



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Comparativa entre el análisis elástico lineal y análisis
plástico de un pórtico rígido plano

Autor

Marta Escartín Sáez

Director/es

José Manuel Lou Pina

Miguel Ángel Martínez Barca

Escuela de Ingeniería y Arquitectura

2014

Agradecimientos

Quisiera agradecer sobre todo, y en primer lugar a mis padres y mi hermana el apoyo que me han dado siempre desde que di los primeros pasos en la universidad. Inculcarme que todo esfuerzo tiene su recompensa es uno de los principales motivos que me han hecho llegar a este punto.

Agradecer especialmente a mi tutor José Manuel el tiempo totalmente desinteresado que ha dedicado conmigo y con este trabajo. Habría sido todo mucho más difícil sin tu ayuda. También a mi otro tutor Miguel Ángel por recibirme siempre que lo he necesitado y ayudarme en lo que estaba en su mano.

Y por supuesto, a todas las personas que, en mayor o menor parte, me han acompañado a lo largo de estos cuatro años de carrera y han tenido influencia en mí, en especial a la “Panda” y a “las niñas”.

Resumen

El modelo utilizado para el cálculo de estructuras hasta aproximadamente la última década había sido siempre el modelo elástico lineal. A partir de entonces y progresivamente, se ha ido aceptando la introducción del diseño plástico para el cálculo de estructuras. Las numerosas ventajas que este diseño tiene frente al elástico, como son el mejor aprovechamiento de los materiales y el aumento de la capacidad de carga por parte de la estructura, han supuesto que cada vez se tenga más en consideración este tipo de cálculo.

Este proyecto pretende, a partir del análisis particular de un pórtico rígido plano de acero, comparar los resultados obtenidos entre el modelo elástico y el plástico. Previamente al cálculo estructural, se realiza el dimensionamiento del pórtico a analizar para que éste cumpla con la normativa vigente.

Con el objetivo profundizar en el análisis plástico, se procede a la resolución del mismo problema por diversos métodos (directos y paso a paso) y se comparan los resultados obtenidos entre ellos. La diferencia entre ellos reside en que la resolución mediante un método directo proporciona directamente el mecanismo de fallo de la estructura mientras que el método paso a paso estudia la progresiva evolución de la plastificación en la misma. Además, se lleva a cabo el estudio de la influencia que la fuerza axial (inicialmente despreciable) tiene en la capacidad de carga de la estructura.

Finalmente, para estudiar la capacidad de la sección y del material para deformarse plásticamente se lleva a cabo un análisis de una viga con el programa computacional Abaqus. Éste se trata de un programa de simulación que aplica el método de los elementos finitos para realizar cálculos estructurales estáticos lineales y no lineales. Adicional al estudio de plasticidad, un estudio de pandeo es realizado con el programa para verificar que el perfil elegido en la estructura cumple efectivamente con la normativa.

Índice

1. Introducción.....	7
1.1. Justificación del trabajo.....	7
1.2. Planteamiento del problema.....	7
2. Conceptos generales	12
2.1. Comportamiento elástico y plástico	12
2.2. Hipótesis consideradas	12
2.3. Teoría elemental de flexión plástica de vigas	14
3. Cálculo elástico.....	17
4. Cálculo plástico	19
4.1. Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales.....	19
4.2. Método directo: Método estático.....	24
4.3. Método paso a paso	28
4.4. Influencia de la fuerza axial	33
5. Análisis con Abaqus	37
6. Conclusiones.....	43
Bibliografía	44
Anexos	45
Anexo I. Principio de los Trabajos Virtuales.....	46
Anexo II. Método directo estático	57
Anexo III. Método paso a paso	61
Anexo IV. Análisis con Abaqus.....	75

Índice de figuras

Figura 1. Geometría, cargas y condiciones de contorno del pórtico.....	8
Figura 2. Relación entre los momentos plásticos de pilares y jácenas	8
Figura 3. Geometría del perfil HEB200.....	9
Figura 4. Propiedades del perfil HEB200	9
Figura 5. Geometría del perfil de la viga armada de 295,5x220.....	10
Figura 6. Propiedades del perfil H295,5x220	10
Figura 7. Perfiles que forman la estructura.....	11
Figura 8. Curva tensión-deformación acero.....	13
Figura 9. Modelo de comportamiento elastoplástico ideal	13
Figura 10. Proceso de plastificación de una sección rectangular.....	15
Figura 11. Relación momento-curvatura de algunas secciones	16
Figura 12. Relación momento-curvatura de una sección en doble T.....	16
Figura 13. Cargas máximas en comportamiento elástico	17
Figura 14. Diagramas de momentos flectores del estado elástico	18
Figura 15. Secciones críticas de la estructura	20
Figura 16. Mecanismos independientes	21
Figura 17. Mecanismos combinados.....	22
Figura 18. Mecanismo de colapso	24
Figura 19. Incógnitas hiperestáticas.....	25
Figura 20. Diagramas de momentos del mecanismo de colapso	27
Figura 21. Proceso de plastificación de una sección cuadrada	34
Figura 22. Valor de los axiles en la estructura.....	35
Figura 23. Viga biempotrada con carga distribuida.....	37
Figura 24. Diagrama de momentos flectores de una viga biempotrada.....	37
Figura 25. Diagrama de momentos en la formación de las dos primeras rótulas plásticas.....	38
Figura 26. Diagrama de momentos en el colapso	38
Figura 27. Propiedades del material introducidas en Abaqus.....	39
Figura 28. Geometría del modelo en Abaqus	39
Figura 29. Mallado del modelo en Abaqus	40
Figura 30. Análisis de pandeo mediante Abaqus.....	40
Figura 31. Inicio de la plastificación en la sección	41
Figura 32. Formación de las rótulas en los extremos de la viga	41
Figura 33. Inicio de plastificación en el centro de la viga	42
Figura 34. Formación de la rótula central	42

Índice de tablas

Tabla 1. Clasificación de los perfiles según el Eurocódigo 3	9
Tabla 2. Datos del perfil analizado con el Eurocódigo 3	10
Tabla 3. Propiedades del acero	12
Tabla 4. Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales a cada mecanismo	23
Tabla 5. Valor de los momentos en cada sección	27
Tabla 6. Resultados del método paso a paso.....	32
Tabla 7. Datos de las secciones de los perfiles	35
Tabla 8. Resultados de los momentos plásticos con influencia del axil	36

1. Introducción

1.1. Justificación del trabajo

Todas las publicaciones referentes a cálculos de estructuras anteriores a 1914 estaban basadas en el comportamiento elástico de los materiales. No fue hasta la fecha citada cuando se produjeron las primeras publicaciones considerando la posibilidad de dimensionar utilizando la ductilidad de los mismos. Sin embargo, aunque en la época de los 40 se produjeron los primeros ensayos sistemáticos de plasticidad en pórticos que darían el impulso a la teoría actual, su mayor desarrollo y aceptación no se ha experimentado hasta las últimas décadas.

Gracias al diseño plástico es posible la obtención de diseños más racionales, la simplificación de los cálculos y un mejor aprovechamiento de los materiales. Con este trabajo por tanto, se quiere justificar y demostrar las ventajas que el diseño plástico presenta frente al diseño elástico mediante el análisis particular de un pórtico rígido plano.

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. Geometría, cargas y condiciones de contorno

El problema a analizar va a consistir en un pórtico constituido por un vano y dos alturas como el que se observa en la Figura 1 cuyas medidas están dadas en metros. Consta de 3 cargas puntuales y una carga distribuida a lo largo de la jácena de la primera planta. Los apoyos del pórtico se disponen empotrados.

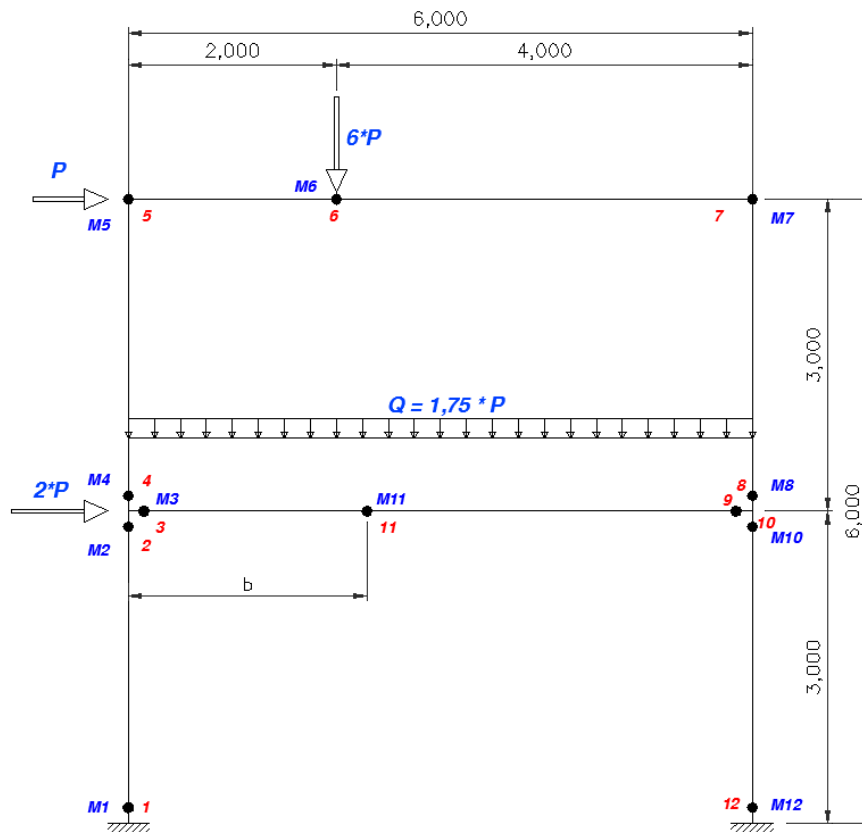


Figura 1. Geometría, cargas y condiciones de contorno del pórtico

1.2.2. Dimensionamiento de la estructura

Para el dimensionamiento y la adecuada selección de los perfiles que forman el pórtico se define inicialmente la relación existente entre el módulo plástico de los pilares y de las jácenas. Debido a que la carga principal actúa sobre las jácenas se considera que éstas tienen el doble del módulo plástico de los pilares. Por consiguiente el momento plástico de los pilares será M_p mientras que el de las jácenas será $2M_p$ (Figura 2).

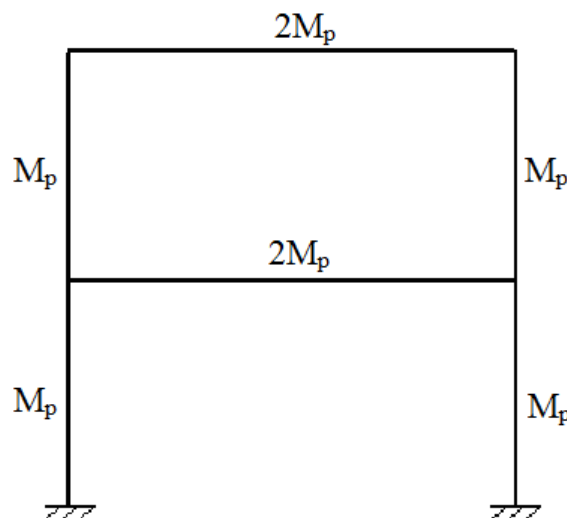


Figura 2. Relación entre los momentos plásticos de pilares y jácenas

El tipo de viga de los pilares se fija como un perfil catalogado HEB200, cuya geometría y propiedades se muestran en las Figuras 3 y 4. Las unidades de los datos de las figuras están expresadas en mm.

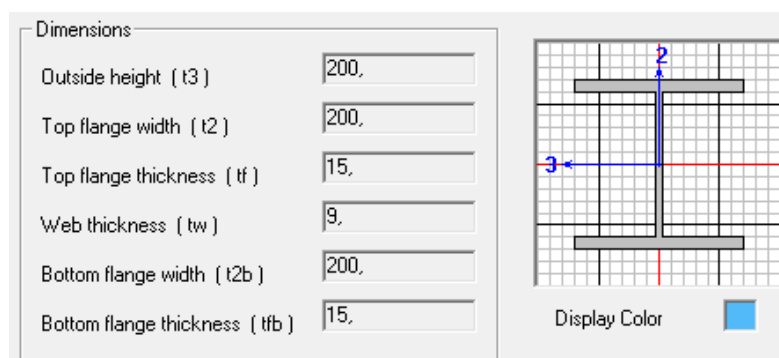


Figura 3. Geometría del perfil HEB200

Properties			
Cross-section (axial)	7810,	Section modulus about	569600,
Moment of Inertia about	56960000	Section modulus about 2	200300,
Moment of Inertia about	20030000	Plastic modulus about 3	643000,
Product of Inertia about	0,	Plastic modulus about 2	306000,
Shear area in 2	1800,	Radius of Gvration about	85,4003
Shear area in 3	5000,	Radius of Gvration about 2	50,6425
Torsional constant	597000,	Shear Center Eccentricity	0,

Figura 4. Propiedades del perfil HEB200

Para garantizar que el perfil elegido para las jácenas admite plastificación, éste ha de pertenecer a la Clase 1 según el Eurocódigo 3. Conocidos el tipo de viga que componen los pilares, la relación existente entre los módulos plásticos de jácenas y pilares y aplicando el Eurocódigo 3 mencionado se obtiene qué perfil cumple con los requisitos. En la Tabla 1 se detallan los requisitos que han de cumplir los perfiles para pertenecer a cada clase. Introduciendo en la Tabla 1 los datos del perfil que se muestran en la Tabla 2 se observa que dicho perfil se clasifica dentro de la Clase 1.

Tabla 1. Clasificación de los perfiles según el Eurocódigo 3

Clases	Límites { tabla 6,1 }		Esbelteces			
			Sección 1		Sección 2	
	Ala	Alma	Ala	Alma	Ala	Alma
	$k_{esb} * e$	$k_{esb} * e$	c / t_f 7,96	c_w / t_w 20,7150	c / t_f 1,00	c_w / t_w 1
Clase 1	8,32	66,56	x	x	x	x
Clase 2	9,24	76,7
Clase 3	12,9	115
Clase 4	> clase 3	> clase 3
Clasificación			1		1	

Tabla 2. Datos del perfil analizado con el Eurocódigo 3

Sección	I
c_f [mm]	95,5
t_f [mm]	12
c_w [mm]	248,6
t_w [mm]	12
b [mm]	220
h [mm]	325,5

El perfil elegido es, de acuerdo con lo anterior, una viga armada H295,5x220. Su geometría y propiedades se muestran en las Figuras 5 y 6. Las unidades de ambas figuras están dadas en mm.

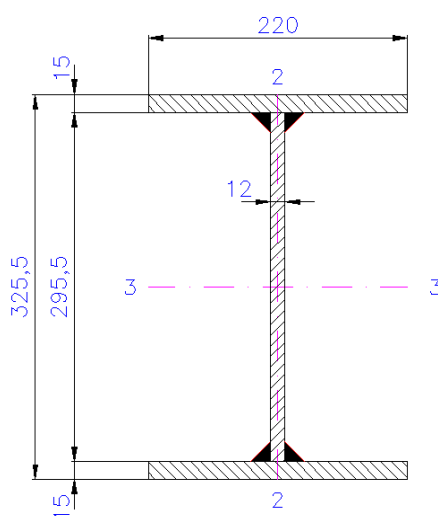


Figura 5. Geometría del perfil de la viga armada de 295,5x220

Properties			
Cross-section (axial)	10146,	Section modulus about	1136736,1
Moment of Inertia about	1,850E+08	Section modulus about 2	242386,84
Moment of Inertia about	26662552	Plastic modulus about 3	1286610,8
Product of Inertia about	0,	Plastic modulus about 2	373638,
Shear area in 2	3863,0793	Radius of Gyration about	135,0339
Shear area in 3	6109,1617	Radius of Gyration about 2	51,2629
Torsional constant	666637,9	Shear Center Eccentricity	0,

Figura 6. Propiedades del perfil H295,5x220

Se observa que el módulo plástico del perfil HEB200 es 643000mm^3 (Figura 4) mientras que el de la viga armada 295,5x200 es 1286610mm^3 (Figura 6), por lo que se cumple que el segundo es el doble que el primero.

Los tipos de perfiles que constituyen la estructura teniendo en cuenta todo lo anterior se muestran en la Figura 7.

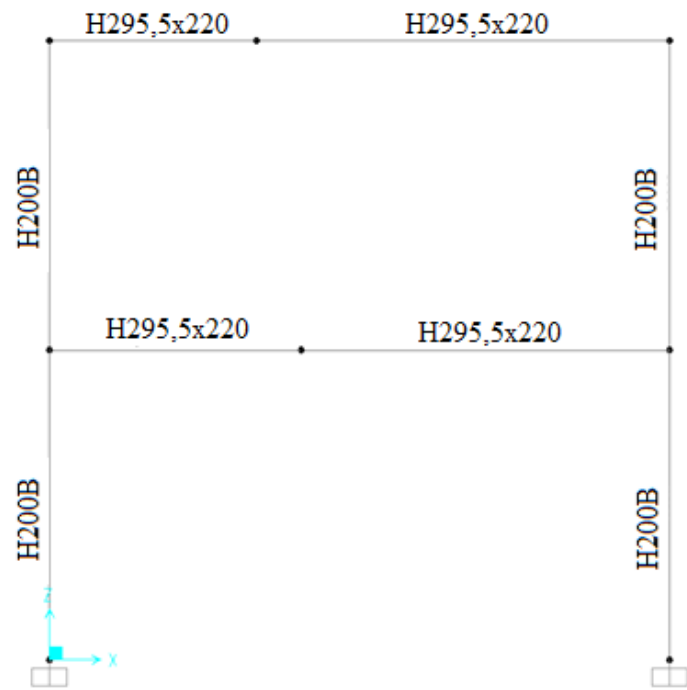


Figura 7. Perfiles que forman la estructura

2. Conceptos generales

2.1. Comportamiento elástico y plástico

El diseño elástico se basa en que al aplicar ciertas cargas sobre una estructura, ningún punto de la misma sobrepasa el límite elástico del material del que está compuesta y, por tanto, la retirada de las cargas lleva consigo una vuelta de la estructura al estado inicial indeformado. En el momento en que algún punto sobrepasa dicho límite, se producen fenómenos de fluencia plástica. Si la carga se sigue incrementando y llega hasta la carga última que la estructura es capaz de soportar, se produce el colapso.

Las cargas que producen el inicio de la fluencia pueden ser determinadas mediante el análisis elástico, sin embargo es necesario recurrir a las hipótesis de cálculo plástico para determinar la resistencia de la estructura desde que aparece el primer punto de plastificación hasta que se produce el colapso.

2.2. Hipótesis consideradas

2.2.1. Modelo elastoplástico

El material con el que se va a trabajar es el acero, cuyas propiedades se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Propiedades del acero

Material	Acero
σ_Y	275 MPa
Módulo de Young, E	210 GPa
Módulo de cizalla, G	150 GPa
Coeficiente de Poisson, ν	0,3

En la Figura 8 se observa la curva de tensión-deformación de este material en el ensayo de tracción. Se pueden observar diferentes zonas¹.

- Zona elástica lineal O-A: al descargar la probeta se recupera y vuelve a su estado inicial.
- Zona de fluencia A-B: transición entre la zona elástica y plástica.

¹ M. R. Dalmau y J. Vilardell (2003). "Análisis plástico de estructuras. Introducción"

- Zona plástica B-C: la probeta se deforma plásticamente y al retirar la carga conserva un alargamiento remanente.
- Zona de endurecimiento por deformación C-D: la probeta sigue deformándose plásticamente pero es necesario aumentar la carga para conseguir el alargamiento.
- Zona de estricción D-E: la probeta se sigue alargando con una fuerte contracción en el punto donde finalmente se produce la rotura

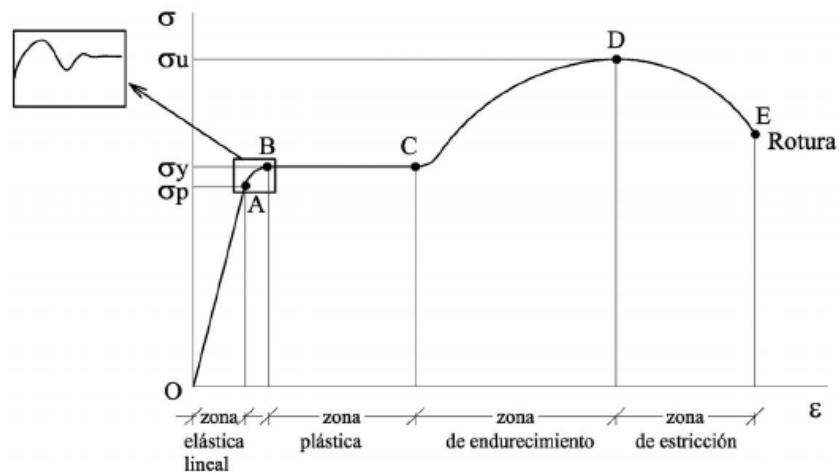


Figura 8. Curva tensión-deformación acero

Con el objetivo de simplificar los efectos producidos por la carga y descarga del material, se va a considerar que el comportamiento del material es elastoplástico ideal. La curva de tensión-deformación para este caso se observa en la Figura 9. A diferencia del comportamiento real, en la simplificación elastoplástica no se tiene en cuenta el límite de fluencia superior, el endurecimiento por deformación ni el efecto Bauschinger. El material elastoplástico ideal tiene por tanto un comportamiento lineal hasta alcanzar la tensión de fluencia a partir de la cual no puede soportar más carga y las deformaciones aumentan en forma ilimitada manteniéndose la carga constante.

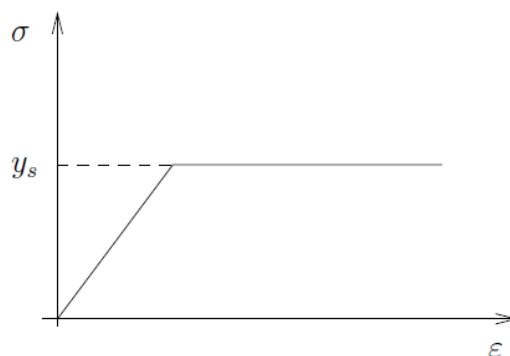


Figura 9. Modelo de comportamiento elastoplástico ideal

2.3. Teoría elemental de flexión plástica de vigas

2.3.1. Principio de plastificación

Las hipótesis que rigen la teoría de la flexión simple de vigas en régimen elástico se enuncian a continuación:

- a) El alargamiento de cada fibra longitudinal es proporcional a su distancia al eje neutro
- b) El material es elástico lineal
- c) Las deformaciones son lo bastante pequeñas para que pueda admitirse que la curvatura cumple que $\phi \sim \text{tg} \phi$
- d) El sistema de fuerzas internas actuante en una sección de la viga, de área A equivale a una función normal de valor

$$\int_A \sigma dA$$

y a un par de fuerzas cuyo momento M es

$$\int_A y \sigma dA$$

donde y es la distancia al eje neutro y σ es la distribución de esfuerzos en la sección, de modo que

$$\sigma = -\frac{M}{I} y$$

Para el caso de la teoría de flexión plástica de vigas, las hipótesis anteriores siguen siendo válidas pero modificando la hipótesis b) ya que ahora el material se va a considerar elastoplástico perfecto, cuyas propiedades se han detallado en el apartado anterior.

Se considera una viga de sección rectangular constituida por un material elastoplástico perfecto. Esta viga se somete a un momento flector M que se va a aumentar paulatinamente desde 0. Mientras el material se encuentre en régimen elástico (Figura 10.a) el esfuerzo máximo en esa sección puede calcularse como $\sigma_{\max} = M/W$ siendo W el módulo resistente. Cuando el momento flector alcanza el valor de M_Y (Figura 10.b), que es el llamado momento de fluencia, comienza la plastificación de las fibras externas de la sección y en ellas $\sigma = \sigma_y$. Si M sigue aumentando por encima de M_Y , como se muestra en la Figura 10.c, las zonas externas de la sección van plastificando mientras que el núcleo permanece en régimen elástico. Conforme el valor de M se incrementa más, la zona plastificada se va agrandando hacia el eje neutro hasta que llega el momento en que se alcanza el valor de M_p (Figura 10.d), que es el momento plástico para el cual toda la

sección está ya plastificada y la carga que lo provoca se denomina carga última o de agotamiento y es la que provoca el colapso.²

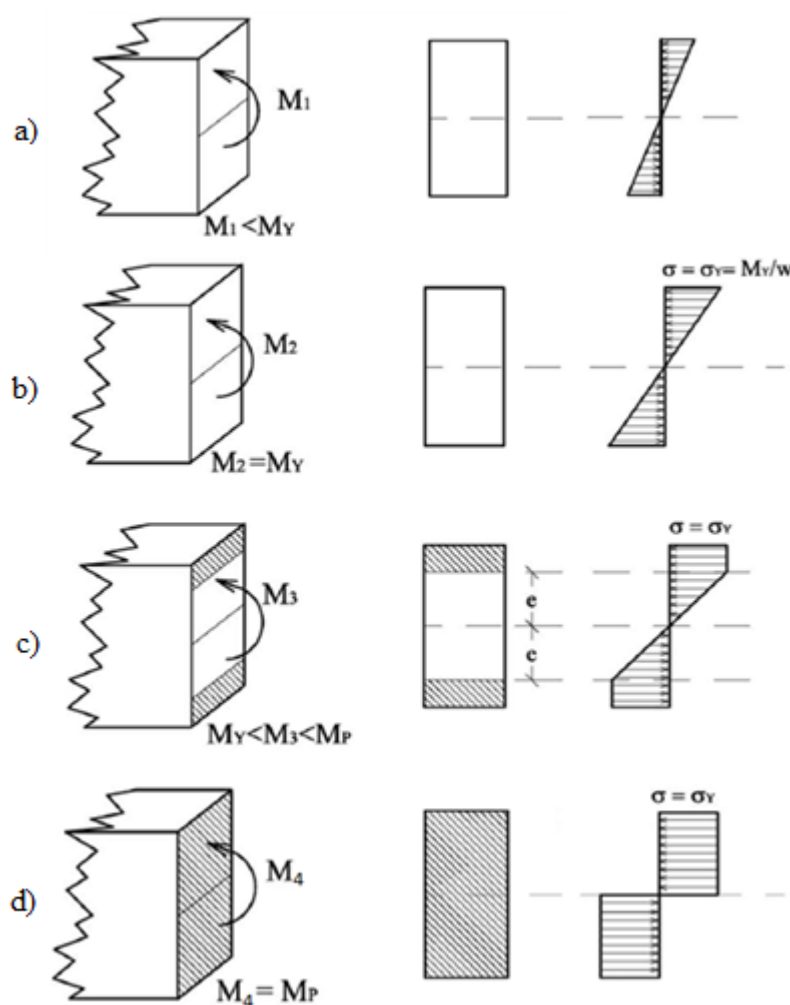


Figura 10. Proceso de plastificación de una sección rectangular

2.3.2. Relación momento-curvatura

La relación existente entre el momento flector aplicado y la curvatura producida para una viga de diferentes secciones se muestra en la Figura 11. Todas las curvas representadas cuentan con un tramo recto desde el origen hasta $M/M_Y=1$, que se corresponde con el comportamiento elástico lineal del material. A continuación se produce una porción curva que representa el momento en que el material es parcialmente elástico y parcialmente plástico y que tiende al valor $M_P/M_Y=f$, al que correspondería un valor de la curvatura ϕ/ϕ_Y que tiende a infinito y que corresponde al caso de plastificación total. Se denomina factor de forma al valor f , que es función de la forma de la sección transversal.

