

Más allá de la noción de espacio-tiempo en Relatividad Especial

José Javier Relancio Martínez

Dirigido por José Manuel Carmona y José Luis Cortés

18 de Septiembre de 2015

Resumen

Uno de los grandes retos de la física actual es la unificación de la Relatividad General (GR) y de la Teoría Cuántica de Campos (QFT), o, equivalentemente, la formulación de una teoría cuántica de la gravedad. Ambas teorías, bien comprobadas experimentalmente el siglo pasado, presentan incompatibilidades fundamentales que tienen su origen en el papel que el espacio-tiempo presenta en ellas (es una variable dinámica en GR, y un marco estático en QFT).

Ha habido numerosos intentos de formular una teoría de gravedad cuántica, como teoría de cuerdas, gravedad cuántica de lazos, teoría de conjuntos causales, etc. En algunos de estos contextos el espacio-tiempo adquiere una estructura fundamental, característica, y bien distinta a la noción de espacio-tiempo continuo de Relatividad Espacial (SR). Sin embargo, ni la dinámica de estas teorías se comprende en su totalidad, ni son fácilmente contrastables con observaciones experimentales.

A principios de siglo comenzó a desarrollarse una nueva teoría que aún está germinando, la Relatividad Doblemente Especial (DSR). El punto de partida de esta teoría es muy diferente a los anteriores: se plantea, no como una teoría fundamental, sino como un límite de bajas energías que trata de capturar elementos residuales de una teoría de gravedad cuántica. En particular, en DSR se generaliza el principio de relatividad einsteniano añadiendo a la velocidad de la luz c un nuevo invariante relativista, la longitud de Planck l_P . Esta idea sí puede tener implicaciones observables experimentalmente, dando lugar a lo que se conoce como fenomenología de gravedad cuántica. Por otro lado, DSR implica la existencia de relaciones de composición de energía y momento no triviales, lo que a su vez se traduce en un espacio-tiempo con ingredientes de no localidad, un elemento que también aparece en otros desarrollos de gravedad cuántica.

En este trabajo haremos primero una introducción a DSR y de los motivos por los que debemos ir más allá de SR. Estas correcciones a SR pueden plantearse como un desarrollo en serie de potencias de una escala de alta energía, típicamente, la energía de Planck. Así, haremos a continuación un estudio de un trabajo previo de lo que ocurre al considerar desviaciones de SR a primer orden en esta escala al implementar un principio de relatividad con relaciones de dispersión y relaciones de composición de energía-momento modificadas, los ingredientes esenciales en DSR. El principal objetivo del trabajo será, partiendo del estudio anterior, ver cuáles son las implicaciones de correcciones que comienzan a segundo orden en la escala de Planck, lo que sería coherente con observaciones experimentales recientes.

Índice

1. Introducción	4
1.1. Motivación	4
1.2. GUP: principio de incertidumbre generalizado	7
1.3. Fenomenología de gravedad cuántica	8
1.3.1. Retraso de fotones	8
1.3.2. Localidad Relativa	9
1.3.3. Límite GZK	10
2. Modelo a primer orden en Λ	10
2.1. Principio de relatividad	10
2.2. Cambio de variables	13
3. Modelo a segundo orden en Λ	14
3.1. Principio de relatividad	15
3.2. Cambio de variables	20
4. Modificación del álgebra de Heisenberg	23
5. Conclusiones	24

1. Introducción

1.1. Motivación

Desde los primeros comienzos de la física, siempre se han observado hechos y se han intentado desarrollar teorías que pudieran dar cuenta de ellos. Como una muñeca rusa, la realidad ha revelado una vez tras otra capas de escalas cada vez más y más pequeñas. Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿continuaremos explorando más de cerca la estructura de la naturaleza llegando a encontrar más capas? ¿O hay un límite fundamental para esta búsqueda más allá del cuál no se puede ir? Y si es así, ¿este límite está basado en argumentos teóricos o se debería a problemas experimentales?

Cualquier respuesta a esta pregunta tiene que incluir no sólo la estructura de la materia, sino la estructura del espacio y del tiempo en sí mismos, y por lo tanto, tiene que incluir la gravedad. Al igual que existen constituyentes fundamentales de la materia, ¿ocurre lo mismo para el espacio-tiempo? ¿Existen «átomos» del espacio? Y también hay que tener en cuenta que medir distancias más cortas requiere concentrar energías grandes en volúmenes pequeños, y cuando la densidad de energía aumenta, uno no puede despreciar la curvatura del espacio, por lo que la interacción gravitatoria es indispensable.

Desde el descubrimiento de la mecánica cuántica, los físicos, al desarrollar la teoría cuántica de campos, observaron que era imposible compatibilizar ambas teorías. Al intentar cuantizar la GR, uno observa que hay infinitos no renormalizables, es decir, hay divergencias que uno no puede evitar, al contrario de lo que pasa con el resto de interacciones. La idea de unificación sugiere que debe haber una teoría que englobe a las dos y dé cuenta de las cuatro interacciones.

Uno podría hacerse esta pregunta: si tenemos una teoría para los objetos masivos (GR) y otra para los más livianos (QFT), ¿para qué necesitamos una teoría cuántica de la gravedad? Si uno considera una partícula muy pequeña pero con una gran energía, las leyes que describen su dinámica deberían tener en cuenta no sólo elementos cuánticos, sino también gravitatorios. Entonces, ¿en qué casos podemos encontrar esta situación? Al inicio del universo, sabemos que había una gran cantidad de energía en una región muy pequeña. Para poder describir los primeros instantes del universo en los que existía esta alta densidad, deberíamos tener una teoría cuántica de la gravedad.

Tampoco sabemos lo que ocurre en el interior de un agujero negro. Un agujero negro es un cuerpo que se ha dado al colapso gravitatorio debido a la gran cantidad de materia que tenía. Este objeto es tan masivo, que ni la luz puede escapar de él, delimitando un horizonte conocido como horizonte de eventos. Desde que en 1916 Schwarzschild obtuvo la primera solución a las ecuaciones de Einstein que daba lugar a un agujero negro estático, se vio que había una singularidad en las coordenadas del espacio-tiempo (que no era posible eliminar mediante un cambio de coordenadas como ocurría con la del horizonte de eventos). Los agujeros negros son fuentes de contradicción de estas dos teorías, lo que hace que su física despierte gran interés. ¿Qué ocurre con la información una vez que se cruza el horizonte? Si uno considera que la información se pierde, está yendo en contra de lo que nos dice la teoría cuántica. Si por el contrario, la información permanece encriptada en la superficie del horizonte, la evaporación del agujero negro (proceso que describió Hawking al desarrollar una QFT en espacios curvos), daría lugar a una contradicción entre estados puros y mezcla. De hecho, una de las posibles soluciones, conocida como firewall, viola el principio de equivalencia, ya que uno no debería notar nada al cruzar el horizonte de eventos al estar en caída libre, pero al existir estados mezcla, habría partículas que estarían «quemando» al observador. Otra pregunta sin respuesta es ¿qué ocurre cuando uno llega a la singularidad? Este es otro motivo para tener una teoría de gravedad cuántica.

