

Trabajo Fin de Grado

Determinación numérico-experimental de las
propiedades mecánicas de vena cava mediante
el método de los elementos finitos

Autor

Quercus Manuel Hernández Laín

Director

Estefanía Peña Baquedano

Escuela de Ingeniería y Arquitectura
2014

*A mis padres, por estar siempre ahí.
A mi abuela Amparo, mi tía Carmen,
mi tío Jesús Antonio y mis abuelos Joaquín y Jesús,
que seguro estarían muy orgullosos de mí.*

Resumen

Determinación numérico-experimental de las propiedades mecánicas de vena cava mediante el método de los elementos finitos

La Ingeniería Biomédica, o Bioingeniería, es el resultado de la aplicación de los principios y técnicas de la ingeniería al campo de la medicina. Se dedica fundamentalmente al diseño y construcción de productos y tecnologías sanitarias: equipos médicos, prótesis, dispositivos médicos, dispositivos de diagnóstico (imagenología médica) y de terapia, etc. Dichos aparatos tienen un claro beneficio en la prevención y el tratamiento de varias enfermedades que aquejan a los seres humanos.

En el presente trabajo se aplicarán conocimientos ingenieriles, tales como el método de los elementos finitos o modelos matemáticos de materiales hiperelásticos, para hallar las propiedades elásticas y de rotura de vena cava. Los aparatos biomédicos actuales para sistema cardiovascular, como stents o filtros anti-trombo, están en continuo contacto con el vaso sanguíneo. Por tanto, es de vital importancia conocer sus propiedades mecánicas para llevar a cabo un correcto dimensionamiento de los dispositivos y minimizar el daño sufrido por el organismo. El proyecto se enmarca dentro de la línea de investigación de modelado de sistema cardiovascular del Instituto Universitario de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A) mediante una beca de colaboración del Ministerio de Educación y Ciencia de 12 meses de duración.

En la parte experimental, han sido extraídas diversas muestras de vena cava de oveja para realizar ensayos mecánicos (uniaxiales y biaxiales) en laboratorio junto con el director del proyecto. Se han llevado a cabo mediciones geométricas y fotografías que ayuden al manejo de los datos recogidos por los equipos.

Posteriormente, los datos experimentales se han post-procesado eliminando datos indeseados antes y después del ensayo (ruido) y calculando las curvas medias. Las gráficas del ensayo uniaxial sirven para ajustar mediante modelos teóricos el comportamiento elástico de la vena cava, el cual resulta ser hiperelástico anisótropo.

Dichas propiedades son datos de entrada en el modelo de elementos finitos que reproduce el ensayo de indentación biaxial y, mediante sucesivos cálculos, se han determinado las propiedades de las superficies cohesivos definidas en el modelo que reproduzcan los ensayos experimentales y que permiten determinar la energía de rotura.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivo y alcance	1
1.2. Motivación	2
1.3. Metodología	3
2. Método experimental	5
2.1. Extracción y preparación de las probetas	5
2.1.1. Ensayo de pretensión axial	5
2.1.2. Ensayo de ángulo de apertura	6
2.1.3. Probetas	7
2.2. Ensayo uniaxial	8
2.2.1. Metodología	8
2.2.2. Resultados	9
2.3. Ensayo biaxial	9
2.3.1. Metodología	9
2.3.2. Resultados	10
3. Determinación de las constantes mecánicas del material	13
3.1. Propiedades elásticas	13
3.1.1. Metodología	13
3.1.2. Resultados	15
3.2. Propiedades de rotura	17
3.2.1. Metodología	17

3.2.2. Resultados	19
4. Conclusiones	23
4.1. Observaciones experimentales	23
4.2. Observaciones mecánicas/numéricas	23
4.3. Líneas Futuras	24
A. Anatomía de los vasos sanguíneos	25
A.1. Tipos	25
A.2. Estructura	27
B. Post-procesado de datos	29
B.1. Resultados de ensayo uniaxial	29
B.2. Resultados de ensayo biaxial	38
B.3. Resultados de modelo de elementos finitos	48
C. Mecánica de Medios Continuos	55
C.1. Ecuaciones cinemáticas	55
C.2. Ecuaciones de equilibrio	58
C.3. Ecuaciones de comportamiento	58
C.3.1. Modelos hiperelásticos isotrópicos	59
C.3.2. Modelos hiperelásticos anisótropos	62
D. Formulaciones de elementos finitos	67
D.1. Formulaciones de Elementos Finitos	67
D.1.1. Método Implícito	68
D.1.2. Método Explícito	69
D.2. Modelización de rotura	70
Bibliografía	75

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivo y alcance

El desarrollo del presente proyecto se centra en la determinación de las propiedades mecánicas de la vena cava de oveja, tanto elásticas como de rotura, para su aplicación posterior en otros trabajos de investigación enfocados en el diseño de dispositivos médicos para, entre otras enfermedades, la trombosis pulmonar (TEP).

Uno de los mayores problemas de estos dispositivos es que en algunas ocasiones pueden traspasar la pared del vaso, por tanto la determinación de la fuerza y energía necesaria para penetrar la vena cava es fundamental para mejorar el diseño de dichos dispositivos. Los objetivos básicos del proyecto son los siguientes:

- **Ensayos experimentales del tejido vascular:** Recogida de datos realizando pruebas de tracción uniaxial y biaxial en laboratorio y post-procesado de dicha información.
- **Caracterización de las propiedades elásticas:** Ajuste de las curvas experimentales mediante modelos constitutivos teóricos y simulación por computador del ensayo biaxial de laboratorio.
- **Caracterización de las propiedades de rotura:** Realización de simulaciones basadas en superficies cohesivas para determinar la curva de rotura de las probetas y poder aproximar numéricamente los parámetros de rotura.

El trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación de modelado de sistema cardiovascular del Instituto Universitario de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A). Ha sido financiado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte por medio de una Beca de Colaboración de 12 meses de duración en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Zaragoza.

1.2. Motivación

Las *enfermedades cardiovasculares* (ECV) son la principal causa de muerte en los países desarrollados. En la Unión Europea, además, representan la principal causa de pérdida de años de vida por muerte prematura. Por tanto, cualquier esfuerzo para mejorar su diagnóstico y tratamiento tendrá un alto impacto en la sociedad.

Los ataques al corazón y los accidentes vasculares cerebrales (AVC) suelen ser fenómenos agudos que se deben sobre todo a obstrucciones que impiden que la sangre fluya hacia el corazón o el cerebro. La causa más frecuente es la formación de depósitos de grasa en las paredes de los vasos sanguíneos que irrigan el corazón o el cerebro, denominado *arteroesclerosis*. El tratamiento general para este tipo de enfermedad es puramente preventivo: hábitos saludables o fármacos inhibidores de la formación de dichos estrechamientos del vaso. La bioingeniería ha permitido crear dispositivos metálicos activos con forma de muelle, denominados *stents*, que ayudan a corregir el estrechamiento de las arterias.

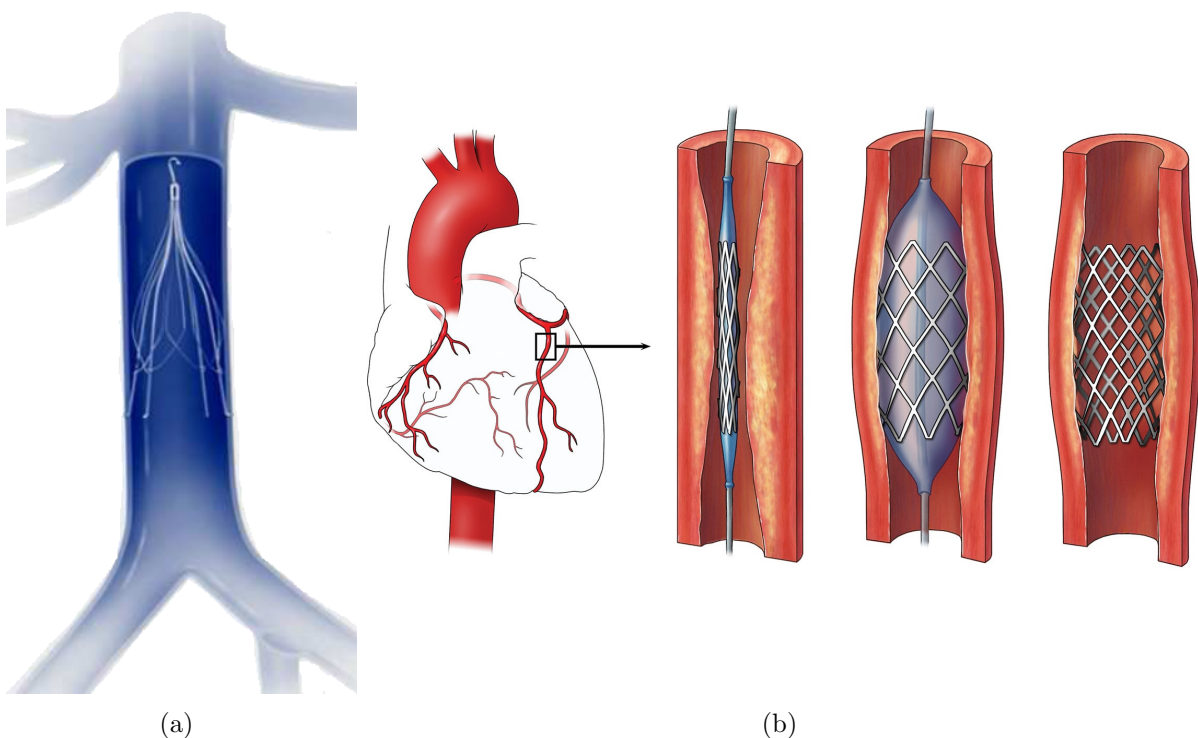


Figura 1.1: Ejemplos de dispositivos médicos para ECV: filtro anti-trombo de vena cava (a) y stent para arterias coronarias (b). Fuente: [7].

Los AVC también pueden deberse a coágulos de sangre (trombos), dando lugar a *trombosis venosa profunda*. El tratamiento general es la administración de anti-coagulantes o trombolisis mediante radiación. Para aquellos pacientes con una contraindicación absoluta del tratamiento anti-coagulante, se puede recurrir al uso de *filtro de vena cava*. Dicho dispositivo metálico se fija en el vaso mediante varias patas con ganchos en los extremos,

de tal forma que los posibles trombos y coágulos quedan atrapados para su posterior extracción quirúrgica o absorción natural.

Un conocimiento detallado de las propiedades biomecánicas del tejido cardiovascular es necesario para poder entender los cambios que éstos sufren debido a edad, enfermedades como la aterosclerosis e hipertensión o por alteraciones externas como daño endotelial durante una intervención quirúrgica. Dentro del dominio fisiológico, los modelos constitutivos intentan capturar el comportamiento visco(elástico) de los tejidos cardiovasculares, incorporando parámetros relacionados con la estructura del mismo en su definición matemática. Uno de los retos más importantes es el identificar aquellos con un mayor significado físico como, por ejemplo, la incorporación de la orientación de fibras de colágeno en las paredes de los vasos.

Debe señalarse también, que durante algunos procedimientos como la colocación de filtros anti-trombo, las cargas a las cuales se ve sometido el tejido fisiológico están muy por encima de las correspondientes a condiciones fisiológicas, por lo que las simulaciones numéricas deberían contemplar teorías de daño y (visco)plasticidad entre otras.

En la actualidad, son muchos los modelos computacionales que han estudiado estos fenómenos sobre arterias [2, 4, 10, 13, 24]. Sin embargo, pocos autores han estudiado su comportamiento sobre venas incorporando las propiedades de anisotropía y grandes deformaciones que caracterizan a dicho tejido [1]. Es por ello que se hace necesario un esfuerzo importante en el desarrollo de modelos complejos anatómicos vasculares (anisotropía, viscoelasticidad y daño) si se desea simular lo más realista posible el comportamiento del sistema vascular sano y patológico y los efectos que intervenciones endovasculares tienen sobre él.

1.3. Metodología

Para la obtención de las propiedades mecánicas de vena cava se han utilizado ensayos de penetración sobre muestras deformadas equibiaxialmente (equipo biaxial) y ensayos uniaxiales. Dichos ensayos se han llevado a cabo en el laboratorio del grupo de Mecánica Aplicada y Bioingeniería (AMB) del Instituto Universitario de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A).

A partir de los ensayos uniaxiales, cuya solución elástica analítica es conocida, se determinan las propiedades elásticas. Los ajustes así como el post-procesado de datos experimentales se ha llevado a cabo mediante el programa Matlab 2013b. La medida de las longitudes a través de las fotografías de las muestras se han realizado mediante el programa ImageJ.

Por último, utilizando un modelo de elementos finitos con superficies cohesivas en el software Abaqus se determinarán las propiedades de rotura del material. Los cálculos se han llevado a cabo en el cluster de computación HERMES del I3A.

Capítulo 2

Método experimental

En este apartado se van a exponer los procedimientos utilizados en el laboratorio para ensayar los tejidos de vena cava y obtener datos para su posterior post-procesado y análisis.

Las muestras son de oveja, por la similitud anatómica entre su sistema venoso y el del ser humano, y han sido proporcionadas por Unidad de Técnicas Mínimamente Invasivas de la Facultad de Veterinaria de la Universidad de Zaragoza. El protocolo experimental ha sido aprobado por el Comité de Ética de la Universidad de Zaragoza. Los sacrificios se debieron a causas ajenas al proyecto.

2.1. Extracción y preparación de las probetas

Antes de ser extraída la muestra de vena cava del espécimen, se atan dos cordeles separados unos 14 cm y se fotografía con una regla patrón. Los cordeles sirven para saber la longitud inicial de la muestra *in-situ* antes de ser extraída. Posteriormente se procede a su corte y extracción. Todas las muestras se introducen en botes de suero fisiológico y son enviadas al laboratorio, donde se guardan en un frigoríficos de ultracongelación a -80 °C.

El siguiente paso es adecuar la muestra para los ensayos biaxial y uniaxial. Se debe descongelar progresivamente, limpiar con suero fisiológico y eliminar cualquier resto de grasa o imperfección que pueda alterar los ensayos. A continuación, se deben realizar unas pruebas previas a los ensayos de tracción y penetración. Estas pruebas estimarán el estado tensional de una vena *in-situ*, tanto en dirección longitudinal como circunferencial.

2.1.1. Ensayo de pretensión axial

En este ensayo se determina el alargamiento longitudinal para simular la *tensión longitudinal* a la que estaba sometida la vena en el interior del organismo. Se mide la

longitud entre los cordeles, que será menor que la longitud medida al principio ya que se ha destensado (Figura 2.1). La longitud inicial se calcula a través de las fotografías realizadas cuando fue extraída la muestra. Los resultados de dicho ensayo se exponen en el Anexo B.1.

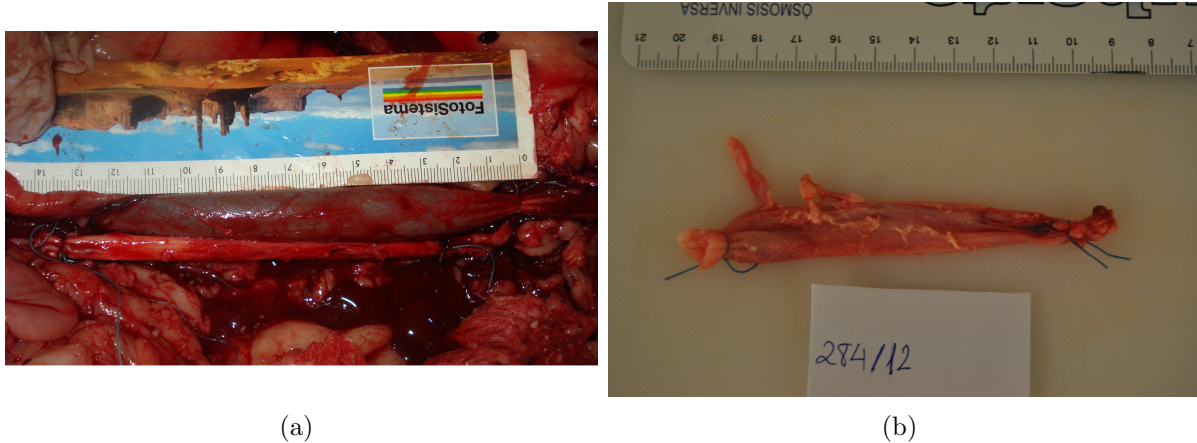


Figura 2.1: Vena con cordeles atados *in-situ* (izquierda) y vena destensada *ex-situ* (derecha).

2.1.2. Ensayo de ángulo de apertura

Este ensayo tiene como objetivo calcular el estiramiento que se debe aplicar para simular la *pretensión circunferencial* a la que está sometido el vaso incluso en ausencia de presión sanguínea. Se corta transversalmente y fotografía un anillo de pequeño espesor en las zonas distal de la muestra (Figura 2.2). Se corta radialmente y se deja relajar en una placa de Petri con suero. Pasados 30 minutos se mide la longitud final del anillo, que será menor que la anteriormente medida debido a la tensión circunferencial a la que estaba sometida. Los resultados de dicho ensayo se exponen en el Anexo B.1.

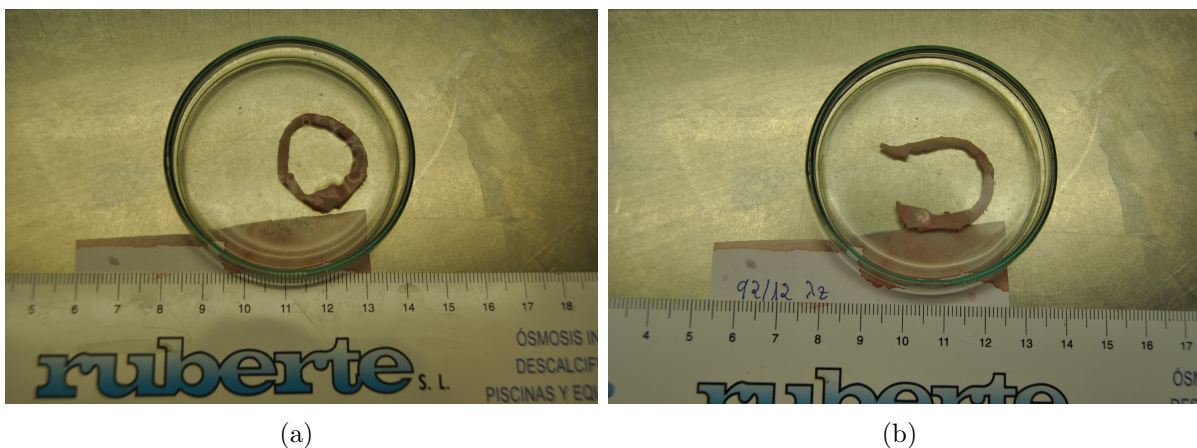


Figura 2.2: Ensayo de ángulo de apertura: anillo cerrado (a) y anillo abierto (b).

2.1.3. Probetas

El siguiente paso es cortar longitudinalmente la vena, extenderla y recortar probetas con las medidas normalizadas y acordes a las máquinas de cada ensayo:

- **Ensayo Biaxial:** Probeta cuadrada de 35 mm de lado, con las direcciones longitudinal y circunferencial alineadas con los lados del cuadrado. Para este corte se usa un molde metálico (punch). Además, se marca con rotulador un extremo de la probeta para no confundir la orientación circunferencial.
- **Ensayo Uniaxial:** Probetas en forma de hueso de perro, de unos 15 mm de longitud, cortadas con bisturí. El largo de la probeta debe ser al menos unas 5 veces el ancho para asegurar que el centro de la probeta no se ve influenciado por las distorsiones locales de las mordazas y garantizar así la hipótesis de tracción uniaxial.

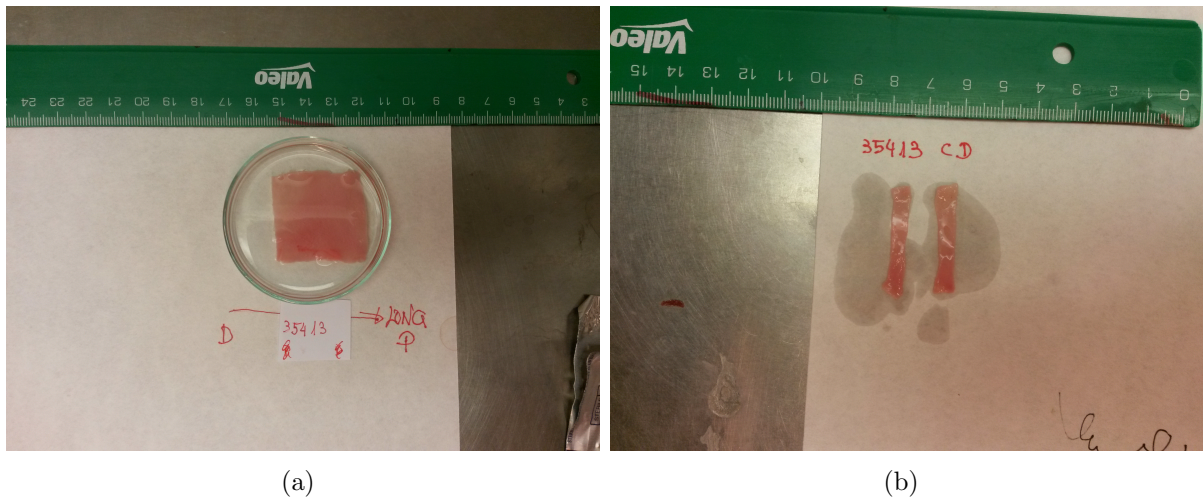


Figura 2.3: *Probetas para ensayo biaxial (a) y uniaxial (b).*

Es importante tener en cuenta los dos extremos de la muestra: distal y proximal. La zona proximal es la más cercana al corazón y a la bifurcación renal, por lo tanto el vaso tiene menor espesor que la zona distal, más alejada del corazón. La probeta cuadrada se extrae lo más centrada posible. Las probetas de hueso de perro serán recortadas después a lo largo de las dos direcciones, en general dos probetas circunferenciales y dos longitudinales, procurando tener una de cada lado (distal y proximal) para luego hacer la media de las mediciones.

El último paso antes de ensayar, es medir las longitudes con pie de rey y los espesores con micrómetro de la probeta cuadrada en tres zonas distintas y calcular las medias, para luego usarlo en el post-procesado de los datos.

2.2. Ensayo uniaxial

2.2.1. Metodología

El ensayo pretende traccionar las probetas de hueso de perro hasta rotura, para determinar su curva de comportamiento a tracción. Para ello se utiliza una máquina Instron Microtester 5548 con célula de carga de 50 N. Los datos servirán para llevar a cabo los ajustes de las curvas y determinar las constantes elásticas del material.

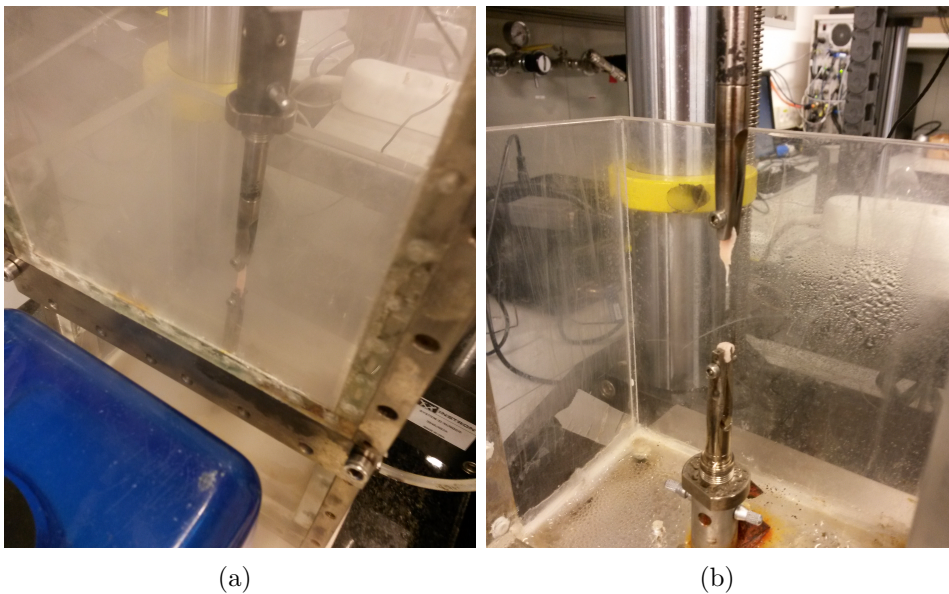


Figura 2.4: *Probeta de hueso de perro antes (a) y después (b) de rotura durante el ensayo uniaxial.*

La probeta se sujeta con las dos mordazas y se introduce un humidificador para mantener condiciones de humedad adecuadas para la muestra. Se realizarán 3 ciclos a 3 tensiones distintas (30, 60 y 140 kPa) tras los cuales se tracciona hasta rotura. Este método se denomina *preciclado* o *precondicionado* de las muestras, mediante el cual se consigue que las fibras se alineen en la dirección deseada y se eliminan los efectos viscosos debidos a la histéresis.

Según el tamaño de la muestra se han realizado entre 2 y 4 ensayos uniaxiales en ambas direcciones. La rigidez de las probetas de la zona distal será mayor que las de la zona proximal, por lo que se seleccionarán equitativamente muestras de cada lado con el fin de poder calcular resultados medios.

Se registra la *fuerza uniaxial* que debe imponer la máquina para traccionar la muestra y el *desplazamiento* de las mordazas. La medida de la deformación se realiza mediante un videoextensiómetro láser Instron 5848.

2.2.2. Resultados

A continuación se muestran las mediciones de la muestra II, representando la dirección circunferencial en línea continua y la longitudinal en discontinua. Las gráficas completas de las 6 muestras están representadas en el Anexo B.

