



**Universidad Zaragoza**

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Título: **CAMPOS MAGNÉTICOS EN SUPERFICIES**

**Miguel Murillas Rapún**

El Director

Fdo. **José L. Cabrerizo Jaraíz**  
Prof. Universidad de Sevilla

El Ponente

**Luis Ugarte Vislumbrales**  
Prof. Universidad de Zaragoza

Fdo: **Miguel Murillas Rapún**

Graduado en Matemáticas

Zaragoza, Julio 2015

## AGRADECIMIENTOS

En estas líneas quiero expresar mi gratitud a todas las personas que me han ayudado a llevar a cabo este trabajo, ya que sin su ayuda, amistad, conocimientos y apoyo no habría sido posible.

En particular, agradezco sinceramente al Profesor Ponente Dr. Luis Ugarte Vilumbrales de la Universidad de Zaragoza, y a mi director, Profesor Dr. José Luis Cabrero Jaraíz de la Universidad de Sevilla la dedicación, consejos, observaciones y apoyo de ambos en la realización de este Trabajo Fin de Grado, y sobre todo la confianza depositada en mí.

Dar las gracias también a todos los profesores que he tenido durante los años de mi graduación que me ha permitido ser capaz de dar forma en estas páginas al esfuerzo de estos dos últimos años. Dar las gracias también a mi familia, en especial a mis padres, que siempre me han apoyado en las derrotas y en los logros de mi vida y me han enseñado que el esfuerzo es el camino para lograr los objetivos.

---

# Índice general

---

<b>1. Resumen</b>	<b>5</b>
<b>2. Campos magnéticos</b>	<b>11</b>
2.1. Configuraciones helicoidales . . . . .	11
2.2. Los orígenes del electromagnetismo . . . . .	14
<b>3. Campo Magnético en una variedad Riemanniana</b>	<b>23</b>
3.1. Las ecuaciones de Maxwell . . . . .	23
3.2. La ley de la fuerza de Lorentz . . . . .	28
3.3. Ejemplo modelo . . . . .	29
3.4. Campos Magnéticos en una Variedad Riemanniana . . . . .	31
<b>4. Curvas Magnéticas en Superficies</b>	<b>35</b>
4.1. Campos magnéticos en superficies . . . . .	35
4.2. Ejemplo de campo magnético uniforme . . . . .	38
4.3. Campos magnéticos en variedades de dimensión 3 . . . . .	40



# CAPÍTULO 1

---

## Resumen

---

Este trabajo está basado en una serie de artículos publicados por un grupo de investigadores de los Departamentos de Geometría y Topología de Sevilla y Granada, que compartieron Proyectos Coordinados del Ministerio a partir del año 2004 y en el que se fijaban varios objetivos orientados al estudio de problemas de la Física desde un punto de vista Geométrico. Así, según el resumen de la propuesta del Proyecto MTM2004-04934-C04-04 se dice:

*Es bien conocida la existencia tanto en Matemáticas como en Física, de una amplia gama de problemas y fenómenos no lineales, en los cuáles las teorías de curvas y superficies (y más generalmente, la de subvariedades) juegan un papel fundamental ..... la teoría de geodésicas y curvas nulas, de elásticas generales, de superficies de Willmore y subvariedades de Willmore-Chen ..... las teorías bosónicas de cuerdas ..... así como el de las trayectorias de partículas relativistas con curvatura y torsión en espacios de curvatura constante (Riemannianos y Lorentzianos) ..... el problema de Landau-Hall para campos magnéticos sobre una superficie y encontrar su relación con los modelos de partículas relativistas, etc. ([4, 7, 8, 9, 10, 11]).*

Hemos estructurado esta memoria de la siguiente forma: tras ésta breve introducción, abrimos el Capítulo 2 observando el lugar destacado que ocupan las formaciones helicoidales en la Naturaleza, consecuencia de una ley de la propia Naturaleza que indica el cumplimiento de un principio de economía: el crecimiento se realiza con el coste mínimo de espacio. Así, tanto en el mundo microscópico como el macroscópico encontramos formaciones helicoidales naturales, e incluso podemos añadir el uso de dicha estructura helicoidal en gran cantidad de objetos y obras realizadas por el hombre. La hélice aparecerá también como la trayectoria que sigue una partícula cargada en presencia de un campo magnético.

Tras éstas consideraciones damos una pequeña introducción histórica del magnetismo, la electricidad y el electromagnetismo en la Sección 2.2 y a continuación recordamos los conceptos más simples asociados, como el campo magnético creado por un imán, visualizando sus líneas de campo (cerradas) mediante limaduras de hierro. Una corriente eléctrica a través de un hilo produce también un campo magnético del que Oersted obtuvo su dirección.

En el Capítulo 3 abrimos la Sección 3.1 recordando conceptos matemáticos-físicos que nos serán necesarios para la descripción de los operadores sobre funciones y campos más elementales, como son el gradiente de una función, la divergencia y rotacional de un campo con la notación utilizada en Física, menos rigurosa que la matemática, pero muy intuitiva y práctica.

A continuación presentamos las cuatro ecuaciones de Maxwell [22] (originalmente 20) en su versión diferencial de 1884, que Oliver Heaviside junto con Willard Gibbs agruparon y reformularon en la notación vectorial más reconocible de la actualidad. La gran contribución de James Clerk Maxwell fue reunir en estas ecuaciones largos años de resultados experimentales, debidos a Coulomb, Gauss, Ampere, Faraday y otros, introduciendo el concepto de campo, y unificando los campos eléctricos y magnéticos en un solo concepto: el campo electromagnético. Estas ecuaciones describen los fenómenos electromagnéticos, de las que nos interesa destacar la segunda, la *Ley de Gauss para el campo magnético*, que se puede interpretar como una ley (no probada) de la **no existencia** de monopolos.

En la Sección 3.2 exponemos la Ley de la fuerza de Lorentz, que nos indica cómo se moverá una partícula cargada en presencia de un campo magnético (sin campo eléctrico presente). Esta ley es la base fundamental del estudio de las curvas magnéticas asociadas a un campo magnético, y ha sido muy contrastada con lo observado en la realidad. Hendrik Antoon Lorentz introduce las teorías atomistas en la teoría de Maxwell y crea modelos que explicaran la interacción entre la radiación y la materia, convencido de que esta última tenía una estructura atómica. Fruto de estos trabajos enmarcó la teoría de Maxwell en una teoría microscópica del electromagnetismo considerando los campos existentes en el interior de la materia en los espacios vacíos entre las partículas. Todo esto le llevó al que sería uno de los mayores éxitos de su carrera como físico teórico, la predicción exacta del efecto Zeeman normal por el cual recibió el premio Nobel de Física en 1902 junto con Pieter Zeeman (el efecto es descrito como la división de una línea espectral en varios componentes cuando el elemento se coloca en la presencia de un campo magnético).

En la Sección 3.3 estudiamos un sencillo ejemplo modelo en  $\mathbb{R}^3$  considerando un campo estático con la dirección del eje  $OZ$  y su efecto mediante la Ley de Lorentz sobre una partícula cargada moviéndose con una dirección dada. Con éste ejemplo en mente, disponemos de una motivación para definir lo que será un campo magnético en una variedad Riemanniana de dimensión arbitraria  $m$ , que

será introducido en la Sección 3.4. Se define entonces el concepto de campo magnético  $F$  en una variedad Riemanniana  $(M^m, g)$ , donde  $g$  es la métrica en  $M^m$ . La fuerza de Lorentz asociada a un campo magnético  $F$  se define de forma natural y por fin, el concepto de *curva magnética* del campo  $F$ . Algunas propiedades fundamentales de las curvas magnéticas son obtenidas y convenientemente comparadas con las propiedades de las curvas geodésicas de la variedad.

En el Capítulo 4 abrimos la Sección 4.1 describiendo cómo es un campo magnético  $F$  en una superficie Riemanniana. Se define a continuación la fuerza de Lorentz  $\Phi$  de dicho campo, lo que nos permitirá calcular la curvatura de una curva magnética correspondiente a  $F$ . A continuación se considera el caso particular de los *campos uniformes* en una superficie, para los que damos la caracterización de las curvas magnéticas en el caso de que nuestra superficie sea de curvatura  $K$  constante distinguiendo los casos de curvatura cero, positiva y negativa.

Como una aplicación, en la Sección 4.2 terminamos estudiando un caso práctico: planteamos encontrar las superficies de revolución cuyos paralelos son curvas magnéticas correspondientes a un determinado campo magnético uniforme dado. Veremos que la superficie no trivial que cumple tal propiedad es necesariamente la pseudo-esfera.

Finalmente, presentamos los campos magnéticos en variedades Riemannianas de dimensión 3, en las que brevemente exponemos la correspondencia biunívoca entre el campo magnético  $F$  considerado como una 2-forma cerrada y el campo vectorial  $B$  asociado a la misma, y que tiene además divergencia nula, como se exige en la segunda ley de Maxwell.

## Summary

This study is based on some results obtained by a team of researches from the University of Granada and Sevilla which collaborate in a Coordinate Research Project from 2004 to 2007. In fact, the application for the Projects starts,

“It is well known the existence, in Mathematics and Physics, of a large series of nonlineal problems strongly related with the theories of curves, surfaces and more generally submanifolds. Most of them involve the extrinsic geometry of the submanifolds and in particular, the tension or mean curvature. Some well known examples are the theory of minimal surfaces and the theory of capillary surfaces. However, other with higher projection in physics are: the theory of geodesics and null curves, the general elatica, Willmore surfaces and Willmore-Chen submani-

folds in its more wide sense. These topics provide interesting nonlineal models of physics phenomena, relativistic particles (massive or massless), membranes and vesicles, gravitational waves and Cauchy hypersurfaces, bosonic string theories, superstring theories, branes and M-theory."

We have structured this work on three chapters. After this summary, in Chapter 2 we note that helical configurations are structures that occur very often in nature. They appear in microscopic systems (biomolecules, bacterial fibers, nanosprings, protein chains in particular DNA, etc.), as well as in macroscopic phenomena (brussels sprouts, snail shells, coiled springs, vortices, etc.). The helix is usually defined as a curve that makes a constant angle with a given vector. These curves are called generalized helices, and can be characterized by the constancy of the ratio between torsion and curvature. Then we give a brief historical review of electricity and magnetism. A connection between electricity and magnetism was discovered (accidentally) by Orsted over 100 years ago, who noticed that a compass needle is deflected when brought into the vicinity of a current carrying wire. A further connection between electricity and magnetism was discovered by Faraday, who found that changing magnetic fields through loops of wire will cause currents to be induced. Now we give a review of necessary mathematical and physical concepts, such as the gradient, divergence and rotational operators.

Maxwell's equations are a set of four partial differential equations that, together with the Lorentz force law, form the foundation of classical electrodynamics, classical optics, and electric circuits. Maxwell's first major contribution to science was his extension and mathematical formulation of Michael Faraday's theories of electricity and magnetic lines of force. In his research, conducted between 1864 and 1873, Maxwell showed that a few relatively simple mathematical equations could express the behaviour of electric and magnetic fields and their interrelated nature; that is, an oscillating electric charge produces an electromagnetic field. These four partial differential equations first appeared in fully developed form in Electricity and Magnetism (1873). Since known as Maxwell's equations they are one of the great achievements of 19th-century physics.