² M. R. Dalmau y J. Vilardell (2003). "Análisis plástico de estructuras. Introducción"

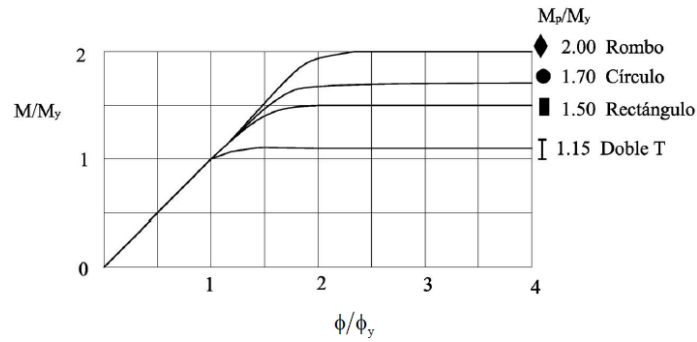


Figura 11. Relación momento-curvatura de algunas secciones

En el caso que nos ocupa, es decir, para una viga en doble T se observa en la Figura 12 que el factor de forma es pequeño y por tanto el paso de comportamiento elástico a plastificación total se produce rápidamente. Es decir, las vigas en doble T llegan a la situación de rotación ilimitada casi repentinamente una vez alcanzada la fluencia de las fibras exteriores, lo que permite idealizar la curva momento-curvatura suponiendo por tanto que la sección se comportará elásticamente justo hasta el momento en que plastifica completamente.

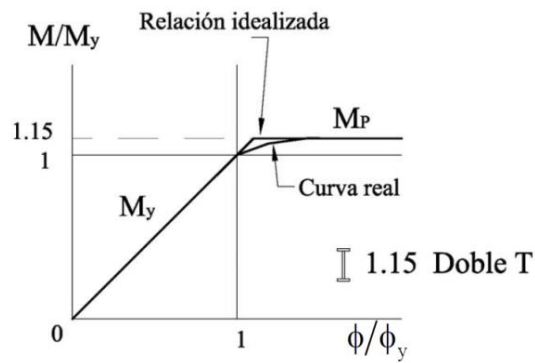


Figura 12. Relación momento-curvatura de una sección en doble T

3. Cálculo elástico

Para la realización del análisis elástico lineal de la estructura, se ha utilizado el programa MEFI. De este modo, se va a simular la estructura aplicando la carga P máxima que garantice que ningún punto de la estructura plastifica y por lo tanto, asegurando que toda la estructura se comporta de manera elástica.

En la Figura 13 se muestran las cargas máximas admisibles que aseguran el comportamiento elástico expresadas en kg y kg/m para las cargas puntuales y distribuidas respectivamente.

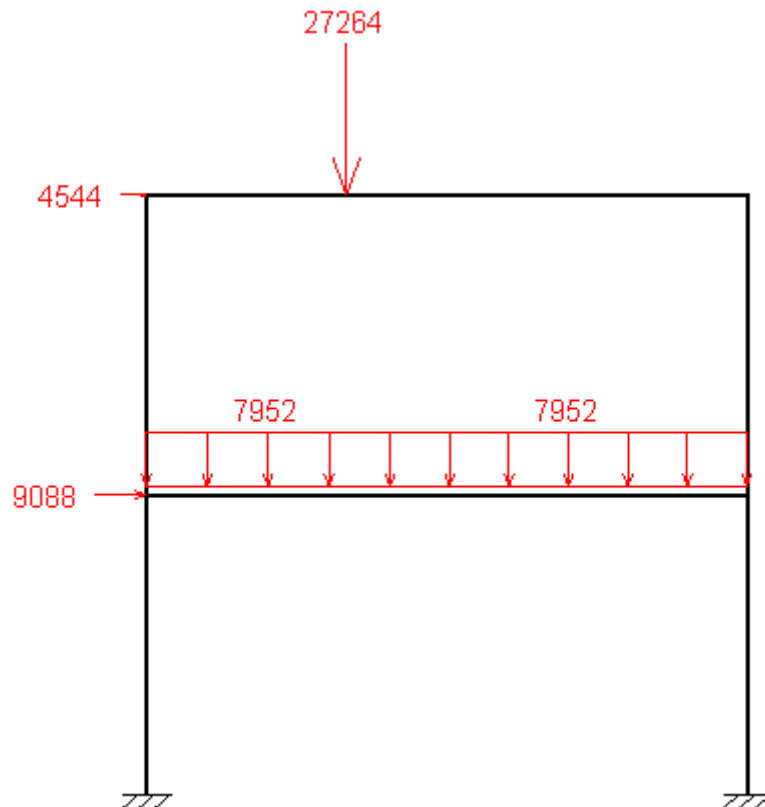


Figura 13. Cargas máximas en comportamiento elástico

Durante el proceso incremental de carga, la estructura se comporta de manera elástica hasta el momento en que algún punto de la misma alcanza el límite elástico. En ese momento la sección empieza a plastificar abandonando la estructura el comportamiento elástico. La carga que produce una tensión igual a tensión límite elástica es $P=4544$ kg.

Los diagramas de los momentos flectores resultantes para las cargas aplicadas se observan en la Figura 14. Al aplicar la carga de 4544 kg, el punto superior del pilar inferior derecho alcanza el valor del momento elástico de una sección HEB200, cuyo

valor es $M_{e \text{ HEB200}} = 15972 \text{ kgm}$. Por lo tanto, en el momento en que ese punto de la estructura ha alcanzado el momento elástico máximo, la estructura deja de comportarse elásticamente.

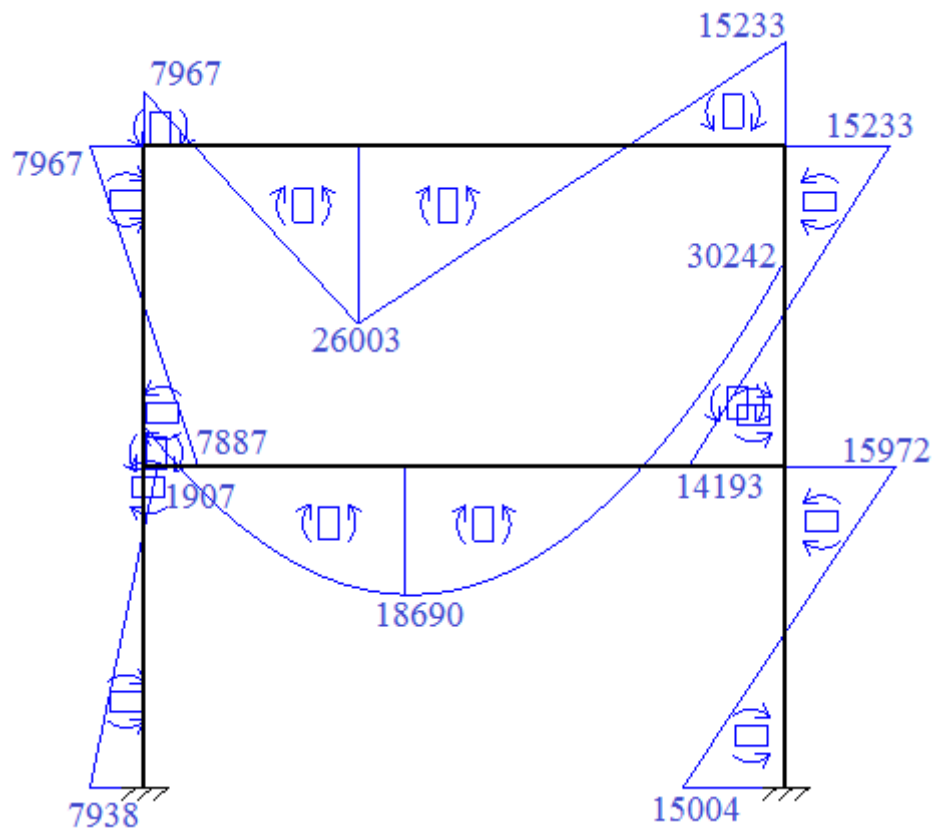


Figura 14. Diagramas de momentos flectores del estado elástico

Por lo tanto, de este análisis se concluye que con la aplicación de cargas menores o iguales a $P=4544 \text{ kg}$ se puede asegurar que toda la estructura en su totalidad va a trabajar de manera elástica lineal y por tanto, no se va a producir el fenómeno de la plastificación en ninguno de sus puntos.

4. Cálculo plástico

Una vez realizado el cálculo elástico de la estructura, se va a proceder al cálculo plástico de la misma a través de diferentes métodos con el objetivo de obtener el mecanismo de colapso final y la carga última.

Al realizar el estudio de una estructura sometida a un estado de carga creciente, se comienza trabajando en fase elástica hasta que se produce la primera rótula plástica. A partir de ese momento, ese punto entra en fase plástica y por tanto tendrá un valor igual y constante a M_p mientras que el resto de la estructura continuará trabajando en fase elástica hasta que se produzca la siguiente rótula y así sucesivamente hasta que finalmente se produzca el colapso.

4.1. Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales

En primer lugar, se va a utilizar el Principio de los Trabajos Virtuales para conocer cuál va a ser el mecanismo que producirá el colapso de la estructura. Este método consiste en la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales como ecuación de equilibrio a todos los mecanismos posibles que se puedan producir en la estructura, y calcular para cada uno de ellos su carga última. De este modo, el mecanismo cuya carga última sea inferior será el mecanismo de colapso. Este análisis ha de aplicarse no solo a los mecanismos independientes que existen, sino también a las posibles combinaciones entre ellos.

4.1.1. Secciones críticas

Se considera que los puntos en los que es posible localizar la formación de rótulas plásticas son los siguientes:

- a) Los empotramientos, los nudos rígidos y las uniones no articuladas donde concurren dos o más elementos.
- b) Los apoyos intermedios de las vigas continuas.
- c) Los puntos de aplicación de las cargas concentradas
- d) Bajo cargas distribuidas, a partir de los puntos donde el momento flector es máximo.

Para el caso estudiado, los puntos de posible formación de rótulas son, siguiendo lo considerado anteriormente, el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12, marcados en la Figura 15.

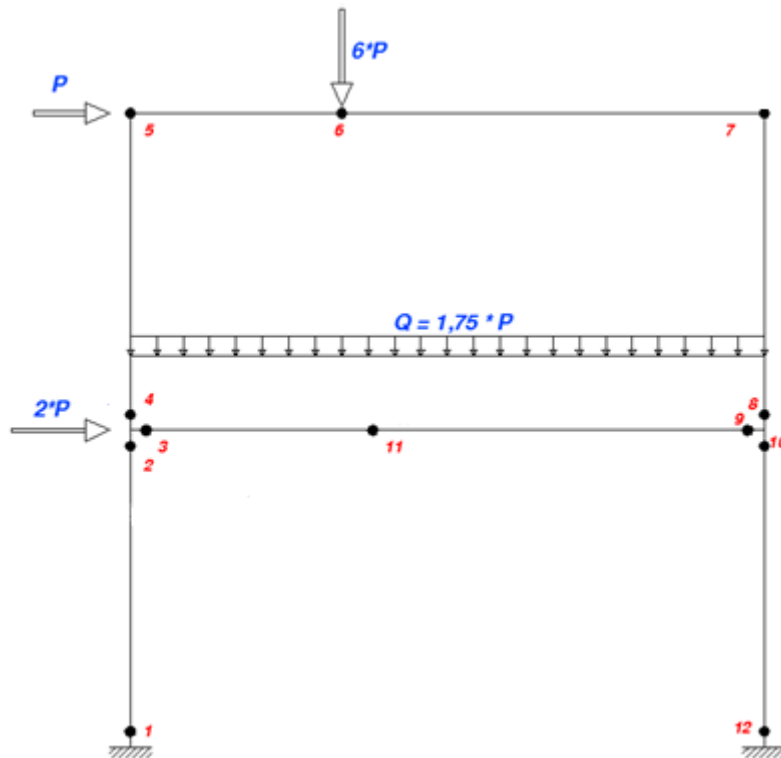


Figura 15. Secciones críticas de la estructura

4.1.2. Mecanismos independientes

El número de mecanismos independientes existentes es igual al número de secciones críticas menos el grado de hiperestatismo, es decir

$$\text{Nº mecanismos independientes} = \text{Secciones críticas} - \text{GH}$$

En este caso, se ha visto que el número de secciones críticas es 12 y que el grado de hiperestaticidad es 6, por lo que existe un total de 6 mecanismos independientes posibles. Como se muestra en la Figura 16, existen dos mecanismos independientes de viga (Figura 16.a y 16.b), dos de marco (Figura 16.c y 16.d) y dos de nudo (Figura 16.e y 16.f).

El número de mecanismos independientes de la estructura coincide con el número de ecuaciones de equilibrio independientes.

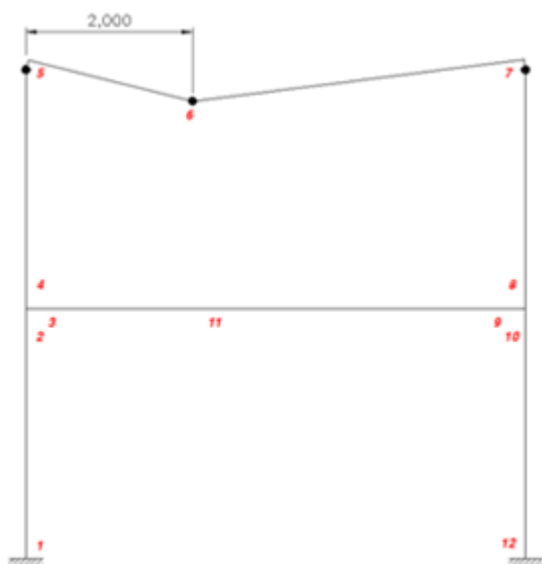


Figura 16. a. Mecanismo de viga 1

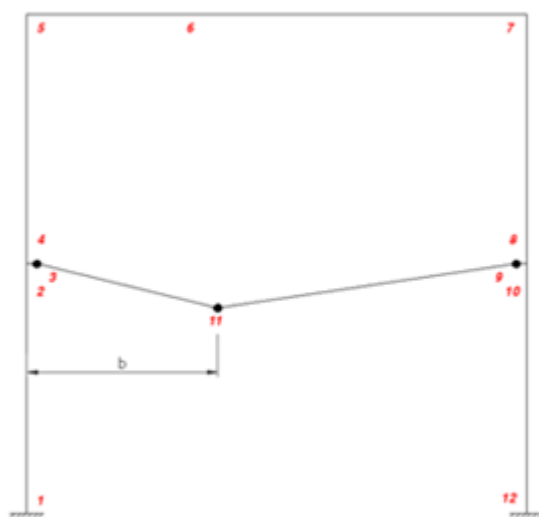


Figura 16. b. Mecanismo de viga 2

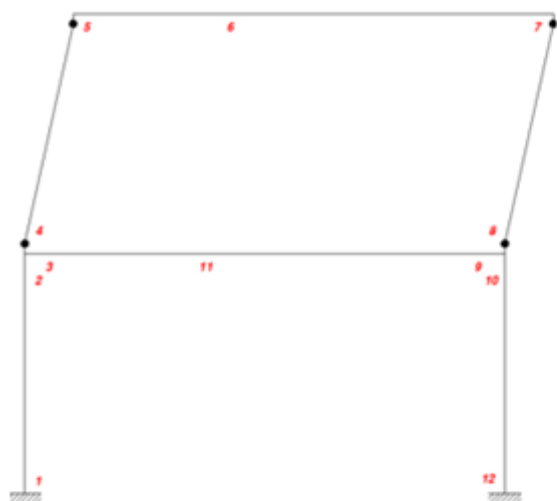


Figura 16. c. Mecanismo de marco 1

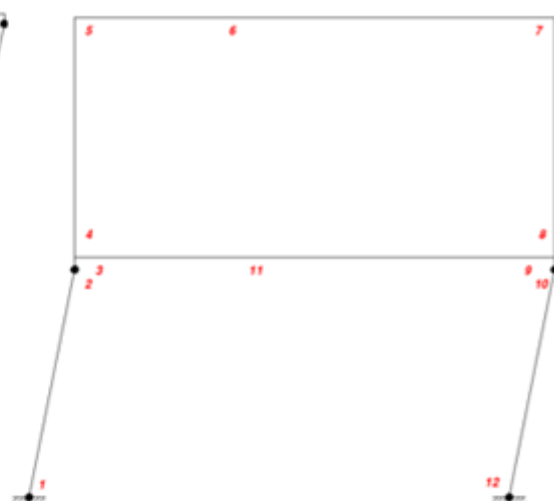


Figura 16. d. Mecanismo de marco 2

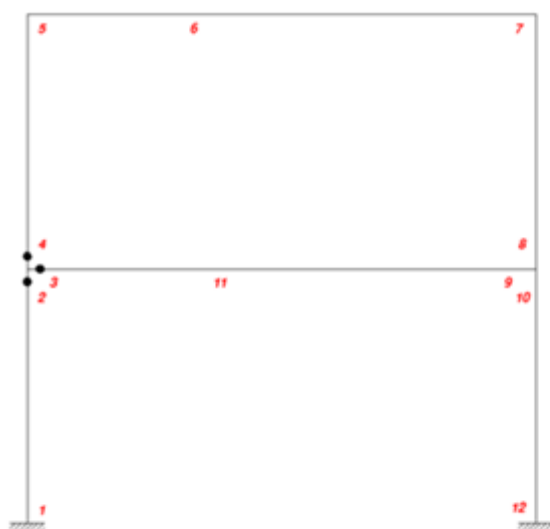


Figura 16. e. Mecanismo de nudo 1

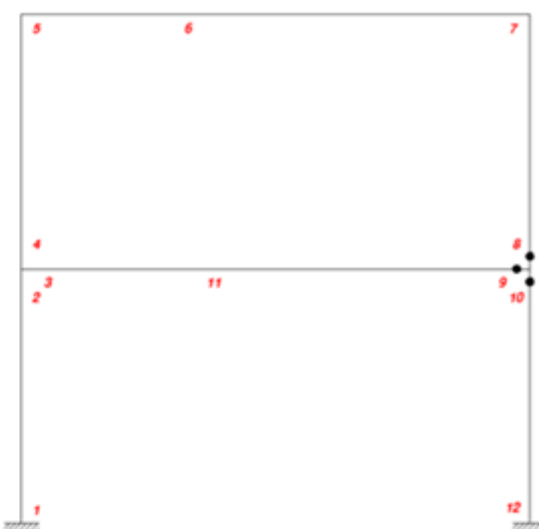


Figura 16. f. Mecanismo de nudo 2

Figura 16. Mecanismos independientes

4.1.3. Mecanismos combinados

Además de los mecanismos independientes, hay que analizar los mecanismos que se producen con las diferentes combinaciones de los anteriores. Existen 11 mecanismos combinados y algunos de ellos se muestran en la Figura 17.

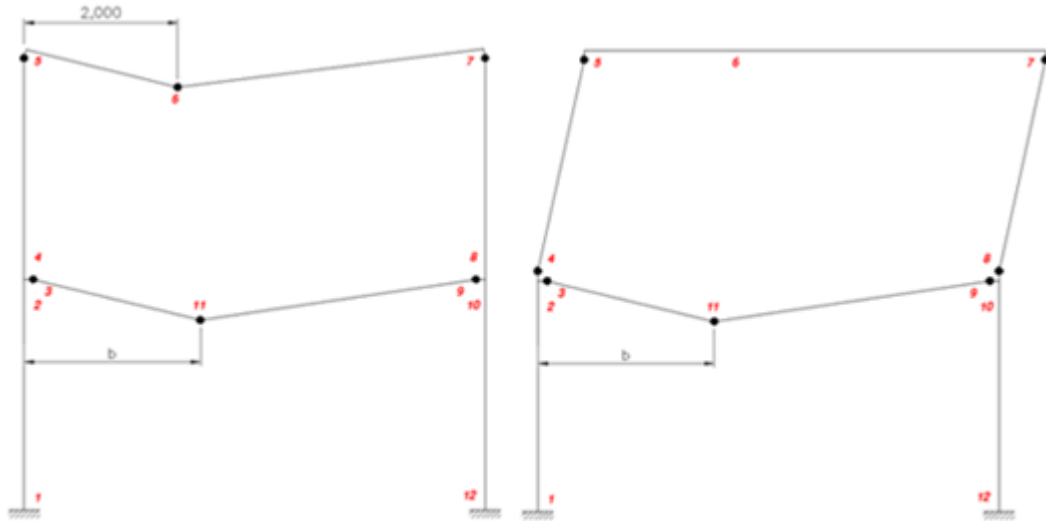


Figura 17. a. Mecanismo 1+2

Figura 17. b. Mecanismo 2+3

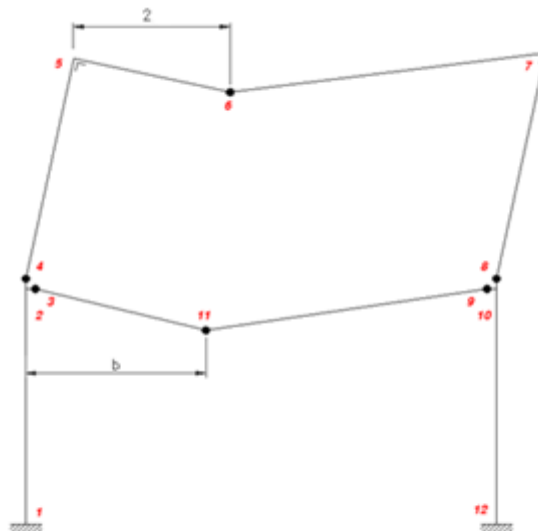


Figura 17. c. Mecanismo 1+2+3

Figura 17. Mecanismos combinados

4.1.4. Mecanismo de colapso

Una vez analizados todos los posibles mecanismos, se ha de aplicar el principio de los trabajos virtuales, de modo que

$$W_{\text{externo}} = W_{\text{interno}} \quad (4.1)$$

En la Tabla 4 se resume la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales a los 16 mecanismos considerados. Se observa que el mecanismo cuya menor carga última soporta es el mecanismo 17, que resulta de la combinación de los mecanismos independientes 1, 2, 3 y 4, y éste será por tanto el mecanismo de colapso. Ver Anexo I para más detalle.

Tabla 4. Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales a cada mecanismo

Mecanismo	Combinación	Trabajo W_e de las cargas y trabajo W_i de las fuerzas internas	P_u
1	-	$W_{int} = 4,5Mp\theta$	0,375
		$W_{ext} = 12Pu\theta$	
2	-	$W_{int} = 6,73Mp\theta$	0,527
		$W_{ext} = 12,78Pu\theta$	
3	-	$W_{int} = 4Mp\theta$	1,333
		$W_{ext} = 3Pu\theta$	
4	-	$W_{int} = 4Mp\theta$	0,444
		$W_{ext} = 9Pu\theta$	
7	1 y 2	$W_{int} = 11,23Mp\theta$	0,453
		$W_{ext} = 24,78Pu\theta$	
8	1 y 3	$W_{int} = 5,5Mp\theta$	0,367
		$W_{ext} = 15Pu\theta$	
9	1 y 4	$W_{int} = 8,5Mp\theta$	0,405
		$W_{ext} = 21Pu\theta$	
10	2 y 3	$W_{int} = 10,73Mp\theta$	0,367
		$W_{ext} = 15,78Pu\theta$	
11	2 y 4	$W_{int} = 10,73Mp\theta$	0,493
		$W_{ext} = 21,78Pu\theta$	
12	3 y 4	$W_{int} = 8Mp\theta$	0,667
		$W_{ext} = 12Pu\theta$	
13	1, 2 y 3	$W_{int} = 12,232Mp\theta$	0,44
		$W_{ext} = 27,784Pu\theta$	
14	1, 2 y 4	$W_{int} = 15,232Mp\theta$	0,451
		$W_{ext} = 33,784Pu\theta$	
15	1, 3 y 4	$W_{int} = 9Mp\theta$	0,375
		$W_{ext} = 24Pu\theta$	
16	2, 3 y 4	$W_{int} = 10,73Mp\theta$	0,433
		$W_{ext} = 24,78Pu\theta$	
17	1, 2, 3 y 4	$W_{int} = 13,23Mp\theta$	0,35997
		$W_{ext} = 36,78 Pu$	

Para el mecanismo de colapso hallado se obtiene que $P_u = 0.35977M_p$. Sustituyendo M_p por el valor del momento plástico de la sección, que es 18.031kgm se obtiene el valor de la carga última

$$P_u = \frac{13,23}{36,78} M_p = 0,35977 M_p = 6487 \text{ kg}$$

Así, la carga última que puede soportar la estructura antes del colapso es de 6487 kg.

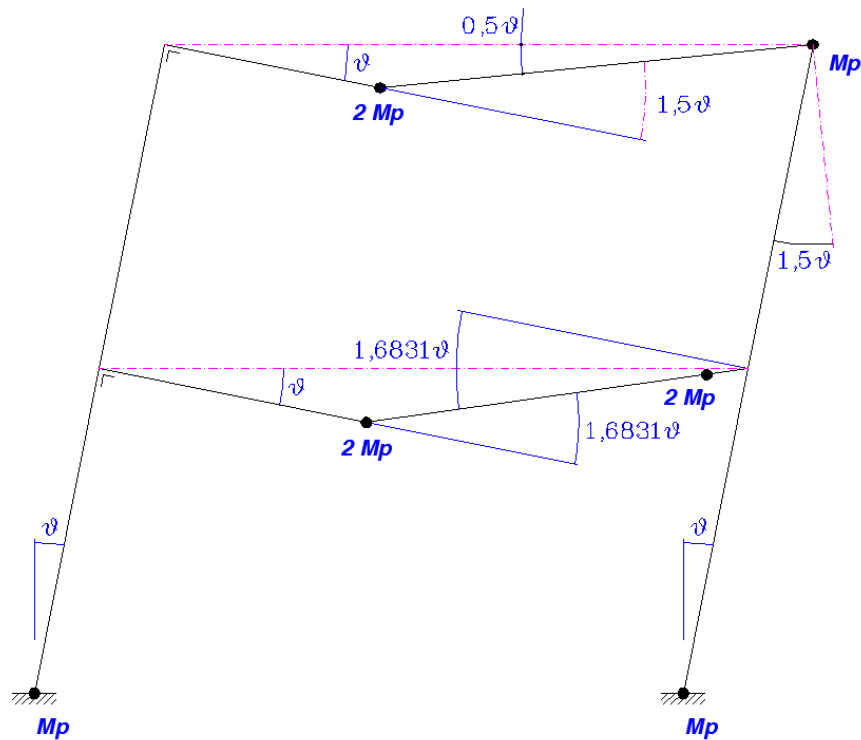


Figura 18. Mecanismo de colapso

4.2. Método directo: Método estático

Mediante la aplicación de los métodos directos es posible conocer cuál va a ser el mecanismo de colapso de una estructura y la carga final que lo produce sin necesidad de analizar su progresión plástica. Para ello es necesario únicamente hacer uso de las condiciones de equilibrio.