Otro de los problemas que nos encontramos es que en mecánica cuántica uno asume el espacio-tiempo dado y estudia en todo detalle las propiedades y el movimiento de las partículas en él, tanto de la materia como de la radiación. En GR y especialmente en cosmología, uno toma el camino contrario: se asume que las propiedades de la materia y de la radiación son dadas (mediante las ecuaciones de estado) y se describe en detalle el espacio-tiempo al que da lugar, en particular su curvatura. De hecho, Einstein pensó en poder describir las coordenadas del espacio-

tiempo mediante el intercambio de señales luminosas, pero cuando usamos este procedimiento, desechamos toda información sobre la energía de los fotones y presuponemos que el mismo espacio-tiempo está reconstruido por intercambios de señales luminosas de diferentes frecuencias. Sin embargo, ¿qué pasaría si la velocidad de la luz dependiese de la energía del fotón, como sucede en varios de los marcos teóricos que tratan de unificar GR y mecánica cuántica? En este caso, la energía de este afectaría a la propia estructura del espacio-tiempo. Presumiblemente, esta paradoja podría evitarse si se conociese una teoría de gravedad cuántica.

Entre las teorías más conocidas que han intentado esta unificación están la teoría de cuerdas, la teoría cuántica de lazos, la supersimetría y la teoría de conjuntos causales. Con el objetivo de intentar poner en el mismo marco la QFT y la GR, nació la DSR (*Doubly Special Relativity*, Relatividad Doblemente Especial) como una teoría a bajas energías. En esta teoría, uno considera que existen dos invariantes en todo sistema de referencia: la velocidad de la luz c y la longitud de Planck l_P . Para obtener además de esta longitud, el tiempo de Planck t_P , la masa de Planck M_P y la energía de Planck Λ , no hay más que utilizar las constantes físicas de la cuántica \hbar , de la relatividad c y de la gravitación G :

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m} \quad (1.1.1)$$

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ s} \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\Lambda}{c^2} = M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ kg} = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ GeV}/c^2 \quad (1.1.3)$$

Otra novedad que aparece en DSR es que es una teoría formulada en el espacio de momentos, no en las coordenadas de un espacio-tiempo y esta limitación parece ser fundamental. Así, aunque en el límite en el que la longitud de Planck es cero (que es a lo que estamos habituados por los experimentos actuales) uno pueda formular su teoría en el espacio-tiempo (como la QFT y la GR), al considerar una escala de longitud de ese orden (o lo que es lo mismo, a escalas de energías del orden de la energía de Planck), uno debe ir al espacio de fases.

También desaparece el concepto de variedad para el espacio-tiempo. SR, QFT y en GR están desarrolladas en la idea de que el tiempo es un concepto continuo (admite una descripción en términos de números reales). Pero como hemos visto antes, tenemos una incertidumbre al medir distancias y tiempos que nos impide sincronizar dos relojes con una precisión mejor que el tiempo de Planck. Debido a esta imposibilidad de sincronizar estos relojes de forma precisa, la idea de una coordenada de tiempo única para un sistema de referencia es sólo aproximada, y no puede mantenerse en una descripción precisa de la naturaleza. Tampoco tenemos una forma de ordenar eventos a tiempos inferiores que el de Planck. Uno por lo tanto se ve obligado a olvidar la idea del tiempo como un «punto» único también. Por ejemplo, a escalas Planckianas se pierde el concepto de tiempo propio.

De esta manera, tenemos un espacio-tiempo cuantizado, en el sentido de que es discreto y no continuo. Con esto se pierde el concepto de punto en el espacio y de instante de tiempo, al no poder medir con una resolución mayor que la escala de Planck. También da lugar a una modificación de las reglas de commutación (que estudiaremos con más detalle en la sección 4), ya que la resolución en la medida de tiempo y espacio tiene que cumplir

$$\Delta x \Delta t \geq l_P t_P$$

Uno tampoco podría determinar la métrica a estas escalas, perdiendo la noción de curvatura. Es decir, la imposibilidad de medida de longitudes es exactamente equivalente a fluctuaciones en la curvatura. Uno por lo tanto, podría imaginarse que el espacio-tiempo es como una espuma a escalas muy pequeñas. Las partículas pequeñas notarían estos efectos debidos a las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo, siendo cada vez más relevantes a energías cada vez mayores.

Debido a esta imprecisión en la medida a escalas Planckianas, el concepto de orden espacial, de invariancia traslacional y la isotropía del vacío, y los sistemas globales de coordenadas, pierden todo respaldo experimental

a estas dimensiones. Además, el espacio-tiempo no es ni invariante Lorentz, ni invariante bajo difeomorfismos, ni invariante por dilatación. Todas las simetrías base de SR y de GR son sólo aproximaciones válidas para escalas mayores que la de Planck.

Tampoco tiene sentido el número de dimensiones. Para determinar experimentalmente el número de dimensiones, uno puede observar cuántos puntos puede elegir en el espacio tal que todas las distancias sean iguales. Si uno encuentra n puntos, el espacio tendrá $n - 1$ dimensiones. Al no tener una medida certeza de distancia no hay manera de determinar el número de dimensiones a escalas Planckianas con este método. Con todo esto, vemos que el espacio-tiempo físico no puede ser un conjunto de puntos matemáticos. No podemos distinguir tampoco a escalas pequeñas si una distancia es de tipo-tiempo o de tipo-espacio. A escalas Planckianas, el tiempo y el espacio no pueden distinguirse el uno del otro. En resumen, el espacio-tiempo a estas escalas no es continuo, ni ordenado, ni dotado de métrica, ni cuadridimensional, ni hecho de puntos.

