

De los grupos de Lie a los instantones gravitacionales

Trabajo de fin del grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza



Gonzalo Alonso Álvarez
Dirigido por Luis Ugarte Vilumbrales

Summary: From Lie groups to gravitational instantons

A Lie group is a smooth manifold that is also a group in the algebraic sense, and in which the multiplication and inversion maps are smooth. Not only do they provide many examples of interesting manifolds themselves, but they are also essential tools in the study of more general manifolds, mainly because of the role they play as groups of symmetries of other manifolds. In this regard, the general linear group, which can be given a Lie group structure, will be of special interest. As we will see, the action of some of its subgroups on smooth manifolds can reveal some of the geometric properties of the manifolds.

If we want to introduce geometry into the theory of smooth manifolds, we need some kind of structure that can allow us to define concepts such as lengths and angles. This role will be fulfilled by Riemannian metrics, which are essentially choices of an inner product on each tangent space of the manifold. After developing this idea a bit further, we will be able to introduce the concept of curvature, which is a local invariant of Riemannian manifolds that measures how different a manifold is from the model space \mathbb{R}^n .

The final goal of this essay is to produce a family of Riemannian metrics with very special properties on a 4-dimensional smooth manifold. More precisely, we will build a hyper-Kähler metric, which involves the existence of three integrable almost complex structures satisfying the quaternion relations and three symplectic forms which are compatible with the metric in a natural way that will be explained. This turns out to be such a rich structure that it has many applications both in geometry and in physics.

One of the reasons why hyper-Kähler manifolds are interesting from the point of view of physics is that they are always Ricci-flat, which in turn implies that they are solutions for the vacuum Einstein field equation in general relativity. We will focus on gravitational instantons, defined as 4-dimensional hyper-Kähler metrics with some additional properties that we will study. However, the main requisite is for the metric to be hyper-Kähler, as there exist methods that allow to transform the original hyper-Kähler manifold in such a way that the additional properties are fulfilled. These are quite complex techniques and that are beyond the scope of this work and thus won't be covered here.

Lie groups will constitute a fundamental tool in the construction of the 4-dimensional hyper-Kähler metrics, as the core of the process will be to evolve a 3-dimensional Lie group in an additional variable with the purpose of getting a 4-dimensional Riemannian manifold that admits a hyper-Kähler metric. The concept of evolving a Lie group should be understood in the following sense: the 3-dimensional Lie group will be isometrically embedded in a 4-dimensional manifold as a hyper-surface. This evolution will be controlled by the requirement for the metric to be hyper-Kähler. This condition will lead us to some equations of evolution, which will form a nonlinear first-order system of ordinary differential equations.

This essay is structured as follows. In the first Chapter, we state the basic definitions and fundamental general results of the theory of smooth manifolds, with special focus on Lie groups. We start by introducing tensor fields as a generalization of vector fields, since they will constitute the basic elements to define objects such as metrics and structures over a manifold. We then study differential

forms as a concrete kind of tensor fields, because they will prove themselves to be a very useful tool by providing us with an adequate language in which to express some of the objects that we will define in Chapter 3.

In the first Chapter we also deal with the basic theory of Lie groups, and eventually we are able to state two of the most classical results in this field, the closed subgroup theorem and the Lie correspondence theorem. We then work out the basic features of the Heisenberg group, which is a 3-dimensional Lie group that will accompany us throughout the whole essay.

Chapter 2 is devoted to Riemannian geometry. There, we set the basics of the theory: we define what a Riemannian metric is, how connections address the problem of differentiating vector fields and what we understand as the curvature of a Riemannian manifold. The core idea is to generalize concepts that are well known in euclidean space to arbitrary manifolds. The formalism of tensor fields is the way to do this, and this is one of the reasons why we have introduced them in Chapter 1.

Whereas the first two Chapters deal with more or less standard formalism, in Chapter 3 we introduce some more advanced topics in geometry, with the ultimate goal of defining what we understand by a hyper-Kähler manifold. First of all, we describe what an almost complex structure is, and how this property of real manifolds is related to complex manifolds - that is, manifolds where the charts map to \mathbb{C}^n instead of \mathbb{R}^n . The most important result of this section is the Newlander-Nirenberg theorem, which helps us to assess whether a real smooth manifold can be given a complex manifold structure, in terms of the integrability of the almost complex structures that we can define over the real manifold.

We then move on to symplectic geometry, which is the study of manifolds endowed with a so called symplectic form. We just set out the rudiments of the theory, only covering the points that we will need later on. Eventually we get to a point where we are able to define what we understand by an almost hermitian metric on an almost complex manifold, which is essentially a Riemannian metric along with a compatibility condition with the almost complex structure. We see that, associated with an almost hermitian metric, there is a differential form called the fundamental 2-form. If we have an almost hermitian metric on an almost complex manifold such that the almost complex structure is integrable, we say that the metric is hermitian. If, in addition to that, the fundamental 2-form is a symplectic form, we then call the metric a Kähler metric.

If we are able to find a triplet of almost complex structures satisfying the quaternion relations and a natural compatibility condition with the metric, we say that the metric is almost hyper-hermitian. Finally, if the metric is Kähler with respect to all three almost complex structures, we say that we have a hyper-Kähler metric.

As we have anticipated, in Chapter 4 we work out the details of how to find a 4-dimensional hyper-Kähler metric starting with a 3-dimensional Lie group and having it evolve in a specific way. We arrive at two conditions that must be satisfied: one constitutes a condition that the original Lie group must fulfill in order to be a suitable candidate for the evolution, while the other one describes how the evolution has to be performed.

Finally, we apply the general result that we have proved to a particular case: the Heisenberg group. We first check that it satisfies the conditions to be an appropriate candidate for the evolution and then solve the system of differential equations that regulate the evolution. As a result, we get a whole family of hyper-Kähler metrics, where we have the choice of a differentiable function satisfying a few conditions as a free variable. Next, we check that all these hyper-Kähler metrics we have obtained are Ricci-flat by computing their curvature tensor.

We end the essay with a discussion on whether any of the hyper-Kähler metrics we have found is a candidate for being a gravitational instanton, by testing if they fulfill the additional conditions that gravitational instantons satisfy. Unfortunately, we see that these requirements are not automatically fulfilled by our metrics and that, in order to produce a gravitational instanton, we would need to further transform the 4-dimensional manifolds we have obtained.

Prólogo

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable que al mismo tiempo es grupo algebraico, siendo ambas estructuras compatibles en el sentido de que la multiplicación y la inversión del grupo son aplicaciones diferenciables. Además de proporcionar ejemplos de variedades con propiedades muy interesantes, los grupos de Lie son una herramienta esencial en el estudio de variedades más generales, principalmente por el papel que juegan como grupos de simetría de otras variedades. Como veremos, en este aspecto será especialmente relevante el grupo lineal general, al que se puede dotar de estructura de grupo de Lie. Serán sus subgrupos de Lie los que, con su acción sobre variedades diferenciables, determinen en cierto sentido algunas propiedades geométricas de dichas variedades.

Si queremos hablar de geometría en variedades diferenciables, es preciso definir algún objeto que nos permita introducir conceptos como ángulos y longitudes. Este papel lo van a jugar las métricas de Riemann, que son esencialmente una elección de un producto escalar en cada espacio tangente a la variedad. Así, vamos a poder también definir la curvatura como un invariante local de las variedades de Riemann que nos permite distinguir cuánto se diferencia una variedad del espacio modelo \mathbb{R}^n .

El objetivo final del trabajo es la construcción de una familia de métricas de Riemann sobre una variedad de dimensión 4 con propiedades muy especiales. En concreto, conseguiremos que la métrica sea híper Kähler, lo que implica la existencia de tres estructuras casi complejas integrables cumpliendo las relaciones cuaterniónicas y tres formas simplécticas compatibles con la métrica, como veremos en el trabajo. Este tipo de estructuras tan ricas tienen aplicaciones tanto en la geometría como en la física.

Centrándonos en la física, las métricas híper Kähler son siempre Ricci-llanas, lo que implica que son solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, de manera que son interesantes desde el punto de vista de la teoría de la relatividad general de Einstein. En particular, existen unos objetos, llamados instantones gravitacionales, que son precisamente métricas híper Kähler en dimensión 4 a las que se les exigen algunas propiedades adicionales. Lo esencial es que la métrica sea híper Kähler, pues las otras propiedades se pueden conseguir a partir de la variedad meramente híper Kähler, aunque con métodos sofisticados que no trataremos en este trabajo.

En la construcción de las métricas híper Kähler en dimensión 4 van a jugar un papel esencial los grupos de Lie, ya que la idea es hacer evolucionar en una variable adicional un grupo de Lie de dimensión 3 hasta convertirlo en una variedad de Riemann de dimensión 4 que admita una métrica híper Kähler. La idea de evolución se puede entender de la siguiente manera: el grupo de Lie de dimensión 3 estará encajado isométricamente en la variedad de dimensión 4 como híper superficie. La evolución vendrá fijada por la condición de que la métrica resultante sea híper Kähler, condición que como veremos dará como resultado unas ecuaciones de evolución, que formarán un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Como ya se ha podido ir intuyendo a lo largo del prólogo, el contenido de este trabajo no se limita a las variedades diferenciables y a la geometría, sino que involucra conceptos y herramientas de otros campos como el álgebra, el análisis o la física.

Índice general

Summary: From Lie groups to gravitational instantons	iii
Prólogo	v
1 Variedades diferenciables y grupos de Lie	1
1.1 Fibrados y campos tensoriales	1
1.1.1 k -formas sobre una variedad diferenciable	2
1.2 Grupos de Lie	3
1.2.1 Subgrupos de Lie	4
1.3 El grupo de Heisenberg	5
2 Geometría de Riemann	7
2.1 Métricas de Riemann	7
2.2 Conexiones	8
2.2.1 La conexión riemanniana	9
2.3 Curvatura	10
3 Estructuras sobre variedades diferenciables	11
3.1 Variedades Complejas	11
3.2 Estructuras simplécticas	14
3.3 Métricas Kähler	15
3.4 Métricas híper Kähler	17
4 Instantones gravitacionales a partir de grupos de Lie	18
4.1 Métricas híper Kähler en $G \times I$	18
4.2 Métricas híper Kähler en $H \times I$	21
4.3 Tensor de curvatura de $(H \times I, g)$	22
4.4 Instantones gravitacionales	24
Anexos	27
A Geometría y el grupo lineal general	29
A.1 El grupo lineal general	29
A.2 Estructuras geométricas y grupos de Lie	33
A.2.1 Estructura casi hermítica	33
A.2.2 Estructura casi híper hermítica	34
B Cálculos auxiliares para el Capítulo 4	37
B.1 Integrabilidad de J_2 y J_3	37
B.2 Teorema 4.3.1	38
B.2.1 Símbolos de Christoffel	38
B.2.2 Tensor de curvatura	39
B.2.3 Tensor de Ricci	42
Bibliografía	44

Capítulo 1

Variedades diferenciables y grupos de Lie

En este primer capítulo introducimos y revisamos conceptos y resultados necesarios para el trabajo, haciendo énfasis en los grupos de Lie. Daremos por conocida la teoría básica de variedades diferenciables, que puede consultarse en [Brickell] o en los primeros capítulos de [LeeSM]. En todo el trabajo, las variedades diferenciables con las que tratamos se suponen Hausdorff y segundo numerables.

La referencia principal para este capítulo es [LeeSM]. Por cuestiones de espacio, se presentarán muchos resultados sin demostraciones, la mayoría de las cuales pueden consultarse en el citado libro.

1.1. Fibrados y campos tensoriales

Definición 1.1.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y V^* su espacio dual. Un *tensor de tipo* $\binom{k}{l}$, también llamado *tensor k -covariante, l -contravariante*, es una aplicación multilineal

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ copias}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

El espacio de todos los tensores de tipo $\binom{k}{l}$ en V se denota $T_l^k(V)$.

Recordemos que, por analogía con el fibrado tangente $TM = \sqcup_{p \in M} T_p M$, un *fibrado vectorial sobre M* es un espacio topológico E junto con una aplicación continua y sobre $\pi : E \rightarrow M$ tal que $\forall p \in M$, la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ tiene estructura de espacio vectorial. E tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $n + m$, siendo $n = \dim M$ como variedad y $m = \dim E_p$ como espacio vectorial.

Si M es una variedad diferenciable, definimos el *fibrado de $\binom{k}{l}$ -tensores* en M como

$$T_l^k M := \bigsqcup_{p \in M} T_l^k(T_p M), \quad \text{donde } T_p M \text{ es el espacio tangente a } M \text{ en } p.$$

$T_l^k M$ es un fibrado vectorial sobre M y tiene estructura de variedad diferenciable de $\dim n + n^{k+l}$.

Si $\pi : T_l^k M \rightarrow M$ es la proyección que envía $F \in T_l^k(T_p M)$ a p , un *campo tensorial* es una sección diferenciable de π , es decir, una aplicación diferenciable $X : M \rightarrow T_l^k M$ tal que $\pi \circ X = \text{Id}_M$. El espacio de campos $\binom{k}{l}$ -tensoriales se denota $\mathcal{T}_l^k(M)$.

En particular, $\mathcal{T}_1(M) \equiv \mathfrak{X}(M)$ es el espacio de *campos vectoriales* sobre M . Vamos a definir una operación sobre $\mathfrak{X}(M)$ llamada *corchete de Lie de campos*. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{X}(M) \quad , \quad \text{siendo } [X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M). \quad (1.1)$$

Definición 1.1.2. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial V con una operación adicional $[\cdot, \cdot] : V \rightarrow V$ que cumple las siguientes propiedades $\forall X, Y, Z \in V$:

- (i) Bilinealidad: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$, $[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- (ii) Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$.
- (iii) Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Es inmediato comprobar que $(\mathfrak{X}(M), +, \cdot_{\mathbb{R}}, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie (de dimensión infinita).

1.1.1. k -formas sobre una variedad diferenciable

Definición 1.1.3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Un k -tensor covariante ω se dice *antisimétrico* si cambia de signo al intercambiar dos cualesquiera de sus argumentos, es decir, si

$$\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = -\omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k), \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

El espacio de k -tensores covariantes antisimétricos sobre V se denota $\Lambda^k(V)$.

Vamos a buscar una base de $\Lambda^k(V)$. Si $\dim V = n$, sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base de V y $\{e^1, \dots, e^n\}$ su base dual. Llamamos *multi índice* de longitud k a $I = (i_1, \dots, i_k)$, con $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$. Para cada multi índice de longitud k , definimos el k -covector antisimétrico elemental e^I dado por

$$e^I(X_1, \dots, X_k) = \det \begin{pmatrix} e^{i_1}(X_1) & \dots & e^{i_1}(X_k) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i_k}(X_1) & \dots & e^{i_k}(X_k) \end{pmatrix}.$$

Se prueba que estos k -covectores actúan sobre vectores básicos según $e^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \delta_j^I$, y que $\{e^I \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ es una base de $\Lambda^k(V)$, luego $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$.

Definición 1.1.4. Si $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$, definimos su *producto exterior* $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$ como

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta). \quad (1.2)$$

Aquí, \otimes denota el producto tensorial, y $(\text{Alt } \alpha)(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})$,

$\alpha \in \Lambda^k(V)$, siendo S_k el grupo simétrico de k elementos y $\text{sgn } \sigma$ la signatura de $\sigma \in S_k$.

El producto exterior es bilineal, asociativo y anticonmutativo en el sentido $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$. Además, para la base e^I , cumple $e^I \wedge e^J = e^{IJ}$, donde IJ denota la concatenación de I y J . Así, si denotamos $\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$, podemos definir el *álgebra exterior sobre V* como $(\Lambda^*(V), +, \cdot, \wedge)$, que como espacio vectorial tiene $\dim 2^n$.

Definición 1.1.5. Sea M variedad \mathcal{C}^∞ de dim n , $\Lambda^k M = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p M)$, que es un fibrado vectorial y tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $n + \binom{n}{k}$. Una *k -forma diferencial* es una sección \mathcal{C}^∞ de $\Lambda^k M$, es decir, un campo tensorial cuyo valor en cada punto es un k -tensor covariante antisimétrico. El espacio de k -formas sobre M se denota $\Omega^k(M)$, y se identifica $\Omega^0(M) \equiv \mathcal{C}^\infty(M)$.

Denotando $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$ y definiendo el producto exterior de k -formas punto a punto, $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$, para $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$ y $p \in M$; el *álgebra exterior de M* es $(\Omega^*(M), +, \cdot, \wedge)$.

Dentro de las k -formas, el espacio más importante es el de 1-formas, $\Omega^1(M) \equiv \mathcal{T}^1(M)$. A partir de una base coordenada local de campos $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$, obtenemos su base dual de 1-formas, $\{dx^1, \dots, dx^n\}$, que está determinada por la relación de dualidad $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$.

Dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir su *diferencial* como la 1-forma $df \in \Omega^1(M)$ cuya acción sobre campos viene dada de manera natural por $df(X) = X(f)$. En coordenadas locales, podemos expresar df en función de la base de 1-formas como $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$. Vamos a construir un operador que generaliza esta definición a k -formas.

Teorema 1.1.6. Sea M una variedad diferenciable. Para cada k , existe un único operador $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, llamado *diferencial exterior en M* , cumpliendo las cuatro propiedades:

- (i) d es lineal sobre \mathbb{R} .
- (ii) Para $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, df es la diferencial de f , dada por $df(X) = Xf$.
- (iii) Si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$, entonces $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
- (iv) $d \circ d \equiv 0$.

