

# Apéndice A

## Formalismo cuántico

El mundo cuántico dista mucho del mundo clásico, tanto formal como fenomenológicamente. El concepto clásico de trayectoria es inexistente en el mundo cuántico, debido a la falta de información sobre la situación de un cierto estado físico en un momento determinado. Es por ello que caracterizamos un estado puro, por ejemplo una partícula, por una *función de ondas*  $\psi(\vec{r}, t)$ , la cual contiene toda la información que es posible obtener de dicho sistema. Esta función de ondas es interpretada como *la amplitud de probabilidad de presencia de la partícula*. Así

$$d\mathcal{P}(\vec{r}, t) = C |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r} \quad (\text{A.1})$$

se interpreta como la correspondiente *densidad de probabilidad* de que la partícula se encuentre en una cierta posición del espacio  $\vec{r}$  en un momento determinado y donde  $C$  es una constante de normalización.

Habiéndonos creído esta interpretación, tendremos que aceptar, que la probabilidad total de encontrar a la partícula en cualquier sitio del espacio debe ser 1, así que tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r} = 1 \quad (\text{A.2})$$

Por tanto, los rayos del espacio de Hilbert que representan a los sistemas cuánticos han de ser funciones de cuadrado integrable,  $\psi(\vec{r}, t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . Recordar que el espacio  $(L^2(X), \|\cdot\|_2)$  es un **espacio de Hilbert**, con el producto escalar dado por<sup>1</sup>.

$$\langle f | g \rangle = \int_X \overline{f(x)} g(x) d\mu(x) \quad (\text{A.3})$$

Por otro lado debemos enunciar las bases que sustentan el formalismo cuántico. Para ello, esta teoría está basada en una serie de axiomas que establecen las estructuras matemáticas que se habrán de utilizar.

**Axioma A.0.1. Estados físicos** En un tiempo fijo  $t_0$ , el estado puro de un sistema físico está especificado por una función de ondas  $\psi(\vec{r}, t)$  perteneciente a un espacio de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ .

**Axioma A.0.2.** Cada magnitud física medible  $\mathcal{A}$  está descrita por un operador (lineal) autoadjunto  $A$  en  $\mathcal{H}$ ; este operador se denomina observable.

---

<sup>1</sup>El convenio utilizado por los físicos es distinto al de los matemáticos, conjugado estos últimos la segunda función

Notar que existe una gran diferencia respecto al mundo clásico, donde ambos, estados y operadores, vienen dados por funciones.

**Axioma A.0.3.** Los únicos resultados posibles de la medida de una magnitud física  $\mathcal{A}$  es uno de los autovalores correspondientes al observable asociado  $A$ .

**Axioma A.0.4.** Cuando una magnitud física  $\mathcal{A}$  es medida sobre un sistema en el estado  $\psi(\vec{r}, t)$  normalizado según (A.3), la probabilidad  $\mathcal{P}(a_n)$  de obtener el autovalor  $a_n$  del correspondiente observable  $A$  es:

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2 \quad (\text{A.4})$$

donde  $\{u_n^i\}_{i=1}^{g_n}$  es el conjunto de autovalores normalizados de  $A$  asociados al autovalor  $a_n$ .

**Axioma A.0.5.** Si la medida de la magnitud física  $\mathcal{A}$  sobre el sistema en el estado  $\psi(\vec{r}, t)$  da como resultado  $a_n$ , el estado del sistema inmediatamente después de la medida es la proyección normalizada,  $\frac{P_n(\psi)}{\sqrt{\langle \psi | P_n(\psi) \rangle}}$ , de  $\psi$  en el subespacio asociado al autovalor  $a_n$ .

Este último postulado, ha suscitado grandes debates entre los físicos que se preguntan sobre su necesidad. No obstante, a día de hoy, ningún experimento ha logrado falsearlo. Es de hecho en este axioma, donde se basa gran parte de la discusión sobre el efecto Zenón cuántico que será desarrollado más adelante. Por último,

**Axioma A.0.6.** La evolución temporal del estado  $\psi$  está gobernada por un operador unitario *modificar*:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(\vec{r}, t) = H(t)(\psi(\vec{r}, t)) \quad (\text{A.5})$$

donde  $H(t)$  es el observable asociado con la energía total del sistema.

A  $H$  se le llama el operador **Hamiltoniano** del sistema, y de forma análoga al caso clásico controla la evolución del sistema (ecuaciones de Hamilton).

## Apéndice B

# Sistemas cuánticos abiertos

*Los sistemas cuánticos reales, evolucionan en un medio con el cual interaccionan, creando una así'fuga' de información y de coherencia del sistema cuántico en estudio. Estos sistemas en los que hay una interacción con el entorno, son los conocidos como sistemas cuánticos abiertos.*

*En esta sección introduciremos los resultados matemáticos más importantes para modelar la dinámica de los sistemas cuánticos abiertos. Este es el caso de un sistema en el que el espacio de estados se descompone en dos partes. La del sistema físico estudiado y la dada por el entorno con el cual interacciona. Es por ello que podemos escribir dicho espacio como  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .*

*Para estudiar la dinámica introduciremos los conceptos semigrupo uniparamétrico de operadores sobre un espacio de Banach y de generador de un grupo.*

**Definición B.1.** Una familia de operadores lineales  $T_t$  ( $t \geq 0$ ) en un espacio de Banach finito forma un *semigrupo uniparamétrico* si

$$\begin{aligned} \cdot \quad T_t T_s &= T_{t+s}, \quad \forall t, s \\ \cdot \quad T_0 &= 1 \end{aligned}$$

Además se dirá semigrupo *uniformemente continuo* si la aplicación

$$t \mapsto T_t \tag{B.1}$$

es continua en la norma de los operadores.

*Además si un semigrupo uniparamétrico es uniformemente continuo, entonces (B.1) es diferenciable, y la derivada de  $T_t$  está dada por*

$$\frac{dT_t}{dt} = LT_t$$

con  $L = \left. \frac{dT_t}{dt} \right|_{t=0}$  (teorema 2.2 [21]).

*Por otro lado, cualquier semigrupo uniparamétrico uniformemente continuo puede escribirse de la forma  $T_t = T(t) = e^{Lt}$ , donde  $L$  se conoce como el generador del semigrupo y es la única solución al problema diferencial*

$$\begin{cases} \frac{dT_t}{dt} = LT_t, & t \in \mathbb{R}^+ \\ T_0 = 1 \end{cases}$$

*Por tanto, dada 'la omnipresencia de las ecuaciones diferenciales en la física, es evidente pues la importancia de los semigrupos'.*

## B.1. Evolución en sistemas cuánticos abiertos

*Como ya comentamos los sistemas cuánticos reales, no son sistemas aislados, sino que están acoplados con un entorno. Es por ello que su evolución no vendrá determinada por la ecuación (1.9) en general. La teoría de sistemas cuánticos abiertos juega así un papel principal en muchas aplicaciones de la física cuántica debido al hecho que un aislamiento perfecto de un sistema cuántico no es posible de conseguir y una completa descripción de los grados de libertad del entorno no es factible.*

*Diremos que un sistema cuántico es cerrado si su dinámica viene dada por (1.9). Un sistema cuántico abierto es un sistema  $S$  el cual está acoplado a otro sistema cuántico llamado el entorno  $E$ , del cual no se tiene conocimiento completo de su evolución. Sistema y entorno  $S+E$  forman un sistema cerrado cuya dinámica está otra vez dada por una evolución unitaria. Sin embargo, la dinámica del sistema  $S$ , que es la que nos interesa, no vendrá dada en general por una ecuación 'sencilla' como (1.9).*

*La evolución del sistema  $S$  se modela asumiendo una serie de aproximaciones, [21] y [22]. Se asumen evoluciones Markovianas o con falta de memoria, es decir, evoluciones en los que el estado del sistema en un tiempo determinado sólo depende del estado del sistema en un tiempo infinitesimalmente anterior (análoga a la definición clásica de proceso Markoviano), y por otro lado un acoplo débil con el entorno. En este caso, la ecuación diferencial más general que rige la evolución de  $\rho$  viene dada por:*

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = L(\rho(t)) = -i[H(t), \rho(t)] + \sum_k \gamma_k \left[ V_k(t)\rho(t)V_k^\dagger(t) - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger(t)V_k(t), \rho(t)\} \right], \quad (\text{B.2})$$