Como el tiempo y el espacio no son continuos, los observables tampoco varían continuamente. Esto significa que a escalas Planckianas, los observables (o sus componentes en una base) no pueden describirse con número reales con (potencialmente) infinita precisión. Tampoco los campos físicos pueden describirse como funciones continuas.

Con esto también desaparece el concepto de partícula puntual. De hecho, carece completamente de sentido utilizar este término. Por supuesto, la existencia de una longitud mínima, tanto para el espacio vacío como para los objetos, está relacionada con este hecho. Si el término punto en el espacio carece de sentido, también el de partícula puntual.

Por definición, el tamaño d de una partícula elemental es menor que su longitud de onda Compton

$$\frac{\hbar}{mc} \quad (1.1.4)$$

Por otro lado, el tamaño de la partícula es siempre mayor que la longitud de Planck. De aquí podemos ver la siguiente condición para la masa una partícula elemental:

$$m < \frac{\hbar}{cl_P} = M_P \quad (1.1.5)$$

Esto nos dice que la masa de una partícula elemental no puede exceder la masa de Planck. De hecho, todas las partículas elementales conocidas lo cumplen. En QFT, sabemos que la diferencia entre una partícula real o virtual, es si está en la capa de masas o no. Debido a estas indeterminaciones en las medidas, a escalas Planckianas uno no puede saber si una partícula es real o virtual.

Como la antimateria puede describirse como materia moviéndose hacia atrás en el tiempo, y como la diferencia entre atrás y adelante no puede determinarse a escalas Planckianas, uno no puede distinguir entre materia y antimateria en estos rangos. Como no tenemos rotaciones bien definidas, el espín de una partícula tampoco lo está y por lo tanto no podemos distinguir entre bosones y fermiones, o en otras palabras, no podemos distinguir materia de radiación a estas escalas.

Por último, pensemos en la masa inercial de un objeto pequeño. Para determinarla, debemos empujarlo, es decir, realizar un experimento de dispersión. Para determinar la masa inercial dentro de una región de tamaño R , se debe utilizar una longitud de onda menor que R con su consiguiente energía. Una energía grande significa que la partícula se verá atraída debida a la gravedad. Por lo tanto, a escalas Planckianas, la masa inercial y gravitatoria no pueden distinguirse. Para determinar la masa en un volumen de Planck, se tiene que utilizar una longitud de onda de longitud l_P . En otras palabras, el error en la masa es tan grande como la masa de Planck. Este límite es una consecuencia directa del límite en las medidas de longitud y del espacio. De esta forma, uno no puede distinguir el vacío de la materia. Por lo tanto, cuando una partícula con energía la de Planck viaja a través del espacio, puede ser dispersada por las fluctuaciones del propio espacio-tiempo, haciendo imposible así decir si ha sido dispersada por vacío o por materia.

Con todos estos ejemplos, vemos que la física a escalas Planckianas es completamente diferente a la que estamos habituados y a lo que ni siquiera podríamos imaginar. Hoy en día, parece impensable obtener en un futuro próximo una teoría que pueda dar cuenta de todo esto. Teorías como DSR podrían arrojar algo de luz en las tinieblas del desconocimiento.

1.2. GUP: principio de incertidumbre generalizado

Veamos qué ocurre al introducir la interacción gravitatoria en el experimento mental del microscopio de Heisenberg. Desde este apartado y en adelante, utilizaremos unidades naturales en las que $\hbar = c = 1$.

De acuerdo a la óptica clásica, la longitud de onda del fotón con momento ω establece un límite a la posible resolución Δx en la posición de la partícula con la que interacciona el fotón

$$\Delta x \gtrsim \frac{1}{2\pi\omega \sin \varepsilon} \quad (1.2.1)$$

donde ε es el ángulo de apertura de la lente del microscopio. Pero el fotón utilizado para medir la posición de la partícula tiene un retroceso cuando se dispersa y transfiere momento a la partícula. Como uno no conoce la dirección del fotón con mayor resolución que ε , esto da lugar a una indeterminación en el momento de la partícula en la dirección x

$$\Delta p_x \gtrsim \omega \sin \varepsilon \quad (1.2.2)$$

Tomando todo esto junto, uno obtiene la indeterminación de Heisenberg (hasta un factor de orden unidad)

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \frac{1}{2\pi} \quad (1.2.3)$$

Esta es una propiedad fundamental de la naturaleza cuántica de la materia.

Incluyamos ahora la gravedad en este experimento mental. Como hemos visto, la interacción del fotón con la partícula no tiene lugar en un punto bien definido, sino más bien en una región de tamaño R . Para que la interacción tenga lugar y la medida sea posible, el tiempo pasado entre la interacción y la medida tiene que ser al menos del orden de tiempo $\tau \gtrsim R$. El fotón lleva una energía que, aunque en general es pequeña, ejerce una atracción gravitatoria sobre la partícula cuya posición queremos medir. La aceleración gravitatoria actuando sobre la partícula es al menos del orden de

$$a \approx \frac{G\omega}{R^2} \quad (1.2.4)$$

y, asumiendo que la partícula es no relativista y que es mucho más lenta que el fotón, la aceleración actúa aproximadamente durante el tiempo en el que el fotón está en la región de la interacción, por lo que la partícula adquiere una velocidad $v \approx aR$ o

$$v \approx \frac{G\omega}{R} \quad (1.2.5)$$

Así, en el tiempo R , la velocidad adquirida permite a la partícula viajar una distancia de

$$L \approx G\omega \quad (1.2.6)$$

Sin embargo, como la dirección del fotón es desconocida con una anchura del ángulo ε , la dirección de la aceleración y el movimiento de la partícula son también desconocidos. La proyección en el eje x da una indeterminación adicional de

$$\Delta x \gtrsim G\omega \sin \varepsilon \quad (1.2.7)$$

Combinando (1.2.1) y (1.2.7) vemos que

$$\Delta x \gtrsim \sqrt{G} = l_P \quad (1.2.8)$$

Uno puede refinar este argumento teniendo en cuenta que estrictamente hablando, durante el experimento, el momento del fotón ω aumenta

$$\frac{Gm\omega}{R}, \quad (1.2.9)$$

donde m es la masa de la partícula. Esto aumenta la indeterminación en el momento de la partícula

$$\Delta p_x \gtrsim \omega \left(1 + \frac{Gm}{R} \right) \sin \varepsilon \quad (1.2.10)$$

y durante el tiempo en el que el fotón está en la región de interacción, se traduce en una indeterminación $\Delta x \approx R\Delta p/m$

$$\Delta x \gtrsim \omega \left(\frac{R}{m} + G \right) \sin \varepsilon \quad (1.2.11)$$

que es mayor que la anterior indeterminación y por lo tanto se sigue satisfaciendo en el límite en el que uno no considere la gravedad.

