El teorema del número primo

María de los Reyes Prior Arauz
Trabajo de fin del grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Introducción

El teorema del número primo es un importante resultado de la teoría analítica de números. Se enuncia habitualmente como

$$\pi(x) \sim \frac{x}{log\ x} \left(= \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x) log\ x}{x} = 1. \right)$$

donde $\pi(x)$ designa el número de primos que no exceden a x.

El comportamiento de $\pi(x)$ como función de x ha sido objeto de un intenso estudio por parte de muchos matemáticos a partir del siglo dieciocho. Desde Euclides se sabe que existen infinitos primos. Este resultado se puede enunciar con la función $\pi(x)$, diciendo que $\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty$. Pero fue más tarde cuando Gauss y Legendre conjeturaron el teorema del número primo. Legendre en 1798 dijo que $\pi(x)$ parecía tener la forma $x/(A\ log\ x + B)$, donde A y B eran constantes no especificadas. En la segunda edición de su libro de teoría de números (1808) hizo una conjetura más precisa, indicando los valores de las constantes, $A = 1$ y $B = -1{,}08366$. Pero fue Gauss quién posteriormente refino la expresión.

Las demostraciones de dicho teorema se clasifican en *analíticas* y *elementales*, según los métodos utilizados para desarrollarlas. En las analíticas aparece teoría de variable compleja mientras que en las elementales no. Dentro de las demostraciones analíticas destaca Bernhard Riemann $(1826-1866)$, gran matemático que destacó en teoría de números, además de en otras partes de las Matemáticas. Para su ingreso en la Real Academia de Berlín, en 1860 redactó una memoria de ocho páginas en la que escribió las bases de lo que unos años más tarde ayudaría a terminar la demostración del teorema del número primo. La idea de Riemann fue conectar el estudio de la función $\pi(x)$ con el de la función zeta, $\zeta(s)$, considerada como una función de variable compleja. La función zeta de Riemann, tiene un único polo simple en $s = 1$ y se puede extender de forma analítica a todo el plano complejo. La localización de sus ceros en la llamada banda crítica, $0 \leq Re(s) \leq 1$, está estrechamente ligada con la distibución de los números primos. Riemann conjeturó que todos los ceros en esa banda estaban sobre la recta $Re(s) = 1/2$. Esta famosa conjetura es la conocida *hipótesis de Riemann* y es uno de los retos más difíciles a los que se enfrentan aún hoy en día los matemáticos. El consecutivo desarrollo en la teoría de funciones de variable compleja, motivado entre otras razones por el trabajo de Riemann, dio lugar a que en 1896 el francés Jaques Hadamard y el belga Charles de la Vallée Poussin, consiguierán simultáneamente, pero de forma independiente, por lo que el mérito debe atribuirse a ambos, demostrar al fin el teorema.

En aquellos momentos parecía todavía más difícil que los métodos elementales pudieran sustituir a toda la maquinaria analítica que se había necesitado para probar el teorema. Tuvo que pasar medio siglo hasta que Paul Erdös y Atle Selberg, dos matemáticos que habían destacado por su dominio en los métodos elementales, juntasen sus esfuerzos y lograsen una demostración completamente elemental del teorema del número primo. Como bien dice Javier Cilleruelo en [6]: *Siempre ha existido una sombra que ha rodeado a tan notable descubrimiento. Si bien la demostración había sido completamente "elemental", la colaboración entre ambos no dejó de ser "compleja". Entre Erdös y Selberg hubo intercambio de ideas, y parece ser que la primera intención fue publicar el resultado* *conjuntamente. No está claro qué ocurrió para que al final publicasen dos artículos por separado, aunque parece que tuvo que ver con ello el hecho de que Selberg consiguiera una demostración que prescindía del paso intermedio dado por Erdös. Sea como fuere, este desagradable incidente, que les distanció para siempre, no debe empañar la impresionante trayectoria matemática de ambos.*

Además de estas dos principales demostraciones, dentro de las analíticas hay otras más modernas que son menos extensas y que podemos encontrar en [3].

Nosotros vamos a basarnos en la demostración de Hadamard y de la Vallé Poussin que como hemos comentado se trata de una demostración analítica. Ahora bien, la realizaremos con muchas simplificaciones que se han venido haciendo después. Principalmente nos basaremos en el libro de Apostol [1].

Para ello, empezaremos introduciendo las funciones aritméticas. Después haremos un breve estudio acerca de las medias de dichas funciones y con la introducción de las funciones de Chebyschev llegaremos a formulaciones equivalentes del teorema del número primo. Finalmente con importantes resultados sobre series de Dirichlet y la zeta de Riemann demostraremos el teorema.

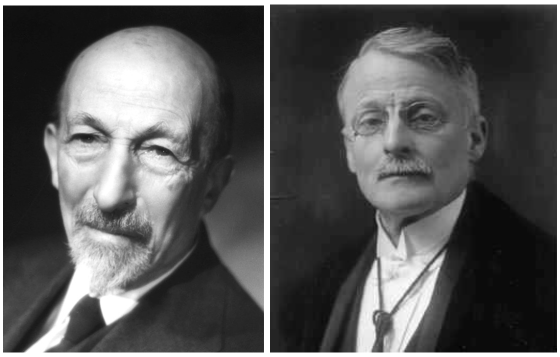

Figura 1: J. Hadamard y C. de la Vallée Poussin

Abstract

In this section we give a brief outline of the work. First of all start by stating our problem, we have to prove the prime number theorem.

In number theory, the prime number theorem (PNT) describes the asymptotic distribution of the prime numbers. The prime number theorem gives a general description of how the primes are distributed amongst the positive integers. It formalizes the intuitive idea that primes become less common as they become larger.

Informally speaking, the prime number theorem states that if a random integer is selected in the range of zero to some large integer N, the probability that the selected integer is prime is about $1/log(N)$, where $log(N)$ is the natural logarithm of N. In other words, the average gap between consecutive prime numbers among the first N integers is roughly $log(N)$.

The magnificent prime number theorem has received much attention and many proofs throughout the past century. Proofs of that theorem are often classified as *analytic* or *elementary*, depending on the methods used to carry them out. The proof of Hadamard and de la Vallée Poussin is analytic, using complex function theory and properties of the Riemann zeta function. An elementary proof was discovered in 1949 by A. Selberg and P.Erdös. Their proof makes no use of the zeta function nor of complex function theory but is quite intricate.

If we ignore the elementary proofs of Erdös and Selberg and focus on the analytic ones, we find that they all have some drawbacks. The original proofs of Hadamard and Vallée Poussin were based, to be sure, on the nonvanishing of $\zeta(z)$ in $Re(z) \geq 1$, but they also required annoying estimates of $\zeta(z)$ at ∞, because the formulas for the coefficients of Dirichlet series involve integrals over infinite contours and so effective evaluation requires estimates at ∞.

The more modern proofs, due to Wiener and Ikehara (and also Heins) get around the necessity of estimating at ∞ and are indeed based only on the appropriate nonvanishing of $\zeta(z)$, but they are tied to certain results of Fourier transforms.

Statement of the theorem

If $x > 0$ let $\pi(x)$ denote the number of primes not exceeding x. Then $\pi(x) \to \infty$ as $x \to \infty$ since there are infinitely many primes. The behavior of $\pi(x)$ as a function of x has been the object of intense study by many celebrated mathematicians ever since the eighteenth century. Inspection of tables of primes led Gauss(1792) and Legendre (1798) to conjeture that $\pi(x)$ is asymptotic to $x/log\, x$, that is,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x) log\, x}{x} = 1.$$

This conjeture was first proved in 1896 by Hadamard and de la Vallée Poussin and is known now as the *prime number theorem*.

We will focus on the analytical demonstration of Hadamard and Vallee Poussin. To do this, we first introduce some arithmetic functions and Dirichlet multiplication. Explain briefly why we focus

on averages of arithmetical functions and by Chebychev functions give equivalent forms of the prime number theorem. Finally with Dirichlet series and properties of the Riemann's zeta function prove the theorem.

Arithmetical Functions

Number theory, like many other branches of mathematics, is often concerned with sequences of real or complex numbers. In number theory such sequences are called *arithmetical functions.* We begin with a important example, the *Möebius function* $\mu(n)$.

Definition 1. *The Möebius function* μ *is defined as follows*

$$\mu(1) = 1.$$

If $n > 1$, *write* $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$. *Then*

$$\begin{aligned} \mu(n) &= (-1)^k \quad if\ a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1, \\ \mu(n) &= 0 \quad otherwise. \end{aligned}$$

Note that $\mu(n) = 0$ *if and only if n has a square factor*> 1.

Other arithmetic function is the Mangoldt's function $\Lambda(n)$ which plays a central role in the distribution of primes.

Definition 2. *For every integer* $n \geq 1$ *we define*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} log\ p & if\ n = p^m\ for\ some\ p\ and\ some\ m \geq 1, \\ 0 & otherwise\ . \end{cases}$$

An interesting result is the following

Theorem 1. *If* $n \geq 1$ *we have*

$$log\ n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \tag{1}$$

Now we focus on the sums that have the form

$$\sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Definition 3. *If f and g are two arithmetical functions we define their Dirichlet product (or Dirichlet convolution) to be the arithmetical function h defined by the equation*

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Notation. We write $f * g$ for h and $(f * g)(n)$ for $h(n)$.
This multiplication is commutative and associative. It has an identity element

$$I(n) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

and if $f(1) \neq 0$, we can define an inverse element f^{-1}, called *the Dirichlet inverse of* f. It is given by the recusion formulas

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \quad \text{for } n < 1.$$

Also we define the unit function u to be the arithmetical function such that $u(n) = 1$ for all n.

We observed that the set of all arithmetic functions f with $f(1) \neq 0$ forms an abelian group with respect to Dirichlet multiplication. Now define a subset of this important group, called the *multiplicative functions*.

Definition 4. *An arithmetic function f is called multiplicative function if f is not identically zero and if*

$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ as long as } (m,n) = 1.$$

An arithmetic function f is called completely multiplicative if it satisfies

$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ for all } m,n.$$

Theorem 2. *If f is multiplicative, then $f(1) = 1$.*

Theorem 3. *Given f with $f(1) = 1$. Then*

(a) f is multiplicative if, and only if,

$$f(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_r^{a_r})$$

for all primes p_i and all integers $a_i \geq 1$.

(b) If f is multiplicative, then f is completely multiplicative if, and only if,

$$f(p^a) = f(p)^a$$

for all primes p and all integers $a \geq 1$.

Theorem 4. *If f and g are multiplicative, so is their Dirichlet product $f * g$*

Averages of Arithmetical Functions

The last section discussed various identities satisfied by arithmetical functions such as $\mu(n)$ and $\Lambda(n)$. We now inquire about the behavior of these and other aritmetical functions $f(n)$ for large values of n.

Many arithmetical functions fluctuate a lot and randomly and it is often difficult to determine their behavior for large n. Sometimes it is more fruitful to study the arithmetic mean

$$\tilde{f}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

To study the average of an arbitrary function f we need a knowledge of its partial sums $\sum_{k=1}^{n} f(k)$. Sometimes it is convenient to replace the upper index n by an arbitrary positive real number x and to consider instead sums of the form

$$\sum_{k \leq x} f(k).$$

Here it is understood that the index k varies from 1 to $[x]$, the greatest integer $\leq x$. If $0 < x < 1$ the sum is empty and we assign it the value 0. Our goal is to determine the behavior of this sum as a function of x, especially for large x.

Sometimes the asymptotic value of a partial sum can be obtained by comparing it with an integral.

Theorem 5. *Abel's identity. For any arithmetical function $a(n)$ let*

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n),$$

where $A(x) = 0$ if $x < 1$. Assume f has a continuous derivative on the interval $[y,x]$, where $0 < y < x$. Then we have

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt \tag{2}$$

Consequently we have Euler's summation formula, which gives an exact expression for error made in such an approximation. In this formula $[t]$ denotes the greatest integer$\leq t$.