*donde  $H(t)$  y  $V_k(t)$  son operadores dependientes del tiempo, con  $H(t)$  autoadjunto, y  $\gamma_k(t) \geq 0$  para cada  $k$  y cada tiempo  $t$ .*

*Por tanto la evolución de un sistema abierto está dada por un semigrupo de transformaciones definidas positivas  $\phi_t : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H})$ , para todo  $t \geq 0$ , de forma que el generador de este semigrupo es el operador  $L : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{u}(\mathcal{H})^* \rightarrow \mathfrak{u}(\mathcal{H})^*$ . Dicho operador es conocido como operador de Kossakowski-Lindblad. Será entonces nuestra intención, derivar el campo vectorial  $X^L$  responsable de dicha evolución, asociado a la aplicación lineal  $L$  (1.10) y aplicar entonces la formulación geométrica.*

## Apéndice C

# Formulación geométrica de la mecánica cuántica. Imagen de Schrödinger

### C.1. Base matemática

En primer lugar, para poder aplicar el formalismo geométrico, debemos introducir una variedad diferenciable <sup>1</sup> donde trabajar. Para ello observemos que la realificación del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión compleja  $N$  puede dotarse de una estructura de variedad real diferenciable  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} := M_Q$  de dimensión real  $2N$ , que admite una carta global, por ejemplo la obtenida al elegir una base del mencionado espacio de Hilbert. Al elegir una tal base cada elemento de  $\mathcal{H}$  posee unas coordenadas  $\{|z_k\rangle\}$  y podemos separar cada una de sus coordenadas en su parte real y parte imaginaria de la forma:

$$|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |e_k\rangle \text{ de forma que } \psi_k \rightarrow \psi_k^R + i\psi_k^I \quad (\text{C.1})$$

Entonces,

$$(\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}) \in \mathcal{H} \mapsto (\{\psi_1^R, \psi_2^R, \dots, \psi_N^R, \psi_1^I, \psi_2^I, \dots, \psi_N^I\}) \equiv (\Psi_R, \Psi_I) \in M_Q \quad (\text{C.2})$$

En consecuencia esta variedad real diferenciable  $M_Q$  es equivalente a  $\mathbb{R}^{2N}$

Además, el hecho de que el espacio de Hilbert sea complejo se traduce en la existencia de un tensor  $J$  de tipo  $(1,1)$  en la variedad  $M_Q$  tal que  $J^2 = -I$ , que recibe el nombre de estructura compleja <sup>2</sup>. La variedad que hemos obtenido así es del tipo particular que se conoce como variedad Kähler [23].

Por ahora hemos traducido el espacio de estados dados en unas ciertas coordenadas que por analogía con el caso de mecánica clásica, denotaremos

$$\psi_i^R \equiv q^i \text{ y } \psi_i^I \equiv p_i \quad (\text{C.3})$$

---

<sup>1</sup>Ver en apéndice A DFN E.1 y siguientes.

<sup>2</sup>Aunque inicialmente este cambio de notación  $i \rightarrow J$  parezca trivial, este pequeño cambio en el punto de vista permitirá introducir la formulación simpléctica de la mecánica cuántica.

En efecto, veamos que  $M_Q$  está dotada de una estructura simpléctica y que las mencionadas coordenadas son efectivamente coordenadas de Darboux<sup>3</sup> para tal forma simpléctica. La propiedad de que el producto interno sea tal que  $\langle \psi | \phi \rangle$  sea conjugado de  $\langle \phi | \psi \rangle$  se traduce en que el espacio lineal de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$  está dotado de una forma bilineal antisimétrica no degenerada mediante  $\omega(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = \text{Im } \langle \phi | \psi \rangle$  y por tanto  $M_Q$  está dotado de una estructura simpléctica. Recordando que

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_{k=1}^n (\phi_k^R - i \phi_k^I)(\psi_k^R + i \psi_k^I),$$

vemos que

$$\omega(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = \text{Im } \langle \phi | \psi \rangle = \sum_{k=1}^n (\phi_k^R \psi_k^I - \psi_k^R \phi_k^I),$$

lo que nos muestra que  $q_k = \text{Re } \phi_k$ ,  $p_k = \text{Im } \phi_k$  son coordenadas de Darboux.

Podemos traducir las estructuras algebraicas disponibles en  $\mathcal{H}$  en objetos tensoriales sobre la variedad  $M_Q$ . Por otro lado, al igual que en el caso clásico, las trayectorias del sistema físico vendrán determinadas por las curvas integrales de un campo vectorial<sup>4</sup> responsable de la dinámica. Es por ello que para esta ‘traducción’ debemos considerar los fibrado tangente y cotangente, teniendo en cuenta que puesto que  $\mathcal{H}$  es un espacio vectorial podemos identificar para cada  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  el espacio tangente  $T_{|\phi\rangle}\mathcal{H}$  con el propio  $\mathcal{H}$ , de forma que a cada  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  le corresponde la aplicación que asocia a cada función  $f$  diferenciable en un entorno del punto  $|\phi\rangle$ , el valor real

$$\left( \frac{d}{dt} f(|\phi\rangle + t |\psi\rangle) \right)_{t=0}.$$

Además, con esta identificación los campos vectoriales en  $\mathcal{H}$  vendrán dados por aplicaciones  $X : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Mencionamos a continuación algunos ejemplos interesantes, como son los campos vectoriales constantes y los campos vectoriales lineales:

- Con cada elemento  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  le podemos asociar un campo vectorial constante

$$X_{|\psi\rangle} : M_Q \rightarrow TM_Q \quad |\phi\rangle \mapsto (|\phi\rangle, |\psi\rangle) \quad (\text{C.4})$$

Observemos que lo que hemos hecho, es trasladar  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  al espacio tangente en cada punto, es decir, en este lenguaje los estados  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  son los vectores pertenecientes al espacio tangente en el punto  $|\phi\rangle$ . Además, elegida una base de  $\mathcal{H}$  las componentes de  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  tienen una parte real y una imaginaria pura de forma que el campo queda descrito por:

$$X_{|\psi\rangle}(|\phi\rangle) = (|\phi\rangle, \Psi_R, \Psi_I) \quad (\text{C.5})$$

- Recordemos que si  $V$  es un espacio lineal real, con la identificación del espacio tangente a  $V$  en cada punto con el propio  $V$ , cada aplicación lineal  $A : V \rightarrow V$  define un campo vectorial  $X_A$  mediante  $X_A(v) = (v, Av)$ . En la carta definida por la elección de una base de  $V$ , cuyas coordenadas denotaremos  $\{x^i\}$ , dichos campos vectoriales  $X_A$  vendrán dados en tales coordenadas por  $X_A = a^i_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$ , de forma que las ecuaciones que determinan sus curvas integrales son ecuaciones diferenciales lineales.

En el caso particular de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  el campo vectorial  $X_A$  definido por la aplicación lineal  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , con la identificación  $T\mathcal{H} \approx \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , está dado por  $X_A : |\psi\rangle \mapsto (|\psi\rangle, A|\psi\rangle) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ . Las curvas integrales de estos campos vectoriales

<sup>3</sup>Ver en apéndice A el teorema E.0.1.

<sup>4</sup>Ver en apéndice A DFN E.3.

son soluciones de ecuaciones diferenciales lineales  $|\dot{\psi}\rangle = A|\psi\rangle$ . Veremos que el caso de interés en Mecánica Cuántica es cuando  $A$  es un operador (anti-)autoadjunto.

