis Doctoral, 2003.
- ESTLER, W. T. Measurement as inference: Fundamental ideas. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, vol. 48(2), páginas 611 – 631, 1999. ISSN 0007-8506.
- EUROPEAN CO-OPERATION FOR ACCREDITATION. Evaluation of the Uncertainty of Measurement in Calibration. Informe técnico, (EA), 2013.
- FERKOVIĆ, L., ILIĆ, D. y MALARIĆ, R. Mutual inductance of a precise rogowski coil in dependence of the position of primary conductor. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 58(1), páginas 122–128, 2009. ISSN 0018-9456.
- FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B. y SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 2: Mainly Electromagnetism and Matter*. Addison Wesley, 2 edición, 2005. ISBN 9780201021172.
- FINKELSTEIN, L. Widely, strongly and weakly defined measurement. *Measurement*, vol. 34(1), páginas 39 – 48, 2003. ISSN 0263-2241. Fundamental of Measurement.
- FRAILE, J. *Máquinas Eléctricas*. McGraw-Hill, unknown edición, 2008. ISBN 9788448161125.
- GALLIANA, F. y CAPRA, P. Traceable technique to calibrate clamp meters in ac current from 100 to 1500 a. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 61(9), páginas 2512 –2518, 2012. ISSN 0018-9456.

- GAO, P., LIN, S. y XU, W. A novel current sensor for home energy use monitoring. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, vol. 5(4), páginas 2021–2028, 2014. ISSN 1949-3053.
- GIVI, H., MOGHANI, J., VAKILIAN, Z. y NOROOZI, M. Three dimensional finite element modeling of a current transformer and analyzing its operation under normal condition. En *Electrical Engineering (ICEE), 2013 21st Iranian Conference on*, páginas 1–4. 2013.
- HALL, B. D. y WILLINK, R. Does "welch-satterthwaite" make a good uncertainty estimate? *Metrologia*, vol. 38(1), página 9, 2001. IncertidumbreGeneral.
- HARRINGTON, R. F. *Field Computation by Moment Methods*. Wiley-IEEE Press, (Reimpresión) edición, 1993. ISBN 9780780310148.
- HUDSON, G. y BOUWKNEGT, K. 4-13 ka dc current transducers enabling accurate in-situ calibration for a new particle accelerator project, lhc. En *Power Electronics and Applications, 2005 European Conference on*, páginas 8 pp.–P.8. 2005.
- HUGHES, J. M. *Real World Instrumentation with Python: Automated Data Acquisition and Control Systems*. O'Reilly Media, 1 edición, 2010. ISBN 9780596809560.
- IMAMURA, M., NAKAHARA, M., YAMAGUCHI, T. y TAMURA, S. Analysis of magnetic fields due to three-phase bus bar currents for the design of an optical current transformer. *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 34(4), páginas 2274–2279, 1998. ISSN 0018-9464.
- JAYNES, E. T. Prior probabilities. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, vol. 4, páginas 227–241, 1968.
- JERRI, A. The shannon sampling theorem - its various extensions and applications: A tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, vol. 65(11), páginas 1565–1596, 1977. ISSN 0018-9219.
- JOHNSON, R. A. y WICHERN, D. W. *Applied multivariate statistical analysis*. Pearson Prentice Hall, 2007. ISBN 9780131877153.
- JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY. Evaluation of measurement data. Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement": Propagation of distributions using a Monte Carlo method. Informe técnico, JCGM, 2008a.
- JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY. Jcgm 100: Evaluation of measurement data - guide to the expression of uncertainty in measurement. Informe técnico, JCGM, 2008b.
- JOLLIFFE, I. *Principal Component Analysis (Springer Series in Statistics)*. Springer, 2nd edición, 2002. ISBN 9780387954424.
- KACKER, R. y JONES, A. On use of bayesian statistics to make the guide to the expression of uncertainty in measurement consistent. *Metrologia*, vol. 40(5), página 235, 2003.