Theorem 6. *Euler's summation formula. If f has a continuous derivative f' on the interval $[y,x]$, where $0 < y < x$, then*

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x (t-[t])f'(t)\,dt + f(x)([x]-x) - f(y)([y]-y). \tag{3}$$

Chebyshev's function $\psi(x)$ and $\vartheta(x)$ and equivalent formulations of the prime number theorem

Definition 5. *For $x > 0$ we define Chebyshev's ψ-function by the formula*

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n). \tag{4}$$

Definition 6. *If $x > 0$ we define Chebyshev's ϑ-function by the equation*

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} log\ p,$$

where p runs over all primes$\leq x$.

The next theorem relates the two quoticnts $\psi(x)/x$ and $\vartheta(x)/x$.

Theorem 7. *For $x > 0$ we have*

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{(log\ x)^2}{2\sqrt{x}log\ 2}$$

Note. This inequality implies that

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x}\right) = 0.$$

In other words, if one of $\psi(x)/x$ or $\vartheta(x)/x$ tends to a limit then so does the other, and the two limists are equal.

Now we obtain two formulas relating $\vartheta(x)$ and $\pi(x)$. These will be used to show that the prime number theorem is equivalent to the limit relation $\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$.

Theorem 8. *For $x \geq 2$ we have*

$$\vartheta(x) = \pi(x)log\ x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt \tag{5}$$

and

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{log\ x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\ log^2 t}\,dt \tag{6}$$

And thanks to both theorems we obtain the following theorem which gives us a way equivalent to the prime number theorem.

Theorem 9. *The following relations are logically equivalent*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x) log\, x}{x} = 1. \tag{7}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1. \tag{8}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1. \tag{9}$$

Dirichlet Series and Riemann's zeta function

The series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

where $f(n)$ is an arithmetical function, are called *Dirichlet series with coefficients* $f(n)$. They constitute one of the most useful tools in analytic number theory.

Notation. Following Riemann, we let s be a complex variable and write $s = \sigma + it$, where σ and t are real.

Theorem 10. *Suppose the series* $\sum |f(n)n^{-s}|$ *does not converge for all s or diverge for all s. Then there exists a real number* σ_a*, called tha abscissa of absolute convergence, such that the series* $\sum f(n)n^{-s}$ *converges absolutely if* $\sigma > \sigma_a$ *but does not converge absolutely if* $\sigma < \sigma_a$*.*

An example of this series is the Rimann's zeta function,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

In this case, we have $f(n) = 1$ and $\sigma_a = 1$ because it converges absolutely for $\sigma > 1$ and when $s = 1$ the series diverges.

The next theorem relates products of Dirichlet series with the Dirichlet convolution of their coefficients.

Theorem 11. *Given two functions* $F(s)$ *and* $G(s)$ *represented by Dirichlet series,*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad \textit{for } \sigma > a,$$

and

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \quad \textit{for } \sigma > b.$$

Then in the half-plane where both series converge absolutely we have

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

where $h = f * g$*, the Dirichlet convolution of f and g*

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Conversely, if $F(s)G(s) = \sum \alpha(n)n^{-s}$ *for all s in a sequence* s_k *with* $\sigma_k \to +\infty$ *as* $k \to \infty$ *then* $\alpha = f * g$*.*

A Dirichlet series $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ which does not vanish identically has a half-plane in which it never vanishes. The next theorem shows that in this half-plane $F(s)$ is the exponential of another Dirichlet series if $f(1) \neq 0$.

Theorem 12. *Let $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ be absolutely convergent for $\sigma > \sigma_a$ and assume that $f(1) \neq 0$. If $F(s) \neq 0$ for sigma $> \sigma_0 \geq \sigma_a$, then for $\sigma > \sigma_0$ we have*

$$F(s) = e^{G(s)}$$

with

$$G(s) = log f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{log\ n} n^{-s},$$

where f^{-1} is the Dirichlet inverse of f and $f'(n) = f(n) log\ n$.

Example. When $f(n) = 1$ we have $f'(n) = log\ n$ and $f^{-1}(n) = \mu(n)$ so

$$(f' * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} log\ d\ \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \Lambda(n).$$

Therefore if $\sigma > 1$ we have

$$\zeta(s) = e^{G(s)}$$

where

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{log\ n} n^{-s}.$$

Some applications require estimates on the rate of growth of $\zeta(\sigma + it)$ as a function of t. These will be deduced from another representation of $\zeta(s)$ obtained from Euler's summation formula. This relates $\zeta(s)$ to the partial sums of its series in the half-plane $\sigma > 0$ and also gives an alternate way to extend $\zeta(s)$ analytically beyond the line $\sigma = 1$.

Theorem 13. *For any integer $N \geq 0$ and $\sigma > 0$ we have*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{(1-s)}}{s-1} - s \int_N^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}}\, dx \tag{10}$$

Proof of theorem

The prime number theorem is equivalent to the statement

$$\psi(x) \sim x \quad as\ x \to \infty, \tag{11}$$

where $\psi(x)$ is Chebyshev's function 4. The function ψ is a step function and it is more convenient to deal with its integral, which we denote by ψ_1. Thus, we consider

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)\, dt.$$

The integral ψ_1 is a continuous piecewise linear function. We show firs that the asymptotic relation

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2} x^2 \quad \text{cuando } x \to \infty \tag{12}$$

implies 11 and then we try to prove 12.

To prove that 12 implies 11 we use

Lemma 1. *For any arithmetical function $a(n)$ let*

$$A(x)=\sum_{n\leq x} a(n),$$

where $A(x)=0$ if $x<1$. Then

$$\sum_{n\leq x}(x-n)a(n)=\int_1^x A(t)\,dt.$$

Lemma 2. *Let $A(x)=\sum_{n\leq x} a(n)$ and let $A_1(x)=\int_1^x A(t)\,dt$. Assume also that $a(n)\geq 0$ for all n. If we have the asymptotic formula*

$$A_1(x)\sim Lx^c \text{ cuando } x\to\infty$$

for some $c>0$ and $L>0$, then we also have

$$A(x)\sim cLx^{c-1} \text{ cuando } x\to\infty.$$

When $a(n)=\Lambda(n)$ we have $A(x)=\psi(x)$, $A_1(x)=\psi_1(x)$, and $a(n)\geq 0$. We can apply Lemmas 1 and 2 and immediately obtain

Theorem 14.

$$\psi_1(x)=\sum_{n\leq x}(x-n)\Lambda(n).$$

Also, the asymptotic relation $\psi_1(x)\sim x^2/2$ implies $\psi(x)\sim x$ as $x\to\infty$.

To prove 12 we express ψ_1/x^2 in terms of the Riemann zeta function by means of a contour integral,

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds \quad \text{where } c>1.$$

The quotient $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ has a first order pole at $s=1$ with residue 1. If we subtract this pole we get the formula

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right)ds \quad \text{for } c>1.$$

we let

$$h(s)=\frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right)$$

and rewrite the last equation in the form

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}x^{s-1}h(s)\,ds=\frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(c+it)e^{itlog\,x}\,dt. \tag{13}$$

To complete the proof we are required to show that

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(c+it)e^{itlog\,x}\,dt=0. \tag{14}$$

Now the Riemann-Lebesgue lemma in the theory of Fourier series states that

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{itx}\,dt=0$$

if the integral $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ converges. The integral 14 is of this type, with x replaced by $log\,x$, and we can easily show that the integral $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(c+it)|\,dt$ converges if $c>1$, so the integral in 14 tends to 0 as $x\to\infty$. However, the factor x^{c-1} outside the integral tends to ∞ when $c>1$, so we are faced with an indeterminate form $\infty\cdot 0$.

The equation 13 holds for every $c>1$, if we could put $c=1$ the troublesome factor x^{c-1} would disappear. But then $h(c+it)$ becomes $h(1+it)$ and the integrand involves $\zeta'(s)/\zeta(s)$ on the line $\sigma=1$. In this case, we have the following theorem.

Theorem 15. *We have $\zeta(1+it) \neq 0$ for every real t*

Finally,

Theorem 16. *For $x \geq 1$ we have*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\ \log\ x}\, dt,$$

where the integral $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|\, dt$ converges. Therefore, by the Riemann-Lebesgue lemma we have

$$\psi_1(x) \sim x^2/2$$

and hence

$$\psi(s) \sim x \quad as\ x \to \infty.$$

Thus we have proved the prime number theorem

Índice general

Capítulo 1

Funciones aritméticas

Dentro de las Matemáticas, en Teoría de números, a las sucesiones de números reales o complejos se les llaman *funciones aritméticas*.

En este capítulo se introducen varias funciones aritméticas, como son la función de Möbius y la función de Mangoldt. También hablamos de la multiplicación de Dirichlet, con la cuál relacionamos ambas funciones.

1.1 LA FUNCIÓN DE MÖBIUS $\mu(n)$

Definición 1.1.1. *La función de Möbius μ se define*

$$\mu(1) = 1.$$

Si $n > 1$, escribimos $n = p_1^{a_1} \cdots\ p_k^{a_k}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu(n) &= (-1)^k \quad \text{si } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1, \\ \mu(n) &= 0 \quad \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

La función de Möbius interviene en diferentes lugares dentro de la Teoría de números. Una de sus principales propiedades es una fórmula simple, pero notable, relativa a la suma $\sum_{d|n} \mu(d)$, extendida sobre los divisores positivos de n. En esta fórmula $[x]$ designa el mayor entero $\leq x$.

Teorema 1.1.2. *Si $n \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Demostración. Apéndice. Funciones aritméticas y producto de Dirichlet 1 □

1.2 EL PRODUCTO DE DIRICHLET DE FUNCIONES ARITMÉTICAS

Definición 1.2.1. *Si f y g son dos funciones aritméticas definimos su producto de Dirichlet (o convolución de Dirichlet) como la función aritmética h definida por*

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Notación. Escribimos $f * g$ en vez de h y $(f * g)(n)$ en vez de $h(n)$.

Teorema 1.2.2. *Para toda terna de funciones aritméticas f, g, k, tenemos*

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * k = f * (g * k)$$

es decir, la convolución de Dirichlet es conmutativa y asociativa.

Demostración. Apéndice. Funciones aritméticas y producto de Dirichlet 2 □

Ahora introducimos un elemento identidad para este producto.

Definición 1.2.3. *La función aritmética I dada por*

$$I(n) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 & si\ n = 1, \\ 0 & si\ n > 1. \end{cases}$$

se llama la función identidad.

Teorema 1.2.4. *Para todo f se tiene $I * f = f * I = f$.*

Demostración. Apéndice. Funciones aritméticas y producto de Dirichlet 3 □

Veamos ahora el inverso de dicha operación.

Teorema 1.2.5. *Si f es una función aritmética con $f(1) \neq 0$ existe una única función aritmética f^{-1}, llamada inversa de Dirichlet de f, tal que*

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I.$$

Además, f^{-1} se obtiene por medio de las fórmulas de recurrencia

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \quad para\ n < 1.$$

Demostración. Apéndice. Funciones aritméticas y producto de Dirichlet 4 □

Nota. Tenemos $(f * g)(1) = f(1)g(1)$. Luego, si $f(1) \neq 0$ y $g(1) \neq 0$, entonces $(f * g)(1) \neq 0$. Este hecho, junto con los tres teoremas anteriores, nos dice que, el conjunto de todas las funciones aritméticas f con $f(1) \neq 0$ constituye un grupo abeliano con respecto de la operación $*$, siendo el elemento neutro la función I.

Definición 1.2.6. *Definimos la función unidad u como la función aritmética tal que $u(n) = 1$ para todo n.*

El teorema 1.1.2 nos dice que $\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$, lo cuál, con la notación de la multiplicación de Dirichlet se expresa

$$\mu * u = I.$$

Con lo que tenemos que u y μ son inversas de Dirichlet una de otra, es decir, $u = \mu^{-1}$ y $\mu = u^{-1}$.

Teorema 1.2.7 (Fórmula de inversión de Möbius)**.** *La ecuación*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{1.1}$$

implica

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right). \tag{1.2}$$

Recíprocamente, 1.2 implica 1.1.

