



Universidad
Zaragoza

1542

Trabajo de Fin de Máster

Estructura y dinámica de redes multiplex

Alberto Aleta Casas

Directores

Yamir Moreno Vega
Sandro Meloni

Departamento de Física Teórica
Universidad de Zaragoza
Zaragoza, Junio 2015

Índice

1	Introducción	1
2	Introducción a las redes multiplex	2
2.1	Definición	2
2.2	Medidas estructurales de las redes multiplex	3
2.3	Estructuras métricas en redes multiplex	4
3	Estructura de las redes de transporte urbano como redes multiplex	7
3.1	Modelo de red	7
3.2	Análisis comparativo de las redes	8
4	Dinámica de una red multiplex: el transporte público de Zaragoza	15
4.1	Modelo	16
4.1.1	La red	16
4.1.2	El movimiento de la red	17
4.1.3	Navegación	17
4.2	Resultados	18
4.3	Resiliencia de la red	21
4.4	Optimización estructural	23
5	Conclusiones	25

1 Introducción

Un sistema complejo es aquel cuyo comportamiento no puede explicarse por las propiedades individuales de los elementos que lo constituyen sino que surge como resultado de la interacción entre ellos. A este tipo de comportamientos se les denomina comportamientos emergentes. Es en este contexto en el que surge la teoría de redes[1].

En términos generales podemos decir que una red es un sistema que admite una representación abstracta mediante un grafo cuyos nodos identifican los elementos del sistema y donde los enlaces entre nodos representan la presencia de una relación entre dichos elementos [2]. Así pues, las redes representan un instrumento ideal para modelizar los sistemas complejos pues nos permiten representar de forma sencilla las interacciones entre los elementos del sistema.

Dada la gran cantidad de sistemas que admiten una representación en forma de grafo, la teoría de redes se ha convertido en una ciencia multidisciplinar. Si bien clásicamente las redes habían sido muy utilizadas en campos como las matemáticas, la sociología o las comunicaciones, ahora podemos encontrar también múltiples aplicaciones en campos tan diversos como la física, la biología o la economía. Esta gran variedad de perfiles hace que sea imprescindible crear un formalismo común en el que todos hablemos un mismo lenguaje. Este problema, que parecía resuelto, ha vuelto a cobrar una gran importancia en los últimos años debido al reciente interés suscitado por las redes multicapa.

Podemos definir una red multicapa como un conjunto de redes (capas) que poseen relaciones entre sí. El ejemplo clásico son las redes sociales donde podemos distinguir la red de compañeros del trabajo, de familiares, de amigos... Aunque estas redes poseen una clara relación entre sí, si las considerásemos como una única red perderíamos información muy importante pues está claro que las relaciones que podemos establecer entre compañeros de trabajo y familiares son muy diferentes. Podemos encontrar otros ejemplos en redes genéticas, en redes de interacción de proteínas o en redes de transporte. Así, en las redes genéticas cada capa puede representar un tipo de camino bioquímico, en las de proteínas un tipo de interacción y en las de transporte un medio de transporte[3].

A pesar de que esta concepción de las redes se lleva utilizando desde hace décadas en la sociología y la ingeniería, ha sido en los últimos años cuando ha despertado el interés por el resto de la comunidad científica. Al igual que en una red simple aparecían efectos que no podían explicarse por las propiedades de los elementos individuales, en este nuevo tipo de redes surgen efectos que no pueden explicarse si uno estudia de forma aislada las capas. Para poder manejar esta nueva dimensión en este trabajo distinguiremos tres escalas: la microescala (los nodos), la mesoescala (las capas) y la macroescala (la red completa)¹.

Sin embargo, debido a su reciente aparición, todavía falta definir un lenguaje común para tratar este tipo de sistemas. Además, al estar en pleno desarrollo aparecen nuevas herramientas cada día por lo que todavía no se sabe cuáles son adecuadas para cada sistema, pues al tratarse de una ciencia tan multidisciplinar los objetivos de unos y otros pueden ser muy diferentes.

El objetivo de este trabajo es repasar el estado actual de la teoría de redes multicapa y desarrollar un modelo de red multicapa desde cero. A continuación, trataremos de caracterizarlo con las herramientas que se pueden encontrar en la literatura. Como veremos, esto no siempre es posible y en ocasiones deberemos modificar dichas herramientas e incluso crear algunas nuevas. A todo esto hay que añadir que mientras que para las redes simples existen multitud de algoritmos computacionales ya establecidos para su manejo y análisis [5] dada la reciente creación de las herramientas de la teoría de redes multicapa todavía no existe una alternativa para este nuevo tipo de redes. Así, tendremos que crear desde cero todos los algoritmos necesarios para analizar nuestro modelo.

¹El concepto de analizar un sistema observando múltiples escalas no es específico de la teoría de redes. En efecto, en la última década hemos podido ver el surgimiento del denominado *Multiscale Modeling*, de gran interés en campos que van desde la ciencia de materiales a la biología o la ingeniería. En este tipo de modelos se trata de analizar problemas a escala macroscópica empleando resultados obtenidos de la escala microscópica, lo que se suele denominar como multi-física[4].

2 Introducción a las redes multiplex

El ejemplo arquetípico de una red multicapa son las redes sociales (que no tienen por qué ser exclusivamente *online*). En estas redes tenemos un conjunto de individuos que se relacionan entre sí, por lo que podemos representar fácilmente el sistema usando una red. Sin embargo, si nos fijamos detenidamente en el tipo de interacciones veremos que son muy diferentes las que se producen entre compañeros de trabajo de las que se producen entre amigos o familiares. Toda esta información no está contenida en la representación clásica de las redes y por ello es necesario emplear redes multicapa.

La ventaja (y en ocasiones incoveniente) de las redes multicapa es que podemos reunir mucha más información que en las redes *monocapa*. Así, ya no solo nos importa qué nodos tenemos, sino en qué capas se encuentran. Con los enlaces sucederá algo similar aunque con el añadido de que podemos encontrar enlaces entre las capas y no solo dentro de ellas. Por ello, no bastará simplemente con extender lo que ya sabemos sobre redes a esta nueva forma de describir los sistemas, sino que será necesario crear nuevas herramientas capaces de abarcar toda esta nueva complejidad.

A lo largo de esta sección veremos cómo afrontar la cuestión de describir y analizar este nuevo tipo de redes y algunos de los efectos que introducen en procesos ya conocidos en las redes clásicas.

2.1 Definición

En términos generales un grafo es una tupla $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de N nodos y $E \subseteq V \times V$ es el conjunto de L enlaces que conectan los nodos. Así, decimos que existe un enlace entre los nodos $u, v \in V$ si $(u, v) \in E$.

Una *red multicapa* es un par $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ donde $\mathcal{G} = \{G_\alpha; \alpha \in \{1, \dots, M\}\}$ es una familia de grafos $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ y $\mathcal{C} = \{E_{\alpha\beta} \subseteq V_\alpha \times V_\beta; \alpha, \beta \in \{1, \dots, M\}, \alpha \neq \beta\}$ es el conjunto de interconexiones entre los nodos de distintos grafos. De esta forma, G_α sería la red asociada a la capa α y $E_{\alpha\beta}$ sería el conjunto de enlaces entre los nodos de las capas α y β con $\alpha \neq \beta$. A los elementos de E_α se les suele denominar conexiones *intracapa* mientras que a los elementos de $E_{\alpha\beta}$ se les denomina conexiones *intercapa* [6].

La definición de las *redes multiplex* es un poco más compleja ya que no se ha alcanzado todavía un consenso claro. La más aceptada define las redes multiplex como aquellas en las que los enlaces intercapa solo se pueden establecer entre nodos que representan la misma entidad en diferentes capas (por ejemplo, la misma persona en dos redes sociales distintas) y que, además, cada capa comparte por lo menos un nodo con alguna otra capa (figura 1)[3] .

La representación matemática más común de los grafos a la hora de trabajar con ellos es la *matriz de adyacencia*. Los elementos de dicha matriz, en su caso más sencillo, son 0 si $(u, v) \notin E$ y 1 si $(u, v) \in E$. En el caso de las redes multicapa podemos extender este concepto definiendo una matriz de adyacencia para cada capa,

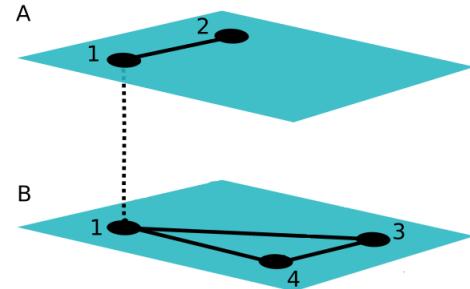


Figura 1: La red \mathcal{M} posee 2 capas: $G_A = (V_A, E_A)$ con $V_A = \{1, 2\}$ y $E_A = \{(1, 2)\}$; $G_B = (V_B, E_B)$ con $V_B = \{1, 3, 4\}$ y $E_B = \{(1, 3), (1, 4), (3, 4)\}$. Los enlaces entre ellas vienen representados por $E_{AB} = \{(1_A, 1_B)\}$

$$A^{[\alpha]} = a_{ij}^{[\alpha]} \in \mathbb{R}^{N_\alpha \times N_\alpha} \quad \text{donde} \quad a_{ij}^{[\alpha]} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i^{[\alpha]}, v_j^{[\alpha]}) \in E_\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

y una matriz de adyacencia intercapa,

$$A^{[\alpha, \beta]} = (a_{ij}^{[\alpha, \beta]}) \in \mathbb{R}^{N_\alpha \times N_\beta} \quad \text{donde} \quad a_{ij}^{[\alpha]} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i^{[\alpha]}, v_j^{[\beta]}) \in E_{\alpha\beta} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

A toda red multicapa \mathcal{M} podemos asociarle una red monocapa $\tilde{\mathcal{M}}$ tal que $\tilde{\mathcal{M}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, donde \tilde{V} es la unión disjunta de todos los nodos de V_1, \dots, V_m ,

$$\tilde{V} = \bigsqcup_{1 \leq \alpha \leq M} V_\alpha$$

mientras que \tilde{E} estará dado por

$$\tilde{E} = \left(\bigcup_{\alpha=1}^M E_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M E_{\alpha\beta} \right)$$

De esta forma la red $\tilde{\mathcal{M}}$ será un grafo cuya matriz de adyacencia, denominada matriz de supra-adyacencia de \mathcal{M} , será²

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^{[1]} & A^{[12]} & \dots & A^{[1M]} \\ A^{[21]} & A^{[2]} & \dots & A^{[2M]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{[M1]} & A^{[M2]} & \dots & A^{[M]} \end{pmatrix}$$

Por analogía a la descomposición de tensores en ocasiones a este proceso de representar en una sola matriz toda la red multicapa se le denomina *flattening*.

2.2 Medidas estructurales de las redes multiplex

El grado o *degree* de un nodo se define como $k_i^{[\alpha]} = \sum_j a_{ij}^{[\alpha]}$. En una red multiplex el grado de un nodo i será el vector

$$\vec{k}_i = (k_i^{[1]}, \dots, k_i^{[M]}) \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

Dado que es difícil comparar cantidades vectoriales podemos definir el *overlapping degree* del nodo i como

$$o_i = \sum_\alpha k_i^{[\alpha]} \quad (2)$$

De forma similar se puede definir el *edge overlap* entre los nodos i y j como

$$o_{ij} = \sum_\alpha a_{ij}^{[\alpha]} \quad (3)$$

que está claramente relacionado con el grado de los nodos puesto que $o_i = \sum_j o_{ij} = \sum_i k_i^{[\alpha]}$.

Debido a la posible heterogeneidad de la red, en estas medidas hemos perdido mucha información sobre su estructura. Por ejemplo, si en una red de interacción de proteínas consideramos cada capa como un tipo de interacción, el papel que jugará en el sistema una proteína que tenga grado 10 en una capa y 0 en las demás será muy diferente del que tenga una con grado 1 en 10 capas. Estas nuevas características

²En el caso de una red multiplex las submatrices $A^{[\alpha\beta]} = I_N$ donde I_N representa la matriz identidad de $N \times N$.

no pueden ser observadas utilizando simplemente el overlapping degree, lo que hace necesario introducir nuevas medidas.

Una posible medida de la distribución del grado del nodo i entre las capas es la *entropía del grado multiplex* [7]:

$$H_i = - \sum_{\alpha=1}^M \frac{k_i^{[\alpha]}}{o_i} \ln \left(\frac{k_i^{[\alpha]}}{o_i} \right) \quad (4)$$

El valor de esta entropía es 0 si todos los enlaces del nodo i están en una misma capa mientras que toma su valor máximo si todos los enlaces están distribuidos de forma uniforme entre las capas.

Pese a que esta medida nos aporta más información que el overlapping degree, sigue otorgándonos una imagen incompleta del sistema. En efecto, un valor bajo de la entropía no nos permite distinguir si el nodo tiene los enlaces muy concentrados en una capa o si los tiene repartidos uniformemente pero en pocas capas. Para poder solucionar este problema se define la *actividad* del nodo [8].

Podemos definir el *vector actividad* del nodo i como

$$\vec{b}_i = \{b_i^{[1]}, \dots, b_i^{[M]}\}$$

donde $b_i^{[\alpha]} = 1 - \delta_{0,k_i^{[\alpha]}}$ de forma que la actividad del nodo será

$$B_i = \sum_{\alpha=1}^M b_i^{[\alpha]} \quad (5)$$

Además de información sobre los nodos esta medida nos permite obtener cierta información sobre las capas, para ello definimos la *layer pairwise activity*

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b_i^{[\alpha]} b_i^{[\beta]} \quad (6)$$

que nos dice cómo de parecidas son las distintas capas entre sí desde el punto de vista de los nodos que tienen activos.