Asumiendo que la indeterminación normal y la gravitatoria se suman linealmente, uno llega a

$$\Delta x \gtrsim \frac{1}{\Delta p} + G\Delta p \quad (1.2.12)$$

Este resultado también se obtiene en teoría de cuerdas mediante consideraciones completamente diferentes.

De esta forma, vemos que al añadir la interacción gravitatoria obtenemos un principio de indeterminación generalizado, lo que da lugar a una modificación de las reglas de commutación, y por lo tanto, una razón más para ir más allá de SR. Más adelante, estudiaremos en detalle la posible forma de unas reglas de commutación que generalicen el álgebra de Heisenberg usual.

1.3. Fenomenología de gravedad cuántica

A diferencia de otras teorías que tratan de obtener una teoría de gravedad cuántica, mediante experimentos factibles hoy en día uno podría observar desviaciones de SR. Veamos como se pueden dar estas desviaciones apreciables.

1.3.1. Retraso de fotones

La energía de Planck (10^{19} GeV) es mucho mayor que la de los aceleradores de partículas actuales (14 TeV) o que las partículas provenientes de rayos cósmicos (10^{11} GeV). Uno por lo tanto podría decir que aunque existiesen desviaciones respecto a SR, no podrían medirse. Lo cierto es que estas desviaciones podrían tener efectos a energías mucho más bajas y por lo tanto ser detectables.

Debido a la «espuma» del espacio-tiempo antes mencionada, la estructura de éste a distancias pequeñas puede inducir un efecto donde dos partículas sin masa de igual energía recorran exactamente la misma distancia en tiempos diferentes. Estas fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo cerca de la escala de Planck inducirían variaciones estocásticas de la velocidad, por ejemplo, de la luz.

Estas desviaciones de la velocidad de la luz pueden obtenerse mediante relaciones de dispersión modificadas (MDR), que pueden escribirse para energías mucho menores que la energía de Planck como

$$E^2 - \vec{p}^2 - m^2 \simeq \xi_n E^2 \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^n \quad (1.3.1)$$

Al considerar la velocidad como

$$v = \frac{dE}{dp} \quad (1.3.2)$$

uno puede comprobar que esto causa un retraso en el tiempo de vuelo

$$\Delta t \sim \frac{d}{c} \xi_n \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^n \quad (1.3.3)$$

Este retraso puede medirse para fotones con diferente energía provenientes de un «estallido de rayos gamma (*gamma ray burst*)». En concreto, en experimentos recientes como en [7] y [8], se toman medidas del GRB090510, y se busca una dependencia entre la velocidad de los fotones y la energía de los mismos. Como en un *gamma ray burst* se emiten fotones a distintas energías, pueden compararse tiempos de vuelo de fotones para intentar ver una dependencia con la energía de la velocidad de la luz. Estos experimentos parecen descartar efectos a primer orden ($n = 1$) y se espera que puedan, en un futuro próximo, ver efectos a segundo orden.

Como ya se ha mencionado antes, al intentar ir más allá de SR, la invariancia Lorentz no tiene por qué conservarse. De hecho, uno puede considerar que se viola esta invariancia o que está deformada, como en las teorías de DSR. A continuación veremos los ingredientes más importantes que DSR añade a una simple violación de invariancia Lorentz.

1.3.2. Localidad Relativa

Cuando se creó la SR, el espacio-tiempo era llano. Con el desarrollo de la GR, Einstein introdujo el concepto de espacio-tiempo curvo: los objetos masivos perturban el espacio-tiempo dando lugar a una curvatura. Una pregunta que ya se hizo Born en su momento es: ¿por qué no considerar un espacio de momentos también curvo? De hecho, él consideraba que uno no podría obtener una teoría cuántica de la gravedad sin esta implementación. Si uno lo hace, la física no tendría lugar en un espacio-tiempo como estamos acostumbrados sino en un espacio de fases.

Esto nos dice que una interacción entre partículas sólo será local para un observador en cuyo origen de coordenadas se produzca ésta, mientras que para un observador trasladado con respecto al anterior, la interacción dejará de ser local. Este fenómeno ocurre al considerar una ley de composición modificada (MCL) para los momentos, lo cual es inevitable en el marco de DSR, donde las transformaciones lineales de Lorentz son deformadas a transformaciones no lineales, que no son compatibles con leyes de composición de momentos lineales. Así, en vez de considerar que la conservación de momentos es lineal, uno considera que es de la forma

$$(p \oplus q)^\mu = p^\mu + q^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu p^\nu q^\lambda + \dots \quad (1.3.4)$$

donde $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ es la conexión afín. Esta composición puede verse como una realización de un espacio de momentos curvo. Esta composición no tiene por qué ser conmutativa, es decir, el resultado puede depender del orden de la composición. Si por ejemplo consideramos la desintegración de una partícula en dos con momentos $k \rightarrow p, q$, la ley de conservación nos dice que

$$k = p \oplus q \quad (1.3.5)$$

Para el caso de una composición no conmutativa

$$p \oplus q \neq q \oplus p \quad (1.3.6)$$

por lo que esta diferencia daría distintos canales de desintegración de la partícula, lo que supone distintas características en los productos obtenidos.

De esta manera, uno puede comprobar al mirar la acción que, para el caso simple de una interacción entre dos partículas, la interacción ocurre de forma local para un observador en cuyo origen de coordenadas se produce la misma. Las posiciones de las partículas, x_1 y x_2 , con momentos p_1 y p_2 respectivamente, para un observador trasladado una distancia x del primero serán

$$x_1^\mu = x^\nu \frac{\partial (p_1 \oplus p_2)^\mu}{\partial p_1^\nu} \quad x_2^\mu = x^\nu \frac{\partial (p_1 \oplus p_2)^\mu}{\partial p_2^\nu} \quad (1.3.7)$$

