



Trabajo Fin de Máster

SIMULACIÓN DE ENSAYOS DE RODADURA EN ENGRANAJES DE DIENTES RECTOS

Autor

ÁNGEL GRACIA RAMOS

Director

JORGE SANTOLARIA MAZO

Escuela de Ingeniería y Arquitectura
2014

RESUMEN DEL TRABAJO

Los ensayos funcionales o de rodadura son una forma rápida de verificar el funcionamiento de un engranaje tras su fabricación. Del ensayo se obtendrán unos parámetros que permitirán asignarle una clase de calidad según una determinada norma. La determinación de estos parámetros, como toda medición, está sujeta a cierta incertidumbre consecuencia, entre otras causas, de la propia de los sensores utilizados en las mediciones. Para determinar la incertidumbre final con la que se obtienen los parámetros sería necesario repetir un mismo ensayo un número tan elevado de veces que no resultaría útil ni viable, quedando como única alternativa la simulación. Tras el estudio previo del estado de la técnica se ha concluido que no existe ninguna herramienta ni estudio que permita obtener los parámetros de forma teórica, por lo que en este trabajo se ha abordado su desarrollo y validación.

El problema fundamental, que se ha debido resolver analíticamente, supone posicionar el engranaje que se está verificando de forma que sus dientes encajen y contacten en los huecos correspondientes del engranaje con el que trabajará conjuntamente. Todo ello debe hacerse en presencia de errores que afectan al perfil del diente e incluso excentricidades en el eje de giro de uno de los engranajes. Lo anterior se ha resuelto para cualquier geometría y sentido de giro, de forma simbólica mientras las expresiones lo permiten, y numérica a partir de entonces. El punto de partida es, inevitablemente, un estudio teórico de la geometría del dentado del engranaje cilíndrico de dientes rectos. De éste, se han obteniendo diferentes expresiones de coordenadas en distintos sistemas de referencia.

Las funciones que ejecutan la simulación se han programado en MATLAB en dos fases. En la primera se ha desarrollado la simulación de un ensayo de rodadura a un flanco con error en ángulo de presión, dejando el error de excentricidad para posteriores mejoras. Los resultados tienen en cuenta cualquier situación que pueda producirse, como las de contacto simultáneo en varios dientes y la de interferencia, que se detecta y corrige para que la posición de los engranajes sea la real. Igualmente se detectan, calculan y almacenan las situaciones en las que el par de engranajes se bloquearía debido a la magnitud de los errores presentes. En la segunda fase se han optimizado los cálculos para poder simular repetidamente un mismo ensayo, incorporando incertidumbre en alguna de las mediciones y obteniendo la dispersión final de los resultados.

Puesto que no existen estudios en este sentido ni simuladores de ensayos, la validación sólo ha podido hacerse cualitativamente. Para validar la primera fase se ha partido de la forma de los resultados (no de los valores) de ensayos reales, se han justificado teóricamente y se han reproducido por simulación. También se ha simulado (como otra forma de validación) un ensayo entre dos engranajes sin errores, cuyo resultado a pesar de ser trivial, requiere idénticos cálculos. Para la validación de la segunda fase se buscado una variable cuya incertidumbre se sabe y se justifica que afecta a los cálculos intermedios pero no a la variabilidad final. Los resultados que se han obtenido están en total acuerdo con lo esperado, tanto los finales como cada uno de los intermedios.

Para aplicaciones futuras y con muy pocos cambios podrán simularse ensayos a dos flancos e incluir excentricidades en los giros, ya que la parte analítica está resuelta y sólo resta incorporarla al código. De esta forma quedan cubiertos los dos tipos de ensayo y los errores más frecuentes.

En la memoria se expone el planteamiento y resolución del problema descrito, mientras que en los anexos figuran detalladamente la deducción de la geometría, los dos ensayos simulados, la estimación de incertidumbre y la validación de las dos fases de la simulación.

INDICE GENERAL

MEMORIA.....	7
ANEXO I. DEDUCCIÓN DE COORDENADAS A PARTIR DE COMPONENTES	
TANGENTE Y NORMAL DEL VECTOR DE POSICIÓN Y GIROS	
DE LOS SISTEMAS DE REFERENCIA.....	53
ANEXO 2. SIMULACIÓN DE ENSAYO DE RODADURA A UN FLANCO	
CON DEFECTO EN EL ÁNGULO DE PRESIÓN.....	83
ANEXO 3. SIMULACIÓN DE ENSAYO DE RODADURA A UN FLANCO	
SIN ERRORES.....	151
ANEXO 4. OBTENCIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN LA DETERMINACIÓN	
DEL PARÁMETRO f_k' ANTE INCERTIDUMBRE EN LA POSICIÓN	
DEL CENTRO DEL ENGRANAJE ENSAYADO. VALIDACIÓN DE LA SIMULACIÓN.	159
RELACIÓN DE FIGURAS Y TABLAS.....	175
BIBLIOGRAFÍA.....	185

MEMORIA

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN.....	11
2.- ESTADO Y ALCANCE DEL TRABAJO.....	12
3.- MEJORAS PREVISTAS Y TRABAJO FUTURO.....	14
4.- FUNDAMENTOS DEL ENGRANAJE CILÍNDRICO DE DIENTES RECTOS.....	15
5.- VERIFICACIÓN DE ENGRANAJES MEDIANTE ENSAYO FUNCIONAL. CALIDADES.....	18
6.- OBTENCIÓN DE LAS EXPRESIONES PARA LA SIMULACIÓN. PASOS PREVIOS.....	22
6.1- SISTEMAS DE REFERENCIA LOCALES EN DIENTES Y HUECOS.....	22
6.2.- SISTEMAS DE REFERENCIA GLOBALES DE LOS ENGRANAJES Y DEL PAR.....	23
6.3.- RELACIONES GEOMÉTRICAS BÁSICAS EN LOS DIENTES O HUECOS.....	24
6.4.- COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES DE LOS PUNTOS DE LAS ENVOLVENTES EN FUNCIÓN DE SU DISTANCIA AL ORIGEN Y ÁNGULO GIRADO.....	28
7.- RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL CONTACTO.....	31
7.1.- PLANTEAMIENTO.....	31
7.2.- RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL CONTACTO.....	33
7.2.1.- PRIMERA FASE. INTERSECCIÓN DE ENVOLVENTES Y EVALUACIÓN DEL CONTACTO.....	33
7.2.2.- SEGUNDA FASE. POSICIÓN DOMINANTE BAJO CONTACTO MÚLTIPLE.....	38
7.2.3.- TERCERA FASE. CORRECCIÓN DE LAS INTERFERENCIAS.....	42
7.3.- PARTICULARIDADES DE LA FASE 1 PARA GIRO ANTI HORARIO DEL MÁSTER.....	46
7.4.- ESQUEMA DE LA SECUENCIA DE CÁLCULOS.....	49
8.-CONCLUSIONES.....	51

1.- INTRODUCCIÓN

Cuando se realiza una serie de mediciones de cualquier magnitud con un instrumento de resolución adecuada obtienen resultados distintos. A pesar de que las condiciones de las mediciones sean aparentemente idénticas existen una serie de influencias que afectan a los aparatos, a los operadores o al propio el suceso o cuerpo que se mide. Algunas de estas fuentes generan errores que siempre tiene un efecto similar y que por tanto son predecibles y compensables mediante una adecuada calibración. Otras influencias sin embargo producen desviaciones erráticas y varían de signo y valor en cada repetición. Estos errores, a pesar de que no son predecibles, siguen distribuciones estadísticas y su influencia puede estimarse aumentando las mediciones de la serie. Como consecuencia de todo ello una medición nunca será exacta y libre de error, y deberá expresarse mediante un valor más probable y un cierto intervalo en torno a él, en el que se han distribuido las medidas que se consideran válidas. Esta inevitable incertidumbre en el resultado de cualquier medición se cuantifica mediante la amplitud del intervalo en el que se dispersan las medidas y mediante la probabilidad de que el valor buscado quede en su interior. Cuando la magnitud no se mide de forma directa sino que se registran ciertos datos a partir de los cuales se calculará la medida, cada registro llevará aparejada cierta incertidumbre. Estas incertidumbres de los datos se propagarán a través de los cálculos configurando finalmente la de la medida buscada.

La clasificación de un engranaje según su calidad puede hacerse mediante ensayos funcionales en los que éste se hace rodar movido por un engranaje supuestamente libre de imperfecciones. Durante el ensayo se registrarán las posiciones de ambos engranajes y se obtendrán ciertas gráficas en las que se represente la diferencia entre su comportamiento real y el que tendría en ausencia de errores de fabricación. De ellas se obtienen los parámetros que permiten adjudicar al engranaje testado una clase de calidad de entre las recogidas en las distintas normas. Como toda medición, los parámetros mediante los que se evalúa el engranaje llevan asociada en su determinación una incertidumbre que podría llegar a causar un cambio en su clase de calidad al ensayarla varias veces. La línea inicial de este trabajo pretendía estudiar la influencia de la incertidumbre de las mediciones y datos que se toman, durante los ensayos de engranajes cilíndricos de dientes rectos, en la incertidumbre final del ensayo. Para determinar y tener en cuenta la incertidumbre con la que estos parámetros se determinan podría pensarse en aumentar el número de ensayos hasta conocer la forma en que se distribuyen. Probablemente el número de ensayos a realizar implicaría tiempos, personal o medios que los harían prohibitivos. Una alternativa a este procedimiento práctico es recurrir a la simulación. Mediante simulación podrán realizarse gran número de ensayos en los que se varíen, de acuerdo a ciertas leyes, todas las fuentes de incertidumbre que se estimen relevantes. La simulación permite anular por completo las fuentes de incertidumbre e ir introduciéndolas de forma sucesiva o conjunta para evaluar su contribución a la incertidumbre final del ensayo.

2.- ESTADO Y ALCANCE DEL TRABAJO.

En el estudio del estado de la técnica no se han podido localizar herramientas que permitan obtener por simulación las gráficas de un ensayo funcional. Ante esta carencia el alcance del trabajo se ha debido limitar al desarrollo de un programa que permita simular detalladamente un ensayo en presencia de errores geométricos y otro que permita reproducirlo gran número de veces introduciendo al menos una fuente de incertidumbre. Si bien el alcance del trabajo queda limitado al desarrollo de las herramientas de simulación y reduce las conclusiones que en cuanto a la incertidumbre se obtendrán, ha supuesto un aumento importante en su dificultad y extensión, al pasar de utilizar simplemente un programa preexistente a tener que desarrollarlo. La programación obliga a estudiar con profundidad el problema a resolver que en el caso de los engranajes fabricados se complica al introducir errores que alejan su geometría de la nominal. Por otra parte queda abierta su mejora y utilización futura para profundizar en la simulación de ensayos de rodadura.

Para el desarrollo de las funciones de simulación se ha recurrido al programa MATLAB. Este programa permite obtener gráficos con facilidad lo que ayuda a verificar mediante la visualización del par de engranajes que los resultados obtenidos tras los cálculos son correctos. De otra forma, la comprobación de resultados intermedios resultaría inabordable ya que se en la mayoría de los casos se obtienen por métodos iterativos e implican varias variables.

El primer paso es determinar la geometría del dentado de un engranaje. De la referencia bibliográfica [1] se han obtenido la curva mediante la que se definen los flancos del dentado, los parámetros que lo acotan y una expresión muy simplificada de las coordenadas de sus puntos. De la referencia [2] se han tomado los sistemas de referencia que sus autores utilizaron en su trabajo y que básicamente aportan la idea de centrarlos en los dientes en el engranaje a ensayar (o Test) y en los huecos en el engranaje patrón (o Máster). La obtención y comprobación de las coordenadas en sistemas de referencia globales y en forma utilizable para resolver los problemas posteriores ha sido parte de este trabajo y se detallan en el ANEXO 1.

En segundo lugar debe resolverse el problema de calcular la posición que ocupará el engranaje ensayado para cada posición concreta del engranaje Máster. Como al final del ensayo quiere obtenerse la diferencia entre la posición del par de engranajes con errores de fabricación y sin ellos, este problema debe resolverse tanto para la geometría nominal como para la modificada por errores. Los errores que se han considerado son la modificación del perfil del diente por exceso o defecto de ángulo de presión y la excentricidad del eje de giro. Si bien esto último se ha resuelto, en la simulación sólo se han introducido errores del primer tipo. La resolución detallada de este punto se expone en el punto 7.

En tercer lugar debe realizarse una simulación del ensayo de rodadura consistente en calcular y representar las diferencias mencionadas en el párrafo anterior para una serie de posiciones del par de engranajes. El intervalo de posiciones en las que se posiciona el par debe abarcar la revolución completa del engranaje ensayado. Este ensayo se ha utilizado para validar de forma cualitativa los resultados obtenidos y obtener conclusiones generalizables acerca de la forma que deben tener ante cada error y sentido de giro. Obtenidas estas conclusiones, se usarán para simplificar los cálculos y reducir los tiempos necesarios. En el ANEXO 2 se commenta todo lo relativo al error en el perfil del diente simulado y a la validación de los resultados.

Por último, y reducidos los tiempos de cálculo se deben introducir las fuentes de incertidumbre deseadas y repetir las simulaciones hasta llegar a un número de resultados

estadísticamente aceptable. En este trabajo se ha generado e introducido una incertidumbre en la determinación de la distancia entre centros de los engranajes de $5 \mu m$. Se ha utilizado esta fuente de incertidumbre por conocerse de antemano que, si bien debe manifestarse modificando todos los resultados intermedios del ensayo, lo hace de forma que finalmente no influye en los parámetros que se obtienen. De esta forma puede comprobarse que los resultados son correctos.

Las funciones conseguidas son totalmente generales, de forma que admiten como entrada cualquiera de los cinco parámetros que definen el dentado de los engranajes cilíndricos de dientes rectos (número de dientes, módulo, ángulo de presión, diámetros máximo y mínimo). Pueden introducirse holguras en la distancia entre centros y simular la rodadura en ambos sentidos, con engranajes iguales o de distinto número de dientes.

3.- MEJORAS PREVISTAS Y TRABAJO FUTURO.

En el momento de redactar esta memoria se pueden simular ensayos de rodadura a un flanco con errores en el ángulo de presión del engranaje ensayado (modificación del perfil de sus dientes). Se ha deducido y verificado la geometría del engranaje cuando gira alrededor de un punto que no es su centro geométrico y se ha resuelto el problema del cálculo de su posición para una cualquiera dada del Máster. Queda pendiente modificar el código de forma que se simulen simultáneamente los dos errores y se obtenga la gráfica completa del ensayo. El simulador es capaz de detectar situaciones en las que los errores impedirían el giro por falta de espacio y producirían el bloqueo del par. Esta información se calcula y almacena pero sólo se utiliza parcialmente en el ensayo a un flanco actual. Para conseguir simular ensayos a dos flancos con presencia de ambos errores sólo es necesario deshacer las situaciones de bloqueo variando la distancia entre centros de los engranajes. Esta distancia es precisamente el dato de salida (su diferencia frente a la nominal) que se obtendría como resultado del ensayo. Por todo ello no resultará difícil disponer en breve de simulaciones de los dos tipos de ensayos funcionales con superposición de los dos errores geométricos más frecuentes.

Por otra parte, en estudios prácticos realizados acerca de la repetibilidad de las máquinas de ensayo, se ha observado que cada una presenta resultados muy agrupados pero muy distintos de unas a otras. Mediante simulación puede obtenerse el resultado real al que deberían llegar todas ellas, con la única diferencia de sus incertidumbres propias. Esto ayudaría a la calibración de las máquinas y a la eliminación de los errores sistemáticos.

Un punto importante que podría aportar mejoras es el estudio de la influencia en los resultados de los incrementos de valor que se da a las variables en los cálculos iterativos y la tolerancia que se admite en los mismos para considerar que se ha alcanzado la solución. Desde el principio se fijó la décima de milésima (diezmilésima de radián) para la variación de ángulos, $0.1 \mu m$ para el paralelismo de flancos (evaluado mediante coordenadas de sus vectores unitarios tangentes). Esta resolución se ha mostrado eficaz y equilibrada en todo momento, como puede verse en alguno de los detalles ampliados del ANEXO 2, por lo que no se ha modificado ni estudiado su influencia con más profundidad. Si ha sido recomendable sin embargo afinar el paso de las variables y la tolerancia en la estimación de incertidumbre realizada. En este punto, la escasa magnitud de los errores introducidos en la distancia entre centros apenas se percibía en algunos resultados intermedios. Un buen punto de partida para fijarlos sería hacerlos coherentes con la resolución de los dispositivos con los que se van a medir ángulos y distancias.

4.- FUNDAMENTOS DEL ENGRANAJE CILÍNDRICO DE DIENTES RECTOS

Para transmitir el movimiento de rotación que se obtiene en el eje de un motor hasta el eje en que se aprovechará pueden utilizarse distintos mecanismos. Si los ejes son paralelos y la distancia entre ellos es pequeña el sistema más simple consiste en dotar a cada eje de un rodillo circular que gire solidario y concéntrico a él. Con los rodillos en contacto, los dos ejes de giro y el punto común estarán alineados. Aplicando cierta carga que tienda a mantener el contacto se podrá generar una fuerza de rozamiento entre ellos que impida su deslizamiento relativo. Con presencia de par en el rodillo motriz la fuerza de rozamiento en el punto de contacto será paralela a las superficies de ambos y perpendicular a la línea de situación de los centros. La acción del rozamiento sobre el rodillo conducido es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto, generándose un par que se transmitirá a la carga. Las fuerzas de rozamiento (*Figura 1*) en el punto de contacto que ejerce cada rodillo sobre el otro son una acción y su reacción, por lo que tienen igual valor y dirección pero sentidos contrarios. Acción y reacción se transmiten o reciben desde los respectivos ejes con distinto radio por lo que el par que se intercambia se ve afectado por la relación entre los radios de los rodillos. Esta relación se llama relación de transmisión del par. En cuanto a la velocidad angular de los dos rodillos se verá igualmente modificada, en sentido inverso, por la relación de transmisión. La relación de transmisión debe ser lo más constante posible durante toda la revolución ya que de lo contrario el par y la velocidad transmitidas fluctuarán. En esta situación el movimiento del eje conducido no será uniforme y se producirán vibraciones y fatiga. Si se supone que el rodillo motriz está fijo y se observa desde el punto de contacto el movimiento del rodillo conducido, se comprobará que éste está rodando sobre la superficie de aquel. En todo momento el vector velocidad del centro del rodillo conducido es perpendicular a la línea que une los centros.

$$\begin{aligned} \vec{M}_i &= \vec{r}_i \times \vec{fr}_i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_1 / r_1 = fr_1 \\ M_2 / r_2 = fr_2 \end{array} \right. \\ \vec{v}_i &= \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \omega_1 r_1 \\ v_2 = \omega_2 r_2 \end{array} \right. \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{fr}_1 = -\vec{fr}_2 \Rightarrow fr_2 = fr_1 \\ \vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

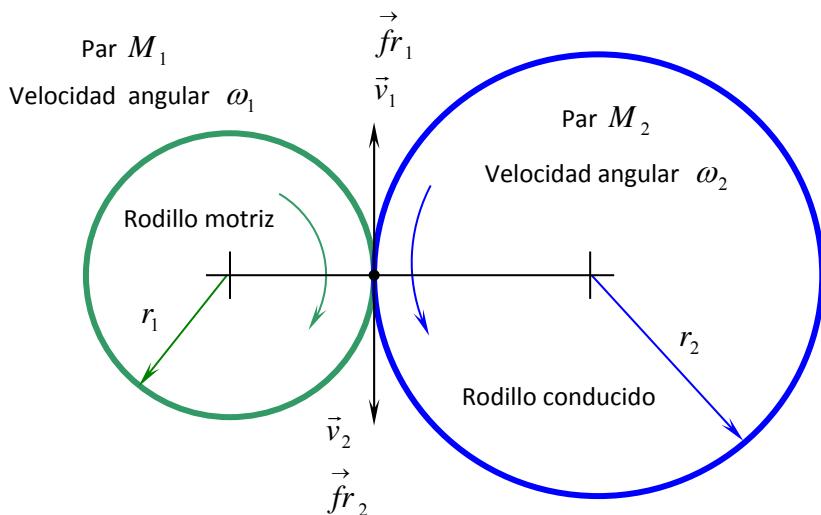


Figura 1. Transmisión de par y velocidad angular entre ejes por rozamiento entre rodillos.

