

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA  
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

MÁSTER EN FÍSICAS Y TECNOLOGÍAS FÍSICAS

Trabajo fin de Máster

**TEORÍAS DE CAMPOS ESCALARES EN  
(1+1) DIMENSIONES**

Autor: Cristian Rivera Muñio

Director: Luis J. Boya

Curso 2013-2014

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Notas históricas . . . . .	3
<b>2. Estudio de los modelos escalares no lineales en (1+1) dimensiones</b>	<b>6</b>
2.1. Teorema de Derrick . . . . .	6
2.2. Dinámica en teorías escalares en (1+1) dimensiones . . . . .	7
2.3. Configuraciones del vacío y algunas nociones topológicas . . . . .	9
2.4. Soluciones de energía finita . . . . .	12
2.5. Cargas topológicas . . . . .	17
2.6. Fuerzas entre los kinks . . . . .	19
2.7. Tratamiento cuántico . . . . .	20
<b>3. Modelos particulares en (1+1) dimensiones</b>	<b>26</b>
3.1. Modelo $\lambda\phi^4$ . . . . .	26
3.2. Modelo Seno-Gordon . . . . .	33
<b>4. Conclusiones</b>	<b>45</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Este trabajo esta dedicado a la revisión de las teorías de campos escalares en 1+1 dimensiones, tanto a nivel clásico como a nivel cuántico, de un campo escalar  $\phi$  con una sola componente sometido a un funcional energía potencial  $U[\phi]$ . Las teorías más interesantes son aquellas en las que el funcional energía potencial  $U[\phi]$  posee más de un mínimo. Estudiaremos exclusivamente este tipo de teorías en este trabajo.

La ecuación de movimiento para el campo  $\phi$  es una ecuación en derivadas parciales no lineal que puede presentar soluciones cuya densidad de energía permanece localizada a lo largo de la evolución del sistema, es decir, soluciones de naturaleza no dispersiva. La literatura llama *onda solitaria* de forma genérica a ésta solución. El término *solitón* también aparece en la literatura relacionada con este tópico, fue introducido por Norman J. Zabusky y Martin Kruskal en 1965 [73] y hace referencia a una onda solitaria que preserva su identidad (salvo, quizás, un cambio de fase) tras un proceso de colisión con otra onda solitaria. Daremos una definición precisa de estos conceptos en la Sec. 2.4. De forma genérica las soluciones de una teoría de campos que tienen una densidad de energía localizada suelen ser denominadas *defectos topológicos*. El teorema de Derrick [20], [17, pág. 194] nos permite afirmar, en el caso de una teoría de campos escalares, que la presencia de ondas solitarias, que viajan a velocidad constante, tiene lugar sólo en un espacio-tiempo de (1+1) dimensiones. En este caso particular, estas soluciones reciben el nombre de *kinks*. El estudio de las propiedades generales de los kinks es el objetivo fundamental de este trabajo. En (2+1) y (3+1) dimensiones, en el ámbito de las teorías cosmológicas, se relajan algunas de las exigencias sobre las ondas solitarias dando origen, por ejemplo, a las *paredes de dominio* (domain walls). Las paredes de dominio son defectos topológicos con estructura planar que aparecen cuando colocamos un kink en un espacio con más de una dimensión espacial [68, pág. 7]. En el marco de las teorías gauge los defectos topológicos aparecen en dos contextos distintos: en primer lugar, en el contexto de las teorías abelianas en (2+1) dimensiones con un grupo de gauge  $U(1)$ . En este caso el defecto topológico se denomina *vórtice* [52, pág. 238] y el ejemplo prototípico de este tipo de defecto topológico es el *vórtice de Nielsen-Olesen* [47]. En segundo lugar, en el contexto de las teorías no abelianas en (3+1) dimensiones con grupo de gauge  $SU(2)$  aparecen los defectos topológicos que denominamos *monopolos* y que fueron independientemente descubiertos por 't Hooft y Polyakov [65, 53].

Esta memoria esta dividida fundamentalmente en dos capítulos:

- El primer capítulo es una recopilación de las características generales de los modelos escalares en (1+1) dimensiones. Especialmente estudiaremos las propiedades clásicas y cuánticas de los kinks. También dejaremos fijados los convenios y notaciones que emplearemos en el siguiente capítulo.
- El segundo capítulo es una aplicación del primero a dos modelos escalares: el modelo  $\lambda\phi^4$  y el modelo *Seno-Gordon*. También comentaremos en este capítulo algunas particularidades que poseen estos dos modelos.

## 1.1. Notas históricas

Dado que el concepto de kink es una parte fundamental en este trabajo vamos a dar un repaso al origen histórico de este objeto.

La historia de la teoría de solitones se remonta al mes de Agosto del año 1834, cuando el naturalista e ingeniero naval John Scott Russell observó, montado en su caballo, una “onda de traslación” viajando en un canal cercano a Edimburgo. Se puede leer el relato sobre el fenómeno hecho por el propio Russell en [58].

Russell se dedicó a investigar el fenómeno y después de realizar muchos experimentos con este tipo de ondas en un tanque de ondas de su propio diseño, obtuvo la fórmula que relaciona la velocidad y la altura de estas ondas

$$c = \sqrt{g(h + \eta)} \quad (1.1)$$

donde  $c$  es la velocidad de la onda solitaria,  $\eta$  es la amplitud de la onda,  $h$  es la profundidad del canal y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Russell propuso que el objeto solitario que había encontrado realmente representaba un tipo general de soluciones de la Hidrodinámica, que primeramente denominó “ondas de traslación”, y más tarde “ondas solitarias”.

El éxito de Russell fue mucho menor en lo que respecta a convencer a los científicos de su tiempo de estos hechos. Airy y Stokes, las mayores autoridades en la materia de la época, aparentemente “demostraron” que una onda de ese tipo era necesariamente inestable. Los trabajos posteriores de Boussinesq en 1871 [8], Lord Rayleigh en 1876 [56] y finalmente D.J. Korteweg y G. de Vries en 1895 [37] señalaron los errores de Airy y Stokes y reivindicaron las conclusiones de Russell.

En [37] Korteweg y de Vries propusieron la siguiente ecuación que permite describir ondas sobre fluidos de densidad  $\rho$  y tensión superficial  $T$  en canales poco profundos unidimensionales y de pequeña amplitud.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{\sigma}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \quad (1.2)$$

donde  $\eta = \eta(x, t)$  es la elevación de la onda sobre el nivel de equilibrio  $h$ ,  $\alpha$  es un parámetro constante relativo al movimiento uniforme del líquido y  $g$  es la aceleración de la gravedad. El parámetro  $\sigma$  que aparece en (1.2) viene dado por  $\sigma = \frac{h}{3} - \frac{Th}{g\rho}$ . La ecuación (1.2) recibe el nombre de ecuación Korteweg-de Vries (ecuación KdV para abreviar).

Korteweg y de Vries dieron una explicación analítica completa de lo que hoy en día se conoce como el solitón de la ecuación KdV. La ecuación (1.2) puede ser llevada a una forma adimensional realizando los siguientes cambios de variables

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h\sigma}} t \quad \xi = -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} x \quad u = \frac{1}{2} \eta + \frac{1}{3} \alpha \quad (1.3)$$

obtenemos que la ecuación KdV (1.2) se puede expresar como

$$u_\tau + 6uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (1.4)$$

El nombre de ecuación KdV habitualmente hace referencia a la ecuación (1.4). Korteweg y de Vries descubrieron que la ecuación (1.4) presentaba soluciones tipo onda solitaria (ver [1, págs. 2,3]) dada por

$$u(\xi, \tau) = 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \{ \kappa(\xi - 4\kappa^2\tau - \xi_0) \} \quad (1.5)$$

donde  $\kappa$  y  $\xi_0$  son constantes. La velocidad de la onda solitaria (1.4) es  $4\kappa^2$  que es, justamente, el doble de amplitud  $2\kappa^2$  y la constante  $\xi_0$  es una fase inicial. Mas tarde, Zabusky y Kruskal demostraron [73] que la onda solitaria (1.5) era en realidad un solitón.

El estudio de las ondas solitarias fue prácticamente olvidado hasta tal punto que el resurgimiento de dichas soluciones supuso de nuevo cierta sorpresa.

Entre 1952 y 1955 se construyó en Los Álamos una nueva computadora, MANIAC I, para la realización de los cálculos necesarios en el diseño de la primera bomba de hidrógeno. E. Fermi y S. Ulam propusieron un problema-prueba para calibrar las posibilidades de la nueva máquina; buscaron un problema sencillo de establecer tal que su resolución requiriera una cantidad de cálculos tan grande que no pudiera ser resuelto “a mano” ni utilizando las computadoras mecánicas existentes. Naturalmente, debía de tratarse de un problema con solución ya conocida. La propuesta que realizaron fue el estudio de una cuerda elástica, con extremos fijos, sujeta no sólo a la fuerza elástica usual, de intensidad proporcional al estiramiento, sino también a un término corrector no lineal. La cuestión a estudiar era cómo el movimiento global termalizaría al cabo del tiempo. Se trataba, por tanto, de verificar un hecho que constituía un acto de fe en mecánica estadística: la creencia de que cuando un sistema mecánico, con varios grados de libertad y cercano a una posición de equilibrio estable, es sometido a una interacción no lineal genérica, ésta termalizará su energía total, es decir, la energía estaría equidistribuida entre los modos normales del correspondiente sistema linealizado. Fermi pensaba que había demostrado este hecho, [23].

El experimento fue llevado a cabo por Fermi, Ulam y J. Pasta, quien programó el MANIAC I. El resultado del hoy conocido como experimento de Fermi-Pasta-Ulam (FPU para abreviar) fue completamente diferente a lo que se esperaba. Los detalles del planteamiento y de los cálculos realizados pueden verse en el artículo original [24]. El experimento se realizó discretizando la cuerda en un número finito de puntos, de tal manera que las ecuaciones en derivadas parciales que describen el movimiento de la cuerda pasan a ser un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$m\ddot{y}_n = K(y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n)[1 + \alpha(y_{n+1} - y_{n-1})] \quad (1.6)$$

donde  $y_n = y_n(t)$  con  $n = 1 \dots N-1$  e  $y_0 = y_N = 0$ . Las condiciones iniciales que se introdujeron en la computadora correspondían a los valores iniciales dados por  $y_n(0) = \sin(\frac{n\pi}{N})$ ,  $\dot{y}_n(0) = 0$  con  $N = 64$ . La variable  $y_n$  en (1.6) representa el desplazamiento de la  $n$ -ésima masa respecto del equilibrio.

El resultado del experimento fue que la energía, inicialmente concentrada en el primer modo, no se distribuyó por igual entre todos los modos sino que fue pasando sucesivamente, casi en su totalidad, de modo en modo. De esta manera, al cabo de un cierto tiempo la energía había retornao al primer modo con una exactitud del 99 % y el proceso se reiniciaba. Esta aparente paradoja en el experimento FPU se llamado desde entonces *problema FPU*. Se puede encontrar una revisión reciente sobre el problema FPU en [5].

La explicación del problema FPU no fue completada hasta diez años después en el famoso artículo de M. Kruskal y N. Zabusky de 1965 [73]. Kruskal y Zabusky obtuvieron el límite continuo del problema FPU (ver también [49], [1, págs. 17-18]) llegando a una ecuación diferencial en derivadas parciales equivalente a la ecuación KdV (1.4). El estudio numérico hecho por Zabusky y Kruskal en [73] reveló la presencia de soluciones de la ecuación KdV de tipo onda solitaria que preservan su identidad (salvo un posible cambio de fase) tras interraccionar no linealmente con otras ondas solitarias. Estos autores introdujeron por primera vez el término solitón para estas ondas solitarias debido a su comportamiento análogo al de las partículas, en particular encontraron que la solución de la ecuación KdV dada por (1.5) es un solitón. Estos resultados numéricos dieron origen a un desarollo posterior de ciertas técnicas para tratar dichas situaciones, generando nuevas áreas en la Matemática Aplicada y Física Matemática.

## Capítulo 2

# Estudio de los modelos escalares no lineales en (1+1) dimensiones

Vamos a introducir en este capítulo los conceptos generales que serán empleados después, pero en primer lugar tenemos que hacer un comentario de el porqué la dimensión (1+1) es tan especial para campos escalares.

### 2.1. Teorema de Derrick

El físico G.H. Derrick demostró en 1964 [20] que las soluciones de energía finita de las ecuaciones de ondas no lineales para campos escalares son estables sólo en 1+1 dimensiones. Consideramos los campos escalares  $\Phi \in Maps(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^N)$ , donde  $Maps(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^N)$  indica el conjunto de aplicaciones continuas de  $\mathbb{R}^{n+1}$  a  $\mathbb{R}^N$ .

**Teorema 2.1** (Teorema de Derrick). *Sea  $\phi$  un campo escalar de  $N$  componentes,  $\Phi(x_\mu) = (\phi^1(x_\mu), \dots, \phi^N(x_\mu))$  donde  $x_\mu = (t, x_j)$ , con  $j = 1, \dots, n$ , y  $U[\Phi] = U[\phi^1, \dots, \phi^N]$  es el funcional energía potencial que es no negativo y sólo es cero para los estados fundamentales (vacíos) de la teoría. Luego, para  $n \geq 2$ , las únicas soluciones no singulares, independientes del tiempo y de energía finita de las ecuaciones de movimiento para el campo  $\phi$  derivadas de  $\mathcal{L}$  son los estados fundamentales.*

Recalcamos que el teorema de Derrick sólo imposibilita la existencia de soluciones independientes del tiempo de energía finita en el caso de emplear campos escalares en  $(n+1)$  dimensiones con  $n > 1$ , pero no dice nada sobre la existencia de soluciones dependientes del tiempo. En [40] se realiza la primera construcción de modelos de campos escalares que poseen soluciones de energía finita y son, además, dependientes del tiempo.

Una extensión del teorema de Derrick, para el caso de una densidad lagrangiana que contenga campos escalares y campos gauge, puede verse en [17, págs. 198-205 y 398-400]. La extensión a campos gauge es importante por varias razones:

- En (3+1) dimensiones tener campos gauge es la única posibilidad de tener soluciones independientes del tiempo y de energía finita.
- La visión actual de las cuatro interacciones fundamentales es mediante teorías gauge.

## 2.2. Dinámica en teorías escalares en (1+1) dimensiones

El teorema de Derrick, comentado anteriormente, nos dice que sólo en teorías escalares en (1+1) dimensiones existen soluciones de energía finita e independientes del tiempo. A continuación vamos a estudiar la dinámica de los campos escalares, que por simplicidad, salvo que se diga lo contrario, consideraremos de una sola componente, sometidos a un funcional energía potencial dado por  $U[\phi]$ .

Consideremos la dinámica del campo escalar real  $\phi$  dada por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - U[\phi] \quad \text{con } \mu = 0, 1 \quad (2.1)$$

Suponemos que  $U[\phi]$  tiene un valor mínimo y añadiendo una constante, lo cual no cambia la dinámica del campo  $\phi$ , podemos llevar el valor mínimo de  $U[\phi]$  a 0. Por lo tanto, a partir de ahora consideraremos un funcional energía potencial que verifica que  $U[\phi] \geq 0$ .

La ecuación de movimiento para el campo  $\phi$ , ecuación de Euler-Lagrange, viene dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\delta U[\phi]}{\delta \phi} = 0 \quad (2.2)$$

donde hemos empleado la métrica para el espacio de Minkowski dada por

$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Además, entendemos por  $\frac{\delta U[\phi]}{\delta \phi}$  la derivada de Fréchet del funcional  $U[\phi]$  respecto del campo  $\phi$ . La definición formal y las reglas de diferenciabilidad para la diferencial de Fréchet pueden encontrarse en [27, págs. 37-39]. El lector también podría consultar, entre otros libros, [25, 14] para profundizar en el Cálculo de Variaciones.

Los fenómenos más interesantes, como ya hemos comentado en la introducción, ocurren en el caso en que  $U[\phi]$  tenga más de un mínimo.

La acción de la densidad lagrangiana (2.1) viene dada por

$$S[\phi] = \int d^2x \left( \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - U[\phi] \right) \quad (2.3)$$

Vamos a considerar, a no ser que se diga lo contrario, el sistema de unidades naturales definidas por  $c = \hbar = 1$ . Usando este sistema podemos expresar cualquier otra magnitud en términos de una única escala. Elegimos como escala para todas las magnitudes con dimensiones la masa  $M$ , aunque, equivalentemente, se podría tomar la energía  $E$  ya que  $E = mc^2 = m$ . Dado que  $1 = [c] = \frac{L}{T}$  tenemos que  $L = T$  y dado que  $1 = [\hbar] = ET = M[c]^2T = MT$  tenemos que  $T = M^{-1}$ . Podemos concluir que  $L = M^{-1}$ .

La acción  $S$  tiene dimensiones de  $\hbar$ , (se deduce trivialmente del *path integral de Feynman* ya que el argumento de la exponencial del integrando que aparece en la integral de Feynman,  $i\frac{S}{\hbar}$ , debe ser adimensional) y dado que en nuestro caso tenemos que  $\hbar = 1$ , concluimos que la acción es una cantidad adimensional.

El término cinético de la acción (2.3) viene dado por

$$S[\phi] = \int d^2x \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$$

Esta acción nos permitirá conocer la dimensión del campo escalar  $\phi$ . Veamos, pues, el análisis dimensional de la acción anterior. La medida de la integral anterior,  $d^2x$ , tiene dimensiones de  $M^{-2}$ ,  $[d^2x] = L^2 = M^{-2}$ , y las derivadas  $\partial_\mu$ ,  $\partial^\mu$  tienen dimensiones de  $M$ ,  $[\partial_\mu] = [\partial^\mu] = L^{-1} = M$ . Por lo tanto deducimos, de la condición de que la acción es adimensional, que el campo  $\phi$  es adimensional. Luego usando la adimensionalidad de  $\phi$  podemos ver que cualquier funcional de energía potencial  $U[\phi]$  es renormalizable en (1+1) dimensiones. En particular, L.J. Boya y J. Casahorrán estudian en [10] las soluciones tipo kink en dos familias distintas de  $U[\phi]$ .