- KAISER, G. *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser Boston, 1 edición, 1994. ISBN 9780817637118.
- KEITHLEY. Understanding new developments in data acquisition, measurement and control. Disponible en [www.keithley.com](http://www.keithley.com). Último acceso: Septiembre 2014.
- KEYSIGHT. Using linux to control usb instruments (application note AN 1465-30). Disponible en <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5989-6718EN.pdf>. Último acceso: Septiembre 2014.
- KORASLI, C. Line-current compensated single toroidal-core current transformer for three-phase current measurement. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 22(1), páginas 500–506, 2007. ISSN 0885-8977.
- KRANTZ, D. H., LUCE, R. D., SUPPES, P. y TVERSKY, A. *Foundations of Measurement Volume I: Additive and Polynomial Representations (Dover Books on Mathematics)*. Dover Publications, 2006a. ISBN 9780486453149.
- KRANTZ, D. H., LUCE, R. D., SUPPES, P. y TVERSKY, A. *Foundations of Measurement Volume II: Geometrical, Threshold, and Probabilistic Representations (Dover Books on Mathematics)*. Dover Publications, 2006b. ISBN 9780486453156.
- KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1 edición, 1989. ISBN 9780471504597.
- KUFFEL, J., KUFFEL, E. y ZAENGL, W. S. *High Voltage Engineering Fundamentals, Second Edition*. Newnes, 2 edición, 2000. ISBN 9780750636346.
- KUSTERS, N. y MOORE, W. J. M. The current comparator and its application to the absolute calibration of current transformers. *Power Apparatus and Systems, Part III. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 80(3), páginas 94–103, 1961. ISSN 0097-2460.
- KUSTERS, N. y MOORE, W. J. M. The compensated current comparator; a new reference standard for current-transformer calibrations in industry. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 13(2 & 3), páginas 107–114, 1964. ISSN 0018-9456.
- LEE, K.-W., PARK, J.-N., YANG, S.-H., LEE, Y.-S., HAM, G.-H., JANG, Y.-M. y LIM, K.-J. Geometrical effects in the current measurement by rogowski sensor. En *Electrical Insulating Materials, 2001. (ISEIM 2001). Proceedings of 2001 International Symposium on*, páginas 419–422. 2001.
- LEE, P. M. *Bayesian Statistics: An Introduction*. Wiley, 4 edición, 2012. ISBN 9781118332573.
- LENZ, J. y EDELSTEIN, A. S. Magnetic sensors and their applications. *Sensors Journal, IEEE*, vol. 6(3), páginas 631–649, 2006. ISSN 1530-437X.
- LETOSA, J., ARTAL, JESÚS S., SAMPLÓN-CHALMETA, M., USÓN, A. y ARCEGA, F. J. Modelization of current sensors by finite elements method. *Measurement*, vol. 35, páginas 233 – 241, 2004. ISSN 0263-2241.

- LI, X., YOU, J., SHU, X. y KANG, R. Electric current measurement using amr sensor array. En *Proc. Int. Conf. Mechatronics and Automation ICMA 2009*, páginas 4085–4089. Changchun, Jilin, China, 2009.
- LIEBERHERR, M. The magnetic field lines of a helical coil are not simple loops. *American Journal of Physics*, vol. 78, páginas 1117–1119, 2010.
- LIRA, I. Resolution revisited. *Metrologia*, vol. 43(3), página L14, 2006.
- LIRA, I. Assigning a probability density function for the value of a quantity based on discrete data: the resolution problem. *Metrologia*, vol. 49(6), página 765, 2012.
- LIRA, I. y WÖGER, W. Comparison between the conventional and bayesian approaches to evaluate measurement data. *Metrologia*, vol. 43(4), página S249, 2006.
- LUTZ, M. *Learning Python, 5th Edition*. O'Reilly Media, fifth edition edición, 2013. ISBN 9781449355739.
- MACMARTIN, M. y KUSTERS, N. A self-balancing direct current comparator for 20 000 amperes. *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 1(4), páginas 396–402, 1965. ISSN 0018-9464.
- MANN, P. S. *Introductory Statistics*. Wiley, 7 edición, 2010. ISBN 9780470444665.
- MCNEILL, N., GUPTA, N. y ARMSTRONG, W. Active current transformer circuits for low distortion sensing in switched mode power converters. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 19(4), páginas 908–917, 2004. ISSN 0885-8993.
- MICHELL, J. The logic of measurement: A realist overview. *Measurement*, vol. 38(4), páginas 285 – 294, 2005. ISSN 0263-2241. The logical and philosophical aspects of measurement.
- MICROMETALS. Iron powder cores for power conversion and line filter applications. Catalog, Disponible en <http://www.micrometals.com/>.
- MILJANIC, P. N., KUSTERS, N. L. y MOORE, W. J. M. The development of the current comparator, a high-accuracy a-c ratio measuring device. *American Institute of Electrical Engineers, Part I: Communication and Electronics, Transactions of the*, vol. 81(5), páginas 359–368, 1962. ISSN 0097-2452.
- MLEJNEK, P., VOPĀĽENSKĀ $\frac{1}{2}$ , M. y RIPKA, P. Amr current measurement device. *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 141(2), páginas 649 – 653, 2008. ISSN 0924-4247.
- NAIDU, P. M. S. y KAMARAJU, P. V. *High Voltage Engineering*. Tata McGraw Hill Education Private Limited, 5 edición, 2013. ISBN 9789383286515.
- OLIPHANT, T. E. Python for Scientific Computing. *Computing in Science and Engg.*, vol. 9(3), páginas 10–20, 2007. ISSN 1521-9615.