El sistema descrito sólo es válido en la práctica para demandas de par relativamente pequeñas, ya que el deslizamiento entre las superficies puede producirse con facilidad. Este inconveniente deriva de que la fuerza de rozamiento que permite la transmisión del par es totalmente paralela a las superficies en movimiento. Si se consigue incorporar al sistema otras fuerzas que actúen en direcciones no paralelas a la dirección del vector velocidad (*Figura 2.a*) podrá aumentarse el par transmitido. El caso óptimo será lograr transmitir el par mediante fuerzas normales a las superficies, en cuyo caso el deslizamiento exigiría la deformación o rotura de éstas. Como inconveniente, si la fuerza que permite la transmisión de par se separa de la perpendicular a la línea de centros, aparecerán componentes que generarán reacciones en los ejes y pérdida de rendimiento. Si quiere mantenerse la dirección de la fuerza para evitar deslizamientos y eliminar su componente no deseada sólo puede desplazarse su punto de aplicación (*Figura 2.b*) hasta hacerla normal al radio en el punto de contacto.

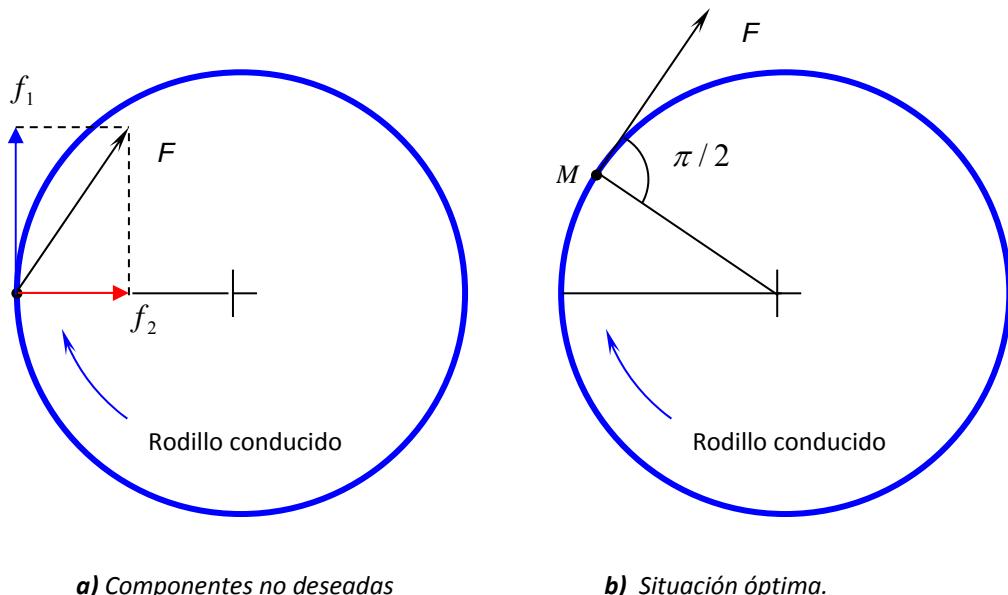


Figura 2. Transmisión de par incorporando fuerzas normales.

Es evidente que para llegar a esta situación es necesario modificar la superficie de los rodillos originales para conseguir puntos de contacto exteriores a la línea de centros. Deberán introducirse salientes o dientes que prolonguen las superficies hacia el exterior del rodillo original y entrantes o huecos que los reciban, dando lugar al dentado del engranaje. Como las acciones y reacciones se producen según la normal a las superficies, los dientes y huecos deberán presentar un perfil tal que en cualquier punto susceptible de presentar contacto, la normal a la superficie sea tangente a cierta circunferencia. En el punto de tangencia sobre esta circunferencia, el radio que pasa por él y la línea de acción de la fuerza serán perpendiculares y el par transmitido máximo. Si se logra tal perfil se habrá conseguido, por una parte, una interacción entre engranajes según la normal a la superficie de los dientes que impide el deslizamiento entre ellos y, por otra, invertir toda la fuerza recibida desde el engranaje motriz en la generación de par, evitando además reacciones indeseadas en los ejes. Existen distintas curvas que satisfacen los requerimientos del perfil buscado pero, de entre todas ellas, la más utilizada es la evolvente o envolvente de círculo. En ésta, la circunferencia de tangencia se llama circunferencia base y es la misma para cualquier punto en contacto. Otros círculos que caracterizan a un engranaje son el Addendum y el dedendum, que coinciden respectivamente con el máximo y mínimo diámetro del dentado.

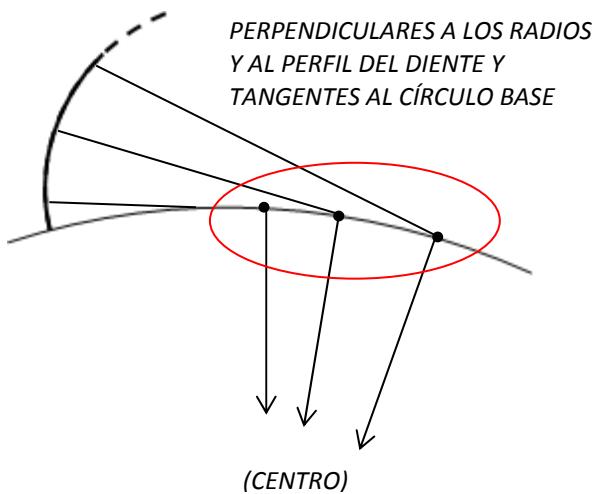


Figura 3. Trazado de la envolvente de círculo.

Para comprender el trazado del perfil de evolvente (*Figura 3*) puede imaginarse un lápiz unido al extremo de una cuerda totalmente arrollada sobre la circunferencia base. En la situación inicial el lápiz está situado sobre el círculo base. Si la cuerda se desenrolla manteniéndose tensa el lápiz trazará una curva perpendicular en todo momento a la cuerda. La cuerda coincide con la normal a la curva trazada en el extremo del lápiz, a la vez que es tangente al círculo base en el punto en que se despega de él. En este punto por tanto es perpendicular al radio del círculo base, satisfaciéndose todas las exigencias indicadas.

Con el perfil obtenido mediante la envolvente de círculo los dientes comienzan en el círculo base y se alejan de él. El punto de contacto (*Figura 4*) es exterior a los círculos base de los dos engranajes. Los círculos base no son tangentes ni pueden cortarse. La tangente común a los círculos base es el segmento que van ocupando los sucesivos puntos de contacto a medida que el giro evoluciona, y en su dirección se producen las acciones y reacciones que se ejercen mutuamente los dos engranajes del par. La tangente anterior corta a la línea de centros en un punto que en cierto momento será el de contacto entre dientes. Si desde los centros de los dos engranajes se trazan sendas circunferencias que pasen por este punto sus diámetros serán los que tendrían los rodillos originales o primitivos. Estos círculos se llaman círculos primitivos, y sobre ellos se verifica la rodadura equivalente a la del par de rodillos. El ángulo que forma la tangente común a las circunferencias base con la perpendicular a la línea de centros se conoce como ángulo de presión del engranaje.

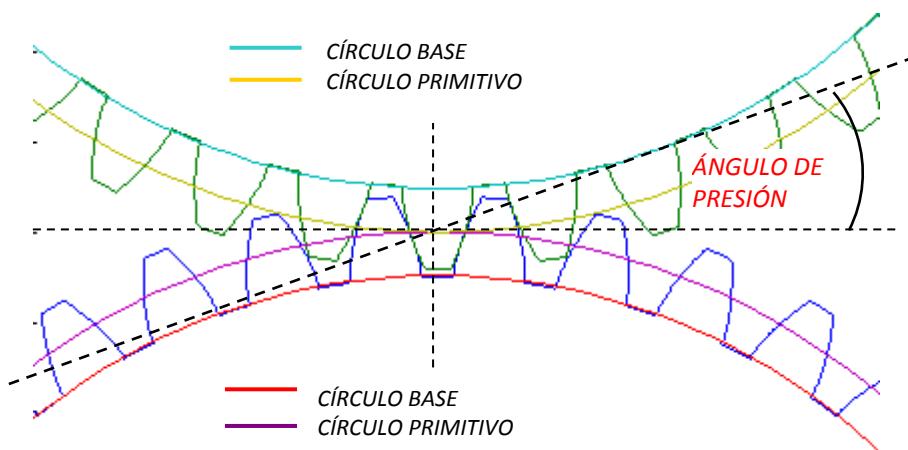


Figura 4. Círculos base y primitivo tangente común y ángulo de presión.

En el anexo 1 se obtienen las expresiones de las coordenadas de los puntos de la envolvente de círculo, de sus tangentes y de sus normales.

5.- VERIFICACIÓN DE ENGRANAJES MEDIANTE ENSAYO FUNCIONAL. CALIDADES.

La geometría del dentado de un engranaje queda determinada por cinco parámetros:

-El número de dientes z

-El módulo m del diente. Es el cociente entre el diámetro primitivo y el número de dientes. Representa el tamaño del diente ya que si se multiplica por π se obtiene la anchura o espesor del diente medido sobre el diámetro primitivo.

-El ángulo de presión α_p . Definido en el punto anterior, ángulos de presión mayores dan lugar a dientes con flancos más inclinados respecto a su diámetro de simetría. Aumentando el ángulo de presión se generan dientes más estrechos en la cabeza y más anchos en el pie.

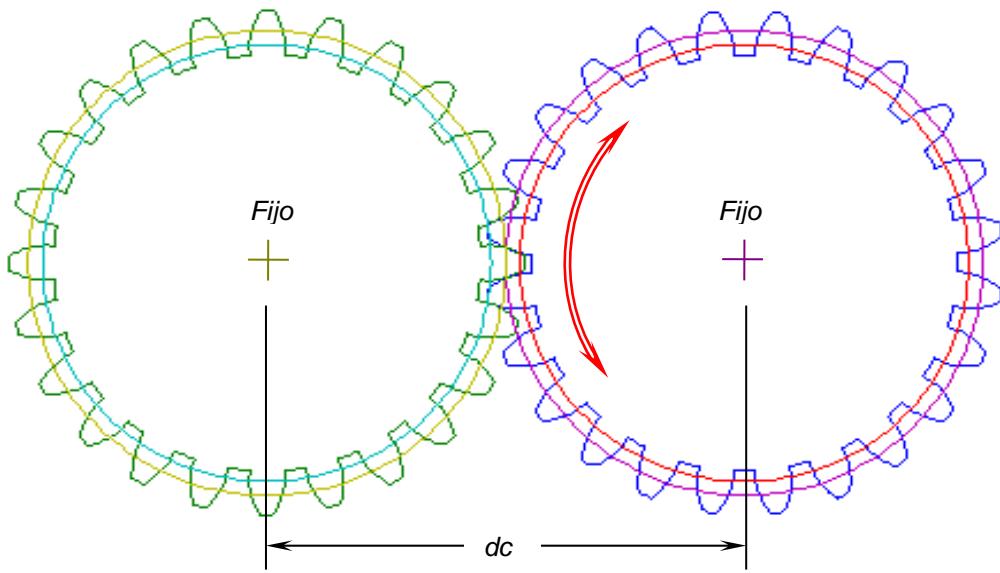
-Los parámetros a y b . Representan la separación en módulos entre el círculo primitivo y los círculos exterior e interior del dentado. El círculo exterior del dentado es el *addendum* y es el de mayor radio: $r_{addendum} = r_p + a m$. El círculo interior o *dedendum* que limita los huecos es el de radio mínimo: $r_{dedendum} = r_p - b m$.

Al tratar de tallar un engranaje con la geometría nominal que corresponde a ciertos valores de estos parámetros se cometerán errores que harán que el dentado no sea exactamente el buscado. Los principales errores afectan al ángulo de presión y a la excentricidad del engranaje. La presencia de estas desviaciones produce una relación de transmisión no constante debido a la cual el engranaje conducido se adelanta o retrasa respecto a la posición que ocuparía si su geometría fuese ideal. El engranaje conducido no girará con velocidad constante, sufrirá vibraciones y pérdida de suavidad.

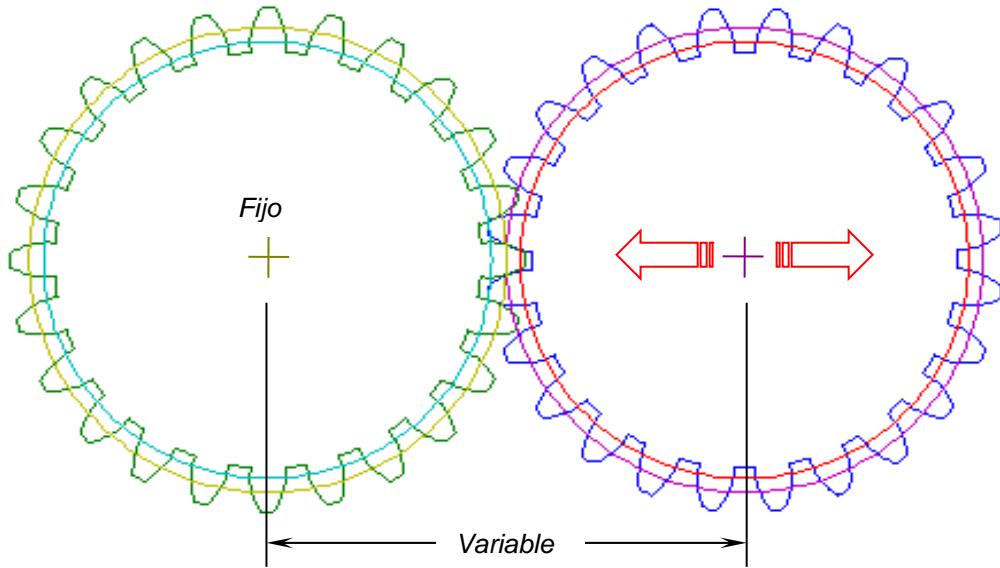
La calidad de un engranaje se determina en función de la diferencia entre su geometría real y la nominal deseada. Para clasificarlo puede recurrirse a la medición directa de su geometría mediante máquinas de medir por coordenadas o a ensayos funcionales en los que se evalúa el comportamiento del engranaje durante su funcionamiento. En los ensayos funcionales o de rodadura se hace girar el engranaje a clasificar utilizando como engranaje motriz uno patrón. Este patrón o máster debe ser de calidad muy superior al engranaje a verificar, de forma que los errores que se obtengan del ensayo sean imputables en su totalidad al engranaje testado. Los ensayos de rodadura pueden ser con contacto en un flanco o en dos flancos, en ambos casos, el engranaje máster gira alrededor de un eje fijo.

En el ensayo de rodadura a un flanco (*Figura 5.a*) los engranajes giran alrededor de sendos ejes fijos separados entre sí la distancia nominal del par (dc , suma de radios primitivos). La toma de resultados sólo podrá ser tangencial ya que es la única dirección en la que puede moverse el engranaje ensayado. El engranaje a verificar debe frenarse para simular la demanda de potencia y garantizar que siempre se mantiene el contacto entre dientes. El contacto bajo presión se produce sólo en un flanco por diente mientras que el otro flanco no contacta o, si lo hace, se debe a la existencia de errores importantes. Los errores que se detectan son los que afectan al giro del engranaje Test y representan la diferencia entre su posición y la que ocuparía si su geometría fuese perfecta. La posición del engranaje Test se mide mediante encoder angular u otro dispositivo adecuado y la nominal se calcula a partir de los giros del engranaje patrón y de la relación de transmisión nominal. La diferencia angular se transforma a longitud sobre el diámetro primitivo y se representa gráficamente.

En el ensayo de rodadura a dos flancos (*Figura 5.b*) el engranaje a verificar o test gira alrededor de un eje que puede desplazarse en la dirección de la línea de centros. Este eje es obligado (por ejemplo, mediante un resorte) a situarse en todo momento a la menor distancia posible del eje fijo del máster, de forma que sus dientes penetran al máximo en los huecos correspondientes éste. En esta posición se tiene contacto bajo presión en los dos flancos de dientes y huecos. El engranaje test tiene impedido el giro al no existir hueco entre dientes y huecos, por lo que los errores sólo podrán manifestarse en dirección radial (según la línea de centros). Sin errores en el par de engranajes la distancia entre ejes permanecerá constante, mientras que con errores variará. La variación de distancias se mide en todo momento y se representa en la gráfica de errores.



a) Ensayo a un flanco, inspección tangencial.



b) Ensayo a dos flancos, inspección radial.

Figura 5. Ensayos de rodadura o funcionales (*Engranaje Test a la derecha*).