La acción (2.3) es invariante bajo las traslaciones espacio-temporales, luego por el teorema de Noether tenemos una corriente conservada, el *tensor energía-momento*  $T^{\mu\nu}$ . Existe una enorme cantidad de literatura sobre teoría cuántica de campos, podemos citar por ejemplo [55, 40, 50, 70]. El tensor de energía-momento viene dado por:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.4)$$

La integral de  $T^{\mu 0}$  a todo el espacio nos da los momentos. Los momentos vienen dados por el funcional *bivector energía-momento*  $P^\mu[\phi]$  para la configuración del campo  $\phi$ .

$$P^\mu[\phi] = \int dx T^{\mu 0} = \int dx (\partial^\mu \phi \partial^0 \phi - \eta^{\mu 0} \mathcal{L}) \quad (2.5)$$

que corresponden al funcional energía,  $P^0[\phi]$ , y al funcional momento lineal,  $P^1[\phi]$ , dados por

$$\begin{aligned} P^0[\phi] &= E[\phi] = \int dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + U[\phi] \right) \\ P^1[\phi] &= - \int dx \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La acción (2.3) también es invariante bajo transformaciones de Lorentz (boost) dadas por

$$\begin{aligned} t' &= \gamma (t - vx) \\ x' &= \gamma \left( x - \frac{v}{c^2} t \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ . Tanto en (2.7) como en  $\gamma$  tomaremos  $c = 1$ . Las transformaciones dadas por (2.7) forman el grupo de Lorentz en (1+1) dimensiones,  $SO(1, 1)$ . El grupo de Poincaré en (1+1) dimensiones, denotado por  $\mathcal{P}_1^1$ , se define como el producto semidirecto del grupo de Lorentz  $SO(1, 1)$  y el grupo

$\mathbb{R}^{1,1}$  de traslaciones en una dimensión espacial y una dimensión temporal. Luego tenemos que

$$\mathcal{P}_1^1 = SO(1, 1) \ltimes \mathbb{R}^{1,1}$$

Estamos interesados en estudiar las configuraciones del campo  $\phi$  que poseen una *energía total finita*. La expresión del funcional energía ya hemos visto que viene dada por

$$E[\phi] = \int dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + U[\phi] \right) \quad (2.8)$$

la condición de energía finita implica, sobre la configuración del campo  $\phi$ , que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad U[\phi] \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

Denotamos por  $\phi_{\pm\infty}$  el valor de la configuración de campo  $\phi$  en el infinito, es decir,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x, t) = \phi_{\pm\infty}$ . Estos valores se denominarán a partir de ahora *valores asintóticos*. Vemos que el valor asintótico del campo  $\phi$ ,  $\phi_{\pm\infty}$ , debido a las dos primeras condiciones de (2.8) no depende ni de  $x$  ni de  $t$ , y además por la última condición de (2.8) tenemos que  $\phi_{\pm\infty}$  es uno de los mínimos del funcional energía potencial,  $U(\phi_{\pm\infty}) = 0$ .

Denotamos por  $\mathcal{C}$  al conjunto de todas las configuraciones del campo  $\phi$  de energía finita

$$\mathcal{C} = \{ \phi \in Maps(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | E[\phi] < \infty \} = \{ \phi \in Maps(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \phi_{\pm\infty} = cte, U[\phi_{\pm\infty}] = 0 \} \quad (2.10)$$

De aquellas configuraciones presentadas por el campo  $\phi$  de energía finita serán importantes las configuraciones que se corresponden con los mínimos absolutos del funcional energía (2.8), debido a que, desde el punto de vista cuántico, estas soluciones clásicas proporcionan el valor esperado del operador campo en el estado fundamental de la teoría. Estas soluciones clásicas se denominan *configuraciones del vacío*.

### 2.3. Configuraciones del vacío y algunas nociones topológicas

**Definición 2.1.** Definimos las configuraciones del vacío, denotadas por  $\phi_0$ , a las configuraciones de los campos que, usando  $U[\phi] \geq 0$ , verifican

$$E[\phi_0] = 0 \quad (2.11)$$

Usando (2.11) y (2.8) vemos que se debe de cumplir que:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial x} = \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad U(\phi_0) = 0 \quad (2.12)$$

Dado que  $U[\phi] \geq 0$  y de la segunda condición en (2.12) vemos que se tiene  $\frac{\partial U[\phi]}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_0} = 0$ , luego las configuraciones del vacío son los mínimos de  $U$ .

Recordando la definición de  $\phi_{\pm\infty}$  vemos que los valores asintóticos de las configuraciones del campo están entre las configuraciones del vacío.

Consideremos fluctuaciones, denotadas por  $\delta\phi(x, t)$ , alrededor de una de las posibles configuraciones clásicas del vacío  $\phi_0$ .

$$\phi(x, t) = \phi_0 + \delta\phi(x, t) \quad (2.13)$$

Introduciendo (2.13) en (2.1) y despreciando los términos superiores al orden cuadrático en  $\delta\phi$ , debido a que suponemos que la perturbación sobre  $\phi_0$  es pequeña, obtenemos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \delta\phi \partial_\mu \delta\phi - \frac{1}{2} \frac{\delta^2 U[\phi_0]}{\delta\phi^2} (\delta\phi)^2 \quad (2.14)$$

La densidad lagrangiana (2.14) nos muestra que, dentro de la aproximación de pequeñas fluctuaciones alrededor del vacío, el campo  $\delta\phi(x, t)$ , se comportan como si fuera un campo libre. Esto significa que, una vez cuantizada la teoría, los campos  $\delta\phi$  vendrán representadas por partículas escalares de masa  $m_\phi$  dada por

$$m_\phi = \sqrt{\frac{\delta^2 U[\phi_0]}{\delta\phi^2}} \quad (2.15)$$

donde, a partir de ahora para agilizar la notación, emplearemos  $\frac{\delta^n U[\phi_c]}{\delta\phi^n}$  para indicar  $\frac{\delta^n U[\phi_c]}{\delta\phi^n} \Big|_{\phi=\phi_c}$ . Las partículas escalares de masa  $m_\phi$  representan, por lo tanto, las excitaciones elementales del campo  $\phi$ .

**Definición 2.2.** Definimos la variedad del vacío, denotada por  $\mathcal{M}$ , al subconjunto del espacio  $\mathcal{C}$  formado por las configuraciones del vacío

$$\mathcal{M} = \{\phi \in \mathcal{C} \mid U[\phi] = 0\} \quad (2.16)$$

Consideremos, por un momento, un caso más general en el que  $\Phi \in Maps(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^N)$ , es decir,  $\Phi(x_\mu)$  es un campo escalar en  $n$  dimensiones espaciales y con  $N$  componentes dado por  $\Phi(x_\mu) = (\phi^1(x_\mu), \dots, \phi^N(x_\mu))$ . La acción para el campo  $\Phi$  vendrá dada por

$$\mathcal{S}[\Phi] = \int d^{n+1}x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \cdot \partial^\mu \Phi - U[\Phi] \right) \quad (2.17)$$

La configuración del campo  $\Phi$  tendrá una energía dada por

$$E[\Phi] = \int d^{n+1}x \left( \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U[\Phi] \right) \quad (2.18)$$

Las configuraciones  $\Phi$  que verifican el funcional energía

$$E[\Phi] = \int d^n x \left( \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + U[\Phi] \right) \quad (2.19)$$

se denominan *configuraciones estáticas*, es decir,  $\Phi$  es independiente del tiempo.

Sea  $G$  el grupo de transformaciones que actuán sobre el espacio interno  $N$ -dimensional del campo  $\Phi$  estático tal que dejan invariante el funcional energía dado en (2.19), es decir

$$E[\Phi] = E[\Phi^g] \quad (2.20)$$

donde  $g$  es un elemento del grupo  $G$  y por  $\Phi^g$  entendemos el campo  $\Phi$  después de haberle aplicado la transformación  $g$ . El grupo  $G$  es una simetría de la acción (2.17) si (2.20) es cierta para todo  $g \in G$  y para cualquier configuración estática del campo  $\Phi$ . Sea  $\Phi_0$  una configuración del vacío,  $\Phi_0 \in \mathcal{M}$ , luego  $E[\Phi_0] = 0$  y por (2.20) vemos que  $E[\Phi_0^g] = 0$ , luego  $\Phi_0^g \in \mathcal{M}$ . Denotamos por  $\mathcal{O}_{\Phi_0}$  al conjunto de todas las configuraciones del vacío que se obtienen como transformación de  $\Phi_0$  mediante los elementos  $g$  de  $G$ , es decir,  $\mathcal{O}_{\Phi_0}$  es la *órbita de  $\Phi_0$*

$$\mathcal{O}_{\Phi_0} = \{\phi_0^g \in \mathcal{M} | g \in G\} \quad \text{de forma que} \quad \mathcal{M} = \bigcup_{\Phi_0 \in \mathcal{M}} \mathcal{O}_{\Phi_0} \quad (2.21)$$

Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ , admitiendo la posibilidad de que sea trivial, cuyos elementos  $h \in H$  dejan fijo  $\Phi_0$ , es decir,  $\Phi_0^h = \Phi_0$ . El grupo  $H$  recibe el nombre del *grupo estabilizador (o grupo pequeño)* de  $\Phi_0$ .

Por lo tanto un elemento  $gh \in G$  actuando sobre  $\Phi_0$  da la misma configuración de vacío que actuando sólo con  $g \in G$  ya que  $\Phi_0^{hg} = (\Phi_0^h)^g = \Phi_0^g$ . Hemos visto que todos los elementos de  $\mathcal{M}$  de la forma  $\Phi_0^g$ , para cualquier  $g$ , tienen la misma energía que  $\Phi_0$  pero no son todos iguales entre sí. Todos los elementos de  $G$  de la forma  $gh$  para un  $g \in G$  están dentro del conjunto  $\{gh | g \in G\}$  denominado por  $gH$  y que se denomina *coset a izquierdas de  $g$* . El conjunto  $gH$  es una clase de equivalencia asociada a la relación de equivalencia sobre  $G$  dada por  $g_1 \sim g_2$  si  $g_2 = g_1 h$ . La definición de los cosets a derechas  $Hg$  se hace de forma análoga. El *conjunto cociente* es el conjunto formado por todos los cosets y se denota  $G/H$ . Dos elementos distintos en  $G/H$ , es decir, en distintas clases de equivalencia nos induce, por todo lo comentado anteriormente, dos elementos distintos en  $\mathcal{M}$ ,  $\Phi_0^{g_1} \neq \Phi_0^{g_2}$ , luego se puede probar que  $\mathcal{M} \cong G/H$ .

La equivalencia  $\mathcal{M} \cong G/H$  nos permite conectar el grupo de las simetrías  $G$  de la acción (2.17) con la variedad de vacíos  $\mathcal{M}$  y poder estudiar la topología de  $\mathcal{M}$  en términos de las simetrías del modelo.

La topología de una variedad,  $\mathcal{V}$ , se puede estudiar, en parte, mediante sus *grupos de homotopía*,  $\pi_d(\mathcal{V}, x_0)$ ,  $d = 0, 1, 2, \dots$ . La idea es considerar maps desde  $\mathbb{S}^d$  (la  $d$ -esfera) a  $\mathcal{M}$  tal que la imagen de una cualquiera de las aplicaciones continuas contenga al punto  $x_0 \in \mathcal{M}$ . Dos maps se dicen que son *homótopos* si dado un map podemos deformarlo de forma continua y obtener el otro. Podemos definir una relación de equivalencia en el conjunto formado por todos los maps de  $\mathbb{S}^d$  a  $\mathcal{M}$  y el conjunto formado por todas las clases de equivalencia, denominadas *clases de homotopía*, es  $\pi_d(\mathcal{M}, x_0)$ , el  $d$ -ésimo grupo de homotopía. En  $\pi_d(\mathcal{M}, x_0)$ , excepto para  $d = 0$ , se puede definir una operación binaria y darle una estructura de grupo. Para más detalles se puede consultar [30, pág. 21] y también se pueden consultar [63, pág. 111], [69, pág. 84] donde se calculan los grupos de homotopía para varias variedades.

Definimos  $S_\infty^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \rightarrow \infty\}$ , donde, claramente,  $S_\infty^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . Los valores asintóticos de la configuración del campo  $\Phi$ ,  $\Phi_\infty$ , los podemos expresar como  $\Phi_\infty \equiv \Phi(x \in S_\infty^{n-1})$ . Las configuraciones  $\Phi_\infty$ , tomarán distintos valores en las distintas direcciones en las que nos aproximemos al infinito, pero, en cualquier caso, todos tendrán energía total cero,  $\Phi_\infty \in \mathcal{M}$ . Podemos ver cada

una de las configuraciones asintóticas del campo como un map entre la esfera  $S_\infty^{n-1}$  y la variedad de vacíos  $\mathcal{M}$

$$\Phi_\infty : S_\infty^{n-1} \longrightarrow \mathcal{M} \quad (2.22)$$

El conjunto formado por todas las clases de homotopía de los maps (2.22) forman el  $(n-1)$ -ésimo grupo de homotopía.

Supongamos que tenemos dos configuraciones estáticas  $\Phi, \tilde{\Phi} \in \text{Map}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$  y que sus valores asintóticos,  $\Phi_\infty$  y  $\tilde{\Phi}_\infty$ , son homótopas, entonces, podemos deformar de manera continua el map  $\Phi$  hasta alcanzar el map  $\tilde{\Phi}$ , es decir, el map  $\Phi$  y  $\tilde{\Phi}$  son homótopos. Por lo tanto, el carácter topológico de  $\Phi$  queda determinado por la clase de homotopía del map  $\Phi_\infty$  el cual es un elemento de  $\pi_{n-1}(\mathcal{M})$ .

Si  $H$  es un subgrupo *normal* en  $G$ , entonces  $G/H$  tiene estructura de grupo y  $\mathcal{M}$  también adquiere una estructura de grupo. En este caso, podemos definir el producto entre dos maps de  $S^0$  a  $\mathcal{M}$  como un map de  $S^0$  a  $\mathcal{M}$  donde la imagen de cada elemento de  $S^0$  es el producto de las dos imágenes de los maps que estamos multiplicando. Así en este supuesto de  $H$  normal en  $G$  tenemos que  $\pi_0(\mathcal{M})$  es un grupo. El  $\pi_0(\mathcal{M})$  nos da información sobre las *componentes conexas* de  $\mathcal{M}$ . En [9] se revisa la relación entre la homotopía y los solitones en varias dimensiones.

## 2.4. Soluciones de energía finita

Volvemos, en este apartado, a nuestro modelo en  $(1+1)$  dimensiones con una componente  $N = 1$  dado por la acción (2.3). Tomaremos la definición de onda solitaria dada en [54, pág. 13].

**Definición 2.3.** *Llamaremos onda solitaria a las soluciones no singulares de la ecuación en derivadas parciales (2.2) cuya densidad de energía permanece localizada y puede ser escrita bajo la forma*

$$\epsilon(x, t) = \epsilon(x - vt) \quad (2.23)$$

donde  $v$  es interpretado como la velocidad de dicha onda solitaria. Es decir, la densidad de energía se mueve a velocidad constante sin distorsionarse.

Vamos a dar una primera definición de un solitón y de kink. Siguiendo a [1, pág. 19]

**Definición 2.4.** *Un solitón es una onda solitaria que preserva asintóticamente su forma y su velocidad bajo interacciones no lineales con otras ondas solitarias, o de manera más general, con otra perturbación localizada arbitraria.*

y ahora definimos los kinks de la siguiente manera

**Definición 2.5.** *Un kink es toda onda solitaria que no es un solitón*

Vamos a aplicar las ideas topológicas de la Sec. 2.3 a este caso,  $N = n = 1$ . La esfera del infinito viene dada sólo por dos puntos,  $S_\infty^0 = \{+\infty, -\infty\}$ , luego  $\phi_\infty$  es un map de dos puntos a  $\mathcal{M}$ . Las clases de homotopía de  $\phi_\infty$  forma el grupo  $\pi_0(\mathcal{M})$  que nos indican las distintas componentes conexas de  $\mathcal{M}$ . Los distintas componentes conexas de  $\mathcal{M}$  se pueden clasificar en función de los distintos valores que pueden tomar  $\phi(+\infty) \equiv \phi_{+\infty}$  y  $\phi(-\infty) \equiv \phi_{-\infty}$ . Tenemos

que, desde un punto de vista topológico, las configuraciones de los campos  $\phi$  vienen caracterizadas por elementos de  $\pi_0(\mathcal{M}) \times \pi_0(\mathcal{M})$ . Supongamos que tenemos una configuración del campo  $\phi$  cuyos valores asintóticos vienen dados por  $(\phi_{+\infty}, \phi_{-\infty}) \in \pi_0(\mathcal{M}) \times \pi_0(\mathcal{M})$ , en el caso en que  $\phi_{+\infty} = \phi_{-\infty}$  tendremos que la configuración del campo  $\phi$  puede deformarse de forma continua hasta alcanzar uno de los dos vacíos, es decir,  $\phi$  está en la misma clase de homotopía que la configuración del vacío  $\phi_{+\infty}$ . Ahora supongamos que  $\phi_{+\infty} \neq \phi_{-\infty}$ , entonces el campo  $\phi$  conecta el vacío  $\phi_{-\infty}$  en  $-\infty$  con el vacío  $\phi_{+\infty}$  en  $+\infty$ . En este último caso no podemos deformar de manera continua la configuración  $\phi$  hasta alcanzar uno de los vacíos  $\phi_{+\infty}$  ó  $\phi_{-\infty}$ . La evolución temporal del campo  $\phi$  puede entenderse como una deformación continua del campo que verifica las ecuaciones de movimiento para  $\phi$  y que preserva la energía finita. Por lo tanto podemos decir que las configuraciones del campo  $\phi$  que cuya evolución temporal los lleva a los valores asintóticos  $\phi_{-\infty}$  y  $\phi_{+\infty}$  con  $\phi_{-\infty} = \phi_{+\infty}$  tiene la misma energía que ellos, es decir,  $E[\phi] = 0$ . Por el contrario, la configuración  $\phi$  cuyos valores asintóticos son distintos no podrá ser llevada, mediante la evolución temporal, a uno de dichos vacíos, luego  $E[\phi] > 0$ . Recordemos que dado que la expresión para el funcional energía dado en (2.8) es definido positivo,  $E[\phi] \geq 0$ , tenemos que las configuraciones de energía finita pueden tener energía cero, elementos de  $\mathcal{M}$ , o bien pueden tener energía finita mayor que cero. En resumen, podemos decir que las configuraciones del campo que tienen sus valores asintóticos iguales tienen energía cero y las que los tienen distintos tienen energía positiva. Además, debemos notar también que la evolución natural es la única deformación continua que preserva la energía finita.