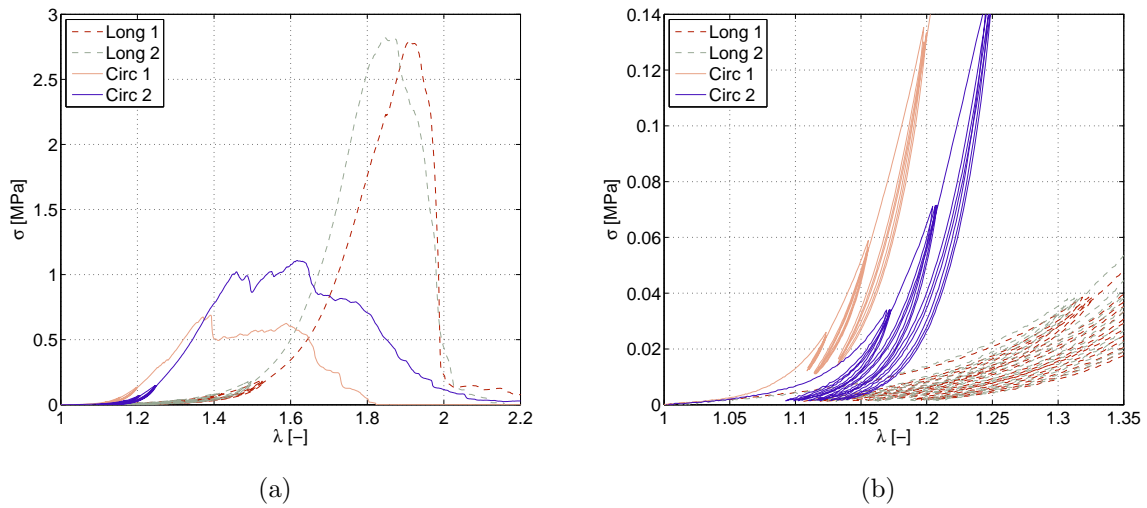


Figura 2.5: Tres ciclos de histéresis a tres niveles de tensión y tracción hasta rotura (a) y detalle de los ciclos de histéresis en las probetas de dirección circunferencial (b).

- **Figura 2.5 (a):** Curvas de tracción. Se puede comprobar la mayor rigidez de las dos muestras circunferenciales frente a las longitudinales debido a las fibras de colágeno. Las probetas circunferenciales además tienen una menor tensión de rotura frente a las longitudinales.
- **Figura 2.5 (b):** Detalle de los ciclos de histéresis anteriores a la rotura final. Dichos ciclos se realizan para orientar las fibras paralelas al eje de la probeta, si se desea ensayar la dirección circunferencial, o perpendiculares si se quiere la longitudinal, además de evitar los efectos viscosos. El cambio de comportamiento observado ante las cargas cíclicas a varias tensiones se debe al denominado *efecto Mullins*, y se puede descontar realizando la envolvente de dichos ciclos, como se detalla en el artículo [1].

2.3. Ensayo biaxial

2.3.1. Metodología

El ensayo tiene por objetivo determinar la curva de comportamiento del tejido ante la penetración de un indentador metálico hasta rotura. La probeta se encuentra pretenionada, para reproducir de manera aproximada las condiciones en las que se encontraría

dentro del organismo. Este análisis está basado en los ensayos bixiales desarrollados en tejido de miocardio por Gasser [26]. Se utiliza una máquina biaxial para el estiramiento de las cavas y un equipo Instron con célula de carga de 5 N y un penetrador de 0.35 mm de diámetro para la indentación.

La probeta cuadrada se sujeta con unas mordazas y se pretensa imponiendo un estiramiento equivalente en las direcciones longitudinal (λ_l) y circunferencial (λ_c) determinados previamente en los ensayos de pretensión axial y ángulo de apertura. Para evitar que se reseque y rigidice la muestra, se añade cierta humedad al ensayo mediante un humidificador.

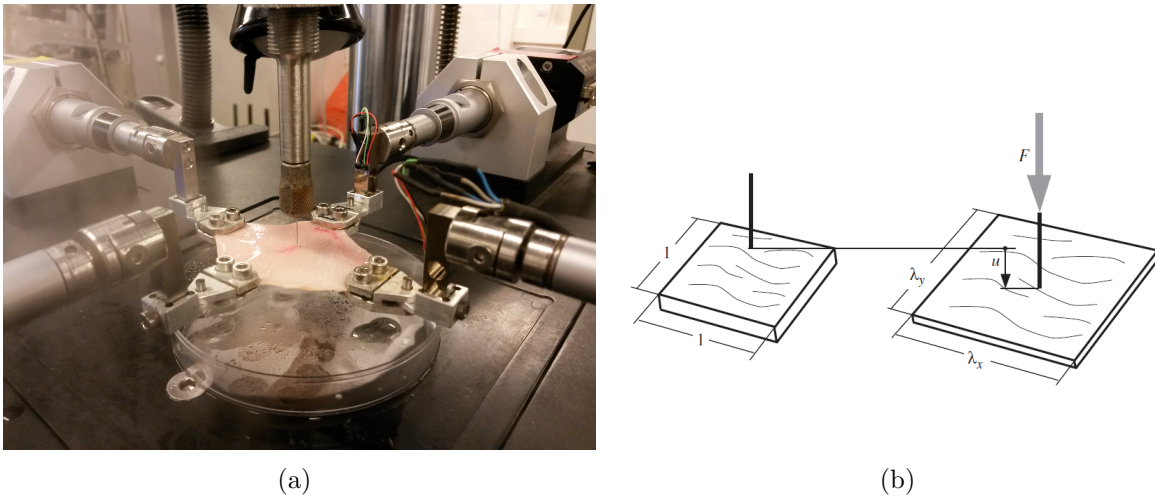


Figura 2.6: Probeta cuadrada durante el ensayo biaxial (a) y pretensión ejercida por las mordazas en direcciones longitudinal (λ_l) y circunferencial (λ_c) en la bajada del punzón (b). Fuente: [26].

El indentador penetra en la muestra a un ritmo de 5 mm/min y las mordazas registran el valor de la fuerza que deben aplicar para mantener el desplazamiento inicial impuesto con un tiempo de muestreo de 1 segundo. De esta forma, se pueden obtener los datos de la *tensión biaxial longitudinal y circunferencial*, los cuales no son iguales al tratarse de un material anisótropo. Al mismo tiempo, el indentador registra la fuerza de reacción de la probeta sobre el indentador (*fuerza de punzón*) y tiene un tiempo de muestreo de 0.01 segundos.

Se realizan un total de 25 indentaciones dispuestas de forma uniforme alrededor del centro de la probeta separadas 4 mm entre sí, para que el agujero generado en una rotura no influya en el siguiente (Figura B.9).

2.3.2. Resultados

A continuación se muestran las mediciones de la muestra II, representando la dirección circunferencial en línea continua y la longitudinal en discontinua. Las gráficas completas de las 6 muestras están representadas en el Anexo B.

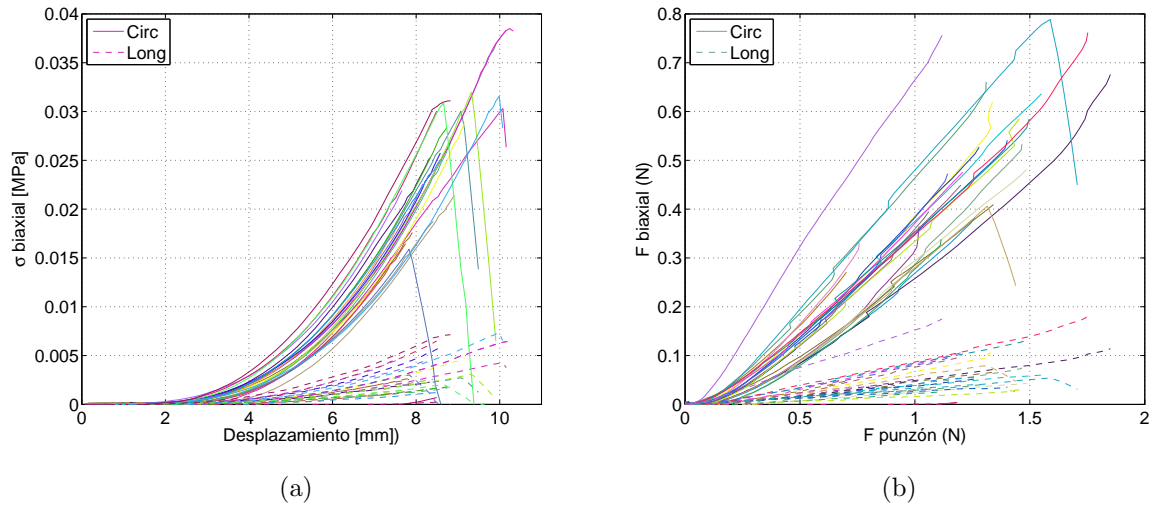


Figura 2.7: Tensión biaxial longitudinal y circunferencial frente al desplazamiento del punzón (a) y fuerza de punzón frente a fuerza de las mordazas (b).

- **Figura 2.7 (a):** Tensión longitudinal y circunferencial frente al desplazamiento del punzón. A una velocidad constante de penetración las gráficas son claramente no-lineales y se asemejan a la forma de una exponencial. A su vez se puede comprobar la marcada anisotropía del material, puesto que las mediciones en las dos direcciones no coinciden.
- **Figura 2.7 (b):** Fuerza de la biaxial frente a Fuerza del punzón. Existe una correlación lineal entre ambas, lo cual tiene sentido, ya que al bajar el punzón de forma constante, también lo hace la fuerza de las mordazas.

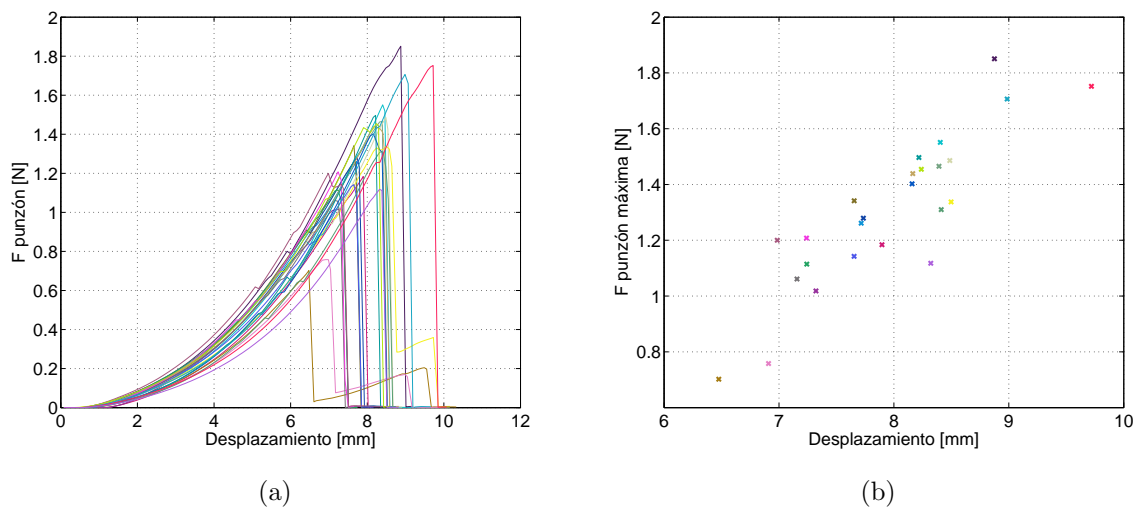


Figura 2.8: Fuerza del punzón frente al desplazamiento del punzón (a) y fuerza de punzón máxima soportada antes de rotura (b).

- **Figura 2.8 (a):** Fuerza del punzón frente al desplazamiento del punzón. Conforme avanza el punzón, la fuerza necesaria para mantener la pretensión es cada vez mayor. Se confirma la no-linealidad del conjunto del ensayo, ya que su forma es análoga a la de una exponencial.
- **Figura 2.8 (b):** Gráfico de puntos con la fuerza de rotura. Hay una dispersión considerable de los puntos de ruptura. Sin embargo, la nube de puntos tiene un carácter lineal ascendente, lo cual indica que en los puntos que resisten mayor desplazamiento de punzón soportan mayor fuerza y viceversa.

Capítulo 3

Determinación de las constantes mecánicas del material

En el siguiente capítulo se presenta la metodología y resultados de los ajustes de las curvas obtenidas a partir de las mediciones del ensayo uniaxial, así como el modelo y simulaciones de elementos finitos. En el Anexo B se reflejan todos los resultados que, por razones de extensión, no han podido ser abordados dentro de la memoria principal.

3.1. Propiedades elásticas

Como puede verse en la Figura 2.5, los tejidos venosos se caracterizan por tener un comportamiento no-lineal con altos valores de deformación, siendo al principio casi lineal (isótropo) y volviéndose más rígido a altas deformaciones, mostrando carácter anisótropo. Además, las curvas de carga y descarga no coinciden (histéresis), lo cual revela una respuesta inelástica del material. Dicho comportamiento elástico puede modelarse de forma apropiada mediante un modelo de material denominado *hiperelástico anisótropo con dos familias de fibras*.

3.1.1. Metodología

Existen muchos posibles modelos hiperelásticos fibrados para modelar el comportamiento de vasos. En el presente proyecto se emplean los dos más utilizados: modelo de Holzapfel-Gasser-Ogden (Ecuación 3.1) y modelo de Gasser (Ecuación 3.2). Ambos modelos constan de 5 parámetros, los cuales se calcularán a partir de un ajuste de los datos experimentales. Dicho ajuste se ha realizado con el software Matlab mediante el algoritmo de minimización de Levenberg-Marquardt [16]. Para mayor información acerca de los modelos, consultar Anexo C.3.2.

$$\Psi = \mu(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2}(e^{k_2(I_4-1)^2} - 1) + \frac{k_3}{2k_4}(e^{k_4(I_6-1)^2} - 1) \quad (3.1)$$

$$\Psi = \mu(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2}(e^{k_2[\kappa I_1 + (1-3\kappa)I_4 - 1]^2} - 1) + \frac{k_3}{2k_4}(e^{k_4[\kappa I_1 + (1-3\kappa)I_6 - 1]^2} - 1) \quad (3.2)$$

Dada la naturaleza del ensayo biaxial, las probetas no fueron precicladadas al contrario que en el ensayo uniaxial. Por tanto, para el ajuste de parámetros elásticos se debe calcular la envolvente de los ciclos de carga-descarga para descontar los efectos inelásticos (*efecto Mullins*).

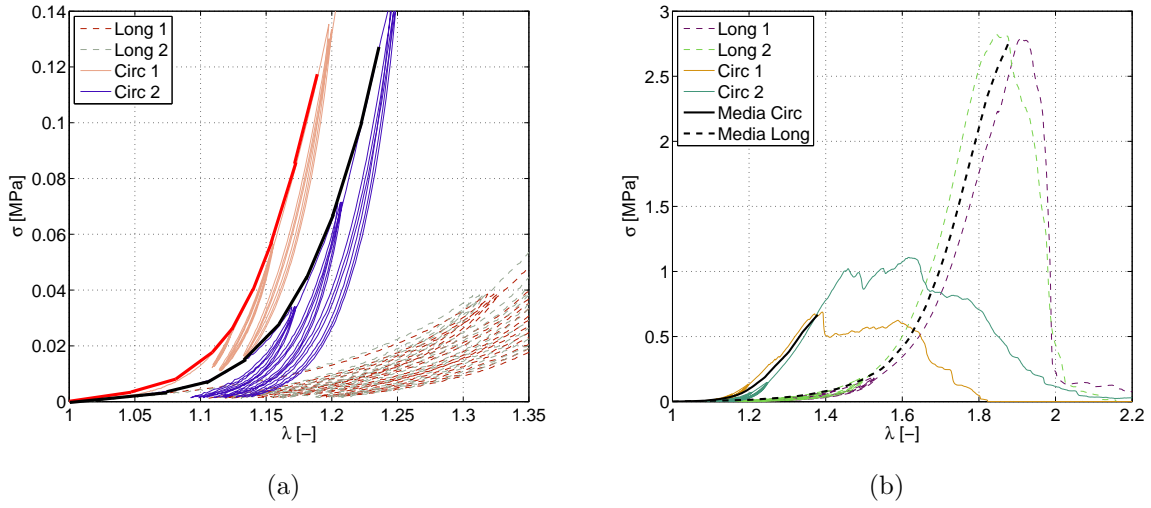


Figura 3.1: *Envolventes de las curvas de comportamiento uniaxial en dirección circunferencial (a) y curvas medias para el ensayo uniaxial en ambas direcciones (b).*

Debido a la alta variabilidad de resultados [1], se calcularán los parámetros de las curvas medias de las 6 muestras para ambas direcciones. Con esto se consiguen unos ajustes que logran simular el comportamiento elástico medio de las venas cavas ensayadas. Para los ajustes experimentales, se incluye la media y desviación estándar (SD). Se calculará adicionalmente la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE) con el fin de mostrar la bondad del ajuste realizado, según la Ecuación 3.3, donde n es el número de datos y q el número de parámetros.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n - q} \sum_{i=1}^n (x_i^{ajuste} - x_i^{exp})^2} \quad (3.3)$$

$$SD = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.4)$$

3.1.2. Resultados

■ **Modelo de Holzapfel-Gasser-Ogden:**

Muestra	μ [MPa]	k_1 [MPa]	k_2 [-]	k_3 [MPa]	k_4 [-]	RMSE
I	0.01	0.0077	0.343	0.754	4.119	0.070
II	0.01	0.0399	0.238	0.083	1.136	0.119
III	0.01	0.0047	0.058	0.049	4.694	0.061
IV	0.01	0.0182	0.694	0.219	2.813	0.096
V	0.01	0.0094	0.054	0.135	3.362	0.084
VI	0.01	0.0227	0.103	0.137	1.885	0.062
Media	0.01	0.0171	0.248	0.229	3.002	-
SD	0	0.013	0.246	0.263	1.342	-

Tabla 3.1: *Parámetros elásticos del modelo de HGO para cada muestra.*

Puede observarse como el término neo-hookeano (μ) asociado a la parte isótropa del material es muy pequeño. En el ajuste real de las curvas $\mu = 0$, puesto que las direcciones circunferencial y longitudinal están casi totalmente desacopladas (gran anisotropía). Con el fin de evitar problemas computacionales, se ha limitado su valor a 0.01 MPa en todas las muestras sin decremento del error en el ajuste.

■ **Modelo de Gasser:**

Muestra	μ [MPa]	k_1 [MPa]	k_2 [MPa]	α [°]	κ [-]	RMSE
I	0.015	2.227	19.664	89.89	0.210	0.063
II	0.010	1.152	4.013	89.99	0.294	0.104
III	0.013	0.314	2.168	89.90	0.196	0.114
IV	0.010	1.800	23.265	89.94	0.269	0.087
V	0.010	0.559	0.059	89.89	0.215	0.041
VI	0.048	0.658	5.449	85.84	0.233	0.089
Media	0.017	1.118	9.103	89.24	0.236	-
SD	0.015	0.757	9.810	1.666	0.038	-

Tabla 3.2: *Parámetros elásticos del modelo de Gasser para cada muestra.*

El ángulo α , referido respecto a la dirección longitudinal, es muy próximo a 90°, lo cual indica que las fibras están casi alineadas en dirección circunferencial. Al igual que en el ajuste de Holzapfel, el límite inferior del neo-hookeano μ durante el ajuste se ha limitado a 0.01 para evitar problemas computacionales en la simulación posterior.

La alta dispersión de los resultados se puede comprobar en la Figura 3.2. En ella se representan las curvas en dirección circunferencial y longitudinal de las 6 muestras de vena cava, junto con su curva media y el ajuste de la misma con los dos modelos. En el Anexo B.1 se muestran en gráficas comparativas los ajustes completos de las 6 muestras.

	μ [MPa]	k_1 [MPa]	k_2 [-]	k_3 [MPa]	k_4 [-]	RMSE
Curva Media	0.01	0.0094	0.201	0.056	9.040	0.059

Tabla 3.3: *Parámetros elásticos del modelo de HGO para la curva media.*

	μ [MPa]	k_1 [MPa]	k_2 [MPa]	α [°]	κ [-]	RMSE
Curva Media	0.01	0.642	5.014	89.93	0.243	0.066

Tabla 3.4: *Parámetros elásticos del modelo de Gasser para la curva media.*

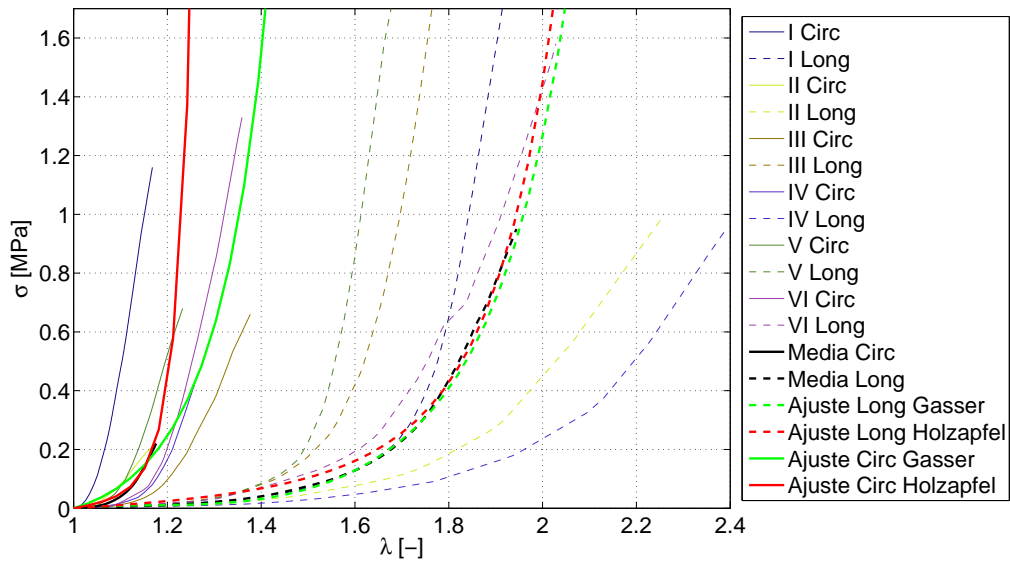


Figura 3.2: *Curvas uniaxiales en dirección circunferencial y longitudinal de las 6 muestras y ajuste de las curvas medias.*

Puede observarse como el ajuste de las curvas medias entra dentro del disperso rango de las muestras experimentales. Nótese que los parámetros medios de ajuste de las 6 muestras no coinciden con los parámetros del ajuste de las curvas medias, puesto que se tratan de funciones exponenciales no-lineales. De ambos es el último el que representa más fielmente el comportamiento medio de las muestras.

3.2. Propiedades de rotura

En esta sección se realiza un modelo de elementos finitos del ensayo biaxial en el software Abaqus, con el fin de hallar mediante análisis inverso los parámetros promedio de rotura de la vena cava.

3.2.1. Metodología

A continuación se expone un resumen de la metodología utilizada para modelar la geometría, contacto y comportamiento entre el punzón y la probeta del ensayo biaxial. Para más información sobre los tipos de formulaciones de elementos finitos y elementos cohesivos, ver Anexo D.

- **Software:** El ensayo biaxial es cuasiestático hasta rotura, posee contacto entre punzón, probeta y zona de rotura, muy altas deformaciones y un material hiperelástico anisótropo altamente no-lineal. La formulación adecuada para el problema antes de rotura sería Abaqus/Standard. Al alcanzar la rotura se convierte en un proceso dinámico y de difícil convergencia, haciendo necesario aplicar la formulación de Abaqus/Explicit.
- **Geometría:** El punzón es cilíndrico con punta esférica de 0.7 mm de diámetro y 6 mm de largo. Se va a considerar sólo mitad de probeta cuadrada, imponiendo condiciones de simetría en dirección longitudinal (eje Y). La longitud de la probeta cuadrada en dirección longitudinal y circunferencial ha sido calculada a partir de las longitudes medias reflejadas en la Tabla B.3. Se incluyen unos huecos trapezoidales de los extremos, los cuales simulan el agarre de las mordazas del equipo biaxial.

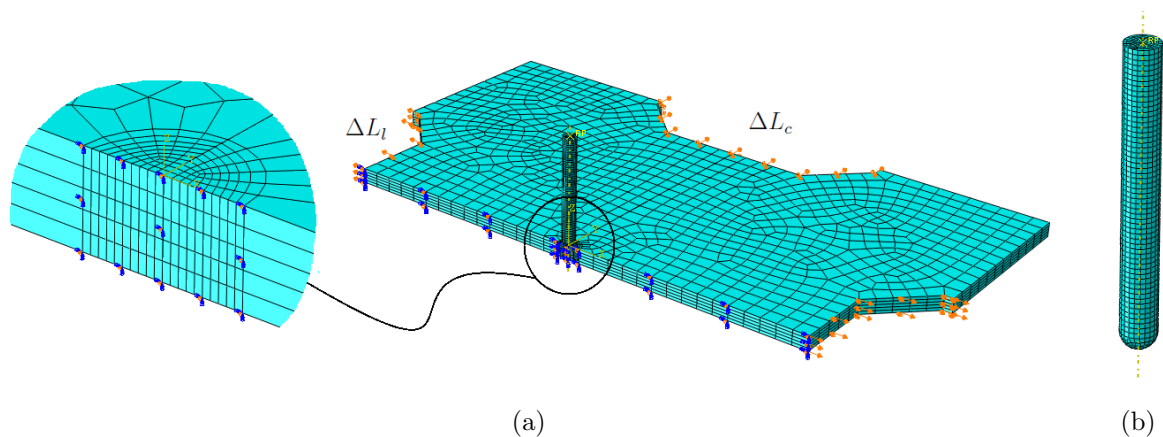


Figura 3.3: Mallado y ensamblaje de probeta y punzón con detalle del mallado en zona de contacto (a) y mallado del punzón (b).

