

Diseño y presentación de material divulgativo matemático



Eduardo Fernández González
Trabajo de fin del grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Introducción

El objetivo de este trabajo, como se menciona en el título del mismo, es el diseño y presentación de material didáctico y divulgativo matemático. En concreto en este trabajo dicho material estará conformado principalmente por gráficas, animaciones y diseños realizados en Geogebra de manera que sea posible cierta interacción con los mismos. El trabajo está dividido en dos capítulos que tratan dos temas distintos.

El primer capítulo trata sobre el estudio de las formas de las ruedas y las carreteras sobre las que estas rodarían adecuadamente. Este capítulo está basado en gran medida en el artículo publicado por Leon Hall y Stan Wagon [HW]. En esta parte del trabajo se estudia la forma general de obtener la rueda correspondiente partiendo de la carretera y viceversa y se detallan diversos casos de interés divulgativo (el más conocido podría ser el de ruedas poligonales), representando estos casos tanto a través de Geogebra como de animaciones y gráficas realizadas con la programación de código en Matlab. Se incluye también la forma de programar la resolución numérica de los distintos casos que pueden presentarse junto con el código necesario para animar los resultados obtenidos.

El segundo capítulo se centrará en la obtención de las ecuaciones de movimiento de distintos tipos de péndulo y su aplicación en una simulación del botafumeiro de Santiago. En concreto se realizará una pequeña introducción a la mecánica lagrangiana para a continuación obtenerse las ecuaciones del péndulo simple, doble y de longitud variable. Por último se usarán las fórmulas de este último para programar una simulación animada, mediante el uso de Matlab, del famoso incensario de la catedral de Santiago de Compostela.

Abstract

Roads and wheels

Obtaining the wheel

Suposse we are given a road in the form of a $\mathcal{C}^{(1)}$ curve in the lower half-plane, parametrized by $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ where $x(t)$ is increasing, $x(0) = 0$ and $y(t) \leq 0$. The wheel corresponding to the road will be a curve given by a polar function $r = r(\theta)$ such that the axle of the wheel stays directly above of the wheel-road contact point as the wheel roads along the road. The motion is described by $\theta = \theta(t)$, where $\theta(t) - \theta(0)$ describes the amount of angular rotation for the wheel to roll from $\mathbf{f}(0)$ to $\mathbf{f}(t)$. These functions satisfy the following conditions:

1. **Initial condition:** the initial contact point is $\mathbf{f}(0)$, so $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$
2. **Rotation condition:** the wheel never slips. For any t the length of \mathbf{f} between $\mathbf{f}(0)$ and $\mathbf{f}(t)$ matches de arc length of the wheel between $\theta(0)$ and $\theta(t)$.
3. **Radius condition:** the radius of the wheel matches the depth of the road in corresponding points. For any t , $r(\theta(t)) = -y(t)$.

Finding $\theta(t)$ will be enough to find the wheel, since $r = r(\theta)$. The rolling condition is

$$\int_0^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(t)} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$$

Now differentiate both sides respect to t , square and substitute $r'(\theta) \theta'(t) = -y(t)$ to get

$$x'(t)^2 = \theta'(t)^2 r(\theta)^2$$

Since $\theta'(t)$ is positive and taking into account the initial condition, the initial value problem is

$$\begin{cases} \theta'(t) = x'(t) \frac{1}{-y(t)} \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Closed wheels and vertical scaling

If the road is periodic with period p it may close up on itself or it may not (if the road isn't periodic this closure is impossible). The condition for this closure - *the closed-wheel condition* - is that there exists $r \in \mathbb{Q}$ such that

$$2\pi r = \theta(p) - \theta(0) = \int_0^p -\frac{x'(t)}{y(t)} dt$$

Related to the closed-wheel condition is interesting to study what happens to this condition if a vertical scaling is applied to the road. If the initial road is periodic with period p , it is given by $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ and a vertical scaling $k > 0$ is applied, the road is given by $\mathbf{f}_k(t) = (x(t), ky(t))$ has a period p too. The closed-wheel condition is affected as follows:

- If the original road has a closed wheel, the wheel corresponding to the scaled road closes up on itself if and only if $k \in \mathbb{Q}$
- If the original road has no closed wheel, the wheel corresponding to the scaled road closes up on itself if and only if k is a rational multiple of $\int_0^p \frac{-x'(t)}{2\pi y(t)} dt$

Summary of some road-wheel solutions

<i>Wheel</i>	<i>Road</i>
1.Straight line	Inverted catenary
2.Regular polygons	Picewise inverted catenaries
3.Circle	Horizontal line
4.Circle, axle on the circumference	Circunference, radius doubled
5.Equiangular spiral	Oblique line
6.Piecewise equiangular spiral	Sawtooth
7.Ellipse with axle at focus	Cosine
8.Parabola $y = \frac{x^2+p^2}{2p}$	Parabola $y = \frac{-x^2+p^2}{2p}$
9.Cardioid	Inverted cycloid
10.Pointed wheels	Lowered cycloids
11.Pascal's snail	Trocoid
12.Cuspidate rosettes	Scaled inverted cycloids

Generating solutions numerically

In order to print and animate the solutions some Matlab code has been programmed, using the classic Runge-Kutta method to solve de intial value problem. The code changes if the initial situation is the road or the wheel and each case can be given in two ways ($\mathbf{f}(t) = (t, y(t))$) or parametrically the road and in polar form or parametrically the wheel) so 4 different cases have been taken into account.

Pendulums

A brief introduction to lagrangian mechanichs

The lagrangian mechanichs is a reformulation of classical mechanichs using the principle of minimal action.

Instead of using the cartesian coordinates and calculating forces in term of them, only as many coordinates as needed will be used. The number of coordinates coincide with the number of degrees of freedom of the system. These coordinates, q_j , and their time derivatives (called generalized velocities), q'_j , will be used for calculating kinetic and potential energy of the system.

In a conservative system, the Lagrangian is given by the difference between the kinetic (T) and potential (V) energy of the system, so

$$L(q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_n, t) = T(q'_1, \dots, q'_n, t) - U(q_1, \dots, q_n, t)$$

The action for each possible trajectory is given by

$$S[(q_1, \dots, q_n)] = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_n, t) dt$$

and the Hamilton principle tells that the trajectory the system will follow is the one which verifies $\delta S = 0$

Using calculus of variations to solve $\delta S = 0$, the Euler-Lagrange equations are obtained

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_j} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

and the differential equation system that describe the dynamics of the conservative system can be deduced from them.

Simple pendulum

A simple pendulum is a weight hanging from a rope. In this case the generalized coordinate is the angle $\theta(t)$. If the length of the rope is l , the initial angle is θ_0 and its initial angular speed is ω_0 and no friction is supposed, the motion equations are given by:

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0 & t > 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \quad \theta'(0) = \omega_0 \end{cases}$$

Double pendulum

A double pendulum is made by adding a simple pendulum from another simple pendulum. Taking both angles, $\theta_1(t)$ and $\theta_2(t)$ as generalized coordinates, assuming that the two ropes and weights are equal and taking initial conditions, $\theta_{10}, \omega_{10}, \theta_{20}, \omega_{20}$, the motion equations are given by:

$$\begin{cases} 2\theta_1''(t) + \theta_2''(t) \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + (\theta_2'(t))^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = -2 \frac{g}{l} \sin(\theta_1(t)) & t > 0 \\ \theta_1''(t) \cos(\theta_1 - \theta_2) + \theta_2''(t) - (\theta_1'(t))^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = -\frac{g}{l} \sin(\theta_2(t)) & t > 0 \\ \theta_1(0) = \theta_{10} \quad \theta_1'(0) = \omega_{10} \\ \theta_2(0) = \theta_{20} \quad \theta_2'(0) = \omega_{20} \end{cases}$$

Variable length pendulum

A variable length pendulum is similar to a simple pendulum but the length of the rope is given by a function $l(t)$. If the function is known, the angle $\theta(t)$ is the generalized coordinate and taking initial conditions θ_0, ω_0 , the motion equations are given by:

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{2l'(t)}{l(t)} \theta'(t) + \frac{g}{l(t)} \sin(\theta) = 0 & t > 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \quad \theta'(0) = \omega_0 \end{cases}$$

Botafumeiro simulation

The botafumeiro is a famous thurible used in Santiago de Compostela Cathedral. The length of the rope is 20,6 m and its weight is 53 kg. At the beginning of the motion it is pushed until it reaches a 13° angle. Eight red-robed tiraboleiros pull the ropes every time the censer is in the lowest point of its movement, reaching it 2.9 m. When the botafumeiro is in the highest point of its oscillation, the tiraboleiros release the rope, so it recovers the original length. This way the oscillations are getting higher and higher, reaching an angle of 82° in about 80 seconds and 17 tugs.

In order to simulate this situation, some simplifications have been taken. The most important ones are that the length at the highest points changes immediately and the change of length at the lowest point is given by gaussian function. The simulation has been programmed in Matlab and the classic Runge-Kutta method has been used in order to solve the initial value problems.

Índice general

Introducción	III
Abstract	V
1. Ruedas y carreteras	1
1.1. Construcción de una rueda adecuada	1
1.2. Ruedas cerradas	3
1.3. Ruedas poligonales	4
1.4. Ruedas elípticas	7
1.4.1. Elipse con eje en su centro	7
1.4.2. Elipse con eje en uno de los focos	8
1.5. Carreteras inclinadas	9
1.6. Carretera semicircular	10
1.7. Carreteras cicloidales	10
1.8. Carretera que sea su propia rueda	11
1.9. Escalado vertical	12
1.10. Generación numérica de las soluciones	13
1.10.1. Caso 1	14
1.10.2. Caso 2	14
1.10.3. Caso 3	15
1.10.4. Caso 4	15
2. Péndulos	17
2.1. Introducción a la mecánica lagrangiana	17
2.1.1. Coordenadas generalizadas	17
2.1.2. Lagrangiano y acción	17
2.1.3. Principio de Hamilton y ecuaciones Euler-Lagrange	18
2.2. Péndulo plano simple	18
2.3. Péndulo plano doble	19
2.4. Péndulo plano de longitud variable	21
2.5. Simulación del botafumeiro	22
2.5.1. Funcionamiento	22
2.5.2. Consideraciones iniciales	23
2.5.3. Simulación numérica	24
2.5.4. Comentarios finales	25
Bibliografía	27
Anexo I	29
Anexo II	37

Capítulo 1

Ruedas y carreteras

1.1. Construcción de una rueda adecuada

El punto de partida será una carretera con la forma de una curva de clase $\mathcal{C}^{(1)}$ en el semiplano inferior. Esta curva estará parametrizada por $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ con $x(t)$ creciente, $x(0) = 0$ e $y(t) \leq 0$. La rueda buscada será una curva que ruede de manera fluida sobre la carretera anterior. En concreto la rueda será una curva dada por una función polar derivable $r = r(\theta)$ de manera que el eje de la rueda se mantenga en el eje x en la vertical del punto de contacto de la rueda con la carretera. Este eje es el punto sobre el que girará la rueda, originalmente estará situado en $(0, 0)$ y puede coincidir o no con el centro geométrico de la rueda.

