Álgebras de Banach y transformadas integrales

Francisco José Mengual Bretón

Trabajo de fin del grado de Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Prólogo

La teoría de los anillos normados, conocidos posteriormente como álgebras de Banach, tiene su origen en la primera mitad del siglo XX. Trabajos de Hilbert, Banach y Riesz ayudaron a Gelfand a desarrollar toda una teoría dentro del Análisis Matemático que culminó con la publicación del libro [GRS] que recoge los elementos fundamentales de esta teoría. Publicaciones posteriores (en particular de Larsen y Bonsall-Duncal [L, BD]) han presentado la teoría de forma elemental y accesible para un gran público.

En este trabajo presentaremos los resultados fundamentales de esta teoría, probaremos nuevos resultados para un tipo de transformadas de Gelfand, las llamadas transformadas integrales y daremos aplicaciones de estos resultados en la resolución de ecuaciones diferenciales y en diferencias. En este sentido hemos dividido el trabajo en dos capítulos:

La intención del primer capítulo es introducir al lector en la teoría de álgebras de Banach. Sus dos primeras secciones tienen un carácter puramente preliminar; en ellas recordaremos las nociones básicas y citaremos algunos resultados fundamentales sobre álgebras de Banach. A continuación nombraremos los ejemplos canónicos para familiarizar al lector con esta estructura. En las dos últimas secciones desarrollamos la teoría de representación de Gelfand (cuyo objetivo es introducir la transformada de Gelfand que exponemos al final) para el caso general de las álgebras de Banach reales y complejas. Con ello hemos querido aportar un punto de vista más amplio, que incluye el caso original de la teoría, las álgebras de Banach complejas conmutativas, y añade el de las álgebras de Banach reales y el caso no conmutativo.

El segundo capítulo se centra en un tipo de transformada de Gelfand, las llamadas transformadas integrales. Definiendo un producto de convolución adecuado, hemos conseguido unificar varios productos de convolución muy conocidos como casos particulares del primero; hablamos de los productos de convolución de Volterra, Fourier, Laplace, Zeta y Dirichlet. Gracias a este punto de vista global que nos otorga el producto generalizado, hemos podido entender mejor algunas relaciones que había entre las transformadas que dan los productos individuales; por ejemplo, la relación de contenido entre espectros. En la última sección introducimos otros productos de convolución, con los que veremos otra forma de obtener las transformadas correspondientes; entre estas últimas encontraremos la transformada coseno.

Para las últimas páginas hemos escogido, a modo de ilustración, algunas aplicaciones de estas transformadas integrales en la resolución de ecuaciones diferenciales y en diferencias. Con ello se pretende mostrar como las propiedades algebraicas de estas transformadas de Gelfand sobre espacios funcionales, pueden utilizarse para transformar un problema difícil en un espacio de partida, en otro sencillo en un espacio de llegada; lo que permite, bajo ciertas condiciones (semisimplicidad), obtener la solución del problema inicial.

Por último me gustaría dar las gracias a mis tutores, los profesores Pedro J. Miana y José E. Galé de la Universidad de Zaragoza, por su ayuda y consejos que han permitido la elaboración de este trabajo.

Summary

Given $A \equiv (A, +, \cdot, \star, \|\cdot\|)$ a Banach algebra over a field $\mathbb{F}$, we consider the set consisted of maximal regular bilateral ideals of A

$$\mathfrak{M}(A) = \{M \subsetneq A \ : \ M \trianglelefteq_{m,e} A\}.$$

The intersection of all these maximal regular bilateral ideals is a bilateral ideal known as the radical of the algebra A. It's denoted by $\mathrm{Rad}(A) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A)} M$. A is called a **radical** algebra if it hasn't got maximal regular bilateral ideals. Otherwise, in the case that A satisfies that $Rad(A) = \{0\}$, A is called **semisimple**.

It's known that, given a bilateral ideal M of A, this is a maximal regular bilateral ideal of A if and only if the quotient algebra A/M is a division Banach algebra.

Gelfand-Mazur's theorems classify (up to isomorphism) the real and complex division Banach algebras: in the complex case there is only one, the algebra of complex numbers $\mathbb{C}$; in the real case there are three, the algebra of real numbers $\mathbb{R}$, the (real) algebra of complex numbers $\mathbb{C}$ and the algebra of quaternion numbers $\mathbb{H}$. We consider the set consisted of these (up to isomorphism) division Banach algebras over $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

$$DB(\mathbb{F}) = \begin{cases} \{\mathbb{C}\}, & \mathbb{F} = \mathbb{C}, \\ \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}, & \mathbb{F} = \mathbb{R}. \end{cases}$$

By the previous results and the isomorphism theorem of algebras, it's clear that $\mathfrak{M}(A)$ is non-empty if and only if there is an epimorphism from A to some division algebra of $DB(\mathbb{F})$. Due to $\{0\} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C} \leq \mathbb{H}$, we can define D_A as the great of these Banach algebras such that there is some epimorphism $\psi : A \to D_A$ (at least, $D_A = \{0\}$ with the null-homomorphism). It's clear that any other epimorphism $\psi : A \to D$ induces an homomorphism $\iota_D \circ \psi : A \to D \hookrightarrow D_A$. Now, we define the **spectrum** of A, $\triangle(A)$, as the set consisted of non-null-homomorphisms from A to D_A. We consider too the set $\triangle_\infty(A) = \triangle(A) \sqcup \{\theta_A\} = Hom(A, D_A)$, where θ_A is the null-homomorphism. It's clear that $\mathfrak{M}(A)$ is non-empty if and only if D_A is non-trivial. Let us suppose that this is the case. It's immediate that the group $Aut_{\mathbb{F}}(D_A)$ acts on $\triangle(A)$ by $(\alpha, \psi) \mapsto \alpha \circ \psi$. Therefore, we can consider the quotient space induced by this action, $\underline{\triangle}(A) = Aut_{\mathbb{F}}(D_A) \setminus \triangle(A)$, consisted of the orbits $[\psi] = \{\alpha \circ \psi \ : \ \alpha \in Aut_{\mathbb{F}}(D_A)\}$.

We prove the Gelfand's representation theorem for real and complex Banach algebras. It states that

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker} : \underline{\triangle}(A) & \to & \mathfrak{M}(A) \\ [\psi] & \mapsto & \mathrm{Ker}([\psi]) = \mathrm{Ker}\psi \end{array}$$

is a bijection. Also, the proof reveals that $\triangle(A) \subset \mathscr{B}(A, D_A)$. Then, we equip the spectrum with the trace topology induced by the weak* topology of $\mathscr{B}(A, D_A)$. This is called the **Gelfand topology** of the spectrum.

We will say that A is **representable** if its spectrum is a non-empty family of uniformly bounded operators. We will denote C_A as the infimum of those bounds, i.e., the infimum ot the constants $C > 0$ such that $\triangle(A) \subset C\mathbb{D}_{\mathscr{B}(A, D_A)}$. In this case, a set $R \subset \triangle(A)$ is called a **representative** of A if it is

a fundamental domain for the action of the group $Aut_{\mathbb{F}}(D_A)$ and it's closed in $\triangle(A)$. In this case, R is a locally compact Hausdorff space with the trace topology induced by the Gelfand topology. Moreover, R is compact if and only if the null-homomorphism is not in its closure. Otherwise, the null-homomorphism is the Alexandroff one-point compactification of R, $\infty_R = \theta_A$.

Finally, if A is a representable Banach algebra and R is a representative of its, each automorphism $\alpha \in Aut_{\mathbb{F}}(D_A)$ defines a continuous homomorphism between de Banach algebras A and $\mathscr{C}_0(A, D_A)$

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot}^{\alpha} : A &\to \mathscr{C}_0(R, D_A) \\ x &\mapsto \Big(\psi \mapsto (\alpha \circ \psi)(x)\Big), \end{aligned}$$

with $\|\widehat{\cdot}^{\alpha}\| \leq C_A$. Its kernel is the radical of A, $\mathrm{Ker}\widehat{\cdot}^{\alpha} = \mathrm{Rad}(A)$ (regardless of the automorphism α). Each range algebra $\widehat{A}^{\alpha} = \mathrm{Ran}\widehat{\cdot}^{\alpha}$ separates points of R, and there are all isometrically isomorphic among them. The fact that each $\widehat{x}$ belongs to $\mathscr{C}_0(R, D_A)$ is known as the **Riemann-Lebesgue Lemma**. The homomorphism $\widehat{\cdot} = \widehat{\cdot}^{1_{D_A}}$ is known as the **Gelfand transform** in the Banach algebra A for the representative R. In the same way is known the set consisted of the homomorphsims $\widehat{\cdot}^{\alpha}$ as the **family of Gelfand transforms** in the Banach algebra A for the representative R. It's immediate that each Gelfand transform is injective if and only if A is semisimple. In the case that $D_A = \mathbb{F}$, there is only one representative, $R = \triangle(A)$, and the Gelfand transform is unique.

At the end of the chapter we illustrate this theory with the canonical example, the representable Banach algebra over $\mathbb{F}$ consisted of the continuous D-valued functions over a compact Hausdorff space X, $\mathscr{C}(X, D)$, where $D \in DB(\mathbb{F})$.

Given a locally compact abelian group $G \equiv (G, \cdot, \tau_G)$ (briefly LCA), we know that there is a unique (up to positive multiplicative constant) Haar measure (translation-invariant) λ. Let us suppose that the associated measure space is σ-finite (briefly σLCA). Let C a measurable subset of G, with postive measure ($\lambda(C) > 0$), and $\omega : C \to \mathbb{R}^+$ a weigh (measurable) function such that $(\chi_C \omega)(ts) \leq \chi_C(ts)\omega(t)\omega(s)$ for each $s, t \in C$. Les us consider the Banach space consisted os classes of integrable functions on C under the weight ω, $L^1_\omega(C)$, with the usual norm

$$\|f\|_\omega = \int_C |f(t)|\omega(t)d\lambda(t) = \int_G (\chi_C |f| \omega)(t)d\lambda(t), \qquad f \in L^1_\omega(C).$$

Then, with the **convolution product** in $L^1_\omega(C)$

$$(f * g)(t) = \int_G (\chi_C f)(ts^{-1})(\chi_C g)(s)d\lambda(s), \qquad t \in C,\ f, g \in L^1_\omega(C),$$

$L^1_\omega(C)$ becomes a commutative complex Banach algebra. For example, the group of the real line with the sum, $\mathbb{R}$, and the measurable subset $[0,1]$, give us the Banach algebra known as the **Volterra algebra**. It's a radical algebra.

Now, let us suppose that our C is a semigroup S inside G, and our weight ω is an homomorphism from S to $\mathbb{R}^+$ (the positive real numbers with the product) $\vartheta \in Hom(S, \mathbb{R}^+)$. We define the **dual semigroup** of S as the set consisted of the homomorphisms from S to $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z| \leq 1\}$, $\widehat{S} = Hom(S, \mathbb{D}^*)$. Then, we prove that the dual semigroup is bijective with the spectrum of $L^1_\vartheta(S)$. Therefore, if we induce the Gelfand topology on $\widehat{S}$, we have the homeomorphism correspondence $\widehat{S} \simeq \triangle(L^1_\vartheta(S))$. Finally, the Gelfand transform in the Banach algebra $L^1_\vartheta(S)$ is

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} : L^1_\vartheta(S) &\to \mathscr{C}_0(\widehat{S}) \\ f &\mapsto \Big(\gamma \mapsto \int_S f(t)(\vartheta\gamma)(t)d\lambda(t)\Big). \end{aligned}$$

It's immediate that, if S_1 and S_2 are semigroups inside G such that $S_1 \subset S_2$, then $\widehat{S_2} \subset \widehat{S_1}$. So, the spectrums are related in the same way.

For the total (semi)group $S = G$, its convolution product and its Gelfand transform are known as the **Fourier convolution product** and the **Fourier transform** respectively. In the main work we study this transform for several groups.

If G is a linearly ordered group (admits a total order $\preceq$ translation-invariant) in which the intervals are measurables, we have the Banach algebra induced by the interval $C = G_+$ (semigroup consisted of the elements $\succeq e_G$). In particular, for the linearly ordered σLCA groups $(\mathbb{R}, \leq)$ and $(\mathbb{Z}, \leq)$ ($\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_0^+$ and $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}^+$), its convolution products are known as the **Laplace convolution product** and the **Zeta convolution product** respectively. In the same way are known its Gelfand transforms.

For the group of positive rational numbers with the product, $\mathbb{Q}^+$, and the semigroup $\mathbb{N}$ inside it, its convolution product and its Gelfand transform are known as the **Dirichlet convolution product** and the **Dirichlet transform** respectively.

This generalized convolution product is not the only one that we can consider. In fact, we will see three other convolution products. Also, one of them (the **cosine convolution product**) gives us the **cosine transform**.

In a general way, the Gelfand transform can transform an equation on a representable Banach algebra A in other equation on the Banach algebra $\mathscr{C}_0(A, D_A)$. This is a powerful tool to solve different problems in some areas of mathematics, for example, in Number Theory and Differential Equations Theory. For the last pages of this work we have chosen some applications of these integral transforms in the mentioned areas: first, we solve the general linear order differential (difference) equation with constant coefficients and with simple eigenvalues; then, we solve the n-dimensional heat equation and the wave equation in the half-line (with Neumann boundary conditions).

Índice general

Capítulo 1

Álgebras de Banach y teoría de representación de Gelfand

En este primer capítulo introducimos la teoría básica de álgebras de Banach. Un álgebra de Banach es un espacio que tiene estructura algebraica de "álgebra" y topológica de "espacio de Banach" compatibles entre sí. Vamos a verlo con algún detalle. (Por las limitaciones del espacio hemos condensado la primera sección en los resultados fundamentales de álgebras de Banach; para más detalles consultar el Apéndice A.1).

1.1. Resultados fundamentales de álgebras de Banach

Damos por conocidas las nociones de grupo, semigrupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial sobre un cuerpo, así como las de subestructuras correspondientes a las estructuras anteriores (subgrupo, subsemigrupo, etc.). En este contexto, recordamos que un álgebra sobre un cuerpo es un conjunto dotado de una estructura de espacio vectorial sobre dicho cuerpo y de otra de anillo compatibles entre sí:

Definición 1.1.1. Un **álgebra sobre un cuerpo** $\mathbb{F}$ es un sistema algebraico de la forma $(A,+,\cdot,\star)$, donde, por un lado, $(A,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y, por otro lado, $(A,+,\star)$ es un anillo y además se satisface la condición

$$\alpha\cdot(x\star y) = (\alpha\cdot x)\star y = x\star(\alpha\cdot y), \qquad x,y\in A,\ \alpha\in\mathbb{F}.$$

El álgebra se dice **conmutativa** si la operación $\star$ es conmutativa. Se dice **unitaria** si tiene identidad (distinta del neutro 0_A), el cual denotaremos por e_A; en tal caso, se dice que es **de división** si todo elemento $x\in A\setminus\{0_A\}$ tiene inverso y lo denotaremos por x^{-1}.

Dada un álgebra $A\equiv(A,+,\cdot,\star)$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, denotaremos $Alg_{\mathbb{F}}(A)$ por el conjunto formado por las subálgebras de A. Especial importancia tienen el siguiente tipo de subálgebras.

Definición 1.1.2. Un subespacio vectorial I de A se dice que es un **ideal a izquierda** (**derecha**) de A si $x\star z\in I$ ($z\star x\in I$) para todo $x\in A$, $z\in I$. Esto equivale a decir que $\star: A\times I\to I$ ($\star: I\times A\to I$) está bien definida. El ideal se dice **bilátero** si es ideal a izquierda y derecha a la vez y lo denotaremos por $I\trianglelefteq A$.

Recordemos que las subálgebras son subespacios vectoriales en los que $\star: B\times B\to B$ está bien definida, luego todo ideal es subálgebra. Además, si el ideal I de A es bilátero, las operaciones definidas de forma natural sobre el conjunto cociente formado por las clases laterales de I, $A/I=\{x+I\ :\ x\in A\}$, dotan a este conjunto de estructura de álgebra A.1. Se conoce a A/I como el **álgebra cociente** de A por I.

Definición 1.1.3. Un ideal a izquierda (derecha) propio M de A se llama **ideal maximal a izquierda (derecha)** de A si A no tiene ideales a izquierda (derecha) propios que contienen estrictamente a M. Un ideal bilátero se dice **maximal bilátero** si es ideal maximal a izquierda y derecha a la vez y lo denotaremos por $M \trianglelefteq_m A$.

Definición 1.1.4. Un ideal a izquierda (derecha) I de A se llama **ideal regular a izquierda (derecha)** de A si existe un $u \in A$ ($v \in A$) tal que $xu - x \in I$ ($vx - x \in I$) para todo $x \in A$. En tal caso, u (v) se dice identidad módulo I. Un ideal bilátero se dice **regular bilátero** si es ideal regular a izquierda y derecha a la vez y lo denotaremos por $I \trianglelefteq_e A$. En tal caso, notemos que $u - v = (vu - v) - (vu - u) \in I$, es decir, $u + I = v + I$.

Es claro que si A es unitaria, todo ideal es regular con $u = e_A$; de modo que el interés de estos ideales es exclusivo de las álgebras no unitarias. La existencia de estos ideales en un álgebra es significativa por el siguiente teorema.

Teorema 1.1.5. *Todo ideal regular a izquierda (derecha) de un álgebra tiene un ideal maximal a izquierda (derecha) que lo contiene; además, dicho ideal maximal es regular a izquierda (derecha).*

Así como los ideales biláteros permiten definir una estructura de álgebra sobre el espacio cociente, los que además son regulares dotan a este álgebra de unidad, de ahí el nombre de identidad módulo I; de hecho, $u + I = v + I = e_{A/I}$. Si además de regular bilátero el ideal es maximal bilátero, el álgebra cociente, además de unitaria, es de división.

Teorema 1.1.6. *Un ideal bilátero M de A es maximal regular bilátero si y solo si el álgebra cociente de A por M es de división. Esquemáticamente,*

$$M \trianglelefteq_{m,e} A \quad \Leftrightarrow \quad A/M \text{ de división.}$$

Como podremos apreciar más adelante, estos ideales juegan un papel importante en la teoría de representación de Gelfand, de modo que usaremos una notación específica para dicho conjunto,

$$\mathfrak{M}(A) = \{M \subsetneq A \;:\; M \trianglelefteq_{m,e} A\}.$$

La intersección de todos estos ideales maximales regulares biláteros es un ideal bilátero conocido como el **radical** del álgebra A y se denota por $\operatorname{Rad}(A) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A)} M$. Se dice que A es un **álgebra radical** si carece de dichos ideales maximales regulares biláteros. En el caso contrario, si además se tiene que $\operatorname{Rad}(A) = \{0_A\}$, se dice que A es **semisimple**.

Aunque las álgebras pueden definirse sobre cualquier cuerpo, nosotros nos centraremos exclusivamente en las reales ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) y, especialmente, en las complejas ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$). La razón es que la completitud del cuerpo base es fundamental en las siguientes secciones debido a muchos resultados del Análisis Funcional en los que se cimenta esta teoría. En este sentido también se han estudiado las álgebras de Banach sobre el cuerpo (completo) de los números p-ádicos; sin embargo, nosotros nos centraremos en los casos que hemos mencionado.

