Algebroides de Lie y sus aplicaciones a la interpolación en variedades diferenciables

Ana Rojo Echeburúa.

Trabajo de fin de Máster.

Máster en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación.

Universidad de Zaragoza.

Prólogo.

Existen multitud de problemas en matemáticas y en física en los que la presencia de simetrías en los sistemas dinámicos que los describen permiten simplificar su estudio. Para la resolución de estos problemas es común el uso de herramientas como por ejemplo el cálculo de variaciones, la teoría de control óptimo o las técnicas de optimización en espacios de funciones.

En este trabajo, nos centraremos en los problemas de interpolación y aproximación en variedades diferenciables, los cuales tienen especial interés en campos como la robótica o la animación 3D. En este último, interpretando el conjunto de estados de un sistema dinámico como una variedad diferenciable, se pueden diseñar trayectorias de objetos que vienen dadas por curvas satisfaciendo ciertas condiciones, y así producir animaciones por ordenador. Se buscan trayectorias sin cambios bruscos, y por tanto, estas curvas han de ser diferenciables en todos sus puntos, por lo que el problema planteado no es un simple problema de interpolación en el que podamos unir puntos mediante geodésicas, ya que de esta forma obtendríamos curvas que aunque fueran continuas, podrían no ser diferenciables en estos puntos de unión. Ésto se traduciría en cambios instantáneos en la velocidad y en la velocidad angular durante la animación.

Para solventar éste problema, en vez de trabajar con geodésicas se trabaja con ciertas curvas que minimizan el funcional de la integral de la aceleración total del sistema. A estas curvas se les llama polinomios cúbicos.

Uno de los métodos utilizados para la resolución de este tipo de problemas, se basa en realizar los cálculos en la propia variedad diferenciable para luego trasladar los resultados al espacio reducido. Este método es eficaz, pero en muchos casos es largo y tedioso.

En este trabajo se hará uso de la teoría de algebroides de Lie para obtener un método de resolución alternativo para este tipo de problemas, trabajando directamente en el espacio reducido y veremos que permite obtener una descripción muy adecuada y ventajosa. Además, aplicaremos los resultados obtenidos a interpolación y aproximación en variedades diferenciables.

Empezaremos introduciendo la teoría de algebroides de Lie y veremos que las ecuaciones de Lagrange nos permiten generalizar las ecuaciones clásicas de Lagrange para un sistema lagrangiano, así como el cálculo de variaciones en algebroides de Lie en el caso en el que se trabaje con un funcional de orden uno, para aplicarlo al problema concreto del sólido rígido. Se presentará la teoría análoga en el caso del cálculo de variaciones de orden superior en algebroides de Lie con la intención de aplicarlo al caso de los splines cúbicos en so(3).

Por último, se calculará la diferencial segunda de ambos funcionales, con la intención de realizar un análisis que se pospone para un posterior trabajo sobre las condiciones necesarias y suficientes de un mínimo.

Índice general

Capítulo 1

Formalismo lagrangiano y cálculo variacional en algebroides de Lie.

La teoría de algebroides de Lie ha demostrado ser una herramienta útil en la formulación y el análisis de muchos problemas en física y matemáticas. En lo que respecta a la mecánica geométrica, una de las principales características de los algebroides de Lie es que, bajo el mismo formalismo, uno puede describir situaciones muy diferentes. En este primer capítulo presentaremos algunos conceptos básicos sobre teoría de álgebroides de Lie así como algunos ejemplos de algebroides de Lie e incluiremos algunos resultados de cálculo diferencial y morfismos de algebroides de Lie. Introduciremos el formalismo lagrangiano en algebroides de Lie y veremos que las ecuaciones de Lagrange para un sistema lagrangiano en un algebroide de Lie se pueden obtener mediante cálculo variacional seleccionando un espacio de curvas adecuado en un algebroide de Lie.

1.1. Algebroides de Lie.

Una estructura de algebroide de Lie sobre un fibrado $\tau\colon E \to M$ consiste en una estructura de álgebra de Lie $(Sec(E), [\ ,\ ])$ en el C^∞(M)-módulo de secciones de E, junto con un morfismo de fibrados vectoriales $\rho\colon E \to TM$ sobre la identidad en M, llamado ancla, que satisfacen la siguiente condición de compatibilidad

$$[\sigma, f\eta] = (\rho(\sigma)f)\eta + f[\sigma, \eta]$$

para toda $\sigma, \eta \in Sec(E)$ y $f \in C^\infty(M)$.

Un algebroide de Lie se puede pensar como la generalización del fibrado tangente de M y un elemento a de E como una velocidad generalizada, de forma que la verdadera velocidad v se obtiene aplicando el ancla a a, es decir

$$v = \rho(a).$$

Ejemplos

- FIBRADO TANGENTE. Tomando $E = TM$ y $\rho = id_{TM}$ donde las secciones son los campos vectoriales de $\mathfrak{X}(M)$ y el conmutador es el conmutador de campos vectoriales, tenemos que el fibrado tangente es un algebroide de Lie.

- ÁLGEBRA DE LIE. Tomando $E = \mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $M = \{e\}$ un único punto, $TM = \{0\}$. Con $\rho = 0$, un álgebra de Lie tiene estructura de algebroide de Lie, de forma que las secciones son los propios elementos del álgebra y el corchete coincide con el del álgebra de Lie.

- ALGEBROIDE DE ATIYAH. Sea $p\colon Q \to M$ un fibrado principal de un grupo G. Denotemos por $\Phi\colon G \times Q \to Q$ a la acción libre de G en Q y denotemos por $T\Phi\colon G \times TQ \to TQ$ a la acción tangente de G en TQ. Podemos definir una proyección $\tau_Q|G\colon TQ/G \to M = Q/G$, donde las secciones de esta proyección se identifiquen con los campos vectoriales en Q que son invariantes bajo la acción de Φ. Ahora, teniendo en cuenta que todo campo vectorial G-invariantes en Q es p-proyectable y que el corchete de Lie usual de campos vectoriales es cerrado con respecto a los campos vectoriales G-invariante, podemos inducir una estructura de algebroide de Lie en TQ/G. Este algebroide de Lie se llama algebroide de Atiyah asociado al G-fibrado principal $p\colon Q \to M$.

Un sistema de coordenadas locales (x^i) en la variedad diferenciable M y una base local $\{e_\alpha\}$ de secciones de E determinan un sistema de coordenadas locales (x^i, y^α) en el fibrado E: un elemento $a \in E$ tiene coordenadas (x^i, y^α) si el punto base $m = \tau(a)$ tiene coordenadas (x^i) y en la base $\{e_\alpha(m)\}$ de E_m las componentes de a son y^α, es decir $a = y^\alpha e_\alpha(m)$.

El ancla y el conmutador quedan localmente determinados por ciertas funciones locales ρ^i_α y $C^\alpha_{\beta\gamma}$ en M, llamadas funciones de estructura, y que están dadas por

$$\rho(e_\alpha) = \rho^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta}\, e_\gamma.$$

Las funciones de estructura satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\rho^j_\alpha \frac{\partial \rho^i_\beta}{\partial x^j} - \rho^j_\beta \frac{\partial \rho^i_\alpha}{\partial x^j} = \rho^i_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta},$$

$$\rho^i_\alpha \frac{\partial C^\nu_{\beta\gamma}}{\partial x^i} + \rho^i_\beta \frac{\partial C^\nu_{\gamma\alpha}}{\partial x^i} + \rho^i_\gamma \frac{\partial C^\nu_{\alpha\beta}}{\partial x^i} + C^\mu_{\beta\gamma} C^\nu_{\alpha\mu} + C^\mu_{\gamma\alpha} C^\nu_{\beta\mu} + C^\mu_{\alpha\beta} C^\nu_{\gamma\mu} = 0,$$

llamadas ecuaciones de estructura, que equivalen localmente a la condición de compatibilidad y a la identidad de Jacobi.

Definición 1.1.1. *Dada una sección σ de E, la derivada de Lie con respecto a σ es la aplicación $d_\sigma : Sec(E) \to Sec(E)$ dada por*

$$d_\sigma \eta = [\sigma, \eta],$$

para toda sección $\eta \in Sec(E)$.

La derivada de Lie se extiende de la forma habitual de manera que actúa sobre secciones de un fibrado tensorial sobre E.

Fijada una sección $\sigma \in Sec(E)$, y denotando por ϕ_s al flujo local del campo vectorial $\rho(\sigma) \in \mathfrak{X}(E)$, existe un campo vectorial lineal $X^E_\sigma \in \mathfrak{X}(E)$ que proyecta sobre $\rho(\sigma)$, de manera que su flujo local Φ_s en E es lineal, proyecta sobre ϕ_s, y para toda sección Θ de un fibrado tensorial sobre E se tiene que

$$d_\sigma \Theta = \frac{d}{ds} {\Phi_s}^\star \Theta \Big|_{s=0}.$$

Definición 1.1.2. *El campo vectorial lineal $X^E_\sigma \in \mathfrak{X}(E)$ asociado a la derivación d_σ, y cuyo flujo es Φ_s, se llama levantamiento completo de la sección σ a E.*

En coordenadas locales, la expresión del levantamiento completo de $\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha$ a E es de la forma

$$X^E_\sigma = \rho^i_\alpha \sigma^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\dot{\sigma}^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta \sigma^\gamma\right) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}. \tag{1.1}$$

En la expresión anterior, y en lo que sigue en este trabajo, para una función $f \in C^\infty(M)$ se denotará por $\dot{f}$ la función en E dada por

$$\dot{f}(a) = \rho(a) f,$$

cuya expresión coordenada es

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \rho^i_\alpha y^\alpha.$$

Definición 1.1.3. *Se llama levantamiento vertical de σ al campo vectorial $X^v_\sigma \in \mathfrak{X}(E)$, definido por*

$$X^v_\sigma(a)f = \frac{d}{ds} f(a + s\sigma(\tau(a)))\Big|_{s=0},$$

para todo $a \in E$ y toda función $F \in C^\infty(E)$.

En coordenadas locales la expresión de X^v_σ es

$$X^v_\sigma = \sigma^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

Definición 1.1.4. *Una curva $a : I \subset \mathbb{R} \to E$ se dice que es admisible si satisface $\dot\gamma(t) = \rho(a(t))$, donde $\gamma(t) = \tau(a(t))$ es la curva base.*

Si la representación coordenada de $a(t)$ es $(x^i(t), y^\alpha(t))$ entonces la curva a es admisible si y solo si satisface

$$\frac{dx^i}{dt} = \rho^i_\alpha(x(t))y^\alpha(t)$$

para todo $t \in I$.

1.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Dada una función $L \in C^\infty(E)$, que llamaremos función Lagrangiana o simplemente Lagrangiano, se puede definir un sistema dinámico en E, dado localmente por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial y^\gamma} C^\gamma_{\alpha\beta} y^\beta = \rho^i_\alpha \frac{\partial L}{\partial x^i}, \\ &\dot x^i = \rho^i_\alpha y^\alpha. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Estas ecuaciones 1.2 se denominan ecuaciones de Lagrange en un algebroide de Lie y fueron definidas por A. Weinstein [W].

Se supondrá que la función Lagrangiana L es regular, en el sentido de que la matriz $\left[\frac{\partial^2 L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\right]$ es regular en todo punto. Esta condición garantiza que el sistema de ecuaciones diferenciales anterior puede expresarse en forma normal.

En primer lugar veremos cómo podemos caracterizar de manera intrínseca las soluciones del sistema diferencial anterior.

Proposición 1.2.1. *Una curva $a : I \subset \mathbb{R} \to E$ es una solución de las ecuaciones de Lagrange si y solo si es una curva admisible y satisface*

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathscr{L}_{X^v_\sigma} L(a(t))\Big) - \mathscr{L}_{X^E_\sigma} L(a(t)) = 0 \tag{1.3}$$

para toda sección $\sigma \in Sec(E)$ y para todo $t \in I$.

Demostración. En coordenadas locales, la curva $a(t) = (x^i(t), y^\alpha(t))$ es admisible si y solo si satisface la segunda de las ecuaciones 1.2. Además, tenemos por un lado que

$$\mathscr{L}_{X^v_\sigma} L(a(t)) = X^v_\sigma(L(a(t)) = \sigma^\alpha \frac{\partial L}{\partial y^\alpha}.$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{X^E_\sigma} L(a(t)) = X^E_\sigma(L(a(t)) = \rho^i_\alpha \sigma^\alpha \frac{\partial L(a(t))}{\partial x^i} + (\dot{\sigma^\alpha} + C^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta \sigma^\gamma) \frac{\partial L(a(t))}{\partial x^\alpha} = \\ = \rho^i_\alpha \sigma^\alpha \frac{\partial L(a(t))}{\partial x^i} + \dot{\sigma^\alpha} \frac{\partial L(a(t))}{\partial y^\alpha} + C^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta \sigma^\gamma \frac{\partial L(a(t))}{\partial y^\alpha}. \end{aligned}$$

Sustitiyendo en 1.3, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left(\sigma^\alpha \frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right) - \left\{\rho^i_\alpha \sigma^\alpha \frac{\partial L(a(t))}{\partial x^i} + \dot{\sigma^\alpha}\frac{\partial L(a(t))}{\partial y^\alpha} + C^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta \sigma^\gamma \frac{\partial L(a(t))}{\partial y^\alpha}\right\} = 0$$

si y solo si

$$\dot{\sigma^\alpha}\frac{\partial L}{\partial y^\alpha} + \sigma^\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right) - \rho^i_\alpha \sigma^\alpha \frac{\partial L(a(t))}{\partial x^i} - \dot{\sigma^\alpha}\frac{\partial L(a(t))}{\partial y^\alpha} - C^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta \sigma^\gamma \frac{\partial L(a(t))}{\partial y^\alpha} = 0$$

si y solo si

$$\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right) - \rho^i_\alpha \frac{\partial L(a(t))}{\partial x^i} + C^\gamma_{\alpha\beta} y^\beta \frac{\partial L(a(t))}{\partial y^\alpha}\right\}\sigma^\alpha = 0.$$

Como las funciones σ^α son arbitrarias, se deduce que la curva $a(t) = (x^i(t), y^\alpha(t))$ satisface 1.3 si y solo si satisface 1.2. □

Aplicación a los ejemplos de algebroides vistos antes.