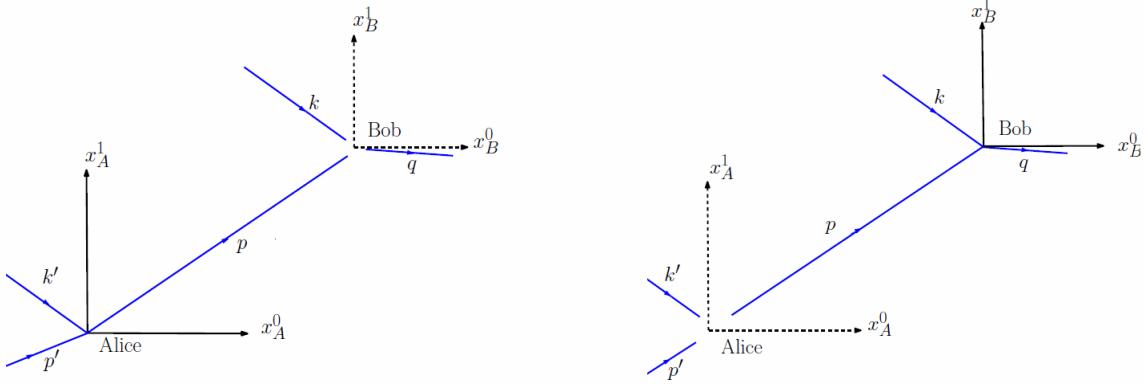


Figura 1: Localidad relativa. En la parte izquierda de la figura se muestra como Alice ve la producción de forma local y la detección no local, mientras que en la figura derecha vemos que Bob ve la producción no local y la detección local. Fuente [11].

La descripción de la interacción para dos observadores puede verse en la figura 1. En ella, se presenta la producción, propagación y detección de una partícula. En la producción, Alice es local (izquierda); en la detección, Bob es local (derecha).

Al igual que ocurría para el caso del retraso del tiempo de vuelo de fotones, aunque estos efectos sean muy pequeños, al considerar escalas cosmológicas, estos se verán amplificados pudiendo llegar a observarse.

1.3.3. Límite GZK

El límite de Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK), es un límite superior teórico en la energía de los rayos cósmicos provenientes de fuentes distantes. Este límite es aproximadamente 5×10^{19} eV. Éste queda establecido en SR mediante interacciones lentas de rayos cósmicos de protones con la radiación de fondo de microondas sobre distancias grandes (más de 160 millones de años luz). Es del mismo orden de magnitud que la energía de los rayos cósmicos experimentalmente detectados. Si se encontraran desviaciones respecto a este límite, cabría pensar en la necesidad de ir más allá de SR. Resulta interesante notar que el cálculo de este límite depende tanto de relaciones de dispersión modificadas como de la MCL que aparecen en DSR.

2. Modelo a primer orden en Λ

Vamos ahora a revisar el modelo más general de DSR a primer orden en la escala de alta energía Λ (ver [14]), lo que nos servirá para estudiar lo que ocurre a segundo orden. A lo largo de este trabajo supondremos que la invariancia Lorentz está deformada pero que las rotaciones son las usuales, y que se sigue satisfaciendo el álgebra de Lorentz, es decir, que la acción de dos *boosts* da una rotación. Lo que pretendemos es ver qué leyes de composición y relación de dispersión modificadas con un desarrollo en serie de potencias de $1/\Lambda$ son compatibles con el principio de relatividad.

2.1. Principio de relatividad

La MDR más general a primer orden y que es invariante rotacional es

$$p_0^2 - \vec{p}^2 + \frac{\alpha_1}{\Lambda} p_0^3 + \frac{\alpha_2}{\Lambda} \vec{p}^2 p_0 = m^2 \quad (2.1.1)$$

y la MCL

$$p \oplus q|_0 = p_0 + q_0 + \frac{\beta_1}{\Lambda} p_0 q_0 + \frac{\beta_2}{\Lambda} \vec{p} \vec{q} \quad p \oplus q|_i = p_i + q_i + \frac{\gamma_1}{\Lambda} p_0 q_i + \frac{\gamma_2}{\Lambda} p_i q_0 + \frac{\gamma_3}{\Lambda} \epsilon_{ijk} p_j q_k \quad (2.1.2)$$

En la MCL no pueden aparecer términos a primer orden que no contengan ambos momentos, ya que imponemos la condición física de que cuando uno de ellos sea nulo, la composición se reduzca al momento restante. La forma más general de las transformaciones de Lorentz del sistema de una partícula es

$$[T(p)]_0 = p_0 + \left(1 + \frac{\lambda_1}{\Lambda} p_0\right) (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) \quad (2.1.3)$$

$$[T(p)]_i = p_i + \xi_i \left(p_0 + \frac{\lambda_2}{\Lambda} p_0^2 + \frac{\lambda_3}{\Lambda} \vec{p}^2\right) + \frac{\lambda_4}{\Lambda} p_i (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\lambda_5}{\Lambda} p_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k \quad (2.1.4)$$

Para que se reproduzca el álgebra de Lorentz, imponemos las siguientes condiciones para dos transformaciones $T^{(1)}$ y $T^{(2)}$ con parámetros $\vec{\xi}^{(1)}$ y $\vec{\xi}^{(2)}$ respectivamente:

$$[T^{(2)}(T^{(1)}(p)) - T^{(1)}(T^{(2)}(p))]_0 = 0 \quad (2.1.5)$$

$$[T^{(2)}(T^{(1)}(p)) - T^{(1)}(T^{(2)}(p))]_i = (\vec{p} \cdot \vec{\xi}^{(2)}) \xi_i^{(1)} - (\vec{p} \cdot \vec{\xi}^{(1)}) \xi_i^{(2)} \quad (2.1.6)$$

Esto nos da las siguientes relaciones entre los λ 's

$$\lambda_5 = 0 \quad \lambda_4 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \quad (2.1.7)$$

por lo que el *boost* queda finalmente de la forma

$$[T(p)]_0 = p_0 + \left(1 + \frac{\lambda_1}{\Lambda} p_0\right) (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) \quad (2.1.8)$$

$$[T(p)]_i = p_i + \xi_i \left(p_0 + \frac{\lambda_2}{\Lambda} p_0^2 + \frac{\lambda_3}{\Lambda} \vec{p}^2\right) + \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3}{\Lambda} p_i (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) \quad (2.1.9)$$

La invariancia de la MDR

$$C(T(p)) = C(p) \quad (2.1.10)$$

impone que

$$\alpha_1 = -2(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \quad \alpha_2 = 2(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) \quad (2.1.11)$$