Localmente, podemos expresar la acción de la diferencial exterior en coordenadas como

$$d\left(\sum_J \omega_J dx^J\right) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^J = \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^J. \quad (1.3)$$

En el caso de la diferencial de 1-formas, que es el que más nos interesa, podemos dar una fórmula global sencilla:

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \omega([X, Y]), \quad \forall \alpha \in \Omega^1(M), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.4)$$

En particular, si lo aplicamos a elementos de una base dual de campos y 1-formas, tenemos:

$$(de^i)(E_j, E_k) = -e^i([E_j, E_k]). \quad (1.5)$$

Esto nos permite definir las *constantes de estructura* c_{jk}^i en una base local dada $\{E_1, \dots, E_n\}$, que determinan totalmente los corchetes y las diferenciales exteriores de los elementos de la base según

$$[E_j, E_k] = \sum_{i=1}^n c_{jk}^i E_i, \quad de^i = -\sum_{j,k=1}^n c_{jk}^i e^j \wedge e^k.$$

Una ventaja de las 1-formas frente a los campos es que se comportan bien con respecto a aplicaciones diferenciables entre variedades. Sea $F : M \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} N$, entonces $\forall p \in M$ tenemos definida la *diferencial* $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, que es una aplicación lineal. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, si existe $Y \in \mathfrak{X}(N)$ tal que $F_* X = Y$ (es decir, que $dF_p(X_p) = Y_{F(p)} \forall p \in M$), se dice que X e Y son *campos F -relacionados*. Si F es difeomorfismo, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ existe un único campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$ que está F -relacionado con X , lo que nos permite definir el *pushforward* de X como $F_* X = Y$. El problema es que si F no es difeomorfismo, puede haber campos para los que el pushforward no esté bien definido. Sin embargo, para 1-formas sí que está bien definida la aplicación *pullback*, dada por

$$F^* : \Omega^1(N) \rightarrow \Omega^1(M) \quad , \text{ siendo } \forall p \in M, \quad (F^*)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \mapsto F^*(\alpha) \quad \quad \quad X_p \mapsto (F^* \alpha)_p X_p = (\alpha_{F(p)})(dF_p(X_p)).$$

Más aún, el pullback se comporta bien con las construcciones sobre k -formas que hemos hecho, ya que conmuta tanto con el producto exterior como con la diferencial exterior.

1.2. Grupos de Lie

Definición 1.2.1. Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable G que es también un grupo en el sentido algebraico, con la propiedad de que la multiplicación y la inversión

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad i : G \rightarrow G, \\ (a, b) \mapsto ab \quad \quad \quad g \mapsto g^{-1}$$

son aplicaciones \mathcal{C}^∞ . El elemento neutro de G se suele denotar e .

Si G y H son grupos de Lie, un *homomorfismo de grupos de Lie* de G en H es una aplicación $F : G \rightarrow H$ que es a la vez \mathcal{C}^∞ y homomorfismo de grupos. Si F es un difeomorfismo, F se llama *isomorfismo de grupos de Lie*. En tal caso, se dice que G y H son grupos de Lie *isomorfos*.

Cada $g \in G$ define una aplicación en G llamada *traslación a izquierda*, dada por

$$L_g : G \rightarrow G \\ h \mapsto L_g(h) = gh,$$

que es un difeomorfismo porque es \mathcal{C}^∞ y su inversa es $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. La existencia de estos difeomorfismos nos permite, de cierta manera, restringir nuestro estudio del grupo de Lie a un entorno de la identidad, ya que aplicando L_g podemos trasladarnos a un entorno de cualquier punto.

Definición 1.2.2. Un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ se dice *invariante por la izquierda* si $(L_g)_* X = X, \forall g \in G$, es decir, si para todo $g' \in G$, se tiene $(dL_g)_{g'}(X_{g'}) = X_{gg'}$.

Como $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G)$, $(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y]$, el corchete de campos de dos campos invariantes por la izquierda es invariante por la izquierda. Esto implica que

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid X \text{ invariante por la izquierda} \}$$

es subálgebra de Lie de $(\mathfrak{X}(G), +, \cdot, \mathcal{C}^\infty(M), [,])$. Se dice que \mathfrak{g} es *el álgebra de Lie de G* . Lo interesante es que \mathfrak{g} tiene dimensión finita, a diferencia de $\mathfrak{X}(G)$.

Teorema 1.2.3. Sea G un grupo de Lie. La aplicación evaluación $\varepsilon : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ dada por $\varepsilon(X) = X_e$ es isomorfismo de espacios vectoriales. Así, \mathfrak{g} tiene dimensión finita, y $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e G = \dim G$.

Demostración. (Idea) La inversa de ε es $\tau : T_e G \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por $\tau(V) = \tilde{V}$, con $\tilde{V}_g = dL_g(V), \forall g \in G$. \square

Corolario 1.2.4. Todo grupo de Lie es paralelizable (es decir, posee una base global de campos de vectores).

Es claro que un grupo de Lie determina su álgebra de Lie, y nos preguntamos hasta qué punto es cierto el recíproco. Desde un punto de vista más general, buscamos algún tipo de correspondencia entre grupos de Lie y sus álgebras de Lie asociadas. Un primer resultado es el siguiente.

Teorema 1.2.5. Sean G, H grupos de Lie y $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ sus respectivas álgebras de Lie y $F : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces, para todo $X \in \mathfrak{g}$, existe un único $Y \in \mathfrak{h}$ que está F -relacionado con X , y que denotamos $Y = F_* X$. Así, $F_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Corolario 1.2.6. Grupos de Lie isomorfos tienen álgebras de Lie isomorfas.

Un resultado en cierto modo recíproco (aunque sólo válido para el caso simplemente conexo) se recoge en el Teorema 1.2.15, que presentamos más adelante ya que requiere de herramientas que describimos a continuación.

1.2.1. Subgrupos de Lie

Definición 1.2.7. Sea G un grupo de Lie. Decimos que $H \subset G$ es un subgrupo de Lie de G si es subgrupo a nivel algebraico y es subvariedad inmersa.

Si H es un subgrupo de Lie de G , es natural preguntarse qué relación existe entre \mathfrak{h} , el álgebra de Lie de H , y \mathfrak{g} , el álgebra de Lie de G . El siguiente teorema responde a esta cuestión.

Teorema 1.2.8 (El álgebra de Lie de un subgrupo de Lie). *Supongamos que $H \subseteq G$ es un subgrupo de Lie, y sea $\iota : H \hookrightarrow G$ la aplicación inclusión. Sea $\tilde{\mathfrak{h}} = \{X \in \mathfrak{g} \mid X_e \in T_e H\}$, entonces \mathfrak{h} es canónicamente isomorfa como álgebra de Lie a $\tilde{\mathfrak{h}}$, es decir, $\tilde{\mathfrak{h}} = \iota_* \mathfrak{h}$.*

Tal y como ocurre en variedades diferenciables, una clase de subgrupos de Lie particularmente interesantes son los subgrupos de Lie encajados, ya que sólo éstos heredan la topología de G como subespacios. A continuación vamos a caracterizar este tipo de subgrupos de Lie.

Proposición 1.2.9. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de G que es subvariedad encajada de G . Entonces H es subgrupo de Lie de G cerrado en G .

El recíproco de esta proposición se recoge en el Teorema 1.2.14 y su demostración se basa en una herramienta muy útil para el estudio de grupos de Lie, la llamada aplicación exponencial. En lo que sigue vamos a construir esta aplicación de manera muy resumida.

Definición 1.2.10. Sea M variedad \mathcal{C}^∞ , $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una curva $\gamma: I \rightarrow M$ se dice *curva integral del campo X* si $\gamma'(t) = X|_{\gamma(t)}$, $\forall t \in I$. Se llama *punto de partida* de γ al punto $p = \gamma(0)$.

Supongamos que dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall p \in M$ existe una única curva integral $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \rightarrow M$ que parte de p . Dependiendo de qué queramos resaltar, denotaremos estas curvas $\theta^{(p)}(t)$ como $\theta(t, p)$ o $\theta_t(p)$. Entonces tenemos definida una acción de $(\mathbb{R}, +)$ sobre M que llamaremos *flujo global* del campo X :

$$\theta: \mathbb{R} \times M \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} M \quad , \text{ pues cumple } \begin{cases} \theta(0, p) = p \\ \theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t+s, p) \end{cases} .$$

Este flujo global no tiene por qué existir para un campo arbitrario en una variedad diferencial cualquiera, pero en el caso de grupos de Lie tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.2.11. Sea G un grupo de Lie y $X \in \mathfrak{g}$. Entonces el flujo θ de X es global.

Dado G un grupo de Lie, $X \in \mathfrak{g}$, si θ es el flujo de X , se prueba que $L_g \circ \theta_t = \theta_t \circ L_g$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $g \in G$. Usando esto, tenemos que la aplicación $\theta^{(e)}: \mathbb{R} \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie, pues

$$\theta^{(e)}(s) \theta^{(e)}(t) = \left(L_{\theta^{(e)}(s)} \circ \theta_t \right) (e) = \left(\theta_t \circ L_{\theta^{(e)}(s)} \right) (e) = (\theta_t \circ \theta_s) (e) = \theta^{(e)}(t+s).$$

Un *subgrupo uniparamétrico* de G es un homomorfismo de grupos de Lie $F: (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$.

Proposición 1.2.12. Para todo F subgrupo uniparamétrico de G , existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $F = \theta^{(e)}$. Se dice que el subgrupo uniparamétrico está generado por X .

Definición 1.2.13. Se llama *aplicación exponencial* a la aplicación

$$\begin{aligned} \exp: \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ X &\mapsto \exp X = \theta^{(e)}(1). \end{aligned}$$

Se demuestra que la aplicación exponencial es \mathcal{C}^∞ y que para cada $X \in \mathfrak{g}$, $F(t) = \exp tX$ es el subgrupo uniparamétrico generado por X . Pero lo más importante es que la aplicación exponencial es un difeomorfismo local entre un entorno de 0 en \mathfrak{g} y un entorno de e en G . Es decir, nos da una manera de describir propiedades del grupo de Lie a partir de propiedades del álgebra de Lie. Teniendo en cuenta esto, la aplicación exponencial permite demostrar dos de los resultados más importantes de la teoría de grupos de Lie, que ya habíamos anticipado y que presentamos sin demostración, que se pueden consultar en [LeeSM].

Teorema 1.2.14 (Teorema del subgrupo cerrado). Sea G grupo de Lie y $H \subset G$ un subgrupo de G que es cerrado en G . Entonces H es un subgrupo de Lie encajado de G .

En el Anexo A aplicamos este teorema a subgrupos de Lie del grupo general lineal.

Teorema 1.2.15 (La correspondencia de Lie). Existe una correspondencia uno a uno entre clases de isomorfismo de álgebras de Lie de dimensión finita y clases de isomorfismo de grupos de Lie simplemente conexos, dada por asociar cada grupo de Lie simplemente conexo con su álgebra de Lie.

1.3. El grupo de Heisenberg

El grupo de Heisenberg es el grupo de matrices de la forma

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

con el producto ordinario de $M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Es claro que $H \subset GL(3, \mathbb{R})$, y que es cerrado como subespacio topológico. Comprobamos que es subgrupo:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_2 & z_1 + z_2 + x_1 y_2 \\ 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xy - z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

Entonces podemos aplicar el teorema del subgrupo cerrado y concluir que H es un subgrupo de Lie encajado en $GL(3, \mathbb{R})$. Para simplificar los cálculos posteriores, nos interesa trabajar con otra representación del grupo de Heisenberg, esta vez encajado en $GL(4, \mathbb{R})$, dada por

$$\tilde{H} = \left\{ h(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x/2 & -y/2 & z \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se puede comprobar que ambos grupos de Lie son isomorfos. A partir de ahora usaremos la segunda representación y denotaremos por comodidad $H \equiv \tilde{H}$.

Vamos a calcular \mathfrak{h} , el álgebra de Lie de H , que será subálgebra de $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}) = M(4 \times 4, \mathbb{R})$ (ver Anexo A para el cálculo del álgebra de Lie del grupo lineal general). Para ello, construimos subgrupos uniparamétricos de H y calculamos su tangente en la identidad, pues recordemos que $\mathfrak{h} \cong T_e H$.

$$a(t) = \begin{pmatrix} 1 & t/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial}{\partial x},$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow b'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow c'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial}{\partial z}.$$

Y la base de campos invariantes por la izquierda asociada la obtenemos a partir de la diferencial del operador traslación expresado en la base de campos coordenados:

$$\begin{aligned} A &= dL_{h(x,y,z)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ B &= dL_{h(x,y,z)} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ C &= dL_{h(x,y,z)} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad \text{pues } dL_{h(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x/2 & y/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando los corchetes de los campos tenemos el álgebra de Lie del grupo de Heisenberg:

$$\mathfrak{h} = \{A, B, C \mid [A, B] = C; [A, C] = 0; [B, C] = 0\}. \quad (1.6)$$

La base dual asociada de 1-formas es:

$$\alpha = dx, \quad \beta = dy, \quad \gamma = dz + \frac{y}{2} dx - \frac{x}{2} dy. \quad (1.7)$$

Se puede comprobar que estas 1-formas son invariantes por la izquierda, es decir, bajo pullbacks L_h^* . Como ya conocemos las constantes de estructura, es inmediato obtener las diferenciales exteriores de las 1-formas básicas, que resumimos a continuación:

$$\mathfrak{h}^* = \{\alpha, \beta, \gamma \mid d\alpha = 0; d\beta = 0; d\gamma = -\alpha \wedge \beta\}. \quad (1.8)$$

Capítulo 2

Geometría de Riemann

El objetivo de este capítulo es introducir los conceptos básicos de la geometría riemanniana, que es aquella que trata con objetos como métricas, curvatura, geodésicas... La idea es generalizar estos conceptos, bien conocidos en el plano y en el espacio, a variedades diferenciables arbitrarias.

La referencia principal para este capítulo es [LeeRM]. En este libro se pueden consultar más ejemplos y las demostraciones que aquí omitamos por cuestiones de espacio.

2.1. Métricas de Riemann

Definición 2.1.1. Sea M una variedad \mathcal{C}^∞ . Una *métrica de Riemann* sobre M es un campo de 2-tensores covariante $g \in \mathcal{T}^2(M)$ que es simétrico (es decir, $g(X, Y) = g(Y, X) \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$) y definido positivo (es decir, $g(X, X) > 0$ si $0 \neq X \in \mathfrak{X}(M)$). El par (M, g) recibe el nombre de *variedad riemanniana*.

Si definimos el *producto simétrico* de 1-formas, $\omega\eta = \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega)$, podemos expresar g en una base coordenada local como $g = g_{ij}dx^i dx^j$.

La definición implica que g determina un producto escalar en cada espacio tangente T_pM , que se suele denotar $\langle V, W \rangle = g(V, W) \forall V, W \in T_pM$. Podemos entonces hablar de:

- *Longitud* o *norma* de un vector tangente $V \in T_pM$: $|V| = \langle V, V \rangle^{1/2}$.
- *Ángulo* entre dos vectores no nulos $V, W \in T_pM$: $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos \theta = \frac{\langle V, W \rangle}{|V||W|}$.
- Dos vectores $V, W \in T_pM$ se dicen *ortogonales* si el ángulo entre ellos es 0 , o equivalentemente si $\langle V, W \rangle = 0$.
- Una familia $V_1, \dots, V_k \in T_pM$ se dice *ortonormal* si $|V_i| = 1$ y $\langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, k$.

De manera natural se extienden estas nociones a campos de vectores: se habla de campos de vectores ortogonales si lo son en cada punto; se escribe $\langle X, Y \rangle = g(X, Y) \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, etc.

Ejemplo 2.1.2. La métrica euclídea en \mathbb{R}^n , dada por $\bar{g} = \sum_{i=1}^n dx^i dx^i = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$, que no es más que el producto escalar usual en \mathbb{R}^n en cada espacio tangente, con la identificación $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

Si (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) son variedades riemannianas, un difeomorfismo φ de M en \tilde{M} se llama *isometría* si conserva la métrica en el sentido $\varphi^* \tilde{g} = g$.

Teorema 2.1.3. *Toda variedad diferenciable admite una métrica de Riemann.*

Demostración. No la hacemos en detalle, la idea es usar una partición de la unidad φ_α en M subordinada a un atlas localmente finito $\{(U_\alpha, x_\alpha) | \alpha \in I\}$. Como x_α es un difeomorfismo de U_α en un abierto de \mathbb{R}^n , podemos definir la métrica de Riemann a partir del pullback de la métrica euclídea en \mathbb{R}^n ,

$$g := \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha \cdot \tilde{g}_\alpha \quad , \quad \text{con } \tilde{g}_\alpha := x_\alpha^* \bar{g}.$$

□

Una propiedad de las métricas de Riemann es que permiten transformar vectores en covectores y viceversa, como describimos brevemente a continuación. Definimos la aplicación *bajar un índice*:

$$b: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^1 M$$

$$X \mapsto X^\flat \text{ tal que } X^\flat(Y) = g(X, Y), \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

En coordenadas se suele escribir $X^\flat = X_j dx^j$, donde $X_j = g_{ij} X^i$. Como la matriz de g es inversible, podemos definir la aplicación *subir un índice* como la inversa de la anterior, $\omega \in \mathfrak{T}^1 M \mapsto \omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ y que en coordenadas se expresa como $\omega^\sharp = \omega^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, con $\omega^i = g^{ij} \omega_j$, siendo por definición $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ la matriz inversa de la expresión coordenada de la métrica. Estos operadores se pueden aplicar a tensores de cualquier rango, indicando qué índices bajamos o subimos.

Como consecuencia, dado un campo de 2-tensores simétrico $h \in \mathfrak{T}^2(M)$, definimos la *traza de h con respecto de g* como $\text{tr}_g h = \text{tr} h^\sharp$. Como h es simétrico, da igual qué índice subamos. Notar que está bien definido, pues $h^\sharp \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, y en cada punto $p \in M$ tenemos el isomorfismo $T_1^1(T_p M) \cong \text{End}(T_p M)$, de manera que en cada punto podemos calcular la traza de h_p^\sharp como matriz, que es independiente de la base elegida. En coordenadas, $\text{tr}_g h = \text{tr} h_i^i = g^{ij} h_{ij}$. En el caso en el que el tensor h no sea simétrico, hay que especificar cuál de los dos índices subimos.

2.2. Conexiones

Al intentar generalizar conceptos bien conocidos en \mathbb{R}^3 como el de geodésica y curvatura a variedades de Riemann abstractas, nos encontramos con el problema de cómo diferenciar campos de vectores. Para entender intuitivamente esta cuestión, pensemos en una curva $\gamma(t) \in M$ de la que queremos hallar su aceleración. Para ello, tendríamos que diferenciar $\dot{\gamma}(t)$ con respecto a t , lo que implicaría calcular un cociente incremental entre los vectores $\dot{\gamma}(t_0)$ y $\dot{\gamma}(t)$. Pero como se ve en la Figura 2.1, estos dos vectores están en espacios tangentes distintos, y no tiene sentido restarlos.