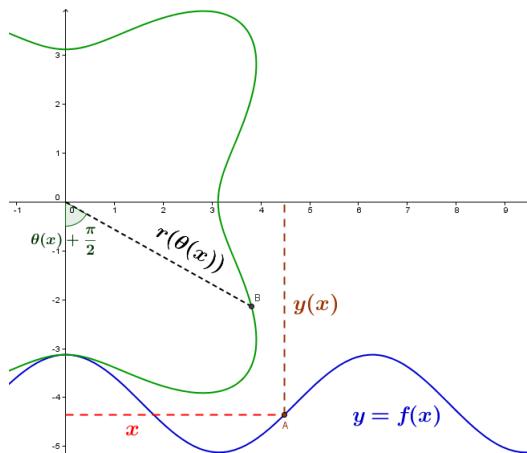


Figura 1.1: Representación de las funciones que definen carretera y rueda.

Se supone que la carretera genera suficiente fricción como para que la rueda no deslice en ningún momento del recorrido. El movimiento de rotación podrá describirse mediante una función derivable $\theta = \theta(t)$ de manera que $\theta(t) - \theta(0)$ describe la rotación necesaria para que la rueda se desplace desde el punto $\mathbf{f}(0)$ al punto $\mathbf{f}(t)$. Estas funciones deben cumplir las siguientes condiciones:

1. **Condición inicial:** el punto de contacto inicial está en $\mathbf{f}(0) = (0, y(0))$, justo debajo del origen, de manera que $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$
2. **Condición de rotación:** la longitud recorrida en la rueda coincide con la distancia recorrida en la carretera. Para todo t la longitud del arco de \mathbf{f} entre $\mathbf{f}(0)$ y $\mathbf{f}(t)$ coincide con la longitud de arco de la curva polar (la rueda) entre los puntos correspondientes a $\theta(0)$ y $\theta(t)$
3. **Condición del radio:** el radio de la rueda se corresponde con la profundidad de la carretera en los puntos correspondientes, esto es, para todo t tenemos que $r(\theta(t)) = |y(t)| = -y(t)$

Para obtener la rueda se busca encontrar la función $\theta(t)$ ya que una vez encontrada dicha función el radio de la rueda viene dado por $r(\theta)$. Las condiciones antes descritas llevan a una ecuación diferencial de donde puede obtenerse la función $\theta(t)$.

La condición de rotación se traduce en:

$$\int_0^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(t)} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$$

Efectivamente, si se parametriza la rueda por $R(\theta) = (R_1(\theta), R_2(\theta)) = (r(\theta) \cos(\theta), r(\theta) \sin(\theta))$ se tiene que $R'_1(\theta) = r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta)$ y $R'_2(\theta) = r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta)$ y así:

$$\int_0^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(t)} \sqrt{R'_1(\theta)^2 + R'_2(\theta)^2} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(t)} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$$

Como θ es una función de t se puede derivar ambos lados en función de t y elevando al cuadrado queda:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \theta'(t)^2 (r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)$$

Derivando la condición del radio se sigue que $r'(\theta) \theta'(t) = -y(t)$, lo cual puede sustituirse en la expresión anterior:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \theta'(t)^2 r(\theta)^2 + y'(t)^2 \iff x'(t)^2 = \theta'(t)^2 r(\theta)^2$$

Teniendo en cuenta que la condición del radio establece $r(\theta) = -y(t)$ queda:

$$\theta'(t) = \pm x'(t) \frac{1}{-y(t)}$$

y por último, como $\theta'(t)$ ha de ser positivo (pues la rueda gira en sentido horario) y $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$ se tiene el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \theta'(t) = x'(t) \frac{1}{-y(t)} \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Notas:

- Si la carretera puede parametrizarse como $f(x) = (x, y(x))$ la ecuación diferencial queda $\theta(x) = \frac{1}{-y(x)}$ en cuyo caso

$$\theta(x) = - \int_0^x \frac{1}{y(x)} dx - \frac{\pi}{2}$$
- Si la función $\theta(t)$ puede invertirse a $t(\theta)$ la rueda viene dada por la ecuación polar $r = -y(t(\theta))$
- El problema inverso empieza con una representación polar de la rueda, $r(\theta)$, de manera que se busca la carretera apropiada. En este caso se tiene que $y(x) = -r(\theta(x))$ donde $\theta(x)$ cumple que $\theta'(x) = \frac{1}{r(\theta)}$ y $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$. Se obtendrá así la carretera en forma $f(x) = (x, y(x))$.
- Si bien se ha llegado desde el caso general a un PVI que proporciona la solución esto no significa que dicho problema sea fácil de resolver. En los siguientes apartados se detallará la solución analítica de varios casos que pueden resultar interesantes desde el punto de vista divulgativo.

Ejemplo. El ejemplo más básico es el de una carretera dada por una línea recta. Siguiendo los pasos anteriores se llega a que la rueda correspondiente es una circunferencia. Si se toma como carretera la recta $y = -1$ dicha carretera está parametrizada por $\mathbf{f}(x) = (x, -1)$ por lo que el problema de valor inicial correspondiente es

$$\begin{cases} \theta'(t) = 1 \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La solución del mismo es $\theta(x) = x - \frac{\pi}{2}$ mientras que $r(\theta(x)) = -y(x) = 1$ por lo que la rueda quedará parametrizada por $R(x) = (\cos(x - \frac{\pi}{2}), \sin(x - \frac{\pi}{2}))$ y se ve que es una circunferencia de radio 1.

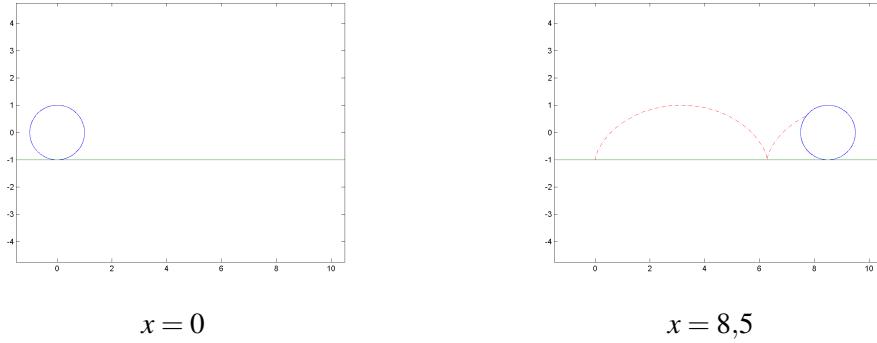


Figura 1.2: En rojo el recorrido del punto de contacto inicial

1.2. Ruedas cerradas

Dada una carretera $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ el proceso anterior proporciona una curva polar que cumple las condiciones para rodar sobre \mathbf{f} . En principio la longitud de dicha rueda coincide con la longitud de la carretera por la condición de rotación. Sin embargo cuando la carretera es periódica se repite una parte de la curva, por lo que puede darse el caso de que una rueda cerrada (esto es, de longitud fija) ruede sobre esta carretera durante una longitud arbitraria.

Suponiendo que la carretera es periódica de periodo p se llega a que el hecho de que se dé dicha clausura -condición de rueda cerrada- equivale a que exista un r racional de forma que

$$2\pi r = \theta(p) - \theta(0) = \int_0^p -\frac{x'(t)}{y(t)} dt$$

Dem.- Efectivamente, partiendo de una carretera de periodo p , la rueda se cierra si y solo si en algún momento el punto de contacto inicial vuelve a estar en contacto con la carretera en el inicio de uno de los períodos de esta última. Esto equivale a que la rueda dé un número entero de vueltas en un número entero de períodos de la carretera. Es decir, a que existan $n, m \in \mathbb{N}$ de manera que

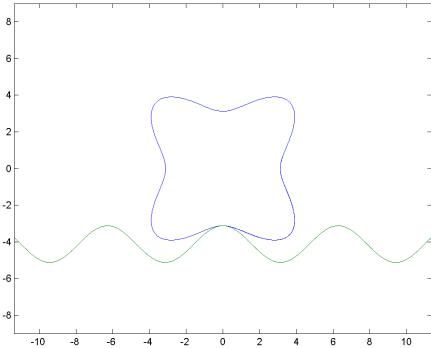
$$n2\pi = m(\theta(p) - \theta(0)) \quad \text{lo que lleva a} \quad \frac{n}{m} 2\pi = \theta(p) - \theta(0)$$

Cuando dicho racional viene dado por $\frac{n}{m}$ $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que la rueda en n vueltas sobre sí misma cubre m períodos de la carretera. En el caso de $m = 1$ se tiene una rueda propiamente dicha al cerrarse en una única vuelta. En otro caso es imposible su construcción física.

Ejemplo. Tomando la familia de carreteras dada por $\mathbf{f} = (x, d + \cos(x))$ con $d \leq -1$ (para que se mantengan en el semiplano inferior), de periodo 2π , se tiene que

$$\theta(2\pi) - \theta(0) = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{d + \cos(x)} dx = \left(\begin{array}{ll} u = \tan(\frac{x}{2}) & du = \frac{dx}{2\cos^2(x)} \\ \cos(x) = \frac{1-u^2}{u^2+1} & dx = \frac{2du}{u^2+1} \end{array} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{d^2-1}}$$

Igualando $\frac{2\pi}{\sqrt{d^2-1}} = 2\pi r$ se sigue que $r = \frac{1}{\sqrt{d^2-1}}$ y tomando $r = \frac{n}{m}$ se tiene que para cada pareja de enteros n, m existe un único d , en concreto $d = -\sqrt{\frac{m^2}{n^2} + 1}$, de manera que la rueda obtenida cubre m períodos de la carretera en cada n vueltas sobre sí misma.



$$d = -\sqrt{1+16} \quad (n=1, m=4)$$

$$d = -4,5$$

Figura 1.3: Ejemplo de rueda que se cierra y rueda que no se cierra

Cabe destacar que en el caso que no se cierra puede representarse la rueda correspondiente rotando pero hay un momento en que la rueda se “envuelve” o se atraviesa a sí misma por lo que en el mundo físico sería necesario que la carretera atravesase parte del borde de la rueda para que esta rodase adecuadamente, lo que hace inviable su construcción. (Caso $d = -4,5$ de la Figura 1.2)

1.3. Ruedas poligonales

Las ruedas con forma de polígonos regulares derivan del caso de una rueda consistente en una recta horizontal. La ecuación polar correspondiente a la recta horizontal $y = -1$ es $r = -\csc(\theta)$ con $-\pi < \theta < 0$. Tomando como eje la recta $y = 0$ y aplicando los resultados de la primera sección se tiene que la carretera correspondiente viene dada por $\mathbf{f} = (x, y(x))$ con $y(x) = -r(\theta(x))$ y donde $\theta(x)$ cumple

$$\begin{cases} \theta'(x) = \frac{1}{-y(x)} = -\sin(\theta) \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