In Section 3.2 we show the Lorentz force law, which explain how a charged particle moves in the presence of a uniform magnetic field. This law is the basic tool in order to study the magnetic curves, which has been widely confirmed by laboratory experiments. Lorentz shows the interactions between matter and radiation that allowed him to predict the normal Zeeman effect. As a consequence was awarded with the Nobel Prize in Physics jointly with to Pieter Zeeman in 1902.

In Section 3.3 we study a particular example of a magnetic field in  $\mathbb{R}^3$  which we assume with direction of the  $Ox^3$ -axis. Then, we consider a charged particle moving in the  $x^1x^2$  plane and apply the Lorentz law to obtain a cylindrical helix as magnetic trajectory. With this example as a model, we introduce the notion of magnetic field on a Riemannian manifold  $(M^n, g)$  with metric  $g$  as a closed 2-form

$F$  on  $M^n$ . The Lorentz force associated to a magnetic field  $F$  is introduced, and then the magnetic curves of  $F$ . Some basic properties of these curves are obtained and compared with those of the geodesic curves.

In Chapter 4 we start by studying magnetic fields  $F$  on a Riemannian surface  $(M^2, g)$ . Then we introduce the Lorentz force  $\Phi$  of this magnetic field, which will allow us to obtain the curvature of the magnetic curves. In particular, uniform magnetic fields are considered and their corresponding magnetic curves are obtained when the surface is a constant curvature surface. As an exercise, we prove that for a given revolution surface in  $\mathbb{R}^3$  such that all their parallel curves are the magnetic curves corresponding to a uniform magnetic field  $F$ , then the surface is necessarily the Pseudosphere.

Finally, we present a short introduction to magnetic fields on 3-dimensional manifolds, where magnetic fields can be considered as closed 2-forms or as divergence-free vector fields.



# CAPÍTULO 2

---

## Campos magnéticos

---

### 2.1. Configuraciones helicoidales

En 1939 Paul Dirac escribió: *El investigador, en su esfuerzo por expresar las leyes fundamentales de la Naturaleza en forma matemática, debería preocuparse principalmente por la belleza matemática. Ocurre a veces, que los requerimientos de simplicidad y belleza son los mismos, pero cuando ambos se enfrentan, el segundo debe prevalecer.*

Las configuraciones helicoidales son estructuras muy abundantes en la Naturaleza. En particular, su interés en Biología está estrechamente relacionado con el bien conocido (en la comunidad de biólogos), **Teorema de Pauling** (Nobel de Química, 1954): *objetos idénticos, regularmente ensamblados, forman una hélice.*

Parece que el éxito de la configuración helicoidal, como una forma popular en las moléculas, se debe a que la naturaleza trabaja de la mejor manera contra las restricciones existentes. La forma espiral del ADN viene dictada por el espacio disponible en una célula, así como la forma de una escalera de caracol obedece al tamaño de un apartamento.

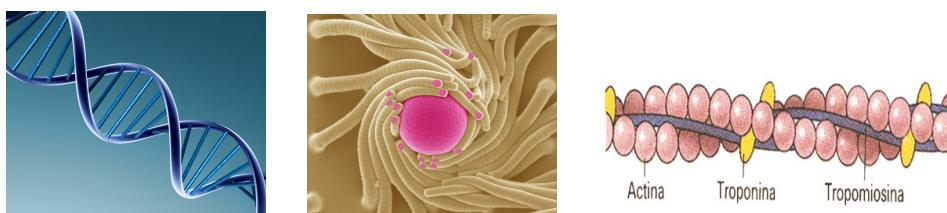


Figura 2.1: ADN, óxido de zinc sobre óxido de indio y la proteína Miosina

Así ocurre también en fenómenos macroscópicos **naturales**: ciclones, cuernos de animales, plantas,...



Figura 2.2: Tornado, cuerno, girasol...

Podemos observar también formaciones helicoidales en distintos ámbitos de la vida cotidiana producidos por **el hombre**, como en la arquitectura, maquinaria,...



Figura 2.3: Parque Güell, edificio en Taipeí, escalera,...

Y de una forma especial el **Campo Magnético Terrestre** actuando sobre partículas cargadas que son atrapadas por el campo **B**,

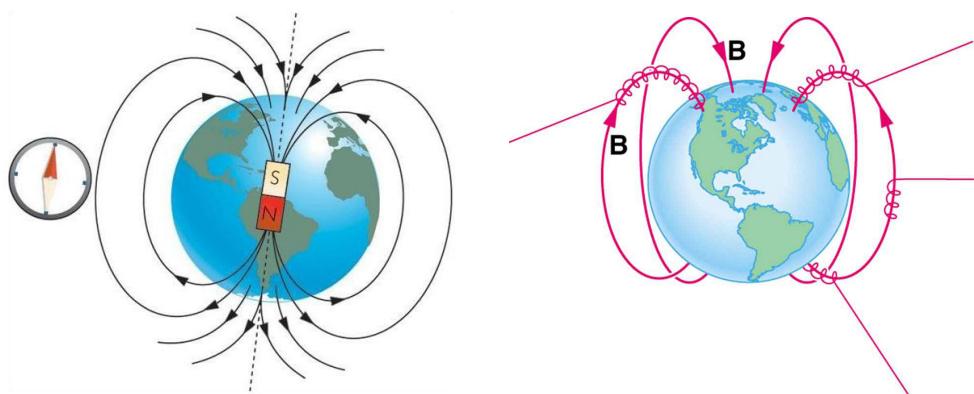


Figura 2.4: Campo Magnético Terrestre

La actuación del campo magnético Terrestre sobre la lluvia de partículas cargadas que caen sobre la Tierra desde el espacio exterior es extraordinaria: las partículas cargadas (electrones y protones) provenientes de ese espacio exterior, principalmente del sol, son enviadas hacia la superficie terrestre por el viento solar,

y quedan milagrosamente atrapadas en su mayor parte por este campo (Ley de la Fuerza de Lorentz), forzando a éstas a girar en espiral alrededor de las líneas de dicho campo llevándolas hacia el polo norte, y evitando así que caigan directamente sobre nuestra superficie. Esto significa que disponemos de una protección natural sobre las mismas, de modo que la mayor parte de ellas en su camino de acercamiento a los polos girando a alta velocidad son expulsadas de nuevo al exterior por el aumento de concentración de las líneas de campo en esa zona. En la zona ecuatorial se observa que se mantienen dos bandas toroidales que rodean la Tierra a diferentes alturas con alta concentración de estas partículas cargadas recién atrapadas. Estas dos bandas se denominan los *cinturones de Van Allen*. Fueron descubiertos en 1958 por el físico americano James van Allen, que era responsable de un experimento confiado al primer satélite artificial americano *Explorer 1*. Los cinturones son evitados por las misiones espaciales tripuladas, ya que su radiación puede dañar el organismo humano. Estas regiones se extienden desde algunos cientos de kilómetros sobre la Tierra hasta unos 48.000 a 64.000 km. La mayor parte de los protones de alta energía (mayor de 10 MeV) se encuentran en el cinturón interior a una altitud de 3.200 km; los electrones están más concentrados en un cinturón exterior que se extiende a muchos radios de la Tierra en el espacio.

Ha sido también de gran interés una noticia publicada primero en la prensa ([1],[2], etc.) y después en revistas científicas ([30],[20], etc.) el **1 de abril de 2013** sobre la conocida **SuperNova 1987A** (descubierta en 1987): *A team of astronomers led by the International Centre for Radio Astronomy Research (ICRAR) have succeeded in observing the death throws of a giant star in unprecedented detail: "Supernova remnants are like natural particle accelerators, the radio emission we observe comes from electrons spiralling along the magnetic field lines and emitting photons every time they turn", said Professor Lister Staveley-Smith, Director of ICRAR.*



Figura 2.5: SN1987A

Bajo nuestro punto de vista, estas observaciones confirman que la Ley de Lorentz se cumple tanto en nuestro entorno próximo (con el campo magnético terrestre actuando sobre las partículas cargadas) como con en el caso de la Supernova 1987 que ocurrió aproximadamente a 168.000 años luz de la Tierra, y las partículas cargadas atrapadas por el campo magnético de la estrella en explosión giran describiendo hélices alrededor del eje que representan las líneas de los campos magnéticos generados. La supernova está situada en la Gran Nube de Magallanes. Fue la supernova más cercana observada desde SN 1604, que apareció en la Vía Láctea.

A pesar de ser la hélice un tipo de curva bastante simple en Geometría Diferencial, muy detalladamente estudiada por Lancret [18], en la actualidad se siguen publicando artículos en los que son protagonistas en espacios más generales que el Euclídeo, y que a veces resultan ser soluciones a ciertos problemas ([5],[6] [29], etc.)

## 2.2. Los orígenes del electromagnetismo

Hacemos a continuación un breve repaso histórico del magnetismo, la electricidad y electromagnetismo.

### El Magnetismo.

El origen del conocimiento de la interacción magnética hay que buscarlo varios siglos antes de Cristo, cuando el hombre observó que existen ciertos minerales de hierro, cobalto o manganeso que tienen la propiedad de atraer pequeños trozos de hierro. A esta propiedad se le dió el nombre de magnetismo. La palabra *magnetismo* viene de la región griega de Magnesia la cual forma parte de la periferia de Tesalia (Grecia), lugar donde se encontraban esos minerales, en particular la magnetita. El naturalista Plinio *El viejo* nos habla de su existencia en el siglo I de nuestra era. Un material de esta clase recibe el nombre de imán, siendo el efecto de atracción más pronunciado en ciertas zonas del imán denominadas polos magnéticos.

En China también existen referencias sobre este fenómeno, la primera alusión se encuentra en un manuscrito del siglo IV a.C. titulado *Libro del amo del valle del diablo: La magnetita atrae al hierro hacia sí o es atraída por éste*. La primera mención sobre la atracción de una aguja aparece en un trabajo realizado entre los años 20 y 100 de nuestra era: *La magnetita atrae a la aguja*.

Según escribió Tales de Mileto alrededor del 600 a.C., una forma de electricidad ya fue observada por los antiguos griegos que podía causar una particular atracción por frotamiento de piel sobre varias sustancias, como el ámbar. Tales de Mileto escribió sobre el efecto actualmente conocido como *electricidad estática*.



Figura 2.6: Magnesia

Los griegos notaron que los botones de ámbar podrían atraer objetos ligeros como el pelo y que si ellos se frotaba el ámbar durante bastante tiempo podría incluso saltar una chispa. Durante esta época en la alquimia y la filosofía natural, se pensaba que podría existir un medio material llamado «éter», una sustancia que llena el espacio o campo.

En el periodo comprendido entre los años 1000-1200 d.C. se hizo la primera aplicación práctica del imán. Un matemático chino, Shen Kua (1030-1090) fue el primero que escribió acerca del uso de una aguja magnética para indicar direcciones, que fue el antecedente de la brújula y mejoró la precisión en la navegación empleando el concepto astronómico del norte absoluto. Este instrumento se basa en el principio de que si se suspende un imán en forma de aguja, de tal manera que pueda girar libremente, uno de sus extremos siempre apuntará hacia el norte. Más tarde, después del año 1100, Chu Yu informó que la brújula se utilizaba también para la navegación entre Cantón y Sumatra. Hacia el siglo XII los chinos ya habían desarrollado la técnica lo suficiente como para utilizar la brújula para mejorar la navegación.