Las gráficas de diferencias que se obtienen con los dos tipos de ensayo de rodadura tienen forma similar aunque, como se ha visto, representan observaciones distintas. En general (*Figura 6*) la gráfica que se obtenga será la superposición de dos funciones debidas a los errores de excentricidad y de ángulo de presión. Un error de excentricidad del dentado respecto al eje de giro hará que los dientes y huecos del engranaje giren con distinto radio. La repercusión en el ensayo a dos flancos es evidente y hará que el eje del Test se desplace para adaptarse a cada situación. En el ensayo un flanco la posición del Test se adelantará o retrasará según la relación de transmisión vigente en cada posición (cociente entre radios enfrentados de ambos engranajes). El error de excentricidad es periódico y se repite cada revolución del engranaje Test, por lo que en la gráfica de errores el periodo de su función es precisamente ese. Para los errores en el perfil del diente, o de ángulo de presión, la diferencia respecto al nominal produce un aumento o disminución de la anchura del diente. En el ensayo a un flanco el contacto y la posición del Test se adelanta respecto a la nominal y provoca el error de trasmisión. En el ensayo a dos flancos la distinta anchura de dientes y huecos hará variar lo que aquellos puedan penetrar en éstos, con la consiguiente modificación de la distancia entre centros. El error en el ángulo de presión es propio de cada diente por lo que la función que se obtenga para él se podrá observar z veces en una revolución. Su periodo será $2\pi/z$. La superposición de las dos funciones, una de baja frecuencia ($1/2\pi$) propia del error de excentricidad, y otra de alta frecuencia ($z/2\pi$) debida al error en el ángulo de presión se obtendrán superpuestas tras el ensayo. Para obtenerlas por separado deberá procesarse mediante análisis armónico.

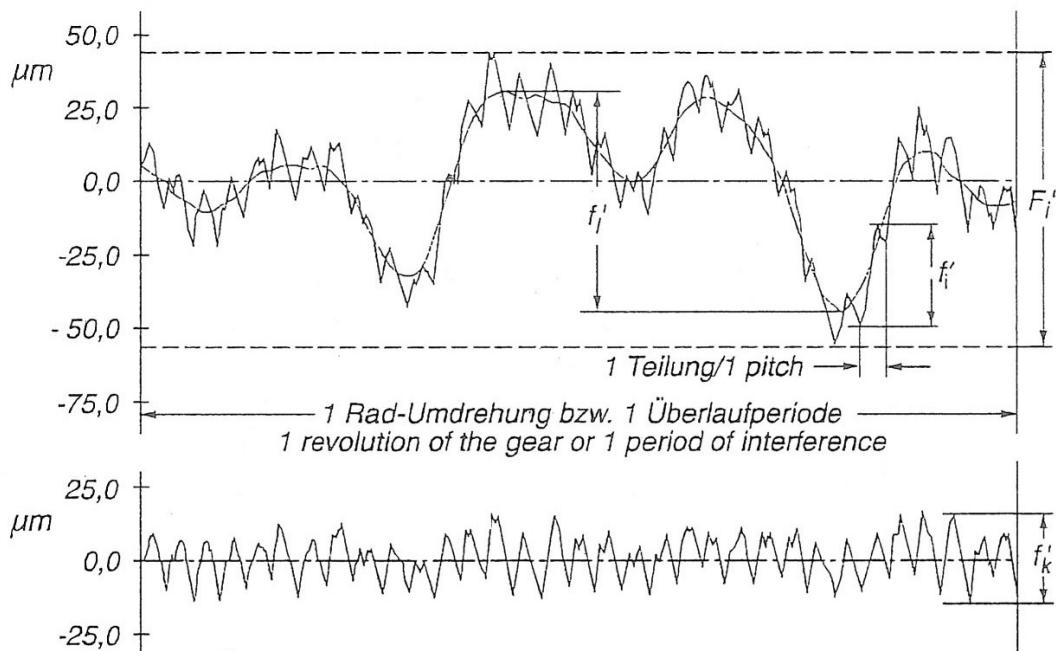


Figura 6. Ejemplo de gráfica de diferencias obtenido en ensayo funcional a un flanco (Imagen tomada de referencia [3])

Una vez separadas las dos gráficas se obtendrán los parámetros que permitirán clasificar al engranaje dentro de la clase correspondiente. Estos parámetros son:

-Desviación tangencial compuesta ($F'i'$). Corresponde a la diferencia entre el máximo y el mínimo absoluto durante un periodo completo de la gráfica de diferencias inicial (antes de su separación en dos).

-Desviación tangencial compuesta diente a diente (f'_i). Es la mayor de todas las diferencias que se obtienen entre el máximo y el mínimo local de la zona correspondiente al engrane de cada diente. Se obtiene sobre la gráfica original.

-Componente de onda larga (Baja frecuencia) de la desviación tangencial compuesta (f'_l). Representa la diferencia entre el máximo y el mínimo absoluto de la función de baja frecuencia (error debido a la excentricidad) en un periodo completo.

-Componente de onda corta (Alta frecuencia) de la desviación tangencial compuesta (f'_k). Representa la diferencia entre el máximo y el mínimo absoluto de la función de alta frecuencia (error debido a ángulo de presión) en un periodo completo.

Obtenidos los parámetros anteriores podrá clasificarse el engranaje dentro de una clase de calidad de las recogidas en diferentes normas (*Figura 7*).

Table 1 — Single pitch deviation, $\pm f_{pt}$

Reference diameter d mm	Module m mm	Accuracy grade											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		$\pm f_{pt}$ μm											
5 $\leq d \leq 20$	0,5 $\leq m \leq 2$	0,8	1,2	1,7	2,3	3,3	4,7	6,5	9,5	13,0	19,0	26,0	37,0
	2 < $m \leq 3,5$	0,9	1,3	1,8	2,6	3,7	5,0	7,5	10,0	15,0	21,0	29,0	41,0
20 < $d \leq 50$	0,5 $\leq m \leq 2$	0,9	1,2	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	28,0	40,0
	2 < $m \leq 3,5$	1,0	1,4	1,9	2,7	3,9	5,5	7,5	11,0	15,0	22,0	31,0	44,0
	3,5 < $m \leq 6$	1,1	1,5	2,1	3,0	4,3	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0	48,0
	6 < $m \leq 10$	1,2	1,7	2,5	3,5	4,9	7,0	10,0	14,0	20,0	28,0	40,0	56,0
50 < $d \leq 125$	0,5 $\leq m \leq 2$	0,9	1,3	1,9	2,7	3,8	5,5	7,5	11,0	15,0	21,0	30,0	43,0
	2 < $m \leq 3,5$	1,0	1,5	2,1	2,9	4,1	6,0	8,5	12,0	17,0	23,0	33,0	47,0
	3,5 < $m \leq 6$	1,1	1,6	2,3	3,2	4,6	6,5	9,0	13,0	18,0	26,0	36,0	52,0
	6 < $m \leq 10$	1,3	1,8	2,6	3,7	5,0	7,5	10,0	15,0	21,0	30,0	42,0	59,0
	10 < $m \leq 16$	1,6	2,2	3,1	4,4	6,5	9,0	13,0	18,0	25,0	35,0	50,0	71,0
	16 < $m \leq 25$	2,0	2,8	3,9	5,5	8,0	11,0	16,0	22,0	31,0	44,0	63,0	89,0
125 < $d \leq 280$	0,5 $\leq m \leq 2$	1,1	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0	48,0
	2 < $m \leq 3,5$	1,1	1,6	2,3	3,2	4,6	6,5	9,0	13,0	18,0	26,0	36,0	51,0

Figura 7. Ejemplo de tabla de calidades de engranajes (Tomada de referencia [4])

6.- OBTENCIÓN DE LAS EXPRESIONES PARA LA SIMULACIÓN. PASOS PREVIOS.

6.1- SISTEMAS DE REFERENCIA LOCALES EN DIENTES Y HUECOS

Las coordenadas de un punto situado sobre una curva envolvente de círculo se determinarán refiriéndolas a un sistema de coordenadas L cuyo origen se sitúa en el centro del engranaje y su eje de ordenadas es tangente al inicio de la curva. El eje de abscisas es perpendicular a éste y girado 90° en sentido horario. Cada diente o hueco del engranaje está limitado por dos envolventes, cada una de las cuales contará con su propio sistema L_i y L_D . En la figura 8 se han representado los ejes de ordenadas de estos sistemas para las dos envolventes del hueco limitado por los dientes 1 y 2. El eje Y_{L1} es el del sistema de la envolvente que define el flanco derecho del diente 1 o izquierdo del hueco. El eje Y_{LD} es el correspondiente al flanco izquierdo del diente 2 o derecho del hueco.

Cada par de envolventes define un elemento (hueco o diente). Para cada diente o hueco se toma un sistema de referencia centrado i con origen en el centro de engranaje y de forma que su eje de ordenadas es de simetría. Este eje por tanto divide al elemento, hueco o diente, en dos partes de igual amplitud. En la figura se han representado los ejes Y_i de los sistemas centrados en el hueco y en el diente 2. Para el engranaje patrón (Máster) se utilizarán los sistemas centrados en los huecos y para el engranaje a verificar (Test) los centrados en los dientes.

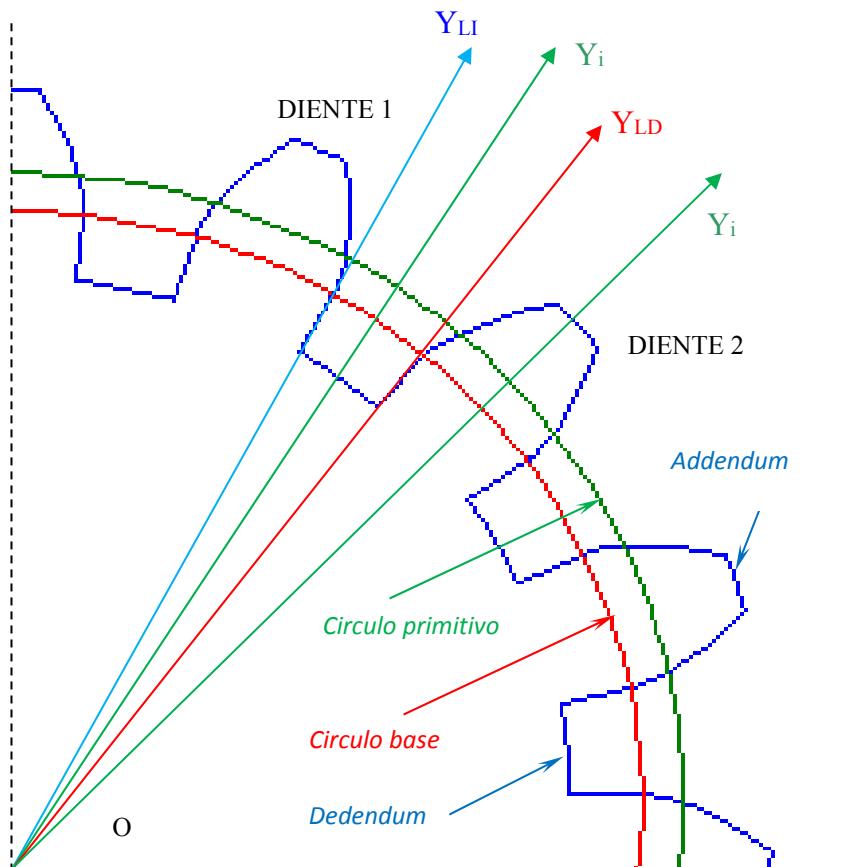


Figura 8. Sistemas locales de dientes y huecos.

6.2.- SISTEMAS DE REFERENCIA GLOBALES DE LOS ENGRANAJES Y DEL PAR

(Figura 9) Para cada engranaje, Máster y Test, se define un sistema de referencia global con origen en el centro del engranaje. Ambos ejes de ordenadas tiene la dirección y sentido del segmento que une el centro del engranaje maestro con el engranaje a verificar. En la figura los O_M y O_T son los centros de los engranajes Máster y Test respectivamente. Todos estos sistemas permanecerán fijos cuando los engranajes giren.

Finalmente se toma como sistema global fijo (X, Y) para el conjunto de los dos engranajes el global del engranaje maestro (X_M, Y_M) .

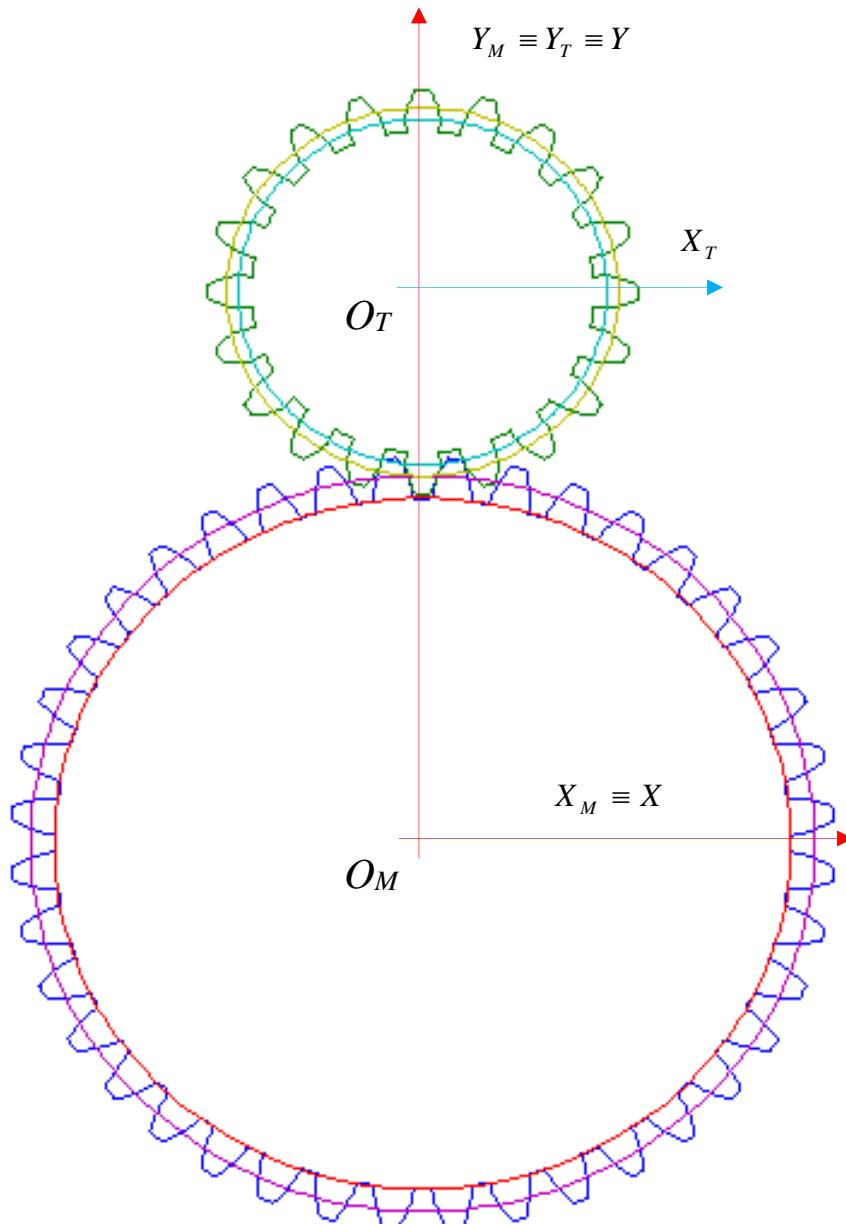


Figura 9. Sistemas globales

6.3.- RELACIONES GEOMÉTRICAS BÁSICAS EN LOS DIENTES O HUECOS

Las coordenadas de un punto cualquiera P situado sobre una envolvente (flanco de un diente o hueco) se obtendrán en forma paramétrica. El parámetro que determina el punto será el ángulo ξ , definido por la tangente al inicio de la curva y el radio OM del círculo base. Para cada valor del parámetro se obtienen dos puntos por cada hueco o diente, uno de ellos suponiendo a P sobre el flanco derecho y el otro al suponerlo sobre el izquierdo. En la figura 10 se muestra un punto sobre el flanco izquierdo de un diente o derecho de un hueco. Para los dos puntos por parámetro todas las relaciones que se obtienen a continuación, excepto las coordenadas, son idénticas. Para determinar inequívocamente un punto del engranaje es necesario conocer su situación sobre el flanco (parámetro ξ) y el elemento sobre el que se sitúa, diente o hueco, mediante cierto ángulo.

Los datos que determinan la geometría del engranaje son el módulo m , el número de dientes z y el ángulo de presión α_p . Este ángulo es el que se obtiene para α en el caso particular de P situado sobre la circunferencia primitiva.

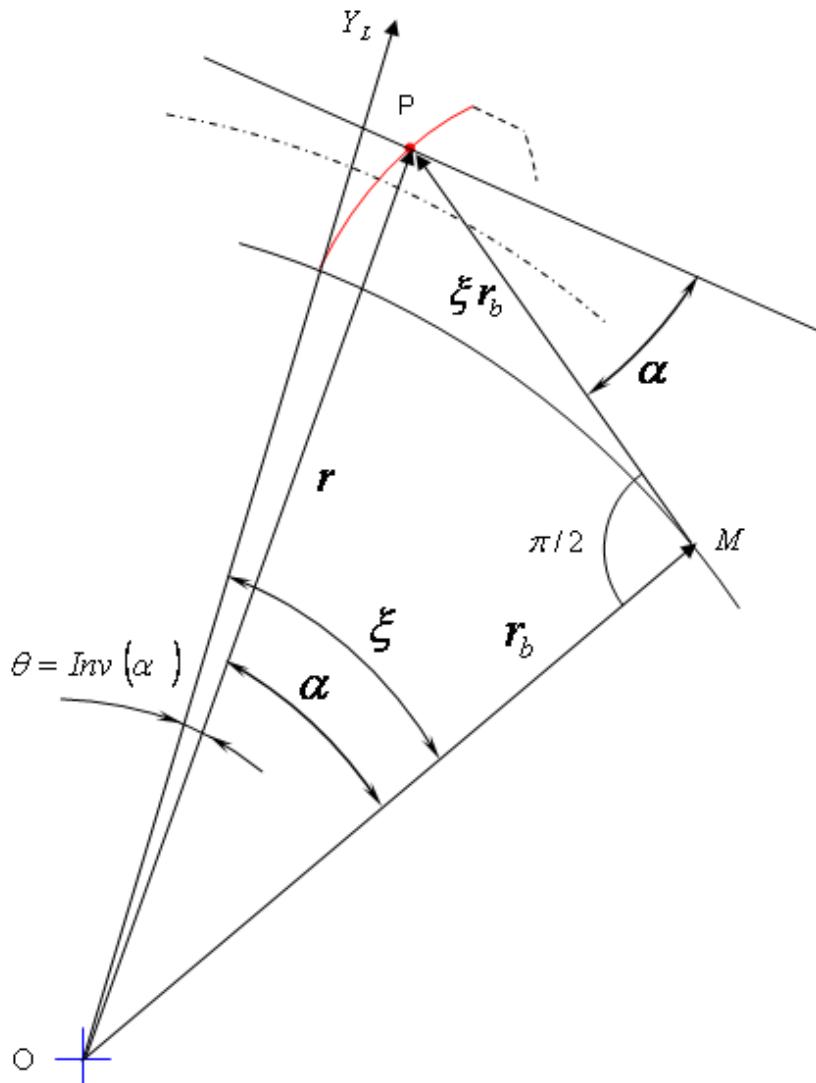


Figura 10. Ángulos que determinan la posición de un punto sobre la envolvente.