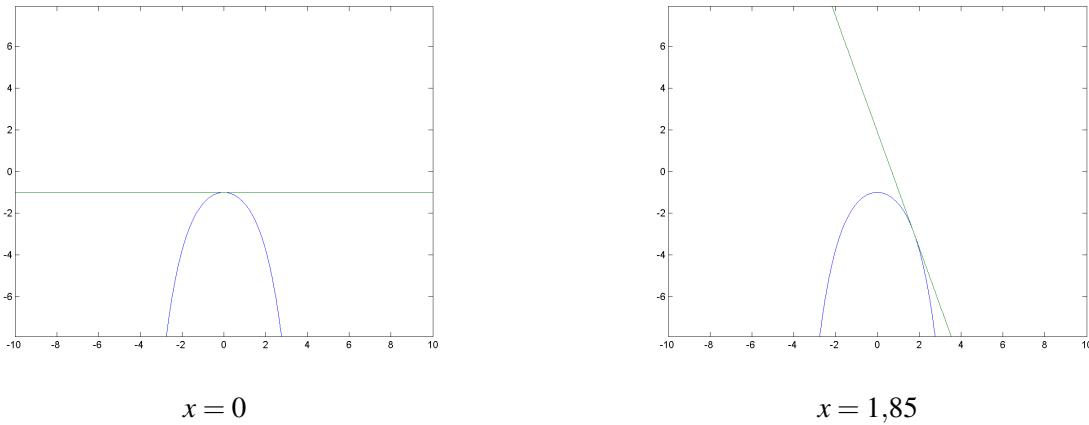
Separando variables se obtiene que $-\frac{d\theta}{\sin(\theta)} = dx$ y así

$$x = -\int \frac{d\theta}{\sin(\theta)} = \left(\begin{array}{ll} u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) & du = \frac{dx}{2\cos^2(x)} \\ \cos(x) = \frac{1-u^2}{u^2+1} & dx = \frac{2du}{u^2+1} \end{array} \right) = -\ln\left(-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \iff \theta(x) = -2\arctan(e^{-x})$$

Por tanto, usando que $\cos(\arctan(e^{-x})) = \sqrt{\frac{1}{1+e^{-2x}}}$ y $\sin(\arctan(e^{-x})) = \sqrt{\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}$, la carretera es:

$$\begin{aligned} y = -r(\theta(x)) &= \csc(-2\arctan(e^{-x})) = \frac{-1}{\sin(2\arctan(e^{-x}))} = \frac{-1}{2\sin(\arctan(e^{-x}))\cos(\arctan(e^{-x}))} \\ &= -\frac{2}{\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}} = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} = -\cosh(x) \end{aligned}$$

La carretera correspondiente es entonces una catenaria invertida.

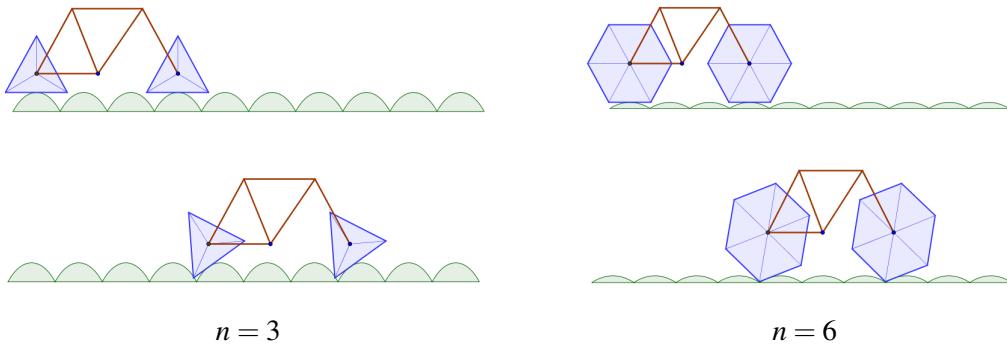
Figura 1.4: La recta $y = -1$ rodando sobre la catenaria invertida

A partir de este caso y con las modificaciones necesarias se llega a obtener carreteras de manera que las ruedas asociadas sean polígonos regulares.

Considérese el caso de una rueda cuadrada. Si se trunca la catenaria en los puntos donde su pendiente es ± 1 ($y'(x) = -\operatorname{senh}(x) = \pm 1$ en los puntos $x = \operatorname{arcseh}(\pm 1) = \pm \operatorname{arcseh}(1)$) y se forma una carretera periódica uniendo copias trasladadas de esta catenaria truncada, se tiene que en los puntos de unión hay un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ rad. Por lo tanto un cuadrado podría pasar rodando sobre dicha juntura.

En el caso general de un polígono de n lados, si se trunca la catenaria en los puntos donde la carretera forma un ángulo de $\pm \frac{\pi}{n}$, lo cual ocurre en los puntos $x = \pm \operatorname{arcseh}(\tan(\frac{\pi}{n}))$, entonces el ángulo en el punto de unión entre ambas piezas de catenaria es $\pi - 2 \frac{\pi}{n} = \frac{(n-2)\pi}{n}$ y se corresponde con el ángulo interior del polígono de n lados. Además, el ángulo que debe rotar la rueda para llegar a dicho punto de unión, dado por $\theta(x) + \frac{\pi}{n}$, resulta ser $\frac{\pi}{n}$.

Nota: para la visualización del caso de ruedas poligonales se ha realizado una simulación con Geogebra de una bicicleta con ruedas poligonales de lado n a elegir.

Figura 1.5: Casos de ruedas triangulares y hexagonales. El archivo de Geogebra que permite modificar el número de lados y animar el resultado está en <http://tube.geogebra.org/m/1357009>

Cabe destacar que en el caso $n = 3$ el vértice chocaría con la carretera antes de llegar al punto de unión de las catenarias truncadas, debido a que el ángulo en dicho punto de unión es inferior a $\frac{\pi}{2}$

Es interesante destacar que la forma de la rueda en relación con la carretera es inestable, esto es, pequeñas modificaciones en la carretera dan lugar a cambios importantes en la forma de la rueda cuando el eje de la rueda se mantiene en el mismo sitio.

En relación con el caso de ruedas poligonales, si se mantiene el eje de la rueda en el eje x y a la vez la catenaria es desplazada en el eje vertical, se obtiene una rueda totalmente diferente. Si se toma la familia de carreteras dadas por $y(x) = k - \cosh(x)$ con $k < 1$ (esto asegura $y(x) \leq 0$) se tiene que el ángulo θ viene dado por:

$$\theta(x) = \frac{-2 \arctan\left(\frac{e^{-x}-k}{\sqrt{1-k^2}}\right)}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\right)}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{\pi}{2}$$

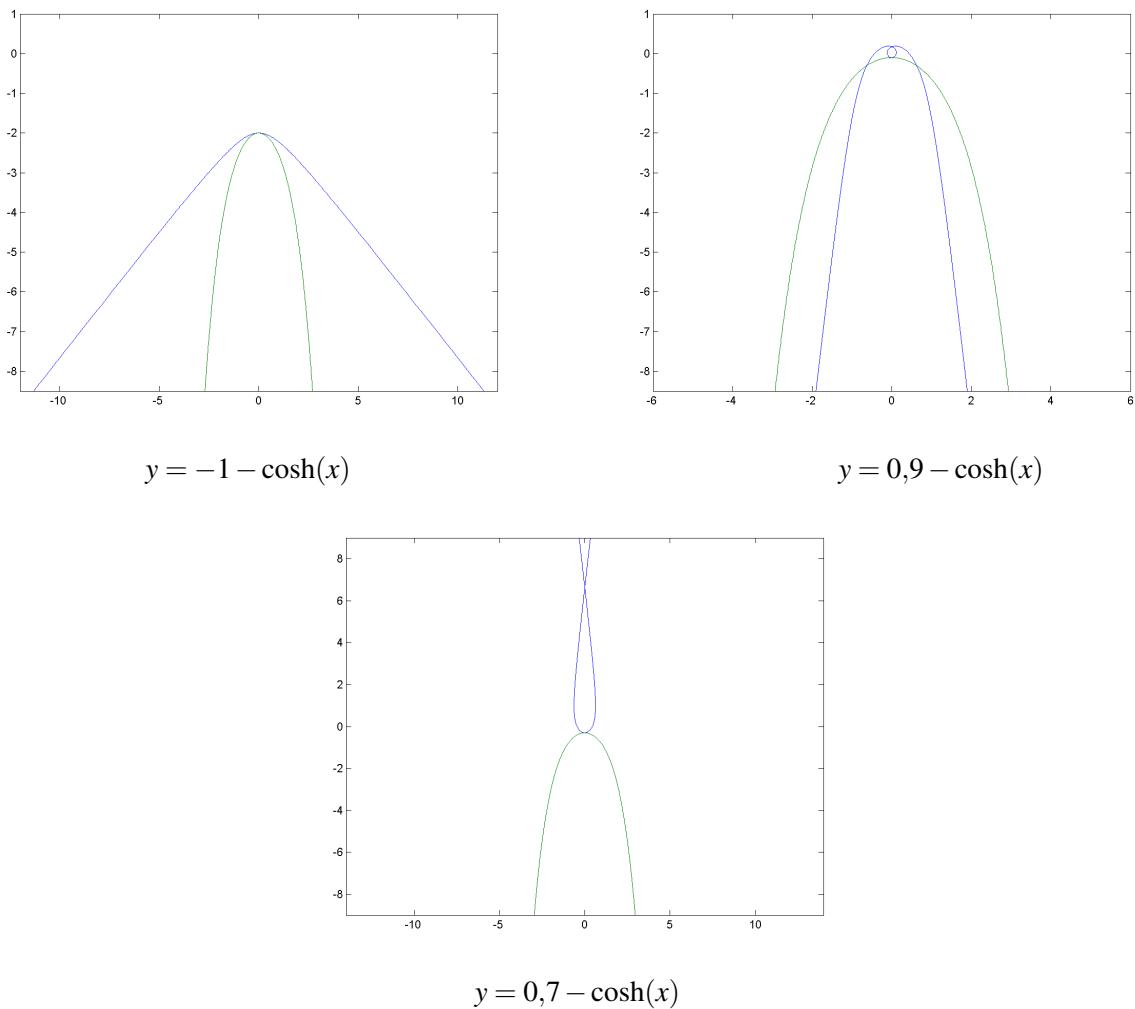


Figura 1.6: Ejemplos de catenarias desplazadas verticalmente y sus ruedas asociadas (carreteras en verde y ruedas en azul)

1.4. Ruedas elípticas

1.4.1. Elipse con eje en su centro

Se estudiará primero el caso donde la elipse da vueltas alrededor de su centro geométrico, el cual se sitúa inicialmente en el origen. Dada la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ su representación polar con origen en el centro de la misma es

$$r(\theta) = \frac{b}{\sqrt{\frac{\cos^2(\theta)}{a^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{b^2}}} = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(\theta)}}$$

donde $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ es la excentricidad de la elipse.

Para encontrar la carretera apropiada se buscará primero la relación entre x y θ . Para ello partiendo del PVI y aplicando separación de variables se tiene que:

$$\begin{cases} \theta'(x) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(\theta)}}{b} \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \iff \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(\theta)}} = \frac{dx}{b} \iff \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(x)} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(\theta)}} = \int_0^x \frac{dx}{b}$$

Aplicando el cambio de variable $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ se sigue que $\cos(\theta) = \sin(\varphi)$ y lo anterior se transforma en:

$$\int_0^{\theta(x)+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{x}{b} \quad (1)$$

La parte izquierda de la igualdad anterior es una integral elíptica incompleta de primera especie, y así se tiene que $\frac{x}{b} = F(\varepsilon, \theta + \frac{\pi}{2})$ donde $F(k, \varphi) = F_k(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}$.

Partiendo de esta función $F_k(\varphi)$, se define la amplitud de Jacobi, $am(u, k)$, como su inversa. Es decir, si $u = F_k(x)$, se tiene que $am(u, k) = \varphi = F_k^{-1}(u)$. La primera función elíptica de Jacobi, $sn(u, k)$, se define como el seno de esta amplitud, esto es, $sn(u, k) = \sin(am(u, k)) = \sin(F_k^{-1}(u))$.