En 1180, el inglés Alexander Neckam (1157-1217) fue el primer europeo que hizo referencia a esa capacidad del magnetismo para señalar la dirección. Más tarde la aguja magnética se colocó sobre una tarjeta marcada con distintas direcciones y la aguja se podía mover libremente girando sobre la tarjeta. Al dispositivo se le dio el nombre de brújula, y en la terminología marinera a la brújula se la llama compás.

En el año 1600 el inglés William Gilbert (1544-1603), médico de la reina Isabel I, publicó un famoso tratado, *De magnet*, en el que resumió el conocimiento que se tenía en su época sobre los fenómenos magnéticos. Analizó las diferentes

posiciones de la brújula y propuso que la Tierra es un enorme imán, lo que constituyó su gran contribución. De esta forma pudo explicar la atracción que ejerce el polo norte sobre el extremo de una aguja imantada. Asimismo, Gilbert se dio cuenta de que cada imán tiene dos polos, el norte (N) y el sur (S), que se dirigen hacia los respectivos polos terrestres. Descubrió que polos iguales se repelen, y que que polos distintos se atraen, y que si un imán se calienta pierde sus propiedades magnéticas, las cuales vuelve a recuperar si se le enfriá a la temperatura ambiente.

### **La Electricidad.**

En cuanto a la electricidad, hacia principios del siglo XVIII se inició la investigación en detalle de los fenómenos eléctricos. De 1729 a 1736 dos científicos ingleses, Stephen Gray (1696-1736) y Jean Desaguliers (1683-1744) dieron a conocer los resultados de una serie de experimentos eléctricos: encontraron que si unían por medio de un alambre metálico un tubo de vidrio previamente frotado con un trozo de corcho, éste se electrificaba, ya que al aproximarle trozos de papel éstos eran atraídos por él. Este fenómeno persistía aun si el vidrio y el corcho se separaban a distancias de 300 metros. Si en lugar de efectuar la unión con un alambre metálico empleaban un hilo de seda, el corcho no se electrificaba. Además descubrieron que si la línea de transmisión hacía contacto con el suelo, o sea con la tierra, el corcho dejaba de electrificarse.

Con todos estos experimentos llegaron a la conclusión de que la electrificación era un efecto que se presentaba en la superficie de los cuerpos, en donde aparecía lo que llamaron un “fluido” eléctrico al que en la actualidad se le llama carga eléctrica. Encontraron que la carga eléctrica podía moverse libremente de un cuerpo a otro a través de ciertos materiales que llamaron conductores (el cuerpo humano, los metales, el aire húmedo, etc.). También existen materiales que no conducen electricidad, a los que se llama aislantes o no-conductores (la madera, la seda, la cerámica, etcétera).

Un científico francés, François du Fay (1698-1739), hizo otro tipo de experimentos entre 1733 y 1734. Frotó con tela de seda dos tubos de vidrio iguales. Al acercar los tubos vio que siempre se repelían. Así concluyó que dos materiales idénticos se repelan cuando se electrifican en formas idénticas. Como cada uno de los tubos adquiere el mismo tipo de carga se puede afirmar que cargas iguales se repelen.

Poco después, Benjamín Franklin (1706-1790) realizó estos mismos descubrimientos en Estados Unidos, sin conocer los trabajos del francés. En su opinión, el vidrio electrificado había adquirido un exceso de fluido (carga) eléctrica, y le llamó a este estado positivo. Al estado de la seda con la que frotó el vidrio lo llamó negativo, pues consideraba que había tenido una deficiencia de fluido (carga) eléctrica. Esta terminología de Franklin es la que se utiliza hasta hoy en día, aunque

no se acepten las ideas con que la concibió este científico. En resumen, existen en la naturaleza dos tipos de cargas eléctricas: positiva y negativa. Además, se puede concluir de una multitud de resultados experimentales que dos cargas eléctricas del mismo tipo (negativa-negativa o positiva-positiva) se repelen, mientras que dos cargas de tipos distintos (positiva-negativa) se atraen.

El ingeniero militar francés Charles Auguste Coulomb (1736-1806), que había medido las fuerzas entre cargas eléctricas (Ley de Coulomb:  $F = k \frac{q_1 q_2}{d^2}$ ) midió también con su balanza las fuerzas entre los polos de dos imanes. Descubrió que la magnitud de esta fuerza varía con la distancia entre los polos. Mientras mayor sea la distancia, menor es la fuerza: si la distancia aumenta al doble, la fuerza disminuye a la cuarta parte; si la distancia aumenta al triple, la fuerza disminuye a la novena parte y así sucesivamente, igual que en el caso de las cargas eléctricas que él mismo había descubierto.

Así, en las primeras décadas del siglo XVIII ya existían máquinas que producían cargas eléctricas por medio de fricción. Funcionaban esencialmente a base de discos que se hacían girar por medio de manivelas. Al girar se friccionaban con otra superficie y se cargaban, de la misma forma en que un trozo de vidrio se carga al frotarlo con un paño. Estas máquinas producían cantidades respetables de carga eléctrica y al acercarlas a otras superficies se producían chispas. Era muy frecuente encontrar estas máquinas en salones de juegos, pues hacían que los cabellos de las señoritas se pusieran de punta al ser atraídos por las cargas generadas.

Hacia 1746 Pieter van Musschenbroek, en Leiden, Holanda, construyó el primer dispositivo para almacenar cargas eléctricas. Se trataba de una botella de vidrio que estaba recubierta, tanto en sus paredes interiores como exteriores, de una capa muy delgada de estaño. En esta famosa botella de Leiden se pudieron almacenar considerables cantidades de carga eléctrica, producidas por las máquinas de fricción. Posteriormente se diseñaron otros dispositivos más prácticos y cómodos para almacenar carga eléctrica, a los cuales se llamó condensadores.

### **Electromagnetismo.**

El conocimiento del magnetismo se limitaba a los imanes, hasta que Hans Christian Oersted en 1820 demostró experimentalmente que existía una relación clara entre los fenómenos eléctricos y magnéticos. No lo demostró hasta 1820, inspirando los desarrollos posteriores de André-Marie Ampère y Faraday, cuando descubrió la desviación de una aguja imantada al ser colocada en dirección perpendicular a un conductor eléctrico, por el que circula una corriente eléctrica, demostrando así la existencia de un campo magnético en torno a todo conductor atravesado por una corriente eléctrica, e iniciándose de ese modo el estudio del electromagnetismo.

Esta relación la puso de manifiesto Oersted al comprobar experimentalmente que una corriente eléctrica era capaz de desviar una aguja imantada, confirmán-



Figura 2.7: Hans Christian Oersted, Rudkobing (Dinamarca), 1777 – 1851

dose de esta forma que una corriente eléctrica crea un campo magnético. Oersted estaba preparando su clase de física en la Universidad de Copenhague, cuando al mover una brújula cerca de un cable que conducía corriente eléctrica notó que la aguja giraba hasta quedar en una posición perpendicular a la dirección del cable. Más tarde repitió el experimento una gran cantidad de veces, confirmando el fenómeno. Por primera vez se había hallado una conexión entre la electricidad y el magnetismo en un accidente que puede considerarse como el nacimiento del electromagnetismo. Es decir, una corriente eléctrica produce efectos magnéticos cambiando la orientación de la varilla imantada. El propio Oersted acuñó el término *electromagnetismo* para la rama de la Física que englobaría desde entonces la Electricidad y el Magnetismo.

Experimentos posteriores realizados por Ampère demostraron que también dos corrientes eléctricas interactúan, atrayéndose o repeliéndose los respectivos conductores. El físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) desarrolló la teoría electromagnética clásica, sintetizando todas las anteriores observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad, magnetismo y aun sobre óptica, en una teoría consistente. El Electromagnetismo continuó desarrollándose en el siglo XX, siendo incorporado en las teorías más fundamentales como la Teoría de campo de gauge, en la electrodinámica cuántica y en la teoría electro débil.

El electromagnetismo ilustra la relación entre la ciencia y la tecnología. Una vez realizados los descubrimientos científicos tuvieron un rápida aplicación práctica y viceversa. El conocimiento de la relación directa entre electricidad y magnetismo permitieron obtener aplicaciones importantes, como el telégrafo o los motores eléctricos y generadores de electricidad. El hecho de disponer de fuentes de electricidad de gran intensidad cambió la vida de la humanidad, principalmente debido a la iluminación eléctrica y al teléfono. De otra parte James Clerk Maxwell realizó una síntesis de los trabajos de Ampère y Faraday sobre electricidad y

magnetismo que le llevó a descubrir que la luz era de origen eléctrico y magnético. Maxwell predijo las ondas electromagnéticas y Hertz llevó a cabo experimentos y quedó verificada la hipótesis de Maxwell.

A principios del siglo XX los trabajos de Marconi dieron como resultado el teléfono inalámbrico, y poco después de entender el funcionamiento de los tubos de vacío apareció la radio, y con el tiempo la televisión y el radar, que al parecer fue determinante en la victoria de los ingleses en la llamada Batalla de Inglaterra. Para mejorar su funcionamiento y reducir su tamaño se trabajó con microondas generadas por el magnetrón. Hacia 1940 se inventa el transistor (los fundamentos de física cuántica fueron indispensables para entender la estructura microscópica de los sólidos). En 1946 se termina de construir un dispositivo definitivo: la computadora electrónica.

Desde 1950 la cadena de descubrimientos y aplicaciones ha sido continua. Así, una aplicación basada en un mecanismo que Einstein propuso en 1917 para explicar la distribución de la radiación encontrada por Planck en 1900 permitió construir el láser.

Finalmente, los avances de los últimos años de la actualidad utilizan la fotónica, es decir, transmisión de señales, pero ahora por medio de ondas electromagnéticas y usando fibras ópticas, con posibilidades de reemplazar a los dispositivos electrónicos, sustituyendo los aparatos electrónicos por fotónicos.

Durante la segunda mitad del siglo XIX los resultados de los trabajos de Faraday, Maxwell y Hertz condujeron al desarrollo de la física moderna, a la creación de nuevos conceptos que constituyen una nueva imagen de la realidad distinto del anterior o mecánico. Entre estos conceptos está el concepto de campo.

### Los Campos

Para familiarizarnos con el concepto de campo vamos a recordar cómo son las líneas de fuerza del campo gravitatorio, con el objetivo de facilitar la visualización de las líneas de fuerza de los campos magnéticos, las cuales, a pesar de representarse de forma parecida son algo más complejas.

Sabemos por la *ley de la Gravitación Universal* que dos partículas se atraen mutuamente con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Podemos representar este hecho como se hace en siguiente figura.