Con P situado sobre la circunferencia primitiva, su distancia al origen es el radio primitivo $r_p = m \times z$, y puesto que el triángulo OMP es rectángulo, el radio del círculo base del engranaje se obtiene como:

$$r = r_p = r_b / \cos(\alpha_p) \Rightarrow r_b = r_p \cos(\alpha_p)$$

Obtenido r_b , para cualquier punto P :

La distancia r al origen se puede calcular como:
$$r = \sqrt{r_b^2 + \xi^2 r_b^2} \Rightarrow r = r_b \sqrt{1 + \xi^2}$$

o también $r = r_b / \cos(\alpha)$

Para el ángulo interior α se obtiene:

$$\alpha = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\xi r_b}{r_b}\right) = \operatorname{Arctg}(\xi)$$

Como $\xi = \theta + \alpha$ y $\operatorname{tg}(\alpha) = \xi$ queda:

$$\theta = \xi - \alpha \Rightarrow \theta = \operatorname{tg}(\alpha) - \alpha = \operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{Arctg}(\xi) = \operatorname{Inv}(\alpha)$$

El ángulo $\theta = \operatorname{tg}(\alpha) - \alpha$ es la función $\operatorname{Inv}(\alpha)$ o *Función Involute*. En la *Figura 10* se comprueba que coincide con el ángulo que forma el vector de posición de un punto sobre un flanco de un elemento (diente o hueco) con la tangente al inicio de ese flanco (Eje Y_L). Para un punto situado sobre la circunferencia primitiva se obtiene el caso particular $\operatorname{Inv}(\alpha_p)$. Este ángulo resultará de interés para transformar las coordenadas entre los dos sistemas locales (L e i) de un elemento.

Las coordenadas locales de P en sistema L se obtienen de forma inmediata y dependen sólo del parámetro ξ a través de r e $\operatorname{Inv}(\alpha)$. Según se sitúe en uno u otro flanco se tiene:

Flanco derecho	$\Rightarrow x_{LD} = r \operatorname{Sen}(\operatorname{Inv}(\alpha))$	$y_{LD} = r \operatorname{Cos}(\operatorname{Inv}(\alpha))$
Flanco Izquierdo	$\Rightarrow x_{LI} = -r \operatorname{Sen}(\operatorname{Inv}(\alpha))$	$y_{LI} = r \operatorname{Cos}(\operatorname{Inv}(\alpha))$

Otros ángulos notables que aparecerán con frecuencia en lo sucesivo son:

-**Espesor angular del diente o hueco.** (*Figura 11*) Es el ángulo que abarca, sobre la circunferencia primitiva (verde en la *figura 11*), un diente o un hueco. Por haber $2z$ dientes más huecos, la circunferencia completa se divide entre todos ellos, quedando para cada elemento π/z .

- **q** . (*Figura 11*) Es el ángulo que existe entre el eje del sistema centrado en el hueco y la tangente al inicio (intersección flanco- círculo base, rojo en *la figura 11*) de cualquiera de los flancos que lo limitan. Se corresponde con el ángulo que forman los ejes de los sistemas de referencia Y_L y Y_i y es igual a la mitad del espesor angular de un elemento menos el ángulo $Inv(\alpha_p)$.

$$q = \frac{\pi}{2z} - Inv(\alpha_p)$$

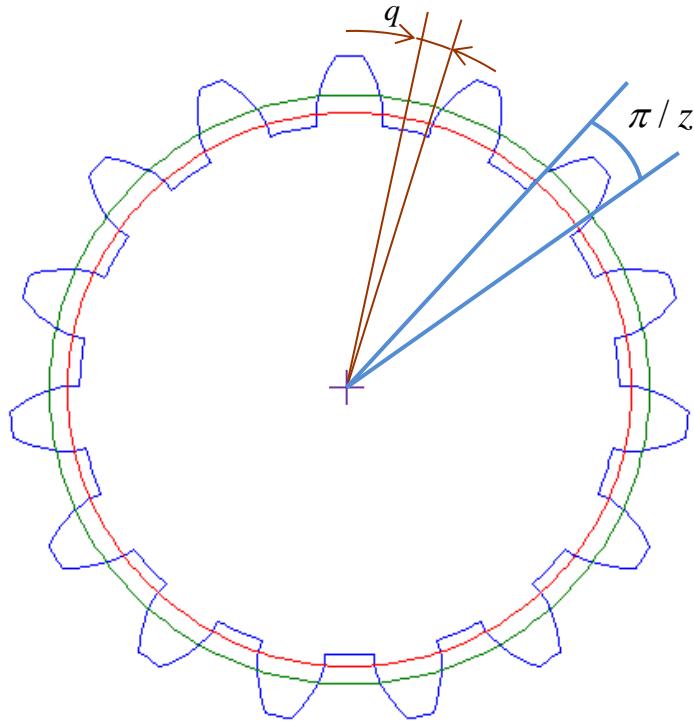


Figura 11. Espesor angular del diente o hueco y ángulo q entre sistemas de referencia locales.

-**Ángulos girados β y λ** . En la *Figura 12* se representa el engranaje Máster en color azul y el Test en rojo. Las coordenadas de un punto P en los sistemas locales de los dientes o huecos, sobre cuyos flancos se sitúa, se repiten de un elemento a otro. Son independientes del momento o posición del engranaje en que se determinen, ya que estos sistemas de referencia giran solidarios con el engranaje y con sus dientes y huecos. Las coordenadas locales en sistema Y_i dependerán únicamente del parámetro ζ que lo sitúa sobre su flanco y de parámetros geométricos fijos del engranaje. Sin embargo, cuando se requiera determinar las coordenadas en el sistema global del engranaje, es evidente que puntos de igual parámetro situados en elementos distintos tendrán distintas coordenadas. Igualmente, como el sistema global de engranaje permanece fijo y alineado con la línea que únelos centros, un mismo punto cambiará de coordenadas globales al variar la posición del elemento que lo contiene. Aparecerán por tanto ciertas variables en las expresiones de las coordenadas globales que permitan distinguir unos elementos de otros o reflejar cambios en la posición de un elemento concreto. Como el movimiento de un engranaje es un giro alrededor de su centro, sus posiciones vendrán dadas por un ángulo girado respecto a una posición inicial. Para el engranaje maestro o Máster se establece el origen del movimiento de forma que, para un

hueco de referencia, coincidan los ejes del sistema centrado en el hueco Y_i y el eje Y_{global} del engranaje. El hueco de referencia se identifica por el segmento o índice (Verde) que une el centro del Máster con el centro de ese hueco. En estas condiciones el ángulo girado por el engranaje Máster es 0° . Cuando el engranaje gire en sentido horario un cierto ángulo λ , El sistema Y_i habrá girado acompañando al hueco de referencia y formará ese ángulo con el eje Y_{global} del sistema fijo. Para el engranaje a ensayar o Test se adopta el mismo convenio sustituyendo el sistema centrado en el hueco por el centrado en un diente de referencia y denotando sus posiciones mediante el ángulo de giro β . El diente de referencia se identifica con el índice azul. Para ambos engranajes se considerarán giros positivos aquellos que el engranaje, Máster o Test, ejecute en sentido horario. Para el estudio del par de engranajes se tomará como situación inicial la representada en la figura 5-b.

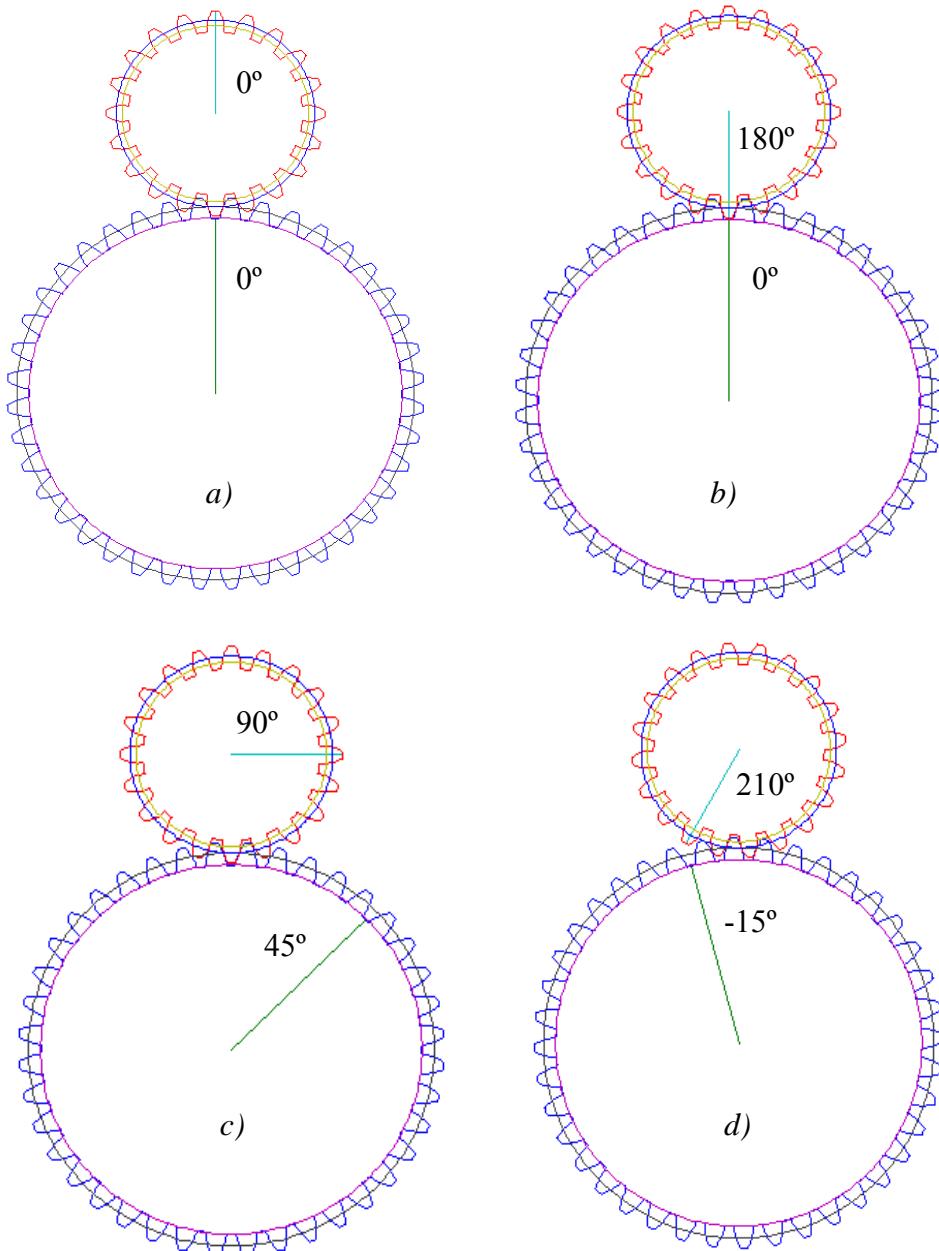


Figura 12: Ejemplos de giros λ y β de los engranajes Máster y Test.

6.4.- COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES DE LOS PUNTOS DE LAS ENVOLVENTES EN FUNCIÓN DE SU DISTANCIA AL ORIGEN r Y ÁNGULO GIRADO β ó γ .

A continuación se muestran las coordenadas de un punto cualquiera situado sobre un flanco de un diente o hueco en función del parámetro ξ que lo determina. Este parámetro no aparece explícitamente en las expresiones siguientes pero está implícito en todas ellas a través de las relaciones deducidas antes:

$$\alpha = \operatorname{Arctg}(\xi) ; \quad r = r_b \sqrt{1 + \xi^2} ; \quad \operatorname{Inv}(\alpha) = \xi - \operatorname{Arctg}(\xi)$$

El resto de variables que intervienen en las expresiones de las coordenadas locales y globales son fijas para todo el engranaje (supuesto perfecto), quedando las locales únicamente en función del parámetro ξ y las globales, además, del ángulo girado por el diente (β) o hueco (γ).

Las *figuras 13 y 14* muestran todos los ángulos y distancias necesarias para la deducción de las coordenadas locales y globales.

Las expresiones de las coordenadas locales y globales que se dan a continuación resultan sencillas y muy útiles para la resolución del problema de localizar la posición (ángulo de giro) que ocupará el engranaje Test y punto de su envolvente (parámetro ξ) para que se tenga contacto válido en cierta posición dada (giro) del engranaje Máster.

En el ANEXO 1 se deducen y comprueban otras expresiones para las coordenadas locales y globales de cualquier punto sobre una envolvente. En este anexo se utilizan la suma de dos vectores, uno perpendicular a la envolvente y el otro tangente a ella, y en la mayoría de los casos a modo de comprobación, se duplica el cálculo utilizando giros de los sistemas de referencia. El vector tangente será necesario para distinguir el contacto entre flancos válido o real de la interferencia.

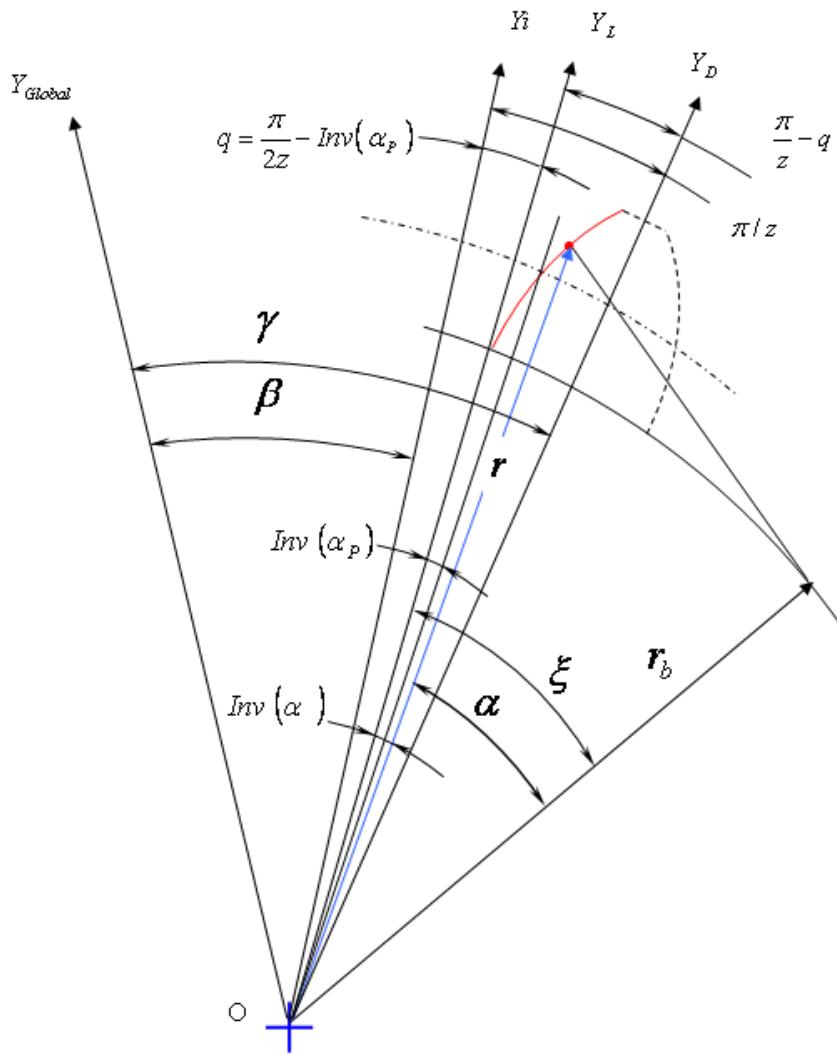


Figura 13. Geometría necesaria para la deducción de las coordenadas locales y globales de un punto sobre el flanco izquierdo de un diente y derecho de un hueco.

Flanco derecho de un hueco:

Locales (Sistema i)

$$x_i = r \operatorname{Sen}(q + \text{Inv}(\alpha))$$

$$y_i = r \operatorname{Cos}(q + \text{Inv}(\alpha))$$

Globales: (λ : Ángulo girado)

$$x_{Global} = r \operatorname{Sen}(q + \text{Inv}(\alpha) + \lambda)$$

$$y_{Global} = r \operatorname{Cos}(q + \text{Inv}(\alpha) + \lambda)$$

Flanco izquierdo de un diente:

Locales (Sistema D , i del diente):

$$x_D = -r \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{z} - q - \text{Inv}(\alpha)\right)$$

$$y_D = r \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{z} - q - \text{Inv}(\alpha)\right)$$

Globales (β : Ángulo girado)

$$x_{Global} = r \operatorname{Sen}\left(\beta - \frac{\pi}{z} + q + \text{Inv}(\alpha)\right)$$

$$y_{Global} = r \operatorname{Cos}\left(\beta - \frac{\pi}{z} + q + \text{Inv}(\alpha)\right)$$

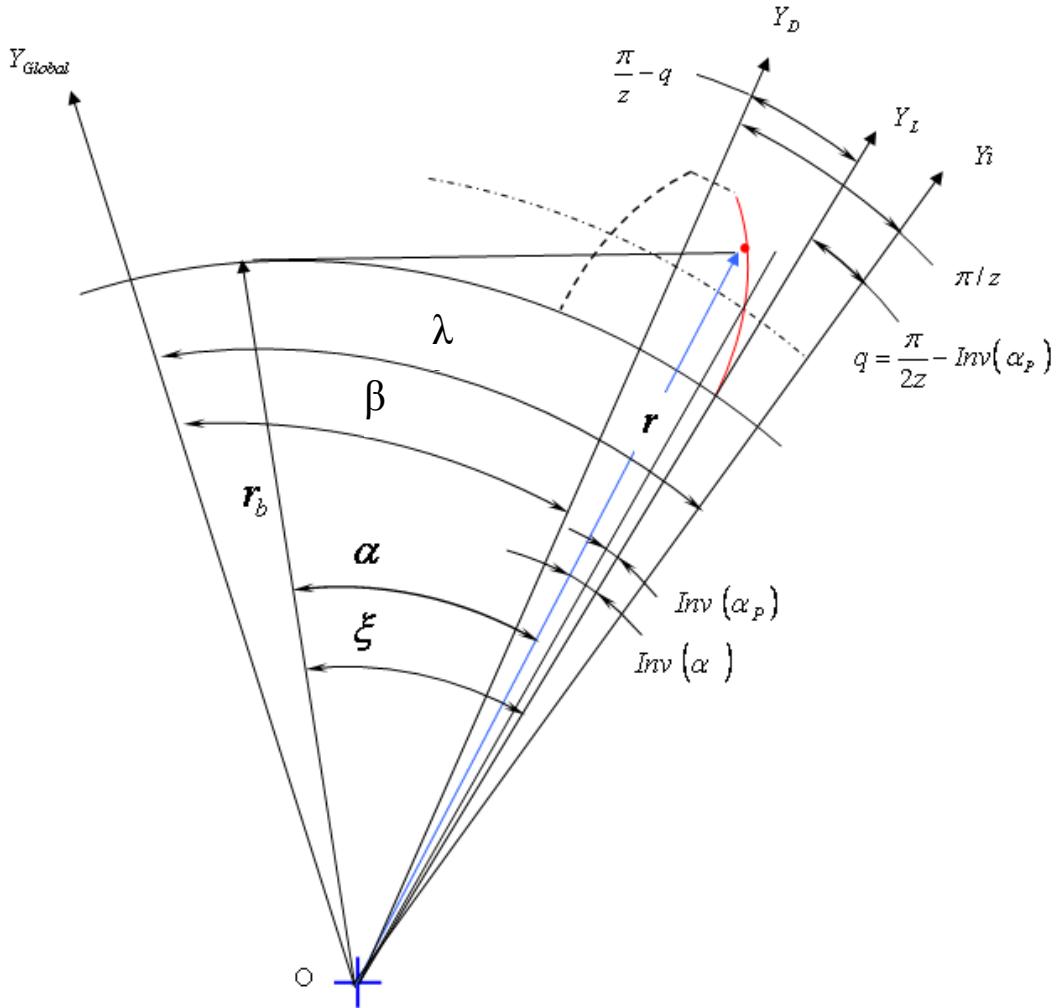


Figura 14. Geometría necesaria para la deducción de las coordenadas locales y globales de un punto sobre el flanco derecho de un diente e izquierdo de un hueco.