A pesar de que todas estas cantidades nos permiten intuir el papel que juegan los diferentes nodos en la red, hay que tener en cuenta que lo hacen desde un punto de vista local. Supongamos, por ejemplo, que tenemos dos redes independientes de tamaño N y que introducimos un nodo que se une a uno solo de cada una de las redes. Este nuevo nodo será solo de grado 2, pero su importancia en un proceso de difusión será enorme ya que su desaparición desconectaría completamente las dos redes. Así pues, para hacernos una idea completa del funcionamiento de las redes es necesario observar la red desde un punto de vista más global para lo cual se definen *estructuras métricas*.

2.3 Estructuras métricas en redes multiplex

Los herramientas métricas básicas de la teoría de redes son los *walks*, los *paths* y las *longitudes*. En la versión clásica de las redes un walk es la secuencia de enlaces que hay que atravesar para llegar de un nodo a otro. Así, en principio parece fácil extender esta noción a las redes multiplex sin más que considerar el conjunto de enlaces completo, $E(\mathcal{M}) = \{E_1, \dots, E_M\} \cup \mathcal{C}$.

De esta forma un walk de longitud q será la secuencia

$$\omega = \{v_1^{[\alpha_1]}, e_1, v_2^{[\alpha_2]}, e_2, \dots, e_q, v_{q+1}^{[\alpha_{q+1}]}\}$$

donde $e_r = (v_r^{[\alpha_r]}, v_{r+1}^{[\alpha_{r+1}]}) \in E$. De forma similar se define un path entre los nodos $v_1^{[\alpha_1]}$ y $v_q^{[\alpha_q]}$ como un walk en el que cada nodo es visitado solo una vez. Además, decimos que si es posible encontrar un path entre cualquier par de nodos de la red \mathcal{M} la red es *conexa*. En el caso de redes no conexas se define la *componente conexa* o *componente gigante* como la subred de \mathcal{M} conexa más grande que se puede encontrar.

En las redes monocapa la longitud es simplemente el número de enlaces de un walk. Ahora bien, si uno analiza con detalle estas definiciones en el caso de las redes multiplex surgen dos cuestiones importantes:

1. ¿Se puede considerar el cambio de capa como un paso? Si pensamos en una red de transporte está claro que cambiar del metro al autobús debe tener algún coste, mientras que en una red social parece que no tiene mucho sentido asociar un coste a pasar de difundir un mensaje en facebook a hacerlo en twitter.
2. ¿Valen igual los enlaces en todas las capas? Esta nueva dimensión que nos aportan las redes multiplex nos dice que los enlaces tienen ciertas particularidades que antes desconocíamos.

Para resolver la primera cuestión podemos definir la longitud ℓ de un walk ω de q enlaces como

$$\ell(\omega) = q + \beta \sum_{j=1}^q \Delta(j) \quad (7)$$

donde $\Delta(j) = 1$ si $e_j \in \mathcal{C}$ y $\Delta(j) = 0$ en cualquier otro caso. De esta forma si $\beta = 0$ recuperamos el mismo resultado que si trabajásemos con la red $\tilde{\mathcal{M}}$. Sin embargo, si establecemos $\beta = -1$ estaremos eliminando el coste de cambiar de capa y si ponemos $\beta > 0$ estaremos introduciendo un coste extra en el cambio de capa. Esto da cabida a toda una nueva colección de efectos relacionados con la interacción entre las propias capas, en lugar de entre los nodos, lo que nosotros hemos denominado como la *mesoescala*[9].

Respecto a la segunda cuestión es necesario introducir el concepto de *peso*. Si pensamos en una red de carreteras está claro que el enlace que se establece entre las dos ciudades situadas a kilómetros de distancia tiene que ser diferente del que se establece con un pueblo cercano a la ciudad. Así, resulta conveniente asociar al enlace e_i un peso ω_i que en este caso particular podría ser la distancia geográfica real entre ambos nodos, de forma que tenga distintas implicaciones el tomar un enlace u otro.

El caso de las redes multiplex es un poco más complejo por lo que deberemos denotar el peso del enlace entre el nodo i de la capa α_i y el $i+1$ de la capa α_{i+1} como $\omega_{i,i+1}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}}$, de forma que la longitud del walk será

$$\ell(\omega) = \sum_{i=1}^q \omega_{i,i+1}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}} \quad (8)$$

que es equivalente a la definición anterior si establecemos que $\omega_{i,i+1}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 1$ si $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ y $\omega_{i,i+1}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 1 + \beta$ si $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

Empleando el concepto de longitud podemos definir la *geodésica* entre dos nodos i y j como el path más corto entre los nodos i y j (pudiendo haber varios). De esta forma la *distancia* entre dos nodos i y j , d_{ij} , será la longitud de cualquiera de sus geodésicas.

Con estas herramientas podemos crear medidas que nos permitan obtener un conocimiento más global de la red que las empleadas hasta ahora. Análogamente al caso de las redes monocapa definimos la *longitud característica* de la red multiplex como

$$L(\mathcal{M}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij} \quad (9)$$

donde N es el número total de nodos. Esta cantidad se suele relacionar con el rendimiento de la red pues un valor elevado comparado con las dimensiones de la red será un claro indicativo de que la comunicación entre nodos es difícil.

Pensemos por un momento en una red monocapa no pesada. Podemos tomar $1/L$ como una medida de la eficiencia de la red de forma que si todos los nodos estuviesen conectados entre sí valdría 1 mientras que si hay que pasar por muchos nodos para llegar al destino estará próxima a 0. Sin embargo, esta medida tiene un problema y es que si la distancia entre dos nodos es muy grande la eficiencia calculada de esta forma será próxima a 0 aunque la comunicación entre el resto de nodos sea muy fluída. Esta cantidad nos está dando claramente una información errónea ya que como sabemos, por ejemplo, el hecho de que haya dos ordenadores lentos en internet no hace que toda la red lo sea[10].

La clave en esta cuestión es que $1/L$ mide la eficiencia de un *sistema secuencial* mientras que la mayoría de los sistemas trabajan en *paralelo* (internet, autobuses, carreteras...). Para solucionar esta limitación se define la *eficiencia* de la red \mathcal{M} como

$$E(\mathcal{M}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \frac{1}{d_{ij}} \quad (10)$$

Si estamos trabajando en una red pesada es necesario normalizar esta cantidad, para ello se divide entre la *eficiencia ideal* entendida como la de la red en la que todos los posibles enlaces están presentes. Por ejemplo, en el caso de una red de transporte aéreo la red ideal sería aquella que permitiese ir desde Zaragoza a cualquier otro aeropuerto del mundo en vuelo directo. Mientras que en una red no pesada esto daría 1, en una red pesada lógicamente habrá unos valores mínimos de la distancia que vendrán impuestos por las características del sistema.

Ahora bien, hasta este punto lo único que hemos hecho es extender medidas ya establecidas en las redes monocapa al caso de las redes multiplex. Sin embargo, para poder aprovechar toda la información extra que nos proporciona esta nueva descripción de las redes es necesario definir nuevos conceptos que no tienen análogo clásico.

En las redes monocapa definimos la *reachability* como la habilidad de llegar de un nodo a otro en una red. En otras palabras, decimos que un nodo i puede alcanzar un nodo j si existe un path entre ellos. Esta sencilla descripción se vuelve mucho más compleja en las redes multiplex puesto que podemos preguntarnos si este camino se produce entre enlaces de una misma capa o si es necesario pasar por otras capas. Para cuantificar lo que podríamos denominar como la *multiplex reachability* se define la *interdependencia*[11] de un nodo i como

$$\lambda_i = \sum_{j \neq i} \frac{\psi_{ij}}{\sigma_{ij}} \quad (11)$$

donde ψ_{ij} es el número de caminos cortos (geodésicas) entre el nodo i y el j que usan enlaces que se encuentran en más de una capa y σ_{ij} es el número total de caminos cortos entre dichos nodos. Podemos calcular la interdependencia media de la red como $\lambda = 1/N \sum_i \lambda_i$, de forma que un valor pequeño significará que la mayoría de los caminos cortos entre nodos se encuentran en capas individuales mientras que un valor próximo a 1 será un indicativo de que en la mayoría de ellos hay que atravesar varias capas.

Esta nueva medida nos aporta una información extra sobre las características de nuestro sistema, pues nos habla de la relación entre las propias capas en lugar de los nodos. Por tanto, es una medida clave a la hora de hablar de lo que hemos denominado mesoescala.

En las siguientes secciones aplicaremos estas herramientas, siempre que sea posible, a redes multiplex de transporte. Como veremos, dadas las características particulares de estos sistemas en ocasiones dichas herramientas no estarán bien definidas. Cuando esto suceda, trataremos de desarrollar nuestras propias medidas que nos permitan caracterizar correctamente el comportamiento de nuestras redes.

3 Estructura de las redes de transporte urbano como redes multiplex

Establecidas las bases de la teoría de redes multiplex llega el momento de comprobar si todas estas herramientas son suficientes para comprender el funcionamiento de los sistemas complejos o si todavía hacen falta más y, en tal caso, tratar de crearlas.

Que las herramientas introducidas hasta ahora producen buenos resultados está fuera de toda duda pues podemos comprobar en la literatura que siempre han sido acompañadas de alguna aplicación sobre determinadas redes. Sin embargo, al tratarse de un campo multidisciplinar cada autor utiliza un tipo concreto de redes lo que nos puede generar ciertas inquietudes respecto a la utilidad real de dichas herramientas si se trabaja en otros contextos.

Es por ello que en este trabajo hemos optado por no trabajar sobre ninguna red ya estudiada con el objetivo de evaluar estas medidas en un nuevo contexto³. Esto no solo nos permitirá comprobar la utilidad de las herramientas presentadas en la sección anterior en un nuevo sistema, sino que además podremos ver el proceso de construcción de un modelo de redes desde cero.

Dada la complejidad de modelizar un sistema real partiendo de cero hemos considerado que la mejor opción era optar por los sistemas de transporte urbano. Entre los motivos de esta elección podemos encontrar:

- Son uno de los arquetipos de redes.
- La información es pública, gratuita y se encuentra en internet al contrario de lo que sucede, por ejemplo, con las redes económicas a cuya información solo tienen acceso determinadas instituciones.
- Se pueden analizar sin estar especializado en esos temas. Aunque hay ciertos aspectos para los que sí que hay que introducirse mucho en el tema como pueden ser los modelos de demanda, como físicos siempre nos resultará más sencillo extraer conclusiones de una red de transporte que de una red de interacción de proteínas.
- Es una de las áreas, junto con la sociología, en las que se llevan utilizando muchos años instrumentos similares a las redes multiplex pero usando diferentes lenguajes. Existen estudios [14] en los que se representan las redes como una red multiplex y, sin embargo, no aparece en ningún momento la palabra *capa* a costa de complicar la notación hablando de varios tipos de nodos (1, 2, 1A, 3B...) y de enlaces (bus-links, embarking-links, alighting-links...). Existe, por tanto, una clara necesidad de unificar el lenguaje y herramientas entre las distintas áreas que trabajan con redes.

Por último, destacar que en esta sección nos centraremos en la definición del modelo y su análisis. La información sobre el proceso de obtención y limpieza de los datos puede encontrarse en el anexo A.

3.1 Modelo de red

Si observamos cualquier mapa de la red de transporte de una ciudad pronto nos daremos cuenta de que la red ya está completamente definida, si pensamos en redes monocapa. Sin embargo, para modelar estas redes como redes multiplex nos enfrentamos a varias cuestiones. Por una parte, podríamos considerar que las capas son los diferentes medios de transporte (metro, tranvía...) lo que nos permitiría estudiar el uso de cada uno de ellos y como se relacionan, pero estaríamos perdiendo información (un ejemplo de este tipo de construcción se muestra en la figura 2). En efecto, si consideramos todos los autobuses en una misma capa no podríamos distinguir una persona que debe coger varios para llegar a su destino de una que puede usar una conexión directa.

³Existen algunos trabajos basados en redes de transporte de ciudades británicas pero se centran solo en aspectos de movilidad y no en la estructura misma de las redes [12][13]

Por otra parte, podríamos considerar cada parada de autobús/metro/tranvía como una capa, a las líneas como nodos y establecer enlaces entre aquellas estaciones que estén comunicadas por algún medio de transporte. Trabajando así recuperaríamos la información sobre la transferencia entre líneas, pero a cambio tendríamos muchas capas con pocos nodos lo que resulta inadecuado para trabajar pues habría más elementos en la mesoscala que en la microescala.

Así, hemos optado por considerar cada línea como una capa donde los nodos serán las paradas. Si es posible llegar de una parada a otra usando una determinada línea estableceremos un enlace entre dichas paradas en la correspondiente capa. Definidas las capas, solo falta determinar los enlaces intercapa.