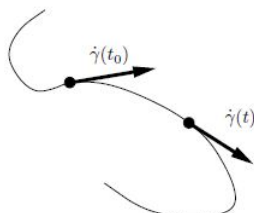


Figura 2.1: $\dot{\gamma}(t_0)$ y $\dot{\gamma}(t)$ están en distintos espacios vectoriales.

Resolvemos el problema encontrando una manera de diferenciar secciones de fibrados vectoriales.

Definición 2.2.1. Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado vectorial, $\mathcal{E}(M) = \{\text{secciones } \mathcal{C}^\infty \text{ de } E\}$. Una *conexión en E* es una aplicación

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

que cumple

- (i) $\nabla_X Y$ es \mathcal{C}^∞ -lineal en X : $\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$, con $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
- (ii) $\nabla_X Y$ es \mathbb{R} -lineal en Y : $\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
- (iii) Regla del producto: $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$, con $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Se dice que $\nabla_X Y$ es la *derivada covariante de Y en la dirección de X* .

Proposición 2.2.2. Si ∇ es una conexión en un fibrado E , $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathcal{E}(M)$ y $p \in M$, $\nabla_X Y|_p$ sólo depende de los valores de Y en un entorno arbitrariamente pequeño de p y del valor de X en p .

Definición 2.2.3. Una *conexión lineal* en M es una conexión en TM , es decir, una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ cumpliendo las propiedades de la Definición 2.2.1.

Si E_i es una base local de campos en un abierto $U \in M$, los *símbolos de Christoffel* de ∇ con respecto a esta base son las n^3 funciones $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Usando las propiedades de la definición se demuestra fácilmente que la acción de ∇ en U está totalmente determinada por sus símbolos de Christoffel.

Teorema 2.2.4. *Toda variedad diferenciable admite una conexión lineal.*

Demostración. (Idea). En cada abierto coordenado una elección de n^3 funciones diferenciables determina una conexión a través de los símbolos de Christoffel en la base de campos coordenados. Usando una partición de la unidad pegamos estas conexiones definidas localmente análogamente a como hemos hecho en la demostración de la existencia de métricas de Riemann. \square

2.2.1. La conexión riemanniana

En una variedad riemanniana, es posible construir una conexión muy especial, ligada a la métrica. Sea entonces (M, g) variedad riemanniana.

Definición 2.2.5. Se dice que una conexión lineal ∇ es *compatible con g* si satisface la siguiente igualdad para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad (2.2)$$

Definición 2.2.6. El *tensor de torsión* de una conexión lineal ∇ es el campo de $\binom{2}{1}$ -tensores $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (2.3)$$

Una conexión lineal ∇ se dice *simétrica* si su tensor de torsión es nulo, es decir, si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.4)$$

Teorema 2.2.7 (Lema fundamental de la geometría riemanniana). *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Existe una única conexión lineal ∇ en M que es compatible con g y simétrica.*

Demostración. (Esquema) La manera de demostrar el teorema es encontrar una fórmula para ∇ . La acción de cualquier ∇ que cumpla las hipótesis del teorema se puede expresar como:

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle), \quad (2.5)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Esto prueba la parte de la unicidad. Para la existencia, hallamos una expresión de los símbolos de Christoffel en cada abierto coordenado que sólo depende de la métrica, y resulta ser:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \quad (2.6)$$

\square

Además de probar el teorema, hemos encontrado una fórmula explícita (2.6) para calcular los símbolos de Christoffel en la base local de campos de cualquier abierto coordenado conociendo sólo la métrica. La fórmula (2.5) nos permite calcularlos con respecto a cualquier otra base siempre que conozcamos los corchetes y los productos escalares de los campos.

Dada una curva $\gamma : I \rightarrow M$, definimos su *aceleración* con respecto a ∇ como $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$. Se dice que γ es una *geodésica* con respecto a ∇ si su aceleración es cero: $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. Se puede comprobar que si ∇ es la conexión riemanniana de (M, g) , las geodésicas son el camino más corto entre dos puntos, siendo

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

la longitud de la curva γ entre los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$. Así, las geodésicas generalizan a variedades riemannianas el concepto de línea recta que tenemos en el espacio.

2.3. Curvatura

En esta sección vamos a construir un invariante local de las métricas de Riemann, el tensor de curvatura, que viene a medir cuánto se alejan las derivadas covariantes segundas de ser conmutativas. En lo que sigue trabajaremos sobre una variedad riemanniana (M, g) y ∇ será siempre la conexión riemanniana.

Definición 2.3.1. El *tensor de curvatura* R es el campo de 4-tensores covariantes cuya acción sobre campos viene dada por:

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

$$(X, Y, Z, W) \mapsto R(X, Y, Z, W) = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle. \quad (2.7)$$

En términos de cualquier base de campos coordenados, R se expresa como

$$R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l, \text{ siendo } R_{ijkl} = R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right).$$

Decimos que una variedad riemanniana es *llana* si es localmente isométrica a (\mathbb{R}^n, \bar{g}) .

Teorema 2.3.2. Una variedad riemanniana es llana si y sólo si su tensor de curvatura es nulo.

Proposición 2.3.3 (Simetrías del tensor de curvatura). Para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, se cumplen:

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W), \quad (2.8)$$

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z), \quad (2.9)$$

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y), \quad (2.10)$$

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0 \quad (\text{Primera identidad de Bianchi}). \quad (2.11)$$

Como los 4-tensores son objetos complicados, vamos a definir unos tensores más simples que resumen la información contenida en R .

Definición 2.3.4. El *tensor de Ricci* Rc es el campo de 2-tensores covariante resultado de calcular la traza del tensor de curvatura con respecto al primer y cuarto índice, subiendo este último. Sus componentes se suelen denotar R_{ij} :

$$R_{ij} := R_{kij}{}^k = g^{km} R_{kijm}. \quad (2.12)$$

La *curvatura escalar* S es la traza del tensor de Ricci:

$$S := \text{tr}_g Rc = R_i{}^i = g^{ij} R_{ij}. \quad (2.13)$$

Lema 2.3.5. El tensor de Ricci es simétrico y se expresa de cualquiera de las siguientes maneras:

$$R_{ij} = R_{kij}{}^k = R_{ik}{}^k{}_j = -R_{ki}{}^k{}_j = -R_{ikj}{}^k.$$

Definición 2.3.6. Una métrica riemanniana g se dice *métrica Einstein* si su tensor de Ricci es un múltiplo escalar de la métrica en cada punto de M . Es decir, si existe $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $Rc = \lambda g$. Tomando trazas se ve que necesariamente $\lambda = \frac{1}{n} S$.

En este trabajo se construirán métricas Einstein con $\lambda = 0$, es decir, *Ricci llanas* en dimensión 4 a partir de grupos de Lie 3-dimensionales. Las métricas Einstein tienen especial importancia en física, en particular, en la teoría de la relatividad general de Einstein. En la parte final del trabajo discutiremos brevemente el significado físico de algunas de estas construcciones.

Capítulo 3

Estructuras sobre variedades diferenciables

Los campos tensoriales son una herramienta muy útil para definir estructuras sobre variedades diferenciables que nos permiten distinguir variedades con propiedades especiales. En este capítulo presentamos algunas construcciones de este tipo y las aplicamos al estudio de variedades riemannianas y grupos de Lie.

3.1. Variedades Complejas

Definición 3.1.1. Decimos que M es una *variedad compleja* de dimensión compleja $\dim_{\mathbb{C}}M = n$ si admite un atlas \mathcal{A} tal que para toda carta $\varphi \in \mathcal{A}$ con dominio coordinado U , se tiene que $\varphi(U)$ es un abierto de \mathbb{C}^n y además, los cambios de cartas son aplicaciones biholomorfas.

Toda variedad compleja M de $\dim_{\mathbb{C}}M = n$ admite estructura de variedad \mathcal{C}^∞ de $\dim_{\mathbb{R}}M = 2n$. En efecto, sólo hay que notar que podemos identificar \mathbb{C}^n con \mathbb{R}^{2n} separando partes reales e imaginarias, y la condición de holomorffia implica, en particular, que parte real e imaginaria de los cambios de cartas son funciones \mathcal{C}^∞ .

Sin embargo, el recíproco no es cierto, es decir, una variedad \mathcal{C}^∞ de dimensión real par $2n$ no tiene por qué admitir estructura de variedad compleja de dimensión compleja n . Esto es debido a que la condición de holomorffia es más fuerte que la simple diferenciabilidad de las partes real e imaginaria de los cambios de cartas. Además de ser \mathcal{C}^∞ , las funciones deben cumplir las condiciones de Cauchy-Riemann.

En general, es difícil saber cuándo una variedad \mathcal{C}^∞ admite estructura de variedad compleja, pues hay muchas maneras de cubrir la variedad con cartas candidatas a formar un atlas complejo. El campo de tensores que a continuación definimos nos ayudará a abordar esta cuestión.

Definición 3.1.2. Sea M una variedad \mathcal{C}^∞ de $\dim_{\mathbb{R}}M = m$. Una *estructura casi compleja* sobre M es un campo de tensores \mathcal{C}^∞ de tipo $(1, 1)$

$$\begin{aligned} J: \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ X &\mapsto JX \end{aligned}$$

cumpliendo que $J^2 = -\text{Id}$, es decir, $J(JX) = -X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. El par (M, J) recibe el nombre de *variedad casi compleja*.

A su vez, J también induce un endomorfismo en el espacio de 1-formas, $\Omega^1(M)$, dado por

$$\begin{aligned} J: \Omega^1(M) &\rightarrow \Omega^1(M) \\ \alpha &\mapsto J\alpha \text{ tal que } (J\alpha)X = -\alpha(JX), \forall X \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Notemos que en cada punto $p \in M$, tenemos definido el endomorfismo lineal $J_p: T_pM \rightarrow T_pM$ cumpliendo $J_p^2 = -\text{Id}_{T_pM}$. Sea A la matriz de J_p en alguna base. Entonces $A^2 = -I$ y tenemos que

$$0 < (\det A)^2 = \det A^2 = \det(-I) = (-1)^m,$$

lo que implica que $m = 2n$, es decir, que la dimensión real de M tiene que ser par.

Proposición 3.1.3. *Toda variedad compleja M de $\dim_{\mathbb{C}}M = n$, vista como variedad real de $\dim_{\mathbb{R}}M = 2n$, posee una estructura casi compleja.*

Demostración. Vamos a hacer una demostración constructiva. Definamos una estructura casi compleja J sobre la variedad \mathcal{C}^∞ real subyacente a M .

Sea U un abierto coordenado cualquiera de M y $\varphi = (z^1, \dots, z^n)$ una carta compleja asociada a U .

Tomamos $\begin{cases} x^k = \text{Re}(z^k) \\ y^k = \text{Im}(z^k) \end{cases}$, con $k = 1, \dots, n$. Entonces $(U, (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n))$ es carta de M como variedad \mathcal{C}^∞ real. En U tenemos la base local de campos de vectores reales $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}$. Definimos

$$\begin{aligned} J: \mathfrak{X}(U) &\rightarrow \mathfrak{X}(U) \\ \frac{\partial}{\partial x^k} &\mapsto J\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial}{\partial y^k} \quad \left(\Rightarrow J\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^k}\right), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Es claro que esta aplicación es \mathcal{C}^∞ , pues sus funciones componentes en la base dada son todas constantes, 1 o 0. Veamos que J se extiende bien a toda M .

Sea $(V, \psi = (w^1, \dots, w^n))$ otra carta compleja local tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Tomamos $\begin{cases} r^k = \text{Re}(w^k) \\ s^k = \text{Im}(w^k) \end{cases}$, con $k = 1, \dots, n$ y definimos

$$\begin{aligned} \tilde{J}: \mathfrak{X}(V) &\rightarrow \mathfrak{X}(V) \\ \frac{\partial}{\partial r^k} &\mapsto \tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial r^k}\right) = \frac{\partial}{\partial s^k} \quad \left(\Rightarrow \tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial s^k}\right) = -\frac{\partial}{\partial r^k}\right), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Veamos que las dos definiciones coinciden en la intersección, es decir, $J_p = \tilde{J}_p \forall p \in U \cap V$.

El cambio de cartas $z^k = z^k(w^1, \dots, w^n)$ es una aplicación biholomorfa, así que

$\begin{cases} x^k = x^k(r^1, \dots, r^n, s^1, \dots, s^n) \\ y^k = y^k(r^1, \dots, r^n, s^1, \dots, s^n) \end{cases}$ son difeomorfismos y cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, es decir,

$$\frac{\partial x^k}{\partial r^j} = \frac{\partial y^k}{\partial s^j}, \quad \frac{\partial x^k}{\partial s^j} = -\frac{\partial y^k}{\partial r^j}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} J_p\left(\frac{\partial}{\partial r^j}\right) &= J_p\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial r^j}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p + \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial r^j}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_p\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial r^j}(p) \cdot J_p\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p\right) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial r^j}(p) \cdot J_p\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_p\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial s^j}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_p + \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial s^j}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p \\ &= \frac{\partial}{\partial s^j}\Big|_p = \tilde{J}_p\left(\frac{\partial}{\partial r^j}\Big|_p\right) \end{aligned}$$

Luego las definiciones en cada uno de los abiertos coordenados de M coinciden en las intersecciones, y por tanto J está bien definido y es campo de tensores \mathcal{C}^∞ sobre M porque lo es localmente. \square

Dada una variedad compleja M , se llama estructura casi compleja *natural* de M precisamente a la J que hemos construido en la demostración de la proposición anterior.

Definición 3.1.4. Sea (M, J) variedad casi compleja. El *tensor de Nijenhuis* de J es el campo de tensores N_J de tipo $(2, 1)$ dado por

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (3.2)$$

Se dice que J es *integrable* si $N_J \equiv 0$.

La siguiente proposición justifica que hayamos llamado tensor a N_J .

Proposición 3.1.5. El tensor de Nijenhuis es efectivamente un campo de tensores y $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ cumple:

- (i) Es antisimétrico.
- (ii) $N_J(X, JY) = -JN_J(X, Y)$.
- (iii) $N_J(JX, JY) = -N_J(X, Y)$.
- (iv) $N_J(X, JX) = 0$.

Demostración. N_J es \mathcal{C}^∞ porque el corchete de campos y J lo son. Para comprobar que es campo de tensores sólo falta ver la linealidad sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} N_J(fX, Y) &= [JfX, JY] - J[JfX, Y] - J[fX, JY] - [fX, Y] \\ &= [fJX, JY] - J[fJX, Y] - J[fX, JY] - [fX, Y] \\ &= f[JX, JY] - ((JY)f)JX - fJ[JX, Y] + (Yf)JJX - \\ &\quad - fJ[X, JY] + ((JY)f)JX - f[X, Y] + (Yf)X = fN_J(X, Y). \end{aligned}$$

Que N_J es antisimétrico es consecuencia inmediata de que el corchete de campos es antisimétrico. Para probar la propiedad (ii) calculamos:

$$\begin{aligned} N_J(X, JY) &= [JX, JJY] - J[JX, JY] - J[X, JJY] - [X, JY] \\ &= -[JX, Y] - J[JX, JY] + J[X, Y] - [X, JY] \\ &= -J[JX, JY] + J^2[JX, Y] + J^2[X, JY] + J[X, Y] \\ &= -J([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]) = -J(N_J(X, Y)). \end{aligned}$$

Para demostrar (iii) sólo hay que aplicar dos veces la propiedad (ii):

$$N_J(JX, JY) = -J(N_J(JX, Y)) = J^2(N_J(X, Y)) = -N_J(X, Y).$$

Finalmente, (iv) se deriva inmediatamente de (ii) y la antisimetría de N_J :

$$N_J(X, JX) = -J(N_J(X, X)) = -J(0) = 0.$$

□

Proposición 3.1.6. Sea M una variedad compleja, entonces si J es su estructura casi compleja natural, J es integrable.

Demostración. Tenemos que demostrar que $N_J \equiv 0$. Como ya hemos demostrado que N_J es campo de tensores, podemos hacer la comprobación localmente, en cada U entorno coordinado. Sea entonces $(U, (z^1, \dots, z^n))$ una carta compleja local cualquiera de M y $(U, (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n))$ su carta asociada como variedad \mathcal{C}^∞ real, tal y como construimos en la Proposición 3.1.3.

Basta entonces comprobar que N_J se anula en la base local de campos de vectores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}$. Calculemos entonces

$$\begin{aligned} N_J\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \left[J\frac{\partial}{\partial x^k}, J\frac{\partial}{\partial x^j} \right] - J\left[J\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] - J\left[\frac{\partial}{\partial x^k}, J\frac{\partial}{\partial x^j} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right] - J\left[\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] - J\left[\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0, \end{aligned}$$

pues el corchete de Lie de dos campos coordinados básicos es siempre cero. Además,

$$\begin{aligned} N_J\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= \left[J \frac{\partial}{\partial x^k}, J \frac{\partial}{\partial y^j} \right] - J \left[J \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right] - J \left[\frac{\partial}{\partial x^k}, J \frac{\partial}{\partial y^j} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y^k}, -\frac{\partial}{\partial x^j} \right] - J \left[\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right] - J \left[\frac{\partial}{\partial x^k}, -\frac{\partial}{\partial x^j} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right] = 0. \end{aligned}$$

Por último, del apartado ii) de la Proposición anterior se sigue

$$N_J\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = N_J\left(J \frac{\partial}{\partial x^k}, J \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -N_J\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = 0.$$

□

El recíproco de la proposición anterior también es cierto.

Teorema 3.1.7 (Newlander-Nirenberg). *Sea (M, J) variedad casi compleja tal que J es integrable ($N_J \equiv 0$). Entonces existe un cubrimiento de M por cartas locales complejas que dotan a M de estructura de variedad compleja, de manera que su estructura casi compleja natural es la J dada.*

Demostración. Ver [Matsushima] (p. 113 y ss.) para el caso analítico y [NN] para el caso general. □

Ejemplo 3.1.8. Llegados a este punto, vamos a retomar el ejemplo del grupo de Heisenberg (ver Sección 1.3). Como $\dim_{\mathbb{R}} H = 3$, no podemos dotar a H de una estructura casi compleja. Para solucionar esto, vamos a considerar el grupo de Lie dado por el producto cartesiano $H \times \mathbb{R} = \{(g, t) : g \in H, t \in \mathbb{R}\}$.