Flanco izquierdo de un hueco

Locales (Sistema i):

$$\begin{aligned}x_i &= -r \operatorname{Sen}(q + \operatorname{Inv}(\alpha)) \\y_i &= r \operatorname{Cos}(q + \operatorname{Inv}(\alpha))\end{aligned}$$

Globales: (λ Ángulo girado)

$$\begin{aligned}x_{Global} &= r \operatorname{Sen}(\lambda - q - \operatorname{Inv}(\alpha)) \\y_{Global} &= r \operatorname{Cos}(\lambda - q - \operatorname{Inv}(\alpha))\end{aligned}$$

Flanco derecho de un diente:

Locales (Sistema D, i del diente):

$$\begin{aligned}x_D &= r \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{z} - q - \operatorname{Inv}(\alpha)\right) \\y_D &= r \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{z} - q - \operatorname{Inv}(\alpha)\right)\end{aligned}$$

Globales: (β : Ángulo girado)

$$\begin{aligned}x_{Global} &= r \operatorname{Sen}\left(\beta + \frac{\pi}{z} - q - \operatorname{Inv}(\alpha)\right) \\y_{Global} &= r \operatorname{Cos}\left(\beta + \frac{\pi}{z} - q - \operatorname{Inv}(\alpha)\right)\end{aligned}$$

7.- RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL CONTACTO

7.1.- PLANTEAMIENTO

Cuando el engranaje Máster gira arrastrando con él al engranaje Test se produce contacto entre puntos de un flanco de un hueco del Máster con puntos del flanco del correspondiente diente del Test. En el inicio del contacto en un par hueco-diente el punto de contacto se sitúa cerca de addendum del diente y de la base del hueco. A medida que el par de engranajes gira el punto de contacto se desplaza descendiendo sobre el flanco del diente hacia el círculo base y ascendiendo sobre el flanco del hueco hacia el addendum. El punto del plano sobre el que coinciden ambos flancos se desplaza de forma que recorre una recta llamada línea de acción o recta de contacto, que se muestra en verde en la *figura 15*. En esta figura se aprecia como en el diente de referencia el punto de contacto está más próximo al addendum que en diente de su derecha, en el que por estar en un estado de contacto más avanzado, se ha desplazado hacia la base. Sin holgura entre los centros, la línea de acción pasa por el punto de intersección (tangencia) de los círculos primitivos y se orienta según el ángulo de presión. De esta forma se consigue que la transmisión de fuerza entre el par sea siempre tangente a ambos círculos primitivos, el par transmitido sea máximo y se eviten reacciones en los ejes de giro. Cuando el punto de contacto se sitúa sobre la línea que une los centros del par de engranajes, los puntos que contactan se sitúan sobre el círculo primitivo de los respectivos círculos. Para otras posiciones del par de engranajes el punto de contacto y su evolución ya no se localizan de forma inmediata.

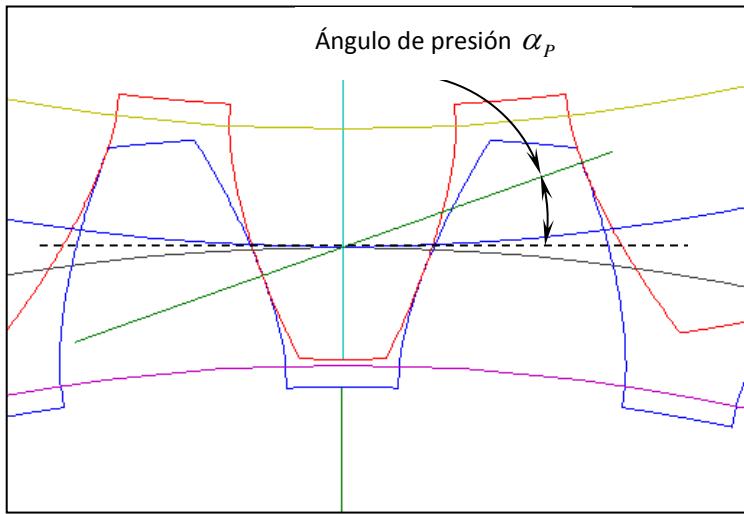


Figura 15. Recta de contacto y ángulo de presión giro del Máster horario.

El problema fundamental a resolver para poder reproducir el proceso de giro del par de engranajes mediante simulación es el de determinar el giro que deberá tener el Test para cada posición ocupada por el Máster. El único dato conocido, además de la geometría de los dos engranajes, es esta posición del Engranaje maestro expresada por cierto giro λ . Será necesario encontrar la situación del punto de contacto sobre los flancos del diente y del hueco y la posición del engranaje Test. Lo primero se logrará encontrando los parámetros ξ_M y ξ_T que marcan su distancia al centro del respectivo engranaje, y lo segundo mediante el ángulo de giro del Test β respecto a cierta referencia. La geometría del engranaje maestro se supone perfecta, mientras que la del engranaje a ensayar varía totalmente dependiendo del error que se introduzca en su trazado. En el presente trabajo la geometría se ha determinado totalmente

para errores en el ángulo de presión y para el caso de que el engranaje gire excéntricamente respecto al punto de tallado o centro geométrico. Puesto que los requerimientos del contacto son los mismos para los dos sentidos de giro, en adelante, se supondrá que el engranaje maestro gira en sentido horario, siendo los flancos izquierdos de sus huecos los que contactan con los flancos derechos de los dientes del engranaje test. Éste girará en sentido anti horario.

Si los engranajes no presentan errores de excentricidad el Test admitirá tantas posiciones válidas para una dada del Máster, como numero de dientes tenga. Para ilustrar esto puede imaginarse que, detenido el Máster en una posición cualquiera, se extrae el Test de su posición y se recoloca tras girarlo de forma que cada diente con contacto pase a alojarse en el siguiente hueco al que ocupaba antes de la operación. Esta posibilidad genera multiplicidad en los giros matemáticamente válidos que se calcularán al resolver el problema de localizar el punto y posición de contacto. Para concretar una solución particular entre todas las posibles se marcarán un hueco y un diente de referencia sobre Máster y Test respectivamente, que sirvan para la medición de los giros. Los huecos de referencia serán aquellos para los que (sin holgura ni errores de fabricación) presentarían contacto para giros $\lambda = 0^\circ$ y $\beta = 180^\circ$ (*Figura 12.b*). En todas las figuras que aparecen en este trabajo los elementos de referencia se identifican por una recta que, a modo de índice o saeta, une el centro del engranaje con el centro del elemento. Las posiciones λ y β corresponderán a giros medidos para que exista contacto válido entre el hueco y el diente de referencia.

Como últimas consideraciones y dificultades hay que tener en cuenta es habitual que existan simultáneamente varios pares hueco-diente en situación de contacto. En un par de engranajes sin error esta situación de contacto múltiple no plantea problemas ya que todos los contactos requieren la misma posición (β) del Test. En engranajes con errores como los que se han manejado en este trabajo la existencia de solución para un hueco y diente concreto no garantiza que la posición obtenida sea viable o, de serlo, que sea la que finalmente adoptará el par de engranajes. La existencia de otros huecos y dientes en posiciones en las que pueda existir contacto devolverán como solución en ellos, en general, posiciones distintas para el Test. Entre todos los giros β que se obtendrán el Test sólo podrá ocupar la que sea dominante respecto a los demás por exigirle el máximo avance en su giro. En el ANEXO 2 se trata esta situación con mayor profundidad y se muestran imágenes que la ilustran. La determinación de todas las posiciones y la forma de localizar las exigencias de posición que finalmente se impondrán se expondrán más adelante. Por otra parte, puesto que los giros de los engranajes se definen atendiendo a la posición de sus elementos de referencia, cuando el giro del Máster λ sitúe a su hueco de referencia alejado del Test, quedará fuera del alcance de los dientes de éste y no habrá contacto en él. Sin embargo siempre habrá uno o varios pares hueco-diente alejados del de referencia en los que exista contacto válido, y entre ellos estará el que marque el ángulo β buscado. Localizar éstos supone un problema añadido que se solucionará más adelante. Por último, determinada la posición dominante β que se requiere del Test, puede ser necesario corregirla por existir interferencias en los extremos de dientes o huecos próximos. Esta última posibilidad aparece debido a los errores simulados y su corrección es compleja por las singularidades de los puntos en los que se producen. La forma en que se ha detectado, calculado y corregido se explicará después.

Para obtener la posición β que el engranaje Test finalmente ocupará para una dada del Máster será necesario, pues, localizar los pares hueco-diente en los que se pueda producir un contacto válido (Entre ellos estará o no el par hueco-diente de referencia). A continuación se deberá resolver el cálculo de β en cada uno de ellos y determinar cuál de todos es el que se impondrá. Finalmente será necesario inspeccionar otros huecos próximos que para ese ángulo

β dominante presenten interferencias, evaluarlas y determinar las correcciones a introducir en el giro del Test para eliminarlas.

7.2.- RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL CONTACTO

A continuación se expone la forma de calcular el ángulo β para una posición λ dada del Máster. El problema se resuelve en etapas o fases sucesivas cada una de las cuales aborda un problema más complejo que el anterior y depura, valida o amplía resultados de etapas previas. En el punto 7.4 se ha incluido un esquema de la secuencia para una mejor comprensión. Inicialmente se determina el punto de intersección de dos envolventes de círculo. Una de ellas está fija por representar el flanco del hueco de referencia del máster en cierta posición o giro λ . La otra representa el flanco del diente de referencia que se quiere posicionar. El primer cálculo es el del citado punto de intersección, seguido de la comprobación del tipo de contacto que representaría. En una segunda etapa deberá comprobarse si hay otros huecos distintos del de referencia en situación de contacto válido para el giro λ del Máster. De ser así deberá resolverse la etapa anterior en cada uno de ellos, obteniéndose finalmente tantos posibles giros β como pares hueco-diente presenten contacto válido. De entre todos ellos deberá localizarse el que se impone respecto a los demás. La tercera fase implica ampliar la primera etapa a huecos próximos a aquellos que presentaron contactos válidos en la segunda etapa y verificar si presentan interferencia o quedan fuera de alcance. En caso de detectarse interferencias deberán calcularse las correcciones a introducir en el ángulo de posición del Test.

7.2.1.- PRIMERA FASE. INTERSECCIÓN DE ENVOLVENTES Y EVALUACIÓN DEL CONTACTO

En este primer punto se resuelve suponiendo que el hueco y diente son los de referencia y sin tener en cuenta otros huecos y dientes. En lo sucesivo las expresiones se particularizarán mediante los subíndices T y M para hacer referencia al engranaje Test y Máster respectivamente. Como se dijo antes, el giro del máster se considera horario y el del Test anti horario. Los flancos a intersecar serán el derecho del diente con el izquierdo del hueco. Para el sentido de giro contrario se resuelve de igual forma con ciertas particularidades.

La posición del Máster dada por su ángulo de giro λ está impuesta y permanece fija durante toda la fase. Para esta posición se va a tratar de localizar el ángulo de giro β del Test para que exista intersección de los flancos del hueco y del diente de referencia. En el proceso será necesario calcular otros valores como los de los parámetros ξ_M y ξ_T y las coordenadas del punto de contacto. El problema se resuelve de forma iterativa haciendo variar el punto del flanco izquierdo del hueco mediante el parámetro ξ_M . Para cada valor de este parámetro se obtiene un punto distinto del flanco del hueco en el que se buscará forzar la intersección posicionando el flanco del diente con el giro β del Test adecuado. Para cada punto que se fija con ξ_M se obtendrá un punto de intersección, un parámetro ξ_T y un giro β , que no necesariamente serán reales como se comenta más adelante. Se recorrerá todo el flanco del hueco hasta que se localice, si existe, un punto de contacto válido. El problema se concreta por tanto en, fijado un giro λ del máster, recorrer su flanco izquierdo (ξ_M) hasta localizar el giro del Test β y el parámetro ξ_T para que exista contacto sea válido.

Cada punto ensayado (ξ_M) marca en el plano el punto donde debe producirse el contacto y, por tanto, el punto por el que debe pasar la envolvente de círculo que define el flanco del diente. Para determinar la situación de los distintos puntos de contacto entre huecos y dientes, se toma como sistema de referencia global para el par de engranajes el sistema global del engranaje maestro, orientando su eje de ordenadas según la línea que une los centros del par. El sistema global del engranaje ensayado se situará con su eje de ordenadas en la misma dirección y sentido. La situación de los sistemas anteriores es la que se expuso en la *figura 9*. De esta manera (*Figura 16*), las coordenadas de un punto del plano (x_{global}, y_{global}) serán las mismas en el sistema global del par y en el sistema global del engranaje maestro, puesto que ambos coinciden. Al ser fijo y conocido el centro de giro del engranaje Test podrán obtenerse las coordenadas en su sistema global (x_T, y_T), sin más que aplicar una traslación de vector $\vec{T} = (0, d)$ (*ANEXO 1, apartado Fundamentos*) siendo $d = r_{pM} + r_{pT} + h$, la suma de los radios primitivos y h la holgura. De esta forma:

$$(x_T, y_T) + (0, d) = (x_{global}, y_{global}) \Rightarrow \begin{cases} x_T = x_{global} \\ y_T = y_{global} - d \end{cases}$$

Para un punto determinado por un ángulo de giro λ y un parámetro ξ_M (*Figura 16*) puede resolverse el triángulo formado por el punto y los centros de los engranajes, ya que son conocidos dos lados y un ángulo:

$$d = r_{pM} + r_{pT} + h \quad r_M = r_{bM} \sqrt{1 + \xi_M^2} \quad \delta = \lambda - q_M - \text{Inv}(\alpha)$$

Donde h es la holgura que se da al par de engranajes medida entre círculos primitivos sobre la recta que une los centros y q_M el ángulo entre los sistemas centrado i y L del Máster.

$$\text{Por el teorema del Coseno: } r_T = \sqrt{d^2 + r_M^2 - 2dr_M \cos(\delta)}$$

En este momento, si $r_T > r_{Addendum,T}$, el punto queda fuera del alcance del engranaje test y no hay posibilidad de contacto (*Figura 17*). El punto se desecha y se variará ξ_M volviendo al inicio. Hay que señalar que el cálculo se interrumpe porque de antemano se ha determinado que el resultado no será viable, pero si se hubiese continuado se llegarían a obtener el ángulo β y el parámetro ξ_T .