· El caso particular en que  $A = I$  es especialmente importante ya que el campo vectorial lineal correspondiente,  $\Delta = X_I$ , codifica la **estructura lineal** disponible en  $M_Q$ . Juega un papel bastante similar al conocido como campo de Liouville [24], o campo de dilataciones, ya que en este caso no sólo se dilata a lo largo de la fibra si no también del espacio base. Más en concreto,

$$\Delta : M_Q \rightarrow TM_Q \quad |\psi\rangle \mapsto (|\psi\rangle, |\psi\rangle) \quad (\text{C.6})$$

se escribe en coordenadas  $\{q_k, p_k\}$  asociadas a la elección de una base mediante:

$$\Delta = q_k \frac{\partial}{\partial q_k} + p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (\text{C.7})$$

Ya indicamos que la subvariedad  $M_Q$  también está dotada de otra estructura relevante, que es consecuencia de la **estructura Hermítica** en  $\mathcal{H}$ . Para el desarrollo matemático completo de este apartado se recomienda leer el Capítulo 3 de [24]. La estructura Hermítica queda codificada por el tensor Hermítico  $\mathfrak{h}$ . Para obtenerlo usamos que si  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$  entonces

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \mathfrak{h}(X_{|\psi_1\rangle}, X_{|\psi_2\rangle})(|\phi\rangle) \quad \forall |\phi\rangle \quad (\text{C.8})$$

Llegados a este punto se puede ver siguiendo el desarrollo matemático encontrado en [23], que en coordenadas  $\mathfrak{z}_k = q_k + ip_k$ , el tensor Hermítico queda definido por

$$\mathfrak{h} = \sum_k d\bar{\mathfrak{z}}_k \otimes d\mathfrak{z}_k = \sum_k (dq_k - i dp_k) \otimes (dq_k + i dp_k) \quad (\text{C.9})$$

y que sobre la variedad real  $M_Q$ , que está dotada de una estructura compleja, se puede expresar como

$$\mathfrak{h}(X_{|\psi_1\rangle}, X_{|\psi_2\rangle}) = \text{Re} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle + i \text{Im} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = g(X_{|\psi_1\rangle}, X_{|\psi_2\rangle}) + i \omega(X_{|\psi_1\rangle}, X_{|\psi_2\rangle}) \quad (\text{C.10})$$

donde  $g$  es un tensor simétrico y  $\omega$  un tensor antisimétrico que define la mencionada estructura simpléctica, y además puesto que el producto interno es sesquilineal,

$$\langle \psi_1 | i \psi_2 \rangle = i \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad \langle i \psi_1 | \psi_2 \rangle = -i \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad (\text{C.11})$$

implica que,

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) \quad g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \omega(JX, JY) = \omega(X, Y) \quad (\text{C.12})$$

· Por último, la **estructura compleja** de  $\mathcal{H}$  es traducida mediante el tensor de tipo (1, 1)

$$J : TM_Q \rightarrow TM_Q \text{ tal que } J\left(\frac{\partial}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial}{\partial p_k} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial p_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_k} \quad (\text{C.13})$$

cumpliendo que

$$J^2 = -\mathbb{I} \quad (\text{C.14})$$

Cabe destacar por tanto que en la descomposición (C.9) el tensor simétrico  $g$  es definido positivo y no degenerado y por tanto define una estructura Riemanniana en la variedad real,  $(M_Q, g)$ , mientras que el tensor antisimétrico  $\omega$  es también no degenerado y es cerrado ( $d\omega = 0$ ), por lo que dicho tensor es una forma simpléctica. Esto implica que  $(M_Q, \omega)$  es una variedad simpléctica. Más aún,  $(M_Q, (g, \omega, J))$  es una variedad Kähler y la forma covariante de estos tensores viene dada por:

$$J = \partial_{p_k} \otimes dq_k - \partial_{q_k} \otimes dp_k \quad g = dq_k \otimes dq_k + dp_k \otimes dp_k \quad \omega = dq_k \wedge dp_k \quad (\text{C.15})$$

como se puede ver sin más que hacer uso de la relación (C.9).

Como  $\omega$  es no degenerada define un tensor de Poisson (su forma contragradiente)

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial q_k} \wedge \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (\text{C.16})$$

como también es posible considerar un tensor dos veces contravariante simétrico que corresponde a  $g$ ,

$$G = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial q_k} \otimes \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial p_k} \otimes \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (\text{C.17})$$

Ambos tensores están relacionados por  $G = J \cdot \Omega$ . Como veremos estos tensores permiten definir un corchete de Poisson y un corchete Riemann-Jordan sobre funciones suaves.

En resumen, la traducción obtenida ha sido:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\mathbb{R}} := M_Q \\ \langle \cdot, \cdot \rangle & & \mathfrak{h} = g + i\omega \\ i & & J \\ (\mathbb{C}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle) & & (M_Q, (g, \omega, J)) \end{array}$$

Es interesante destacar, que han aparecido dos estructuras adicionales al caso de la mecánica clásica: la estructura compleja y la estructura Riemanniana compatible con la estructura simpléctica dada por la igualdad (C.12). Será esta segunda la que nos permitirá traducir las incertidumbres en la medida.

## C.2. Los observables

Una vez introducida la base matemática sobre la que se trabaja y el espacio de estados considerado, se ha de dar significado a los operadores en el formalismo geométrico. En la imagen de Schrödinger, los operadores que representan las magnitudes físicas son los operadores lineales autoadjuntos, los cuales actúan sobre los estados. La forma más sencilla de traducir esto es asociar a cada observable  $A$  una función real dada por

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(M_Q) \quad A \rightarrow f_A(\psi) = \frac{1}{2} \langle \psi | A \psi \rangle \quad \text{con } \psi \in \mathcal{H} \quad (\text{C.18})$$

donde  $\mathcal{F}(M_Q)$  es el conjunto de todas las funciones cuadráticas sobre  $M_Q$  y  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(M_Q)$  el subconjunto de funciones reales.

### C.3. El espacio complejo proyectivo

Cuando un sistema cuántico es descrito mediante un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , debemos tener en cuenta que el conjunto de estados que difieren en un factor  $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$  son **físicamente** equivalentes y por tanto debemos trabajar con el correspondiente espacio proyectivo. En la formulación geométrica de la mecánica cuántica, podemos introducir la acción de multiplicar por un número complejo de módulo uno sobre  $M_Q$  como una transformación cuyo generador infinitesimal se escribe,

$$\Gamma = \sum_k \left( p_k \frac{\partial}{\partial q_k} - q_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \quad (\text{C.19})$$

Ver que el tensor dado en esas coordenadas lo que hace es cambiar la fase global, si pensamos en el plano, dado un par  $\{q_k, p_k\}$ ,

$$q_k = r_k \cos \theta_k \quad p_k = r_k \sin \theta_k$$

entonces,

$$\Gamma = \sum_k \frac{\partial}{\partial \theta_k}$$

Es decir, las curvas integrales del campo  $\Gamma$  están dadas por el conjunto de estados que se obtienen partiendo de un estado inicial  $|\psi\rangle$  y multiplicarlo por una fase global  $e^{i\theta} |\psi\rangle$ .

Por otro lado el campo de dilataciones  $\Delta$ , al expresarlo en coordenadas polares toma la forma

$$\Delta = \sum_k r_k \frac{\partial}{\partial r_k}$$

Ello implica, que las curvas integrales de este campo están dadas por el conjunto de vectores obtenidos multiplicando uno dado por un número real diferente de cero.

Por tanto, la acción de estos campos sobre la variedad real  $M_Q$ , corresponden a la acción del grupo  $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+ \otimes U(1)$  sobre  $M_Q$ . Como dicho grupo es Abelian, se verifica que

$$[\Delta, \Gamma] = 0 \quad (\text{C.20})$$

Cabe destacar que el hecho de que  $[\Delta, \Gamma] = 0$ , significa que los campos generadores que modifican la fase global y la norma de los estados  $|\psi\rangle$  conmutan entre sí. Esto da lugar al siguiente resultado,

**Proposición 2.** Sean  $\psi_t$  y  $\psi_s$  flujos locales de los campos vectoriales  $\Delta$  y  $\Gamma$ , respectivamente, en el entorno de un punto. Se cumple que  $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$ .

Por otro lado obtenemos de la relación (C.20) que dichos campos cierran álgebra. Es por ello que estos campos definen una distribución integrable sobre el fibrado tangente.

**Definición C.1.** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional. Una distribución  $D$  de dimensión  $k$  es una forma de asignar a cada  $p \in M$  un subespacio  $k$  dimensional  $D_p \subset T_p M$ , de forma que en un entorno  $\mathcal{U}_p$  venga generado por campos de vectores  $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ .

Además el teorema de Frobenius establece bajo qué condiciones una distribución es completamente integrable, es decir, cuándo para cada punto  $p \in M$ , existe una carta  $(\mathcal{U}_p, \phi)$  con la cual  $\{\partial_1, \dots, \partial_k\}$  forman una base local de  $D$ . Es por ello que debemos introducir la idea de distribución involutiva.

**Definición C.2.** Se dice que  $D$  una distribución de dimensión  $k$  es *involutiva* si para cada base local  $\{X_1, \dots, X_k\}$  se cumple que para todo  $1 \leq i, j \leq k$   $[X_i, X_j]$  está en el subespacio generado por  $\{X_1, \dots, X_k\}$ . Normalmente se escribe como  $[D, D] \subset D$ .