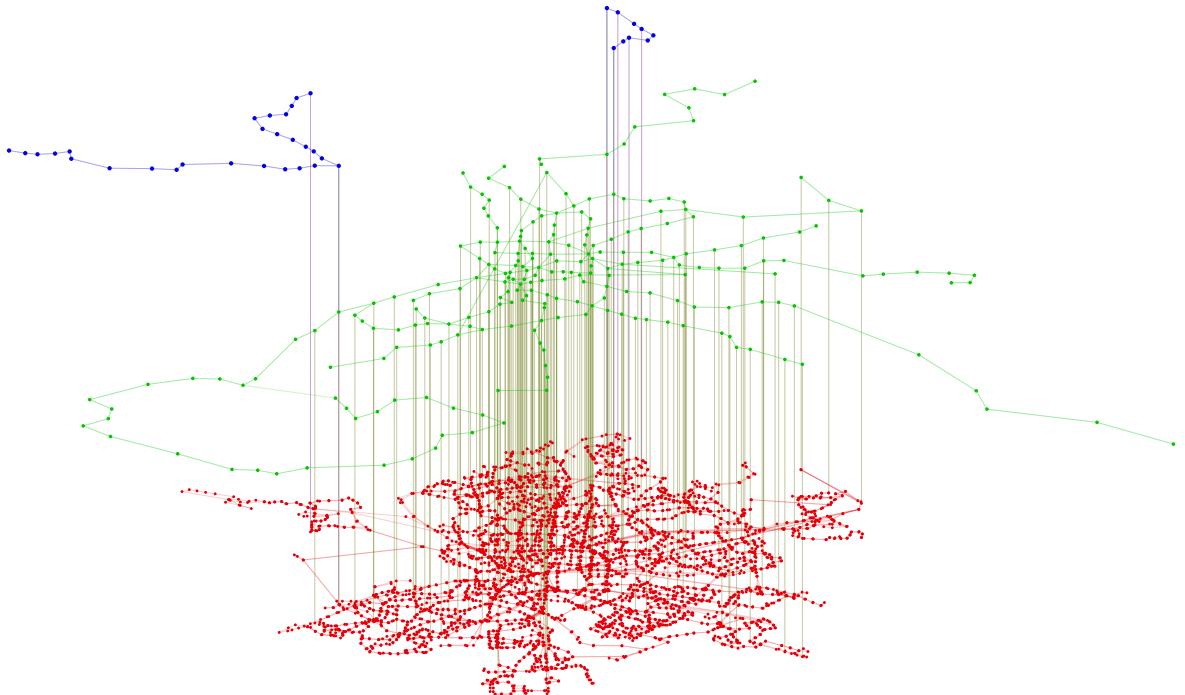


Figura 2: Red de transporte urbano de Madrid considerando cada capa como un medio de transporte: autobús (rojo), metro (verde) y tranvía (azul).

En las redes multiplex los enlaces intercapa se establecen entre la representación del mismo nodo en diferentes capas. Si nos restringimos a un solo medio de transporte esto es sencillo, por una misma parada de autobús pueden pasar varias líneas de forma que dicho nodo estará presente en varias capas, pero lógicamente no pasan varias líneas de metro por una parada de autobús. A pesar de ello, si las paradas de diferentes medios de transporte se encuentran lo suficientemente próximas podemos considerarlas, a efectos prácticos, iguales.

Así pues establecemos que si un nodo de metro o de tranvía está a menos de 100 m de una parada de autobús, metro o tranvía, son el mismo nodo. Con esto terminamos de definir la estructura de nuestras redes (cuyas principales características se presentan en la tabla 1, para una información más detallada consultar el anexo A) y podemos pasar a analizarlas.

3.2 Análisis comparativo de las redes

Empecemos, al igual que en la sección anterior, por el grado. Si analizamos primero el de los nodos de una misma capa observamos que vale 2 para todos ellos. Esto, si uno se para a pensar, es bastante

Ciudad	Capas				Nodos	Enlaces Intracapa
	Bus	Metro	Tram	Tot.		
Madrid	177	16	3	196	4703	9176
Barcelona	97	11	6	114	2512	5337
Valencia	46	6	3	55	1228	2617
Zaragoza	35	0	1	36	915	1550
Málaga	41	2	0	43	1034	1876
Bilbao	35	2	1	38	555	1212
Vitoria	14	0	2	16	302	452

Tabla 1: Principales características de las redes construïdas, ordenadas de mayor a menor población.

lógico pues en este tipo de redes se cumple la propiedad de que cada vehículo que llega a una parada sale de la misma. Es decir, por cada enlace de entrada tendremos uno de salida. La excepción podría darse en los principios y finales de línea, pero esto no se ha observado en ninguna de las redes analizadas pues se tratan todas de circuitos cerrados.

En otras palabras, para todo nodo i tendremos que $k_i^{[\alpha]} = 2$ si $i \in V_\alpha$. Esta característica propia de estas redes hace que el overlapping degree (2) sea equivalente a la actividad del nodo (5). Así, tendremos que $o_i = 2B_i \forall i \in \mathcal{M}$. Este es uno de los problemas que comentábamos antes, herramientas que pueden funcionar muy bien en un tipo de red no tienen por qué resultar de utilidad en otras.

Dada la relación entre el grado y la actividad que acabamos de mencionar es de esperar que las ciudades que más capas tienen posean nodos de mayor grado (pues un mismo nodo puede estar en más capas). Sin embargo, como podemos comprobar en la figura 3, esto no es así.

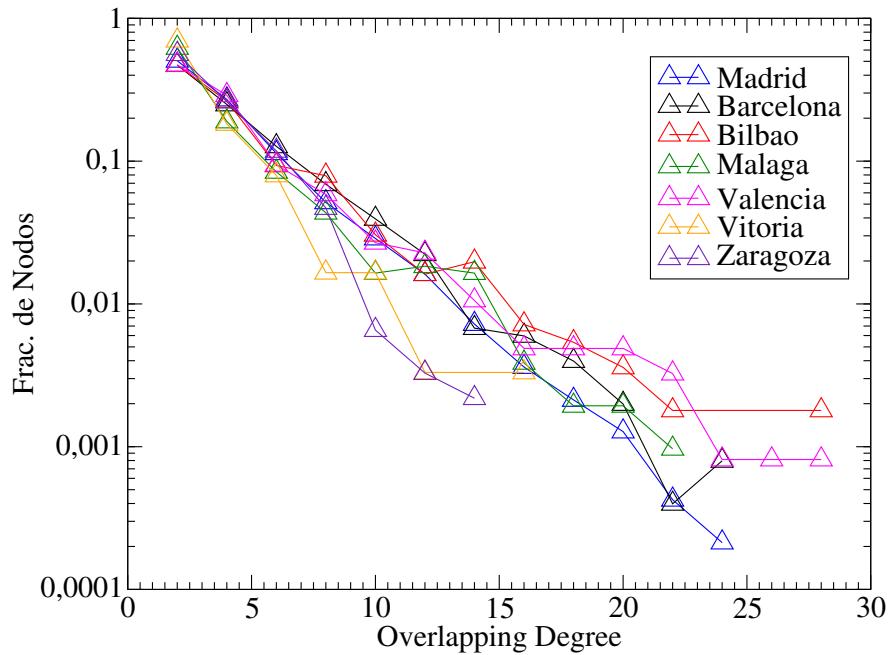


Figura 3: Distribución del overlapping degree en las diferentes redes. A la hora de comparar las distribuciones entre sí hay que tener en cuenta que cada red tiene una cantidad distinta de nodos por lo que un valor de un 1% no significa lo mismo en Madrid (470 nodos) que en Vitoria (3 nodos).

Lo primero que llama la atención es que, a pesar de las grandes diferencias de tamaño existentes entre las redes que estamos analizando, la distribución del overlapping degree es muy similar en todas ellas: una

gran cantidad de paradas por las que solo pasan 1 o dos líneas y unas pocas con una gran cantidad de conexiones. Esto nos indica que este tipo de redes crecen incorporando nuevos nodos y no aumentando la densidad de conexiones entre los ya existentes.

De manera similar al overlapping degree habíamos definido el edge overlap (3). El edge overlap en definitiva nos está diciendo si por un determinado camino están pasando muchos vehículos, lo que nos será muy útil para detectar posibles zonas de congestión en la red. En la figura 4 se presenta la distribución del edge overlap.

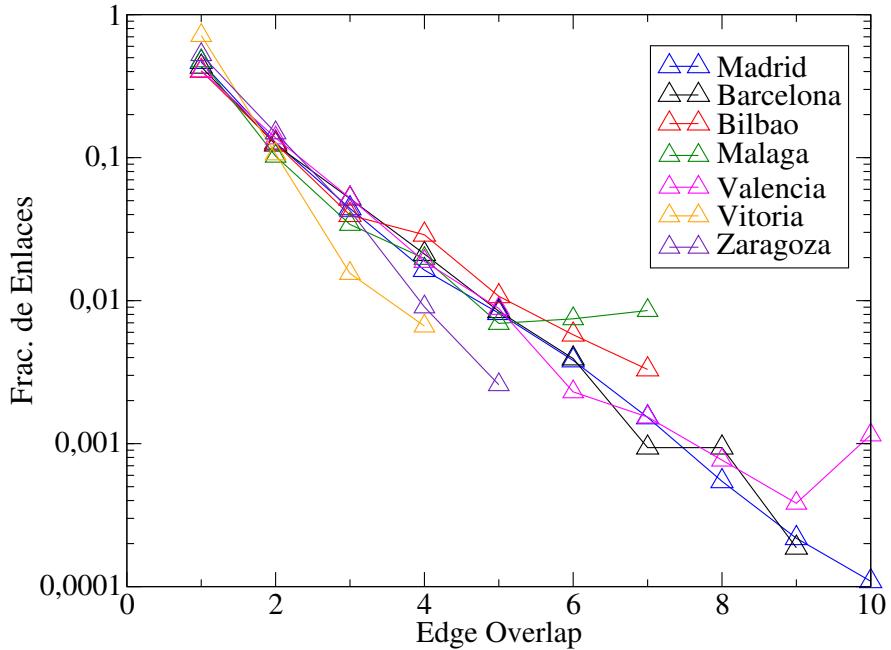


Figura 4: Distribución del edge overlap en las diferentes redes. Al igual que con el overlapping degree las diferencias en la cantidad de enlaces de las redes hacen que un mismo porcentaje no signifique un mismo número de enlaces.

De nuevo nos volvemos a encontrar un comportamiento muy similar en todas las redes. Ahora bien, aunque está claro que el que dos paradas se encuentren unidas por hasta 10 líneas diferentes como en Madrid y Valencia supone una redundancia tal vez innecesaria, a la vista de la figura no podemos decir que vayamos a tener problemas de congestión. En efecto, no es lo mismo el que el mismo enlace lo tengan 10 redes de metro a que lo tengan 10 redes de autobús.

En el caso del overlapping degree nos sucedía algo similar. Si bien sabemos que un nodo está presente en muchas líneas desconocemos si todas son de autobús o si están repartidas equitativamente entre los tres medios de transporte. Esto se debe a que estas medidas solo nos dan información sobre el sistema a nivel *microscópico*, es decir, sobre sus elementos individuales. Sin embargo, en las redes multiplex hemos identificado una nueva dimensión, las capas. Así, a nivel microscópico tendremos los nodos, a nivel mesoscópico las capas y a nivel global la red completa. Es más, en este sistema particular podemos identificar hasta dos escalas intermedias. Podemos agrupar las líneas (capas) que pertenezcan a un mismo medio de transporte en una sola capa obteniendo una estructura que es superior a las capas pero sin llegar a ser global que podríamos denominar *supercapa* o *capa de capas*.

Denotemos por C_b , C_t y C_m a los subconjuntos de capas formados por las líneas de autobús, tranvía y metro respectivamente. Si denotamos por $o_i^x = \sum_{\alpha \in C_x} k_i^{[\alpha]}$ con $x = \{b, t, c\}$ al overlapping degree en esta

nueva escala podremos redefinir la actividad como

$$B_i = \sum_x (1 - \delta_{0, o_i^x})$$

Lo que nos permite saber en cuántos medios de transporte diferentes se encuentra el nodo y cómo de importante es en cada uno de ellos. En la figura 5 se representa esta nueva actividad en función del overlapping degree, donde el color indica la fracción de nodos que están en y supercapas teniendo overlapping degree x .

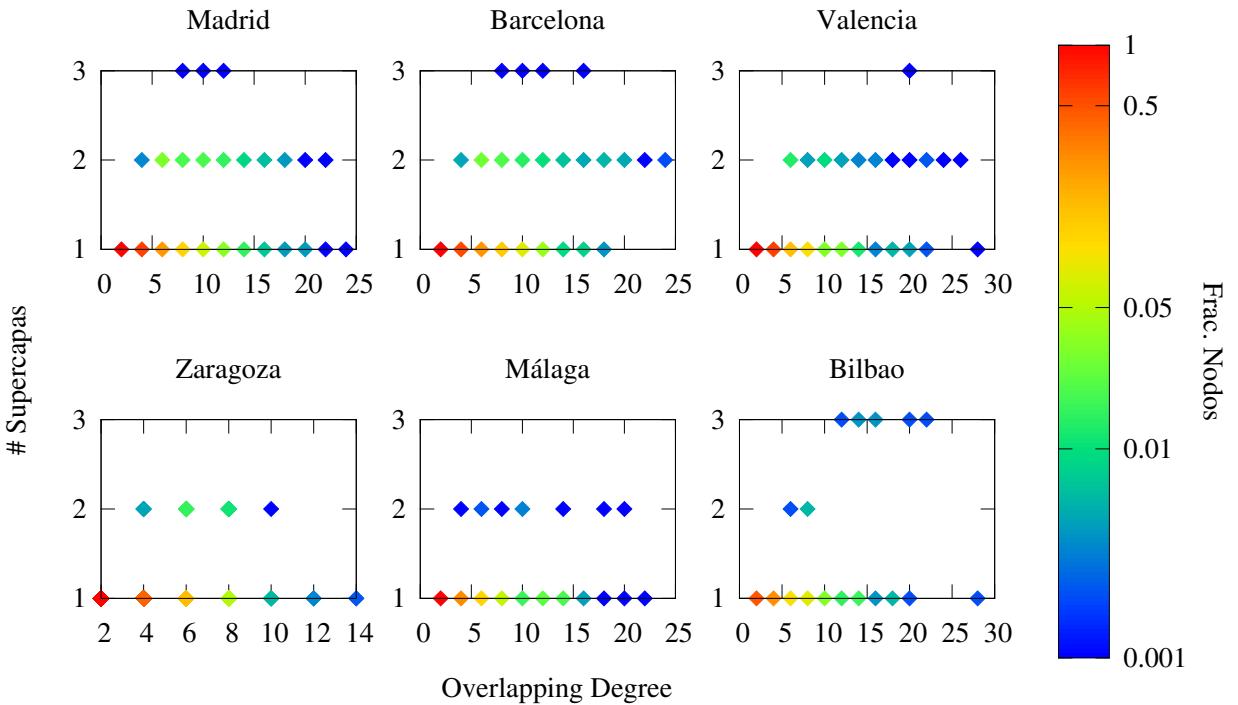


Figura 5: Número de supercapas en las que se encuentra cada nodo en función de su overlapping degree. El color representa la fracción de nodos de la red que se encuentran en cada punto.