Ya vimos que la clase de homotopía de la configuración  $\phi$  viene determinada por sus valores asintóticos  $\phi_{-\infty}, \phi_{+\infty}$  y también vimos que dos configuraciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  con sus valores asintóticos no homótopos no pueden ser deformadas continuamente la una en la otra, por lo tanto, pertenecen a clases de homotopía distinta. Tendremos tantas clases de homotopía como valores posibles puedan tomar  $\phi_{-\infty}$  y  $\phi_{+\infty}$ . El espacio de soluciones de energía finita,  $\mathcal{C}$ , se descompondrá en tantos sectores topológicamente desconexos como el orden del grupo producto cartesiano  $\pi_0(\mathcal{M}) \times \pi_0(\mathcal{M})$ . En particular, si la variedad de vacíos tiene  $r$  elementos,  $\mathcal{M} = \{v_1, \dots, v_r\}$ , tendremos  $r^2$  sectores topológicamente desconexos. Los sectores topológicos vienen caracterizados por un número entero,  $Q_T$ , denominado *carga topológica*. En la Sec. 2.5 daremos una definición precisa de la carga topológica. El mínimo valor no trivial que puede tomar  $Q_T$  es  $|Q_T| = 1$ . Veremos, más adelante, que las soluciones de energía finita positiva que poseen  $|Q_T| = 1$  son aquellas que conectan dos mínimos consecutivos de  $U[\phi]$ . Ahora podemos dar una definición más precisa de lo que es un kink y un solitón

**Definición 2.6.** *Un solitón es una onda solitaria de energía finita positiva que conecta dos mínimos contiguos del funcional energía potencial  $U[\phi]$  y que preserva asintóticamente su forma y su velocidad bajo interacciones no lineales con otras ondas solitarias, o de manera más general, con otra perturbación localizada arbitraria.*

y ahora redefinimos también los kinks de la siguiente manera

**Definición 2.7.** *Un kink es toda onda solitaria de energía finita positiva que conecta asintóticamente dos mínimos consecutivos de  $U[\phi]$  y que no es un solitón*

Las configuraciones del campo  $\phi$  que tienen energía finita positiva y que se construyen a partir de dos o más kinks/solitones conectan dos mínimos no contiguos (salvo el caso del modelo  $\phi^4$ , como veremos) y se denominan configuraciones *multikink/multisolitón*.

En general, un modelo con una variedad de vacíos con  $r$  elementos,  $\mathcal{M} = \{v_1, \dots, v_r\}$ , tendrá  $2(r-1)$  kinks/solitones.

Comprobaremos en el siguiente capítulo que, como dice Coleman en [17, pág. 186], las soluciones tipo ondas solitarias en el modelo  $\lambda\phi^4$  son kinks y las soluciones tipo ondas solitaria en el modelo Seno-Gordon son solitones.

La condición (2.23) nos permite darnos cuenta de que las soluciones buscadas tipo kink/solitón pueden obtenerse a partir de soluciones estáticas (independientes del tiempo) mediante un boost de Lorentz dado por (2.7) ya que, como hemos dicho, la acción (2.1) es invariante bajo esta transformación. Denotamos la solución estática por  $\phi(x)$ . Las soluciones  $\phi(x)$  corresponden a las soluciones de la ecuación en derivadas parciales no lineal (2.2) independiente del tiempo, dadas por

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\delta U[\phi]}{\delta\phi} \quad (2.24)$$

El funcional energía para una configuración de campo estático es

$$E[\phi] = \int dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + U[\phi] \right) \quad (2.25)$$

el cual es (2.19) para el caso  $n = 1$  y  $N = 1$ .

Hemos visto anteriormente que  $\phi(x)$  tienen energía finita positiva, y por lo tanto de (2.25) obtenemos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) \equiv \phi_{\pm\infty} \in \mathcal{M}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \quad (2.26)$$

El conjunto de todos los kink con los mismos valores asintóticos, es decir, que son deformaciones continuas unos de otros, forma la *variedad kink*  $\mathcal{C}_K$ . En general, podemos expresar el espacio de soluciones de energía finita  $\mathcal{C}$  de la siguiente manera

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i,j=1}^r \mathcal{C}^{ij} \quad (2.27)$$

donde  $\mathcal{C}^{ij}$  indica el conjunto de soluciones de energía finita que conecta el vacío  $i$  en  $-\infty$  con el vacío  $j$  en  $+\infty$ . Además notamos que la unión debe ser disjunta y que la variedad de vacíos tiene  $r$  elementos.

Los kinks y los solitones también pueden ser encontrados, aunque en este trabajo no se discute este punto, en modelos supersimétricos. Por ejemplo, en [11] los autores realizan un estudio sobre la existencia de kinks en teorías supersimétricas bidimensionales.

Vamos a aplicar ahora el siguiente “truco”

$$\begin{aligned}
E[\phi] &= \int dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + U[\phi] \right) = \\
&= \int dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2U[\phi]} \right)^2 \pm \sqrt{2U[\phi]} \frac{d\phi}{dx} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2U[\phi]} \right)^2 \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2U[\phi]}
\end{aligned}$$

dado que  $U[\phi] \geq 0$  tenemos que la segunda integral es positiva, así que el mínimo de energía se alcanza para la configuración del campo que verifica la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2U[\phi]} = 0 \quad (2.28)$$

y además, la configuración  $\phi$  también verifica que  $\phi(+\infty)$  y  $\phi(-\infty)$  son dos mínimos consecutivos.

Este truco de reducir la ecuación en derivadas parciales de segundo orden (2.24) a una de primer orden (2.28) fue descubierto por Bogomolnyi en [6].

Integrando la ecuación diferencial (2.28) obtenemos que

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{1}{\sqrt{2U[\phi]}} d\phi \quad (2.29)$$

La configuración del campo  $\phi$  que verifica la ecuación diferencial anterior (2.29) poseerá una energía dada por

$$E[\phi] = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2U[\phi]} \quad (2.30)$$

La ecuación (2.29) nos muestra que existen dos tipos de configuraciones del campo  $\phi$  que tienen la misma energía finita estática dada por (2.30): La correspondiente al signo + (configuración del campo creciente) que se denomina *kink*,  $\phi_{\text{kink}}$ , y la corresponde al signo - (configuración del campo decreciente) y denominada *antikink*,  $\phi_{\text{antikink}}$ . En ambos casos la constante de integración  $x_0$  representa el centro de la configuración del campo. Además dado que estas soluciones son de energía finita tienen una anchura  $\omega$  característica.

Si el kink o el antikink se desplazan a velocidad constante  $v$  podemos obtener las soluciones dependientes del tiempo sin más que realizar un boost de Lorentz (con  $c = 1$ ) sobre las soluciones estáticas,  $\phi(x)_{\text{antikink}}$  y  $\phi(x)_{\text{kink}}$

$$\begin{aligned}
\phi(x, t)_{\text{antikink}} &= \phi \left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right)_{\text{antikink}} = \phi(\gamma\theta)_{\text{antikink}} \\
\phi(x, t)_{\text{kink}} &= \phi \left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right)_{\text{kink}} = \phi(\gamma\theta)_{\text{kink}}
\end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $\theta = x - vt$ .

La energía para la configuración  $\phi(x, t)$  dada por (2.31) del campo del kink/antikink vendrá dada por

$$\begin{aligned}
E[\phi] &= \int dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + U[\phi] \right) = \\
&= \int dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \mp \sqrt{2U[\phi]} \right)^2 \pm \sqrt{2U[\phi]} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \\
&= \int dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \mp \sqrt{2U[\phi]} \right)^2 \right] \pm \int dx \sqrt{2U[\phi]} \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}
\end{aligned}$$

hacemos el cambio de variable de integración de  $x$  a  $\theta$  y obtenemos que

$$\begin{aligned}
E[\phi] &= \int d\theta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \pm \sqrt{2U[\phi]} \right)^2 \right] \mp \int d\theta \sqrt{2U[\phi]} \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \\
&= \int d\theta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mp \sqrt{2U[\phi]} \right)^2 \right] \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} \gamma d\phi \sqrt{2U[\phi]}
\end{aligned}$$

El funcional energía anterior, para  $\phi(+\infty)$  y  $\phi(-\infty)$  elementos de  $\mathcal{M}$  continuos, también se minimiza en el caso en que las configuraciones dadas en (2.31) no dependan explicitamente del tiempo y se verifique la ecuación

$$\gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \pm \sqrt{2U[\phi]} = 0 \quad (2.32)$$

La ecuación diferencial (2.32) se puede ver como la ecuación de movimiento para el kink/antikink dinámico.

La energía mínima asociada a la configuración del campo kink/antikink dinámico vendrá dada por

$$E[\phi] = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} \gamma d\phi \sqrt{2U[\phi]} \quad (2.33)$$

Calculemos ahora el funcional bimomento  $P^\mu[\phi]$  con  $\mu = 0, 1$  para las soluciones kink y antikink. Consideremos, en primer lugar, que el kink/antikink está en reposo,  $v = 0$ , luego  $P^0[\phi_{K/AK}] = M_{cl}$  donde  $M_{cl}$  representa la masa del kink/antikink. Donde hemos empleado la notación  $\phi_K$  para  $\phi_{kink}$  y  $\phi_{AK}$  para  $\phi_{antikink}$

$$\begin{aligned}
M_{cl} &= P^0[\phi_{K/AK}] = \int dx T^{00} = \int dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_{K/AK}}{\partial x} \right)^2 + U[\phi_{K/AK}] \right) = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2U[\phi_{K/AK}]} \\
P^1[\phi_{K/AK}] &= \int dx T^{01} = - \int dx \frac{\partial \phi_{K/AK}}{\partial t} \frac{\partial \phi_{K/AK}}{\partial x} = 0
\end{aligned} \quad (2.34)$$

dado que  $v = 0$ , debemos tomar las soluciones estáticas para  $\phi_{K/AK}$  obtenidas como soluciones de (2.28).

Supongamos que el kink/antikink se desplaza a  $v$  constante, entonces las configuraciones del campo vienen dadas por (2.31). Los funcionales  $P^1[\phi]$  y  $P^0[\phi]$  en este caso son:

$$\begin{aligned}
P^1[\phi_{K/AK}] &= \int dx T^{01} = - \int dx \frac{\partial \phi_{K/AK}}{\partial t} \frac{\partial \phi_{K/AK}}{\partial x} = v\gamma \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2U(\phi)} = M_{cl}\gamma v \\
P^0[\phi_{K/AK}] &= E[\phi_{K/AK}] = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} \gamma d\phi \sqrt{2U(\phi)}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

En este caso, hemos empleado que  $\frac{\partial \phi_{K/AK}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{K/AK}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \gamma v$ . Claramente se puede ver, usando (2.35), que

$$P^2 + M_{cl}^2 = E^2 \tag{2.36}$$

donde hemos empleado, por comodidad,  $P$  en vez de  $P^1[\phi_{K/AK}]$  y  $E$  en vez de  $E[\phi_{K/AK}]$ .

Comprobemos la expresión (2.36)

$$P^2 + M_{cl}^2 = v^2 \gamma^2 M_{cl}^2 + M_{cl}^2 = M_{cl}^2 (v^2 \gamma^2 + 1) = M_{cl}^2 \frac{1}{1 - v^2} = \frac{1}{1 - v^2} \left( \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} \gamma d\phi \sqrt{2U(\phi)} \right)^2 = E^2$$

Hemos visto que la configuración del campo tipo kink/antikink verifica (2.36), que es la relación de dispersión típica de las partículas relativistas, así que podemos decir que un kink representa una partícula libre con masa en reposo  $M_{cl}$ . Veremos en la sección siguiente que el antikink representa una antipartícula libre de masa en reposo  $M_{cl}$ .

## 2.5. Cargas topológicas

En la Sec. 2.4 introdujimos por primera vez el concepto de carga topológica de un sector topológico. Vimos que la carga topológica asociada a cada sector topológico es un número entero que caracteriza a las soluciones de energía finita contenidas en dichos sectores.

Acabamos de ver en la sección anterior que el kink y el antikink se comportan como partículas ya que verifican la relación de dispersión relativista típica de las partículas libres con masa en reposo  $M$ . Estas partículas existen a nivel clásico y son distintas de las que aparecen cuando cuantificamos la teoría clásica. Los kinks y antikinks se caracterizan por tener una estructura topológica no trivial a diferencia de las partículas que aparecen al cuantificar la teoría clásica. Las partículas de la teoría cuántica se pueden entender como la cuantificación de las perturbaciones del campo, que son deformaciones suaves respecto del vacío y debido a que son deformaciones suaves tienen la misma topología que el vacío, es decir, trivial.

El aspecto topológico de los kinks y antikinks se resume, como dijimos, en un número que se denomina *carga topológica* y se denota por  $Q_T$ . Esta carga  $Q_T$  se obtiene al integrar a todo el espacio la componente cero de una corriente,  $J^\mu$ , denominada *corriente topológica* dada por

$$J^\mu = \Lambda \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \tag{2.37}$$

donde  $\epsilon^{\mu\nu}$  es el tensor totalmente antisimétrico con  $\mu, \nu = 0, 1$  y  $\Lambda$  es una constante que nos permite expresar la carga topológica como números enteros y que depende del modelo bajo estudio. La corriente  $J^\mu$  es conservada debido a la antisimetría del  $\epsilon^{\mu\nu}$ .

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.38)$$

Las corrientes, que se obtienen a partir de transformaciones que dejan invariante la acción, se conservan debido a que las configuraciones del campo verifican la ecuación de movimiento (Teorema de Noether). La corriente (2.37) es automáticamente conservada independientemente del que el campo verifique o no las ecuaciones del movimiento. La corriente (2.37) sólo depende del los valores asintóticos del campo. Es decir, no existe ninguna simetría subyacente de la acción que permita obtener dicha corriente.

La carga topológica viene dada por la integral de la componente temporal de la corriente topológica, en este caso toma el valor

$$\begin{aligned} Q_T &= \int dx J^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Lambda \epsilon^{0\nu} \partial_\nu \phi = \Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \underbrace{\epsilon^{00}}_{=0} \partial_0 \phi + \underbrace{\epsilon^{01}}_{=1} \partial_1 \phi \right) = \\ &= \Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi = \Lambda (\phi(+\infty) - \phi(-\infty)) \end{aligned}$$

Luego hemos obtenido que

$$Q_T = \Lambda (\phi(+\infty) - \phi(-\infty)) \quad (2.39)$$

El kink vendrá dado por una expresión  $\phi(x, x_0, t)$  creciente, como ya vimos anteriormente, luego  $\phi(+\infty)$  será mayor que  $\phi(-\infty)$  y podremos decir que la carga topológica del kink,  $Q_T^K$  es un número positivo, que con la  $\Lambda$  adecuada al modelo que estemos estudiando, tendremos que  $Q_T^K = +1$ . Dado que el antikink es decreciente podemos decir que  $Q_T^{AK} = -1$ . Sabemos que  $Q_T \in \mathbb{Z}$ , luego tenemos que el kink y el antikink son las configuraciones del campo con  $|Q_T|$  más pequeña. Además, vemos que el antikink representa la antipartícula, con respecto a la carga topológica, del kink.

Los distintos valores que puede tomar  $Q_T$  depende del número de mínimos que tiene el funcional  $U[\phi]$ . Un caso extremo se da si  $U[\phi]$  tiene un único mínimo (teoría de campos lineal). Este mínimo será  $\phi = 0$  ya que  $U(\phi) \geq 0$ . Sabemos que los valores asintóticos de  $\phi$  deben de estar entre los mínimos del potencial luego tenemos que

$$\phi_{+\infty} = \phi_{-\infty} = 0 \implies Q_T = 0 \quad (2.40)$$

Vemos por lo tanto que una teoría de campos en (1+1) dimensiones con un funcional  $U[\phi]$  definido positivo y con un solo mínimo no tiene configuraciones de campo de energía finita topológicamente distintas del vacío. Otro caso extremo es una teoría en la que  $U[\phi] = 0 \quad \forall \phi$ , es decir, una teoría dada por la acción

$$S = \int d^2x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (2.41)$$

El funcional energía vendrá dado por

$$E[\phi] = \int dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (2.42)$$

Los vacíos, configuraciones del campo de mínima energía, vendrán dados por  $\phi_0 = A$  donde  $A$  es una constante arbitraria. Luego en este caso  $Q_T$  puede tomar cualquier valor. La teoría dada por la acción anterior tiene, una vez cuantizada, la función Wightman de dos puntos mal definida (divergente) que Coleman [16] interpretó como la ausencia de bosones de Goldstone en (1+1) dimensiones y la ausencia de ruptura espontánea de simetría. En [31] se hace una análisis sobre la veracidad de las suposiciones hechas por Coleman.

## 2.6. Fuerzas entre los kinks

Dado que el kink y el antikink tienen carga topológica de distinto signo parece razonable que exista una cierta interacción entre ellos. Calcularemos en esta sección la fuerza que se ejercen entre sí un kink y un antikink. Esta propiedad de los kink/antikink esta tratada en [68, pág. 10] y [46, pág. 115]

Consideremos por simplificar que el antikink esta centrado en  $x = 0$  y que el kink esta centrado en  $x = s > 0$  de forma que la separación entre ellos sea mucho mayor que la anchura del kink/antikink  $\omega$ . Empleando el ansatz aditivo [45] tenemos que la configuración multi kink estática del kink y del antikink viene dada por

$$\phi(x) = \phi_{AK}(x - 0) + \phi_K(x - s) + \phi(+\infty) \quad (2.43)$$

Aplicamos la segunda ley de Newton para conocer la fuerza como el momento lineal intercambiado,  $F = \frac{dP}{dt}$ , entre el kink y el antikink. Sabemos que el funcional momento lineal  $P[\phi]$  para la configuración  $\phi(x)$  viene dado por

$$P[\phi] = - \int_a^b dx \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.44)$$

donde  $a$  y  $b$  indican el segmento donde calculamos el funcional momento lineal.