- **Materiales:** El material del punzón es *acero* y el de la probeta es *vena cava*. Las propiedades hiperelásticas anisótropas en Abaqus sólo son admitidas mediante el modelo de Gasser. Adicionalmente para el análisis en Standard, se utilizará el modelo de Holzapfel implementado mediante una rutina de usuario (UMAT) desarrollada por el grupo de investigación. Ambos materiales se consideran incompresibles [14]. El punzón es mucho más rígido que la probeta, por lo que se va a considerar con restricciones de sólido rígido para conseguir menor tiempo computacional.
- **Mallado:** El mallado final se muestra en la Figura 3.3 y consta de 6558 nodos y 4975 elementos en el caso de la probeta y 6322 nodos y 5529 elementos para el punzón. Los elementos son hexagonales trilineales (C3D8) puesto que los elementos cuadráticos generan problemas durante el contacto. El mallado de la zona de contacto entre la probeta y el punzón es más fino que el resto de la probeta, para facilitar la convergencia del problema durante el contacto.
- **Pasos y Condiciones de Contorno:** El análisis se dividirá en dos pasos: *Pretensado* y *Punzonado*. En el Pretensado se imponen los desplazamientos medios en direcciones longitudinal y perpendicular de los ensayos biaxiales, calculados en la Tabla B.3. En el Punzonado, se impone un desplazamiento vertical medio del punzon de 10 mm en dirección normal a la superficie de la probeta.
- **Zona de rotura:** Según los ensayos a tejido de miocardio elaborados por Forsell y Gasser [8] se observó que durante el ensayo biaxial el mecanismo principal de penetración es de modo apertura (Fractura Modo-I). Además, la rotura del material se genera de forma muy localizada y se alinea con la dirección de las fibras (dirección circunferencial).

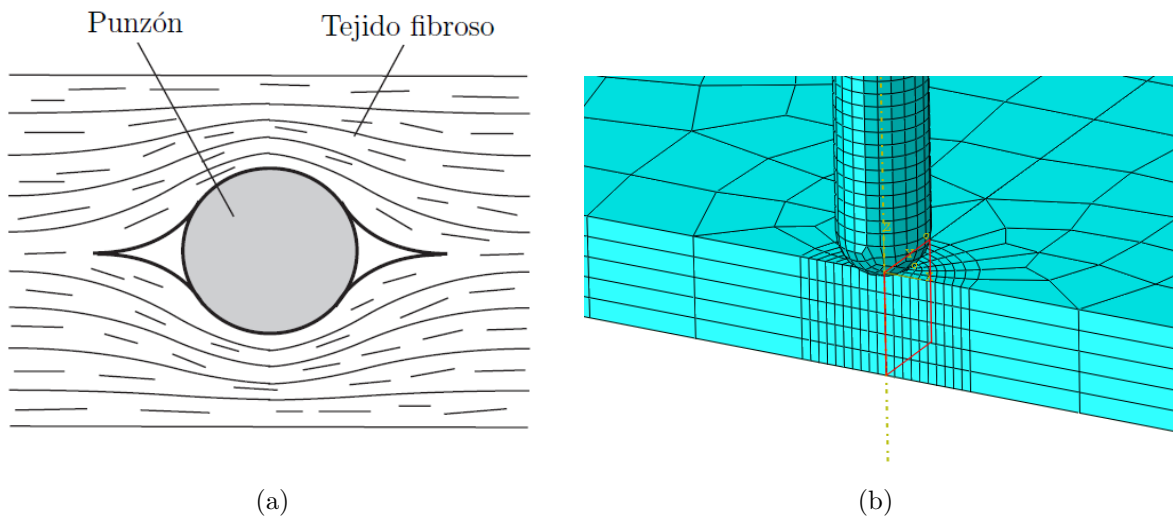


Figura 3.4: *Fractura Modo-I experimentada por el tejido fibroso (a) y esquema de la superficie cohesiva remarcada en rojo en el modelo de elementos finitos (b).*

Para simular este comportamiento, se decide generar una *Superficie Cohesiva* en la probeta, situada en la zona inferior del contacto con el punzón y orientada en sentido circunferencial, como se representa en la Figura 3.4. A dicha Zona Cohesiva

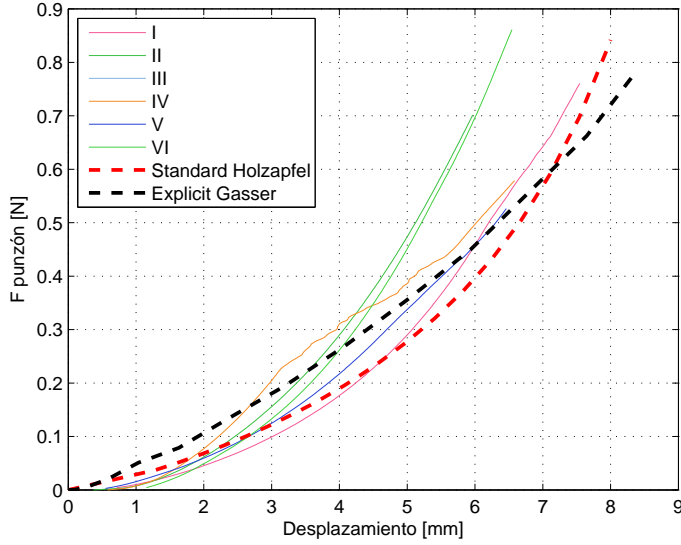
se le debe definir una ley de tracción-separación que, por simplicidad, se supondrá de forma triangular (Figura D.2). Por ello habrá que definir 3 parámetros: pendiente antes del fallo (K), tensión máxima ($\sigma_{m\acute{a}x}$) y energía de fractura (G_0).

El Modo-I de fallo implica que la tensión de fractura ($\sigma_{m\acute{a}x}$) es perpendicular a la superficie cohesiva, definida en el mismo sentido que las fibras del tejido (dirección circunferencial). Por tanto, dicha tensión tiene dirección longitudinal. En el Anexo B.3 se calcula de los ensayos uniaxiales la tensión de rotura media de las muestras de vena cava en dirección longitudinal. Fijado este valor, se llevarán a cabo iteraciones para calcular los otros dos parámetros (K y G_0) para definir completamente el triángulo de fractura de la Figura D.2.

- **Contacto:** Se define un *General Contact* que incluye todos los cuerpos dentro de la simulación y que es mas adecuado para formular el contacto del punzón con varias superficies tras rotura. Para más información sobre formulaciones de contacto, consultar [30].
- **Compensación de efectos inerciales:** Abaqus/Explicit se basa en ecuaciones dinámicas para el cálculo de los desplazamientos y las tensiones, y está diseñado para análisis a altas velocidades. Sin embargo, el ensayo biaxial es cuasiestático hasta rotura lo cual supone un alto coste computacional. Por tanto, se debe disminuir el tiempo de cálculo reduciendo todo el proceso a 2 segundos de duración (1 segundo para pretensado y 1 segundo para punzonado). Esto supone una velocidad de punzón de 10 mm/s mientras que el ensayo original es de 0.08 mm/s (5 mm/min). La velocidad de simulación es 125 veces la real, por lo que se debe realizar un escalado de masa y de viscosidad para que los efectos inerciales no distorsionen los resultados. Se elige un *mass scaling* uniforme para conseguir un incremento lo suficientemente pequeño de 10^{-6} segundos.
- **Equipo:** Debido al alto coste computacional de los análisis de elementos finitos se ha recurrido al cluster de computación HERMES, realizando múltiples cálculos en paralelo con 8 Gb de RAM y 4 CPU's a cada uno. En los cálculos en Explicit, para evitar errores de redondeos debido al alto número de incrementos, se ejecutan a doble precisión. El tiempo de simulación está entre 5 y 6 horas para Explicit y 1 hora para Standard.

3.2.2. Resultados

En la Figura 3.5 se representan las curvas medias de la fuerza del punzón en cada muestra de vena cava en la zona elástica previa a rotura del ensayo biaxial. Las líneas discontinuas son los resultados de las simulaciones de elementos finitos durante el tramo cuasiestático antes de rotura. Puede observarse que el análisis del modelo de Gasser en Explicit se ajusta correctamente a las curvas, lo cual indica un correcto escalado de masa. El análisis en Standard da una muy buena aproximación con el modelo de Holzapfel. En ambos casos, la curva se encuentra contenida entre las curvas experimentales.



(a)

Figura 3.5: Medias de la Fuerza del punzón en los ensayos biaxiales y ajustes de la zona cuasiestática con Standard y Explicit.

Una vez comprobados los resultados elásticos en Explicit, se procede a realizar iteraciones para averiguar los valores óptimos de la pendiente antes de fallo (K) y energía de fractura (G_0). Sabiendo que $\sigma_{m\acute{a}x} = 2.2$ MPa, aplicando relaciones trigonométricas del triángulo de fractura (Figura D.2) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$K = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\delta_0} = \frac{2.2}{\delta_0} \quad G_0 = \frac{\delta_r \cdot \sigma_{m\acute{a}x}}{2} = 1.1 \cdot \delta_r \quad (3.5)$$

En el Anexo B.3, se proponen diferentes combinaciones de separaciones de inicio de daño (δ_0) y de rotura (δ_r) de la superficie cohesiva. Deben estar sujetos a dos restricciones: $\delta_0 < \delta_r$ y $\delta_0, \delta_r \leq \phi = 0.7\text{mm}$, donde ϕ es el diámetro del punzón.

Existen varias posibles combinaciones de parámetros válidas para simular la rotura del ensayo biaxial, mostradas en la Tabla 3.5. Todas tienen en común un bajo valor de separación inicial antes de fallo $\delta_0 \in [0.01, 0.05]$ mm frente a la separación de rotura $\delta_r \in [0.15, 0.45]$ mm y son inversamente proporcionales, de tal forma que la energía de fractura G_0 permanece casi constante.

Solución	δ_0 [mm]	δ_r [mm]	$\sigma_{m\acute{a}x}$ [MPa]	K [-]	G_0 [N/mm]
1	0.01	0.35	2.2	220	0.33
2	0.03	0.3	2.2	73.33	0.33
3	0.05	0.2	2.2	44	0.22

Tabla 3.5: Distintas soluciones que modelan correctamente la rotura del ensayo biaxial.

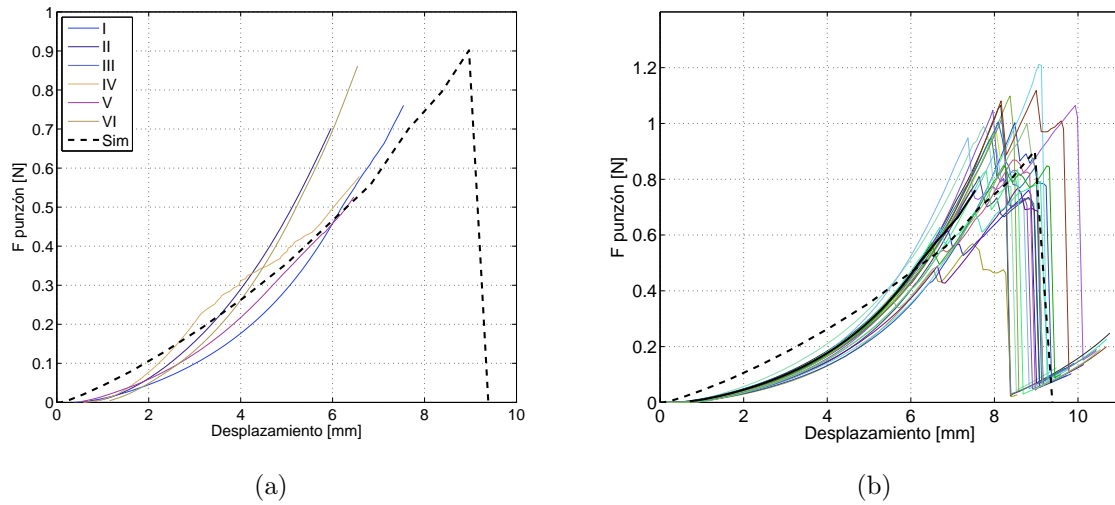
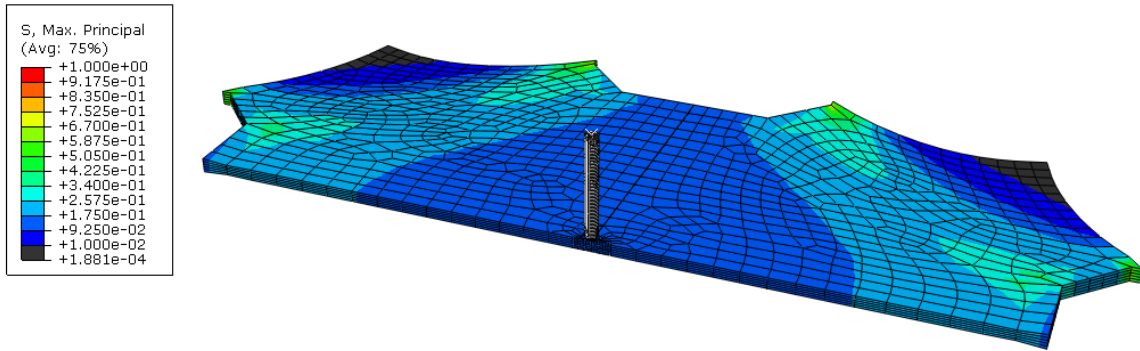


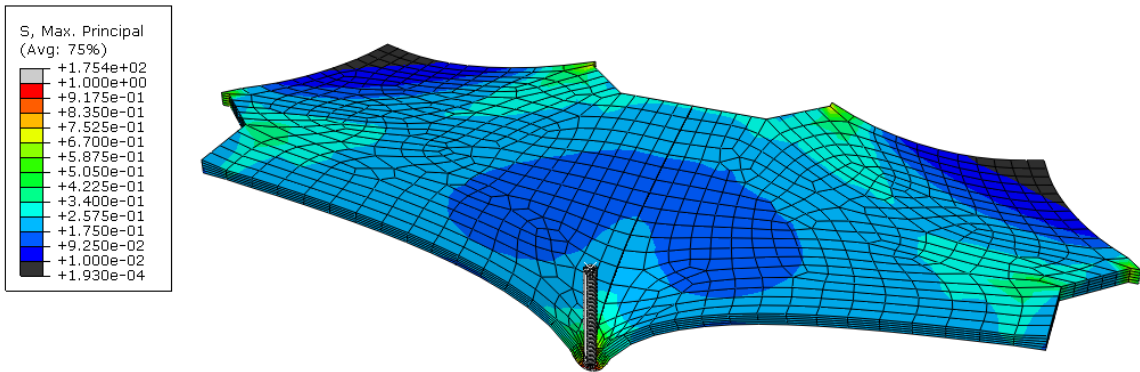
Figura 3.6: Comparación de los resultados de simulación con los datos medios del ensayo biaxial (a) y de la muestra I (b).

Se puede comprobar como la curva de rotura de la simulación logra reproducir con buena precisión el comportamiento de la rotura del ensayo biaxial. Cabe destacar el error en la zona elástica a bajas deformaciones, el cual repercute en un ligero error en la zona de rotura. Dicho error podría evitarse implementando el modelo de Holzapfel en Explicit mediante una rutina de usuario VUMAT.

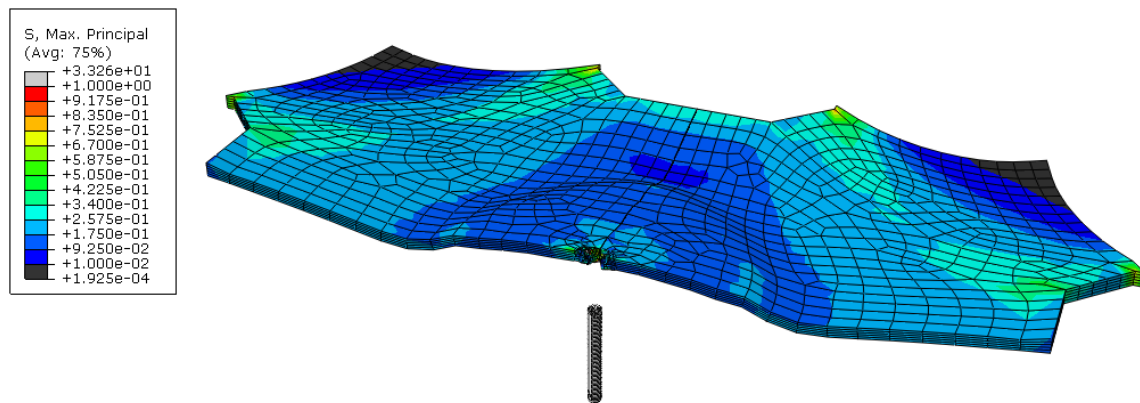
Debido al pequeño espesor de las muestras (del orden del diámetro del punzón) hace que la rotura sea súbita, sin zona plástica, lo cual se ve reflejado en los valores pequeños de energía de deformación. En la Figura 3.7 se representa la evolución de las tensiones durante cada paso de la simulación con los parámetros de rotura de la solución número 2. En el Anexo B.3 se incluyen los resultados de las tres soluciones.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.7: Mapa de tensiones durante la simulación del ensayo biaxial con rotura en el pretensado (a), durante el punzonado (b) y rotura (c).

Capítulo 4

Conclusiones

Los objetivos del presente Trabajo de Fin de Grado, así como del Proyecto de Colaboración, han sido cubiertos en su totalidad. Para concluir, se citan las observaciones más importantes llevadas a cabo durante la realización de los ensayos experimentales y análisis computacional.

4.1. Observaciones experimentales

- Es de vital importancia reproducir en los ensayos el estado de la cava *in vivo* en la medida de lo posible. Para ello se han introducido los parámetros de pretensión longitudinal y circunferencial.
- La variabilidad de resultados es muy alta, puesto que cada organismo es único y en función de la edad, sexo o historia clínica los tejidos pueden tener diferente comportamiento. Generalmente en todas las aplicaciones de bioingeniería la dispersión de datos es tal que la desviación típica suele ser del mismo orden de magnitud que la media.
- El tejido venoso expuesto al aire se seca y rigidiza rápidamente, lo cual falsea los datos. Por tanto, es fundamental ser metódico y cuidadoso a la hora de llevar a cabo los ensayos, de tal forma que la manipulación de las probetas no interfiera en los resultados finales.

4.2. Observaciones mecánicas/numéricas

- El comportamiento de la vena cava es altamente no lineal. Además presenta gran anisotropía, comportándose de forma diferente en dirección circunferencial y longitudinal debido a su particular microestructura, hecho que se ha tenido en cuenta en el modelo del material introduciendo las fibras de colágeno.

- Los modelos de Gasser y Holzapfel logran un ajuste correcto en la mayoría de las muestras, siendo las curvas circunferenciales en las que mayor error se comete. Además, son coherentes con la histología de vena cava, puesto que marcan gran anisotropía ($\mu \simeq 0$) y alineación de las fibras en dirección circunferencial ($\alpha \simeq 90^\circ$)
- Tras múltiples cálculos en serie, se determinó que el problema de elementos finitos de rotura de la probeta biaxial en Abaqus/Standard es imposible de realizar, debido a problemas de convergencia. En su defecto, se debe recurrir al análisis en Abaqus/Explicit teniendo muy en cuenta los incrementos correctos de tiempo y escalados de masa para poder despreciar los efectos inerciales y que la energía total del sistema permanezca constante durante el periodo cuasiestático.
- Para simulaciones estáticas o cuasiestáticas el modelo de Holzapfel da una solución óptima. El modelo de Gasser también es válido, aunque aporta soluciones más rígidas y con mayor error.
- La rotura de la probeta se produce de forma súbita sin apenas deformación plástica, debido al pequeño espesor de la misma y a las características del tejido. Los parámetros calculados logran simular de forma correcta el fallo, y existen múltiples combinaciones posibles las cuales poseen una energía de fractura casi constante.
- El método utilizado para el cálculo de las propiedades de rotura con parámetros medios se puede realizar para cada muestra individual. Sin embargo, queda fuera del alcance de un Proyecto Fin de Grado aunque la metodología a emplear ha quedado plenamente definida.

4.3. Líneas Futuras

Tras la consecución del presente proyecto, los resultados sobre propiedades mecánicas de vena cava pueden ser utilizadas para modelar aplicaciones concretas en aparatos biomédicos, y da lugar a posibles líneas futuras para proyectos de investigación tales como:

- Diseño y mejora de filtro anti-trombo. Simulación con rotura y fibrosis de su interacción en vena cava. Simulación de la extracción del filtro. Esta línea futura va a realizarse como continuación del presente Proyecto de Fin de Grado con otro durante el curso 2014-15.
- Aplicación de los métodos expuestos para calcular propiedades de rotura de otros tipos de tejidos biológicos planos análogos (tejido de miocardio, arterias, piel, etc).
- Implantación en la formulación explícita para la función de energía de Holzapfel mediante una rutina de usuario (VUMAT).

Anexo A

Anatomía de los vasos sanguíneos

El *sistema cardiovascular* o *circulatorio* es el que conduce y hace circular la sangre. Está formado por el corazón, vasos sanguíneos (venas, arterias y capilares) y la sangre. Posee como función el distribuir los nutrientes y oxígeno a las células y recoger los desechos metabólicos que se han de eliminar después por los riñones (orina) y por el aire exhalado en los pulmones (dióxido de carbono). Se divide en dos circuitos más pequeños:

- **Circulación menor o pulmonar:** Este circuito lleva la sangre del corazón a los pulmones y de estos al corazón. De manera más específica, la sangre viaja del ventrículo derecho por la arteria pulmonar hasta los pulmones. Estas se dividen rápidamente hasta capilares que rodean a los sacos aéreos (alveolos) para intercambiar el dióxido de carbono por oxígeno. De manera gradual los capilares se reúnen formando las venas pulmonares, que llevan la sangre oxigenada de los pulmones a la aurícula izquierda.
- **Circulación mayor o sistémica:** Es el circuito principal de la circulación. Lleva la sangre procedente de los pulmones a todas las regiones del cuerpo y luego de regreso al corazón. Todas las arterias sistémicas desembocan en la vena cava inferior o en la superior, las cuales a su vez lo hacen en la aurícula derecha.

A.1. Tipos

Los vasos sanguíneos (arterias, capilares y venas) son conductos musculares y/o elásticos que distribuyen y recogen la sangre de todos los rincones del cuerpo. Se denominan arterias a aquellos vasos sanguíneos que llevan la sangre desde el corazón hasta los órganos corporales. Las grandes arterias que salen desde los ventrículos del corazón van ramificándose y haciéndose más finas hasta que por fin se convierten en capilares, vasos tan finos que a través de ellos se realiza el intercambio gaseoso y de sustancias entre la sangre y los tejidos. Una vez que este intercambio sangre-tejidos a través de la red capilar, los capilares van reuniéndose en vénulas y venas por donde la sangre regresa a las aurículas del corazón.

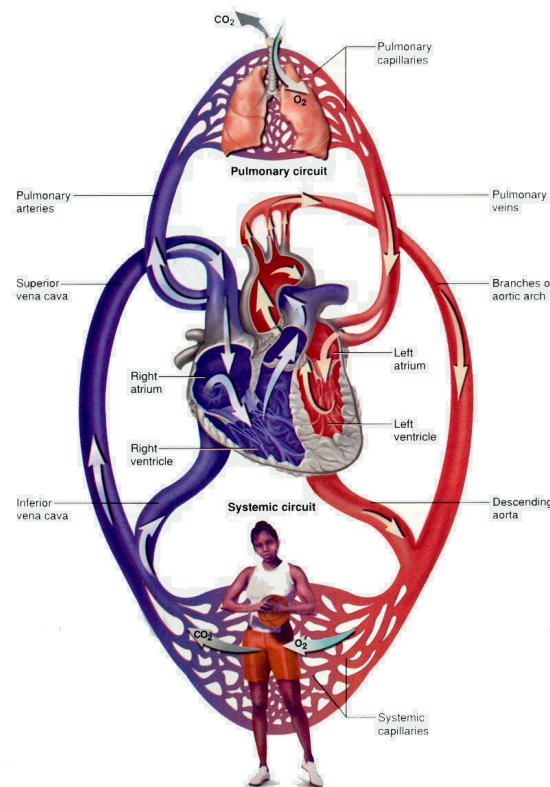


Figura A.1: Sistema circulatorio pulmonar (arriba) y sistémico (abajo). Fuente: [15].

- **Arterias:** Son vasos gruesos y elásticos que nacen en el corazón y aportan sangre a los órganos del cuerpo. Existen dos arterias principales: *arteria pulmonar*, que sale del ventrículo derecho y lleva la sangre a los pulmones, y la *arteria aorta*, que sale del ventrículo izquierdo formando el arco aórtico (cayado). De este último emergen arterias para cabeza, cuello y miembros superiores, desciende como aorta tóraxica y al atravesar diafragma cambia a aorta abdominal que irriga las estructuras abdominales. Finalmente se divide en dos arterias ilíacas.
- **Capilares:** En promedio no miden más de un milímetro de longitud y 8-12 micras de diámetro. Forman redecillas y en ellos se produce el intercambio entre plasma y líquido tisular, de modo que cuando la sangre sale del lecho capilar ya ha entregado el oxígeno y otros productos a las células del tejido, y ha recibido en cambio dióxido de carbono y productos de desecho.
- **Venas:** Son conductos con la función inversa de las arterias: guían la sangre de los capilares de vuelta al corazón. Existen dos tipos de vena cava: la *cava superior* está formada por la unión de las venas braquicefálicas (yugulares que vienen de la cabeza y las subclavias que proceden de los miembros superiores) y la *cava inferior* que engloba las venas ilíacas que vienen de los miembros inferiores (venas femorales, safena magna o interna y safena parva o externa), las renales de los riñones, la suprahepática del hígado y las genitales.

El flujo de las venas es mucho más lento que en las arterias, por lo que tienen mayor diámetro de modo que el caudal de entrada al corazón sea igual al de salida. Ya que las venas devuelven la sangre en contra de la gravedad, poseen unas válvulas antirretorno. El tejido elástico se pierde en la ancianidad, y entonces las arterias tienden a encogerse, hacerse tortuosas y endurecerse.