**Teorema C.3.1. (teorema de Frobenius)** Una distribución es involutiva si y sólo si es integrable.

*Demostración.* Consultar [25]. □

A las distribuciones integrables se les conoce con el nombre de foliaciones.

**Lema C.3.2.**  $\Delta$  y  $\Gamma$  definen una foliación C.1 (de dimensión 2) sobre la variedad  $M_Q$ .

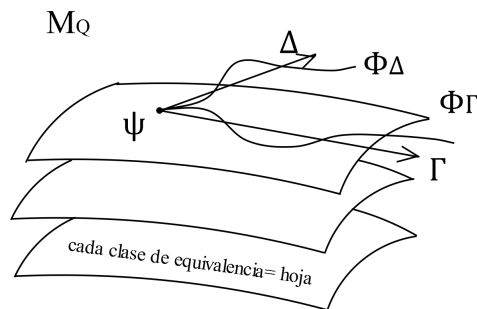


Figura C.1: Foliación de  $M_Q$  dada por  $\Delta$  y  $\Gamma$

Por tanto, se tiene una distribución integrable generada por  $\Gamma$  y  $\Delta$  los cuales forman una subálgebra de Lie Abeliana. Cada una de las hojas de la foliación es una clase de equivalencia formada por el conjunto de estados que pertenecen a la misma órbita bajo la acción de  $\mathbb{C}^*$ . Obsérvese que  $\Gamma = J(\Delta)$ .

Por otro lado en el espacio de Hilbert, se suele trabajar con estados normalizados, o en caso de que no se haga, uno debe tener presente la norma del estado a la hora de dar probabilidades y valores medios. Es por ello que nos interesa ver el conjunto de estados incluidos en una de las hojas dadas por la foliación definida por  $\Delta$  y de  $\Gamma$ , ya que estos estados son equivalentes en cuanto a los resultados físicos que se obtienen.

De un modo más gráfico esto implica que dado un  $|\psi\rangle \in \mathcal{H} - \{0\}$  y sea  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , entonces  $|\psi\rangle$  y  $\lambda|\psi\rangle$  pertenecen a la misma clase de equivalencia y es este conjunto de clases de equivalencias al que denominamos **espacio complejo proyectivo**.

**Definición C.3.** La variedad cociente resultante, denotada como  $\mathcal{P}$  y dada por

$$\pi : M_Q \rightarrow \mathcal{P} = M_Q / \mathbb{C}^* \quad (\text{C.21})$$

se llama *espacio complejo proyectivo* y sus puntos representan los estados físicos **puros** de un sistema cuántico:

$$\mathcal{P} \ni [|\psi\rangle] := \pi(|\psi\rangle) \quad |\psi\rangle \in M_Q, \quad (\text{C.22})$$

Conviene recordar que un espacio proyectivo no es lineal y por tanto la suma de dos estados físicos no determina un nuevo estado físico, es decir no existe la suma de clases de equivalencia. Es por ello que es más cómodo trabajar en la variedad real  $M_Q$ , al igual que también lo es en la formulación original de la mecánica cuántica, en la cual trabajamos en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Una vez hemos definido el espacio complejo proyectivo  $\mathcal{P}$  se deben traducir las herramientas y estructuras con las que ha sido dotada  $M_Q$  al espacio proyectivo subyacente, ya que para representar magnitudes físicas reales, estas se deben corresponder con funciones que sean constantes a lo largo de las fibras<sup>5</sup> de la fibración  $\pi : M_Q \rightarrow \mathcal{P}$ , es decir funciones que para estados pertenecientes a la misma clase de equivalencia tomen los mismos valores. Entre otras muchas funciones de este tipo podemos considerar las funciones:

$$e_A = \frac{\langle \psi | A \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (\text{C.23})$$

para las cuales se cumple que  $\Gamma(e_A) = \Delta(e_A) = 0$ , ya que dichas funciones son su propia imagen bajo el pullback<sup>6</sup>  $\pi^* : T^*\mathcal{P} \rightarrow T^*M_Q$ , es decir representan tanto a funciones sobre  $M_Q$  como a funciones definidas sobre el espacio complejo proyectivo  $\mathcal{P}$ .

Es interesante ver la imposibilidad de traducir al espacio complejo proyectivo las formas  $g$  y  $\omega$ . Esto es debido a que dichos tensores están definidos sobre  $M_Q$  y por tanto no podemos proyectarlas mediante la aplicación codiferencial asociada a  $\pi : M_Q \rightarrow \mathcal{P}$ . Es por ello que necesitamos la forma contravariante de dichos tensores,  $G$  y  $\Omega$  ya que bajo la aplicación diferencial proyectan adecuadamente. Sin embargo, mientras que las funciones  $e_A$  definidas anteriormente, son proyectables a través de  $\pi : M_Q \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $G$  y  $\Omega$  no lo son. Es decir, sus derivadas de Lie<sup>7</sup>  $\mathcal{L}_\Delta G = -2G$  y  $\mathcal{L}_\Delta \Omega = -2\Omega$  no se anulan sobre la fibra de la aplicación. Podemos sustituirlos por otros nuevos tensores  $G_{\mathcal{P}}$  y  $\Omega_{\mathcal{P}}$  definidos sobre  $M_Q$  que sí lo sean dados por

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{P}} &:= \langle \psi | \psi \rangle G - \Gamma \otimes \Gamma - \Delta \otimes \Delta \\ \Omega_{\mathcal{P}} &:= \langle \psi | \psi \rangle \Omega - \Gamma \otimes \Delta + \Delta \otimes \Gamma \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Notar que en general cualquier  $G_{\mathcal{P}}$  y  $\Omega_{\mathcal{P}}$  dados por

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{P}} &:= \langle \psi | \psi \rangle G - a\Gamma \otimes \Gamma - b\Delta \otimes \Delta - c\Gamma \otimes \Delta - d\Delta \otimes \Gamma \\ \Omega_{\mathcal{P}} &:= \langle \psi | \psi \rangle \Omega - a'\Gamma \otimes \Gamma - b'\Delta \otimes \Delta - c'\Gamma \otimes \Delta - d'\Delta \otimes \Gamma \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

con  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ , son proyectables. Se han elegido los coeficientes de forma que encontramos la métrica de Fubini-Study (ver [23]) sobre el espacio complejo proyectivo  $\mathcal{P}$ .

Un resultado importante obtenido en [1] es el siguiente:

**Lema C.3.3.** *La acción de  $G_{\mathcal{P}}$  en el conjunto de funciones proyectables corresponde a*

$$G_{\mathcal{P}}(de_A, de_B) = e_{[A,B]_+} - e_A \cdot e_B$$

lo cual implica que si  $A = B$  se obtiene

$$G_{\mathcal{P}}(de_A, de_A) = e_{A^2} - e_A^2$$

de esta forma  $G_{\mathcal{P}}$  está directamente relacionada con las relaciones de indeterminación.

<sup>5</sup>Ver en apéndice A la sección dedicada a campos vectoriales.

<sup>6</sup>Sea  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables. Cada aplicación diferenciable  $F : M \rightarrow N$  tiene asociadas dos aplicaciones entre campos vectoriales y formas dadas por la aplicación diferencial  $F_* : TM \rightarrow TN$  y la codiferencial  $F^* : T^*N \rightarrow T^*M$  respectivamente. De nuevo consultar apéndice A.

<sup>7</sup>En el apéndice A DFN E.13 se encuentra la definición de dicha derivada así como algún ejemplo.