Damos por conocidas las nociones de espacio vectorial, normado y de Banach, así como las de homeomorfismo, isometría, etc.. En este contexto, un álgebra de Banach es un conjunto dotado de una estructura de álgebra y de otra de espacio de Banach compatibles entre sí:

Definición 1.1.7. Un **álgebra normada** (sobre $\mathbb{F}$) es un espacio de la forma $(A, \star, \|\cdot\|)$, donde, por un lado, $(A, \star)$ es un álgebra (sobre $\mathbb{F}$) y, por otro lado, $(A, \|\cdot\|)$ es un espacio normado (sobre $\mathbb{F}$) y además satisface la condición de continuidad de la operación $\star$ dada por

$$\|x \star y\| \leq \|x\| \, \|y\|, \qquad x, y \in A.$$

Se dice **álgebra de Banach** si el espacio es completo, es decir, si $(A, \|\cdot\|)$ es de Banach. Si el álgebra es unitaria, supondremos sin pérdida de generalidad (renormando si hiciese falta) que $\|e_A\| = 1$.

Claramente toda subálgebra (cerrada) de un álgebra normada (de Banach) es en sí misma un álgebra normada (de Banach). Si I es un ideal bilatero de A, el álgebra cociente de A por I es un álgebra normada con la norma dada por $\|x+I\| = \inf_{y\in I}\|x+y\|$ para cada $x+I \in A/I$. Además, si A es de Banach e I es cerrado en A, entonces A/I también es de Banach.

Proposición 1.1.8. *La clausura de un ideal propio regular a izquierda (derecha) de un álgebra de Banach A es también un ideal propio regular a izquierda (derecha) de A.*

Como consecuencia inmediata de esta proposición se tiene que los ideales maximales regulares a izquierda (derecha) de un álgebra de Banach son siempre cerrados en ella. Uniendo este hecho con los resultados anteriores es inmediato el siguiente teorema.

Teorema 1.1.9. *Un ideal bilátero M de un álgebra de Banach A es maximal regular bilátero si y solo si el álgebra cociente de A por M es de Banach de división. Esquemáticamente,*

$$M \trianglelefteq_{m,e} A \text{ de Banach} \quad \Leftrightarrow \quad A/M \text{ de Banach de división.}$$

Este último resultado es crucial en la teoría de representación de Gelfand que estudiaremos más adelante; ya que, como afirman los siguientes teoremas, las álgebras de Banach de división (salvo isomorfismo) se reducen a unos casos concretos.

Teorema 1.1.10 (Gelfand-Mazur, [L] Theorem 1.5.1)**.** *Toda álgebra de Banach de división compleja es isométricamente isomorfa a* $(\mathbb{C},\cdot,|\cdot|)$.

Teorema 1.1.11 (Mazur, [BD] Theorem 1.14.7)**.** *Toda álgebra de Banach de división real es isomorfa a $(D,\cdot,|\cdot|)$, siendo D el álgebra de los números reales $\mathbb{R}$, el álgebra de los números complejos $\mathbb{C}$ o el álgebra de los cuaterniones $\mathbb{H}$. Además, si $D=\mathbb{R}$, el isomorfismo es isométrico.*

De este modo parece claro que el conjunto $\mathfrak{M}(A)$ está relacionado con estas álgebras de Banach de división. Por ello usaremos también una notación específica para dicho conjunto:

$$DB(\mathbb{F}) = \begin{cases} \{\mathbb{C}\}, & \mathbb{F}=\mathbb{C}, \\ \{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}, & \mathbb{F}=\mathbb{R}. \end{cases}$$

Continuamos nuestro recorrido a través de la teoría de álgebras de Banach haciendo ahora una parada para ver algunos ejemplos de éstas. En los teoremas de Gelfand-Mazur ya hemos empezado a nombrar algunos. En la siguiente sección se exponen estos y otros más.

1.2. Ejemplos básicos

Ejemplo. $(\{0\},\cdot,|\cdot|)$ es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{F}$ de forma trivial. Por otro lado, cualquier espacio de Banach A es un álgebra de Banach con el porducto $x\star y=0$ en A de forma trivial.

Ejemplo. $(\mathbb{C},\cdot,|\cdot|)$ es un álgebra de Banach compleja con el producto usual y la norma euclídea (también dada por $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$, siendo $\bar{\cdot}$ la conjugación en $\mathbb{C}$). Además es conmutativa, unitaria y de división. Por otro lado, $(D,\cdot,|\cdot|)$ es un álgebra de Banach real, para $D=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$ con el producto usual y la norma euclídea (también dada por $|x|=\sqrt{x\bar{x}}$, siendo $\bar{\cdot}$ la conjugación en D). Además son unitarias y de división; y conmutativas salvo si $D=\mathbb{H}$.

Ejemplo. Para cada espacio topológico (X,τ_X) localmente compacto y de Hausdorff, y $D\in DB(\mathbb{F})$, el espacio vectorial formado por las funciones continuas de X en D acotadas, $\mathscr{C}_b(X,D)$, ó que se anulan en el "infinito" (en el punto de compatificación de Alexandroff, ∞_X), $\mathscr{C}_0(X,D)$, ó de soporte compacto, $\mathscr{C}_c(X,D)$, con el producto usual de funciones y la norma infinito dada por $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$

para cada f en el espacio correspondiente, son álgebras normadas sobre $\mathbb{F}$; en particular, $\mathscr{C}_0(X,D)$ y $\mathscr{C}_b(X,D)$ son de Banach. Además, se tiene la relación de contenido $\mathscr{C}_c(X,D) \trianglelefteq \mathscr{C}_0(X,D) \trianglelefteq \mathscr{C}_b(X,D)$. Son conmutativas salvo si $D = \mathbb{H}$. $\mathscr{C}_b(X,D)$ es unitaria con $e_{\mathscr{C}(X,D)}$ la función constante 1; las otras dos son unitarias si y solo si X es compacto; en tal caso, todas son iguales a $\mathscr{C}(X,D)$ y el supremo en la norma es un máximo por el teorema de Weierstrass. Si además X es finito ($|X| = n$), entonces la topología es la discreta y el álgebra es D^n.

Hasta aquí, los productos $\star$ de estos ejemplos de álgebras de Banach se han basado en el producto usual en D para alguna $D \in DB(\mathbb{F})$. Se dice que éstas son álgebras de Banach de **producto puntual**. Especial interés tienen otras álgebras cuyo producto no es el puntual. Unas de éstas son las llamadas **álgebras de operadores** (por las limitaciones del espacio hemos incluido éstas y algunas más del producto puntual en A.2).
Por comodidad del lector, reservamos para el capítulo 2 los ejemplos de unas álgebras de Banach cuyos productos se conocen como **productos de convolución**, ya que aplicaremos para las mismas la teoría de representación de Gelfand.

1.3. Teoría de representación de Gelfand

Supongamos dada $A \equiv (A, \star, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach (sobre $\mathbb{F}$). Recordemos que, donde lo habíamos dejado, parecía que los conjunto $\mathfrak{M}(A)$ y $DB(\mathbb{F})$ estaban relacionados. Efectivamente, si $\mathfrak{M}(A)$ es no vacío y $M \in \mathfrak{M}(A)$, la proyección canónica π_M es un epimorfismo de A en un álgebra de Banach de división, luego existe un epimorfismo de A en un elemento de $DB(\mathbb{F})$. Recíprocamente, si existe un epimorfismo de A en algún elemento de $DB(\mathbb{F})$, su núcleo está en $\mathfrak{M}(A)$ por el teorema de isomorfía A.1. En las siguientes páginas afinaremos más esta idea.

Antes de empezar recordemos algunos hechos sobre los elementos de $DB(\mathbb{F})$. Sus subálgebras son: $Alg_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}) = \{\{0\}, \mathbb{F}\}$, $Alg_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \{\{0\}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y $Alg_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = \{\{0\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\langle 1, \mathrm{I}\rangle, \mathbb{H} \ : \ \mathrm{I} \in \mathbb{S}_{\Im\mathbb{H}}\}$, donde hemos denotado $\mathbb{R}\langle 1, \mathrm{I}\rangle$ por el espacio vectorial real con base $\{1, I\}$, y $\mathbb{S}_{\Im\mathbb{H}}$ por la esfera en el espacio vectorial de la parte imaginaria de $\mathbb{H}$, $\Im\mathbb{H} = \mathbb{R}\langle i,j,k\rangle$. Notemos que todas las álgebras no triviales de $Alg_{\mathbb{F}}(D)$ son álgebras de Banach de división $\big(\mathbb{R}\langle 1, \mathrm{I}\rangle \simeq \mathbb{C}\big)$. Su grupo de automorfismos es: $Aut_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}) = \{1_{\mathbb{F}}\}$, $Aut_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \{1_{\mathbb{C}}, \overline{1_{\mathbb{C}}}\}$ y $Aut_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = \{(1_{\mathbb{R}}, U) \ : \ U \in SO(3)\}$, donde hemos denotado $\overline{1_{\mathbb{C}}}$ por la conjugación en $\mathbb{C}$ y $SO(3)$ por el grupo de matrices unitarias de $\mathscr{M}(3, \mathbb{R})$.

Debido a la relación de contenidos $\{0\} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C} \leq \mathbb{H}$, tiene sentido definir D_A como la mayor de estas álgebras de Banach tal que existe algún epimorfismo $\psi : A \to D_A$ (como poco $D_A = \{0\}$ con el homomorfismo nulo). Está claro que cualquier otro epimorfismo $\psi : A \to D$ induce un homomorfismo $\imath_D \circ \psi : A \to D \hookrightarrow D_A$.

Definición 1.3.1. El conjunto formado por los homomorfismos no nulos de A en D_A se conoce como el **espectro** de A y se denota por $\triangle(A)$.

También denotaremos $\triangle_\infty(A)$ por $\triangle(A) \sqcup \{\theta_A\} = Hom(A, D_A)$, siendo θ_A el homomorfismo nulo. De hecho, este homomorfismo está relacionado con la subálgebra total A y el álgebra trivial $\{0\}$ ya que $\theta_A : A \to A/A = \{0\}$; sin embargo, hemos apartado a este homomorfismo del espectro, al álgebra total de los ideales maximales y al álgebra trivial de las álgebras de Banach de división porque es más conveniente así a la hora de trabajar con la transformada de Gelfand.

Es claro que el espectro es no vacío si y solo si D_A es no trivial. Entonces, por lo comentado al principio de esta sección, $\triangle(A)$ es no vacío si y solo si $\mathfrak{M}(A)$ es no vacío. En tal caso, es fácil comprobar que la aplicación $Aut_{\mathbb{F}}(D_A) \times \triangle(A) \to \triangle(A)$ dada por $(\alpha, \psi) \mapsto \alpha \circ \psi$ es una acción del grupo $(Aut_{\mathbb{F}}(D_A), \circ)$ sobre $\triangle(A)$. Definimos así el espacio cociente inducido por esta acción, $\underline{\triangle}(A) = Aut_{\mathbb{F}}(D_A) \setminus \triangle(A)$, cuyos elementos son las órbitas $[\psi] = \{\alpha \circ \psi \ : \ \alpha \in Aut_{\mathbb{F}}(D_A)\}$. En particular, si $D_A = \mathbb{F}$, entonces $\underline{\triangle}(A) = \triangle(A)$.

Lema 1.3.2. *Dadas dos subálgebras $D_1, D_2 \leq D_A$, si existe un isomorfismo $\beta : D_1 \to D_2$, entonces existe un automorfismo $\alpha \in Aut_{\mathbb{F}}(D_A)$ tal que $\alpha \circ \imath_1 = \imath_2 \circ \beta$ $\big($siendo $\imath_j = \imath_{D_j} : D_j \hookrightarrow D_A\big)$.*

Teorema 1.3.3 (Teorema de representación de Gelfand)**.** *La siguiente aplicación es una biyección*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker} : \underline{\triangle}(A) & \to & \mathfrak{M}(A) \\ [\psi] & \mapsto & \mathrm{Ker}([\psi]) = \mathrm{Ker}\psi. \end{array}$$

Demostración. Por un lado, si dos homomorfismos en $\triangle(A)$ están en la misma órbita es que están relacionados por un automorfismo, luego tienen el mismo núcleo. Por otro lado, un homomorfismo no nulo de A en D_A es un epimorfismo de A en alguna subálgebra no trivial de D_A, y como estas son álgebras de división, el núcleo está en $\mathfrak{M}(A)$ por el teorema de isomorfía A.1. Luego Ker está bien definida.

Veamos que es sobreyectiva. Sea $M \in \mathfrak{M}(A)$. Como A/M es un álgebra de Banach de división, ésta es isomorfa a alguna $D \in DB(\mathbb{F})$; es decir, existe un isomorfismo $\widetilde{\psi} : A/M \to D$. Entonces, $\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi_M : A \to A/M \to D$ es un epimorfismo y por definición, necesariamente, $D \leq D_A$. Así $\psi = \imath \circ \widetilde{\psi} \circ \pi_M : A \to D \hookrightarrow D_A$ es un homomorfismo en $\triangle(A)$ con $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Ker}(\imath \circ \widetilde{\psi} \circ \pi_M) = \mathrm{Ker}\pi_M = M$.

Veamos que es inyectiva. Para ello basta ver que, si $\psi_1, \psi_2 \in \triangle(A)$ tienen el mismo núcleo M, entonces $[\psi_1] = [\psi_2]$. Sea pues ese el caso. Entonces, por el teorema de isomorfía, $\beta = \widetilde{\psi_2} \circ \widetilde{\psi_1}^{-1} : \mathrm{Ran}\psi_1 \to A/M \to \mathrm{Ran}\psi_2$ es un isomorfismo. Aplicando el lema anterior sabemos que existe un automorfismo $\alpha \in Aut_{\mathbb{F}}(D_A)$ tal que $\alpha \circ \imath_1 = \imath_2 \circ \beta$. Todo esto da como resultado el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\pi_M} & A/M & \xrightarrow{\widetilde{\psi_1}} & \mathrm{Ran}\psi_1 & \xrightarrow{\imath_1} & D_A \\ \| & & \| & & \downarrow\beta & & \downarrow\alpha \\ A & \xrightarrow{\pi_M} & A/M & \xrightarrow{\widetilde{\psi_2}} & \mathrm{Ran}\psi_2 & \xrightarrow{\imath_2} & D_A \end{array}$$

Luego $\psi_2 = \alpha \circ \psi_1$, es decir, $[\psi_1] = [\psi_2]$. $\square$

En la demostración anterior está implícito el siguiente hecho: todo homomorfismo $\psi \in \triangle(A)$ es continuo por ser composición de funciones continuas, $\psi = \imath \circ \widetilde{\psi} \circ \pi_M$. En particular, $\triangle(A) \subset \mathscr{B}(A, D_A)$ con $\|\psi\| \leq \|\imath\| \|\widetilde{\psi}\| \|\pi_M\| = \|\widetilde{\psi}\|$ para cada $\psi \in \triangle(A)$.

Sobre el espacio vectorial $\mathscr{B}(A, D_A)$ se define la **topología débil***, τ_{ω^*}, como la generada por la familia de seminormas $\{|\cdot|_x \ : \ x \in A\}$, siendo $|\cdot|_x : \mathscr{B}(A, D_A) \to \mathbb{R}_0^+$ dada por $\psi \mapsto |\cdot|_x(\psi) = |\psi(x)|$. De este modo, $(\mathscr{B}(A, D_A), \tau_{\omega^*})$ es un espacio vectorial topológico de Hausdorff con base local de entornos para cada $\psi \in \mathscr{B}(A, D_A)$ de la forma

$$U(\psi; \varepsilon; F) = \{\varphi \in \mathscr{B}(A, D_A) \ : \ |\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in F\}, \qquad \varepsilon > 0, \ F \text{ finito } \subset A.$$

También es conocida como la topología de la convergencia puntual; ya que, una red de operadores $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \underset{\rightarrow}{\Lambda}} \subset \mathscr{B}(A, D_A)$ τ_{ω^*}-converge a un operador $\psi \in \mathscr{B}(A, D_A)$ si y solo si converge punto a punto en D_A. Esquemáticamente,

$$\psi_\lambda \underset{\lambda \in \underset{\rightarrow}{\Lambda}}{\longrightarrow} \psi \ \text{ en } \tau_{\omega^*} \quad \Leftrightarrow \quad \psi_\lambda(x) \underset{\lambda \in \underset{\rightarrow}{\Lambda}}{\longrightarrow} \psi(x) \ \text{ en } \tau_{D_A} \ \ \forall x \in A.$$

Definición 1.3.4. Sobre el espectro $\triangle(A)$ se define la **topología de Gelfand** como la topología heredada de la topología débil*, $\tau_\triangle = \tau_{\omega^*}\big|_{\triangle(A)}$.

También consideraremos la topología $\tau_{\triangle_\infty} = \tau_{\omega^*}\big|_{\triangle_\infty(A)}$ sobre $\triangle_\infty(A)$. Ambos son de Hausdorff por herencia. Denotaremos a su base local inducida de entornos por $U_\triangle$ y $U_{\triangle_\infty}$ respectivamente.

Definición 1.3.5. Diremos que el álgebra de Banach A es **representable** si su espectro es una familia no vacía de operadores uniformemente acotados de $\mathscr{B}(A, D_A)$. Denotaremos C_A por el ínfimo de esas cotas, es decir, de los $C > 0$ tal que $\triangle(A) \subset C\mathbb{D}_{\mathscr{B}(A, D_A)}$ (notemos que $C_A > 0$ por ser el espectro no vacío).

Proposición 1.3.6. *Si el álgebra de Banach A es representable, entonces $\triangle_\infty(A)$ es compacto y $\triangle(A)$ es localmente compacto. Además, $\triangle(A)$ es compacto si y solo si el homomorfismo nulo θ_A no está en su clausura; en el caso contrario, es su punto de compactificación de Alexandroff, $\theta_A = \infty_\triangle$.*

Demostración. Por el teorema de Banach-Alaoglu[1], $C_A\mathbb{D}_{\mathscr{B}(A,D_A)}$ es τ_{ω^*}-compacta. Entonces, como $\triangle_\infty(A) \subset C_A\mathbb{D}_{\mathscr{B}(A,D_A)}$ y $(\mathscr{B}(A,D_A),\tau_{\omega^*})$ es de Hausdorff, basta probar que $\triangle_\infty(A)$ es τ_{ω^*}-cerrado. Consideremos pues dada una red de homomorfismos $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\underset{\to}{\Lambda}} \subset \triangle_\infty(A)$ τ_{ω^*}-convergente a un operador $\psi \in \mathscr{B}(A,D_A)$. Veamos que ψ es homomorfismo; es decir, que $\psi(x\star y) = \psi(x)\psi(y)$ para cada $x,y\in A$. Sean pues $x,y\in A$. Si x ó $y = 0_A$ trivial. Si no, para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño tomemos $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{3}\min\left\{1, \frac{1}{C_A\|x\|}, \frac{1}{C_A\|y\|}\right\}$. Como $\|\psi_\lambda\| \le C_A$ para cada $\lambda \in \underset{\to}{\Lambda}$, también $\|\psi\| \le C_A$ por el teorema de Banach-Steinhaus (véase [M1] Teorema 3.17). La τ_{ω^*}-convergencia garantiza que existe $\lambda_0 \in \underset{\to}{\Lambda}$ tal que $\psi_\lambda \in U(\psi;\delta;x,y,x\star y)$ para cada $\lambda \ge \lambda_0$. Entonces: $|\psi(x\star y) - \psi(x)\psi(y)| \le$

$$\begin{aligned}
&\le\ |\psi(x\star y) - \psi_{\lambda_0}(x\star y)| + |\psi_{\lambda_0}(x)\psi_{\lambda_0}(y) - \psi_{\lambda_0}(x)\psi(y)| + |\psi_{\lambda_0}(x)\psi(y) - \psi(x)\psi(y)| \le \\
&\le\ |\psi(x\star y) - \psi_{\lambda_0}(x\star y)| + \|\psi_{\lambda_0}\|\|x\||\psi_{\lambda_0}(y) - \psi(y)| + \|\psi\|\|y\||\psi_{\lambda_0}(x) - \psi(x)| \le \\
&\le\ \delta + C_A\|x\|\delta + C_A\|y\|\delta < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, necesariamente $\psi(x\star y) = \psi(x)\psi(y)$.