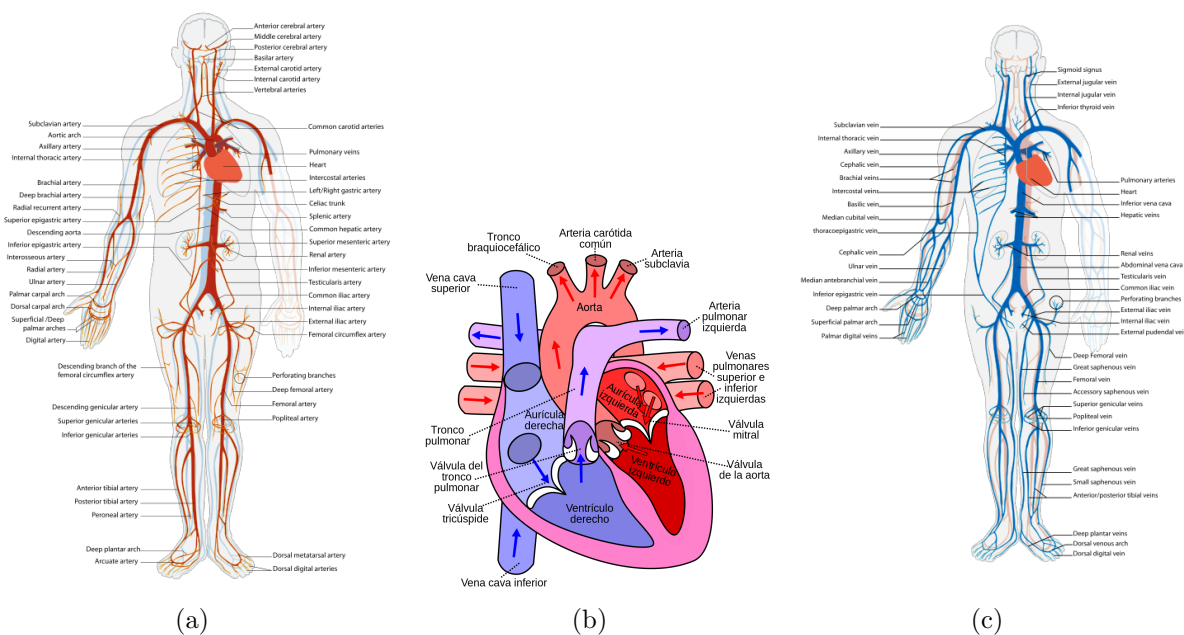


Figura A.2: Sistema arterial (a), corazón (b) y sistema venoso (c). Fuentes: [22], [28], [29].

A.2. Estructura

La microestructura de los vasos sanguíneos varía dependiendo de varios factores: edad, localización y tipo de vaso, espécimen y condiciones de trabajo a las que esté sometido. Esto quiere decir que cada vaso sanguíneo tiene su propia composición microestructural. A pesar de estas diferencias, todos están compuestos por tres capas principales: *íntima*, *media* y *adventicia*. En la Figura A.3 se puede observar la composición capa por capa de los conductos sanguíneos. A continuación se describen brevemente cada capa con sus características y composición. Para más información, consultar [23].

- **Adventicia:** Es la capa exterior de los vasos sanguíneos. Se compone principalmente de fibras de colágeno, que permiten a las venas y arterias expandirse lo suficiente como para soportar los altos rangos de presión ejercidos por el flujo sanguíneo en las paredes. Además, pueden aparecer células musculares sobre todo en venas largas como la vena cava, en la cual estas células se disponen de forma longitudinal. Esta capa suele ser la más gruesa de las tres en venas (40 % al 50 % del vaso). Sin embargo, en arterias sólo es del 30 % al 35 % del vaso

- **Media:** Es la capa media, compuesta por células musculares blandas reforzadas por capas ordenadas de tejido elástico y fibras de colágeno. Es más gruesa en arterias que en venas. Tiene la mayor capacidad resistente, fundamentalmente para rangos de presión fisiológicos.
- **Íntima:** Es la capa interior de venas y arterias. Suele estar compuesta únicamente por células endoteliales y en algunos casos por células musculares.

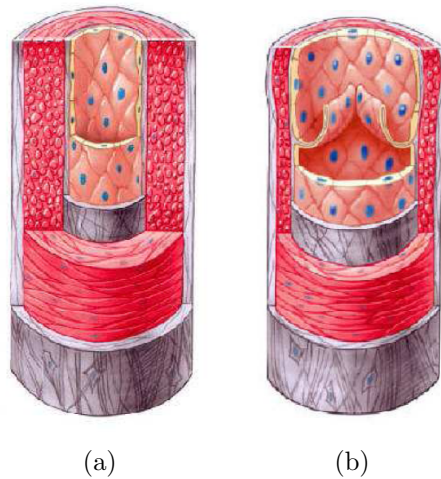


Figura A.3: *Composición microestructural por capas de una arteria (a) y una vena (b).*
Fuente: [7].

Anexo B

Post-procesado de datos

En el presente Anexo se muestran los resultados experimentales de los ensayos expuestos en el Capítulo 2. Todos los espesores y longitudes han sido medidas 3 veces con pie de rey. Por facilidad de lectura y reducción de la extensión del documento, en esta memoria sólo aparecen las medias de dichas medidas.

B.1. Resultados de ensayo uniaxial

En la Tabla B.1 se calcula el área transversal de la probeta (A_0) a partir del espesor (e) y la anchura (a) de la probeta. También se incluye su longitud (l), puesto que es necesaria para el cálculo de la deformación longitudinal. Dichas medidas se pueden ver esquematizadas en la Figura B.1.

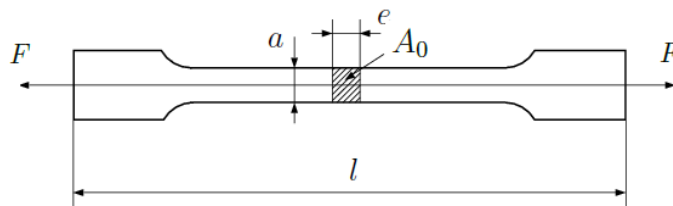


Figura B.1: Esquema de las medidas de las probetas uniaxiales.

La célula de carga mide el desplazamiento entre las mordazas (Δl) y la fuerza que ejercen (F). Mediante el uso de las Fórmulas B.1 y B.2¹ se pueden calcular las curvas tensión-alargamiento de la Figura B.2 a la B.7.

$$\lambda = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{B.1})$$

¹Nótese que se utiliza la fórmula de tensión en grandes deformaciones, puesto que compensa la reducción progresiva del área de la probeta durante el ensayo.

$$\sigma = \lambda \frac{F}{A_0} \quad (\text{B.2})$$

El estado de tracción uniaxial se caracteriza porque las tensiones $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Considerando las Ecuaciones C.20 y teniendo en cuenta la condición de incompresibilidad ($\det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$) y de deformación uniaxial, los alargamientos principales valdrían

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \lambda_3 = \lambda \quad (\text{B.3})$$

Dichos alargamientos se tendrán en cuenta a la hora de calcular los invariantes explicados en el Anexo C.3.2 y se incluirán en el ajuste con el modelo de Gasser o Holzapfel.

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \frac{2}{\lambda} + \lambda^2 \\ I_4 &= \lambda_1^2 \cos^2(\theta) + \lambda_2^2 \sin^2(\theta) \\ I_6 &= \lambda_1^2 \cos^2(-\theta) + \lambda_2^2 \sin^2(-\theta) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

De la Figura B.2 a la B.7 se muestran las gráficas post-procesadas de los ensayos uniaxiales. Adicionalmente, se incluyen los ajustes teóricos mediante los modelos de Gasser y Holzapfel mostrados en el Capítulo 3.1.2.

I					II				
	e [mm]	a [mm]	l [mm]	A_0 [mm ²]		e [mm]	a [mm]	l [mm]	A_0 [mm ²]
L 1	0.61	5.07	17.01	3.08	L1	0.62	4.85	22.15	3.02
L 2	0.52	4.47	16.02	2.31	L2	0.61	5.27	22.47	3.23
L 3	0.37	4.31	14.98	1.63	C1	0.54	5.30	21.84	2.86
C 1	0.58	5.05	16.12	3.21	C2	0.57	4.56	21.04	2.72
C 2	0.61	5.27	15.85	3.19					

III					IV				
	e [mm]	a [mm]	l [mm]	A_0 [mm ²]		e [mm]	a [mm]	l [mm]	A_0 [mm ²]
L1	0.82	3.34	20.87	2.73	L1	0.55	3.91	16.38	2.16
L2	0.68	5.01	15.32	3.41	L2	0.61	4.25	13.29	2.61
C1	0.57	4.06	12.84	2.23	C1	0.55	3.41	16.84	1.89
C2	0.56	3.41	12.29	1.92	C2	0.56	3.10	12.29	1.75

V					VI				
	e [mm]	a [mm]	l [mm]	A_0 [mm ²]		e [mm]	a [mm]	l [mm]	A_0 [mm ²]
L1	0.93	3.41	13.35	3.17	L1	0.50	4.17	15.85	2.10
L2	0.75	3.57	14.57	2.69	L2	0.62	4.54	15.40	2.80
L3	0.78	3.69	17.36	2.89	L3	0.37	4.67	15.30	1.75
C1	0.71	4.06	14.51	2.88	L4	0.45	4.23	14.62	1.89
C2	0.71	4.11	9.87	2.92	C1	0.55	4.38	21.39	2.42
					C2	0.66	3.64	17.98	2.41

Tabla B.1: Medida de longitudes y espesores de las probetas longitudinales (L) y circunferenciales (C) para ensayo uniaxial.

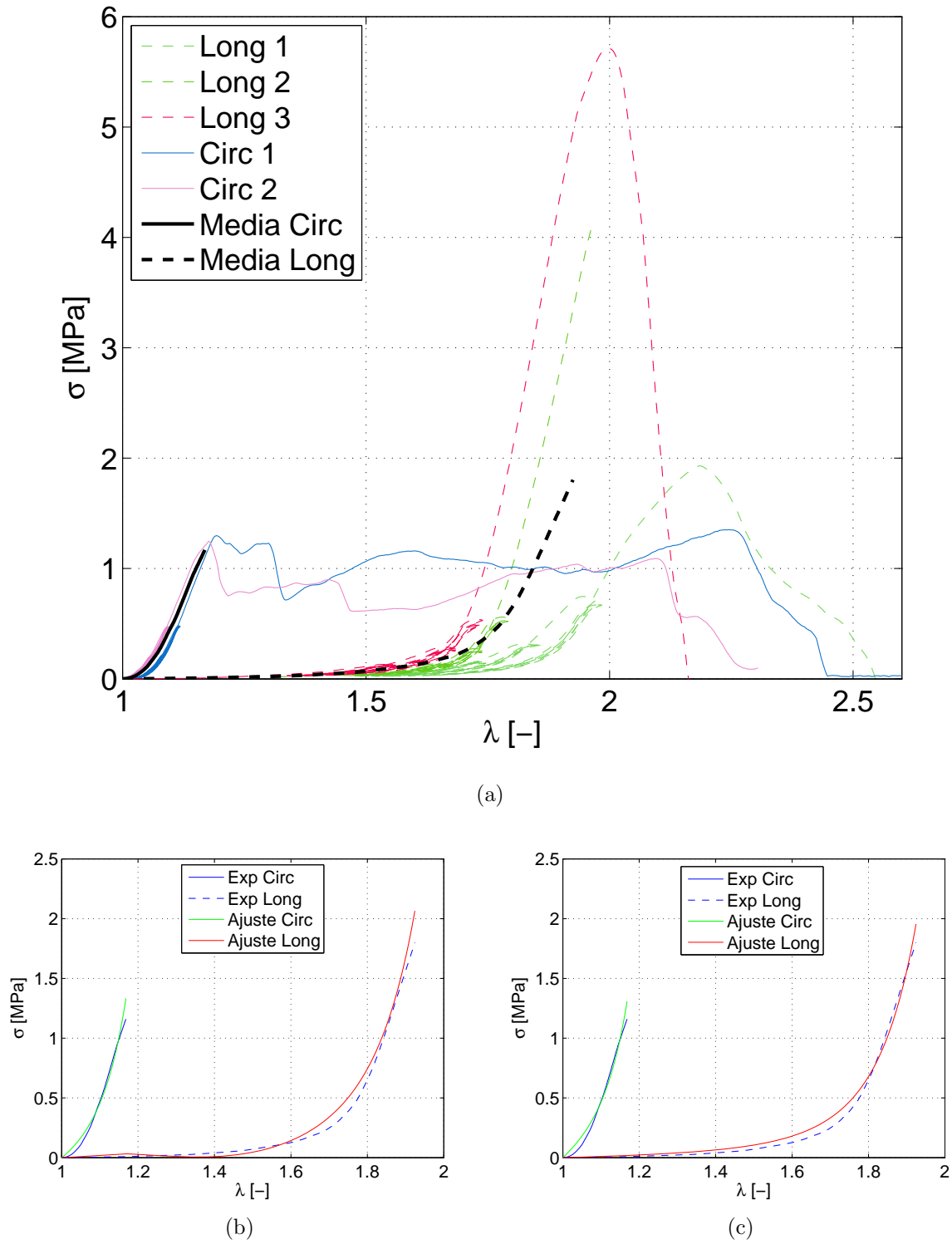
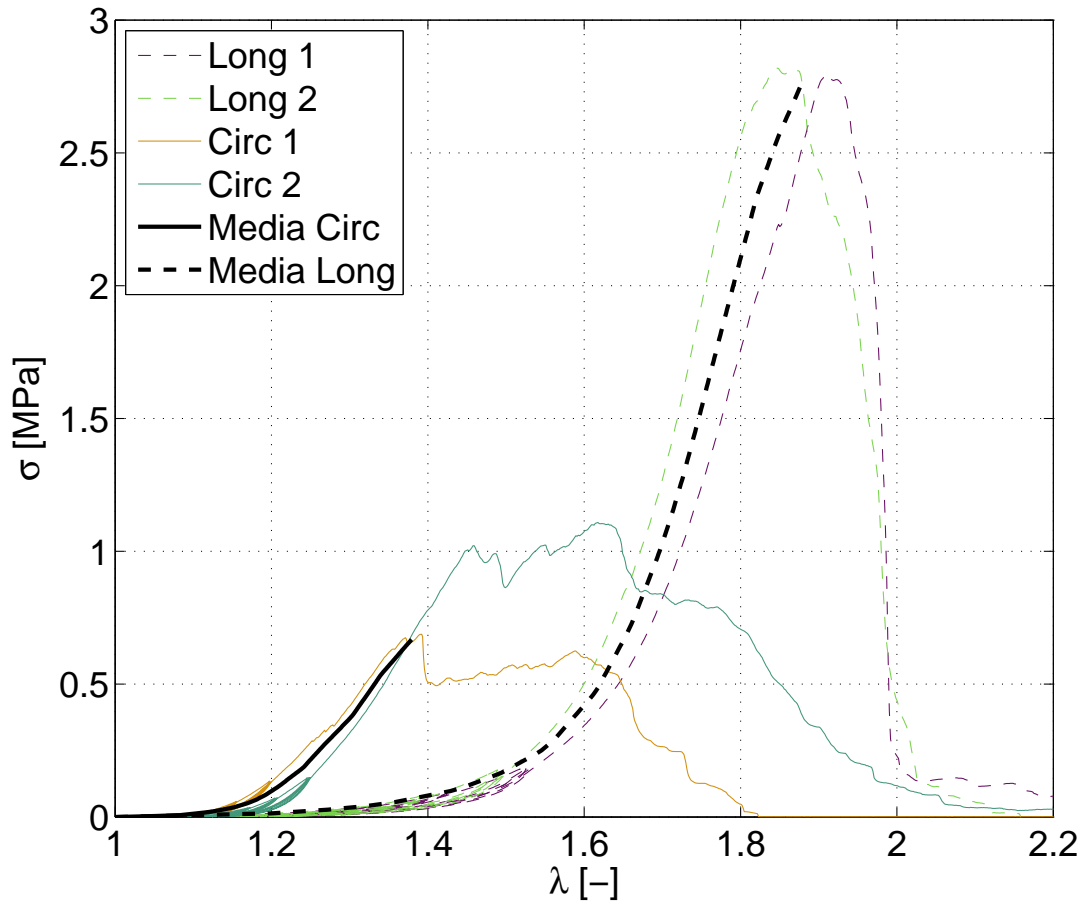
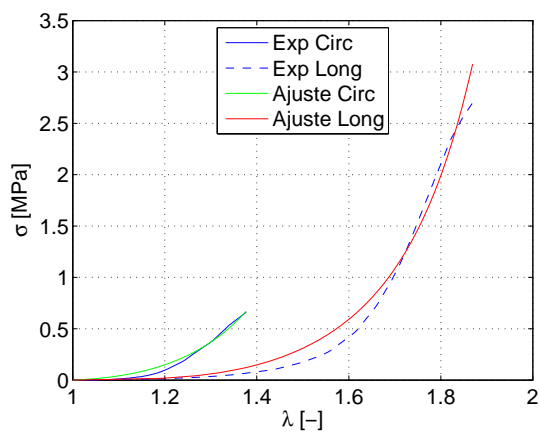


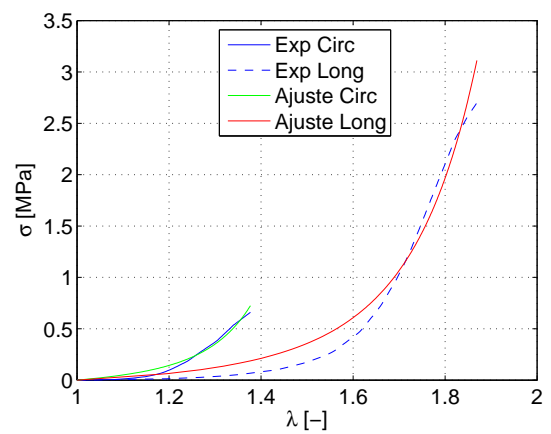
Figura B.2: Curvas de ensayo uniaxial de muestra I (a) y ajuste de curvas medias por el modelo de Gasser (b) y Holzapfel (c).



(a)

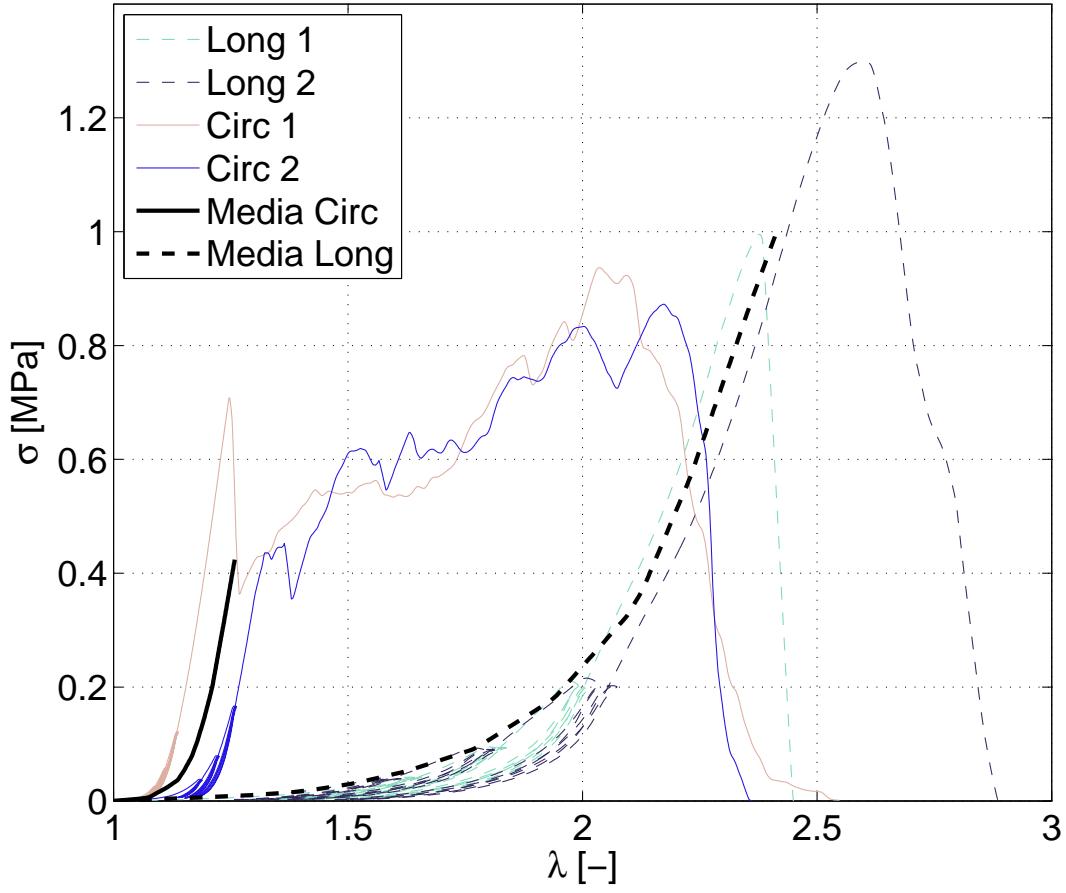


(b)

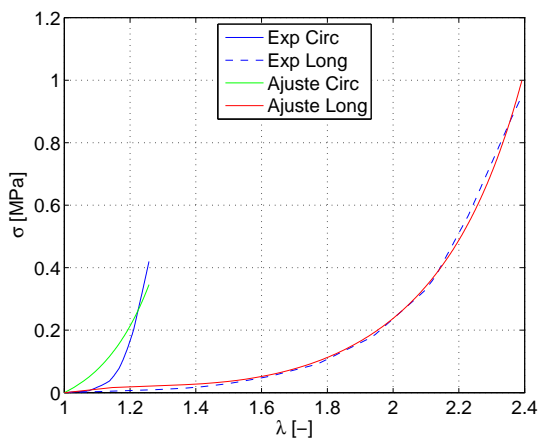


(c)

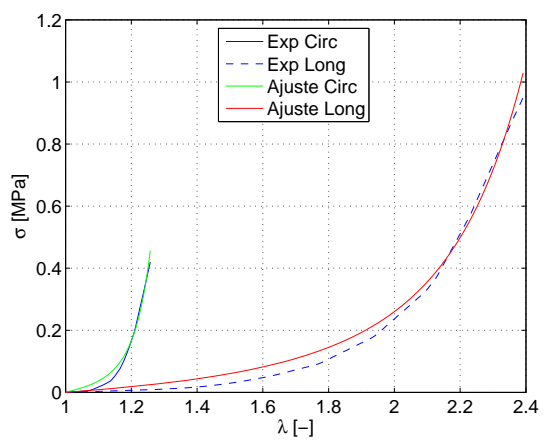
Figura B.3: Curvas de ensayo uniaxial de muestra II (a) y ajuste de curvas medias por el modelo de Gasser (b) y Holzapfel (c).



(a)

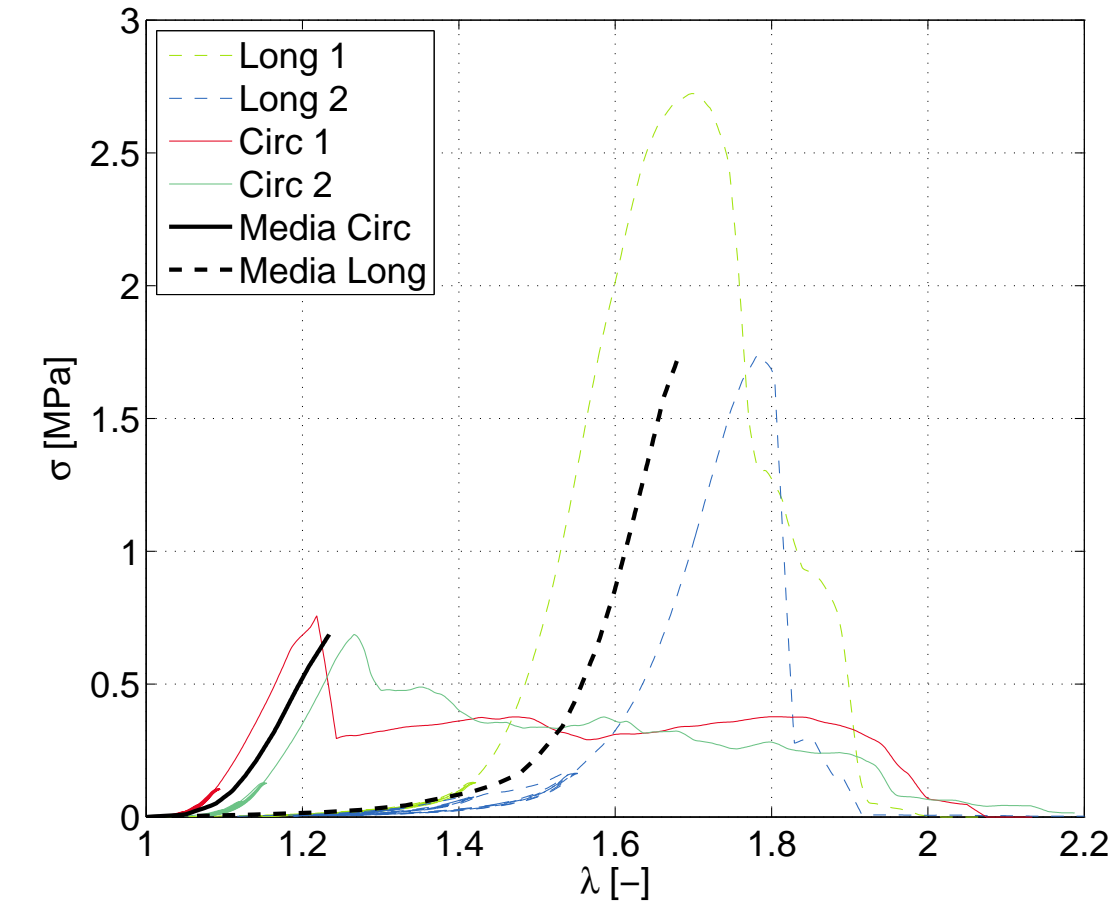


(b)

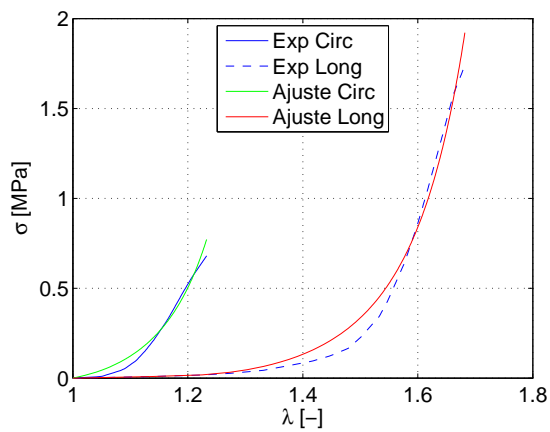


(c)

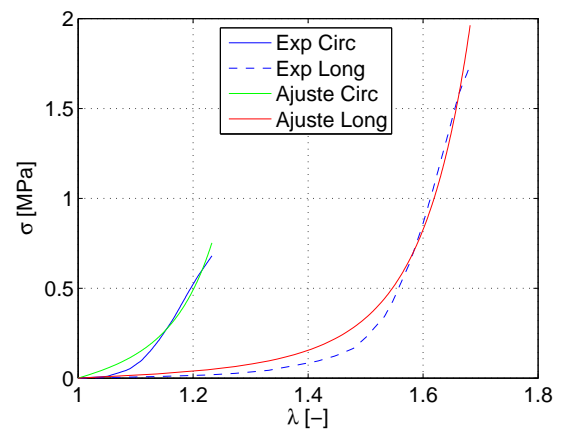
Figura B.4: Curvas de ensayo uniaxial de muestra III (a) y ajuste de curvas medias por el modelo de Gasser (b) y Holzapfel (c).