## C.4. La dinámica

En la formulación geométrica de la mecánica Hamiltoniana, se considera una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  y una función  $H \in C^\infty(M)$ , lo que nos permite definir un campo Hamiltoniano  $X_H$  por la relación

$$i_{X_H}\omega = dH \iff X_H = \hat{\omega}^{-1}(dH). \quad (\text{C.26})$$

La expresión en coordenadas de Darboux de  $X_H$  es

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (\text{C.27})$$

por lo que las ecuaciones que determinan las curvas integrales del campo Hamiltoniano  $X_H$ , son las bien conocidas ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (\text{C.28})$$

Para proceder de modo análogo en mecánica cuántica, se considera que el sistema dinámico se encuentra sobre la variedad  $M_Q$  en vez de sobre  $\mathcal{P}$ , ya que resultará más cómodo. Estamos en una variedad Kähler donde hemos construido una forma simpléctica de forma que tenemos el ingrediente básico para aplicar una formulación Hamiltoniana. En este caso la función Hamiltoniana viene dada por

$$f_H = \frac{1}{2} \langle \psi | H \psi \rangle \quad (\text{C.29})$$

siendo  $H$  el operador Hamiltoniano definido sobre  $\mathcal{H}$ . El campo Hamiltoniano será

$$X_H = \Omega(\cdot, df_H) \quad (\text{C.30})$$

cuyas curvas integrales son las soluciones de la ecuación de Schrödinger.

$$i\hbar|\dot{\psi}\rangle = H|\psi\rangle \quad (\text{C.31})$$

Veamos que efectivamente, las curvas integrales del campo Hamiltoniano se corresponden con las soluciones de la ecuación de Schrödinger. Sea  $A$  un operador autoadjunto en  $\mathcal{H}$ . Entonces la función real  $f_A : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_A(|\psi\rangle) = \frac{1}{2} \langle \psi | A \psi \rangle$  tiene asociada un campo  $X_{f_A}$  tal que:

$$i_{X_{f_A}}\omega = \omega(X_{f_A}, \cdot) = df_A. \quad (\text{C.32})$$

Si se toma un  $|\psi\rangle \in \mathcal{T}_{|\phi\rangle}\mathcal{H}$  entonces,

$$(df_A)_{|\phi\rangle}(|\psi\rangle) \quad (\text{C.33})$$

es la derivada direccional de  $f_A$  en el punto  $|\phi\rangle$  en la dirección  $|\psi\rangle$ , de esta forma

$$\begin{aligned} (df_A)_{|\phi\rangle}(|\psi\rangle) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \phi + t\psi | A(\phi + t\psi) \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\langle \phi | A \phi \rangle + [\langle \psi | A \phi \rangle + \langle \phi | A \psi \rangle] t + \langle \psi | A \psi \rangle t^2) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} (\langle \psi | A \phi \rangle + \langle \phi | A \psi \rangle) = \frac{1}{2} (\langle \psi | A \phi \rangle + \langle \phi | A^\dagger \psi \rangle^*) \\ &= \text{Re} \{ \langle \psi | A \phi \rangle \} = \text{Im} \{ \langle -J A |\phi\rangle | |\psi\rangle \} \\ &= \omega(-J A |\phi\rangle, |\psi\rangle) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

así comparando con (C.32) se obtiene que,

$$X_{f_A}(|\phi\rangle) = -JA|\phi\rangle \quad (\text{C.35})$$

Por tanto  $X_H$  es un campo globalmente Hamiltoniano y además es también un *campo de Killing*<sup>8</sup>,  $\mathcal{L}_{X_H}g = 0$ , lo cual significa que la forma Hermítica es “invariante” bajo la acción del grupo de isometrías asociado al campo  $X_H$ . Debido a estas dos propiedades tenemos que es un campo que conserva la estructura Riemanniana y la estructura simpléctica y por tanto también conserva la estructura Hermítica. Es por ello que la evolución temporal de cualquier sistema mecano cuántico se puede escribir en términos de las ecuaciones de Hamilton clásicas. Como se enuncia en [26] “Schrödinger’s equation is Hamilton’s equation in disguised!”.

## C.5. La información espectral

Un tema pendiente es el hecho de cómo recuperar la noción de autovalor y autovector de los operadores definidos sobre  $\mathcal{H}$  a nivel de las funciones definidas sobre  $M_Q$  o sobre el proyectivo. Sea  $A$  un operador autoadjunto,

$$A \mapsto e_A(|\psi\rangle) = \frac{\langle\psi| A\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \quad (\text{C.36})$$

entonces,

- Los autovectores corresponden a los puntos críticos de las funciones  $e_A$ , es decir,

$$de_A(|\psi\rangle_a) = 0 \text{ si y sólo si } |\psi\rangle_a \text{ es un autovector de } A$$

donde cabe destacar que si  $|\psi\rangle$  es autovector de  $e_A$  entonces  $e^{i\alpha}|\psi\rangle$  también lo será.

- Los autovalores correspondientes están dados por  $e_A(|\psi\rangle_a)$ .

Resaltar que mediante el uso de los tensores de Poisson  $\Omega$  y de Riemann  $G$ , se ha podido recuperar el producto de Lie y el producto de Jordan respectivamente, para las funciones cuadráticas.

## C.6. Equivalencia: formalismo de Schrödinger y de Heisenberg

Los formalismos desarrollados en el capítulo 1 y en el apéndice, sobre el espacio de estados y sobre el espacio de observables, son equivalentes. En [1], se encuentra como haciendo uso de la aplicación,

$$F : M_Q \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (|\psi\rangle, A) \mapsto \frac{1}{2} \langle\psi| A\psi\rangle = f_A(|\psi\rangle), \quad (\text{C.37})$$

podemos construir si fijamos  $|\psi\rangle$ , una aplicación  $F(|\psi\rangle) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ , de forma que a cada elemento  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  asociamos un elemento en  $\mathcal{O}^*$ . A esta aplicación se le conoce como aplicación momento [27],

$$\mu : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{O}, \quad \mu(|\psi\rangle) = \rho_\psi := |\psi\rangle \langle\psi|, \quad (\text{C.38})$$

---

<sup>8</sup>Ver en apéndice A DFN E.15

donde  $\rho_\psi(A) = \frac{1}{2} \langle \psi | A \psi \rangle$  para todo  $A \in \mathcal{O}$ .

Como consecuencias de esta aplicación  $\mu$  definida, se puede demostrar que si  $A \in \mathcal{O}$  entonces:

$$\mu_*(G + i\Omega) = R + i\Lambda, \quad \mu_*(X_H) = \hat{X}_H, \quad \mu^*(\hat{A}) = f_A, \quad (\text{C.39})$$

donde se ha usado la notación  $\hat{X}_H$  para distinguir ambos campos Hamiltonianos, puesto que están definidos en distintos espacios.

## Apéndice D

# QZE: Efecto Zenón cuántico

Este efecto recibe su nombre en 1976 [4]. Se trata de un fenómeno existente en el mundo cuántico, por el cual uno podría congelar un sistema cuántico en un estado determinado [18], [19]. Pensemos por ejemplo en un sistema cuántico inestable [28]. Su espacio de configuración se divide en los estados para los cuales la partícula no ha decaído y en aquellos estados en los que sí. Mediante una observación del estado sin decaer lo que hacemos es 'colapsar' (proyectar), la función de ondas al estado sin decaer (visión a la von Neumann). La probabilidad de que el estado decaiga, después de este colapso crece cuadráticamente con el tiempo para tiempos suficientemente cortos. Si lo que se hace es realizar infinitas observaciones en intervalos muy cortos de tiempo de forma que no dejemos evolucionar al sistema, estaremos confinando el estado de la partícula al estado sin decaer, de manera que podremos evitarlo finalmente. De esta forma, un estado que sea continuamente observado nunca decaerá [29]. Resaltar que este es un efecto teórico, corroborado años más tarde en el laboratorio.

Dentro de las tres maneras equivalentes que tenemos de describir este efecto, [19], existe una consistente en suponer a las medidas sobre el sistema cuántico como proyecciones instantáneas sobre el mismo. Es en esta formulación donde aplicaremos la teoría desarrollado hasta ahora.

### D.1. Formulación geométrica de la dinámica de Zenón

Como hemos venido observando desde el principio, la dinámica en una formulación geométrica de la mecánica cuántica, viene determinada por el campo vectorial asociado al Hamiltoniano (1.13), así como la evolución de las estructuras subyacentes en dicho espacio (2.26). Nos preguntamos pues ahora si una evolución como la de Zenón puede ser descrita por uno de estos campos. Cabe destacar que es la primera vez que esta cuestión ha sido abordada y que por tanto su resolución es original para este trabajo.