En $H \times \mathbb{R}$ construimos una base de campos invariantes por la izquierda completando la que teníamos en H , y análogamente obtenemos su base dual de 1-formas

- Una base de campos: $\left\{ E_1 = A = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2 = B = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_3 = C = \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_4 = \frac{\partial}{\partial t} \right\}$.
- Base dual de 1-formas: $\left\{ e^1 = \alpha = dx, \quad e^2 = \beta = dy, \quad e^3 = \gamma = dz + \frac{y}{2} dx - \frac{x}{2} dy, \quad e^4 = dt \right\}$.

Es claro que $[E_i, E_4] = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, luego el único corchete de Lie no nulo sigue siendo $[E_1, E_2] = E_3$.

Podemos definir la estructura casi compleja J sobre $H \times \mathbb{R}$ dada por $\begin{cases} JE_1 = -E_2 \\ JE_3 = -E_4 \end{cases}$. Veamos que

J así definida es integrable viendo que el tensor de Nijenhuis es idénticamente nulo:

$$\begin{aligned} N_J(E_1, E_2) &= -N_J(E_1, JE_1) = 0, \\ N_J(E_1, E_3) &= [E_2, E_4] + J[E_2, E_3] + J[E_1, E_4] - [E_1, E_3] = 0, \\ N_J(E_1, E_4) &= -[E_2, E_3] + J[E_2, E_4] - J[E_1, E_3] - [E_1, E_4] = 0, \\ N_J(E_2, E_3) &= -[E_1, E_4] - J[E_1, E_3] + J[E_2, E_4] - [E_2, E_3] = 0, \\ N_J(E_2, E_4) &= [E_1, E_3] - J[E_1, E_4] - J[E_2, E_3] - [E_2, E_4] = 0, \\ N_J(E_3, E_4) &= -N_J(E_3, JE_3) = 0. \end{aligned}$$

Y las demás componentes son cero por la antisimetría de N_J . Como N_J se anula sobre todos los elementos de la base, concluimos que $N_J \equiv 0$.

3.2. Estructuras simplécticas

Sea M variedad \mathcal{C}^∞ de dimensión par, $\dim_{\mathbb{R}}(M) = m = 2n$.

Definición 3.2.1. Una *estructura (o forma) simpléctica* sobre M es una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ que es cerrada y no degenerada, es decir:

- Cerrada: $d\omega = 0$.
- No degenerada: $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0$ en todo punto de M .

Una variedad M que admita esta estructura se llama *variedad simpléctica*.

El hecho de que la 2-forma tenga que ser no degenerada implica en particular que la dimensión de la variedad tiene que ser par, de ahí que lo hayamos exigido antes de la definición. Por otro lado, como el hecho de que exista una forma de grado máximo $\Omega \in \Omega^m(M)$, $\Omega \neq 0$ en todo punto, es equivalente a tener una orientación en M , tenemos que toda variedad que admita una estructura simpléctica debe ser orientable, pues $0 \neq \omega^n \in \Omega^m(M)$.

Presentamos a continuación uno de los teoremas fundamentales de la geometría simpléctica, cuya demostración se puede consultar en [LeeSM] y omitimos aquí ya que no resulta demasiado relevante para el desarrollo del trabajo.

Teorema 3.2.2 (Darboux). *Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Para cualquier punto $p \in M$, existe una carta local $(U, (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n))$, $p \in U$, en la que ω se representa como*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i.$$

Una consecuencia inmediata de este teorema es que en la geometría simpléctica no existen invariantes locales, a diferencia de lo que ocurre en la geometría riemanniana.

Ejemplo 3.2.3. Vamos a definir una estructura simpléctica en el grupo de Lie del Ejemplo 3.1.8, es decir, $H \times \mathbb{R}$. Para ello nos será útil recordar las ecuaciones de estructura para las 1-formas básicas $\{e^1, \dots, e^4\}$:

$$de^1 = de^2 = 0, \quad de^3 = e^1 \wedge e^2, \quad de^4 = d(dt) = 0.$$

Sea entonces la forma simpléctica invariante por la izquierda $\omega = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4$. Comprobamos que es

- Cerrada: $d\omega = -e^1 \wedge (de^3) = -e^1 \wedge e^1 \wedge e^2 = 0$.
- No degenerada: $\omega^2 = \omega \wedge \omega = 2e^1 \wedge e^3 \wedge e^2 \wedge e^4 = -2e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \neq 0$.

3.3. Métricas Kähler

Vamos ahora a combinar muchas de las construcciones que hemos ido estudiando hasta este punto en una estructura que se puede entender como la combinación de una métrica de Riemann, una estructura casi compleja y una forma simpléctica, de forma que sean compatibles entre sí en un sentido natural que a continuación detallamos.

Definición 3.3.1. Sea (M^{2n}, J) una variedad casi compleja. Una métrica de Riemann g sobre M que es compatible con J en el sentido

$$g(X, Y) = g(JX, JY) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

se llama *métrica casi hermítica*. Si además J es integrable, entonces diremos que g es una *métrica hermítica*.

Notemos que siempre existen métricas casi hermíticas en una variedad casi compleja. Dada una métrica de Riemann \tilde{g} sobre M (ya sabemos que siempre existen métricas de Riemann), la métrica dada por

$$g(X, Y) = \tilde{g}(X, Y) + \tilde{g}(JX, JY) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

es casi hermítica. Si además J es integrable (lo que implica que M admite una estructura de variedad compleja), entonces g será hermítica.

Observemos también que asociada a toda estructura casi hermítica (g, J) tenemos una 2-forma, llamada *2-forma fundamental*, dada por:

$$F(X, Y) = g(X, JY) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

F es compatible con J en el sentido $F(JX, JY) = F(X, Y)$. Comprobemos que efectivamente $F \in \Omega^2(M)$ y es compatible con J :

- Es claro que F es campo de tensores, pues g y J lo son.
- Es antisimétrica: $F(Y, X) = g(Y, JX) = g(JY, JX) = g(JY, -X) = -g(X, JY) = -F(X, Y)$.
- Es compatible con J : $F(JX, JY) = g(JX, JJY) = g(X, JY) = F(X, Y)$.

Tenemos entonces una terna (J, g, F) de estructuras compatibles. De hecho, la condición de compatibilidad es suficiente para que cualquiera dos de ellas determinen unívocamente la tercera. Ya hemos visto que J y g determinan F , y es fácil reconstruir g a partir de J y F como $g(X, Y) = -F(X, JY)$. El obtener J a partir de la métrica y la 2-forma fundamental es más tedioso y no lo necesitaremos, así que lo omitimos aquí.

Definición 3.3.2. Sean M^{2n} variedad \mathcal{C}^∞ y la terna (J, g, F) dada como antes. Cuando J es integrable y F es simpléctica, diremos que tenemos una estructura de tipo Kähler: g se dice *métrica Kähler* y M se dice *variedad Kähler*.

Vamos a ver que una de las condiciones para que F sea simpléctica se cumple siempre.

Proposición 3.3.3. Sea (M^{2n}, J) una variedad casi compleja con una métrica casi hermítica g . Entonces la 2-forma fundamental asociada F es no degenerada.

Demostración. Sea p un punto cualquiera de M y $(U, (x^1, \dots, x^{2n}))$ una carta local, con $p \in U$. Vamos a construir una base local de campos en $\mathfrak{X}(U)$ adaptada a la estructura casi hermítica (g, J) de M .

Partimos de un campo local cualquiera que no se anule en U y lo normalizamos. Por ejemplo, podríamos tomar

$$E_1 = \frac{\frac{\partial}{\partial x^1}}{g\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right)}$$

El segundo campo de vectores local de la base será $E_2 = -JE_1$, de manera que

$$\begin{aligned} g(E_2, E_2) &= g(-JE_1, -JE_1) = g(E_1, E_1) = 1, \\ g(E_1, E_2) &= g(E_1, -JE_1) = 0, \end{aligned}$$

con lo que son ortonormales.

A continuación consideramos $W_1 = \{X \in \mathfrak{X}(U) : g(X, E_1) = 0 \text{ \& } g(X, E_2) = 0\}$. Veamos que $JX \in W_1$, para todo $X \in W_1$:

$$\begin{aligned} g(JX, E_1) &= g(J^2X, JE_1) = g(X, E_2) = 0, \\ g(JX, E_2) &= g(J^2X, JE_2) = -g(X, E_1) = 0. \end{aligned}$$

Elegimos como E_3 un vector cualquiera de W_1 de norma 1, y tomamos $E_4 = -JE_3$. Reiterando este proceso vamos construyendo inductivamente la base local de campos:

en $W_k = \{X \in \mathfrak{X}(U) : g(X, E_j) = 0, j = 1, \dots, 2k\}$ elegimos E_{2k+1} de norma 1 y $E_{2k+2} = -JE_{2k+1}$.

Una vez construida la base de campos, consideramos su base dual de 1-formas, $\{e^i, i = 1, \dots, 2n\}$. En esta base, la 2-forma fundamental asociada a la estructura casi hermítica de M se expresa

$$F = e^{12} + e^{34} + \dots + e^{2n-1, 2n}$$

ya que teniendo en cuenta que la base de campos es ortonormal,

$$F(E_i, E_j) = g(E_i, JE_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i + 1, i \text{ impar} \\ -1, & \text{si } j = i - 1, i \text{ par} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

En particular, F es no degenerada:

$$F^n = F \wedge \dots \wedge F = n! e^1 2 \dots 2n-1 2n \neq 0.$$

□

Corolario 3.3.4. *Toda variedad casi compleja es orientable.*

Demostración. Dada (M^{2n}, J) variedad casi compleja, sabemos que siempre existe una métrica casi hermítica en M , y por el teorema anterior, la 2-forma fundamental asociada es no degenerada y por tanto induce una forma de grado máximo $F^n \in \Omega^n(M)$ que no se anula en ningún punto, lo que es equivalente a tener una orientación en M . \square

Ejemplo 3.3.5. Sigamos con el ejemplo que llevamos entre manos, $H \times \mathbb{R}$. Recordemos que ya habíamos definido una estructura casi compleja J y una forma simpléctica ω . Vamos a comprobar que son compatibles. Para ello, calculamos

$$\omega(JE_1, JE_3) = \omega(-E_2, -E_4) = 1 = \omega(E_1, E_3)$$

para el resto de elementos de la base de campos se hace la comprobación de manera análoga. Es decir, en $H \times I$ tenemos una estructura casi compleja y una forma simpléctica compatibles entre sí. Sin embargo, si intentamos reconstruir una métrica compatible a partir de J y ω como $g(X, Y) = -\omega(X, JY) \forall X, Y$, nos encontramos con que

$$g(E_1, E_1) = -\omega(E_1, -E_2) = \omega(E_1, E_2) = 0$$

luego g no es definida positiva, y por lo tanto no es una métrica de Riemann. De hecho, no es posible construir una métrica Kähler invariante por la izquierda en $H \times \mathbb{R}$. Sin embargo, existe un mecanismo que nos va a permitir hacer *evolucionar* el grupo de Heisenberg de manera que podamos construir algo aún más exigente que una métrica Kähler, como veremos en el Capítulo 4.

3.4. Métricas híper Kähler

En esta sección vamos a trabajar sobre variedades de dimensión múltiplo de 4, ya que vamos a realizar una construcción que en cierto modo imita la estructura de los cuaterniones.

Definición 3.4.1. Sea M^{4n} variedad \mathcal{C}^∞ .

- Una *estructura casi híper compleja* es una terna (J_1, J_2, J_3) de estructuras casi complejas que cumplen

$$J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3.$$

- Una *métrica casi híper hermítica* es una métrica de Riemann g compatible con una estructura casi híper compleja en el sentido

$$g(X, Y) = g(J_1 X, J_1 Y) = g(J_2 X, J_2 Y) = g(J_3 X, J_3 Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

- Decimos que una métrica casi híper hermítica es una *métrica híper Kähler* cuando (g, J_i) son todas Kähler, para $i = 1, 2, 3$.

Equivalentemente a esta última definición, una métrica híper Kähler es una métrica casi híper hermítica tal que (J_1, J_2, J_3) son integrables y (F_1, F_2, F_3) son simplécticas, donde F_s es la 2-forma fundamental asociada a (g, J_s) , es decir, $F_s(X, Y) = g(X, J_s Y) \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s = 1, 2, 3$.

En el Anexo A se puede ver cómo todas estas estructuras geométricas están estrechamente relacionadas con algunos subgrupos de Lie del grupo lineal general, ya que localmente quedan determinadas, en cierto modo, por la acción de estos grupos de Lie sobre la variedad.

Nuestro objetivo en el próximo capítulo va a ser, como habíamos anticipado, construir una estructura híper Kähler en $H \times I$, siendo H el grupo de Heisenberg e $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Para ello será necesario hacer *evolucionar* H de una manera no trivial, como veremos en el próximo capítulo.

Capítulo 4

Construcción de instantones gravitacionales a partir de grupos de Lie

Partiendo de un grupo de Lie 3-dimensional, introducimos ecuaciones de evolución cuyas soluciones, cuando existen, dan lugar a métricas híper Kähler en dimensión 4.

4.1. Métricas híper Kähler en $G \times I$

Sea G un grupo de Lie de dimensión real 3 y sea $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ una base de 1-formas invariantes por la izquierda sobre G . Queremos construir una métrica híper Kähler en $G \times I$, siendo $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Antes hemos comentado que nuestra intención es hacer *evolucionar* el grupo de Lie G , ahora vamos a ser más concretos y explicar qué queremos decir con esto.

Buscamos funciones $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f(t), t \in I$ tales que la base de 1-formas sobre la variedad $\hat{G} = G \times I$ dada por $\{e^1 = f_1(t)\alpha, e^2 = f_2(t)\beta, e^3 = f_3(t)\gamma, e^4 = f(t)dt\}$ sea base adaptada a una estructura híper Kähler sobre \hat{G} . Lo primero que notamos es que las funciones $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f(t)$ tienen que ser $\mathcal{C}^\infty(I)$ y además, para que la base de 1-formas esté bien definida en todo punto, no pueden anularse para ningún $t \in I$. Si se cumplen estas condiciones de partida, buscamos que la métrica g , las tres estructuras casi complejas (J_1, J_2, J_3) y las tres 2-formas fundamentales (F_1, F_2, F_3) se expresen

$$g = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 + (e^4)^2; \quad (4.1)$$

$$J_1 e^1 = -e^2, J_1 e^3 = -e^4, J_2 e^1 = -e^3, J_2 e^4 = -e^2, J_3 e^1 = -e^4, J_3 e^2 = -e^3; \quad (4.2)$$

$$F_1 = e^{12} + e^{34}, F_2 = e^{13} + e^{42}, F_3 = e^{14} + e^{23}. \quad (4.3)$$

Teorema 4.1.1. *En las condiciones anteriormente descritas, (g, J_1, J_2, J_3) es una estructura híper Kähler en $G \times I$ si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

(i) *La base de 1-formas sobre el grupo de Lie original G cumple:*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha \wedge \gamma) = d(\beta \wedge \gamma) = 0. \quad (4.4)$$

(ii) *Se satisface el sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} (f_1 f_2)' \alpha \wedge \beta + f f_3 d\gamma = 0 \\ (f_1 f_3)' \alpha \wedge \gamma - f f_2 d\beta = 0 \\ (f_2 f_3)' \beta \wedge \gamma + f f_1 d\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} f, f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^\infty(I), I \subseteq \mathbb{R} \\ f, f_1, f_2, f_3 > 0 \end{matrix}. \quad (4.5)$$

Antes de hacer la demostración veamos algún resultado auxiliar.

Lema 4.1.2. En la situación del Teorema 4.1.1, las 2-formas fundamentales F_1, F_2, F_3 asociadas a la estructura casi híper hermítica (g, J_1, J_2, J_3) en $G \times I$ son cerradas si y sólo si se cumplen las condiciones (4.4) y (4.5).