Veamos ahora que cada homomorfismo no nulo $\psi \in \triangle(A)$ admite una base local de entornos relativamente compactos en $\triangle(A)$. Sea pues $\psi \in \triangle(A)$ y $U_\triangle(\psi;\varepsilon,F)$ un entorno cualquiera suyo en $\triangle(A)$. Como ψ es no nulo, $\psi(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in A$ (no nulo). Tomando $x_0' = \frac{\varepsilon}{|\psi(x_0)|}x_0$ y $F' = F \cup \{x_0'\}$, es inmediato comprobar que $U_\triangle(\psi;\frac{\varepsilon}{2};F')$ es un entorno de ψ en $\triangle(A)$ tal que su clausura en $\triangle_\infty(A)$ no contiene al homomorfismo nulo θ_A; entonces, $Cl_\triangle U_\triangle(\psi;\frac{\varepsilon}{2},F') = Cl_{\triangle_\infty} U_\triangle(\psi;\frac{\varepsilon}{2},F')$ es cerrado en $\triangle_\infty(A)$; y, como éste es compacto y de Hausdorff, concluimos que $Cl_\triangle U_\triangle(\psi;\frac{\varepsilon}{2},F')$ es compacto. Finalmente hemos encontrado un entorno de ψ en $\triangle(A)$ relativamente compacto tal que $Cl_\triangle U_\triangle(\psi;\frac{\varepsilon}{2},F') \subset U_\triangle(\psi;\varepsilon,F)$.

Por la forma de los entornos $U_\triangle$ y $U_{\triangle_\infty}$, el último resultado se deduce fácilmente de lo anterior y del teorema de compactificación de Alexandroff, ya que $\triangle_\infty(A) = \triangle(A) \sqcup \{\theta_A\}$. ☐

Definición 1.3.7. Si el álgebra de Banach A es representable, diremos que $R \subset \triangle(A)$ es un **representante** suyo si es un dominio fundamental para la acción del grupo $Aut_{\mathbb{F}}(D_A)$ (contiene exactamente un homomorfismo de cada órbita) y es cerrado en $\triangle(A)$. Sobre él se define la topología heredada de la topología de Gelfand, $\tau_R = \tau_\triangle\big|_R$, a la que nos referiremos como topología de Gelfand sobre el representante R.

Por definición es inmediata la siguiente proposición.

Proposición 1.3.8. *Si el álgebra de Banach A es representable y R es un representante suyo, entonces R es localmente compacto. Además, R es compacto si y solo si el homomorfismo nulo θ_A no está en su clausura; en el caso contrario, es su punto de compactificación de Alexandroff, $\theta_A = \infty_R$.*
Por otro lado, para cada $\alpha \in Aut_{\mathbb{F}}(D_A)$, $\alpha\circ R = \{\alpha\circ\psi\ :\ \psi\in R\}$ es otro representante homeomorfo al inicial. De este modo, $\{\alpha\circ R\ :\ \alpha\in Aut_{\mathbb{F}}(D_A)\}$ es un cubrimiento del espectro $\triangle(A)$ por representantes.

Para ilustrar esta teoría exponemos a continuación su ejemplo básico fundamental.

Ejemplo. Consideremos dado un espacio topológico (X,τ_X) compacto y de Hausdorff, y $D \in DB(\mathbb{F})$. Para cada $x \in X$ definimos la aplicación $\psi_x : \mathscr{C}(X,D) \to D$ por $f \mapsto f(x)$. Es fácil comprobar que $\psi_x \in \triangle(\mathscr{C}(X,D))$ con $\|\psi_x\| = 1$. Definimos así el conjunto $R = \{\psi_x\ :\ x\in X\}$. Denotemos M_x por

[1] El teorema clásico de Banach-Alaoglu dice que $\mathbb{D}_{A^*} = \mathbb{D}_{\mathscr{B}(A,\mathbb{F})}$ es τ_{ω^*}-compacta (véase [R3] Theorem 3.15); sin embargo, se puede generalizar a $\mathbb{D}_{\mathscr{B}(A,D_A)}$ ya que la naturaleza del resultado reside en que el espacio de llegada es de la forma $\mathbb{R}^n$ para poder aplicar los teoremas de Heine-Borel y Tychonoff.

$\mathrm{Ker}\,\psi_x = \{f \in \mathscr{C}(X,D) \ : \ f(x) = 0\}$. Veamos que:
El conjunto R es un representante del álgebra de Banach $\mathscr{C}(X,D)$; en particular, $\mathscr{C}(X,D)$ es representable con $C_{\mathscr{C}(X,D)} = 1$. Además, R y X son homeomorfos.

Demostración. Veamos que $\mathfrak{M}(\mathscr{C}(X,D)) = \{M_x \ : \ x \in X\}$. Dado $M \in \mathfrak{M}(\mathscr{C}(X,D))$, supongamos que es distinto de los anteriores. Entonces, por ser maximales, para cada $x \in X$ existe $f_x \in M$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Por ser funciones continuas, para cada $x \in X$ existe un entorno suyo U_x en X tal que f_x no se anula en él. Como X es compacto y los U_x's forman un recubrimiento abierto suyo, existen unos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que los U_{x_j}'s recubren X. Tomemos la función $f = \sum f_{x_j} \overline{f_{x_j}} \in M$; ésta cumple que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, luego $\frac{1}{f}$ es el inverso de f en $\mathscr{C}(X,D)$ ya que, $(\frac{1}{f})^{-1}(U) = f^{-1}((U \setminus \{0\})^{-1})$ es abierto en X para cualquier U abierto en D. De este modo, $1_X = \frac{1}{f} f \in M$; luego $M = \mathscr{C}(X,D)$, lo cual es una contradicción. Con esto queda probado que R es un dominio fundamental; luego $\triangle(\mathscr{C}(X,D)) = \{\alpha \circ \psi_x \ : \ x \in X, \ \alpha \in Aut_{\mathbb{F}}(D)\}$.

Veamos que R es cerrado en $\triangle(\mathscr{C}(X,D))$. Sea pues $\{\psi_{x_\lambda}\}_{\lambda \in \underset{\rightarrow}{\Lambda}}$ una red en R y $\alpha \circ \psi_x \in \triangle(\mathscr{C}(X,D))$. Sabemos que $\psi_{x_\lambda} \to \alpha \circ \psi_x$ si y solo si $f(x_\lambda) \to \alpha(f(x))$ para cada $f \in \mathscr{C}(X,D)$; veamos que esto último equivale a que $x_\lambda \to x$ y $\alpha = 1_D$. Es claro que lo segundo implica lo primero. Supongamos ahora que $x_\lambda \nrightarrow x$; entonces, tomando un entorno U_x de x en X que no contenga a ningún x_λ, el lema de Urysohn (véase [R2] Theorem 2.12) nos permite construir una función $f \in \mathscr{C}(X,D)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$ para todo $y \in X \setminus U_x$; como $\alpha(1) = 1$, llegamos a $f(x_\lambda) = 0 \nrightarrow 1 = \alpha(f(x))$, lo cual es una contradicción. Supongamos ahora que $\alpha \neq 1_D$, entonces $\alpha(d) \neq d$ para algún $d \in D$. Tomando la función constante $f = d \in \mathscr{C}(X,D)$ llegamos a $f(x_\lambda) = d \nrightarrow \alpha(d) = \alpha(f(x))$, lo cual es una contradicción. Con esto hemos visto además que $R \simeq X$. $\square$

Proposición 1.3.9. *Si para el álgebra de Banach A se tiene que $D_A = \mathbb{F}$, entonces A es representable con $C_A \leq 1$ y $\triangle(A)$ es su único representante. Además, si A es unitaria, entonces $\triangle(A)$ es compacto y $\triangle(A) \subset \mathbb{S}_{\mathscr{B}(A,D_A)}$ (en particular, $C_A = 1$).*

Demostración. Para cada $\psi \in \triangle(A)$, por los teoremas de Gelfand-Mazur se tiene que $\widetilde{\psi}$ es una isometría, luego $\|\psi\| \leq \|\widetilde{\psi}\| = 1$. Entonces, A es representable con $C_A \leq 1$ y $\triangle(A)$ es su único representante ya que $Aut_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}) = \{1_{\mathbb{F}}\}$.

Si A es unitaria, para cada $\psi \in \triangle(A)$ se tiene que $\psi(e_A) = \psi(e_A \star e_A) = \psi(e_A)^2$; como ψ es no nulo, necesariamente $\psi(e_A) \neq 0$, luego $\psi(e_A) = 1$. Entonces, $|\psi(e_A)| = |1| = 1$ y por lo anterior concluimos que $\|\psi\| = 1$. De este modo el espectro $\triangle(A)$ está contenido en la esfera $\mathbb{S}_{\mathscr{B}(A,D_A)}$. Evidentemente el homomorfismo nulo no está en su clausura y, por la última proposición, es compacto. $\square$

Proposición 1.3.10. *Toda álgebra de Banach (no trivial) compleja conmutativa y unitaria es representable.*

Demostración. Como el álgebra es conmutativa y unitaria todos los ideales son regulares biláteros. Como $\{0_A\}$ es un ideal (regular bilátero) de A, existe un ideal maximal (regular bilátero) que lo contiene. En particular, $\mathfrak{M}(A)$ es no vacío y por lo tanto el espectro $\triangle(A)$ tampoco. De este modo $D_A = \mathbb{C}$ y A es representable por la proposición anterior. $\square$

En el capítulo 2 veremos álgebras de Banach que, aun sin ser de estas últimas, son representables.

1.4. Transformada de Gelfand

Teorema 1.4.1. *Si el álgebra de Banach A es representable y R es un representante suyo, cada automorfismo $\alpha \in Aut_{\mathbb{F}}(A)$ define un homomorfismo continuo entre las álgebras de Banach A y $\mathscr{C}_0(R, D_A)$*

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot}^{\alpha} : A &\to \mathscr{C}_0(R,D_A) \\ x &\mapsto \Big(\psi \mapsto (\alpha \circ \psi)(x)\Big), \end{aligned}$$

con $\|\widehat{\cdot}^{\alpha}\| \leq C_A$. *Su núcleo es el radical de A,* $\operatorname{Ker}\widehat{\cdot}^{\alpha} = \operatorname{Rad}(A)$ *(independientemente del automorfismo* α*). Cada álgebra imagen* $\widehat{A}^{\alpha} = \operatorname{Ran}\widehat{\cdot}^{\alpha}$ *separa puntos de R y entre ellas son isométricamente isomorfas. El hecho de que cada* $\widehat{x}$ *esté en* $\mathscr{C}_0(R,D_A)$ *es conocido como el* ***Lema de Riemann-Lebesgue****.*

Demostración. Como la topología sobre R es la de la convergencia puntual, cada x en A define un elemento $\widehat{x}^{\alpha}$ en $\mathscr{C}(R,D_A)$. Si R es compacto, entonces $\mathscr{C}(R,D_A) = \mathscr{C}_0(R,D_A)$; si no, $\lim\limits_{\psi\to\infty_R} \widehat{x}^{\alpha}(\psi) = \lim\limits_{\psi\to\theta_A} (\alpha\circ\psi)(x) = \theta_A(x) = 0$ para cada $x \in A$. Luego $\widehat{\cdot}^{\alpha}$ está bien definida. Veamos que es homomorfismo. Por un lado, para cada $x,y \in A$ y $a,b \in \mathbb{F}$ se tiene que, $\widehat{(ax+by)}^{\alpha}(\psi) = a(\alpha\circ\psi)(x) + b(\alpha\circ\psi)(y) = a\widehat{x}^{\alpha}(\psi) + b\widehat{y}^{\alpha}(\psi) = (a\widehat{x}^{\alpha} + b\widehat{y}^{\alpha})(\psi)$ y $\widehat{x\star y}^{\alpha}(\psi) = (\alpha\circ\psi)(x\star y) = (\alpha\circ\psi)(x)(\alpha\circ\psi)(y) = \widehat{x}^{\alpha}(\psi)\widehat{y}^{\alpha}(\psi) = (\widehat{x}^{\alpha}\widehat{y}^{\alpha})(\psi)$ para cada $\psi \in R$. Además, $\|\widehat{x}^{\alpha}\|_{\infty} = \sup\limits_{\psi\in R}|(\alpha\circ\psi)(x)| = \sup\limits_{\psi\in R}|\psi(x)| \leq \leq \sup\limits_{\psi\in R}\|\psi\||x| \leq C_A|x|$ para cada $x \in A$; por lo tanto, el homomorfismo es continuo con $\|\widehat{\cdot}^{\alpha}\| \leq C_A$. El núcleo de $\widehat{\cdot}^{\alpha}$ está formado por los elementos que están en todos los núcleos de los homomorfismos de R; como éste está en correspondencia biyectiva con $\mathfrak{M}(A)$ a través de sus núcleos, se tiene la tesis. Como el núcleo es indepenediente del automorfismo escogido, las álgebras imagen son isomorfas entre sí por el teorema de isomorfía, y lo son de forma isométrica ya que $\|\widehat{x}^{\alpha}\|_{\infty} = \sup\limits_{\psi\in R}|\psi(x)|$ para cada $x \in A$ independientemente de α. Además, si ψ y φ son homomorfismos distintos de R, por ser éste dominio fundamental se tiene que los núcleos de ψ y φ son distintos (y sin relación de contenido por ser maximales biláteros); de modo que, tomando $x \in A$ que esté en el núcleo de ψ pero no en el de φ se tiene que $\widehat{x}^{\alpha}(\psi) = (\alpha\circ\psi)(x) = 0 \neq (\alpha\circ\varphi)(x) = \widehat{x}^{\alpha}(\varphi)$; por lo tanto el álgebra $\widehat{A}^{\alpha}$ separa puntos de R. $\square$

El homomorfismo $\widehat{\cdot} = \widehat{\cdot}^{1_{D_A}}$ es conocido como la **transformada de Gelfand** en el álgebra de Banach A para el representante R. Así mismo se conoce al conjunto formado por los homomorfismos $\widehat{\cdot}^{\alpha}$ como la **familia de transformadas de Gelfand** en el álgebra de Banach A para el representante R. Cualquier otro de los representantes $\alpha\circ R$ genera la misma familia. Recordemos que, si $D_A = \mathbb{F}$, el representante es único, $R = \triangle(A)$, y también es única la transformada de Gelfand. Cada transformada de Gelfand es inyectiva si y solo si A es semisimple. En tal caso, $\widehat{\cdot}^{\alpha} : A \to \widehat{A}$ es un isomorfismo, luego A puede verse como una subálgebra de $\mathscr{C}_0(R,D)$ para algún R localmente compacto y una $D \in DB(\mathbb{F})$.

Ejemplo. La transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $\mathscr{C}(X,D)$ para el representante R es la identidad. Si $D = \mathbb{F}$, el representante es único $X \simeq R = \triangle(\mathscr{C}(X,D))$ y la transformada es la identidad (única). En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, si $D = \mathbb{C}$ la familia de transformadas está formada por la identidad y la conjugación

$$
\begin{aligned}
\widehat{\cdot}^{u} : \mathscr{C}(X,\mathbb{C}) &\to \mathscr{C}(X,\mathbb{C}) \\
f = f_{\mathfrak{R}} + f_{\mathfrak{I}} &\mapsto \widehat{f}^{u} = f_{\mathfrak{R}} + u f_{\mathfrak{I}} = \begin{cases} f & , u = +1, \\ \overline{f} & , u = -1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

donde $f_{\mathfrak{R}}$ es la parte real de f, $\mathfrak{R}f$, y $f_{\mathfrak{I}}$ es la parte imaginaria de f, $i\mathfrak{I}f$. En el caso $D = \mathbb{H}$, cada transformada de la familia realiza una rotación sobre la parte imaginaria de la función

$$
\begin{aligned}
\widehat{\cdot}^{U} : \mathscr{C}(X,\mathbb{H}) &\to \mathscr{C}(X,\mathbb{H}) \\
f = f_{\mathfrak{R}} + f_{\mathfrak{I}} &\mapsto \widehat{f}^{U} = f_{\mathfrak{R}} + U f_{\mathfrak{I}},
\end{aligned}
$$

donde $f_{\mathfrak{R}}$ es la parte real de f, $\mathfrak{R}f$, y $f_{\mathfrak{I}}$ es la parte imaginaria de f, $\langle (i,j,k), \mathfrak{I}f\rangle$.

El mismo argumento sirve para la transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $\mathscr{C}^{(n)}([a,b],D)$ A.2.

Capítulo 2

Transformadas integrales como transformadas de Gelfand

En este capítulo hallaremos la expresión explícita de la transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $L^1_\omega(C)$, donde nos encontramos con algunas transformadas integrales muy conocidas.

2.1. El álgebra $L^1_\omega(C)$

Dado un grupo abeliano localmente compacto $G \equiv (G, \cdot, \tau_G)$ (abrev. LCA), sabemos que tiene asociada una única (salvo constante multiplicativa positiva) medida de Haar (invariante por traslaciones) λ [RV]. Supongamos además que, con esta medida, es σ-finito (abrev. σLCA). Ejemplos de estos grupos que manejaremos en este capítulo son los que, a continuación, separamos en dos casos.

Ejemplo (**Grupos discretos**). Los grupos abelianos finitos, el grupo de los números enteros con la suma, $\mathbb{Z} \equiv (\mathbb{Z}, +)$, y el grupos de los números racionales positivos con el producto, $\mathbb{Q}^+ \equiv (\mathbb{Q}^+, \cdot)$, son σLCA con la topología discreta. Su medida de Haar es la medida de contar.

Ejemplo (**Grupos continuos**). El grupo de los números reales con la suma, $\mathbb{R} \equiv (\mathbb{R}, +)$, (o el grupo de los números reales positivos con el producto, $\mathbb{R}^+ \equiv (\mathbb{R}^+, \cdot), (\mathbb{R}^+ \simeq \mathbb{R})$) y el grupo de la circunferencia con el producto, $\mathbb{T} \equiv (\mathbb{T}, \cdot)$, son σLCA con la topología usual. Su medida de Haar es la de Lebesgue (para $\mathbb{R}^+$ es $\frac{dx}{x}$, y para $\mathbb{T}$ la de Lebesgue normalizada).