La dinámica de Zenón para esta formulación a base de proyecciones supone que: partiendo de un determinado estado cuántico  $\rho$ , del cual queremos proteger un determinado subespacio, proyectamos sobre dicho subespacio (midiendo) y entonces dejamos evolucionar el sistema cuántico durante un cierto intervalo temporal  $\tau$  suficientemente pequeño. Tras ese lapso, el sistema se ve proyectado de nuevo, siendo estas proyecciones instantáneas y generando así puntos de discontinuidad en el flujo. Consideremos pues la transformación,

$$\rho_Z(t_0 + \tau) = P e^{-iH\tau} P \rho(t_0) P e^{iH\tau} P, \quad (\text{D.1})$$

donde  $P$  son operadores de proyección, los cuales son operadores de contracción ( $\|P\| \leq 1$ ),

y  $H$  el operador Hamiltoniano. De esta forma

$$\rho_Z(t_0 + \tau) = P\rho(t_0)P - i \left[ \underbrace{PHP}_{H_Z} - P\rho(t_0)PHP \right] \tau + O(\tau^2) = P\rho(t_0)P + [H_Z, P\rho(t_0)P] + O(\tau^2).$$

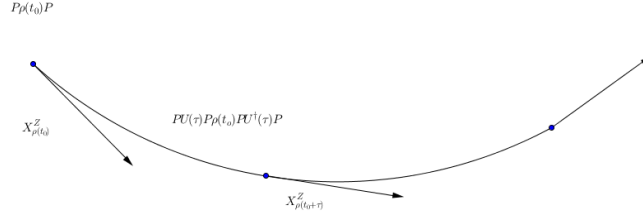


Figura D.1: Explicación visual de la dinámica de Zenón: proceso de medida y obtención del campo.

Supongamos que  $s \in [0, \tau]$  es el parámetro de la curva durante ese intervalo, entonces tomando la derivada de esta evolución respecto a dicho parámetro y evaluando en  $s = 0$  obtenemos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\rho_Z(t_0 + s)}{ds} = [H_Z, P\rho(t_0)P] = [P, [H_Z, \rho(t_0)]]_+ - [H_Z, \rho(t_0)].$$

Lo que aquí hemos obtenido es el generador infinitesimal que gobierna la dinámica del sistema durante un cierto período de tiempo  $\tau$ , definiendo así una ecuación diferencial análoga a la dada para sistemas cuánticos abiertos,

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = Z(\rho(t)),$$

donde  $Z$  viene dado por,

$$Z : \mathfrak{u}(\mathcal{H})^* \longrightarrow \mathfrak{u}(\mathcal{H})^*, \quad \rho \mapsto Z(\rho) = [P, [H_Z, \rho(t_0)]]_+ - [H_Z, \rho(t_0)]. \quad (\text{D.2})$$

Así su campo vectorial asociado,  $X^Z$  se calcula haciendo uso de (1.10). De esta forma se sigue que

$$X_\rho^Z(\hat{A}) = \langle \hat{A}, Z(\rho) \rangle = \left\langle Z^\dagger(\hat{A}), \rho \right\rangle_{\mathcal{O}} = \langle -[P, [H_Z, \hat{A}]]_+ + [H_Z, \hat{A}], \rho \rangle_{\mathcal{O}}. \quad (\text{D.3})$$

No obstante, cabe destacar que aunque aparentemente hemos determinado un campo de vectores en todo el espacio, sólo hemos determinado un conjunto de vectores tangente a la curva evolución, en un conjunto numerable de puntos. La intención será pues aplicar el límite de medidas muy frecuentes, es decir un lapso temporal  $\tau \rightarrow 0$ , de forma que recuperemos el vector tangente a la curva en todo punto de la misma.

## Apéndice E

# Algunos conceptos de geometría diferencial

**Definición E.1.** Una variedad topológica  $M$  de dimensión  $n$  es un espacio localmente Euclídeo, lo que significa que para todo punto  $x \in M$  existe un entorno abierto  $\mathcal{U}$  de  $x$  y un homeomorfismo  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $\varphi(\mathcal{U})$  abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

Al par  $(\mathcal{U}, \varphi)$  se le denomina *carta local* de  $M$  en  $x$ . Un ejemplo, de variedad topológica es la circunferencia,  $S^1$  donde como carta puede ser usada entre otras la proyección estereográfica desde el polo norte  $N = (0, 1)$  o la parametrización de la circunferencia con un ángulo  $\alpha$ .

Una vez se ha introducido el concepto de variedad topológica, podemos pasar a definir *variedad diferenciable*.

**Definición E.2.** Una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$  y de clase  $C^\infty$  es una variedad topológica de dimensión  $n$  tal que existe un sistema de cartas locales  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  que satisfacen

$$\text{I) } \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha = M$$

$$\text{II) Para todo } \alpha, \beta \in A \text{ tal que } \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset \text{ la aplicación}$$

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (\text{E.1})$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  (y, por tanto un difeomorfismo).

El significado de esta definición es que podemos encontrar un conjunto de abiertos  $\mathcal{U}_\alpha$  cuya unión cubra toda la variedad de forma que aunque dos de ellos solapen, el cambio de coordenadas de uno a otro es un difeomorfismo, es decir que el cambio de un sistema de coordenadas a otro es suave.

Como ejemplo sencillo de variedad diferenciable podemos pensar en cualquier abierto de  $\mathbb{R}^n$ , donde existe una carta global  $(\mathbb{R}^n, id_R)$

Cabría pensar qué relación tiene esta definición matemática tan abstracta con la física. Para apreciar dicho enfoque se recomienda leer el capítulo 2 de [30]. La definición aquí dada de variedad diferenciable no es la más general ni la más rigurosa. Para ver desarrollos más rigurosos de este concepto ver [31] y [32].

**Definición E.3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ . Llamaremos vector tangente en  $p$  a toda aplicación  $X_p : \mathcal{C}^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique:

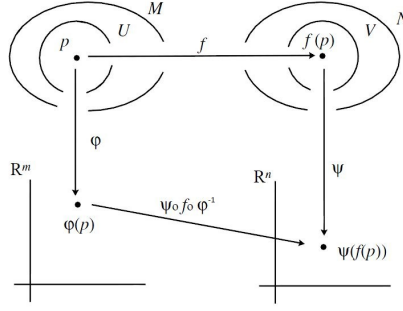


Figura E.1: Representación visual. [23]

- I)  $X_p$  es lineal, es decir:  $X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
- II)  $X_p(f, g) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$  (Regla de Leibniz).

**Definición E.4.** LLamaremos espacio vectorial tangente a  $M$  en el punto  $p$  al espacio vectorial de los vectores en el punto  $p$ . Será denotado por  $T_p(M)$ .

De forma intuitiva un campo vectorial en un abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  es una aplicación que asigna a cada punto  $p \in \mathcal{U}$  un vector  $X_p \in T_p\mathcal{U}$ . El conjunto

$$T\mathcal{U} = \bigcup_{p \in \mathcal{U}} T_p\mathcal{U}$$

es el conjunto de todos los pares  $(p, X_p)$  con  $p \in \mathcal{U}$  y  $X_p \in T_p\mathcal{U}$ . Si denotamos por  $\tau$  la proyección  $\tau: T\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  definida por  $\tau(p, X_p) = p$ , un campo vectorial en  $\mathcal{U}$  es una aplicación  $X: \mathcal{U} \rightarrow T\mathcal{U}$  tal que  $\tau \circ X = \text{id}_{\mathcal{U}}$ .

**Definición E.5.** El conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

se denomina **fibrado tangente** de la variedad  $M$ .

Además diremos que un campo vectorial  $X$  es diferenciable en la variedad  $M$  si y sólo si para cada carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  de  $M$ , las componentes del campo respecto de dicha carta son diferenciables. El conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre la variedad  $M$  al cual denotamos  $\mathfrak{X}(M)$ , es un espacio vectorial real respecto a la operación suma y producto por escalar y puede ser dotado de una estructura de  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo.

### Ejemplo:

Si la variedad es  $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ . El campo gravitatorio viene definido por algo proporcional al campo,

$$X_p = \sum_{i=1}^3 \frac{x^i}{r^3} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Por otro lado el dual de  $T_pM$  recibe el nombre de espacio vectorial cotangente en  $p \in M$  y se denota  $T_p^*M$ . Sus elementos se llaman covectores en  $p$  o vectores covariantes. Por ejemplo, para cada función  $f \in \mathcal{C}^\infty(p)$ , podemos definir un covector en  $p$  que denotamos  $(df)_p$  por  $(df)_p(X_p) = X_p f$ .

Una 1-forma diferencial en una variedad diferenciable  $M$  es una aplicación

$$\omega : M \rightarrow T^*M$$

tal que  $\omega_p \in T_p^*M$ .