- FIBRADO TANGENTE: Como $\rho = id_{TM}$, tomando una base coordenada $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ como base de secciones del fibrado tangente $\tau_M : TM \to M$, las ecuaciones anteriores son las ecuaciones clásicas de Euler-Lagrange

$$\frac{dx^i}{dt} = y^i,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

- ÁLGEBRA DE LIE: Como $\rho = 0$, las ecuaciones son las siguientes

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right) - C^\gamma_{\alpha\beta} y^\beta \frac{\partial L}{\partial y^\gamma} = 0.$$

  Estas ecuaciones fueron obtenidas por H. Poincaré [P], y se suelen denominar ecuaciones de Euler-Poincaré.

- ALGEBROIDE DE ATIYAH: Las ecuaciones que se obtienen son las denominadas ecuaciones de Lagrange-Poincaré que no vamos a dar en este trabajo (para más información véase [M1]).

1.3. Descripción variacional

El conjunto de curvas admisibles

$$\mathscr{A}(J,E) = \left\{a : J \to E | \rho \circ a = \frac{d}{dt}(\tau \circ a)\right\}$$

es una subvariedad de Banach de una variedad de Banach de curvas diferenciables cuyas curvas base son dos veces diferenciables.

Sean (s,t) las coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y sea la aplicación $\Phi : T\mathbb{R}^2 \to E$ de forma que $\Phi = \alpha dt + \beta ds$, donde $(\alpha, \beta) : \mathbb{R}^2 \to E$ cumple que

$$\alpha(s,t) = \Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(s,t)}\right), \qquad \beta(s,t) = \Phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{(s,t)}\right). \tag{1.4}$$

Si $\gamma(s,t) = \tau(\alpha(s,t)) = \tau(\beta(s,t))$, entonces la aplicación Φ es un morfismo de algebroides de Lie sí y sólo si $\rho \circ \alpha = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$, $\rho \circ \beta = \frac{\partial \gamma}{\partial s}$, y $\frac{\partial \langle \theta, \beta \rangle}{\partial t} - \frac{\partial \langle \theta, \alpha \rangle}{\partial s} = d\theta(\alpha, \beta)$ para todo $\theta \in \sec E^*$.

En coordenadas locales, la familia $\alpha(s,t)$ es $(\gamma^i(s,t),\alpha^\mu(s,t))$ y la familia $\beta(s,t)$ es $(\gamma^i(s,t),\beta^\mu(s,t))$. Como $\alpha dt+\beta ds$ es un morfismo se tiene que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma^i}{\partial t} = \rho^i_\mu \alpha^\mu \\ \dfrac{\partial \gamma^i}{\partial s} = \rho^i_\mu \beta^\mu \\ \dfrac{\partial \alpha^\mu}{\partial s} = \dfrac{\partial \beta^\mu}{\partial t} + C^\mu_{\nu\gamma}\alpha^\nu\beta^\gamma, \end{cases} \tag{1.5}$$

donde las funciones de estructura locales ρ^i_μ y $C^\mu_{\nu\gamma}$ están evaluadas en el punto $\gamma(s,t)$.

Estamos interesados en el caso particular de morfismos llamados E-homotopías.

Definición 1.3.1. *Dos curvas admisibles a_0 y a_1 se dicen que son E-homotópicas si existe un morfismo de algebroides de Lie $\Phi : TI\times TJ\to E$, $\Phi = \alpha\, dt+\beta\, ds$, de forma que*

$$\begin{aligned} \alpha(0,t) &= a_0(t), \quad \beta(s,t_0)=0, \\ \alpha(1,t) &= a_1(t), \quad b(s,t_1)=0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde $I=[0,1]$ y $J=[t_0,t_1]$. Además, Φ es una E-homotopía desde la curva admisible a_0 hasta la curva admisible a_1.

En en cálculo de variaciones en algebroides de Lie las familias de curvas admisibles $\alpha(s,t)$ están dadas por E-homotopías $\phi :\, T\mathbb{R}^2\to E$ de la forma $\alpha dt+\beta ds$.

El campo variacional $\frac{d}{ds}\alpha_s(t)\Big|_{s=0}$ es el campo vectorial a lo largo de $a(t)$ donde $a(t)=\alpha(0,t)$, y se denotará $\Xi_a(\sigma)$. Los campos variacionales $\Xi_a(\sigma)$ se pueden definir en términos de levantamientos completos como sigue: Dada una sección a lo largo de una curva $\gamma(t)$ tomamos una sección $\overline{\sigma}(t)$ de E dependiendo del tiempo de forma que $\overline{\sigma}(t,\gamma(t))=\sigma(t)$. Así $\Xi_a(\sigma)=X^E_{\overline{\sigma}}(t,a(t))$.

En coordenada locales,

$$\Xi_a(\sigma)(t) = \rho^i_\alpha(\gamma(t))\sigma^\alpha(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{a(t)} + \Big(\dot\sigma^\alpha(t)+C^\alpha_{\beta\gamma}(\gamma(t))a^\beta(t)\sigma^\gamma(t)\Big)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_{a(t)}\Big). \tag{1.7}$$

Cada clase de E-homotopía es una subvariedad diferenciable de Banach de $\mathscr{A}(J,E)$ y la partición en clases de equivalencia es una foliación suave. La distribución tangente a esa foliación está dada por

$$a\mapsto F_a=\{\Xi_a(\sigma)\in T_a\mathscr{A}(J,E)|\sigma(t_0)=0,\ \ \sigma(t_1)=0\}. \tag{1.8}$$

La estructura de variedad diferenciable, que se denota por $\mathscr{P}(J,E)$ apropiada en el conjunto de curvas admisibles es la estructura que define la foliación de homotopía. Fijando los puntos $m_0,m_1\in M$ y considerando el conjunto de curvas admisibles con esos puntos iniciales y finales, se tiene que la subvariedad diferenciable

$$\mathscr{P}(J,E)^{m_1}_{m_0}=\{a\in\mathscr{P}(J,E)|\tau(a(t_0))=m_0,\ \tau(a(t_1))=m_1\}, \tag{1.9}$$

es una subvariedad de Banach de $\mathscr{P}(J,E)$.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange en un algebroide de Lie admiten una descripción variacional. Buscamos puntos críticos de un funcional definido en un espacio de funciones (curvas) adecuado.

Sea el funcional de la forma

$$S(a)=\int_{t_0}^{t_1} L(a(t))dt,$$

donde $L\in C^\infty(E)$ es un Lagrangiano en un algebroide de Lie E y $a(t)$ es una curva admisible de forma que los puntos iniciales y finales están fijados.

En coordenadas locales podemos expresar dicho funcional de la forma

$$S(a) = \int_{t_0}^{t_1} L(x^i(t), y^\alpha(t))dt,$$

tal que $x(t_0) = m_0$, $x(t_1) = m_1$, con $m_0, m_1 \in M$.

Con la notación clásica del cálculo de variaciones las variaciones infenitesimales son de la forma

$$\delta x^i = \rho^i_\alpha \sigma^\alpha,$$

$$\delta y^\alpha = \dot{\sigma}^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta \sigma^\gamma,$$

para una curva $\sigma(t)$ que cumpla que $\sigma(t_0) = \sigma(t_1) = 0$.

Por tanto, la primera variación del funcional $S(a)$ puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} dS(a)(\Xi_a \sigma) &= \delta \int_{t_0}^{t_1} L(x^i(t), y^\alpha(t))\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L(x^i(t), y^\alpha(t))\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} \delta y^\alpha\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x^i} \rho^i_\alpha \sigma^\alpha + \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} (\dot{\sigma}^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta \sigma^\gamma)\, dt. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Teorema 1.3.2. *Sea $L \in C^\infty(E)$ un lagrangiano en un algebroide de Lie E y fijemos dos puntos $m_0, m_1 \in M$. Conideremos el funcional $S(a) = \int_{t_0}^{t_1} L(a(t))dt$ en $\mathscr{P}(J,E)$. Los puntos críticos de la restricción de S a la variedad de Banach $\mathscr{P}(J,E)^{m_1}_{m_0}$ son los elementos de la restricción que cumplen las ecuaciones de Euler Lagrange 1.2.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $\Xi_a(f\sigma) = f\Xi_a(\sigma) + \dot{f}\sigma^\vee_a$, para toda función $f : J \to \mathbb{R}$,

$$0 = dS(a)(\Xi_a(f\sigma)) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ f(t) \cdot (dL(\Xi_a(\sigma)) + \dot{f} \cdot (dL(\sigma^\vee_a) \right\} dt.$$

Integrando por partes con $u = dL(\sigma^\vee_a) \to du = \frac{d}{dt}(\sigma^\vee_a)dt$, y $dv = \dot{f}(t) \to v = f$,

$$\begin{aligned} 0 = dS(a)(\Xi_a(f\sigma)) &= \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \left(dL(\Xi_a(\sigma)) + \frac{d}{dt}\left(dL(\sigma^\vee_a) \right) \right) dt + f \cdot \left(dL(\sigma^\vee_a) \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot ((\delta L(\dot{a}(t)) \cdot \sigma(t))\, dt. \end{aligned}$$

ya que $f(t_0) = f(t_1) = 0$.

En la anterior expresión $\delta L(\dot{a})$ viene dada por

$$\delta L(\dot{a}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha} \right) - \rho^i_\alpha \frac{\partial L(a(t))}{\partial x^i} + C^\gamma_{\alpha\beta} y^\beta \frac{\partial L(a(t))}{\partial y^\alpha}.$$

Como ésto tiene que cumplirse para toda f y para toda σ arbitrarios por el lema fundamental del cálculo de variaciones se tiene que $\delta L(\dot{a}) = 0$. □

Capítulo 2

Funcionales dependientes de derivadas de orden superior de curvas admisibles en algebroides de Lie.

En este capítulo, estudiaremos el caso de un funcional en el que le integrando depende de derivadas de orden superior de curvas admisibles en algebroides de Lie, como por ejemplo, funcionales que dependan de la aceleración. Daremos resultados análogos a los de primer orden.

2.1. Jets de curvas admisibles en un algebroide de Lie.

Como primer paso definiremos los espacios de jets de curvas admisibles, que generalizan los fibrados tangentes de orden superior también llamados fibrados de k-velocidades.

2.1.1. Fibrados tangentes de orden superior.

Sea M una variedad diferenciable. Para una curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$, definida en un intervalo abierto conteniendo al origen en $\mathbb{R}$, se denota por $[\gamma]^k = j_0^k\gamma$ al k-jet de γ en 0. Se dice que es la velocidad de orden k de γ. El conjunto de k-velocidades de las curvas en M es una variedad diferenciable T^kM llamada variedad tangente de M de orden k. Nótese que para $k = 1$ se tiene que $T^1M = TM$, que es el fibrado tangente a M.

Un vector tangente a T^kM se puede describir por una familia uniparamétrica de curvas $\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to M$ definida localmente en un entorno del origen en $\mathbb{R}^2$. Fijando s y tomando k-jets $[\gamma_s]^k$, se tiene que la familia $\gamma_s(t) = \gamma(s,t)$ define una curva en T^kM. El vector $\frac{d}{ds}[\gamma_s]^k\Big|_{s=0}$ tangente a esa curva en $s = 0$ es tangente a T^kM en el punto $[\gamma_0]^k$. A este vector lo denotaremos también por $[s \mapsto [t \mapsto \gamma(s,t)]^k]^1$.

Para una curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ denotaremos por $\gamma^{(k)}$ a la curva $\gamma^{(k)}\colon \mathbb{R} \to T^kM$ que viene dada por $\gamma^{(k)}(t) = [s \mapsto \gamma(t+s)]^k$.

2.1.2. Jets de curvas admisibles.

Sea $\tau : E \to M$ una algebroide de Lie con ancla ρ y corchete $[\ ,\ ]$.