El pequeño círculo del gráfico representa el cuerpo atrayente, en nuestro caso por ejemplo el Sol. En realidad este diagrama debe imaginarse en el espacio y no como figura plana, de manera que el círculo representa entonces a una esfera. La flecha dibujada sobre cada una de las líneas indica que la fuerza es atractiva y que por tanto todo cuerpo próximo a la esfera es atraido por ella. Estas rectas, se llaman líneas de fuerza del campo gravitacional y nos indica cómo se comportaría un cuerpo colocado en la proximidad de la esfera, es decir, la trayectoria que seguirá dicho cuerpo. Dado que esas líneas se reúnen en el centro de la esfera,

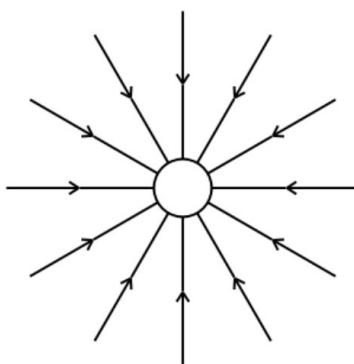


Figura 2.8: Representación de las líneas de fuerza sobre un cuerpo atrayente.

es evidente que su densidad es mayor en la proximidad de ella y disminuye a medida que se alejan. Esta densidad indica como varía la fuerza en relación con la distancia.

Al igual que hemos hecho con la gravedad podemos hacerlo con el magnetismo y visualizar las líneas de fuerza de un campo magnético. Por ejemplo, las líneas del campo magnético creado por un imán pueden visualizarse con ayuda de limaduras de hierro distribuidas alrededor del mismo sobre un cartón (figura 2.9).

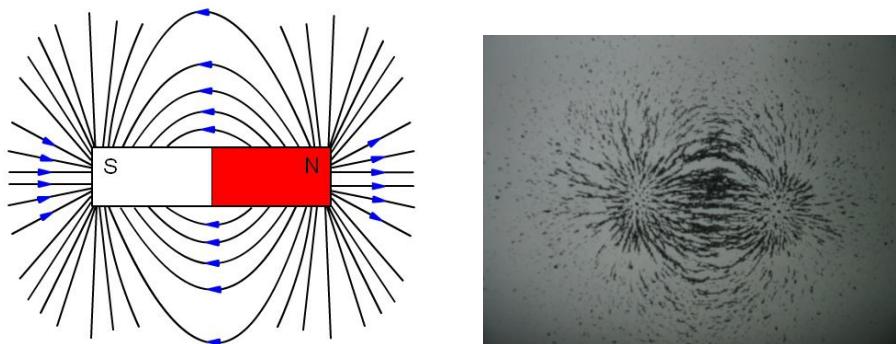


Figura 2.9: El campo magnético se representa mediante el vector tangente a la línea de campo.

El campo magnético  $\mathbf{B}$  es una magnitud vectorial. Puede estar producido por una carga puntual en movimiento o por un conjunto de cargas en movimiento, es decir, por una corriente eléctrica. Para visualizar las líneas del campo magnético creado por un hilo conductor rectilíneo podemos colocar a su alrededor un gran número de agujas imantadas que nos indiquen en cada punto la dirección del campo magnético.

Se comprueba que a una distancia pequeña del conductor respecto a su longi-

tud, existe un patrón de líneas de campo consistente en circunferencias centradas en el conductor, contenidas en planos perpendiculares al mismo (figura 2.10).

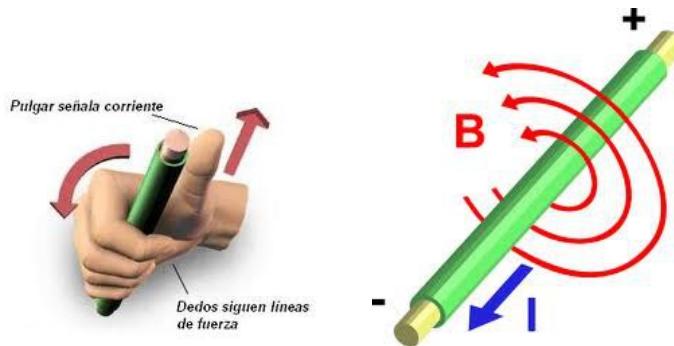


Figura 2.10: El campo magnético creado por un conductor rectilíneo.

Además se demuestra experimentalmente que si el sentido de la corriente se invierte, las agujas dan media vuelta, mostrando esto que el sentido del campo magnético también se invierte.

Para determinar cuál es el sentido de las líneas del campo a partir del sentido de la corriente se utiliza la regla de la mano derecha o de avance de un tornillo en su giro: cogiendo el hilo conductor con la mano derecha y extendiendo el dedo pulgar en el sentido de circulación de la corriente, el sentido de los demás dedos es el que nos indica el sentido de las líneas de campo.

Si queremos aumentar la intensidad del campo magnético creado por una corriente eléctrica en un punto del espacio sin tener que incrementar la intensidad de corriente podemos enrollar el conductor alrededor de dicho punto formando una espira. De esta manera, las líneas se superponen en el entorno del punto, provocando esto un aumento del campo magnético en la región determinada por la espira (figura 2.11).

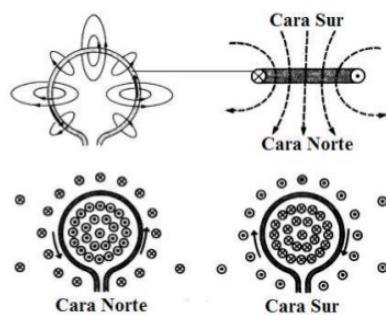


Figura 2.11: Líneas de campo magnético en el entorno de un punto interior a una espira.

Consideremos ahora el caso de una corriente que circula por un solenoide, lla-

mando así a un conductor en forma de espiral, como el de la figura 2.12. Las líneas de campo magnético son perpendiculares a las espiras y su sentido es el del avance de un tornillo que gira siguiendo el sentido de la intensidad de corriente. En dicha figura se ve como las líneas de fuerza son curvas cerradas que rodean al solenoide. Si comparamos las líneas del campo magnético generado por el solenoide (figura 2.12) con las líneas del campo magnético generado por un imán (figura 2.9) se puede comprobar que el solenoide induce un campo magnético muy similar al del imán:

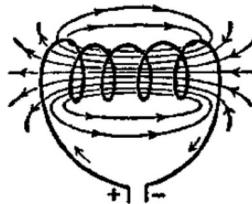


Figura 2.12: Estructura del campo magnético de una corriente solenoidal.

La unidad de campo magnético en el Sistema Internacional es el tesla (T). Un tesla se define como el campo magnético que ejerce una fuerza de 1 N (newton) sobre una carga de 1 C (coulombio) que se mueve a velocidad de 1 m/s dentro del campo y perpendicularmente a las líneas de campo.

El tesla es una unidad muy grande, por lo que a veces se emplea como unidad de campo magnético el gauss (G) que, aunque no pertenece al Sistema Internacional sino al sistema CGS (cegesimal: centímetro, gramo, segundo) tiene un valor más acorde con el orden de magnitud de los campos magnéticos que habitualmente se manejan:  $1 \text{ T} = 10.000 \text{ gauss}$ .

# CAPÍTULO 3

---

## Campo Magnético en una variedad Riemanniana

---

### 3.1. Las ecuaciones de Maxwell



Figura 3.1: James Clerk Maxwell (1831-1879)

Las ecuaciones de Maxwell representan una de las formas más elegantes y concisas de establecer los fundamentos de la Electricidad y el Magnetismo. A partir de ellas, se pueden desarrollar la mayoría de las fórmulas de trabajo en este campo. Debido a su breve declaración, encierran un alto nivel de sofisticación matemática.

## 24 CAPÍTULO 3. CAMPO MAGNÉTICO EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA

Son un conjunto de cuatro ecuaciones (originalmente 20) que describen por completo los fenómenos electromagnéticos. La gran contribución de James Clerk Maxwell fue reunir en estas ecuaciones largos años de resultados experimentales, debidos a Coulomb, Gauss, Ampere, Faraday y otros, introduciendo los conceptos de campo y corriente de desplazamiento, y unificando los campos eléctricos y magnéticos en un solo concepto: el campo electromagnético. La historia es aún confusa, debido a que el término “ecuaciones de Maxwell” se usa también para un conjunto de ocho ecuaciones en la publicación de Maxwell de 1865, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, y esta confusión se debe a que seis de las ocho ecuaciones son escritas como tres ecuaciones para cada eje de coordenadas, así se puede uno confundir al encontrar veinte ecuaciones con veinte incógnitas.

Podemos escribir dichas ecuaciones en forma diferencial (más conveniente para nuestro interés que la forma integral) teniendo en cuenta la definición del operador nabla en  $\mathbb{R}^3$  como

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2 + \frac{\partial}{\partial z} e_3 = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

donde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordinados. Si se aplica a una función diferenciable  $\varphi(x, y, z)$ ,  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , se define  $\nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ , que se denomina *gradiente de  $\varphi$* , que es obviamente un campo vectorial.

Podemos pensar en aplicar  $\nabla$  a un campo vectorial diferenciable  $V = (V_1, V_2, V_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ , y abusando de la notación al poner el punto de producto escalar entre ambos ( $\nabla \cdot V$ ) definir la *divergencia* de  $V$  como la función:

$$div(V) = \nabla \cdot V = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (V_1, V_2, V_3) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Finalmente, el *rotacional* de  $V$  es el campo vectorial que se construye (abusando de nuevo de la notación) realizando el producto vectorial del operador  $\nabla$  con  $V$ :

$$rot(V) = \nabla \wedge V = \left( \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) e_1 + \left( \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right) e_2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) e_3$$

Pues bien, las cuatro ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial son las cuatro siguientes:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

*Ley de Gauss para el campo eléctrico E*

$$\boxed{\nabla \cdot B = 0}$$

*Ley de Gauss para el campo magnético B (no monopolos)*

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

*Maxwell-Faraday*

$$\nabla \wedge B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

*Ley de Ampère*

donde  $E$  es el campo eléctrico,  $B$  el campo magnético,  $\rho$  la carga total,  $\epsilon_0$  la constante eléctrica,  $\mu_0$  la constante magnética,  $J$  densidad de corriente.

A continuación comentamos algunos aspectos de las dos primeras ecuaciones con la intención de sacar conclusiones para el desarrollo de este trabajo.

La **Ley de Gauss para el campo eléctrico** se trata de la generalización de una Ley más básica, la Ley de Coulomb, descubierta por Charles-Augustin de Coulomb, y que básicamente afirma que “dos cargas eléctricas se atraen o repelen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de ambas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”

Para comprender la Ley de Gauss para el campo eléctrico observemos que la expresión de la parte izquierda de la ecuación,  $\nabla \cdot E$ , es la divergencia del campo vectorial  $E$ , que nos permite saber dónde “nacen” y dónde “mueren” las líneas de campo y cómo de intenso es el proceso de “nacimiento” o “muerte” de líneas. De manera que si en un punto la  $\nabla \cdot E = 0$  esto significa que ninguna línea de campo “muere” ni “nace” en el entorno de este punto. Dicho de otro modo, toda línea que entra en el entorno de este punto sale otra vez de él, y toda línea que sale de aquí entró antes.

Si la divergencia en un punto es negativa,  $\nabla \cdot E < 0$ , eso significa que en un entorno muy pequeño alrededor de ese punto “mueren” líneas del campo eléctrico, siendo por tanto el flujo entrante de dicho entorno. Si la divergencia en un punto es positiva,  $\nabla \cdot E > 0$ , significa que en un entorno muy pequeño alrededor de ese punto “nacen” las líneas del campo eléctrico, siendo por tanto el flujo saliente en dicho entorno.