Cuando uno va al sistema de dos partículas, aparecen ingredientes nuevos. Si se quiere ser lo más general posible, se debe tener en cuenta que las transformaciones de los *boosts* pueden depender de la otra partícula (de hecho, estos términos están relacionados con la no comutatividad de la MCL), es decir, pasamos de una pareja de momentos a otra

$$\{p, q\} \rightarrow \left\{T_q^{(1)}(p), T_p^{(2)}(q)\right\} \quad (2.1.12)$$

en donde

$$T_q^{(1)}(p) = T(p) + \bar{T}_q^L(p) \quad T_p^{(2)}(q) = T(q) + \bar{T}_p^R(q) \quad (2.1.13)$$

donde el primer término denota la parte de la transformación que sólo depende del propio momento mientras que el segundo es la parte nueva que aparece en el sistema de dos partículas. Los superíndices *R* y *L* dan cuenta de la

ordenación de las partículas: p está a la izquierda de q por lo que el superíndice debe ser L , y de forma semejante para R . La forma más general de estas transformaciones es

$$[\bar{T}_q^L(p)]_0 = \frac{\eta_1^L}{\Lambda} q_0 (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\sigma_1^L}{\Lambda} p_0 (\vec{q} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\eta_2^L}{\Lambda} (\vec{p} \wedge \vec{q}) \cdot \vec{\xi} \quad (2.1.14)$$

$$\begin{aligned} [\bar{T}_q^L(p)]_i &= \frac{\eta_3^L}{\Lambda} q_i (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\sigma_2^L}{\Lambda} p_i (\vec{q} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\eta_4^L}{\Lambda} q_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k + \\ &\quad \frac{\sigma_3^L}{\Lambda} \xi_i (\vec{q} \cdot \vec{p}) + \frac{\sigma_4^L}{\Lambda} p_0 \epsilon_{ijk} q_j \xi_k + \frac{\sigma_5^L}{\Lambda} q_0 p_0 \xi_i \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Al imponer la invariancia de la MDR, uno obtiene que

$$\sigma_1^L = \sigma_2^L = 0 \quad \sigma_3^L = -\eta_3^L \quad \sigma_4^L = \eta_2^L \quad \sigma_5^L = \eta_1^L \quad (2.1.16)$$

y al imponer que se satisfaga el álgebra de Lorentz, que

$$\eta_3^L = \eta_1^L \quad \eta_4^L = -\eta_2^L \quad (2.1.17)$$

por lo que finalmente se obtiene

$$[\bar{T}_q^L(p)]_0 = \frac{\eta_1^L}{\Lambda} q_0 (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\eta_2^L}{\Lambda} (\vec{q} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{\xi} \quad (2.1.18)$$

$$[\bar{T}_p^R(q)]_0 = \frac{\eta_1^R}{\Lambda} p_0 (\vec{q} \cdot \vec{\xi}) + \frac{\eta_2^R}{\Lambda} (\vec{p} \wedge \vec{q}) \cdot \vec{\xi} \quad (2.1.19)$$

$$[\bar{T}_q^L(p)]_i = \frac{\eta_1^L}{\Lambda} q_0 p_0 \xi_i + \frac{\eta_2^L}{\Lambda^2} (q_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k - p_0 \epsilon_{ijk} q_j \xi_k) + \frac{\eta_1^L}{\Lambda} (q_i \vec{p} \cdot \vec{\xi} - \xi_i \vec{p} \cdot \vec{p}) \quad (2.1.20)$$

$$[\bar{T}_p^R(q)]_i = \frac{\eta_1^R}{\Lambda} p_0 q_0 \xi_i + \frac{\eta_2^R}{\Lambda^2} (p_0 \epsilon_{ijk} q_j \xi_k - q_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k) + \frac{\eta_1^R}{\Lambda} (p_i \vec{q} \cdot \vec{\xi} - \xi_i \vec{p} \cdot \vec{q}) \quad (2.1.21)$$

Consideremos el caso más sencillo para nuestro estudio que es la desintegración de una partícula en dos (que a primer orden nos permite obtener todas las consecuencias de imponer el principio de relatividad).

Para que se cumpla

$$k \oplus p \oplus q = 0 \quad (2.1.22)$$

necesitamos que

$$k_0 = -p_0 - q_0 + \frac{\beta_1}{\Lambda} (p_0 + q_0)^2 + \frac{\beta_2}{\Lambda} (\vec{p} + \vec{q})^2 \quad (2.1.23)$$

$$k_i = -p_i - q_i + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\Lambda} (p_0 + q_0) (p_i + q_i) \quad (2.1.24)$$

Ahora vamos a imponer el principio de relatividad, es decir, que todos los observadores coincidan en la forma de la ley de conservación:

$$k \oplus p \oplus q = 0 \implies T_{p,q}^{(1)}(k) \oplus T_{k,q}^{(2)}(p) \oplus T_{k,p}^{(3)}(q) = 0 \quad (2.1.25)$$

en donde

$$T_{p,q}^{(1)}(k) = T(k) + \bar{T}_p^L(k) + \bar{T}_q^L(k) \quad (2.1.26)$$

$$T_{k,q}^{(2)}(p) = T(p) + \bar{T}_k^R(p) + \bar{T}_q^L(p) \quad (2.1.27)$$

$$T_{k,p}^{(3)}(q) = T(q) + \bar{T}_k^R(q) + \bar{T}_p^R(q) \quad (2.1.28)$$

siendo las transformaciones anteriores una generalización a tres partículas de las vistas para dos. Al hacer esto, uno obtiene un sistema de ecuaciones, del que resultan las siguientes relaciones entre los coeficientes de la MCL y los de los *boosts*

$$\beta_1 = 2(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \quad \beta_2 = -2\lambda_3 - \eta_1^L - \eta_1^R \quad (2.1.29)$$

$$\gamma_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - \eta_1^L \quad \gamma_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - \eta_1^R \quad \gamma_3 = \eta_2^L - \eta_2^R \quad (2.1.30)$$

Con esto, podemos hallar las relaciones que existen entre los coeficientes de la MDR y la MCL (las «reglas de oro»)

$$\alpha_1 = -\beta_1 \quad \alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - \beta_2 \quad (2.1.31)$$

Estos resultados dan condiciones necesarias y suficientes que se deben cumplir entre los coeficientes de la MDR y de la MCL, y que concuerdan perfectamente con la obtenida en [15]

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \quad (2.1.32)$$

como una condición necesaria.