Definición 2.1.1. *Para $k\in\mathbb{N}$, denotamos por E^k al conjunto de $(k-1)$-jets de curvas admisibles en E*

$$E^k = \{[a]^{k-1}\in T^{k-1}E \mid a \text{ es una curva admisible en } E\}.$$

Nótese que $E^1 = E$, $E^2\subset TE$, y en general $E^k\subset T^{k-1}E$. En el caso en el que $E = TM$, se tiene que $E^1 = TM$, $E^2 = T^2M$, etc.. La graduación se ha elegido de forma que en el caso estándar coincida con la clásica.

Nota: En nuestra notación, los superíndices indican el espacio en el que el objeto está definido, mientras que los índices entre paréntesis indican el número de derivadas.

Tomando coordenadas locales (x^i, y^α) en E, una curva admisible $a(t) = (\gamma^i(t), a^\alpha(t))$ está determinada por la función $a^\alpha(t)$ y el valor inicial $\gamma^i(0)$, ya que la función $\gamma^i(t)$ es la solución del problema de valor inicial $\dot{x}^i = \rho^i_\alpha(x)a^\alpha(t)$ con condición inicial $x(0) = \gamma(0)$. Así el $(k-1)$-jet de $a(t)$ corresponde al $(k-1)$-jet de la función $a^\alpha(t)$ junto con el valor inicial $\gamma^i(0)$.

Las coordenadas naturales $\left(x^i_{(j)}, y^\alpha_{(j)}\right)$ de $[a]^{k-1} \in T^{k-1}E$ están dadas por

$$\begin{aligned}
x^i_{(0)} &= \gamma^i(0), \\
y^\alpha_{(r)} &= \frac{d^{r-1}a^\alpha}{dt^{r-1}}(0), && r = 1, \ldots, k-1, \\
x^i_{(r)} &= \Psi^i_r\left(\gamma^i(0), a^\alpha(0), \ldots, \frac{d^{r-1}a^\alpha}{dt^{r-1}}(0)\right), && r = 1, \ldots, k-1,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

donde Ψ^i_r son funciones suaves dependiendo también de forma suave de ρ^i_α y de sus derivadas parciales hasta orden $r-1$. Estas funciones se obtienen tomando derivadas totales en la condición de admisibilidad $\dot{x}^i = \rho^i_\alpha a^\alpha$.

Recíprocamente, dado un punto $(x^i_0, y^\alpha_1, \ldots, y^\alpha_k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k\cdot m}$ la curva admisible $(\gamma^i(t), a^\alpha(t))$ dada por $a^\alpha(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} y^\alpha_{j+1} t^j$ y la solución $\gamma^i(t)$ del problema de valor inicial $\dot{x}^i = \rho^i_\alpha(x)a^\alpha(t)$, $x^i(0) = x^i_0$, son curvas admisibles cuyo $(k-1)$-jet tiene coordenadas (2.1) con $\frac{d^{r-1}a^\alpha}{dt^{r-1}}(0) = y^\alpha_r$ for $r = 1, \ldots, k-1$.

Así, E^k es una subvariedad diferenciable suave de $T^{k-1}E$ de dimensión $n + km$, y podemos tomar un sistema de coordenadas locales (x^i, y^α_r) de la forma, $x^i = x^i_{(0)}$, $y^\alpha_r = y^\alpha_{(r-1)}$.

Dada una curva admisible $a\colon \mathbb{R} \to E$ denotamos por $a^k\colon \mathbb{R} \to E^k$ a la jet-prolongación natural de a a E^k, dada por

$$a^k(t) = [s \mapsto a(s+t)]^{k-1}.$$

Nótese que con las anteriores notaciones $a^k(t) = a^{(k-1)}(t)$.

2.2. Campos vectoriales variacionales y levantamiento completos.

Un vector tangente a E^k está determinado por una familia uniparamétrica de curvas admisibles $\alpha(s,t)$ en E tal que $[s \mapsto [t \mapsto \alpha(s,t)]^{k-1}]^1$ es un vector tangente a E^k en el punto $[t \mapsto \alpha(0,t)]^{k-1} \in E^k$.

Recordemos que las familias de curvas admisibles $\alpha(s,t)$ están dadas por morfismos de algebroides de Lie $\phi\colon T\mathbb{R}^2 \to E$ de la forma $\alpha(s,t)dt + \beta(s,t)ds$. Si $a(t) = \alpha(0,t)$, el campo vectorial variacional definido por dicha familia es el campo vectorial $\Xi^k_a\sigma(t) := \frac{d}{ds}{\alpha_s}^k(t)\big|_{s=0}$, definido a lo largo de $a^k(t)$. Dicho campo variacional puede escribirse en términos de $\sigma(t) = \beta(0,t)$ y sus derivadas hasta orden k.

Teniendo en cuenta las ecuaciones 1.5 que satisfacen las componentes de ?(s,t) y ?(s,t) se deduce que la curva ${a_s}^k(t)$ en E^k definida por la familia α está dada por

$$x^i = \gamma^i(s,t),\ y^\mu_1 = \alpha^\mu(s,t),\ y^\mu_2 = \frac{\partial \alpha^\mu}{\partial t}(s,t), \ldots,\ y^\mu_k = \frac{\partial^{k-1}\alpha^\mu}{\partial t^{k-1}}(s,t),$$

y las coordenadas de $\Xi^k_a\sigma(t) := \frac{d}{ds}{a_s}^k(t)\Big|_{s=0}$ son

$$w^i = \frac{\partial \gamma^i}{\partial s}(0,t),\ v^\mu_1 = \frac{\partial \alpha^\mu}{\partial s}(0,t), \ldots,\ v^\mu_k = \frac{\partial^k \alpha^\mu}{\partial t^{k-1}\partial s}(0,t).$$

Teniendo en cuenta la ecuaciones (1.5)

$$w^i = \rho^i_\mu \beta^\mu(0,t) = \rho^i_\mu \sigma^\mu(t)$$

y

$$v_1^\mu = \frac{\partial \beta^\mu}{\partial t}(0,t) + C^\mu_{\nu\gamma}\alpha^\nu(0,t)\beta^\gamma(0,t) = \dot{\sigma}^\mu(t) + C^\mu_{\nu\gamma}a^\nu(t)\sigma^\gamma(t),$$

y por tanto se tiene que

$$v_r^\mu = \frac{d^{r-1}v_1^\mu}{dt^{r-1}}(t) = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}[\dot{\sigma}^\mu + C^\mu_{\nu\gamma}a^\nu\sigma^\gamma], \qquad r = 2,\dots,k.$$

Luego

$$\Xi_a^k\sigma = \rho^i_\alpha\sigma^\alpha\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{r=1}^{k}\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}[\dot{\sigma}^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma}a^\beta\sigma^\gamma]\frac{\partial}{\partial y_r^\alpha}. \tag{2.2}$$

Se tiene que $\Xi_a^k\sigma$ es un operador diferencial en σ de orden k (ya que depende de $[\sigma]^{(k)}$) y un operador diferencial en a de orden $k-1$ (ya que depende de $a^k(t) = [h \mapsto a(t+h)]^{k-1}$).

En la notación clásica el cálculo de variaciones se tiene que

$$\delta x^i = \rho^i_\alpha\sigma^\alpha, \quad \delta y_1^\alpha = \dot{\sigma}^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma}a^\beta\sigma^\gamma, \quad \delta y_r^\alpha = \frac{d}{dt}\delta y^\alpha_{r-1}, \quad \text{for } r = 2,\dots,k. \tag{2.3}$$

2.3. Cálculo variacional.

Sea $J = [t_0,t_1]\subset\mathbb{R}$ un intervalo compacto y fijemos dos puntos $A_0\in E^{k-1}$ y $A_1\in E^{k-1}$. Dado un lagrangiano $L \in C^\infty(E^k)$ consideramos el funcional

$$S(a) = \int_{t_0}^{t_1} L(a^k(t))\,dt \tag{2.4}$$

restringido a las curvas a en E tales que $a^{k-1}(t_0) = A_0$ y $a^{k-1}(t_1) = A_1$.

De la misma forma que hemos definido en el primer capítulo para el caso de orden uno una estructura de variedad diferenciable apropiada para el conjunto de curvas admisibles, en el caso de orden superior usaremos la misma estructura e impondremos condiciones adicionales en las condiciones de contorno.

Denotemo por $m_0, m_1\in M$ los puntos base $m_0 = \tau_{k-1,0}(A_0)$ y $m_1 = \tau_{k-1,0}(A_1)$.

Teorema 2.3.1. *El conjunto*

$$\mathscr{P}(J,E)^{A_1}_{A_0} = \left\{ a\in\mathscr{P}(J,E) \;\middle|\; a \text{ es } C^k \text{ y } a^{k-1}(t_0) = A_0,\ a^{k-1}(t_1) = A_1 \right\} \tag{2.5}$$

es una subvariedad de Banach de $\mathscr{P}(J,E)^{m_1}_{m_0}$.

El espacio tangente a $\mathscr{P}(J,E)^{A_1}_{A_0}$ en el punto $a\in\mathscr{P}(J,E)^{A_1}_{A_0}$ es

$$T_a\mathscr{P}(J,E)^{A_1}_{A_0} = \left\{ \Xi_a^k\sigma \;\middle|\; \sigma \text{ es } C^k \text{ y } \sigma^{(k-1)}(t_0) = 0,\ \sigma^{(k-1)}(t_1) = 0 \right\}. \tag{2.6}$$

Se tiene que las variaciones infinitesimales son de la forma $\Xi_a^k\sigma$ con $[\sigma]^{k-1}(t_i) = 0,\ i = 0,1$. Usando la notación clásica del cálculo de variaciones

$$\delta x^j = \rho^j_\alpha\sigma^\alpha, \qquad \delta y_1^\alpha = \dot{\sigma}^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma}y_1^\beta\sigma^\gamma, \qquad \delta y_r^\alpha = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\delta y_1^\alpha, \quad r = 2,\dots,k,$$

con $\frac{d^r\sigma^\alpha}{dt^r}(t_i) = 0$ para $r = 0,\dots,k-1$, $i = 0,1$. En particular, el último grupo de ecuaciones justifica la regla habitual en el cálculo de variaciones que permite conmutar el operador δ con la derivada con respecto al tiempo.

Para encontrar las condiciones que debe cumplir una curva admisible para ser un punto crítico del funcional mencionado anteriormente procedemos como sigue. Dada una curva admisible a tomamos una curva α_s en $\mathscr{P}(J,E)_{A_0}^{A_1}$ con $\alpha_0 = a$, y la correspondiente E-homotopía $\alpha(s,t)dt + \beta(s,t)ds$ donde $\alpha_s(t) = \alpha(s,t)$. Tomando la derivada en $s = 0$,

$$\frac{d}{ds}S(\alpha_s)\Big|_{s=0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{ds}L(\alpha_s{}^k(t))\Big|_{s=0} dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle\, \mathrm{d}L(a^k(t))\,, \frac{d}{ds}\alpha_s{}^k(t)\Big|_{s=0} \rangle\, dt,$$

donde d es la diferencial exterior en la variedad diferenciable E^k. Definiendo $\sigma(t) = \beta(0,t)$ tenemos que $\frac{d}{ds}\alpha_s{}^k(t)\Big|_{s=0} = \Xi_a^k\sigma(t)$ y por tanto

$$\langle\, \mathrm{d}S(a)\,, \Xi_a\sigma\,\rangle = \frac{d}{ds}S(\alpha_s)\Big|_{s=0} = \int_{t_0}^{t_1} \langle\, \mathrm{d}L(a^k(t))\,, \Xi_a^k\sigma(t)\,\rangle\, dt. \tag{2.7}$$

Teniendo en cuenta la expresión coordenada de $\Xi_a^k\sigma(t)$ llegamos a

$$\langle\, \mathrm{d}S(a)\,, \Xi_a\sigma\,\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}\rho_\alpha^i\sigma^\alpha + \frac{\partial L}{\partial y_1^\alpha}(\dot\sigma^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha y_1^\beta\sigma^\gamma) + \sum_{r=2}^{k} \frac{\partial L}{\partial y_r^\alpha}\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}(\dot\sigma^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha y_1^\beta\sigma^\gamma) \right] dt$$

Un calculo elemental pero muy largo, realizando integración por partes un gran número de veces, y utilizando que las variaciones y sus derivadas hasta orden $r-1$ se anulan en los extremos, permite escribir la expresión anterior en la forma

$$\mathrm{d}S(a)(\Xi_a\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} \delta L_\alpha(a^{2k}(t))\sigma^\alpha(t)\, dt, \tag{2.8}$$

donde se ha escrito δL_α para denotar la expresión

$$\delta L_\alpha = \rho_\alpha^i \frac{\partial L}{\partial x^i} - \dot\pi_\alpha - \pi_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma y_1^\beta,$$

y donde π_α vienen dados

$$\pi_\alpha = \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\left(\frac{\partial L}{\partial y_r^\alpha}\right). \tag{2.9}$$

Teniendo en cuenta estas expresiones, utilizando el lema fundamental del Cálulo de Variaciones, se tiene que una curva a es un punto crítico de S si y solo si se cumple que $\delta L_\alpha(a^{2k}(t)) = 0$. Se obtiene de esta manera el siguiente resultado.