- PAWAR, S. D., MURUGAVEL, P. y LAL, D. M. Effect of relative humidity and sea level pressure on electrical conductivity of air over indian ocean. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, vol. 114(D2), 2009. ISSN 2156-2202.
- POULICHET, P., COSTA, F. y LABOURE, E. High-frequency modeling of a current transformer by finite-element simulation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 39(2), páginas 998–1007, 2003. ISSN 0018-9464.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. y FLANNERY, B. P. *Numerical recipes in C (2nd ed.): the art of scientific computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1992. ISBN 0-521-43108-5.
- QING, C., HONG-BIN, L., MING-MING, Z. y YAN-BIN, L. Design and characteristics of two rogowski coils based on printed circuit board. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 55(3), páginas 939–943, 2006. ISSN 0018-9456.
- QU, K., ZHAO, W., YANG, P., HUANG, S. y JIANG, B. Interference mechanism of external current on heavy current transformer. En *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 2009. I2MTC '09. IEEE*, páginas 1254–1257. 2009. ISSN 1091-5281.
- RAMBOZ, J. A highly accurate, hand-held clamp-on current transformer. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 45(2), páginas 445–448, 1996. ISSN 0018-9456.
- RAS, E. *Transformadores de Potencia, de Medida y de Protección*. Marcombo, S.A., 2010. ISBN 9788426706904.
- REIG, C., CUBELLS-BELTRÁN, M.-D. y RAMÍREZ MUÑOZ, D. Magnetic field sensors based on giant magnetoresistance (gmr) technology: Applications in electrical current sensing. *Sensors*, vol. 9(10), páginas 7919–7942, 2009. ISSN 1424-8220.
- RIPKA, P., KEJIK, P., KASPAR, P. y DRAXLER, K. Precise dc current sensors. En *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 1996. IMTC-96. Conference Proceedings. Quality Measurements: The Indispensable Bridge between Theory and Reality., IEEE*, vol. 2, páginas 1479–1483 vol.2. 1996.
- SAMPLÓN-CHALMETA, M., ARTAL, JESÚS S., LETOSA, J., USÓN, A. y ARCEGA, F. J. Evaluation of errors associated with crosstalk magnetic fields using finite element method in high electrical current measurement. En *Proc. International Conference on Renewable Energy and Power Quality (ICREPQ)*. 2005.
- SAMPLON-CHALMETA, M., MUR-AMADA, J., LETOSA, J. y USON, A. Analysis and optimization of a device intended to reproduce a magnetic field along a path. *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. PP(99), páginas 1–1, 2014a. ISSN 0018-9464.
- SAMPLON-CHALMETA, M., MUR-AMADA, J., SARDAA, A. y FLETA, J. A novel calibration method for ampere's law-based current measuring instruments. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. PP(99), páginas 1–1, 2014b. ISSN 0018-9456.