Hallemos la derivada de  $P[\phi]$  respecto del tiempo

$$\begin{aligned} \frac{dP[\phi]}{dt} &= - \frac{d}{dt} \int_a^b dx \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \\ &= - \int_a^b dx \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

usando la ecuación del movimiento para  $\phi(x, t)$  dada en (2.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dP[\phi]}{dt} &= - \int_a^b dx \left( \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\delta U[\phi]}{\delta \phi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} \right) = \\ &= - \int_a^b dx \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \underbrace{\frac{\delta U[\phi]}{\delta \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}}_{\frac{dU[\phi]}{dx}} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

y dado que la configuración  $\phi$  en (2.43) es estática,  $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ , tenemos que (2.46) se puede expresar como

$$\frac{dP[\phi]}{dt} = - \int_a^b dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 - U[\phi] \right) = \int_a^b dx \frac{\partial}{\partial x} \left( - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + U[\phi] \right) \quad (2.47)$$

realizando la integración en  $x$  tenemos que

$$\frac{dP[\phi]}{dt} = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + U[\phi] \Big|_a^b \quad (2.48)$$

Supongamos ahora que  $a \ll 0$  y  $0 \ll b \ll s$ . En esta región para todo  $x \in (a, b)$  podemos suponer que  $\phi_{AK} \gg \phi_K$  y expandir el  $\phi$  de (2.43) entorno a  $\phi_{AK}$  para pequeños valores de  $\phi_K$ .

Así que obtenemos

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{\partial \phi_{AK}}{\partial x} \right)^2 + \underbrace{\left( \frac{\partial \phi_K}{\partial x} \right)^2}_{\approx 0} + 2 \frac{\partial \phi_{AK}}{\partial x} \frac{\partial \phi_K}{\partial x} \quad (2.49)$$

y también podemos desarrollar  $U$  en serie de Taylor funcional entorno a  $\phi_{AK}$  y quedarnos a primer orden

$$\begin{aligned} U[\phi] &= U(\phi_{AK} + \phi_K + \phi(+\infty)) = U(\phi_{AK}) + \frac{\delta U[\phi_{AK}]}{\delta \phi} (\phi - \phi_{AK}) = \\ &= U[\phi_{AK}] + \frac{\delta U[\phi_{AK}]}{\delta \phi} (\phi_K + \phi(+\infty)) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Introducimos (2.49) y (2.50) en (2.47) y obtenemos que

$$\frac{dP[\phi]}{dt} = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_{AK}}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \phi_{AK}}{\partial x} \frac{\partial \phi_K}{\partial x} + U[\phi_{AK}] + \frac{\delta U[\phi_{AK}]}{\delta \phi} (\phi_K + \phi(+\infty)) \Big|_a^b \quad (2.51)$$

y por último empleamos que  $\phi_{AK}$  verifica (2.28) y obtenemos que la fuerza que hay entre un kink y un antikink viene dada por

$$F = \frac{dP[\phi]}{dt} = - \frac{\partial \phi_{AK}}{\partial x} \frac{\partial \phi_K}{\partial x} + \frac{\delta U[\phi_{AK}]}{\delta \phi} (\phi_K + \phi(+\infty)) \Big|_a^b \quad (2.52)$$

## 2.7. Tratamiento cuántico

Vamos a estudiar en esta sección como se comportan las soluciones clásicas a nivel cuántico. Vamos a poder asociar, en cierto régimen de la constante de acoplamiento del modelo, las soluciones de energía finita a estados cuánticos extendidos. Vamos a estudiar, en particular, la energía de estos estados cuánticos. Sabemos que las soluciones de energía finita son, incluso a nivel clásico,

soluciones extendidas las cuales poseen, como ya sabemos, una cierta anchura  $\omega$ . Supongamos que la constante de acoplamiento del modelo bajo estudio es  $\lambda$ , entonces la energía de la configuración del kink (2.35) típicamente se puede ver que es

$$E_{K/AK} \sim \frac{m_\phi}{\lambda} \quad (2.53)$$

donde  $m_\phi$  es la masa de la excitación elemental dado por (2.15).

La longitud de Compton,  $\lambda_C$ , nos dará el tamaño del kink a nivel cuántico y viene dada por

$$\lambda_C \sim \frac{1}{E_{K/AK}} \sim \frac{\lambda}{m_\phi} \quad (2.54)$$

En la Sec. 2.2 vimos que los campos escalares  $\phi$  en dos dimensiones no tienen dimensiones (tomando  $c = \hbar = 1$ ) y veremos que tanto en el modelo  $\lambda\phi^4$  como en el modelo Seno-Gordon, los dos modelos que vamos a estudiar en este trabajo, la constante de acoplamiento  $\lambda$  tiene unidades de masa al cuadrado. El régimen de acoplamiento débil, dado que la constante de acoplamiento tiene dimensiones, se expresa correctamente diciendo que  $\frac{\lambda}{\sigma^2} \ll 1$ . El parámetro  $\sigma$  es algún parámetro que aparece en el modelo que tiene dimensiones de masa. En los modelos que vamos a estudiar,  $\lambda\phi^4$  y Seno-Gordon, veremos que  $\omega \sim m_\phi^{-1}$  así que se verifica que

$$\frac{\omega}{\lambda_C} \sim \frac{m_\phi^2}{\lambda} \gg 1, \quad \text{si estamos en régimen débil} \quad (2.55)$$

luego  $\omega \gg \lambda_C$  así que podemos decir que incluso a nivel cuántico el kink es un objeto esencialmente clásico, quizás con algunas modificaciones (correcciones).

Aparentemente podría parecer que existe una cierta inconsistencia debido a la permanencia del kink clásico a y la existencia de fluctuaciones a nivel cuántico. Sabemos que las fluctuaciones cuánticas son mayores a distancias cada vez más pequeñas, llegando a ser incluso infinitas. Estas fluctuaciones pueden reducirse si promediamos el campo sobre una longitud mayor. Tenemos que llegar a un compromiso de forma que esta longitud tiene que ser lo suficientemente grande como para eliminar las fluctuaciones cuánticas y lo suficientemente pequeña como para que, en régimen de acoplamiento débil, el kink clásico siga existiendo a nivel cuántico. Además, la masa del kink depende inversamente de la constante de acoplamiento,  $\lambda$ , y en régimen de acoplamiento débil tendremos una masa para el kink enorme, tiendiendo a infinito cuando  $\lambda$  tiende a cero. Por lo tanto, el análisis perturbativo nunca podrá mostrar los efectos del kink. Sin embargo, si conocemos una solución clásica estática podemos emplear la teoría de perturbaciones para cuantizar las perturbaciones sobre dicha solución clásica. Este método se conoce como *aproximación semicásica*. Vamos a emplear métodos funcionales para realizar esta cuantización.

Consideremos el funcional energía dado en (2.25) y hagamos un desarrollo de Taylor funcional alrededor de  $\phi_s(x)$  que formalmente tiene la forma

$$E[\phi] = E[\phi_s] + \int dx \frac{\delta E[\phi_s]}{\delta \phi(x)} (\phi(x) - \phi_s(x)) + \frac{1}{2} \iint dx dy \frac{\delta^2 E[\phi_s]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} (\phi(x) - \phi_s(x)) (\phi(y) - \phi_s(y)) + \dots \quad (2.56)$$

donde  $\phi_s(x)$  es una solución estática que hace mínimo  $E[\phi]$ . Aplicando las reglas de la diferenciación funcional ya citadas anteriormente obtenemos que

$$\frac{\delta E[\phi]}{\delta \phi(x)} = -\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{\delta U[\phi]}{\delta \phi(x)}, \quad \frac{\delta^2 E[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\delta^2 U[\phi]}{\delta \phi(x)^2} \right] \delta(x-y) \quad (2.57)$$

y dado que  $\phi_s$  es solución de las ecuaciones de movimiento,  $-\frac{d^2\phi_s}{dx^2} + \frac{\delta U[\phi_s]}{\delta \phi} = 0$ , tenemos que  $\frac{\delta E[\phi_s]}{\delta \phi(x)} = 0$ . Así obtenemos que

$$E[\phi] = E[\phi_s] + \frac{1}{2} \int dx \eta(x) \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\delta^2 U[\phi_s]}{\delta \phi(x)^2} \right] \eta(x) + \dots \quad (2.58)$$

donde  $\eta = \phi - \phi_s$  representa las fluctuaciones respecto a la solución estática  $\phi_s$  y donde, además, hemos realizado la integración respecto de  $y$ .

Consideremos ahora el problema espectral de encontrar los autovalores y las autofunciones del operador Schrödinger independiente del tiempo, ver [21, pág. 40], dado por

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\delta^2 U[\phi]}{\delta \phi(x)^2} \right] \Big|_{\phi=\phi_s} \psi_i(x) = K_i \psi_i(x) \quad (2.59)$$

donde  $K_i$  son los autovalores y  $\psi_i(x)$  son un conjunto completo y ortonormal de autofunciones. El problema espectral dado por (2.59) es un caso especial de un problema de la forma

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + T(x) \right] \phi = K \phi \quad (2.60)$$

donde  $-\frac{d^2}{dx^2} + T(x)$  es un operador diferencial de segundo orden y  $T$  verifica que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T(x) = 0$$

Si los valores propios  $K$  son positivos,  $K = \omega^2$ , de forma que  $K \in (0, +\infty)$ , *espectro continuo*, el comportamiento asintótico de las autofunciones para un valor de  $\omega$  tal que  $\omega^2 \in (0, +\infty)$  vendrá dado por

$$\phi_\omega(x) \approx \begin{cases} e^{i\omega x} & \text{si } x \rightarrow -\infty \\ A(\omega)e^{i\omega x} + B(\omega)e^{-i\omega x} & \text{si } x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.61)$$

Si los valores propios  $K$  son negativos,  $K = -\omega^2$ , y además hay una cantidad finita y numerable de ellos, *espectro discreto*, el comportamiento asintótico de las autofunciones para cada valor de  $\omega$  tal que  $K = -\omega^2$  vendrá dado por

$$\phi_\omega(x) \approx \begin{cases} C_{-\infty}(x)e^{\omega x} & \text{si } x \rightarrow -\infty \\ C_{+\infty}(x)e^{-\omega x} & \text{si } x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.62)$$

Los autoestados que tiene  $K = \omega^2 = 0$  se denominan *modos cero*. En particular, las soluciones del vacío  $\phi_0$  son modos cero. Consideremos una solución clásica estática de energía finita kink/antikink  $\phi_{K/AK}(x)$  que sabemos que verifica la ecuación de movimiento (2.24). Diferenciando (2.24) con respecto a  $x$  obtenemos que

$$\frac{d^3\phi_{K/AK}(x)}{dx^3} = \frac{\delta^2 U(\phi_{K/AK}(x))}{\delta\phi^2} \frac{d\phi_{K/AK}(x)}{dx} \Rightarrow \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\delta^2 U[\phi_K]}{\delta\phi^2} \right] \frac{d\phi_{K/AK}(x)}{dx} = 0 \quad (2.63)$$

luego  $\frac{d\phi_{K/AK}}{dx}$  es una solución del operador de Schrödinger con autovalor  $\omega^2 = 0$ . Dado que el kink/antikink son soluciones crecientes/decrecientes, el signo de  $\frac{d\phi_{K/AK}(x)}{dx}$  es constante. Por lo tanto,  $\frac{d\phi_{K/AK}(x)}{dx}$  nunca se hace cero, así que, debido a un resultado de Mecánica Cuántica que nos dice que en un potencial 1-dimensional sólo el estado de mínima energía nunca se hace cero, tenemos, por lo tanto, que el autoestado  $\frac{d\phi_K}{dx}$  es el de menor energía, es decir  $\phi_0 = \frac{d\phi_{K/AK}(x)}{dx}$ . Por lo tanto, en el operador de Schrödinger no existen autoestados con  $\omega^2 < 0$ .

Una vez resuelto el problema espectral (2.59) podemos expresar la fluctuación del campo  $\phi$  dependiente del tiempo [19] como

$$\eta(x, t) = \sum_i c_i(t) \psi_i(x) + h.c. \quad (2.64)$$

Empleando (2.64) podemos entender que la presencia de autofunciones con  $K = \omega^2 < 0$  en el problema espectral (2.59) implicaría la inestabilidad del kink debidido a (2.62). Este razonamiento nos permite definir la estabilidad como sigue

**Definición 2.8.** *Un kink  $\phi_K$  es estable si el problema de valores propios de Schrödinger dado por (2.59) no tiene autoestados con autovalor  $K = \omega^2 < 0$ .*

La estabilidad del kink debida a la ausencia de estas autofunciones la podemos denominar *estabilidad dinámica*. Además, sabemos que la acción dada en (2.3) es invariante bajo traslaciones, y esto provoca la aparición de autofunciones en (2.59) con  $\omega = 0$  (modos cero).

Empleando (2.64) y (2.58), la densidad lagrangiana (2.1) nos queda

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i^{+\infty} \dot{c}_i^2 - E[\phi_s] - \frac{1}{2} \sum_i^{+\infty} c_i^2 \omega_i^2 + \text{correcciones} \quad (2.65)$$

que representa el lagrangiano de un número infinito de osciladores armónicos no acoplados además de una constante  $E[\phi_s]$ . Una vez aplicado la cuantización canónica obtendremos que la energía de los estados viene dada por

$$E_{\{n_i\}} = E[\phi_s] + \hbar \sum_i^{+\infty} \left( n_i + \frac{1}{2} \right) \omega_i + \text{correcciones} \quad (2.66)$$

donde en el sumatorio se excluye  $\omega = 0$  (veremos la razón después). Los estados son etiquetados con  $n_i$  donde  $n_i$  representa el número de ocupación de los osciladores armónicos y las “correcciones” hacen referencia a los términos de orden superior, y que en el caso en que estemos en régimen de acoplamiento débil pueden ser tratados perturbativamente. La expresión (2.66) nos relaciona la energía de los estados cuánticos con la energía de la solución clásica  $\phi_s$ . La constante  $\hbar$  se mantiene en la expresión (2.66) debido a que estamos realizando una aproximación semicásica, aunque todavía  $c = 1$ .

Hemos visto que disponemos de dos soluciones estáticas: la solución del vacío,  $\phi_0$ , y la solución kink/antikink,  $\phi_{K/AK}$ . Eligiendo como  $\phi_s(x) = \phi_0(x)$  obtenemos que los niveles cuánticos son el estado vacío y las excitaciones del estado vacío. La energía de estos estados vendrá dada por

$$E_{\{n_i\}} = \underbrace{E[\phi_0]}_{=0} + \hbar \sum_i^{+\infty} \left( n_i + \frac{1}{2} \right) \omega_i + \text{correcciones} \quad (2.67)$$

El estado de mínima energía, correspondiente a  $n_i = 0$ , es el estado del vacío y tendrá una energía dada por

$$E_{vacío} = E_{\{0\}} = \hbar \sum_i^{+\infty} \frac{1}{2} \omega_i + \text{correcciones} \quad (2.68)$$

La expresión anterior es divergente, esta divergencia se puede asociar con el hecho de que el sistema tiene una extensión infinita (divergencia infraroja). Este tipo de divergencias se pueden solucionar metiendo el sistema en una segmento de longitud  $L$  e imponiendo condiciones de contorno periódicas a los campos y tomando, al final, el límite  $L \rightarrow +\infty$ .

Podemos considerar también como solución estática  $\phi_s(x)$  la solución  $\phi_{K/AK}(x)$  y estudiar los estados cuánticos en el sector kink. En este caso obtenemos que

$$E_{\{N_i\}} = \underbrace{E[\phi_{K/AK}]}_{=0} + \hbar \sum_i^{+\infty} \left( N_i + \frac{1}{2} \right) \omega_i + \text{correcciones} \quad (2.69)$$

El estado con  $N_i = 0$  representa el estado de la partícula kink en reposo y también el estado de mínima energía en el sector kink. El estado con  $N_i = 0$  lo denominaremos *kink cuántico*. Vamos a restar a la expresión (2.69) la energía del vacío (2.68) para eliminar la divergencia cuadrática, una vez tomado el límite  $L \rightarrow +\infty$ , asociada con la energía del vacío. Realizando los cálculos y tomando el límite continuo cuidadosamente llegamos a que la diferencia  $E_{N_i} - E_{vacío}$  tiene una divergencia logarítmica. Evidentemente esta divergencia no se eliminará añadiendo una constante a la densidad lagrangiana ya que  $E_{N_i} - E_{vacío}$  es una diferencia de energía entre dos estados. Esta divergencia se denomina divergencia ultravioleta y no es sólo característica de la solución kink, si hubieramos calculado la masa de la partícula escalar obtenida como fluctuaciones del vacío a orden más alto en la teoría de perturbaciones habríamos obtenido otra divergencia logarítmica. Las divergencias ultravioletas en modelos en dos dimensiones tienen su origen, para cualquier orden en teoría de perturbaciones, en diagramas de Feynman con un solo lazo formado por una única línea interna. También podemos ver a las divergencias ultravioletas como originadas por el hecho de que el hamiltoniano que describe al sistema no está escrita en orden normal. El reordenamiento normal se realiza, en la aproximación semicásica, al añadir algunos términos al hamiltoniano. Estos términos que añadimos al hamiltoniano modifican la energía de los estados, de forma que podemos definir como masa (renormalizada) del kink a  $M_{kink} = \Delta E_{N_1} - \Delta E_{vacío}$ . Hemos, en definitiva, aplicado las técnicas de la *renormalización* de la teoría cuántica de campos. Ver por ejemplo los libros [57, 70] sobre renormalización en teoría de campos.

El modo cero  $\omega = 0$  debe de ser estudiado separadamente del resto ya que el procedimiento de cuantización aplicado a (2.65) no se puede aplicar si  $\omega = 0$  debido a que un oscilador con  $\omega = 0$  no es realmente un oscilador. El campo  $\phi_{K/AK}(x, t)$  lo vamos a poder expresar como

$$\eta(x, t) = \phi_K(x - z(t), t) + \sum_n c_n(t) \psi_n(x - z(t)) + h.c. \quad (2.70)$$

donde  $z(t)$  indica la posición del kink y se denomina *coordenada colectiva* [67, 32]. La derivada temporal de  $\phi(x, t)$  vendrá dada por

$$\dot{\phi}(x, t) = -\dot{z} \left( \frac{\phi_K(x - z(t), t)}{dz} \right) + \sum_n \left[ \dot{c}_n \psi_i(x - z(t)) - \dot{z} c_n(t) \left( \frac{\psi_n(x - z(t), t)}{dz} \right) \right] \quad (2.71)$$

Sustituyendo (2.71) en la densidad lagrangiana (2.1) con  $\phi_s = \phi_K$  e integrando en  $x$  para obtener el lagrangiano del sistema, obtenemos que

$$L = \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{d\phi_K}{dz} \right)^2 \dot{z}^2 - E[\phi_K] + \frac{1}{2} \sum_n^{+\infty} (\dot{c}^2(t) - \omega^2 c^2) \quad (2.72)$$

El primer término en (2.72) se puede expresar como

$$L = \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{d\phi_K}{dz} \right)^2 \dot{z}^2 = \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{d\phi_K}{dx} \right)^2 \dot{z}^2 = \frac{1}{2} \dot{z}^2 \int dx U[\phi] = \frac{1}{2} \dot{z}^2 M_{cl} \quad (2.73)$$

donde hemos empleado (2.28). El primer término en (2.72) hace referencia a la energía cinética no relativista de una partícula de masa  $M_{cl}$ . El momento conjugado correspondiente a la coordenada colectiva  $z$  es  $P = M_{cl} \dot{z}$  y su operador en teoría cuántica es conservado ya que commuta con el hamiltoniano. Dado que  $-\infty < z < +\infty$  los autovalores del operador momento tienen un espectro continuo. Los autoestados de la energía, etiquetados por el momento lineal y por un conjunto de números de ocupación,  $|P, \{n_i\}\rangle$ , vienen dados por

$$E_{|P, \{n_i\}\rangle} = \frac{P^2}{2M_{cl}} + M_{Kink} + \text{correcciones} \quad (2.74)$$

donde  $M_{Kink}$  es la masa renormalizada.