2.2. Cambio de variables

Desde que se formuló DSR, ha habido una gran discusión acerca de lo que ocurre al hacer un cambio de variables. Muchos argumentan que DSR no es más que SR formulada en otras coordenadas como puede verse en [16], mientras que en [2], por el contrario, se dan argumentaciones en contra de poder realizar este cambio de variables, ya que las variables momento tienen un significado físico.

Partiendo de SR, consideremos el cambio de variable más general posible y veamos si podemos llegar a las relaciones obtenidas en el apartado anterior. El cambio de variables más general que garantiza que la relación de dispersión sólo dependa del propio momento es el siguiente:

$$P_0 = p_0 + \frac{\delta_1}{\Lambda} p_0^2 + \frac{\delta_2}{\Lambda} \vec{p}^2 + \frac{v_1^L}{\Lambda} \vec{p} \cdot \vec{q} \quad (2.2.1)$$

$$P_i = p_i + \frac{\delta_3}{\Lambda} p_0 p_i + \frac{v_1^L}{\Lambda} p_0 q_i + \frac{v_2^L}{\Lambda} \epsilon_{ijk} p_j q_k \quad (2.2.2)$$

$$Q_0 = q_0 + \frac{\delta_1}{\Lambda} q_0^2 + \frac{\delta_2}{\Lambda} \vec{q}^2 + \frac{v_1^R}{\Lambda} \vec{q} \cdot \vec{p} \quad (2.2.3)$$

$$Q_i = q_i + \frac{\delta_3}{\Lambda} q_0 q_i + \frac{v_1^R}{\Lambda} q_0 p_i + \frac{v_2^R}{\Lambda} \epsilon_{ijk} q_j p_k \quad (2.2.4)$$

De hecho, la relación de dispersión en las nuevas variables es

$$P_0^2 - \vec{P}^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 + \frac{2\delta_1}{\Lambda} p_0^3 + \frac{2(\delta_2 - \delta_3)}{\Lambda} p_0 \vec{p}^2 \quad (2.2.5)$$

por lo que podemos identificar aquí que

$$\alpha_1 = 2\delta_1 \quad \alpha_2 = 2(\delta_2 - \delta_3) \quad (2.2.6)$$

Si ahora vemos cómo deben ser los *boosts* con estas nuevas variables y los comparamos con los obtenidos anteriormente, vemos que podemos hacer de forma simultánea que la ley de dispersión y los *boosts* sean los de SR. En particular,

$$\delta_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \quad \delta_2 = \lambda_3 \quad \delta_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \quad v_i^{L,R} = \eta_i^{L,R} \quad (2.2.7)$$

Calculamos ahora la composición de dos momentos

$$P_0 + Q_0 = p_0 + q_0 + \frac{\delta_1}{\Lambda} (p_0 + q_0)^2 + \frac{\delta_2}{\Lambda} (\vec{p} + \vec{q})^2 - \frac{2\delta_1}{\Lambda} p_0 q_0 + \frac{(v_1^L + v_1^R - 2\delta_2)}{\Lambda} \vec{p} \cdot \vec{q} \quad (2.2.8)$$

$$P_i + Q_i = p_i + q_i + \frac{\delta_3}{\Lambda} (p_0 + q_0)(p_i + q_i) + \frac{(v_1^L - \delta_3)}{\Lambda} p_0 q_i + \frac{(v_1^R - \delta_3)}{\Lambda} q_0 p_i + \frac{(v_2^L - v_2^R)}{\Lambda} \epsilon_{ijk} p_j q_k \quad (2.2.9)$$

e introducimos la MCL

$$(p \oplus q)_0 \doteq p_0 + q_0 - \frac{2\delta_1}{\Lambda} p_0 q_0 + \frac{(v_1^L + v_1^R - 2\delta_2)}{\Lambda} \vec{p} \cdot \vec{q} \quad (2.2.10)$$

$$(p \oplus q)_i \doteq p_i + q_i + \frac{(v_1^L - \delta_3)}{\Lambda} p_0 q_i + \frac{(v_1^R - \delta_3)}{\Lambda} q_0 p_i + \frac{(v_2^L - v_2^R)}{\Lambda} \epsilon_{ijk} p_j q_k \quad (2.2.11)$$

Con esta definición,

$$P + Q = (p \oplus q) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \quad (2.2.12)$$

y, simultáneamente, cumple la condición necesaria de que

$$(p \oplus q)_{\{q=0\}} = p \quad (2.2.13)$$

Los coeficientes β' s y γ' s en función de los coeficientes del cambio de variables quedan de la forma

$$\beta_1 = -2\delta_1 \quad \beta_2 = v_1^L + v_1^R - 2\delta_2 \quad (2.2.14)$$

$$\gamma_1 = v_1^L - \delta_3 \quad \gamma_2 = v_1^R - \delta_3 \quad \gamma_3 = v_2^L - v_2^R \quad (2.2.15)$$

Vemos que las relaciones entre los α' s, β' s y γ' s y los λ 's se satisfacen trivialmente, incluidas las reglas de oro. Esto quiere decir que, a no ser que uno considere que las variables momento tienen un significado físico, uno podría con este cambio de variables obtener SR.

3. Modelo a segundo orden en Λ

Ahora cabe la pregunta, ¿por qué ir a segundo orden? Tenemos varios tipos de argumentos para considerar esta línea de investigación:

- Desde un punto de vista experimental, hemos visto en el apartado del retraso de tiempo de vuelo de fotones que los últimos experimentos imponen fuertes restricciones de posibles desviaciones a primer orden, lo que puede significar que éstas empiecen a segundo orden.
- El análisis del espectro de neutrinos cosmológicos detectados por IceCube parece poder describirse en términos de física Planckiana con efectos de violación de Lorentz proporcionales a M_P^{-2} y no a M_P^{-1} [22].
- Desde un punto de vista teórico, en el marco del SME (modelo estándar extendido), los operadores de dimensión 6 (proporcionales a M_P^{-2}), a diferencia de lo que ocurre con los de $d = 5$, conservan CPT y no precisan de ajuste fino en el marco de teorías SUSY para evitar violaciones de invariancia Lorentz a bajas energías ([23] y [24]). Esta es una motivación teórica para pensar que los efectos de violación de invariancia Lorentz empiezan a orden M_P^{-2} .