Si el punto sí queda dentro de alcance y dado que el punto ensayado pertenece al engranaje Máster se podrán calcular las coordenadas globales en su propio sistema, iguales a las del sistema global del par, mediante las expresiones deducidas en el apartado 6.4.

$$\begin{aligned} x_M &= x_{Global} = r_M \operatorname{Sen}(\delta) = r_M \operatorname{Sen}(\lambda - q_M - \text{Inv}(\alpha)) \\ y_M &= y_{Global} = r_M \operatorname{Cos}(\delta) = r_M \operatorname{Cos}(\lambda - q_M - \text{Inv}(\alpha)) \end{aligned}$$

Para expresarlas en el sistema del engranaje test se aplicará la traslación del origen descrita antes:

$$\begin{aligned} x_T &= x_{Global} = r_M \operatorname{Sen}(\delta) = r_M \operatorname{Sen}(\lambda - q - \text{Inv}(\alpha)) \\ y_T &= y_{Global} - d = r_M \operatorname{Cos}(\delta) - d = r_M \operatorname{Cos}(\lambda - q - \text{Inv}(\alpha)) - d \end{aligned}$$

Por pertenecer el punto de contacto al engranaje Test y con ésta distancia, podrá hallarse el parámetro ξ_T de los puntos (hay uno por flanco, 2z en total) que distan esa longitud del centro del Test:

$$\xi_T = \sqrt{\left(\frac{r_T}{r_{bT}}\right)^2 - 1}$$

Para terminar el cálculo sólo resta conocer el ángulo β adecuado para que el punto de parámetro ξ_T del diente de referencia coincida con el punto de contacto ensayado. Para ello se igualarán las anteriores a las coordenadas globales obtenidas en el ANEXO 1, (Apartado 2.2.1.a), quedando tanto el parámetro ξ_T como el ángulo β incorporados al cálculo. En las ecuaciones resultantes sólo es desconocido el giro β que puede despejarse:

$$\begin{cases} x_{global} = r_{bT} \left[\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta\right) + \xi_T \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta\right) \right] \\ y_{global} - d = r_{bT} \left[\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta\right) - \xi_T \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta\right) \right] \end{cases}$$

Operando en x para despejar el término en seno:

$$\frac{x_{global}}{r_{bT}} - \xi_T \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta\right) = \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta\right)$$

Sustituyendo en y :

$$\begin{aligned} y_{global} - d &= r_{bT} \left[\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta\right) - \xi_T \left[\frac{x_{global}}{r_{bT}} - \xi_T \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta\right) \right] \right] \Rightarrow \\ \frac{y_{global} - d}{r_{bT}} &= \left(1 + \xi_T^2\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta\right) - \xi_T \frac{x_{global}}{r_{bT}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta\right) &= \frac{y_{global} - d + \xi_T x_{global}}{r_{bT} \left(1 + \xi_T^2\right)} \end{aligned}$$

Y despejando se obtiene el ángulo girado en función de variables ya calculadas y datos geométricos del engranaje:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arc cos}\left(\frac{y_{global} - d + \xi_T x_{global}}{r_{bT} \left(1 + \xi_T^2\right)}\right) &= \frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T + \beta \Rightarrow \\ \beta &= \operatorname{Arc cos}\left(\frac{y_{global} - d + \xi_T x_{global}}{r_{bT} \left(1 + \xi_T^2\right)}\right) - \frac{\pi}{z_T} + \xi_T + q_T \end{aligned}$$

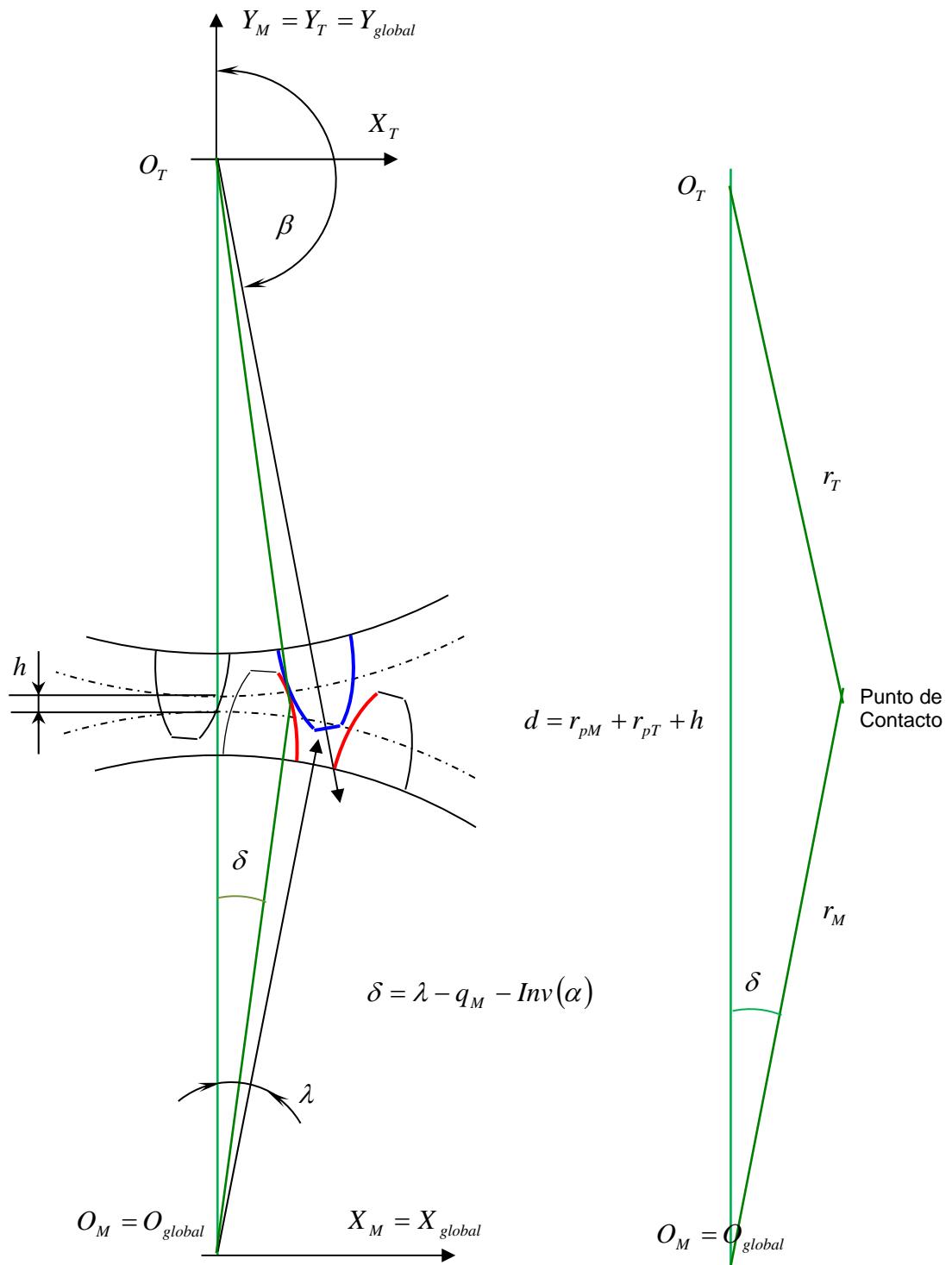
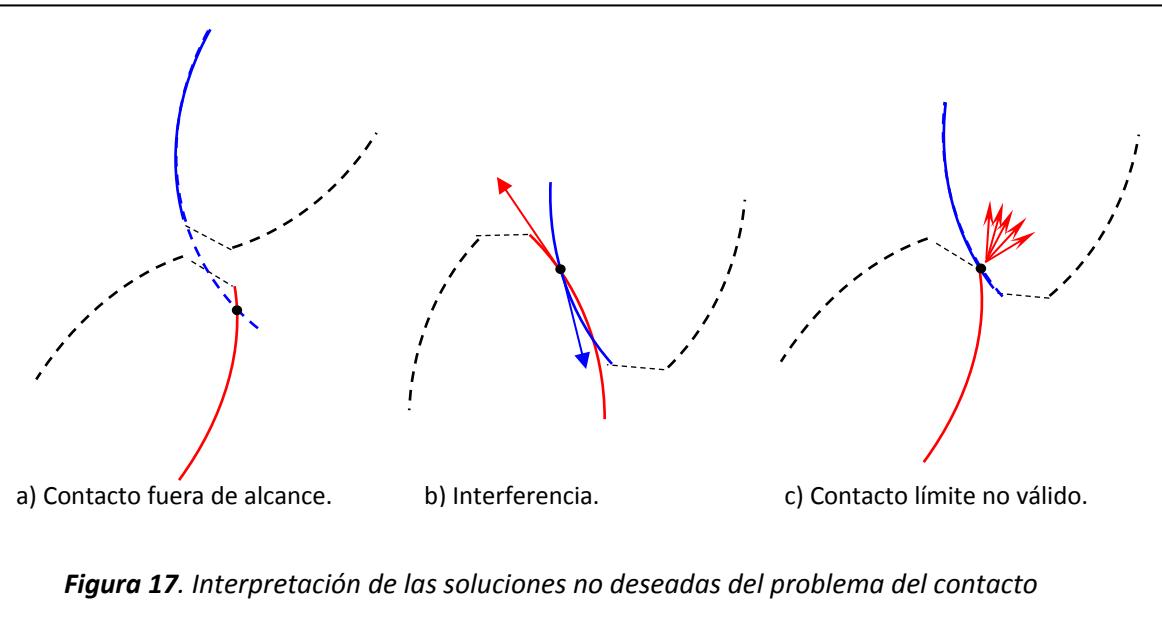


Figura 16. Ensayo de un posible punto de contacto obtenido para cierto ζ_M .
Giro horario del Máster

Se dispone ya de dos engranajes supuestamente posicionados de forma que intersecan los flancos de sus elementos de referencia sobre el punto de contacto ensayado. Los datos para esta situación son el giro del Máster λ y su parámetro ξ_M y los giros β y ξ_T para ellos obtenidos. En esta posición del par de engranajes sólo se ha exigido que los flancos del diente y del hueco correspondiente tengan un punto común, es decir, intersequen. La resolución analítica del problema geométrico ha proporcionado una solución que no es más que la intersección de dos curvas envolventes de círculo supuestamente ilimitadas.



Las distintas soluciones no válidas que se pueden dar se muestran en la *figura 17*. En la mayoría de los casos, el punto obtenido quedará fuera de los límites del diente (*a*), por exceder el radio del Addendum del Test y el cálculo se habrá interrumpido para ensayar otro nuevo punto (ξ_M). Este contacto virtual fuera del Addendum del engranaje test se detecta al obtener una distancia r_T al centro mayor que su radio de Addendum. En otros casos (*b*) el punto obtenido exigirá, para verificar en él la intersección de flancos, que se produzcan solapes (llamados interferencias) entre dientes de Máster y Test. La interferencia supone que los flancos del hueco y diente en el punto obtenido se cortan en lugar de ser tangentes, para lo que se necesitaría que un diente penetre dentro de otro. Esta situación se producirá si las tangentes a los flancos en el punto común de contacto, calculadas sobre el diente del Test y sobre el hueco del Máster, no coinciden. La consecuencia de que las tangentes a los flancos de diente y hueco no sean paralelas es que, en puntos próximos al común de contacto, ambas envolventes evolucionan de forma distinta y por tanto deben cortarse. La interferencia no puede presentarse en la realidad por razones obvias y exigirá que las posiciones de los engranajes se modifiquen hasta llegar al contacto en otro punto y posición. Si esto no es posible el par se bloqueará por falta de espacio. Un caso especial (*c*) es del contacto en el límite exterior del flanco. El punto de intersección del flanco con el addendum (Esquina) es un punto en el que no puede determinarse la derivada o pendiente del flanco, por ser un punto anguloso. Matemáticamente no es un punto de discontinuidad pero si de no derivabilidad, ya que es el punto de unión de las dos ramas de una función definida dicotómicamente en el que existen ambas derivadas laterales (por flanco y addendum) pero no coinciden. En consecuencia, un contacto en la esquina de un elemento no podrá considerarse interferencia

pero tampoco será un contacto válido. El contacto en la esquina sí es una situación que puede darse durante el giro de los engranajes, pero producirá fuerzas con componente en dirección radial generando deslizamientos bajo carga en lugar de rodadura. La transmisión del movimiento será imprevisible, se aleja del funcionamiento ideal y habrá vibraciones, golpes o bloqueo del par. La única posibilidad para considerar la intersección obtenida como contacto válido es que las tangentes (o las normales) al flanco del diente y del hueco sean paralelas, de forma que las interacciones se produzcan en la dirección de la tangente a los círculos primitivos. De esta forma sólo se transmite par sin generar reacciones en los ejes más allá de los debidos a la fricción en ellos.

Para comprobar si el contacto es real (no hay interferencia) hay que obtener las tangentes del punto en ambas envolventes, y verificar que son paralelas (coinciden o son opuestas):

Sobre el flanco izquierdo del hueco de engranaje maestro el vector que marca la dirección de la tangente tiene por coordenadas:

$$\begin{cases} x_{Tan,M} = -\operatorname{Sen}(\xi_M + q_M - \lambda) \\ y_{Tan,M} = \operatorname{Cos}(\xi_M + q_M - \lambda) \end{cases}$$

Y sobre el flanco derecho del diente del engranaje ensayado:

$$\begin{cases} x_{Tan,T} = \operatorname{Sen}(\beta - \xi_T - q_T + \frac{\pi}{z_T}) \\ y_{Tan,T} = \operatorname{Cos}(\beta - \xi_T - q_T + \frac{\pi}{z_T}) \end{cases}$$

Los cálculos anteriores se repetirán para cada nuevo valor del parámetro ξ_M de forma que se recorre todo el flanco del hueco hasta localizar un punto de contacto válido, tanto por estar dentro del Addendum del test como por coincidir las direcciones de las tangentes sobre ambos flancos. La ausencia de solución válida en todo punto del flanco implica que no hay contacto para el hueco de referencia en ese ángulo de giro.

7.2.2.- SEGUNDA FASE. POSICIÓN DOMINANTE BAJO CONTACTO MÚLTIPLE.

Cálculo de la zona de contactos válidos.

En el punto anterior se ha localizado el giro β del engranaje Test para que con el Máster en una posición λ haya contacto válido entre sus elementos de referencia. Es posible que el hueco del Máster esté fuera del alcance del diente del Test, que esté dentro de alcance pero cualquier β implique interferencia, y por último que exista contacto válido para cierto β .

La zona en la que debe situarse el hueco de referencia del Máster para que el diente de referencia del Test pueda acoplarse en él bajo contacto válido se denominará en adelante por *zona de contactos válidos* (*Figura 18*) o simplemente *zona de contactos*. Para determinarla sólo hay que localizar los ángulos de giro λ mínimo (negativo) y máximo (positivo) del engranaje Máster para los que existe un β con contacto válido. Este proceso se resuelve

variando entre ciertos límites el giro λ del Máster y verificando el tipo de contacto que se obtiene. Para limitar los posibles extremos de la zona de contacto se calculan los giros del Máster para los que el hueco de referencia (su flanco según sentido de giro) tiene puntos dentro del Addendum del Test. Es evidente que en caso contrario quedará fuera de alcance. Entre estos ángulos se realiza la variación de λ mediante incrementos fijos definidos por el usuario. En el proceso completo se obtienen también las coordenadas globales de todos los puntos de contacto válido, por lo que pueden representarse todos ellos y comprobar que su lugar geométrico es efectivamente la recta de contacto. Las rectas de contacto de la figura 18 se han obtenido de esta forma. La zona de contacto sin errores ni holgura es simétrica respecto a $\lambda = 0^\circ$, pero en otras condiciones se desplaza en uno u otro sentido según el sentido de giro del par. Sobre esto se dan más detalles en el ANEXO 2. En la figura 18 se representan las posiciones del par de engranajes para inicio (a) y fin (b) de la zona de contacto. Los ángulos λ de inicio y fin de la zona de contacto son de signo distinto y se miden en el centro del hueco de referencia. La zona de contacto queda desplazada hacia los ángulos positivos (fin) por ser giro horario. Se ha dado al par una holgura de 0.2 mm por lo que los círculos primitivos no son tangentes y se han representado dos rectas de contacto, la más larga de las cuales correspondería a holgura cero.

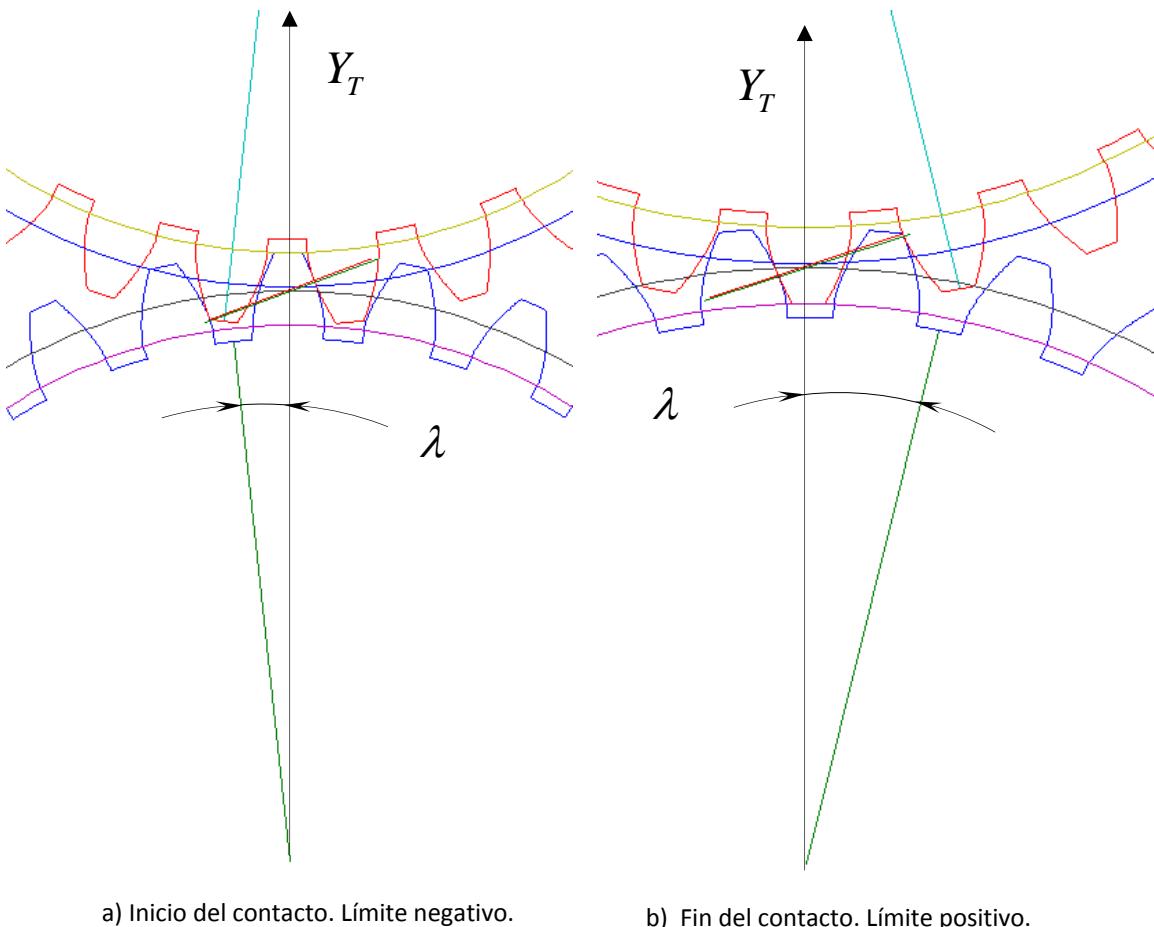


Figura 18. Límites de la zona de contactos válidos. Giro horario del Máster

Cálculo del giro del engranaje ensayado para elementos distintos al de referencia.

Cuando el hueco de referencia del Máster sale de la zona de contacto es evidente que el movimiento no se detiene. El resto de dientes y huecos son idénticos al de referencia (que se eligió sin ninguna particularidad) y el contacto se produce en ellos de igual manera. Cuando el par de referencia se encuentra fuera de alcance, por ejemplo (*Figura 19*) para un giro de $85^\circ \lambda = 85^\circ$ habrá que determinar lo que está ocurriendo en esa posición en los pares hueco-diente que se encuentran en la zona de contacto. El problema no tiene más dificultad que localizar cuál o cuáles son estos huecos y tratarlos sucesivamente como si fuesen el hueco de referencia. Gracias a que el engranaje maestro no presenta errores puede asegurarse que entre el centro de un hueco y el del contiguo (entre los sistemas locales i e $i \pm 1$) existe un ángulo igual a $2\pi/z_M$. Si del ángulo $\lambda = 85^\circ$ del hueco de referencia se restan $2\pi/z_M$ las n veces necesarias hasta obtener un valor menor al límite positivo de la zona de contacto, se habrá encontrado la posición del primer hueco, o hueco más a la derecha que presenta contacto válido. La posición del Máster en la que habrá que localizar el giro del Test será:

$$\lambda_1 = 85 - n \times \frac{2\pi}{z_M}$$

Esta posición no es otra que la que definiría la posición del Máster si se cambiase el hueco de referencia por éste. Para proceder del modo anterior hay que tener en cuenta que cuando el ángulo λ de giro del Test se haya dado por un ángulo negativo, éste ya será menor que el límite positivo y se considerará dentro de la zona de contactos para $n = 0$. En este supuesto se deberán sumar las vueltas (2π) necesarias para llevarlo a un valor positivo. La operación anterior no cambia la posición del Máster sino la forma de denotarla.