Sea C un subconjunto medible de G con medida postiva ($\lambda(C) > 0$) y $\omega : C \to \mathbb{R}^+$ una función peso (medible) tal que $(\chi_C \omega)(ts) \leq \chi_C(ts)\omega(t)\omega(s)$ para cada $s, t \in C$ (la función constante 1 lo es), donde χ_C es la función característica en C (que indica la pertenencia, o no, de cada elemento de G al conjunto C). Consideremos el espacio de Banach formado por las clases de funciones integrables de C en $\mathbb{C}$ bajo el peso ω, $L^1_\omega(C)$, con la norma usual

$$\|f\|_\omega = \int_C |f(t)|\omega(t)d\lambda(t) = \int_G (\chi_C|f|\omega)(t)d\lambda(t), \qquad f \in L^1_\omega(C).$$

Definimos el **producto de convolución** en $L^1_\omega(C)$:

$$(f * g)(t) = \int_G (\chi_C f)(ts^{-1})(\chi_C g)(s)d\lambda(s), \qquad t \in C, \ f, g \in L^1_\omega(C).$$

Teorema 2.1.1. *El producto de convolución $*$ es una operación binaria interna conmutativa. Además, $\|f * g\|_\omega \leq \|f\|_\omega \|g\|_\omega$ para cada $f, g \in L^1_\omega(C)$.*

Demostración. Aplicando el teorema de Tonelli-Fubini, la invarianza por traslaciones de λ y las hipótesis del ejemplo obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\|f*g\|_\omega &\leq \int_G \left[\int_G |(\chi_C f)(ts^{-1})(\chi_C g)(s)| d\lambda(s)\right](\chi_C\omega)(t)d\lambda(t) = \\
&= \int_G \left[\int_G (\chi_C|f|)(ts^{-1})(\chi_C\omega)(t)d\lambda(t)\right](\chi_C|g|)(s)d\lambda(s) = \\
&= \int_G \left[\int_G (\chi_C|f|)(t)(\chi_C\omega)(ts)d\lambda(t)\right](\chi_C|g|)(s)d\lambda(s) \leq \\
&\leq \int_G \left[\int_G (\chi_C|f|)(t)\chi_C(ts)\omega(t)\omega(s)d\lambda(t)\right](\chi_C|g|)(s)d\lambda(s) \leq \\
&\leq \left[\int_G (\chi_C|f|\omega)(t)d\lambda(t)\right]\left[\int_G (\chi_C|g|\omega)(s)d\lambda(s)\right] = \|f\|_\omega\|g\|_\omega, \quad f,g\in L^1_\omega(C).
\end{aligned}
$$

Finalmente es fácil probar (con un cambio de variable) que $f*g = g*f$ para cada $f\in L^1_\omega(C)$. □

Es fácil terminar de comprobar las últimas propiedades con las que podemos concluir que el espacio $L^1_\omega(C) \equiv (L^1_\omega(C), *, \|\cdot\|_\omega)$ es un álgebra de Banach compleja y conmutativa. En el caso de los grupos discretos, es usual denotar $\ell^1_\omega(C)$ y $c_0(C)$ en lugar de $L^1_\omega(C)$ y $\mathscr{C}_0(C)$ respectivamente.

Ejemplo. Para el intervalo (medible) $C = [0,1]$ en $\mathbb{R}$, el álgebra de Banach $L^1_\omega([0,1])$ es conocida como el **álgebra de Volterra**, la cual es radical. (En este trabajo no nos ocupamos de las álgebras radicales, sino de las representables; y, particularmente, de las semisimples).

Para cada $D\in DB(\mathbb{F})$, el espacio vectorial formado por las clases de funciones integrables de C en D bajo el peso ω, $L^1_\omega(C,D)$, con la norma y el producto de convolución análogos es también álgebra de Banach (sobre $\mathbb{F}$). En el caso $D=\mathbb{H}$, en principio, $*$ pierde la conmutatividad.

El conjunto formado por los homomorfismos continuos de G en $\mathbb{R}^+$, $Hom(G,\mathbb{R}^+)$, es un grupo con el producto puntual y es parcialmente ordenable con el orden inducido por $\mathbb{R}^+$ (la función constante 1 está en él). En general, tomaremos nuestro peso en dicho espacio, $\omega = \vartheta \in Hom(G,R^+)\big|_C = \{\upsilon\big|_C \,:\, \upsilon\in Hom(G,R^+)\}$. En particular, para los grupos que analizaremos existe un homomorfismo $\eta:\mathbb{R}^+\to Hom(G,\mathbb{R}^+)$ al que denotamos por $\eta_\nu = \eta(\nu)$ para cada $\nu\in\mathbb{R}^+$; en tales casos, denotaremos $L^1_\nu(C)$ en lugar de $L^1_{\eta_\nu}(C)$ por comodidad.

Si además, $\eta:(\mathbb{R}^+,\leq)\to(Hom(G,\mathbb{R}^+)\big|_C,\leq)$ es también $\leq$-homomorfismo, el conjunto $\{L^1_\nu(C) \,:\, \nu\in\mathbb{R}^+\}$ es una familia decreciente de álgebras de Banach; es decir, $L^1_{\nu_2}(C)\hookrightarrow L^1_{\nu_1}(C)$ para cada $\nu_1\leq\nu_2$. Definiendo $\eta(C,\alpha) = \{\eta_{\frac{1}{\beta}} \,:\, \beta>\alpha\}$ para cada $\alpha\in\mathbb{R}^+$, notemos que $\eta(C,\alpha_2)\subset\eta(C,\alpha_1)$ para cada $\alpha_1\leq\alpha_2$. En tal caso:

Proposición 2.1.2. *Si el conjunto $\eta(C,1)$ está contenido en $L^1(C)\cap\mathscr{C}_0(C)$ y separa puntos de C, entonces $\eta(C,\nu)$ es total en $L^1_\nu(C)$.*

Demostración. Como $\eta(C,\nu) = \bigcup_{\alpha>\nu}\eta(C,\alpha)$, es suficiente probar que lo son los $\eta(C,\alpha)$ para cada $\alpha>\nu$. Dada $f\in L^1_\nu(C)$, sea $\varepsilon>0$. Como $f\eta_\alpha\in L^1_{\frac{\nu}{\alpha}}(C)$ y $\mathscr{C}_c(C)$ es denso en $L^1_{\frac{\nu}{\alpha}}(C,\eta)$ (véase [M1] 2.19), existe $\varphi\in\mathscr{C}_c(C)$ tal que $\|f\eta_\alpha-\varphi\|_{\frac{\nu}{\alpha}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, el álgebra generada por $\eta(C,1)$ satisface las condiciones del teorema de Stone-Weierstrass, luego es densa en $\mathscr{C}_0(C)$. Entonces, existe $h\in Span(\eta(C,1))$ tal que $\|\varphi-h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\|\eta_{\frac{\nu}{\alpha}}\|_1}$ $\big($nota. $\eta_{\frac{\nu}{\alpha}}\in\eta(C,1)\subset L^1(C)\big)$. De este modo, la función $h\eta_{\frac{1}{\alpha}}\in Span(\eta(C,\alpha))$ satisface que $\|f-h\eta_{\frac{1}{\alpha}}\|_\nu = \|f\eta_\alpha-h\|_{\frac{\nu}{\alpha}} \leq \|f\eta_\alpha-\varphi\|_{\frac{\nu}{\alpha}} + \|\varphi-h\|_{\frac{\nu}{\alpha}} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Veamos algunos ejemplos de estos homomorfismos que utilizaremos en las siguientes secciones.

Ejemplo. $\rho : \mathbb{R}^+ \to Hom(\mathbb{Z},\mathbb{R}^+)$ dada por $\nu \mapsto \rho_\nu = (k \mapsto \nu^k)$ es homomorfismo. Además, para cualquier medible C en $\mathbb{Z}^+$, la aplicación $\rho : (\mathbb{R}^+,\leq) \to (Hom(\mathbb{Z},\mathbb{R}^+)\big|_C,\leq)$ es homomorfismo.

Ejemplo. $\varsigma : \mathbb{R}^+ \to Hom(\mathbb{Q}^+,\mathbb{R}^+)$ dada por $\nu \mapsto \varsigma_\nu = (q \mapsto q^{-\nu})$ es homomorfismo. Además, para cualquier medible C en $\mathbb{Q}^+_{\geq 1}$, la aplicación $\varsigma : (\mathbb{R}^+,\leq) \to (Hom(\mathbb{Q}^+,\mathbb{R}^+)\big|_C,\geq)$ es homomorfismo.

Ejemplo. $\tau : \mathbb{R}^+ \to Hom(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ dada por $\nu \mapsto \tau_\nu = (x \mapsto x^\nu)$ es homomorfismo. Además, para cualquier medible C en $\mathbb{R}^+_{\geq 1}$, la aplicación $\tau : (\mathbb{R}^+,\leq) \to (Hom(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)\big|_C,\leq)$ es homomorfismo. Aprovechando el isomorfismo $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, tenemos también el homomorfismo $\varepsilon : \mathbb{R} \to Hom(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ dado por $\nu \mapsto \varepsilon_\nu = (t \mapsto e^{\nu t})$. Además, para cualquier medible C en $\mathbb{R}^+_0$, la aplicación $\varepsilon : (\mathbb{R},\leq) \to (Hom(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)\big|_C,\leq)$ es homomorfismo.

Nos proponemos ahora calcular la transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $L^1_\vartheta(S)$, donde S es un semigrupo (medible con medida positiva) dentro de G y ϑ un peso tomado en $Hom(G,\mathbb{R}^+)\big|_S$ (o, en general, en $Hom(S,\mathbb{R}^+)$); para ello debemos hallar su espectro. Por ser σ-finito, podemos identificar $L^1_\vartheta(S)^*$ con $L^\infty(S)$ en el sentido de que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \psi : L^\infty(S) & \to & L^1_\vartheta(S)^* \\ \gamma & \mapsto & \psi_\gamma = \left(f \mapsto \int_G (\chi_s f\vartheta)(t)\gamma(t)d\lambda(t)\right) \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico entre espacios de Banach (véase [M1] Teorema 2.22). Como $\triangle(L^1_\vartheta(S)) \subset \mathbb{D}_{L^1_\vartheta(S)^*}$, el espectro de $L^1_\vartheta(S)$ es biyectivo con algún subconjunto de $\mathbb{D}_{L^\infty(S)}$. Veamos cuál es.

Consideremos el conjunto formado por los homomorfismos continuos del semigrupo S al semigrupo $\mathbb{D}^* = \mathbb{D}^*_\mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z| \leq 1\}$, y denotémoslo por $\widehat{S} = Hom(S,\mathbb{D}^*)$. Es inmediato comprobar que, con el producto puntual, $(\widehat{S},\cdot)$ es un semigrupo abeliano conocido como el **semigrupo dual** de S. Como $\widehat{S} \subset \mathbb{D}_{L^\infty(S)}$, entonces $\psi(\widehat{S}) \subset \mathbb{D}_{L^1_\vartheta(S)^*}$.

Es fácil probar que, si $S_1,\dots S_n$ son semigrupos (no necesariamente en el mismo grupo) entonces su producto, $\bigoplus S_j$, es semigrupo, y además, la aplicación $\bigoplus \widehat{S}_j \to \left(\bigoplus S_j\right)^\wedge$ dada por $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) \mapsto \left(t = (t_1,\dots,t_n) \mapsto \prod_{j=1}^n \gamma_j(t_j)\right)$ es un isomorfismo de semigrupos.

Lema 2.1.3 ([L] Prop. 4.7.1)**.** *Para cada $s \in S$, la aplicación $T_s : L^1_\vartheta(S) \to L^1_\vartheta(S)$ dada por $f \mapsto (\chi_s f)(\cdot \bullet s^{-1})$ es un homomorfismo (de espacio de Banach) $\|\cdot\|$-decreciente. Además, la aplicación $T : S \to \mathscr{B}(L^1_\vartheta(S))$ dada por $s \mapsto T_s$ es continua.*

Teorema 2.1.4. *El semigrupo dual $\widehat{S}$ se aplica biyectivamente vía ψ sobre el espectro $\triangle(L^1_\vartheta(S))$.*

Demostración. Aplicando el teorema de Fubini, la invarianza por traslaciones de λ, que S es semigrupo, que $\vartheta \in Hom(S,\mathbb{R}^+)$ y que $\gamma \in \widehat{S}$, acababamos por comprobar que ψ_γ es un homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(f*g) &= \int_G \left[\int_G (\chi_s f)(ts^{-1})(\chi_s g)(s)d\lambda(s)\right](\chi_s\vartheta)(t)\gamma(t)d\lambda(t) = \\ &= \int_G \left[\int_G (\chi_s f)(ts^{-1})(\chi_s\vartheta)(t)\gamma(t)d\lambda(t)\right](\chi_s g)(s)d\lambda(s) = \\ &= \int_G \left[\int_G (\chi_s f)(t)(\chi_s\vartheta)(ts)\gamma(ts)d\lambda(t)\right](\chi_s g)(s)d\lambda(s) = \\ &= \int_G \left[\int_G (\chi_s f)(t)\vartheta(t)\vartheta(s)\gamma(t)\gamma(s)d\lambda(t)\right](\chi_s g)(s)d\lambda(s) = \\ &= \left[\int_G (\chi_s f\vartheta)(t)\gamma(t)d\lambda(t)\right]\left[\int_G (\chi_s g\vartheta)(s)\gamma(s)d\lambda(s)\right] = \psi_\gamma(f)\psi_\gamma(g), \qquad f,g \in L^1_\vartheta(S). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ψ aplica $\widehat{S}$ en $\triangle(L^1_\vartheta(S))$ inyectivamente (isometría). Veamos que lo hace también de forma sobreyectiva. Es decir, hay que ver que si $\psi_\gamma \in \triangle(L^1_\vartheta(S))$, entonces $\gamma \in \widehat{S}$. Sea pues $\psi_\gamma \in \triangle(L^1_\vartheta(S))$; en tal caso, $\gamma \in \mathbb{D}_{L^\infty(S)}$ y $\psi_\gamma(f*g) = \psi_\gamma(f)\psi_\gamma(g)$ para cada $f,g \in L^1_\vartheta(S)$. De manera similar a los cálculos que hemos realizado al principio de la demostración se ve que esto último equivale a que

$$\int_G (\chi_s g\vartheta)(s)\Big(\psi_\gamma(T_s(f))\Big)d\lambda(s) = \int_G (\chi_s g\vartheta)(s)\Big(\gamma(s)\psi_\gamma(f)\Big)d\lambda(s), \qquad f,g \in L^1_\vartheta(S). \tag{2.1}$$

Veamos que $\psi_\gamma(T_{(\cdot)}(f)) \in \mathscr{C}(S)$. Si $f=0$ trivial; si no, dada una red $\{s_\lambda\}_{\lambda\in\underrightarrow{\Lambda}}$ en S convergente a un $s \in S$, sea $\varepsilon > 0$. Como T es continua, existe un $\lambda_0 \in \underrightarrow{\Lambda}$ tal que $\|T_{s_\lambda} - T_s\| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\vartheta}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Entonces, $|\psi_\gamma(T_{s_\lambda}(f)) - \psi_\gamma(T_s(f))| = |\psi_\gamma((T_{s_\lambda} - T_s)(f))| \leq \|\psi_\gamma\|\|T_{s_\lambda} - T_s\|\|f\|_\vartheta < \varepsilon$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Por otro lado, $|\psi_\gamma(T_s(f))| \leq \|f\|_\vartheta$ para todo $s \in S$. Con todo esto hemos probado que $\psi_\gamma(T_{(\cdot)}(f)) \in \mathscr{C}_b(S) \subset L^\infty(S)$. Como $\gamma(\cdot)\psi_\gamma(f) \in L^\infty(S)$, podemos reescribir la ecuación (2.1) como

$$\psi_{\psi_\gamma(T_{(\cdot)}(f))}(g) = \psi_{\gamma(\cdot)\psi_\gamma(f)}(g), \qquad f,g \in L^1_\vartheta(S).$$

Como esto es cierto para cada $g \in L^1_\vartheta(S)$, necesariamente, $\psi_\gamma(T_{(\cdot)}(f)) = \psi_\gamma(f)\gamma(\cdot)$ a.e. en S para toda $f \in L^1_\vartheta(S)$. Ahora bien, como ψ_γ no es el homomorfismo nulo, existe alguna $f_0 \in L^1_\vartheta(S)$ tal que $\psi_\gamma(f_0) \neq 0$; entonces, la función γ coincide a.e. en S con la función continua $\frac{1}{\psi_\gamma(f_0)}\psi_\gamma(T_{(\cdot)}(f_0))$. De este modo, sin pérdida de generalidad (tomando el representante continuo), también es continua la función γ. Luego $\gamma \in \mathscr{C}_b(S)$ y la identificación es total en S, es decir,

$$\psi_\gamma(T_s(f)) = \gamma(s)\psi_\gamma(f), \qquad f \in L^1_\vartheta(S),\ s \in S. \tag{2.2}$$

Es fácil comprobar que la ecuación (2.2) se puede reescribir como

$$\psi_{\gamma(\cdot s)}(f) = \psi_{\gamma(\cdot)\gamma(s)}(f), \qquad f \in L^1_\vartheta(S),\ s \in S.$$

Como esto es cierto para cada $f \in L^1_\vartheta(S)$, necesariamente, $\gamma(\cdot s) = \gamma(\cdot)\gamma(s)$ a.e. en S; pero, por ser γ continua, la identificación es total en S. Por lo tanto, $\gamma \in \widehat{S}$. □

Induciendo en $\widehat{S}$ la topología de Gelfand se termina por comprobar que $(\widehat{S}, \cdot, \tau_\triangle)$ es un semigrupo LCA que, como espacio topológico, es homeomorfo al espectro; es decir, $\triangle(L^1_\vartheta(S)) \simeq \widehat{S}$. Dicha topología resulta ser exactamente la de la convergencia puntual en $\widehat{S}$ (véase [GRS] Theorem IV.23.2). La transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $L^1_\vartheta(S)$ es

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} : L^1_\vartheta(S) &\to \mathscr{C}_0(\widehat{S}) \\ f &\mapsto \left(\gamma \mapsto \int_S f(t)(\vartheta\gamma)(t)d\lambda(t)\right). \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que, si S_1 y S_2 son semigrupos en G tales que $S_1 \subset S_2$, entonces $\widehat{S_2} \subset \widehat{S_1}$; por lo tanto, los respectivos espectros están relacionados de la misma forma. En particular, para el (semi)grupo total $S = G$ se tiene que $\widehat{G}$ es un grupo conocido como el **grupo dual** de G y sus homomorfismos se dicen **carácteres continuos** de G; además, dicho conjunto es $\widehat{G} = Hom(G, \mathbb{T})$ (De lo contrario, tomando $\gamma \in Hom(G, \mathbb{D}^*)$ tal que $|\gamma(t)| < 1$ para algún $t \in G$ se tendría que $|\gamma(t^{-1})| = |\gamma(t)|^{-1} > 1$). Por lo anterior, el espectro del álgebra de Banach $L^1_\vartheta(G)$ siempre está contenido en el espectro del álgebra de Banach $L^1_\vartheta(S)$ para cualquier semigrupo S dentro de G.

En el caso de los grupos discretos, algunas veces es sencillo obtener el semigrupo dual.

Definición 2.1.5. Dado un subconjunto X de G, denotamos $\langle X\rangle^+$ por el semigrupo formado por las palabras reducidas de X $\{x_1^{m_1}\cdots x_r^{m_r} : x_1 \ldots, x_r \in X \text{ distintos}, m_1,\ldots,m_r \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}\} \sqcup \{e_G\}$ y $\langle X\rangle$ por el grupo formado por las palabras reducidas de X $\{x_1^{m_1}\cdots x_r^{m_r} : x_1 \ldots, x_r \in X \text{ distintos}, m_1,\ldots,m_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \sqcup \{e_G\}$.