Demostración. La ecuación 1.1 nos dice que $f = g * u$. Multiplicando por μ obtenemos $f * \mu = (g * u) * \mu = g * (u * \mu) = g * I = g$, que es 1.2. Recíprocamente, si multiplicamos $f * \mu = g$ por u, obtenemos 1.1. □

1.3 LA FUNCIÓN DE MANGOLDT $\Lambda(n)$

Definición 1.3.1. *Para cada entero $n \geq 1$ definimos*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} log\ p & si\ n = p^m \text{ para un cierto primo } p \text{ y un cierto } m \geq 1, \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Dicha función, llamada función de Mangoldt, juega un papel importante en la distribución de primos.

Teorema 1.3.2. *Si $n \geq 1$ tenemos*

$$log\ n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \tag{1.3}$$

Demostración. Apéndice. Funciones aritméticas y producto de Dirichlet 5 □

Ahora utilizando la inversión de Möebius, podemos expresar $\Lambda(n)$ en términos del logaritmo.

Teorema 1.3.3. *Si $n \geq 1$ tenemos*

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) log \frac{n}{d} = -\sum_{d|n} \mu(d) log\ d.$$

Demostración. Apéndice. Funciones aritméticas y producto de Dirichlet 6 □

1.4 FUNCIONES MULTIPLICATIVAS

Hemos visto que el conjunto de funciones aritméticas f con $f(1) \neq 0$ forma un grupo abeliano respecto del producto de Dirichlet. Ahora vamos a estudiar un subgrupo de este grupo, el de las *funciones multiplicativas*.

Definición 1.4.1. *Una función aritmética f se llama multiplicativa si f no es idénticamente nula y si*

$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ siempre que } (m,n) = 1.$$

Una función f se llama completamente multiplicativa si verifica

$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ para todo } m,n.$$

Ejemplos.

1. Sea $f_\alpha(n) = n^\alpha$, donde α es un número real o complejo fijo. Esta función es completamente multiplicativa. En particular, la función unidad $u = f_0$ es completamente multiplicativa. Utilizamos el símbolo N para la función aritmética tal que $N(n) = n$ para todo n. Con esta notación denotaremos a f_α con N^α y la llamaremos *función potencia*.

2. La función identidad $I(n)$ es completamente multiplicativa.

3. La función de Möebius es multiplicativa pero no es completamente multiplicativa pues $\mu(4) = 0$ y $\mu(2)\mu(2) = 1$. Es fácil ver que es multiplicativa a partir de la definición. Consideramos dos primos relativos m y n. Si m o n posee un divisor que es cuadrado de un primo también lo posee mn, y tanto $\mu(mn)$ como $\mu(m)\mu(n)$ son cero. Si ninguno de ellos tiene un divisor cuadrático, entonces $m = p_1...p_s$ y $n = q_1...q_r$ con los p_i y los q_i primos distintos. Luego $\mu(m) = (-1)^s$, $\mu(n) = (-1)^r$ y $\mu(mn) = (-1)^{s+r} = \mu(m)\mu(n)$. Efectivamente es multiplicativa.

4. Si f y g son multiplicativas, fg y f/g con $g(n) \neq 0$, también los son. Si f y g son completamente multiplicativas, también los son fg y f/g con $g(n) \neq 0$.

Ahora introducimos algunas propiedades de dichas funciones.

Teorema 1.4.2. *Si f es multiplicativa, entonces $f(1) = 1$.*

Demostración. Tenemos $f(n) = f(1)f(n)$ puesto que $(n,1) = 1$ para todo n. Dado que f no es idénticamente nula tenemos $f(n) \neq 0$ para algún n, luego $f(1) = 1$. □

Nota. La función de Mangoldt no es multiplicativa ya que $\Lambda(1) = 0$.

Teorema 1.4.3. *Dada f con $f(1) = 1$, entonces*

(a) f es multiplicativa si y sólo si

$$f(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_r^{a_r})$$

para todos los primos p_i y todos los enteros $a_i \geq 1$.

(b) Si f es multiplicativa, entonces f es completamente multiplicativa si y sólo si

$$f(p^a) = f(p)^a$$

para todos los primos p y todos los enteros $a \geq 1$.

Demostración. La demostración se deduce fácilmente de las definiciones. □

Teorema 1.4.4. *Si f y g son multiplicativas, también lo es su producto de Dirichlet $f * g$.*

Demostración. Apéndice. Funciones aritméticas y producto de Dirichlet 7 □

La inversa de Dirichlet de una función completamente multiplicativa es particularmente fácil de calcular.

Teorema 1.4.5. *Sea f multiplicativa, entonces f es completamente multiplicativa si y sólo si*

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n) \text{ para todo } n \geq 1.$$

Demostración. Apéndice. Funciones aritméticas y producto de Dirichlet 8 □

1.5 DERIVADAS DE FUNCIONES ARITMÉTICAS

Definición 1.5.1. *Sea f, función aritmética definimos su derivada f' como la función aritmética dada por la ecuación*

$$f'(n) = f(n) log\ n \text{ para } n \geq 1.$$

Ejemplos.

1. Como $I(n) log\ n = 0$ para todo n tenemos $I' = 0$.

2. Dado $u(n) = 1$ para todo n tenemos $u'(n) = log\ n$. Por lo tanto, la fórmula $\sum_{d|n} \Lambda(d) = log\ n$ se puede escribir $\Lambda * u = u'$.

Este concepto de derivada, posee muchas propiedades de la derivada usual estudiada en Análisis elemental. Por ejemplo, las reglas usuales para derivar sumas y productos se conservan si los productos son de Dirichlet.

Teorema 1.5.2. *Si f y g son funciones aritméticas tenemos*

(a) $(f + g)' = f' + g'$.

(b) $(f * g)' = f' * g + f * g'$.

(c) $(f^{-1})' = -f' * (f * f)^{-1}$ *si* $f(1) \neq 0$.

Demostración. Apéndice. Funciones aritméticas y producto de Dirichlet 9 □

Capítulo 2

Formas equivalentes del teorema del número primo

En este capítulo empezamos explicando la importancia de tratar con medias de funciones aritméticas. Después introducimos las funciones de Chebyshev con las cuáles llegamos a expresiones equivalentes del teorema del número primo.

2.1 MEDIAS DE FUNCIONES ARITMÉTICAS

En el capítulo anterior hemos estudiado varias identidades satisfechas por funciones aritméticas. Ahora nos centramos en el comportamiento de dichas funciones aritméticas $f(n)$ para valores grandes de n.

Ejemplo. Consideramos la función aritmética $d(n)$, número de divisores de n. Esta función toma el valor 2 una infinidad de veces (siempre que n sea primo) y toma valores grandes cuando n posee un número grande de divisores. Por lo tanto, los valores de $d(n)$ varían considerablemente cuando n crece.

Muchas funciones aritméticas $f(n)$ varían de esta manera y es difícil determinar su comportamiento para n grande. Por ello, a veces es mucho mejor estudiar su media aritmética

$$\tilde{f}(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Las medias suavizan las variaciones de forma que resulta razonable esperar que los valores medios $\tilde{f}(n)$ posean un comportamiento más regular que los de $f(n)$. Para estudiar la media de una función arbitraria f necesitamos un cierto conocimiento de sus sumas parciales $\sum_{k=1}^{n} f(k)$. A veces es conveniente reemplazar el índice superior n por un número real positivo x arbitrario y considerar en su lugar sumas de la forma

$$\sum_{k\leq x} f(k).$$

Entendiendo que los índices k varían de 1 a $[x]$, el mayor entero$\leq x$, y que si $0 < x < 1$ la suma es vacía y le asignamos el valor cero. Así, nuestro objetivo de estudiar el comportamiento de $f(n)$ para n grande, se traslada a determinar el comportamiento de esta suma en función de x, especialmente para x grande.

Notación. De ahora en adelante nos van aparecer diferentes notaciones que merecen la pena ser mencionadas.

Definición 2.1.1. *Si $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, escribiremos*

$$f(x) = O(g(x))$$

para indicar que el cociente $f(x)/g(x)$ se halla acotado para $x \geq a$, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq Mg(x) \text{ para todo } x \geq a.$$

Nota. Una ecuación de la forma $f(x) = h(x) + O(g(x))$ significa que $f(x) - h(x) = O(g(x))$.

Definición 2.1.2. *Si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

diremos que $f(x)$ es asintótica a $g(x)$ cuando x tienda a ∞, y escribiremos

$$f(x) \sim g(x) \text{ cuando } x \to \infty.$$

2.2 LAS FUNCIONES DE CHEBYSHEV $\psi(x)$ Y $\vartheta(x)$

Definición 2.2.1. *Para cada $x > 0$ definimos la función ψ de Chebyshev por la fórmula*

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n).$$

Puesto que $\Lambda(n) = 0$ excepeto si n es una potencia de primo podemos escribir la definición de $\psi(x)$ como

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = \sum_{\substack{m=1 \\ p^m\leq x}}^{\infty} \sum_{p} \Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p\leq x^{1/m}} log\ p.$$

La suma extendida a m es una suma finita, pues la suma extendida a p es vacía si $x^{1/m} < 2$, es decir, si $(1/m) log\ x < log\ 2$, o si

$$m > \frac{log\ x}{log\ 2} = log_2\ x.$$

Por tanto, tenemos

$$\psi(x) = \sum_{m\leq log_2 x} \sum_{p\leq x^{1/m}} log\ p. \tag{2.1}$$

Definición 2.2.2. *Si $x > 0$ definimos la función ϑ de Chebyshev por la ecuación*

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} log\ p,$$

donde p recorre todos los primos $\leq x$.

Ahora podemos escribir la ecuación 2.1 como

$$\psi(x) = \sum_{m\leq log_2 x} \vartheta(x^{1/m}). \tag{2.2}$$

El teorema que sigue relaciona los dos cocientes $\psi(x)/x$ y $\vartheta(x)/x$.

Teorema 2.2.3. *Para $x > 0$ tenemos*

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{(log\ x)^2}{2\sqrt{x} log\ 2}$$

Demostración. De 2.2 obtenemos

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2 \leq m \leq log_2 x} \vartheta(x^{1/m}).$$

Y de la definición de $\vartheta(x)$ obtenemos

$$\vartheta(x) \leq \sum_{p \leq x} log\ x \leq x\ log\ x$$

luego

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) \leq \sum_{2 \leq m \leq log_2 x} x^{1/m} log(x^{1/m}) \leq (log_2\ x)\sqrt{x}\ log\left(\sqrt{x}\right) = \frac{log\ x}{log\ 2} \frac{\sqrt{x}}{2} log\ x = \frac{\sqrt{x}\ (log\ x)^2}{2\ log\ 2}.$$

Dividimos por x y obtenemos el teorema. □

Nota. Esta desigualdad implica

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0,$$

es decir, si uno de los cocientes $\psi(x)/x$ o $\vartheta(x)/x$ posee límite entonces el otro también y ambos limites coinciden.

2.3 RELACIONES ENTRE $\vartheta(x)$ Y $\pi(x)$

Necesitamos dos fórmulas que relacionan $\vartheta(x)$ y $\pi(x)$, para demostrar que el teorema del número primo es equivalente a la relación límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

Tanto $\vartheta(x)$ como $\pi(x)$ son funciones escalonadas con salto en los números primos; $\pi(x)$ tiene salto 1 en cada primo p, mientras que $\vartheta(x)$ tiene salto $log\ p$. Las sumas que contienen funciones escalonadas de este tipo se pueden expresar como integrales por medio del teorema siguiente.

Teorema 2.3.1 (Identidad de Abel)**.** *Para toda función aritmética $a(n)$, sea*

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n),$$

donde $A(x) = 0$ si $x < 1$. Suponemos que f posee derivada continua en el intervalo $[y,x]$, donde $0 < y < x$. Entonces tenemos

$$\sum_{y < n \leq x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t)\, dt \tag{2.3}$$

Demostración. Tener en cuenta que $[t]$ designa el mayor entero $\leq t$.