Dentro de los diferentes métodos directos que existen, el método estático es el que va a ser utilizado en este caso. Este método consiste en la utilización de las ecuaciones de equilibrio estático de manera sistemática.

Para ello, se determinan los puntos de posible formación de rótulas plásticas y se liberan tantas condiciones de apoyo como grado de hiperestaticidad tenga la estructura. En este caso se van a liberar las 6 condiciones de apoyo que se observan en la Figura 19: R, S T, X Y y Z.

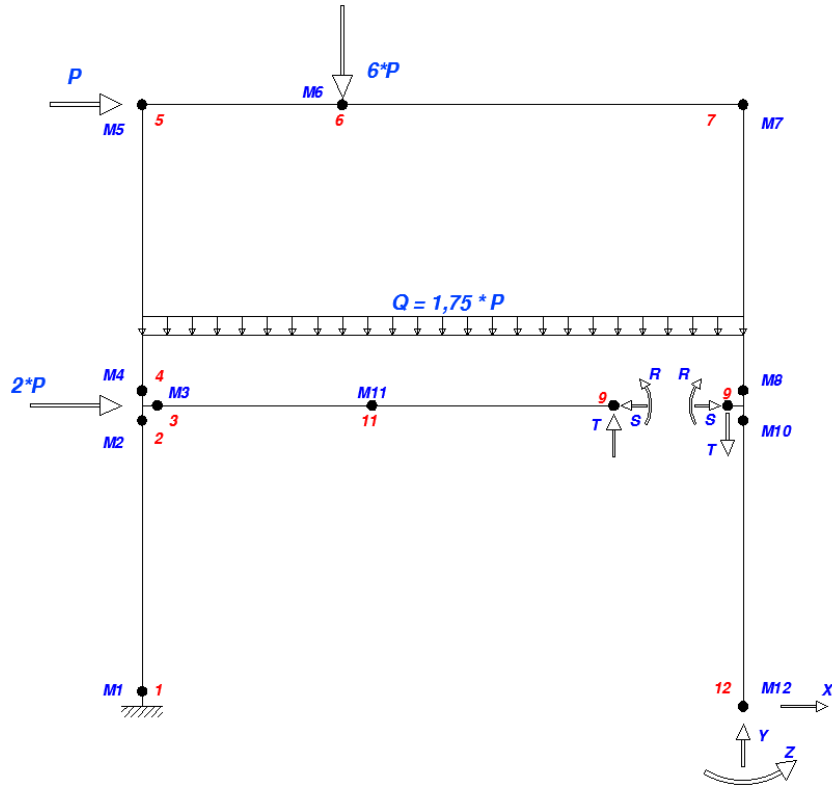


Figura 19. Incógnitas hiperestáticas

A partir del planteamiento de las 12 ecuaciones que relacionan las incógnitas hiperestáticas con los momentos (inicialmente desconocidos) en los puntos de posible formación de rótulas y trabajando sobre ellas, se obtienen las 6 ecuaciones de equilibrio que rigen la estructura estudiada. Véase Anexo II para observar el cálculo detallado de dichas ecuaciones.

Las ecuaciones de equilibrio de momentos son las siguientes

$$\begin{aligned}
 -M_5 + 1,5 M_6 - 0,5 M_7 &= 12 P \\
 -M_3 + 6M_{11}/(6 - b) - bM_9/(6 - b) &= 5,25 P b \\
 -M_4 + M_5 - M_7 + M_8 &= 3 P \\
 -M_1 + M_2 - M_{10} + M_{12} &= 9 P \\
 M_2 - M_3 - M_4 &= 0 \\
 M_8 + M_9 - M_{10} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

y cualquier distribución de momentos que satisfaga las ecuaciones anteriores será estáticamente admisible.

Supuesto, por tanto, el mecanismo de colapso hallado anteriormente mediante el Principio de los Trabajos Virtuales, se ha de dar el valor de $\pm M_p$ a los puntos en los que se van a producir las rótulas. En este caso, como las jácenas tienen el doble módulo plástico que los pilares, se aplicará $\pm 2M_p$ en las rótulas de las jácenas y $\pm M_p$ en las rótulas de los pilares.

Los valores que caracterizan el colapso son, por tanto, los siguientes

$$\begin{aligned}
M_1 &= -M_p \\
M_6 &= +2M_p \\
M_7 &= -M_p \\
M_9 &= -2M_p \\
M_{10} &= -M_p \\
M_{11} &= +2M_p \\
M_{12} &= +M_p
\end{aligned}$$

Se sustituye a continuación los valores anteriores en las ecuaciones de equilibrio y los momentos incógnita quedan en función de M_p , P y el valor b que es la distancia a la que se va a formar la rótula de la jácena de la primera planta en la cual actúa la carga distribuida.

$$\begin{aligned}
M_8 &= M_p \\
M_5 &= 3,5M_p - 12 P \\
M_4 &= 5,5M_p - 15 P \\
M_3 &= 2M_p \left(\frac{6+b}{6-b} \right) - 5,25 P b \\
M_2 &= -3M_p + 9 P \\
P &= \frac{M_p(63 - 6,5b)}{-5,25b^2 + 7,5b + 144}
\end{aligned}$$

Para obtener el valor de b se ha de derivar la expresión de P obtenida en función de b y se ha de igualar a 0. De este modo, se obtiene el punto donde el valor es máximo y ese punto será por tanto, el buscado.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{db} = 0 &\rightarrow \frac{-6,5M_p(-5,25b^2 + 7,5b + 144) - M_p(63 - 6,5b)(-5,25b + 7,5)}{(-5,25b^2 + 7,5b + 144)^2} = 0 \\
b &= 2,43516
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de b en la ecuación de P se obtiene la carga última P_u :

$$\begin{aligned}
P_u &= \frac{M_p(63 - 6,5 * 2,43516)}{-5,25 * 2,43516^2 + 7,5 * 2,43516 + 144} = 0,35977M_p \\
&= 0,35977 \cdot 18031 = 6487,04 \text{ kg}
\end{aligned}$$

que como se puede observar, es igual a la carga última obtenida con la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales.

Para poder garantizar que el mecanismo de colapso calculado es el mecanismo de colapso real, hay que verificar que todos los momentos flectores sean iguales o menores a los momentos plásticos, es decir, menores a $2M_p$ en las jácenas y M_p en los pilares en valor absoluto. Los valores de todos los momentos del mecanismo estudiado se observan en la Tabla 5.

Tabla 5. Valor de los momentos en cada sección

Sección	Momento flector	Momento plástico	¿Cumple?
1	-18031	± 18031	Sí
2	4245	± 18031	Sí
3	2213	± 36062	Sí
4	2032	± 18031	Sí
5	-14644	± 18031	Sí
6	36062	± 36062	Sí
7	-18031	± 18031	Sí
8	18031	± 18031	Sí
9	-36062	± 36062	Sí
10	-18031	± 18031	Sí
11	36062	± 36062	Sí
12	18031	± 18031	Sí

Se verifica por tanto, que ningún momento sobrepasa los valores mencionados y por lo tanto, este mecanismo es el mecanismo solución del problema. Se observan en la Figura 20 los diagramas de momentos flectores de este mecanismo en el momento del colapso.

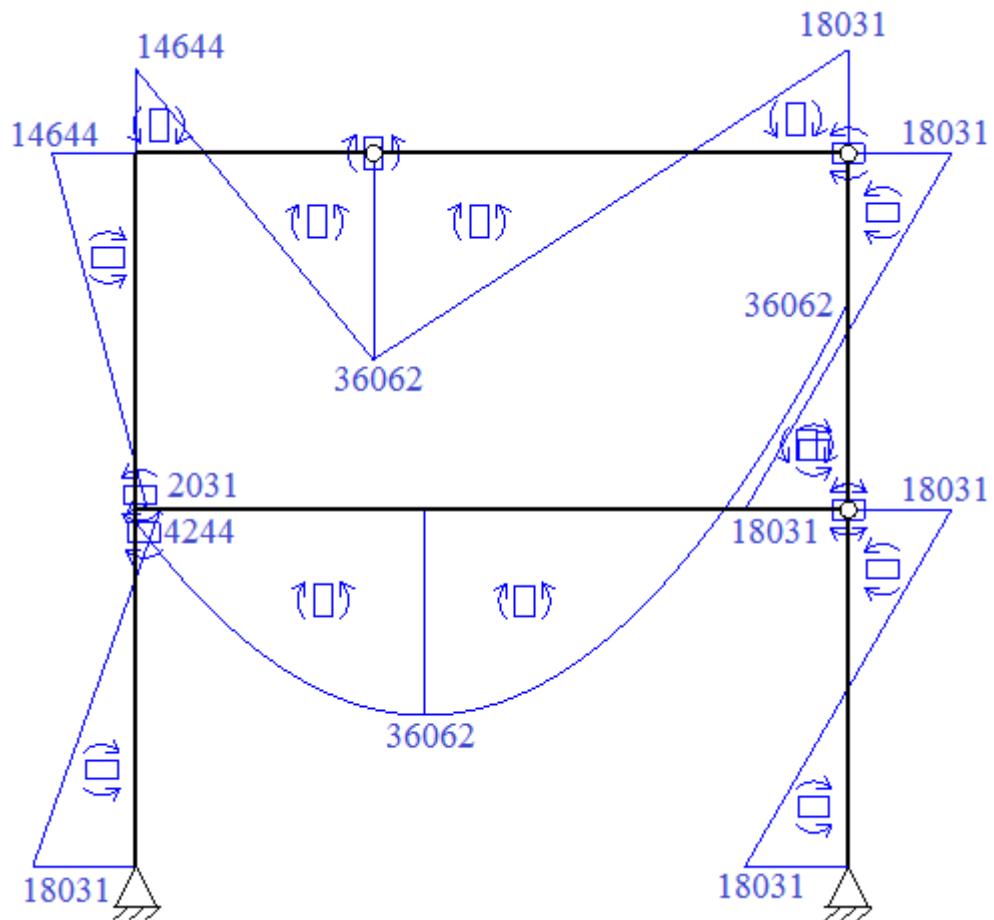


Figura 20. Diagramas de momentos del mecanismo de colapso

4.3. Método paso a paso

En el apartado anterior, mediante el método directo estático se ha obtenido el mecanismo de colapso de la estructura sin estudiar el progresivo proceso de plastificación. El método paso a paso, sin embargo, permite analizar la sucesiva formación de las rótulas desde la fase elástica hasta que se produce el mecanismo de colapso.

En el caso que nos concierne, se tiene como ya se ha comentado anteriormente una estructura hiperestática y por lo tanto, la formación de una sola rótula plástica no implica el colapso de la estructura, sino que será necesaria la formación de 7 rótulas para que se produzca el colapso.

Dado el tipo de pórtico a estudiar y de las cargas que le son aplicadas, existen 12 secciones críticas donde es posible la formación de las rótulas. Se tiene por tanto doce valores de momentos flectores que estarán ligados mediante las seis ecuaciones de equilibrio ya halladas en el método directo y serán necesarias otras seis ecuaciones de compatibilidad para la resolución del problema.

Las ecuaciones de compatibilidad necesarias se van a obtener mediante el Principio de los Trabajos Virtuales. Para ello, se han de elegir sistemas de fuerzas virtuales en los que las cargas exteriores sean nulas. La ecuación a aplicar se puede expresar como

$$0 = \int_E m^* \chi ds + \sum_E m^* \phi \quad (4.3)$$

Donde m^* son los momentos correspondientes al sistema virtual y χ y ϕ son las curvaturas y giros de la estructura real, respectivamente. Teniendo en cuenta la relación entre momento y curvatura, la ecuación (4.3) puede escribirse como

$$0 = \int_E \frac{m^* M}{E I} ds + \sum_E m^* \phi \quad (4.4)$$

En el caso de las cargas puntuales, tanto los valores de m^* como de M en la integral de (4.4) varían linealmente, y dicha ecuación queda

$$\int_A^B \frac{m^* M}{E I} ds = \frac{L}{6 E I} [m_A^* (2 M_A + M_B) + m_B^* (M_A + 2 M_B)] \quad (4.5)$$

Sin embargo, en el caso de una carga distribuida, m^* varía linealmente mientras que M es una función cuadrática. En este caso la ecuación (4.3) resulta

$$\int_A^B \frac{m^* M}{E I} ds = \frac{L}{6 E I} [m_A^* (2 M_A + M_B) + m_B^* (M_A + 2 M_B)] + \frac{q L^3}{24 E I} (m_A^* + m_B^*) \quad (4.6)$$

Ver Anexo III para ver la deducción de las ecuaciones 4.5 y 4.6

A partir de las ecuaciones 4.5 y 4.6 se van a plantear 6 sistemas de momentos virtuales m^* de carga nula, con la única condición de que satisfagan las ecuaciones de equilibrio. Es decir:

$$\begin{aligned}
& -m_5^* + 1,5 m_6^* - 0,5 m_7^* = 0 \\
& -m_3^* - \frac{b}{6-b} m_9^* + \frac{6}{6-b} m_{11}^* = 0 \\
& -m_4^* + m_5^* - m_7^* + m_8^* = 0 \\
& -m_1^* + m_2^* - m_{10}^* + m_{12}^* = 0 \\
& m_2^* - m_3^* - m_4^* = 0 \\
& m_8^* + m_9^* - m_{10}^* = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Para su resolución, hay que elegir 6 sistemas virtuales que satisfagan esas ecuaciones. Los sistemas elegidos así como las ecuaciones que se obtienen se muestran a continuación. Ver Anexo III para más detalle.

- Sistema 1: $m_2^* = m_3^* = m_8^* = m_9^* = 0$; $m_1^* = m_5^* = 1$
- Sistema 2: $m_3^* = m_5^* = m_7^* = m_9^* = m_{12}^* = 0$; $m_8^* = 1$
- Sistema 3: $m_2^* = m_3^* = m_9^* = m_{12}^* = 0$; $m_5^* = m_6^* = 1$
- Sistema 4: $m_2^* = m_5^* = m_9^* = 0$; $m_1^* = m_{10}^* = 1$; $m_3^* = 0,5$
- Sistema 5: $m_6^* = m_8^* = m_9^* = 0$; $m_1^* = m_3^* = m_7^* = 1$
- Sistema 6: $m_1^* = m_2^* = m_5^* = m_{10}^* = 0$; $m_3^* = m_9^* = 1$

De acuerdo con estos sistemas, las ecuaciones de compatibilidad que se obtienen son

$$\begin{aligned}
& 2 M_1 + M_2 + M_4 + 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_5 + \frac{6}{\alpha} M_6 + 2 \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) M_7 + M_8 + M_{10} + \\
& + 2 M_{12} + 2 E I_p (\phi_1 + \phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_{12}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_1 + 2 M_2 + 2 M_4 + M_5 + M_7 + 2 M_8 + 2 M_{10} + \\
& M_{12} + 2 E I_p (\phi_2 + \phi_4 + \phi_8 + \phi_{10}) = 0
\end{aligned}$$

$$M_4 + 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_5 + \frac{6}{\alpha} M_6 + 2 \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) M_7 + M_8 + 2 E I_p (\phi_5 + \phi_6 + \phi_7) = 0$$

$$\begin{aligned}
& 2 M_1 + M_2 + \left(\frac{b}{2 \alpha} - \frac{b^2}{36 \alpha} \right) M_3 - M_4 + \left(-0,5 + \frac{1}{3 \alpha} \right) M_5 + \frac{4}{\alpha} M_6 + \left(4 + \frac{14}{3 \alpha} \right) M_7 \\
& + 3,5 M_8 + \frac{(6-b)^2}{36 \alpha} M_9 + 4 M_{10} \\
& + \left(\frac{0,5 b}{3 \alpha} + \frac{3 b - 0,5 b^2}{9 \alpha} + \frac{(6-b)^2}{18 \alpha} \right) M_{11} + 5 M_{12} \\
& + \frac{q b^3}{12 \alpha} \left(\frac{6 - 0,5 b}{6} \right) + \frac{q (6-b)^4}{144 \alpha} \\
& + 2 E I_p \left(\phi_1 + 0,5 \phi_3 - 0,5 \phi_4 + 0,5 \phi_6 + 1,5 \phi_7 + \phi_8 + \phi_{10} \right. \\
& \left. + \frac{3 - 0,5 b}{6} \phi_{11} + 2 \phi_{12} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1,5 M_1 + \left(\frac{b}{\alpha} - \frac{b^2}{18 \alpha} \right) M_3 - 3,5 M_4 - \left(2,5 + \frac{2}{3 \alpha} \right) M_5 + \frac{1}{\alpha} M_6 + \left(2 + \frac{8}{3 \alpha} \right) M_7 + M_8 \\
& + \frac{(6-b)^2}{18 \alpha} M_9 + 1,5 M_{10} + \left(\frac{b}{\alpha} - \frac{b^2}{9 \alpha} + \frac{(6-b)^2}{9 \alpha} \right) M_{11} + 3 M_{12} \\
& + \frac{q b^3}{12 \alpha} \left(\frac{12 - b}{6} \right) + \frac{q (6-b)^4}{72 \alpha} \\
& + + 2 E I_p \left(\phi_1 - 0,5 \phi_2 + \phi_3 - 1,5 \phi_4 - 0,5 \phi_5 + \phi_7 + \frac{6-b}{6} \phi_{11} \right. \\
& \left. + 1,5 \phi_{12} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{b}{\alpha} M_3 - 2 M_4 - M_5 - M_7 - 2 M_8 + \frac{(6-b)}{\alpha} M_9 + \frac{6}{\alpha} M_{11} + \frac{q b^3}{6 \alpha} + \frac{q (6-b)^3}{6 \alpha} + \\
& + 2 E I_p (\phi_3 - \phi_4 - \phi_8 + \phi_9 + \phi_{11}) = 0
\end{aligned}$$

(4.8)

Agrupando las ecuaciones de equilibrio (4.7) y las de compatibilidad (4.8) y expresándolas de manera matricial incremental, resulta

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6831 & 0 & 1.6831 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2.6157 & 1.8473 & 3.2315 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2.6157 & 1.8473 & 3.2315 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0.3241 & -1 & -0.3974 & 1.2315 & 5.4368 & 3.5 & 0.1087 & 4 & 0.4908 & 5 \\ 1.5 & 0 & 0.6483 & -3.5 & -2.7053 & 0.3079 & 2.8210 & 1 & 0.2174 & 1.5 & 0.9816 & 3 \\ 0 & 0 & 0.7497 & -2 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1.0976 & 0 & 1.8473 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \\ \Delta M_3 \\ \Delta M_4 \\ \Delta M_5 \\ \Delta M_6 \\ \Delta M_7 \\ \Delta M_8 \\ \Delta M_9 \\ \Delta M_{10} \\ \Delta M_{11} \\ \Delta M_{12} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1.5 & 1 & 0 & 1 & 0.2970 & 2 \\ 1 & -0.5 & 1 & -1.5 & -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5941 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi_1 \\ \Delta \phi_2 \\ \Delta \phi_3 \\ \Delta \phi_4 \\ \Delta \phi_5 \\ \Delta \phi_6 \\ \Delta \phi_7 \\ \Delta \phi_8 \\ \Delta \phi_9 \\ \Delta \phi_{10} \\ \Delta \phi_{11} \\ \Delta \phi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\Delta P \\ 12.78\Delta P \\ 3\Delta P \\ 9\Delta P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.12\Delta P \\ -2.24\Delta P \\ -5.36\Delta P \end{bmatrix} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se va a estudiar sistemáticamente el comportamiento paso a paso de la estructura. Los cálculos realizados para la obtención de los resultados de este método han sido realizados con el programa “Mathematica”.

En la primera fase, el comportamiento de la estructura es elástico y por tanto $\Delta\phi_i=0$ ya que todavía no existe ninguna rótula plástica. En esas condiciones, el sistema (4.9) admite la solución

$$\begin{aligned}
\Delta M_1 &= -1.748\Delta P \\
\Delta M_2 &= 0.4253\Delta P \\
\Delta M_3 &= -0.6749\Delta P \\
\Delta M_4 &= 1.7451\Delta P \\
\Delta M_5 &= -1.7502\Delta P \\
\Delta M_6 &= 2.8566\Delta P \\
\Delta M_7 &= -3.3596\Delta P \\
\Delta M_8 &= 3.1357\Delta P \\
\Delta M_9 &= -3.3310\Delta P \\
\Delta M_{10} &= -3.5264\Delta P \\
\Delta M_{11} &= 2.0539\Delta P \\
\Delta M_{12} &= 3.2994\Delta P
\end{aligned}$$

El mayor momento corresponde a la sección 10, por lo que será ahí donde se forme la primera rótula plástica y se alcance el valor de M_p . La carga para la que se producirá esta situación será de 5113,11kg.

En la siguiente fase, el valor del momento M_{10} será constante e igual a M_p , mientras que el resto de la estructura permanece en régimen elástico. Las condiciones que se producen en este caso son las siguientes

$$M_{10} = M_p; \Delta M_{10} = 0; \Delta \phi_{10} > 0;$$

$$\Delta \phi_1 = \Delta \phi_2 = \Delta \phi_3 = \Delta \phi_4 = \Delta \phi_5 = \Delta \phi_6 = \Delta \phi_7 = \Delta \phi_8 = \Delta \phi_9 = \Delta \phi_{11} = \Delta \phi_{12} = 0$$

Bajo estas condiciones, del sistema de ecuaciones (4.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta M_1 &= -1.748\Delta P \\ \Delta M_2 &= 0.4253\Delta P \\ \Delta M_3 &= -0.6749\Delta P \\ \Delta M_4 &= 1.7451\Delta P \\ \Delta M_5 &= -1.7502\Delta P \\ \Delta M_6 &= 2.8566\Delta P \\ \Delta M_7 &= -3.3596\Delta P \\ \Delta M_8 &= 3.1357\Delta P \\ \Delta M_9 &= -3.3310\Delta P \\ \Delta M_{10} &= -3.5264\Delta P \\ \Delta M_{11} &= 2.0539\Delta P \\ \Delta M_{12} &= 3.2994\Delta P\end{aligned}$$

Se observa que en esta fase, el valor del segundo mayor momento aparece en la sección 7 y por tanto, la segunda rótula plástica se formará en ese punto.

Realizando sistemáticamente el mismo procedimiento en cada una de las fases se obtiene la distribución de los momentos en la estructura para cada una de las 7 fases (Tabla 6), desde que la estructura se comporta elásticamente hasta que se produce la séptima rótula y con ella el colapso. Los datos recogidos en la Tabla 6 son los resultados obtenidos de “Mathematica”.

De este modo, se obtiene que el orden de las secciones en que se producen las rótulas es: 10, 7, 12, 8, 6, 1 y 11.

Tabla 6. Resultados del método paso a paso

	ΔP	P [kg]	M_1 [kg m]	M_2 [kg m]	M_3 [kg m]	M_4 [kg m]	M_5 [kg m]
1ª fase		5113,11	-8942,08	2174,6	-6748,3	8922,9	-8949,09
2ª fase	235,34		-937,08	485,89	-218,66	704,55	-511,94
		5348,34	-9879,16	2660,49	-6966,96	9627,45	-9461,03
3ª fase	142,88		-584,14	235,18	83,64	150,82	-137,24
		5491,22	-10463,3	2895,67	-6883,32	9778,27	-9598,27
4ª fase	39,41		-233	121,74	66,03	56,43	-37,14
		5530,63	-10696,3	3017,41	-6817,29	9834,7	-9635,41
5ª fase	455,48		-3087,2	1012,12	1467,96	-455,85	910,59
		5986,11	-13783,5	4029,53	-5349,33	9378,85	-8724,82
6ª fase	463,6		-4247,5	-75,11	6878,96	-6954,05	-5563,28
		6449,71	-18031	3954,42	1529,63	2424,8	-14288,1
7ª fase	36,53		0	328,76	876,69	-545,93	-438,3
		6486,24	-18031	4283,18	2406,32	1878,87	-14726,4

	M ₆ [kg m]	M ₇ [kg m]	M ₈ [kg m]	M ₉ [kg m]	M ₁₀ [kg m]	M ₁₁ [kg m]	M ₁₂ [kg m]
1ª fase	29212,7	-17178,2	16033,1	-34064,1	-18031	21003,6	16870,3
2ª fase	1256,30	-852,80	1069,40	-1069,40	0	1222,90	694,10
	30469	-18031	17102,5	-35133,5	-18031	22226,5	17564,4
3ª fase	1051,60	0	717,40	-717,40	0	843,80	466,60
	31520,6	-18031	17819,9	-35850,9	-18031	23070,3	18031
4ª fase	290,5	0	211,1	-211,1	0	252,9	0
	31811,1	-18031	18031	-36062	-18031	23323,2	18031
5ª fase	4250,9	0	0	0	0	4331,9	0
	36062	-18031	18031	-36062	-18031	27655,1	18031
6ª fase	0	0	0	0	0	7608,6	0
	36062	-18031	18031	-36062	-18031	35263,7	18031
7ª fase	0	0	0	0	0	798,3	0
	36062	-18031	18031	-36062	-18031	36062	18031

La situación final de la estructura en el momento del colapso corresponde a los valores de los momentos reflejados en la última fila de la Tabla 6. La carga de colapso es 6486 kg.

4.4. Influencia de la fuerza axial

La presencia de fuerzas axiales en las secciones puede provocar una posible inestabilidad por pandeo y una disminución del momento plástico. En general, las fuerzas axiales son pequeñas y por tanto no se tienen en consideración. Sin embargo, en el caso que nos ocupa, los esfuerzos axiales en las jácenas son considerables, por lo que se va a estudiar la influencia de los mismos sobre los resultados obtenidos, ya que dicha influencia puede modificar el valor de la carga última e incluso el mecanismo de colapso.

En fase elástica, la tensión normal en una fibra cualquiera viene dada por

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} z$$

donde A es el área de la sección, I es la inercia y z es la distancia al centro de gravedad de la sección. Tanto en régimen elástico como en régimen plástico deberán satisfacerse las condiciones de equilibrio

$$N = \int_A \sigma_z dA$$

$$M = \int_A \sigma_z z dA$$

La plastificación comenzará cuando la fibra con mayor tensión alcance el valor de σ_Y . La fibra plástica progresará hasta el interior hasta que en la fibra extrema inferior se alcance también el valor σ_Y . Si se continúa aumentando los esfuerzos, la plastificación alcanzará toda la sección.