Contacto múltiple.

Si se continúa restando $2\pi/z_M$ de la posición λ_1 hasta que se obtenga un ángulo menor que el límite negativo de la zona de contacto, se habrán localizado el resto de los p huecos presentes en la zona de contacto, y sus ángulos como huecos de referencia:

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{2\pi}{z_M}; \dots \lambda_p = \lambda_1 - (p-1) \frac{2\pi}{z_M}$$

Los huecos en lo sucesivo se numerarán tal y como se ha hecho en esta descripción, siendo siempre el hueco 1 el más próximo al límite positivo de la zona de contacto. Para que este proceso sea válido hay que verificar que, si λ (hueco de referencia) ya está en la zona de contactos válidos, no existan a su derecha más huecos en la zona de contacto. Como se cuenta en sentido anti horario (restando amplitud de hueco) estos huecos pasarían desapercibidos. Este caso particular debe ser tenido en cuenta.

Tras resolver La fase 1 para los p huecos se habrán obtenido $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ ángulos de giro del Test. Estos ángulos corresponden en realidad al contacto válido en distintos huecos de una única posición fija del Máster de $\lambda = 85^\circ$ y suponen ángulos medidos también en distintos dientes del Test. La diferencia angular entre dos contiguos de ellos será aproximadamente la que existe entre los centro de dos dientes contiguos de $2\pi/z_T$ ($^\circ$). Por estar medidos los β_i en distintos dientes es necesario reducirlos al mismo diente para poder compararlos. Si el Test es perfecto o sus errores despreciables la diferencia será exactamente $2\pi/z_T$ y al reducir

los ángulos de giro del Test al mismo hueco se obtendrá para todos el mismo el valor, lo que implica que se producirán p contactos válidos simultáneos.

Par hueco-diente dominante y giro del engranaje Test.

Si el engranaje Test tiene errores la diferencia entre β_i y β_{i+1} no se mantendrá constante para todo i como en el caso anterior, ni coincidirá con el valor exacto $2\pi/z_T$. En consecuencia, en cada hueco-diente, se requerirá una posición distinta del Test y sólo una será la que finalmente se imponga. Esta posición dominante será la que suponga un mayor avance en el giro del Test, ya que es la única forma de asegurar que en el resto de pares hueco-diente queda holgura y se evitan las interferencias. El mayor avance en el Test se corresponderá, para giro horario del Máster y anti horario del Test, con el menor β reducido, y para sentido inverso con el mayor.

Una vez localizado el giro dominante reducido del Test, será necesario expresarlo nuevamente para el diente de referencia. Para trasladarlo a éste habrá que tener en cuenta las vueltas completas que se sumaron al transformar los λ negativos a positivos, afectadas por la relación de transmisión, y los huecos (dientes para el Test) que se restó hasta llegar desde λ a la zona de contacto (al hueco dominante). Descontado el efecto de estas transformaciones se habrá localizado el giro del Test β . Como última operación queda verificar si para el giro del Test β hallado existen o no interferencias en huecos próximos.

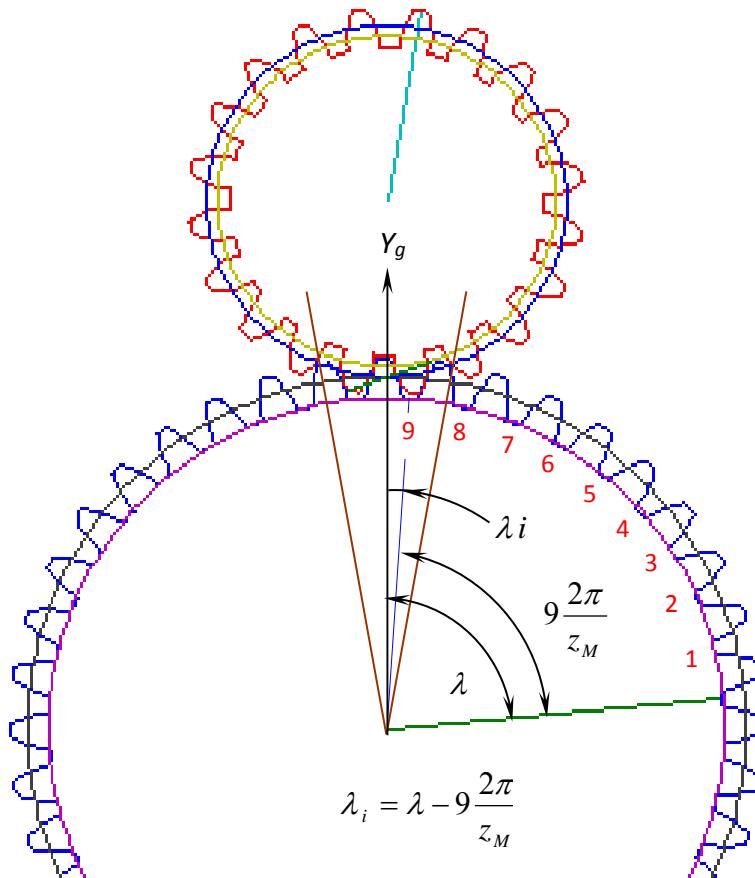


Figura 19. Paso del hueco de referencia a otro en la zona de contactos válidos.

7.2.3.- TERCERA FASE. CORRECCIÓN DE LAS INTERFERENCIAS

Hasta el momento se ha posicionado el Test de forma que en la zona de contacto hay un único hueco-diente con contacto real y holgura en el resto. Es posible no obstante que en los pares hueco-diente que todavía no han entrado en ella o en los que la acaban de abandonar, se presenten interferencias para esta posición del Test. Lo primero que debe determinarse es la zona a cada lado de la de contactos válidos que debe inspeccionarse. El criterio que se siguió inicialmente y que se ha mantenido por mostrarse seguro es tomar tantos huecos a cada lado de la zona de contacto como huecos haya en su interior en el momento de hacer la comprobación. Tras numerosas simulaciones se estima que la interferencia no se presentará más allá del primer hueco a cada lado de los presentes en la zona de contactos válidos, y de presentarse, será menos acusada que en él. Por ello, aunque en la simulación de los ensayos se ha mantenido esta forma de proceder, podría limitarse a un hueco a cada lado. Para detectar la interferencia se parte de la posición fija del Máster para un giro λ y del giro β que se mostró dominante en la etapa anterior. En esta posición del par puede asegurarse que el Test es arrastrado por el Máster con contacto válido en un par hueco-diente y holgura en los demás pares presentes en la zona de contacto.

En la figura 20 los huecos 3 y 4 se encuentran en la zona de contacto (No se ha representado la real para mayor claridad) y se corresponden con los dientes A y B. La zona de búsqueda de interferencias se ha ampliado a los dos huecos anteriores a la de contacto (5 y 6) y a los dos posteriores (1 y 2). Los ángulos λ_i que los caracterizan se calcularán mediante su posición como hueco de referencia, restando o sumando las veces necesarias el ángulo entre huecos ($2\pi/z_M$) al hueco más próximo de la zona de contactos. Para el Test se tomará siempre como diente de partida el dominante y se procederá de la misma forma con $2\pi/z_T$. En la figura se ha supuesto que el par hueco-diente dominante es el 3-A, por lo que β_A es el único que se ha conservado. Este giro es el que marca la posición del Test y los demás dientes se deben situar respecto a él.

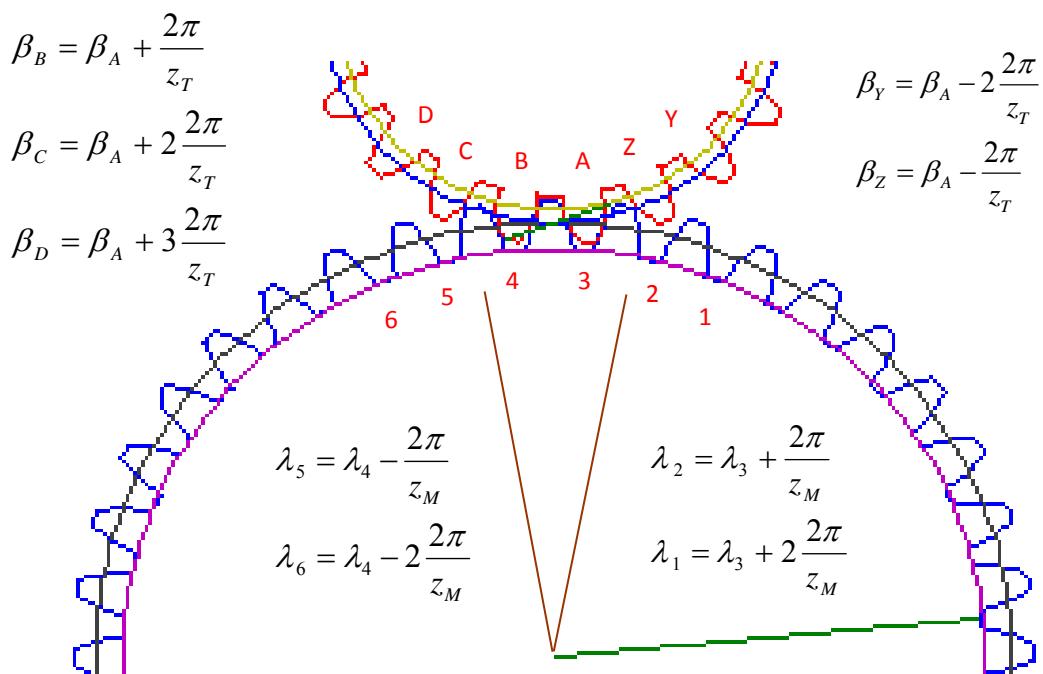


Figura 20. Ampliación de la zona de contactos válido para detección de interferencias.

En la figura 21 se observa la situación de interferencia en un diente que está a punto de entrar en la zona de contacto. Solo el hueco derecho (detalle B) está en la zona de contacto válido y es el que se emplea para posicionar el Test. Se aprecia como el diente izquierdo del Test (Detalle A) se solapa con el diente que limita por la izquierda el hueco del máster.

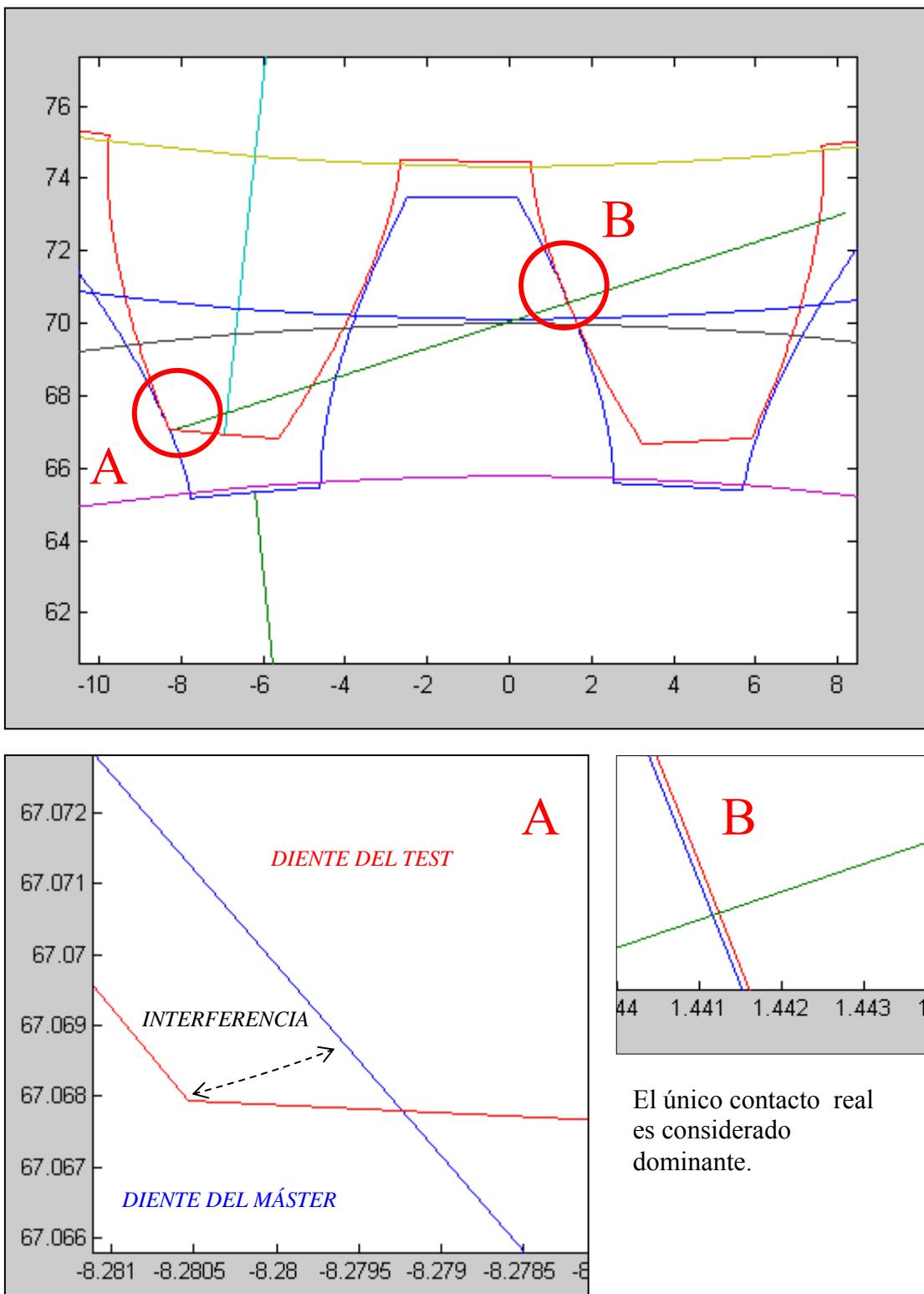


Figura 21. Situación de interferencia previa a la entrada en la zona de contactos válidos.

Una vez calculados los λ_i y los β_i de la forma descrita se procederá a la comprobación de interferencia en los huecos y dientes correspondientes, que se encuentran fijos en sus posiciones. En este trabajo se distinguirá entre dos tipos de interferencias.

Se ha llamado interferencia horaria a la que se produce entre el flanco izquierdo de un hueco del Máster y el derecho del diente del Test. En la figura 22 se puede dar en los puntos A y C. Con el Máster girando en sentido horario y el test retrasado (giro más horario que cierto límite) los dientes del éste necesitarían penetrar en los del Máster. Lo mismo ocurre cuando el Máster gire en sentido anti horario y el Test se encuentre adelantado (giro más horario que el límite). Se observa pues que, para ambos sentidos de giro, la interferencia horaria se produce cuando el giro β del Test es más horario (mayor) que el límite. La situación entre los dos sentidos de giro sólo difiere en que dicho límite se sobrepasa por adelanto o retraso del Test.

Se denotará por interferencia anti horaria la que se produce entre el flanco derecho del hueco del Máster y el izquierdo del diente del Test. En la figura 22 se puede dar en los puntos B y D. Con el Máster girando en sentido horario y el test adelantado (giro menos horario que cierto límite) los dientes del éste necesitarían penetrar en los del Máster. Lo mismo ocurre cuando el Máster gire en sentido anti horario y el Test se encuentre retrasado (giro menos horario que el límite). Para ambos sentidos se produce por una posición menos horaria (β menor) que el límite, consecuencia de un adelanto o retraso (según sentido de giro) en el giro del Test.

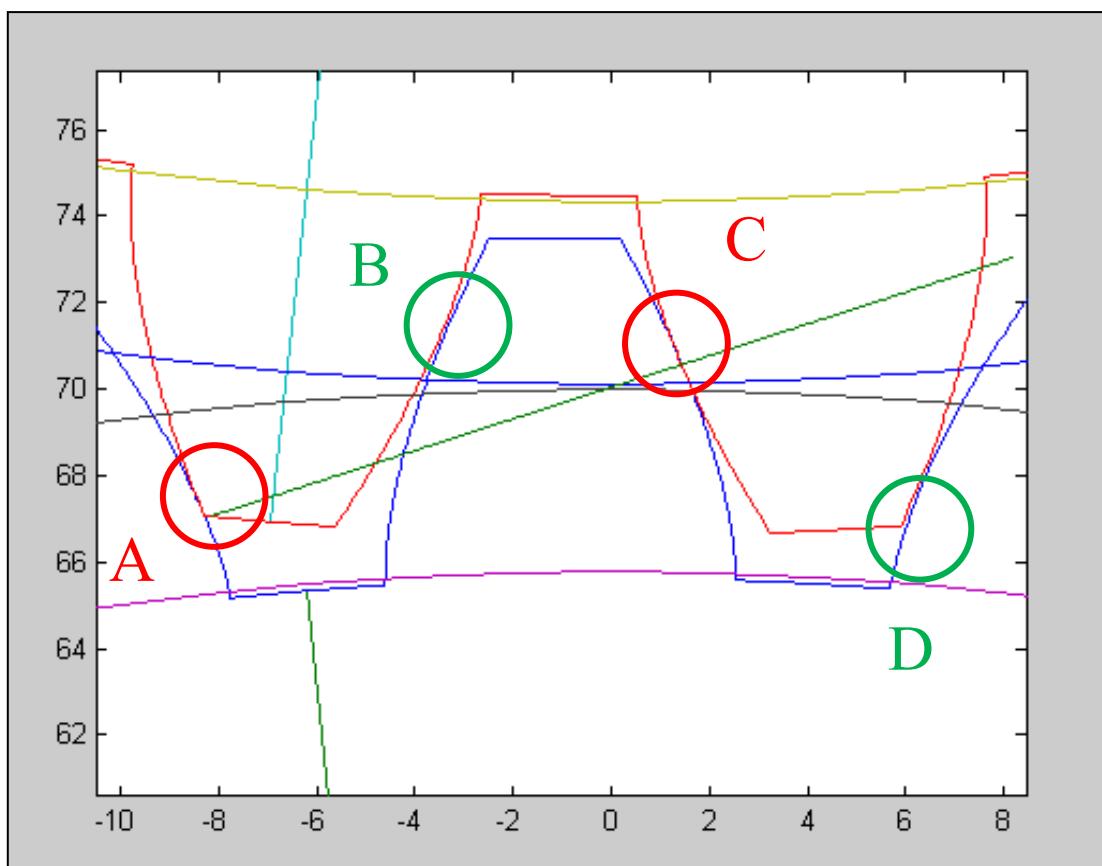


Figura 22. Posibles puntos de interferencia horaria y anti horaria.