Teorema 2.3.2. *Una curva admisible $a \in \mathscr{P}(J,E)_{A_0}^{A_1}$ es un punto crítico del funcional $S\colon \mathscr{P}(J,E)_{A_0}^{A_1} \to \mathbb{R}$ dado por $S(a) = \int_{t_0}^{t_1} L(a^k(t))\, dt$, si y sólo si sus componentes $(x^i(t), y^\alpha(t))$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} \dot x^i = \rho_\alpha^i y_1^\alpha \\ \dot\pi_\alpha + \pi_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma y_1^\beta = \rho_\alpha^i \dfrac{\partial L}{\partial x^i}, \end{cases} \tag{2.10}$$

donde π_α viene dado por la expresión 2.9, y debe sobreentenderse que $y_r^\alpha = \frac{d^{r-1}y^\alpha}{dt^{r-1}}$.

Las ecuaciones anteriores se denominan ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano de orden superior definido sobre un algebroide.

Capítulo 3

Aplicaciones.

En este capítulo aplicaremos la teoría anterior a dos ejemplos concretos en los que el algebroide de Lie donde se trabaja es el álgebra de Lie $so(3)$. En el caso de orden uno obtendremos las ecuaciones clásicas de Euler-Lagrange del sólido rígido en $so(3)$. En el caso de orden superior, consideraremos un funcional de orden dos y hallaremos los splines cúbicos en $so(3)$ que hacen mínima la aceleración. Además, en ambos casos hallaremos la segunda variación de los funcionales anteriores con la intención de realizar un posible futuro estudio de las condiciones suficientes de mínimo local así como de las secciones de Jacobi y sus propiedades.

3.1. Descripción de so(3).

El interés en splines cúbicos proviene en parte del problema de animación de fotogramas en gráficos por ordenador. Por eso, en este trabajo estamos interesados en problemas de interpolación en el grupo de rotaciones con respecto al origen en $\mathbb{R}^3$, es decir, en el grupo de Lie $SO(3)$, cuya álgebra de Lie es $so(3) = \{B \in gl(3) | B = -B^T\}$, es decir, el conjunto de matrices 3×3 reales antisimétricas con el conmutador de matrices como corchete de Lie. Los elementos de $so(3)$ son los generadores infinitesimales de las rotaciones, es decir, son los elementos del espacio tangente de $SO(3)$ en la identidad.

Descripción de so(3) como algebroide de Lie. Sea $(E, \rho, [,])$ un algebroide de Lie de forma que $\tau : E = so(3) \to \{e\} \equiv M$, donde M es una variedad diferenciable base que consta de un único punto. La aplicación ancla $\rho : E \to TM$ que a cada elemento del álgebra le asocia un elemento del espacio tangente es la aplicación nula, ya que como $M \equiv \{e\}$ se tiene que $TM \equiv \{0\}$ y por tanto para toda sección $\sigma \in E$ se tiene que $\rho(\sigma) = 0$.

Identificación de $so(3)$ con $\mathbb{R}^3$. Dado $\omega \in \mathbb{R}^3$ consideremos el endomorfismo $F_\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $v \mapsto \omega \times v$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$. La matriz asociada a F_ω con respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es obvio que toda matriz antisimétrica define un único $\omega \in \mathbb{R}^3$. De esta forma identificamos un elemento $\hat{\omega} \in so(3)$ con un elemento $\omega \in \mathbb{R}^3$, donde $\hat{\omega}$ es la matriz asociada a la aplicación lineal F_ω con respecto a la bases canónicas. Por tanto,

$$\hat{\omega} v = \omega \times v. \tag{3.1}$$

La base canónica de $\mathbb{R}^3$ $\{e_1, e_2, e_3\}$ se identifica con la base de $so(3)$ $\{E_1, E_2, E_3\}$ donde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propiedad 3.1.1. *Como $so(3)$ tiene el conmutador de matrices como corchete de Lie, se cumplen las relaciones*

$$[E_1, E_2] = E_3, \;\; [E_3, E_1] = E_2, \;\; [E_2, E_3] = E_1.$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2] &= E_1E_2 - E_2E_1 = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_3, E_1] &= E_3E_1 - E_1E_3 = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_2, E_3] &= E_2E_3 - E_3E_2 = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_1
\end{aligned}$$

□

Propiedad 3.1.2. *El corchete de Lie de $so(3)$ cumple además que*

$$[\hat{\omega}, \hat{u}]_{so(3)} = \widehat{\omega \times u},$$

para todo ω y v en $\mathbb{R}^3$.

Demostración. En efecto,

$$\omega \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = (\omega_2 u_3 - u_2\omega_3, \omega_3 u_1 - u_3\omega_1, \omega_1 u_2 - u_1\omega_2).$$

Entonces

$$\widehat{\omega \times u} = (\omega_2 u_3 - u_2\omega_3)E_1 + (\omega_3 u_1 - u_3\omega_1)E_2 + (\omega_1 u_2 - u_1\omega_2)E_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & u_1\omega_2 - \omega_1 u_2 & \omega_3 u_1 - u_3\omega_1 \\ \omega_1 u_2 - u_1\omega_2 & 0 & u_2\omega_3 - \omega_2 u_3 \\ u_3\omega_1 - \omega_3 u_1 & \omega_2 u_3 - u_2\omega_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado tenemos que

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$[\hat{\omega}, \hat{u}] = \hat{\omega}\hat{u} - \hat{u}\hat{\omega} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -\omega_3 u_3 - u_2\omega_2 & \omega_2 u_1 & \omega_3 u_1 \\ \omega_1 u_2 & -\omega_3 u_3 - \omega_1 u_1 & \omega_3 u_1 \\ \omega_1 u_3 & \omega_2 u_3 & -\omega_1 u_2 - \omega_1 u_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\omega_3 u_3 - \omega_2 u_2 & u_2\omega_1 & u_3\omega_1 \\ u_1\omega_2 & -u_3\omega_3 - u_1\omega_1 & u_3\omega_2 \\ u_1\omega_3 & u_2\omega_3 & -u_2\omega_2 - \omega_1 u_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & u_1\omega_2 - \omega_1 u_2 & \omega_3 u_1 - u_3\omega_1 \\ \omega_1 u_2 - u_1\omega_2 & 0 & u_2\omega_3 - \omega_2 u_3 \\ u_3\omega_1 - \omega_3 u_1 & \omega_2 u_3 - u_2\omega_3 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{\omega \times u}$$

□

Propiedad 3.1.3. *La identidad de Jacobi*

$$[\hat{\omega}, [\hat{u}, \hat{v}]] + [\hat{u}, [\hat{v}, \hat{\omega}]] + [\hat{v}, [\hat{\omega}, \hat{u}]] = 0,$$

se puede expresar en términos del producto vectorial de la forma

$$\omega \times (u \times v) + u \times (v \times \omega) + v \times (\omega \times u) = 0.$$

3.2. Caso orden uno. Sólido rígido.

Obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange del sólido rigido. Las ecuaciones que describen el movimiento de un sólido rígido que rota con respecto a un punto fijo en el espacio, es decir, en $\mathbb{R}^3$, vienen dadas por

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = 0,$$

donde ω es la velocidad angular de dicho sólio e I es el tensor de inercia, que es una matriz simétrica definida positiva. El propósito de esta subsección es hallar dichas ecuaciones aplicando la teoría vista en el capítulo uno.

Sea $g : so(3) \times so(3) \to \mathbb{R}$ el producto escalar, con matriz asociada I, de forma que cumple que $g(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \cdot (I\omega_2)$, con $\omega_1, \omega_2 \in so(3)$.

Definimos un lagrangiano que depende sólo de la primera derivada

$$\begin{array}{rccl} L: & so(3) & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \to & \frac{1}{2}g(\omega, \omega) = \frac{1}{2}\omega \cdot (I\omega), \end{array}$$

donde $\frac{1}{2}\omega \cdot (I\omega)$ puede interpretarse como la energía cinética del sistema.

Tradicionalmente, para la obtención de estas ecuaciones, se ha optado por trabajar directamente en el grupo de Lie $SO(3)$ para luego reducir las ecuaciones obtenidas al álgebra de Lie $so(3)$. El desarrollo de este método alternativo puede verse en el apéndice.

El mismo problema variacional puede resolverse de forma más sencilla con teoría del algebroides de Lie. Como hemos visto en el capítulo uno, un sistema de coordenadas locales (x^i) en la variedad M y la base local $\{e_\alpha\}$ de secciones de un fibrado E determinan un sistema de coordenadas locales (x^i, y^α) en E. En nuestro caso, (x^i) son las coordenadas del punto $\{e\}$, que tomamos $x = 0$ e y^α son las componentes de la velocidad angular ω.

Para hallar las ecuaciones de Euler-Lagrange en dicho algebroide de Lie, nos planteamos el problema de hallar los puntos críticos de la integral de la energía cinética del sistema que viene dado por el funcional

$$S(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} L(\omega(t))\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}(\omega(t)\cdot(I\omega(t)))\,\mathrm{d}t.$$

Para ello, calcularemos la primera variación de dicho funcional y aplicaremos el lema fundamental del cálculo de variaciones.

En el caso general de orden uno, las variaciones infinitesimales son de la forma

$$\delta x^i = \rho^i_\alpha \sigma^\alpha,$$

$$\delta y^\alpha = \dot{\sigma}^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta \sigma^\gamma,$$

donde σ es una curva que cumple que $\sigma(t_0) = \sigma(t_1) = 0$.

Por tanto en nuestro caso, como la posición es constante, se tiene que

$$\delta x^i = 0,$$

y como $y^\alpha = \omega^\alpha$ se tiene que

$$\delta y^\alpha = \delta\omega^\alpha = (\dot{\sigma} + \omega\times\sigma)^\alpha.$$

Calculando la diferencial de S e igualando a cero obtenemos,

$$\begin{aligned} dS(\omega)(\Xi_\omega\sigma) &= \delta\int_{t_0}^{t_1} L(\omega)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\{\frac{\partial L}{\partial\omega}\delta\omega\}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\{\frac{\partial}{\partial\omega}(\frac{1}{2}(\omega\cdot(I\omega)))\cdot(\dot{\sigma}+\omega\times\sigma)\}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\{(I\omega)\cdot\dot{\sigma} + (I\omega)\cdot(\omega\times\sigma)\}\,\mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

Aplicando inegración por partes, $u = I\omega \to\ du = I\dot{\omega}\ dt,\ \ dv = \dot{\sigma}\ dt \to\ v = \sigma$,

$$0 = \delta\int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{d}{dt}((I\omega)\cdot\sigma) - (I\omega)\cdot\dot{\sigma} + (I\omega)\cdot(\omega\times\sigma)\right\}\mathrm{d}t.$$

Como $\sigma(t_0) = \sigma(t_1) = 0$, y

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}((I\omega)\cdot\sigma)\,\mathrm{d}t = (I\omega)\cdot(\sigma(t_1) - \sigma(t_0)) = 0$$

se tiene que

$$0 = \delta\int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\{-(I\dot{\omega})\cdot\sigma + (I\omega)\cdot(\omega\times\sigma)\}\,\mathrm{d}t.$$

Como $(I\omega)\cdot(\omega\times\sigma) = det(I\omega,\omega,\sigma) = det(\sigma, I\omega,\omega) = \sigma\cdot(I\omega\times\omega) = (I\omega\times\omega)\cdot\sigma = -(\omega\times I\omega)\cdot\sigma$

$$0 = \delta\int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\{-(I\dot{\omega})\cdot\sigma - (\omega\times I\omega)\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\{-(I\dot{\omega} + \omega\times I\omega)\cdot\sigma)\}\,\mathrm{d}t.$$

Como ésto ha de cumplirse para toda σ arbitraria por el lema fundamental del cálculo de variaciones, para que la variación del funcional $S(\omega)$ sea cero, ω tiene que satisfacer

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = 0, \tag{3.2}$$

que son las ecuaciones clásicas del movimiento del sólido rígido.