En el lado derecho de la Ley de Gauss tenemos  $\frac{\rho}{\epsilon_0}$ , donde  $\epsilon_0$  es una constante física positiva. Por tanto, obtenemos las siguientes conclusiones a partir de la Ley de Gauss para el campo eléctrico:

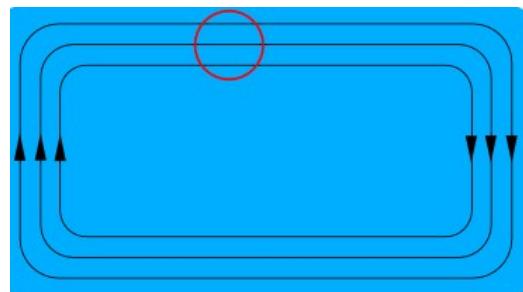


Figura 3.2: Líneas de campo eléctrico en el entorno de un punto donde el campo tiene divergencia 0.

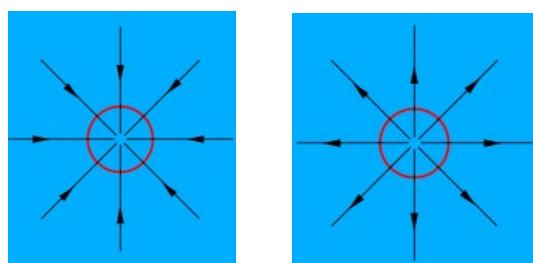


Figura 3.3: Líneas de campo con divergencia negativa ó positiva

- Si en el entorno de un punto no hay cargas, todas las líneas de campo eléctrico que entran salen otra vez como si nada. Véase figura 3.2.
- Si en el punto que estamos mirando hay carga positiva, es decir,  $\rho > 0$ , entonces la divergencia será positiva y por tanto estarán naciendo líneas de campo eléctrico de la carga.

La segunda ecuación de Maxwell es la **Ley de Gauss para el campo magnético**, como veremos a continuación es la más importante para el desarrollo de nuestro trabajo, pues es la que nos permite considerar la no existencia del **monopolo magnético**. Al igual que ocurría con la Ley de Gauss para el campo eléctrico, esta Ley describe el comportamiento del campo magnético a través de su divergencia  $\nabla \cdot B$ . Ya que dicha divergencia es cero, el significado de la Ley de Gauss para el campo magnético está claro: las líneas del campo magnético no “*nacen*” ni “*mueren*” en ninguna parte de manera neta, por tanto, son cerradas.

A partir de la Ley del Gauss para el campo eléctrico sabíamos que las líneas del campo eléctrico nacen en las cargas positivas y mueren en las cargas negativas pero de la Ley de Gauss para el campo magnético no podemos sacar estas conclusiones, no es posible observar un punto determinado y ver que se produce un fenómeno u otro, sólo es posible ver ambas cosas a la vez.

Si volvemos al campo eléctrico vemos que las cargas se pueden separar y verlas por separado, pero en el caso del campo magnético no ocurre lo mismo ya que la divergencia del campo magnético siempre es cero, por tanto, nunca podremos conseguir que sus líneas no sean cerradas. Es por esto que al cortar un imán por la mitad, por ejemplo, para intentar quedarnos con el polo norte en una mano y el polo sur en la otra, veríamos que cada uno de los dos pedazos es un imán más pequeño con su polo norte y su polo sur. Por tanto, la Ley de Gauss para el campo magnético supone la no existencia de **monopolos magnéticos**. Sin embargo, no podemos olvidar que las ecuaciones de Maxwell son la representación matemática de principios físicos, no verdades absolutas. Es teóricamente posible que sí existan los **monopolos magnéticos**.

No obstante, hasta ahora todos los intentos de crear un **monopolio magnético** en aceleradores de partículas han fracasado. Es interesante destacar que el 16 de Octubre de 2009 se publicaron en *Nature* [12] unos resultados obtenidos por C. Castelnovo, R. Moessner y S. L. Sondhi en el Rudolf Peierls Centre for Theoretical Physics, (Oxford University, Oxford OX1 3NP, UK), Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, 01187 Dresden (Germany), y PCTP and Department of Physics, Princeton University, Princeton, New Jersey 08544 (USA) donde se informa de la observación por primera vez un **monopolio magnético** en un estado de la materia que se daría a partir de una disposición especial de los momentos magnéticos dentro de un cristal a baja temperatura. Si este experimento confirma la existencia de **monopolos magnéticos** entonces tendríamos que modificar las leyes de Maxwell, cambiando la ecuación que hemos visto antes por esta otra:  $\nabla \cdot B = \mu_0 \rho_0$ , donde  $\rho_0$  es una constante no nula que representaría, si existe, la densidad de carga magnética.

Por otra parte, en la celebración de la *International Conference on Neutron Scattering 2009* (May 7, 2009; ICNS2009 C9.2), un trabajo conjunto de H. Kadouwaki, N. Doi, Y. Aoki (Dep. of Physics, Tokyo Metropolitan Univ.), Y. Tabata, (Dep. of Materials Science and Engineering, Kyoto Univ.), T. J. Sato (NSL Institute for Solid State Physics, Univ. Kyoto), J. W. Lynn (NIST Center for Neutron Research, National Inst. of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland), K. Matsuhira (Dep. of Electronics, Fac. Engineering, Kitakyushu) and Z. Hiroi (Institute for Solid State Physics, Univ. Tokyo), posteriormente publicado en el *J. Phys. Soc. Japan* [16] se explica que,

*“From the symmetry of Maxwell’s equations of electromagnetism as well as field theoretical arguments, magnetic charges or monopoles would be expected to exist. But magnetic monopoles have never been observed despite longstanding experimental searches. Recently, attention has turned to condensed matter systems where tractable analogs of magnetic monopoles might be found, and one prediction is for an emergent elementary excitation in the spin ice compound, where the strongly competing magnetic interactions exhibit the same 1 type of frustra-*

*tion as water ice. We directly probe the monopoles in spin ice using neutrons, and show that they interact via the magnetic Coulomb force. Specific heat measurements show that the density of monopoles can be controlled by temperature and magnetic field, with the density following the expected Arrhenius law."*

### 3.2. La ley de la fuerza de Lorentz

El problema de Landau–Hall es el estudio del movimiento de una partícula cargada en presencia de un campo magnético estático y constante  $B$  en una superficie Riemanniana [19]. Consideremos que existe un campo magnético en cada punto del espacio. El campo magnético  $B$  se puede expresar en términos de la fuerza magnética que se ejerce sobre un objeto de prueba apropiado. El objeto de prueba para expresar el campo magnético  $B$  en términos de la fuerza magnética será una carga puntual  $q$  de masa  $m$  que se mueve con una velocidad  $v$ .

Ya sabemos que cuando colocamos una carga en reposo en un campo magnético no actúa sobre ella fuerza alguna, pero cuando la carga eléctrica se mueve en una región donde hay un campo magnético, se observa una nueva fuerza sobre la carga. Los experimentos realizados sobre el movimiento de diversas partículas cargadas que se desplazan en un campo magnético están de acuerdo con la siguiente ecuación denominada **Ley de la Fuerza de Lorentz** para la fuerza  $F$  actuante sobre la partícula de carga  $q$  que se mueve con velocidad  $v$  en una región con presencia del campo magnético  $B$ ,

$$F = q(v \times B).$$

A partir de esta expresión se tiene fácilmente que:

- $|F| = q|v||B| \sin \theta$ .
- La dirección de  $F$  es perpendicular al plano que forman los vectores  $v$  y  $B$ .
- El sentido de  $F$  es el del producto vectorial  $qv \times B$  teniendo en cuenta el signo de la carga  $q$ .

La fuerza es máxima cuando  $v$  y  $B$  son perpendiculares, y la fuerza es nula si los vectores  $v$  y  $B$  tienen la misma dirección.

Cuando la partícula se mueve en una región donde hay un campo eléctrico  $E$  y uno magnético  $B$ , la fuerza total es la suma de la fuerza eléctrica  $qE$  y la fuerza magnética  $qv \times B$ , es decir:

$$F = q(E + v \times B). \quad (3.1)$$



Figura 3.4: Albert Einstein visitando a H. A. Lorentz en 1921

Esta expresión se denomina **Ley de Lorentz** para campo eléctrico y magnético. En este trabajo consideraremos que estamos en ausencia de campo eléctrico, siendo por tanto  $E = 0$  y quedando la fuerza de Lorentz reducida a:

$$F = q(v \times B). \quad (3.2)$$

La ecuación 3.2 nos ha servido hasta el momento para definir el campo magnético  $B$  a partir de la fuerza a la que se ve sometida una carga  $q$  la cual se mueve con velocidad  $v$  en presencia de dicho campo magnético. Sin embargo, esta ecuación también nos permite determinar la trayectoria magnética que describe dicha partícula.

### 3.3. Ejemplo modelo

Consideremos a continuación un ejemplo que nos permitirá generalizar el concepto de campo magnético a cualquier variedad Riemanniana  $(M^n, g)$ . Para ello, supongamos una partícula de masa  $m$  con carga  $q$  que se mueve con una velocidad  $v(t)$  en una región del espacio  $\mathbb{R}^3$  donde existe un campo magnético uniforme (de intensidad constante) y estacionario (independiente del tiempo), por ejemplo,  $B = (0, 0, h)$  con  $h$  una constante no nula. Supondremos también la ausencia de campo eléctrico,  $E = 0$ . Recordemos que el momento de la partícula es  $P(t) = mv(t)$  y se verifica entonces que  $F(t) = \frac{dP(t)}{dt}$  por lo que podemos escribir

$$F(t) = \frac{dP(t)}{dt} = q(v(t) \times B),$$

y de aquí se tiene que  $\frac{dP(t)}{dt}$  es ortogonal a  $P(t)$  y por tanto  $\frac{d \| P(t) \|^2}{dt} \equiv 0$ , lo que implica que  $\| v(t) \|$  es constante.

30 CAPÍTULO 3. CAMPO MAGNÉTICO EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA

Tenemos entonces que  $F = ma$  viene dada por

$$F = m \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} = q(v(t) \times B), \quad (3.3)$$

donde  $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$  es el vector velocidad de la partícula y  $B$  el campo uniforme  $B = (0, 0, h)$ . Escribiendo 3.3 en componentes cartesianas tenemos

$$\begin{cases} m \frac{dv_1}{dt} = qv_2(t)h \\ m \frac{dv_2}{dt} = -qv_1(t)h \\ m \frac{dv_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación es  $v_3 = cte$  y definiendo

$$V \equiv v_1 + iv_2,$$

( $i$  es la unidad imaginaria) al multiplicar la segunda ecuación por  $i$  y sumar las dos primeras tenemos

$$m \frac{dV}{dt} = -iqhV,$$

cuya solución es

$$V = V_0 e^{-\frac{qht}{m}i}.$$

Si suponemos que para  $t = 0$  el vector velocidad de la carga es  $v(0) = (0, v_2^0, v_3^0)$ , entonces  $V_0 = iv_2^0$ , y tenemos entonces que la solución del sistema anterior es

$$\begin{cases} v_1(t) = v_2^0 \operatorname{sen}\left(\frac{qh}{m}t\right) \\ v_2(t) = v_2^0 \cos\left(\frac{qh}{m}t\right) \\ v_3(t) = v_3^0 \end{cases}$$

que integradas nos permiten obtener las componentes de la curva (magnética)  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  descrita por la partícula:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) - \frac{v_2^0 m}{qh} \cos\left(\frac{qh}{m}t\right) \\ x_2(t) = x_2(0) + \frac{v_2^0 m}{qh} \operatorname{sen}\left(\frac{qh}{m}t\right) \\ x_3(t) = x_3(0) + v_3^0 t, \end{cases}$$

que resulta ser una parametrización de una hélice circular con eje la dirección de  $x_3$  (dirección del campo magnético  $B$ ) y radio  $r_L = \frac{v_\perp m}{|q||B|}$  (denominado radio de Larmor) ( $v_\perp$  representa la magnitud de la velocidad perpendicular al campo magnético,  $v_\perp = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ ) [14]. En particular si  $v_3^0 = 0$ , la trayectoria que describe partícula es un círculo contenido en el plano  $x_3 = x_3(0)$ , con centro en  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$  y radio  $r_L$ .