Vamos a aplicar en el siguiente capítulo todo lo que hemos visto a dos modelos: el *modelo  $\lambda\phi^4$*  y el *modelo Seno-Gordon*.

## Capítulo 3

# Modelos particulares en (1+1) dimensiones

### 3.1. Modelo $\lambda\phi^4$

Vamos a ver en esta sección uno de los ejemplos más paradigmático que ilustra el concepto de kink. El modelo  $\lambda\phi^4$  el cual fue estudiado en primer lugar por Dashen *et al.* (1974), Goldstone, Jackiw (1975) y Polyakov (1974). El modelo es aplicado en dos campos distintos: el primero de ellos, dentro del campo de la Física de la materia condensada, donde modeliza un sistema electrón-fonón en materiales como el polyacetyleno ( $CH$ )<sub>x</sub>, constituido por una cadena que presenta, en buena aproximación, un solo grado de libertad, estructura denominada trans- $(CH)_x$  [64, 41]. Una curiosa propiedad sobre esta substancia de naturaleza aislante es el notable incremento de la conductividad cuando son introducidos solitones cargados [15], incluso hasta cotas similares a materiales metálicos. El segundo campo de intereses del modelo  $\lambda\phi^4$  es el correspondiente a la teoría cuántica de campos, en particular, Jackiw y Rebbi encontraron [33] de manera teórica el fraccionamiento de la carga eléctrica en un modelo de interacción fermión-kink sobre la recta, donde el kink es el producido por el modelo  $\lambda\phi^4$ . Podemos verificar este resultado experimentalmente sobre una cadena lineal de poliacetileno, ver [32]. Además, en teorías cosmológicas la introducción de los defectos topológicos, generados por este modelo, acoplados a dilatones incorpora la aparición de agujeros negros [4].

El funcional energía potencial correspondiente a este modelo viene dado por

$$U[\phi] = \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \quad (3.1)$$

donde las constantes de acoplamiento  $\lambda$  y  $m^2$  son positivas y se puede observar que  $\lambda$  tiene unidades de masa al cuadrado. Además claramente podemos ver que (3.1) es semidefinida positiva, es decir,  $U[\phi] \geq 0$ .

La acción correspondiente al funcional potencial (3.1) se expresa como

$$S[\phi] = \int \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \right) dx \quad (3.2)$$

La energía para una configuración  $\phi$  del campo viene dada por

$$E[\phi] = \int \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \right) dx \quad (3.3)$$

Vimos que las configuraciones de mínima energía, configuraciones del vacío, son aquellas que  $U[\phi] = 0$ . El  $U[\phi]$  asociado a nuestro modelo presenta dos mínimos que son  $\pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ . La variedad del vacío es  $\mathcal{M} = \{ \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \}$ .

La acción (3.2) presenta una simetría en el espacio interno de los campos dada por  $\phi \rightarrow -\phi$ . Por lo tanto, el modelo  $\lambda\phi^4$  posee un grupo de simetría  $G = \mathbb{Z}_2$  de forma que tenemos que  $G = \mathbb{Z}_2$  y  $H = \mathbb{I}$  luego  $\pi_0(\mathcal{M}) = \pi_0(G/H) = \mathbb{Z}_2$ . Dado que  $\pi_0(\mathcal{M})$  es no trivial sabemos que existen kinks en el modelo  $\lambda\phi^4$ . El espacio de configuraciones de energía finita  $\mathcal{C}$  tiene cuatro componentes desconexas caracterizadas por los valores de  $(\phi(+\infty), \phi(-\infty)) \in \pi_0(\mathcal{M}) \times \pi_0(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Tendremos los siguientes sectores topológicos caracterizados por las siguientes parejas de valores asintóticos:

**i**  $\left( +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, +\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right)$

**ii**  $\left( +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right)$

**iii**  $\left( -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, +\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right)$

**iv**  $\left( -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right)$

Los sectores topológicos caracterizadas por i) y iv) verifican  $\phi(+\infty) = \phi(-\infty) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$  y  $\phi(+\infty) = \phi(-\infty) = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$  respectivamente. Vemos que los sectores topológicos asociados a los valores asintóticos i) e iv) corresponden a los sectores vacíos asociados a los mínimos  $+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$  y  $-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$  respectivamente. Siguiendo la notación introducida en la Sec. 2.4 tenemos que estos sectores los denotamos por  $\mathcal{C}^{11}$  y  $\mathcal{C}^{22}$  donde el 1 hace referencia al mínimo  $+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$  y el 2 hace referencia al otro mínimo  $-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ . Las configuraciones  $\phi \in \mathcal{C}^{11}$  ó  $\phi \in \mathcal{C}^{22}$  tendrán una energía dada por  $E[\phi] = E\left[+\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right] = 0$  ó  $E[\phi] = E\left[-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right] = 0$ . Los sectores topológicos asociados a ii) y iii) se indicaran como  $\mathcal{C}^{12}$  y  $\mathcal{C}^{21}$  respectivamente. Las configuraciones de los campos en  $\mathcal{C}^{12}$  o en  $\mathcal{C}^{21}$  verifican que sus valores asintóticos son distintos, y además son vacíos consecutivos (trivialmente cierto en este caso, ya que  $\mathcal{M}$  solo tiene dos elementos y evidentemente son consecutivos). Por lo tanto, según la definición 2.7, las configuraciones de campo  $\phi$  que pertenezcan a  $\mathcal{C}^{12}$  ó  $\mathcal{C}^{21}$  son kinks (entendiendo que aún faltaría ver si se preserva su forma tras colisiones). Los sectores  $\mathcal{C}^{12}$ ,  $\mathcal{C}^{21}$  son las variedades kink del modelo  $\lambda\phi^4$ . Tenemos que el espacio de las configuraciones de energía finita  $\mathcal{C}$  puede descomponerse de la siguiente manera:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{11} \cup \mathcal{C}^{12} \cup \mathcal{C}^{21} \cup \mathcal{C}^{22} \quad (3.4)$$

Estos kinks, a veces, se denominan  $\mathbb{Z}_2 - kinks$ . Denotaremos a la solución kink de  $\mathcal{C}^{21}$  por  $\phi_K$  y a la de  $\mathcal{C}^{12}$  por  $\phi_{AK}$ , veremos un poco más adelante lo acertado de esta notación.

Los  $\mathbb{Z}_2$ -kinks estáticos vendrán dados por la expresión de la ecuación (2.29) para el funcional potencial (3.1). Esta solución viene dada por

$$\phi(x, x_0) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left( \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right) + C \quad (3.5)$$

donde el signo + corresponde a la solución que verifica que  $\phi(+\infty) = +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$  y  $\phi(-\infty) = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ , es decir,  $\phi \in \mathcal{C}^{21}$  y la denotamos por  $\phi_K$ . Análogamente podemos decir que el signo - en (3.5) implica que  $\phi$  cumple  $\phi(+\infty) = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$  y  $\phi(-\infty) = +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ , por lo tanto  $\phi \in \mathcal{C}^{12}$  y la podemos denotar por  $\phi_{AK}$ . El parámetro  $x_0$  corresponde al centro de la configuración  $\phi_K/\phi_{AK}$ . La constante  $C$  toma el valor  $C = 0$  en este modelo.

Dado que (3.2) es invariante bajo las transformaciones de Lorentz (2.7), como vimos en el caso más general en la Sec. 2.2, podemos aplicar un boost a (3.5) y obtenemos que

$$\phi_{K/AK}(x, x_0, t) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{m}{\sqrt{2}} \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \quad (3.6)$$

Ya vimos en la Sec. 2.5 que la carga topológica caracterizada a los sectores topológicos de  $\mathcal{C}$ . La carga topológica para este modelo viene dada por

$$Q_T = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} [\phi(+\infty) - \phi(-\infty)] \quad (3.7)$$

Los sectores topológicos  $\mathcal{C}^{11}$ ,  $\mathcal{C}^{22}$  se caracterizan, como vimos anteriormente, porque todas las configuraciones del campo  $\phi$  tal que  $\phi \in \mathcal{C}^{11}$  ó  $\phi \in \mathcal{C}^{22}$  verifican  $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$ . Por lo tanto, siguiendo (3.7), vemos que las configuraciones en  $\mathcal{C}^{11}$  y  $\mathcal{C}^{22}$  tienen carga topológica igual a cero,  $Q_T = 0$ . Las configuraciones  $\phi$  del sector  $\mathcal{C}^{21}$  presentan una carga topológica dada por

$$Q_T = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} [\phi(+\infty) - \phi(-\infty)] = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \left[ \frac{m}{\sqrt{\lambda}} - \left( -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] = +1 \quad (3.8)$$

Vemos por lo tanto que las configuraciones  $\phi_K$  tienen carga topológica +1.

Por último, consideremos una cualquiera de las configuraciones  $\phi$  perteneciente al sector  $\mathcal{C}^{12}$ . La carga topológica asociada a esta configuración vendrá dada por

$$Q_T = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} [\phi(+\infty) - \phi(-\infty)] = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \left[ -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} - \left( \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] = -1 \quad (3.9)$$

En particular, tenemos que la configuración  $\phi_{AK}$  tiene carga topológica -1, luego  $\phi_{AK}$ , aén siendo un campo escalar, puede verse como la antipartícula, respecto a la carga topológica, de la configuración  $\phi_K$ . Por lo tanto, los nombres de kink y antikink dados anteriormente a estas configuraciones parecen adecuados.

El modelo  $\lambda\phi^4$  sólo tiene, como acabamos de ver, tres valores de carga topológica  $Q_T = \{-1, 0, +1\}$  debido a que  $\mathcal{M}$  tiene únicamente dos elementos. Cualquier solución del modelo  $\lambda\phi^4$  tendrá uno de estos tres valores de  $Q_T$ , luego no existe ninguna solución con carga topológica  $|Q_T| > 1$  y por lo tanto cualquier configuración multikink tendrá que tener siempre los kink y antikink alternados.

La densidad de energía estática asociada a  $\phi_{K/AK}$ ,  $\epsilon(x)$ , viene dada por

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_{K/AK}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left( (\phi_{K/AK})^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \quad (3.10)$$

La densidad de energía estática (3.10) corresponde al integrando de (3.3) para el caso de una configuración estática.

Usando la forma funcional de  $\phi_{K/AK}$  obtenida en (3.5) y sustituyéndola en (3.10) obtenemos que

$$\epsilon(x) = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left( \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right) \quad (3.11)$$

La expresión anterior nos permite decir que la anchura  $\omega$  del kink/antikink del modelo  $\lambda\phi^4$  es  $\omega \sim m^{-1}$  y la masa clásica de la configuración  $\phi_{K/AK}$  vendrá dada por (2.34) usando el funcional potencial (3.1). Esta masa,  $M_{cl}$ , viene dada por

$$M_{cl} = \frac{2m^3\sqrt{2}}{3\lambda} \quad (3.12)$$

la expresión (3.12) es de la forma dicha en (2.53).

Vamos a calcular ahora explicitamente el valor de la fuerza entre un  $\phi_K$ , con  $Q_T = +1$  y  $\phi_{AK}$ , con  $Q_T = -1$ . Supongamos, al igual que hicimos en la sección 2.6, que el kink está colocado inicialmente en  $x = s > 0$  y el antikink en  $x = 0$ . La fuerza viene dada por (2.52)

$$F = \frac{16m^4}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{2}ms} \quad (3.13)$$

Observamos que la fuerza dada en (3.13) es una fuerza atractiva entre el kink y el antikink. Similarmente podemos ver que la fuerza entre dos kink o entre dos antikink es repulsiva. La fuerza (3.13) es una fuerza tipo Yukawa y se podría haber deducido pensando en que el kink y el antikink se intercambian una partícula escalar, precisamente las excitaciones de campo  $\phi$ , cuya masa viene dada por (2.15) y toma el valor, usando el potencial (3.1), de  $m_\phi = \frac{2m}{\sqrt{2}}$ . La fuerza mediada por la partícula escalar  $m_\phi$  es una fuerza de tipo Yukawa de la forma  $F \propto e^{-m_\phi s} = e^{-\sqrt{2}ms}$ . Ver por ejemplo [50].

En [3] los autores estudiaron numéricamente el envío de una onda solitaria contra otra, ambas a la misma velocidad para distintos modelos, entre ellos el modelo  $\lambda\phi^4$  y midieron la velocidad y el cambio de fase después de la colisión. Los resultados obtenidos mostraron que el choque entre dos ondas solitarias del modelo  $\lambda\phi^4$  es inelástico. Por lo tanto podemos concluir, de la definición 2.7, que las ondas solitarias que estabamos llamando kinks son verdaderamente kinks.

La colisión entre un kink y un antikink del modelo  $\lambda\phi^4$  fue intensamente estudiada mediante simulación numérica en [61] donde se obtuvieron los siguientes resultados:

- Si la velocidad inicial de acercamiento entre el kink y el antikink era menor que 0.193 (en unidades de  $c$ ) siempre se formaba un estado ligado oscilatorio (*Oscilón*) el cual desaparecía al cabo de un cierto tiempo.

- Si la velocidad inicial de acercamiento entre el kink y el antikink era mayor que 0.2598 (en unidades de  $c$ ) ambas soluciones se reflejaban siempre inelásticamente tras la colisión.
- Se descubrió que existían intervalos de velocidades iniciales, por debajo de 0.2598, para los cuales la simulación indicaba que ocurría una primera colisión entre el kink y el antikink tras la cual el kink y el antikink se separan una distancia finita y se acercaban nuevamente y volvían a colisionar una segunda vez, después de esta segunda colisión el kink y el antikink se alejaban indefinidamente. Este fenómeno recibe el nombre de *ventana de resonancia* o *ventana de doble rebote* y fue por primera vez sugerido en [3].

Ahora estudiamos el tratamiento cuántico del modelo  $\lambda\phi^4$  en régimen de acoplamiento débil caracterizado por  $\frac{\lambda}{m^2} \ll 1$ . Supongamos que, en primer lugar, tomamos como solución estática una de las dos soluciones del vacío, el resultado final no depende de la elección realizada. La energía de las perturbaciones respecto a la configuración del vacío viene dada por

$$E[\phi] = E[\phi_0] + \frac{1}{2} \int dx \eta(x) \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2m^2 \right) \eta(x) \quad (3.14)$$

donde hemos empleado que  $\frac{\delta^2 U[\phi_0]}{\delta \phi^2} = 2m^2$  en este caso.

Siguiendo la sección 2.7 introduciremos el sistema en una longitud finita  $L$  e impondremos condiciones de contorno periódicas a los campos. Al final de todos los cálculos tomaremos el límite  $L \rightarrow +\infty$ . En primer lugar debemos resolver el siguiente problema espectral

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2m^2 \right) \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x) \quad (3.15)$$

Considerando como soluciones de (3.15) las soluciones de ondas planas  $\eta(x)_n = L^{-\frac{3}{2}} e^{ik_n x}$  donde  $k_n = \frac{2\pi n}{L}$ , con  $n \in \mathbb{Z}$  y sustituyendo la solución de onda plana en (3.15) obtenemos el espectro en frecuencias  $\omega(n) = \sqrt{k_n^2 + 2m^2}$ . La energía en función de los números de ocupación  $N_1$ , el cual especifica el número de partículas con momento  $k_n$ , viene dado por

$$E_{\{N_1\}} = \hbar \sum_{N_1=1}^{+\infty} \left( N_1 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{k_n^2 + 2m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.16)$$

La energía del vacío  $E_{vac}$  viene dada por (3.16) con  $N_1 = 0$

$$E_{vac} = \frac{1}{2} \hbar \sum_{N_1=1}^{+\infty} \sqrt{k_n^2 + 2m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.17)$$

Sea  $\phi_s$  la solución kink estática  $\phi_K$  dada por (3.5) con  $x_0 = 0$ , Luego tenemos que la expresión (2.58) nos queda

$$\begin{aligned}
E[\phi] &= E[\phi_K] + \frac{1}{2} \int dx \eta(x) \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\delta^2 U[\phi_K]}{\delta \phi^2} \right] \eta(x) + \dots = \\
&= \frac{2m^3 \sqrt{2}}{3\lambda} + \frac{1}{2} \int dx \eta(x) \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 + 3m^2 \tanh^2 \left( \frac{mx}{\sqrt{2}} \right) \right] \eta(x) + \dots = 
\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde hemos empleado que  $E[\phi_s] = E[\phi_K] = M_{cl} = \frac{2m^3 \sqrt{2}}{3\lambda}$  dada por (3.12).