Excepto en el caso de Bilbao vemos que los nodos tienden a estar en una o dos supercapas siendo muy pocos los que se pueden encontrar en las tres. Uno podría pensar, además, que deberían pasar más líneas (tener un mayor overlapping degree) por aquellos nodos presentes en las tres supercapas, pero vemos que no es así. Aunque sí que hay nodos con un overlapping degree alto que se encuentran en dos supercapas, aquellos que están en tres tienen un número de líneas, en general, inferior. Este hecho que a primera vista podría no parecer importante está relacionado con uno de los grandes retos en la teoría de redes multiplex: ¿qué nodos son los más importantes?

En una red monocapa existen diversas medidas que permiten determinar la importancia de un nodo como el PageRank, la betweenness centrality... e incluso el propio grado [1]. Ahora bien, en una red multiplex la tarea es mucho más compleja pues cabe preguntarse qué es más importante, un nodo que pueda afectar a muchos nodos en su misma capa o a muchos nodos en distintas capas. Uno podría pensar que es más importante el que está en muchas capas pero, por ejemplo, está claro que por muchas redes sociales en la que esté un individuo si tiene muy pocos contactos será difícil que pueda difundir adecuadamente una información. Por otra parte, de poco servirá que tenga muchos seguidores en una capa si los individuos de dicha capa apenas tienen contacto con el resto de capas. La solución sería entonces considerar importantes a los nodos que se encuentren en muchas capas y al mismo tiempo tengan muchos enlaces, pero como acabamos de ver en nuestro caso no existe este tipo de nodos (y, de hecho, tampoco lo hace en general).

Recientemente se han propuesto nuevas formas de encontrar los nodos importantes en redes multiplex

[15] pero al aplicarlas a nuestras redes recuperamos el mismo resultado que considerando simplemente el overlapping degree de los nodos. Volvemos a encontrarnos con el problema de que herramientas que sirven en unas redes no tienen por qué hacerlo en otras. Como veremos más adelante, en nuestro caso el problema se encuentra en que estamos tratando de extraer información de la microescala cuando deberíamos estar haciendolo de la mesoescala.

En el apartado de medidas estructurales habíamos presentado también la entropía del grado múltiple (4) y la layer pairwise activity (6). Si nos fijamos detenidamente en la expresión de la entropía veremos que solo está definida si el grado de todos los nodos es distinto de cero en todas las capas, en caso contrario diverge. De nuevo, una herramienta que no es adecuada para nuestro caso.

La layer pairwise activity sí que podemos utilizarla, pero al darnos información sobre pares de capas su utilidad es más para un análisis de una sola red que para comparar entre varias. En el caso de Zaragoza, por ejemplo, encontramos que el parecido de las capas entre sí está por debajo del 5% en la mayoría de los casos, unas pocas que están entre el 10% y el 20% y dos capas que se parecen en un 40%.

Las herramientas empleadas hasta ahora, como ya hemos comentado, nos han proporcionado información sobre los elementos que constituyen el sistema, es decir, sobre la escala microscópica y mesoscópica. El siguiente paso será introducir una métrica para poder estudiar los sistemas desde un punto de vista más global.

En la sección 2.3 habíamos adelantado que para trabajar con métricas en las redes que tienen estructura espacial resulta conveniente asociar a cada enlace un peso dado por la distancia geográfica real entre los nodos. Puesto que disponemos de la latitud y la longitud de la posición de todos los nodos de nuestras redes asociaremos a cada enlace intracapa la distancia obtenida mediante la fórmula del haversine [16] (para más detalles consultar el Anexo A) y emplearemos la ecuación (8) para medir los walks. Respecto a los enlaces intercapa, dado que unen nodos situados en la misma posición espacial consideraremos que su peso es cero.

Establecidas estas condiciones ya estamos en posición de determinar la eficiencia de las redes (10). Recordemos que dicho valor se normaliza a la eficiencia de la red ideal - aquella con todos los enlaces posibles.

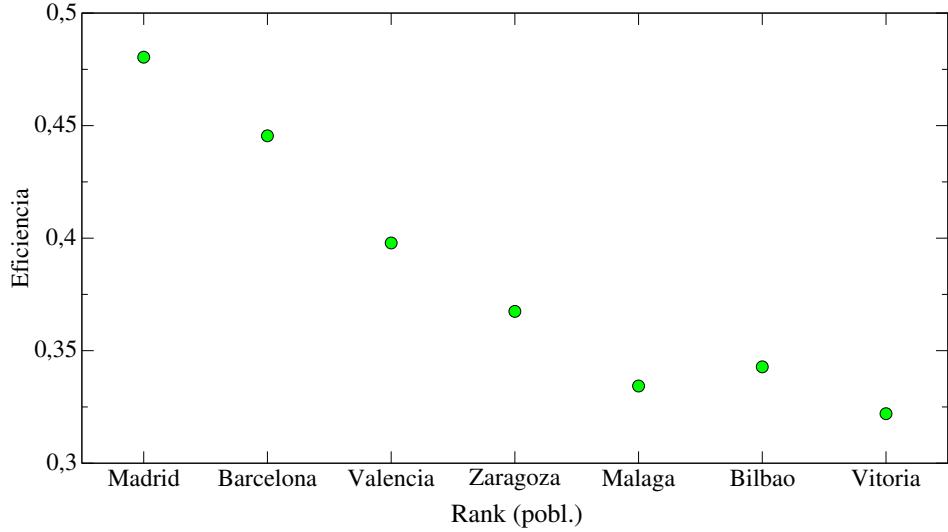


Figura 6: Eficacia de cada una de las redes (10) normalizada utilizando sus correspondientes redes ideales.

A la vista de los resultados (figura 6) queda claro que algunas redes son más eficientes que otras. A lo largo del análisis hemos visto que todas comparten características muy similares pero hay una cosa en la que difieren, en el tamaño de sus supercapas (tabla 1). En efecto, podemos ver que cuanto mayor es el número de líneas de metro y tranvía presentes en una ciudad mayor es el rendimiento. A pesar de que

Málaga parece salirse de esta tendencia (pues tiene 2 líneas de metro), si tomamos el número de nodos que posee su supercapa de metro (17) y lo comparamos con el de la supercapa de tranvía de Zaragoza (50) comprobamos que a pesar de tener dos líneas su tamaño real es menor que la supercapa de Zaragoza. Algo similar sucede con Vitoria que tiene solo 20 nodos de tranvía y Bilbao, que a pesar de tener 2 líneas de metro y una de tranvía solo tiene 14 y 41 nodos respectivamente.

Los motivos parecen claros. Mientras que los autobuses tienen que seguir el trazado de las calles y realizan muchos rodeos para llegar a un sitio, tanto el metro como el tranvía siguen caminos mucho más rectos. Esto hace que las distancias entre paradas muy alejadas sean mucho más parecidas a las ideales, lo que mejora enormemente el rendimiento.

Por otra parte, merece la pena resaltar que estamos hablando del rendimiento topológico. A la hora de la verdad el rendimiento de estas redes estará condicionado por la frecuencia de vehículos que recorran cada línea, su velocidad, etc. Aun así, parece razonable pensar que un buen rendimiento topológico hará más sencilla la tarea de optimizar posteriormente el transporte por la red.

Para finalizar el análisis ya solo nos queda hablar de la interdependencia (11). Recordemos que la interdependencia de un nodo i se definía como la suma a todos los nodos del número total de caminos cortos que unen el nodo i con el j y pasan por dos o más capas, ψ_{ij} , entre el número total de caminos cortos entre el i y el j , σ_{ij} .

Ahora bien, en nuestro caso esta medida presenta dos problemas. El primero es que nos da información a nivel microscópico, pues nos da un valor para cada nodo. Esto podría solucionarse en cierta manera calculando el promedio aunque podríamos perder información ya que nada nos asegura que la distribución vaya a ser normal. Y lo que es más importante, ya sabemos que los nodos tienen una interdependencia muy alta.

En efecto, dado que en cada capa suele haber entre 20 y 50 nodos está claro que para llegar al resto va a haber que pasar por otras capas, lo que nos dará interdependencias muy cercanas a 1. Una posible alternativa sería pasar a la mesoscala y definir la *interdependencia de la capa α* tal que

$$\lambda_\alpha = \frac{\sum_i \sum_{i \neq j} \psi_{ij}(\alpha)}{\sum_i \sum_{i \neq j} \sigma_{ij}}$$

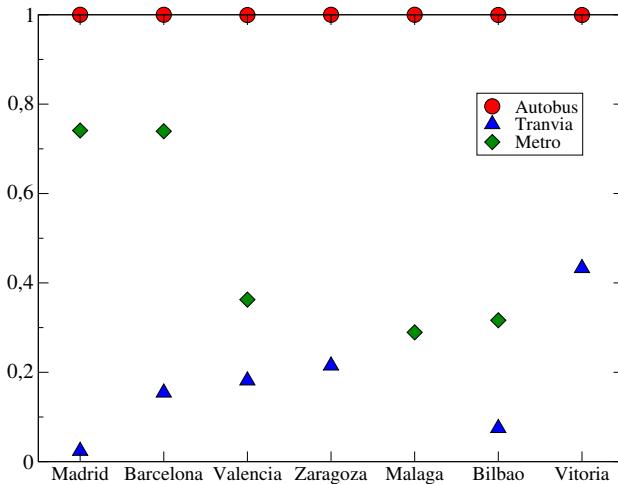
donde $\psi_{ij}(\alpha)$ sería el número de caminos cortos entre el nodo i y el j que pasan al menos una vez por la capa α . Esta nueva medida sería mucho más adecuada que la interdependencia original de cara a un estudio exhaustivo de una red pues nos permitiría detectar qué capas son las más utilizadas. Sin embargo, para nuestro análisis esta cantidad seguiría otorgando un número demasiado elevado de variables (hasta 196 en Madrid) y además no nos aporta demasiada información sobre el funcionamiento completo del sistema. Si queremos comprender mejor el funcionamiento del sistema global sin llegar a la escala macroscópica podemos recurrir a la otra estructura que habíamos encontrado en la escala mesoscópica, las supercapas.

De forma similar al caso anterior podemos definir la *interdependencia del sistema con la supercapa x* , o simplemente la *interdependencia de la supercapa x* como

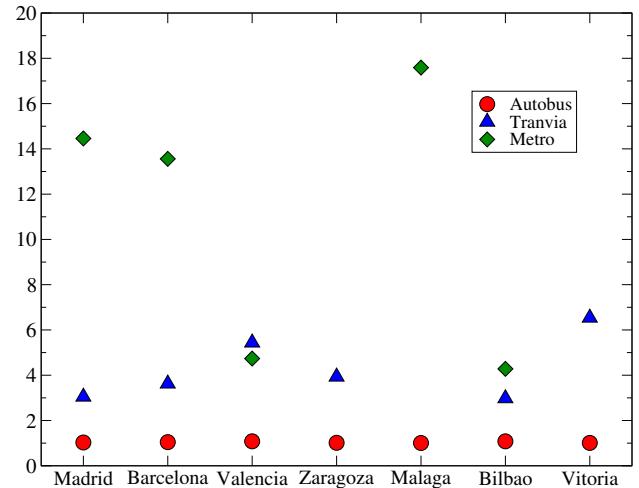
$$\lambda_x = \frac{\sum_i \sum_{i \neq j} \psi_{ij}(x)}{\sum_i \sum_{i \neq j} \psi_{ij}}$$

con $x = \{b, t, m\}$. Al igual que en el caso anterior $\psi_{ij}(x)$ es el número de caminos cortos que pasan por dos o más capas perteneciendo una de ellas a la supercapa x . Es importante resaltar que $\sum_x \lambda_x \neq 1$ pues un mismo camino puede pasar por varias supercapas (y de hecho es lo que queremos medir).

Este nuevo parámetro nos permitirá determinar si la estructura de la red favorece los caminos “monomodales” o “multimodales”. Es decir, si las rutas óptimas pasan por varios tipos de medios de transporte o si incluso habiendo cambios de línea se tiende a permanecer en el mismo medio de transporte. Sin embargo todavía



(a) Sin modificar



(b) Dividida por la fracción de nodos de la supercapa

Figura 7: Interdependencia de las supercapas.

nos falta algo. Si aplicamos directamente esta medida sobre, por ejemplo, la red de Zaragoza, obtenemos que el 100% de los caminos que pasan por dos o más capas lo hacen por al menos una perteneciente a la supercapa de autobuses y un 20% al menos por una perteneciente a la supercapa de tranvía (figura 7a). A simple vista podría parecer que el autobús predomina en el sistema, pero recordemos que mientras que hay 902 nodos en la supercapa de autobús en la de tranvía solo hay 50 nodos. Es decir, un 20% de los caminos pasan por una supercapa que apenas representa el 5% del sistema.