Teniendo en cuenta estas definiciones se sigue de la igualdad (1) que $am(\frac{x}{b}, \varepsilon) = \theta(x) + \frac{\pi}{2}$. Por tanto $sn(\frac{x}{b}, \varepsilon) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$ y así $\theta = \arccos(sn(\frac{x}{b}, \varepsilon))$. De esta igualdad se desprende que la carretera puede ponerse en términos de dicha función como:

$$y = -r(\theta(x)) = -\frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(\theta)}} = -\frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 sn^2(\frac{x}{b}, \varepsilon)}}$$

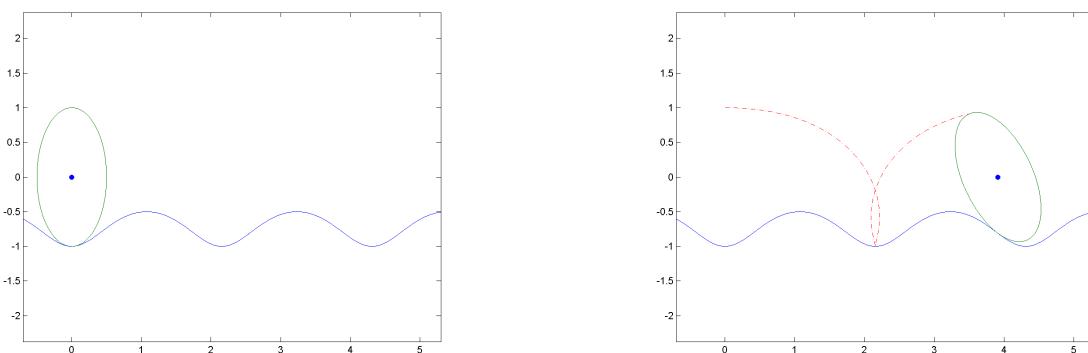


Figura 1.7: Caso $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$. En rojo la trayectoria del punto más alto en el momento inicial

1.4.2. Elipse con eje en uno de los focos

Una vez estudiado el caso donde el eje de rotación está en el centro de la elipse se puede discutir el caso del eje situado en uno de los focos. Si se sitúa un foco en el origen y el otro en el semieje positivo de las y , la representación polar viene dada por $r(\theta) = \frac{k\epsilon}{1-\sin(\theta)}$ donde k es la distancia desde el foco que sirve como eje hasta su directriz correspondiente y ϵ es la excentricidad de la elipse. Si se aplica separación de variables al PVI obtenido se tiene que

$$\begin{cases} \theta'(x) = \frac{1-\epsilon \sin(\theta)}{k\epsilon} \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \iff \frac{d\theta}{1-\epsilon \sin(\theta)} = \frac{dx}{k\epsilon} \iff \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(x)} \frac{d\theta}{1-\epsilon \sin(\theta)} = \int_0^x \frac{dx}{k\epsilon}$$

Usando sucesivos cambios de variable dados por $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ y $u = \tan(\frac{\varphi}{2})$ se llega a que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(x)} \frac{d\theta}{1-\epsilon \sin(\theta)} = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \left(\arctan \left(\frac{\tan(\frac{\theta(x)}{2}) - \epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \right) + \arctan \left(\frac{1+\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \right) \right)$$

Esto permite obtener la igualdad

$$\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{2k\epsilon} = \arctan \left(\frac{\tan(\frac{\theta(x)}{2}) - \epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \right) + \arctan \left(\frac{1+\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \right)$$

a partir de la cual, tomando tangentes y usando que $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$, $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$, $a \sin(x) + b \cos(x) = \sqrt{a^2+b^2} \sin(x + \arctan(\frac{b}{a}))$ y $\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{2}$, se llega a

$$\frac{(1+\epsilon)1-\cos^2\left(\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{k\epsilon}\right)}{(1-\epsilon)\left(1+\cos\left(\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{k\epsilon}\right)\right)^2} = \frac{1+\sin(\theta(x))}{1-\sin(\theta(x))}$$

Por último, si se despeja de lo anterior $\sin(\theta(x))$ y se sustituye en $y(x) = -r(\theta(x)) = \frac{-k\epsilon}{1-\epsilon \sin(\theta(x))}$ se obtiene que la carretera correspondiente es:

$$y(x) = \frac{-k\epsilon}{1-\epsilon^2} \left(1 - \epsilon \cos \left(\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{k\epsilon} x \right) \right)$$

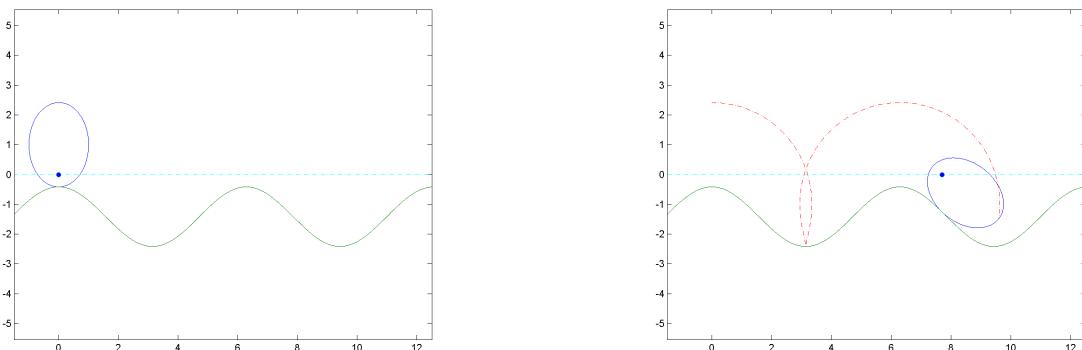


Figura 1.8: Caso $k = 1$ y $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En rojo la trayectoria del punto más alto en el momento inicial y en cyan la recta por la que se desplaza el eje

1.5. Carreteras inclinadas

Se estudiará a continuación el caso de una carretera recta que sea oblicua al eje x . En concreto se tomarán las rectas $y(x) = -n - mx \quad x \geq 0$ con $n, m > 0$ para que dicha carretera quede siempre en el semiplano inferior. La solución al problema inicial es:

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{dt}{n+mt} - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{m} (\log(n+mx) - \log(n)) - \frac{\pi}{2} \iff x(\theta) = \frac{n}{m} \left(e^{(\theta+\frac{\pi}{2})m} - 1 \right)$$

A partir de aquí se obtiene que la rueda adecuada viene dada por

$$r(\theta) = -y(x(\theta)) = n + m \frac{n}{m} \left(e^{(\theta+\frac{\pi}{2})m} - 1 \right) = n + ne^{(\theta+\frac{\pi}{2})m} - n = e^{(\theta+\frac{\pi}{2})m}$$

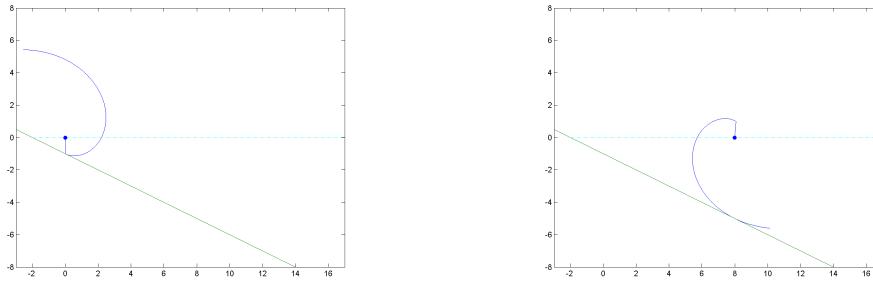


Figura 1.9: Caso $n = 1, m = \frac{1}{2}$. En cyan la recta $y = 0$ por la que se desplaza el eje

A partir de la carretera $y = -1 - x$, que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con los ejes, se puede obtener una carretera periódica con forma de dientes de sierra.

Para obtener dicha carretera periódica, si se corta la carretera oblicua en un punto, y en dicho punto se pega la carretera dada por una línea perpendicular a $y = -1 - x$, se obtiene una carretera con forma de V. Como el segundo tramo es el reflejo del primero respecto a la vertical, la rueda correspondiente también será el reflejo de la rueda del primer tramo. Por tanto, pegando ambas ruedas, se obtiene una que rodará sobre la carretera con forma de V. Si se pegan trozos con forma de V y sus carreteras correspondientes se obtiene la carretera periódica antes mencionada y su rueda.

Para que la rueda cubra n dientes (n períodos con forma de V) en una vuelta sobre sí misma, el punto donde se corta la carretera oblicua debe ser el punto dado por $\theta(x) = -\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$, esto es:

$$\theta(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} \iff \log(x+1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} \iff x = e^{\frac{\pi}{n}} - 1$$

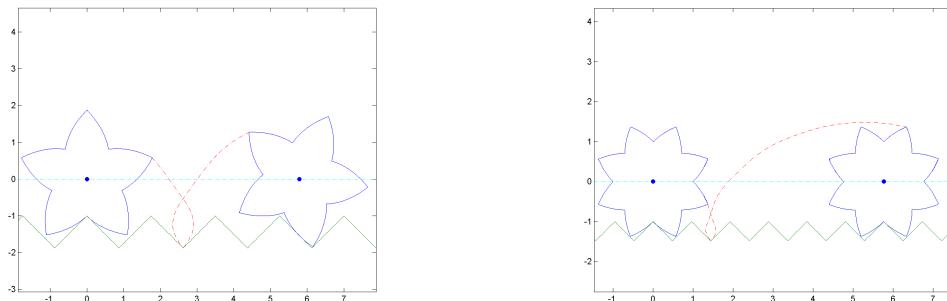


Figura 1.10: Casos $n = 5$ y $n = 8$. En cyan las rectas $y = 0$ por las que se desplazan los ejes

1.6. Carretera semicircular

Se plantea ahora el caso donde la carretera es una semicircunferencia cuyos puntos más altos están sobre el eje x . La rueda adecuada a esta carretera será una circunferencia con la mitad de radio que la carretera.

Sea la carretera dada por $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$ con $\pi \leq t \leq 2\pi$. Partiendo del problema de valor inicial se sigue que:

$$\begin{cases} \theta'(t) = -\frac{x'(t)}{y'(t)} = -\frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = 1 \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \iff \theta(t) = t - \frac{\pi}{2} \iff t(\theta) = \theta + \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

Por tanto $r(\theta) = -y(t(\theta)) = -\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\cos(\theta)$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, que es la representación polar que corresponde a una circunferencia de centro $(-\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$.