(a)

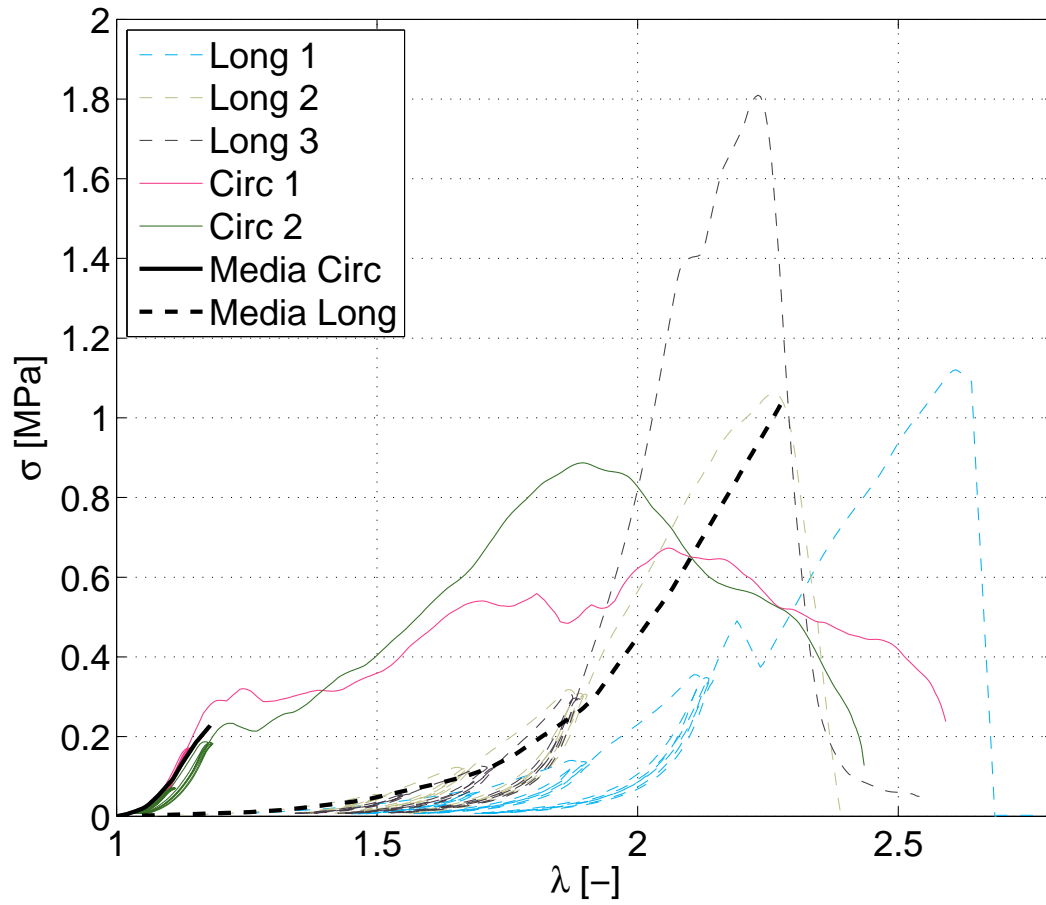


(b)

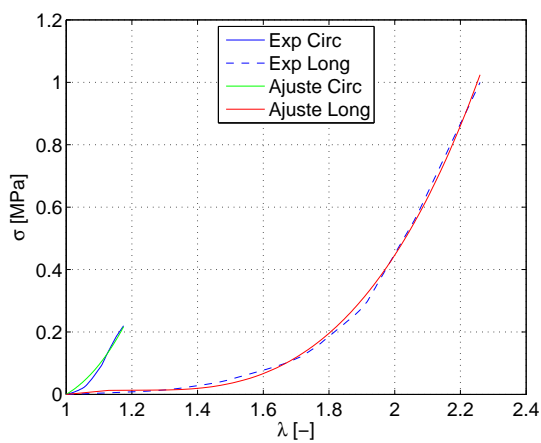


(c)

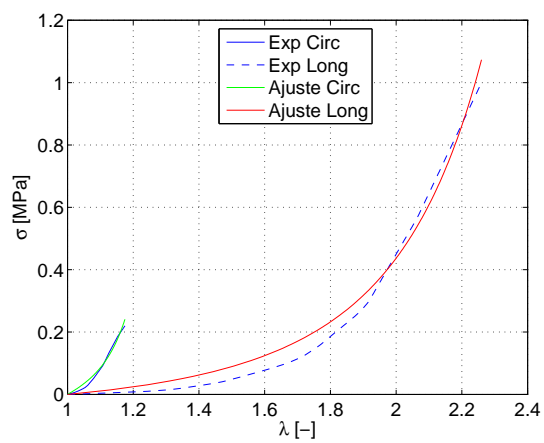
Figura B.5: Curvas de ensayo uniaxial de muestra IV (a) y ajuste de curvas medias por el modelo de Gasser (b) y Holzapfel (c).



(a)

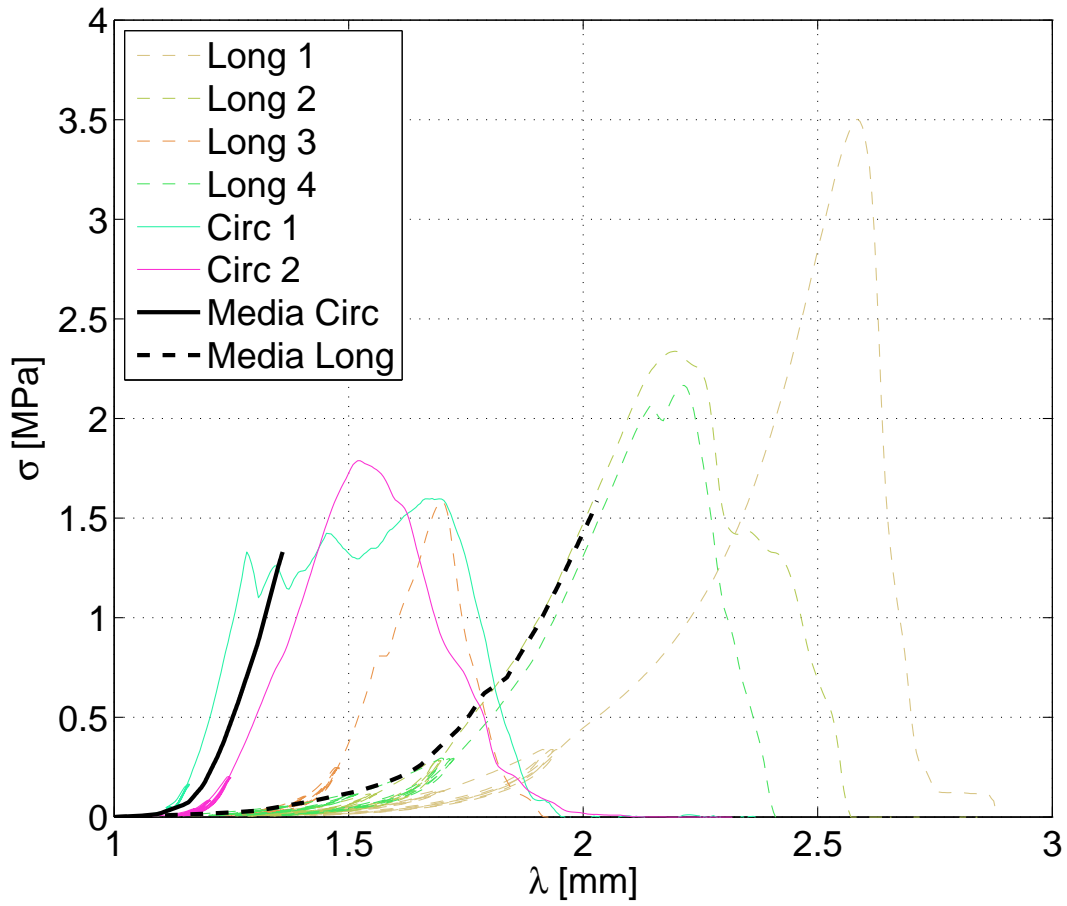


(b)

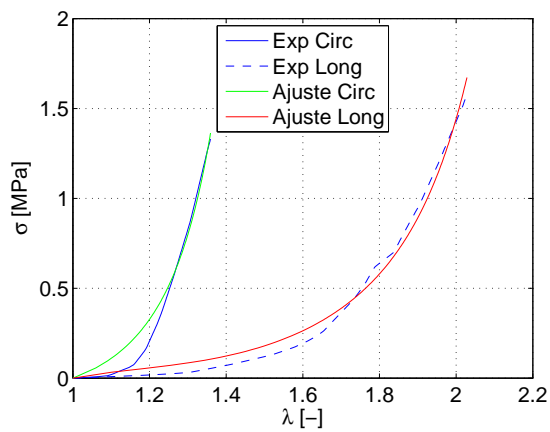


(c)

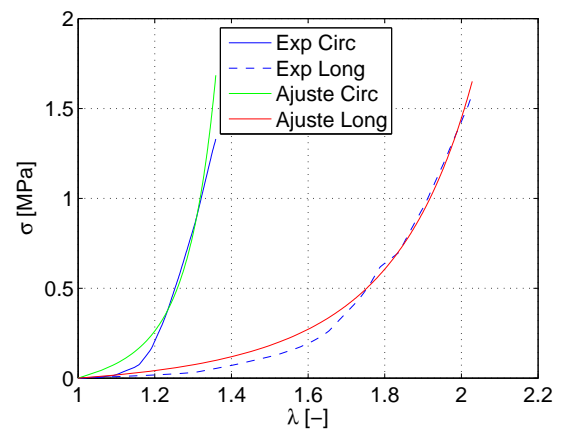
Figura B.6: Curvas de ensayo uniaxial de muestra V (a) y ajuste de curvas medias por el modelo de Gasser (b) y Holzapfel (c).



(a)



(b)



(c)

Figura B.7: Curvas de ensayo uniaxial de muestra VI (a) y ajuste de curvas medias por el modelo de Gasser (b) y Holzapfel (c).

B.2. Resultados de ensayo biaxial

En la Tabla B.2 se exponen las mediciones de longitudes iniciales (L_0) y finales (L_f) de los ensayos de pretensión axial y ángulo de apertura. Adicionalmente, se calculan las pretensiones en dirección longitudinal (λ_l) y circunferencial (λ_c) que se han de imponer en cada ensayo biaxial. Para el cálculo de los alargamientos (λ) se aplica la Ecuación B.5².

$$\lambda = 1 + \varepsilon = 1 + \frac{\Delta L}{L_0} = 1 + \frac{L_f - L_0}{L_0} \quad (\text{B.5})$$

$$\Delta L_i = \varepsilon_i L_i = (\lambda_i - 1) L_i \quad i = l, c \quad (\text{B.6})$$

Muestra	Pretensión Axial			Ángulo de Apertura		
	L_0 [mm]	L_f [mm]	λ_l [-]	L_0 [mm]	L_f [mm]	λ_c [-]
I	121.38	63.43	1.91	52.97	57.78	1.09
II	109.26	71.88	1.52	51.49	63.12	1.23
III	43.87	38.17	1.13	57.06	58.57	1.02
IV	130.55	86.73	1.33	37.70	40.84	0.91
V	100.85	63.20	1.59	50.48	51.93	1.03
VI	133.82	94.07	1.42	57.70	66.03	1.13

Tabla B.2: Medida de las longitudes inicial y final de los ensayos de pretensión axial y ángulo de apertura y cálculo de las pretensiones para las probetas del ensayo biaxial.

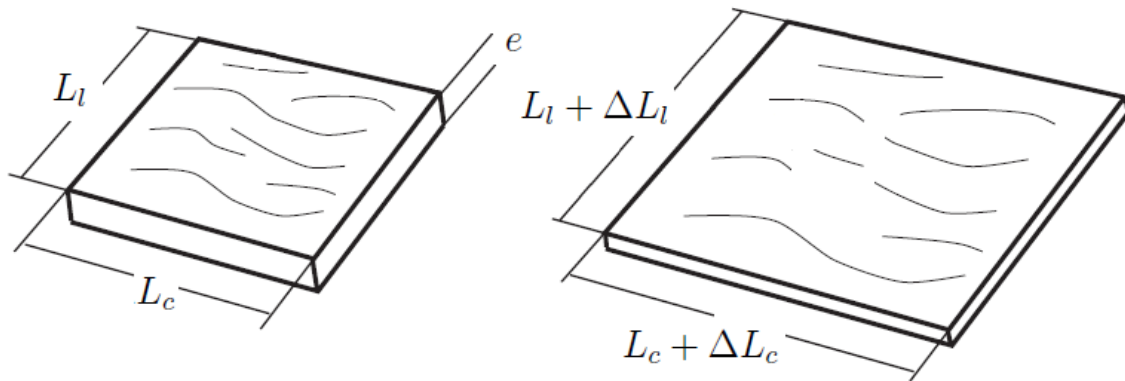


Figura B.8: Esquema de las medidas de las probetas biaxiales.

²Para el caso del ensayo de pretensión axial, puesto que la longitud final es menor que la inicial, la longitud inicial del ensayo es la final de la fórmula y viceversa.

Las probetas para ensayo biaxial tienen forma cuadrada normalizada de 35 mm de lado. Sin embargo, debido a la relajación del material es frecuente que esas medidas varíen. En la Tabla B.3 se exponen las mediciones de espesor (e) y longitud en dirección circunferencial (L_c) y longitudinal (L_l) llevadas a cabo en cada muestra, así como su valor medio.

Muestra	e_l [mm]	e_c [mm]	L_l [mm]	L_c [mm]
I	0.54	0.43	37.73	36.50
II	0.73	0.69	36.77	36.08
III	0.98	1.05	36.55	34.16
IV	0.69	0.84	35.46	34.63
V	0.73	0.75	34.99	34.96
VI	0.88	0.95	35.52	35.50
Media \pm SD	0.76 ± 0.15	0.79 ± 0.22	36.17 ± 1.03	35.31 ± 0.89

Tabla B.3: Medida y media de longitudes y espesores de las probetas para el ensayo biaxial.

Partiendo de los alargamientos de la Tabla B.2 se calculan los desplazamientos longitudinales (ΔL_l) y circunferenciales (ΔL_c) que se deberán imponer en las mordazas al inicio del ensayo biaxial mediante la Fórmula B.6. Nótese que $\lambda < 1$ implica desplazamientos y pretensión negativos, lo cual implicaría compresión de las mordazas en esa dirección y se interpreta como que no es necesario traccionar la muestra ($\lambda = 1$).

Muestra	ΔL_l [mm]	ΔL_c [mm]
I	34.33	3.29
II	19.72	8.14
III	4.75	1
IV	11.70	1
V	20.6	0.94
VI	14.92	4.47
Media \pm SD	17.67 ± 10	3.14 ± 2.85

Tabla B.4: Cálculo de los alargamientos longitudinales y circunferenciales de las probetas para el ensayo biaxial.

Las 25 indentaciones se disponen de forma uniforme alrededor del centro de la probeta separadas 4 mm entre sí, como se muestra en la Figura B.9. Los 9 puntos centrales recuadrados en línea discontinua son los utilizados para llevar a cabo las medias y, por tanto, los ajustes de parámetros.

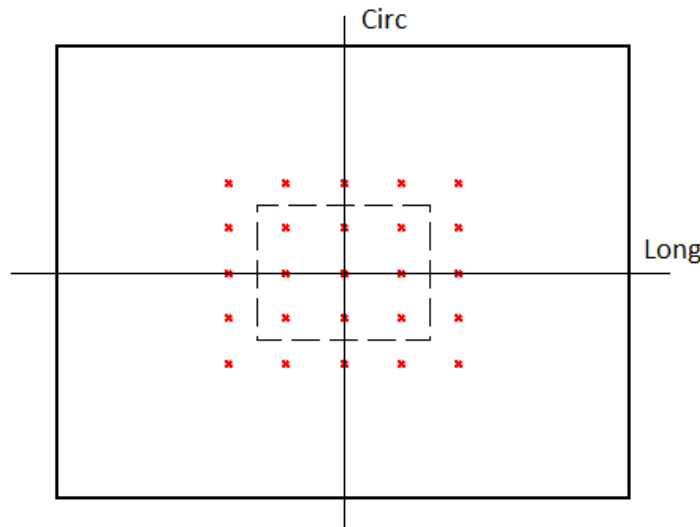
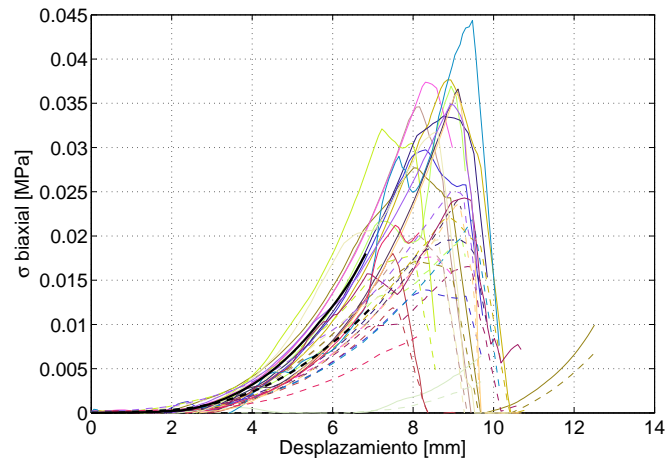


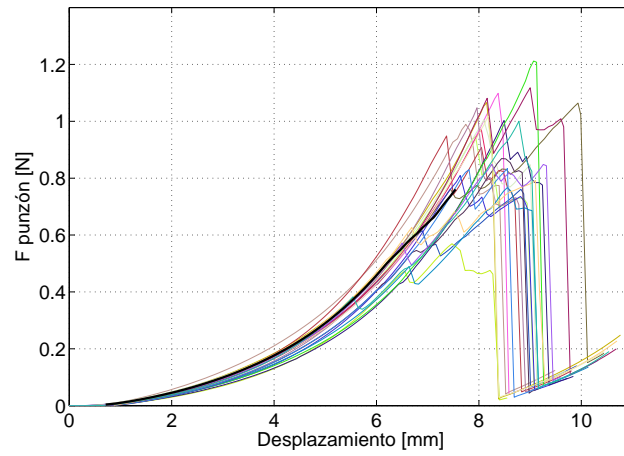
Figura B.9: Disposición de las 25 indentaciones.

De la Figura B.10 a la B.15 se exponen las gráficas post-procesadas de cada ensayo biaxial. En las muestras V y VI no se disponen de los datos de tensión biaxial, puesto que los instrumentos de medida no estaban correctamente calibrados y presentaban datos erróneos. La célula de carga mide el desplazamiento del punzón y la fuerza biaxial ejercida por las mordazas. Con ello es sencillo calcular la tensión mediante la Fórmula B.7.

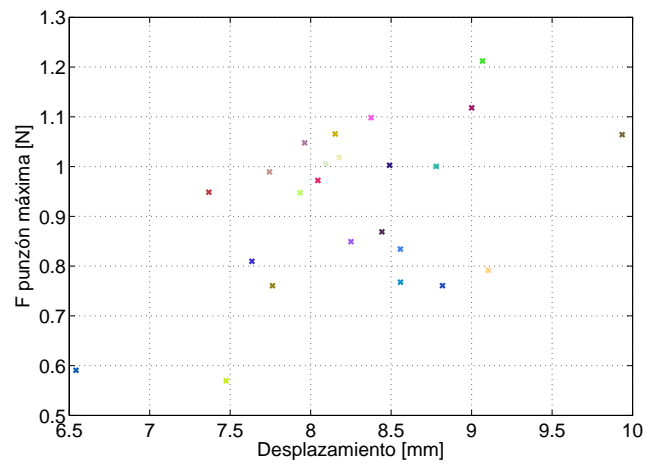
$$\sigma_i = \frac{F_i}{A_i} \quad i = l, c \quad (\text{B.7})$$



(a)

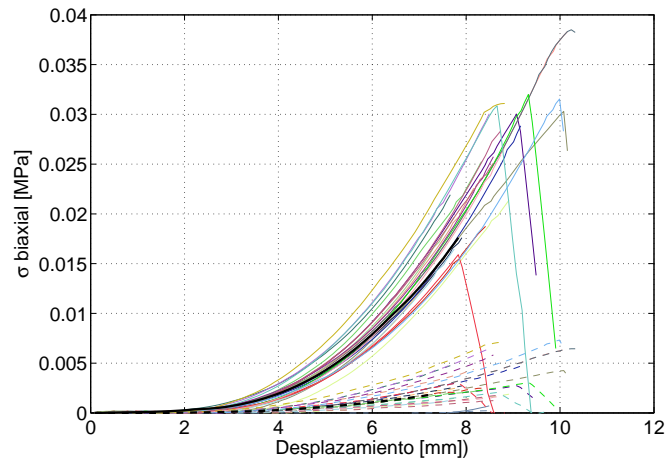


(b)

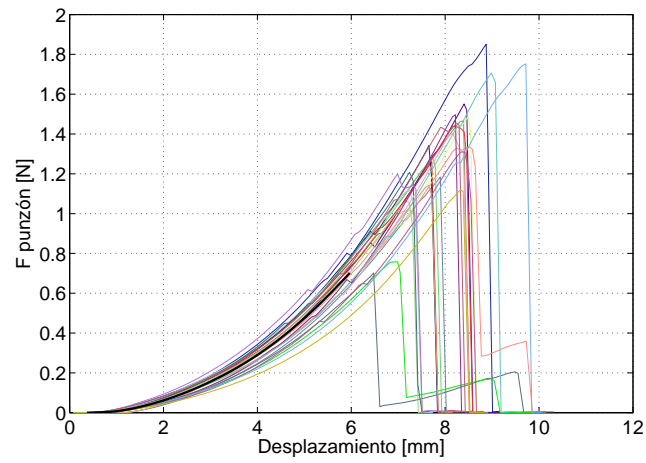


(c)

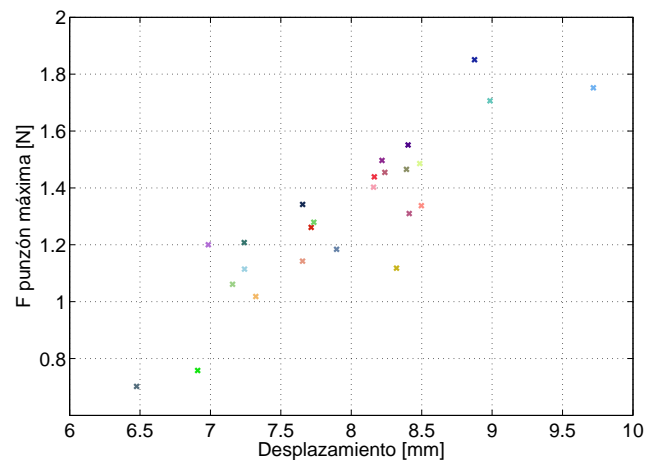
Figura B.10: *Curvas de ensayo biaxial de muestra I.*



(a)

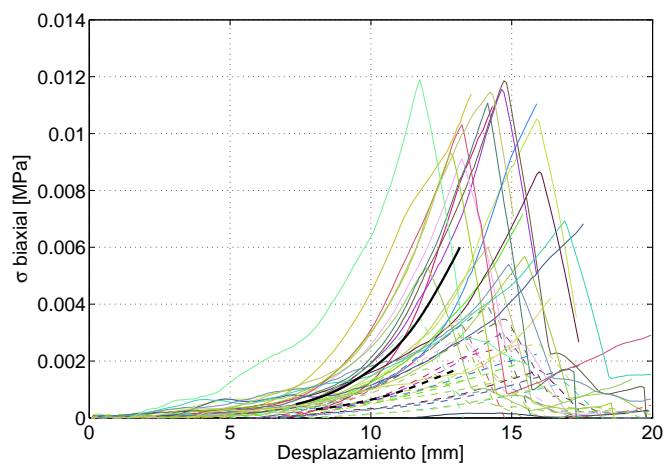


(b)

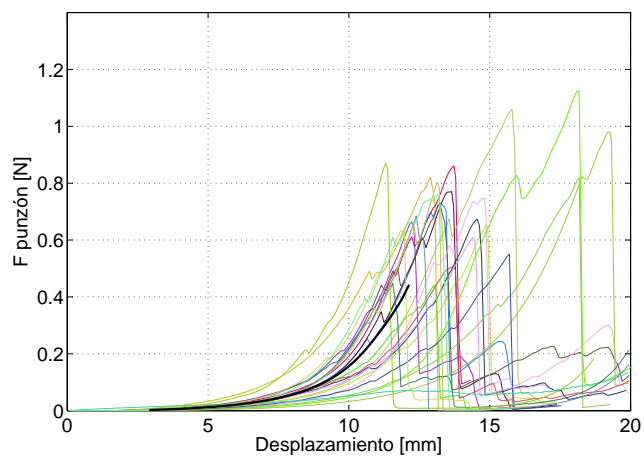


(c)