Así, para un correcto análisis debemos comparar de alguna manera el resultado con el tamaño de la supercapa correspondiente. Para ello, podemos dividir la interdependencia de la supercapa x por la fracción de nodos presentes en ella, obteniendo el resultado que se muestra en la figura 7b.

Como podemos ver en todos los casos pasan muchos más caminos por las supercapas de metro y tranvía que los que corresponderían a su tamaño. El valor exacto no tiene un significado concreto, en ese sentido lo importante son los valores de la figura 7a. No obstante, nos permite apreciar que, efectivamente, el metro y el tranvía juegan un papel fundamental en las redes.

Este hecho ya lo habíamos postulado al tratar la eficiencia de las redes. Topológicamente, sin entrar en si un tranvía es más rápido que un autobús o si puede llevar más pasajeros, vemos que tanto el metro como el tranvía favorecen enormemente el movimiento en el sistema.

Recordemos, además, que al tratar de encontrar nodos importantes en la red (figura 5) no habíamos obtenido resultados satisfactorios. El motivo está claro, en estos sistemas lo importante no son las estructuras de la microescala, sino de la mesoescala. Así, son las supercapas y las relaciones entre ellas las que dominan el comportamiento del sistema.

4 Dinámica de una red multiplex: el transporte público de Zaragoza

El objetivo de esta sección es doble. Por una lado queremos comprobar las ventajas que aporta el modelizar las redes de transporte urbano como redes multiplex de cara al funcionamiento real del sistema. Por otra parte, esto nos permitirá constatar si las conclusiones obtenidas en la sección anterior son válidas en un escenario real. Para lograrlo necesitaremos desarrollar una aplicación que nos permita estudiar la navegabilidad del sistema teniendo en cuenta la topología de la ciudad, la hora del día, la frecuencia de los vehículos, su velocidad, etc. Dada la complejidad de la tarea nos restringiremos a una única ciudad, Zaragoza. El motivo de esta elección es que por cuestiones técnicas es conveniente que la red tenga menos de 2500 enlaces (para más información consultar la sección 4.1.2). Además, de las redes que cumplen esta condición Zaragoza es la más grande en términos de población y número de nodos (Málaga tiene un tamaño similar pero muy pocos nodos de metro).

En lo que respecta a las ventajas de utilizar redes multiplex en estos sistemas podemos destacar la facilidad para definir el origen y destino y la posibilidad de tener en cuenta los tiempos de espera en los cambios de línea, aspectos difíciles de manejar en una red monocapa. Así, el considerar los nodos iguales nos permitirá definir nodos de destino sin preocuparnos la capa por la que lleguemos a dicho nodo. De forma similar, podremos tener en cuenta de una forma muy sencilla el tiempo de espera en el intercambio de una línea a otra sin más que asociar dicho tiempo como peso a los enlaces intercapa correspondientes.

Supongamos por un momento que en lugar de una red multiplex quisiéramos usar una red monocapa. Si construyésemos el conjunto de nodos de la red monocapa como la unión de los conjuntos de nodos de cada capa perderíamos la posibilidad de tener en cuenta los tiempos de espera (de un nodo saldrían enlaces correspondientes a varias líneas, pero desde el punto de vista de la red serían todos iguales). Similarmente, si usásemos la unión disjunta perderíamos la opción de definir un nodo de destino sin importarnos la capa en la que se encontrase. En efecto, si una parada tuviese, por ejemplo, dos líneas diferentes al hacer la unión disjunta el nodo correspondiente se transformaría en dos nodos y habría que definir de alguna forma que queremos llegar a cualquiera de los dos, cosa que se vuelve más compleja en los nodos con un overlapping degree alto.

Llegados a este punto uno puede preguntarse cómo están construidos entonces los sistemas profesionales de navegación. La respuesta es que, como hemos mencionado anteriormente, el transporte es uno de los campos en el que llevan usándose estructuras semejantes a las redes multicapa desde hace mucho tiempo a costa de complicar la notación, o bien introduciendo la información extra en los algoritmos en lugar de en la propia red. Aunque efectivo para casos prácticos, esta falta de un modelo común dificulta tanto el desarrollo de modelos teóricos como de modelos prácticos.

Así, podemos llegar a encontrar estudios muy recientes sobre la eficiencia y resiliencia de redes de autobús que no tienen en cuenta el tiempo de espera debido a las limitaciones de las redes monocapa [17]. Mientras que podemos encontrar otros que usan un formalismo muy similar al presentado en este trabajo para poder estudiar la resiliencia de una red con líneas de autobús y de metro[18]. Esta falta de homogeneidad en los modelos dificulta la comparación entre unos estudios y otros e impide exportar los avances a otras áreas.

En la teoría de redes podemos definir la resiliencia como la habilidad de mantener la funcionalidad de una red bajo posibles fallos. En nuestro contexto, la resiliencia sería la habilidad de seguir transportando pasajeros de un punto de la ciudad a otro eficientemente ante posibles problemas en la red (accidentes, obras, desvíos...). Para enfrentarse a posibles disruptiones del servicio se pueden utilizar dos alternativas:

1. Respuesta postdisrupción: desarrollar planes de contingencia ante posibles fallos de la red. Por ejemplo, fletando autobuses en caso de una avería grave en el metro.
2. Respuesta predisrupción: diseñar la red de manera que sea la propia estructura la que sea capaz de minimizar los daños.

En el caso del transporte urbano parece que lo mejor es la segunda opción pues al tratarse de trayectos cortos el tiempo de reacción necesario para solucionar eficazmente el problema empleando la primera debería ser excesivamente corto. Sin embargo, parece ser que los modelos de diseño de redes de transporte no suelen tener en cuenta esta posible respuesta predistrucción[18]. Más adelante comprobaremos si este es el caso de la ciudad bajo estudio.

Para finalizar, trateremos de identificar los principales problemas de la red y los compararemos con las conclusiones del “Estudio sobre el impacto de la nueva movilidad urbana de Zaragoza” realizado en Noviembre del 2014 por Ainmer Investigación[19]:

1. La movilidad está totalmente condicionada por la aparición del tranvía.
2. Mientras que antes existían líneas directas de autobús ahora hay que realizar múltiples transbordos.
3. El tranvía limita los desplazamientos porque cuando tiene problemas se detiene todo el servicio.
4. Los principales motivos esgrimidos por los usuarios para no utilizar el autobús desde que se implantó el tranvía son que hay menos frecuencia, menos paradas, malas combinaciones y que las paradas están lejos.

Lo que nos permitirá comprobar tanto la validez de nuestro modelo dinámico como su capacidad de hacer predicciones observables en el sistema real.

4.1 Modelo

4.1.1 La red

En nuestra red actual solo es posible llegar de un nodo a otro siguiendo las rutas del transporte urbano, mientras que en un sistema real siempre podemos ir de una parada a otra andando. La elección de usar el transporte público o caminar dependerá, principalmente, del tiempo que conlleve cada una de las opciones. Así pues, si queremos modelizar correctamente la realidad debemos incluir la opción de ir caminando a cualquier parte.

Para la construcción de esta capa, en adelante capa “suelo”, vamos a partir del mapa de densidad de población de Europa[20]. En dicho mapa se divide el territorio en celdas de aproximadamente $100m \times 100m$ (figura 8) y se asocia a cada celda la densidad de población correspondiente. Para transformar esto en una red primero vamos a colocar un nodo en el centro de cada una de esas celdas. A continuación, eliminaremos los nodos de aquellas zonas en las que no haya población lo que nos permitirá eliminar de la red los ríos, zonas industriales...

El siguiente paso será establecer los enlaces. Para ello, vamos a considerar que se puede llegar desde un nodo a cualquiera de los 8 directamente adyacentes y asociaremos como peso de dichos enlaces la distancia real entre los nodos.

Llegados a este punto ya solo nos queda establecer enlaces entre esta capa y las otras 36. Lo que haremos será ver en qué celda se encuentra cada nodo de transporte y lo asociaremos al nodo de la celda. Así, en lugar de establecer las rutas de nodo de transporte a nodo de transporte lo haremos de nodo del suelo a nodo del suelo. Al considerar todos los nodos asociados a un mismo nodo de suelo iguales nos dará igual si llegamos andando, por una determinada línea de autobús o en tranvía. Como comentábamos antes, esta es una de las ventajas de trabajar con redes multiplex.

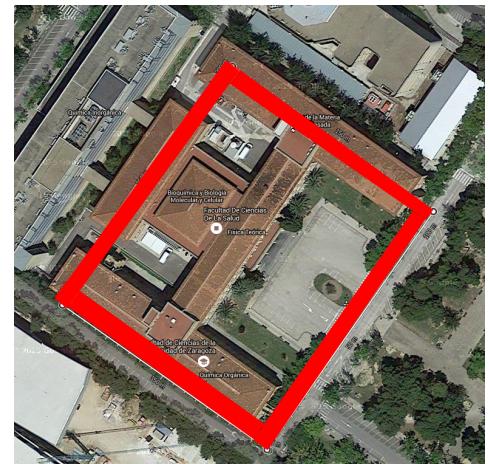


Figura 8: Celda de $100m \times 100m$ comparada con la Facultad de Ciencias.

4.1.2 El movimiento de la red

En primer lugar asociamos al primer nodo de cada línea la hora, con una precisión de minutos, a la que sale cada autobús en un día laboral. A continuación hay que determinar a qué hora estará cada autobús en cada parada para lo cual necesitamos saber la velocidad de los autobuses y la distancia entre paradas.

En cuanto a la velocidad, disponemos de la velocidad promedio de las líneas más rápidas, las más lentas y el promedio general[21]. En esta velocidad promedio ya se están considerando los tiempos de espera debido a semáforos, arrancar, recoger viajeros... por lo que supondremos que el tiempo en llegar de una parada a otra es simplemente la distancia dividida por la velocidad de la línea correspondiente⁴.

En esta ocasión vamos a seguir considerando que la distancia que separa las paradas de tranvía es la distancia geográfica, pero para la separación entre las de autobús emplearemos la distancia real considerando la topología de la ciudad. Estos datos los extraeremos de la API de Google Maps que nos permite obtener la distancia entre dos puntos suponiendo que vamos en un vehículo⁵.

Con todos estos datos lo que haremos será asociar a cada enlace el tiempo que cuesta llegar de un extremo a otro. De forma similar, transformaremos el peso de los enlaces del suelo a tiempo considerando que los individuos se desplazan a unos 5 km/h[23].

Por último, asociaremos a cada enlace intracapa el tiempo que queda para que llegue el siguiente vehículo a dicho nodo. Lógicamente, dicho tiempo será cero al pasar de cualquier capa a la capa suelo.

4.1.3 Navegación

El algoritmo encargado de buscar la ruta óptima entre el punto de inicio y el punto de destino está basado en el algoritmo de Dijkstra [24]. El objetivo de este algoritmo es encontrar el camino más corto entre un nodo de origen i y uno de destino j minimizando la distancia recorrida. Al haber asignado a nuestros enlaces tiempos el resultado es que realmente buscamos el camino que minimiza el tiempo de viaje (dicho camino no tiene por qué coincidir, en general, con el de mínima distancia [12]).

De cara al análisis de los resultados distinguiremos tres tipos de tiempo:

- Road: tiempo del viaje que el individuo está en un medio de transporte.
- Walk: tiempo que el individuo está andando.
- Wait: tiempo que el individuo está esperando a que lleguen los vehículos.

Por último, dado que carecemos de la información referente a los flujos de pasajeros vamos a considerar que los vehículos tienen un tamaño infinito (por lo que no se producirán procesos de congestión) y 4 escenarios de movilidad:

1. Ir desde cualquier punto de la ciudad al centro (Plaza España: 41.652136,-0.880950).
2. Ir desde el norte de la ciudad al sur y viceversa.

⁴De cara a un proceso de optimización de la red sería conveniente introducir un ruido aleatorio en cada trayecto pero dado que lo que nos interesa es el funcionamiento teórico de la red vamos a despreciar dicho efecto.

⁵En su versión gratuita solo permite 2500 consultas al día motivo por el cual nos hemos restringido a una red de menos de 2500 enlaces. Además, esta es la causa por la que no hemos empleado estos datos en el estudio de la eficiencia de la red pues necesitábamos saber el camino más corto entre todos los posibles puntos (red ideal). Solicitando 2500 resultados al día conseguir los datos de la red ideal de Madrid hubiera costado cerca de 25 años. Por último, mencionar que existen alternativas gratuitas a Google Maps basadas en la iniciativa Open Street Map [22] pero al analizar sus resultados comprobamos que en ocasiones se cometían errores demasiado grandes.

3. Ir desde el este de la ciudad al oeste y viceversa⁶.
4. Ir desde un punto cualquiera de la ciudad a otro cualquiera alejado a una distancia mínima de 2km[25].