Este apartado da respuesta a un famoso acertijo que pregunta el recorrido de un punto de una circunferencia que rueda por el interior de un círculo de radio el doble que ella. La respuesta a dicho acertijo es que la trayectoria del punto es una línea recta

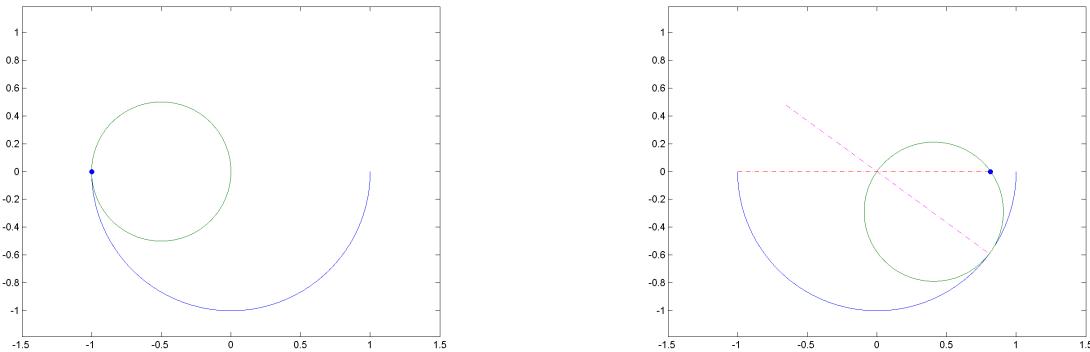


Figura 1.11: En rojo el recorrido del eje y en magenta el de otro punto de la circunferencia

1.7. Carreteras cicloïdales

La cicloide es la curva que deja un punto de una circunferencia al rodar sobre una línea recta. Tomando como carretera una cicloide invertida se tiene $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t)) = (t - \sin(t), \cos(t) - 1)$. A partir de ello puede seguirse que la ecuación diferencial es $\theta'(t) = -\frac{x'(t)}{y'(t)} = -\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)-1} = 1$ luego $\theta(t) = t - \frac{\pi}{2}$ y por tanto se tiene que:

$$r(\theta) = -y(t(\theta)) = 1 - \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin(\theta)$$

lo cual es la forma polar de la cardioide. En relación con la sección de ruedas cerradas se tiene que esta carretera tiene periodo $p = 2\pi$ y $\theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi - \frac{\pi}{2} - (0 - \frac{\pi}{2}) = 2\pi$ que claramente es múltiplo racional de 2π por lo que existe rueda cerrada (la cardioide es cerrada).

Cabe considerar el caso más general de una carretera trocoïdal, dada por $\mathbf{f}(t) = (t - a \sin(t), -1 + a \cos(t))$. Al igual que en el caso de la cicloide queda $\theta(t) = t - \frac{\pi}{2}$ y así

$$r(\theta) = -y(t(\theta)) = 1 - a \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + a \sin(\theta)$$

que corresponde a una curva denominada caracol de Pascal. El caso $a = 0$ corresponde a una rueda circular sobre una línea recta y el caso $a = 1$ a la cicloide invertida antes mencionada.

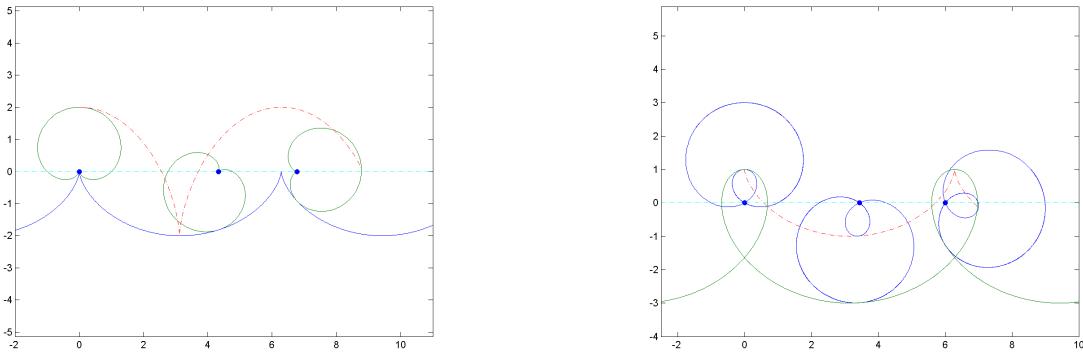


Figura 1.12: Tenemos el caso de la cicloide invertida (o trocoide con $a = 1$) y la trocoide para $a = 2$. En rojo la trayectoria de un punto de la rueda y en cyan la recta $y = 0$ por donde se desplaza el eje

1.8. Carretera que sea su propia rueda

Una de las posibles preguntas que surgen al estudiar el problema planteado es: ¿Puede existir una carretera de manera que la rueda correspondiente sea isométrica a ella y los puntos de contacto entre ambas sean los puntos que se corresponden mediante dicha isometría?

Sea r la recta $y = 0$, O el origen, E el eje sobre el que gira la rueda (al principio $E = O$ y E se irá desplazando sobre r), P un punto sobre la carretera y P' su correspondiente en la rueda. El hecho de que los puntos correspondientes deban ser los que se tocan se transforma en que la distancia de P a la recta r coincide con la distancia de P' al punto E . Como rueda y carretera son isométricas, si se toma como punto F el correspondiente a O mediante dicha isometría, podemos afirmar que la distancia de P a la recta r es la misma que la distancia de P al punto F . Esto es la definición foco-directriz de una parábola por lo que se sigue que dicha carretera, de existir, es una parábola.

El hecho de que la directriz sea $y = 0$ indica que el eje de la parábola es vertical y si se asume que el vértice está en $x = 0$ se llega a la conclusión de que la ecuación de la parábola viene dada por $y = \frac{x^2+p^2}{2p}$ donde $p < 0$ siendo $|p|$ la distancia entre directriz y foco.

La ecuación diferencial correspondiente a dicha carretera es $\theta'(x) = -\frac{1}{\frac{x^2+p^2}{2p}}$, la solución del problema de valor inicial es $\theta(x) = -2 \arctan\left(\frac{x}{p}\right) - \frac{\pi}{2}$ y así $x(\theta) = -p \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Por tanto la curva polar que sirve de rueda es: $r(\theta) = -p \frac{1}{1-\sin(\theta)}$, que corresponde al grafo de la parábola $y = \frac{-x^2+p^2}{2p}$.

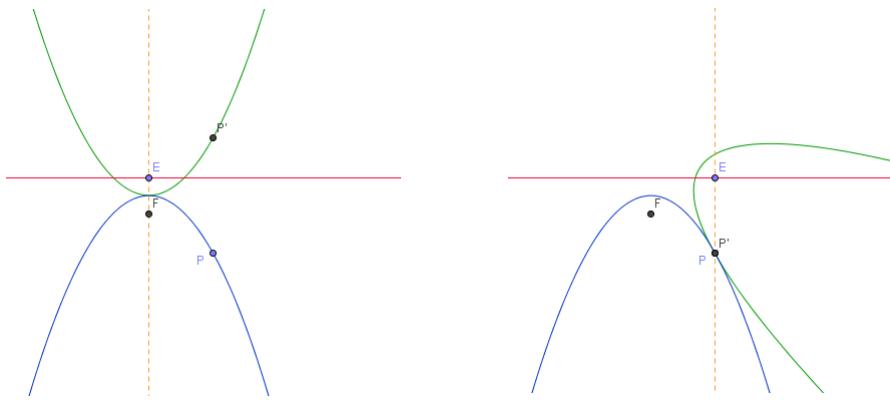


Figura 1.13: La rueda correspondiente a la parábola $y = -x^2 - \frac{1}{4}$ es $y = x^2 - \frac{1}{4}$. El archivo Geogebra se encuentra en <http://tube.geogebra.org/m/1356935>

1.9. Escalado vertical

En la sección 1.3 se ha visto que la forma de la rueda es inestable si se hacen variaciones en la carretera como puede ser un desplazamiento de la misma en el eje y . Puede surgir la pregunta de qué pasará si se aplica un escalado vertical a la carretera. ¿Existirá rueda cerrada en el caso escalado si existe en el original? ¿Y si en el caso original no existe rueda cerrada?

Si se supone un escalado $k > 0$ (así se mantiene $y(x) \leq 0$) en el eje y , la carretera dada por $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ se transforma en $\mathbf{f}_k(t) = (x(t), ky(t))$. Suponiendo que la carretera es periódica de periodo p la condición de rueda cerrada se ve afectada de la siguiente manera:

1. Si en el caso original existe rueda cerrada se tiene que en el caso escalado existe rueda cerrada si y solo si $k \in \mathbb{Q}$

Dem.- $\Rightarrow)$ Si se denota por r_1 al racional que cumple la condición de rueda cerrada en el caso original, que haya rueda cerrada en el caso escalado significa que existe $r_2 \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\int_0^p \frac{-x'(t)}{ky(t)} dt = 2\pi r_2 \iff \frac{1}{k} \int_0^p \frac{-x'(t)}{y(t)} dt = 2\pi r_2 \iff \frac{1}{k} 2\pi r_1 = 2\pi r_2$$

Por tanto se tiene que existe $r_2 \in \mathbb{Q}$ tal que $k = \frac{r_1}{r_2} \in \mathbb{Q}$, es decir, que $k \in \mathbb{Q}$

$\Leftarrow)$ Por otro lado, si $k \in \mathbb{Q}$ y en el caso original existe rueda cerrada, denotando r_1 al racional que hace que se cumpla dicha condición se tiene que

$$\int_0^p \frac{-x'(t)}{ky(t)} dt = \frac{1}{k} \int_0^p \frac{-x'(t)}{y(t)} dt = \frac{1}{k} 2\pi r_1 \iff \int_0^p \frac{-x'(t)}{ky(t)} dt = \frac{2\pi r_1}{k}$$

por lo que, como $\frac{r_1}{k} \in \mathbb{Q}$, se cumple la condición de rueda cerrada en el caso escalado.

2. Si en el caso original no se cumple la condición se tiene que en el caso escalado existe rueda cerrada si y solo si existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $k = \int_0^p \frac{-x'(t)r}{2\pi y(t)} dt$, o dicho de otra manera, que k sea múltiplo racional de $\int_0^p \frac{-x'(t)}{2\pi y(t)} dt$

Dem.- Se denotará $A = \int_0^p \frac{-x'(t)}{y(t)} dt$

$\Rightarrow)$ Partiendo de que en el caso original no existe rueda cerrada, que exista rueda cerrada en el caso escalado implica que existe $r \in \mathbb{Q}$ de manera que

$$\int_0^p \frac{-x'(t)}{ky(t)} dt = 2\pi r \iff \frac{1}{k} \int_0^p \frac{-x'(t)}{y(t)} dt = 2\pi r \iff \frac{1}{k} A = 2\pi r \iff k = \frac{A}{2\pi r}$$

Es decir, que existe $r \in \mathbb{Q}$ de forma que $k = \int_0^p \frac{-x'(t)}{2\pi ry(t)} dt$ y por tanto k es múltiplo racional de $\int_0^p \frac{-x'(t)}{2\pi y(t)} dt$

$\Leftarrow)$ Por otro lado, si se parte de que $k = r \int_0^p \frac{-x'(t)}{2\pi y(t)} dt = \frac{r}{2\pi} A$ con $r \in \mathbb{Q}$, se sigue que

$$\int_0^p \frac{-x'(t)}{ky(t)} dt = \frac{A}{\frac{r}{2\pi} A} = \frac{2\pi}{r} = 2\pi r_1 \quad r_1 = \frac{1}{r} \in \mathbb{Q}$$

y por lo tanto se cumple la condición de rueda cerrada en el caso escalado.

Ejemplo. Si se toma como carretera la cicloide invertida antes comentada y se aplica un escalado k se tiene, por el apartado 1, que existe rueda cerrada solamente cuando $k \in \mathbb{Q}$. En los casos donde k es racional el resultado asociado a dicha carretera es una roseta.