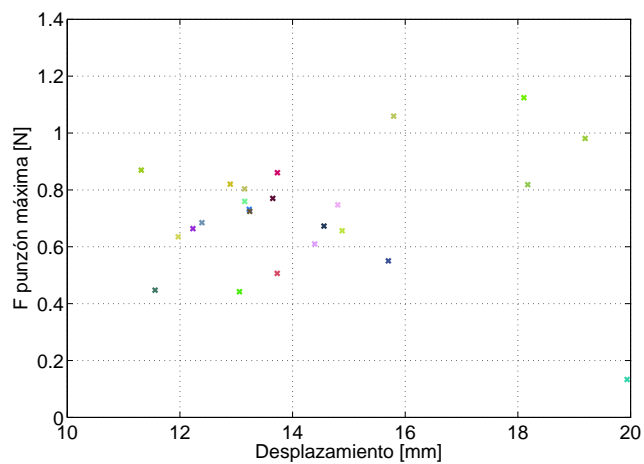
Figura B.11: *Curvas de ensayo biaxial de muestra II.*



(a)

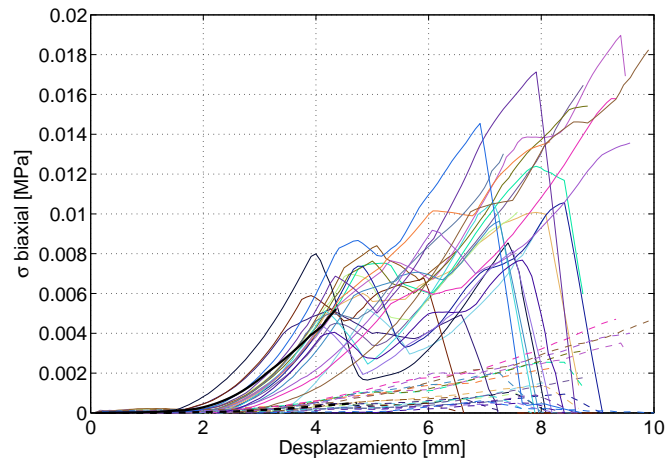


(b)

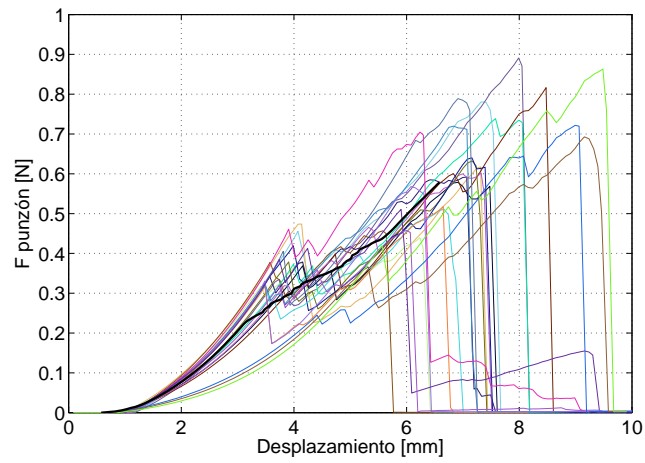


(c)

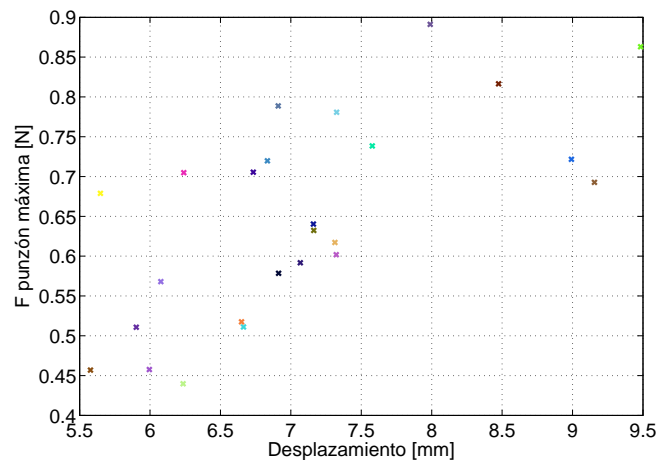
Figura B.12: *Curvas de ensayo biaxial de muestra III.*



(a)

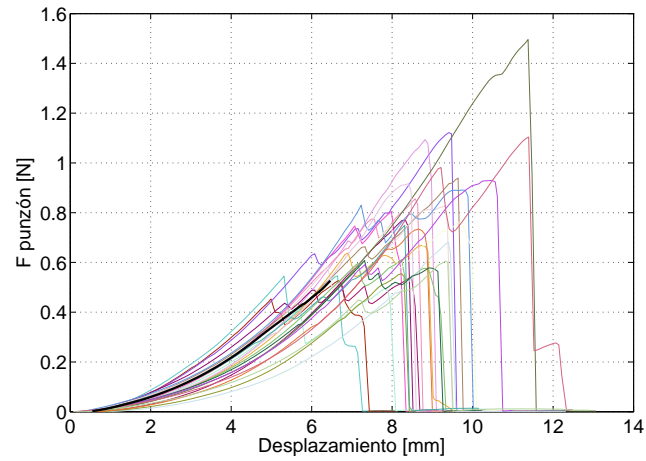


(b)

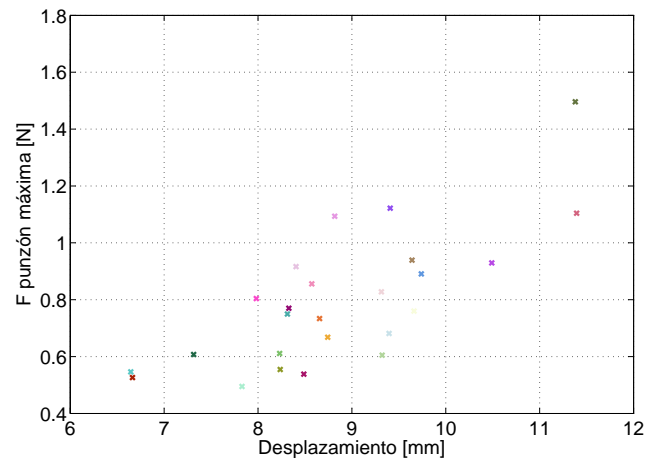


(c)

Figura B.13: *Curvas de ensayo biaxial de muestra IV.*

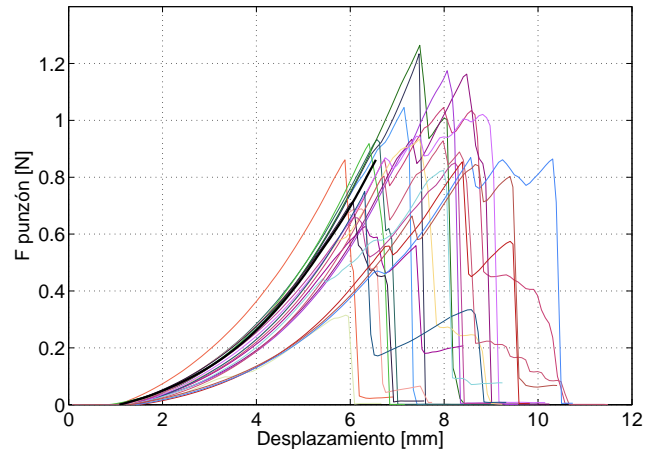


(a)

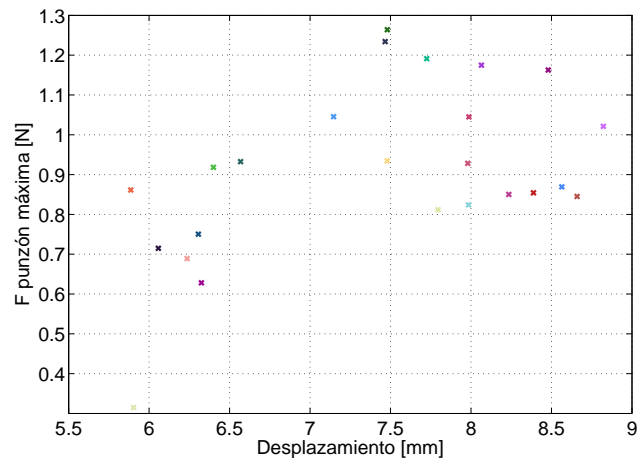


(b)

Figura B.14: *Curvas de ensayo biaxial de muestra V. No se disponen datos de tensión biaxial debido a la incorrecta calibración del equipo.*



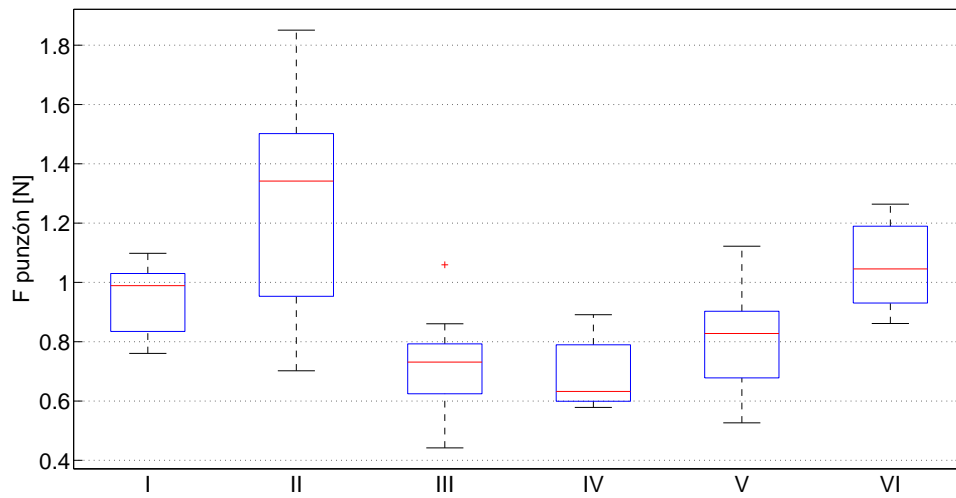
(a)



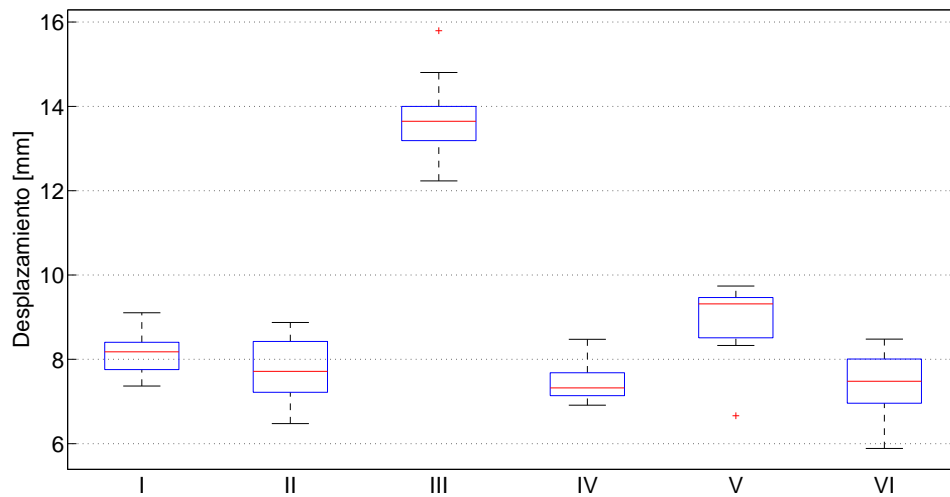
(b)

Figura B.15: *Curvas de ensayo biaxial de muestra VI. No se disponen datos de tensión biaxial debido a la incorrecta calibración del equipo.*

Para hallar los parámetros de rotura, se debe realizar un análisis estadístico de las fuerzas de rotura y desplazamientos medios que se representan en los gráficos de puntos de los resultados biaxiales. De esta forma, se calcula la fuerza media y desplazamiento medio del punzón, para saber dónde debe de romper la simulación de elementos finitos. A continuación se exponen diagramas de cajas que representan los cuartiles y datos atípicos (*outlayers*) de las roturas de las 6 muestras.



(a)



(b)

Figura B.16: Diagrama de cajas de fuerzas (a) y desplazamientos de punzón (b).

Para cada una de las muestras se calcula la media de la fuerza de rotura (F_{max}) y desplazamiento de rotura (d_{max}). El valor al cual el modelo de elementos finitos se debe acercar será la media de las medias, calculadas en la Tabla B.5.

Muestra	F_{max} [N]	d_{max} [mm]
I	0.95	8.16
II	1.27	7.80
III	0.72	13.72
IV	0.69	7.46
V	0.81	8.87
VI	1.07	7.38
Media \pm SD	0.92 ± 0.22	8.90 ± 2.42

Tabla B.5: Cálculo de la fuerza y desplazamientos medios de punzón durante rotura en el ensayo biaxial.

B.3. Resultados de modelo de elementos finitos

La Figura B.17 muestra la geometría acotada tanto de la probeta como del punzón. Los huecos trapezoidales de los laterales simulan el agarre de las mordazas.

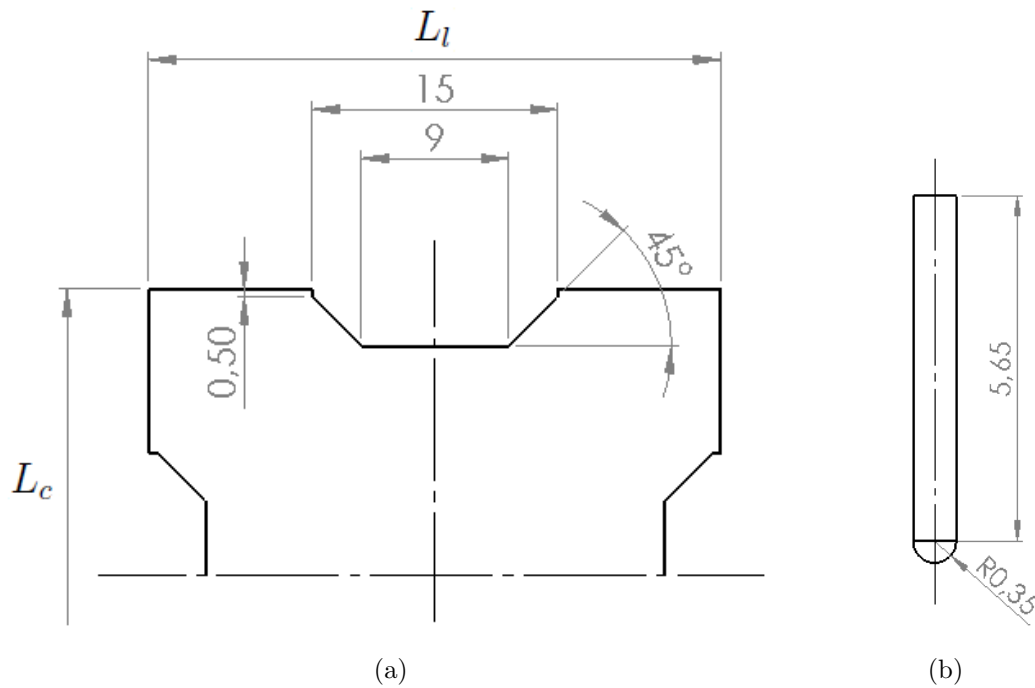


Figura B.17: Geometría con las medidas principales de la probeta (a) y el punzón (b) obtenidas del ensayo experimental.

En la Figura B.18 se muestra la primera simulación en Abaqus/Standard de la zona elástica sin rotura mediante el modelo de Holzapfel, cuyos resultados se comparan con el modelo de Abaqus/Explicit en la Figura 3.5.

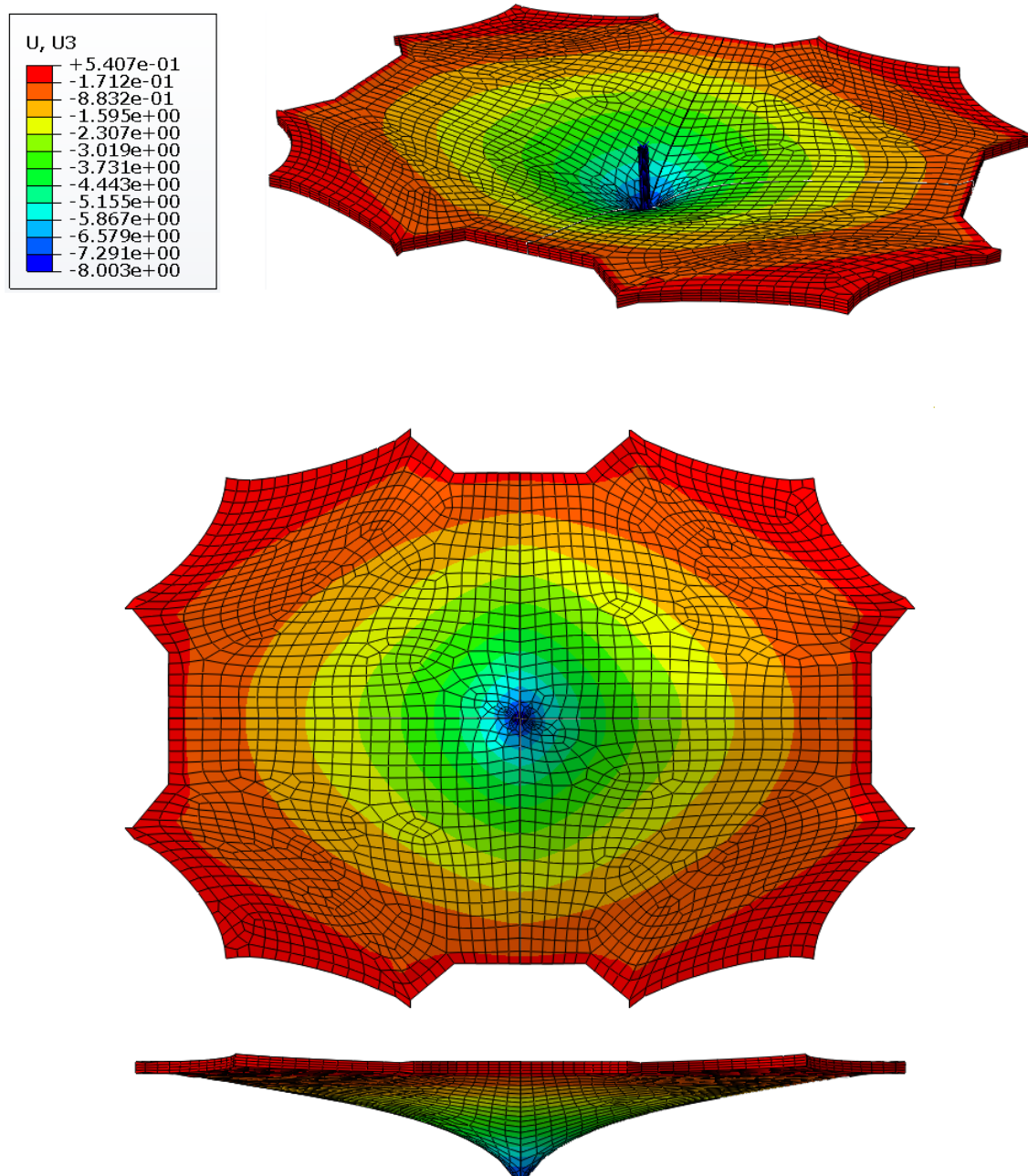


Figura B.18: Mapa de desplazamiento durante la simulación del ensayo biaxial sin rotura con el modelo de Holzapfel en Abaqus/Standard.

La zona de fractura se alinea con las fibras de colágeno, por lo que la tensión entre las superficies cohesivas es en dirección longitudinal. Por tanto, partir de las tensiones de rotura de los ensayos uniaxiales se puede calcular la tensión de rotura longitudinal media, para introducirla en la ley de tracción-separación de la superficie cohesiva.

Muestra	σ_{max} [MPa]					
I	4.09	5.59	1.80	-		3.83 ± 1.91
II	2.81	2.78	1.12	-		2.24 ± 0.97
III	1.29	0.99	-	-		1.14 ± 0.21
IV	2.72	1.74	-	-		2.23 ± 0.69
V	1.81	1.06	1.12	-		1.33 ± 0.42
VI	3.50	2.34	2.17	1.59		2.40 ± 0.80
Media \pm SD						2.20 ± 0.96

Tabla B.6: Cálculo de la tensión media de los ensayos uniaxiales en dirección longitudinal.

En este punto se llevan a cabo diversas simulaciones con el modelo de elementos finitos del ensayo biaxial con indentación para hallar los parámetros de rotura que satisfaga el desplazamiento de punzón en rotura de $d_{max} = 8.9$ mm y la tensión normal máxima de rotura de $\sigma_{max} = 2.2$ MPa.

En una primera iteración (Figura B.7), los resultados que más se aproximan a los resultados experimentales ($d_r = 8.9$ mm) son los marcados en verde. El resto de simulaciones o rompen demasiado pronto ($d_{sim} < 8$ mm) o no llegan a romper ($d_{sim} > 10$ mm). A continuación se seleccionan puntos intermedios para centrar la búsqueda del punto de rotura deseado. Partiendo de los mejores resultados de la primera iteración, se escogen parámetros intermedios en una segunda iteración (Figura B.8) para acercarse al punto solución del problema en función de los datos experimentales.

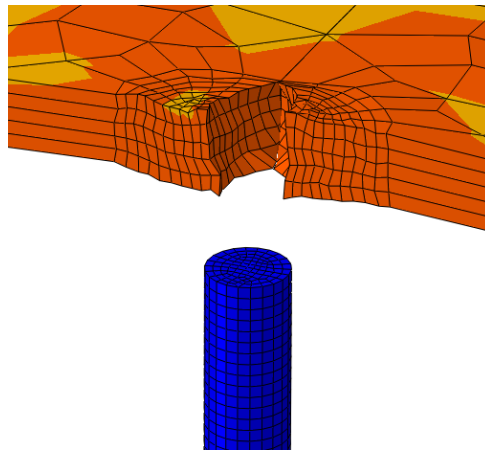


Figura B.19: Detalle de la separación de la Zona Cohesiva durante la rotura.

Simulación	δ_0 [mm]	δ_r [mm]	K [-]	G_0 [N/mm]	d_{sim} [mm]
1A	0.01	0.7	220	0.77	>10
2A		0.5		0.55	>10
3A		0.3		0.33	8.5
4A		0.1		0.11	7
5A	0.05	0.7	44	0.77	>10
6A		0.5		0.55	>10
7A		0.3		0.33	9.4
8A		0.1		0.11	8.4
9A	0.1	0.7	11	0.77	>10
10A		0.5		0.55	>10
11A		0.3		0.33	>10
12A	0.2	0.7	22	0.77	>10
13A		0.5		0.55	>10
14A		0.3		0.33	9.8

Tabla B.7: *Primera iteración (A) de simulaciones con modificaciones en los parámetros de rotura.*

Simulación	δ_0 [mm]	δ_r [mm]	K [-]	G_0 [N/mm]	d_{sim} [mm]
1B	0.01	0.45	220	0.495	>10
2B		0.4		0.44	>10
3B		0.35		0.33	9.4
4B	0.03	0.5	73.33	0.385	>10
5B		0.3		0.33	9
6B		0.2		0.22	8.5
7B		0.1		0.11	7.8
8B	0.05	0.25	44	0.275	9.6
9B		0.2		0.22	9.4
10B		0.15		0.385	8.4

Tabla B.8: *Segunda iteración (B) de simulaciones con modificaciones en los parámetros de rotura.*