Sea $k = [x]$ y $m = [y]$, entonces $A(x) = A(k)$ y $A(y) = A(m)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\le x} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} (A(n)-A(n-1))f(n) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)(f(n)-f(n+1)) + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\int_n^{n+1} f'(t)\,dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)\,dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)\,dt + A(x)f(x) - \int_k^x A(t)f'(t)\,dt - A(y)f(y) - \int_y^{m+1} A(t)f'(t)\,dt \\
&= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

□

Nota. Como $A(x)=0$ si $x<1$, cuando $y<1$ la ecuación 2.3 toma la forma

$$\sum_{n\le x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)\,dt \tag{2.4}$$

Corolario 2.3.2 (Fórmula de sumación de Euler)**.** *Si f posee derivada continua f', en el intervalo $[y,x]$, donde $0<y<x$, entonces*

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x (t-[t])f'(t)\,dt + f(x)([x]-x) - f(y)([y]-y). \tag{2.5}$$

Demostración. Se deduce inmediatamente de la identidad de Abel. En efecto, si $a(n)=1$ para todo $n\ge 1$ obtenemos $A(x)=[x]$ y 2.3 implica

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = [x]f(x) - f(y)[y] - \int_y^x [t]f'(t)\,dt$$

combinando esto con la fórmula de integración por partes

$$\int_y^x tf'(t)\,dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x f(t)\,dt$$

obtenemos inmediatamente la fórmula de sumación de Euler. □

A veces los valores asintóticos de una suma parcial se pueden obtener comparando la suma con una integral, y es la fórmula de sumación de Euler la que nos da una expresión exacta del error cometido en dichas aproximaciones.

Ahora emplearemos la identidad de Abel para expresar $\vartheta(x)$ y $\pi(x)$ por medio de integrales. Dichas expresiones serán las fórmulas que nos relacionen ambas funciones.

Teorema 2.3.3. *Para $x\ge 2$ tenemos*

$$\vartheta(x) = \pi(x)log\,x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt \tag{2.6}$$

y

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{log\,x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\,log^2 t}\,dt \tag{2.7}$$

Demostración. Sea $a(n)$ la función característica de los primos, es decir

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo,} \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Entonces tenemos

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{1<n\leq x} a(n) \quad \text{y} \quad \vartheta(x) = \sum_{p\leq x} log\ p = \sum_{1<n\leq x} a(n) log\ n.$$

Si hacemos $f(x) = log\ x$ en 2.3 con $y = 1$ obtenemos

$$\vartheta(x) = \sum_{1<n\leq x} a(n) log\ n = \pi(x) log\ x - \pi(1) log\ 1 - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt$$

lo que prueba 2.6 ya que $\pi(t) = 0$ para $t < 2$.

Ahora, sea $b(n) = a(n) log\ n$, podemos escribir

$$\pi(x) = \sum_{3/2<n\leq x} \frac{b(n)}{log\ n}, \qquad \vartheta(x) = \sum_{n\leq x} b(n).$$

Si hacemos $f(x) = 1/log\ x$ en 2.3 con $y = 3/2$ obtenemos

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{log\ x} - \frac{\vartheta(3/2)}{log\ 3/2} + \int_{3/2}^x \frac{\vartheta(t)}{t\ log^2\ t}\, dt$$

lo que prueba 2.7 ya que $\vartheta(t) = 0$ si $t < 2$.

□

2.4 EQUIVALENCIA AL TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO

Teorema 2.4.1. *Las tres relaciones son equivalentes*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x) log\ x}{x} = 1. \tag{2.8}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1. \tag{2.9}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1. \tag{2.10}$$

Demostración. De 2.6 y 2.7 obtenemos, respectivamente

$$\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\pi(x) log\ x}{x} - \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt$$

y

$$\frac{\pi(x) log\ x}{x} = \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{log\ x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t log^2\ t}\, dt.$$

Luego, para probar que 2.8 implica 2.9 únicamente necesitamos demostrar que 2.8 implica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt = 0.$$

Tenemos que 2.8 implica $\frac{\pi(t)}{t} = O\left(\frac{1}{log\ t}\right)$ para $t \geq 2$ o sea

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt = O\left(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{1}{log\ t}\, dt\right).$$

Ahora bien

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\log \sqrt{x}}$$

luego

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log t} \to 0 \quad \text{cuando } x \to \infty.$$

Lo que demuestra que 2.8 implica 2.9.

Para probar que 2.9 implica 2.8 únicamente necesitamos probar que 2.9 implica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}\,dt = 0.$$

Pero 2.9 implica $\vartheta(t) = O(t)$ luego

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\log^2 t}\,dt = O\left(\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}\right).$$

Ahora bien

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\log^2 \sqrt{x}}$$

por lo tanto

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \to 0 \quad \text{cuando } x \to \infty.$$

Esto demuestra que 2.9 implica 2.8 luego 2.8 y 2.9 son equivalentes. Y gracias a la nota del teorema 2.2.3 sabemos que 2.9 y 2.10 son equivalentes. □

Capítulo 3

Series de Dirichlet y la ζ de Riemann

Las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

donde $f(n)$ es una función aritmética, reciben el nombre de *series de Dirichlet de coeficientes* $f(n)$. Estas series constituyen una de las herramientas más útiles en Teoría analítica de números. En este capítulo estudiaremos las propiedades generales de dichas series y propiedades de la ζ de Riemann.

Notación. Sea s una variable compleja, escribiremos

$$s = \sigma + it,$$

donde σ y t son reales. Entonces $n^s = e^{s \; log \; n} = e^{(\sigma+it) log \; n} = n^{\sigma} e^{it \; log \; n}$. Con lo que tenemos que $|n^s| = n^{\sigma}$ puesto que $|e^{i\theta}| = 1$ para θ real.

El conjunto de puntos $s = \sigma + it$ con $\sigma > a$ se llama *semiplano*. Veremos que, para cada serie de Dirichlet, existe un semiplano $\sigma > \sigma_a$ en el que la serie converge absolutamente. Además probaremos que, en el semiplano de convergencia, la serie representa una función analítica de variable compleja s.

3.1 FUNCIÓN DEFINIDA POR UNA SERIE DE DIRICHLET

Observemos en primer lugar que, si $\sigma \geq a$, tenemos $|n^s| = n^{\sigma} \geq n^a$, por lo tanto

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \frac{|f(n)|}{n^a}$$

Luego, si una serie de Dirichlet $\sum f(n)n^{-s}$ converge absolutamente para $s = a + ib$, entonces, por el criterio de comparación, converge también absolutamente para todo s con $\sigma \geq a$.

Teorema 3.1.1. *Supongamos que la serie $\sum |f(n)n^{-s}|$ ni converge para todo s ni diverge para todo s. Entonces existe un número real σ_a llamado abscisa de convergencia absoluta, tal que la serie $\sum f(n)n^{-s}$ converge absolutamente si $\sigma > \sigma_a$ pero, en cambio, no converge absolutamente, si $\sigma < \sigma_a$.*

Demostración. Sea D el conjunto de todos los números reales σ tales que $\sum |f(n)n^{-s}|$ diverge. D es no vacío puesto que esta serie no converge para todo s, y D está acotado superiormente ya que la serie no diverge para todo s. Por lo tanto, D admite un supremo que llamaremos σ_a. Si $\sigma < \sigma_a$, entonces $\sigma \in D$, ya que si no fuese así, se trataría de una cota superior de D menor que el supremo. Si $\sigma > \sigma_a$entonces $\sigma \notin D$ puesto que σ_a es el supremo de D. Y ya tenemos demostrado el teorema.

□

Nota. Si $\sum |f(n)n^{-s}|$ converge para todo real, definimos $\sigma_a = -\infty$. Si $\sum |f(n)n^{-s}|$ no converge para ningún s, definimos $\sigma_a = +\infty$.

Ejemplo. La función zeta de Riemann,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

es un ejemplo de este tipo de series con $f(n) = 1$. Converge absolutamente para $\sigma > 1$ y cuando $s = 1$ la serie diverge, por lo tanto tenemos, en este caso, que $\sigma_a = 1$.

Supongamos ahora que $\sum f(n)n^{-s}$ converge absolutamente para $\sigma > \sigma_a$ y consideremos la función suma $F(s)$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \text{ para } \sigma > \sigma_a. \tag{3.1}$$

Veamos algunas propiedades de $F(s)$.

Lema 3.1.2. *Si $N \geq 1$ y $\sigma \geq c > \sigma_a$ tenemos*

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-s} \right| \leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-c}.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{\infty} f(n)n^{-s} \right| &\leq \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-\sigma} = \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-c}n^{-(\sigma-c)} \\ &\leq N^{-(\sigma-c)} \sum_{n=N}^{\infty} |f(n)|n^{-c}. \end{aligned}$$

□

Con la ayuda de este lema se prueba el siguiente teorema con el que vemos que todos los coeficientes están determinados por la función suma.

Teorema 3.1.3 (Teorema de unicidad). *Dadas dos series de Dirichlet*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad y \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

ambas absolutamente convergentes para $\sigma > \sigma_a$. Si $F(s) = G(s)$ para cada s de una sucesión infinita s_k tal que $\sigma_k \to +\infty$ cuando $k \to \infty$, entonces $f(n) = g(n)$ para cada n.

Demostración. Apéndice. Series de Dirichlet y la ζ de Riemann 1 □

El teorema que ahora escribimos nos muestra el comportamiento de $F(s)$ cuando $\sigma \to \infty$.

Teorema 3.1.4. *Si $F(s)$ está definida por 3.1, entonces*

$$\lim_{\sigma \to +\infty} F(\sigma + it) = f(1)$$

uniformemente para $-\infty < t < +\infty$.

Demostración. Apéndice. Series de Dirichlet y la ζ de Riemann 2 □

Ejemplo. $\zeta(\sigma + it) \to 1$ cuando $\sigma \to +\infty$.

3.2 MULTIPLICACIÓN DE SERIES DE DIRICHLET

Vemos que la multiplicación de series de Dirichlet está relacionada con la convolución de Dirichlet de sus coeficientes.

Teorema 3.2.1. *Dadas dos funciones $F(s)$ y $G(s)$ representadas por dos series de Dirichlet,*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad para\ \sigma > a,$$

y

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \quad para\ \sigma > b.$$

Entonces, en el semiplano en el que ambas series convergen absolutamente, tenemos

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \tag{3.2}$$

donde $h = f * g$, es la convolución de Dirichlet de f y g,

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Recíprocamente, si $F(s)G(s) = \sum \alpha(n) n^{-s}$ para todo s de una sucesión s_k con $\sigma_k \to +\infty$ cuando $k \to \infty$, entonces $\alpha = f * g$.

Demostración. Para todo s en el que ambas series convergen absolutamente tenemos

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} \sum_{m=1}^{\infty} g(m) m^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(n) g(m) (nm)^{-s}.$$

Como convergen absolutamente, podemos multiplicar estas series y reordenar sus términos de manera que no se altere la suma. Juntamos los términos para los que mn es constante, $mn = k$. Los posibles valores que puede tomar k son $1, 2, \dots$ luego

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{mn=k} f(n) g(m) \right) k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} h(k) k^{-s}$$

donde $h(k) = \sum_{mn=k} f(n) g(m) = (f * g)(k)$. Así queda demostrada la primera parte y la segunda es inmediata gracias al teorema de unicidad 3.1.3 □

Nota. Las series $\sum n^{-s}$ y $\sum \mu(n) n^{-s}$ convergen absolutamente para $\sigma > 1$. Podemos multiplicarlas y obtenemos que

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1 \quad \text{si } \sigma > 1,$$

ya que $1 * \mu(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = [1/n]$.

Esto prueba que $\zeta(s) \neq 0$ para $\sigma > 1$ y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \quad \text{si } \sigma > 1.$$

Acerca de la derivada de una serie de Dirichlet tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2. *La función suma $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ de una serie de Dirichlet es analítica en su semiplano de convergencia y su derivada $F'(s)$ se halla representada en dicho semiplano por la serie de Dirichlet*

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) log\ n}{n^s} \tag{3.3}$$

Nota. La serie derivada 3.3 tiene la misma abscisa de convergencia absoluta que la serie $F(s)$.

Ejemplo. Para $\sigma > 1$ tenemos

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{log\ n}{n^s} \tag{3.4}$$

y

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \tag{3.5}$$

La ecuación 3.4 se obtiene derivando término a término la serie correspondiente a la función zeta, o aplicando directamente la fórmula 3.3 con $f(n) = 1$. Y la 3.5 multiplicando las dos series de Dirichlet, $\sum \Lambda(n)n^{-s}$ y $\sum n^{-s}$ y utilizando la identidad $\sum_{d|n} \Lambda(d) = log\ n$, vista en el teorema 1.3.2.