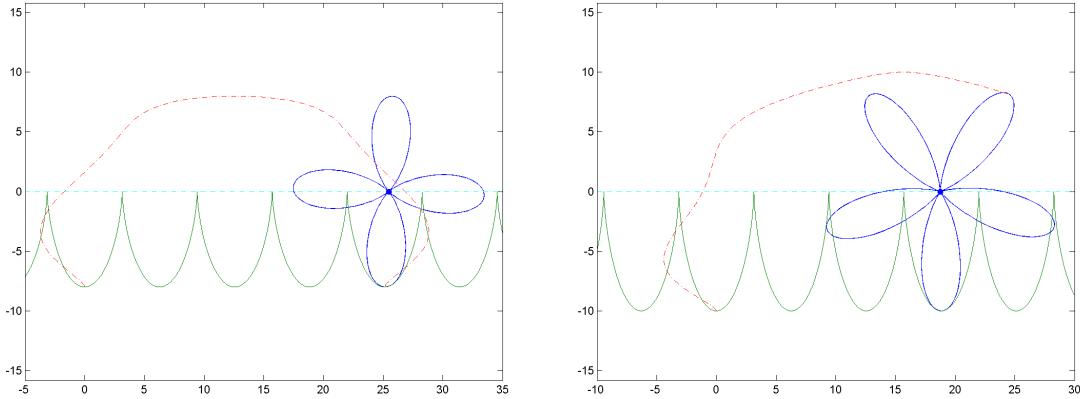


Figura 1.14: Una carretera cicloidal invertida con escalados $k = 4$ y $k = 5$. Como se aprecia en las imágenes, su construcción física no es viable.

1.10. Generación numérica de las soluciones

En esta sección se describirá como se ha programado en Matlab la obtención numérica de las soluciones y su representación. Se plantea tanto el caso donde se parte de la rueda como cuando el dato inicial es la carretera. El código de los programas está detallado en el **Anexo I**.

La clave para la resolución del problema es obtener una solución del problema de valor inicial, consiguiendo así la relación entre el parámetro de la carretera y el ángulo girado. Si bien la ecuación que determina el problema es separable se tiene que los cálculos necesarios para obtener una solución analítica pueden ser lentos y costosos.

Con el fin de acelerar este proceso se usará el método de cuarto orden de Runge-Kutta para resolver dicho problema numéricamente. Este método proporcionará un conjunto de puntos de la rueda o la carretera, puntos que permitirán representar la figura adecuada uniéndolos con líneas.

Normalmente la relación entre el ángulo y el desplazamiento en el eje x es no lineal, por lo que mantener constantes tanto la velocidad de desplazamiento como la velocidad angular no es posible. Sin embargo, al usar un paso de tamaño fijo en el método numérico, puede conseguirse que una de las dos velocidades lo sea.

Existen 4 posibles casos y cada uno de ellos requerirá distintos detalles en su programación. A continuación se explica el proceso a seguir para cada caso y se muestran algunos ejemplos.

1.10.1. Caso 1

El primer caso es aquel en el que la carretera viene dada por $y = y(x)$, es decir, $f(t) = (t, y(t))$. El problema inicial es

$$\begin{cases} \theta'(x) = \frac{-1}{y(x)} \\ \theta(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

El método Runge-Kutta genera una tabla de pares (x, θ) . Aplicando ahora la condición del radio pueden obtenerse los puntos de la rueda ya que, dado un elemento de dicha tabla (x_1, θ_1) , se sigue que $r(\theta_1) = -y(x_1)$ y así se obtienen los pares (r, θ) . Estos pares corresponden a los puntos obtenidos de la rueda, lo que nos permite representarla.

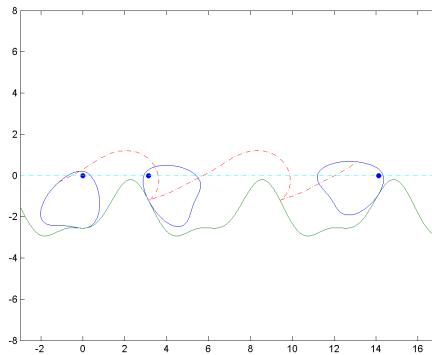


Figura 1.15: Caso $y(x) = -1,887365 - \frac{2 \cos(x)}{3} + \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2}$

1.10.2. Caso 2

El segundo caso es aquel en el que se parte de la rueda en forma polar y se busca la carretera. Por tanto se conoce $r = r(\theta)$. En vez de resolver el PVI que proporciona $\theta(x)$, es mejor en este caso resolver el PVI del que se obtiene $x(\theta)$

$$\begin{cases} x'(\theta) = r(\theta) \\ x(-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

En este caso el método numérico proporciona los pares (θ, x) . Para generar la carretera basta usar la condición del radio. Esto es, dado un par de los anteriores (θ_1, x_1) , se tiene que $y(x_1) = -r(\theta_1)$. Se tiene ahora que al animar la rotación la velocidad que se mantiene constante es la angular.

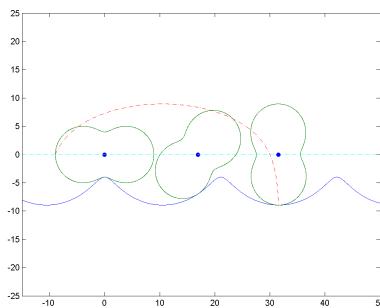


Figura 1.16: Tomando $r(\theta) = 4 \sqrt{5 - 4 \sin^2(\theta)}$ la rueda es una curva denominada hipopede

1.10.3. Caso 3

El siguiente caso que se considera es que la carretera sea dada paramétricamente. Es decir, se parte de $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ siendo $x(0) = 0$. El problema de valor inicial es dado por $\theta'(t) = \frac{-x'(t)}{y(t)}$ y $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$. Aplicando Runge-Kutta se obtienen pares (t, θ) , a partir de los cuales se produce la rueda utilizando la condición del radio como en los casos anteriores

Ejemplo. Dado el caso de una carretera cicloidal hundida, $\mathbf{f}(t) = (t + \operatorname{sen}(t), \cos(t) - d)$, llevando a cabo los cálculos descritos anteriormente se llega a que la condición de rueda cerrada es que

$$d = \frac{1+2n^2}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ donde } n \text{ es el número de períodos de cicloide cubiertos en cada revolución}$$

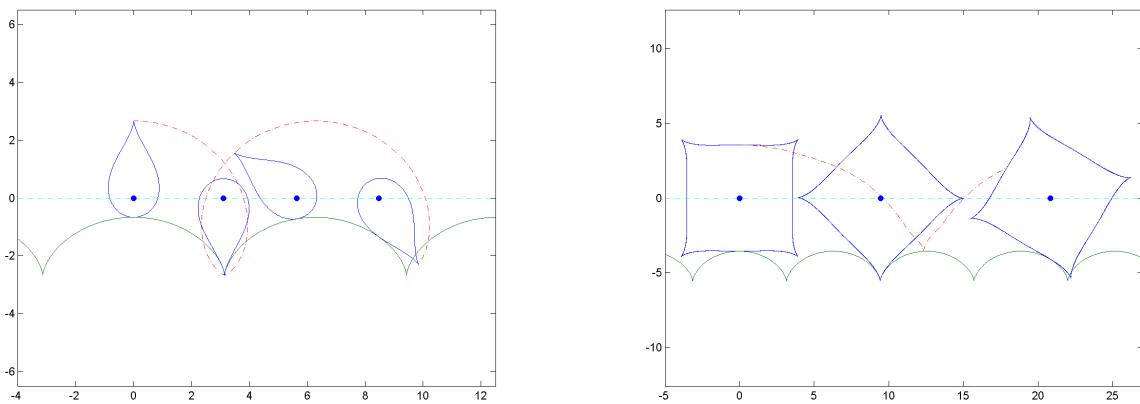


Figura 1.17: Casos de cicloide hundida en los que existe rueda cerrada con $n = 1$ y $n = 4$.

1.10.4. Caso 4

El último caso a considerar es cuando la rueda es dada en forma paramétrica. Sea una rueda dada por $x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$, donde ambas funciones sean periódicas del mismo periodo para estar en el caso de una rueda cerrada simple.

Dada la rueda en paramétricas su representación en polares viene dada por $\theta(t) = \arctan\left(\frac{g_2(t)}{g_1(t)}\right)$, $r(t) = \sqrt{g_1(t)^2 + g_2(t)^2}$. Teniendo en cuenta que $x'(t) = r(t) \theta'(t)$ (siendo $x(t)$ coordenadas de la carretera) se sigue que el problema de valor inicial que relaciona las coordenadas x de la carretera y los valores del parámetro t en términos de las funciones g_1, g_2 anteriores es:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{g_1(t)g'_2(t) - g'_1(t)g_2(t)}{\sqrt{g_1(t)^2 + g_2(t)^2}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando el método Runge-Kutta se obtienen parejas (t, x) que servirán para generar la carretera. Dado un par (t_1, x_1) aplicando la condición del radio se tiene que la coordenada y de la carretera en dicho punto es $y_1 = y(t_1) = -r(t_1) = -\sqrt{g_1(t_1)^2 + g_2(t_1)^2}$

Si bien los ángulos correspondientes podrían obtenerse de $\theta(t) = \arctan\left(\frac{g_2(t)}{g_1(t)}\right)$, al programar surge el problema de que dicha relación solo da ángulos en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y por lo tanto la animación del giro de la rueda es complicada. Para solucionar este problema se puede resolver mediante el método de Runge-Kutta el problema de valor inicial dado por:

$$\begin{cases} \theta'(t) = \frac{g_1(t)g_2'(t) - g_1'(t)g_2(t)}{g_1(t)^2 + g_2(t)^2} \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Si se usan los mismos t que en la resolución numérica del primer PVI de este apartado, se consigue una tabla de pares (t, θ) que puede relacionarse de manera inmediata con los pares (t, x) antes obtenidos y a partir de aquí se puede animar la rueda como en los casos anteriores.

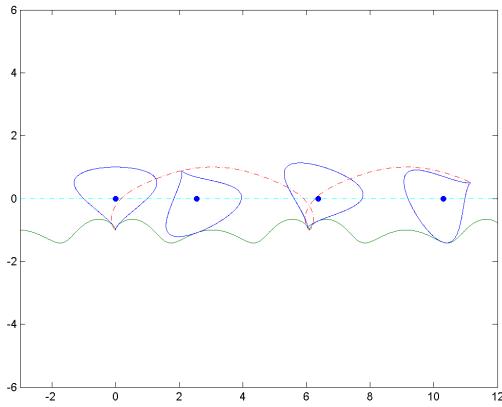


Figura 1.18: En este caso la rueda tiene forma de piriforme y su parametrización viene dada por $x = \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2}$, $y = -\cos(t)$

Capítulo 2

Péndulos

2.1. Introducción a la mecánica lagrangiana

La mecánica lagrangiana es una reformulación de la mecánica newtoniana, más flexible y a menudo más útil para resolver problemas. Fue introducida por el matemático italo-francés Joseph-Louis Lagrange en 1788 y se basa en el principio de mínima acción o principio de Hamilton.

2.1.1. Coordenadas generalizadas

Para una partícula sobre la que actúan fuerzas externas, la mecánica clásica establece un sistema de 3 ecuaciones diferenciales de segundo orden (una por cada dimensión). Dadas entonces 3 posiciones iniciales y 3 velocidades puede describirse por completo el movimiento de la partícula. Las coordenadas cartesianas y sus derivadas temporales son las variables más comunes para describir la posición y la velocidad pero determinar las fuerzas en función de estas coordenadas puede ser muy laborioso.