4.2 Resultados

Las simulaciones que hemos realizado cubren el periodo comprendido entre las 8.30 am y las 10 am suponiendo que en cada minuto hay 1000 viajeros queriendo desplazarse por la red eligiendo sus rutas al azar dentro de las condiciones establecidas en cada uno de los escenarios. Además, compararemos los resultados que se obtienen en condiciones normales y los que resultan al imponer una cierta penalización a la velocidad de desplazamiento en la capa suelo. De esta manera podremos modelizar en cierta manera una preferencia por andar menos en los desplazamientos incluso aunque esto llevase a no seguir el camino óptimo desde el punto de vista del tiempo.

En la figura 9 se presenta el tiempo total de 900 recorridos elegidos al azar y ordenados de menor a mayor. Como podemos observar la mayor parte del tiempo los viajeros se encuentran en algún medio de transporte. Por otra parte, vemos que el tiempo que se pasa andando es bastante superior al tiempo de espera, es decir, si queremos optimizar el sistema hay que abordar la tarea desde un punto de vista estructural y no desde el punto de vista de la frecuencia de paso.

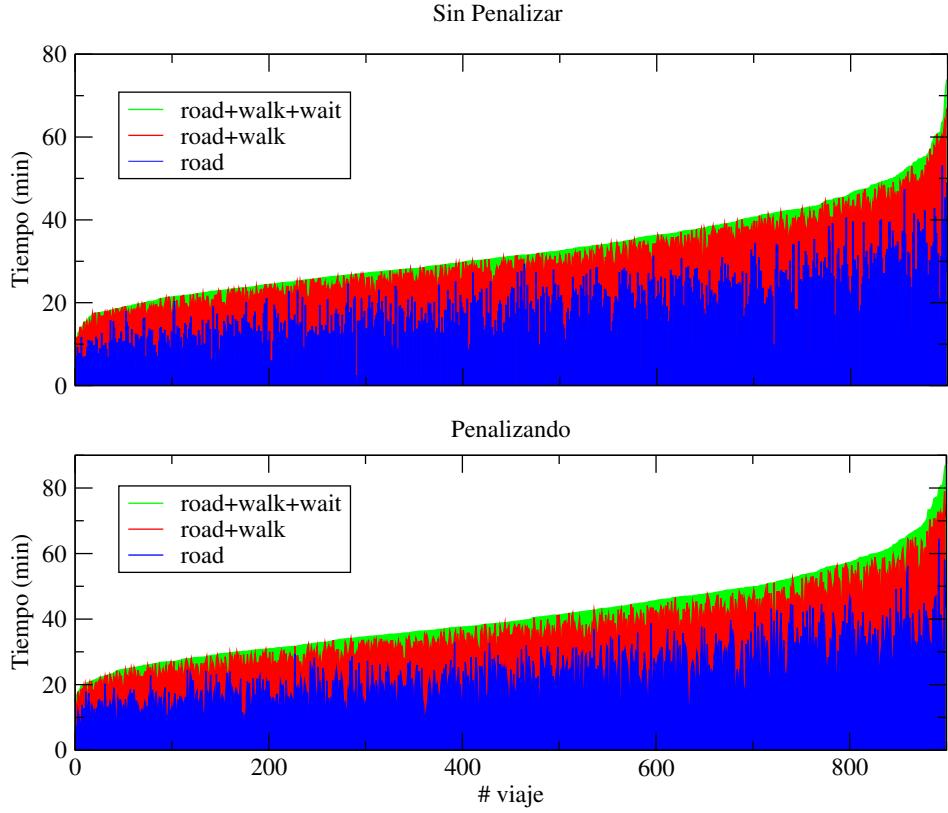


Figura 9: Tiempo total de 900 rutas elegidas al azar ordenadas de menor a mayor tiempo total de viaje.

En efecto, tal y como se muestra en la figura 10, los recorridos óptimos del sistema incluyen caminar hasta 10 minutos más que el tiempo que se está esperando. Si nos fijamos en la distribución sin penalizar, aproximadamente un tercio del tiempo total de viaje se corresponde con andar. Al penalizar la velocidad en el suelo encontramos un lógico incremento tanto en el tiempo total del recorrido como en el tiempo

⁶Tanto para definir el norte-sur como el este-oeste lo que hacemos es calcular el cuartil horizontal o vertical al que pertenece cada celda de la ciudad y nos quedamos con las celdas del primero y tercero

de andar, pero resulta interesante ver que también aumenta el tiempo de espera. Aun así, vemos que aunque al usuario prefiera caminar menos las rutas óptimas siguen incluyendo muy poco tiempo de espera en comparación con la totalidad del viaje.

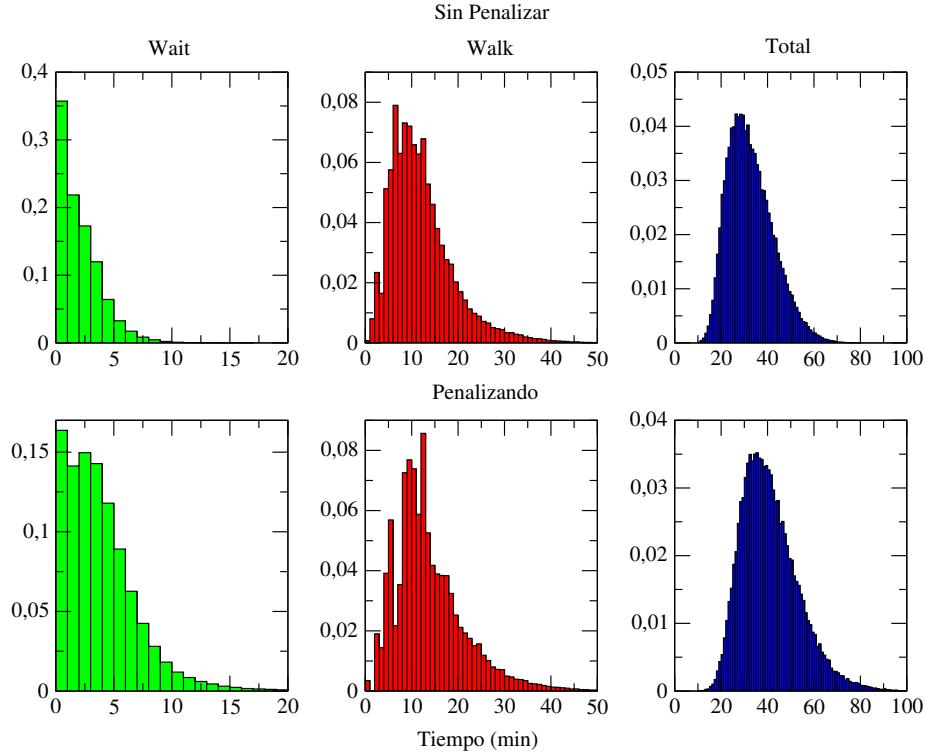


Figura 10: Distribución de cada tiempo en 90000 viajes con origen y destino separados 2 km. De izquierda a derecha: tiempo de espera, tiempo que se está caminando, tiempo total del recorrido.

Recordemos que según el informe sobre el transporte en Zaragoza[19] los usuarios se quejan de que hay poca frecuencia, pocas paradas y de que están lejos. Si bien según nuestro modelo la frecuencia es suficiente encontramos que, efectivamente, la estructura actual de la red hace que haya que andar mucho en los desplazamientos, lo que es un indicativo de que hay pocas paradas (o de que están mal repartidas). Así pues, de cara a una optimización de la red habría que replantearse la estructura misma del sistema y no bastaría simplemente con aumentar las frecuencias.

Después de esta visión global veamos qué sucede a otras escalas del sistema. Como comentábamos anteriormente al carecer de datos exactos sobre los recorridos reales y los flujos de pasajeros no podemos plantearnos un estudio a nivel microscópico. Este puede ser uno de los motivos por los que no observamos que la frecuencia de los transportes sea insuficiente. Si bien es cierto que desde un punto de vista global los tiempos de espera son cortos, a nivel microscópico podríamos encontrar ciertas inhomogeneidades locales (de hecho en la figura 10 podemos ver que la cola de la distribución de tiempos de espera es larga por lo que es cierto que en determinados recorridos los tiempos son más elevados de lo normal). Sin embargo, para poder evaluar la importancia real de dichas inhomogeneidades carecemos de los datos suficientes. No obstante, podemos analizar a nivel mesoscópico qué sucede en la red para tratar de entender mejor cómo funciona.

En primer lugar, estudiamos el número de cambios de capa (transbordos) que hay que hacer para moverse de forma óptima por el sistema. En la figura 11 se muestra la distribución de transbordos considerando el origen y destino aleatorio separados 2 km, pero las distribuciones en los otros escenarios son muy similares. Lo primero que observamos es que al introducir una penalización en la velocidad en el suelo el número de transbordos aumenta, cosa que era de esperar dado que ya habíamos visto que dicha penalización incrementaba los tiempos de espera en el sistema.

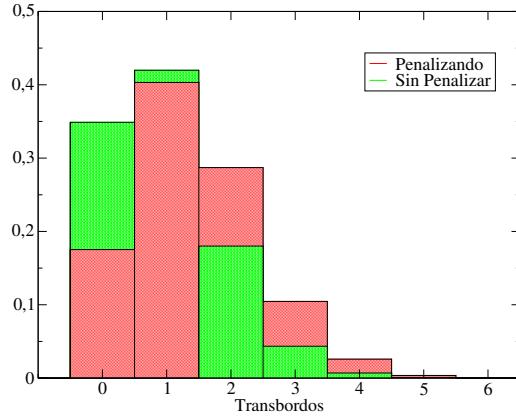


Figura 11: Distribución de transbordos en 90000 viajes con origen y destino separados 2 km.

Así mismo, vemos que el número de viajes que se pueden hacer sin transbordos se reduce notablemente pasando de un 35% a un 20%. Esto significa que si queremos evitar transbordos deberemos andar bastante. Recordemos que otra de las conclusiones del estudio[19] era que había que realizar muchos transbordos, como vemos corrobora este hecho pues entre el 70% y el 80% de los viajes requieren realizar algún transbordo.

Ahora bien, en la sección anterior hemos visto que en estos sistemas las supercapas de tranvía y metro juegan, estructuralmente, un papel fundamental en la red. Cabe ahora preguntarse si esto se encuentra también en el modelo dinámico del sistema.

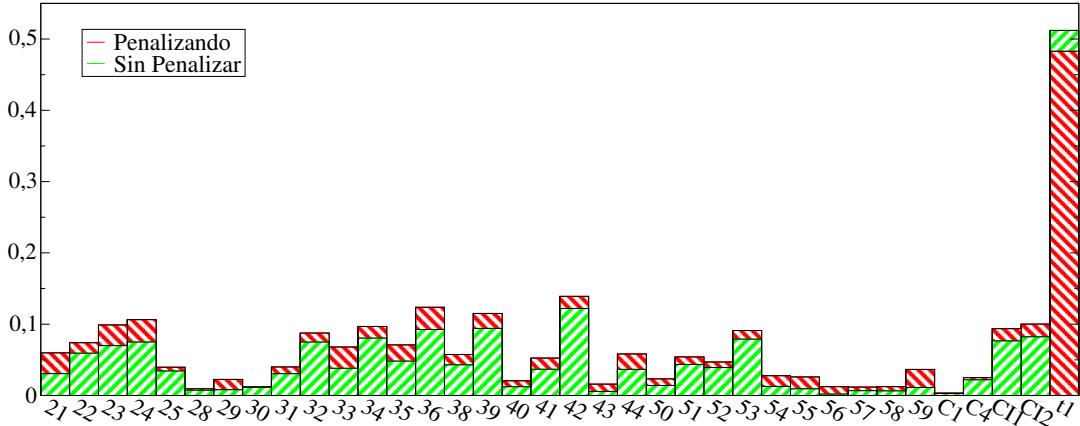


Figura 12: Fracción de viajes que pasan por cada linea. Los valores estan normalizados al numero de viajes totales por lo que, dado que un mismo viaje puede pasar por varias lineas, la suma total no es 1.

Tal y como se puede observar en la figura 12 en torno al 50% de los viajes del sistema pasan por el tranvía (en el escenario norte-sur el 80% y en los este-oeste en torno al 60%). Recordemos que en el cálculo de la interdependencia del sistema con las supercapas (figura 7b) habíamos obtenido un valor alrededor del 20%, pero en esa situación estábamos teniendo en cuenta todos los posibles recorridos del sistema mientras que ahora solo estudiamos aquellos con una longitud superior a los 2 km.

Lo que resulta interesante es que corroboramos el resultado anticipado por el modelo estático: las supercapas de tranvía y metro tienen un papel muy importante en las redes pese a su escaso tamaño en comparación con las de autobuses. Lo que es más, ambos resultados teóricos concuerdan, de nuevo, con las observaciones del informe[19] según el cual la movilidad de la ciudad está totalmente condicionada por la aparición del tranvía.

Así pues, hemos podido comprobar en este apartado que tanto el modelo estático como el modelo dinámico de la red, pese a su simplicidad, capturan muy bien la realidad del sistema a escala macroscópica y mesoscópica. Ahora bien, todavía nos quedan por explorar dos cuestiones: su resiliencia y las posibilidades de optimización.

4.3 Resiliencia de la red

El estudio de la resiliencia de las redes se centra en cuantificar los cambios topológicos que se producen en una red ante posibles fallos en determinados nodos o enlaces. En general, lo que se suele medir es el tamaño de la componente gigante y la distancia promedio entre nodos (9).

Así, si al quitar unos pocos nodos grandes partes de la red se quedan desconectadas se dice que la red es frágil. Entre los ejemplos clásicos se encuentran las denominadas redes *scale-free* en las que una gran cantidad de nodos tienen un grado reducido y unos pocos tienen un grado muy elevado. Esto produce que frente a fallos aleatorios (desaparición) de determinados nodos este tipo de redes sean muy resistentes (ya que al haber muchos lo más probable es que fallen los de menor grado), mientras que frente a ataques dirigidos (destrucción de los nodos de mayor grado) son redes muy frágiles.