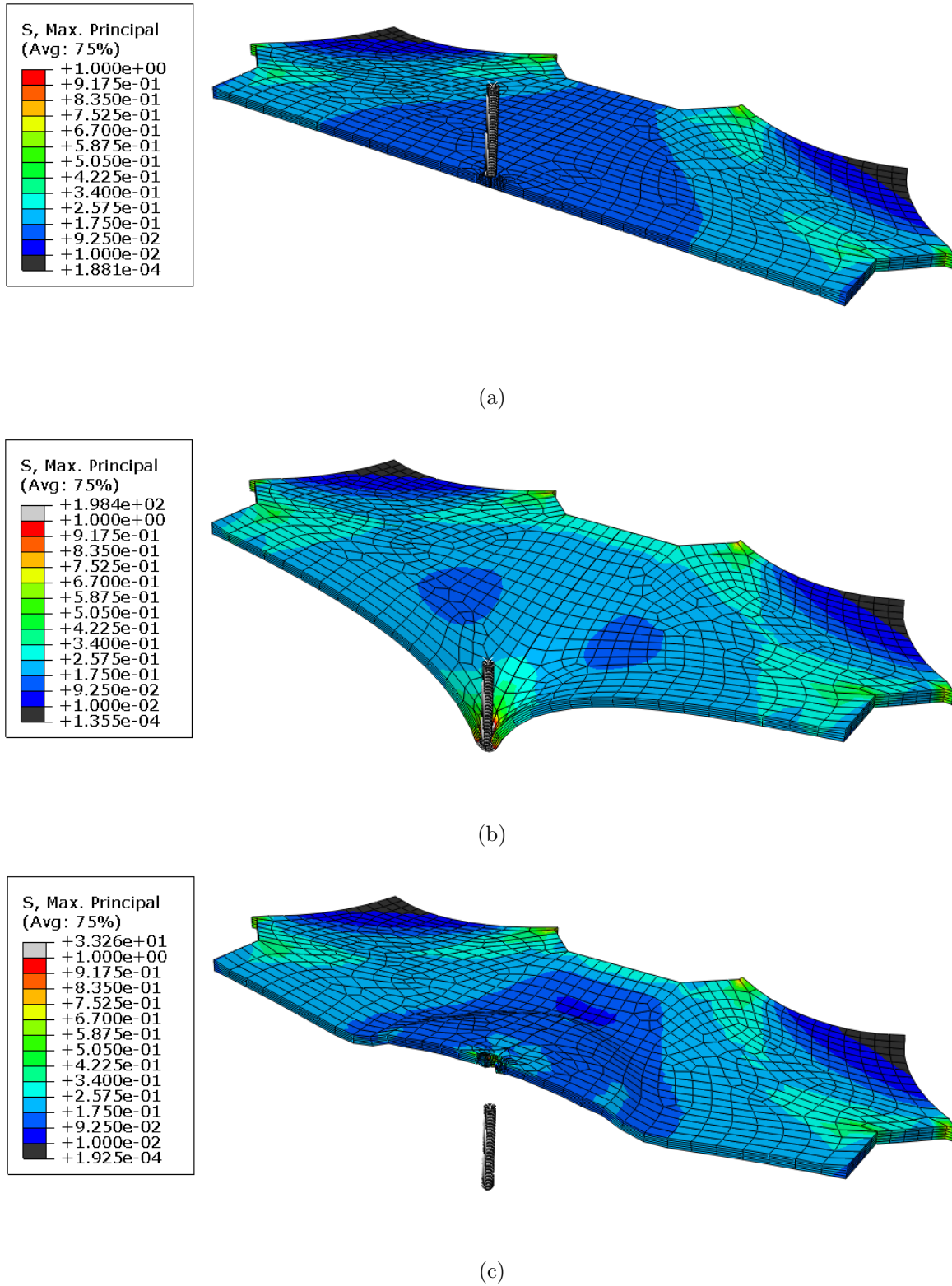
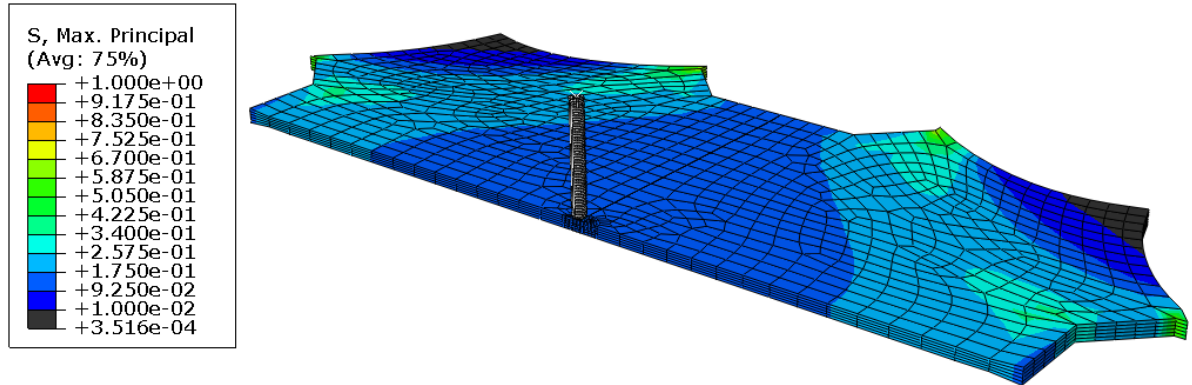
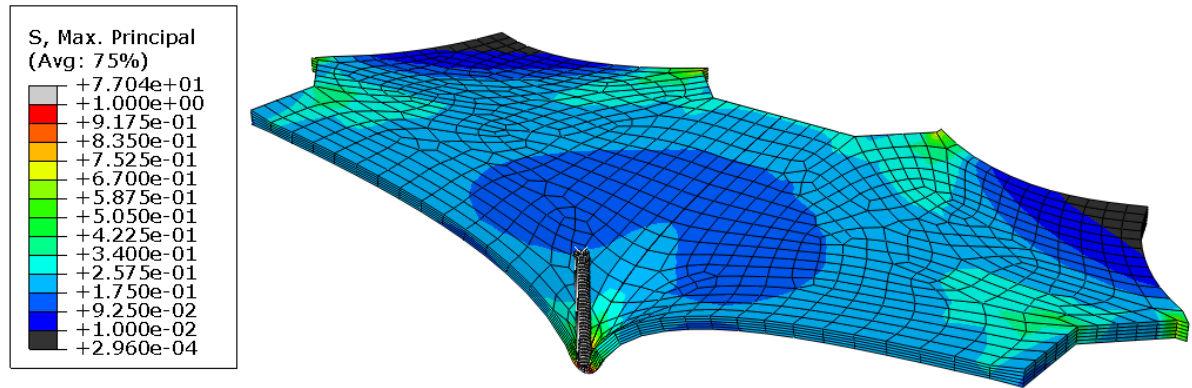


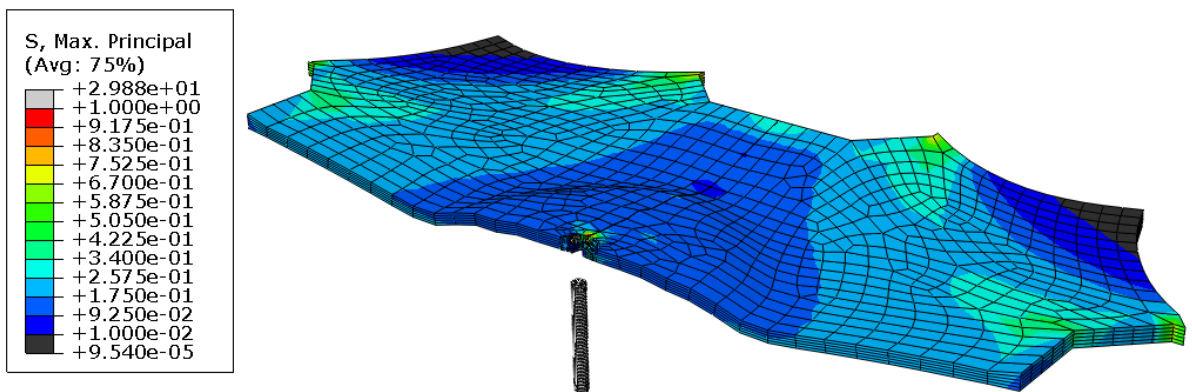
Figura B.20: Mapa de tensiones durante la simulación 3B (Solución 1) del ensayo biaxial con rotura en el pretensado (a), durante el punzonado (b) y rotura (c).



(a)



(b)



(c)

Figura B.21: Mapa de tensiones durante la simulación 5B (Solución 2) del ensayo biaxial con rotura en el pretensado (a), durante el punzonado (b) y rotura (c).

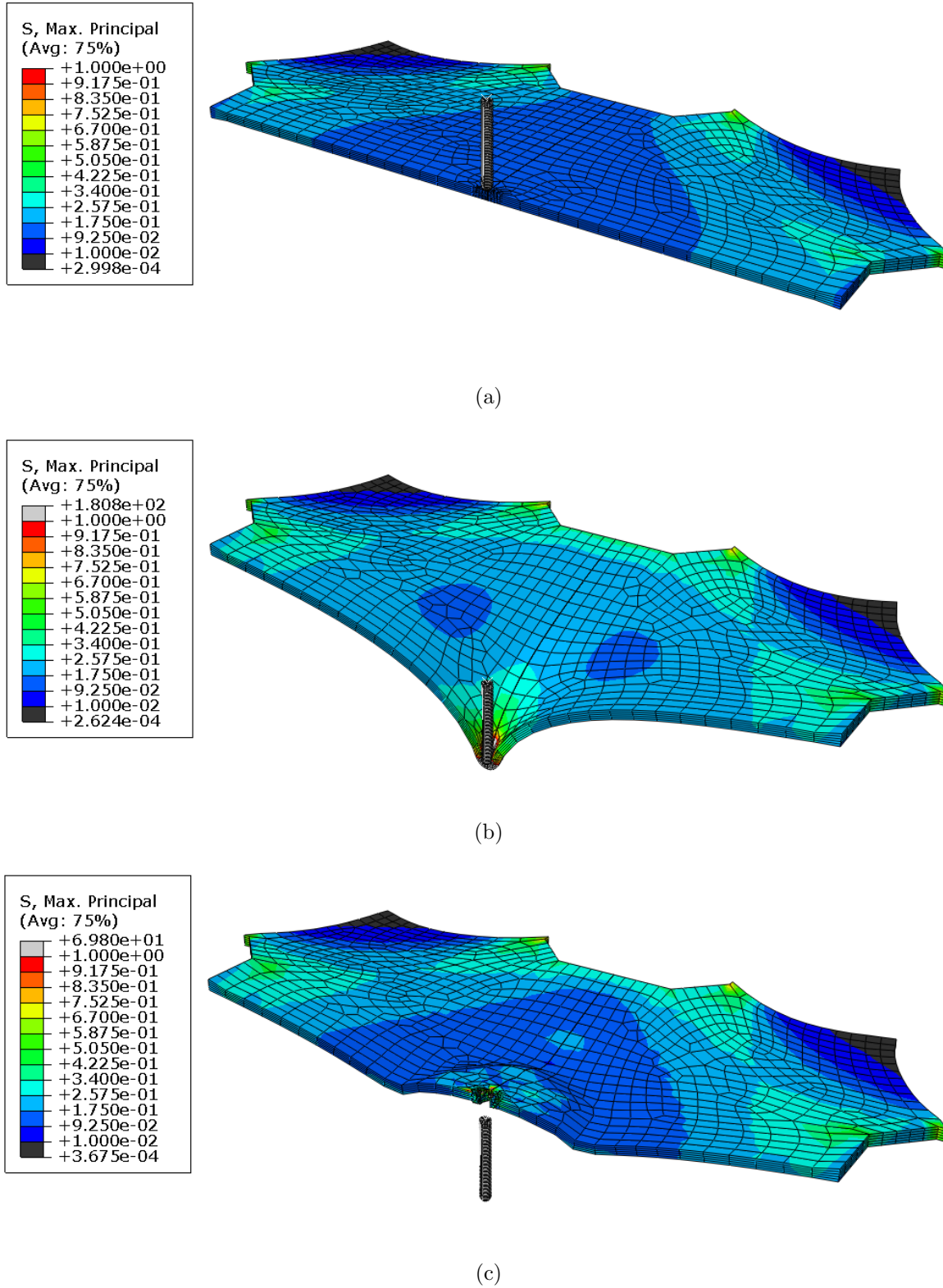


Figura B.22: Mapa de tensiones durante la simulación 9B (Solución 3) del ensayo biaxial con rotura en el pretensado (a), durante el punzonado (b) y rotura (c).

Anexo C

Mecánica de Medios Continuos

Cuando se quieren llevar análisis del comportamiento de polímeros, cauchos o en este caso tejidos biológicos, se deben manejar modelos constitutivos no-lineales más completos que el clásico sólido elástico lineal. Para ello se debe profundizar más en la Mecánica de Medios Continuos y en conceptos aparentemente simples, como son la tensión y la deformación, pero que con el cálculo tensorial en grandes deformaciones no son tan intuitivos. La vena cava está compuesta principalmente por células musculares en dirección longitudinal y fibras de colágeno en dirección circunferencial. Además, el colágeno es mucho más rígido que las células musculares, por tanto puede considerarse como un material compuesto mucho más rígido en la dirección circunferencial que en la longitudinal (no-lineal anisótropo).

En este anexo se expone brevemente las bases de los modelos constitutivos hiperelásticos actuales, los cuales son necesarios para el ajuste de los datos experimentales, partiendo de las ecuaciones cinemáticas y de equilibrio para llegar a las deseadas ecuaciones de comportamiento. Para mayor detalle sobre Mecánica de Medios Continuos, consultar [19, 20].

C.1. Ecuaciones cinemáticas

Se formalizan a continuación las definiciones de los conceptos más importantes asociados a un sólido deformable. Para ello será necesario, en primer lugar, definir matemáticamente qué entendemos por sólido. En la formulación de Mecánica de Medios Continuos se entiende por sólido tridimensional (denotado por Ω) un subconjunto de \mathbb{R}^3 cuyos puntos se identifican mediante las coordenadas en un sistema de referencia, determinado, pero arbitrario. Desde un punto de vista matemático, podemos interpretar lo anterior a través de la función siguiente:

$$\varphi_0 : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad \varphi_0(P) \equiv X(x, y, z); \quad \varphi_0(P)^I \equiv X^I \quad (\text{C.1})$$

A dicha configuración φ_0 la denominaremos *configuración inicial del sólido* Ω o *configuración indeformada*. A lo largo del movimiento del sólido, la posición de cada uno de los puntos del mismo va variando, por lo que la función anterior va asimismo modificándose, pudiendo considerarse que un movimiento no es más que una familia de configuraciones del sólido dependiente del tiempo. Para un instante t determinado, la configuración correspondiente define las coordenadas de los puntos del sólido en ese instante t respecto a un sistema de referencia a través de una expresión similar a (C.1):

$$\varphi_t : \Omega \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad \varphi_t(P) \equiv x; \quad \varphi_t(P)^I \equiv x^I \quad (\text{C.2})$$

Denotaremos a partir de este momento con mayúsculas los índices que corresponden a coordenadas de puntos del sólido en la configuración indeformada (\mathbf{X}^i) denominadas coordenadas materiales y con minúsculas los correspondientes a las coordenadas de puntos del sólido en cada una de las configuraciones deformadas (\mathbf{x}^i) denominadas coordenadas espaciales, siendo por tanto dependientes de t . A partir de este momento utilizaremos coordenadas cartesianas tanto para la configuración inicial como la deformada.

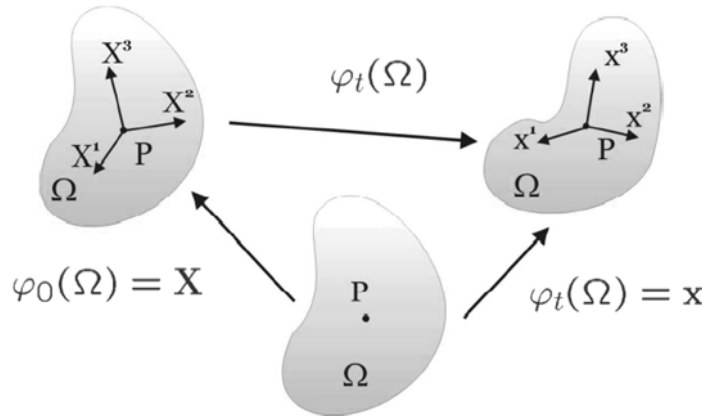


Figura C.1: Representación de un sólido en configuración indeformada (\mathbf{X}^i) y deformada (\mathbf{x}^i).

El concepto de *deformación* está relacionado esencialmente a la variación de entornos de un punto más que a la modificación de las coordenadas de un solo punto. Un movimiento que sólo implique traslación y giro del sólido global (movimiento como sólido rígido) no modifica entornos, sino tan sólo significa un cambio de coordenadas del sólido. La deformación se trata del cambio relativo de distancias entre puntos, es decir, las derivadas espaciales del movimiento.

Dado un movimiento $\varphi_t : \Omega \in \mathbb{R}^3$, se define el gradiente de deformación \mathbf{F} al campo tensorial sobre la configuración indeformada $\varphi_0(\Omega)$

$$\mathbf{F} : \varphi_0(\Omega) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{X} \equiv \varphi_0(P) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{F} = F_{iI} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

El gradiente de deformación \mathbf{F} proporciona la evolución del vector posición relativo $d\mathbf{x}$ en función de la correspondiente posición relativa $d\mathbf{X}$ en el instante de referencia. Este tensor presenta muchos inconvenientes: no es simétrico, está definido en ambas configuraciones e incorpora movimiento como sólido rígido. Por ello, se definen dos tensores adicionales con parecido significado físico y más cómodos para operar: uno en la configuración deformada y otro en la indeformada. Al primero se le denomina *tensor de deformación de Cauchy-Green por la derecha* (\mathbf{C}) y el segundo es el *tensor de deformación de Cauchy-Green por la izquierda* (\mathbf{b}).

$$\mathbf{C} : \varphi_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{b} : \varphi_t(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (\text{C.5})$$

Los valores propios de ambos tensores \mathbf{C} y \mathbf{b} son los mismos y se les conocen como el cuadrado de los alargamientos principales (λ_1^2 , λ_2^2 y λ_3^2). Además, estos tensores de Cauchy-Green nos pueden servir para dada una determinada configuración deformada en un instante t , determinar el mismo tensor en configuración indeformada y viceversa. A este proceso se denomina *pull-back* (C.6) y *push-forward* (C.7) respectivamente.

$$\varphi_t(\mathbf{b}) = \mathbf{F}^T \mathbf{b} \mathbf{F} \quad (\text{C.6})$$

$$\varphi_t(\mathbf{C}) = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{C.7})$$

Por último, nombrar otras dos magnitudes que también miden la deformación: *tensor de Cauchy-Saint-Venant* (\mathbf{E} , definido en configuración indeformada) y *tensor de Cauchy-Almansi* (\mathbf{e} , definido en configuración deformada). La ventaja frente al tensor gradiente de deformación, es que a deformaciones nulas valen $\mathbf{0}$, lo cual es más intuitivo. Se relacionan con los demás tensores de la siguiente forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F} \mathbf{F}^T) \quad (\text{C.9})$$

En pequeñas deformaciones, ambos tensores coinciden entre sí, denominándose *tensor de deformación de Cauchy* (ϵ).

Todas las variables mencionadas, deben cumplir el principio básico de conservación de materia en medios continuos, pudiéndose escribir de la siguiente forma:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D(\rho V)}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0; \quad (\text{C.10})$$

C.2. Ecuaciones de equilibrio

Vistas las variables cinemáticas, se definen las fuerzas internas por unidad de superficie que mantienen la cohesión del sólido, impidiendo que se rompa: las tensiones. Al trabajar en grandes desplazamientos, como en las deformaciones, se pueden definir varios tensores dependiendo si realizamos el equilibrio en la configuración deformada (*Tensor de Cauchy*, σ), indeformada (*Segundo tensor de Piola-Kirchhoff*, \mathbf{S}) o mixta (*Primer tensor de Piola-Kirchhoff* o *tensión ingenieril*, \mathbf{P}). Los tres representan lo mismo, solo que en perspectivas distintas:

$$\mathbf{S} = S_{IJ} \quad \mathbf{P} = P_{iJ} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \quad \sigma = \sigma_{ij} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (\text{C.11})$$

De forma análoga a la fórmula de conservación de masa (C.10), podemos obtener la ecuación de conservación de momento cinético¹ (C.12) así como la ecuación de conservación de la energía (C.13), considerando proceso isoterma sin flujos de calor:

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{P} + \rho \mathbf{X} &= 0 & (\text{C.12}) \\ \underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 dV}_{E. \text{ cinética}} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dv}_{E. \text{ de deformación}} &= \underbrace{\int_{\delta\Omega} \mathbf{T} \mathbf{V} dS}_{F. \text{ superficiales exteriores}} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{X} \mathbf{V} dV}_{F. \text{ volumétricas exteriores}} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

C.3. Ecuaciones de comportamiento

Una vez definidos por separado las deformaciones y las tensiones, el objetivo es deducir una ley general que relacione a ambos. En los materiales elástico lineales esta relación es bien conocida (Ley de Hooke o ecuaciones de Lamé), pero la teoría hiperelástica en grandes deformaciones es mucho más compleja.

¹Las ecuaciones de equilibrio se han planteado en configuración mixta (\mathbf{P} y \mathbf{F}). Si se quisieran en deformada sería análogo, pero con los respectivos tensores en deformada (σ y \mathbf{d}).

Un *sólido hiperelástico* se caracteriza por la existencia una función escalar de las deformaciones de cuyas derivadas resulta la tensión. A esta función se le denomina *función densidad de energía de deformación* (Ψ). Su deducción procede de la aplicación de la segunda ley de la termodinámica: la cantidad de entropía tiende a incrementarse en el tiempo. Sin profundizar en la deducción, resultan estas fórmulas² denominadas *desigualdad de Clausius-Durham* [12].

$$\mathcal{D}_{int} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} - \dot{\Psi}(\mathbf{C}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{S} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \right) : \dot{\mathbf{C}} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{C.14})$$

$$\mathcal{D}_{int} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{\Psi}(\mathbf{F}) = \left(\mathbf{P} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \quad (\text{C.15})$$

En ambos casos se deduce que una magnitud relacionada con la tensión resulta de la derivada de la función densidad de energía. Sin embargo, que se cumpla la segunda ley de la termodinámica no implica que esa función exista o sea la correcta, teniendo que cumplirse una serie de condiciones físicas fijas relacionadas con las tensiones y deformaciones:

- Energía nula para deformación nula: $\Psi(\mathbf{C} = \mathbf{1}) = 0$
- Energía infinita para deformación infinita: $\Psi(\mathbf{C} = \infty) = \infty$
- Tensión nula para deformación nula: $\mathbf{S}(\mathbf{C} = \mathbf{1}) = 0$
- Función convexa o policonvexa: $\Psi(\mathbf{C}) \geq 0$

La existencia de la función densidad de energía de deformación, junto a la exigencia de policonvexidad de la misma permitirá garantizar la existencia de solución del problema de sólidos deformables [5]. Lógicamente la función densidad de energía debe de cumplir el *axioma de objetividad* (independencia de la referencia) o *invariancia ante isometrías*. De esta forma, el modelo constitutivo del material será invariante ante una rotación o traslación del sistema de referencia espacial de la siguiente forma

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}(\mathbf{X})) = \Psi(\mathbf{X} + \mathbf{c}, \mathbf{C}(\mathbf{X} + \mathbf{c})) \quad (\text{C.16})$$

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^T) \quad (\text{C.17})$$

donde \mathbf{c} es una traslación y \mathbf{Q} una rotación finita (matriz ortogonal) arbitrarias.

C.3.1. Modelos hiperelásticos isótropos

Una simetría del material como en el caso *isótropo* y *ortótropo* implica la invariancia de los tensores de comportamiento ante cambios de coordenadas asociados a la simetría.

²Misma fórmula expresada de dos maneras equivalentes

Es posible demostrar también [6] que, para materiales hiperelásticos con simetrías, la función densidad de energía de deformación ha de depender solamente de los invariantes de \mathbf{C} o de los alargamientos principales.

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{C} = \text{tr} \mathbf{b} \\ I_2 &= \frac{1}{2}((\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2) = \frac{1}{2}((\text{tr} \mathbf{b})^2 - \text{tr} \mathbf{b}^2) \\ I_3 &= \det \mathbf{C} = \det \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Para el caso de tracción uniforme, se tienen los siguientes invariantes:

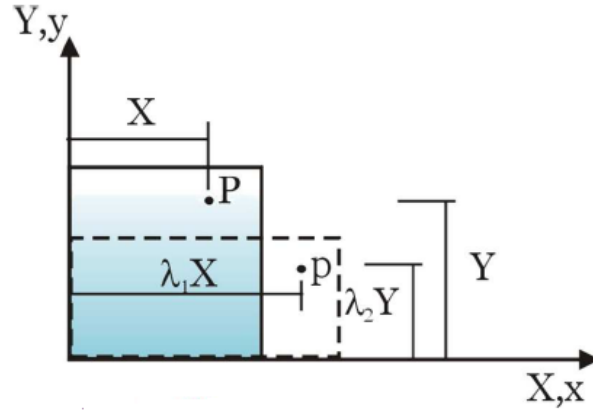


Figura C.2: *Ensayo uniaxial*

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_1 X \\ y &= \lambda_2 Y \\ z &= \lambda_3 Z \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{F} = F_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{C} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2}((\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \det \mathbf{C} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Existen diferentes modelos propuestos en la literatura, que se comentan seguidamente, y que pueden profundizarse en el texto de Ogden [19].

- **Modelo de Ogden (1984):** Uno de los modelos fenomenológicos más completos para la simulación de materiales incompresibles es el modelo por Ogden [18]. En él se supone que la energía de deformación es función de los alargamientos principales λ_i con $i = 1, 2, 3$ donde se verifica que $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ de la siguiente manera

$$\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (C.22)$$

Si se hace una comparación con la teoría lineal puede obtenerse una condición de consistencia

$$2\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i \quad \text{con} \quad \mu_i \alpha_i > 0 \quad (C.23)$$

donde el parámetro μ es el módulo de cizalladura lineal G .

- **Modelo de Valanis y Landel (1967):** En este modelo [27] se supone que la energía de deformación $\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ puede escribirse como la suma de tres funciones separadas $\varpi_i(\lambda_i)$ que dependen de los alargamientos principales. A esta descomposición aditiva de la energía se denomina *hipótesis de Valanis-Landel*.

$$\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 \varpi(\lambda_i) \quad (C.24)$$

Para esta hipótesis, la función densidad de energía de Ogden se escribiría como en la ecuación anterior pero con

$$\varpi(\lambda_i) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_i^{\alpha_i} - 1) \quad (C.25)$$

- **Modelo de Arruda-Boyce (1993):** Este modelo es conocido como el modelo de las ocho cadenas, ya que fue desarrollado partiendo de la representación de un volumen elemental con ocho muelles que surgían desde el centro del cubo hacia las esquinas [3]. La función densidad de energía resulta ser

$$\Psi = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-1}} (I_1 - 3^i) \quad (C.26)$$

donde

$$C_1 = \frac{1}{2} \quad C_2 = \frac{1}{20} \quad C_3 = \frac{11}{1050} \quad C_4 = \frac{19}{7000} \quad C_5 = \frac{519}{673750} \quad (C.27)$$

- **Modelo de Mooney-Rivlin (1940):** Este modelo es una particularización de modelo de Ogden (Ecuación C.22) [17] y resulta de tomar $N = 2$, $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = -2$. Usando los invariantes I_1 , I_2 y con la restricción de que $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$ se puede definir

$$\Psi = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (\text{C.28})$$

con las constantes $C_1 = \frac{\mu_1}{2}$ y $C_2 = -\frac{\mu_2}{2}$. Paralelamente a la Ecuación C.23 se tiene que el módulo de cizalladura $\mu = \mu_1 - \mu_2$. El modelo clásico de Mooney-Rivlin es el más empleado para la descripción de gomas con comportamiento isótropo y está obtenido en base a argumentos matemáticos relacionados con la simetría.

- **Modelo Neo-Hookeano:** El modelo Neo-Hookeano es probablemente el más sencillo de todos y se obtiene de nuevo de la particularización del modelo de Ogden con $N = 1$ y $\alpha_1 = 2$. Usando únicamente el primer invariante I_1 se tiene

$$\Psi = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = C_1(I_1 - 3) \quad (\text{C.29})$$

con la constnte $C_1 = \frac{\mu_1}{2}$ y el módulo de cizalladura $\mu = \mu_1$. Esta función densidad de energía de deformación incluye un único parámetro y proporciona un modelo matmático simple para un comportamiento no lineal.