Un enfoque más eficiente es usar las coordenadas que sean estrictamente necesarias para definir la posición de la partícula, teniendo en cuenta las ligaduras o restricciones que limitan el movimiento de la misma. Es decir, se busca determinar los grados de libertad de la partícula, o dicho de otro modo, las formas en que el sistema puede moverse sujeto a las restricciones existentes. Mediante el cálculo de energías (que son escalares, no como las fuerzas que son vectores) puede formularse el problema.

Estas coordenadas se denominarán coordenadas generalizadas, denotadas q_j , existiendo una por cada grado de libertad. Sus derivadas respecto al tiempo, q'_j serán las velocidades generalizadas.

2.1.2. Lagrangiano y acción

El pilar central de la mecánica lagrangiana es el lagrangiano, que se define como una función escalar a partir de la cual se puede obtener la evolución temporal y otras importantes propiedades de un sistema dinámico. En mecánica clásica la función lagrangiana de un sistema conservativo viene determinada por la energía cinética T y la energía potencial U . Si se consideran las coordenadas generalizadas q_j , $j = 1, \dots, n$ el lagrangiano viene dado por:

$$L(q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_n, t) = T(q'_1, \dots, q'_n, t) - U(q_1, \dots, q_n, t).$$

Otro elemento fundamental de esta mecánica es la acción (también llamado funcional de acción) del sistema \mathcal{S} , definida como la integral en el tiempo del Lagrangiano

$$S[(q_1, \dots, q_n)] = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_n, t) dt.$$

Esta acción asocia un valor a cada curva o posible trayectoria del sistema que pasa por dos puntos fijos en dos instantes de tiempo $t_0 < t_1$.

2.1.3. Principio de Hamilton y ecuaciones Euler-Lagrange

El principio de Hamilton establece que en un sistema conservativo, la trayectoria real del sistema viene dada por el extremal del funcional de acción, esto es, por la ecuación

$$\delta S = 0,$$

lo cual, según el cálculo variacional, implica las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Por tanto, en los casos de un sistema conservativo, el estudio de la dinámica se reduce a la elección del conjunto de coordenadas más conveniente, la obtención de las energías cinética y potencial del sistema para llegar así al lagrangiano y poder aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange. Esto desembocará en un sistema de ecuaciones diferenciales que al resolverlo describirá la evolución temporal del sistema.

2.2. Péndulo plano simple

Un péndulo simple en dos dimensiones está formado por una masa m colgando de una cuerda de longitud l . Si se considera la situación desde el punto de vista de la mecánica newtoniana entran en juego las fuerzas de la gravedad y la tensión de la cuerda. Sin embargo también puede usarse la mecánica lagrangiana para obtener las ecuaciones del movimiento.

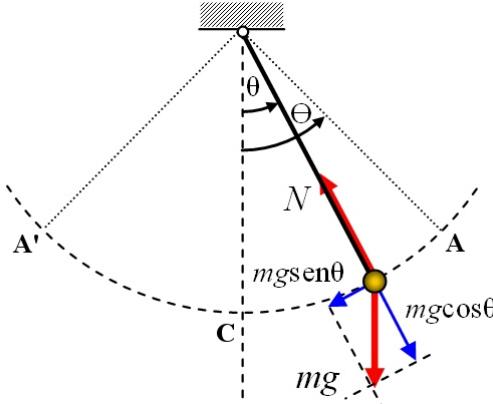


Figura 2.1: Esquema de fuerzas del péndulo simple

La posición de la masa m , tomando el punto desde el que se cuelga el péndulo como origen, viene dada por $(x(t), y(t)) = (l \operatorname{sen}(\theta(t)), l \cos(\theta(t)))$ donde θ es el ángulo que forma la cuerda con la vertical. Se ve entonces que el movimiento no es libre en los ejes x e y sino que viene condicionado por la longitud de la cuerda (que es fija) y el ángulo que esta forma con la vertical. Por tanto la elección como coordenada generalizada del ángulo θ es bastante razonable.

Las velocidades son:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta) \\ \frac{dy}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

y por tanto la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) = \frac{m}{2} \left(\left(l \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta) \right)^2 + \left(l \frac{d\theta}{dt} \sin(\theta) \right)^2 \right) = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Por otra parte la energía potencial viene dada por

$$U = mgh = -mgl \cos(\theta),$$

y finalmente, la expresión del lagrangiano completo

$$L = T - U = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - (-mgl \cos(\theta)) = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl \cos(\theta).$$

A partir de lo anterior pueden obtenerse las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin(\theta) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{array} \right\} \Rightarrow -mgl \sin(\theta) - ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \iff \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

Por tanto, dado un ángulo inicial θ_0 y una velocidad (angular) inicial ω_0 se tiene que el problema de valor inicial correspondiente es:

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0, & t > 0, \\ \theta(0) = \theta_0, & \theta'(0) = \omega_0. \end{cases}$$

En el caso de oscilaciones pequeñas, donde $\sin(\theta) \approx \theta$ las ecuaciones del péndulo simple coinciden con las del movimiento armónico simple y en este caso el péndulo tendrá periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Como puede observarse este periodo no depende del ángulo inicial.

2.3. Péndulo plano doble

El péndulo doble consiste en dos péndulos, uno colgando de otro. Este sistema tendrá dos grados de libertad, en contraposición con el péndulo simple que solo tenía uno. Además es destacable que el péndulo doble se caracteriza por ser caótico, esto es, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento del péndulo.

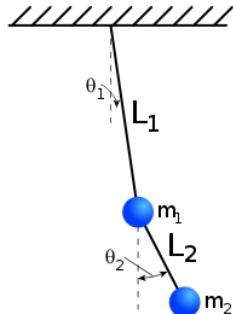


Figura 2.2: Péndulo doble

Como coordenadas generalizadas se tomarán los ángulos que forma la cuerda de cada péndulo con la vertical, $\theta_1 = \theta_1(t)$ y $\theta_2 = \theta_2(t)$. Suponiendo que las longitudes y masas de ambos péndulos son iguales se tiene que las posiciones de los péndulos vienen dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = l \sin(\theta_1) \\ y_1 = -l \cos(\theta_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = l \sin(\theta_1) + l \sin(\theta_2) \\ y_2 = -l \cos(\theta_1) - l \cos(\theta_2) \end{cases}$$

A partir de lo anterior se sigue que

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = l \frac{d\theta_1}{dt} \cos(\theta_1) \\ \frac{dy_1}{dt} = l \frac{d\theta_1}{dt} \sin(\theta_1) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = l \frac{d\theta_1}{dt} \cos(\theta_1) + l \frac{d\theta_2}{dt} \cos(\theta_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = l \frac{d\theta_1}{dt} \sin(\theta_1) + l \frac{d\theta_2}{dt} \sin(\theta_2) \end{cases}$$

Por tanto la energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{ml^2}{2} \left(2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 + 2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right) \cos(\theta_1 - \theta_2) \right), \end{aligned}$$

y la energía potencial es

$$U = -2mgl \cos(\theta_1) - mgl \cos(\theta_2)$$

El lagrangiano completo viene dado por

$$L = T - U = \frac{ml^2}{2} \left(2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 + 2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right) \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) + 2mgl \cos(\theta_1) + mgl \cos(\theta_2),$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange son: $\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -ml^2 \frac{d\theta_1}{dt} \frac{d\theta_2}{dt} \sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mgl \sin(\theta_1) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 2ml^2 \frac{d\theta_1}{dt} + ml^2 \frac{d\theta_2}{dt} \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 2ml^2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + ml^2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{d\theta_2}{dt} \left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \right) \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = ml^2 \frac{d\theta_1}{dt} \frac{d\theta_2}{dt} \sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mgl \sin(\theta_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2 \frac{d\theta_2}{dt} + ml^2 \frac{d\theta_1}{dt} \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + ml^2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{d\theta_1}{dt} \left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \right) \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{array} \right\} \quad (2)$$

Sustituyendo las igualdades de (1)-(2) en las ecuaciones de Euler-Lagrange, simplificando y añadiendo condiciones inciales (ángulos y velocidades angulares) el PVI del péndulo doble queda

$$\begin{cases} 2\theta_1''(t) + \theta_2''(t) \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + (\theta_2'(t))^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = -2\frac{g}{l} \sin(\theta_1(t)), & t > 0, \\ \theta_1''(t) \cos(\theta_1 - \theta_2) + \theta_2''(t) - (\theta_1'(t))^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = -\frac{g}{l} \sin(\theta_2(t)), & t > 0, \\ \theta_1(0) = \theta_{10}, \quad \theta_1'(0) = \omega_{10}, \\ \theta_2(0) = \theta_{20}, \quad \theta_2'(0) = \omega_{20}. \end{cases}$$

2.4. Péndulo plano de longitud variable

Hasta ahora se han tenido en cuenta únicamente casos en los que la longitud de la cuerda es siempre la misma. Sin embargo puede considerarse una cuerda cuya longitud varíe con el tiempo. Si se plantea un péndulo con estructura idéntica al péndulo simple (una masa y una cuerda) pero con la longitud de la cuerda dada por la función $l(t)$, la posición de la masa viene dada por $(x(t), y(t)) = (l(t) \sin(\theta), -l(t) \cos(\theta))$. El sistema en este caso tiene un grado de libertad (ángulo), de manera que la coordenada generalizada a considerar es $\theta = \theta(t)$. Derivando lo anterior se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dl}{dt} \sin(\theta) + l \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta) \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{dl}{dt} \cos(\theta) + l \frac{d\theta}{dt} \sin(\theta) \end{cases}$$

La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right),$$

la energía potencial es

$$U = mgh = -mgl \cos(\theta),$$

y el lagrangiano completo es

$$L = T - U = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) + mgl \cos(\theta),$$

y se pueden obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin(\theta) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta'} = ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} = 2ml \frac{dl}{dt} \frac{d\theta}{dt} + ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{array} \right\} \Rightarrow -mgl \sin(\theta) - 2ml \frac{dl}{dt} \frac{d\theta}{dt} - ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0.$$

Simplificando esta expresión se tiene que, dados un ángulo inicial θ_0 y una velocidad angular inicial ω_0 , el PVI correspondiente es:

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{2l'(t)}{l(t)} \theta'(t) + \frac{g}{l(t)} \sin(\theta) = 0, & t > 0, \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \omega_0. \end{cases}$$

Ejemplo. Considerar el caso en el que la longitud de la cuerda viene dada por $l(t) = L - \frac{g}{2}t^2$ donde L es la longitud inicial que se quiera dar a la cuerda. Suponiendo que la condición inicial es $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ y la velocidad inicial es dada por $\theta'(0) = 0$, si se toma $L = 100$ queda:

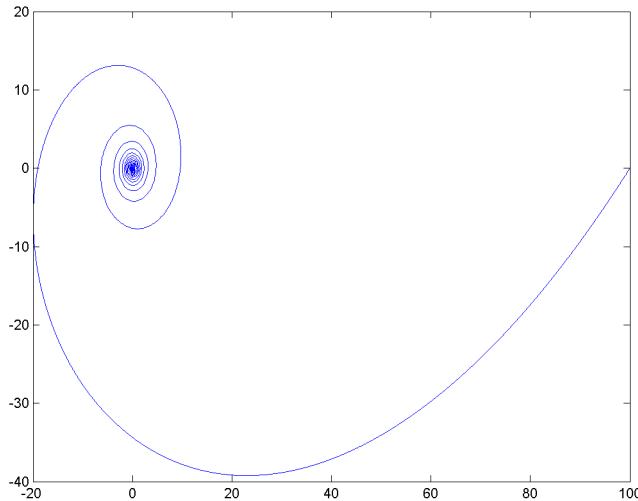


Figura 2.3: Trayectoria del péndulo. La ecuación diferencial se ha resuelto numéricamente mediante el método clásico de Runge-Kutta

2.5. Simulación del botafumeiro

Se realizará a continuación una simulación del funcionamiento del botafumeiro, el conocido incensario de la catedral de Santiago de Compostela. Para ello se usará la ecuación antes obtenida del péndulo de longitud variable.