3.3 PRODUCTOS DE EULER

Teorema 3.3.1. *Sea f una función aritmética multiplicativa tal que la serie $\sum f(n)$ es absolutamente convergente. Entonces la suma de la serie se puede expresar como un producto infinito absolutamente convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \{1 + f(p) + f(p^2) + \cdots\} \tag{3.6}$$

extendido al conjunto de todos los números primos. Si f es completamente multiplicativa, el producto se simplifica y se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)}. \tag{3.7}$$

Nota. En cada uno de los casos el producto se llama *producto de Euler* de la serie.

Demostración. Apéndice. Series de Dirichlet y la ζ de Riemann 3 □

Aplicando este teorema a las series de Dirichlet absolutamente convergentes obtenemos inmediatamente el siguiente teorema,

Teorema 3.3.2. *Suponemos que $\sum f(n)n^{-s}$ converge absolutamente para $\sigma > \sigma_a$. Si f es multiplicativa tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left\{1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \cdots\right\} \quad si\ \sigma > \sigma_a \tag{3.8}$$

y si f es completamente multiplicativa tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}} \quad si\ \sigma > \sigma_a. \tag{3.9}$$

Ejemplo. Si hacemos $f(n) = 1$ obtenemos el siguiente producto de Euler,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad \text{si } \sigma > 1. \tag{3.10}$$

Dicha identidad es la que relaciona la zeta de Riemann con los números primos.

3.4 SERIES DE DIRICHLET EXPRESADAS COMO EXPONENCIALES DE SERIES DE DIRICHLET

Una serie de Dirichlet $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ que no es idénticamente nula, admite un semiplano en el que no se anula. En ese semiplano $F(s)$ es la exponencial de otra serie de Dirichlet si $f(1) \neq 0$, eso es lo que nos muestra el siguiente resultado

Teorema 3.4.1. *Sea $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ absolutamente convergente para $\sigma > \sigma_0$ y supongamos que $f(1) \neq 0$. Si $F(s) \neq 0$ para $\sigma > \sigma_0 \geq \sigma_a$, entonces para $\sigma > \sigma_0$ tenemos*

$$F(s) = e^{G(s)}$$

con

$$G(s) = log\ f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{log\ n} n^{-s},$$

donde f^{-1} es la inversa de Dirichlet de f y $f'(n) = f(n) log\ n$.

Demostración. Apéndice. Series de Dirichlet y la ζ de Riemann 4 □

Ejemplo. Si $f(n) = 1$ entonces $f'(n) = log\ n$ y $f^{-1}(n) = \mu(n)$ y gracias a la fórmula de inversión de Möbius vista en el teorema 1.2.7 tenemos

$$(f' * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} log\ d\ \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \Lambda(n).$$

Por tanto, si $\sigma > 1$, tenemos

$$\zeta(s) = e^{G(s)}$$

donde

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{log\ n} n^{-s}.$$

3.5 EXTENSIÓN DE LA ζ A $\sigma > 0$

Teorema 3.5.1. *Para todo entero $N > 0$ y $\sigma > 0$ tenemos*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{(1-s)}}{s-1} - s \int_N^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx \tag{3.11}$$

Demostración. Aplicando la fórmula de sumación de Euler, 2.3.2, con $f(t) = 1/t^s$ y con x e y enteros, obtenemos

$$\sum_{y<n\leq x} \frac{1}{n^s} = \int_y^x \frac{1}{t^s} dt - s \int_y^x \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt.$$

Tomando $y = N$ y haciendo que $x \to \infty$, y siempre que $\sigma > 1$, tenemos

$$\sum_{N<n} \frac{1}{n^s} = \int_N^{\infty} \frac{1}{t^s} dt - s \int_N^{\infty} \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt = \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^{\infty} \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt.$$

Luego,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \sum_{n>N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^{\infty} \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt$$

para $\sigma > 1$. Si $\sigma \geq \delta > 0$ la integral se halla dominada por $\int_N^{\infty} t^{(-\delta-1)} dt$ por lo que es uniformemente convergente para $\sigma \geq \delta$ y por tanto representa una función analítica en el semiplano $\sigma > 0$. Por consiguiente 3.11 se sigue cumpliendo para $\sigma > 0$ por prolongación analítica. □

Capítulo 4

Demostración analítica del teorema del número primo

Hemos visto, en el capítulo 2, que el teorema del número primo es equivalente a

$$\psi(x) \sim x \quad \text{cuando } x \to \infty \tag{4.1}$$

donde $\psi(x)$ es la función de Chebyshev,

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Luego si la demostramos tendremos demostrado el teorema del número primo. Pues bien, nos vamos a centrar en demostrar esta relación y para ello vamos a utilizar propiedades de la función zeta de Riemann.

La funcion ψ es una función escalonada y es más conveniente trabajar con su integral, a la que denominamos ψ_1,

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)\, dt.$$

La integral ψ_1 es una función continua lineal a trozos y veremos que la relación asintótica

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \quad \text{cuando } x \to \infty \tag{4.2}$$

implica 4.1. Una vez vista esta implicación, demostraremos la relación 4.2. Para ello expresamos $\psi_1(x)/x^2$ en términos de la función zeta de Riemann,

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds \quad \text{donde } c > 1.$$

El cociente $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ posee un polo de primer orden en $s = 1$ con residuo 1. Si quitamos este polo obtenemos la fórmula

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right) ds \quad \text{para } c > 1.$$

Sea

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right)$$

entonces la última ecuación nos queda

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1} h(s)\, ds = \frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it)e^{it\log x}\, dt. \tag{4.3}$$

Para completar la demostración tenemos que probar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{c-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it)e^{it\log x}\, dt = 0. \tag{4.4}$$

Entonces utilizaremos el lema de Riemann-Lebesgue de la teoría de las series de Fourier que dice

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}\, dt = 0$$

si la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge.

La integral 4.4 es de ese tipo con $log\, x$ en vez de x y es fácil demostrar que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(c+it)|$ converge si $c > 1$, por lo que la integral 4.4 tiende a 0 cuando x$\to\infty$. Sin embargo el factor x^{c-1} que esta fuera de la integral, tiende a ∞ cuando $c > 1$ luego tenemos una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$. Si sustituimos $c = 1$ en 4.3 el factor x^{c-1} desaparece, pero entonces $h(c+it)$ se transforma en $h(1+it)$ y el integrando contiene a $\zeta'(s)/\zeta(s)$ sobre la recta $\sigma = 1$. En este caso ver que $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|\, dt$ converge es más difícil, de hecho es la parte más difícil de la demostración, que necesita un estudio más detallado de la función zeta de Riemann en las proximidades de la recta $\sigma = 1$.

Para llevar a cabo dicha demostración, empezaremos introduciendo unos lemas.

4.1 LEMAS

Lema 4.1.1. *Para toda función aritmética $a(n)$, sea*

$$A(x) = \sum_{n\le x} a(n),$$

donde $A(x) = 0$ si $x < 1$. Entonces

$$\sum_{n\le x} (x-n)a(n) = \int_1^x A(t)\, dt.$$

Demostración. Aplicando la identidad de Abel (vista en el teorema 2.3.1) con $y = 1$, tenemos que

$$\sum_{n\le x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)\, dt \tag{4.5}$$

si f posee derivada continua en el intervalo $[1,x]$. Ahora, hacemos $f(t) = t$ y obtenemos

$$\sum_{n\le x} na(n) = x\sum_{n\le x} a(n) - \int_1^x A(t)\, dt.$$

Despejando la integral, tenemos la igualdad del enunciado. □

Lema 4.1.2. *Sea $A(x) = \sum_{n\le x} a(n)$ y sea $A_1(x) = \int_1^x A(t)\, dt$. Además suponemos que $a(n) \ge 0$ para todo n. Si tenemos la fórmula asintótica*

$$A_1(x) \sim Lx^c \text{ cuando } x \to \infty$$

para un $c > 0$ y un $L > 0$, entonces también tenemos

$$A(x) \sim cLx^{c-1} \text{ cuando } x \to \infty.$$

Este lema es una forma de la regla de L'Hôpital para funciones crecientes lineales a trozos.

Demostración. La función $A(x)$ es creciente ya que los $a(n)$ son no negativos. Elegimos un $\alpha > 1$ y consideramos la diferencia $A_1(\alpha x) - A_1(x)$. Tenemos

$$A_1(\alpha x) - A_1(x) = \int_1^{\alpha x} A(u)\,du - \int_1^x A(u)\,du = \int_x^{\alpha x} A(u)\,du \geq \int_x^{\alpha x} A(x)\,du = A(x)(\alpha x - x) = x(\alpha - 1)A(x).$$

Esto nos da

$$xA(x) \leq \frac{1}{\alpha - 1}(A_1(\alpha x) - A_1(x))$$

y dividiendo por x^c tenemos

$$\frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{A_1(\alpha x)}{(\alpha x)^c}\alpha^c - \frac{A_1(x)}{x^c}\right).$$

Fijamos α y hacemos que $x \to \infty$ en la desigualdad anterior, entonces obtenemos que

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\alpha - 1}(L\alpha^c - L) = L\frac{\alpha^c - 1}{\alpha - 1}.$$

Ahora hacemos que $\alpha \to 1^+$. El cociente $\frac{\alpha^c - 1}{\alpha - 1}$ es el cociente incremental relativo a la derivada de α^c en $\alpha = 1$, el cuál tiene límite c. Por lo tanto

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq cL. \tag{4.6}$$

Ahora consideramos un α tal que $0 < \alpha < 1$ y la diferencia $A_1(x) - A_1(\alpha x)$. Con un razonamiento análogo al anterior, llegamos a que

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq L\frac{1 - \alpha^c}{1 - \alpha}.$$

Y cuando $\alpha \to 1^-$, el cociente $\frac{1-\alpha^c}{1-\alpha}$ tiende a c, por el mismo motivo que antes. Luego

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq Lc$$

y esto junto con 4.6, prueba que $A(x)/x^{c-1}$ tiene límite cuando $x \to \infty$ y dicho límite es cL. □

Cuando $a(n) = \Lambda(n)$ tenemos $A(x) = \psi(x)$, $A_1(x) = \psi_1(x)$ y $a(n) \geq 0$. Y aplicando los lemas anteriores tenemos

Teorema 4.1.3.

$$\psi_1 = \sum_{n \leq x} (x - n)\Lambda(n). \tag{4.7}$$

Además, la relación asintótica $\psi_1(x) \sim x^2/2$ implica $\psi(x) \sim x$ cuando $x \to \infty$.

Ahora vamos a introducir un lema que necesitaremos para conseguir expresar $\psi_1(x)/x^2$ como una integral de contorno con la función zeta.

Lema 4.1.4. *Si $c > 0$ y $u > 0$, entonces para cada entero $k \geq 1$ tenemos*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}\,dz = \begin{cases} \frac{1}{k!}(1-u)^k & si\ 0 < u \leq 1, \\ 0 & si\ u > 1, \end{cases}$$

y la integral es absolutamente convergente.

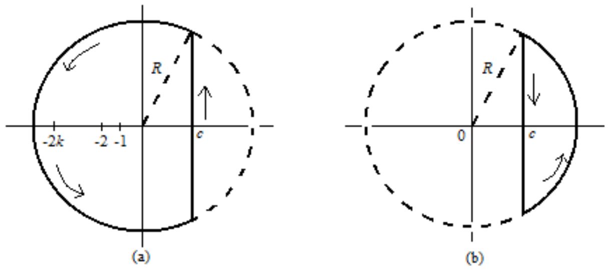

Figura 4.1: $C(R)$

Demostración. Antes de nada, recordemos que $\Gamma(z)$ es la función Gamma la cuál se define $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$. Para la demostración del lema vamos a utilizarla junto con alguna de sus principales propiedades.