Demostración. La condición de que F_1 sea cerrada se expresa:

$$\begin{aligned} dF_1 &= d(e^{12} + e^{34}) = d(f_1 f_2 \alpha \wedge \beta + f f_3 \gamma \wedge dt) \\ &= (f_1 f_2)' dt \wedge \alpha \wedge \beta + f_1 f_2 d(\alpha \wedge \beta) + (f f_3)' dt \wedge \gamma \wedge dt + f f_3 d(\gamma \wedge dt) \\ &= (f_1 f_2)' \alpha \wedge \beta \wedge dt + f_1 f_2 d(\alpha \wedge \beta) + f f_3 d\gamma \wedge dt \\ &= ((f_1 f_2)' \alpha \wedge \beta + f f_3 d\gamma) \wedge dt + f_1 f_2 d(\alpha \wedge \beta), \end{aligned}$$

donde la prima denota la derivada ordinaria de funciones de una variable t . De manera que para que se anule dF_1 , tienen que anularse los dos sumandos de la última igualdad, pues los dos términos son 3-formas independientes. Es decir,

$$dF_1 = 0 \iff \begin{cases} d(\alpha \wedge \beta) = 0 \\ d\gamma = -\frac{(f_1 f_2)'}{f f_3} \alpha \wedge \beta \end{cases} .$$

Obtenemos de esta manera la primera igualdad de (i) y la primera ecuación del sistema de (ii). Procediendo análogamente con F_2 , se tiene

$$\begin{aligned} dF_2 &= d(e^{13} + e^{42}) = d(f_1 f_3 \alpha \wedge \gamma + f f_2 dt \wedge \beta) \\ &= (f_1 f_3)' dt \wedge \alpha \wedge \gamma + f_1 f_3 d(\alpha \wedge \gamma) + (f f_2)' dt \wedge dt \wedge \beta + f f_2 d(dt \wedge \gamma) \\ &= (f_1 f_3)' \alpha \wedge \gamma \wedge dt + f_1 f_3 d(\alpha \wedge \gamma) - f f_2 d\beta \wedge dt \\ &= ((f_1 f_3)' \alpha \wedge \gamma - f f_2 d\beta) \wedge dt + f_1 f_3 d(\alpha \wedge \gamma), \end{aligned}$$

y por la misma razón que antes, ambos sumandos deben anularse, es decir,

$$dF_2 = 0 \iff \begin{cases} d(\alpha \wedge \gamma) = 0 \\ d\beta = \frac{(f_1 f_3)'}{f f_2} \alpha \wedge \gamma \end{cases} .$$

Obtenemos la segunda igualdad de (i) y la segunda ecuación de (ii). Por último, trabajando con F_3 ,

$$\begin{aligned} dF_3 &= d(e^{14} + e^{23}) = d(f_1 f \alpha \wedge dt + f_2 f_3 \beta \wedge \gamma) \\ &= (f_1 f)' dt \wedge \alpha \wedge dt + f_1 f d(\alpha \wedge dt) + (f_2 f_3)' dt \wedge \beta \wedge \gamma + f_2 f_3 d(\beta \wedge \gamma) \\ &= f_1 f d\alpha \wedge dt + (f_2 f_3)' \beta \wedge \gamma \wedge dt + f_2 f_3 d(\beta \wedge \gamma) \\ &= ((f_2 f_3)' \beta \wedge \gamma + f_1 f d\alpha) \wedge dt + f_2 f_3 d(\beta \wedge \gamma), \end{aligned}$$

y como antes, ambos sumando deben anularse simultáneamente,

$$dF_3 = 0 \iff \begin{cases} d(\beta \wedge \gamma) = 0 \\ d\alpha = -\frac{(f_2 f_3)'}{f f_1} \beta \wedge \gamma \end{cases} .$$

que son la tercera igualdad de (i) y (ii) respectivamente, luego hemos probado la equivalencia. \square

Existe un resultado general ([Hitchin]) que asegura que en una estructura casi híper hermítica, si las 2-formas fundamentales son cerradas, entonces las estructuras casi complejas son integrables. Nosotros vamos a hacer una demostración directa en nuestro caso particular $G \times I$.

Lema 4.1.3. *En las hipótesis del Teorema 4.1.1 y bajo las condiciones (4.4) y (4.5), las estructuras casi complejas J_s , $s = 1, 2, 3$ son integrables.*

Demostración. Nuestro objetivo es ver que el tensor de Nijenhuis N_{J_s} , $s = 1, 2, 3$ es idénticamente nulo. Para ello, primero vamos a calcular las diferenciales exteriores de las 1-formas básicas $e^1 = f_1(t)\alpha$, $e^2 = f_2(t)\beta$, $e^3 = f_3(t)\gamma$ y $e^4 = f(t)dt$:

$$\begin{aligned} de^1 &= d(f_1\alpha) = f_1'dt \wedge \alpha + f_1d\alpha = -f_1'\alpha \wedge dt - \frac{(f_2f_3)'}{f}\beta \wedge \gamma = -\frac{f_1'}{ff_1}e^{14} - \frac{(f_2f_3)'}{ff_2f_3}e^{23}, \\ de^2 &= d(f_2\beta) = f_2'dt \wedge \beta + f_2d\beta = -f_2'\beta \wedge dt + \frac{(f_1f_3)'}{f}\alpha \wedge \gamma = -\frac{f_2'}{ff_2}e^{24} + \frac{(f_1f_3)'}{ff_1f_3}e^{13}, \\ de^3 &= d(f_3\gamma) = f_3'dt \wedge \gamma + f_3d\gamma = -f_3'\gamma \wedge dt - \frac{(f_1f_2)'}{f}\alpha \wedge \beta = -\frac{f_3'}{ff_3}e^{34} - \frac{(f_1f_2)'}{ff_1f_2}e^{12}, \\ de^4 &= f'dt \wedge dt + fd(dt) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

De aquí es inmediato obtener los corchetes de Lie de los campos básicos duales E_1, \dots, E_4 , mediante la relación (1.5), $e^j([E_i, E_k]) = -de^j(E_i, E_k)$, y nos queda:

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \frac{(f_1f_2)'}{ff_1f_2}E_3 & [E_1, E_3] &= -\frac{(f_1f_3)'}{ff_1f_3}E_2 & [E_1, E_4] &= \frac{f_1'}{ff_1}E_1 \\ [E_2, E_3] &= \frac{(f_2f_3)'}{ff_2f_3}E_1 & [E_2, E_4] &= \frac{f_2'}{ff_2}E_2 & [E_3, E_4] &= \frac{f_3'}{ff_3}E_3. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ya tenemos todos los ingredientes para comprobar que J_s , $s = 1, 2, 3$, son integrables, es decir, que $N_{J_s} \equiv 0$. Hacemos a continuación la comprobación para J_1 , las otras dos son análogas y se presentan en el Anexo B.

Por la propiedad (iv) de la Proposición 3.1.5:

$$\begin{aligned} N_{J_1}(E_1, E_2) &= N_{J_1}(E_1, -J_1E_1) = 0, \\ N_{J_1}(E_3, E_4) &= N_{J_1}(J_1E_4, E_4) = 0. \end{aligned}$$

Calculamos directamente:

$$\begin{aligned} N_{J_1}(E_1, E_3) &= [-E_2, -E_4] - J_1[-E_2, E_3] - J_1[E_1, -E_4] - [E_1, E_3] \\ &= \frac{f_2'}{ff_2}E_2 - \frac{(f_2f_3)'}{ff_2f_3}E_2 - \frac{f_1'}{ff_1}E_2 + \frac{(f_1f_3)'}{ff_1f_3}E_2 \\ &= \frac{f_2'f_1f_3 - f_2'f_1f_3 - f_3'f_1f_2 - f_1'f_2f_3 + f_1'f_2f_3 + f_3'f_1f_2}{ff_1f_2f_3}E_2 = 0. \end{aligned}$$

Y usando las propiedades (ii) y (iii) de la Proposición 3.1.5:

$$\begin{aligned} N_{J_1}(E_1, E_4) &= N_{J_1}(E_1, -J_1E_3) = J_1(N_{J_1}(E_1, E_3)) = J_1(0) = 0, \\ N_{J_1}(E_2, E_3) &= N_{J_1}(-J_1E_1, J_1E_4) = N_{J_1}(E_1, E_4) = 0, \\ N_{J_1}(E_2, E_4) &= N_{J_1}(-J_1E_1, -J_1E_3) = -N_{J_1}(E_1, E_3) = 0. \end{aligned}$$

y usando la antisimetría de N_{J_1} , concluimos que N_{J_1} se anula sobre todos los elementos de la base de campos, luego $N_{J_1} \equiv 0$ y J_1 es integrable. \square

Con estos dos lemas, la demostración del Teorema 4.1.1 es casi inmediata.

Demostración del Teorema 4.1.1.

La implicación hacia la derecha es inmediata, si $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ es una base de 1-formas adaptada a una estructura híper Kähler en $G \times I$, entonces las 2-formas fundamentales asociadas son cerradas y por el Lema 4.1.2, se cumplen las condiciones (4.4) y (4.5).

Para la implicación hacia la izquierda, sean la métrica, las estructuras casi complejas y las 2-formas fundamentales como en (4.1), (3.1) y (4.3) respectivamente, de manera que g es casi híper hermítica y $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ es una base de 1-formas adaptada a esta estructura. Por la Proposición 3.3.3 y el Lema 4.1.2, sabemos que las 2-formas fundamentales son simplécticas, y por el Lema 4.1.3 sabemos que J_s , $s = 1, 2, 3$ son integrables, luego g es híper Kähler. \square

Podríamos aplicar el resultado que acabamos de demostrar a cualquier grupo de Lie de dimensión 3 que cumpla la condición (4.4), que haríamos evolucionar a uno de dimensión 4 con una métrica híper Kähler. Los grupos de Lie de dimensión 3 fueron clasificados por Bianchi en [Bianchi] y se puede ver que hay 6 de las 11 clases que cumplen (4.4), entre los que se encuentra el grupo de Heisenberg. Para ver alguna particularidad de esta construcción, vamos a aplicar el Teorema 4.1.1 precisamente con $G = H$, el grupo de Heisenberg, que hemos venido estudiando en los ejemplos hasta ahora.

4.2. Métricas híper Kähler en $H \times I$

Recordemos que en H , siguiendo la notación de la Sección 1.3, las diferenciales de las 1-formas invariantes por la izquierda α, β, γ que habíamos tomado como básicas son

$$d\alpha = d\beta = 0 \quad , \quad d\gamma = -\alpha \wedge \beta,$$

de manera que se satisfacen las condiciones necesarias sobre el grupo de Lie (4.4) para que las 2-formas fundamentales sean cerradas, pues

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta = 0, \\ d(\alpha \wedge \gamma) &= d\alpha \wedge \gamma - \alpha \wedge d\gamma = +\alpha \wedge \alpha \wedge \beta = 0, \\ d(\beta \wedge \gamma) &= d\beta \wedge \gamma - \beta \wedge d\gamma = +\beta \wedge \alpha \wedge \beta = 0. \end{aligned}$$

Las condiciones (4.5) nos llevan a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer grado:

$$\begin{cases} (f_1 f_2)' = f f_3 \\ (f_1 f_3)' = 0 \\ (f_2 f_3)' = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} f, f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^\infty(I), I \subseteq \mathbb{R} \\ f, f_1, f_2, f_3 > 0 \end{matrix} .$$

Para resolverlo, hacemos el cambio

$$h_1 = (f_2 f_3)^2, \quad h_2 = (f_1 f_3)^2, \quad h_3 = (f_1 f_2)^2, \quad ds = f(t) dt;$$

con lo que

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{ds} &= 2(f_2 f_3)(f_2 f_3)' \frac{dt}{ds} = 2(f_2 f_3)(f_2 f_3)' \frac{1}{f} = 0 \quad \implies \quad h_1(s) = a > 0, \\ \frac{dh_2}{ds} &= 2(f_1 f_3)(f_1 f_3)' \frac{dt}{ds} = 2(f_1 f_3)(f_1 f_3)' \frac{1}{f} = 0 \quad \implies \quad h_2(s) = b > 0, \\ \frac{dh_3}{ds} &= 2(f_1 f_2)(f_1 f_2)' \frac{dt}{ds} = 2 f_1 f_2 f f_3 \frac{1}{f} = 2 f_1 f_2 f_3 = 2 (h_1 h_2 h_3)^{1/4} = 2 (ab h_3)^{1/4}, \end{aligned}$$

donde a, b son constantes mayores que cero. Podemos resolver fácilmente esta última ecuación, que es de variables separadas:

$$h_3^{-1/4} dh_3 = 2(ab)^{1/4} ds \iff \frac{4}{3} h_3^{3/4} = 2(ab)^{1/4} s + c \iff h_3 = \left(\frac{3}{2} (ab)^{1/4} s + c \right)^{4/3},$$

donde c es una constante y $s = s(t) \in \mathcal{C}^\infty(I)$ es una función arbitraria tal que $s'(t) > 0$ y $\frac{3}{2}(ab)^{1/4} s(t) + c > 0$ para todo $t \in I$. Desahciendo el cambio, obtenemos:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \right)^{1/4} = \left(\frac{b}{a} \right)^{1/4} \left(\frac{3}{2} (ab)^{1/4} s + c \right)^{1/3}, \\ f_2 &= \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \right)^{1/4} = \left(\frac{a}{b} \right)^{1/4} \left(\frac{3}{2} (ab)^{1/4} s + c \right)^{1/3}, \\ f_3 &= \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \right)^{1/4} = (ab)^{1/4} \left(\frac{3}{2} (ab)^{1/4} s + c \right)^{-1/3}, \\ f &= s', \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por lo tanto, en $H \times I$ tenemos la base de 1-formas:

$$\{e^1 = f_1(t)\alpha, e^2 = f_2(t)\beta, e^3 = f_3(t)\gamma, e^4 = f(t)dt\}, \tag{4.9}$$

y por tanto su base dual de campos será:

$$\left\{ E_1 = \frac{1}{f_1(t)}A, E_2 = \frac{1}{f_2(t)}B, E_3 = \frac{1}{f_3(t)}C, E_4 = \frac{1}{f(t)}\frac{\partial}{\partial t} \right\}, \tag{4.10}$$

donde A, B, C es la base de campos invariantes por la izquierda sobre H dual de la base de 1-formas α, β, γ , que habíamos hallado en la Sección 1.3.

Aplicando el Teorema 4.1.1 y la expresión de α, β, γ en coordenadas, concluimos que las métricas g dadas por

$$\begin{aligned} g &= (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 + (e^4)^2 \\ &= (f_1(t) dx)^2 + (f_2(t) dy)^2 + (f_3(t) (dz - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{2}ydx))^2 + (f(t) dt)^2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

es una familia de métricas híper Kähler.

Nos será útil conocer los corchetes de los campos básicos, que obtenemos a partir de (4.7):

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= 2rE_3, & [E_1, E_3] &= 0, & [E_1, E_4] &= rE_1, \\ [E_2, E_3] &= 0, & [E_2, E_4] &= rE_2, & [E_3, E_4] &= -rE_3. \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde hemos llamado $r = r(t) = \frac{1/3}{s(t) + \frac{2}{3} \frac{c}{(ab)^{1/4}}}$.

Existe un resultado general que dice que toda variedad híper Kähler es Ricci llana, es decir, que el tensor de Ricci de una métrica híper Kähler es idénticamente nulo. Fue demostrado originalmente por Berger en [Berger] a partir del estudio de los grupos de holonomía de las variedades riemannianas; una versión más reciente del teorema se puede consultar en [Petersen]. En la siguiente sección vamos a comprobar este resultado en nuestro caso particular, es decir, vamos a calcular el tensor de curvatura de la variedad riemanniana $(H \times I, g)$ y verificar que el tensor de Ricci se anula en todo punto.

4.3. Tensor de curvatura de $(H \times I, g)$

Teorema 4.3.1. *En $H \times I$, siendo H el grupo de Heisenberg, las métricas g dadas por 4.11 son Ricci llanas.*

Demostración. Recordemos que el tensor de curvatura es el campo de 4-tensores covariante $R \in \mathcal{T}^4(M)$ dado por 2.7:

$$R(X, Y, Z, W) = \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle.$$

Nuestro objetivo es calcular las componentes R_{ijkl} de este campo de tensores en la base ortonormal que tenemos, de manera que la expresión coordenada sea

$$R = R_{ijkl} e^i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^l,$$

donde $R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l) = \langle R(E_i, E_j)E_k, E_l \rangle$, $i, j, k, l = 1, \dots, 4$.

Lo primero que tenemos que calcular son los símbolos de Christoffel de la conexión riemanniana ∇ de g en nuestra base ortonormal. Es decir, queremos calcular $\Gamma_{ij}^k = \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle$, $i, j, k = 1, \dots, 4$. Para ello, usamos la relación (2.5), que en nuestro caso y como la base de campos es ortonormal, se simplifica a

$$\Gamma_{ij}^k = \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_j, [E_i, E_k] \rangle - \langle E_k, [E_j, E_i] \rangle + \langle E_i, [E_k, E_j] \rangle), \quad i, j, k = 1, \dots, 4. \quad (4.13)$$

Además, recordemos las propiedades de las conexiones riemannianas, ya que simplifican los cálculos:

- La compatibilidad con la métrica (2.2), que aplicada a los campos básicos, implica que $0 = \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ik}^j \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j$, $i, j, k = 1, \dots, 4$.
- La simetría de la conexión (2.4): $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Con estos ingredientes y usando (4.12) podemos calcular todos los símbolos de Christoffel. En total hay $4^3 = 64$ componentes que computar, a continuación presentamos alguna a modo de ejemplo, el resto de cálculos se encuentran en el Anexo B.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \langle \nabla_{E_1} E_1, E_1 \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_1, [E_1, E_1] \rangle - \langle E_1, [E_1, E_1] \rangle + \langle E_1, [E_1, E_1] \rangle) = 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= \langle \nabla_{E_1} E_1, E_2 \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_1, [E_1, E_2] \rangle - \langle E_2, [E_1, E_1] \rangle + \langle E_1, [E_2, E_1] \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (-2r \langle E_1, E_3 \rangle - 2r \langle E_1, E_3 \rangle) = 0, \\ \Gamma_{11}^3 &= \langle \nabla_{E_1} E_1, E_3 \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_1, [E_1, E_3] \rangle - \langle E_3, [E_1, E_1] \rangle + \langle E_1, [E_3, E_1] \rangle) = 0, \\ \Gamma_{11}^4 &= \langle \nabla_{E_1} E_1, E_4 \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_1, [E_1, E_4] \rangle - \langle E_4, [E_1, E_1] \rangle + \langle E_1, [E_4, E_1] \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (-r \langle E_1, E_1 \rangle - r \langle E_1, E_1 \rangle) = -r. \end{aligned}$$

Muchos de los símbolos de Christoffel son cero, a continuación listamos los que no se anulan y damos su valor, que necesitaremos para calcular el tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^4 &= -r, & \Gamma_{12}^3 &= r, & \Gamma_{21}^3 &= -r, & \Gamma_{13}^2 &= -r, & \Gamma_{31}^2 &= -r, & \Gamma_{14}^1 &= r, \\ \Gamma_{22}^4 &= -r, & \Gamma_{23}^1 &= r, & \Gamma_{32}^1 &= r, & \Gamma_{24}^2 &= r, & \Gamma_{33}^4 &= r, & \Gamma_{34}^3 &= -r. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pasamos ahora a calcular el tensor de curvatura. En principio, tenemos que computar $4^4 = 256$ componentes R_{ijkl} para determinar el campo de tensores, pero como vimos en el Capítulo 2 hay simetrías que reducen el número de elementos independientes. Para todo $i, j, k, l = 1, \dots, 4$, estas simetrías son:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} = R_{klij};$$

en particular, tenemos que

$$R_{iikl} = 0, \quad R_{ijkk} = 0.$$

A modo de ejemplo, calculamos a continuación una de las componentes del tensor de curvatura, los cálculos detallados para el resto se pueden consultar en el Anexo B.