En ese momento, los momentos flectores y esfuerzos axiles que aparecerán serán denominados M_p' y N_p' . En la figura 21 se muestra la evolución de la plastificación.

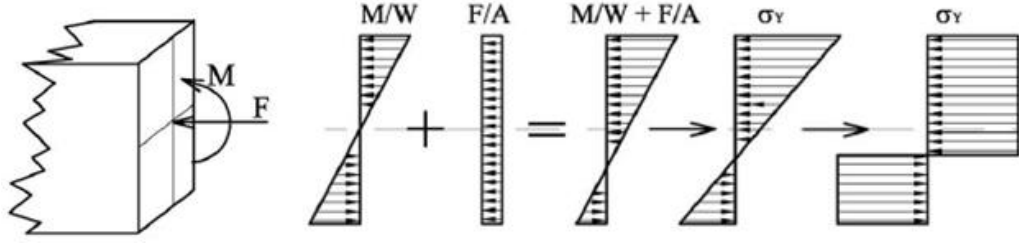


Figura 21. Proceso de plastificación de una sección cuadrada

Se considera inicialmente una sección rectangular sometida a un momento flector M y una fuerza axial de compresión F . Se observa que el momento flector presenta una distribución lineal mientras que la fuerza axial tiene un comportamiento uniforme. En este caso, el momento plástico en presencia de fuerza axial es

$$M_p' = \sigma_Y b \left(\frac{h}{2} - d \right) 2 \left[d + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - d \right) \right] = \sigma_Y \left(\frac{bh^2}{4} - bd^2 \right)$$

Para una sección rectangular, $Z = (bh^2/4)$. Por consiguiente

$$M_p' = M_p - \frac{F^2}{4\sigma_Y b}$$

Dividiendo la expresión anterior por $M_p = \sigma_Y (bh^2/4)$ resulta

$$\frac{M_p'}{M_p} = 1 - \left(\frac{F}{F_Y} \right)^2 \quad (4.10)$$

Mediante el mismo procedimiento, se deduce que la expresión equivalente a (4.10) para una sección en doble T es

$$\frac{M_p'}{M_p} = 1 - \frac{A^2}{4sZ} \left(\frac{F}{F_Y} \right)^2, \left(0 < \frac{F}{F_Y} < \frac{s(h-2t)}{A} \right) \quad (4.11a)$$

cuando la zona plastificada está dentro del alma de la sección. Cuando la zona plastificada se encuentra dentro del ala, la expresión correspondiente resulta ser

$$\frac{M_p'}{M_p} = \frac{A}{2Z} \left[h \left(1 - \frac{F}{F_Y} \right) - \frac{A}{2b} \left(1 - \frac{F}{F_Y} \right)^2 \right], \left(\frac{s(h-2t)}{A} < \frac{F}{F_Y} < 1 \right) \quad (4.11b)$$

Para poder conocer por tanto la influencia que ejerce la fuerza axial en el pórtico estudiado, se ha de conocer los valores de los axiles en cada punto de la estructura. Estos valores se muestran en la Figura 22.

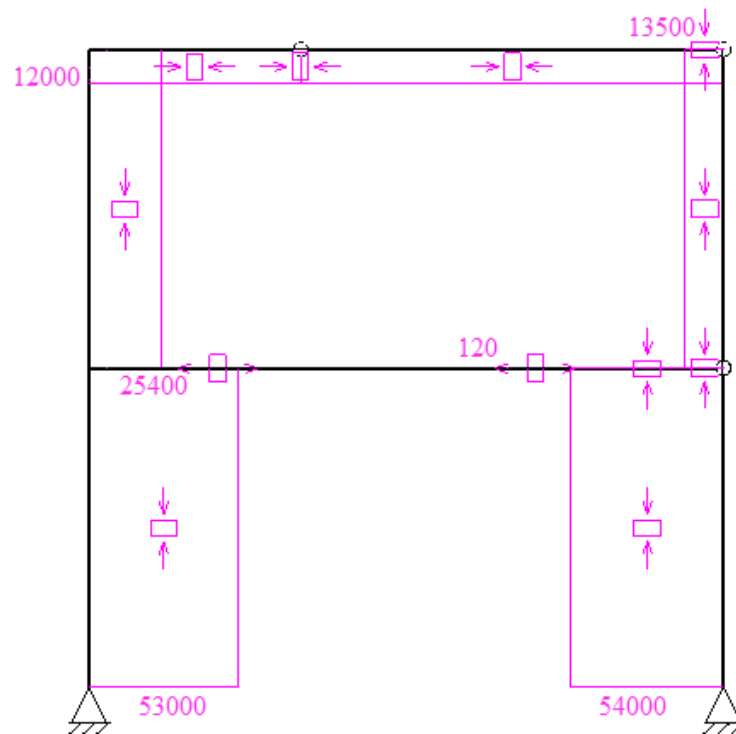


Figura 22. Valor de los axiles en la estructura

Conocidos los axiles, los momentos plásticos sin influencia axil y la geometría de los perfiles es posible calcular a partir de las ecuaciones (4.11a) y (4.11b) los valores de los nuevos momentos flectores considerando la influencia de los axiles.

La Tabla 7 recopila los datos de la geometría y de algunas propiedades de los perfiles necesarios para el cálculo de los nuevos momentos flectores.

Se observan en la Tabla 8 los resultados obtenidos del cálculo de los nuevos momentos flectores con influencia del axil. La séptima columna de la tabla muestra si la plastificación de la sección de los puntos se produce en el alma o en el ala. Si se produce en el alma, se aplica la fórmula (4.11a) para hallar el momento flector; si se produce en ala, se utiliza la (4.11b).

Tabla 7. Datos de las secciones de los perfiles

Secciones			
Pilares - HEB200		Jácnas – H295,5x220	
1,2,4,5,7,8,10,12		3,6,9,11	
h [mm]	200	h [mm]	325,5
s [mm]	9	s [mm]	12
t [mm]	15	t [mm]	15
b [mm]	200	b [mm]	220
Z [mm ⁴]	643000	Z [mm ⁴]	1286610
A [mm ²]	7810	A [mm ²]	10146

Tabla 8. Resultados de los momentos plásticos con influencia del axil

Sección	Mp [kgm]	F [N]	Fy [N]	F/Fy	s(h-2t)/A	Alma/Ala	Mp' [kgm]	Mp'/Mp
1	18031	530340	2147750	0,2469	0,196	Ala	15280	0,85
2	18031	530340	2147750	0,2469	0,196	Ala	15280	0,85
3	36062	120	2790150	0,0000	0,349	Alma	36062	1,00
4	18031	253740	2147750	0,1181	0,196	Alma	17368	0,96
5	18031	253740	2147750	0,1181	0,196	Alma	17368	0,96
6	36062	120450	2790150	0,0432	0,349	Alma	35950	1,00
7	18031	135420	2147750	0,0631	0,196	Alma	17842	0,99
8	18031	135420	2147750	0,0631	0,196	Alma	17842	0,99
9	36062	120	2790150	0,0000	0,349	Alma	36062	1,00
10	18031	539850	2147750	0,2514	0,196	Ala	15198	0,84
11	36062	120	2790150	0,0000	0,349	Alma	36062	1,00
12	18031	539850	2147750	0,2514	0,196	Ala	15198	0,84

De los resultados obtenidos, se observa que en aquellos puntos en los cuales el axil es muy pequeño, la influencia de éste sobre el momento plástico es prácticamente nula y el valor de Mp'/Mp es aproximadamente 1. Sin embargo, en los puntos donde el valor del axil es más elevado, el momento plástico disminuye respecto al inicial.

Para poder cuantificar la influencia de los axiles, se va a calcular la nueva carga última que la estructura es capaz de asumir considerando los nuevos momentos plásticos obtenidos. Además se ha de comprobar si el mecanismo de colapso se mantiene o varía.

Aplicando del nuevo el Principio de los Trabajos Virtuales a todos los posibles mecanismos del mismo modo que en el apartado 4.1, se determina que el mecanismo de colapso se mantiene. Sin embargo, el valor de la carga última disminuye debido a la influencia del axil.

La aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales en el mecanismo de colapso para la obtención de la carga última se detalla a continuación

$$W_{Int} = 4,5 M_p \vartheta + 6,7296 M_p \vartheta + 1,7 M_p \vartheta = 12,9296 M_p \vartheta$$

$$W_{Ext} = 12 P \vartheta + 12,7843 P \vartheta + 6 P \vartheta + 6 P \vartheta = 36,7843 P \vartheta$$

$$P_u = \frac{12,9296 M_p}{36,7843} = 0,3515 M_p$$

$$P_u = 0,3515 \cdot 18031 = 6.337,9 \text{ kg.}$$

La nueva carga última de la estructura es 6337,9 kg en comparación con los 6487 kg que admitía si no se consideraba la influencia de los axiles. Esto supone una reducción del 2,3% de la capacidad de carga. Se concluye por tanto, que la influencia de los axiles en la estructura analizada es muy pequeña.

5. Análisis con Abaqus

Una vez llevado a cabo el estudio y la resolución del proceso de plastificación del pórtico por diferentes métodos analíticos, se va a proceder a realizar un análisis plástico de un problema hiperestático más sencillo con el programa informático Abaqus. El objetivo es observar la ductilidad de la sección, es decir, la capacidad de la sección y del material para deformarse plásticamente y permitir la formación de una rótula plástica. Ella vendrá dada por el alcance del momento plástico y de la posibilidad de aparición de giros infinitos en la sección.

Abaqus es un programa de simulación que aplica el método de los elementos finitos para realizar cálculos estructurales estáticos lineales y no lineales. En este caso, al tratarse de un problema de plasticidad se trabaja en régimen no lineal.

El problema analizado se trata de una viga biempotrada en sus extremos como la de la Figura 23 a la cual se le aplica una carga distribuida³. Esta viga tiene grado de hiperestaticidad 3, por lo que será necesaria la formación de 3 rótulas plásticas para que se produzca su colapso.

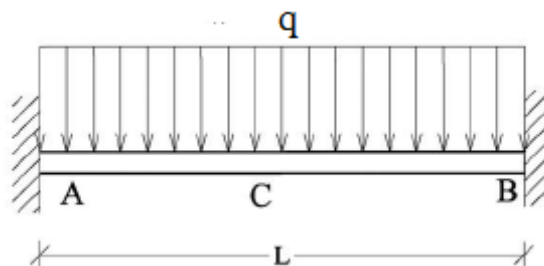


Figura 23. Viga biempotrada con carga distribuida

Del análisis lineal, el diagrama de momentos flectores de esta viga (Figura 24) muestra que será en los empotramientos A y B donde se formarán las dos primeras rótulas plásticas al tener en esos puntos los momentos flectores más elevados.

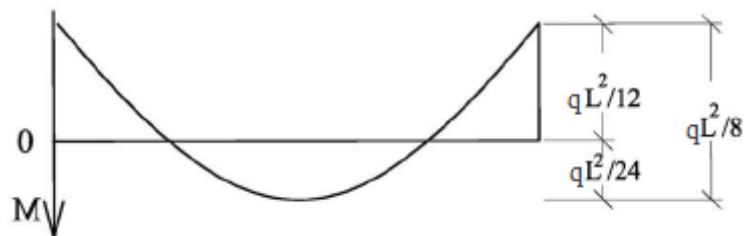


Figura 24. Diagrama de momentos flectores de una viga biempotrada

³ M. R. Dalmau y J. Vilardell (2003). "Análisis plástico de estructuras. Introducción"

Las rótulas plásticas en A y B se formarán al aplicar la una carga q_i que haga que los extremos de la viga alcancen su momento plástico M_p (Figura 25).

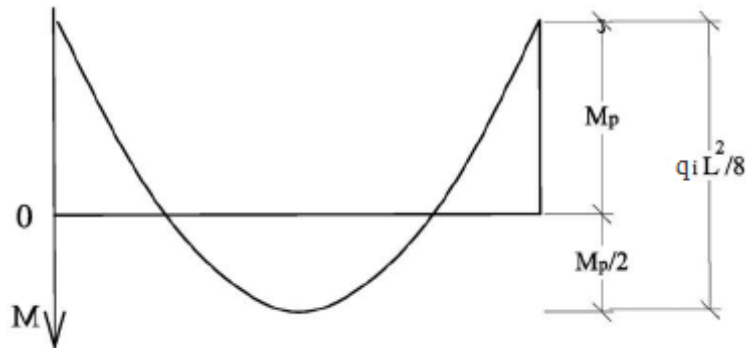


Figura 25. Diagrama de momentos en la formación de las dos primeras rótulas plásticas

Si la carga sigue aumentando hasta que q llega a la carga última (q_u) se formará la tercera articulación en el centro de la viga, ya que en ese punto (punto C) se alcanza también el valor de M_p como se muestra en la Figura 26.

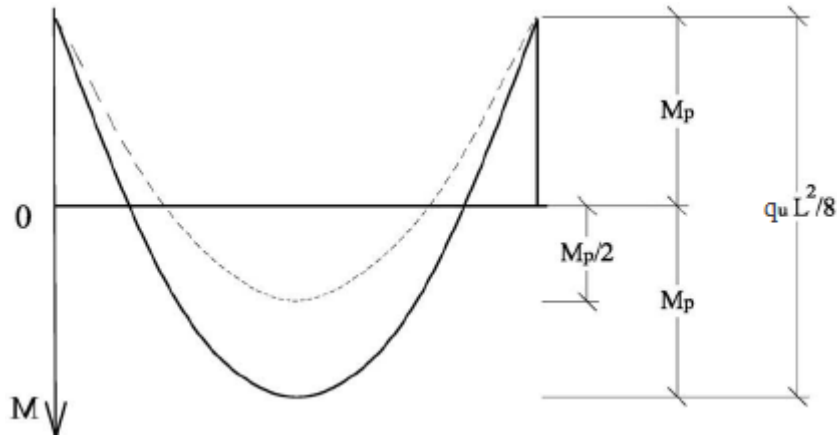


Figura 26. Diagrama de momentos en el colapso

Para realizar la simulación de este problema mediante Abaqus, se ha elegido una viga con una geometría equivalente a la de la primera jácena del pórtico analizado en este proyecto. La largura de la viga es de 6 m y el perfil de la misma es un H295,5x220. El material del que está compuesta es acero cuyas propiedades elásticas y plásticas se muestran en la Figura 27. Se ha introducido el material de manera que tenga plasticidad perfecta, de manera que se mantenga la hipótesis de material elastoplástico perfecto considerada en la primera parte del estudio.

La carga aplicada es una carga distribuida de valor $1,5 \text{ N/mm}^2$. Se introduce esta carga debido a que este valor es aproximadamente tres veces mayor que el que hace que la viga empiece a plastificar. Es decir, en el límite del comportamiento elástico, el momento que se produce en los empotramientos es el siguiente

$$M_e = \sigma_e W_e = \frac{qL^2}{12} \quad (5.1)$$



Figura 27. Propiedades del material introducidas en Abaqus

Despejando q de (5.1) se obtiene la carga que hay que aplicar a la viga para que se produzca el inicio de la plastificación

$$q \left[\frac{N}{mm} \right] = \frac{12\sigma_e W_e}{L^2} = \frac{12 * 275 * 1136000}{6000^2} = 104,13 \frac{N}{mm}$$

Para pasarlo a N/mm^2 que son las unidades en las que se ha de introducir la carga en Abaqus, se divide la carga obtenida entre el ancho de la sección, que para el perfil con el que se trabaja son 220mm.

$$q \left[\frac{N}{mm^2} \right] = \frac{104,13}{220} = 0,47 \frac{N}{mm^2}$$

La carga para la cual aparecen las dos primeras rótulas y el problema por tanto se vuelve isostática es $0,47 N/mm^2$, por tanto, para asegurar el buen funcionamiento del análisis plástico se introduce el triple de esa carga ($1,5N/mm^2$).

La geometría de la viga simulada se observa en la Figura 28. En la zona de los empotramientos del ala superior se ha introducido una rebaja de la sección de manera que se favorezca la formación de la rótula en ese punto.

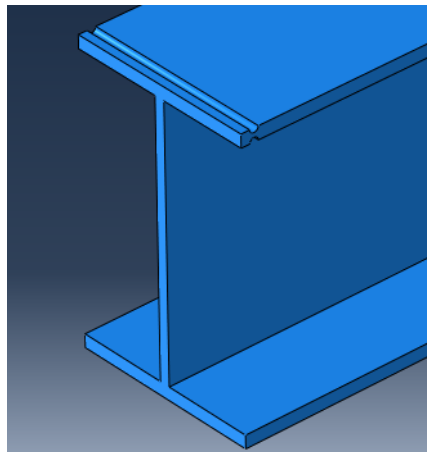


Figura 28. Geometría del modelo en Abaqus

Una vez introducido el modelo y los parámetros necesarios para el cálculo, se procede al mallado del mismo (Figura 29). Se han introducido más elementos en la zona de los extremos para observar con mayor precisión la formación de las primeras rótulas en los empotramientos.

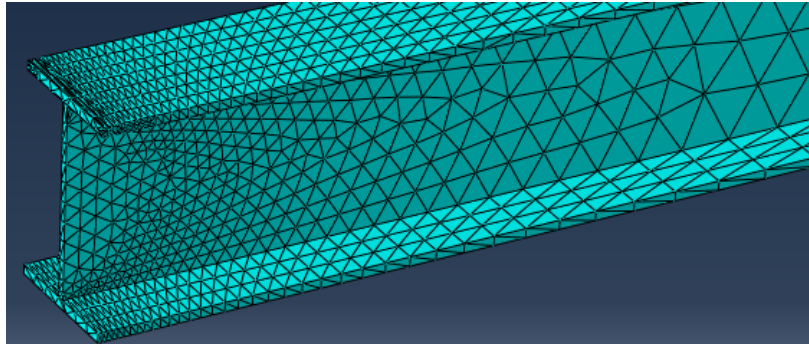


Figura 29. Mallado del modelo en Abaqus

Como ya ha sido comentado en el apartado de selección de los perfiles, este perfil pertenece a la Clase 1, por lo que admite el análisis plástico. Para comprobar mediante Abaqus que efectivamente este tipo de perfil no presenta inestabilidades locales que produzcan pandeo y que imposibiliten el análisis plástico se ha realizado un análisis de pandeo a la viga.

Para asegurar que no existen problemas de pandeo, el α_{cr} , que se trata de un parámetro que mide la estabilidad de la estructura, debe ser mayor que 1. Esto quiere decir que la carga a partir de la cual se produzcan fenómenos de pandeo debe ser superior a la carga aplicada. En la Figura 30 se observa que el α_{cr} para el primer modo de pandeo de la viga es 14,871 y por tanto sería necesario aplicar una carga casi 15 veces superior a la actual para que se produjera el pandeo en la viga analizada.

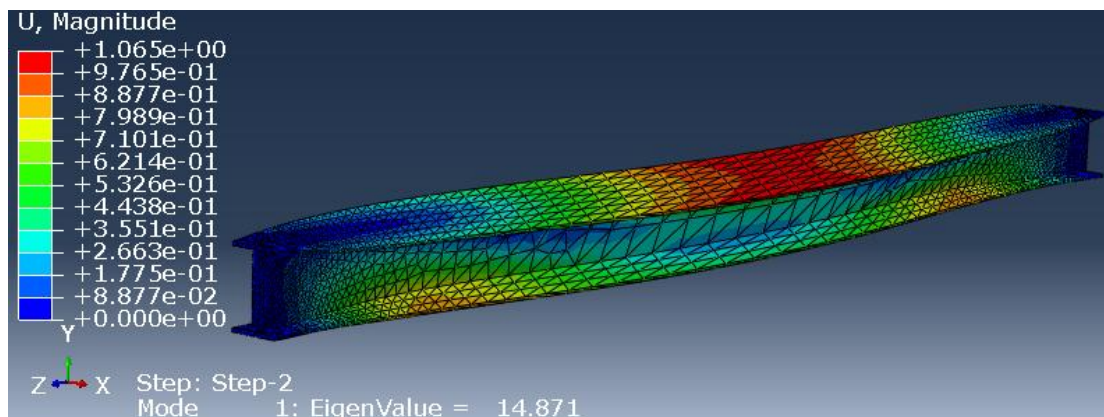


Figura 30. Análisis de pandeo mediante Abaqus

La simulación del cálculo plástico es realizada por el programa de manera incremental. La carga es aplicada en sucesivos pasos comenzando desde el 0% de la carga hasta alcanzar el 100%. De este modo es posible analizar en qué momento y para qué valor de carga se forman las diferentes rótulas.

El inicio de la plastificación de los extremos se produce cuando se ha aplicado un 30% de la carga total introducida (Figura 31), es decir, cuando la carga vale

$$q = 1,5 \left[\frac{N}{mm^2} \right] * 0,3 = 0,45 \frac{N}{mm^2}$$

Se comprueba que es la misma carga que la calculada anteriormente de manera analítica para el inicio de la plastificación.

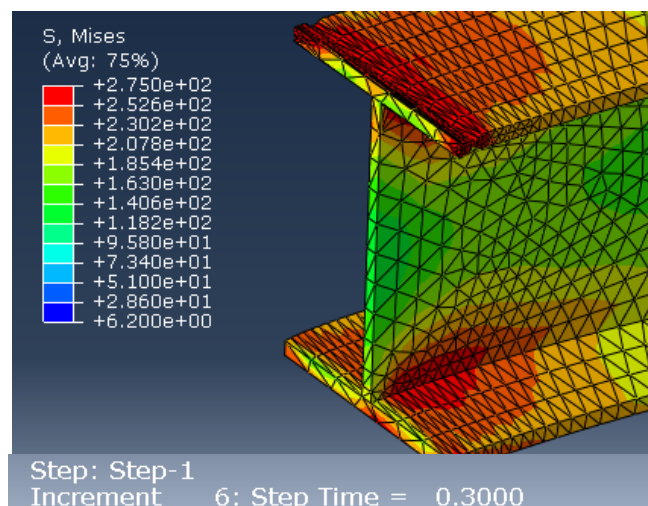


Figura 31. Inicio de la plastificación en la sección

Al aumentar la carga y producirse la plastificación en toda la sección de los extremos, se forman las rótulas plásticas (Figura 32). Toda la zona de los empotramientos ha alcanzado la tensión máxima admisible por el material de 275Mpa y por tanto, el momento flector en esa zona tiene el valor del momento plástico. Se observa que la formación de las dos primeras rótulas se produce en el Step Time = 0,45. Es decir, en ese momento la carga aplicada es un 45% de la carga total.

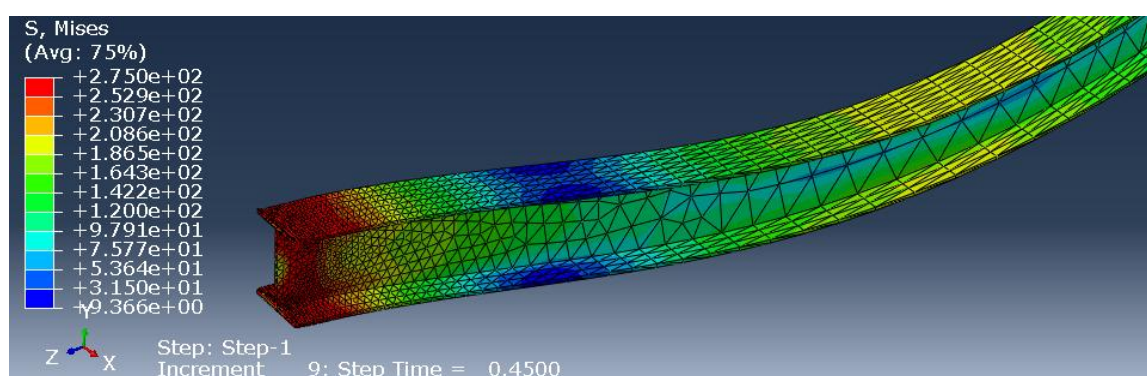


Figura 32. Formación de las rótulas en los extremos de la viga

En el momento en que el centro de la sección comienza a plastificar el valor del momento plástico en ese punto es

$$M_p = \sigma_Y W_p = \frac{qL^2}{16} \quad (5.2)$$

Despejando q de (5.2) se obtiene la carga para la cual se produce el inicio de la plastificación en la sección central de la viga

$$q \left[\frac{N}{mm} \right] = \frac{16\sigma_Y W_p}{L^2} = \frac{16 * 275 * 1350000}{6000^2} = 165 \frac{N}{mm} = 0,75 \frac{N}{mm^2}$$

Para pasar los 165 N/mm a N/mm^2 se divide por el ancho del perfil que son 220mm. En la Figura 33 se observa que en la simulación con Abaqus el centro de la viga comienza a plastificar cuando se aplica el 50% de la carga total. Es decir, cuando la carga aplicada es

$$q \left[\frac{N}{mm^2} \right] = 1,5 \left[\frac{N}{mm^2} \right] * 0,5 = 0,75 \frac{N}{mm^2}$$

Se comprueba que esta carga es la misma a la obtenida de manera analítica.

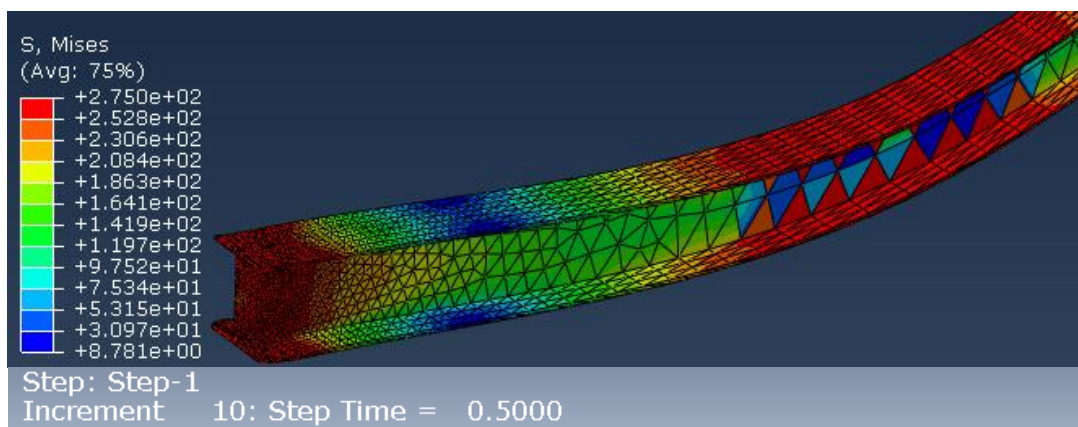


Figura 33. Inicio de plastificación en el centro de la viga

Si la carga continua aumentando, llega un momento en que todo el centro de la sección está plastificado y se forma la tercera rótula plástica en la viga (Figura 34). Esto se produce cuando se ha aplicado el 64,37% de la carga total introducida.