C.3.2. Modelos hiperelásticos anisótropos

Existen dos formas de definir la dependencia direccional en la deformación: restringir el camino en el cual la energía depende de la deformación [11] o introducir un vector que represente de forma explícita la dirección preferente en el material. En este caso la energía de deformación puede ser expresada como una función de los componentes de la deformación lagrangiana en un sistema de coordenadas alineado con la dirección de las fibras. Dicha dirección local de las fibras se define mediante un vector unitario \mathbf{a}^0 en la configuración indeformada.

Cuando un sólido se deforma, el vector $\mathbf{a}^0(\mathbf{X})$ también se deforma con él, deformación afín, y la nueva dirección de las fibras se describe mediante $\mathbf{a}(\varphi, \mathbf{X})$. Las fibras también pueden sufrir un alargamiento (λ) que puede ser determinado en términos del gradiente de deformación y de la dirección de las fibras en la configuración indeformada (Figura C.3):

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^0 \quad (\text{C.30})$$

dado que \mathbf{a} es un vector unitario

$$\lambda^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \lambda^2 = \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}^0 = \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}^0 \quad (\text{C.31})$$

Partiendo de la definición anterior, un material se dice *transversalmente isótropo*

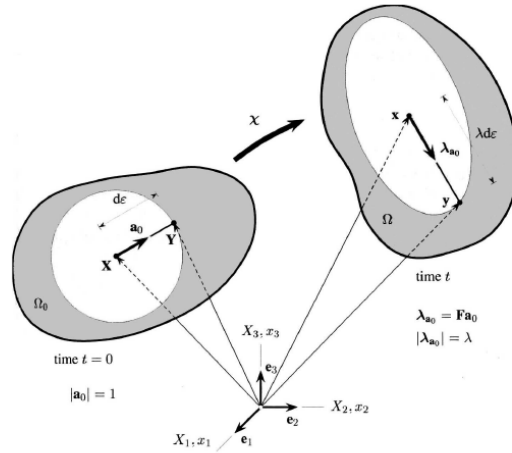


Figura C.3: Alargamiento del vector unidireccional de las fibras. Fuente: [21].

si se cumplen las simetrías expresadas en la Ecuación C.17, pero en este caso \mathbf{Q} no es una matriz de rotación cualquiera sino que debe verificar que

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}^0 = \mathbf{a}^0 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.32})$$

La dependencia de la energía de deformación de \mathbf{a}^0 puede ser introducida de forma explícita en Ψ

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}, \mathbf{a}^0) = \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}^0 \otimes \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{Q}) \quad (\text{C.33})$$

con Ψ una función isótropa de \mathbf{C} y $\mathbf{a}^0 \otimes \mathbf{a}^0$.

Spencer expresa la función densidad de energía de deformación Ψ mediante los invariantes del tensor de deformación de Cauchy-Green por la derecha (I_1 , I_2 y I_3) los cuales definen el comportamiento isótropo, y los pseudo-invariantes I_4 , I_5 que introducen la anisotropía de las fibras [12].

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{C} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2}((\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \det \mathbf{C} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ I_4 &= \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}^0 = \lambda_1^2 \cos^2(\theta) + \lambda_2^2 \sin^2(\theta) \\ I_5 &= \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{a}^0 = \lambda_1^4 \cos^2(\theta) + \lambda_2^4 \sin^2(\theta) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

de esta forma se puede expresar la función densidad de energía de deformación como:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{X}, \mathbf{C}, \mathbf{a}^0) = \Psi(\mathbf{X}, I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}^0), I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}^0)) \quad (\text{C.35})$$

De forma análoga, pueden existir dos direcciones de anisotropía correspondientes a dos vectores \mathbf{a}_1^0 y \mathbf{a}_2^0 , por lo que los nuevos invariantes serán

$$\begin{aligned} I_4 &= \mathbf{a}_1^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_1^0 \\ I_5 &= \mathbf{a}_1^0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{a}_1^0 \\ I_6 &= \mathbf{a}_2^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_2^0 \\ I_7 &= \mathbf{a}_2^0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{a}_2^0 \\ I_8 &= \mathbf{a}_1^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_2^0 \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

Es posible definir la interacción entre las dos direcciones de fibras, sin embargo este efecto no se suele considerar (I_8). Debido al gran número de parámetros e invariantes involucrados, se suelen llevar a cabo varias simplificaciones que permitan disminuir el tiempo de cálculo computacional. De hecho, los invariantes I_4 , I_6 pueden reproducir correctamente los efectos de la anisotropía del material aun despreciando la deformación transversal de las fibras (invariantes I_5 , I_7).

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, la función densidad de energía que gobierna el comportamiento elástico se puede escribir en función de los invariantes I_1 , I_4 e I_6 . En la literatura se pueden encontrar varios modelos para tejidos biológicos anisótropos, de los cuales en el presente proyecto se utilizarán los dos siguientes.

- **Modelo de Holzapfel-Gasser-Ogden (2000):** Uno de los modelos más utilizados fue propuesto por Holzapfel [14], el cual considera las dos fibras de anisotropía de forma independiente.

$$\Psi = \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0) = \mu(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2}(e^{k_2(I_4-1)^2} - 1) + \frac{k_3}{2k_4}(e^{k_4(I_6-1)^2} - 1) \quad (\text{C.37})$$

donde el término neo-Hookeano está asociado con el material base con constante $\mu > 0$, los parámetros $k_1 > 0$ y $k_3 > 0$ tienen dimensiones de tensión y $k_2 > 0$ y $k_4 > 0$ son adimensionales.

- **Modelo de Gasser (2006):** Posteriormente, Gasser et al. [9] propuso una modificación del anterior modelo donde se incluye el parámetro $\kappa \in (0, 1/3)$, relacionado con la dispersión de las fibras alrededor de las direcciones principales determinadas por I_4 e I_6 . Se puede comprobar que $\kappa = 1/3$ indica que el material es isótropo (dispersión total de las fibras) mientras que $\kappa = 0$ indica nula dispersión de las fibras.

$$\Psi = \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0) = \mu(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2}(e^{k_2[\kappa I_1 + (1-3\kappa)I_4 - 1]^2} - 1) + \frac{k_3}{2k_4}(e^{k_4[\kappa I_1 + (1-3\kappa)I_6 - 1]^2} - 1) \quad (\text{C.38})$$

Además, este modelo considera que la pareja de fibras son iguales ($k_1 = k_3$ y $k_2 = k_4$) y que las direcciones de anisotropía están orientadas de forma helicoidal a $\pm\theta^\circ$

respecto a la dirección longitudinal (ver Figura C.4). Por tanto, $\theta_1 = \theta$ y $\theta_2 = -\theta$, sustituyendo en las ecuaciones C.34 de los invariantes en tracción uniaxial resulta

$$\begin{aligned} I_4 &= \lambda_1^2 \cos^2(\theta) + \lambda_2^2 \sin^2(\theta) \\ I_6 &= \lambda_1^2 \cos^2(-\theta) + \lambda_2^2 \sin^2(-\theta) \end{aligned} \quad (C.39)$$

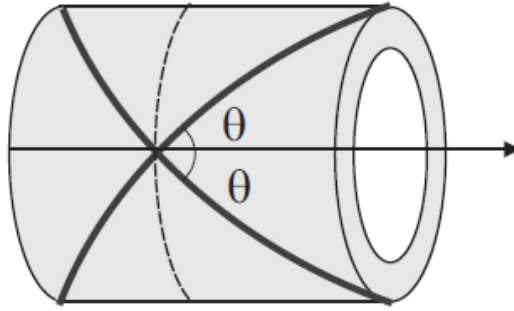


Figura C.4: Esquema de la disposición helicoidal de las fibras en un tejido biológico. Fuente: [7].

Anexo D

Formulaciones de elementos finitos

A continuación se exponen los conceptos referidos al análisis de elementos finitos expuestos en el Capítulo 3.2, pero que por razones de extensión no se han podido explicar de forma plena. Se supondrán conocimientos básicos del método de elementos finitos. Para más información al respecto, consultar [31, 32, 33].

El problema biaxial simulado en el Capítulo 3.2 puede ser considerado *cuasiestático*, puesto que es un proceso de punzonado lento el cual se puede subdividir en incrementos diferenciales de tiempo en los que el sistema está en equilibrio constantemente. Durante la rotura, la cuasiestaticidad se pierde puesto que la probeta rota tiende a recuperar la posición inicial a alta velocidad.

D.1. Formulaciones de Elementos Finitos

Las ecuaciones de equilibrio discretizadas para un modelo de elementos finitos se puede resumir de la siguiente forma

$$\mathbf{P} - \mathbf{I} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{D.1})$$

donde \mathbf{P} es el vector de fuerzas externas, \mathbf{I} es el vector de fuerzas internas (tensión entre los elementos) y $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}$ es el vector de fuerza debido a la inercia del material.

A la hora de la elección del método de resolución de esta ecuación mediante elementos finitos, se pueden considerar dos opciones: *formulación implícita* (Standard) o *explícita* (Explicit). Cada una parte de hipótesis distintas y utilizan métodos numéricos distintos. A continuación se muestran las diferencias entre ambas, así como sus ventajas e inconvenientes.

D.1.1. Método Implícito

La formulación implícita utiliza el *algoritmo de Newton* para resolver equilibrio estático ($\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0$). Asumiendo que es conocida la solución de la iteración i (u_i), la serie de Taylor de la estimación siguiente es

$$\mathbf{P} - \mathbf{I} + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{c} + \dots = 0 \quad (\text{D.2})$$

Despreciando los términos de mayor orden de la serie, la ecuación quedaría

$$\mathbf{P} - \mathbf{I} = \left(\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{c} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{D.3})$$

donde \mathbf{K} es la *matriz de rigidez* y \mathbf{c} es el factor corrector de la iteración i .

Cada incremento ($\Delta \mathbf{u}$) se actualiza de la siguiente forma

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = \Delta \mathbf{u}_i + \mathbf{c}_i \quad (\text{D.4})$$

En cada incremento se repiten las iteraciones necesarias hasta que se produce la convergencia. Ello conlleva que las restricciones de contacto se satisfacen para cada nodo, así como el equilibrio de fuerzas y momentos. También las correcciones en desplazamiento (\mathbf{c}) deben ser pequeñas comparadas con el incremento de desplazamiento.

Por defecto, Abaqus/Standard utiliza incrementos automáticos. Esto quiere decir que la convergencia es controlada para determinar el correcto incremento de tiempo (carga). De esta forma, si la convergencia es pobre el incremento de tiempo se disminuye y viceversa. A continuación se enumeran las características más importantes del análisis Standard.

- El cálculo comienza con una aproximación inicial e itera hasta la convergencia.
- Muy preciso.
- Incrementos de tiempo grandes.
- Altos requerimientos de memoria.
- Adecuado para problemas estáticos o cuasiestáticos con contactos simples.

D.1.2. Método Explícito

La formulación explícita utiliza el *algoritmo de Euler* o de *diferencias centrales* para resolver el equilibrio dinámico al instante de tiempo actual (t):

$$(\mathbf{P} - \mathbf{I})|_t = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}|_t \quad (\text{D.5})$$

En este procedimiento, se utiliza una matriz de masas diagonal para gestionar de forma eficiente el tiempo de cálculo. Por ello, las aceleraciones nodales se puede calcular fácilmente:

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{I})_t \quad (\text{D.6})$$

Las velocidades y desplazamientos se actualizan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{t+\frac{\Delta t}{2}} &= \dot{\mathbf{u}}_{t-\frac{\Delta t}{2}} + \left(\frac{\Delta t_{t+\Delta t} + \Delta t_t}{2} \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \mathbf{u}_t + \Delta t_{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{t+\frac{\Delta t}{2}} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

El método de diferencias centrales es sólo condicionalmente estable, es decir, si el incremento de tiempo es grande la solución se inestabiliza rápidamente. Por ello, se debe estimar un incremento de tiempo estable, dado por la fórmula

$$\Delta t = \min \left(\frac{L_e}{c_d} \right) \quad (\text{D.8})$$

donde L_e es la longitud característica del elemento y c_d es la velocidad de propagación de ondas, que para materiales lineales es

$$c_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{D.9})$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé (E , módulo de Young) y ρ la densidad del material. A continuación se enumeran las características más importantes del análisis Explicit.

- El cálculo resuelve incrementos de tiempo sin iteraciones.
- No utiliza chequeo de convergencia.
- Incrementos de tiempo muy pequeños.
- Bajos requerimientos de memoria.
- Adecuado para problemas dinámicos o cuasiestáticos con contactos complejos y grandes deformaciones.

D.2. Modelización de rotura

Con el fin de simular situaciones en las que la integridad y la fuerza entre dos fases sea de interés, Abaqus dispone de los denominados *elementos cohesivos*. Son útiles para modelar adhesivos, interfases unidas, juntas y fractura. La respuesta constitutiva de dichos elementos depende de la aplicación específica que se le quiera dar y está basado en aproximaciones sobre la deformación y la tensión que son apropiadas para el área de aplicación. La naturaleza de cada respuesta mecánica se pueden clasificar en tres:

- **Modelo Continuo:** Se utiliza para modelar juntas adhesivas donde dos cuerpos están unidos a través de un material pegajoso con un espesor finito. Las propiedades macroscópicas del adhesivo, como la rigidez, se pueden medir experimentalmente e incluirlas en la simulación. Los elementos cohesivos modelan la carga inicial, el inicio del daño y su propagación tras la fractura.
- **Modelo de Juntas:** Modela juntas entre sólidos y/o parches adhesivos sin restricción lateral. Se puede definir el comportamiento de juntas definiendo propiedades macroscópicas del material, pero no hay definido un comportamiento específico. Se diferencian de los elementos de junta ya que los elementos cohesivos son no-lineales, se puede realizar análisis dinámico y están disponibles tanto en Standard como en Explicit. Se asume que las juntas están sujetas a un estado de tensión uniaxial.

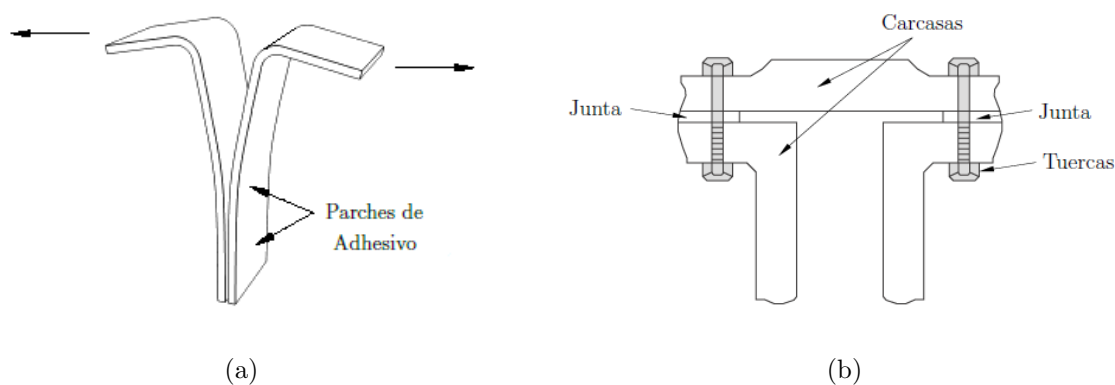


Figura D.1: *Test de separación con adhesivo de espesor finito (a) y aplicación en problema con juntas de apriete (b). Fuente: [25]*

- **Ley de tracción-separación:** Se utiliza para modelizar interfases adhesivas con espesor despreciable. En este caso, las propiedades del adhesivo no son relevantes y se deben aplicar conceptos derivados de la mecánica de la fractura. El modelo sirve para determinar la posición donde se inicia una grieta y su evolución. Sin embargo, la grieta está restringida a la zona donde están definidos los elementos cohesivos, impidiendo que se propague al material contiguo.

Existe, entre otras, una opción alternativa mucho más sencilla de definir denominadas *Superficies cohesivas*. Se utiliza para interfases unidas cuando el espesor del adhesivo es despreciable. Por tanto, su comportamiento es muy similar al de los elementos cohesivos por ley de tracción-separación, aunque computacionalmente más sencillo y eficiente. Sin embargo, se debe definir la superficie específica donde se inicia la grieta. Este modelo es el que se emplea en el presente proyecto.

Es importante distinguir que las superficies cohesivas son propiedades de interacción y no propiedades de material. Los conceptos de tensión y desplazamientos propios de los elementos cohesivos se reinterpretan como separaciones de contacto y fuerzas cohesivas actuando en dirección normal (σ) y tangencial (τ_s, τ_t) a la superficie de contacto. A la hora de definir los parámetros de la superficie cohesiva, se deben distinguir tres fases durante la rotura:

- **Comportamiento elástico:** Antes de iniciarse la grieta, existe una fase elástica sin daño. Se representa mediante una matriz constitutiva que relaciona las tensiones normal y tangenciales con sus respectivos desplazamientos dentro de la zona cohesiva.

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau_s \\ \tau_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{nn} & K_{ns} & K_{nt} \\ K_{sn} & K_{ss} & K_{st} \\ K_{tn} & K_{ts} & K_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_n \\ \delta_s \\ \delta_t \end{pmatrix} = \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} \quad (\text{D.10})$$

Se puede llevar a cabo una simplificación, suponiendo que las separaciones no estén acopladas, por lo que sólo hace falta definir los términos de la diagonal (K_{nn} , K_{ss} y K_{tt}). Además, como se demuestra en [26], los tejidos biológicos fibrosos muestran fractura de Modo-I, por lo que sólo existen esfuerzos tensionales en dirección normal a la grieta ($K_{ss} = K_{tt} = 0$).

- **Iniciación del daño:** En esta fase se produce el inicio de la degradación del comportamiento cohesivo en el punto de contacto. Dicho proceso comienza cuando las tensiones o separaciones de contacto satisfacen un determinado criterio definido por el usuario. Un valor de 1 o más indica que la condición de inicio se ha cumplido. A continuación se exponen diferentes criterios de inicio de rotura:

$$\max \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\max}}, \frac{\tau_s}{\tau_{s,\max}}, \frac{\tau_t}{\tau_{t,\max}} \right) = 1 \quad (\text{D.11})$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\max}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_s}{\tau_{s,\max}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_t}{\tau_{t,\max}} \right)^2 = 1 \quad (\text{D.12})$$

- **Propagación del daño:** La ley de evolución de daño describe el ritmo de degradación de la rigidez cohesiva una vez cumplido el criterio de inicio de fallo. Se define una variable escalar D que representa el daño total en el punto de contacto, valiendo 0 inicialmente y creciendo hasta 1 si la carga continúa después de la iniciación del

daño. Las tensiones de contacto son afectadas por el daño de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{cases} (1-D)\sigma' & \sigma' \geq 0 \\ \sigma' & \sigma' < 0 \end{cases} \\ \tau_s &= (1-D)\tau'_s \\ \tau_t &= (1-D)\tau'_t\end{aligned}\tag{D.13}$$

donde σ' , τ'_s y τ'_t son los componentes de tensión de contacto predichos por la ley elástica de tracción-separación sin daño. Existen dos componentes para la definición de la evolución de daño: la energía disipada por la fractura (G_0) y la especificación de la naturaleza de la propagación de daño (D) explicada anteriormente, que puede ser tanto lineal como exponencial.

En la Figura D.2 se representan las tres fases expuestas anteriormente. Se ha supuesto una evolución de daño lineal, puesto que es una formulación más sencilla y logra simular correctamente la rotura. Para su completa definición se ha de proporcionar a Abaqus la pendiente antes del fallo (K), tensión máxima ($\sigma_{m\acute{a}x}$) y energía de fractura (G_0).

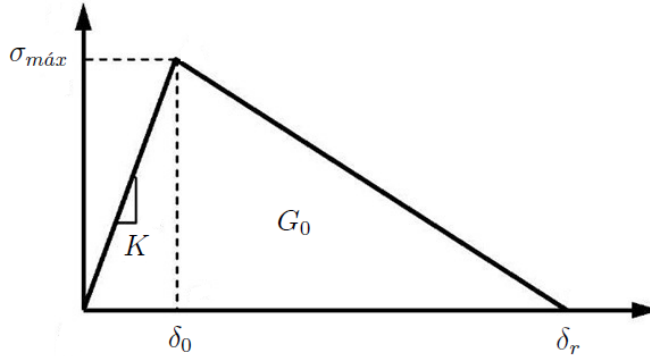


Figura D.2: *Parámetros de rotura para una ley de tracción-separación.*

Del triángulo de la fractura se pueden deducir las separaciones críticas de fallo (δ_0) y de rotura (δ_r) formuladas en las Ecuaciones D.14. Además, se pueden obtener dos condiciones obvias para mantener el significado físico: $\delta_0 < \delta_r$ y $G_0 > 0$.

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{K} \\ \delta_r &= \frac{2G_0}{\sigma_{m\acute{a}x}}\end{aligned}\tag{D.14}$$

Bibliografía

- [1] ALASTRUÉ, V., PEÑA, E., MARTÍNEZ, M. A., AND DOBLARÉ, M. Experimental study and constitutive modelling of the passive mechanical properties of the ovine infrarenal vena cava tissue. *J Biomech* 41 (2008), 3038–3045.
- [2] ALASTRUÉ, V., RODRÍGUEZ, J. F., CALVO, B., AND DOBLARÉ, M. Structural damage models for fibrous biological soft tissues. *Int J Solids Struc* 44 (2007), 5894–5911.
- [3] ARRUDA, E. M., AND BOYCE, M. C. A three-Ddimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J Mech Phys Solids* 41(2) (1993), 389–412.
- [4] CALVO, B., PEÑA, E., MARTÍNEZ, M. A., AND DOBLARÉ, M. An uncoupled directional damage model for fibered biological soft tissues. Formulation and computational aspects. *Int J Numer Meth Engng* 69 (2007), 2036–2057.
- [5] CURNIER, A. *Computational Methods in Solid Mechanics*. Kluwer Academic Publisher, 1994.
- [6] DOBLARÉ, M., AND GRACIA, L. *Teoría de la Elasticidad Lineal. Fundamentos*. Servicio de Publicaciones. Universidad de Zaragoza, 1994.
- [7] GARCÍA, A. *Experimental and numerical framework for modelling vascular diseases and medical devices*. PhD thesis, University of Zaragoza, Spain, Division of Structural Mechanics, 2011.
- [8] GASSER, T. C., AND FORSELL, C. Numerical simulation of the failure of ventricular tissue due to deeper penetration, the impact of constitutive properties. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 200 (2011), 3637–3645.
- [9] GASSER, T. C., OGDEN, R. W., AND HOLZAPFEL, G. A. Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *J R Soc Interface* 3 (2006), 15–35.

- [10] GASSER, T. C., SCHULZE-BAUER, C. A. J., AND HOLZAPFEL, G. A. A three-dimensional finite element model for arterial clamping. *ASME J Biomech Eng* 124 (2002), 355–363.
- [11] GREEN, A. E. *Large Elastic Deformations*. Clarendon Press, Oxford, 1970.
- [12] HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley, New York, 2000.
- [13] HOLZAPFEL, G. A. Biomechanics of soft tissue. In *Handbook of Materials Behavior Models* (2001), J. Lemaitre, Ed., vol. III, Academic Press, pp. 1057–1073.
- [14] HOLZAPFEL, G. A., GASSER, T. C., AND OGDEN, R. W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *J Elasticity* 61 (2000), 1–48.
- [15] MARAS-LINDEMAN, T. Cardiovascular part a: 50 terms by toree. <http://quizlet.com/2514588/cardiolvascular-part-a-flash-cards/>. Fecha de consulta: 25/07/2014.
- [16] MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Siam J Appl Math* 11 (1963), 431–441.
- [17] MOONEY, M. A theory of large elastic deformation. *J Appl Phys* 11 (1940), 582–592.
- [18] OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity I: On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proc Roy Soc London A* A326 (1972), 565–584.
- [19] OGDEN, R. W. *Non-linear Elastic Deformations*. Dover, New York, 1996.
- [20] OGDEN, R. W. *Nonlinear elasticity, anisotropy, material stability and residual stresses in soft tissue. Lecture Notes, CISM*. Course on Biomechanics of Soft Tissue, Udine, September 2001.
- [21] PEÑA, E. *Estudio Biomecánico de la Articulación de la Rodilla*. PhD thesis, University of Zaragoza, Spain, Division of Structural Mechanics, 2004.
- [22] REIG, D. Blog carpeta pedagógica: Con respecto a la circulación pulmonar o menor. <http://bancodepreguntas.carpetapedagogica.com/2012/09/con-respecto-la-circulacion-pulmonar-o.html>. Fecha de consulta: 25/07/2014.
- [23] RHODIN, J. A. G. *Architecture of the vessel wall, Handbook of Physiology, The Cardiovascular System, vol. 2*. American Physiological Society, Bethesda, MD, 1980.
- [24] RODRIGUEZ, E. K., HOGER, A., AND MCCULLOCH, A. Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues. *J Biomech* 27 (1994), 455–467.
- [25] SYSTÈMES, D. Abaqus 6.11 documentation. https://www.tu-chemnitz.de/projekt/abq_hilfe/docs/v6.11/. Fecha de consulta: 15/02/2014.
- [26] T. C. GASSER, P. GUDMUNDSON, G. D. Failure mechanisms of ventricular tissue due to deep penetration. *J Biomech* 42 (2009), 626–633.

- [27] VALANIS, K. C., AND LANDEL, R. F. The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *J Appl Phys* 38 (1967), 2997–3002.
- [28] VILLARREAL, M. R. Arterial system. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arterial_System_en.svg. Fecha de consulta: 25/07/2014.
- [29] VILLARREAL, M. R. Venous system. http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Venous_system_en.svg. Fecha de consulta: 25/07/2014.
- [30] WRIGGERS, P. Finite element algorithms for contact problems. *Arch Comput Method Eng* 2 (1995), 1–49.
- [31] ZIENKIEWICZ, O. C., AND TAYLOR, R. L. *El Método de los Elementos Finitos*. McGraw-Hill-CIMNE, 1994.
- [32] ZIENKIEWICZ, O. C., AND TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method, Volume 1: Basic Formulation and Linear Problems*. McGraw-Hill, 1994.
- [33] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., AND ZHU, J. Z. *The Finite Element Method: Its basis and fundamentals*. Elsevier, 2005.