**Definición E.6.** El conjunto

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

se denomina **fibrado cotangente** de la variedad  $M$ .

Asociado a este espacio podemos definir la proyección (natural)

$$\pi_M : T^*M \rightarrow M$$

definida como sigue

$$\pi_M(p, \omega_p) = p, \quad \omega_p \in T_p^*M$$

Por ejemplo cuando un sistema mecánico admite una variedad diferenciable  $Q$  como espacio de configuración, la descripción del sistema en el espacio de fases hace uso del fibrado cotangente, en donde el campo vectorial Hamiltoniano  $X_H$  en  $T^*Q$  admite una expresión coordenada,

$$X_H|_{(q,p)} = a^i(q,p) \frac{\partial}{\partial q^i} |_{(q,p)} + b^i(q,p) \frac{\partial}{\partial p^i} |_{(q,p)}$$

Describamos a continuación lo que denominamos diferencial y codiferencial de una aplicación  $F : M \rightarrow N$ , siendo  $M$  y  $N$  variedad diferenciales.

Sea  $F : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable de  $M$  a  $N$ . Para cada punto  $p \in M$ , la diferencial de  $F$  en  $p \in M$ , denotada como  $F_{*p}$ , definida mediante  $F_{*p}(X_p)f = X_p(f \circ F)$ ,  $\forall f \in C^\infty(F(p))$  es un morfismo de espacios vectoriales,  $F_{*p} : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ . Por tanto  $F$  induce una aplicación  $F_*$  que transporta vectores tangentes  $X_p$  del conjunto de curvas que pasan por  $p$ , a vectores tangentes  $X_{F(p)}$  de curvas que pasan por  $F(p) \forall p \in M$ .

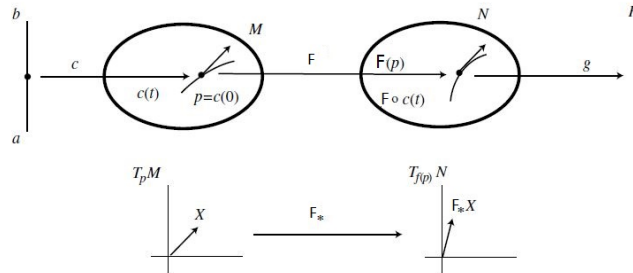


Figura E.2: La aplicación  $F : M \rightarrow N$  induce la aplicación diferencial  $F_* : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ .  $c(t)$  representa una curva sobre  $M$  y  $g$  una función definida sobre  $N$ . Imagen sacada de [23]

Del mismo modo una aplicación  $F : M \rightarrow N$  induce una aplicación  $F^* : T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ , de modo que para cada 1-forma diferencial  $\omega$  definida sobre  $N$  podemos definir una 1-forma diferencial en  $M$ , que se denotará  $F^*(\omega)$  y se dice imagen recíproca (pullback) de  $\omega$ , mediante

$$[(F^*(\omega)X)](p) = [(F^*(\omega))]_p X_p = \omega_{F(p)} [F_{*p}(X_p)], \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Una vez definido el espacio tangente  $T_pM$  y su dual  $T_p^*M$  podemos construir el álgebra tensorial  $\mathcal{T}_pM$  correspondiente a  $T_pM$ , siendo los elementos de un subespacio de  $\mathcal{T}_pM$  de la forma  $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \dots \otimes v_{r+s}$  donde  $v_i \in T_pM$  con  $i = 1, \dots, r$  y  $v_i \in T_p^*M$  para los  $s$  índices restantes. Dicho elementos reciben el nombre de tensores en  $p$  de tipo  $(r, s)$ .

**Definición E.7.** Si  $X$  es un campo vectorial sobre una variedad  $M$ , se dice que una curva diferenciable  $\gamma : I \rightarrow M$ , es una curva integral del campo  $X$  si

$$\frac{d\gamma}{dt}|_{t=t_0} = X_{\gamma(t_0)} \quad (\text{E.2})$$

Si tomamos una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $p \in \gamma(I)$  podemos expresar la curva en coordenadas de forma que  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $c = \varphi \cdot \gamma$ . La curva  $c$  así definida es una curva integral del campo  $\varphi_*(X)$  de forma que

$$\frac{dc^i}{dt} = F^i(c^1(t), \dots, c^m(t)) \quad (\text{E.3})$$

donde  $F^i$  son las componentes del campo  $\varphi_*(X)$  en  $\mathbb{R}^m$  respecto de la base canónica en  $\mathbb{R}^m$ .

**Definición E.8.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Se llama forma simpléctica en  $M$  a una 2-forma cerrada ( $d\omega = 0$ ) no degenerada (rango máximo)  $\omega$ . El par  $(M, \omega)$  recibe el nombre de variedad simpléctica. En particular, cuando  $\omega$  es exacta ( $\omega = d\Theta$ ) se dice que  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica exacta.

Un ejemplo sencillo de variedad simpléctica es la esfera  $S^2$  con la 2-forma diferencial dada por

$$\omega = \sin\theta d\phi \wedge d\theta \quad (\text{E.4})$$

donde  $\omega$  viene a representar el elemento de área inducido sobre la esfera unidad.

El estudio de las variedades simplécticas está basado en el teorema siguiente, el cual caracteriza localmente dichas variedades.

**Teorema E.0.1.** (*Teorema de Darboux*) Si  $\omega$  es una forma simpléctica en una variedad diferenciable  $M$ , para cada punto  $x \in M$  hay una carta local coordenada en torno a  $x$  en la cual las coordenadas de  $\omega$  son constantes.

*Nota.* Si  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica de dimensión finita  $2n$ , entonces, alrededor de cada punto  $x \in M$ , hay una carta coordenada  $(\mathcal{U}, \varphi)$ , en donde la aplicación  $\varphi$  está dada por  $\varphi(x) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ , tal que  $\omega$  se escribe como:

$$\omega_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$$

A tales coordenadas  $(q^i, p_i)$  se les denomina coordenadas canónicas o de Darboux.

**Definición E.9.** Sea  $M$  una variedad  $m$ -dimensional y  $T_p M$  el espacio tangente en  $p \in M$ . Una distribución  $k$ -dimensional sobre  $M$  es una elección de un subespacio lineal  $k$ -dimensional  $D_p \subset T_p M$  para cada punto  $p \in M$ . Dicha distribución denotada como  $D$ , viene dada por

$$D = \coprod_{p \in M} D_p \subset TM$$

**Definición E.10.** Llamamos forma diferencial de grado  $r$ , o simplemente  $r$ -forma en  $M$  a todo campo tensorial covariante de tipo  $(0, r)$ , totalmente antisimétrico.

**Definición E.11.** Denotamos por  $\bigwedge^r(M)$  el conjunto de las  $r$ -formas definidas sobre  $M$ , y por  $\bigwedge^0(M)$  a  $C^\infty(M)$ .

**Definición E.12.** Si  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , se denota por  $i_X$  o  $i(X)$  a la aplicación  $i_X : \bigwedge(M) \rightarrow \bigwedge(M)$  (conjunto de formas antisimétricas sobre  $M$ ) tal que

i)  $i_X \bigwedge^r(M) \subset \bigwedge^{r-1}(M)$  si  $r \geq 1$  mientras que  $i_X \bigwedge^0(M) = 0$ .

ii) Si  $\omega \in \bigwedge^r(M)$ , entonces  $i_X \omega(X_1, \dots, X_{r-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{r-1})$ .