Así, se deduce que las curvas que son puntos críticos del funcional definido por la energía cinética del sistema son aquellas cuya velocidad angular cumple la ecuaciones 3.2

Cálculo de la segunda variación. Con el objetivo de encontrar condiciones suficientes de mínimo en futuros trabajos, calculamos la diferencial segunda de $S(\omega)$. Para ello, calculamos la primera variación de $dS(\omega)$.

$$\begin{aligned} d^2S(\omega)(\Xi_\omega\sigma, \Xi_\omega\sigma) &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \{-(I\dot{\omega} + \omega \times I\omega)\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \{-(\delta(I\dot{\omega}) + \delta(\omega \times I\omega))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \{-(\delta(I\dot{\omega}) + \delta\omega \times I\omega + \omega \times \delta(I\omega))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Como hemos visto anteriormente, la expresión de la variación de la velocidad angular es de la forma $\delta\omega = \dot{\sigma} + \omega \times \sigma$. A partir de ella podemos obtener la expresión de la variación de la derivada de la velocidad angular ya que $\delta\dot{\omega} = \frac{d}{dt}\delta\omega$. Así

$$\delta\dot{\omega} = \ddot{\sigma} + \dot{\omega} \times \sigma + \omega \times \dot{\sigma}.$$

Teniendo en cuenta que la matriz I no depende del tiempo, se deduce a partir de las expresiones anteriores que la variación de $I\omega$ es

$$\delta(I\omega) = I(\delta\omega) = I\dot{\sigma} + I(\omega \times \sigma),$$

y que la variación de $I\dot{\omega}$ es

$$\delta(I\dot{\omega}) = I(\delta\dot{\omega}) = I\ddot{\sigma} + I(\dot{\omega} \times \sigma) + I(\omega \times \dot{\sigma}).$$

Por tanto, sustituyendo en la expresión de la segunda variación de $S(\omega)$,

$$\begin{aligned} d^2S(\omega)(\Xi_\omega\sigma, \Xi_\omega\sigma) = \delta \int_{t_0}^{t_1} &\{-(I\ddot{\sigma} + I(\dot{\omega} \times \sigma) + I(\omega \times \dot{\sigma}) + (\dot{\sigma} + \omega \times \sigma) \times (I\omega))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t + \\ &+ \omega \times (I\dot{\sigma} + I(\omega \times \sigma)))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t = \\ &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \{-(I\ddot{\sigma} + I(\dot{\omega} \times \sigma) + I(\omega \times \dot{\sigma}) + \dot{\sigma} \times (I\omega) + (\omega \times \sigma) \times (I\omega) + \\ &+ \omega \times (I\dot{\sigma}) + \omega \times (I(\omega \times \sigma)))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Multiplicando por I y por su inversa I^{-1},

$$\begin{aligned} d^2S(\omega)(\Xi_\omega\sigma, \Xi_\omega\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} &\{(-I(\ddot{\sigma} + (\dot{\omega} \times \sigma) + \omega \times \dot{\sigma} + I^{-1}(\dot{\sigma} \times (I\omega)) + I^{-1}(\omega \times \sigma) \times (I\omega) + \\ &+ I^{-1}(\omega \times (I\dot{\sigma})) + I^{-1}(\omega \times (I(\omega \times \sigma))))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Como ω cumple que $I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = 0$, se tiene que $\dot{\omega} = -I^{-1}(\omega \times (I\omega))$. Sutituyendo, obtenemos la expresión de la segunda variación de $S(\omega)$

$$\begin{aligned} d^2S(\omega)(\Xi_\omega\sigma, \Xi_\omega\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} &\{(-I(\ddot{\sigma} + (-I^{-1}(\omega \times (I\omega)) \times \sigma + \omega \times \dot{\sigma} + I^{-1}(\dot{\sigma} \times (I\omega)) + \\ &+ I^{-1}(\omega \times \sigma) \times (I\omega) + I^{-1}(\omega \times (I\dot{\sigma})) + I^{-1}(\omega \times (I(\omega \times \sigma))))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

El término

$$J(\sigma) = \ddot{\sigma} + (-I^{-1}(\omega \times (I\omega)) \times \sigma + \omega \times \dot{\sigma} + I^{-1}(\dot{\sigma} \times (I\omega)) + I^{-1}(\omega \times \sigma) \times (I\omega) +$$
$$+ I^{-1}(\omega \times (I\dot{\sigma})) + I^{-1}(\omega \times (I(\omega \times \sigma)))$$

es importante, puesto que las secciónes σ para la que $J(\sigma) = 0$, coinciden con lo campos de Jacobi X en el grupo $SO(3)$ para la métrica invariante a izquiera definida anteriormente por $g(\omega, \omega) = \omega \cdot (I\omega)$. Así se tiene que $\sigma = R^{-1}X$ con R perteneciente al grupo $SO(3)$.

3.3. Splines cúbicos en so(3).

Para hablar de splines cúbicos en so(3), primero es necesario definir una conexión análoga a la conexión de Levi-Civita, pero que en vez de actuar sobre campos vectoriales, actúe sobre secciones no dependientes del tiempo y que además cumpla:

$$\begin{array}{lr} \nabla_\xi < \sigma, \eta > = < \nabla_\xi \sigma, \eta > + < \sigma, \nabla_\xi \eta >, & (a) \\ \nabla_\sigma \eta - \nabla_\eta \sigma = [\sigma, \eta], & (b) \\ \nabla_\sigma f = \rho(\sigma) f, & (c) \end{array}$$

para toda σ,η,ξ sección en un fibrado E y f una función.

Teniendo en cuenta que $< \sigma, \eta > = \sigma \cdot (I\eta)$, donde I es a matriz asociada al producto escalar $<,>$ lo vamos a aplicar a (a), tres veces , permutando cíclicamente los elementos ξ, σ y η. Así obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\nabla_\xi(\sigma \cdot (I\eta)) = (\nabla_\xi \sigma) \cdot (I\eta) + (\sigma \cdot (I\nabla_\xi \eta)),$$
$$\nabla_\sigma(\eta \cdot (I\xi)) = (\nabla_\sigma \eta) \cdot (I\xi) + (\eta \cdot (I\nabla_\sigma \xi)),$$
$$\nabla_\eta(\xi \cdot (I\sigma)) = (\nabla_\eta \xi) \cdot (I\sigma) + (\xi \cdot (I\nabla_\eta \sigma)),$$

En el caso en el que el algebroide de Lie es un álgebra de Lie, se tiene que el ancla $\rho = 0$. Por tanto, $\nabla_\sigma f = \rho(\sigma) f = 0$, para toda función f.

Como $(\sigma \cdot (I\eta))$, $(\eta \cdot (I\xi))$, $(\xi \cdot (I\sigma))$ son funciones, se tiene que

$$\nabla_\xi(\sigma \cdot (I\eta)) = \nabla_\sigma(\eta \cdot (I\xi)) = \nabla_\eta(\xi \cdot (I\sigma)) = 0.$$

Por tanto las anteriores ecuaciones, se reducen a las siguientes

$$(\nabla_\xi \sigma) \cdot (I\eta) + (\sigma \cdot (I\nabla_\xi \eta)) = 0 \ \ (1),$$
$$(\nabla_\sigma \eta) \cdot (I\xi) + (\eta \cdot (I\nabla_\sigma \xi)) = 0 \ \ (2),$$
$$(\nabla_\eta \xi) \cdot (I\sigma) + (\xi \cdot (I\nabla_\eta \sigma)) = 0 \ \ (3).$$

Operando $(1) + (2) - (3)$ obtenemos

$$(\xi \times \eta) \cdot (I\sigma) + (\sigma \times \eta) \cdot (I\xi) + (\nabla_\sigma \xi + \nabla_\xi \sigma) \cdot (I\eta) = 0,$$

donde se ha tenido en cuenta que $\nabla_\xi \sigma - \nabla_\sigma \xi = [\xi, \sigma] = \xi \times \sigma$. Aplicando, de nuevo, esta propiedad

$$2\nabla_\sigma \xi \cdot (I\eta) + (\xi \times \sigma) \cdot (I\eta) + (\xi \times \eta) \cdot (I\sigma) + (\sigma \times \eta) \cdot (I\xi) = 0.$$

Denotando $I\eta = \zeta$,

$$2\nabla_\sigma \xi \cdot \zeta + (\xi \times \sigma) \cdot \zeta + (\xi \times (I^{-1}\zeta)) \cdot (I\sigma) + (\sigma \times (I^{-1}\zeta)) \cdot (I\xi) = 0,$$

$$2\nabla_\sigma \xi \cdot \zeta + (\xi \times \sigma) \cdot \zeta + I^{-1}(I\sigma \times \xi) \cdot (\zeta) + I^{-1}(I\xi \times \sigma) \cdot \zeta = 0.$$

Siendo esto cierto para toda sección ζ se deduce finalmente que

$$\nabla_\sigma \xi = \frac{1}{2}(\sigma \times \xi) + \frac{1}{2} I^{-1}\big((\xi \times I\sigma) + (\sigma \times I\xi)\big).$$

Caso particular: Nos interesa especialmente el caso particular en le que la matriz de inercia es la matriz identidad. En este caso la expresión anterior se reduce a

$$\nabla_\sigma \xi = -\frac{1}{2}\xi \times \sigma \tag{3.3}$$

para toda sección η, σ no dependientes del tiempo en un fibrado E.

Para una sección $\sigma(t) \in E$ dependiente del tiempo, se tiene que

$$\nabla_t \sigma = \frac{d\sigma}{dt} - \frac{1}{2}\sigma \times \omega.$$

En esta sección nos centraremos en el problema de encontrar una curva admisible $a(t)$ interpoladora, de forma que sea la única solución que minimice el funcional $S\colon \mathscr{P}(J,E) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$S(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} < \nabla_t \omega, \nabla_t \omega > \mathrm{d}t.$$

El funcional $S(\omega)$ no es más que la medida de la aceleración total de la curva. A la curva admisible que es un punto crítico del funcional $S(\omega)$ la llamaremos **polinomio cúbico** o **spline cúbico.** [NHP]

Teorema 3.3.1. *Una curva admisible $a(t)$ es un polinomio cubico si y sólo si satisface la ecuación diferencial*

$$\dddot{\omega} - \ddot{\omega} \times \omega = 0. \tag{3.4}$$

Demostración. En primer lugar, nótese que en el caso en el que $\sigma(t) = \omega(t)$, se tiene que

$$\nabla_t \omega = \dot{\omega} - \frac{1}{2}(\omega \times \omega) = \dot{\omega}.$$

Calculemos la primera variación

$$\delta S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma) = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\omega})\,\mathrm{d}t = \delta \int_{t_0}^{t_1} < \nabla_t \omega, \nabla_t \omega > \mathrm{d}t = \delta \int_{t_0}^{t_1} \dot{\omega}^2\,\mathrm{d}t,$$

donde $\sigma(t)$ es una sección con condiciones $\sigma(t_0) = \sigma(t_1) = 0$ y $\dot{\sigma}(t_0) = \dot{\sigma}(t_1) = 0$

Teniendo en cuenta que la variación de la velocidad angular es de la forma

$$\delta\omega = \dot{\sigma} + \omega \times \sigma,$$

se tiene que

$$\delta\dot{\omega} = \frac{d}{dt}\delta\omega = \ddot{\sigma} + \frac{d}{dt}(\omega \times \sigma) = \ddot{\sigma} + \dot{\omega} \times \sigma + \omega \times \dot{\sigma}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\omega})\,\mathrm{d}t &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \dot{\omega}^2\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \delta\dot{\omega}^2\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \{2\dot{\omega}(\delta\dot{\omega})\}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \{2\dot{\omega} \cdot (\ddot{\sigma} + \dot{\omega} \times \sigma + \omega \times \dot{\sigma})\}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \{2(\dot{\omega} \cdot (\ddot{\sigma}) + \dot{\omega} \cdot (\dot{\omega} \times \sigma) + \dot{\omega} \cdot (\omega \times \dot{\sigma}))\}\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\int_{t_0}^{t_1} \{(\dot{\omega} \cdot (\ddot{\sigma}) + \dot{\omega} \cdot (\omega \times \dot{\sigma}))\}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\dot{\omega}\cdot(\dot{\omega}\times\sigma)=det(\dot{\omega},\dot{\omega},\sigma)=0$.

Integrando por partes el primer sumando : $u=\dot{\omega}\to du=\ddot{\omega}\,dt,\;\; dv=\ddot{\sigma}\,dt\to v=\dot{\sigma}$,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(\dot{\omega})\,\mathrm{d}t=2\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{d}{dt}(\dot{\omega}\cdot\dot{\sigma})-(\dot{\sigma}\cdot(\ddot{\omega})+\dot{\omega}\cdot(\omega\times\dot{\sigma}))\right\}\mathrm{d}t.$$

Como $\dot{\sigma}(t_0)=\dot{\sigma}(t_1)=0$ se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}(\dot{\omega}\cdot\dot{\sigma})=\dot{\omega}\cdot(\dot{\sigma}(t_1)-\dot{\sigma}(t_0))=0.$$

Por tanto

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(\dot{\omega})\,\mathrm{d}t=2\int_{t_0}^{t_1}\{-(\dot{\sigma}\cdot(\ddot{\omega})+\dot{\omega}\cdot(\omega\times\dot{\sigma}))\}\,\mathrm{d}t=2\int_{t_0}^{t_1}\{(-\ddot{\omega}+(\dot{\omega}\times\omega))\cdot\dot{\sigma}\}\,\mathrm{d}t.$$

Integrando por partes: $u=-\ddot{\omega}+(\dot{\omega}\times\omega)\to du=-\dddot{\omega}+\ddot{\omega}\times\omega\,dt,\;\; dv=\dot{\sigma}\,dt\to v=\sigma$,

$$0=\delta\int_{t_0}^{t_1}L(\dot{\omega})\,\mathrm{d}t=2\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{d}{dt}(-\ddot{\omega}+(\dot{\omega}\times\omega))\cdot\sigma-\sigma\cdot(-\dddot{\omega}+(\ddot{\omega}\times\omega))\right\}\mathrm{d}t.$$

Como $\sigma(t_0)=\sigma(t_1)=0$ se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}(-\ddot{\omega}+(\dot{\omega}\times\dot{\omega}))\cdot\sigma=(-\ddot{\omega}+(\dot{\omega}\times\dot{\omega}))\cdot(\sigma(t_1)-\sigma(t_0))=0.$$

Por tanto

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(\dot{\omega})\,\mathrm{d}t=2\int_{t_0}^{t_1}\{(\dddot{\omega}-(\ddot{\omega}\times\omega))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t.$$

Ahora, aplicando el lema fundamental del cálculo de variaciones, se tiene que esta integral ha de ser 0 para toda sección σ tal que $\sigma(t_0)=\sigma(t_1)=0$ no nula. Por tanto

$$\dddot{\omega}-(\ddot{\omega}\times\omega)=0.$$

Ó lo que es lo mismo

$$\dddot{\omega}=\ddot{\omega}\times\omega.$$

Recíprocamente, si $\dddot{\omega}-(\ddot{\omega}\times\omega)=0$, entonces la variación del funcional es cero y por tanto tal ω es punto crítico de $S(\omega)$, luego es polinomio cúbico. □

Corolario 3.3.2. $\ddot{\omega}-\dot{\omega}\times\omega$ *es una constante de movimiento.*

Demostración. Como

$$\frac{d}{dt}(\dot{\omega}\times\omega)=\ddot{\omega}\times\omega+\dot{\omega}\times\dot{\omega}=\ddot{\omega}\times\omega,$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt}(\ddot{\omega}-\dot{\omega}\times\omega)=\dddot{\omega}-\ddot{\omega}\times\omega=0$$

Luego

$$\ddot{\omega}=\dot{\omega}\times\omega+cte.$$

□

Expresión de la segunda variación del funcional $S(\dot{\omega})$ y secciones de Jacobi. Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos dan condiciones necesarias para hallar el mínimo del funcional $S(\dot{\omega})$. Para encontrar condiciones suficientes para que una curva admisible sea un mínimo local de $S(\dot{\omega})$, es necesario hallar la segunda variación de dicho funcional.