Definición 2.1.6. Diremos que S es un **semigrupo libre** si existe un subconjunto $X \subset S$ tal que la aplicación natural $\langle X \rangle^+ \to S$ es un isomorfismo, $S \simeq \langle X \rangle^+$; en tal caso, para cada $s = x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r} \in S$, podemos definir la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \phi_s : X & \to & \mathbb{Z}^+ \\ x & \mapsto & \begin{cases} m_j, & \text{si } x = x_j, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases} \end{array}$$

Si S es grupo, diremos que S es un **grupo libre** si existe un subconjunto $X \subset S$ tal que la aplicación natural $\langle X \rangle \to S$ es un isomorfismo, $S \simeq \langle X \rangle$; en tal caso, para cada $s \in S$, podemos definir la aplicación $\phi_s : X \to \mathbb{Z}$.

Proposición 2.1.7. *Supongamos que S es discreto. Si S es un semigrupo libre, $S \simeq \langle X \rangle^+$, entonces la aplicación $\mathbb{D}^{*X} \to \widehat{S}$ dada por $\gamma \mapsto \left(s \mapsto \prod_{x \in X} \gamma(x)^{\phi_s(x)} \right) \equiv \gamma$ es un homeomorfismo. Si S es un grupo libre, $S \simeq \langle X \rangle$, el homeomorfismo se da para $\mathbb{T}^X$ en lugar de para $\mathbb{D}^{*X}$.*

Demostración. Por construcción es claro que es una biyección (al ser S discreto la continuidad es tautológica). Además, si S es grupo, necesariamente $\gamma(x) \in \mathbb{T}$ para cada $x \in X$ (de lo contrario, si $|\gamma(x)| < 1$ para algún $x \in X$, por definición se tendría que $|\gamma(x^{-1})| = |\gamma(x)|^{-1} > 1$). Por último, una red en $\mathbb{D}^{*X}$ converge a otro elemento en este espacio si y solo si converge en cada componente; y, esto último equivale a que la red de aplicaciones asociada converga puntualmente a la aplicación asociada. $\square$

Dado $D \in DB(\mathbb{F})$, analicemos brevemente la transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $L^1_\vartheta(S,D)$. Se puede probar de forma análoga que, si $Z(D)$ es el centro del álgebra D, el conjunto $\widetilde{S} = Hom\left(S, \mathbb{D}^*_{Z(D)}\right)$ contiene a un único homomorfismo de cada órbita. Entonces, para cada $\alpha \in Aut_{\mathbb{F}}(D)$, su transformada de Gelfand restringida a $\widetilde{S}$ es el homomorfismo $\widetilde{\cdot}^{\alpha} : L^1_\vartheta(S,D) \to \mathscr{C}_b(\widetilde{S},D)$ dada por $f \mapsto \left(\gamma \mapsto \int_S (\alpha \circ f)(t)(\vartheta\gamma)(t) d\lambda(t) \right)$. Para $D = \mathbb{F}$, se tiene que $\widetilde{S} \simeq \triangle(L^1_\vartheta(S,\mathbb{F}))$ y $\widetilde{\cdot}$ es la transformada de Gelfand (en particular, para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ se tiene que $\widetilde{S} = \widehat{S}$). Para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, si $D = \mathbb{C}$ se tiene que $\widetilde{S} = \widehat{S}$ es un representante del álgebra de Banach real $L^1_\vartheta(S,\mathbb{C})$ cuya familia de transformadas está formada por la transformada habitual $\widetilde{\cdot} = \widehat{\cdot}$ y la transformada sobre la función conjugada (al ser los coeficientes reales la conjugación pasa a ser un operador lineal). Si $D = \mathbb{H}$, obtener el espectro es más complicado; sin embargo, siempre podemos definir la transformada sobre $\widetilde{S} = Hom\left(S, \mathbb{D}^*_{\mathbb{R}}\right)$

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\cdot}^{U} : L^1_\vartheta(S,\mathbb{H}) & \to & \mathscr{C}_b(\widetilde{S},\mathbb{H}) \\ f & \mapsto & \left(\gamma \mapsto \displaystyle\int_S (f_{\mathfrak{R}} + U f_{\mathfrak{I}})(t)(\vartheta\gamma)(t) d\lambda \right). \end{array}$$

La rama de las matemáticas que estudia el análisis sobre grupos (siendo una parte del mismo estas transformadas integrales) es el **Análisis Armónico**. En este sentido destacamos que también hay una teoría para grupos no conmutativos; particularmente, el estudio de los grupos no conmutativos llamados unimodulares tiene un desarrollo similar al de los conmutativos [F, R1].

2.2. Transformada de Fourier

Para el (semi)grupo total $S = G$, el producto de convolución corresponde al habitual **producto de convolución de Fourier** con peso ω

$$(f * g)(t) = \int_G f(ts^{-1}) g(s) d\lambda(s), \qquad t \in G, \; f, g \in L^1_\omega(G).$$

El álgebra de Banach $L^1_\omega(G)$ es unitaria si y solo si G es discreto (véase [L] Theorem 4.7.1); en tal caso, la unidad es la delta de Dirac en e_G, δ_{e_G}. Para $\omega = \vartheta \in Hom(G, \mathbb{R}^+)$ hemos hallado su transformada, conocida como la **transformada de Fourier** sobre el grupo G y denotada a veces por $\mathscr{F}$. Del mismo modo se conoce a $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}$ como la transformada de Fourier de la función f y a $\operatorname{Ran}\widehat{f} = \widehat{f}(\widehat{G})$ como el **espectro** de f.

Por las limitaciones del espacio nos tenemos que conformar con mencionar sin demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1 ([L] Theorem 4.7.4)**.** *El álgebra de Banach $L^1_\vartheta(G)$ es semisimple.*

Corolario 2.2.2. *Para cualquier semigrupo S (medible de medida positiva) dentro de G, el álgebra de Banach $L^1_\vartheta(S)$ es semisimple.*

Demostración. Sea $f \in \operatorname{Rad}(L^1_\vartheta(S))$; es decir, $\widehat{f}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \widehat{S}$. Tomemos la función definida en G por $F = \chi_S f$. Por definición, $F \in L^1_\vartheta(G)$. Entonces, como $\widehat{G} \subset \widehat{S}$, se tiene que

$$\mathscr{F}(F)(\gamma) = \int_G F(t)(\vartheta\gamma)(t)d\lambda(t) = \int_S f(t)(\vartheta\gamma)(t)d\lambda(t) = \widehat{f}(\gamma) = 0, \qquad \gamma \in \widehat{G}.$$

La semisimplicidad del álgebra de Banach $L^1_\vartheta(G)$ implica que $F = 0$; como $\lambda(S) > 0$, χ_S no es la función idénticamente nula en $L^1_\vartheta(S)$; luego, necesariamente, $f = 0$ en $L^1_\vartheta(S)$. □

Empecemos analizando el caso de los grupos discretos que hemos mencionado anteriormente.

Ejemplo. Sea G un grupo abeliano finito; es bien sabido que éste es isomorfo a alguno del tipo $\mathbb{Z}_{N_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{N_r} = \bigoplus \mathbb{Z}_{N_j}$, donde los $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$ son tales que $N_1 | \ldots | N_r$. Calculemos el grupo dual de un $\mathbb{Z}_N$. Sea $\gamma \in \widehat{\mathbb{Z}_N}$. Si $z = \gamma([1])$, entonces $z^N = \gamma([N]) = 1$, luego z es una raíz N-ésima de la unidad. Recíprocamente, cada raíz N-ésima de la unidad define un único $\gamma \in \widehat{\mathbb{Z}_N}$. De hecho, esta identificación es un isomorfismo entro los grupos σLCA; es decir, $\widehat{\mathbb{Z}_N} \simeq \mathbb{Z}_N$. Entonces $\widehat{G} \simeq \big(\bigoplus \mathbb{Z}_{N_j}\big)^{\widehat{}} \simeq \bigoplus \widehat{\mathbb{Z}_{N_j}} \simeq \bigoplus \mathbb{Z}_{N_j} \simeq G$. Notemos que, por ser G finito, podemos identificar $\ell^1(G)$ y $c_0(G)$ con $\bigoplus \mathbb{C}^{N_j}$. La transformada de Fourier sobre G es

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} \colon \Big(\bigoplus \mathbb{C}^{N_j}, *\Big) &\to \Big(\bigoplus \mathbb{C}^{N_j}, \cdot\Big) \\ x &\mapsto \Bigg(n \mapsto \sum_{[k] \in \bigoplus \mathbb{Z}_{N_j}} x(k) e^{-2\pi i \langle \frac{k}{N}, n \rangle}\Bigg), \end{aligned}$$

más conocida como la **transformada de Fourier discreta** $\big($siendo $n = (n_1, \ldots, n_r)$ y $\frac{k}{N} = (\frac{k_1}{N_1}, \ldots, \frac{k_r}{N_r})\big)$.

Ejemplo. Para $\mathbb{Z}$ consideremos el homomorfismo ρ. Como $\mathbb{Z} \simeq \langle 1 \rangle$, ya conocemos el espectro, $\widehat{\mathbb{Z}^+} \simeq \mathbb{T}$. Realizando el cambio de variable en el espectro $\mathbb{T}$ dado por $z \mapsto z^{-1}$ se tiene que la transformada de Fourier sobre $\mathbb{Z}$ es

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} \colon \ell^1_\nu(\mathbb{Z}) &\to \mathscr{C}(\mathbb{T}) \\ x &\mapsto \Bigg(z \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \nu^k z^{-k}\Bigg). \end{aligned}$$

Ejemplo. Para $\mathbb{Q}^+$ consideremos el homomorfismo ς. Como $\mathbb{Q}^+ \simeq \langle P \rangle$, siendo P el conjunto formado por los números primos, se tiene que la transformada de Fourier sobre $\mathbb{Q}^+$ es

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} \colon \ell^1_\nu(\mathbb{Q}^+) &\to \mathscr{C}\Big(\mathbb{T}^P\Big) \\ x &\mapsto \Bigg(\gamma \mapsto \sum_{q \in \mathbb{Q}^+} x(q) q^{-\nu} \prod_{p \in P} \gamma(p)^{\phi_q(p)}\Bigg). \end{aligned}$$

Continuemos ahora con los grupos continuos que mencionamos anteriormente.

Ejemplo. Para $\mathbb{R}$ consideremos el homomorfismo ε. Sea $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$. Como γ es continua y $\gamma(0) = 1$, existe algún $\delta > 0$ tal que $\int_0^\delta \gamma(s)ds \neq 0$. Así, por ser γ homomorfismo continuo deducimos que $\gamma(\cdot) = \frac{1}{\int_0^\delta \gamma(s)ds} \int_0^\delta \gamma(\cdot + s)ds \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathbb{R})$; es decir, γ es derivable en todo punto. Además verifica la ecuación diferencial $\gamma'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(x+h)-\gamma(x)}{h} = \gamma(x) \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(h)-1}{h} = \gamma(x)\gamma'(0)$ para cada $x \in \mathbb{R}$; de la cual es sabido que debe existir algún $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(x) = e^{-2\pi i \xi x}$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, cada $\xi \in \mathbb{R}$ define un único $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$. Finalmente, es fácil comprobar que una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converge a $\xi \in \mathbb{R}$ si y solo si la sucesión $\{\varepsilon_{-2\pi i \xi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\varepsilon_{-2\pi i \xi}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$; por lo tanto, $\widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$. La transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}$ es

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\cdot}: L^1_\nu(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \left(\xi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{(\nu - 2\pi i \xi)x} dx\right). \end{array}$$

Ejemplo. Para $\mathbb{R}^+$, aprovechando el resultado anterior a través del isomorfismo $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ se puede calcular directamente la transformada de Fourier sobre este grupo (con el homomorfismo τ). Realizando el cambio de variable $-2\pi i \xi \mapsto s$ sobre el espectro, obtenemos la expresión más habitual de esta transformada, más conocida como la **transformada de Mellin** y cuya expresión es

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M} : L^1_\nu(\mathbb{R}^+, \frac{dx}{x}) & \to & \mathscr{C}_0(i\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \left(s \mapsto \displaystyle\int_0^\infty f(x) x^{\nu + s - 1} dx\right). \end{array}$$

Ejemplo. Para $\mathbb{T}$ (por razones prácticas) tomando un $L > 0$ cualquiera, como $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/2L\mathbb{Z}$, podemos identificar $L^1(\mathbb{T})$ con el espacio de las funciones $2L$-periódicas e integrables en $[-L, L)$. Es fácil comprobar que $\gamma \in \widehat{\mathbb{T}}$ si y solo si $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$ y es $2L$-periódica. Utilizando el resultado para $\mathbb{R}$ deducimos que cada $\gamma \in \widehat{\mathbb{T}}$ viene determinado por un único $k \in \mathbb{Z}$ de modo que $\gamma(t) = e^{-2\pi i \frac{k}{2L} t}$ para cada $t \in \mathbb{R}$; por lo tanto, $\widehat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}$. La transformada de Fourier sobre $\mathbb{T}$ es la **serie de Fourier**

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\cdot}: L^1(\mathbb{T}) & \to & c_0(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & \left(k \mapsto \dfrac{1}{2L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(t) e^{-\pi i \frac{k}{L} t} dt\right). \end{array}$$

El valor $\widehat{f}(k)$ es conocido como el **coeficiente de Fourier** k-ésimo de la función f.

Por lo comentado en la sección anterior, podemos calcular fácilmente la transformada de Fourier sobre $L^1(G^n)$ si conocemos la de $L^1(G)$, a la que suele conocerse como **transformada de Fourier multidimensional**. Concretando más, como $(G^n)^\wedge \simeq \widehat{G}^n$, para un peso $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) \in Hom(G^n, \mathbb{R}^+)$ esta transformada viene dada por

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\cdot}: L^1_\vartheta(G^n) & \to & \mathscr{C}_0(\widehat{G}^n) \\ f & \mapsto & \left(\gamma \mapsto \displaystyle\int_{G^n} f(t) \prod_{j=1}^{n} (\vartheta_j \gamma_j)(t_j) d\lambda_n(t)\right). \end{array}$$

Ejemplo. La transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$ es

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\cdot}: L^1_\nu(\mathbb{R}^n) & \to & \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \\ f & \mapsto & \left(\xi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\langle \nu - 2\pi i \xi, x\rangle} dx\right), \end{array}$$

$\big($siendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\big)$ y $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)\big)$.

2.3. Transformada de Fourier-Stieltjes

El espacio vectorial formado por las medidas complejas sobre la σ-álgebra de Borel, $\mathscr{B}(\tau_G)$, regulares y acotadas, $M(G)$, con el producto de convolución

$$(\mu * \nu)(E) = \int_G \mu(Es^{-1}) d\nu(s), \qquad E \in \mathscr{B}(\tau_G),\ \mu, \nu \in M(G),$$

y la norma de la variación total, $\|\mu\| = |\mu|(G) = \sup_{\pi \in P} \sum_{E \in \pi} |\mu(E)|$ para cada $\mu \in M(G)$ (siendo P el conjunjunto formado por las particiones medibles de G) es un álgebra de Banach compleja. Es conmutativa y unitaria con $e_{M(G)}$ la delta de Dirac en e_G, δ_{e_G}. Como cada función de $L^1(G)$ induce una medida en $M(G)$ y se comprueba que el producto $*$ restringido a $L^1(G)$ coincide con su producto de convolución, puede verse en este sentido que $M(G)$ contiene a $L^1(G)$ como subálgebra; y la contiene estrictamente salvo si G es discreto.

La transformada de Gelfand sobre el álgebra de Banach $M(G)$ es, en general, más complicada. Es fácil comprobar que el grupo dual siempre está contenido en el espectro, $\widehat{G} \subset \triangle(M(G))$; sin embargo, si G no es discreto, el contenido es estricto y ni siquiera es denso en él. De todos modos, siempre se puede definir el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F} : M(G) & \to & \mathscr{C}_b(\widehat{G}) \\ \mu & \mapsto & \left(\gamma \mapsto \int_G \gamma(t) d\mu(t) \right), \end{array}$$

conocido como la **transformada de Fourier-Stieltjes** sobre G [L]. Se puede probar que esta transformada sigue siendo inyectiva. Por otro lado, el lema de Riemman-Lebesgue no es cierto en general.

2.4. Transformadas de Laplace y Zeta

Supongamos que G es un grupo (totalmente) ordenable (admite un orden total $\preceq$ invariante por traslaciones [La]) en el que los intervalos son medibles. Tenemos así la correspondiente álgebra de Banach para el intervalo $C = G_+$ (semigrupo formado por los elementos $\succeq e_G$). En particular, para los grupos σLCA ordenables $(\mathbb{R}, \leq)$ y $(\mathbb{Z}, \leq)$ ($\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_0^+$ y $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}^+$), sus productos se conocen como **producto de convolución de Laplace** y **Zeta** con peso ω respectivamente

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s) g(s) ds, \qquad t \in \mathbb{R}_0^+,\ f, g \in L_\omega^1(\mathbb{R}_0^+),$$

$$(x * y)(n) = \sum_{k=0}^{n} x(n-k) y(k), \qquad n \in \mathbb{Z}^+,\ x, y \in \ell_\omega^1(\mathbb{Z}^+).$$

Ejemplo. Por el mismo razonamiento que para $\mathbb{R}$ llegamos a que, para $\mathbb{R}_0^+$, el espectro es $(-\infty, 0] \oplus i\mathbb{R} \simeq \widehat{\mathbb{R}_0^+}$ donde $z \mapsto (t \mapsto e^{zt})$. Realizando el cambio de variable en el espectro $(-\infty, 0] \oplus i\mathbb{R}$ dado por $z \mapsto -(\nu + z)$ obtenemos la expresión más habitual de la transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $L_\nu^1(\mathbb{R}_0^+)$

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L} : L_\nu^1(\mathbb{R}_0^+) & \to & \mathscr{C}_0\Big([-\nu, \infty) \oplus i\mathbb{R} \Big) \\ f & \mapsto & \left(z \mapsto \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt \right), \end{array}$$

más conocida como la **transformada de Laplace** $\Big($siendo $[-\nu, \infty) \oplus i\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ \Re z \geq -\nu \}\Big)$.

Ejemplo. Como $\mathbb{Z}^+ \simeq \langle 1\rangle^+$, ya conocemos el espectro, $\widehat{\mathbb{Z}^+} \simeq \mathbb{D}$. Realizando el cambio de variable en el espectro $\mathbb{D}$ sin el cero dado por $z \mapsto (\nu z)^{-1}$ obetenmos la expresión más habitual de la transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $\ell^1_\nu(\mathbb{Z}^+)$

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{Z} : \ell^1_\nu(\mathbb{Z}^+) & \to & \mathscr{C}_0\Big([\nu^{-1},\infty)\odot\mathbb{T}\Big) \\ x & \mapsto & \left(z \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}\right), \end{array}$$

más conocida como la **transformada Zeta** $\Big($siendo $[\nu^{-1},\infty)\odot\mathbb{T} = \{z\in\mathbb{C} \,:\, |z| \geq \nu^{-1}\}\Big)$.