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_1, E_2 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (-rE_3) - \nabla_{E_2} (-rE_4) - \nabla_{2rE_3} E_1, E_2 \rangle \\ &= \langle -r \nabla_{E_1} E_3 - (E_1 r) E_3 + r \nabla_{E_2} E_4 + (E_2 r) E_4 - 2r \nabla_{E_3} E_1, E_2 \rangle \\ &= \langle r^2 E_2 + r^2 E_2 + 2r^2 E_2, E_2 \rangle = 4r^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$E_1 r = \frac{1}{f_1(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1/3}{s(t) + \frac{2}{3} \frac{c}{(ab)^{1/4}}} \right) = 0,$$

$$E_2 r = \frac{1}{f_2(t)} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1/3}{s(t) + \frac{2}{3} \frac{c}{(ab)^{1/4}}} \right) = 0.$$

Como con los símbolos de Christoffel, hay muchas componentes de R que se anulan. Listamos a continuación las que no son cero:

$$\begin{aligned} R_{1212} &= 4r^2, & R_{1234} &= -4r^2, & R_{1313} &= -2r^2, & R_{1324} &= -2r^2, & R_{1414} &= -2r^2, \\ R_{1423} &= 2r^2, & R_{2323} &= -2r^2, & R_{2424} &= -2r^2, & R_{3434} &= 4r^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Como el tensor de curvatura no es idénticamente nulo, ya que r no puede anularse, concluimos que la variedad que hemos construido no es llana, es decir, no es localmente isométrica a \mathbb{R}^4 en ningún punto. Sin embargo, vamos a ver que el tensor de Ricci sí que se anula en todo punto de $H \times I$.

Recordemos que el tensor de Ricci es el campo de 2-tensores covariante y simétrico resultante de hallar la traza con respecto al primer y al último índice del tensor de curvatura, $R_{ij} = R_{kij}{}^k = g^{km} R_{kijm}$. En nuestro caso, como la base en la que hemos calculado las componentes de R es ortonormal, la expresión se simplifica a $R_{ij} = \delta^{km} R_{kijm}$. Así, sólo tenemos que sustituir los valores del tensor de curvatura que acabamos de obtener. Los cálculos detallados se pueden consultar en el Anexo B, presentamos uno a continuación como ejemplo:

$$R_{11} = R_{111}{}^1 + R_{211}{}^2 + R_{311}{}^3 + R_{411}{}^4 = -R_{1212} - R_{1313} - R_{1414} = -4r^2 + 2r^2 + 2r^2 = 0.$$

Concluimos que el tensor de Ricci es idénticamente nulo, es decir, que la familia de métricas obtenidas en $H \times I$ son todas Ricci llanas, como queríamos probar. \square

En la sección siguiente comentamos brevemente y a modo de conclusión final algunas implicaciones en la física del resultado al que hemos llegado.

4.4. Instantones gravitacionales

Al final del Capítulo 2 introdujimos el concepto de métrica Einstein, y ya comentamos que este nombre tiene su origen en la teoría de la relatividad general de Einstein, que esencialmente modela el espacio-tiempo como una 4-variedad con una *métrica de Lorentz* que cumple las *ecuaciones de Einstein*:

$$Rc - \frac{1}{2} Sg = T \quad (4.16)$$

donde T es un 2-tensor covariante, llamado *tensor de energía-impulso*, que describe la materia y la energía en cada punto del espacio-tiempo. Una *métrica de Lorentz* es un caso particular de métrica *pseudo riemanniana*, que es una generalización de la métrica de Riemann a la que no se le exige que sea definida positiva, sino solamente que sea no degenerada en cada punto (es decir, que el único vector ortogonal a todos es el vector nulo).

En el caso en que $T = 0$, (4.16) se reduce a las *ecuaciones de Einstein en el vacío* $Rc = 0$, es decir, que la métrica g sea Ricci llana y por tanto una métrica Einstein en el sentido matemático que habíamos definido en el Capítulo 2 (salvo el hecho de que la métrica no es definida positiva).

Un *instantón gravitacional* es una variedad riemanniana de dimensión 4 con una métrica hiper Kähler *completa* y *asintóticamente llana*. Explicamos a continuación con más detalle qué queremos decir con estas dos últimas condiciones. Una métrica de Riemann g se dice *completa* si toda geodésica se puede extender a una geodésica maximal definida en todo \mathbb{R} , es decir, si $\gamma: I \rightarrow M$ es una geodésica,

entonces existe $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow M$ geodésica tal que $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$. Con *asintóticamente llana*, nos referimos a que el tensor de curvatura de g tienda a cero en el infinito. Es preciso resaltar también que para los instantones gravitacionales sí que se utilizan métricas de Riemann, es decir, definidas positivas.

Nos preguntamos entonces si, dentro de la familia de métricas híper Kähler en dimensión 4 que hemos construido en $H \times I$, hay alguna candidata a ser un instantón gravitacional. Estudiemos en primer lugar la completitud de g . Al calcular los símbolos de Christoffel, 4.14, hemos obtenido que $\Gamma_{44}^k = 0$, para todo $k = 1, \dots, 4$, lo que significa que $\nabla_{E_4} E_4 = 0$. Sea $u(t) = \int \frac{dt}{s'(t)}$, $t \in I$, que está bien definida porque $s' \in \mathcal{C}^\infty(I)$ y $s'(t) = f(t) > 0 \forall t \in I$. Consideremos la curva:

$$\begin{aligned} \gamma: I &\rightarrow H \times I \\ t &\mapsto (h(0, 0, 0), u(t)). \end{aligned}$$

Si calculamos su vector velocidad:

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dt} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{s'(t)} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{f(t)} \frac{\partial}{\partial t} = E_4,$$

luego su aceleración es $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \nabla_{E_4} E_4 = 0$ y γ es geodésica. La única manera de que γ pueda extenderse a una geodésica maximal definida en \mathbb{R} es precisamente que el intervalo I sea todo \mathbb{R} . En consecuencia, para que la métrica g en $H \times I$ sea completa, es necesario que $I = \mathbb{R}$. En tal caso, tendremos una función $s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ creciente, pues $s'(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Supongamos entonces que se cumple esta condición, es decir, que $I = \mathbb{R}$.

Recordemos que todas las componentes del tensor de curvatura R , dado por (4.15), de g eran proporcionales a r^2 , siendo:

$$r = r(t) = \frac{1/3}{s(t) + \frac{2}{3} \frac{c}{(ab)^{1/4}}} > 0.$$

Para que g sea asintóticamente llana, en particular, es necesario que todas las componentes de R tiendan a cero cuando t tiende a $+\infty$ y a $-\infty$, es decir, necesitamos que $r(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$. Pero es claro que esto no se puede cumplir, ya que:

$$r'(t) = -\frac{1/3}{\left(s(t) + \frac{2}{3} \frac{c}{(ab)^{1/4}}\right)^2} s'(t) < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y entonces es imposible que $r(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$. Concluimos que g no puede ser a la vez completa y asintóticamente llana, luego entre la familia de métricas híper Kähler que hemos construido en $H \times I$, no hay ningún instantón gravitacional.

De hecho, sí que es posible obtener un instantón gravitacional a partir de alguna de las métricas que hemos obtenido, pero no de manera inmediata, como hemos pretendido en esta sección. El proceso por el cual se puede llegar a este resultado fue propuesto por primera vez por G.W. Gibbons y S.W. Hawking en [GH], y al tipo de instantones gravitacionales resultantes se les conoce como instantones de Gibbons-Hawking.

El estudio de los instantones gravitacionales es de gran interés en matemáticas y especialmente en física, y es un campo en el que a día de hoy sigue habiendo mucha investigación. Sin ir más lejos, la clasificación de los instantones gravitacionales es aún un problema abierto.

Anexos

Anexo A

Estructuras geométricas en variedades y su relación con subgrupos de Lie del grupo lineal general

En este primer anexo presentamos brevemente las propiedades más importantes del grupo lineal general como grupo de Lie, y cómo algunos de sus subgrupos están relacionados con las estructuras geométricas en variedades que hemos construido en el Capítulo 3.

A.1. El grupo lineal general y sus subgrupos de Lie más importantes

El grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de matrices cuadradas $n \times n$ regulares, es decir, cuyo determinante es distinto de cero. Como variedad diferencial es subconjunto abierto de $M(n \times n, \mathbb{R})$, y por tanto es subvariedad encajada de dimensión n^2 , y tiene una carta global natural $\phi : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, que a cada matriz $X = (X_j^i)$ le asigna un vector de \mathbb{R}^{n^2} con las entradas X_j^i puestas en fila. De esta manera, un elemento de $GL(n, \mathbb{R})$ está determinado por n^2 coordenadas reales X_j^i , $j, i = 1, \dots, n$.

Además, $GL(n, \mathbb{R})$ es grupo con la operación producto de matrices, y la inversa está bien definida por ser regulares las matrices de $GL(n, \mathbb{R})$. Es fácil comprobar que tanto la multiplicación como la inversión son \mathcal{C}^∞ , de manera que $GL(n, \mathbb{R})$ tiene estructura de grupo de Lie.

Denotando por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ al álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$, vamos a ver que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ es isomorfo como álgebra de Lie a $(M(n \times n, \mathbb{R}), +, \cdot_{\mathbb{R}}, [A, B] = AB - BA)$.

Teorema A.1.1. *El álgebra de Lie del grupo lineal general es isomorfa a $(M(n \times n, \mathbb{R}), +, \cdot_{\mathbb{R}}, [A, B] = AB - BA)$.*

Demostración. En primer lugar, por el Teorema 1.2.3, como espacio vectorial, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cong T_n GL(n, \mathbb{R})$. Ahora bien, como $T_n GL(n, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real de dimensión n^2 , es isomorfo a \mathbb{R}^{n^2} y por la misma razón también a $M(n \times n, \mathbb{R})$. El isomorfismo de espacios vectoriales natural entre $T_n GL(n, \mathbb{R})$ y $M(n \times n, \mathbb{R})$ viene dado, en las coordenadas globales X_j^i de $GL(n, \mathbb{R})$, por:

$$A = A_j^i \left. \frac{\partial}{\partial X_j^i} \right|_{I_n} \longleftrightarrow (A_j^i).$$

Recordemos también que el isomorfismo $T_n GL(n, \mathbb{R}) \leftrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ viene dado por asociar a cada vector tangente en la identidad el campo de vectores invariante por la izquierda \tilde{A} , como en el Teorema 1.2.3. En este caso, el valor de \tilde{A} en un punto $X \in GL(n, \mathbb{R})$ viene dado por:

$$\tilde{A}_X = dL_X(A) = XA = X_j^i A_k^j \left. \frac{\partial}{\partial X_k^i} \right|_X.$$

Veamos entonces que la aplicación:

$$\begin{aligned} \sim: M(n \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \tilde{A} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie. Para ello, lo único que nos queda por ver es que \sim respeta el corchete, es decir, que $\widetilde{[A, B]} = [\tilde{A}, \tilde{B}]_{\mathfrak{gl}}$, donde $[\ , \]_{\mathfrak{gl}}$ denota el corchete de campos en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ y $[\ , \]$ el conmutador de matrices.

$$\begin{aligned} [\tilde{A}, \tilde{B}]_{\mathfrak{gl}} &= \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} = X_j^i A_k^j \frac{\partial}{\partial X_k^i} (X_q^p B_r^q) \frac{\partial}{\partial X_r^p} - X_q^p B_r^q \frac{\partial}{\partial X_r^p} (X_j^i A_k^j) \frac{\partial}{\partial X_k^i} \\ &= X_j^i A_k^j B_r^q \delta_i^p \cdot \delta_q^k \frac{\partial}{\partial X_r^p} - X_q^p B_r^q A_k^j \delta_p^i \cdot \delta_r^j \frac{\partial}{\partial X_k^i} \\ &= X_j^i A_k^j B_r^k \frac{\partial}{\partial X_r^i} - X_q^p B_r^q A_k^r \frac{\partial}{\partial X_k^p} \\ &= \left(X_j^i A_k^j B_r^k - X_j^i B_k^j A_r^k \right) \frac{\partial}{\partial X_r^i}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\partial X_q^p / \partial X_k^i = \delta_k^q \cdot \delta_i^p$ y que A_j^i y B_j^i son constantes. Si evaluamos este campo de vectores en la identidad, es decir, tomamos $X_j^i = \delta_j^i$, obtenemos:

$$([\tilde{A}, \tilde{B}]_{\mathfrak{gl}})_{I_n} = \left(A_k^i B_r^k - B_k^i A_r^k \right) \frac{\partial}{\partial X_r^i} \Big|_{I_n},$$

que es exactamente $\widetilde{[A, B]} \Big|_{I_n}$. Y como sabemos que los campos invariantes por la izquierda están totalmente determinados por su valor en la identidad, concluimos que ambos campos son el mismo, es decir, que $\widetilde{[A, B]} = [\tilde{A}, \tilde{B}]_{\mathfrak{gl}}$, como queríamos demostrar. \square

A continuación, vamos a estudiar algunos de los subgrupos de Lie más importantes de $GL(n, \mathbb{R})$, y a calcular sus álgebras de Lie.

El grupo ortogonal $O(n)$. Es el grupo de matrices que preservan el producto escalar usual $\langle \ , \ \rangle$ en \mathbb{R}^n :

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n\} = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\} \subset GL(n, \mathbb{R}).$$

Es claro que $O(n)$ es subgrupo en el sentido algebraico. Además, si consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi: GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^T A, \end{aligned}$$

tenemos que Φ es \mathcal{C}^∞ y que $O(n) = \Phi^{-1}(I)$, y por lo tanto $O(n)$ es cerrado en $GL(n, \mathbb{R})$. Aplicando el Teorema del subgrupo cerrado 1.2.14, tenemos que $O(n)$ es subgrupo de Lie encajado de $GL(n, \mathbb{R})$. En consecuencia, el álgebra de Lie de $O(n)$, que denotamos $\mathfrak{o}(n)$, será subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Se puede ver que $\mathfrak{o}(n) = \{B \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid B^T + B = 0\}$, es decir, las matrices antisimétricas. Con esto, razonamos fácilmente que $\dim O(n) = \dim \mathfrak{o}(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

El grupo lineal especial $SL(n, \mathbb{R})$. Es el grupo de matrices con determinante unidad:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} \subset GL(n, \mathbb{R}).$$

Por las propiedades del determinante, es inmediato que $SL(n, \mathbb{R})$ es subgrupo algebraico de $GL(n, \mathbb{R})$. Además, como tenemos la aplicación determinante:

$$\begin{aligned} \det : GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^* \\ A &\mapsto \det(A), \end{aligned}$$

que es \mathcal{C}^∞ , y $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$, concluimos que $SL(n, \mathbb{R})$ es cerrado en $GL(n, \mathbb{R})$ y por el Teorema del subgrupo cerrado 1.2.14, $SL(n, \mathbb{R})$ es subvariedad encajada en $GL(n, \mathbb{R})$. Se comprueba que su álgebra de Lie es $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{B \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \text{tr}(B) = 0\}$, de manera que $\dim SL(n, \mathbb{R}) = \dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$.

El grupo ortogonal especial $SO(n)$. Es la intersección de los dos anteriores:

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}).$$

Se puede ver que $\forall A \in O(n)$, $\det(A) = +1$ ó -1 , luego si consideramos:

$$\begin{aligned} \det : O(n) &\rightarrow \mathbb{R}^* \\ A &\mapsto \det(A), \end{aligned}$$

tenemos que $SO(n) = \det^{-1}(1)$, luego es subgrupo de Lie abierto de $O(n)$ y por tanto está encajado en $O(n)$ y a su vez en $GL(n, \mathbb{R})$. Por ser subgrupo de Lie abierto de $O(n)$, el álgebra de Lie de $SO(n)$ es $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$, y por tanto $\dim SO(n) = \dim O(n)$.

El grupo simpléctico $Sp(2n, \mathbb{R})$. Son las matrices que preservan el *producto simpléctico* ω en \mathbb{R}^{2n} dado por:

$$\omega((x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n), (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)) = \sum_{i=1}^n (x^i \tilde{y}^i - \tilde{x}^i y^i).$$

Notemos que ω es la forma simpléctica canónica del Teorema de Darboux 3.2.2 en el caso de \mathbb{R}^{2n} . Entonces, definimos el grupo simpléctico como:

$$\begin{aligned} Sp(2n, \mathbb{R}) &= \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid \omega(A(x, y), A(\tilde{x}, \tilde{y})) = \omega((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})), \forall (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^{2n}\} \\ &= \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \Omega\} \subset GL(2n, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

siendo $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Es claro que $Sp(2n, \mathbb{R})$ es subgrupo en el sentido algebraico. Consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi : GL(2n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(2n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^T \Omega A. \end{aligned}$$

Tenemos que Φ es \mathcal{C}^∞ y que $Sp(2n, \mathbb{R}) = \Phi^{-1}(\Omega)$, por lo tanto $Sp(2n, \mathbb{R})$ es cerrado en $GL(2n, \mathbb{R})$. Aplicando entonces el Teorema del subgrupo cerrado 1.2.14, concluimos que $Sp(2n, \mathbb{R})$ es subgrupo de Lie encajado de $GL(2n, \mathbb{R})$. Se comprueba que su álgebra de Lie es $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) \mid X^T \Omega + \Omega X = 0\}$. Con esto, vemos que la dimensión del grupo simpléctico como grupo de Lie es $\dim Sp(2n, \mathbb{R}) = \dim \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) = 2n^2 + n$.

El grupo lineal general complejo $GL(n, \mathbb{C})$. Es el grupo de matrices $n \times n$ con entradas complejas cuyo determinante es distinto de cero. Es un grupo de Lie de dimensión compleja n^2 , y por tanto, lo podemos también considerar como grupo de Lie de dimensión real $2n^2$. De hecho, lo podemos ver como subgrupo de Lie encajado en $GL(2n, \mathbb{R})$, mediante el encaje:

$$F : GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(2n, \mathbb{R})$$

$$A = \operatorname{Re}(A) + i\operatorname{Im}(A) \mapsto F(A) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(A) & \operatorname{Im}(A) \\ -\operatorname{Im}(A) & \operatorname{Re}(A) \end{pmatrix}.$$

Se puede ver que el álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$, que denotamos $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, es isomorfa a $(M(n \times n, \mathbb{C}), +, \cdot, [A, B] = AB - BA)$, es decir, al conjunto de todas las matrices $n \times n$ complejas con el conmutador como corchete de Lie. Como ya hemos anticipado, $\dim GL(n, \mathbb{C}) = \dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = 2n^2$.