Teorema 3.3.3. *La expresión de la segunda variación del funcional $S(\dot{\omega})$ es*

$$d^2S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma,\Xi_{\dot{\omega}}\sigma) = 2\int_{t_0}^{t_1}\{(\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\sigma} + \ddot{\omega}\times\sigma + \omega\times\sigma + \omega\times\dddot{\sigma} - 2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma})\times\omega)\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t.$$

Demostración. En el anterior apartado hemos obtenido que la primera variación del funcional $S(\dot{\omega})$ es

$$dS(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma) = 2\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\dddot{\omega} - (\ddot{\omega}\times\omega))\cdot\sigma\right\}\,\mathrm{d}t.$$

Volviendo a derivar

$$\begin{aligned} d^2S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma,\Xi_{\dot{\omega}}\sigma) &= 2\int_{t_0}^{t_1}\delta\left\{(\dddot{\omega} - (\ddot{\omega}\times\omega))\cdot\sigma\right\}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta\dddot{\omega} - \delta(\ddot{\omega}\times\omega))\cdot\sigma\right\}\,\mathrm{d}t = 2\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta\dddot{\omega} - \delta\ddot{\omega}\times\omega + \ddot{\omega}\times\delta\omega)\cdot\sigma\right\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Sabemos que la expresión de la variación de la velociad angular es de la forma

$$\delta\omega = \dot{\sigma} + \omega\times\sigma.$$

Como $\delta\dot{\omega} = \frac{d}{dt}\delta\omega$, $\delta\ddot{\omega} = \frac{d}{dt}\delta\dot{\omega}$ y $\delta\dddot{\omega} = \frac{d}{dt}\delta\ddot{\omega}$, se deduce que

$$\begin{aligned} \delta\dot{\omega} &= \ddot{\sigma} + \dot{\omega}\times\sigma + \omega\times\dot{\omega}, \\ \delta\ddot{\omega} &= \dddot{\sigma} + \ddot{\omega}\times\sigma + \dot{\omega}\times\dot{\sigma} + \dot{\omega}\times\dot{\sigma} + \omega\times\ddot{\sigma} = \\ &= \dddot{\sigma} + \ddot{\omega}\times\sigma + 2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma}) + \omega\times\ddot{\sigma}, \\ \delta\dddot{\omega} &= \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\sigma} + \dddot{\omega}\times\sigma + \ddot{\omega}\times\dot{\sigma} + 2(\ddot{\omega}\times\dot{\sigma} + \dot{\omega}\times\ddot{\sigma}) + \dot{\omega}\times\ddot{\sigma} + \omega\times\dddot{\omega} = \\ &= \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\sigma} + \dddot{\omega}\times\sigma + 3(\ddot{\omega}\times\dot{\sigma}) + 3(\dot{\omega}\times\ddot{\sigma}) + \omega\times\dddot{\sigma}. \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en la anterior expresión y teniendo en cuenta que $\dddot{\omega} = \ddot{\omega}\times\omega$,

$$\begin{aligned} d^2S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma,\Xi_{\dot{\omega}}\sigma) &= 2\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\delta\dddot{\omega} - \delta\ddot{\omega}\times\omega + \ddot{\omega}\times\delta\omega)\cdot\sigma\right\}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\sigma} + \dddot{\omega}\times\sigma + 3(\ddot{\omega}\times\dot{\sigma}) + 3(\dot{\omega}\times\ddot{\sigma}) + \omega\times\dddot{\sigma})\cdot\sigma\right\}\,\mathrm{d}t - \\ &- 2\int_{t_0}^{t_1}\{((\dddot{\sigma} + \ddot{\omega}\times\sigma + 2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma}) + \omega\times\ddot{\sigma})\times\omega + \ddot{\omega}\times(\dot{\sigma} + \omega\times\sigma))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\sigma} + \dddot{\omega}\times\sigma + 3(\ddot{\omega}\times\dot{\sigma}) + 3(\dot{\omega}\times\ddot{\sigma}) + \omega\times\dddot{\sigma} - (\dddot{\sigma}\times\omega))\cdot\sigma\right\}\,\mathrm{d}t + \\ &+ 2\int_{t_0}^{t_1}\{-(\ddot{\omega}\times\sigma)\times\omega - 2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma})\times\omega - (\omega\times\ddot{\sigma})\times\omega - \ddot{\omega}\times\dot{\sigma})\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t \\ &+ 2\int_{t_0}^{t_1}\{-\ddot{\omega}\times(\omega\times\sigma))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma,\Xi_{\dot{\omega}}\sigma) &= 2\int_{t_0}^{t_1}\{(\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\sigma} + \ddot{\omega}\times\sigma + \omega\times\sigma + 2(\ddot{\omega}\times\dot{\sigma}) + 3\dot{\omega}\times\ddot{\sigma} + 2(\omega\times\dddot{\sigma}))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t \\ &+ 2\int_{t_0}^{t_1}\{-2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma})\times\omega)\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\int_{t_0}^{t_1}\{(\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\sigma} + \ddot{\omega}\times\sigma + \omega\times\sigma + 2(\ddot{\omega}\times\dot{\sigma}) + 2\dot{\omega}\times\ddot{\sigma} + \dot{\omega}\times\ddot{\sigma} + 2(\omega\times\dddot{\sigma}))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t \\ &+ 2\int_{t_0}^{t_1}\{-2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma})\times\omega)\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Como $2\frac{d}{dt}(\dot{\omega}\times\dot{\sigma}) = 2(\ddot{\omega}\times\dot{\sigma}+\dot{\omega}\times\ddot{\sigma})$ y

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\frac{d}{dt}(\dot{\omega}\times\dot{\sigma}))\cdot\sigma\right\}\mathrm{d}t = (\dot{\omega}\times\dot{\sigma})\cdot(\sigma(t_1)-\sigma(t_0)) = 0,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} d^2S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma,\Xi_{\dot{\omega}}\sigma) = 2\int_{t_0}^{t_1}&\{(\ddddot{\sigma}+\ddot{\omega}\times\sigma+\omega\times\sigma+\dot{\omega}\times\ddot{\sigma}+\omega\times\dddot{\sigma}+\omega\times\dddot{\sigma})\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t \\ +2\int_{t_0}^{t_1}&\{-2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma})\times\omega)\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Como $\frac{d}{dt}(\omega\times\ddot{\sigma}) = (\dot{\omega}\times\ddot{\sigma}+(\omega\times\dddot{\sigma})$ y

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{(\frac{d}{dt}(\omega\times\ddot{\sigma}))\cdot\sigma\right\}\mathrm{d}t = (\omega\times\ddot{\sigma})\cdot(\sigma(t_1)-\sigma(t_0)) = 0,$$

se tiene que

$$d^2S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma,\Xi_{\dot{\omega}}\sigma) = 2\int_{t_0}^{t_1}\{(\ddddot{\sigma}+\ddot{\omega}\times\sigma+\omega\times\sigma+\omega\times\dddot{\sigma}-2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma})\times\omega)\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t.$$

□

La expresión

$$\bar{J}(\sigma) = \ddddot{\sigma}+\ddot{\omega}\times\sigma+\omega\times\sigma+\omega\times\dddot{\sigma}-2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma})\times\omega, \tag{3.5}$$

es de gran importancia. Las secciones σ a lo largo de ω polinomio cúbico que satisfacen la ecuación $\bar{J}(\sigma) = 0$ se llaman **seccións de Jacobi.**

Corolario 3.3.4. *Cualquier polinomio cúbico admite ω como sección de Jacobi de forma natural.*

Demostración. Sustituyendo σ por ω en la ecuación 3.5 e igualando a cero, obtenemos la expresión

$$\ddddot{\omega}+\ddot{\omega}\times\omega+\omega\times\dddot{\omega} = 0$$

Derivando la ecuación 3.4,

$$\frac{d}{dt}(\dddot{\omega}) = \frac{d}{dt}(\ddot{\omega}\times\omega),$$

$$\ddddot{\omega} = \dddot{\omega}\times\omega+\ddot{\omega}\times\dot{\omega} = -\omega\times\dddot{\omega}+\dot{\omega}\times\ddot{\omega},$$

luego es claro que ω es una sección de Jacobi. □

Las expresiones obtenidas para la diferencial segunda nos permiten inferir que gran parte de los resultados conocidos en geometría Riemanniana sobre campos de Jacobi y minimización de la longitud pueden generalizarse para este tipo de sistemas, si bien por falta de tiempo no hemos podido realizar dicho análisis.

Apéndice A

Apéndice.

A.1. Obtención de las variaciones trabajando directamente en el grupo $SO(3)$.

Se define la velocidad angular $\omega \in so(3)$ por medio de un elemento de $SO(3)$, $\hat{\omega} = R^{-1}\dot{R}$, donde $R \in SO(3)$. Nótese que ω y $\hat{\omega}$ están relacionados por la ecuación $\hat{\omega}v = \omega \times v$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$. Tomando derivadas variacionales se tiene que

$$\delta\hat{\omega} = \delta R^{-1}\dot{R} + R^{-1}\delta\dot{R} = -R^{-1}(\delta R)R^{-1}\dot{R} + R^{-1}\delta\dot{R}.$$

Sea $\hat{\sigma} = R^{-1}\delta R$. Derivando a ambos lados de la ecuación se tiene que

$$\dot{\hat{\sigma}} = -R^{-1}\dot{R}R^{-1}\delta R + R^{-1}\delta\dot{R}.$$

Por tanto

$$\dot{\hat{\sigma}} + \hat{\omega}\hat{\sigma} = R^{-1}\delta\dot{R}.$$

Luego sustituyendo en la expresión de $\delta\hat{\omega}$, se tiene que

$$\delta\hat{\omega} = \dot{\hat{\sigma}} + \hat{\omega}\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\hat{\omega} = \dot{\hat{\sigma}} + [\hat{\omega}, \hat{\sigma}],$$

expresión en $SO(3)$. Reduciendo a $so(3)$, obtenemos la expresión de la variación de ω,

$$\delta\omega = \dot{\sigma} + \omega \times \sigma.$$

Apéndice B

Resumen.

Existen multitud de problemas en matemáticas y en física en los que la presencia de simetrías en los sistemas dinámicos que los describen permiten simplificar su estudio y así facilitar su resolución. En este trabajo, nos centraremos en los problemas de interpolación y aproximación en variedades diferenciables, los cuales tienen especial interés en campos como la robótica o la animación 3D. En este último, interpretando el conjunto de estados de un sistema dinámico como una variedad diferenciable, se pueden diseñar trayectorias de objetos que vienen dadas por curvas satisfaciendo ciertas condiciones, y así producir animaciones por ordenador. Se buscan trayectorias sin cambios bruscos, y por tanto, estas curvas han de ser diferenciables en todos sus puntos. Para ello, se trabaja con splines cúbicos. En este trabajo se hará uso de la teoría de algebroides de Lie para obtener un método de resolución para este tipo de problemas, trabajando directamente en el espacio reducido y veremos que permite obtener una descripción muy adecuada y ventajosa. Además, aplicaremos los resultados obtenidos a la teoría de Splines y otros métodos de interpolación y aproximación en variedades diferenciables.

Formalismo Lagrangiano y cálculo variacional en algebroides de Lie.

Una estructura de algebroide de Lie sobre un fibrado $\tau\colon E \to M$ consiste en una estructura de álgebra de Lie $(Sec(E), [\ ,\ ])$ en el C^∞(M)-módulo de secciones de E, junto con un morfismo de fibrados vectoriales $\rho\colon E \to TM$ sobre la identidad en M, llamado ancla, que satisfacen la siguiente condición de compatibilidad $[\sigma, f\eta] = (\rho(\sigma)f)\eta + f[\sigma,\eta]$ para toda $\sigma,\eta \in Sec(E)$ y $f \in C^\infty(M)$.