### 3.4. Campos Magnéticos en una Variedad Riemanniana

Volvamos ahora a considerar el ejemplo modelo de la sección anterior, pero desde un nuevo punto de vista. Para ello sea  $\Pi$  el plano de  $\mathbb{R}^3$  de ecuación  $x_3 = 0$  provisto de la métrica inducida de la usual de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B = (0, 0, h)$  el campo magnético y definamos en  $\Pi$  la siguiente 2-forma  $F$ :

$$F(X, Y) = \langle X \times B, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Pi),$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar inducido en  $\Pi$ . Se comprueba fácilmente que en coordenadas, si la 2-forma  $F$  la expresamos  $F = f(x^1, x^2)dx^1 \wedge dx^2$  entonces  $f = -2h$ , y el campo magnético tiene la expresión  $F = -2hdx_1 \wedge dx_2$ , que naturalmente es una forma cerrada y proporcional al elemento de área de  $\Pi$ . Finalmente definimos el operador antisimétrico  $\Phi$  mediante  $\langle \Phi(X), Y \rangle = F(X, Y)$ , es decir,  $\Phi(X) = X \times B$ . En consecuencia, la ley de Lorentz puede escribirse en términos de esta forma por medio de:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \Phi(v(t)). \quad (3.4)$$

Esta interpretación del modelo clásico puede ser extendida de forma obvia a una situación más general. En efecto, parece natural definir ahora un campo magnético en una variedad Riemanniana del siguiente modo:

**Definición 3.4.1.** *Un campo magnético en una variedad Riemanniana  $(M^n, g)$  ( $n \geq 2$ ) es una 2-forma cerrada  $F$  en  $M^n$ . La fuerza de Lorentz del campo magnético es el operador antisimétrico  $\Phi$  dado por*

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y), \quad (3.5)$$

para cada par de campos vectoriales  $X, Y$  de  $M^n$ . Observemos que  $\Phi$  es métricamente equivalente a  $F$ , por lo que no se pierde información alguna cuando se considera  $\Phi$  en lugar de  $F$ . En la terminología clásica se suele decir que  $\Phi$  se

obtiene de  $F$  subiendo su segundo índice. Por otro lado el operador  $\Phi'$  definido  $g(X, \Phi'(Y)) = F(X, Y)$ , se ve claramente que es  $\Phi' = -\Phi$ .

En Física, se puede encontrar una definición de campo magnético como una 2-forma cerrada (*Differential forms approach*), donde se introduce una 2-forma  $\mathbf{F}$  (que denominan tensor de Maxwell) en un espacio-tiempo 4-dimensional. El campo eléctrico  $E$  y magnético  $B$  se describen conjuntamente por  $F_{\mu\nu}$  en el espacio de Minkowski como

$$\mathbf{F} = \sum \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy + E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt,$$

que es además la diferencial del potencial 4-dimensional  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} = \sum \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

En particular [27], en  $\mathbb{R}^3$  y en ausencia de campo eléctrico  $E$  (que es nuestro caso), si identificamos  $B = (B_x, B_y, B_z)$  con una 2-forma  $\mathbf{B} = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$ , se deduce inmediatamente que la condición  $\nabla \cdot B = 0$  es equivalente a exigir que  $d\mathbf{B} = 0$ .

**Definición 3.4.2.** Una curva  $\gamma$  en  $(M^n, g)$  se dice que es una curva magnética del campo magnético  $F$  (o de  $(M^n, g, F)$ ), si su vector velocidad  $\gamma'$ , satisface la siguiente ecuación diferencial (ecuación de Landau-Hall):

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma'), \quad (3.6)$$

donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de  $g$  (comparar con la ecuación (3.4)).

Estas definiciones nos llevan a las siguientes consecuencias:

1. Si el campo magnético es trivial, es decir,  $F = 0 \iff \Phi = 0$ , entonces la ecuación de Landau-Hall de las curvas magnéticas queda  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ , lo que equivale a decir: *en ausencia de campos eléctricos y magnéticos, una partícula cargada sigue una curva geodésica, es decir, las curvas magnéticas son las geodésicas de la variedad  $(M^m, g)$* .
2. Sabemos que las geodésicas son curvas de velocidad constante 1. Las curvas magnéticas también satisfacen la siguiente ley de conservación: *las partículas cargadas se mueven a velocidad constante, y por tanto con energía constante a lo largo de sus trayectorias magnéticas*. En efecto, de (3.5) tenemos que  $g(\Phi(X), Y) = -g(X, \Phi(Y))$  y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(\gamma', \gamma') &= \nabla_{\gamma'} g(\gamma', \gamma') = g(\nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma') + g(\gamma', \nabla_{\gamma'} \gamma') = \\ &= 2g(\Phi(\gamma'), \gamma') = 0. \end{aligned}$$

3. El teorema de existencia y unicidad de curvas geodésicas es también cierto para las curvas magnéticas ([26], p.91). En efecto, para cada  $p \in M^n$  y  $v \in T_p M^n$  existe una curva magnética maximal  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$ , de  $(M^n, g, F)$ , tal que  $\gamma(0) = p$  and  $\gamma'(0) = v$ .
4. El sistema de ecuaciones diferenciales satisfecho por las curvas geodésicas sabemos que tiene la siguiente propiedad de homogeneidad: si  $\gamma(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  es una geodésica, entonces para toda constante  $c \neq 0$ , la curva  $\gamma(ct)$  es también una geodésica con  $t \in (-\varepsilon/c, \varepsilon/c)$ . Las curvas magnéticas no satisfacen esta propiedad. En efecto, si  $\gamma(t)$  es una curva magnética de  $(M^n, g, F)$  determinada por los datos iniciales  $(p, v)$ , la curva  $\beta$ , definida por  $\beta(t) = \gamma(ct)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , es una curva magnética de  $(M^n, g, cF)$  y también, si  $c > 0$ , de  $(M^n, (1/c)g, F)$ , en ambos casos determinada por los datos iniciales  $(p, cv)$  ([15]). Además, la familia de todas las curvas magnéticas de  $(M^n, g, F)$  y  $(M^n, cg, cF)$  coincide, para toda constante  $c > 0$ .
5. Como es bien conocido, las geodésicas son puntos críticos de un funcional (de la energía), y localmente son curvas que minimizan la distancia. Las curvas magnéticas se ha probado que localmente también son puntos críticos de un funcional ([4]): existe  $U \subseteq M^n$  tal que  $F = d\omega$  en  $U$ , y si denotamos por  $\Gamma$  al espacio de las curvas de  $p$  a  $q$ , en  $U$  entonces

$$\mathcal{L}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} g(\gamma', \gamma') dt + \int_{\gamma} \omega(\gamma') dt$$

y la ecuación de Lorentz es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a  $\mathcal{L}$

Dado un campo magnético  $F$  en una variedad Riemanniana  $(M^n, g)$ , el objetivo fundamental es determinar sus correspondientes curvas magnéticas. En el caso 2-dimensional, es decir, superficies Riemannianas, podemos utilizar la geometría de las ecuaciones de Frenet para determinar la curvatura de dichas curvas. En algunos casos especiales, como el de las superficies de curvatura constante podemos determinarlas completamente.

Un segundo camino (y complementario del anterior) para cualquier variedad  $(M^n, g)$  sería considerar una inmersión en algún espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^m$ ,  $m < n$  (Nash embedding theorem [24]). Si ahora escribimos la ecuación de Landau-Hall en  $\mathbb{R}^m$  y usamos las fórmulas de Gauss-Weingarten para separar esta ecuación en su parte tangente y su parte normal a la variedad, la geometría intrínseca de  $(M^n, g)$  puede ser utilizada para obtener las curvaturas de la curva magnética. Así, dependiendo del caso particular de nuestra variedad, la curva magnética podría ser completamente determinada.

El concepto de campo magnético puede ser igualmente estudiado en variedades complejas, en particular de Kaehler (ver por ejemplo [17],[21]).



# CAPÍTULO 4

---

## Curvas Magnéticas en Superficies

---

### 4.1. Campos magnéticos en superficies

Sea  $(M^2, g)$  una superficie Riemanniana orientada con estructura compleja  $J$  y elemento de área  $\Omega_2$  tal que  $\Omega_2(X, JX) = 1$  para  $X$  campo vectorial unitario  $X \in \mathfrak{X}(M^2)$ . Dada una curva  $\gamma$  en  $M^2$  para la cuál  $e = g(\gamma', \gamma') > 0$  es constante, su referencia de Frenet es  $\{T = \frac{1}{\sqrt{e}}\gamma', N = JT\}$ . Si  $\kappa$  es su curvatura (geodésica) sus ecuaciones de Frenet son:

$$\begin{cases} \nabla_{\gamma'} T = \sqrt{e}\kappa N \\ \nabla_{\gamma'} N = -\sqrt{e}\kappa T \end{cases}$$

Como un campo magnético  $F$  en una superficie  $M^2$  es una 2-forma (cerrada), claramente se puede expresar por medio de una función  $f$  diferenciable definida en  $M^2$  del modo  $F = f\Omega_2$ . La función  $f$  se denomina la *fuerza* del campo magnético  $F$ . Por tanto, haciendo uso de

$$g(\Phi X, X) = 0, \quad g(\Phi X, JX) = F(X, JX) = f\Omega_2(X, JX) = f,$$

se tiene que la matriz de  $\Phi$  respecto cualquier base ortonormal  $\{X, JX\}$  está dada por

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}.$$

En el caso particular de que  $\gamma$  sea una curva magnética de  $(M^2, g, F)$  con energía  $e = 1$ , es decir, parametrizada por el arco (que se denominan curvas magnéticas *normales*), se verificará que

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma'), \quad \gamma' = T,$$

y por tanto,

$$\nabla_T T = \Phi(T) \implies \kappa N = f N,$$

de donde se tiene que  $f = \kappa$ . Por tanto, la expresión de  $\Phi$  a lo largo de una curva magnética  $\gamma$  de  $(M^2, g, F)$  con energía  $e = 1$  y relativa a  $\{T, N\}$  esta dada por

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Así hemos obtenido el siguiente resultado.