Pues bien, utilizando repetidamente la ecuación funcional $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, observamos que el integrando es igual a $u^{-z}\,\Gamma(z)/\Gamma(z+k+1)$. Aplicamos el teorema de los residuos de Cauchy a la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \frac{u^{-z}\,\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}\,dz,$$

donde $C(R)$ es el contorno dibujado en el circulo (a) de la figura 4.1, si $0 < u \leq 1$, y el del circulo (b), si $u > 1$. El radio R de círculo es mayor que $2k+c$ por lo que todos los polos en $z = 0, -1, \ldots, -k$ se hallan en el interior del círculo.

Veamos ahora que el integrando a lo largo de cada uno de los arcos circulares tiende a 0 cuando $R \to \infty$. Si $z = x+iy$ y $|z| = R$, el integrando se halla dominado por

$$\left|\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}\right| = \frac{u^{-x}}{|z||z+1|\cdots|z+k|} \leq \frac{u^{-c}}{R|z+1|\cdots|z+k|}.$$

La desigualdad $u^{-x} \leq u^{-c}$ se sigue del hecho de que u^{-x} es una función creciente de x si $0 < u \leq 1$ y decreciente si $u > 1$. Ahora, si $1 \leq n \leq k$, tenemos

$$|z+n| \geq |z| - n = R - n \geq R - k \geq R/2$$

puesto que $R > 2k$. Por consiguiente la integral a lo largo de cada arco circular se halla acotada por

$$\frac{2\pi R u^{-c}}{R\left(\frac{1}{2}R\right)^k} = O(R^{-k})$$

que cuando $R \to \infty$ tiende a 0, ya que $k \geq 1$.

□

Si $u > 1$, el integrando es analítico en el interior de $C(R)$, luego $\int_{C(R)} = 0$. Si ahora $R \to \infty$ el lema queda demostrado en este caso.

Si $0 < u \leq 1$, calculamos la integral a lo largo de $C(R)$ por el teorema de los residuos de Cauchy. El integrando posee polos en los puntos enteros $z = 0, -1, \ldots, -k$ luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}\,dz &= \sum_{n=0}^{k} Res_{z=-n}\frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{k} \frac{u^n}{\Gamma(k+1-n)} Res_{z=-n}\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{k} \frac{u^n(-1)^n}{(k-n)!n!} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(-u)^n = \frac{(1-u)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado propiedades de la función Γ como son, $\Gamma(z+1) = z!$ y $Res_{z=-n}\Gamma(z) = (-1)^n/n!$. Si $R \to \infty$ obtenemos el lema.

4.2 REPRESENTACIÓN DE $\psi_1(x)/x^2$ COMO INTEGRAL DE CONTORNO

Teorema 4.2.1. *Si $c > 1$ y $x \geq 1$ tenemos*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds. \tag{4.8}$$

Demostración. De la ecuación 4.7 tenemos que $\psi_1(x)/x = \sum_{n\leq x}(1-n/x)\Lambda(n)$. Ahora usamos el Lema 4.1.4 con $k=1$ y $u = n/x$. Y si $n \leq x$ obtenemos

$$1 - \frac{n}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds.$$

Multiplicamos esta relación por $\Lambda(n)$ y sumamos para todos los $n \leq x$ y teniendo en cuenta la ecuación 4.7 antes nombrada, obtenemos

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n\leq x} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds$$

la última igualdad la tenemos ya que la integral se anula si $n > x$. Podemos escribir

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_n(s)\, ds, \tag{4.9}$$

donde $2\pi i f_n(x) = \Lambda(n)(x/n)^s/(s(s+1))$. Ahora queremos intercambiar la suma con la integral. Para ello hemos de probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |f_n(s)|\, ds \tag{4.10}$$

es convergente. (teorema de Fubini que puede verse en el libro [7]). Las sumas parciales de esta serie satisfacen la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Lambda(n)(x/n)^c}{|s||s+1|} ds = \sum_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^c}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^c}{|s||s+1|} ds \leq A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c}$$

donde A es constante, luego 4.10 converge.

Por lo tanto podemos intercambiar la suma y la integral y obtenemos

$$\frac{\psi_1}{x} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds.$$

En la última igualdad hemos utilizado la fórmula 3.5 vista en un ejemplo en el cápitulo anterior. Ahora para obtener 4.8, basta dividir por x. ☐

Teorema 4.2.2. *Si $c > 1$ y $x \geq 1$ tenemos*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)\, ds, \tag{4.11}$$

donde

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right).$$

Demostración. Utilizamos el lema 4.1.4 con $k = 2$ y $u = 1/x$ para obtener

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)(s+2)}\, ds,$$

donde $c > 0$. Sustituimos s por $s-1$ en la integral de manera que entonces sirve para $c > 1$ y restamos esto a 4.8 para obtener el resultado. □

Si parametrizamos el arco de integración haciendo $s = c + it$, obtenemos que $x^{s-1} = x^{c-1}x^{it} = x^{c-1}e^{it\log x}$ y la ecuación 4.11 se transforma en

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it)e^{it\,\log x}\, dt. \tag{4.12}$$

Nuestra próxima tarea consiste en demostrar que el segundo miembro de 4.12 tiende a 0 cuando $x \to \infty$. Para ello, primero hemos de probar que podemos hacer $c = 1$ en 4.12 para lo cuál necesitamos estudiar la función $\zeta(s)$ en las proximidades de la recta $\sigma = 1$.

4.3 PROPIEDADES DE LA $\zeta(s)$ y la $\zeta'(s)$

Primero veamos cotas superiores para $|\zeta(s)|$ y para $|\zeta'(s)|$ en las proximidades de la recta $\sigma = 1$. Para estudiar $\zeta(s)$ en las proximidades de la recta $\sigma = 1$ utilizamos la representación que ya obtuvimos en el capítulo anterior en el teorema 3.5.1 y que es válida para $\sigma > 0$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} - s\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\, dx + \frac{N^{1-s}}{s-1}. \tag{4.13}$$

Utilizamos también la fórmula correspondiente a $\zeta'(s)$ que se obtiene derivando cada uno de los miembros de la fórmula anterior,

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n^s} + s\int_N^\infty \frac{(x-[x])\log x}{x^{s+1}}\, dx - \int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\, dx - \frac{N^{1-s}\log N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}. \tag{4.14}$$

Y gracias a ambas relaciones, obtenemos cotas superiores de $|\zeta(s)|$ y de $|\zeta'(s)|$.

Teorema 4.3.1. *Para cada $A > 0$, existe una constante M (que depende de A) tal que*

$$|\zeta(s)| \le M\,\log t \quad y \quad |\zeta'(s)| \le M\,\log^2 t \tag{4.15}$$

para todo s con $\sigma \ge 1/2$ que además verifica

$$\sigma > 1 - \frac{A}{\log t} \quad y \quad t \ge e. \tag{4.16}$$

Demostración. Si $\sigma \ge 2$, tenemos $|\zeta(s)| = |\sum_{n=1}^\infty 1/n^s| \le \sum_{n=1}^\infty 1/n^\sigma \le \sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \zeta(2)$ y $|\zeta'(s)| = |-\sum_{n=1}^\infty \log n/n^s| \le \sum_{n=1}^\infty \log n/n^\sigma \le \sum_{n=1}^\infty \log n/n^2 = |\zeta'(2)|$ y las desigualdades se cumplen inmediatamente.

Por consiguiente podemos suponer que $\sigma < 2$ y $t \ge e$. Entonces tenemos

$$|s| \le \sigma + t \le 2 + t < 2t \quad \text{y} \quad |s-1| \ge t$$

luego $1/|s-1| \le 1/t$. Si acotamos $|\zeta(s)|$ utilizando 4.13 obtenemos

$$|\zeta(s)| \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} + 2t\int_N^\infty \frac{1}{x^{\sigma+1}}\, dx + \frac{N^{1-\sigma}}{t} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{2t}{\sigma N^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{t}.$$

Ahora hacemos que N dependa de t tomando $N=[t]$. Entonces $N \leq t < N+1$ y $log\, n \leq log\, t$ si $n \leq N$. La desigualdad 4.16 implica $1-\sigma < A/log\, t$ por lo tanto

$$\frac{1}{n^{\sigma}} = \frac{n^{1-\sigma}}{n} = \frac{1}{n}e^{(1-\sigma)log\, n} < \frac{1}{n}e^{A\, log\, n/log\, t} \leq \frac{1}{n}e^{A} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Por consiguiente

$$\frac{2t}{\sigma N^{\sigma}} \leq \frac{N+1}{N} = O(1) \quad \text{y} \quad \frac{N^{1-\sigma}}{t} = \frac{N}{tN^{\sigma}} = O\left(\frac{1}{N}\right) = O(1),$$

luego

$$|\zeta(s)| = O\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right) + O(1) = O(log\, N) + O(1) = O(log\, t).$$

Lo que demuestra la desigualdad relativa a $|\zeta(s)|$ dada en 4.15. Para obtener la desigualdad relativa a $|\zeta'(s)|$ aplicamos el mismo tipo de razonamiento a 4.14. La única diferencia esencial es que en el miembro de la derecha aparece el factor extra $log\, N$. Pero log $N = O(log\, t)$ ya que $N \leq t$, por lo que en la región especificada tenemos la desigualdad $|\zeta'(s)| = O(log^2\, t)$. □

Ahora vamos a ver que $\zeta(1+it) \neq 0$ para cada t real. Para ello necesitamos el siguiente resultado,

Teorema 4.3.2. *Si $\sigma > 1$ tenemos*

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1. \tag{4.17}$$

Demostración. En la sección 3.4 del cápitulo anterior, vimos en un ejemplo que podíamos expresar $\zeta(s) = e^{G(s)}$ con

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{log\, n}n^{-s} = \sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}, \quad \sigma > 1.$$

Luego podemos escribir

$$\zeta(s) = exp\left\{\sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}\right\} = exp\left\{\sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-imt\, log\, p}}{mp^{m\sigma}}\right\},$$

de donde obtenemos

$$|\zeta(s)| = exp\left\{\sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{cos(mt\, log\, p)}{mp^{m\sigma}}\right\}.$$

Aplicamos esta fórmula repetidamente con $s=\sigma$, $s=\sigma+it$ y $s=\sigma+2it$ y obtenemos que

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| = exp\left\{\sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3+4cos(mt\, log\, p)+cos(2mt\, log\, p)}{mp^{m\sigma}}\right\}.$$

Ahora, teniendo en cuenta la desigualdad trigonométrica $3+4cos\theta+cos2\theta \geq 0$ que se obtiene a partir de la identidad $3+4cos\theta+cos2\theta = 3+4cos\theta+2cos^2\theta-1 = 2(1+cos\theta)^2$. Tenemos que cada término de la serie infinita es no negativo y por tanto obtenemos la desigualdad deseada. □

Teorema 4.3.3. $\zeta(1+it) \neq 0$ *para cada t real.*

Demostración. Consideramos $t \neq 0$. Gracias a la desigualdad del teorema anterior, podemos escribir

$$((\sigma-1)\zeta(\sigma))^3\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}, \tag{4.18}$$

siempre que $\sigma > 1$. Ahora hacemos que $\sigma \to 1^+$ en 4.18. El primer factor tiende a 1, ya que $\zeta(s)$ tiene residuo 1 en el polo $s = 1$. El tercer factor tiende a $|\zeta(1+2it)|$. Y si $\zeta(1+it)$ fuese cero, el segundo factor podríamos escribirlo

$$\left|\frac{\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)}{\sigma-1}\right|^4 \to |\zeta'(1+it)|^4 \quad \text{cuando } \sigma \to 1^+.$$

Por lo tanto, si para algún $t \neq 0$ tuviéramos $\zeta(1+it) = 0$, el primer miembro de 4.18 tendería a $|\zeta'(1+it)|^4|\zeta(1+2it)|$ cuando $\sigma \to 1^+$ mientras que el segundo miembro tendría a ∞ cuando $\sigma \to 1^+$ y esto no es posible. □

Aplicando otra vez el teorema 4.3.2 obtenemos las siguientes desigualdades para $|1/\zeta(s)|$ y $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$.

Teorema 4.3.4. *Existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < M\,log^7 t \quad y \quad \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < M\,log^9 t$$

si $\sigma \geq 1$ y $t \geq e$.