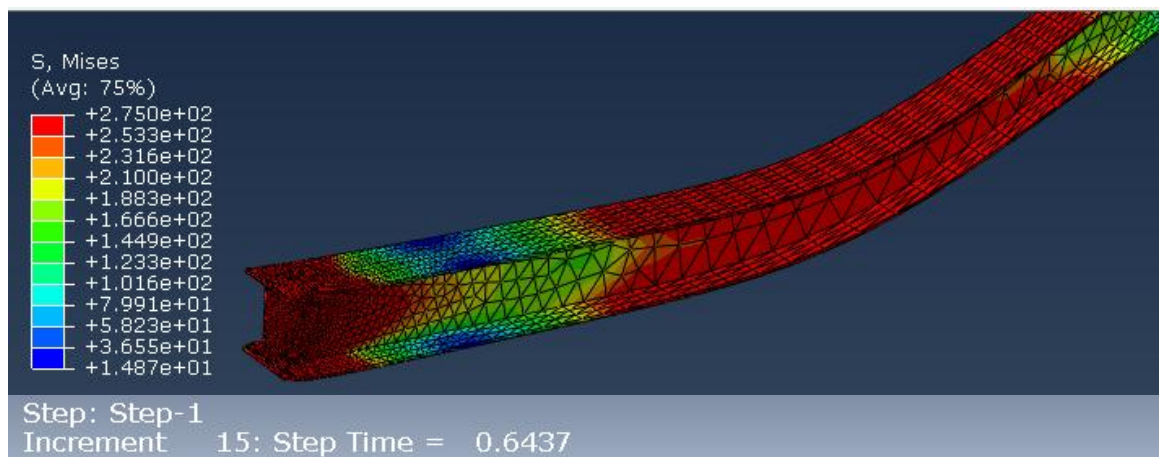


Figura 34. Formación de la rótula central

Ver Anexo IV para más detalle.

6. Conclusiones

La resolución del problema particular del pórtico rígido plano mediante el análisis elástico lineal y el análisis plástico permite la comparación entre ambos modelos. Dicho pórtico ha sido dimensionado de manera que los perfiles utilizados cumplan con el Eurocódigo 3. Mediante el cálculo elástico, la carga última obtenida que soporta la estructura es de $P_{u, \text{elástico}} = 4544 \text{ kg}$, mientras que al realizar el análisis plástico se obtiene una $P_{u, \text{plástico}} = 6487 \text{ kg}$. Se concluye, por lo tanto, que la utilización del análisis plástico en lugar del elástico proporciona un 42,75% adicional de resistencia en la estructura. Así pues, además de resultar ser un análisis más racional, el cálculo plástico nos proporciona un ahorro de materiales, aumentando la competitividad industrial.

Dentro del cálculo plástico, los cálculos han sido realizados mediante dos métodos directos (Principio de los Trabajos Virtuales y método estático) y un método paso a paso. De todos ellos se han obtenido, aunque de maneras diferentes, los mismos resultados para el mecanismo de colapso y la carga última. Estos métodos han sido aplicados inicialmente sin considerar la posible influencia de los momentos axiales. Al analizar la influencia de éstos, se ha obtenido que el mecanismo de colapso de la estructura se mantiene, pero la carga última que admite la estructura disminuye hasta $P_{u, \text{elástico influencia axial}} = 6338 \text{ kg}$. Esto supone una disminución del 2,3% de la capacidad de carga, por lo que se puede afirmar que para este caso, la consideración de los momentos axiales en los cálculos no es trascendental ya que su influencia es pequeña.

Por otro lado, mediante la simulación de una viga armada en el programa computacional Abaqus se ha llevado a cabo un análisis de pandeo y plastificación del modelo. Se comprueba que los resultados obtenidos con Abaqus en el proceso de plastificación para la capacidad de la sección son los mismos a los obtenidos analíticamente para la viga.

Para concluir, se quiere apuntar que en este trabajo se ha centrado y profundizado en el cálculo del proceso de plastificación del pórtico elegido. Sin embargo, aunque la estructura sí ha sido seleccionada teniendo en cuenta la Normativa, no se han estudiado las deformadas de la misma. A la hora de validar la geometría sería necesario un análisis de las deformadas para verificar que se encuentran por debajo de las limitaciones en la Normativa vigente.

Bibliografía

- M. R. Dalmau y J. Vilardell (2003). “Análisis plástico de estructuras. Introducción”
- M. Doblaré y L. Gracia (2000). “Cálculo plástico de estructuras de barras”
- Guillermo Rus Carlborg (2008). “Cálculo plástico de estructuras de barras: teoría”
- Instrucción de Acero Estructural (E.A.E.). Real Decreto 751/2011, de 27 de mayo
- Norma UNE-ENV 1993-1-1. Mayo 2008. Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificios
- Norma UNE-EN 287-1:2004 para la cualificación de los soldadores
- Norma UNE-EN ISO 14555:1999 para las calidades de los materiales de aportación
- University of Sydney (2006). “ABAQUS: Selected Topics”
- Abaqus Analysis User’s Manual, Abaqus 6.12 SIMULIA

Anexos

Anexo I. Principio de los Trabajos Virtuales

El principio de los trabajos virtuales expresa que “si un cuerpo sometido a un estado de equilibrio se asocia a otro estado de deformaciones, el trabajo virtual producto de ambos es nulo, pues se compensa la componente producida por las acciones y desplazamientos externos, con la componente debida a los esfuerzos y deformaciones internos”.¹

Para que se cumpla, es condición necesaria y suficiente que el estado de deformaciones y desplazamientos sea compatible, en el sentido de que las deformaciones internas sean solidarias con los desplazamientos externos. Es también necesario que el sistema de fuerzas y esfuerzos esté en equilibrio.

En el caso de estructuras hiperestáticas, como las estudiadas en el Apartado 4.1, existirán infinitas soluciones en equilibrio y cualquiera de ellas será válida y generará los mismos resultados.

Se ha estudiado anteriormente que cuando en una estructura hiperestática se forma un número suficiente de articulaciones plásticas, se produce el mecanismo de colapso que agota la estructura. Se supone que las partes de una viga situadas a uno y otro lado de la articulación giran una respecto de la otra bajo la oposición de un par de fuerzas de momento M_p , lo que va a permitir determinar el valor de la carga última sin más que aplicar el Principio de los Trabajos Virtuales

$$W_{interno} = W_{externo} \quad (\text{AI. 1})$$

En el caso que nos ocupa, al estar trabajando en régimen plástico, el trabajo interno vendrá determinado por el número de rótulas, k , y el momento plástico M_p resistido por cada rótula de ellas y el ángulo de giro en torno a cada una

$$W_{interno} = \sum_k M_{p,k} \theta_k \quad (\text{AI. 2})$$

Este trabajo debe igualar el trabajo externo hecho por las fuerzas que actúan sobre la estructura provocado la aparición de rótulas

$$W_{externo} = \sum_k P_k \delta_k + \sum_j \int q_j(x) y \, dx \quad (\text{AI. 3})$$

¹ Guillermo Rus Carlborg (2008). “Cálculo plástico de estructuras de barras: teoría”

Sustituyendo las ecuaciones (AI.2) y (AI.3) en (AI.1) y despejando, se obtiene una ecuación en la que es posible despejar la carga última en función del momento plástico.

Se detalla a continuación el cálculo de la carga última mediante el Principio de los Trabajos Virtuales para todos los mecanismos posibles, tanto elementales como combinados, con el objetivo de determinar cuál es aquel que posee la menor carga última y ese será por lo tanto, el mecanismo de colapso de la estructura.

I. 1. Mecanismos elementales

I. 1. 1. Mecanismo 1

El mecanismo 1 (Figura 1) se trata de un mecanismo de viga.

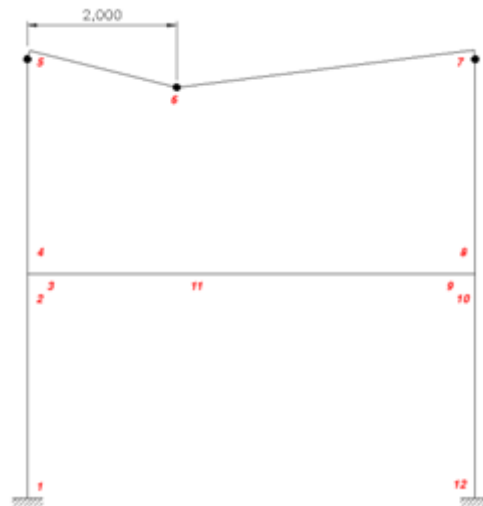


Figura 1. Mecanismo 1

Aplicando las ecuaciones (AI.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$W_{Int} = M_p \vartheta + 2M_p 1,5\vartheta + M_p 0,5\vartheta = 4,5 M_p \vartheta$$

$$W_{Ext} = 6P 2\vartheta = 12 P \vartheta$$

$$P = \frac{4,5 M_p}{12} = 0,375 M_p$$

se obtiene que la carga última de este mecanismo es de $0,375M_p$.

I. 1. 2. Mecanismo 2

El mecanismo 2 (Figura 2) se trata al igual que el mecanismo 1 de un mecanismo de viga, siendo

$$b = 2,4351 m ; \vartheta^* = 0,6831\vartheta$$

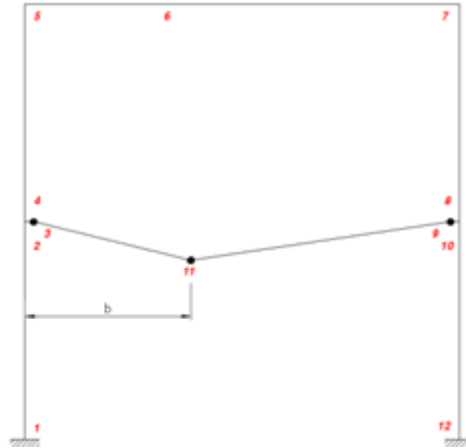


Figura 2. Mecanismo 2

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$W_{Int} = 2M_p \vartheta + 2M_p 1,6831\vartheta + 2M_p 0,6831\vartheta = 6,7324 M_p \vartheta$$

$$W_{Ext} = 0,5 * 1,75 * P * 6 * 2,4351\vartheta = 12,7843 P \vartheta$$

$$P = \frac{6,7324 M_p}{12,7843} = 0,5266 M_p$$

la carga última que se obtiene en este caso es de 0,5266M_p.

I. 1. 3. Mecanismo 3

El mecanismo es un mecanismo de marco (Figura 3)

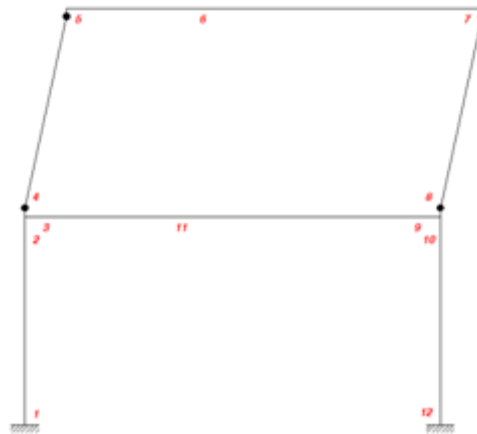


Figura 3. Mecanismo 3

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$W_{Int} = M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta = 4 M_p \vartheta$$

$$W_{Ext} = P * 3 \vartheta = 3 P \vartheta$$

$$P = \frac{4 M_p}{3} = 1,333 M_p$$

la carga última obtenida es de 1,333M_p.

I. 1. 4. Mecanismo 4

El mecanismo 4 es también un mecanismo de marco (Figura 4)

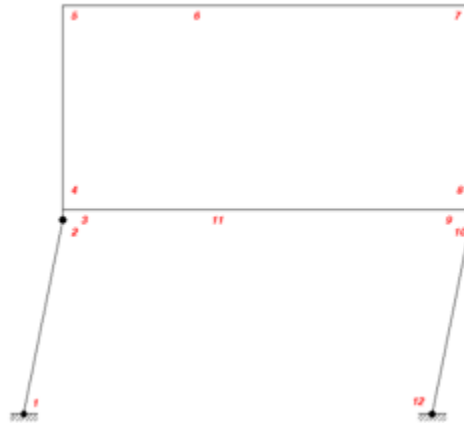


Figura 4. Mecanismo 4

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$W_{Int} = M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta = 4 M_p \vartheta$$

$$W_{Ext} = P * 3\vartheta + 2 P * 3\vartheta = 9 P \vartheta$$

$$P = \frac{4 M_p}{9} = 0,444 M_p$$

la carga última que obtiene es de 0,444M_p.

II. 2. Mecanismos combinados

I. 2. 1. Mecanismo 7

Este mecanismo combina los mecanismos 1 y 2, ambos mecanismos de viga.

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$\begin{aligned} W_{Int} &= M_p \vartheta + 2M_p 1,5\vartheta + M_p 0,5\vartheta + 2M_p \vartheta + 2M_p 1,6831\vartheta + 2M_p 0,6831\vartheta \\ &= 4,5 M_p \vartheta + 6,7324 M_p \vartheta = 11,2324 M_p \vartheta \end{aligned}$$

$$W_{Ext} = 12 P \vartheta + 12,7843 P \vartheta = 24,7843 P \vartheta$$

$$P = \frac{11,2324 M_p}{24,7843} = 0,4532 M_p$$

la carga última que se obtiene es de $0,4532M_p$.

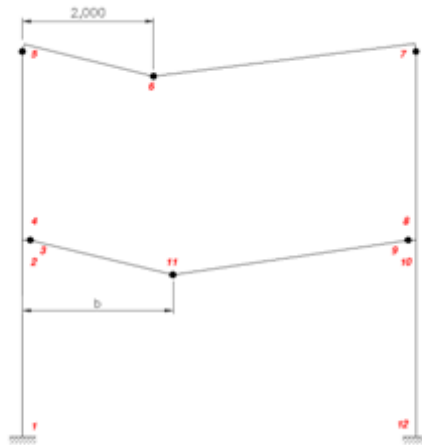


Figura 5. Mecanismo 7

I. 2. 2. Mecanismo 8

Este mecanismo combina el mecanismo de viga 1 con el mecanismo de marco 3 (Figura 6).

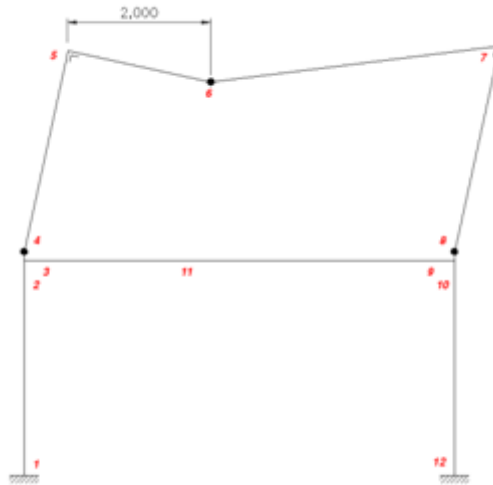


Figura 6. Mecanismo 8

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$W_{Int} = 2M_p 1,5\vartheta + M_p 0,5\vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta = 3,5 M_p \vartheta + 2 M_p \vartheta = 5,5 M_p \vartheta$$

$$W_{Ext} = 3 P \vartheta + 12 P \vartheta = 15 P \vartheta$$

$$P = \frac{5,5 M_p}{15} = 0,3667 M_p$$

la carga última obtenida es de $0,3667M_p$.

I. 2. 3. Mecanismo 9

Este mecanismo se observa en la Figura 7 y combina el mecanismo 1 de viga con el mecanismo 4 de marco. Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$\begin{aligned} W_{Int} &= M_p \vartheta + 2M_p 1,5\vartheta + M_p 0,5\vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta \\ &= 4,5 M_p \vartheta + 4 M_p \vartheta = 8,5 M_p \vartheta \end{aligned}$$

$$W_{Ext} = 12 P \vartheta + 3 P \vartheta + 6 P \vartheta = 21 P \vartheta$$

$$P = \frac{8,5 M_p}{21} = 0,4048 M_p$$

la carga última obtenida es de 0,4048M_p.

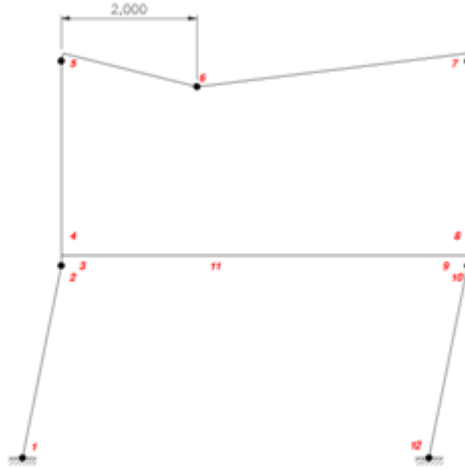


Figura 7. Mecanismo 9

I. 2. 4. Mecanismo 10

Este mecanismo combina el mecanismo 2 de viga con el mecanismo 3 de marco (Figura 8).

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$\begin{aligned} W_{Int} &= 2M_p \vartheta + 2M_p 1,6831\vartheta + 2M_p 0,6831\vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta \\ &= 6,7324 M_p \vartheta + 4 M_p \vartheta = 10,7324 M_p \vartheta \end{aligned}$$

$$W_{Ext} = 12,7843 P \vartheta + 3 P \vartheta = 15,7843 P \vartheta$$

$$P = \frac{5,5 M_p}{15} = 0,3667 M_p$$

la carga última obtenida es de 0,3667M_p.

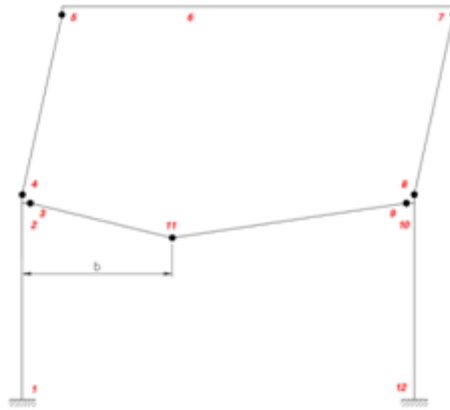


Figura 8. Mecanismo 10

I. 2. 5. Mecanismo 11

Este mecanismo (Figura 9) combina el mecanismo 2 de viga con el mecanismo 4 de marco.

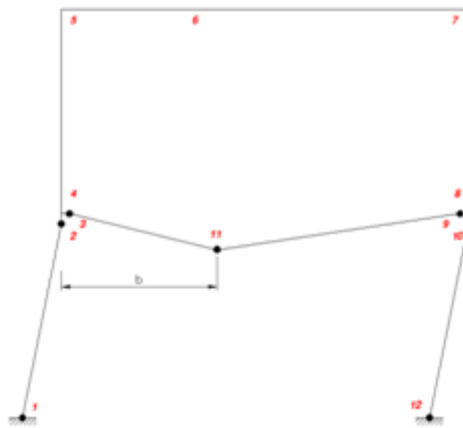


Figura 9. Mecanismo 11

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$W_{Int} = 2M_p \vartheta + 2M_p 1,6831\vartheta + 2M_p 0,6831\vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta \\ = 6,7324 M_p \vartheta + 4 M_p \vartheta = 10,7324 M_p \vartheta$$

$$W_{Ext} = 12,7843 P \vartheta + 3 P \vartheta + 6 P \vartheta = 21,7843 P \vartheta$$

$$P = \frac{10,7324 M_p}{21,7843} = 0,4927 M_p$$

la carga última obtenida es de $0,4927M_p$.

I. 2. 6. Mecanismo 12

Este mecanismo (Figura 10) combina los mecanismos 3 y 4, ambos de marco.

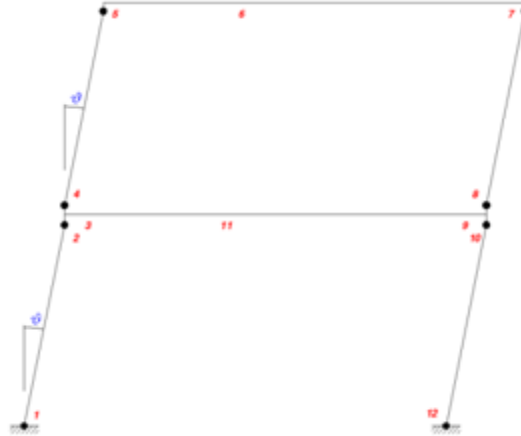


Figura 10. Mecanismo 12

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$\begin{aligned} W_{Int} &= M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta \\ &= 4 M_p \vartheta + 4 M_p \vartheta = 8 M_p \vartheta \end{aligned}$$

$$W_{Ext} = 6 P \vartheta + 6 P \vartheta = 12 P \vartheta$$

$$P = \frac{8 M_p}{12} = 0,6667 M_p$$

la carga última obtenida es de $0,6667M_p$.

I. 2. 7. Mecanismo 13

Este mecanismo combina los mecanismos de viga 1 y 2 con el mecanismo de marco 3 (Figura 11)

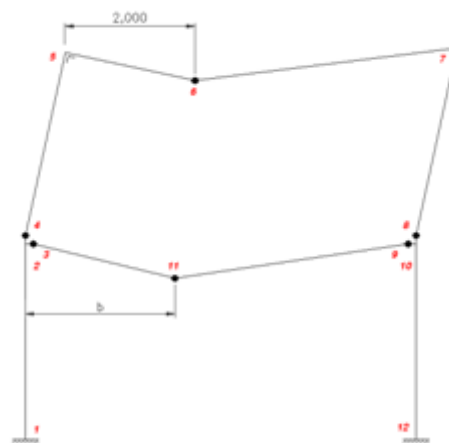


Figura 11. Mecanismo 13

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$W_{Int} = 2M_p 1,5\vartheta + M_p 0,5\vartheta + 2M_p \vartheta + 2M_p 1,6831\vartheta + 2M_p 0,6831\vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta = 3,5 M_p \vartheta + 6,7324 M_p \vartheta + 2 M_p \vartheta = 12,2324 M_p \vartheta$$

$$W_{Ext} = 3 P \vartheta + 12 P \vartheta + 12,7843 P \vartheta = 27,7843 P \vartheta$$

$$P = \frac{12,2324 M_p}{27,7843} = 0,4403 M_p$$

la carga última obtenida es de 0,4403M_p.

I. 2. 8. Mecanismo 14

Este mecanismo combina los mecanismos de viga 1 y 2 con el mecanismo de marco 4 (Figura 12).

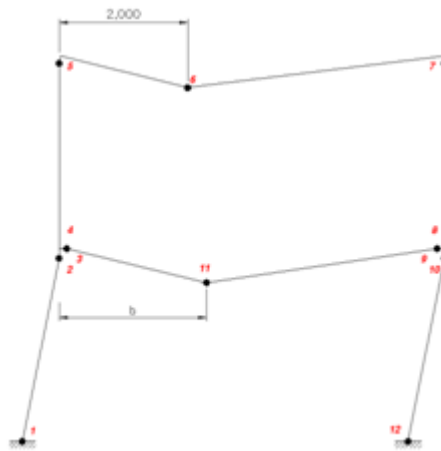


Figura 12. Mecanismo 14

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$W_{Int} = M_p \vartheta + 2M_p 1,5\vartheta + M_p 0,5\vartheta + 2M_p \vartheta + 2M_p 1,6831\vartheta + 2M_p 0,6831\vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta = 4,5 M_p \vartheta + 6,7324 M_p \vartheta + 4 M_p \vartheta = 15,2324 M_p \vartheta$$

$$W_{Ext} = 3 P \vartheta + 6 P \vartheta + 12 P \vartheta + 12,7843 P \vartheta = 33,7843 P \vartheta$$

$$P = \frac{15,2324 M_p}{33,7843} = 0,4509 M_p$$

la carga última obtenida es de 0,4509M_p.

I. 2. 9. Mecanismo 15

Este mecanismo combina el mecanismo 2 de viga con los mecanismos 3 y 4 de marco (Figura 13).

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1)

$$W_{Int} = 2M_p 1,6831\vartheta + 2M_p 0,6831\vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta + M_p \vartheta$$

$$= 6,7324 M_p \vartheta + 4 M_p \vartheta = 10,7324 M_p \vartheta$$

$$W_{Ext} = 12,7843 P \vartheta + 6 P \vartheta + 6 P \vartheta = 24,7843 P \vartheta$$

$$P = \frac{10,7324 M_p}{24,7843} = 0,433 M_p$$

la carga última obtenida es de $0,433M_p$.

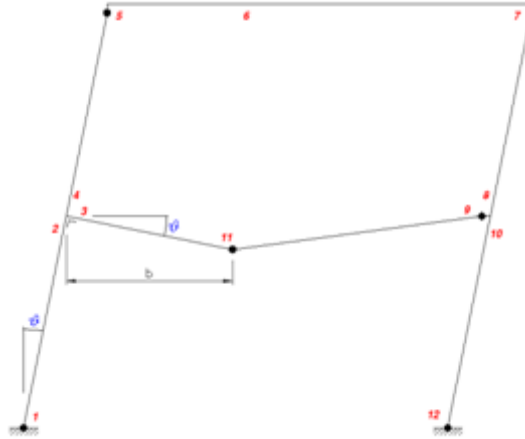


Figura 13. Mecanismo 15

I. 2. 10. Mecanismo 16

Este mecanismo combina los 4 mecanismos elementales: el 1 y 2 de viga con el 3 y 4 de marco (Figura 14).

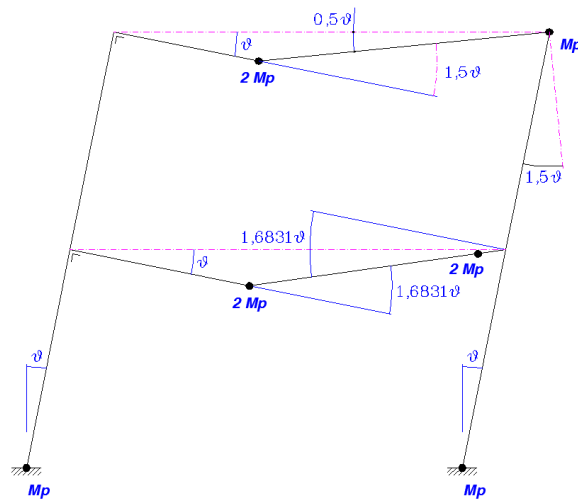


Figura 14. Mecanismo 16

Aplicando las ecuaciones (A.I.2) y (A.I.3) y sustituyendo en (A.I.1).

$$\begin{aligned}
W_{Int} &= 2M_p \cdot 1,5\vartheta + M_p \cdot 1,5\vartheta + 2M_p \cdot 1,6831\vartheta + 2M_p \cdot 1,6831\vartheta + M_p \cdot \vartheta + M_p \cdot \vartheta \\
&= 4,5 M_p \vartheta + 6,7296 M_p \vartheta + 2 M_p \vartheta = 13,2296 M_p \vartheta
\end{aligned}$$

$$W_{Ext} = 12 P \vartheta + 12,7843 P \vartheta + 6 P \vartheta + 6 P \vartheta = 36,7843 P \vartheta$$

$$P = P_u = \frac{13,2296 M_p}{36,7843} = 0,3597 M_p$$

la carga última obtenida es de 0,3597M_p.