- SAMPLÓN-CHALMETA, M., USÓN, A., LETOSA, J. y MUR-AMADA, J. A magnetic field simulating device for current measuring instruments testing purpose. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 2014. Accepted to publish. doi: 10.1002/jnm.2006.
- SATTERTHWAITE, F. E. An approximate distribution of estimates of variance components. *Biometrics Bulletin*, vol. 2(6), páginas 110–114, 1946. ISSN 00994987.
- SHELENS, J. A tutorial on principal component analysis. En *Systems Neurobiology Laboratory, Salk Institute for Biological Studies*. 2005.
- SILVESTER, P. P. y FERRARI, R. L. *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge University Press, 3 edición, 1996. ISBN 9780521449533.
- SLOMOVITZ, D. Electronic error reduction system for clamp-on probes and measuring current transformers. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 49(6), páginas 1278–1281, 2000. ISSN 0018-9456.
- SMITH, L. I. A tutorial on principal components analysis. Informe técnico, Cornell University, USA, 2002.
- SUOMALAINEN, E. y HALLSTROM, J. On-site calibration of a current transformer using a rogowski coil. En *Precision Electromagnetic Measurements Digest, 2008. CPEM 2008. Conference on*, páginas 468–469. 2008.
- SUPPES, P., KRANTZ, D. H., LUCE, R. D. y TVERSKY, A. *Foundations of Measurement Volume III: Representation, Axiomatization, and Invariance (Dover Books on Mathematics)*. Dover Publications, 2006. ISBN 9780486453163.
- TARALDSEN, G. Instrument resolution and measurement accuracy. *Metrologia*, vol. 43(6), página 539, 2006. IncertidumbreGeneral.
- TREFETHEN, L. N. y BAU, D. *Numerical Linear Algebra*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. ISBN 9780898713619.
- TROWBRIDGE, C. W. y SYKULSKI, J. K. Some key developments in computational electromagnetics and their attribution. *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 42(4), páginas 503–508, 2006. ISSN 0018-9464.
- UNSER, M. Splines: a perfect fit for signal and image processing. *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 16(6), páginas 22–38, 1999. ISSN 1053-5888.
- UNSER, M. Sampling-50 years after shannon. *Proceedings of the IEEE*, vol. 88(4), páginas 569–587, 2000. ISSN 0018-9219.
- UNSER, M. y BLU, T. Wavelet theory demystified. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 51(2), páginas 470–483, 2003. ISSN 1053-587X.
- USÓN, A. *Aplicación del método de elementos finitos al perfeccionamiento de pinzas amperimétricas*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 2007.

- USÓN, A., ARTAL, JESÚS S., LETOSA, J., ARCEGA, F. J. y SAMPLÓN-CHALMETA, M. Analysis by finite element method of the crosstalk compensation procedures for current transducers. En *Proc. XII International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering (ISEF)*. 2005a.
- USÓN, A., LETOSA, J., ARCEGA, F. J., SAMPLÓN-CHALMETA, M. y ARTAL, JESÚS S. Study of measurement errors in a current sensor with air-gaps. En *Proc. International Conference on Renewable Energy and Power Quality (ICREPQ)*. 2005b.
- USÓN, A., LETOSA, J., ARCEGA, M., FRANCISCO J. ANB SAMPLÓN-CHALMETA y ARTAL, JESÚS S. Analysis of passive magnetic shielding for reducing crosstalk errors in current sensors. En *Proc. XII International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering (ISEF)*. 2005c.
- VAN BLADEL, J. Magnetostatic fields at an iron-air boundary. *American Journal of Physics*, vol. 29(11), páginas 732–736, 1961.
- VAN BLADEL, J. *Electromagnetic Fields*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. John Wiley & Sons, 2007. ISBN 9780471263883.
- WANG, Z., ZHANG, S. y ZHANG, L. Recent advances in optical current-sensing techniques. *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 50(3), páginas 169 – 175, 1995. ISSN 0924-4247.
- WANGSNES, R. K. *Electromagnetic Fields*. Wiley, 2nd edición, 1986. ISBN 9780471811862.
- WEISE, K. y WÖGER, W. A bayesian theory of measurement uncertainty. *Measurement Science and Technology*, vol. 4(1), página 1, 1993. IncertidumbreGeneral.
- WILLINK, R. Principles of probability and statistics for metrology. *Metrologia*, vol. 43(4), página S211, 2006. IncertidumbreGeneral.
- WILLINK, R. On the uncertainty of the mean of digitized measurements. *Metrologia*, vol. 44(1), página 73, 2007.
- XIAOBING, H., WEI, W., XIN, Z. y DONGXUE, D. Research on high accuracy current comparator and self-calibration methods. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 62(6), páginas 1669–1674, 2013. ISSN 0018-9456.
- XING, J., ZHAO, W., HUANG, S. y JIANG, B. Analysis on eccentric bus-bar testing method of heavy current transformer. En *Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC), 2012 IEEE International*, páginas 144–147. 2012a. ISSN 1091-5281.
- XING, J., ZHAO, W., HUANG, S. y JIANG, B. Structural optimization design of heavy protective current transformers. En *Electromagnetic Field Problems and Applications (ICEF), 2012 Sixth International Conference on*, páginas 1–3. 2012b.

- ZHU, M. y XU, K. A calibrating device for large direct current instruments up to 320 kiloampere-turns. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 47(3), páginas 711–714, 1998. ISSN 0018-9456.
- ZIEGLER, S., WOODWARD, R. C., IU, H. H.-C. y BORLE, L. J. Current sensing techniques: A review. *IEEE Sensors Journal*, vol. 9(4), páginas 354–376, 2009.
- ZIENKIEWICZ, O. C. *El Método de los elementos finitos*. McGraw-Hill CIMNE, Barcelona, 1993. ISBN 978-8448101770.