Ahora debemos resolver el problema de valores propios siguiente

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 + 3m^2 \tanh^2 \left( \frac{mx}{\sqrt{2}} \right) \right] \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x) \tag{3.19}$$

realizando el cambio  $z = \frac{mx}{\sqrt{2}}$  obtenemos que (3.15) se trasforma en

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3 \tanh^2 z - 1 \right] \tilde{\eta}_n(z) = \frac{\omega_n^2}{m^2} \tilde{\eta}_n(z) \tag{3.20}$$

hemos obtenido un problema espectral con término potencial del tipo *Pösch – Teller* [22, Sec. 12.3]. La solución de este problema espectral viene dada por:

$$\begin{aligned}
a) \quad \omega_0^2 &= 0 & \tilde{\eta}_0(z) &= \frac{1}{\cosh^2 z} \\
b) \quad \omega_1^2 &= \frac{3}{2} m^2 & \tilde{\eta}_1(z) &= \frac{\sinh z}{\cosh^2 z} \\
c) \quad \omega_q^2 &= m^2 \left( \frac{k^2}{2} + 2 \right) & \tilde{\eta}_q(z) &= e^{iqz} (3 \tanh^2 z - 1 - q^2 - 3iq \tanh^2 z)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Observando (3.21) vemos que todos los autovalores  $\omega_i^2$  son no negativos,  $\omega_i^2 \geq 0$ , luego el kink es estable según la definición 2.8. El autovalor y la autofunción (3.21a) se denomina el *modo translacional* y es debido, como ya sabemos, a la invarianza translacional de la acción (3.3). Este modo corresponde físicamente a la translación del kink. El (3.21c) nos da el espectro continuo de autovalores y los autoestados para el problema espectral (3.20). El espectro completo de (3.20) contiene, por último, un autovalor discreto, acompañado con su autovalor, (3.21b) denominado el *modo interno o vibracional* y representa una deformación localizada alrededor del kink y puede considerarse físicamente como un modo de oscilación interno del kink.

Campbell *et al* pudieron explicar los resultados obtenidos en [61] mediante un “mecanismo resonante de intercambio de energía”. Ellos consideraban que cuando dos kinks de  $\lambda\phi^4$  colisionan parte de la energía cinética (modo translacional) era transferido al modo vibracional del kink. El oscilón (estado ligado) se forma cuando suficiente energía se transfiere desde el modo translacional al modo vibracional del kink. Usando este argumento se puede explicar también el fenómeno de la ventana de doble rebote de la siguiente manera: la primera colisión transfiere suficiente energía cinética (del modo translacional) para generar un estado débilmente ligado, el cual permite al kink y antikink separarse una cierta distancia antes de volver a colisionar. La segunda colisión lleva de vuelta la energía del modo vibracional al modo translacional y ambos (kink y antikink) se escapan al infinito.

Dado que el sistema esta contenido en un segmento de longuitud  $L$  tendremos unos valores discretos para  $q$ , denotados por  $q_n$ .

La energía de los estados perturbados respecto de la solucion clásica  $\phi_K$  vienen dados por

$$E_{\{N_1\}} = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} + \hbar \sum_{N_1=0}^{\infty} \left( N_1 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{3}{2}m + m\hbar \sum_{q_n} \left( N_{q_n} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{2}q_n^2 + 2}} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.22)$$

La expresión (3.22) da la energía representa al kink y sus excitaciones. El primer término es la masa en reposo del kink, el segundo término representa la energía extra debida a la excitaciones de kink y el último término corresponde a partículas escalares ya que  $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2}m^2q_n^2 + 2m^2\right)}$  es la relación de dispersión de una partícula escalar de masa  $\sqrt{2}m$  y de momento  $\frac{mq_n}{\sqrt{2}}$ . Dado que estamos en el régimen de acoplamiento débil,  $\lambda \ll m^2$ , tenemos que el término clásico,  $\frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda}$ , domina a los términos cuánticos los cuales se convierten en meras correcciones al término clásico. El estado del kink cuántico será cuando  $N_1 = N_{q_n} = 0$  en la expresión (3.22). En este caso tenemos que

$$E_{kink} = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} + m\hbar \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} + m\hbar \sum_{q_n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}q_n^2 + 2} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.23)$$

Volvemos a seguir la sección 2.7 y consideramos la diferencia de  $E_{kink}$  y  $E_{vac}$  dadas por (3.23) y (3.17) respectivamente

$$E_{kink} - E[\phi_0] = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} + m\hbar \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} + m\hbar \sum_{q_n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}q_n^2 + 2} - \left( \sum_{q_n} \sqrt{q_n^2 + 2m^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.24)$$

y tomando el límite  $L \rightarrow +\infty$  cuidadosamente obtenemos que

$$E_{kink} - E[\phi_0] = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} + m\hbar \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \right) - \frac{6m\hbar}{4\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \sqrt{q^2 + 2m^2} \frac{(p^2 + 2)}{\sqrt{p^2 + 4(p^2 + 1)}} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.25)$$

donde  $p = \frac{q\sqrt{2}}{m}$ .

La integral que aparece en la expresión anterior es *logarítmicamente divergente*. Podemos aplicar las técnicas de renormalización de la teoría cuántica de campos para tratar con esta integral, recordemos que en (1+1) dimensiones las únicas divergencias logarítmicas proceden de los diagramas de Feynman con un solo lazo. Podemos ver [54, págs. 144 y ss] para todos los detalles.

Tenemos, por lo tanto, que la masa del kink con las correcciones cuánticas viene dada por

$$M_{kink} = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} + m\hbar \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.26)$$

Debido a la existencia del modo cero en (3.21) sabemos que la energía del kink viene dada por (2.74)

$$E_{kink} = M_{kink} + \frac{P^2}{2M_{cl}} + \mathcal{O}(P^4) + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.27)$$

donde  $M_{cl}$  viene dada por (3.12) y  $M_{kink}$  viene dada por (3.26).

### 3.2. Modelo Seno-Gordon

El otro modelo paradigmático que aparece en la literatura es el modelo de *Seno-Gordon*. El funcional energía potencial correspondiente al modelo Seno-Gordon se puede expresar de la siguiente manera [54, pág. 200]

$$U[\phi] = \frac{m^4}{\lambda} \left( 1 - \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right) \quad (3.28)$$

este potencial es periódico en  $\phi$ , las constantes  $m$  y  $\lambda$  son constantes positivas y las unidades de  $\lambda$  son de masa al cuadrado. Además es semidefinido positivo,  $U[\phi] \geq 0$ .

La acción que gobierna el modelo de Seno-Gordon viene dado por

$$S[\phi] = \int \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^4}{\lambda} \left( 1 - \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right) \right) d^2 x \quad (3.29)$$

La ecuación del movimiento del campo  $\phi$  viene dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) = 0 \quad (3.30)$$

La energía para una configuración  $\phi$  del campo para este modelo viene dada por

$$E[\phi] = \int \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{m^4}{\lambda} \left( 1 - \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right) \right) dx \quad (3.31)$$

y la energía estática de la configuración viene dada por

$$E[\phi] = \int \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{m^4}{\lambda} \left( 1 - \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right) \right) dx \quad (3.32)$$

El mínimo de la energía estática (3.32) se alcanza para las configuraciones del vacío. En este caso, a diferencia del modelo  $\lambda \phi^4$  tenemos una cantidad infinita numerable de configuraciones del vacío dadas por

$$\phi_0 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} (2\pi n) \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.33)$$

y por la tanto la variedad del vacío para el modelo de Seno-Gordon viene dada por  $\mathcal{M} = \left\{ \frac{\sqrt{\lambda}}{m} (2\pi n) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ .

La acción (3.29) es invariante bajo la transformaciones en el espacio interno de los campos dadas por  $\phi \rightarrow \phi + \alpha_1$ , y  $\phi \rightarrow -\phi$  donde  $\alpha_1$  es un elemento cualquiera de  $\mathcal{M}$ . Estas trasformaciones forman un grupo, este grupo es  $G = \mathbb{Z}$ . Podemos considerar como subgrupo  $H$  de  $G$  el grupo  $H = \mathbb{I}$  y tendremos que, revisando la sección 2.3,  $\pi_0(\mathcal{M}) = \pi_0(G/H) = \mathbb{Z}$ . Dado que  $\pi_0(\mathcal{M})$  es no trivial, podemos decir que existen las soluciones tipo kink.

Los sectores topológicos los podremos caracterizar por los valores asintóticos de las configuraciones del campo  $(\phi(+\infty), \phi(-\infty)) \in \pi_0(\mathcal{M}) \times \pi_0(\mathcal{M}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Sabemos que los valores asintóticos pertenecen a  $\mathcal{M}$  luego  $\phi(+\infty) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}(2\pi n_1)$  y  $\phi(-\infty) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}(2\pi n_2)$ . Por lo tanto, los sectores topológicos se caracterizan por dos números enteros  $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Obtenemos que el espacio de configuraciones de energía finita  $\mathcal{C}$  se puede descomponer de la siguiente manera

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} C^{n_1 n_2} \quad (3.34)$$

donde, como ya vimos, la unión es disjunta. Si  $n_1 = n_2$  el sector topológico correspondiente,  $C^{n_1 n_1}$ , es el sector vacío y tenemos tantos sectores vacíos como elementos tiene  $\mathbb{Z}$ . Fácilmente se puede demostrar que  $\mathbb{Z}$  tiene tantos elementos como  $\mathbb{N}$ ,  $\text{card}(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$ . Claramente una configuración  $\phi \in C^{n_1 n_1}$  tendrá una energía dada por  $E[\phi] = 0$ .

Consideremos ahora una configuración  $\phi$  cuyos valores asintóticos son distintos pero contiguos, es decir,  $\phi(+\infty) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}(2\pi n_1)$  y  $\phi(-\infty) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}(2\pi n_2)$  donde  $|n_1 - n_2| = 1$ . Estas configuraciones tienen una energía finita estática mayor que cero (ver Sec. 2.4) y siguiendo la definición podemos llamarlas kinks (a falta de saber como se comportan bajo colisión).

Los kinks estáticos vienen dadas por la expresión de (2.29), usando el potencial dado por (3.28). Las soluciones estáticas de tipo kink se expresan de la

$$\phi(x) = 4 \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \arctan \left( e^{\pm m(x-x_0)} \right) + C \quad (3.35)$$

donde  $C$  viene definida de manera que los valores asintóticos de  $\phi$  estén en  $\mathcal{M}$ . Recordemos que para que (3.35) represente un kink debe de conectar dos vacíos que sean contiguos en  $\mathcal{M}$ . Vamos a ver algunos ejemplos. Supongamos que estamos en el sector topológico caracterizado por  $(n_1, n_2) = (1, 0)$ , luego un kink vendrá dado por una de las dos expresiones (con '+' o con '-') de (3.35). Vemos que la solución con '+' en (3.35) verifica los valores asintóticos del sector si tomamos  $C = 0$ . Veámoslo:  $\phi(+\infty) = 2\pi + C = 2\pi$  y  $\phi(-\infty) = 0 + C = 0$ , luego en ambos casos  $C = 0$ . Sea ahora el sector  $(2, 1)$ , repitiendo el argumento anterior La configuración  $\phi$  correcta es con el signo '+' en (3.35) y tomando  $C = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} 2\pi$ . En general, un sector cualquiera caracterizado por  $(n_1, n_1 - 1)$  la solución que verifica los valores asintóticos son aquellas que tiene el signo '+' en (3.35) y la  $C = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} 2\pi(n_1 - 1)$ . Denotaremos genéricamente a estas configuraciones por  $\phi_K$

$$\phi_K(x) = 4 \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \arctan \left( e^{m(x-x_0)} \right) + \frac{m}{\sqrt{\lambda}} 2\pi(n_1 - 1) \quad (3.36)$$

Análogamente se puede ver que para los sectores caracterizados por  $(n_1, n_1 + 1)$  la solución correcta, de entre las dos de (3.35), que cumplen las condiciones

asintóticas es la que tiene signo '-' y la  $C = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} 2\pi n_1$ . Estas soluciones las denotaremos por  $\phi_{AK}$

$$\phi_{AK}(x) = 4 \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \arctan \left( e^{-m(x-x_0)} \right) + \frac{m}{\sqrt{\lambda}} 2\pi n_1 \quad (3.37)$$

Realizando un boost de velocidad  $v$  dado por la transformación (2.7) sobre las configuraciones (3.36) y (3.37) obtenemos que

$$\begin{aligned} \phi_K(x, t) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \arctan \left[ e^{\frac{m(x-x_0-vt)}{\sqrt{1-v^2}}} \right] + \frac{m}{\sqrt{\lambda}} 2\pi(n_1 - 1) \\ \phi_{AK}(x, t) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \arctan \left[ e^{\frac{-m(x-x_0-vt)}{\sqrt{1-v^2}}} \right] + \frac{m}{\sqrt{\lambda}} 2\pi n_1 \end{aligned} \quad (3.38)$$

La densidad de energía estática asociada a  $\phi_{K/AK}$ ,  $\epsilon(x)$ , es el integrando de (3.32) y viene dada por

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_{K/AK}}{\partial x} \right)^2 + \frac{m^4}{\sqrt{\lambda}} \left( 1 - \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right) \quad (3.39)$$

Usando la forma funcional de  $\phi_{K/AK}(x)$  obtenida en (3.35) y sustituyéndola en (3.39) obtenemos que

$$\epsilon(x) = 16 \frac{m^3}{\lambda} \sinh^2(m(x - x_0)) \quad (3.40)$$

Claramente se ve que la anchura  $\omega$  del kink/antikink viene dada por  $\omega \sim m^{-1}$  y la masa en reposo clásica del kink/antikink viene dada, aplicando (2.34), por

$$M_{cl} = \frac{8m^3}{\lambda} \quad (3.41)$$

Vemos que en este caso la masa clásica (3.41) también está de acuerdo con (2.53). Sabemos que los distintos sectores topológicos se caracterizan por un número entero denominado carga topológica  $Q_T$ . La carga topológica en el modelo de Seno-Gordon asociada a las soluciones de energía finita viene dada por

$$Q_T = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} (\phi(+\infty, t) - \phi(-\infty, t)) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{m}{\sqrt{\lambda}} (2\pi n_2) - \frac{\sqrt{\lambda}}{m} (2\pi n_1) \right) = n_1 - n_2 \quad (3.42)$$

La configuración  $\phi_K(x)$  del sector  $(n_1, n_1 - 1)$  tiene una carga topológica  $Q_T = +1$  ya que  $n_1 - (n_1 - 1) = +1$  y la configuración  $\phi_{AK}(x)$  del sector  $(n_1, n_1 + 1)$  tiene un valor de carga topológica  $Q_T = -1$  debido a que  $n_1 - (n_1 + 1) = -1$ . Por lo tanto, al igual que hicimos en el caso  $\lambda\phi^4$ , podemos llamar kink a la solución  $\phi_K$  y llamar antikink a la solución  $\phi_{AK}$ , entendiendo que empleamos el mismo  $n_1$  para el sector  $(n_1, n_1 - 1)$  y para el  $(n_1, n_1 + 1)$ . Las configuraciones del campo con carga topológica  $|Q_T| > 1$  son posibles y pertenecen a sectores topológicos  $(n_1, n_2)$  con  $|n_1 - n_2| > 1$  y por lo tanto no son kinks ya que no conectan dos vacíos contiguos. La carga topológica (3.42) puede tomar cualquier valor entero, como ya hemos visto, luego las configuraciones multikink pueden contener cualquier número de kinks y antikinks y en cualquier orden.

Podemos estimar, al igual que hicimos en el modelo  $\lambda\phi^4$ , el valor de la fuerza de atracción entre un kink y un antikink (2.52), ya que tienen carga topológica opuesta. Esta fuerza viene dada por

$$F = \frac{20m\sqrt{\lambda}}{\lambda} e^{-ms} \quad (3.43)$$

donde  $s$  es la separación entre el kink y el antikink. Los cálculos realizados son similares a los realizados para el caso del modelo  $\lambda\phi^4$ . Vemos efectivamente que la fuerza es atractiva y es también de tipo Yukawa. Análogamente se puede calcular la fuerza de repulsión entre kink-kink y entre antikink-antikink. La masa de las excitaciones entorno a uno cualquiera de los vacíos tienen una masa  $m_\phi = m$ .

Las únicas soluciones estáticas vienen dadas por (3.35) pero este modelo admite como soluciones no estáticas, verifican la ecuación de movimiento (3.30), configuraciones con un kink y un antikink. Los primeros que encontraron estas soluciones fueron Seeger, Donth y Kochendorfer [36] y de forma independiente Perring y Skyrme [51]. Estas soluciones vienen dadas por

$$\phi_{K,AK}(x, x_0, t) = 4 \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \arctan \left[ \frac{\sinh(vmt/\sqrt{1-v^2})}{v \cosh(xm/\sqrt{1-v^2})} \right] \quad (3.44)$$

El comportamiento asintótico en el tiempo de la solución (3.44) viene dado por

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_{K,AK}(x, x_0, t) &= \phi_{kink} \left( \frac{m(x + v(t + \Delta))}{\sqrt{1-v^2}} \right) + \phi_{antikink} \left( \frac{m(x - v(t + \Delta))}{\sqrt{1-v^2}} \right) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_{K,AK}(x, x_0, t) &= \phi_{kink} \left( \frac{m(x + v(t - \Delta/2))}{\sqrt{1-v^2}} \right) + \phi_{antikink} \left( \frac{m(x - v(t - \Delta/2))}{\sqrt{1-v^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde  $\Delta = \frac{\sqrt{1-v^2}}{vm} \ln |v| < 0$  ya que  $v < 1$  (en unidades de  $c$ ). La solución dada por (3.44) representa en el pasado remoto ( $t \rightarrow -\infty$ ) una configuración de un kink y un antikink acercándose el uno al otro. Cuando el tiempo es negativo pero finito tenemos la colisión entre el kink y el antikink y la configuración tiende a cero cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . En  $t = 0$  tenemos que  $\phi_{K/AK} = 0$  y por lo tanto podemos decir que, temporalmente, el kink y el antikink se “aniquilan”. Si el tiempo tiende a  $+\infty$  tendremos, según (3.44), otra vez la pareja kink y el antikink. La existencia de (3.44) como solución exacta de (3.30) significa explicitamente que cuando un kink y un antikink del modelo Seno-Gordon colisionan ellos dos reaparecen con la misma velocidad y forma que al principio. la única diferencia entre el estado inicial y final es que aparece un tiempo de retraso dado por  $\Delta$ .

Tenemos otra solución exacta dependiente del tiempo de (3.30) dada por

$$\phi_{K,K}(x, x_0, t) = 4 \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \arctan \left[ \frac{v \sinh(mx/\sqrt{1-v^2})}{\cosh(tm/\sqrt{1-v^2})} \right] \quad (3.46)$$

cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  tendremos antes y después de la colisión dos kinks con la misma velocidad, forma y únicamente se diferencian en la aparición de un cierto tiempo de retraso. En ambos casos,  $\phi_{K,K}$  y  $\phi_{K,AK}$ , vemos que el kink y el antikink del modelo Seno-Gordon verifican la definición 2.6 y por lo tanto son

solitones. Apartir de ahora llamaremos a los kinks/antikinks de este modelo solitón/antisolitón.