Demostración. Para $\sigma \geq 2$ tenemos

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

y

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2},$$

luego las desigualdades se verifican trivialmente si $\sigma \geq 2$. Supongamos, entonces que $1 \leq \sigma \leq 2$ y que $t \geq e$. Escribimos la desigualdad del teorema 4.3.2 como

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leq \zeta(\sigma)^{3/4}|\zeta(\sigma+2it)|^{1/4}.$$

Ahora, como $(\sigma-1)\zeta(\sigma) \leq M$, donde M es una constante en el intervalo $1 \leq \sigma \leq 2$, tenemos

$$\zeta(\sigma) \leq \frac{M}{\sigma-1} \quad \text{si} \quad 1 < \sigma \leq 2.$$

Además, $\zeta(\sigma+2it) = O(log\,t)$ si $1 \leq \sigma \leq 2$, gracias al teorema 4.3.1, luego para $1 < \sigma \leq 2$ tenemos

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leq \frac{M^{3/4}(log\,t)^{1/4}}{(\sigma-1)^{3/4}} = \frac{A(log\,t)^{1/4}}{(\sigma-1)^{3/4}}$$

donde A es una constante. Por consiguiente, para una constante $B > 0$, tenemos

$$|\zeta(\sigma+it)| > \frac{B(\sigma-1)^{3/4}}{(log\,t)^{1/4}}, \quad \text{si} \quad 1 < \sigma \leq 2, \quad \text{si} \quad t \geq e. \tag{4.19}$$

Esto también se verifica para $\sigma = 1$, pues $|\zeta(1+it)| > 0$. Sea α un número cualquiera que verifique $1 < \alpha < 2$. Entonces, si $1 \leq \sigma \leq \alpha$, $t \geq e$, podemos utilizar el teorema 4.3.1 para escribir

$$|\zeta(\sigma+it)-\zeta(\alpha+it)| \leq \int_{\sigma}^{\alpha}|\zeta'(u+it)|\,du \leq (\alpha-\sigma)Mlog^2 t \leq (\alpha-1)Mlog^2 t.$$

Luego, por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}|\zeta(\sigma+it)| &\geq |\zeta(\alpha+it)|-|\zeta(\sigma+it)-\zeta(\alpha+it)|\\ &\geq |\zeta(\alpha+it)|-(\alpha-1)Mlog^2 t \geq \frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(log\ t)^{1/4}}-(\alpha-1)Mlog^2 t,\end{aligned}$$

que se verifica si $1 \leq \sigma \leq \alpha$, y por 4.19 también para $\alpha \leq \sigma \leq 2$ puesto que $(\sigma-1)^{3/4} \geq (\alpha-1)^{3/4}$. Con otras palabras, si $1 \leq \sigma \leq 2$ y $t \geq e$ tenemos la desigualdad

$$|\zeta(\sigma+it)| > \frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(log\ t)^{1/4}}-(\alpha-1)Mlog^2 t$$

para todo α que satisface $1<\alpha<2$. Ahora hacemos que α dependa de t y elegimos α de forma que el primer término de la derecha sea igual a dos veces el segundo. Eso hace que

$$\alpha = 1+\left(\frac{B}{2M}\right)^4 \frac{1}{(log\ t)^9}.$$

Es claro que $\alpha>1$ y $\alpha<2$ si $t \geq t_0$ para cierto t_0. Así pues, si $t \geq t_0$ y $1 \leq \sigma < 2$ tenemos

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq (\alpha-1)Mlog^2 t = \frac{C}{(log\ t)^7},$$

donde C es una constante que depende de si $e \leq t \leq t_0$.

Por tanto hemos demostrado que $|\zeta(s)| \geq C(log\ t)^{-7}$ para todo $1 \leq \sigma \leq 2$ y $t \geq e$, luego $|1/\zeta(s)| \leq M(log\ t)^7$, que es lo que queríamos. Y para obtener la desigualdad relativa a $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$ aplicamos el teorema 4.3.1 y esta vez obtendremos el factor $log^2\ t$. □

4.4 FINAL DE LA DEMOSTRACIÓN

Lema 4.4.1. *Si $f(s)$ tiene un polo de orden k en $s=\alpha$, entonces el cociente $f'(s)/f(s)$ tiene un polo de primer orden en $s=\alpha$ con residuo $-k$.*

Demostración. Tenemos $f(s)=g(s)/(s-\alpha)^k$, donde g es analítica en α y $g(\alpha)\neq 0$. Luego, para todo s de un cierto entorno de α, tenemos

$$f'(s) = \frac{g'(s)}{(s-\alpha)^k}-\frac{k\,g(s)}{(s-\alpha)^{k+1}} = \frac{g(s)}{(s-\alpha)^k}\left(\frac{-k}{s-\alpha}+\frac{g'(s)}{g(s)}\right).$$

Por lo tanto

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{-k}{s-\alpha}+\frac{g'(s)}{g(s)}$$

Y tenemos el lema demostrado ya que $g'(t)/g(t)$ es analítica en α.

□

Teorema 4.4.2. *La función*

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}$$

es analítica en $s=1$.

Demostración. Por el lema anterior, $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ tiene un polo de primer orden en 1 con residuo 1, igual que $1/(s-1)$. Luego su diferencia es analítica en $s=1$. □

Teorema 4.4.3. *Para $x \geq 1$ tenemos*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\,\log x}\,dt,$$

donde la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|\,dt$ converge. Luego, por el lema de Riemann-Lebesgue, tenemos

$$\psi_1(x) \sim x^2/2$$

y por lo tanto

$$\psi(x) \sim x \quad \textit{cuando} \quad x \to \infty.$$

Demostración. En el teorema 4.2.2 hemos demostrado que , si $c > 1$ y $x \geq 1$, entonces

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)\,ds,$$

donde

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right).$$

Lo primero que hemos de demostrar es que podemos trasladar el camino de integración a la recta $\sigma = 1$. Para ello aplicamos el teorema de Cauchy al rectángulo dibujado en la Figura 4.2.

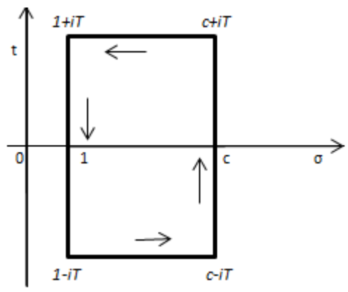

Figura 4.2: Rectángulo, R

La integral de $x^{s-1}h(s)$ a lo largo de R es 0 ya que el integrando es analítico en el interior y sobre R. Ahora demostraremos que las integrales a lo largo de los segmentos horizontales tienden a 0 cuanto $T \to \infty$. Como el integrando tiene el mismo valor absoluto en puntos conjugados, bastará considerar únicamente uno de los segmentos, por ejemplo, el segmento superior, $t = T$. En este segmento tenemos las acotaciones

$$\left|\frac{1}{s(s+1)}\right| \leq \frac{1}{T^2} \quad \text{y} \quad \left|\frac{1}{s(s+1)(s-1)}\right| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2}$$

Además existe una constante M tal que $|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leq M\,log^9\,t$ si $\sigma \geq 1$ y $t \geq e$. (visto en el teorema 4.3.4). Por tanto, si $T \geq e$, tenemos

$$|h(s)| \leq \frac{M\,log^9\,T}{T^2} + \frac{1}{T^2}$$

o sea que

$$\left|\int_1^c x^{s-1}h(s)\,d\sigma\right| \leq \int_1^c x^{c-1}\left(\frac{M\,log^9\,T}{T^2} + \frac{1}{T^2}\right)d\sigma = x^{c-1}\left(\frac{M\,log^9\,T}{T^2} + \frac{1}{T^2}\right)(c-1).$$

Luego, las integrales a lo largo de los segmentos horizontales tienden a 0 cuando $T \to \infty$ y por ello tenemos

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)\,ds = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{s-1}h(s)\,ds.$$

Sobre la recta $\sigma = 1$ escribimos $s = 1+it$ y obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{s-1}h(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(1+it)e^{itlog\ x}\,dt.$$

Ahora, si separamos la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|\,dt = \int_{-\infty}^{-e} + \int_{-e}^{e} + \int_{e}^{+\infty},$$

como para la integral de e a ∞ tenemos que

$$|h(1+it)| \leq \frac{M\ log^9\ T}{T^2} + \frac{1}{T^2},$$

$\int_e^{+\infty} |h(1+it)|\,dt$ converge. Análogamente, $\int_{-\infty}^{-e}$ converge, luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|\,dt \quad \text{converge.}$$

Entonces podemos aplicar el lema de Riemann-Lebesgue, es decir, $\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(1+it)e^{itlog\ x}\,dt \to 0$.

Luego haciendo $x \to \infty$ en

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(1+it)e^{itlog\ x}\,dt,$$

obtenemos que $\psi_1(x) \sim x^2/2$. Por el teorema 4.1.3 esto nos implica $\psi(x) \sim x$ cuando $x \to \infty$, que es equivalente a $\pi(x) \sim x/log\ x$, (visto en el teorema 2.4.1), lo que termina la demostración del teorema del número primo. $\square$

Apéndice

Funciones aritméticas y producto de Dirichlet

1.

Teorema. *Si $n \geq 1$ tenemos*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 & si\ n = 1, \\ 0 & si\ n > 1. \end{cases}$$

Demostración. La fórmula es cierta para $n = 1$. Supongamos, entonces, que $n > 1$ y escribimos $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$. En la suma $\sum_{d|n} \mu(d)$ los únicos términos no nulos proceden de $d = 1$ y de los divisores de n que son producto de primos distintos. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(p_1) + \dots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \dots + \mu(p_{k-1} p_k) + \dots + \mu(p_1 p_2 \cdots p_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \dots + \binom{k}{k}(-1)^k = (1-1)^k = 0 \end{aligned}$$

□

2.

Teorema. *Para toda terna de funciones aritméticas f, g, k, tenemos*

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * k = f * (g * k)$$

es decir, la convolución de Dirichlet es conmutativa y asociativa.

Demostración. Antes de nada, observemos que la definición de $f * g$ se puede expresar como

$$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b),$$

donde a y b varían sobre el conjuntos de todos los enteros positivos cuyo producto es n. Esto hace evidente la propiedad conmutativa. Para probar la propiedad asociativa, sea $A = g * k$ y consideremos $f * A = f * (g * k)$. Tenemos

$$(f * A)(n) = \sum_{ad=n} f(a)A(d) = \sum_{ad=n} f(a) \sum_{bc=d} g(b)k(c) = \sum_{abc=n} f(a)g(b)k(c).$$

De la misma forma, si $B = f * g$, y consideramos $B * k$ obtenemos las misma fórmula para $(B * k)(n)$. Por lo tanto $f * A = B * k$ lo que prueba la propiedad asociativa. □

3.

Teorema. *Para todo f se tiene $I * f = f * I = f$.*

Demostración. Tenemos

$$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d) I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) \left[\frac{d}{n}\right] = f(n)$$

ya que $[d/n] = 0$ si $d < n$. □

4.

Teorema. *Si f es una función aritmética con $f(1) \neq 0$ existe una única función aritmética f^{-1}, llamada inversa de Dirichlet de f, tal que*

$$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I.$$

Además, f^{-1} se obtiene por medio de las fórmulas de recurrencia

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \quad \textit{para } n < 1.$$

Demostración. Dada f, vamos a ver que la ecuación $(f * f^{-1})(n) = I(n)$ tiene una solución única dada por los valores de la función $f^{-1}(n)$. Para $n = 1$ debemos resolver la ecuación $(f * f^{-1})(1) = I(1)$ que se reduce a $f(1)f^{-1}(1) = 1$. Puesto que $f(1) \neq 0$ existe una solución y sólo una, que es $f^{-1}(1) = 1/f(1)$. Ahora suponemos que los valores de $f^{-1}(k)$ se han determinado de forma única para todo $k < n$. Entonces debemos resolver la ecuación $(f * f^{-1})(n) = I(n)$, o bien $\sum_{d|n} f(n/d) f^{-1}(d) = 0$. Podemos escribirla en la forma

$$f(1)f^{-1}(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0.$$

Si conocemos los valores $f^{-1}(d)$ para todo divisor $d < n$, existe un valor unívocamente determinado para $f^{-1}(n)$,

$$f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)$$

ya que $f(1) \neq 0$. Esto establece la existencia y unicidad de f^{-1} por inducción. □

5.