Una de las herramientas más utilizadas en el estudio del tamaño de la componente gigante frente a la eliminación de nodos (o enlaces) es la teoría de la percolación[1]. En su extensión a redes multiplex se han encontrado nuevos fenómenos muy interesantes como es el hecho de si las capas son interdependientes un pequeño fallo en una puede propagarse en cascada y afectar a una gran parte de la red total[26]. En el caso de redes no interdependientes, en cambio, el añadir capas aumenta la resistencia de la red. Resultado que era de esperar pues si consideramos los nodos iguales lo que estamos haciendo es aumentar el número de enlaces en el sistema.

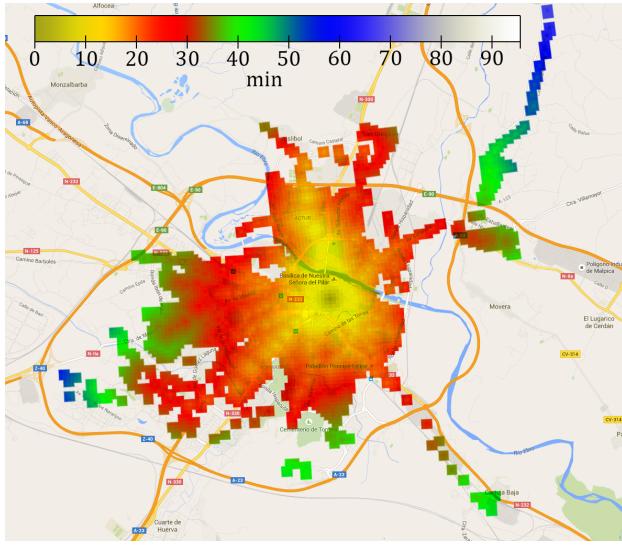
Sin embargo, esta clase de estudios no suelen tener en cuenta las características específicas de los sistemas. Así, podemos encontrar análisis sobre la resistencia de redes de transporte que concluyen que las redes de tranvía o de metro son más resistentes ante fallos aleatorios que las de autobús[27]. Aunque cierto desde el punto de vista del tamaño de la componente gigante, hay que tener en cuenta que en este tipo de medios de transporte un fallo afecta a toda la línea. En efecto, mientras que si no se puede pasar por una calle (no se puede alcanzar un determinado nodo) un autobús puede tomar una ruta alternativa, si hay un accidente que impide acceder a los vehículos a una cierta parada de tranvía/metro va a ser imposible que esa línea, en esa dirección, siga funcionando. El motivo es que se trata de caminos rígidos y unidireccionales de forma que la pérdida de un solo nodo o un enlace afecta a toda la capa.

Incluso subsanando estos errores, la descripción de la resiliencia de la red en función del tamaño de la componente gigante o de la distancia promedio entre nodos no es suficiente en este contexto. Como hemos visto a lo largo del trabajo la escala importante en el sistema es la mesoscópica, de forma que la pérdida de unos pocos nodos de una capa de autobús (e incluso una capa entera) producirá efectos muy locales que no se observarán a escala macroscópica.

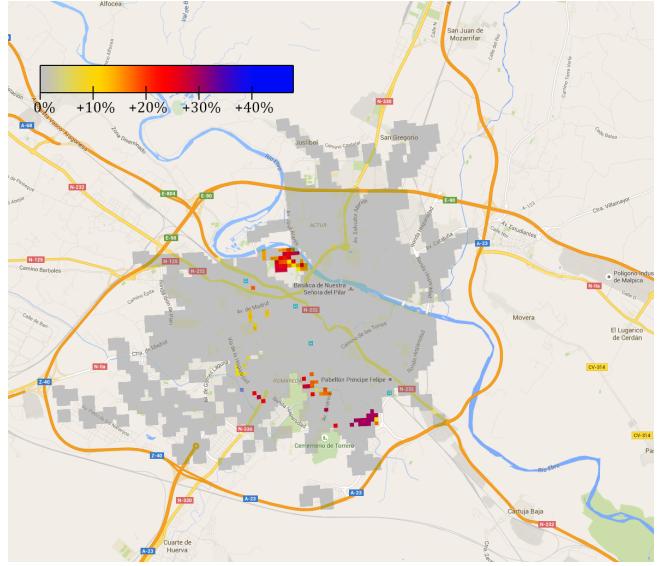
Dado que los efectos son a nivel microscópico si, por ejemplo, se queda desconectado de la red un barrio periférico con pocos nodos, tanto el tamaño de la componente gigante como la distancia promedio serán prácticamente iguales. No obstante, el que todos los individuos de esa zona se queden sin acceso al transporte público puede resultar un problema muy grave. Esto es algo característico de este tipo de redes pues en otras los nodos de la periferia carecen de importancia. En efecto, si pensamos en la difusión de información en una red social el que unos pocos nodos periféricos se queden desconectados de la red apenas influirá en la propagación global. La diferencia reside en que el propósito de una red de transporte es llevar pasajeros desde cualquier nodo a cualquier otro, mientras que en otro tipo de redes el objetivo es alcanzar la mayor parte de los nodos (componente gigante) sin tener que alcanzar necesariamente toda la red.

Veamos un ejemplo. En la figura 13a se representa el tiempo en minutos que se tarda en llegar desde cualquier punto de la ciudad al centro. Si comparamos esta situación con lo que sucede al eliminar la capa correspondiente a la línea de autobús más usada según los resultados de la figura 12 queda claro el significado de efecto local (figura 13b). Mientras que la variación en la mayor parte de la red es cero observamos unas pequeñas zonas en las que el tiempo de viaje se ha incrementado entre un 30 y un 40%.

Para finalizar esta discusión sobre la resiliencia de las redes trataremos de abordar dos de las cuestiones



(a) Tiempo en minutos que cuesta llegar desde cualquier punto al centro de la ciudad.



(b) Variación al eliminar la línea de autobús 42.

Figura 13: Tiempo que cuesta llegar al centro de la ciudad bajo distintas condiciones.

que se planteaban al comienzo de la sección. Según el informe sobre movilidad el tranvía limita los desplazamientos ya que cuando tiene problemas se detiene todo el servicio. De ser esto cierto, nos encontraríamos con que el sistema no está preparado para realizar una respuesta predistrupción, es decir, la estructura de la red no es capaz por sí misma de minimizar los efectos de un posible fallo en el tranvía.

Tratemos primero de valorar el efecto que tendría la eliminación de la capa del tranvía desde un nivel global. En la tabla 2 se muestra la distancia promedio entre nodos (en minutos) en los distintos escenarios considerados. A la vista de los resultados, parece que aunque el efecto es measurable a escala macroscópica la movilidad del sistema no se ve comprometida. Así, en el escenario de recorridos aleatorios el incremento de tiempos es tan solo de, en promedio, un 10%.

		Media	Desviación	Mediana
Aleatorio	Original	41.58	12.65	39.65
	Sin tran.	46.28	15.97	43.13
Horizontal	Original	53.77	11.56	52.62
	Sin tran.	62.00	16.29	59.55
Vertical	Original	49.55	12.83	47.59
	Sin tran.	61.04	18.18	58.04

Tabla 2: Tiempo promedio en minutos que cuesta realizar los viajes en los tres escenarios planetados: origen y distancia aleatorios con una distancia mínima de 2 km, movimiento norte-sur y movimiento este-oeste.

Esto nos podría llevar a pensar que la red está preparada para minimizar los efectos de la pérdida temporal de la capa del tranvía. Ahora bien, como hemos comentado, en las redes de transporte no solo nos importa la visión global sino que recorridos concretos pueden tener mucha importancia. En la figura 14 se muestra el efecto que tendría la desaparición de dicha capa en el tiempo que se tarda en ir al centro de la ciudad. Tanto en la zona norte de la ciudad como en la zona sur el tiempo de viaje puede pasar a ser el doble de las condiciones normales. Esto contrasta con lo que sucede en la zona este y oeste de la ciudad que se ven prácticamente inalteradas. Entramos, de nuevo, en lo que hemos denominado inhomogeneidades locales. Si bien macroscópicamente el sistema se ve poco afectado, localmente el efecto es devastador. Concluimos, por tanto, que la red no está preparada para soportar posibles interrupciones del servicio del tranvía.

Conviene destacar, además, que el tranvía representa solo el 5% de los nodos totales de la red y que la red que queda tras quitarlos sigue siendo conexa. Es decir, está claro que la medida del tamaño de la componente gigante es incapaz de reflejar la magnitud de los efectos de eliminar esta capa.

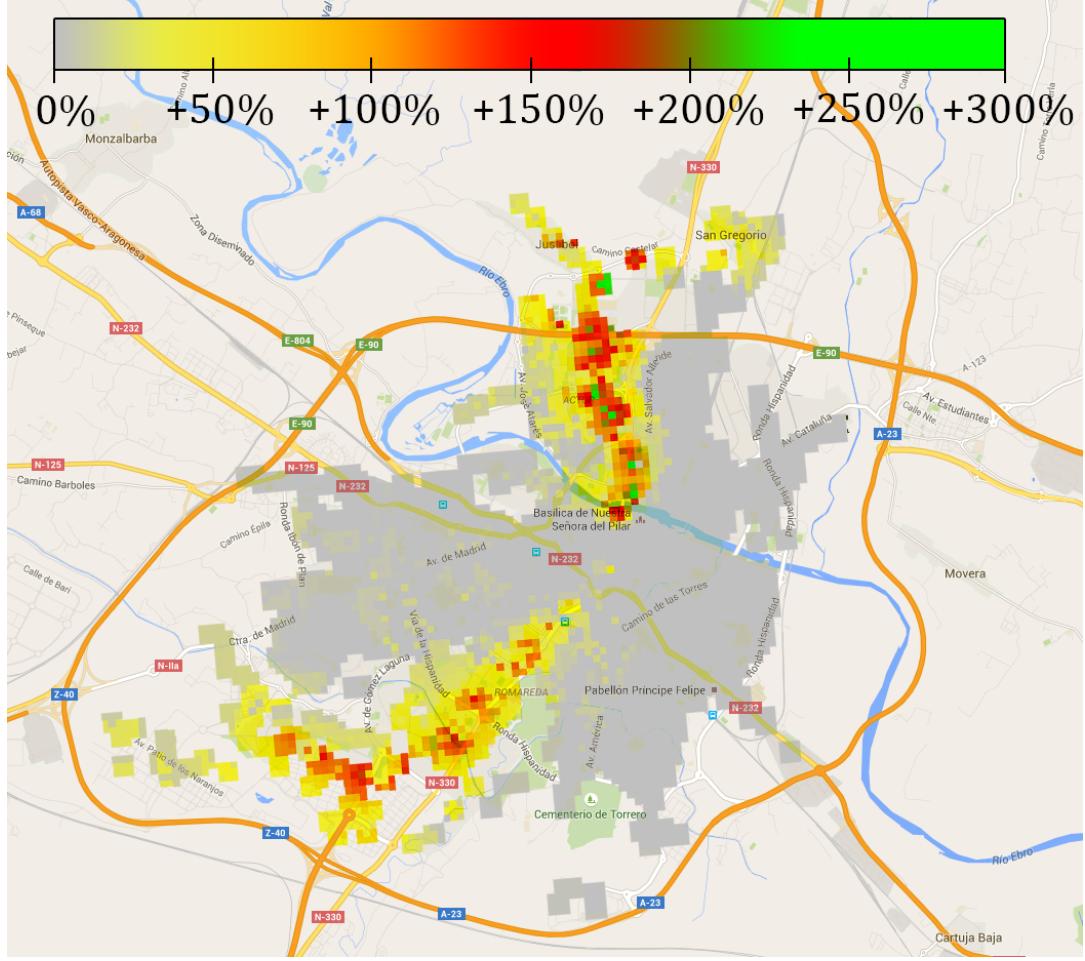


Figura 14: Variación en porcentaje del tiempo que cuesta llegar desde cualquier punto de la ciudad al centro al producirse un problema en el tranvía.

Así pues, hay que ser cuidadosos a la hora de analizar los modelos de redes. No solo hemos visto a lo largo del trabajo que herramientas que sirven para ciertos tipos de red no se encuentran siquiera definidas en otros tipos, sino que además debemos asegurarnos de que los resultados que obtengamos tienen sentido en el contexto de nuestro sistema real.

4.4 Optimización estructural

Por todo lo que hemos visto hasta ahora está claro que la tarea de optimizar el sistema es muy compleja. En primer lugar, porque no basta simplemente con incrementar la frecuencia sino que es necesario enfocarlo desde un punto de vista estructural. Por otra parte, hemos visto que conseguir efectos visibles a escala macroscópica es muy difícil. Así pues, la optimización de la red debería plantearse en términos locales y no globales.

Puesto que no disponemos de los datos suficientes como para medir con precisión dichas inhomogeneidades nos es imposible realizar un correcto diagnóstico de la red a escala local. Por ello, no estamos en disposición de proponer ninguna optimización.

No obstante, para hacernos una idea de lo que se puede llegar a conseguir modificando estructuralmente la red podemos evaluar el impacto que tendría la reciente propuesta de crear una nueva línea de tranvía[28].

Si nos fijamos en la figura 13a vemos que se tarda bastante tiempo en llegar al centro de la ciudad desde la zona oeste de la misma en comparación con otras zonas. Dado que esta nueva línea está planteada de este a oeste es de esperar que esta situación se modifique sustancialmente.