Una vez analizados todos los mecanismos posibles, se observa que el mecanismo que soporta la carga última más pequeña es el mecanismo 16, combinación de los 4 mecanismos elementales, por lo que ese es el mecanismo de colapso. Por tanto, la carga última de la estructura es

$$P_u = 0,3597 M_p = 0,3597 \cdot 18031 = 6487,7 \text{ kg}$$

Anexo II. Método directo estático

El objetivo de la aplicación del método directo estático se ha visto que es la obtención del mecanismo de colapso directamente, sin analizar la progresión plástica de la estructura. Para su resolución, se parte de 12 ecuaciones que relacionan las 6 incógnitas hiperestáticas con los momentos de posible formación de rótulas (Figura 15).

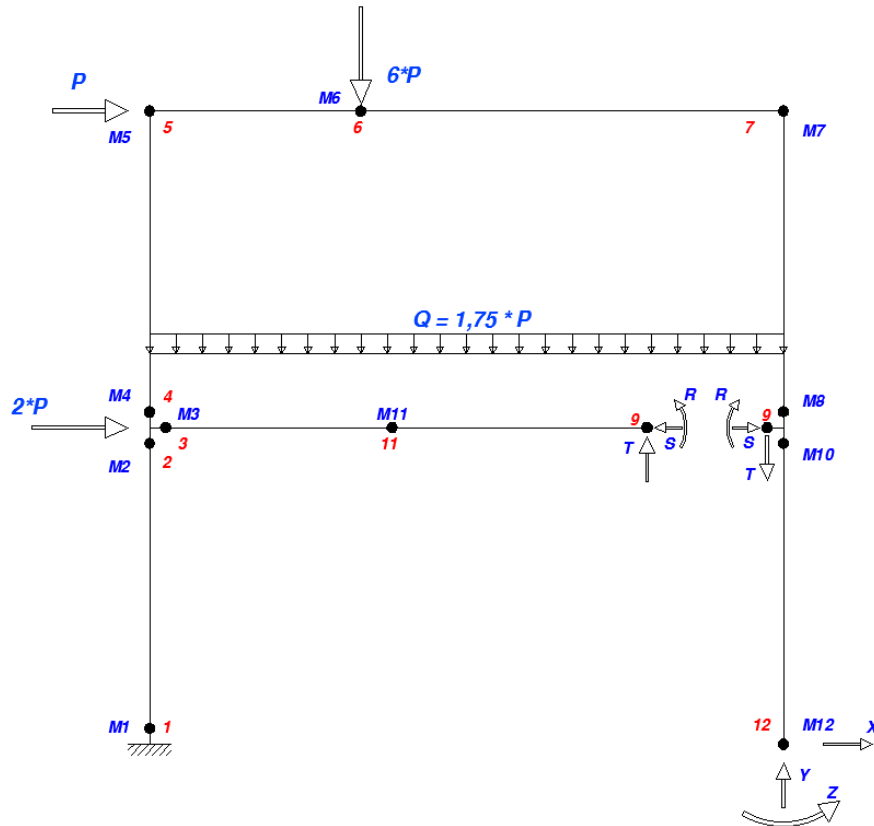


Figura 15. Incógnitas hiperestáticas y momentos en puntos de posible formación de rótulas

Las ecuaciones iniciales que relacionan las incógnitas hiperestáticas con los momentos en los puntos de posible formación de rótulas plásticas se muestran a continuación

$$M_{12} = Z \quad (\text{AII. 1})$$

$$M_{10} = Z + 3X \quad (\text{AII. 2})$$

$$M_9 = R \quad (\text{AII. 3})$$

$$M_8 = Z + 3X - R = M_{10} - M_9 \quad (\text{AII. 4})$$

$$M_7 = Z + 6X - R + 3S = M_{12} + 2M_{10} - 2M_{12} - M_9 + 3S$$

$$M_6 = Z + 6X - R + 3S + 4Y - 4T = M_7 + 4Y - 4T$$

$$M_5 = Z + 6X - R + 3S + 6Y - 6T - 12P = M_6 + 2Y - 2T - 12P$$

$$M_4 = Z + 3X - R + 6Y - 6T - 15P = M_5 - 3X - 3S - 3P$$

$$M_{11} = R + T(6 - b) - 1,75P \frac{(6 - b)^2}{2} = M_9 + T(6 - b) - 0.875P(6 - b)^2$$

$$M_3 = R + 6T - 31,5P = M_9 + 6T - 31.5P$$

$$M_2 = Z + 3X + 6Y - 46,5P$$

$$M_1 = Z + 3X + 6Y - 52,5P = M_3 + M_4 - 6P = M_2 - 6P$$

$$(AII. 5) \quad (AII. 6) \quad (AII. 7) \quad (AII. 8) \quad (AII. 9) \quad (AII. 10) \quad (AII. 11) \quad (AII. 12)$$

A partir de las ecuaciones anteriores se obtienen de manera directa dos de las 6 ecuaciones buscadas. Estas dos ecuaciones pertenecen a las ecuaciones de equilibrio de nudos y son

De (AII. 4)

$$M_8 + M_9 = M_{10}$$

De (AII. 11)

$$M_2 - M_3 - M_4$$

Para la obtención de las otras 4 ecuaciones necesarias, se despejan en primer lugar las incógnitas hiperestáticas

$$Z = M_{12}$$

$$R = M_9$$

$$X = \frac{M_{10} - M_{12}}{3}$$

$$S = \frac{M_7 + M_9 - 2M_{10} + M_{12}}{3}$$

$$T = \frac{M_3 - M_9 + 31.5P}{6}$$

$$Y = 0.25M_6 - 0.25M_7 + \frac{M_3}{6} - \frac{M_9}{6} + 2.25P$$

A continuación se sustituyen sistemáticamente dentro de las ecuaciones

De (AII. 7)

$$M_5 = M_6 + 2Y - 2T - 12P$$

$$M_5 = M_6 + 0.5M_6 - 0.5M_7 + \frac{M_3}{3} - \frac{M_9}{3} + 10.5P - \frac{M_3}{3} + \frac{M_9}{3} - 10.5P - 12P$$

$$M_5 = 1.5M_6 - 0.5M_7 - 12P$$

De (AII. 8)

$$M_4 = M_5 - 3X - 3S - 3P$$

$$M_4 - M_5 = M_{10} + M_{12} - M_7 - M_9 + 2M_{10} - M_{12} - 3P$$

$$M_4 - M_5 + M_7 + M_9 - M_{10} = -3P$$

Sabiendo que de (AII. 1) $M_8 = -M_9 + M_{10}$

$$-M_4 + M_5 - M_7 + M_8 = -3P$$

De (AII. 9)

$$M_{11} = M_9 + T(6 - b) - 0.875P(6 - b)^2$$

$$M_{11} - M_9 = \frac{M_3 - M_9 + 31.5P}{6}(6 - b) - 0.875P(6 - b)^2$$

$$M_{11} \frac{6}{6 - b} - M_9 \frac{6}{6 - b} = M_3 - M_9 + 31.5P - 5.25P(6 - b)$$

$$-M_3 + M_{11} \frac{6}{6 - b} - M_9 \frac{6}{6 - b} = 5.25Pb$$

De este modo, las ecuaciones de equilibrio resultantes que rigen la estructura son

$$-M_5 + 1.5 M_6 - 0.5 M_7 = 12 P$$

$$-M_3 + 6M_{11}/(6 - b) - bM_9/(6 - b) = 5.25 P b$$

$$-M_4 + M_5 - M_7 + M_8 = 3 P$$

$$-M_1 + M_2 - M_{10} + M_{12} = 9 P$$

$$M_2 - M_3 - M_4 = 0$$

$$M_8 + M_9 - M_{10} = 0$$

Anexo III. Método paso a paso

El planteamiento del problema por el método paso a paso se basa en la obtención de 6 ecuaciones de compatibilidad que, unidas a las otras 6 ecuaciones de equilibrio permitan la obtención de la solución al problema.

Para encontrar las ecuaciones de compatibilidad, se han de elegir 6 sistemas de momentos virtuales m^* de carga exterior nula, con la única condición de que satisfagan las ecuaciones de equilibrio.

Las seis ecuaciones de compatibilidad las obtendremos al plantear:

$$0 = \int_E m^* \chi \, ds + \sum_E m^* \phi \quad (\text{AIII. 1})$$

o bien

$$0 = \int_E \frac{m^* M}{E I} \, ds + \sum_E m^* \phi \quad (\text{AIII. 2})$$

donde m^* son los momentos correspondientes al sistema virtual y χ y ϕ son las curvaturas y giros de la estructura real, respectivamente.

En el caso de las cargas puntuales, tanto los valores de m^* como de M en la integral de (AIII.2) varían linealmente, es decir

$$M(x) = M_A \left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_B \frac{x}{L}$$
$$m^*(x) = m_A^* \left(1 - \frac{x}{L}\right) + m_B^* \frac{x}{L}$$

Sustituyendo $M(x)$ y $m^*(x)$ en la integral de (AIII.2) se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_A^B \frac{m^* M}{E I} ds &= \frac{1}{E I} \int_0^L \left(m_A^* \left(1 - \frac{x}{L} \right) + m_B^* \frac{x}{L} \right) \left(M_A \left(1 - \frac{x}{L} \right) + M_B \frac{x}{L} \right) dx \\
&= \frac{1}{E I} \left[\int_0^L m_A^* \left(1 - \frac{x}{L} \right) * M_A \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx + \int_0^L m_A^* \left(1 - \frac{x}{L} \right) * M_B \frac{x}{L} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_0^L m_B^* \frac{x}{L} * M_A \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx + \int_0^L m_B^* \frac{x}{L} * M_B \frac{x}{L} dx \right] \\
&= \frac{1}{E I} \left[m_A^* M_A \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 dx + m_A^* M_B \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} dx \right. \\
&\quad \left. + m_B^* M_A \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx + m_B^* M_B \int_0^L \frac{x^2}{L^2} dx \right] \\
&= \frac{1}{E I} \left[m_A^* M_A \left(L + \frac{L^3}{3 L^2} - \frac{2 L^2}{2 L} \right) + m_A^* M_B \left(\frac{L^2}{2 L} - \frac{L^3}{3 L^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + m_B^* M_A \left(\frac{L^2}{2 L} - \frac{L^3}{3 L^2} \right) + m_B^* M_B \frac{L^3}{3 L^2} \right] \\
&= \frac{1}{E I} \left(\frac{L}{3} m_A^* M_A + \frac{L}{6} m_A^* M_B + \frac{L}{6} m_B^* M_A + \frac{L}{3} m_B^* M_B \right) \\
&= \frac{L}{6 E I} (2 m_A^* M_A + m_A^* M_B + m_B^* M_A + 2 m_B^* M_B)
\end{aligned}$$

Sin embargo, en el caso de una carga distribuida, m^* varía linealmente mientras que M es una función cuadrática:

$$\begin{aligned}
M(x) &= M_A \left(1 - \frac{x}{L} \right) + M_B \frac{x}{L} + \frac{q}{2} (L x - x^2) \\
m^*(x) &= m_A^* \left(1 - \frac{x}{L} \right) + m_B^* \frac{x}{L}
\end{aligned}$$

En este caso, la integral de (AIII.2) quedará

$$\begin{aligned}
\int_A^B \frac{m^* M}{E I} ds &= \frac{L}{6 E I} [m_A^* (2 M_A + M_B) + m_B^* (M_A + 2 M_B)] \\
&\quad + \int_0^L \frac{m^* \frac{q}{2} (L x - x^2)}{E I} dx
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{m^* \frac{q}{2} (L x - x^2)}{E I} dx &= \frac{1}{E I} \int_0^L \left(m_A^* \left(1 - \frac{x}{L} \right) + m_B^* \frac{x}{L} \right) \frac{q}{2} (L x - x^2) dx = \\
\int_A^B \frac{m^* M}{E I} ds &= \frac{L}{6 E I} [m_A^* (2 M_A + M_B) + m_B^* (M_A + 2 M_B)] + \frac{q L^3}{24 E I} (m_A^* + m_B^*)
\end{aligned}$$

y por tanto resulta

$$\int_A^B \frac{m^* M}{E I} ds = \frac{L}{6 E I} [m_A^* (2 M_A + M_B) + m_B^* (M_A + 2 M_B)] + \frac{q L^3}{24 E I} (m_A^* + m_B^*)$$

Las ecuaciones de equilibrio que se han de satisfacer son las siguientes

$$-m_5^* + 1,5 m_6^* - 0,5 m_7^* = 0 \quad (\text{AIII. 3})$$

$$-m_3^* - \frac{b}{6-b} m_9^* + \frac{6}{6-b} m_{11}^* = 0 \quad (\text{AIII. 4})$$

$$-m_4^* + m_5^* - m_7^* + m_8^* = 0 \quad (\text{AIII. 5})$$

$$-m_1^* + m_2^* - m_{10}^* + m_{12}^* = 0 \quad (\text{AIII. 6})$$

$$m_2^* - m_3^* - m_4^* = 0 \quad (\text{AIII. 7})$$

$$m_8^* + m_9^* - m_{10}^* = 0 \quad (\text{AIII. 8})$$

Para la obtención de las ecuaciones de compatibilidad hay que elegir por tanto 6 sistemas virtuales que satisfagan esas ecuaciones. Para todos los sistemas se va a utilizar la siguiente nomenclatura:

l_p : longitud de los pilares = 3m

$l_{v, i-j}$: longitud de la viga i-j

I_p : Inercia de los pilares

I_v : Inercia de las vigas

$$\alpha = \frac{I_v}{I_p} = 3,24796$$

Sistema 1

$$m_2^* = m_3^* = m_8^* = m_9^* = 0$$

$$m_1^* = m_5^* = 1$$

$$\text{De (AIII. 7): } m_4^* = 0$$

$$\text{De (AIII. 8): } m_{10}^* = 0$$

$$\text{De (AIII. 6): } m_{12}^* = 1$$

$$\text{De (AIII. 5): } m_7^* = 1$$

$$\text{De (AIII. 4): } m_{11}^* = 0$$

$$\text{De (AIII. 3): } 1,5 m_6^* = 1,5 \rightarrow m_6^* = 1$$

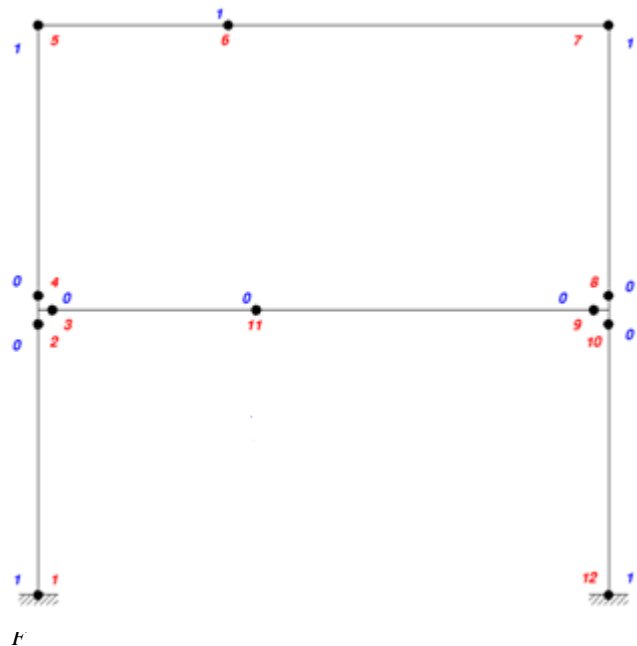


Figura 16. Valores de m^* en el sistema 1

Sustituyendo en (AIII. 2)

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{l_p}{6 E I_p} (2 M_1 + M_2) + \frac{l_p}{6 E I_p} (M_4 + 2 M_5) + \frac{l_{v,5-6}}{6 E \alpha I_p} (2 M_5 + M_6) \\
 & + \frac{l_{v,5-6}}{6 E \alpha I_p} (M_5 + 2 M_6) + \frac{l_{v,6-7}}{6 E \alpha I_p} (2 M_6 + M_7) \\
 & + \frac{l_{v,6-7}}{6 E \alpha I_p} (M_6 + 2 M_7) + \frac{l_p}{6 E I_p} (2 M_7 + M_8) + \frac{l_p}{6 E I_p} (M_{10} + 2 M_{12}) \\
 & + \phi_1 + \phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 M_1 + M_2 + M_4 + 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_5 + \frac{6}{\alpha} M_6 + 2 \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) M_7 + \\
 & + M_8 + M_{10} + 2 M_{12} + 2 E I_p (\phi_1 + \phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_{12}) = 0
 \end{aligned}$$

Sistema 2

$$m_3^* = m_5^* = m_7^* = m_9^* = m_{12}^* = 0$$

$$m_8^* = 1$$

$$\text{De (AIII. 3): } m_6^* = 0$$

$$\text{De (AIII. 4): } m_{11}^* = 0$$

$$\text{De (AIII. 5): } m_4^* = 1$$

$$\text{De (AIII. 7): } m_2^* = 1$$

$$\text{De (AIII. 8): } m_{10}^* = 1$$

$$\text{De (AIII. 6): } m_1^* = 0$$

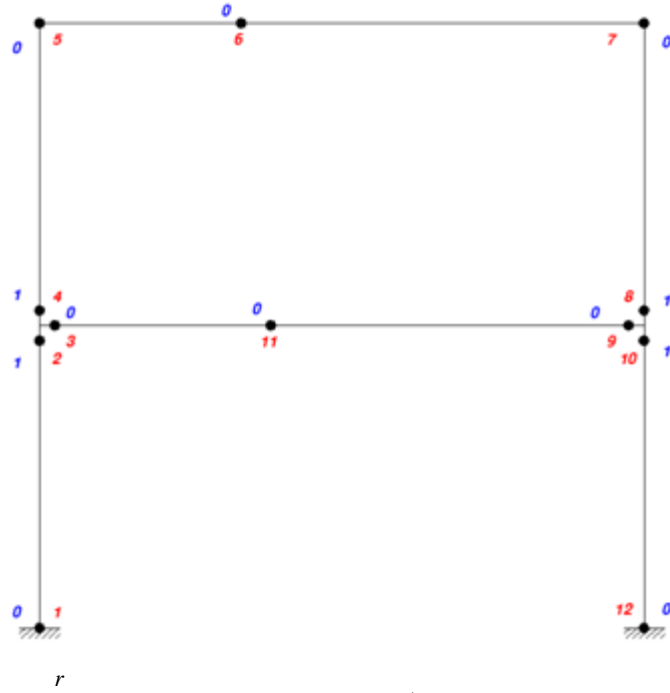


Figura 17. Valores de m^* en el sistema 2

Sustituyendo en (AIII. 2)

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{l_p}{6 E I_p} (M_1 + 2 M_2) + \frac{l_p}{6 E I_p} (2 M_4 + M_5) + \frac{l_p}{6 E I_p} (M_7 + 2 M_8) + \\
 & + \frac{l_p}{6 E I_p} (2 M_{10} + M_{12}) + \phi_2 + \phi_4 + \phi_8 + \phi_{10}
 \end{aligned}$$

Sistema 4

$$m_2^* = m_5^* = m_9^* = 0$$

$$m_1^* = m_{10}^* = 1$$

$$m_3^* = 0,5$$

$$\text{De (AIII. 7): } m_4^* = -0,5$$

$$\text{De (AIII. 6): } m_{12}^* = 2$$

$$\text{De (AIII. 4): } m_{11}^* = \frac{3 - 0,5 b}{6}$$

$$\text{De (AIII. 8): } m_8^* = 1$$

$$\text{De (AIII. 5): } m_7^* = 1,5$$

$$\text{De (AIII. 3): } m_6^* = 0,5$$

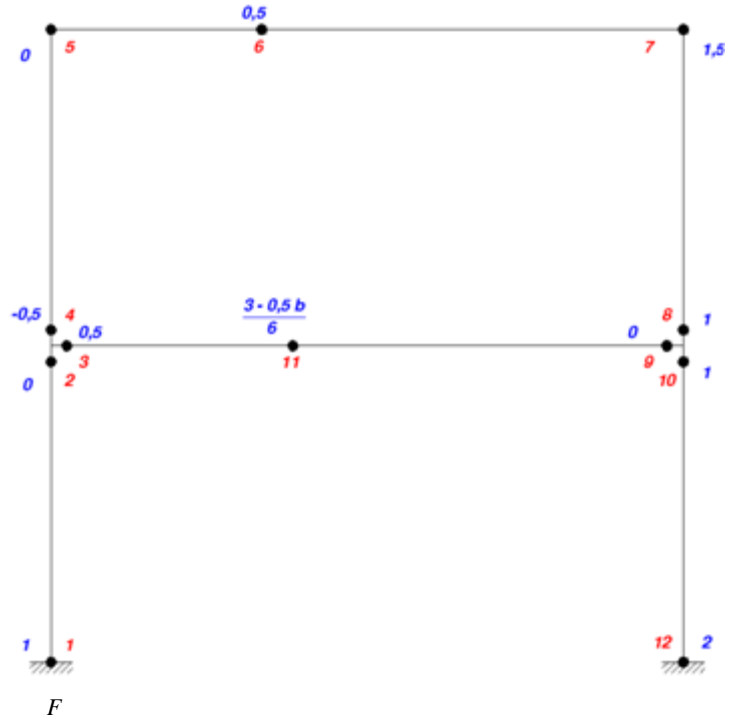


Figura 19. Valores de m^* en el sistema 4

Sustituyendo en (AIII. 2)

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{l_p}{6 E I_p} (2 M_1 + M_2) - \frac{l_p}{6 E I_p} 0,5 (2 M_4 + M_5) + \frac{l_p}{6 E \alpha I_p} \frac{2}{3} 0,5 (M_5 + 2 M_6) \\
 & + \frac{l_p}{6 E \alpha I_p} \frac{4}{3} 0,5 (2 M_6 + M_7) + \\
 & \frac{l_p}{6 E \alpha I_p} \frac{4}{3} 1,5 (M_6 + 2 M_7) + \frac{l_p}{6 E I_p} 1,5 (2 M_7 + M_8) + \frac{l_p}{6 E I_p} (M_7 + 2 M_8) \\
 & + \frac{l_p}{6 E I_p} (2 M_{10} + M_{12}) + \frac{l_p}{6 E I_p} 2 (M_{10} + 2 M_{12}) \\
 & + \frac{l_p}{6 E \alpha I_p} \frac{b}{3} 0,5 (2 M_3 + M_{11}) + \frac{l_p}{6 E \alpha I_p} \frac{b}{3} \frac{3 - 0,5 b}{6} (M_3 + 2 M_{11}) \\
 & + \\
 & + \frac{q l_{v,3-11}^3}{24 E \alpha I_p} \left(0,5 + \frac{3 - 0,5 b}{6} \right) + \frac{l_p}{6 E \alpha I_p} \frac{6 - b}{3} \frac{3 - 0,5 b}{6} (2 M_{11} + M_9) \\
 & + \frac{q l_{v,11-9}^3}{24 E \alpha I_p} \left(\frac{3 - 0,5 b}{6} + 0 \right) + \\
 & + \phi_1 + 0,5 \phi_3 - 0,5 \phi_4 + 0,5 \phi_6 + 1,5 \phi_7 + \phi_8 + \phi_{10} + \frac{3 - 0,5 b}{6} \phi_{11} + 2 \phi_{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 M_1 + M_2 + \left(\frac{b}{2 \alpha} - \frac{b^2}{36 \alpha} \right) M_3 - M_4 + \left(-0,5 + \frac{1}{3 \alpha} \right) M_5 + \frac{4}{\alpha} M_6 + \left(4 + \frac{14}{3 \alpha} \right) M_7 + \\
& + 3,5 M_8 + \frac{(6-b)^2}{36 \alpha} M_9 + 4 M_{10} + \left(\frac{0,5 b}{3 \alpha} + \frac{3 b - 0,5 b^2}{9 \alpha} + \frac{(6-b)^2}{18 \alpha} \right) M_{11} + 5 M_{12} + \\
& + \frac{q b^3}{12 \alpha} \left(\frac{6 - 0,5 b}{6} \right) + \frac{q (6-b)^4}{144 \alpha} + \\
& + 2 E I_p \left(\phi_1 + 0,5 \phi_3 - 0,5 \phi_4 + 0,5 \phi_6 + 1,5 \phi_7 + \phi_8 + \phi_{10} + \frac{3 - 0,5 b}{6} \phi_{11} \right. \\
& \left. + 2 \phi_{12} \right) = 0
\end{aligned}$$

Sistema 5

$$m_6^* = m_8^* = m_9^* = 0$$

$$m_1^* = m_3^* = m_7^* = 1$$

$$\text{De (AIII. 3): } m_5^* = -0,5$$

$$\text{De (AIII. 8): } m_{10}^* = 0$$

$$\text{De (AIII. 4): } m_{11}^* = \frac{6-b}{6}$$

$$\text{De (AIII. 5): } m_4^* = -1,5$$

$$\text{De (AIII. 7): } m_2^* = -0,5$$

$$\text{De (AIII. 6): } m_{12}^* = 1,5$$

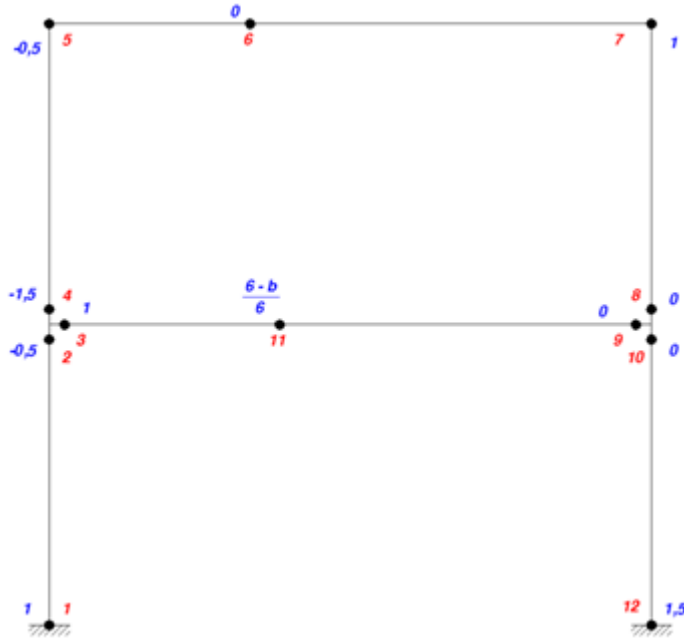


Figura 20. Valores de m^* en el sistema 5

Sustituyendo en (AIII. 2)