Un sistema de coordenadas locales (x^i) en la variedad diferenciable M y una base local $\{e_\alpha\}$ de secciones de E determinan un sistema de coordenadas locales (x^i, y^α) en el fibrado E: un elemento $a \in E$ tiene coordenadas (x^i, y^α) si el punto base $m = \tau(a)$ tiene coordenadas (x^i) y en la base $\{e_\alpha(m)\}$ de E_m las componentes de a son y^α, es decir $a = y^\alpha e_\alpha(m)$.

El ancla y el conmutador quedan localmente determinados por ciertas funciones locales ρ^i_α y $C^\alpha_{\beta\gamma}$ en M, llamadas funciones de estructura, y que están dadas por $\rho(e_\alpha) = \rho^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}$, y por $[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta}\, e_\gamma$. Las funciones de estructura satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\rho^j_\alpha \frac{\partial \rho^i_\beta}{\partial x^j} - \rho^j_\beta \frac{\partial \rho^i_\alpha}{\partial x^j} = \rho^i_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta},$$
$$\rho^i_\alpha \frac{\partial C^\nu_{\beta\gamma}}{\partial x^i} + \rho^i_\beta \frac{\partial C^\nu_{\gamma\alpha}}{\partial x^i} + \rho^i_\gamma \frac{\partial C^\nu_{\alpha\beta}}{\partial x^i} + C^\mu_{\beta\gamma} C^\nu_{\alpha\mu} + C^\mu_{\gamma\alpha} C^\nu_{\beta\mu} + C^\mu_{\alpha\beta} C^\nu_{\gamma\mu} = 0,$$

Una curva $a : I \subset \mathbb{R} \to E$ se dice que es admisible si satisface $\dot\gamma(t) = \rho(a(t))$, donde $\gamma(t) = \tau(a(t))$ es la curva base.

Dada una función $L \in C^\infty(E)$, se puede definir un sistema dinámico en E, dado localmente por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial y^\gamma} C^\gamma_{\alpha\beta} y^\beta = \rho^i_\alpha \frac{\partial L}{\partial x^i},$$
$$\dot x^i = \rho^i_\alpha y^\alpha.$$

La estructura de variedad diferenciable apropiada para el conjunto de curvas admisibles se denota por $\mathscr{P}(J,E)$. La subvariedad diferenciable $\mathscr{P}(J,E)_{m_0}^{m_1} = \{a \in \mathscr{P}(J,E) | \tau(a(t_0)) = m_0,\ \tau(a(t_1)) = m_1\}$, es una subvariedad de Banach de $\mathscr{P}(J,E)$.

Consideramos un funcional de la forma

$$S(a) = \int_{t_0}^{t_1} L(a(t))dt,$$

donde $L \in C^\infty(E)$ es un Lagrangiano en un algebroide de Lie E y $a(t)$ es una curva admisible de forma que los puntos iniciales y finales están fijados. Con la notación clásica del cálculo de variaciones las variaciones infenitesimales son de la forma $\delta x^i = \rho^i_\alpha \sigma^\alpha,\ \ \delta y^\alpha = \dot{\sigma}^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta \sigma^\gamma$, para una curva $\sigma(t)$ que cumpla que $\sigma(t_0) = \sigma(t_1) = 0$.

La primera variación del funcional $S(a)$ puede escribirse de la forma

$$dS(a) = -\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right) - \rho^i_\alpha \frac{\partial L(a(t))}{\partial x^i} + C^\gamma_{\alpha\beta} y^\beta \frac{\partial L(a(t))}{\partial y^\alpha} \right\} dt.$$

Sea $L \in C^\infty(E)$ un lagrangiano en un algebroide de Lie E y fijemos dos puntos $m_0, m_1 \in M$. Conideremos el funcional $S(a) = \int_{t_0}^{t_1} L(a(t))dt$ en $\mathscr{P}(J,E)$. Los puntos críticos de la restricción de S a la variedad de Banach $\mathscr{P}(J,E)_{m_0}^{m_1}$ son los elementos de la restricción que cumplen las ecuaciones de Euler Lagrange.

Funcionales dependientes de derivadas de orden superior de curvas admisibles en algebroides de Lie.

Sea M una variedad diferenciable. Para una curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$, definida en un intervalo abierto conteniendo al origen en $\mathbb{R}$, se denota por $[\gamma]^k = j^k_0\gamma$ al k-jet de γ en 0. Se dice que es la velocidad de orden k de γ. El conjunto de k-velocidades de las curvas en M es una variedad diferenciable T^kM llamada variedad tangente de M de orden k.Tomando coordenadas locales (x^i, y^α) en E, una curva admisible $a(t) = (\gamma^i(t), a^\alpha(t))$ está determinada por la función $a^\alpha(t)$ y el valor inicial $\gamma^i(0)$. El $(k-1)$-jet de $a(t)$ corresponde al $(k-1)$-jet de la función $a^\alpha(t)$ junto con el valor inicial $\gamma^i(0)$.

Las coordenadas naturales $\left(x^i_{(j)}, y^\alpha_{(j)}\right)$ de $[a]^{k-1} \in T^{k-1}E$ están dadas por

$$\begin{aligned} x^i_{(0)} &= \gamma^i(0), & \\ y^\alpha_{(r)} &= \frac{d^{r-1}a^\alpha}{dt^{r-1}}(0), & r = 1,\dots,k-1, \\ x^i_{(r)} &= \Psi^i_r\left(\gamma^i(0), a^\alpha(0), \dots, \frac{d^{r-1}a^\alpha}{dt^{r-1}}(0)\right), & r = 1,\dots,k-1, \end{aligned}$$

donde Ψ^i_r son funciones suaves dependiendo también de forma suave de ρ^i_α y de sus derivadas parciales hasta orden $r-1$.

Un vector tangente a E^k está determinado por una familia uniparamétrica de curvas admisibles $\alpha(s,t)$ en E tal que $[s \mapsto [t \mapsto \alpha(s,t)]^{k-1}]^1$ es un vector tangente a E^k en el punto $[t \mapsto \alpha(0,t)]^{k-1} \in E^k$.

Se puede ver que

$$\Xi^k_a \sigma = \rho^i_\alpha \sigma^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{r=1}^{k} \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} [\dot{\sigma}^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta \sigma^\gamma] \frac{\partial}{\partial y^\alpha_r}.$$

En la notación clásica el cálculo de variaciones se tiene que

$$\delta x^i = \rho^i_\alpha \sigma^\alpha, \quad \delta y^\alpha_1 = \dot{\sigma}^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta \sigma^\gamma, \quad \delta y^\alpha_r = \frac{d}{dt}\delta y^\alpha_{r-1}, \quad \text{for } r = 2,\dots,k.$$

Sea $J = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto y fijemos dos puntos $A_0 \in E^{k-1}$ y $A_1 \in E^{k-1}$. Dado un lagrangiano $L \in C^\infty(E^k)$ consideramos el funcional

$$S(a) = \int_{t_0}^{t_1} L(a^k(t))\,dt$$

restringido a las curvas a en E tales que $a^{k-1}(t_0) = A_0$ y $a^{k-1}(t_1) = A_1$. El conjunto

$$\mathscr{P}(J,E)_{A_0}^{A_1} = \left\{ a \in \mathscr{P}(J,E) \;\middle|\; a \text{ es } C^k \text{ y } a^{k-1}(t_0) = A_0,\; a^{k-1}(t_1) = A_1 \right\}$$

es una subvariedad de Banach de $\mathscr{P}(J,E)_{m_0}^{m_1}$.

Una curva admisible $a \in \mathscr{P}(J,E)_{A_0}^{A_1}$ es un punto crítico del funcional $S\colon \mathscr{P}(J,E)_{A_0}^{A_1} \to \mathbb{R}$ dado por $S(a) = \int_{t_0}^{t_1} L(a^k(t))\,dt$, si y sólo si sus componentes $(x^i(t), y^\alpha(t))$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}^i = \rho_\alpha^i y_1^\alpha \\ \dot{\pi}_\alpha + \pi_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma y_1^\beta = \rho_\alpha^i \dfrac{\partial L}{\partial x^i}, \end{cases}$$

Aplicaciones.

SÓLIDO RÍGIDO. Dado por el funcional

$$S(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} L(\omega(t))\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}(\omega(t)\cdot(I\omega(t)))\,\mathrm{d}t,$$

calculamos la primera variación

$$dS(\omega)(\Xi_\omega\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} \{-(I\dot{\omega} + \omega \times I\omega)\cdot\sigma)\}\,\mathrm{d}t.$$

y obtenemos las ecuaciones del sólido rígido $I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = 0$, aplicando el lema fundamental del cálculo de variaciones. Calculamos también la segunda variación

$$\begin{aligned} d^2S(\omega)(\Xi_\omega\sigma, \Xi_\omega\sigma) = \int_{t_0}^{t_1} \{(-I(\ddot{\sigma} + (-I^{-1}(\omega \times (I\omega)) \times \sigma + \omega \times \dot{\sigma} + I^{-1}(\dot{\sigma} \times (I\omega)) + I^{-1}(\omega \times \sigma) \times (I\omega) + \\ + I^{-1}(\omega \times (I\dot{\sigma})) + I^{-1}(\omega \times (I(\omega \times \sigma))))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

El término

$$\begin{aligned} J(\sigma) = \ddot{\sigma} + (-I^{-1}(\omega \times (I\omega)) \times \sigma + \omega \times \dot{\sigma} + I^{-1}(\dot{\sigma} \times (I\omega)) + I^{-1}(\omega \times \sigma) \times (I\omega) + \\ + I^{-1}(\omega \times (I\dot{\sigma})) + I^{-1}(\omega \times (I(\omega \times \sigma))) \end{aligned}$$

es importante, puesto que las seccióness σ para la que $J(\sigma) = 0$, se relacionan con lo campos de Jacobi X en el grupo $SO(3)$ para la métrica invariante a izquiera definida anteriormente por $g(\omega,\omega) = \omega \cdot (I\omega)$.

SPLINES CÚBICOS EN SO(3).

A partir del funcional

$$S(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} < \nabla_t\omega, \nabla_t\omega > \,\mathrm{d}t.$$

calculamos la primera variación

$$\delta S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma) = 2\int_{t_0}^{t_1} \left\{(\dddot{\omega} - (\ddot{\omega} \times \omega))\cdot\sigma\right\}\,\mathrm{d}t,$$

y obtenemos las ecuaciones $\dddot{\omega} - (\ddot{\omega} \times \omega) = 0$.

Calculamos también la segunda variación

$$d^2S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma, \Xi_{\dot{\omega}}\sigma) = 2\int_{t_0}^{t_1} \{(\ddddot{\sigma} + \ddot{\omega} \times \sigma + \omega \times \sigma + \omega \times \dddot{\sigma} - 2(\dot{\omega} \times \dot{\sigma}) \times \omega)\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t.$$

Para encontrar condiciones suficientes que garanticen que el punto crítico es un minimo del funcional S, calculamos la diferencial segunda $d^2S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma, \Xi_{\dot{\omega}}\sigma)$. De su expresión, se ve deduce que las secciones σ que satisfacen

$$\ddddot{\sigma} + \ddot{\omega} \times \sigma + \omega \times \sigma + \omega \times \dddot{\sigma} - 2(\dot{\omega} \times \dot{\sigma}) \times \omega = 0,$$

serán de gran importancia. Una sección σ que satisfaga la ecuación anterior se llama una **sección de Jacobi.**

Apéndice C

Abstract.

There are plenty of mathematical and phyical problems in which the presence of symmetries in the dynamical systems which are describing them, allow us to symplify its study and as a consequence, make its resolution easier. In this work, we will focus on the interpolation and approximation problems in differentiable manifolds, which has special interest in fields such as robotics or 3D animation. This last one, interpreting the set of states of a dynamical system as a differentiable manifold, trajectories of objects which are given by curves satisfying some conditions can be drawn, and therefore, we will be able to create computer animations. Smooth trajectories are trying to be found. So this curves have to be differentiable at every point. In order to achieve this aim, one may work with cubic splines. Here we will use Lie algebroid theory so as to obtain a resolution method for this kind of problems, working directly at the reduced space and we will show that it allows us to obtain a very suitable and advantageous description. Besides, we will apply the obtained results to Splines theory and other interpolation and aproximation methods in differentiable manifolds.

Lagrangian Formalism and variational calculus in Lie algebroids.

A Lie algebroid structure on a vector bundle $\tau\colon E \to M$ is given by a vector bundle map $\rho\colon E \to TM$ over the identity in M, called the anchor, together with a Lie algebra structure on the $C^\infty(M)$-module of sections of E such that the compatibility condition $[\sigma, f\eta] = (\rho(\sigma)f)\eta + f[\sigma,\eta]$ is satisfied for every $f \in C^\infty(M)$ and every $\sigma, \eta \in \mathrm{Sec}(E)$.