En primer lugar, veamos qué cambios se producen en el tamaño de la componente gigante. Esta nueva capa posee 14 nodos por lo que el incremento de tamaño está en torno al 1.5%. Similarmente, si lo que hacemos es medir la distancia promedio vemos que en la situación de origen y destino aleatorios el tiempo promedio de viaje pasa de ser de 41.58 ± 12.65 min a 40.92 ± 12.48 min. Dado que la variación es del orden de los segundos podemos considerarla despreciable.

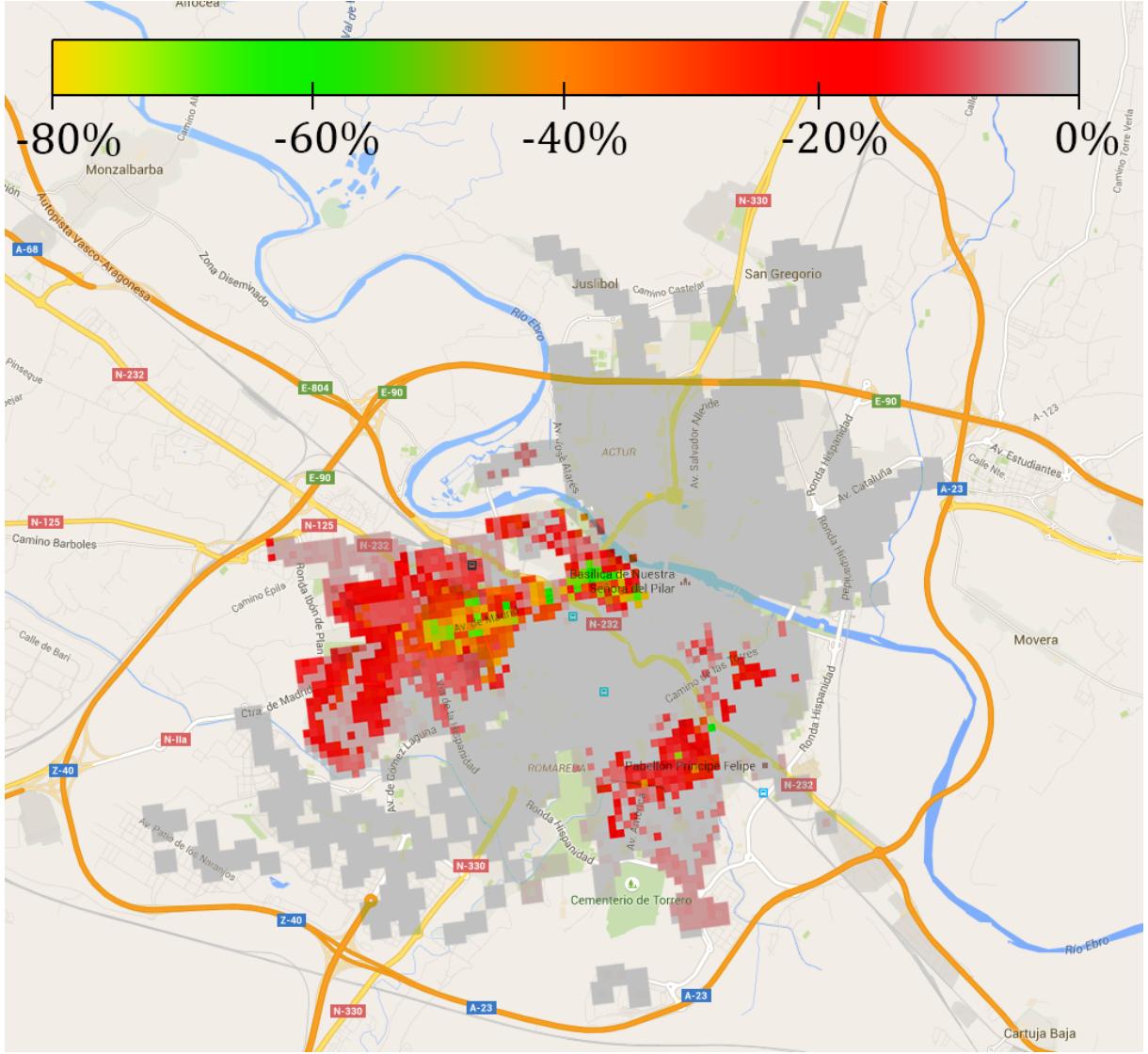


Figura 15: Variación en porcentaje del tiempo que cuesta llegar desde cualquier punto de la ciudad al centro al introducir una nueva capa de tranvía.

Sin embargo, si analizamos la respuesta del sistema a escala local la situación es muy diferente. Como podemos ver en la figura 15 el tiempo que se tarda en llegar al centro desde la zona oeste de la ciudad se reduce notablemente a pesar de que en la zona norte no se produce ningún cambio.

Por tanto, mediante este sencillo ejemplo vuelve a quedar clara la importancia de las inhomogeneidades locales. Así, para una correcta optimización no podemos basarnos solo en la respuesta global del sistema sino que será imprescindible analizarlo a escala local.

5 Conclusiones

A lo largo del trabajo hemos visto que la concepción multicapa de las redes complejas nos aporta una nueva escala de trabajo, la mesoescala. De la misma forma que antes encontrábamos nuevos efectos al examinar las relaciones existentes entre los elementos constituyentes de los sistemas a escala microscópica, si dividimos estos sistemas en capas encontramos nuevas características que no podían observarse en el sistema global y que surgen de la interacción entre los elementos constituyentes del sistema a escala mesoscópica, las capas.

Es más, en el caso concreto de las redes de transporte hemos encontrado otra estructura, las supercapas, que nos han permitido ver la gran importancia que tienen en el sistema las redes de metro y de tranvía. Además, creemos que esta descripción no es única de este tipo de redes sino que también podría utilizarse en otros campos incluso aunque las redes multicapa que utilicen no sean multiplex. En ecología, por ejemplo, cada capa podría ser una especie de animal y las supercapas podrían ser la unión de las capas correspondientes a los carnívoros, a los herbívoros, a los insectívoros... o las correspondientes a mamíferos, a reptiles... De forma similar, en las redes sociales podríamos distinguir la supercapa de redes sociales online de la de redes sociales “físicas”. Así como en la propagación de epidemias, donde cada capa puede ser la red de una ciudad y las supercapas la unión de las correspondientes a un mismo país.

Así mismo, hemos comprobado como la modelización mediante redes multicapa de las redes de transporte no solo nos aporta nueva información sino que nos facilita la tarea de trabajar con ellas tanto a nivel teórico como a nivel práctico. A pesar de ello, en ocasiones no hemos podido utilizar las herramientas ya establecidas para el análisis de las redes multiplex y hemos tenido que modificarlas. Además, hemos visto que los métodos que se usan actualmente para estudiar la resiliencia de las redes complejas resultan inadecuadas en el caso concreto del transporte urbano, donde las inhomogeneidades locales resultan de gran importancia y donde no se puede considerar que el quitar un nodo de autobús produce el mismo efecto que quitar uno de tranvía. Por último, hemos visto como las predicciones de nuestro modelo se ajustan fielmente a la realidad al comparar con los informes sobre movilidad.

Por otra parte, desde un punto de vista técnico para conseguir todos los datos necesarios y poner en marcha el modelo ha sido necesario emplear múltiples herramientas de diversos campos que van más allá de la física: para extraer la información sobre la red y construir el simulador han hecho falta hasta tres lenguajes de programación (C, R y Python); para unificar todos los sistemas de coordenadas y construir la capa “suelo” se han necesitado múltiples herramientas propias de geógrafos (mapas de densidad, modelos raster y aplicaciones como GeoRepository o Google Maps API); la velocidad de las personas se ha extraído de publicaciones médicas; para comprender las características propias de los sistemas de transporte ha hecho falta acudir a publicaciones de ingeniería civil... A lo que hay que sumar la gran cantidad de bases de datos, páginas web e informes que se han tenido que consultar.

Así pues, la construcción de modelos de sistemas reales es un reto tanto desde el punto de vista técnico como desde el punto de vista teórico. No solo eso, sino que al tratar de abarcar sistemas cada vez más complejos las herramientas y habilidades que se necesitan para llevarlo a cabo provienen de áreas muy diferentes entre sí. Por lo tanto, si queremos que la ciencia siga avanzando y resolviendo problemas cada vez más complejos deberemos empezar a romper las barreras que separan las distintas ramas del árbol de la ciencia y fusionar las herramientas que hasta ahora eran propias de cada disciplina. En otras palabras, debemos pasar de una concepción multidisciplinar de la ciencia a una concepción *interdisciplinar*.

Bibliografía

- [1] Mark Newman. *Networks: an introduction*. Oxford University Press, 2010.
- [2] Alain Barrat, Marc Barthelemy, and Alessandro Vespignani. *Dynamical processes on complex networks*. Cambridge University Press, 2008.
- [3] Mikko Kivelä, Alex Arenas, Marc Barthelemy, James P Gleeson, Yamir Moreno, and Mason A Porter. Multilayer networks. *Journal of Complex Networks*, 2(3):203–271, 2014.
- [4] Mark F Horstemeyer. Multiscale modeling: a review. In *Practical aspects of computational chemistry*, pages 87–135. Springer, 2010.
- [5] Gabor Csardi and Tamas Nepusz. The igraph software package for complex network research. *Inter-Journal, Complex Systems*, 1695(5):1–9, 2006.
- [6] Stefano Boccaletti, G Bianconi, R Criado, Charo I Del Genio, J Gómez-Gardeñes, M Romance, I Sendina-Nadal, Z Wang, and M Zanin. The structure and dynamics of multilayer networks. *Physics Reports*, 544(1):1–122, 2014.
- [7] Federico Battiston, Vincenzo Nicosia, and Vito Latora. Structural measures for multiplex networks. *Physical Review E*, 89(3):032804, 2014.
- [8] Vincenzo Nicosia and Vito Latora. Measuring and modelling correlations in multiplex networks. *arXiv preprint arXiv:1403.1546*, 2014.
- [9] Regino Criado, Julio Flores, Alejandro García del Amo, Jesús Gómez-Gardeñes, and Miguel Romance. A mathematical model for networks with structures in the mesoscale. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(3):291–309, 2012.
- [10] Vito Latora and Massimo Marchiori. Efficient behavior of small-world networks. *Physical review letters*, 87(19):198701, 2001.
- [11] Vincenzo Nicosia, Ginestra Bianconi, Vito Latora, and Marc Barthelemy. Growing multiplex networks. *Physical review letters*, 111(5):058701, 2013.
- [12] Riccardo Gallotti and Marc Barthelemy. The multilayer temporal network of public transport in great britain. *Scientific data*, 2, 2015.
- [13] Riccardo Gallotti and Marc Barthelemy. Anatomy and efficiency of urban multimodal mobility. *Scientific reports*, 4, 2014.
- [14] Lihui Zhang, Hai Yang, Di Wu, and Dianhai Wang. Solving a discrete multimodal transportation network design problem. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 49:73–86, 2014.
- [15] Manlio De Domenico, Albert Solé-Ribalta, Elisa Omodei, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Ranking in interconnected multilayer networks reveals versatile nodes. *Nature communications*, 6, 2015.
- [16] BP Shumaker and RW Sinnott. Astronomical computing: 1. computing under the open sky. 2. virtues of the haversine. *Sky and telescope*, 68:158–159, 1984.
- [17] John Zhen Fu Pang, Nasri Bin Othman, Keng Meng Ng, and Christopher Monterola. Efficiency and robustness of different bus network designs. *International Journal of Modern Physics C*, 26(03):1550024, 2015.
- [18] Jian Gang Jin, Loon Ching Tang, Lijun Sun, and Der-Horng Lee. Enhancing metro network resilience via localized integration with bus services. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 63:17–30, 2014.

- [19] Ainmer Investigación. Estudio sobre el impacto de la nueva movilidad urbana de Zaragoza. http://www.ainmer.es/_files/archivos/8477b10b-96a9-458a-87f6-2c8f51b5e387.pdf, 2014.
- [20] Francisco Javier Gallego. A population density grid of the European Union. *Population and Environment*, 31(6):460–473, 2010.
- [21] Velocidad media de los autobuses urbanos. http://www.elperiodicodezaragoza.es/noticias/zaragoza/el_tranvia_superara_menos_la_velocidad_media_los_autobuses_urbanos.html.
- [22] Manuel JA Eugster and Thomas Schlesinger. osmar: OpenStreetMap and R. *The R Journal*, 5(1):53–63, 2013.
- [23] Raymond C Browning, Emily A Baker, Jessica A Herron, and Rodger Kram. Effects of obesity and sex on the energetic cost and preferred speed of walking. *Journal of Applied Physiology*, 100(2):390–398, 2006.
- [24] Edsger W Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.
- [25] Distancia a partir de la cual se usa transporte público. http://www.observatoriomovilidad.es/images/stories/08_noticias/noticia_20150521_Guia_Transporte_Publico_ZGZ.pdf.
- [26] Amir Bashan, Yehiel Berezin, Sergey V Buldyrev, and Shlomo Havlin. The extreme vulnerability of interdependent spatially embedded networks. *Nature Physics*, 9(10):667–672, 2013.
- [27] Manlio De Domenico, Albert Solé-Ribalta, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Navigability of interconnected networks under random failures. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23):8351–8356, 2014.
- [28] Línea 2 del tranvía. <http://www.zaragoza.es/contenidos/movilidad/tranvia-linea2/general/memoria/memoria.pdf>.