Teorema. *Si $n \geq 1$ tenemos*

$$log\ n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \tag{20}$$

Demostración. El teorema es cierto para $n = 1$ ya que ambos miembros son 0. Luego, suponemos que $n > 1$ y escribimos

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}.$$

Tomando logaritmos tenemos

$$log\ n = \sum_{k=1}^{r} a_k log\ p_k.$$

Ahora consideramos la suma $\sum_{d|n}\Lambda(d)$. Los únicos términos no nulos de la suma son los divisores d de la forma p_k^m para $m=1,2,\dots,a_k$ y $k=1,2,\dots,r$. Luego

$$\sum_{d|n}\Lambda(d)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{a_k}\Lambda(p_k^m)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{a_k} log\ p_k=\sum_{k=1}^{r} a_k\ log\ p_k = log\ n,$$

que prueba el teorema. □

6.

Teorema. *Si $n\geq 1$ tenemos*

$$\Lambda(n)=\sum_{d|n}\mu(d)log\frac{n}{d}=-\sum_{d|n}\mu(d)log\ d.$$

Demostración. Invirtiendo $log\ n=\sum_{d|n}\Lambda(d)$ por la fórmula de inversión de Möebius obtenemos

$$\Lambda(n)=\sum_{d|n}\mu(d)log\frac{n}{d}=log\ n\sum_{d|n}\mu(d)-\sum_{d|n}\mu(d)log\ d=I(n)log\ n-\sum_{d|n}\mu(d)log\ d.$$

Y como $I(n)log\ n=0$ para todo n, tenemos probada la igualdad. □

7.

Teorema. *Si f y g son multiplicativas, también lo es su producto de Dirichlet $f*g$.*

Demostración. Sea $h=f*g$ y elijamos dos enteros primos entre sí m y n. Entonces

$$h(mn)=\sum_{c|mn} f(c)g\left(\frac{mn}{c}\right).$$

Ahora bien cada divisor c de mn se puede expresar en la forma $c=ab$ donde $a|m$ y $b|n$. Además, $(a,b)=1$, $(m/a,n/b)=1$, y existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los productos ab y el de los divisores c de mn. Por lo tanto

$$h(mn)=\sum_{\substack{a|m\\ b|n}} f(ab)g\left(\frac{mn}{ab}\right)=\sum_{\substack{a|m\\ b|n}} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right)g\left(\frac{n}{b}\right)=\sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right)\sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right)=h(m)h(n).$$

Lo que termina la demostración. □

8.

Teorema. *Sea f multiplicativa, entonces f es completamente multiplicativa si y sólo si*

$$f^{-1}(n)=\mu(n)f(n)\ para\ todo\ n\geq 1.$$

Demostración. Sea $g(n)=\mu(n)f(n)$. Si f es completamente multiplicativa tenemos

$$(g*f)(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right)=f(n)\sum_{d|n}\mu(d)=f(n)I(n)=I(n)$$

ya que $f(1)=1$ e $I(n)=0$ para $n>1$. Luego $g=f^{-1}$.

Recíprocamente, suponemos que $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$. Para probar que f es completamente multiplicativa basta demostrar que $f(p^a) = f(p)^a$ para potencias de primos. La ecuación $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ implica que

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = 0$$

para todo $n > 1$. Luego, si tomamos $n = p^a$, tenemos

$$\mu(1)f(1)f(p^a) + \mu(p)f(p)f(p^{a-1}) = 0$$

de lo que obtenemos $f(p^a) = f(p)f(p^{a-1})$. Lo que implica que $f(p^a) = f(p)^a$ y por tanto f es completamente multiplicativa. □

9.

Teorema. *Si f y g son funciones aritméticas tenemos*

(a) $(f+g)' = f' + g'$.
(b) $(f*g)' = f'*g + f*g'$.
(c) $(f^{-1})' = -f'*(f*f)^{-1}$ *si* $f(1) \neq 0$.

Demostración. La demostración de (a) es inmediata.

Para probar (b) utilizamos la identidad $log\ n = log\ d + log(n/d)$ para escribir

$$\begin{aligned}
(f*g)'(n) &= \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) log\ n \\
&= \sum_{d|n} f(d) log\ d\ g\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) log\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= (f'*g)(n) + (f*g')(n).
\end{aligned}$$

Y para probar (c) aplicamos la parte (b) a la fórmula $I' = 0$, recordando que $I = f*f^{-1}$. Con esto tenemos $0 = (f*f^{-1})' = f'*f^{-1} + f*(f^{-1})'$ luego $f*(f^{-1})' = -f'*f^{-1}$. Multiplicando por f^{-1} obtenemos

$$(f^{-1})' = -(f'*f^{-1})*f^{-1} = -f'*(f^{-1}*f^{-1}).$$

Pero $f^{-1}*f^{-1} = (f*f)^{-1}$, luego tenemos demostrado (c). □

Series de Dirichlet y la ζ de Riemann

1.

Teorema (Teorema de unicidad)**.** *Dadas dos series de Dirichlet*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad y \quad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

ambas absolutamente convergentes para $\sigma > \sigma_a$. Si $F(s) = G(s)$ para cada s de una sucesión infinita s_k tal que $\sigma_k \to +\infty$ cuando $k \to \infty$, entonces $f(n) = g(n)$ para cada n.

Demostración. Sea $h(n) = f(n) - g(n)$ y sea $H(s) = F(s) - G(s)$. Entonces $H(s_k) = 0$ para cada k. Para probar que $h(n) = 0$ para todo n, vamos a suponer que $h(n) \neq 0$ para un cierto n y a ver si llegamos a contradicción.

Sea N el menor entero tal que $h(n) \neq 0$. Entonces

$$H(s) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Luego

$$h(N) = N^s H(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Si hacemos $s = s_k$ tenemos que $H(s_k) = 0$ luego

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^{s_k}}.$$

Elegimos k tal que $\sigma_k > c$ donde $c > \sigma_a$. Entonces gracias al lema 3.1.2 tenemos

$$|h(N)| \leq N^{\sigma_k}(N+1)^{-(\sigma_k - c)} \sum_{n=N+1}^{\infty} |h(n)| n^{-c} = \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\sigma_k} A$$

donde A no depende de k. Si hacemos que $k \to \infty$ obtenemos $(N/(N+1))^{\sigma_k} \to 0$ luego $h(N) = 0$, que es una contradicción.

$\square$

2.

Teorema. *Si $F(s)$ está definida por 3.1, entonces*

$$\lim_{\sigma \to +\infty} F(\sigma + it) = f(1)$$

uniformemente para $-\infty < t < +\infty$.

Demostración. Puesto que $F(s) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} f(n) n^{-s}$, únicamente debemos demostrar que el segundo término tiende a 0 cuando $\sigma \to +\infty$. Elegimos $c > \sigma_a$. Entonces para $\sigma \geq c$ el lema 3.1.2 implica

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq 2^{-(\sigma - c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c} = \frac{A}{2^{\sigma}}$$

donde A es independiente de σ y de t. Dado que $A/2^{\sigma} \to 0$ cuando $\sigma \to +\infty$ el teorema queda demostrado. $\square$

3.

Teorema. *Sea f una función aritmética multiplicativa tal que la serie $\sum f(n)$ es absolutamente convergente. Entonces la suma de la serie se puede expresar como un producto infinito absolutamente convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \{1 + f(p) + f(p^2) + \cdots\} \tag{21}$$

extendido al conjunto de todos los números primos. Si f es completamente multiplicativa, el producto se simplifica y se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \frac{1}{1 - f(p)}. \tag{22}$$

Demostración. Consideramos el producto finito

$$P(x) = \prod_{p\leq x} \{1 + f(p) + f(p^2) + \cdots\}$$

extendido a todos los números primos $p \leq x$. Como es el producto de un número finito de términos de una serie absolutamente convergente podemos multiplicar la serie y reordenar sus términos arbitrariamente sin que se altere la suma.

Un término tipo es de la forma

$$f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2})\cdots f(p_r^{a_r}) = f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r})$$

ya que f es multiplicativa. Por el teorema fundamenta de la Aritmética, el cuál nos afirma que todo entero positivo se puede representar de forma única como producto de factores primos, podemos escribir

$$P(x) = \sum_{n\in A} f(n)$$

donde A consta de todos los n cuya descomposición tiene factores primos$\leq x$. Por consiguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) = \sum_{n\in B} f(n)$$

donde B es el conjunto de los n que tienen por lo menos un factor primo$> x$. Por consiguiente

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x)\right| \leq \sum_{n\in B} |f(n)| \leq \sum_{n>x} |f(n)|.$$

Cuando $x \to \infty$ la última suma de la derecha tiende a 0 puesto que $\sum |f(n)|$ es convergente. Luego $P(x) \to \sum f(n)$ cuando $x \to \infty$.

Ahora bien, un producto infinito de la forma $\prod(1+a_n)$ converge absolutamente siempre que la serie asociada $\sum a_n$ converge absolutamente. En este caso tenemos

$$\sum_{p\leq x} |f(p) + f(p^2) + \cdots| \leq \sum_{p\leq x} (|f(p)| + |f(p^2)| + \cdots) \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|.$$

Al estar acotadas todas las sumas parciales, la serie de términos positivos

$$\sum_{p} |f(p) + f(p^2) + \cdots|$$

converge, y este resultado implica la convergencia absoluta del producto 3.6.

Finalmente, cuando f es completamente multiplicativa tenemos $f(p^n) = f(p)^n$ y cada serie de la derecha de 3.6 es una serie geométrica convergente cuya suma es $(1 - f(p))^{-1}$. □

4.

Teorema. *Sea $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ absolutamente convergente para $\sigma > \sigma_0$ y supongamos que $f(1) \neq 0$. Si $F(s) \neq 0$ para $\sigma > \sigma_0 \geq \sigma_a$, entonces para $\sigma > \sigma_0$ tenemos*

$$F(s) = e^{G(s)}$$

con

$$G(s) = log\ f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{log\ n} n^{-s},$$

donde f^{-1} es la inversa de Dirichlet de f y $f'(n) = f(n) log\ n$.

Demostración. Como $F(s) \neq 0$, podemos escribir $F(s) = e^{G(s)}$, donde $G(s)$ es una función analítica para $\sigma > \sigma_0$. Diferenciando obtenemos

$$F'(s) = e^{G(s)} G'(s) = F(s)G'(s),$$

luego $G'(s) = F'(s)/F(s)$. Pero

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) log\ n}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{n^s} \quad \text{y} \quad \frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^s},$$

por lo tanto

$$G'(s) = \frac{F'(s)}{F(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{n^s}.$$

Integrando obtenemos

$$G(s) = C + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f' * f^{-1})(n)}{log\ n} n^{-s}$$

donde C es una constante. Si hacemos que $\sigma \to \infty$ vemos que $lim_{\sigma \to \infty} G(\sigma + it) = C$, luego gracias al teorema 3.1.4,

$$f(1) = \lim_{\sigma \to \infty} F(\sigma + it) = e^C$$

o sea $C = log\ f(1)$, lo que termina la demostración. Esta demostración prueba también que la serie relativa a $G(s)$ converge absolutamente si $\sigma > \sigma_0$. □

Bibliografía

[1] T.M.Apostol, *Introdución a la teoría analítica de números*. Editorial Reverté, S.A. Barcelona. 1984.

[2] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*. Academic Press, New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[3] D. J. Newmann, *Analytic Number Theory*, volume 177 of Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag New York 1998.

[4] P.T. Bateman, H. G. Diamond, artículo *A hundred years of prime numbers*, Amer. Math. Monthly 103 (1996), 729-741.

[5] Enrique Gracián, *Los números primos. Un largo camino al infinito*. El mundo es matemático. RBA 2011

[6] Javier Cilleruelo. *La demostración elemental del teorema del número primo*. Editorial, Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. Septiembre 2000.

[7] T.M Apostol, *Análisis Matemático*. 2^{o}edición. Editorial Reverté, S.A. Barcelona. 1976