Antes de explicar la forma de localizar y corregir las interferencias hay que hacer ciertas consideraciones acerca del punto en que se encuentran los cálculos. Hasta el momento se ha posicionado el Test de forma que en la zona de contacto hay un único hueco-diente con contacto real (dominante) y holgura en el resto. La determinación del hueco-diente dominante se hizo de forma que éste sea el que provoque el mayor adelanto en el Test. Así, para giro horario del Máster el Test estará en el máximo avance anti horario que conserve el contacto y para giro anti horario de aquel éste tendrá el máximo giro horario con contacto. Lo que se hizo de esta manera no es otra cosa que evitar que en la zona de contacto se produzcan interferencias horarias o anti horarias para giro horario o anti horario del Máster respectivamente. Cuando se evita una interferencia horaria corre el peligro de provocarse una anti horaria y viceversa. Si esto ocurre la segunda no puede deshacerse porque se retornaría a la primera. En consecuencia se llegaría a una situación de posible bloqueo del par de engranajes o al menos a un funcionamiento irregular por falta de espacio entre huecos y dientes. En los ensayos que se han simulado sólo se han eliminado las interferencias correspondientes al sentido de giro del par de engranajes y, aunque también se detectan y cuantifican las que se producen en el flanco pasivo no se han tenido en cuenta.

Los dos límites a partir de los que se produce interferencia horaria o anti horaria no son sino las posiciones del Test entre las que puede variarse su giro β cuando un determinado diente está alojado con cierta holgura en el hueco correspondiente. Puede comprenderse fácilmente imaginando un diente alojado dentro de un hueco del Máster, mientras éste permanece fijo en su posición λ (Como cualquiera de los de la *figura 22*). Si se gira en sentido horario el Test hasta que contacte el flanco derecho del diente con el flanco izquierdo del hueco se habrá llegado al límite de interferencia horaria. Para lograr un β mayor que este límite será necesario forzar la posición con lo que uno de los flancos penetrará en el otro. Si el contacto al que se ha llegado se produce en un punto de los flancos será válido (*Figura 22*, punto C) y si se produce en la esquina de la envolvente (*Figura 22*, punto A) será no válido. En el primer caso el hueco-diente estaría obligatoriamente en la zona de contacto mientras que en el segundo estaría en las inmediaciones de ésta, por haber salido de ella o ser inminente su entrada. Si ahora se gira el Test en sentido anti horario hasta llegar al contacto entre el flanco izquierdo del diente y el derecho del hueco se habrá llegado al límite de interferencia anti horaria. No podrá disminuirse β (Hacerlo menos horario) sin provocar interferencia anti horaria. Para este límite pueden hacerse idénticas consideraciones a las anteriores sobre la validez del contacto y la posición del hueco.

Para cada hueco posicionado en λ_i se calculan los dos límites de interferencia y se comprueba que el correspondiente β_i se encuentra entre ellos. Los límites de interferencia se calculan encontrando la posición del Test en las que comienza a existir intersección de flancos dentro de alcance. La forma de hacerlo es la descrita en la fase 1. Como se ha comentado antes sólo se han corregido las interferencias correspondientes al sentido de giro, horarias para sentido horario del Máster y anti horarias para el contrario. Si alguno de los β_i sobrepasa el límite de interferencia para el sentido de giro del Máster, la posición del Test calculada mediante el hueco dominante deberá avanzarse hasta que todos los dientes queden dentro de su límite de interferencia. La mayor diferencia entre los β_i y los respectivos límites sobrepasados será la corrección a introducir en uno u otro sentido para reposicionar el Test. En este caso la dominancia pasa a ejercerla un hueco-diente desde fuera de la zona de contactos válidos. Para giro horario del Máster las correcciones en β serán negativas pues deben adelantarla en sentido anti horario. Para giro del Máster anti horario serán positivas.

7.3.- PARTICULARIDADES DE LA FASE 1 PARA GIRO ANTI HORARIO DEL MÁSTER.

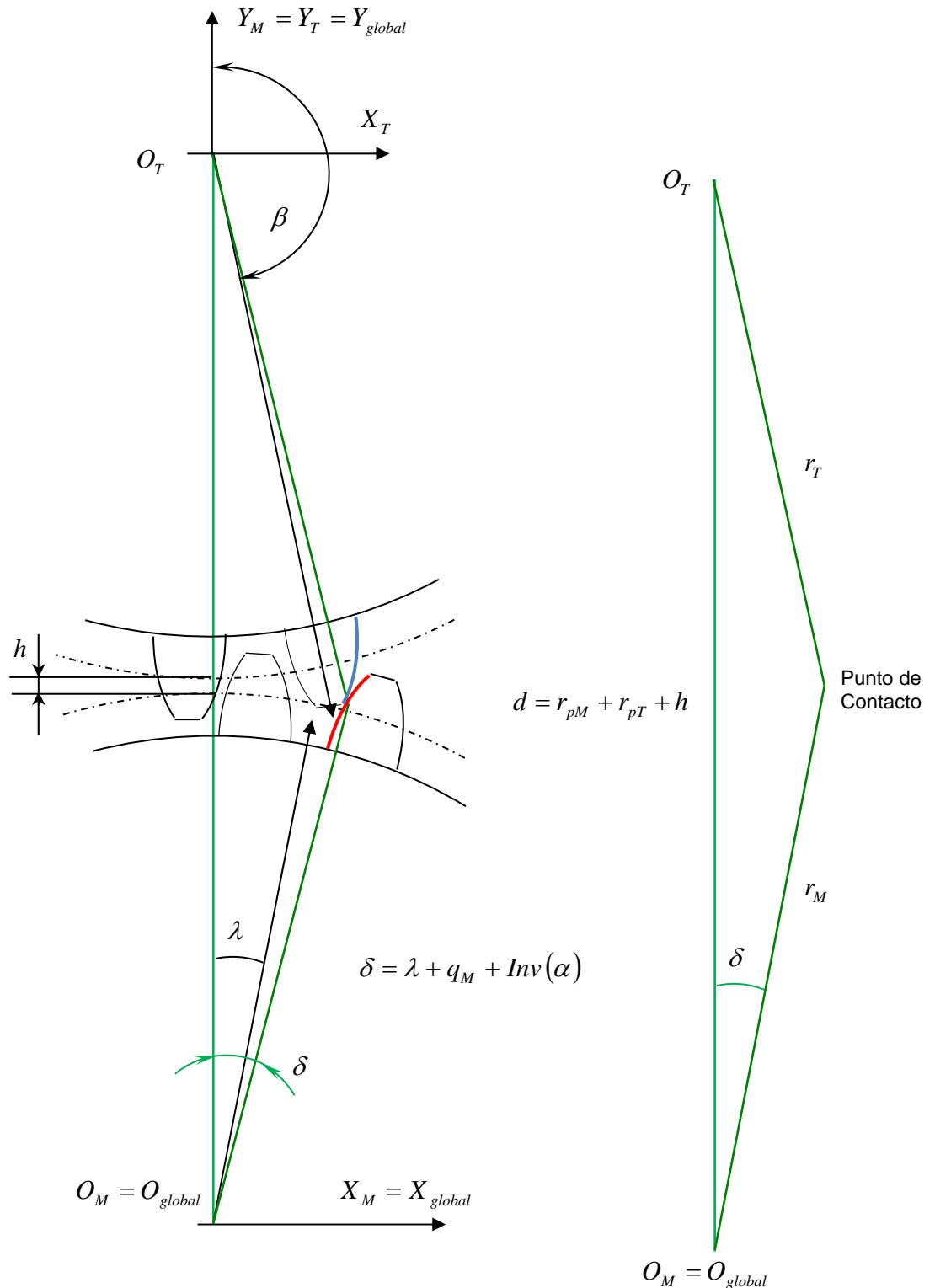


Figura 23. Ensayo de un posible punto de contacto obtenido para cierto ξ_M . Giro anti horario del Máster

(Figura 23) Si el giro del engranaje maestro es anti horario el contacto se produce entre puntos del flanco derecho del hueco e izquierdo del diente. El ángulo interior del triángulo δ es ahora mayor que el giro del máster.

$$d = r_{pM} + r_{pT} + h \quad r_M = r_{bM} \sqrt{1 + \xi_M^2} \quad \delta = \lambda + q_M + \text{Inv}(\alpha)$$

Globales del punto de contacto calculadas mediante flanco derecho del hueco:
(λ Ángulo girado por el máster)

$$x_{Global} = r \text{Sen} (q_M + \text{Inv}(\alpha) + \lambda) \\ y_{Global} = r \text{Cos} (q_M + \text{Inv}(\alpha) + \lambda)$$

Si está dentro del alcance del engranaje test, por pertenecer al flanco izquierdo de un diente:

$$\begin{cases} x_{global} = r_{bT} \left[-\text{Sen} \left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T - \beta \right) - \xi_T \text{Cos} \left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T - \beta \right) \right] \\ y_{global} - d = r_{bT} \left[\text{Cos} \left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T - \beta \right) - \xi_T \text{Sen} \left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T - \beta \right) \right] \end{cases}$$

Despejando en $x_{global} = x_{test}$ el término en seno:

$$\frac{x_{global}}{r_{bT}} + \xi_T \text{Cos} \left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T - \beta \right) = -\text{Sen} \left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T - \beta \right). \text{ Sustituyendo en } y_{test} \\ y_{global} - d = r_{bT} \left[\text{Cos} \left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T - \beta \right) + \xi_T \left(\frac{x_{global}}{r_{bT}} + \xi_T \text{Cos} \left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T - \beta \right) \right) \right] \\ \frac{y_{global} - d - \xi_T x_{global}}{r_{bT} (\xi_T^2 + 1)} = \text{Cos} \left(\frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T - \beta \right) \quad \text{Finalmente:}$$

$$\text{ArcCos} \left[\frac{y_{global} - d - \xi_T x_{global}}{r_{bT} (\xi_T^2 + 1)} \right] = \frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T - \beta \Rightarrow \\ \beta = -\text{ArcCos} \left[\frac{y_{global} - d - \xi_T x_{global}}{r_{bT} (\xi_T^2 + 1)} \right] + \frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T$$

Como $\text{Cos}(A) = \text{Cos}(-A)$ otra posible solución es:

$$\text{ArcCos} \left[\frac{y_{global} - d - \xi_T x_{global}}{r_{bT} (\xi_T^2 + 1)} \right] = -\frac{\pi}{z_T} + \xi_T + q_T + \beta \Rightarrow \\ \beta = \text{ArcCos} \left[\frac{y_{global} - d - \xi_T x_{global}}{r_{bT} (\xi_T^2 + 1)} \right] + \frac{\pi}{z_T} - \xi_T - q_T$$

Las tangentes son ahora:

Tangente flanco derecho del hueco:
$$\begin{cases} x_{Tan,M} = \text{Sen}(\xi_M + q_M + \lambda) \\ y_{Tan,M} = \text{Cos}(\xi_M + q_M + \lambda) \end{cases}$$

Tangente flanco izquierdo diente
$$\begin{cases} x_{Tan,T} = -\text{Sen}(-\beta - \xi_T - q_T + \frac{\pi}{z_T}) \\ y_{Tan,T} = \text{Cos}(-\beta - \xi_T - q_T + \frac{\pi}{z_T}) \end{cases}$$

7.4.- ESQUEMA DE LA SECUENCIA DE CÁLCULOS

FASE 2 (POSICIÓN DOMINANTE BAJO CONTACTO MÚLTIPLE)

-LOCALIZACIÓN DE LOS LÍMITES DE LA ZONA DE CONTACTO.

-Comprobaciones de no bloqueo del par.

-Ángulos aproximados por intersección de los círculos addendum. **Máximo y mínimo**

-Proceso iterativo entre **Máximo y mínimo**.

FASE 1

-Se fija λ y se varía ξ_M .

-Se determina β y ξ_T **coordenadas y el tipo de contacto**.

-Se han obtenido los **límites de la zona de contacto**.

-BUCLE PARA CADA λ ENTRE LOS **límites de la zona de contacto** según **paso**.

-Paso de λ a positivo (suma de revoluciones)

-Localización de primer hueco λ_1 en la derecha de la zona de contacto $\left(-\frac{2\pi}{z_m}\right)$:

-Descarte de huecos a la derecha $\left(+\frac{2\pi}{z_m}\right)$.

-Localización de resto de huecos en zona de contacto $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \left(-\frac{2\pi}{z_m}\right)$.

-Proceso repetido para cada hueco λ_i en la zona de contacto:

-Sólo para el primer λ y λ_1 , Cálculo del giro inicial del Test SIN ERROR

-Cálculo de $\beta_{1,\sin error}$

FASE 1

-se han obtenido $\beta_{1,\sin error}$

-Cálculo del resto de posiciones del Test sin error por giro del máster:

$$\beta_{i,\sin error} = \beta_{1,\sin error} \pm (i-1) \times \text{paso} \times \frac{z_m}{z_t}$$

-se han obtenido las posiciones del Test sin error

-Cálculo de β_i

FASE 1

-se han obtenido $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$

-Reducción de cada β_i al primer diente a la derecha:

$$\beta_i^1 = \beta_i - (i-1) \frac{2\pi}{z-t}$$

-Localización del hueco-diente dominante:

$$\text{-para sentido horario } \beta_D^1 = \min(\beta_1^1, \beta_2^1, \dots, \beta_p^1)$$

$$\text{-para sentido anti horario } \beta_D^1 = \max(\beta_1^1, \beta_2^1, \dots, \beta_p^1)$$

FASE 3 (CORRECCIÓN DE INTERFERENCIA)

-Ampliación a $3p$ huecos y dientes para verificación de interferencia.

Se obtiene: $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{3p}^*$; $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_{3p}^*$

-Verificación de interferencia en flancos activos:

-Para cada λ_i^* :

-Cálculo de los dos límites de interferencia $\beta_i,_{límite}$.

-Para cada sentido de giro:

FASE 1

-Se ha obtenido un límite de interferencia $\beta_i,_{límite}$

-Se ha obtenido todos los límite de interferencia $\beta_i,_{límite}$

-Determinación de la corrección C_i por interferencia para los dos sentidos.

-Comparación de β_i^* con $\beta_i,_{límite}$.

-Obtención de la corrección por interferencia y signo para λ

$$C_\lambda = \pm \max(C_1, C_2, \dots, C_{3p})$$

-Obtención de giro del Test β para λ

-Corrección por interferencia. $\beta_{DC}^1 = \beta_D^1 \pm C$

-Devolución al diente original (por reducción): $\beta_{DC} = \beta_{DC}^1 \pm k \frac{2\pi}{z-t}$.

-Obtención de la diferencia respecto al nominal $d = \beta_{DC} - \beta_N$.

-Devolución del giro del Test a su posición original por operaciones en el Máster.

-Se ha obtenido β para λ .

-Devolución del giro del Máster a su origen por operaciones previas (revoluciones, huecos, etc.)

-REPRESENTACIÓN DE GRÁFICOS

-CÁLCULO DE ERRORES

8.- CONCLUSIONES.

La determinación de la incertidumbre con la que se obtienen los resultados en los ensayos funcionales es un campo poco conocido y explotado. Estos resultados, como cualquier otra medición indirecta, reciben la influencia de las incertidumbres aportadas por cada dispositivo de medición que se utiliza. Su estimación requiere disponer de una muestra de resultados cuyo número permita obtener conclusiones estadísticamente aceptables, más fiables por tanto cuanto mayor sea el número de medidas. El tiempo necesario para obtener esta serie de resultados mediante la repetición efectiva de un ensayo resultaría prohibitivo. Como además no puede determinarse en cada ensayo el estado concreto de cada una de las fuentes individuales de incertidumbre, resultará imposible aislar la influencia de cada una de ellas en la incertidumbre final. Mediante simulación puede, sin embargo, superarse ambas dificultades. Por una parte, el repetir un ensayo hasta obtener una serie de resultados lo suficientemente grande sólo requiere un tiempo que puede optimizarse y, por otra, todos los parámetros que influyen en el resultado son controlables de forma individual. Así, puede simularse un error geométrico en el engranaje ensayado que se mantendrá fijo durante todas las repeticiones, mientras se varían en cada una de ellas el valor de una determinada fuente de incertidumbre. Los resultados que se obtienen mediante simulación son, además, los que deberían obtenerse en el ensayo real si no existiesen errores de medida, de forma que permiten conocer el valor real de un resultado sin ninguna influencia nociva. Esto permitiría calibrar una máquina de ensayo mediante un par de engranajes con errores geométricos conocidos.

El contar con una herramienta de simulación puede aportar múltiples beneficios al estado actual de los ensayos funcionales. Puesto que no existen, o no se han localizado, programas que realicen esta simulación, su desarrollo ha constituido la base de este trabajo, quedando el estudio profundo del problema de la incertidumbre para su explotación próxima. El resultado son varios grupos de funciones en MATLAB que proporcionan y representan toda la información relativa a cualquier posición en la que el par de engranajes ensayado se pueda encontrar, tanto de forma numérica como gráfica. Un segundo grupo de funciones permite repetir un ensayo de forma abreviada para estudiar la incertidumbre que generan en el resultado final las distintas fuentes de influencia, cuando actúan aisladas o conjuntamente. Otras funciones auxiliares permiten representar pares de engranajes en cualquier posición, visualizar las rectas de acción, y las posiciones en las que se inicia o finaliza el contacto en un diente determinado. Pueden variarse a voluntad del usuario el número de dientes, módulo, ángulo de presión y otros datos geométricos de los dos engranajes por separado, elegir el sentido de giro, y variar la holgura con la que el par se coloca. Quedan como trabajos futuros la simulación del ensayo a dos flancos y la incorporación del error de excentricidad. El primer punto puede conseguirse con facilidad ya que toda la información necesaria se calcula y almacena ya en las funciones actuales. Basta con permitir variar la distancia entre centros hasta hacer desaparecer las interferencias en los flancos pasivos. En cuanto al segundo punto, La deducción de la geometría de un engranaje excéntrico y la resolución del problema descrito en el punto 7 está terminada y contrastada, pero no se ha incluido por no estar totalmente incorporada al código.

Las conclusiones particulares sobre influencia de los errores en ángulo de presión en el funcionamiento del par de engranajes figuran al final de las discusiones que sobre cada variante de ensayo se hacen en los anexos 2 y 3. Las relativas a la independencia de la incertidumbre final respecto a la distancia entre centros, en el rango ensayado, se recogen en el anexo 4. Todas ellas son conclusiones conocidas de antemano, predichas en la descripción del error, y cuya finalidad era la validación del programa.