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{l_p}{6 E I_p} (2 M_1 + M_2) - \frac{l_p}{6 E I_p} 0,5 (M_1 + 2 M_2) - \frac{l_p}{6 E I_p} 1,5 (2 M_4 + M_5) \\
& - \frac{l_p}{6 E I_p} 0,5 (M_4 + 2 M_5) - \frac{l_{v,5-6}}{6 E I_v} 0,5 (2 M_5 + M_6) \\
& + \frac{l_{v,6-7}}{6 E I_v} (M_6 + 2 M_7) + \frac{l_p}{6 E I_p} (2 M_7 + M_8) \\
& + \frac{l_p}{6 E I_p} 1,5 (M_{10} + 2 M_{12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \\
& + \frac{l_p}{6 E \alpha I_p} \frac{b}{3} (2 M_3 + M_{11}) + \frac{l_p}{6 E \alpha I_p} \frac{b}{3} \frac{6-b}{6} (M_3 + 2 M_{11}) \\
& \quad + \frac{q l_{v,3-11}^3}{24 E \alpha I_p} \left(1 + \frac{6-b}{6}\right) + \\
& + \frac{l_p}{6 E \alpha I_p} \frac{6-b}{3} \frac{6-b}{6} (2 M_{11} + M_9) + \frac{q l_{v,11-9}^3}{24 E \alpha I_p} \left(\frac{6-b}{6} + 0\right) + \\
& + \phi_1 - 0,5 \phi_2 + \phi_3 - 1,5 \phi_4 - 0,5 \phi_5 + \phi_7 + \frac{6-b}{6} \phi_{11} + 1,5 \phi_{12} \\
& 1,5 M_1 + \left(\frac{b}{\alpha} - \frac{b^2}{18 \alpha}\right) M_3 - 3,5 M_4 - \left(2,5 + \frac{2}{3 \alpha}\right) M_5 + \frac{1}{\alpha} M_6 + \left(2 + \frac{8}{3 \alpha}\right) M_7 + M_8 \\
& \quad + \frac{(6-b)^2}{18 \alpha} M_9 + 1,5 M_{10} + \left(\frac{b}{\alpha} - \frac{b^2}{9 \alpha} + \frac{(6-b)^2}{9 \alpha}\right) M_{11} + 3 M_{12} \\
& \quad + \frac{q b^3}{12 \alpha} \left(\frac{12-b}{6}\right) + \frac{q (6-b)^4}{72 \alpha} \\
& \quad + 2 E I_p \left(\phi_1 - 0,5 \phi_2 + \phi_3 - 1,5 \phi_4 - 0,5 \phi_5 + \phi_7 + \frac{6-b}{6} \phi_{11} \right. \\
& \quad \left. + 1,5 \phi_{12}\right) = 0
\end{aligned}$$

Sistema 6

$$m_1^* = m_2^* = m_5^* = m_{10}^* = 0$$

$$m_3^* = m_9^* = 1$$

$$\text{De (AIII. 7): } m_4^* = -1$$

$$\text{De (AIII. 8): } m_8^* = -1$$

$$\text{De (AIII. 6): } m_{12}^* = 0$$

$$\text{De (AIII. 5): } m_7^* = 0$$

$$\text{De (AIII. 3): } m_6^* = 0$$

$$\text{De (AIII. 4): } m_{11}^* = \frac{6-b}{6} + \frac{b}{6} = 1$$

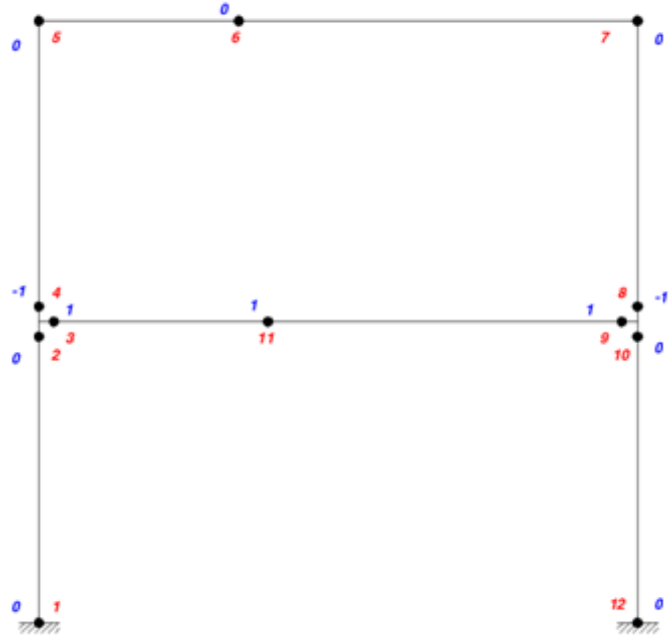


Figura 21. Valores de m^* en el sistema 6

Sustituyendo en (AIII. 2)

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{l_p}{6 E I_p} (2 M_4 + M_5) - \frac{l_p}{6 E I_p} (M_7 + 2 M_8) + \frac{l_{v,3-11}}{6 E I_v} (2 M_3 + M_{11}) + \\
& + \frac{l_{v,3-11}}{6 E I_v} [M_3 + 2 M_{11}] + \frac{q l_{v,3-11}^3}{24 E I_v} (1 + 1) + \frac{l_{v,11-9}}{6 E I_v} [2 M_{11} + M_9] + \\
& + \frac{l_{v,11-9}}{6 E I_v} [M_{11} + 2 M_9] + \frac{q l_{v,11-9}^3}{24 E I_v} (1 + 1) + \phi_3 - \phi_4 - \phi_8 + \phi_9 + \phi_{11} \\
\\
& \frac{b}{\alpha} M_3 - 2 M_4 - M_5 - M_7 - 2 M_8 + \frac{(6-b)}{\alpha} M_9 + \frac{6}{\alpha} M_{11} + \frac{q b^3}{6 \alpha} + \frac{q (6-b)^3}{6 \alpha} + \\
& + 2 E I_p (\phi_3 - \phi_4 - \phi_8 + \phi_9 + \phi_{11}) = 0
\end{aligned}$$

En resumen, las seis ecuaciones de compatibilidad obtenidas tras la resolución de los seis sistemas planteados son las siguientes

$$\begin{aligned}
2 M_1 + M_2 + M_4 + 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_5 + \frac{6}{\alpha} M_6 + 2 \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) M_7 + M_8 \\
+ M_{10} + 2 M_{12} + 2 E I_p (\phi_1 + \phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_{12}) = 0
\end{aligned} \tag{AIII. 9}$$

$$\begin{aligned}
M_1 + 2 M_2 + 2 M_4 + M_5 + M_7 + 2 M_8 + 2 M_{10} + M_{12} + \\
2 E I_p (\phi_2 + \phi_4 + \phi_8 + \phi_{10}) = 0
\end{aligned} \tag{AIII. 10}$$

$$\begin{aligned}
M_4 + 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_5 + \frac{6}{\alpha} M_6 + 2 \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) M_7 + M_8 + 2 E I_p (\phi_5 + \\
\phi_6 + \phi_7) = 0
\end{aligned} \tag{AIII. 11}$$

$$\begin{aligned}
2 M_1 + M_2 + \left(\frac{b}{2 \alpha} - \frac{b^2}{36 \alpha}\right) M_3 - M_4 + \left(-0,5 + \frac{1}{3 \alpha}\right) M_5 + \frac{4}{\alpha} M_6 + \\
\left(4 + \frac{14}{3 \alpha}\right) M_7 + 3,5 M_8 + \frac{(6-b)^2}{36 \alpha} M_9 + 4 M_{10} + \left(\frac{0,5 b}{3 \alpha} + \frac{3 b - 0,5 b^2}{9 \alpha} + \right. \\
\left. \frac{(6-b)^2}{18 \alpha}\right) M_{11} + 5 M_{12} + \frac{q b^3}{12 \alpha} \left(\frac{6-0,5 b}{6}\right) + \frac{q (6-b)^4}{144 \alpha} + 2 E I_p (\phi_1 + \\
0,5 \phi_3 - 0,5 \phi_4 + 0,5 \phi_6 + 1,5 \phi_7 + \phi_8 + \phi_{10} + \frac{3-0,5 b}{6} \phi_{11} + \\
2 \phi_{12}) = 0
\end{aligned} \tag{AIII. 12}$$

$$\begin{aligned}
& 1,5 M_1 + \left(\frac{b}{\alpha} - \frac{b^2}{18 \alpha} \right) M_3 - 3,5 M_4 - \left(2,5 + \frac{2}{3 \alpha} \right) M_5 + \frac{1}{\alpha} M_6 \\
& + \left(2 + \frac{8}{3 \alpha} \right) M_7 + M_8 + \frac{(6-b)^2}{18 \alpha} M_9 + 1,5 M_{10} \\
& + \left(\frac{b}{\alpha} - \frac{b^2}{9 \alpha} + \frac{(6-b)^2}{9 \alpha} \right) M_{11} + 3 M_{12} \\
& + \frac{q b^3}{12 \alpha} \left(\frac{12-b}{6} \right) + \frac{q (6-b)^4}{72 \alpha} \\
& + 2 E I_p \left(\phi_1 - 0,5 \phi_2 + \phi_3 - 1,5 \phi_4 - 0,5 \phi_5 \right. \\
& \left. + \phi_7 + \frac{6-b}{6} \phi_{11} + 1,5 \phi_{12} \right) = 0
\end{aligned} \tag{AIII. 13}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{b}{\alpha} M_3 - 2 M_4 - M_5 - M_7 - 2 M_8 + \frac{(6-b)}{\alpha} M_9 + \frac{6}{\alpha} M_{11} + \frac{q b^3}{6 \alpha} \\
& + \frac{q (6-b)^3}{6 \alpha} + 2 E I_p (\phi_3 - \phi_4 - \phi_8 + \phi_9 \\
& + \phi_{11}) = 0
\end{aligned} \tag{AIII. 14}$$

A partir de las ecuaciones anteriores, se ha explicado en el Apartado 4.3. el proceso de cálculo para la obtención de las diferentes rótulas plásticas paso a paso. Se muestra a continuación un resumen de la sucesiva formación de las rótulas detallando el incremento de carga a aplicar entre la formación de una rótula y la siguiente y los diagramas de momentos flectores de la estructura en cada paso.

La formación de la primera rótula aparece en el punto 10 y se produce cuando se aplica una carga $P=5113$ kg. En la Figura 22 se muestra el diagrama de momentos flectores para ese momento. Se observa que el punto 10 es el primero en alcanzar el valor del momento plástico de los pilares, es decir, $M_p=18031$ y por tanto, ese es el punto en que se forma la primera rótula plástica.

Al ir incrementando la carga, el siguiente punto de la estructura que alcanza su momento plástico es el punto 7 y por consiguiente es ahí donde aparece la segunda rótula plástica. Para que se alcance M_p en dicho punto es necesario un incremento de 235 kg, por lo que la carga aplicada en este caso es $P=5348$ kg. En la Figura 23 se observa que efectivamente, el valor del momento plástico en el nodo 7 es de 18031 kgm.

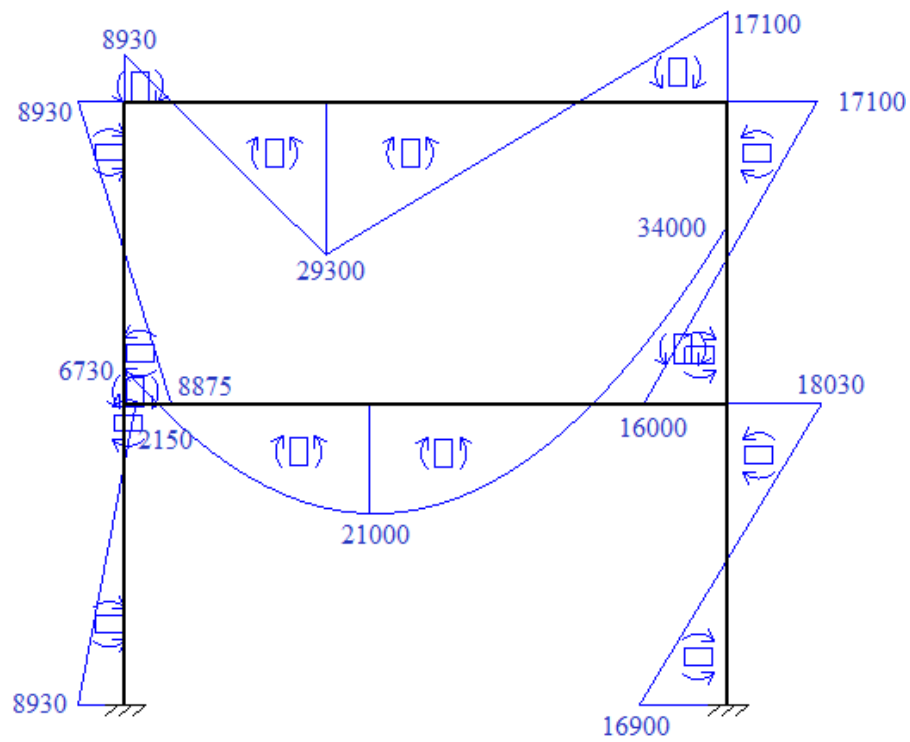


Figura 22. Momentos flectores en la formación de la primera rótula

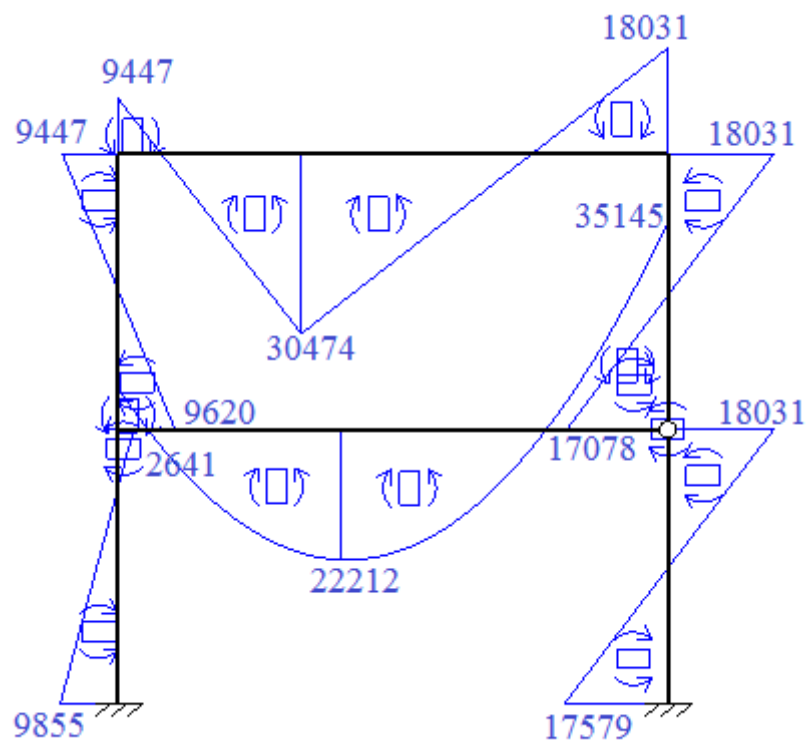


Figura 23. Momentos flectores en la formación de la segunda rótula

La tercera rótula plástica se forma en el nodo 12. Como se observa en la Figura 24, el momento plástico de este punto ha alcanzado también el momento plástico de la sección del pilar. La carga aplicada cuando el momento flector del punto 12 llega al valor de M_p es de $P=5491$ kg.

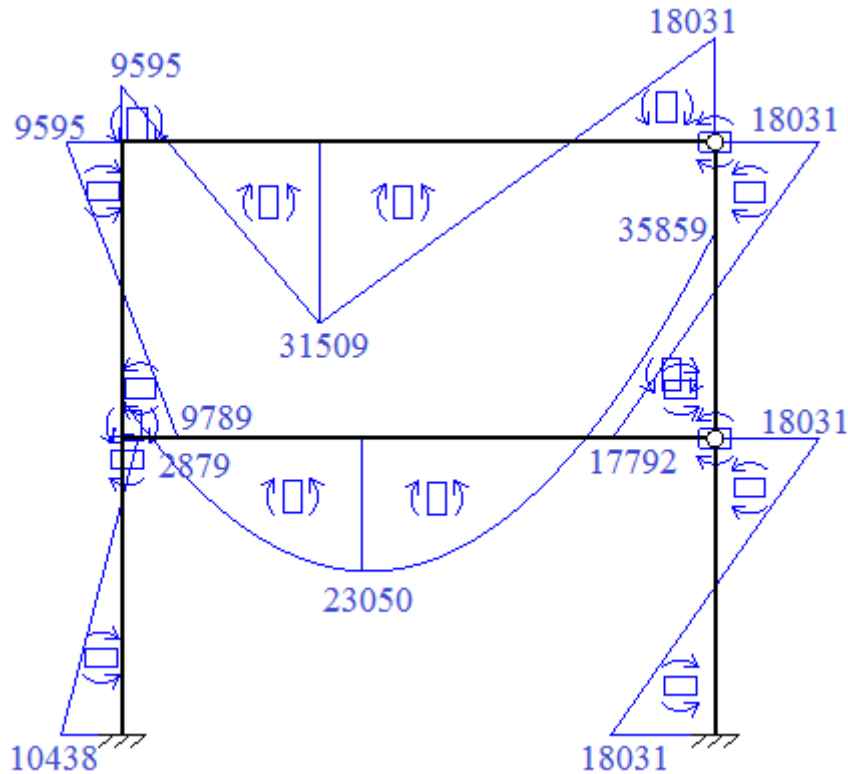


Figura 24. Momentos flectores en la formación de la tercera rótula

Si se sigue incrementando la carga, el siguiente nodo que alcanza el valor plástico es el 8. La carga aplicada en el momento en que el momento flector del nodo 8 alcanza el valor de $M_p=18031$ kgm es $P=5530$ kg. Los diagramas de los momentos flectores cuando se produce la cuarta rótula se observan en la Figura 25. Debido a que en los nudos 8, 9 y 10 existe un nudo, al haberse formado rótulas plásticas en los nodos 8 y 10, el nodo 9 alcanza también el momento plástico de su sección. Como el nodo 9 se encuentra a la derecha de la jácena de la primera planta y las jácenas tienen el doble de módulo plástico que los pilares, el valor del momento plástico el punto 9 se puede observar en la Figura 25 que es $2M_p=36062$ kgm.

En la Figura 26 se muestran los diagramas de momentos flectores cuando se produce la formación de la quinta rótula plástica. Ésta aparece en el nodo 6 cuando la carga alcanza el valor de 5986 kg.

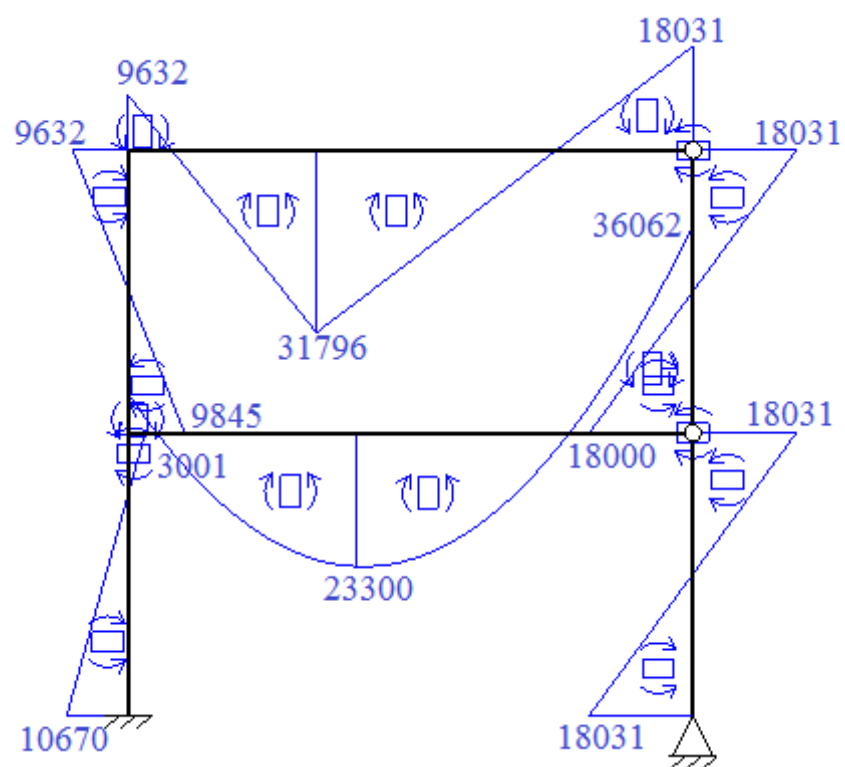


Figura 25. Momentos flectores en la formación de la cuarta rótula

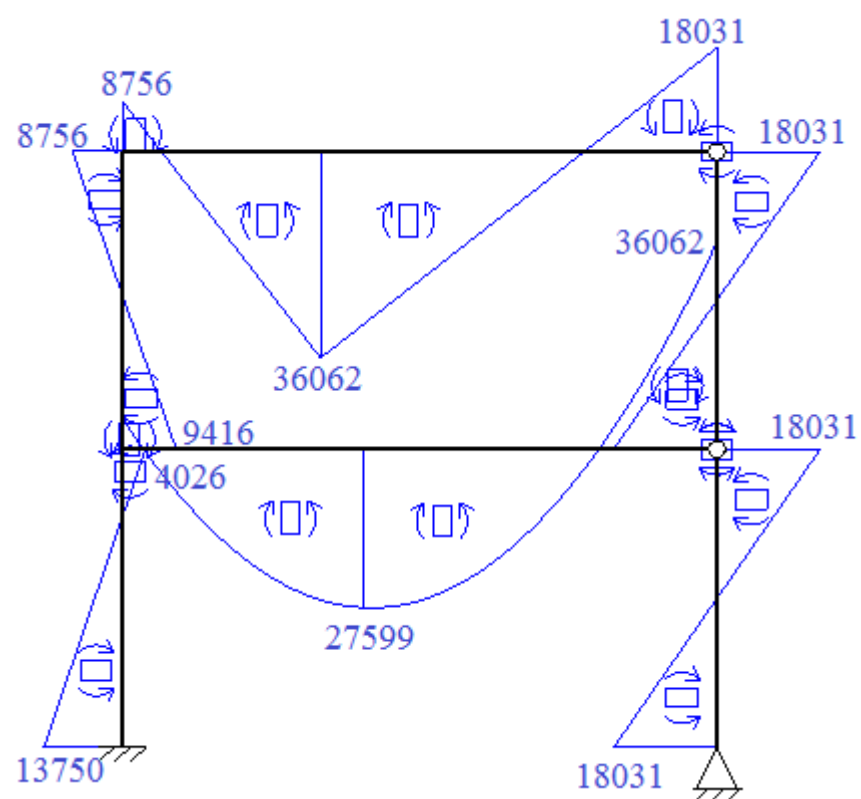


Figura 26. Momentos flectores en la formación de la quinta rótula

La sexta rótula plástica se forma en el nodo 1 cuando la carga se incrementa hasta $P=6450$ kg. En ese momento, el momento plástico del nodo 1 alcanza el valor de $M_p=18031$ kgm (Figura 27). En este momento el mecanismo es isostático. Al incrementar la carga hasta $P=6487$ kg, se produce la formación de la séptima rótula en el nodo 11 (Figura 28) que hace que el mecanismo colapse. Por tanto, la carga última que puede asumir la estructura es de 6487 kg.

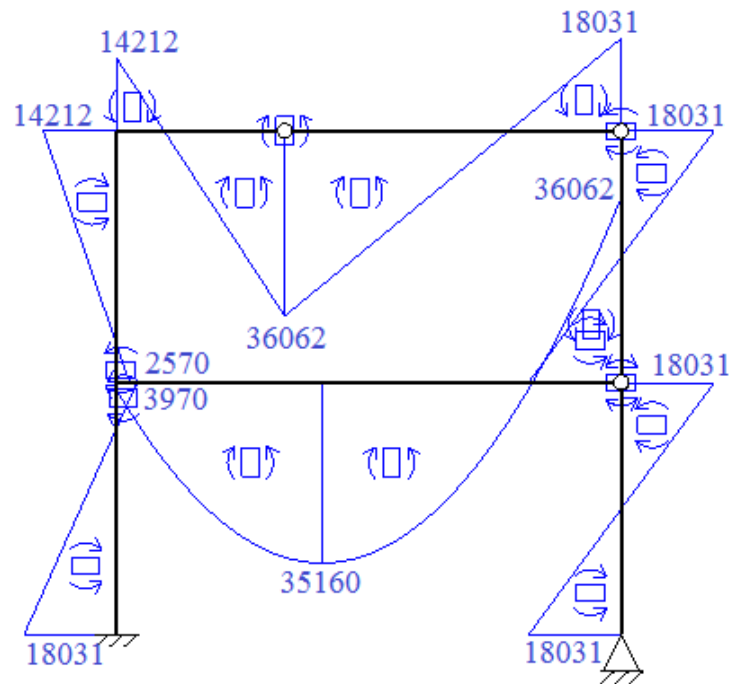


Figura 27. Momentos flectores en la formación de la quinta rótula

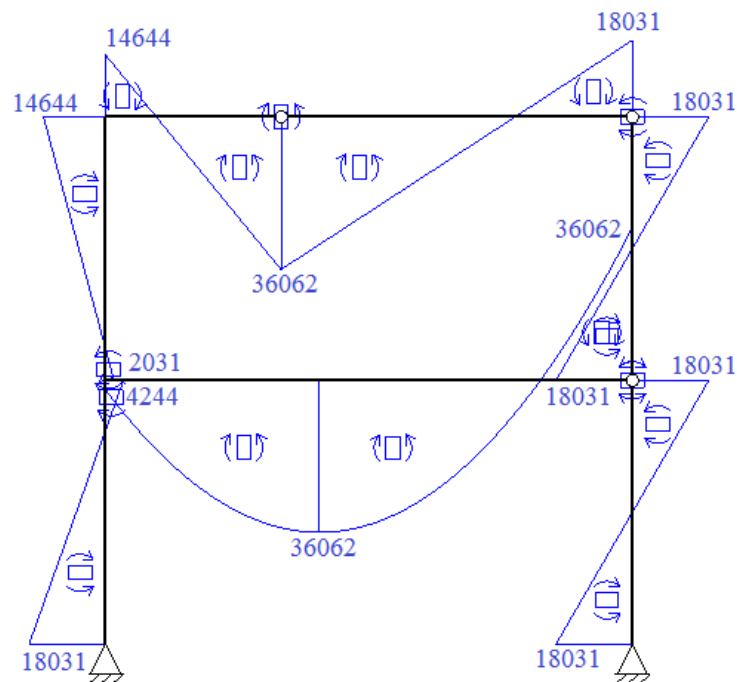


Figura 28. Momentos flectores en la formación de la séptima rótula

Anexo IV. Análisis con Abaqus

La simulación realizada con Abaqus para analizar un problema de plastificación se ha llevado a cabo para una biga biempotrada con carga distribuida. Se ha realizado, además del análisis de plastificación, un análisis previo de pandeo de la viga. El objetivo de dicho análisis es asegurar que el tipo de viga elegida no presenta problemas de inestabilidades locales que produzcan pandeo y que imposibiliten el análisis de plastificación para la misma.