**Proposición 4.1.1.** *La curvatura de las curvas magnéticas normales ( $e = 1$ ) está dada por  $\kappa = f$ . Por tanto, la curvatura de las curvas magnéticas normales determina por completo la fuerza de Lorentz, siendo  $f \equiv \kappa$  a lo largo de tales curvas.*

Un campo magnético en  $M^2$  para el cual la fuerza de Lorentz  $f = \mu \in \mathbb{R}$ , se denomina *campo magnético uniforme*. Estos tipos de campos magnéticos han sido muy estudiados en la literatura ([3, 21, 28], etc.) desde diferentes puntos de vista. En virtud de la proposición anterior tenemos la siguiente consecuencia.

**Corolario 4.1.1.** *Sea  $F = \mu \Omega_2$  un campo magnético uniforme en una superficie Riemanniana  $(M^2, g)$ . Una curva  $\gamma$  en  $M^2$ , es una curva magnética normal de  $(M^2, g, F)$  si y solo si tiene curvatura constante  $\kappa = \mu$ .*

Como consecuencia de los resultados anteriores podemos considerar el tipo de superficies más simples a fin de determinar las curvas magnéticas de sus campos uniformes, es decir, las superficies de curvatura constante  $K_0$ . Las siguientes afirmaciones son evidentes (comparar los resultados sobre curvas magnéticas con los de curvas geodésicas).

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $(M^2, g)$  una superficie con curvatura de Gauss  $K_0 \equiv 0$  (flat surface). Las curvas magnéticas de un campo uniforme  $F$  de fuerza  $f = \mu \neq 0$  son **círculos geodésicos de radio (geodésico)**  $1/|\mu|$ . En particular, si  $M^2$  es un plano las curvas magnéticas son circunferencias de radio  $1/|\mu|$  (en el caso del cono o cilindro no son círculos planos).*

Si  $K_0 > 0$ ,  $K_0 = 1/r^2$  entonces  $(M^2, g)$  es una superficie esférica  $\mathbb{S}^2(r)$  de radio  $r > 0$ , y se tiene:

**Teorema 4.1.2.** *Sea  $\mathbb{S}^2(r)$  la superficie esférica de curvatura  $K_0 = 1/r^2$ . Las curvas magnéticas de un campo uniforme  $F$  de fuerza  $f = \mu$  en  $\mathbb{S}^2(r)$  son **círculos geodésicos (planos)** con radio (plano)  $\rho = r/\sqrt{1 + r^2\mu^2} < r$ . En consecuencia, ningún círculo máximo de  $\mathbb{S}^2(r)$  puede ser una curva magnética de  $F = \mu \Omega_2$  (por otro lado, sabemos que constituyen la familia completa de geodésicas).*

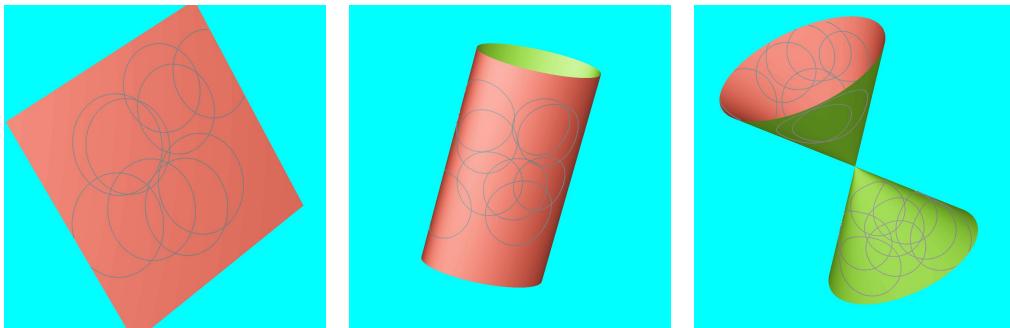


Figura 4.1: Curvas magnéticas de  $F$  uniforme en un plano, cilindro, cono

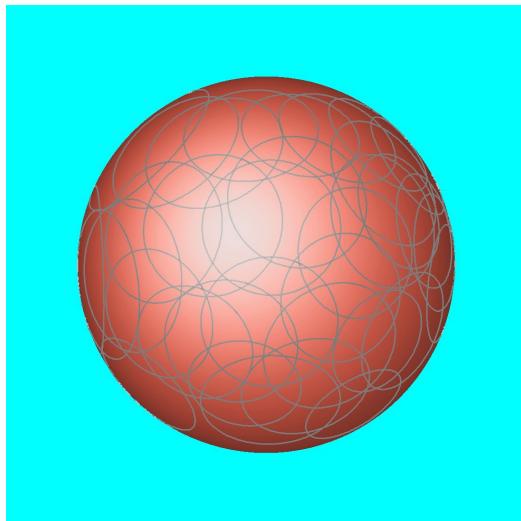


Figura 4.2: Curvas magnéticas en la esfera

Finalmente, el caso de superficies con  $K_0 < 0$  fue estudiado por A. Comtet, en un artículo publicado en 1987 en *Ann. Phys.* ([13]), donde tomando el modelo del semiplano de Poincaré con curvatura  $K_0 < 0$ , podemos resumir así:

**Teorema 4.1.3.** *Sea  $(H^2, g_{H^2})$  el semiplano de Poincaré de curvatura  $K_0 < 0$  y  $F$  un campo magnético uniforme con fuerza  $\mu$ . (a): Si  $|\mu| > \sqrt{-K_0}$ , el campo tiene fuerza suficiente para atrapar a las partículas que se mueven en círculos geodésicos (curvas cerradas); (b): Si  $|\mu| < \sqrt{-K_0}$ , son curvas no cerradas que cortan la frontera de  $H^2$ ; (c) Cuando  $|\mu| = \sqrt{-K_0}$  las curvas magnéticas correspondientes son tangentes a dicha frontera, y por lo tanto son horociclos.*

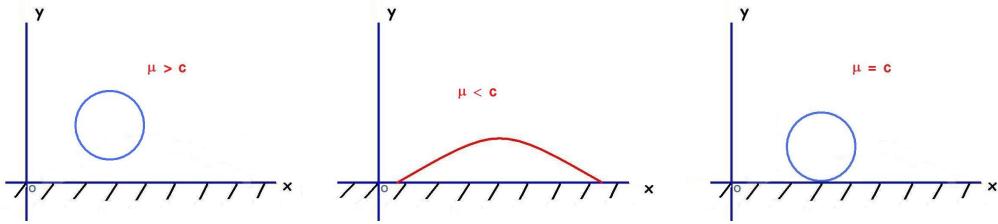


Figura 4.3: Curvas magnéticas en el semiplano de Poincaré

## 4.2. Ejemplo de campo magnético uniforme

Una vez estudiados los campos magnéticos uniformes en superficies Riemannianas con curvatura constante y obtenido cómo son sus curvas magnéticas, como un ejemplo-aplicación nos proponemos **resolver el siguiente problema:** ¿existe un campo magnético uniforme definido en una superficie de revolución  $M_\alpha$  de modo la familia de todos los paralelos de la superficie sean curvas magnéticas del campo dado?

Para ello sea  $\alpha(s) = \{(x(s), 0, z(s)), s \in (a, b), x(s) > 0\}$  una curva parametrizada regular,  $s$  su longitud de arco y que se encuentra contenida en el plano  $OXZ$  de  $\mathbb{R}^3$ . Girando  $\alpha$  alrededor del eje  $OZ$  obtenemos la superficie parametrizada de revolución  $M_\alpha$  en  $\mathbb{R}^3$  dada por:

$$\mathbb{X}(s, v) = (x(s)\cos v, x(s)\sin v, z(s)), \text{ donde } 0 < v < 2\pi.$$

Consideremos que  $M_\alpha$  está equipada con la métrica  $g$  inducida de la usual del espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^3$ . Cada punto de  $\alpha$  describe un paralelo,

$$\gamma_s(v) = (x(s) \cos v, x(s) \sin v, z(s)), v \in (0, 2\pi),$$

el cuál puede ser reparametrizado por su longitud de arco  $t$  como

$$\gamma_s(t) = \left( x(s) \cos \frac{t}{x(s)}, x(s) \sin \frac{t}{x(s)}, z(s) \right) \text{ donde } 0 < t < 2\pi x(s).$$

La curvatura  $\kappa_s$  de  $\gamma_s$  en nuestra superficie  $M_\alpha$  está dada por

$$\kappa_s = \|\nabla_{T_s} T_s\| = |(\gamma'_s, \gamma''_s, N)| = \frac{x'(s)}{x(s)},$$

donde  $T_s = \gamma'_s$  y  $\nabla$  es la conexión de Levi Civita en  $M_\alpha$ . En particular,  $\kappa_s$  es constante a lo largo de  $\gamma_s$  y por tanto esta curva es buena candidata para ser una curva magnética de un campo uniforme adecuado sobre  $M_\alpha$ .

En efecto, si  $F = \mu\Omega_2$  es un campo magnético sobre  $M_\alpha$  con  $\mu$  constante, entonces  $\gamma_s$  es curva magnética de  $(M_\alpha, g, F)$  si y solo si  $\kappa_s = \mu$ . Por tanto, el

conjunto de paralelos magnéticos de  $(M_\alpha, g, F)$  pueden ser identificados con el siguiente subconjunto del intervalo  $(a, b)$ :

$$\Gamma_\mu = \{s \in (a, b) : x'(s) = \mu x(s)\}.$$

Para determinar aquellas superficies de revolución cuyos paralelos son todos curvas magnéticas normales de un determinado campo magnético uniforme es decir, aquellas para las cuales  $\Gamma_\mu = (a, b)$ , necesitamos resolver la ecuación diferencial  $x'(s) = \mu x(s)$ .

Hay dos posibilidades: para el caso de un campo magnético trivial ( $\mu = 0$ ), las curvas magnéticas son entonces geodésicas y siendo en este caso la superficie de revolución correspondiente un cilindro circular recto. En el caso  $\mu \neq 0$ , dado que la curvatura de una superficie de revolución está dada por  $K(s, t) = -\frac{x''(s)}{x(s)}$ , tenemos que

$$K(s, t) = -\frac{x''(s)}{x(s)} = -\frac{\mu x'(s)}{x(s)} = -\frac{\mu^2 x(s)}{x(s)} = -\mu^2,$$

y por tanto la superficie tiene curvatura constante y negativa. En particular se tiene,

**Proposición 4.2.1.** *Los paralelos de una superficie de revolución  $M_\alpha$  son todos curvas magnéticas de un campo magnético uniforme,  $F = \mu\Omega_2$ , si y solo si:*

- $M_\alpha$  es un cilindro recto circular (cuando  $\mu = 0$ ), o bien,
- $M_\alpha$  es una pseudo-esfera con curvatura de Gauss  $-\mu^2$ .

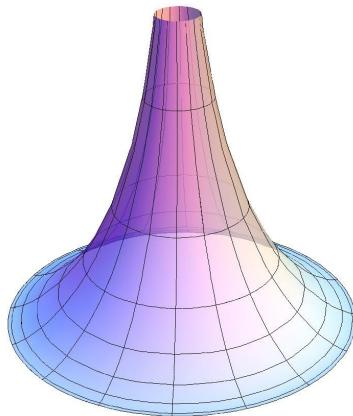


Figura 4.4: Pseudoesfera

### 4.3. Campos magnéticos en variedades de dimensión 3

Los campos magnéticos en variedades Riemannianas de dimensión 3 pueden considerarse también un caso bastante especial de estudio. En efecto, hay varios hechos clave que hacen su tratamiento muy particular.