**Definición E.13.** Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $X$  un campo vectorial y  $\Phi_t$  el flujo de dicho campo. Si  $p \in M$ , entonces recordar que  $X_p$  es el vector tangente al flujo en el punto  $p$ , es decir  $X_p = \frac{d}{dt} \Phi_t(p)|_{t=0}$ . De esta forma como  $(Xf)(p) = X_p f$  se puede ver que

$$(Xf)(p) = \frac{d}{dt} [f(\Phi_t(p))] |_{t=0} \quad (\text{E.5})$$

La generalización para campos vectoriales covariantes es:

Para cada campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y cada campo  $r$ -covariante  $\omega$  se define la derivada de Lie de  $\omega$  según el campo vectorial  $X$  como el campo  $r$ -covariante,

$$(\mathcal{L}_X \omega)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\Phi_t^* \omega)(p) - \omega(p)] \quad (\text{E.6})$$

Además a continuación se presentan algunas propiedades útiles de la derivada de Lie.

i) Si  $f \in C^\infty(M)$  y  $\omega$  es un campo  $r$  veces covariante, para cada campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,

$$\mathcal{L}_X(f\omega) = (Xf)\omega + f\mathcal{L}_X\omega$$

ii) Si  $T$  y  $S$  son dos tensores sobre la variedad  $M$ , entonces

$$\mathcal{L}_X(T \otimes S) = (\mathcal{L}_X T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_X S)$$

iii) Para cada  $f \in C^\infty(M)$  y cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,

$$\mathcal{L}_X df = d(Xf) = d(\mathcal{L}_X f)$$

iv) Se puede demostrar que si  $X$  e  $Y$  son dos campos vectoriales diferenciables definidos sobre  $M$ , entonces

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Como ejemplo vamos a calcular  $\mathcal{L}_X G$  siendo  $G = g_{ij}(q) dq_i \otimes dq_j$

$$\mathcal{L}_X G = (Xg_{ij}(q)) dq_i \otimes dq_j + g_{ij}(q) d(Xq_i) \otimes dq_j + g_{ij}(q) dq_i \otimes d(Xq_j)$$

**Definición E.14.** Se llama sistema dinámico Hamiltoniano a una terna  $(M, \omega, H)$  donde  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica y  $H$  una función  $C^\infty(M)$ . El campo vectorial del sistema dinámico viene dado por  $X_H = \hat{\omega}^{-1}(dH)$ , o de forma equivalente por la solución de  $i_{X_H} \omega = dH$ .

De hecho el campo vectorial  $X_H$  correspondiente a  $H$  se escribe en coordenadas canónicas como

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (\text{E.7})$$

dado que

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \quad (\text{E.8})$$

De aquí se deduce que efectivamente las curvas integrales del campo vectorial  $X_H$  son determinadas en coordenadas canónicas por ecuaciones como las de Hamilton.

**Definición E.15.** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial sobre dicha variedad. Si al practicar un desplazamiento  $\epsilon X$  infinitesimal, se genera una isometría (se preserva la métrica), el campo  $X$  se dice campo de Killing. Se puede ver que entonces  $\mathcal{L}_X g = 0$ .

**Definición E.16.** Se dice que un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es localmente Hamiltoniano respecto de la estructura simpléctica  $\omega$  si  $i_X \omega$  es una 1-forma cerrada. En caso de que  $i_X \omega$  sea exacta se dice que es Hamiltoniano. El conjunto de los campos localmente Hamiltonianos, así como el subconjunto Hamiltoniano, son espacios vectoriales reales.

Además existe un teorema que demuestra, haciendo uso de la identidad de homotopía y de que  $\omega$  es una forma simpléctica (por tanto cerrada) que un campo es localmente Hamiltoniano si y sólo si  $\mathcal{L}_X \omega = 0$ , lo cual implica que bajo la acción del flujo de dicho campo  $\omega$  no varía.

**Definición E.17.** Sea  $V$  un subespacio vectorial tal que  $P_n$  es el proyector que proyecta sobre  $V$ . Si  $V$  es invariante bajo  $A$  entonces

$$PAP = AP$$

Además si no sólo  $V$  es invariante bajo  $A$  sino que también  $V^\perp$  lo es, entonces

$$(1 - P)A(1 - P) = A(1 - P)$$

lo cual implica que,

$$AP = PA$$

**Definición E.18.** Si  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  es una acción del grupo de Lie  $G$  en la variedad diferenciable  $M$ , se llama órbita del punto  $m \in M$  al subconjunto  $\Phi_m(G)$ .

**Definición E.19.** Sea  $M$  una variedad compleja con estructura compleja  $J$  y una métrica Riemanniana  $g$ . La 2-forma alterna, y por tanto antisimétrica

$$\omega(X, Y) := g(JX, Y)$$

es la llamada forma de Kähler asociada.

Además remarcar que visto  $TM$  junto con  $J$  como un espacio complejo tangente sobre  $M$ , y  $\mathfrak{h}$  una métrica Hermítica en  $TM$ . Entonces  $g = \operatorname{Re} \mathfrak{h}$  es una métrica Riemanniana compatible en  $M$ , es decir,  $g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in TM$  e  $\omega = \operatorname{Im} \mathfrak{h}$  es la forma Kähler asociada:

$$g(JX, Y) = \operatorname{Re} \mathfrak{h}(JX, Y) = \operatorname{Re} \mathfrak{h}(iX, Y) = \operatorname{Re}(-i \mathfrak{h}(X, Y)) = \operatorname{Im} \mathfrak{h}(X, Y) = \omega(X, Y)$$

Vice versa, si  $g$  es una métrica Riemanniana compatible en  $M$  y  $\omega$  es la forma Kähler, entonces  $\mathfrak{h} = g + i\omega$  es una forma Hermítica en  $TM$ . Además las propiedades del producto Hermítico dado por  $\mathfrak{h}$ , implican que  $g$  es un producto interno definido positivo y que  $\omega$  es una forma simpléctica, ambos no degenerados.

En resumen, el triplete  $(J, g, \omega)$  equipa a  $\mathcal{M}_Q$  con la estructura de un espacio de Kähler.

Por último introduzcamos el concepto de paréntesis de Schouten, el cual fue utilizado en la contracción de álgebras de Lie.

**Proposición 3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Entonces existe un único paréntesis  $\mathbb{R}$ -lineal  $[\cdot, \cdot]_S : \mathfrak{X}^\bullet(M) \times \mathfrak{X}^\bullet(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\bullet(M)$  tal que

1)  $[\cdot, \cdot]$  es de grado -1.

2) Para todo  $X \in \mathfrak{X}^1(M)$  y  $Q \in \mathfrak{X}^\bullet(M)$

$$[X, Q]_S = \mathcal{L}_X Q.$$

En particular el paréntesis coincide con el usual paréntesis de Lie de campos vectoriales sobre  $\mathfrak{X}^1(M)$ .

3) Para todo  $P \in \mathfrak{X}^p(M)$  y  $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$

$$[P, Q]_S = -(-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, P]_S.$$

4) Para todo  $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ ,  $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$  y  $R \in \mathfrak{X}^\bullet(M)$

$$[P, Q \wedge R]_S = [P, Q]_S \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R]_S.$$

5) Para todo  $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ ,  $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$  y  $R \in \mathfrak{X}^r(M)$

$$(-1)^{(p-1)(r-1)} [P, [Q, R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)} [Q, [R, P]] + (-1)^{(r-1)(q-1)} [R, [P, Q]]$$

*Demostración.* Se puede encontrar en [33]. □



## Apéndice F

### Ejemplo de contracción

Consideremos el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  de las rotaciones en tres dimensiones en el espacio Euclídeo y apliquemos la teoría de contracciones de álgebras de Lie. En este caso haremos uso del punto de vista pasivo, donde las transformaciones  $U(\epsilon)$  son consideradas como un cambio de base.

Podemos elegir como base  $B = \{a_1, a_2, a_3\}$  de forma que

$$[a_1, a_2] = a_3, \quad [a_2, a_3] = a_1, \quad [a_3, a_1] = a_2.$$

Para este caso las únicas subálgebras son dimensión uno. Así podemos elegir por ejemplo la generada por  $a_3$ , es decir,  $V_R = \langle e_3 \rangle$  y  $V_N = \langle e_1, e_2 \rangle$  y  $b_1^\epsilon = U(\epsilon)e_1 = \epsilon a_1$ ,  $b_2^\epsilon = U(\epsilon)a_1 = \epsilon a_2$ ,  $b_3^\epsilon = U(\epsilon)a_3 = a_3$  y así encontramos que,

$$\begin{aligned} [b_1^\epsilon, b_2^\epsilon] &= \epsilon^2 b_3^\epsilon \\ [b_2^\epsilon, b_3^\epsilon] &= b_1^\epsilon \\ [b_3^\epsilon, b_1^\epsilon] &= b_2^\epsilon, \end{aligned}$$

y en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  se obtiene

$$[b_1^0, b_2^0] = 0, \quad [b_2^0, b_3^0] = b_1^0, \quad [b_3^0, b_1^0] = b_2^0,$$

que es el álgebra  $\mathfrak{e}(2)$  del grupo Euclídeo en dos dimensiones (rotaciones y traslaciones en  $\mathbb{R}^2$ ).

Análogamente se obtendría para el punto de vista activo, sin más que recurrir a (2.7).