Aunque el cero ha sido apartado del espectro, queda reflejado en el conocido teorema del valor inicial de la transformada Zeta: $\lim\limits_{z\to\infty} \mathscr{Z}(x)(z) = x(0)$ para cada $x \in \ell^1_\nu(\mathbb{Z}^+)$.

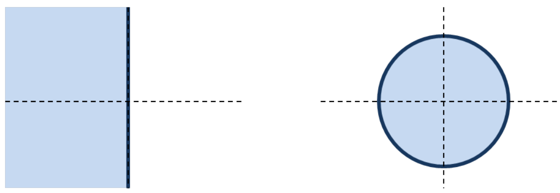

Figura 2.1: El espectro del álgebra de Banach $L^1_\vartheta(G)$ siempre está contenido en el espectro del álgebra de Banach $L^1_\vartheta(S)$ para cualquier semigrupo S dentro de G. En particular, para $G=\mathbb{R}$ (izquierda) y $G=\mathbb{Z}$ (derecha) y el semigrupo G_+ podemos observar como, efectivamente, $\triangle(L^1_\nu(G)) \subset \triangle(L^1_\nu(G_+))$ ($i\mathbb{R} \subset (-\infty,0]\oplus i\mathbb{R}$ para $G=\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}\subset\mathbb{D}$ para $G=\mathbb{Z}$).

2.5. Transformada de Dirichlet

Se conoce como el **producto de convolución de Dirichlet** con peso ω al que origina el semigrupo $S=\mathbb{N}$ en el grupo $\mathbb{Q}^+$; éste es

$$(x*y)(n) = \sum_{d|n} x\left(\frac{n}{d}\right) y(d), \qquad n\in\mathbb{N},\ x,y\in\ell^1_\omega(\mathbb{N}).$$

Como $\mathbb{N}\simeq\langle P\rangle^+$, se tiene que la transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $\ell^1_\nu(\mathbb{N})$ es

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\cdot} : \ell^1_\nu(\mathbb{N}) & \to & \mathscr{C}\Big(\mathbb{D}^{*P}\Big) \\ x & \mapsto & \left(\gamma \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x(n) n^{-\nu} \prod_{p\in P} \gamma(p)^{\phi_n(p)}\right). \end{array}$$

Tomando el subconjunto del espectro $\mathbb{D}^{*P}$ formado por las funciones $\gamma : P \to \mathbb{D}^*$ dadas por $p\mapsto p^{\nu-s}$ para algún $s\in[\nu,\infty)\oplus i\mathbb{R}$, obtenemos el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{D} : \ell^1_\nu(\mathbb{N}) & \to & \mathscr{C}_0\Big([\nu,\infty)\oplus i\mathbb{R}\Big) \\ x & \mapsto & \left(s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n^s}\right), \end{array}$$

más conocido como la **transformada de Dirichlet** $\Big($siendo $[\nu,\infty)\oplus i\mathbb{R} = \{z\in\mathbb{C} \,:\, \Re z\geq\nu\}\Big)$.

Notemos que, en particular, si $\nu > 1$, la sucesión constante $x = 1 \in \ell^1_\nu(\mathbb{N})$ y $\mathscr{D}(1)$ coincide con la función Zeta de Riemann

$$\mathscr{D}(1)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s), \qquad \Re s \geq \nu > 1.$$

Para cada $p \in P$, como $\langle p \rangle^+ = \{1, p, p^2, \ldots\}$, tomando la sucesión $x_p \in \ell^1_\nu(\mathbb{N})$ dada por $x_p = \chi_{\langle p \rangle^+}$, se tiene que su transformada es

$$\mathscr{D}(x_p)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\langle p \rangle^+}(n)}{n^s} = \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-s})^k = \frac{1}{1-p^{-s}}, \qquad \Re s \geq \nu > 1.$$

Ahora bien, dados $p, q \in P$ distintos, es fácil comprobar que $x_p * x_q = \chi_{\langle p,q \rangle^+}$; entonces

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \frac{1}{1-q^{-s}} = \mathscr{D}(x_p)(s)\mathscr{D}(x_q)(s) = \mathscr{D}(x_p * x_q)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\langle p,q \rangle^+}(n)}{n^s} = \sum_{n \in \langle p,q \rangle^+} \frac{1}{n^s}, \qquad \Re s \geq \nu > 1.$$

Inductivamente se prueba que esto se puede generalizar a un número finito de primos y en el límite se encuentra la **fórmula del producto de Euler** de la función Zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \sum_{n \in \langle P \rangle^+} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{-s}}, \qquad \Re s \geq \nu > 1,$$

de la que se deduce que la función Zeta de Riemann no se anula en el semiplano $(1, \infty) \oplus i\mathbb{R}$.

2.6. Transformada coseno

Supongamos ahora que, además, el peso ω satisface que $(\chi_C \omega)(st^{-1}) \leq \chi_C(st^{-1})\omega(s)\omega(t)$ para cada $s, t \in C$. Entonces, se comprueba de forma similar que el espacio de Banach $(L^1_\omega(C), \|\cdot\|_\omega)$ es un álgebra de Banach (en general no conmutativa ni asociativa [M2]) con el producto de convolución

$$(f \circ g)(t) = \int_G (\chi_C f)(st^{-1})(\chi_C g)(s) d\lambda(s), \qquad t \in C, \ f, g \in L^1_\omega(C).$$

Si además $\lambda(C \cap C^{-1}) = 0$, entonces $L^1_\omega(C)$ es también álgebra de Banach con los siguientes productos de convolución

$$f \circledcirc g = f \circ g + g \circ f, \qquad f *_c g = \frac{1}{2}(f * g + f \circledcirc g), \qquad f, g \in L^1_\omega(C).$$

Para $\circledcirc$ es conmutativa (y en general no asociativa). Para $*_c$ es conmutativa y asociativa.[1]

Consideremos $\mathbb{R}$ con el homomorfismo ε y $C = \mathbb{R}^+_0$. Los productos $\circ$, $\circledcirc$ y $*_c$ están definidos para todo peso ε_ν tal que $\nu \geq 0$; además, $\varepsilon(\mathbb{R}^+_0, \nu)$ es total en $L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0)$. Entonces, fijado $\nu \geq 0$, calculemos la transformada de los elementos de $\varepsilon(\mathbb{R}^+, \nu)$. Es fácil comprobar que, para cada $\lambda, \mu > \nu$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mu + \lambda)(\varepsilon_{-\lambda} \circ \varepsilon_{-\mu}) &= \varepsilon_{-\mu}, \\
(\mu + \lambda)(\varepsilon_{-\lambda} \circledcirc \varepsilon_{-\mu}) &= \varepsilon_{-\lambda} + \varepsilon_{-\mu}, \\
(\mu^2 - \lambda^2)(\varepsilon_{-\lambda} *_c \varepsilon_{-\mu}) &= \mu\varepsilon_{-\lambda} - \lambda\varepsilon_{-\mu}.
\end{aligned}$$

Supongamos que el espectro es no vacío y tomemos un $\psi \in \triangle(L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0), \star)$. Consideremos la función $g : (\nu, \infty) \to \mathbb{C}$ dada por $\lambda \mapsto \psi(\varepsilon_{-\lambda})$. Como ψ es homomorfismo, para cada $\lambda, \mu > \nu$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mu + \lambda)g(\lambda)g(\mu) &= g(\mu), && \text{si } \star = \circ, \\
(\mu + \lambda)g(\lambda)g(\mu) &= g(\lambda) + g(\mu), && \text{si } \star = \circledcirc, \\
(\mu^2 - \lambda^2)g(\lambda)g(\mu) &= \mu g(\lambda) - \lambda g(\mu), && \text{si } \star = *_c.
\end{aligned}$$

[1] Aunque hemos desarrollado la teoría para el caso asociativo, ésta admite una extensión al caso no asociativo. En particular, para el caso real se incorpora al conjunto $DB(\mathbb{R})$ el álgebra de los octoniones $\mathbb{O}$ [CS].

Como ψ no es el homomorfismo nulo, $g(\mu_\star) \neq 0$ para algún $\mu_\star > \nu$ (de lo contrario, deduciríamos de la igualdad de arriba que $\psi(\varepsilon_{-\lambda}) = g(\lambda) = 0$ para (casi) todo $\lambda > \nu$ y por densidad sería $\psi = 0$). Tomemos $z_\star = \frac{1}{g(\mu_\star)} - \mu_\star$.

Para $\star = \circ$, se tiene que $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\mu_\circ}$ para todo $\lambda > \nu$ distinto de $-\mu_\circ$. Sin embargo, en tal caso, ψ no es homomorfismo. De modo que el espectro es vacío, $\triangle(L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0),\circ) = \emptyset$, y, por lo tanto, el álgebra de Banach $(L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0),\circ)$ es radical.

Para $\star = \circledcirc$, se tiene que $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z_\circledcirc}$ para todo $\lambda > \nu$ distinto de $z_\circledcirc$. Entonces, si para todo $\lambda, \mu > \nu$ distintos de $z_\circledcirc$ se tiene que $(\mu+\lambda)\frac{1}{\lambda-z_\circledcirc}\frac{1}{\mu-z_\circledcirc} = (\mu+\lambda)\psi(\varepsilon_{-\lambda})\psi(\varepsilon_{-\mu}) = \psi(\varepsilon_{-\lambda}) + \psi(\varepsilon_{-\mu}) = \frac{1}{\lambda-z_\circledcirc} + \frac{1}{\mu-z_\circledcirc} = \frac{\mu+\lambda-2z_\circledcirc}{(\lambda-z_\circledcirc)(\mu-z_\circledcirc)}$, necesariamente ha de ser $z_\circledcirc = 0$. Ahora bien, como $\psi \in \mathbb{D}_{L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0)^*}$, se tiene que $\frac{1}{|\lambda|} \leq \|\varepsilon_{-\lambda}\|_\nu = \frac{1}{\lambda-\nu}$ para cada $\lambda > \nu$; de lo cual, necesariamente, $\nu \geq 0$ (como ya hemos dicho). Además,

$$g(\lambda) = \frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty \varepsilon_{-\lambda}(t)dt = \int_0^\infty \varepsilon_{-\lambda}(t)\varepsilon_{-\nu}(t)\varepsilon_\nu(t)dt, \qquad \lambda > \nu.$$

Como $\varepsilon_{-\nu} \in \mathbb{D}_{L^\infty(\mathbb{R}^+_0)} \simeq \mathbb{D}_{L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0)^*}$, podemos concluir por densidad que el espectro es unipuntual $\triangle(L^1_\nu(\mathbb{R}^+),\circledcirc) \simeq \{0\}$. La transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $(L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0),\circledcirc)$ es el operador integral. Éste conserva el producto

$$\int_0^\infty (f \circledcirc g)(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt \int_0^\infty g(t)dt, \qquad f,g \in L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0).$$

Claramente el álgebra de Banach $(L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0),\circledcirc)$ no es semisimple.

Para $\star = *_c$, se tiene que $g(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2+\mu_{*_c}z_{*_c}}$ para todo $\lambda > \nu$ tal que $\lambda^2 \neq -\mu_{*_c}z_{*_c}$. Tomemos $u \in \mathbb{C}$ tal que $u^2 = -\mu_{*_c}z_{*_c}$. Ahora bien, como $\psi \in \mathbb{D}_{L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0)^*}$, se tiene que $\frac{|\lambda|}{|\lambda+u||\lambda-u|} \leq \|\varepsilon_{-\lambda}\|_\nu = \frac{1}{\lambda-\nu}$, para cada $\lambda > \nu$; de lo cual, necesariamente, $|\Re u| \leq \nu$ (de lo contrario, tomando una sucesión de λ's$> \nu$ que tendiesen a $-u$ si $\Re u < -\nu$ ó a u si $\Re u > \nu$, la desigualdad de arriba no se daría). En tal caso, efectivamente $(\mu^2 - \lambda^2)\psi(\varepsilon_{-\lambda})\psi(\varepsilon_{-\mu}) = \mu\psi(\varepsilon_{-\lambda}) - \lambda\psi(\varepsilon_{-\mu})$ para cada $\lambda, \mu > \nu$. Además,

$$g(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2-u^2} = \int_0^\infty \varepsilon_{-\lambda}(t)\cosh(ut)dt = \int_0^\infty \varepsilon_{-\lambda}(t)\frac{\varepsilon_{-(\nu-u)}(t)+\varepsilon_{-(\nu+u)}(t)}{2}\varepsilon_\nu(t)dt, \qquad \lambda > \nu.$$

Como $\frac{1}{2}(\varepsilon_{-(\nu-u)} + \varepsilon_{-(\nu+u)}) \in \mathbb{D}_{L^\infty(\mathbb{R}^+_0)} \simeq \mathbb{D}_{L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0)^*}$, podemos concluir por densidad que $\triangle(L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0),*_c) \simeq [-\nu,\nu] \oplus i\mathbb{R}^+_0$. La transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $(L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0),*_c)$ es

$$\begin{aligned} C : L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0) &\to \mathscr{C}_0\Big([-\nu,\nu] \oplus i\mathbb{R}^+_0\Big) \\ f &\mapsto \Big(u \mapsto \int_0^\infty f(t)\cosh(ut)dt\Big), \end{aligned}$$

más conocida como la **transformada coseno** $\Big($siendo $[-\nu,\nu] \oplus i\mathbb{R}^+_0 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |\Re z| \leq \nu,\ \Im z \geq 0\}\Big)$.

Teorema 2.6.1. *El álgebra de Banach $(L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0),*_c)$ es semisimple.*

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Rad}(L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0),*_c)$; es decir, $C(f)(z) = 0$ para todo $z \in [-\nu,\nu] \oplus i\mathbb{R}^+_0$. Tomemos la función definida en $\mathbb{R}$ por $F = (f(-\cdot)\chi_{(-\infty,0)} + f\chi_{(0,\infty)})\frac{1}{2}$. Por definición, $F \in L^1_\nu(\mathbb{R})$ y además

$$\mathscr{F}(F)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{(\nu-2\pi i\xi)x}dx = \int_0^\infty f(x)\cosh((\nu-2\pi i\xi)x)dx = C(f)(\nu-2\pi i\xi) = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

La semisimplicidad del álgebra de Banach $L^1_\nu(\mathbb{R})$ implica que $F = 0$; luego también $f = 0$ en $L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0)$. $\square$

2.7. Aplicaciones de las transformadas

Resumir en unas pocas páginas las aplicaciones de estas transformadas no es tarea fácil, por ello nos contentamos aquí con hablar de algunas de ellas en las dos primeras secciones y nombrar algunas más en la última. Éstas y otras más se pueden encontrar extensamente en [D, MTU, S].

Tratando de generalizar, la transformada de Gelfand puede transformar una ecuación en un álgebra de Banach representable A en otra ecuación en el álgebra de Banach $\mathscr{C}_0(A, D_A)$. Esto puede ser útil, por ejemplo, cuando tenemos un producto de convolución en A, ya que se traduce en el álgebra imagen como el producto usual punto a punto, el cual es más manejable. Esta idea se puede aplicar para resolver ecuaciones integrables como las de tipo Volterra: dadas unas funciones $g, K \in L^1_\vartheta(S)$ y una constante $\lambda \in \mathbb{C}$, hallar $f \in L^1_\vartheta(S)$ tal que $f = g + \lambda(K * f)$ en $L^1_\vartheta(S)$.

También, de manera similar a los ejemplos que veremos acontinuación, para el álgebra del Banach $L^1_\vartheta(S)$, en el caso discreto se pueden emplear una serie de propiedades para resolver problemas de Teoría de Números; para el caso continuo, los problemas que se resuelven entran dentro de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales.

2.7.1. Ecuaciones diferenciales y en diferencias

En esta sección planteamos el problema de valor inicial de orden $n \in \mathbb{N}$, lineal y con coeficientes constantes para funciones definidas en $\mathbb{R}^+_0$ y $\mathbb{Z}^+$ respectivamente. Aunque el primero se trata de una ecuación diferencial y el segundo de una ecuación en diferencias, los analizamos juntos ya que seguiremos para ambos una estrategia similar que utiliza las transformadas de Laplace y Zeta respectivamente. Supongamos dados unos coeficientes constantes $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ($a_n \neq 0$) y unos valores iniciales $\eta_0, \ldots, \eta_{n-1} \in \mathbb{C}$. Se conoce como **polinomio característico** de la ecuación diferencial (en diferencias) al polinomio dado por

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = a_n(z-\lambda_1)^{m_1} \cdots (z-\lambda_r)^{m_r}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

También consideraremos el polinomio dado por

$$Q_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j \text{ para cada } z \in \mathbb{C}, \text{ siendo } b_j = \sum_{k=j+1}^{n} a_k \eta_{k-(j+1)}.$$

Ecuaciones diferenciales

Consideremos dada una función $g \in L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0)$ para algún $\nu \in \mathbb{R}$. Queremos hallar las funciones f definidas en $\mathbb{R}^+_0$ y n veces continuamente derivables que verifican

$$(EDL)\begin{cases} a_n f^{(n)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f = g, \text{ en } L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0), \\ f(0) = \eta_0; \ldots ; f^{(n-1)}(0) = \eta_{n-1}. \end{cases}$$

Definimos como espacio de Sobolev de orden n y peso ε_ν, $W^{n,1}_\nu(\mathbb{R}^+_0)$, al subespacio vectorial formado por las funciones medibles tales que tanto ella como sus primeras n-derivadas están en $L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0)$. Decimos que una función medible f está exponencialmente acotada si existen $K, \alpha > 0$ tales que $|f| \leq K\varepsilon_{-\alpha}$. Definimos así el conjunto $B^{n,1}_\nu(\mathbb{R}^+_0)$ formado por las funciones $f \in \mathscr{C}^{(n)}(\mathbb{R}^+_0)$ tales que $f^{(j)}\varepsilon_{-\nu}$ está exponencialmente acotada para cada $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Es inmediato que $\varepsilon(\mathbb{R}^+_0, \nu) \subset B^{n,1}_\nu(\mathbb{R}^+_0) \subset W^{n,1}_\nu(\mathbb{R}^+_0) \subset L^1_\nu(\mathbb{R}^+_0)$. Con esto es sencillo probar la siguiente proposición.