Además de (3.44) y (3.46) tenemos otra solución exacta dependiente del tiempo muy importante correspondiente a un estado ligado de solitón y antisolitón. Esta solución viene dada por

$$\phi_b(x, x_0, t) = 4 \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \arctan \left[ \frac{\sin(smt/\sqrt{1+s^2})}{s \cosh(xm/\sqrt{1+s^2})} \right] \quad (3.47)$$

Esta solución es conocida como *doublet* o más popularmente como *breather* y la hemos obtenido sustituyendo  $v = is$  en (3.44). La solución dada por (3.47) es real para cualquier valor finito de  $s$ . Entre (3.44) y (3.47) existe una diferencia importante y es que cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  la solución  $\phi_b$  no se separa en solitón y antisolitón. En lugar de eso, la separación relativa entre el solitón y antisolitón oscila en el tiempo con un periodo  $T = \frac{2\pi\sqrt{1+s^2}}{sm}$ . Podemos intentar el mismo truco y considerar  $v = is$  en la solución (3.46) pero en este caso la solución no es real. Por lo tanto, no existen estados ligados de una pareja de solitones. Finalmente, podemos ver que empezando con una configuración con multiples solitones y antisolitones podemos, poniendo la adecuada velocidad relativa entre un solitón y antisolitón imaginaria, tener una solución exacta con un número arbitrario de solitones, antisolitones y breathers.

La energía del breather vendrá dada por

$$E_b = \frac{2M_{cl}}{\sqrt{1+s^2}} \quad (3.48)$$

donde claramente se observa que la energía del estado ligado es más pequeña que la suma de la masa del solitón y del antisolitón. La diferencia es la energía de enlace.

Sabemos que las únicas soluciones estáticas son el solitón y el antisolitón pero el hecho de que podamos dar una expresión para soluciones multisolitónicas dependientes del tiempo es debido a que el modelo de Seno-Gordon es un modelo *completamente integrable*. No existe una definición universalmente aceptada de lo que es un sistema completamente integrable de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Existen un cierto número de características comunes entre todos aquellos sistemas considerados como integrales. Entre las características más importantes son: la existencia de un número infinito de constantes de movimiento [72, 62], la existencia de pares de Lax [39], colisión elástica entre los solitones y la aplicación de técnicas iterativas de obtención de soluciones como la *Inverse Scattering Transform* [2] y la *transformación de Bäcklund*. Vamos a estudiar las transformación de Bäcklund para ello vamos a usar las *coordenadas del cono de luz* definidas por

$$x^- = \frac{1}{2}(x-t) \quad x^+ = \frac{1}{2}(x+t) \quad (3.49)$$

las derivadas parciales respecto a las coordenadas del cono de luz vienen dadas por

$$\partial_- = \frac{\partial}{\partial x^-} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \quad \partial_+ = \frac{\partial}{\partial x^+} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.50)$$

La ecuación de movimiento en estas coordenadas viene dada por

$$\partial_+ \partial_- \phi = \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \quad (3.51)$$

Tomaremos a partir de ahora  $m = \lambda = 1$  por simplicidad. La idea crucial detrás de esta transformación es reducir la ecuación parcial diferencial de segundo grado en (3.51) a una pareja de ecuaciones diferenciales de primer orden. La pareja de ecuaciones diferenciales de primer orden para el modelo de Seno-Gordon vienen dadas por

$$\begin{aligned} \partial_+ \left( \frac{\phi_1 - \phi_0}{2} \right) &= a \sin \left( \frac{\phi_1 + \phi_0}{2} \right) \\ \partial_- \left( \frac{\phi_1 + \phi_0}{2} \right) &= a \sin \left( \frac{\phi_1 - \phi_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde se comprueba facilmente que  $\phi_1$  y  $\phi_0$  verifican (3.51). En particular, si  $\phi_0 = 0$  obtenemos que  $\phi_1$  es la solución correspondiente a un solitón/antisolitón.

Podemos expresar la idea anterior mediante operadores. Supongamos que  $\phi_0$  es una solución de (3.51), si introducimos  $\phi_0$  en (3.52) obtenemos  $\phi_1$ , otra solución de (3.51), que depende de  $\phi_0$ . Esta dependencia la podemos expresar diciendo que existe un operador,  $B_a$ , tal que  $\phi_1 = B_a[\phi_0]$ . Este operador se denomina *operador de Bäcklund* con parámetro de escala  $a$ . Obtendremos la solución de dos solitones (3.46) aplicando el operador  $B_a$  a la solución de un solitón, y así sucesivamente. La pareja de ecuaciones (3.52) se pueden volver muy complicadas de resolver en cuanto vamos a soluciones de más de dos solitones, pero Bianchi demostró que las transformaciones de Bäcklund sucesivas comutan y que por lo tanto para  $\phi_0$  se verifica que

$$\begin{aligned} \phi_1 &= B_{a_1}[\phi_0], \quad \phi_2 = B_{a_2}[\phi_0] \quad \text{y} \quad \phi_3 = B_{a_2}[\phi_1] = B_{a_1}[\phi_2] \quad \text{luego} \\ B_{a_1} B_{a_2} &= B_{a_2} B_{a_1} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Esta propiedad se denomina *Teorema de permutabilidad de Bianchi* y permite reducir la resolución de (3.52) a un problema puramente algebráico. Para más detalles sobre las transformaciones de Bäcklund y el teorema de permutabilidad de Bianchi podemos ver [60, 59].

Vamos a estudiar ahora el tratamiento cuántico de la solución del vacío, el solitón  $\phi_K$  y el breather  $\phi_b$ . Vamos a suponer que estamos en régimen débil en la constante de acoplamiento, al igual que vimos en el caso de  $\lambda\phi^4$ , esto significa que  $\lambda/m^2 \ll 1$ . Vamos a empezar, como hicimos en el caso  $\lambda\phi^4$  con la solución estática del vacío  $\phi_0$ . La energía de las perturbaciones respecto de la configuración del vacío viene dada por

$$E[\phi] = E[\phi_0] + \frac{1}{2} \int dx \eta(x) \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) \eta(x) \quad (3.54)$$

donde hemos empleado que  $\frac{\delta^2 U[\phi_0]}{\delta \phi^2} = m^2$  usando el funcional energía potencial (3.28).

Introducimos nuevamente el sistema en una longitud finita  $L$ , siguiendo la Sec. 2.7, e impondremos condiciones de contorno periódicas a los campos. Al

final de todos los cálculos tomaremos el límite  $L \rightarrow +\infty$ . En primer lugar debemos volver a resolver el problema espectral

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x) \quad (3.55)$$

Considerando como soluciones de (3.55) las soluciones de ondas planas  $\eta(x)_n = L^{-\frac{3}{2}} e^{ik_n x}$  donde  $k_n = \frac{2\pi n}{L}$ , con  $n \in \mathbb{Z}$  y sustituyendo la solución de onda plana en (3.55) obtenemos el espectro en frecuencias, que para este caso es  $\omega(n) = \sqrt{k_n^2 + m^2}$ . La energía en función de los números de ocupación  $N_1$  viene dado por

$$E_{\{N_1\}} = \hbar \sum_{N_1=1}^{+\infty} \left( N_1 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{k_n^2 + m^2} + \mathcal{O} \left( \frac{\lambda}{m^2} \right) \quad (3.56)$$

La energía correspondiente al estado vacío  $E_{vac}$  viene dada por (3.56) con  $N_1 = 0$

$$E_{vac} = \frac{1}{2} \hbar \sum_{N_1=1}^{+\infty} \sqrt{k_n^2 + m^2} + \mathcal{O} \left( \frac{\lambda}{m^2} \right) \quad (3.57)$$

Los valores con los distintos valores de  $N_1$  me darán la energía de las partículas correspondientes a las excitaciones del vacío  $\phi_0$ .

Consideremos la solución kink estática  $\phi_K$  dada por (3.36) con  $n_1 = 1$  y con  $x_0 = 0$ , por simplicidad. La expresión (2.58) nos queda

$$\begin{aligned} E[\phi] &= E[\phi_K] + \frac{1}{2} \int dx \eta(x) \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\delta^2 U[\phi_K]}{\delta \phi^2} \right] \eta(x) + \dots = \\ &= \frac{8m^3}{\lambda} + \frac{1}{2} \int dx \eta(x) \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi_K \right) \right] \eta(x) + \dots = \end{aligned} \quad (3.58)$$

Empleamos que

$$\begin{aligned} 1 - \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi_K \right) &= 2 \sin^2 \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \phi_K \right) = 2 \left[ \frac{2 \tan \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{4m} \phi_K \right)}{1 + \tan^2 \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{4m} \phi_K \right)} \right]^2 = \\ &= 2 \left[ \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mx}} \right]^2 = 2 \left[ \frac{2}{e^{-mx} + e^{mx}} \right]^2 = \\ &= 2 \operatorname{sech}^2(mx) \end{aligned} \quad (3.59)$$

luego hemos obtenido que

$$1 - \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi_K \right) = 2 \operatorname{sech}^2(mx) \quad (3.60)$$

Sustituyendo (3.60) en el operador de Schrödinger para este problema obtenemos que

$$W = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2(1 - 2\operatorname{sech}^2(mx)) \right] \quad (3.61)$$

realizamos ahora en (3.61) el cambio de variable  $z = mx$  y nos queda que

$$W = m^2 \left[ -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 - 2\operatorname{sech}^2(z)) \right] \quad (3.62)$$

El problema de valores propios para el operador de Schrödinger (3.62) se expresa como

$$m^2 \left[ -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 - 2\operatorname{sech}^2(z)) \right] \eta_k(z) = \frac{\omega^2}{m^2} \eta_k(z) \quad (3.63)$$

La solución de (3.63) es bien conocida [42, págs. 73-74], [26, págs. 94-101] y viene dada por:

- Un estado con autovalor  $\frac{\omega_0^2}{m^2} = 0$  y con autofunción  $\eta_0(x) = 2 \frac{1}{\cosh(mx)}$
- Un espectro continuo de estados caracterizados por  $\omega_q^2 = (1 + q^2)m^2$  con autofunciones  $\eta_q(x) = \frac{1}{(1 + k^2)\sqrt{2\pi}}(\tanh(mx)i + q)e^{iqmx}$

Observamos claramente que, al igual que ocurría en  $\lambda\phi^4$ , todos los  $\omega^2$  son no negativos, luego el solitón es estable como vimos en la Sec. 2.7. Además también vemos que existe un modo translacional,  $\omega^2 = 0$ , el cual es debido a la invarianza de la acción (3.29) bajo traslaciones. El modelo de Seno Gordon no presenta, a diferencia del modelo  $\lambda\phi^4$ , otro modo discreto a parte del modo translacional, es decir, no tiene modo vibracional.

Dado que el sistema está contenido en un segmento de longitudo  $L$  tendremos unos valores discretos para  $q$ , denotados por  $q_n$ .

La energía de los estados perturbados respecto de la solución clásica  $\phi_K$  vienen dados, nuevamente, por

$$E_{\{N_1\}} = \frac{8m^3}{\lambda} + m\hbar \sum_{q_n} \left( N_{q_n} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{q_n^2 + 1} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.64)$$

La expresión (3.64) da la energía del solitón. El primer término es la masa en reposo del solitón, y el segundo representa a partículas escalares ya que  $\omega_n = \sqrt{(m^2 q_n^2 + m^2)}$  es la relación de dispersión de una partícula escalar de masa  $m$  y de momento  $mq_n$ . La expresión para la energía (3.64) no contiene el término asociado al modo vibracional, como si ocurría en (3.22). Dado que volvemos a estar en el régimen de acoplamiento débil,  $\lambda \ll m^2$ , tenemos que el término clásico,  $\frac{8m^3}{\lambda}$  vuelve a dominar al término cuántico. El estado del solitón cuántico del modelo Seno-Gordon será cuando  $N_{q_n} = 0$  en la expresión (3.64). Obtenemos

$$E_{\text{solitón}} = \frac{8m^3}{\lambda} + m\hbar \sum_{q_n} \frac{1}{2} \sqrt{q_n^2 + 1} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.65)$$

Volviendo a tomar la diferencia entre (3.57) y (3.65) como ya hicimos en el modelo  $\lambda\phi^4$  obtenemos que

$$E_{\text{solitón}} - E[\phi_0] = \frac{8m^3}{\lambda} + m\hbar \sum_{q_n} \frac{1}{2} \sqrt{q_n^2 + 1} - \left( \sum_{q_n} \sqrt{q_n^2 + m^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.66)$$

Siguiendo [54] obtenemos, una vez tomado el límite  $L \rightarrow +\infty$  y manipulando las divergencias que aparezcan, el siguiente valor para la masa del solitón con las correcciones cuánticas (masa normalizada) para el caso del solitón de Seno-Gordon

$$M_{sol} = \frac{8m}{\lambda} \simeq \frac{8m^3}{\lambda} - \frac{m}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m^2}\right) \quad (3.67)$$

Veamos ahora las correcciones a la masa del breather debido a los efectos cuánticos. Dashen, Hasslacher, y Neveu mostraron [28, 29] que los niveles de energía pueden ser calculados a partir de

$$Tr \frac{1}{H - E} = iTr \int_0^\infty dT e^{i(E-H)T} \quad (3.68)$$

la cantidad  $e^{-iHT}$  puede ser calculado como un path integral

$$Tr e^{-iHT} = \int d[\phi] e^{iS(T)} \quad (3.69)$$

donde la integración es sobre caminos con un periodo  $T$  y el espacio 1D es tratado como una circunferencia de longuitud  $L$ . Esta longuitud será llevada al infinito al final de todos los cálculos. El la aproximación de fase estacionaria el path integral es dominado por las soluciones peoriódicas clásicas. En aproximación domiante los estados del breather tienen una masa  $M$  dada por la condición de que

$$S(\tau(M)) + M\tau(M) = 2\pi n \quad (3.70)$$

donde  $\tau(M)$  es el periodo de un breather con energía  $E = M = \frac{16m^3}{\sqrt{1+s^2}}$ . La expresión anterior es una generalización a teoría cuántica de campos de la condición de cuantización de Bohr-Sommerfeld de la mecánica cuántica no relativista.

Aplicando este procedimiento obtenemos que la masa de los estados excitados viene dada por

$$M_n = \frac{16m^3}{\lambda} \sin\left(\frac{n\lambda}{16m^2}\right) \quad (3.71)$$

con  $n \in \mathbb{Z}$  cumpliendo la condición de que  $\frac{n\lambda}{16m^2} < \frac{\pi}{2}$ .

Dado que estamos en régimen de acoplamiento débil,  $\frac{\lambda}{m^2} \ll 1$ , tenemos que el estado del breather mas bajo ( $n = 1$ ) tiene una masa de

$$M_1 = m \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{\lambda}{16m^2} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda^3}{m^6}\right) \right] \quad (3.72)$$

en el límite  $\lambda \rightarrow 0$  obtenemos que la masa del breather es la misma que la masa de la excitación del vacío dada por  $m_\phi = m$ . Es decir, el breather es el bosón correspondiente a la excitación del vacío, en el rango de  $\lambda \rightarrow 0$ , pero

vista de una manera diferente. Los estados excitados tienen unas masas dadas por

$$M_n = M_1 \left[ n - \frac{1}{6} (n^3 - n) \left( \frac{\lambda}{16m^2} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \frac{\lambda^3}{m^6} \right) \right] \quad (3.73)$$

los cuales pueden ser entendidos como estados ligados de  $n$  bosones. Una mejor aproximación se obtiene si se tiene en cuenta los efectos de las fluctuaciones sobre los caminos clásicos. Para el caso del breather de Seno-Gordon estas fluctuaciones pueden computarse de forma completa [28] y consiste en sustituir  $\frac{\lambda}{m^2}$  por  $\alpha_2 \equiv \frac{(\lambda/m^2)}{(1 - \frac{\lambda}{8\pi m^2})}$  en (3.67) y (3.71) quedándonos, al mismo orden, las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} M_{soliton} &= \frac{8m}{\alpha_1} \\ M_n &= \frac{16m}{\alpha_1} \sin \left( \frac{n\alpha_1}{16} \right) \quad \text{con } n = 1, 2, \dots, < \frac{8\pi}{\alpha_1} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Podemos expresar la segunda ecuación de (3.74) como

$$M_n = 2M_{soliton} \sin \left[ \frac{n\pi}{2} \frac{\lambda/(8\pi m^2)}{1 - \lambda/(8\pi m^2)} \right] \quad (3.75)$$

Dado que  $n < \frac{8\pi m^2}{\lambda} - 1$  tenemos que no existen breathers si  $\lambda \geq 4\pi m^2$ . Por lo tanto también está ausente el bosón correspondiente a la excitación del vacío ya que lo hemos identificado con el breather en el caso de que  $n = 1$ .

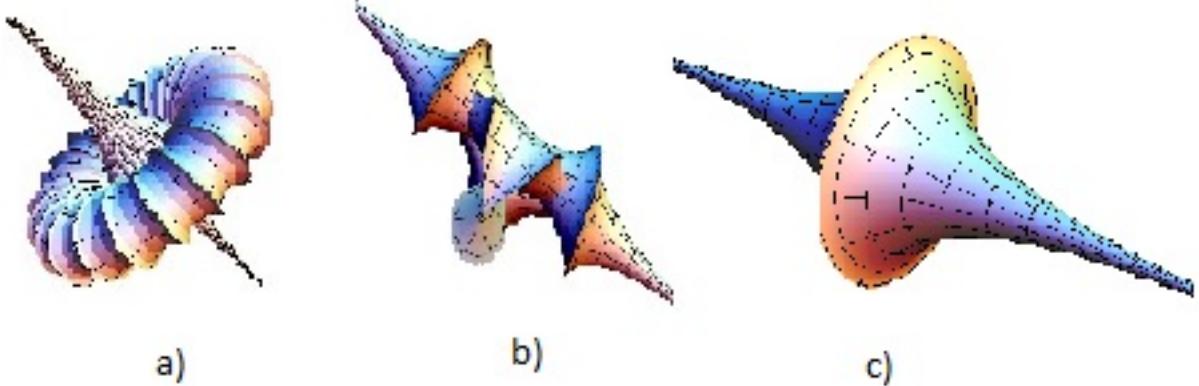
Los solitones y breathers de Seno-Gordon tiene muchas aplicaciones, entre otras, aparecen en: la propagación de los *fluxones* (cuantos de flujo magnético) en uniones Josephson [35, 12], los solitones de la versión discreta del modelo Seno-Gordon, conocida como *modelo Frenkel-Kontorva* (consultar [13] para una revisión general), aparece en la teoría de dislocaciones en cristales [13, págs. 12 y ss], los solitones también aparecen en las ondas que aparecen en los materiales ferromagnéticos y antiferromagnéticos [75, 76]. Vamos a explicar brevemente dos ámbitos donde aparece los solitones y breathers del modelo Seno Gordon. Aparecen en el estudio de las *pseudoesferas* y presenta un ejemplo del fenómeno de *bosonización*. Las pseudoesferas son superficies de  $\mathbb{R}^3$  de curvatura constante -1. Este tipo de superficies se pueden parametrizar con un conjunto concreto de coordenadas asintóticas en las cuales la primer y segunda forma fundamental quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} I(x, t) &= dx^2 + \cos q(dxdt + dt dx) + dt^2 \\ II(x, t) &= \sin q(dxdt + dt dx) \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde  $q$  es el ángulo entre las líneas correspondiente a la  $x$ -curva y la  $t$ -curva. Las ecuaciones de Gauss y Codazzi con esta parametrización se reducen a una única ecuación dada por

$$q_{xt} = \sin q \quad (3.77)$$

Claramente (3.57) corresponde a la ecuación de Seno-Gordon en coordenadas del cono de luz. Aplicando el *Teorema fundamental de las superficies* deducimos que existe un correspondencia, al menos localmente, entre superficies de



donde a), b) y c) representan la pseudosuperficie correspondiente a soluciones con breather, 2-solitones y un solitón respectivamente.