El grupo unitario $U(n)$. Es el grupo de matrices complejas que preservan el producto hermítico usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathbb{C}^n :

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y \in \mathbb{C}^n\} = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^*A = 1\} \subset GL(n, \mathbb{C}),$$

donde A^* denota el conjugado hermítico de A , es decir, la matriz traspuesta conjugada de A . $U(n)$ también tiene estructura de grupo de Lie real, ya que a través del encaje de $GL(n, \mathbb{C})$ en $GL(2n, \mathbb{R})$ podemos verlo como subgrupo de Lie encajado en $GL(2n, \mathbb{R})$. Es posible demostrar que, desde este punto de vista, el grupo unitario se puede obtener como:

$$U(n) = O(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{R}) \cap GL(n, \mathbb{C}),$$

y la intersección de cualesquiera de estos dos ya da $U(n)$. El álgebra de Lie de $U(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, es el conjunto de matrices $n \times n$ complejas antihermíticas, es decir, tales que su traspuesta conjugada es menos la propia matriz, $A^* = -A$, con el conmutador como corchete de Lie. Sabiendo esto, se prueba fácilmente que $\dim U(n) = \dim \mathfrak{u}(n) = n^2$.

El grupo unitario especial $SU(n)$. Es el grupo de matrices complejas unitarias con determinante 1.

Tiene estructura de grupo de Lie real, y también se puede ver como subgrupo de Lie encajado de $GL(2n, \mathbb{R})$ a través del encaje de $GL(n, \mathbb{C})$ en $GL(2n, \mathbb{R})$. Su álgebra de Lie, $\mathfrak{su}(n)$, se puede identificar con el conjunto de matrices $n \times n$ complejas antihermíticas de traza nula, con el conmutador como corchete de Lie. Esto implica que $\dim SU(n) = \dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1$.

Veamos con un poco más de detalle el caso $n = 2$, para el que tenemos:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\},$$

donde \bar{z} representa el complejo conjugado de z . Podemos encajar $SU(2)$ en $GL(4, \mathbb{R})$ a partir del encaje de $GL(1, \mathbb{C})$ en $GL(2, \mathbb{R})$ dado por:

$$z \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & \operatorname{Im} z \\ -\operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix},$$

de manera que, si llamamos $z = a + ib$, $w = c + id$, el encaje de $SU(2)$ en $GL(4, \mathbb{R})$ viene dado por:

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ \hline -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{array} \right), \quad \text{cumpliendo } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

A continuación, vamos a ver que a cada una de las estructuras que hemos definido en el Capítulo 3 podemos asociarle un grupo de Lie que determina la estructura a nivel de formas. Estos grupos de Lie van a ser precisamente subgrupos de $GL(4, \mathbb{R})$.

A.2. Estructuras geométricas sobre variedades 4-dimensionales desde el punto de vista de los grupos de Lie

En el Capítulo 3 hemos definido una serie de estructuras geométricas sobre variedades diferenciables, que nos han permitido construir y estudiar variedades con propiedades muy interesantes. En particular, nos hemos centrado en dimensión 4 y hemos utilizado el lenguaje de formas diferenciables para describir estas estructuras. Vamos ahora a ver cómo los grupos de Lie que hemos presentado en la sección anterior aparecen naturalmente en esta situación como transformaciones que preservan estas estructuras, en el sentido que describimos a continuación.

A.2.1. Estructura casi hermítica

Sea M una variedad de dimensión 4 con una métrica casi hermítica g , y sea e^1, e^2, e^3, e^4 una base local de 1-formas adaptada a la estructura casi hermítica (J, g) . En lo que sigue supondremos que realizamos transformaciones lineales e invertibles sobre el espacio de 1-formas, que representamos mediante la acción de una matriz $A \in GL(4, \mathbb{R})$ sobre la base de 1-formas,

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \\ e^4 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \\ e^4 \end{pmatrix}.$$

Estructura casi compleja: Recordemos que J actúa sobre la base adaptada según $Je^1 = -e^3$, $Je^2 = -e^4$, que en forma matricial podemos representar como:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una transformación sobre el espacio de 1-formas preservará esta estructura si viene dada por una matriz $A \in GL(4, \mathbb{R})$ que cumpla que $A^{-1}JA = J$, o lo que es equivalente, $JA = AJ$. Es fácil comprobar que se cumple esta condición si y sólo si A es de la forma:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ \hline -e & f & a & b \\ -g & -h & c & d \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix} \iff A \in GL(2, \mathbb{C}),$$

pues las matrices de esta forma recorren justamente la imagen del encaje de $GL(2, \mathbb{C})$ en $GL(4, \mathbb{R})$ que habíamos definido en A.1. Es decir, que el subgrupo de $GL(4, \mathbb{R})$ que preserve la estructura casi compleja J en dimensión 4 es el grupo lineal general complejo.

2-forma fundamental: La 2-forma fundamental asociada se expresa en la base adaptada de 1-formas como $F = e^{13} + e^{24}$. Si consideramos la base dual de campos de vectores E_1, E_2, E_3, E_4 , la acción de F sobre dos campos $X = X^i E_i$, $Y = Y^j E_j$ se expresa:

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= e^{13}(X^1 E_1, Y^3 E_3) + e^{24}(X^2 E_2, Y^4 E_4) \\ &= \det \begin{pmatrix} X^1 & Y^1 \\ X^3 & Y^3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} X^2 & Y^2 \\ X^4 & Y^4 \end{pmatrix} = X^1 Y^3 - Y^1 X^3 + X^2 Y^4 - Y^2 X^4, \end{aligned}$$

que tiene la misma estructura que el producto simpléctico que habíamos definido en A.1, para dimensión 4. En forma matricial, la acción de F está determinada por $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} = J$. Entonces, $A \in GL(4, \mathbb{R})$ preserva F si y sólo si $A^T J A = J$, y como hemos visto en A.1, esto ocurre si y sólo si $A \in Sp(4, \mathbb{R})$. Es decir, que el subgrupo de $GL(4, \mathbb{R})$ que preserva la 2-forma fundamental es el grupo simpléctico.

Métrica de Riemann: La métrica la habíamos expresado como $g = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 + (e^4)^2$, que es la forma del producto escalar usual, luego es claro que el subgrupo que preserva la métrica es el grupo ortogonal de dimensión 4, $O(4)$.

Estructura casi hermítica: En general, si queremos preservar toda la estructura casi hermítica, es decir, tanto J como F como g , será necesario que A esté en la intersección de los tres subgrupos que conservan cada una de las tres estructuras por separado. En conclusión, A preserva la estructura casi hermítica si y sólo si:

$$A \in GL(2, \mathbb{C}) \cap Sp(4, \mathbb{R}) \cap O(4) = U(2),$$

y, como ya hemos comentado, la intersección de cualquiera dos de los tres subgrupos ya da $U(2)$. Esto viene a reflejar el hecho, que ya habíamos comentado en el Capítulo 3, de que en una variedad casi hermítica, basta con conocer dos cualesquiera entre J , F o g para determinar el tercero.

A.2.2. Estructura casi híper hermítica

Como en la sección anterior, supongamos que M es una variedad de dimensión 4 con una métrica casi híper hermítica g , y que e^1, e^2, e^3, e^4 es una base local de 1-formas adaptada a esta estructura, en la que la métrica g , las tres estructuras casi complejas (J_1, J_2, J_3) y las tres 2-formas fundamentales (F_1, F_2, F_3) se expresan:

$$\begin{aligned} g &= (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 + (e^4)^2; \\ J_1 e^1 &= -e^2, J_1 e^3 = -e^4, J_2 e^1 = -e^3, J_2 e^4 = -e^2, J_3 e^1 = -e^4, J_3 e^2 = -e^3; \\ F_1 &= e^{12} + e^{34}, F_2 = e^{13} + e^{42}, F_3 = e^{14} + e^{23}. \end{aligned}$$

De manera análoga al caso casi hermítico, se puede ver que las matrices J_1, J_2 y J_3 que representan la acción de las estructuras casi complejas y las 2-formas fundamentales son:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Representaremos las transformaciones lineales e invertibles sobre el espacio de 1-formas mediante la acción de una matriz $A \in GL(4, \mathbb{R})$. Razonando como en el caso casi hermítico, las matrices A que preservan la estructura casi híper hermítica son:

$$\left\{ A \in GL(4, \mathbb{R}) \mid A^T A = I_4 \quad \& \quad \begin{array}{l} J_1 A = A J_1 \\ J_2 A = A J_2 \\ J_3 A = A J_3 \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{l} A^T J_1 A = J_1 \\ A^T J_2 A = J_2 \\ A^T J_3 A = J_3 \end{array} \right\},$$

correspondiendo, respectivamente, a conservar la métrica, las estructuras casi híper complejas y las 2-formas fundamentales. De hecho, si se cumple la ortogonalidad y las condiciones para J_1 y J_2 , la parte correspondiente a J_3 se cumple automáticamente, pues teniendo en cuenta que $J_1 J_2 = -J_3$,

$$\begin{aligned} J_3 A &= -J_1 J_2 A = -J_1 A J_2 = -A J_1 J_2 = A J_3, \\ A^T J_3 A &= -A^T J_1 J_2 A = -A^T J_1 A A^T J_2 A = -J_1 J_2 = J_3. \end{aligned}$$

Exigiendo que A conserve la estructura casi híper compleja, es decir, que $J_1A = AJ_1$ y $J_2A = AJ_2$, se llega fácilmente a que A tiene que ser de la forma:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ \hline -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{array} \right).$$

Además, si exigimos que preserve la métrica o bien las 2-formas fundamentales (ambas condiciones resultan equivalentes), llegamos a que debe cumplirse:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Si juntamos los dos resultados, tenemos que A preserva la estructura casi híper hermítica si y sólo si es de la forma:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ \hline -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{array} \right), \quad \text{cumpliendo } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

y si recordamos [A.1](#), vemos que las matrices de esta forma recorren justamente la imagen del encaje de $SU(2)$ en $GL(4, \mathbb{R})$, con lo que concluimos que el subgrupo de $GL(4, \mathbb{R})$ que preserva la estructura casi híper hermítica es precisamente $SU(2)$.

Anexo B

Cálculos auxiliares para el Capítulo 4

En este apéndice se recogen cálculos correspondientes al Capítulo 4, que han sido excluidos del texto principal por motivos de espacio.

B.1. Integrabilidad de J_2 y J_3

Comprobamos a continuación la condición de integrabilidad para J_2 y J_3 , correspondiente al Lema 4.1.3.

Comenzamos por comprobar que $N_{J_2} \equiv 0$. Por la propiedad (iv) de la Proposición 3.1.5:

$$\begin{aligned} N_{J_2}(E_1, E_3) &= N_{J_2}(E_1, -J_2 E_1) = 0, \\ N_{J_2}(E_2, E_4) &= N_{J_2}(-J_2 E_4, E_4) = 0. \end{aligned}$$

Calculamos directamente:

$$\begin{aligned} N_{J_2}(E_1, E_2) &= -[E_3, E_4] + J_2[E_3, E_2] - J_2[E_1, E_4] - [E_1, E_2] \\ &= -\frac{f'_3}{ff_3}E_3 + \frac{(f_2 f_3)'}{ff_2 f_3}E_3 + \frac{f'_1}{ff_1}E_3 - \frac{(f_1 f_2)'}{ff_1 f_2}E_3 \\ &= \frac{-f'_3 f_1 f_2 + f'_2 f_1 f_3 + f'_3 f_1 f_2 + f'_1 f_2 f_3 - f'_1 f_2 f_3 - f'_2 f_1 f_3}{ff_1 f_2 f_3}E_3 = 0. \end{aligned}$$

Usando las propiedades (ii) y (iii) de la Proposición 3.1.5:

$$\begin{aligned} N_{J_2}(E_1, E_4) &= N_{J_2}(E_1, J_2 E_2) = -J_2(N_{J_2}(E_1, E_2)) = -J_2(0) = 0, \\ N_{J_2}(E_2, E_3) &= N_{J_2}(-J_2 E_4, -J_2 E_1) = N_{J_2}(E_1, E_4) = 0, \\ N_{J_2}(E_3, E_4) &= N_{J_2}(-J_2 E_1, J_2 E_2) = N_{J_2}(E_1, E_2) = 0, \end{aligned}$$

y usando la antisimetría de N_{J_2} , concluimos que N_{J_2} se anula sobre todos los elementos de la base de campos, luego $N_{J_2} \equiv 0$ y J_2 es integrable.

Por último, hacemos la comprobación de que $N_{J_3} \equiv 0$. Usando de nuevo la propiedad (iv) de la Proposición 3.1.5:

$$\begin{aligned} N_{J_3}(E_1, E_4) &= N_{J_3}(E_1, -J_3 E_1) = 0, \\ N_{J_3}(E_2, E_3) &= N_{J_3}(E_2, -J_3 E_2) = 0. \end{aligned}$$

Calculamos directamente:

$$\begin{aligned} N_{J_3}(E_1, E_2) &= [E_4, E_3] + J_3[E_4, E_2] + J_3[E_1, E_3] - [E_1, E_2] \\ &= -\frac{f'_3}{ff_3}E_3 + \frac{f'_2}{ff_2}E_3 + \frac{(f_1 f_3)'}{ff_1 f_3}E_3 - \frac{(f_1 f_2)'}{ff_1 f_2}E_3 \\ &= \frac{-f'_3 f_1 f_2 + f'_2 f_1 f_3 + f'_1 f_2 f_3 + f'_3 f_1 f_2 - f'_1 f_2 f_3 - f'_2 f_1 f_3}{ff_1 f_2 f_3}E_3 = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta las propiedades (ii) y (iii) de la Proposición 3.1.5:

$$\begin{aligned} N_{J_3}(E_1, E_3) &= N_{J_3}(E_1, -J_3 E_2) = J_3(N_{J_3}(E_1, E_2)) = J_3(0) = 0, \\ N_{J_3}(E_2, E_4) &= N_{J_3}(J_3 E_3, -J_3 E_1) = -N_{J_3}(E_1, E_3) = 0, \\ N_{J_3}(E_3, E_4) &= N_{J_3}(-J_3 E_2, -J_3 E_1) = N_{J_3}(E_1, E_2) = 0, \end{aligned}$$

y usando la antisimetría de N_{J_3} , concluimos que N_{J_3} se anula sobre todos los elementos de la base de campos, luego $N_{J_3} \equiv 0$ y J_3 es integrable.

B.2. Teorema 4.3.1

En esta sección presentamos los cálculos auxiliares para la demostración del Teorema 4.3.1.

B.2.1. Símbolos de Christoffel

Recordemos que habíamos llegado a la expresión (4.13),

$$\Gamma_{ij}^k = \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_j, [E_i, E_k] \rangle - \langle E_k, [E_j, E_i] \rangle + \langle E_i, [E_k, E_j] \rangle), \quad i, j, k = 1, \dots, 4,$$

y fruto de la compatibilidad de la conexión con la métrica y de la ausencia de torsión, teníamos otras relaciones que simplifican los cálculos:

$$\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j, \quad i, j, k = 1, \dots, 4 \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = [E_i, E_j], \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (\text{B.2})$$

En el texto principal habíamos calculado $\Gamma_{11}^1 = 0$, $\Gamma_{11}^2 = 0$, $\Gamma_{11}^3 = 0$, $\Gamma_{11}^4 = -r$. A continuación calcularemos los restantes símbolos de Christoffel. En primer lugar,

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= -\Gamma_{11}^2 = 0, & \Gamma_{12}^2 &= -\Gamma_{12}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^3 &= \langle \nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_2, [E_1, E_3] \rangle - \langle E_3, [E_2, E_1] \rangle + \langle E_1, [E_3, E_2] \rangle) = \frac{1}{2} (0 + 2r + 0) = r, \\ \Gamma_{12}^4 &= \langle \nabla_{E_1} E_2, E_4 \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_2, [E_1, E_4] \rangle - \langle E_4, [E_2, E_1] \rangle + \langle E_1, [E_4, E_2] \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Usando B.2, $\nabla_{E_2} E_1 = \nabla_{E_1} E_2 + [E_2, E_1] = rE_3 - 2rE_3 = -rE_3$, obtenemos de manera inmediata

$$\Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{21}^3 = -r, \quad \Gamma_{21}^4 = 0.$$

Calculamos ahora Γ_{22}^k

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -\Gamma_{21}^2 = 0, & \Gamma_{22}^2 &= -\Gamma_{22}^2 = 0, \\ \Gamma_{22}^3 &= \langle \nabla_{E_2} E_2, E_3 \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_2, [E_2, E_3] \rangle - \langle E_3, [E_2, E_2] \rangle + \langle E_2, [E_3, E_2] \rangle) = 0, \\ \Gamma_{22}^4 &= \langle \nabla_{E_2} E_2, E_4 \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_2, [E_2, E_4] \rangle - \langle E_4, [E_2, E_2] \rangle + \langle E_2, [E_4, E_2] \rangle) = \frac{1}{2} (-r + 0 + -r) = -r. \end{aligned}$$

Los símbolos Γ_{33}^k se obtienen como sigue:

$$\begin{aligned} \Gamma_{13}^1 &= -\Gamma_{11}^3 = 0, & \Gamma_{13}^2 &= -\Gamma_{12}^3 = -r, & \Gamma_{13}^3 &= -\Gamma_{13}^3 = 0, \\ \Gamma_{13}^4 &= \langle \nabla_{E_1} E_3, E_4 \rangle = \frac{1}{2} (-\langle E_1, [E_4, E_3] \rangle - \langle E_3, [E_1, E_4] \rangle + \langle E_4, [E_3, E_1] \rangle) = \frac{1}{2} (0 + 0 + 0) = 0. \end{aligned}$$

De B.2, $\nabla_{E_3}E_1 = \nabla_{E_1}E_3 + [E_3, E_1] = -rE_2 + 0 = -rE_2$, se sigue fácilmente

$$\Gamma_{31}^1 = 0, \quad \Gamma_{31}^2 = -r, \quad \Gamma_{31}^3 = 0, \quad \Gamma_{31}^4 = 0.$$