Proposición 2.7.1. *Para cada $f \in B^{n,1}_\nu(\mathbb{R}^+_0)$ se tiene que*

$$\mathscr{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathscr{L}(f)(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) z^{(n-1)-j}, \quad \Re z \geq -\nu.$$

Supongamos que existe algún $w \in \mathbb{R}$ de modo que la función buscada f esté en $B_w^{n;1}(\mathbb{R}_0^+)$. Sin pérdida de generalidad $\nu \leq w$. Aplicando la transformada de Laplace de $L_\nu^1(\mathbb{R}_0^+)$ sobre la ecuación diferencial obtenemos una ecuación lineal de la cual es sencillo despejar $\mathscr{L}(f)$

$$\mathscr{L}(f)(z) = \frac{Q_{n-1}(z) + \mathscr{L}(g)(z)}{P_n(z)}, \qquad \Re z \geq -\nu.$$

Existen unos únicos coeficientes $A_{l,j-1}, B_{l,j-1} \in \mathbb{C}$ tales que

$$\mathscr{L}(f)(z) = \frac{Q_{n-1}(z) + \mathscr{L}(g)(z)}{a_n(z-\lambda_1)^{m_1}\cdots(z-\lambda_r)^{m_r}} = \sum_{l=1}^{r}\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{A_{l,j-1} + B_{l,j-1}\mathscr{L}(g)(z)}{(z-\lambda_l)^j}, \qquad \Re z \geq -\nu.$$

En el caso más sencillo en el que no hay raíces múltiples se tiene que $A_{l,0} = \frac{a_n}{P_n'(\lambda_l)} Q_{n-1}(\lambda_l)$, $B_{l,0} = \frac{a_n}{P_n'(\lambda_l)}$ para cada $l \in \{0, \ldots, n\}$ y

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f)(z) &= \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{P_n'(\lambda_l)}\Big(Q_{n-1}(\lambda_l) + \mathscr{L}(g)(z)\Big)\mathscr{L}(\varepsilon_{\lambda_l})(z) \\ &= \mathscr{L}\Bigg(\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{P_n'(\lambda_l)}\Big(Q_{n-1}(\lambda_l)\varepsilon_{\lambda_l} + (g*\varepsilon_{\lambda_l})\Big)\Bigg)(z), \qquad \Re z \geq -\nu.\end{aligned}$$

La inyectividad de la transformada de Laplace nos permite concluir que

$$f(t) = \sum_{l=1}^{n}\frac{e^{\lambda_l t}}{P_n'(\lambda_l)}\Big(Q_{n-1}(\lambda_l) + \int_0^t g(\tau)e^{-\lambda_l\tau}d\tau\Big), \qquad t \in \mathbb{R}_0^+,$$

es la solución del problema (EDL). ($w < -\text{máx}\,\Re\lambda_l$).

Ejemplo. Consideremos una masa puntutal m que en un instante inicial $t = 0$ es "perturbada ligeramente" respecto de su posición de equilibrio de modo que podemos suponer que su rango de movimiento se encontrará dentro de una recta. Denotemos $x(t)$ por la posición de la masa respecto de su punto de equilibrio en un instante $t \geq 0$ y supongamos conocidas la posición y velocidad iniciales x_0 y v_0 respectivamente. La Segunda Ley de Newton establece que $F_{int} + F_{ext} = mx''$, donde F_{int} es la fuerza de recuperación de la posición de equilibrio de la partícula, que es descrita por la Ley de Hooke: $F_{int} = -kx$ para algún $k > 0$; y F_{ext} es una fuerza de rozamiento que suponemos inversamente proporcional a la velocidad: $F_{ext} = -\alpha x'$ para algún $\alpha \geq 0$ (véase [MTU] 7.5). De este modo, estas leyes de la mecánica clásica estipulan que dicha función de posición debe satisfacer

$$(EDL)\begin{cases} mx'' + \alpha x' + kx = 0, \\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0. \end{cases}$$

Supongamos además que $\alpha^2 < 4mk$. En tal caso, las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = \frac{-\alpha + i\sqrt{4mk-\alpha^2}}{2m}$ y $\lambda_2 = \frac{-\alpha - i\sqrt{4mk-\alpha^2}}{2m}$. Denotando $\omega = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2i} = \frac{\sqrt{4mk-\alpha^2}}{2m}$, la expresión explícita de la posición es

$$x(t) = \frac{e^{-\frac{\alpha}{2m}t}}{\lambda_1-\lambda_2}\Big((v_0 - x_0\lambda_2)e^{i\omega t} - (v_0 - x_0\lambda_1)e^{-i\omega t}\Big) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\Big(x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0 + \frac{\alpha}{2m}x_0}{\omega}\sin(\omega t)\Big),$$

para cada $t \in \mathbb{R}_0^+$. Si el rozamiento es nulo ($\alpha = 0$), $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ se conoce como la velocidad angular de la partícula y x describe un oscilador armónico simple.

Ecuaciones en diferencias

Consideremos dada una sucesión $(y_k) \in \ell^1_\nu(\mathbb{Z}^+)$ para algún $\nu \in \mathbb{R}^+$. Además supondremos que $a_0 \neq 0$, luego también los valores propios $\lambda_l \neq 0$. Queremos hallar las sucesiones (x_k) que verifican

$$(EdL)\begin{cases} a_n x_{k+n} + \cdots + a_1 x_{k+1} + a_0 x_k = y_k, \text{ en } \ell^1_\nu(\mathbb{Z}^+), \\ x_0 = \eta_0; \ldots ; x_{n-1} = \eta_{n-1}. \end{cases}$$

Proposición 2.7.2. *Si $(x_k) \in \ell^1_\nu(\mathbb{Z}^+)$ se tiene que*

$$\mathscr{Z}(x_{k+n})(z) = z^n \mathscr{Z}(x_k)(z) - z \sum_{j=0}^{n-1} x_j(0) z^{(n-1)-j}, \qquad |z| \geq \nu^{-1}.$$

Llamemos (y_{k-1}) a la sucesión en $\ell^1_\nu(\mathbb{Z}^+)$ dada por $(y_{k-1}) = (0, y_0, y_1, \ldots)$; entonces $\mathscr{Z}(y_k)(z) = z\mathscr{Z}(y_{k-1})(z)$ en $|z| \geq \nu^{-1}$. Supongamos que existe algún $w > 0$ de modo que la sucesión buscada (x_k) esté en $\ell^1_w(\mathbb{Z}^+)$. Sin pérdida de generalidad $\nu \leq w$. Aplicando la transformada Zeta de $\ell^1_\nu(\mathbb{Z}^+)$ sobre la ecuación en diferencias obtenemos una ecuación lineal de la cual es sencillo despejar $\mathscr{Z}(x_k)$

$$\mathscr{Z}(x_k)(z) = \frac{Q_{n-1}(z) + \mathscr{Z}(y_{k-1})(z)}{P_n(z)} z = \sum_{l=1}^{r} \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{m_l} \frac{A_{l,j-1}(z) + B_{l,j-1}(z)\mathscr{Z}(y_{k-1})(z)}{(z-\lambda_l)^j} z, \qquad |z| \geq \nu^{-1}.$$

En el caso más sencillo en el que no hay raíces múltiples se tiene que

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}(x_k)(z) &= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{P_n'(\lambda_l)} \Big(Q_{n-1}(\lambda_l) + \mathscr{Z}(y_{k-1})(z) \Big) \mathscr{Z}(\rho_{\lambda_l})(z) = \\ &= \mathscr{Z}\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{P_n'(\lambda_l)} \Big(Q_{n-1}(\lambda_l)\rho_{\lambda_l} + ((y_{k-1}) * \rho_{\lambda_l}) \Big) \right)(z), \qquad |z| \geq \nu^{-1}. \end{aligned}$$

La inyectividad de la transformada Zeta nos permite concluir que

$$x_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\lambda_l^k}{P_n'(\lambda_l)} \Big(Q_{n-1}(\lambda_l) + \sum_{j=0}^{k-1} y_j \lambda_l^{-(j+1)} \Big), \qquad k \in \mathbb{Z}^+,$$

es la única solución del problema (EdL). Esta expresión nos da cualquier término de la sucesión sin necesidad de calcular los anteriores. $\left(w < \frac{1}{\text{máx}|\lambda_l|}\right)$.

Ejemplo. Consideremos la **recurrencia de Loucas** [Lo]

$$(EdL)\begin{cases} L_{k+2} = aL_{k+1} - bL_k, \\ x_0 = \alpha, \ x_1 = \beta \end{cases}$$

donde α y β son enteros y a y b son enteros tales que $a^2 - 4b > 0$. En tal caso, las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$. La expresión explícita de la sucesión de Loucas es

$$L_k = \frac{1}{\sqrt{a^2-4b}} \Big((\beta - \alpha\lambda_2)\lambda_1^k - (\beta - \alpha\lambda_1)\lambda_2^k \Big), \qquad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Para $a = m \in \mathbb{N}$ y $b = -1$, la solución de la recurrencia de Loucas es

$$L_k = \frac{1}{\sqrt{m^2+4}} \Big((\beta - \alpha(m-\sigma_m))\sigma_m^k - (\beta - \alpha\sigma_m)(m-\sigma_m)^k \Big), \qquad k \in \mathbb{Z}^+,$$

donde

$$\sigma_m = \frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2} = m + \frac{1}{\sigma_m} = m + \frac{1}{m + \frac{1}{m+\frac{1}{m+\cdots}}} \in (m, m+1),$$

es conocido como el **número metálico** de orden m. Geométricamente, un número metálico es el largo que debe tener un rectángulo de ancho uno, de modo que, si vamos dividiéndolo en cuadrados de lado uno hasta tener m cuadrados y un rectángulo restante, dicho rectángulo está igualmente proporcionado que el inicial $\left(\frac{\sigma_m - m}{1} = \frac{1}{\sigma_m}\right)$.

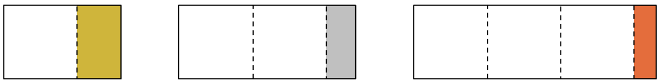

Figura 2.2: Los rectángulos de oro, plata y bronce.

De modo que estos rectángulos tienen una razón de porporcionalidad singularmente estética. Este motivo a inspirado a multitud de artistas a lo largo de la historia, quedando estas razones inmortalizadas en algunas de sus obras de pintura, escultura, arquitectura, etc. [P, dS]. Además, como $|\sigma_m| > |m - \sigma_m|$, se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{L_{k+1}}{L_k} = \sigma_m$. Así, la razón de los rectángulos de lados L_k y L_{k+1} es una sucesión que se aproxima a la razón metálica σ_m. Esto también sirve para obtener aproximaciones de $\sqrt{m^2+4} \approx 2\frac{L_{k+1}}{L_k} - m$.

En particular, para $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, si $m = 1$ la recurrencia de Loucas da lugar a la conocida **sucesión de Fibonacci** $(F_k) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$, la cual encierra los secretos de algunas configuraciones biólogicas de plantas y animales, además de aparecer también en otros campos de las matemáticas como la Teoría de Números [P, dS]. Su expresión explícita es

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) = \frac{\varphi^k - (1-\varphi)^k}{\sqrt{5}}, \qquad k \in \mathbb{Z}^+,$$

donde $\varphi = \sigma_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803$ es la **razón de oro**.

Si $m = 2$ la recurrencia de Loucas da lugar a la conocida **sucesión de Pell** $(P_k) = (0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \ldots)$ [P, dS]. Su expresión explícita es

$$P_k = \frac{(1+\sqrt{2})^k - (1-\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}} = \frac{\delta_S^k - (2-\delta_S)^k}{2\sqrt{2}}, \qquad k \in \mathbb{Z}^+,$$

donde $\delta_S = \sigma_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41421$ es la **razón de plata**.

El mismo argumento empleado aquí es válido para resolver sistemas de m ecuaciones diferenciales (en diferencias) con p incógnitas $(p \geq m)$, de orden n, lineales y con coeficientes constantes: aplicando la transformada de Laplace (Zeta) en cada una de las ecuaciones, transformamos el sistema de ecuaciones diferenciales (en diferencias) en un sistema de ecuaciones algebraicas. Resolviéndolo y procediendo sobre cada incógnita como hemos hecho antes podemos obtener la solución del problema.

2.7.2. Ecuaciones en derivadas parciales

La ecuación del calor n-dimensional

La ecuación del calor n-dimensional es una ecuación en derivadas parciales deducida en mecánica clásica que debe satisfacer una función $u(x,t)$ que cuantifica el "calor" en cada punto x de un espacio euclídeo n-dimensional en cada instante de tiempo $t \geq 0$. Se supone además que conocemos el calor inicial $u(x, 0) = g(x)$ en cada $x \in \mathbb{R}^n$, siendo $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$; es decir, el calor está repartido en el medio de una forma medible y su “cantidad” total es finita (véase [S] 2.16). Esta ecuación es

$$(H)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = k\Delta u(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde Δ es el operador Laplaciano, $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, y k es una constante positiva conocida como la constante de difusividad térmica.

Supongamos que la solución u buscada es continuamente derivable y $u(\cdot,t) \in W_0^{2,1}(\mathbb{R}^n)$ para cada $t \in \mathbb{R}_0^+$ (siendo $W_0^{2,1}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Sobolev formado por las funciones medibles tales que tanto ella como sus derivadas parciales de orden menor o igual que 2 están en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y se anulan en el infinito). Aplicando la transformada de Fourier de $L^1(\mathbb{R}^n)$ sobre la variable x transformamos el problema inicial en el siguiente

$$(\mathscr{F}H)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}(u)(\xi,t) = -4\pi^2 k\|\xi\|^2\mathscr{F}(u)(\xi,t), & (\xi,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+, \\ \mathscr{F}(u)(\xi,0) = \mathscr{F}(g)(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

que es una ecuación diferencial lineal en la variable t cuya solución hemos calculado con la transformada de Laplace

$$\mathscr{F}(u)(\xi,t) = \mathscr{F}(g)(\xi)e^{-4\pi^2 k\|\xi\|^2 t}, \qquad (\xi,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+.$$

Ahora bien, $e^{-4\pi^2 k\|\xi\|^2 t} = \mathscr{F}(G_k(\cdot,t))(\xi)$ para cada $(\xi,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ [MTU], donde G_k es la función Gaussiana

$$G_k(x,t) = (4\pi kt)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4kt}}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+.$$

La inyectividad de la transformada de Fourier nos permite concluir que

$$u(x,t) = \Big(g * G_k(\cdot,t)\Big)(x) = (4\pi kt)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(s)e^{-\frac{\|x-s\|^2}{4kt}}\,ds, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+,$$

es la única solución de la ecuación del calor n-dimensional.

Consideremos ahora que nuestro medio $\mathbb{R}^n$ se encontraba en equilibrio hasta que, en un instante inicial, la bola unidad n-dimensional es “calentada” de forma homogénea de modo que la “cantidad” de calor en ella es 1; es decir, $g = \frac{1}{m_n(\mathbb{B}^n)}\chi_{\mathbb{B}^n}$. Para causar un efecto similar reduciendo el área de actuación, podríamos pensar que, si solo se pudiera calentar la bola n-dimensional de radio $\varepsilon > 0$, se debería aumentar el calor inicial de forma que la cantidad de calor volviese a ser 1; es decir, $g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n m_n(\mathbb{B}^n)}\chi_{\varepsilon\mathbb{B}^n}$. Continuando con este experimento mental, si hacemos la bola infinitamente pequeña podríamos interpretarlo como el efecto que produce una partícula puntual al “agitarse” (emitir calor) en un instante inicial. Sin embargo, nuestras funciones g_ε parecen tender a $\infty\chi_{\{0\}}$ (cuando $\varepsilon \to 0^+$), la cual es extraño considerar como función (e incluso haciéndolo, no tiene ningún sentido en la solución que hemos calculado). Este problema supuso un reto intelectual cuando fue planteado por el físico Paul Dirac, y, de hecho, su intento de ser comprendido ayudó a la formalización de algunas teorías dentro del Análisis Matemático. Hoy en día podemos dar respuestas matemáticamente satisfactorias a este suceso. Nosotros daremos una aquí dentro del ámbito que nos compete: considerando $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ como una familia de medidas en el álgebra de Banach $M(\mathbb{R}^n)$, se puede probar que tienden en este espacio a la delta de Dirac (nombrada así por Paul Dirac) que, recordemos, es la unidad de $M(\mathbb{R}^n)$; de hecho, esta familia (y otras con propiedades similares) se conocen como aproximaciones de la identidad o núcleos de sumabilidad. Volviendo al problema del principio, consideremos el estado inicial del medio con este “impulso” dado por una partícula; es decir, $g = \delta_0$. Razonando igualmente con la transformada de Fourier-Stieltjes obtenemos la respuesta a nuestro problema

$$u(x,t) = \Big(\delta_0 * G_k(\cdot,t)\Big)(x) = G_k(x,t) = (4\pi kt)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4kt}}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+.$$

La ecuación de ondas en la semi-recta (con condiciones de contorno tipo Neumann)

La ecuación de ondas es una ecuación en derivadas parciales deducida en mecánica clásica que debe satisfacer una función $u(x,t)$ que cuantifica una magnitud física que se propaga como una "onda" en cada instante de tiempo $t \geq 0$ (véase [S] 2.16). Particularmente, nosotros vamos a estudiar este problema en la semi-recta, $\mathbb{R}_0^+$, y con condiciones de contorno tipo Neumann. Esta ecuación es

$$(W)\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+, \\ u(x,0) = g(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R}_0^+, \\ \frac{\partial}{\partial x}u(0,t) = 0, & x \in \mathbb{R}_0^+, \end{cases}$$

donde c es una constante positiva conocida como la velocidad de propagación de la onda.

Supongamos que $g,h \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$, y que la solución u buscada es continuamente derivable y $u(\cdot,t) \in W_0^{2,1}(\mathbb{R}_0^+)$ para cada $t \in \mathbb{R}_0^+$ (siendo $W_0^{2,1}(\mathbb{R}_0^+)$ el espacio de Sobolev formado por las funciones medibles tales que tanto ella como sus derivadas parciales de orden menor o igual que 2 están en $L^1(\mathbb{R}_0^+)$ y se anulan en el infinito). Aplicando la transformada coseno sobre la variable x transformamos el problema inicial en el siguiente

$$(CW)\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}C(u)(\omega,t) = -(c\omega)^2C(u)(\omega,t), & (\omega,t) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+, \\ C(u)(\omega,0) = C(g)(\omega), \quad \frac{\partial}{\partial t}C(u)(\omega,0) = C(h)(\omega), & \omega \in \mathbb{R}_0^+, \end{cases}$$

que es una ecuación diferencial lineal en la variable t cuya solución hemos calculado con la transformada de Laplace

$$C(u)(\omega,t) = C(g)(\omega)\cos(c\omega t) + \frac{C(h)(\omega)}{c\omega}\sin(c\omega t), \qquad (\omega,t) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+. \tag{2.3}$$

Se termina por comprobar que la siguiente función satisface la ecuación (2.3), y, la inyectividad de la transformada coseno nos permite concluir que

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(g(ct+x)+g(ct-x)\Big) + \frac{1}{2c}\Big(H(ct+x)+H(ct-x)\Big), & 0 \leq x < ct, \\ \frac{1}{2}\Big(g(x+ct)+g(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\Big(H(x+ct)-H(x-ct)\Big), & ct \leq x, \end{cases}$$

para cada $t \in \mathbb{R}_0^+$, es la única solución de la ecuación de ondas en la semi-recta (con condiciones de contorno tipo Neumann), siendo $H(s) = \int_0^s h(\tau)d\tau$ para cada $s \in \mathbb{R}_0^+$.

Para unas condiciones de contorno diferentes (en $\mathbb{T}$ ó $[-L,L)$) en ambos problemas, la solución se basa en desarrollos en serie de senos y cosenos (véase [MTU] 14.2) que, en cierto sentido, utiliza los coeficientes de la serie de Fourier que, recordemos, es la transformada de Gelfand en el álgebra de Banach $L^1(\mathbb{T})$.

Otras aplicaciones

La inyectividad de estas transformadas integrales garantiza que existe una aplicación inversa para la aplicación restringida al rango; de este modo, conocer su expresión explícita permitiría poder pasar de un álgebra de Banach a la otra. En este sentido destacamos que los teoremas de inversión de estas transformadas [F, L, D] permiten calcular series e integrales no triviales como, por ejemplo, los valores pares de la función Zeta de Riemann; también permiten establecer relaciones entre series e integrales, como, por ejemplo, la fórmula de sumación de Mellin (véase [D] 13.1).