Para empezar, 2-formas y campos vectoriales están en correspondencia 1-1. En efecto, si  $(M^3, g)$  es una variedad Riemanniana tridimensional orientada con forma de volumen  $\Omega_3$  y consideramos una 2-forma  $F \in \Lambda_2(M^3)$ , el operador  $\star$  de Hodge actúa sobre  $F$  para producir una 1-forma  $\omega = \star F \in \Lambda_1(M^3)$ , y entonces se puede considerar el campo vectorial dual  $g$ -equivalente  $B = (\omega)^\sharp \in \mathfrak{X}(M^3)$ , que está bien definido por  $g(B, X) = \omega(X)$  para todo campo  $X \in \mathfrak{X}(M^3)$ .

De este modo tenemos establecida una correspondencia  $F \rightsquigarrow B$ . El camino inverso  $B \rightsquigarrow F$  funciona de la misma forma: dado un campo vectorial  $B \in \mathfrak{X}(M^3)$ , consideramos su 1-forma  $g$ -equivalente  $\omega = B^\flat$ . Aplicando el operador  $\star$  de Hodge obtenemos  $\star\omega$ , que es una 2-forma en una variedad 3-dimensional. Ahora bien, como la contracción interior  $i_B$  que viene definida por medio de  $(i_B\Omega_3)(X, Y) = \Omega_3(B, X, Y)$ , esto nos permite escribirlo como  $\star\omega = i_B\Omega_3 = F$ . Así disponemos de una correspondencia biunívoca entre campos vectoriales y 2-formas en  $(M^3, g)$ .

La siguiente proposición nos muestra que los campos vectoriales  $X$  asociados a campos magnéticos  $F$  del modo natural definido en variedades Riemannianas 3D, necesariamente satisfacen la segunda ley de Maxwell.

**Proposición 4.3.1.** *Los campos magnéticos en una variedad Riemanniana  $(M^3, g)$  provienen de campos vectoriales con divergencia nula.*

*Demostración.* Es bien conocido que la divergencia de un campo vectorial  $B$  en una variedad diferenciable puede definirse a partir de la derivada de Lie por medio de  $\mathcal{L}_B\Omega_3 = d(i_B\Omega_3) = \text{div}(B)\Omega_3$  ([23], p.281) y por tanto, la 2-forma  $\star\omega = i_B\Omega_3$  es cerrada si y sólo si  $\text{div}(B) = 0$ , i.e., el elemento de volumen es invariante por el flujo local de  $B$ . Esto nos permitirá considerar los campos magnéticos en dimensión 3 como campos de divergencia nula.  $\square$

Como consecuencia de la correspondencia entre campos con divergencia nula  $B$  y campos magnéticos  $F_B = i_B\Omega_3$  en  $(M^3, g)$ , para nosotros el campo magnético es tanto  $B$  como  $F_B$ . En esta relación se tiene la siguiente consecuencia.

**Proposición 4.3.2.** *Campos magnéticos uniformes se corresponden con campos vectoriales paralelos.*

*Demostración.* Sea  $B$  un campo vectorial paralelo en  $M^3$ , i.e.,  $\nabla B = 0$ . Consideremos una carta local donde  $\Omega_3$  es el elemento de volumen y  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una referencia local de campos con  $\Omega_3(e_1, e_2, e_3) = 1$ . Como  $\text{div}(B) = \sum g(\nabla_{e_i} B, e_i) = 0$  ([25], p.196), se tiene que  $F = i_B \Omega_3$  es una 2-forma cerrada y por tanto un campo magnético en  $(M^3, g)$ . Además, es claro que  $\nabla F = 0$ . Recíprocamente, si  $F$  un campo magnético uniforme en  $(M^3, g)$  y  $B \in \mathfrak{X}(M^3)$  su campo vectorial asociado,  $F = i_B \Omega_3$ , se comprueba que  $\Omega_3(\nabla_X B, Y, Z) = (\nabla_X F)(Y, Z) = 0$ , para cualesquiera  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^3)$  lo que prueba que  $\nabla B = 0$ .  $\square$

Un producto vectorial  $X \wedge Y$  de campos vectoriales  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^3)$  en una variedad Riemanniana de dimensión 3 puede definirse del modo siguiente: dados  $X, Y$  campos vectoriales, su producto vectorial  $X \wedge Y$  es el único campo vectorial tal que para todo  $Z \in \mathfrak{X}(M^3)$  satisface

$$g(X \wedge Y, Z) = \Omega_3(X, Y, Z).$$

Ahora, si  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base local de campos y  $X = \sum X^i e_i$ ,  $Y = \sum Y^j e_j$ , y  $Z = \sum Z^k e_k$  las siguientes propiedades del producto vectorial se prueban fácilmente.

**Proposición 4.3.3.** *El producto vectorial en una variedad Riemanniana orientada  $M^3$  satisface las siguientes identidades,*

$$X \wedge (Y \wedge Z) = g(X, Z)Y - g(X, Y)Z,$$

$$g(X \wedge Y, X \wedge Z) = g(X, X)g(Y, Z) - g(X, Y)g(X, Z),$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^3)$ .

**Teorema 4.3.1.** *La ecuación de Landau–Hall en  $(M^3, g)$  puede ahora escribirse como*

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = B \wedge \gamma'. \quad (4.1)$$

*Demostración.* La fuerza de Lorentz  $\Phi$  asociada al campo magnético  $F = i_B \Omega_3$  satisface

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y) = (i_B \Omega_3)(X, Y) = \Omega_3(B, X, Y) = g(U \wedge X, Y),$$

y por lo tanto,

$$\Phi(X) = B \wedge X, \quad (4.2)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M^3)$  y en consecuencia la ecuación queda en la forma,

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma') = B \wedge \gamma'. \quad (4.3)$$

$\square$

Como una consecuencia inmediata de Eq. (4.1) tenemos,

**Corolario 4.3.1.** *Una curva integral de un campo magnético es una trayectoria magnética si y sólo si es una geodésica.*

---

## Bibliografía

---

- [1] Diario ABC, <http://www.abc.es/ciencia/20130402/abci-supernova-brillante-siglos-201304021251.html>
- [2] Diario Lainformacion, [http://noticias.lainformacion.com/ciencia-y-tecnologia/astronomia/la-supernova-1987a-al-detalle\\_kiqXMb8vOEeyTjZAjxpI4/](http://noticias.lainformacion.com/ciencia-y-tecnologia/astronomia/la-supernova-1987a-al-detalle_kiqXMb8vOEeyTjZAjxpI4/)
- [3] T. Adachi, Curvature bound and trajectories for magnetic fields on a Hadamard surface, *Tsukuba J. Math.* **20**(1996)225–230.
- [4] M. Barros, J. L. Cabrerizo, M. Fernández, A. Romero, Magnetic vortex filament flows, *J. Math. Phys.*, **48**(2007) 082904-1–082904-27.
- [5] M. Barros, General helices and a theorem of Lancret, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 1503–1509.
- [6] M. Barros, A. Ferrández, A conformal variational approach for helices in nature, *J. Math. Phys.*, **50**(10)(2009), 103529-103549.
- [7] M. Barros, J.L. Cabrerizo, M. Fernández and A. Romero, The Gauss-Landau-Hall problem on Riemannian surfaces, *J. Math. Phys.*, **46** (2005), 112905(1–15).
- [8] J. L. Cabrerizo, Magnetic fields in 2D and 3D sphere, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **20** (2013), no.3,440–450.
- [9] J. L. Cabrerizo, M. Fernández, J. S. Gómez, The contact magnetic flow in 3D Sasakian manifolds, *J. Phys. A*, **42** (2009), no. 19, 195201-19511.
- [10] J. L. Cabrerizo, M. Fernández, J. S. Gómez, Isotropy and marginally trapped surfaces in a spacetime, *Classical Quantum Gravity*, **27** (2010), no. 13, 135005, 12 pp.

- [11] J. L. Cabrerizo, M. Fernandez, M. Ortega, Massless particles in three-dimensional Lorentzian warped products, *J. Math. Phys.* **48** (2007), no. 1, 012901, 12 pp.
- [12] C. Castelnovo, R. Moessner, S. L. Sondhi, Magnetic monopoles in spin ice, *Nature* **451**(2008), 42-45. doi:10.1038/nature06433.
- [13] A. Comtet, On the Landau levels on the hyperbolic plane, *Ann. Phys.*, **173**(1987), 185–209.
- [14] R. W. Christy, Agnar Pytte, *Estructura de la materia* (Editorial Reverté, Barcelona, 1971).
- [15] M. A. Hernández, J. A. Pastor, *Un curso de Geometría Diferencial, Teoría, problemas, soluciones prácticas con ordenador*, CSIC, Ediciones Doce Calles, 2010.
- [16] H. Kadowaki, N. Doi, Y. Aoki, Y. Tabata, T. J. Sato, J. W. Lynn, K. Matsuhisa and Z. Hiroi, Observation of magnetic monopoles in spin ice, *Journal of the Physical Society of Japan*, **78**, No. 10, October, 2009.
- [17] D. Kalinin, Trajectories of charged particles in Kähler magnetic fields, *Rep. Math. Phys.*, **39** (1997), 299-309.
- [18] M. A. Lancret, Mémoire sur les courbes à double courbure. Mémoires présentés à l’Institut, 1 (1806), 416-454.
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Course of Theoretical Physics*, vol. I (Butterworth-Heinemann, 3rd edition, 1976).
- [20] Larsson et al., The morphology of the ejecta in Supernova 1987A: a study over time and wavelength, *Astrophysical Journal*, **768** 89L, 17pp. (2013).
- [21] A. Lopez-Almorox, Almost Kaehler structures on the tangent bundle of a Riemannian manifold associated to the magnetic flow, *Publ. R. Soc. Mat. Esp.*, **3**(2001), 133-150.
- [22] J. C. Maxwell, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **155**(1865), 459-512.
- [23] S. Kobayashi, K. Nomizu *Foundations of differential geometry*, Vol. I, P. 81 (Interscience Publishers, New York, 1963).
- [24] J. Nash, The embedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. of Math.* (2), **63**(1956)20-63

- [25] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, (Academic Press, New York, 1983).
- [26] R. K. Sachs, H. Wu, *General Relativity for mathematicians*, Graduate texts in Math., no. **48** Springer-Verlag, New York, 1977.
- [27] T. Sunada, Magnetic flows on a Riemannian surface, *Proceedings of the KAIST Mathematical Workshop*, **8** (1993), 93-108.
- [28] M. P. Wojtkowski, Magnetic flows and Gaussian thermostats on manifolds of negative curvature, *Fund. Math.*, **163**(2000)177–191.
- [29] P. D. Scofield, Curves of constant precession, *Amer.Math. Monthly*, **102** (1995), 531–537.
- [30] G. Zanardo, L. Staveley-Smith, C.-Y. Ng, B. M. Gaensler, T. M. Potter, R. N. Manchester, and A. K. Tzioumis, High-resolution radio observations of the remnant OF SN 1987A at high frequencies, *The Astrophysical Journal*, **767**(2)98(2013).