III. 1. Realización del modelo

En la sección 5 de la memoria se ha estudiado la sucesiva aparición de las rótulas plásticas para el problema particular de la viga biempotrada con carga distribuida. Se conoce que las dos primeras rótulas aparecen en los extremos empotrados cuando el valor de la carga aplicada es tal que produce que el momento flector en los extremos alcance el momento plástico. Con el objetivo de forzar la aparición de las rótulas en la zona de los extremos de la viga que más nos interese, se ha realizado el modelo introduciéndole una pequeña rebaja en la sección de ambos extremos (Figura 29). Al reducir la sección de la zona se consigue que los momentos sean mayores que en el resto del perfil ante la misma carga y por tanto, esa zona alcanzará antes el valor del momento plástico.

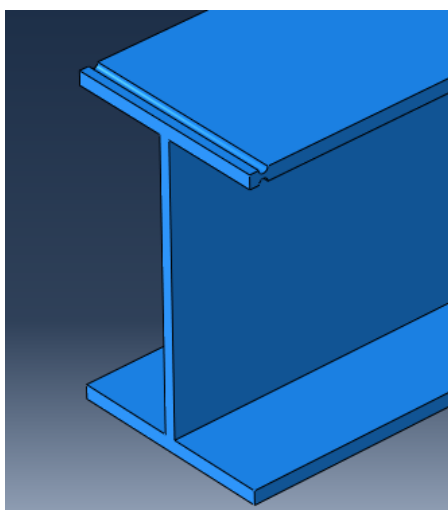


Figura 29. Rebaja en la sección de la viga

Las condiciones de contorno y la carga se introducen como se muestra en la Figura 30. Ambos extremos de la viga se disponen empotrados y el valor de la carga distribuida es de $1,5\text{N/mm}^2$.

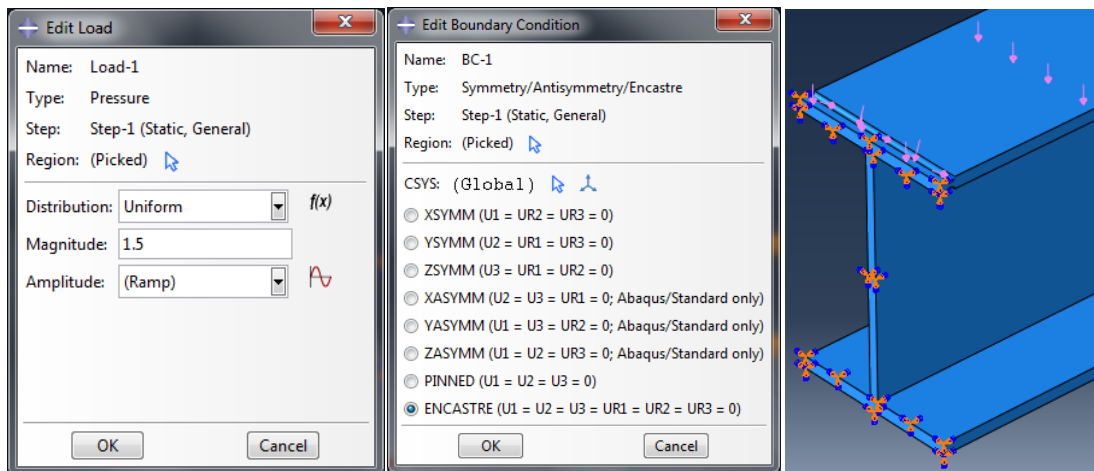


Figura 30. Carga y condiciones de contorno

El material utilizado es el acero. Como se va trabajar en régimen plástico, es necesario introducirle propiedades elásticas y plásticas como se muestra en la Figura 31. La propiedad elástica se ha introducido de manera que el material tenga plasticidad perfecta para continuar con la hipótesis de material elastoplástico perfecto considerada en la primera parte del proyecto.



Figura 31. Propiedades elásticas y plásticas del acero

Una vez dibujada la geometría deseada e introducidos todos los parámetros necesarios comentados anteriormente se procede al mallado del modelo. Éste se ha realizado de manera que posea más elementos en los extremos de la viga para apreciar mejor la formación de las primeras rótulas (Figura 32).

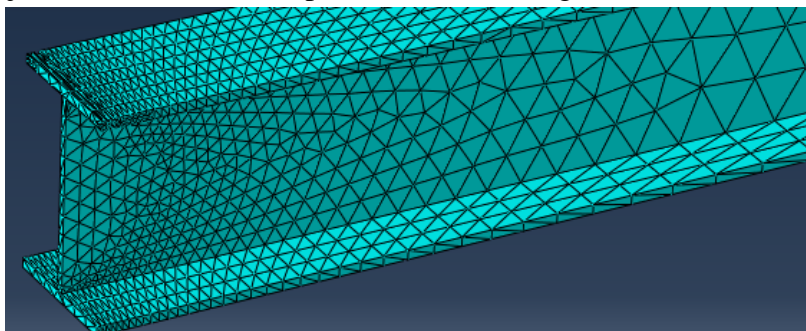


Figura 32. Mallado del modelo

III. 2. Análisis de pandeo

El pandeo es un fenómeno de inestabilidad que puede darse en elementos comprimidos esbeltos y se manifiesta por la aparición de desplazamientos importantes transversales. Por ello, como ya ha sido explicado es necesario asegurar que no se van a producir fenómenos pandeo en la viga estudiada que impidan realizar el análisis plástico correctamente.

Para determinar si se produce pandeo, es necesaria la obtención de α_{cr} , que es el parámetro que mide la estabilidad de la estructura. Este parámetro se trata del factor por el que hay que multiplicar la carga aplicada para que la estructura pandee. Es decir, si α_{cr} es mayor que 1, se asegura que la estructura sufrirá antes el agotamiento plástico que el fallo por pandeo.

El cálculo de α_{cr} computacional, en este caso con Abaqus, se realiza a partir de un análisis de valores propios. El primer valor de α_{cr} que da el programa pertenece al primer modo de pandeo que se produce en la estructura. En la Figura 33 se muestra este primer modo de pandeo que se produce. Las deformaciones de las figuras tienen un factor de ampliación de 200.

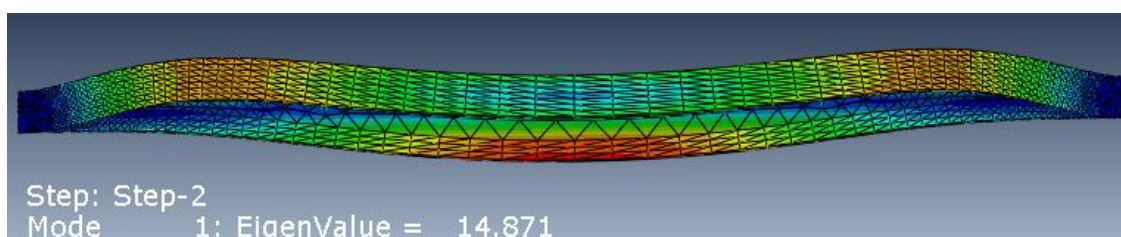


Figura 33 .Primer modo de pandeo de la viga

Se observa que el primer modo de pandeo que aparece en la viga se trata de un pandeo flexo torsional o pandeo lateral, cuya α_{cr} es de 14,871. Se puede asegurar por tanto que con la carga aplicada al modelo no se va a producir pandeo en la misma.

En la Figura 34 se observa que para el segundo modo de pandeo de la viga, esta pandea según un modo de flexión puro en el eje de menor inercia. El α_{cr} para este caso es de 24,6548.

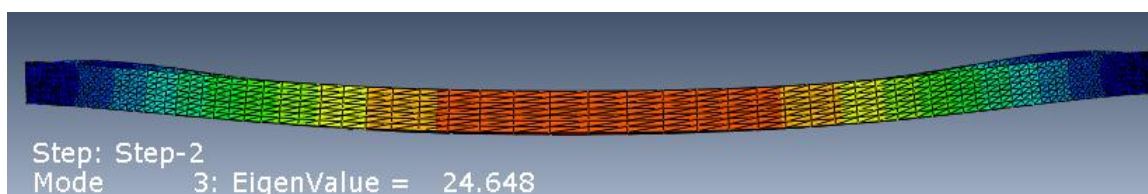


Figura 34. Segundo modo de pandeo de la viga

El siguiente modo de pandeo se muestra en la Figura 35. Se trata de un pandeo producido por inestabilidades locales en la zona de los empotramientos. El α_{cr} para este modo de pandeo es de 25,978, por lo que se puede asegurar que la rebaja

introducida en la sección en la zona de los empotramientos no produce fallos de carácter local.

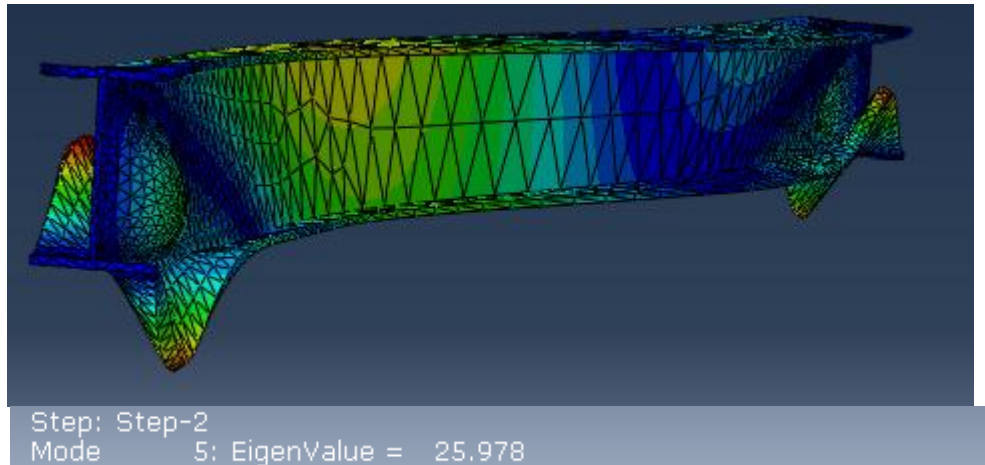


Figura 35. Tercer modo de pandeo de la viga

Una vez realizado el análisis de pandeo y viendo que éste no afecta el modelo estudiado, se pasa a realizar el análisis plástico del mismo.

III. 3. Análisis de plastificación

El cálculo del análisis plástico es realizado por Abaqus de manera incremental. La carga se va aumentando desde el 0% de la carga total hasta aplicar el 100% de la misma. El proceso paso a paso que realiza el programa se detalla en la Tabla 1.

Para este caso, se ha fijado que la carga se incremente inicialmente un 5% en cada paso. Se observa en la Tabla 1 que hasta el paso número 13 el programa ha aplicado en cada incremento un 5% más de carga que para el paso precedente. En el momento en que aumentar un 5% la carga supone problemas de cálculo para el programa, éste reduce este incremento y vuelve a recalcular. Este proceso lo realiza de manera iterativa (en este caso en 36 pasos) hasta que aplica el 100% de la carga y termina el cálculo.

Una vez terminado el cálculo es posible visualizar los resultados del mismo. En la Figura 36 se observa que con la aplicación del 30% de la carga total, la zona de los extremos empotrados comienza a plastificar. Como se vio en el apartado 5 la carga aplicada para el comienzo de la plastificación es de $0,45 \text{ N/mm}^2$ y coincide con la carga necesaria hallada de manera analítica.

En la Figura 37 se muestran los desplazamientos sufridos por la viga para ese paso. En los extremos, al disponerse empotrados tienen desplazamiento nulo, mientras que en el centro de la viga existe un desplazamiento de 8,77 mm.

Tabla 1. Cálculo incremental de Abaqus

Step	Increment	Att	Severe Discon Iter	Equil Iter	Total Iter	Total Time/Freq	Step Time/LPF	Time/LPF Inc
1	1	1	0	1	1	0.05	0.05	0.05
1	2	1	0	1	1	0.1	0.1	0.05
1	3	1	0	3	3	0.15	0.15	0.05
1	4	1	0	3	3	0.2	0.2	0.05
1	5	1	0	3	3	0.25	0.25	0.05
1	6	1	0	3	3	0.3	0.3	0.05
1	7	1	0	3	3	0.35	0.35	0.05
1	8	1	0	4	4	0.4	0.4	0.05
1	9	1	0	4	4	0.45	0.45	0.05
1	10	1	0	4	4	0.5	0.5	0.05
1	11	1	0	5	5	0.55	0.55	0.05
1	12	1	0	5	5	0.6	0.6	0.05
1	13	1U	0	4	4	0.6	0.6	0.05
1	13	2	0	4	4	0.6125	0.6125	0.0125
1	14	1	0	4	4	0.625	0.625	0.0125
1	15	1	0	4	4	0.64375	0.64375	0.01875
1	16	1	0	4	4	0.671875	0.671875	0.028125
1	17	1	0	5	5	0.714063	0.714063	0.0421875
1	18	1	0	5	5	0.75625	0.75625	0.0421875
1	19	1	0	6	6	0.798437	0.798437	0.0421875
1	20	1	0	5	5	0.840625	0.840625	0.0421875
1	21	1U	0	1	1	0.840625	0.840625	0.0421875
1	21	2	0	3	3	0.851172	0.851172	0.0105469
1	22	1	0	3	3	0.861719	0.861719	0.0105469
1	23	1	0	3	3	0.877539	0.877539	0.0158203
1	24	1	0	4	4	0.90127	0.90127	0.0237305
1	25	1U	0	1	1	0.90127	0.90127	0.0355957
1	25	2	0	3	3	0.910168	0.910168	0.00889893
1	26	1	0	3	3	0.923517	0.923517	0.0133484
1	27	1	0	4	4	0.943539	0.943539	0.0200226
1	28	1U	0	1	1	0.943539	0.943539	0.0300339
1	28	2	0	3	3	0.951048	0.951048	0.00750847
1	29	1	0	3	3	0.962311	0.962311	0.0112627
1	30	1U	0	1	1	0.962311	0.962311	0.0168941
1	30	2	0	2	2	0.966534	0.966534	0.00422351
1	31	1	0	3	3	0.972869	0.972869	0.00633527
1	32	1	0	3	3	0.982372	0.982372	0.00950291
1	33	1U	0	1	1	0.982372	0.982372	0.0142544
1	33	2	0	2	2	0.985936	0.985936	0.00356359
1	34	1	0	2	2	0.991281	0.991281	0.00534538
1	35	1	0	3	3	0.999299	0.999299	0.00801808
1	36	1	0	1	1	1	1	0.000700659

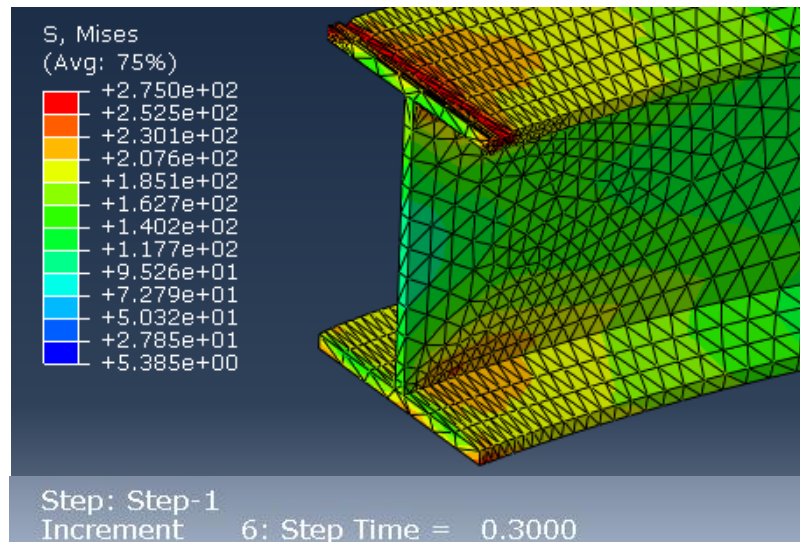


Figura 36. Inicio de plastificación de los extremos

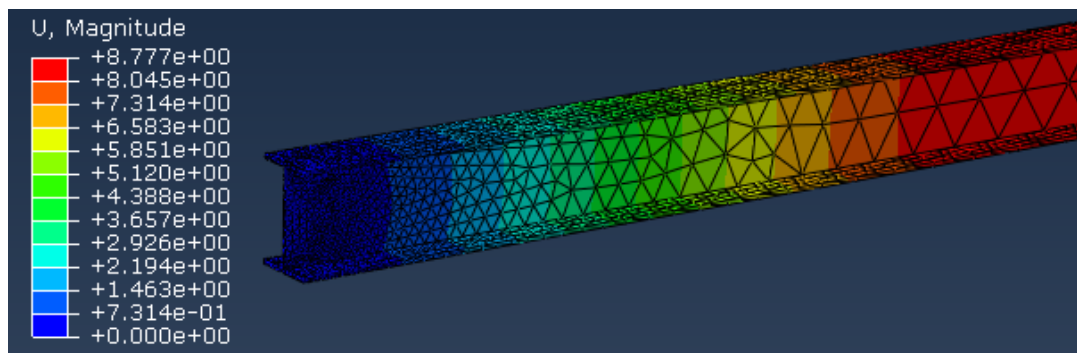


Figura 37. Desplazamientos con el 30% de carga

La carga continúa aumentando y la sección de los extremos empotrados plastifica completamente cuando se alcanza el 45 % de la carga total aplicada.

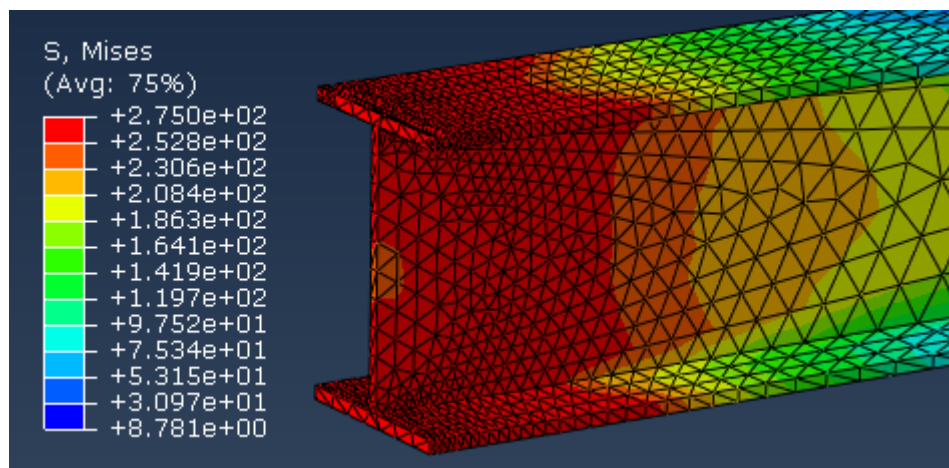


Figura 38. Plastificación completa de los extremos

En las Figuras 38 y 39 se muestran las tensiones y desplazamientos, respectivamente, para el caso citado. Los desplazamientos en los extremos no varían ya que están impedidos, mientras que en el centro de la viga aumentan hasta 22,39 mm.

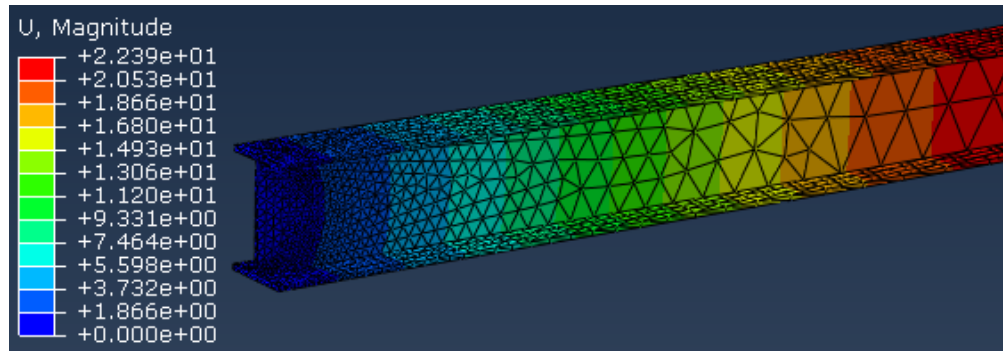


Figura 39. Desplazamientos con el 45% de carga

Cuando se incrementa hasta el 50% de la carga, la plastificación llega al centro de la sección como se observa en la Figura 40. La Figura 41 muestra los desplazamientos para ese punto: el centro de la sección se desplaza 22,39mm.

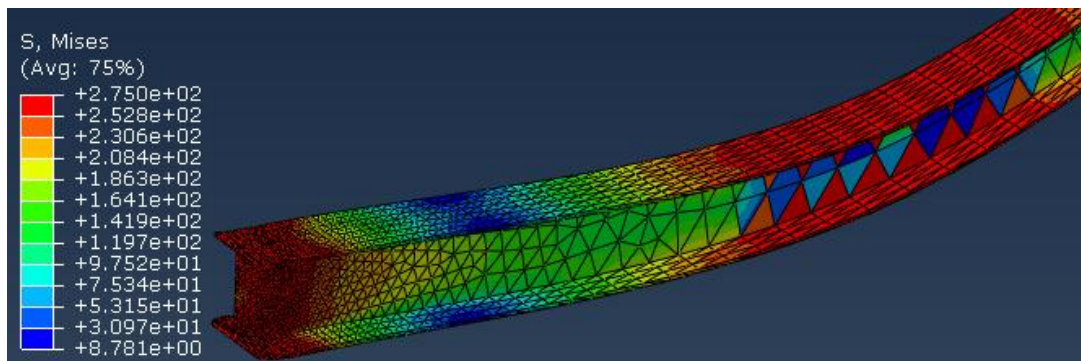


Figura 40. Inicio de plastificación en el centro

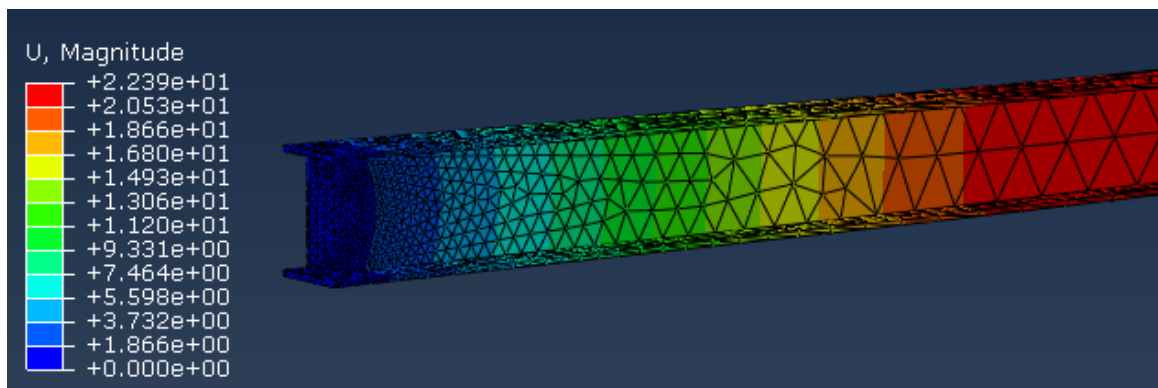


Figura 41. Desplazamientos con el 60% de carga

Finalmente, cuando la carga llega al 64,37% (Figura 42) de la carga total aplicada, la sección central termina de plastificar completamente y se forma la rótula plástica. En la Figura 43 se muestran los desplazamientos cuando se forma la tercera rótula plástica. Se observa que el desplazamiento del centro aumenta notablemente hasta los 195,9mm.

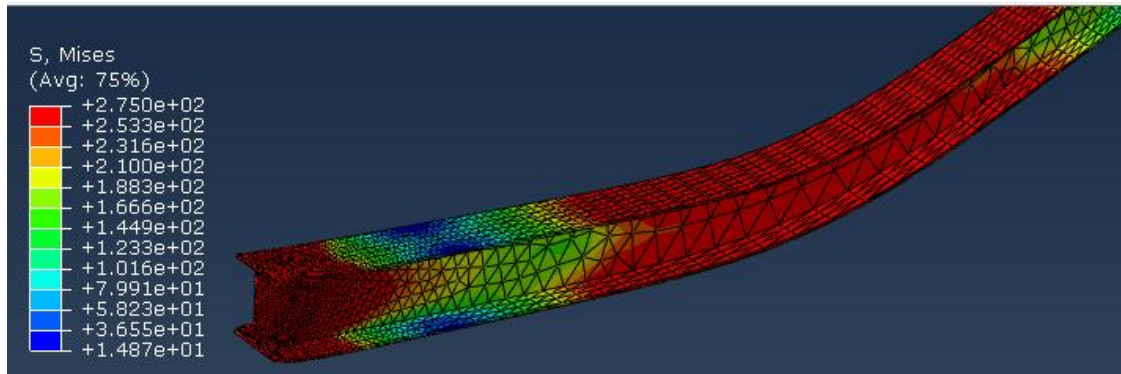


Figura 42. Plastificación en el centro

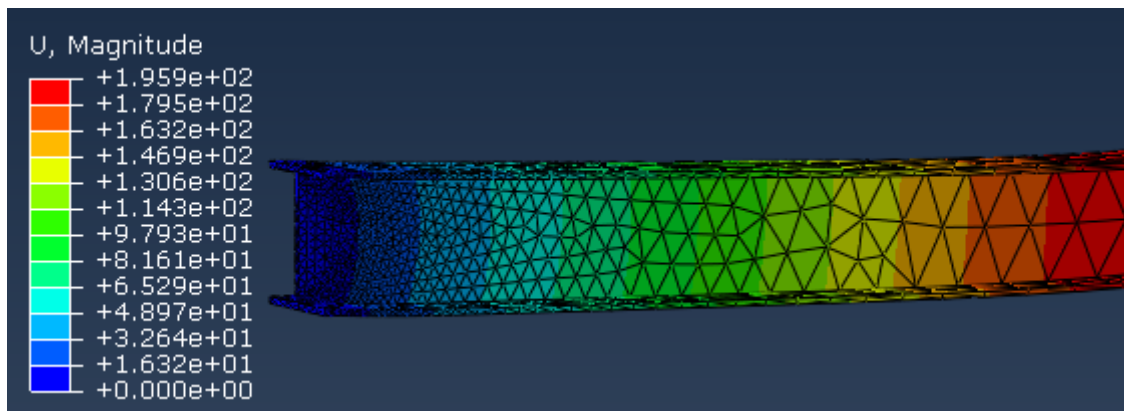


Figura 43. Desplazamientos cuando se forma la tercera rótula