Apéndice

A.1. Aspectos algebraicos y topológicos

Damos por conocidas las nociones de grupo, semigrupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial sobre un cuerpo. En este contexto, recordamos que un álgebra sobre un cuerpo es un conjunto dotado de una estructura de espacio vectorial sobre dicho cuerpo y de otra de anillo, las cuales son compatibles entre sí:

Definición A.1.1. Un **álgebra sobre un cuerpo** $\mathbb{F}$ es un sistema algebraico de la forma $(A,+,\cdot,\star)$, donde, por un lado, $(A,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y, por otro lado, $(A,+,\star)$ es un anillo y además se satisface la condición

$$\alpha\cdot(x\star y)=(\alpha\cdot x)\star y=x\star(\alpha\cdot y), \quad x,y\in A,\ \alpha\in\mathbb{F}.$$

El álgebra se dice **conmutativa** si la operación $\star$ es conmutativa. Se dice **unitaria** si tiene identidad (distinta del neutro 0_A), el cual denotaremos por e_A; en tal caso, se dice que es **de división** si todo elemento $x\in A\setminus\{0_A\}$ tiene inverso y lo denotaremos por x^{-1}.

Dentro del marco de las estructuras algebraicas, dada una estructura algebraica $(E,\cdots)$, un subconjunto C de E que, con la restricción de las operaciones a él, mantiene el tipo de estructura algebraica se dice que es un subsistema algebraico de $(E,\cdots)$ y se denota por $C\leq(E,\cdots)$. Como las propiedades de las operaciones se heredan de forma natural sobre subconjuntos, la condición necesaria y suficiente para que un subconjunto sea subsistema algebraico es que la restricción de las operaciones a él conserve las leyes de composición. En este sentido se habla de subgrupos, subsemigrupos, subanillos, subespacios vectoriales, subálgebras, etc..

Dada un álgebra $A\equiv(A,+,\cdot,\star)$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, denotaremos $Alg_{\mathbb{F}}(A)$ por el conjunto formado por las subálgebras de $(A,+,\cdot,\star)$.

Como $(A,+)$ es un grupo abeliano, si H es un subgrupo suyo, la relación $\sim$ dada por, $x\sim y$ si y solo si $x-y\in H$, para cada $x,y\in A$, es de equivalencia. Además, $x\sim y$ si y solo si $x+H=y+H$. Esto permite definir el conjunto cociente de las clases laterales de H, $A/H=\{x+H\ :\ x\in A\}$. Dicho conjunto es grupo abeliano con la operación

$$(x+H)+(y+H)=(x+y)+H, \quad x+H,\ y+H\in A/H.$$

Dado ahora un subespacio vectorial V de A, A/V es espacio vectorial con la operación

$$\alpha\cdot(x+V)=(\alpha\cdot x)+V, \quad x+V\in A/V,\ \alpha\in\mathbb{F}.$$

Esquemáticamente hemos dicho que

$$\begin{aligned} H\leq(A,+)\ \text{grupo abeliano} \quad &\Rightarrow \quad (A/H,+)\ \text{grupo abeliano.}\\ V\leq(A,+,\cdot)\ \text{espacio vectorial} \quad &\Rightarrow \quad (A/V,+,\cdot)\ \text{espacio vectorial.}\end{aligned}$$

Ahora bien, si L es una subálgebra de A, la operación

$$(x+L)\star(y+L)=(x\star y)+L, \qquad x+L,\ y+L\in A/L$$

no se puede definir en general. Es decir,

$$L\leq(A,+,\cdot,\star)\text{ álgebra }\not\Rightarrow\ (A/L,+,\cdot,\star)\text{ álgebra.}$$

Esto motiva el considerar un tipo de subálgebras más restrictivo que definimos a continuación.

Definición A.1.2. Un subespacio vectorial I de A se dice que es un **ideal a izquierda** (**derecha**) de A si $x\star z\in I$ ($z\star x\in I$) para todo $x\in A$, $z\in I$. Esto es equivalente a decir que $\star: A\times I\to I$ ($\star: I\times A\to I$) está bien definida. Se dice que el ideal es **bilátero** si es ideal a izquierda y derecha a la vez y lo denotaremos por $I\trianglelefteq A$.

Recordemos que las subálgebras son subespacios vectoriales en los que $\star: B\times B\to B$ está bien definida, luego todo ideal es subálgebra. Además, si el ideal es bilátero se satisface la implicación que buscabamos

$$I\trianglelefteq(A,+,\cdot,\star)\text{ álgebra }\Rightarrow\ (A/I,+,\cdot,\star)\text{ álgebra.}$$

Se conoce a $A/I\equiv(A/I,+,\cdot,\star)$ como el **álgebra cociente** de A por I.

Definición A.1.3. Un ideal a izquierda (derecha) propio M de A se llama **ideal maximal a izquierda (derecha)** de A si A no tiene ideales a izquierda (derecha) propios que contienen estrictamente a M. Diremos que un ideal bilátero es **maximal bilátero** si es ideal maximal a izquierda y derecha a la vez y lo denotaremos por $M\trianglelefteq_m(A,+,\cdot,\star)$.

Supongamos dada otra álgebra $B\equiv(B,+,\cdot,\diamond)$ (sobre el cuerpo $\mathbb{F}$), no necesariamente diferente a la inicial. Si nos preguntamos ahora que aplicaciones de A en B conservan la estructura de álgebra, estamos entrando en el terreno de la categoría formada por las álgebras y los homomorfismos entre álgebras. Concretamente, una aplicación $\psi: A\to B$ es un homomorfismo entre las álgebras A y B si

$$\psi(\alpha x+\beta y)=\alpha\psi(x)+\beta\psi(y), \qquad \psi(x\star y)=\psi(x)\diamond\psi(y), \qquad x,y\in A,\ \alpha,\beta\in\mathbb{F}.$$

Denotaremos $Hom(A,B)$ por el conjunto formado por los homomorfismos de A en B. Un homomorfismo inyectivo se dice **monomorfismo**, y uno sobreyectivo **epimorfismo**. Si el homomorfismo es biyectivo se dice **isomorfismo**; en tal caso se dice que A y B son **isomorfas** y se denota por $A\simeq B$. Un isomorfismo de un álgebra en sí misma se dice **automorfismo**. El conjunto formado por los automorfismos de un álgebra (sobre el cuerpo $\mathbb{F}$) tiene estructura de grupo con la operación de composición $\circ$. Denotaremos a este conjunto por $Aut_{\mathbb{F}}(A)$.

Del mismo modo se habla de la categoría de los grupos, semigrupos, anillos o espacios vectoriales y los homomorfismos entre ellos; las definiciones son similares (adaptándose a cada caso) y se entenderá por el contexto en el que se esté de que tipo de homomorfismo se trata.

Dado un homomorfismo $\psi: A\to B$, su **núcleo**, $\mathrm{Ker}\psi=\psi^{-1}(0_B)$, es un ideal bilátero de A ($\mathrm{Ker}\psi\trianglelefteq A$). Además, dicho homomorfismo es un monomorfismo si y solo si el núcleo es trivial. El **rango** del homomorfismo, $\mathrm{Ran}\psi=\psi(A)$, es una subálgebra de B ($\mathrm{Ran}\psi\leq B$).

Por un lado, si I es un ideal bilatero de A, se define la **proyección canónica** sobre el álgebra cociente de A por I como la aplicación $\pi_I: A\to A/I$ dada por $x\mapsto x+I$. Por otro lado, si L es una subálgebra de A, se define la **inclusión canónica** de L en B como la inclusión natural $\iota_L: L\hookrightarrow B$.

Teorema A.1.4 (Teorema de isomorfía para álgebras)**.** *Dado un homomorfismo $\psi: A\to B$, existe un único isomorfismo $\tilde{\psi}: A/\mathrm{Ker}\psi\to\mathrm{Ran}\psi$ que completa el siguiente diagrama de forma conmutativa*

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\psi}{\to} & B \\ \pi_{\ker\psi}\downarrow & & \uparrow\iota_{\mathrm{Ran}\psi} \\ A/\ker\psi & \overset{\tilde{\psi}}{\to} & \mathrm{Ran}\psi \end{array}$$

En particular, $A/\mathrm{Ker}\psi\simeq\mathrm{Ran}\psi$.

Definición A.1.5. Un ideal a izquierda (derecha) I de A se llama **ideal regular a izquierda (derecha)** de A si existe un $u \in A$ ($v \in A$) tal que $xu - x \in I$ ($vx - x \in I$) para todo $x \in A$. En tal caso, u (v) se dice identidad módulo I. Diremos que un ideal bilátero es **regular bilátero** si es ideal regular a izquierda y derecha a la vez y lo denotaremos por $I \trianglelefteq_e A$. En tal caso, notemos que $u - v = (vu - v) - (vu - u) \in I$, es decir, $u + I = v + I$.

Es claro que si A es unitaria, todo ideal es regular con $u = e_A$; de modo que el interés de estos ideales es exclusivo de las álgebras no unitarias.

Es fácil comprobar que un ideal regular es propio si y solo si su identidad módulo no pertenece a él. Además, si un ideal regular a izquierda (derecha) está contenido en un ideal a izquierda (derecha), éste también es regular con la misma identidad módulo.

La existencia de estos ideales en un álgebra es significativa por el siguiente teorema.

Teorema A.1.6. *Todo ideal regular a izquierda (derecha) de un álgebra tiene un ideal maximal a izquierda (derecha) que lo contiene; además, dicho ideal maximal es regular a izquierda (derecha).*

La demostración es sencilla utilizando el lema de Zorn y las observaciones anteriores. Está implícito que, en un álgebra donde hay ideales regulares a izquierda (derecha) también hay ideales maximales regulares a izquierda (derecha).

Así como los ideales biláteros permiten definir una estructura de álgebra sobre el espacio cociente, los que además son regulares dotan a este álgebra de unidad; de ahí el nombre de identidad módulo I.

Teorema A.1.7. *Un ideal bilátero I de A es regular bilátero si y solo si el álgebra cociente de A por I es unitaria. Esquemáticamente,*

$$I \trianglelefteq_e A \quad \Leftrightarrow \quad A/I \text{ unitaria.}$$

Además, en tal caso, $u + I = v + I = e_{A/I}$.

Si además de regular bilátero el ideal es maximal bilátero, el álgebra cociente, además de unitaria es de división.

Teorema A.1.8. *Un ideal bilátero M de A es maximal regular bilátero si y solo si el álgebra cociente de A por M es de división. Esquemáticamente,*

$$M \trianglelefteq_{m,e} A \quad \Leftrightarrow \quad A/M \text{ de división.}$$

Estos ideales juegan un papel importante en la teoría de representación de Gelfand, de modo que usaremos una notación específica para dicho conjunto,

$$\mathfrak{M}(A) = \{M \subsetneq A \ : \ M \trianglelefteq_{m,e} A\}.$$

La intersección de todos estos ideales maximales regulares biláteros es un ideal bilátero conocido como el **radical** del álgebra A y se denota por $\operatorname{Rad}(A) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A)} M$. Se dice que A es un **álgebra radical** si carece de dichos ideales maximales regulares bilateros. En el caso contrario, si además se tiene que $\operatorname{Rad}(A) = \{0_A\}$, se dice que A es **semisimple**.

Aunque las álgebras pueden definirse sobre cualquier cuerpo, nosotros nos centraremos exclusivamente en las reales ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) y, especialmente, en las complejas ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$). La razón es que la completitud del cuerpo base es fundamental en las siguientes secciones debido a muchos resultados del Análisis Funcional en los que se cimenta esta teoría. En este sentido también se han estudiado las álgebras de Banach sobre el cuerpo (completo) de los números p-ádicos; sin embargo, nosotros nos centraremos en los casos que hemos mencionado.

Recordemos que, las aplicaciones que conservan la estructura topológica entre dos espacios topológicos son las aplicaciones continuas, formando así la categoría correspondiente. Una biyección continua cuya inversa es también continua entre dos espacios topologicos X e Y se dice homeomorfismo; en tal caso, se dice que X e Y son homeomorfos y se denota por $X \simeq Y$. Si estos espacios topológicos son espacios normados (de Banach), se dice que son isomorfos si existe un isomorfismo que es también homeomorfismo entre ellos y se denota por $X \simeq Y$; el isomorfismo se dice isométrico si la aplicación es una isometría ($\|\psi(x)\|_Y = \|x\|_X \ \forall x \in X$). Del mismo modo se habla de isomorfismos (isométricos) entre álgebras normadas o de Banach y la notación no cambia.

Hemos querido recordar estas definiciones y notaciones ya que, aunque pueda resultar contraproducente usar el mismo lenguaje para diferentes estructuras, ha quedado así estandarizado en favor de la similitud dentro del contexto de estas categorías, ya que, suele entenderse por el contexto (especificándose en caso contrario) de que tipo de homomorfismo se trata y que significa "$\simeq$".

A.2. Otros ejemplos

Ejemplo. El espacio vectorial formado por las funciones n-veces continuamente derivables de $[a,b]$ en D para alguna $D \in DB(\mathbb{F})$,$\mathscr{C}^{(n)}([a,b],D)$, con el producto usual de funciones y la norma

$$\|f\|_n = \sup_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{n} \frac{|f^{(k)}(x)|}{k!}, \qquad f \in \mathscr{C}^{(n)}([a,b],D),$$

es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{F}$. Es unitaria con $e_{\mathscr{C}^{(n)}([a,b],D)}$ la función constante 1, y conmutativa salvo si $D = \mathbb{H}$. Además se tiene la relación de contenido $\mathscr{C}^{(n)}([a,b],D) \leq \mathscr{C}^{(m)}([a,b],D)$ para cada $n,m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m \leq n$.

Ejemplo. Para cada espacio de medida $(X,\mathfrak{A},\mu)$, el espacio vectorial formado por las clases de funciones medibles de X en $\mathbb{F}$ y esencialmente acotadas, $L^\infty(X)$, con el producto usual de funciones y la norma del supremo esencial

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)| = \text{ínf}\big\{M > 0 \ : \ \mu\big(\{x \in X \ : \ |f(x)| > M\}\big) = 0\big\}, \qquad f \in L^\infty(X),$$

es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{F}$. Es conmutativa y unitaria con $e_{L^\infty(X)}$ la función constante 1. Si además X es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff tal que $\mathfrak{A}$ contiene a sus borelianos, entonces $L^\infty(X)$ contiene a $\mathscr{C}_b(X,\mathbb{F})$ como subálgebra.

Ejemplo. Para cada región acotada del plano complejo Ω, el espacio vectorial formado por las funciones holomorfas en Ω y continuas en su clausura, $\mathscr{A}(\overline{\Omega})$, con el producto usual de funciones y la norma infinito sobre $\overline{\Omega}$ es un álgebra de Banach compleja. Es conmutativa y unitaria con $e_{\mathscr{A}(\overline{\Omega})}$ la función constante 1.

Ejemplo. Dado un grupo abeliano localmente compacto $G \equiv (G,\cdot,\tau_G)$, una función continua de G en $\mathbb{C}$, $f \in \mathscr{C}(G)$, se dice que es **casi-periódica** ("*almost periodic*") si la clausura del conjunto $\{T_s(f) \ : \ s \in G\}$ es compacta en $\mathscr{C}(G)$. El conjunto formado por las funciones casi periódicas, $AP(G)$, con el producto usual de funciones y la norma infinito, es un álgebra de Banach compleja y conmutativa.

Se puede probar que este espacio coincide exactamente con la clausura del espacio generado por los carácteres continuos de G. El espectro de esta álgebra de Banach, $\triangle(AP(G))$, es conocido como la compactificación de Bohr del grupo G [L, Bo].

Hasta aquí, los productos $\star$ de todos estos ejemplos de álgebras de Banach se han basado en el producto usual en D para alguna $D \in DB(\mathbb{F})$. Se dice que éstas son álgebras de Banach de **producto puntual**. Veamos ahora otro ejemplo de álgebras cuyo producto $\star$ no es el producto puntual, las llamadas **álgebras de operadores**.

Ejemplo. Si $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son espacios normados sobre $\mathbb{F}$, el espacio vectorial formado por los operadores lineales y continuos de X en Y, $\mathscr{B}(X,Y)$, con la norma de operadores

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{S}_X} \|Tx\|_Y, \qquad T \in \mathscr{B}(X,Y),$$

es un espacio normado sobre $\mathbb{F}$; y, si Y es de Banach, también lo es $\mathscr{B}(X,Y)$. Cuando $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{F}, |\cdot|)$, $X^* = \mathscr{B}(X,\mathbb{F})$ se conoce como el **espacio dual** de X. Si $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ y $S \in \mathscr{B}(Y,Z)$, entonces $S \circ T \in \mathscr{B}(X,Z)$ y $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$. De este modo, para cada espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$, $\mathscr{B}(X) = \mathscr{B}(X,X)$ con la norma de operadores y la composición $\circ$ es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{F}$. Es unitaria con $e_{\mathscr{B}(X)} = 1_X$. Si X es de dimensión finita, entonces $X \simeq \mathbb{F}^n$ y $\mathscr{B}(\mathbb{F}^n) \simeq \mathscr{M}(n,\mathbb{F})$, el conjunto formado por las matrices de $n \times n$ elementos sobre $\mathbb{F}$. De hecho, es conmutativa si y solo si $X = \mathbb{F}$ ($\mathscr{B}(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}$).

Este último ejemplo es fundamental en la teoría de C^*-álgebras de Banach (de las cuales no hablaremos en este trabajo. El lector interesado podrá encontrar información en [BD]), ya que, como asegura el teorema no conmutativo de Gelfand-Naimark, toda C^*-álgebras de Banach (compleja) no conmutativa es isométricamente $*$-isomorfa a una subálgebra (cerrada) de $\mathscr{B}(H)$ para algún espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Bibliografía

[BD] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[Bo] H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, Chelsea Publishing Company, 1947.

[CS] J. H. Conway, D. A. Smith, *On Quaternions and Octonions: their Geometry, Arithmetic and Symmetry*, A K Peters Ltd., Natick, 2003.

[D] B. Davies, *Integral Transforms and their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[F] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, Washington, 1995.

[GRS] I. Gelfand, D. Raikov, G. Shilov, *Commutative Normed Rings*, Chelsea Publishing Company, 1964.

[L] R. Larsen, *Banach Algebras*, Marcel Dekker, Wesleyan, Middletown, 1973.

[La] F. László, *Partially Ordered Algebraic Systems*, Dover Publications, New York, 2011 [1963].

[Lo] É. Loucas, *The Theory of Simply Periodic Numerical Functions*, Fibonacci Association, 1969 [1878].

[M1] P. J. Miana, *Curso de Análisis Funcional*, Prensas Universitarias de Zaragoza, 2006.

[M2] P. J. Miana, *Algebra Homomorphisms from Cosine Convolution Algebras*, Israel Journal of Mathematics **165** (2008), 253-280.

[MTU] J. San Martin, V. Tomeo, I. Uña, *Métodos Matemáticos. Ampliación de Matemáticas para Ciencias e Ingeniería*, Thompson, Madrid, 2005.

[P] R. Pérez, *Gaudí y la Proporción*, La Gaceta vol. 5 nº3 (2002), España, 2002.

[R1] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publishers, 1962.

[R2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[R3] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[RV] D. Ramakrishnan, R. J. Valenza, *Fourier Analysis on Number Fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[S] I. H. Sneddon, *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, Berlin, 1972.

[dS] Vera W. de Spinadel, *The Family of Metallic Means*, Universidad de Buenos Aires, 1999.