Se realizará una primera modelización bastante simplificada del mismo, suponiendo ciertas características como la ausencia del rozamiento que a la hora de una modelización más precisa del problema influyen en el mismo complicándolo sustancialmente.

2.5.1. Funcionamiento

El botafumeiro es un enorme incensario de latón de 53 kg y 1,5 m de altura. De una estructura en lo alto del crucero de la catedral se cuelga por una cuerda y se desvía de la vertical. Mientras se balancea como un péndulo, ocho personas en el suelo (los tiraboleiros) sueltan cuerda en el punto más alto del movimiento y tiran de ella en el más bajo. Paso a paso, cíclicamente, los tiraboleiros amplifican así la oscilación del incensario, hasta llevarlo a una altura de unos 21 metros alcanzando una amplitud de 82°.

Tras el empujón inicial la amplitud de las oscilaciones es de unos 13° aproximadamente. La longitud máxima de la cuerda son 20,6 m y cada vez que pasa por la vertical, los tiraboleiros lo alzan unos 2,9 metros, soltando la misma longitud de cuerda cuando llega al punto más alto de cada oscilación.



Figura 2.4: Foto del botafumeiro y los tiraboleiros en acción

2.5.2. Consideraciones iniciales

A continuación se detallan los datos y simplificaciones que se tienen en cuenta a la hora de realizar la modelización del mismo.

- La cuerda que sujeta el incensario no tiene masa y el botafumeiro es considerado como una masa puntual.
- La cuerda es considerada como una barra fija, de forma que la masa siempre está a una distancia del origen exactamente igual a la longitud de la cuerda. Es decir, se considera que la cuerda siempre está tensa.
- No existe fricción con el aire.
- En la parte más alta de las oscilaciones, cuando se suelta cuerda, el cambio de longitud es instantáneo.
- La amplitud inicial es de 0,15 radianes y se parte del reposo.
- La longitud máxima es de 20,6 m y la mínima de 17,7 de forma que el incensario se eleva exactamente 2,9 m cada vez que pasa por la vertical.
- En el caso ideal la longitud de la cuerda pasaría de 20,6 m a 17,7 m de forma instantánea cuando el péndulo cruza la vertical (cuando $\theta(t) = 0$). De esta manera en cada ciclo del movimiento del péndulo (empezando en $-\hat{\theta}_{max}$ y acabando en $\hat{\theta}_{max}$) la longitud vendría dada por:

$$l(t, \theta(t)) = \begin{cases} 20,6 & -\hat{\theta}_{max} \leq \theta(t) \leq 0 \\ 17,7 & 0 < \theta(t) < \hat{\theta}_{max} \end{cases}$$

Sin embargo se va a considerar que el cambio de longitud no es instantáneo sino que el botafumeiro tarda 0,25 segundos en subir los 2,9 metros (el tirón es igual cada vez que se pasa por la vertical).

Se denota $-\theta_{max}$ el ángulo en el que empieza el ciclo, $\hat{\theta}_{max}$ el ángulo máximo que se alcanza en dicho ciclo y t_0 el instante donde $\theta(t) = 0$. La longitud viene dada por:

$$l(t, \theta(t)) = \begin{cases} 20,6 & -\theta_{max} \leq \theta(t) < 0 \\ 20,6 - 2,9 \frac{t-t_0}{0,25} & 0 \leq \theta(t) < \hat{\theta}_{max}, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + 0,25 \\ 17,7 & 0 \leq \theta(t) < \hat{\theta}_{max}, \quad t_0 + 0,25 < t \end{cases}$$

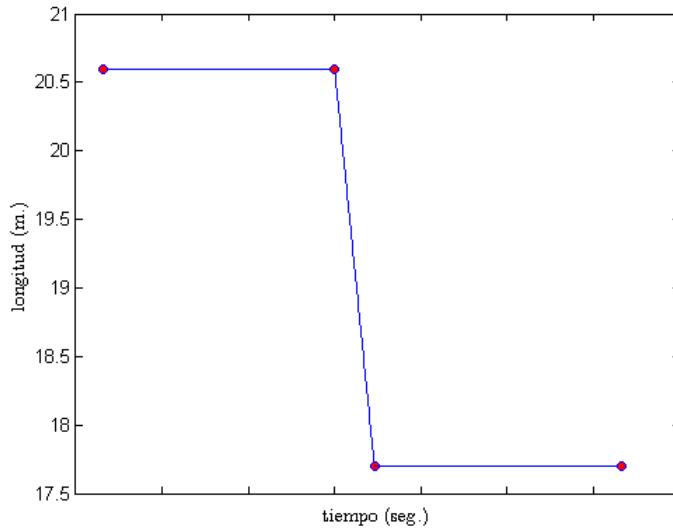


Figura 2.5: Representación de la longitud $l(t, \theta(t))$. Los puntos marcados corresponden a los ángulos $-\theta_{max}$, 0, $\theta(t_0 + 0,25)$ y $\hat{\theta}_{max}$ respectivamente

2.5.3. Simulación numérica

A continuación se presenta un resumen esquematizado de como se ha programado la simulación en Matlab. El código correspondiente está detallado y comentado en el **Anexo II**. Para resolver los problemas de valor inicial que se presentan se usa el mismo método Runge-Kutta que se ha empleado a lo largo de todo el trabajo.

Existen 3 partes claramente diferenciadas a la hora de la programación. Dichas partes son: cuando la longitud de la cuerda es máxima, el periodo de acortamiento de la cuerda y cuando la longitud es mínima.

Periodo de longitud máxima: es cuando el péndulo esta cayendo. Va desde el punto de oscilación más alto hasta que el botafumeiro alcanza la vertical. En este caso se tiene que la longitud de la cuerda es 20,6 metros y al no haber acortamiento de la cuerda ni otros factores externos, se puede modelizar esta parte como un péndulo simple. Esta fase acaba cuando se pega el tirón. Para escoger este momento basta con localizar el intervalo de integración donde el ángulo θ no cambia de signo. El punto donde ocurre dicho cambio de signo se considera como el momento en el que se produce el tirón.

Periodo de acortamiento de la cuerda: va desde el momento en que el péndulo llega a la vertical (que como hemos dicho antes es cuando θ cambia de signo) hasta que la longitud alcanza los 17,7 metros. Se ha supuesto que entre ambas situaciones pasan 0,25 segundos de manera que t irá de 0 a 0,25.

El ángulo y la velocidad iniciales serán los últimos obtenidos en la fase anterior antes de cruzar la vertical y la longitud de la cuerda viene determinada por la expresión $l(t)$ antes dada. Uniendo esto con la ecuación para el péndulo de longitud variable se obtiene el problema de valor inicial completo.

Periodo de longitud mínima: al igual que en la fase de longitud máxima la situación es la de un péndulo simple. En este caso la longitud de la cuerda es 17,7 metros. El ángulo y velocidad iniciales vienen dados por los últimos obtenidos en la fase anterior. El criterio de parada será el momento en que la velocidad cambie de signo (igual que antes el momento exacto es cuando la velocidad sea 0 pero no puede asegurarse que se alcance este punto), momento donde la longitud volverá a ser 20,6 y empezará de nuevo el proceso.

2.5.4. Comentarios finales

El botafumeiro real requiere alrededor de 80 segundos y aproximadamente 17 tirones (pasos por la vertical) para alcanzar su amplitud máxima, que se acerca a 82° y lo lleva hasta medio metro por debajo de la bóveda. Estos datos difieren de la simulación aquí presentada debido a las simplificaciones que se han tenido en cuenta. Para una simulación más completa podría plantearse la posibilidad de incluir un factor de rozamiento que frenase en parte el movimiento o modificar la modelización del alargamiento de la cuerda en los puntos más altos de las oscilaciones del péndulo.

Otra forma de modelizar la longitud de la cuerda es mediante funciones gaussianas, que hacen que la función $l(t, \theta(t))$ sea más suave. La Figura 2.6 es un ejemplo donde la longitud de la cuerda depende de la función de densidad de una distribución normal con $\mu = 0,25$ y $\sigma = 0,2$, modificada para que valga 0 en $t = t_0$ y $2,9$ en $t = t_0 + 0,25$. Se observa que los resultados obtenidos no presentan diferencias significativas con los del caso comentado en las secciones anteriores.

Por último, es interesante mencionar la particularidad más remarcable de este péndulo. Empezando de una amplitud pequeña (aproximadamente 13°) se consigue que el botafumeiro, de un peso considerable, alcance una altura cercana a los 21 metros sin que el proceso requiera una cantidad excesiva de trabajo.

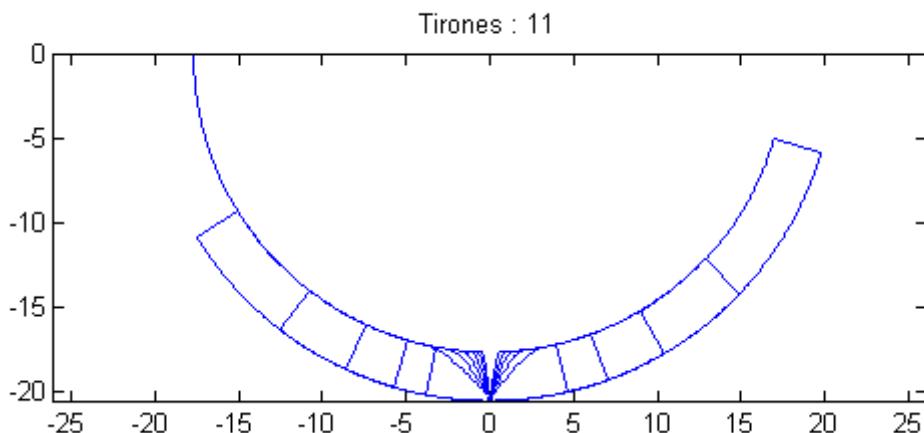


Figura 2.6: Trayectoria del péndulo usando la longitud dada por la función gaussiana. En azul está indicada la trayectoria recorrida por el péndulo hasta que este sobrepasa los 90°

Bibliografía

- [HW] Leon Hall, Stan Wagon, *Roads and wheels*, Mathematics Magazine, Vol.65, No.5. Dec.1992, pp. 283-301 .
- [R] G.B.Robinson, *Rockers and Rollers*, Mathematics Magazine, Vol.33, 1960, pp.139-144 .
- [W] Colaboradores de wikipedia, *Lagrangian mechanics* [en línea], Última revisión: 23 Julio 2015.
- [S] Juan R. Sanmartín Losada, *Física del botafumeiro*, Investigación y ciencia, N° 161, Feb.1990, pp 127-137 .