Calculamos los símbolos Γ_{23}^k :

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^1 &= -\Gamma_{21}^3 = r, & \Gamma_{23}^2 &= -\Gamma_{22}^3 = 0, & \Gamma_{23}^3 &= -\Gamma_{23}^3 = 0, \\ \Gamma_{23}^4 &= \langle \nabla_{E_2}E_3, E_4 \rangle = \frac{1}{2}(-\langle E_2, [E_4, E_3] \rangle - \langle E_3, [E_2, E_4] \rangle + \langle E_4, [E_3, E_2] \rangle) = \frac{1}{2}(0+0+0) = 0. \end{aligned}$$

Usando B.2, $\nabla_{E_3}E_2 = \nabla_{E_2}E_3 + [E_3, E_2] = rE_1$, concluimos que

$$\Gamma_{32}^1 = r, \quad \Gamma_{32}^2 = 0, \quad \Gamma_{32}^3 = 0, \quad \Gamma_{32}^4 = 0.$$

Calculamos a continuación Γ_{33}^k y Γ_{14}^k :

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^1 &= -\Gamma_{31}^3 = 0, & \Gamma_{33}^2 &= -\Gamma_{32}^3 = 0, & \Gamma_{33}^3 &= -\Gamma_{33}^3 = 0, \\ \Gamma_{33}^4 &= \langle \nabla_{E_3}E_3, E_4 \rangle = \frac{1}{2}(-\langle E_3, [E_4, E_3] \rangle - \langle E_3, [E_3, E_4] \rangle + \langle E_4, [E_3, E_3] \rangle) = \frac{1}{2}(r+r+0) = r. \\ \Gamma_{14}^1 &= -\Gamma_{11}^4 = r, & \Gamma_{14}^2 &= -\Gamma_{12}^4 = 0, & \Gamma_{14}^3 &= -\Gamma_{13}^4 = 0, & \Gamma_{14}^4 &= -\Gamma_{14}^4 = 0. \end{aligned}$$

Usando B.2, sabemos que $\nabla_{E_4}E_1 = \nabla_{E_1}E_4 + [E_4, E_1] = rE_1 - rE_1 = 0$, de manera que

$$\Gamma_{41}^1 = 0, \quad \Gamma_{41}^2 = 0, \quad \Gamma_{41}^3 = 0, \quad \Gamma_{41}^4 = 0.$$

Obtenemos ahora los símbolos Γ_{24}^k :

$$\Gamma_{24}^1 = -\Gamma_{21}^4 = 0, \quad \Gamma_{24}^2 = -\Gamma_{22}^4 = r, \quad \Gamma_{24}^3 = -\Gamma_{23}^4 = 0, \quad \Gamma_{24}^4 = -\Gamma_{24}^4 = 0.$$

Teniendo en cuenta B.2, $\nabla_{E_4}E_2 = \nabla_{E_2}E_4 + [E_4, E_2] = rE_2 - rE_2 = 0$, así que

$$\Gamma_{42}^1 = 0, \quad \Gamma_{42}^2 = 0, \quad \Gamma_{42}^3 = 0, \quad \Gamma_{42}^4 = 0.$$

El cálculo de los símbolos Γ_{34}^k es como sigue:

$$\Gamma_{34}^1 = -\Gamma_{31}^4 = 0, \quad \Gamma_{34}^2 = -\Gamma_{32}^4 = 0, \quad \Gamma_{34}^3 = -\Gamma_{33}^4 = -r, \quad \Gamma_{34}^4 = -\Gamma_{34}^4 = 0.$$

Usando B.2, $\nabla_{E_4}E_3 = \nabla_{E_3}E_4 + [E_4, E_3] = -rE_3 + rE_3 = 0$, concluimos que

$$\Gamma_{43}^1 = 0, \quad \Gamma_{43}^2 = 0, \quad \Gamma_{43}^3 = 0, \quad \Gamma_{43}^4 = 0.$$

Por último, calculamos Γ_{44}^k :

$$\Gamma_{44}^1 = -\Gamma_{41}^4 = 0, \quad \Gamma_{44}^2 = -\Gamma_{42}^4 = 0, \quad \Gamma_{44}^3 = -\Gamma_{43}^4 = 0, \quad \Gamma_{44}^4 = -\Gamma_{44}^4 = 0.$$

B.2.2. Tensor de curvatura

Tenemos que evaluar $R_{ijkl} = \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_k - \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}E_k - \nabla_{[E_i, E_j]}E_k, E_l \rangle$, $i, j, k, l = 1, \dots, 4$.

Vamos a calcular el mínimo número de componentes necesarias para determinar el tensor, teniendo en cuenta sus simetrías:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} = R_{klij};$$

Vamos a necesitar conocer la acción de cada campo básico E_i sobre la función

$$r(t) = 1/3 \left(s(t) + \frac{2}{3} \frac{c}{(ab)^{1/4}} \right)^{-1} :$$

$$E_1 r = \frac{1}{f_1(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) (r(t)) = 0,$$

$$E_2 r = \frac{1}{f_2(t)} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) (r(t)) = 0,$$

$$E_3 r = \frac{1}{f_3(t)} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) (r(t)) = 0,$$

$$E_4 r = \frac{1}{f(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) (r(t)) = -3 \left(\frac{1/3}{s(t) + \frac{2}{3} \frac{c}{(ab)^{1/4}}} \right)^2 = -3r^2.$$

En el texto principal hemos calculado $R_{1212} = 4r^2$. Calculamos ahora el resto de componentes:

$$\begin{aligned} R_{1213} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_1, E_3 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (-rE_3) - \nabla_{E_2} (-rE_4) - \nabla_{2rE_3} E_1, E_3 \rangle \\ &= \langle -r\nabla_{E_1} E_3 - (E_1 r) E_3 + r\nabla_{E_2} E_4 + (E_2 r) E_4 - 2r\nabla_{E_3} E_1, E_3 \rangle = \langle -(E_1 r) E_3, E_3 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1214} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_1, E_4 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (-rE_3) - \nabla_{E_2} (-rE_4) - \nabla_{2rE_3} E_1, E_4 \rangle \\ &= \langle -r\nabla_{E_1} E_3 - (E_1 r) E_3 + r\nabla_{E_2} E_4 + (E_2 r) E_4 - 2r\nabla_{E_3} E_1, E_4 \rangle = \langle -(E_2 r) E_4, E_4 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1223} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_2, E_3 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (-rE_4) - \nabla_{E_2} (rE_3) - \nabla_{2rE_3} E_2, E_3 \rangle \\ &= \langle -r\nabla_{E_1} E_4 - (E_1 r) E_4 - r\nabla_{E_2} E_3 - (E_2 r) E_3 - 2r\nabla_{E_3} E_2, E_3 \rangle = \langle -(E_2 r) E_3, E_3 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1224} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_2, E_4 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (-rE_4) - \nabla_{E_2} (rE_3) - \nabla_{2rE_3} E_2, E_4 \rangle \\ &= \langle -r\nabla_{E_1} E_4 - (E_1 r) E_4 - r\nabla_{E_2} E_3 - (E_2 r) E_3 - 2r\nabla_{E_3} E_2, E_4 \rangle = \langle -(E_1 r) E_4, E_4 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1234} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_3 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_3 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_3, E_4 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (rE_1) - \nabla_{E_2} (-rE_2) - \nabla_{2rE_3} E_3, E_4 \rangle \\ &= \langle r\nabla_{E_1} E_1 + (E_1 r) E_1 + r\nabla_{E_2} E_2 + (E_2 r) E_2 - 2r\nabla_{E_3} E_3, E_4 \rangle = \langle -4r^2 E_4, E_4 \rangle = -4r^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1313} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_3} E_1 - \nabla_{E_3} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{[E_1, E_3]} E_1, E_3 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (-rE_2) - \nabla_{E_3} (-rE_4), E_3 \rangle \\ &= \langle -r\nabla_{E_1} E_2 - (E_1 r) E_2 + r\nabla_{E_3} E_4 + (E_3 r) E_4, E_3 \rangle = \langle -2r^2 E_3, E_3 \rangle = -2r^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1314} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_3} E_1 - \nabla_{E_3} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{[E_1, E_3]} E_1, E_4 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (-rE_2) - \nabla_{E_3} (-rE_4), E_4 \rangle \\ &= \langle -r\nabla_{E_1} E_2 - (E_1 r) E_2 + r\nabla_{E_3} E_4 + (E_3 r) E_4, E_4 \rangle = \langle (E_3 r) E_4, E_4 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1323} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_3} E_2 - \nabla_{E_3} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_3]} E_2, E_3 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (rE_1) - \nabla_{E_3} (rE_3), E_3 \rangle \\ &= \langle r\nabla_{E_1} E_1 + (E_1 r) E_1 - r\nabla_{E_3} E_3 + (E_3 r) E_3, E_3 \rangle = \langle (E_3 r) E_3, E_3 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1324} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_3} E_2 - \nabla_{E_3} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_3]} E_2, E_4 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (rE_1) - \nabla_{E_3} (rE_3), E_4 \rangle \\ &= \langle r\nabla_{E_1} E_1 + (E_1 r) E_1 - r\nabla_{E_3} E_3 + (E_3 r) E_3, E_4 \rangle = \langle -2r^2 E_4, E_4 \rangle = -2r^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1334} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_3} E_3 - \nabla_{E_3} \nabla_{E_1} E_3 - \nabla_{[E_1, E_3]} E_3, E_4 \rangle = \langle \nabla_{E_1} (rE_4) - \nabla_{E_3} (-rE_2), E_4 \rangle \\ &= \langle r\nabla_{E_1} E_4 + (E_1 r) E_4 + r\nabla_{E_3} E_2 - (E_3 r) E_2, E_4 \rangle = \langle (E_1 r) E_4, E_4 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1414} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_4} E_1 - \nabla_{E_4} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{[E_1, E_4]} E_1, E_4 \rangle = \langle -\nabla_{E_4} (-rE_4) - \nabla_{rE_1} E_1, E_4 \rangle \\ &= \langle r\nabla_{E_4} E_4 + (E_4 r) E_4 - r\nabla_{E_1} E_1, E_4 \rangle = \langle -2r^2 E_4, E_4 \rangle = -2r^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1423} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_4} E_2 - \nabla_{E_4} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_4]} E_2, E_3 \rangle = \langle -\nabla_{E_4} (rE_3) - \nabla_{rE_1} E_2, E_3 \rangle \\ &= \langle -r\nabla_{E_4} E_3 - (E_4 r) E_3 - r\nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle = \langle 2r^2 E_3, E_3 \rangle = 2r^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1424} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_4} E_2 - \nabla_{E_4} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_4]} E_2, E_4 \rangle = \langle -\nabla_{E_4} (rE_3) - \nabla_{rE_1} E_2, E_4 \rangle \\ &= \langle -r\nabla_{E_4} E_3 - (E_4 r) E_3 - r\nabla_{E_1} E_2, E_4 \rangle = \langle 2r^2 E_3, E_4 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1434} &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_4} E_3 - \nabla_{E_4} \nabla_{E_1} E_3 - \nabla_{[E_1, E_4]} E_3, E_4 \rangle = \langle -\nabla_{E_4} (-rE_2) - \nabla_{rE_1} E_3, E_4 \rangle \\ &= \langle +r\nabla_{E_4} E_3 + (E_4 r) E_2 - r\nabla_{E_1} E_3, E_4 \rangle = \langle 2r^2 E_2, E_4 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2323} &= \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_3} E_2 - \nabla_{E_3} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{[E_2, E_3]} E_2, E_3 \rangle = \langle \nabla_{E_2} (rE_1) - \nabla_{E_3} (-rE_4), E_3 \rangle \\ &= \langle r\nabla_{E_2} E_1 + (E_2 r) E_1 + r\nabla_{E_3} E_4 + (E_3 r) E_4, E_3 \rangle = \langle -2r^2 E_3, E_3 \rangle = -2r^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2324} &= \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_3} E_2 - \nabla_{E_3} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{[E_2, E_3]} E_2, E_4 \rangle = \langle \nabla_{E_2} (rE_1) - \nabla_{E_3} (-rE_4), E_4 \rangle \\ &= \langle r\nabla_{E_2} E_1 + (E_2 r) E_1 + r\nabla_{E_3} E_4 + (E_3 r) E_4, E_4 \rangle = \langle -2r^2 E_3, E_4 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2334} &= \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_3} E_3 - \nabla_{E_3} \nabla_{E_2} E_3 - \nabla_{[E_2, E_3]} E_3, E_4 \rangle = \langle \nabla_{E_2} (rE_4) - \nabla_{E_3} (rE_1), E_4 \rangle \\ &= \langle r\nabla_{E_2} E_4 + (E_2 r) E_4 - r\nabla_{E_3} E_1 - (E_3 r) E_1, E_4 \rangle = \langle 2r^2 E_2, E_4 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2424} &= \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_4} E_2 - \nabla_{E_4} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{[E_2, E_4]} E_2, E_4 \rangle = \langle -\nabla_{E_4} (-rE_4) - \nabla_{rE_2} E_2, E_4 \rangle \\ &= \langle r\nabla_{E_4} E_4 + (E_4 r) E_4 - r\nabla_{E_2} E_2, E_4 \rangle = \langle -2r^2 E_4, E_4 \rangle = -2r^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2434} &= \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_4} E_3 - \nabla_{E_4} \nabla_{E_2} E_3 - \nabla_{[E_2, E_4]} E_3, E_4 \rangle = \langle -\nabla_{E_4} (rE_1) - \nabla_{rE_2} E_3, E_4 \rangle \\ &= \langle -r\nabla_{E_4} E_1 - (E_4 r) E_1 - r\nabla_{E_2} E_3, E_4 \rangle = \langle 2r^2 E_1, E_4 \rangle = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{3434} &= \langle \nabla_{E_3} \nabla_{E_4} E_3 - \nabla_{E_4} \nabla_{E_3} E_3 - \nabla_{[E_3, E_4]} E_3, E_4 \rangle = \langle -\nabla_{E_4} (rE_4) + \nabla_{rE_3} E_3, E_4 \rangle \\ &= \langle -r\nabla_{E_4} E_4 - (E_4 r) E_4 + r\nabla_{E_3} E_3, E_4 \rangle = \langle 4r^2 E_4, E_4 \rangle = 4r^2. \end{aligned}$$

Con esto hemos calculado 21 componentes. Realmente, si a las propiedades de simetría que hemos usado añadimos la primera identidad de Bianchi, veríamos que R sólo tiene 20 componentes independientes, pero resulta más trabajoso aplicar la identidad de Bianchi para identificar la componente de más que hemos calculado que computarla directamente.

B.2.3. Tensor de Ricci

Finalmente, computamos las 10 componentes independientes del tensor simétrico $R_{ij} = R_{kij}{}^k$:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= R_{111}{}^1 + R_{211}{}^2 + R_{311}{}^3 + R_{411}{}^4 = R_{1111} - R_{1212} - R_{1313} - R_{1414} = 0 - 4r^2 + 2r^2 + 2r^2 = 0, \\
R_{12} &= R_{112}{}^1 + R_{212}{}^2 + R_{312}{}^3 + R_{412}{}^4 = -R_{1112} + R_{1212} - R_{1323} - R_{1424} = -0 + 0 - 0 - 0 = 0, \\
R_{13} &= R_{113}{}^1 + R_{213}{}^2 + R_{313}{}^3 + R_{413}{}^4 = R_{1113} + R_{1223} - R_{1333} - R_{1434} = 0 + 0 - 0 - 0 = 0, \\
R_{14} &= R_{114}{}^1 + R_{214}{}^2 + R_{314}{}^3 + R_{414}{}^4 = R_{1114} + R_{1214} + R_{1334} - R_{1444} = 0 + 0 + 0 - 0 = 0, \\
R_{22} &= R_{122}{}^1 + R_{222}{}^2 + R_{322}{}^3 + R_{422}{}^4 = -R_{1212} + R_{2222} - R_{2323} - R_{2424} = -4r^2 + 0 + 2r^2 + 2r^2 = 0, \\
R_{23} &= R_{123}{}^1 + R_{223}{}^2 + R_{323}{}^3 + R_{423}{}^4 = -R_{1213} - R_{2223} - R_{2333} - R_{2434} = -0 - 0 - 0 - 0 = 0, \\
R_{24} &= R_{124}{}^1 + R_{224}{}^2 + R_{324}{}^3 + R_{424}{}^4 = -R_{1214} - R_{2224} + R_{2334} - R_{2444} = -0 - 0 + 0 - 0 = 0, \\
R_{33} &= R_{133}{}^1 + R_{233}{}^2 + R_{333}{}^3 + R_{433}{}^4 = -R_{1313} - R_{2323} + R_{3333} - R_{3434} = 2r^2 + 2r^2 + 0 - 4r^2 = 0, \\
R_{34} &= R_{134}{}^1 + R_{234}{}^2 + R_{334}{}^3 + R_{434}{}^4 = -R_{1314} - R_{2324} - R_{3334} - R_{3444} = -0 - 0 - 0 - 0 = 0, \\
R_{44} &= R_{144}{}^1 + R_{244}{}^2 + R_{344}{}^3 + R_{444}{}^4 = -R_{1414} - R_{2424} - R_{3434} + R_{4444} = 2r^2 + 2r^2 - 4r^2 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Efectivamente, se anulan todas y la métrica es Ricci llana.

Bibliografía

- [LeeSM] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2002.
- [Brickell] F. Brickell, *Differentiable manifolds; an introduction*, The New university mathematics series, Springer, 2002.
- [LeeRM] John M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics, V. N. Reinhold Co, 1970.
- [Matsushima] Yozo Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, 1972.
- [NN] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. 65 (1957), 391-404.
- [Hitchin] N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. 55 (1987), 59-126.
- [Bianchi] L. Bianchi, *Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, Soc. Ital. Sci. Mem. di Mat. 11 (1897), 267.
- [Berger] M. Berger, *Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France 83 (1955), 279-330.
- [Petersen] P. Petersen, *Riemannian geometry*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, New York, 2006.
- [GH] G.W. Gibbons, S.W. Hawking, *Gravitational Multi-Instantons*, Phys. Lett. B 78 (1978), no. 4, 430-432.