Veamos ahora la segunda aplicación de la ecuación de Seno-Gordon. Consideremos un modelo de un campo fermiónico  $\psi$  (Campo de Dirac) de masa  $M$  en (1+1)-dimensiones dado por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \quad (3.78)$$

donde  $\gamma^\mu$  son las matrices  $2 \times 2$ , dadas, en la representación de Weyl, por  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  y  $\psi$  es la solución en ondas planas de la ecuación de Dirac y viene representado por un spinor de dos componentes reales dado por

$$\psi(x, t) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} e^{i\omega_F t} \quad (3.79)$$

Este modelo se conoce como el *modelo de Thirring* [66]. El espectro de partículas incluye un fermión y un antifermión, ambos de masa  $M$ . Si  $g > 0$  la interacción es atractiva y por lo tanto los estados ligados de fermión-antifermión son posibles. El estado ligado de menor energía tiene una masa, si  $g$  es pequeño, de

$$M = \left[ 2 - g^2 + \frac{4g^3}{\pi} + \mathcal{O}(g^4) \right] \quad (3.80)$$

Volviendo a (3.75), podemos realizar el cambio de variable dado por  $\frac{\lambda}{4\pi m^2} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\pi}}$  y estudiar el espectro para  $\lambda \leq 4\pi m^2$ . Obtenemos que el estado del breather de menor energía tiene una masa de

$$M_1 = M_{sol} \left[ 2 - \delta^2 + \frac{4\delta^3}{\pi} + \mathcal{O}(\delta^4) \right] \quad (3.81)$$

Se observa claramente que la expresión dada por (3.80) es equivalente a la dada por (3.81) si hacemos la siguiente identificación

$$\frac{\lambda}{4\pi m^2} = \frac{1}{1 + \frac{g}{\pi}} \quad (3.82)$$

Vemos que acomplamiento débil  $\frac{\lambda}{m^2} \rightarrow 0$  en el modelo Seno-Gordon corresponde a un acomplamiento fuerte  $g \rightarrow +\infty$  en el modelo de Thirring. Además tenemos también la siguientes equivalencias entre ambos modelos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\lambda}{4\pi m^2} \right) \rightarrow 0 & \quad \text{excitación del vacío} \longleftrightarrow \text{estado ligado de fermión-antifermión} \quad (g \rightarrow +\infty) \\ \lambda \rightarrow 4m^2 & \quad \text{Solitón} \longleftrightarrow \psi \quad (g \longleftrightarrow 0) \\ \lambda \rightarrow 4m^2 & \quad \text{Antisolitón} \longleftrightarrow \bar{\psi} \quad (g \longleftrightarrow 0) \end{aligned}$$

Además, el modelo de Thirring tiene la siguiente transformación  $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$  como una simetría de su acción y usando las equivalencias anteriores podemos ver que el número fermiónico (correspondiente a la simetría anterior) es equivalente a la carga topológica en el modelo Seno-Gordon. Coleman en [18] dió la demostración rigurosa. Esta equivalencia no es un fenómeno aislado, debido a que en un espacio (1+1) dimensional el grupo de Poincaré se reduce a reflexiones y traslaciones, por lo tanto, no existe el spín en (1+1) dimensiones (aunque los spinores y escalares son distintos debido a que tienen distintas estadísticas). Una equivalencia como esta debería permitir construir operadores que anticommuten a partir de operadores bosónicos. Este procedimiento se denomina *bosonización*. Coleman [18] y Mandelstam [44] introdujeron el concepto de bosonización y éste último dió una construcción explícita de un operador construido a partir de la exponencial de un operador bosónico que verificaba relaciones de anticomutación. Actualmente, la bosonización de Coleman y Mandelstam se conoce como *bosonización abeliana*.

El proceso de bosonización anterior no es válido para modelos fermiónicos no abelianos, como *QCD* en dos dimensiones. Witten contruyó en [71], para el caso de fermiones de Majorana, un procedimiento de bosonización no abeliana.

La bosonización en el caso de Thirring y Seno-Gordon tiene lugar como una dualidad entre el régimen débil en una de las teorías con el régimen fuerte en la otra. Esta dualidad se denomina *dualidad T*. Una dualidad de este tipo es uno de los ingredientes esenciales de la teoría  $\mathcal{M}$ .

# Capítulo 4

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos discutido los modelos de campos escalares en (1+1) dimensiones sometidos a un funcional energía potencial  $U[\phi]$  definido positivo y con más de un mínimo. La ecuación de movimiento para estos campos son ecuaciones en derivadas parciales no lineales que admiten soluciones no triviales de energía finita. Estas soluciones, que hemos llamado genéricamente como kink, deben su existencia al hecho de que la variedad del vacíos tiene una topología no trivial. Una vez cuantizada la teoría para estos modelos nos hemos encontrado con dos tipos de partículas elementales, que son:

- En primer lugar, tenemos las partículas correspondientes a las pequeñas fluctuaciones respecto del vacío que tienen una masa  $m_\phi$  dada por (2.15).
- En segundo lugar, tenemos las soluciones de energía finita kink/antikink que son partículas, incluso a nivel clásico, de masa  $M_{cl}$  dada en (2.34). La cuantización, en el régimen de acoplamiento débil, nos da correcciones a la masa clásica.

Hemos visto en el modelo Seno-Gordon que existen partículas que representan un estado ligado de solitón/antisolitón, los breathers. El modelo de  $\lambda\phi^4$  posee los oscilones, un estado ligado oscilante de vida muy larga denominado *Oscilón* [48, 43, 61]. Podríamos decir que esta vida tan larga es debido a que los oscilones son “casi” breathers debido a que el potencial (3.1) y el potencial (3.28) tienen una forma muy aproximada cerca de los mínimos del potencial Seno-Gordon.

Hemos estudiado la cuantización de estos modelos escalares en el supuesto de que estamos en régimen de acoplamiento débil. En el caso de que estuvieramos en régimen de acoplamiento fuerte, aunque el kink puede ser todavía solución clásica de las ecuaciones de movimiento, el análisis perturbativo que hemos realizado para el tratamiento cuántico fallaría. Sin embargo, podemos salvar este obstáculo, en algunos casos, gracias al fenómeno de la dualidad como ya hemos visto en el caso del modelo bosónico de Seno-Gordon y el modelo fermiónico de Thirring.

Hemos visto un modelo (el modelo Seno Gordon) un que no poseía modos vibracionales para el operador de Schrödinger y que tenía una colisión trivial entre dos de sus solitones. También hemos analizado el caso contrario, un modelo (el modelo  $\lambda\phi^4$ ) que tenía una colisión no trivial entre dos de sus kinks y que en

este caso poseía modos vibracionales es un correspondiente problema espectral. Atendiendo a esta situación podríamos formular la siguiente conjetaura

**Conjetura.** *La presencia de modos vibracionales en el correspondiente problema de valores propios es condición suficiente para garantizar la no integrabilidad del modelo bajo estudio.*

Esta conjetaura fue primero establecida en un estudio sobre transición desde el modelo Landau-Lifshitz, que es no integrable, a un modelo que describía un material ferrómagnetico biaxial en un campo magnético. Este estudio puede encontrarse en [7].

# Bibliografía

- [1] M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson, *Solitons, non-linear evolution equations and inverse scattering*. Cambridge University Press, 1991.
- [2] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H.Segur, “Method for solving the sine-Gordon equation”, Phys. Rev. Lett., 30:1262-1264, (1973).
- [3] M.J. Ablowitz, M.D. Kruskal, J.F. Ladik, “Solitary wave collisions”, SIAM J. Appl. Math. 36:421, (1979).
- [4] D. Bazeia, M. Alves, V.B. Bezerra, “Black hole formation in bidimensional dilaton gravity coupled to scalar matter systems”, Modern Phys. Lett. A, 14:2687-2694 (1990).
- [5] G.P. Berman, F.M. Izrailev, “The Fermi-Pasta-Ulam problem: Fifty years of progress”, Chaos, 15, 015104, (2005). arXiv:nlin/0411062.
- [6] E.B. Bogomolnyi, “The stability of classical solutions”, Sov. J. Nucl. Phys., 24:449, (1976).
- [7] M.M. Bogdan, A.M. Kosevich, V.P. Voronov, *Generation of the internal oscillation of soliton in a onedimensional non-integrable system*, in Proceedings of IVth International Workshop “Solitons and Applications” (August 24-26, 1989, Dubna, USSR), Editors V.G. Makhankov, V.K. Fedyanin and O.K. Pashaev, Singapore, World Scientific, 1990, Part IV, 397-401.
- [8] J. Boussinesq, *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de la translation, se propageant dans un canal rectangulaire*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 72:, 755-759, (1871).
- [9] L.J. Boya, J.F. Cariñena, J. Mateos, “Homotopy and Solitons”, Fortsch.Phys., 26:175, (1978).
- [10] L.J. Boya, J. Casahorrán, “ General scalar bidimensional models including kinks”, Annals of Physics, 196: 361-385, (1989).
- [11] L.J. Boya, J. Casahorrán, “ Kinks and solitons in SUSY models”, J. Phys. A: Math. Gen. 23:1645, (1990).
- [12] O.M. Braun, Y.S. Kivshar, “Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model”, Phys. Rep. 306: 1-108, (1998).
- [13] O.M. Braun, Y.S. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova model: concepts, methods and applications*, Springer Verlag, New York, 2004.

- [14] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, 1967.
- [15] T. C. Chung, F. Morales, J.D. Flood, A.J. Heeger, “Solitons at high density in trans-(CH)<sub>x</sub>: Collective transport by mobile, spinless charged solitons”, Phys. Rev. B, 29:2341-2343, (1984).
- [16] S. Coleman, “There are no Goldstone bosons in two dimensions”, Commun. Math. Phys. 31:259-264, (1973).
- [17] S. Coleman, *Aspects of symmetry*, Cambridge University Press, 1985.
- [18] S. Coleman, “The quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model”, Phys. Rev. D, 11:2088, (1975).
- [19] M. Creutz, “Quantum mechanics of extended objects in relativistic field theory” Phys. Rev. D 12:3126-3144, (1975).
- [20] G.H. Derrick, “Comments on non linear wave equations as models for elementary particles”, J. Math. Phys., 5:1252-1254, (1964).
- [21] P.G. Drazin, R.S. Johnson, *Solitons: an introduction*, Cambridge University Press, 1996.
- [22] H. Feshbach, P.M. Morse, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book Company, 1953.
- [23] E. Fermi, “Beweis dass ein mechanisches Normalsysteme im Allgemeinen quasi-ergodisch ist”, Phys. Zeit., 24:261-265, (1923).
- [24] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of Nonlinear Problems. I*, Document LA-1940. 1955. Contenido en “Nonlinear Wave Motion”, Lectures in Applied Math., 15: 142-155. Amer. Math. Soc., Providence, 1974.
- [25] S.V. Fomin, I.M. Gelfand, *Calculus of Variations*, Dover Publications, 2000.
- [26] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer, 1998.
- [27] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, 1997.
- [28] B. Hasslacher, R.F. Dashen, A. Neveu, “Nonperturbative methods and extended hadron models in field theory. I. Semiclassical functional methods”, Phys. Rev. D, 10:4114, (1974).
- [29] B. Hasslacher, R.F. Dashen, A. Neveu, “The particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques”, Phys. Rev. D, 11:3424, (1975).
- [30] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [31] C. Itoi, “Coleman’s theorem on physical assumptions for no Goldstone bosons in two dimensions”, Preprint, arXiv:hep-th/0303118.
- [32] R. Jackiw, J. Goldstone, “Quantization of nonlinear waves”, Phys. Rev. D, 11:1486, (1975).
- [33] R. Jackiw, C. Rebbi, “Solitons with fermion number 1/2”, Phys. Rev. D, 13:3398-3409, (1976).

- [34] R. Jackiw, J.R. Schrieffer, “Solitons with fermion number 1/2 in condensed matter and relativistic field theories”, Nucl. Phys., B, 190:253-265, (1981).
- [35] Y.S. Kivshar, B.A. Malomed, “Dynamics of solitons in nearly integrable systems”, Rev. Mod. Phys. 61: 763-915, (1989).
- [36] A. Kochendorfer, A. Seeger, H. Donth, Z. Phys., 34:173, (1953).
- [37] D.J. Korteweg, G. de Vries, “On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves”. Philosophical Magazine 39: 422-443, (1895).
- [38] M.D. Kruskal, H. Segur, “Nonexistence of small amplitude breather solutions in  $\lambda\phi^4$  theory”, Phys. Rev. Lett., 58:747, (1987).
- [39] P.D. Lax, “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves”, Comm. Pure Appl. Math., 21:467-490, (1968).
- [40] T.D. Lee, R. Friedberg, A. Sirlim, “Class of scalar-field soliton solutions in three space dimensions”, Phys. Rev. D, 13:2739, (1976).
- [41] Y.R. Lin-Liu, H. Takayama, J. Maki, “Continuum model for solitons in polyacetylene”, Phys. Rev. B, 21:2388-2393, (1980).
- [42] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum mechanics*, New York, Pergamon, 1977.
- [43] V.G. Makhanov, I.L. Bogolubsky, “Lifetime of pulsating solitons in certain classical models”, JETP Lett., 24:12, (1976).
- [44] S. Mandelstam, “Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation”, Nucl. Phys. D, 11:3026, (1975).
- [45] N.S. Manton, “An effective Lagrangian for solitons”, Nucl. Phys. B, 150:397, (1979).
- [46] N.S. Manton, P. Sutcliffe, *Topological solitons*, Cambridge University Press, 2004.
- [47] H. B. Nielsen, P. Olesen, “Vortex-line models for dual strings”, Nucl. Phys. B, 61: 45-61, (1973).
- [48] S. Oliveira, P. Anninos, R.A. Matzner, “Fractal structure in the scalar lambda  $(\phi^2 - 1)^2$  theory”, Phys. Rev. D, 44:1147, (1991).
- [49] R. Palais, “The symmetries of solitons”, Bull. Amer. Math. Soc. 34:339-403, (1997),
- [50] M. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.
- [51] J.K. Perring, T.H.R. Skyrme, Nucl. Phys., 31:550, (1962).
- [52] J. Preskill, R. Stora, *Vortices and monopoles*, Netherlands: North-Holland, 1987.

- [53] A.M. Polyakov, “Particle Spectrum in the Quantum Field Theory”, JETP Lett., 20:194, (1974).
- [54] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An introduction to soliton and instantons in quantum field theory*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.
- [55] P. Ramond, *Field Theory, a modern primer*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981.
- [56] Lord, Rayleigh, *On waves*, Phil. Mag. (5), 1:257-279, (1876).
- [57] V. Rivasseau, *From perturbative to constructive renormalization*, Princeton University Press, 1991.
- [58] J.S. Russell, *Report on Waves*, contenido en: 14th Mtg. of the British Assoc. for the Advance of Science, pp. 311-390. John Murray, Londres, 1844.
- [59] M.A. Salle, V.B. Matveev, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, 1991.
- [60] W.K. Schief, C. Rogers, *Bäcklund and Darboux Transformations Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge University Press, 2002.
- [61] J.F. Schonfeld, D.K. Campbell, C.A. Wingate, “Resonance structure in kink-antikink interactions in  $\phi^4$  theory”, *Physica.*, 9D:1, (1983).
- [62] A.C. Scott, F. Y. F. Chu and D. W. McLaughlin, “The soliton - A new concept in applied science”, *Proc. IEEE*, 61:1443-1483, (1973).
- [63] N. Steenrod, *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [64] W.P. Su, J.R. Schrieffer, A.J. Heeger, “Solitons in Polyacetylene”, *Phys. Rev. Lett.*, 42:1698, (1979).
- [65] G. 't Hooft, “Magnetic monopoles in unified gauge theories”, *Nucl. Phys. B* 79: 276-284, (1974).
- [66] W.E. Thirring, “A soluble relativistic field theory?”, *Annals Phys.*, 3:91, (1958).
- [67] E. Tomboulis, “Canonical quantization of nonlinear waves”, *Phys. Rev. D*, 12:1678, (1975).
- [68] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press, 2006.
- [69] A. Vilenkin, E.P.S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*, Cambridge University Press, 1994.
- [70] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol 1,2,3*, Cambridge University Press, 2005.

- [71] E. Witten, “Nonabelian bosonization in two dimensions”, *Commun. Math. Phys.*, 92:455, (1984).
- [72] B. Yoon, “Infinite sequence of conserved currents in the sine-Gordon theory”, *Phys. Rev. D*, 13:3440-3445, (1976).
- [73] N. J. Zabusky y M. D. Kruskal, “Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States.” *Phys. Rev. Lett.*, 15:240-243, (1965).
- [74] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2003.
- [75] V. Zharnitsky, I. Mitkov, M. Levi, “Parametrically forced sine-Gordon equation and domain walls dynamics in ferromagnets”, *Phys. Rev. B* 57(9): 5033, (1998).
- [76] V. Zharnitsky, I. Mitkov, N. Gronbech-Jensen, “ $\pi$  kinks in strongly ac driven sine-Gordon systems”, *Phys. Rev. E* 58(1), R52-R55, (1998).