A local coordinate system (x^i) in the differentiable manifold M and a local base $\{e_\alpha\}$ of sections in E determine a local coordinate system (x^i, y^α) on E. An element $a \in E$ has coordinates (x^i, y^α) if the base point $m = \tau(a)$ has coordinates (x^i) and in the base $\{e_\alpha(m)\}$ of E_m the components of a are y^α, i.e, $a = y^\alpha e_\alpha(m)$.

The anchor and the bracket are locally determined by the structure functions ρ^i_α and $C^\alpha_{\beta\gamma}$ on M given by $\rho(e_\alpha) = \rho^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}$ and $[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta}\, e_\gamma$. The structure functions satisfy the following equations

$$\rho^j_\alpha \frac{\partial \rho^i_\beta}{\partial x^j} - \rho^j_\beta \frac{\partial \rho^i_\alpha}{\partial x^j} = \rho^i_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta},$$

$$\rho^i_\alpha \frac{\partial C^\nu_{\beta\gamma}}{\partial x^i} + \rho^i_\beta \frac{\partial C^\nu_{\gamma\alpha}}{\partial x^i} + \rho^i_\gamma \frac{\partial C^\nu_{\alpha\beta}}{\partial x^i} + C^\mu_{\beta\gamma} C^\nu_{\alpha\mu} + C^\mu_{\gamma\alpha} C^\nu_{\beta\mu} + C^\mu_{\alpha\beta} C^\nu_{\gamma\mu} = 0.$$

A curve $a : I \subset \mathbb{R} \to E$ it is said to be admissible if it satisfies $\dot\gamma(t) = \rho(a(t))$, where $\gamma(t) = \tau(a(t))$ is the base curve.

Given a function $L \in C^\infty(E)$, a dynamical system can be defined on E locally by the system of differential eqiuations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial y^\gamma} C^\gamma_{\alpha\beta} y^\beta = \rho^i_\alpha \frac{\partial L}{\partial x^i},$$
$$\dot x^i = \rho^i_\alpha y^\alpha.$$

The appropriate differentiable manifold structure for the set of admissible curves it is denoted by $\mathscr{P}(J,E)_{m_0}^{m_1}=\{a\in\mathscr{P}(J,E)|\tau(a(t_0))=m_0,\ \tau(a(t_1))=m_1\}$, and it is a Banach submanifold of $\mathscr{P}(J,E)$.

We consider the functional

$$S(a)=\int_{t_0}^{t_1}L(a(t))dt,$$

where $L\in C^\infty(E)$ is a Lagrangian in a Lie algebroid E and $a(t)$ is and admissible curve where the initial and final basepoints are fixed. With the classical notation of variational calculus, the infinitesimal variation are of the form $\delta x^i=\rho^i_\alpha\sigma^\alpha,\ \ \delta y^\alpha=\dot\sigma^\alpha+C^\alpha_{\beta\gamma}a^\beta\sigma^\gamma$, for a curve $\sigma(t)$ which satisfies $\sigma(t_0)=\sigma(t_1)=0$.

The first variation of the functional $S(a)$ is

$$dS(a)=-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y^\alpha}\right)-\rho^i_\alpha\frac{\partial L(a(t))}{\partial x^i}+C^\gamma_{\alpha\beta}y^\beta\frac{\partial L(a(t))}{\partial y^\alpha}\right\}dt.$$

Let $L\in C^\infty(E)$ be a Lagrangian in a Lie algebroid E with fixed basepoint $m_0,m_1\in M$. We consider the funtional $S(a)=\int_{t_0}^{t_1}L(a(t))dt$ in $\mathscr{P}(J,E)$. The critical points of the restriction of S in the Banach submanifold $\mathscr{P}(J,E)_{m_0}^{m_1}$ are the elements of the restrction that satisfy the Euler Lagrange equations.

Functionals depending on high-order derivatives of admissible curves in Lie algebroids.

Let M be a differentiable manifold. Given a curve $\gamma\colon\mathbb{R}\to M$, defined in an open interval containing the origin $\mathbb{R}$, we denote by $[\gamma]^k=j^k_0\gamma$ the k-jet of γ in 0. It is said that is the k-order velocity of γ. The set of k-velocities of the curves in M is a differentiable manifold T^kM called tangent of M of order k.Taking local coordinates (x^i,y^α) in E, an admissible curve $a(t)=(\gamma^i(t),a^\alpha(t))$ is determined by a function $a^\alpha(t)$ and the initial value $\gamma^i(0)$.The $(k-1)$-jet of $a(t)$ corresponds to the $(k-1)$-jet of the funtion $a^\alpha(t)$ with the initial value $\gamma^i(0)$.

The natural coordinates $\left(x^i_{(j)},y^\alpha_{(j)}\right)$ of $[a]^{k-1}\in T^{k-1}E$ are given by

$$\begin{aligned}
x^i_{(0)}&=\gamma^i(0),\\
y^\alpha_{(r)}&=\frac{d^{r-1}a^\alpha}{dt^{r-1}}(0), && r=1,\dots,k-1,\\
x^i_{(r)}&=\Psi^i_r\left(\gamma^i(0),a^\alpha(0),\dots,\frac{d^{r-1}a^\alpha}{dt^{r-1}}(0)\right), && r=1,\dots,k-1,
\end{aligned}$$

where Ψ^i_r are smooth functions also depending in a smooth way on ρ^i_α and its partial derivatives until order $r-1$.

A tangent vector to E^k is determined by a 1-parametric family of admissible curves $\alpha(s,t)$ in E such that $[s\mapsto[t\mapsto\alpha(s,t)]^{k-1}]^1$ is a tangent vector to E^k at the point $[t\mapsto\alpha(0,t)]^{k-1}\in E^k$.

It can be shown that

$$\Xi^k_a\sigma=\rho^i_\alpha\sigma^\alpha\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{r=1}^{k}\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}[\dot\sigma^\alpha+C^\alpha_{\beta\gamma}a^\beta\sigma^\gamma]\frac{\partial}{\partial y^\alpha_r}.$$

With the classical notation of variational calculus, we have that

$$\delta x^i=\rho^i_\alpha\sigma^\alpha,\quad \delta y^\alpha_1=\dot\sigma^\alpha+C^\alpha_{\beta\gamma}a^\beta\sigma^\gamma,\quad \delta y^\alpha_r=\frac{d}{dt}\delta y^\alpha_{r-1},\quad \text{for } r=2,\dots,k.$$

Let $J=[t_0,t_1]\subset\mathbb{R}$ be a compact interval and let $A_0\in E^{k-1}$ and $A_1\in E^{k-1}$ be two fixed points. Given a lagrangian $L\in C^\infty(E^k)$ we consider the funtional

$$S(a)=\int_{t_0}^{t_1}L(a^k(t))\,dt$$

restricted to the curves a in E such that $a^{k-1}(t_0)=A_0$ and $a^{k-1}(t_1)=A_1$. The set

$$\mathscr{P}(J,E)_{A_0}^{A_1}=\left\{a\in\mathscr{P}(J,E)\;\middle|\;a \text{ es } C^k \text{ y } a^{k-1}(t_0)=A_0,\; a^{k-1}(t_1)=A_1\right\}$$

is a Banach submanifold of $\mathscr{P}(J,E)_{m_0}^{m_1}$.

An admissible curve $a\in\mathscr{P}(J,E)_{A_0}^{A_1}$ is a critical point of the functional $S\colon\,\mathscr{P}(J,E)_{A_0}^{A_1}\to\mathbb{R}$ given by $S(a)=\int_{t_0}^{t_1}L(a^k(t))\,dt$, if and only if its components $(x^i(t),y^\alpha(t))$ satisfy the following system of differential equations

$$\begin{cases}\dot{x}^i=\rho^i_\alpha y_1^\alpha\\ \dot{\pi}_\alpha+\pi_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta}y_1^\beta=\rho^i_\alpha\dfrac{\partial L}{\partial x^i},\end{cases}$$

Aplications.

RIGID BODY. Given the functional

$$S(\omega)=\int_{t_0}^{t_1}L(\omega(t))\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}(\omega(t)\cdot(I\omega(t)))\,\mathrm{d}t,$$

we compute the first variation

$$dS(\omega)(\Xi_\omega\sigma)=\int_{t_0}^{t_1}\{-(I\dot{\omega}+\omega\times I\omega)\cdot\sigma)\}\,\mathrm{d}t.$$

and we obtain the rigid body equations $I\dot{\omega}+\omega\times I\omega=0$, by applying the fundamental lema of variational calculus. We also compute the second variation

$$d^2S(\omega)(\Xi_\omega\sigma,\Xi_\omega\sigma)=\int_{t_0}^{t_1}\{(-I(\ddot{\sigma}+(-I^{-1}(\omega\times(I\omega))\times\sigma+\omega\times\dot{\sigma}+I^{-1}(\dot{\sigma}\times(I\omega))+I^{-1}(\omega\times\sigma)\times(I\omega)+$$
$$+I^{-1}(\omega\times(I\dot{\sigma}))+I^{-1}(\omega\times(I(\omega\times\sigma))))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t.$$

The term

$$J(\sigma)=\ddot{\sigma}+(-I^{-1}(\omega\times(I\omega))\times\sigma+\omega\times\dot{\sigma}+I^{-1}(\dot{\sigma}\times(I\omega))+I^{-1}(\omega\times\sigma)\times(I\omega)+$$
$$+I^{-1}(\omega\times(I\dot{\sigma}))+I^{-1}(\omega\times(I(\omega\times\sigma)))$$

is important, since the sections σ for which $J(\sigma)=0$, matches with the Jacobi fields X in the $SO(3)$ group for the left invariant metric previously defined by $g(\omega,\omega)=\omega\cdot(I\omega)$.

CUBIC SPLINES IN SO(3).

Given the functional

$$S(\omega)=\int_{t_0}^{t_1}<\nabla_t\omega,\nabla_t\omega>\,\mathrm{d}t.$$

we compute the first variation

$$\delta S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma)=2\int_{t_0}^{t_1}\{(\dddot{\omega}-(\ddot{\omega}\times\omega))\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t,$$

and we obtain the ecuations $\dddot{\omega}-(\ddot{\omega}\times\omega)=0$ by using the fundamental lema of variational calculus.

We also compute the second variation

$$d^2S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma,\Xi_{\dot{\omega}}\sigma)=2\int_{t_0}^{t_1}\{(\ddddot{\sigma}+\ddot{\omega}\times\sigma+\omega\times\sigma+\omega\times\ddot{\sigma}-2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma})\times\omega)\cdot\sigma\}\,\mathrm{d}t.$$

If order to find sufficient condition for a minimum of the functional S, we calculate the second differential $d^2S(\dot{\omega})(\Xi_{\dot{\omega}}\sigma,\Xi_{\dot{\omega}}\sigma)$. In such expression, we recognize that the vanishing of

$$\ddddot{\sigma}+\ddot{\omega}\times\sigma+\omega\times\sigma+\omega\times\ddot{\sigma}-2(\dot{\omega}\times\dot{\sigma})\times\omega=0.$$

for a section σ will be fundamental. A section σ which satisfies the previous equation is called **Jacobi section.**

Bibliografía

[CSC] Camarinha, M.; Silva Leite, F.; Crouch, P. *On the geometry of riemannian cubic polynomials.*, Differential Geometry and its Applications 15, Elsevier Science B.V, North-Holland, 2001.

[CGM] Cariñena, M.; Gheorghiu, I.; Martínez, E. *Jacobi Fields for second-order differential equations on lie algebroids.*, 2010.

[GBHR] Gay-Balmaz F.; Holm D. D.; Ratiu T.S. *Higher order Lagrange-Poincaré and Hamilton-Poincaré reductions*, J. Braz. Math. Soc. **42(4)**, (2011), 579–606

[GBHMRV] Gay-Balmaz F; Holm D. D.; Meier D. M.; Ratiu T. S.; Vialard F. X. *Invariant Higher-Order Variational Problems*, Comm. Math. Phys. **309** (2012), 413–458

[GF] Gelfand, I.M.; Fomin, S.V. *Calculus of variations.*, Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[M1] Martinez, E. *Lie algebroids and Mechanics.*, Procs. of the XVII International Fall Workshop on Geometry and Physics, Castro-Urdiales, Cantabria (Spain), 2008. AIP Conference Proceedings 1130, 3–33.

[M2] Martinez, E. *High-order variational calculus on Lie algebroids.*, Journal of Geometric Mechanics **7** 1 (2015) pp. 81–108.

[NHP] Noakes, L.; Heinzinger, G.; Paden, B. *Cubic splines on curved spaces.*, IMA Journal of Mathematical Control and Information 6, Oxford University Press 1989.

[OC] O'Connor, R. *Cubic interpolation on Riemannian manifolds.*, Math 204, University of California, fall 2003.

[P] Poincaré H. *Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique*, C.R. Acad. Sci. Paris **132** (1901), 369-371.

[SWK] Suzuki, K.; Watanabe, Y.; Kambe,T. *Geometrical analysis of free rotation of a rigid body.*, J.Phys. A:Math. Gen. 31, UK 1998.

[W] Weinstein A., *Lagrangian Mechanics and groupoids*, Fields Inst. Comm. **7** (1996), 207-231