- Hemos visto en la introducción que al tener en cuenta la gravedad en el experimento del microscopio de Heisenberg, aparecían correcciones proporcionales a $G \propto M_P^{-2}$ en las incertidumbres en las medidas de posición [6].
- Desde un punto de vista heurístico, hemos visto en la sección anterior que si uno no tiene en cuenta que las variables momento tienen un significado físico, uno puede obtener la modificación más general posible mediante un cambio de variables. Si nos atenemos al punto de vista geométrico (como la curvatura del espacio de momentos), sabemos que hay efectos nuevos que aparecerán a segundo orden. Sabemos que en GR, al considerar un espacio-tiempo curvo, uno puede hacer de forma local un cambio de coordenadas en el que la métrica sea la de Minkowski y que la primera derivada de la métrica con respecto al cuadrivector x^μ sea nula, quedando huellas de la curvatura del espacio en las derivadas segundas de la métrica.

Estas consideraciones permiten justificar un estudio como el que aquí se presenta, en el que consideraremos que las primeras correcciones aparecen a segundo orden.

En esta sección, procederemos de forma semejante al caso anterior, pero veremos que los resultados obtenidos son cualitativamente diferentes.

3.1. Principio de relatividad

A segundo orden en Λ , la relación de dispersión más general viene dada por

$$C(p) = p_0^2 - \vec{p}^2 + \frac{\alpha_3}{\Lambda^2} p_0^4 + \frac{\alpha_4}{\Lambda^2} p_0^2 (p_0^2 - \vec{p}^2) + \frac{\alpha_5}{\Lambda^2} (p_0^2 - \vec{p}^2)^2 \quad (3.1.1)$$

y la ley de composición más general compatible con la invariancia rotacional es

$$\begin{aligned} k \oplus p \oplus q|_0 &= k_0 + p_0 + q_0 + \frac{\beta_3}{\Lambda^2} (k_0 (\vec{p}^2 + \vec{q}^2) + p_0 \vec{q}^2) + \frac{\beta_4}{\Lambda^2} \left(q_0 (\vec{k}^2 + \vec{p}^2) + p_0 \vec{k}^2 \right) \\ &+ \frac{\beta_5}{\Lambda^2} (k_0 \vec{k} (\vec{p} + \vec{q}) + p_0 \vec{p} \vec{q}) + \frac{\beta_6}{\Lambda^2} \left(q_0 \vec{q} (\vec{k} + \vec{p}) + p_0 \vec{p} \vec{k} \right) + \frac{\beta_7}{\Lambda^2} (q_0 (p_0^2 + k_0^2) + k_0^2 p_0) + \\ &\frac{\beta_8}{\Lambda^2} (k_0 (p_0^2 + q_0^2) + p_0 q_0^2) + \frac{\beta_9}{\Lambda^2} k_0 p_0 q_0 + \frac{\beta_{10}}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{p} q_0 + \frac{\beta_{11}}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{q} p_0 + \frac{\beta_{12}}{\Lambda^2} \vec{p} \vec{q} k_0 + \frac{\beta_{13}}{\Lambda^2} \vec{k} (\vec{p} \wedge \vec{q}) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} k \oplus p \oplus q|_i &= k_i + p_i + q_i + \frac{\gamma_4}{\Lambda^2} (k_0^2 (p_i + q_i) + p_0^2 q_i) + \frac{\gamma_5}{\Lambda^2} \left(q_0^2 (k_i + p_i) + p_0^2 k_i \right) + \\ &\frac{\gamma_6}{\Lambda^2} (k_0 k_i (p_0 + q_0) + p_0 p_i q_0) + \frac{\gamma_7}{\Lambda^2} (p_0 p_i (k_0 + q_0) + k_0 p_0 p_i) + \frac{\gamma_8}{\Lambda^2} \left(k_i \vec{k} (\vec{p} + \vec{q}) + p_i \vec{p} \vec{q} \right) + \\ &\frac{\gamma_9}{\Lambda^2} \left(q_i \vec{q} (\vec{k} + \vec{p}) + p_i \vec{p} \vec{k} \right) + \frac{\gamma_{10}}{\Lambda^2} \left(\vec{k}^2 (p_i + q_i) + \vec{p}^2 q_i \right) + \frac{\gamma_{11}}{\Lambda^2} \left(\vec{q}^2 (k_i + p_i) + \vec{p}^2 k_i \right) + \\ &\frac{\gamma_{12}}{\Lambda^2} \varepsilon_{ijk} (k_0 k_j (p_k + q_k) + p_0 p_j q_k) + \frac{\gamma_{13}}{\Lambda^2} \varepsilon_{ijk} (q_0 q_j (k_k + q_k) + p_0 p_j k_k) + \frac{\gamma_{14}}{\Lambda^2} k_0 p_0 q_i + \frac{\gamma_{15}}{\Lambda^2} p_i k_0 q_0 + \\ &\frac{\gamma_{16}}{\Lambda^2} k_i p_0 q_0 + \frac{\gamma_{17}}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{p} q_i + \frac{\gamma_{18}}{\Lambda^2} p_i \vec{k} \vec{q} + \frac{\gamma_{19}}{\Lambda^2} k_i \vec{p} \vec{q} + \frac{\gamma_{20}}{\Lambda^2} k_0 \varepsilon_{ijk} p_j q_k + \frac{\gamma_{21}}{\Lambda^2} p_0 \varepsilon_{ijk} q_j k_k + \frac{\gamma_{22}}{\Lambda^2} q_0 \varepsilon_{ijk} k_j p_k \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

donde la forma de la MCL garantiza que cuando uno de los momentos es cero, la composición de los tres se reduce a la de los dos restantes, y que los coeficientes de la composición de dos momentos son independientes de dichos momentos.

Implementemos ahora el principio de la relatividad con esta relación de dispersión y estas leyes de composición modificadas. A segundo orden, la forma más general de la transformación de una partícula, que depende de tres parámetros $\vec{\xi}$, es

$$[T(p)]_0 = p_0 + \left(\vec{p} \cdot \vec{\xi} \right) \left(1 + \frac{\mu_1}{\Lambda^2} p_0^2 + \frac{\mu_2}{\Lambda^2} \vec{p}^2 \right) \quad (3.1.4)$$

$$[T(p)]_i = p_i + \xi_i \left(p_0 + \frac{\mu_3}{\Lambda^2} p_0^3 + \frac{\mu_4}{\Lambda^2} p_0 \vec{p}^2 \right) + \frac{\mu_5}{\Lambda^2} p_0 p_i \left(\vec{p} \cdot \vec{\xi} \right) + \frac{\mu_6}{\Lambda^2} p_0^2 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k + \frac{\mu_7}{\Lambda^2} \vec{p}^2 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k \quad (3.1.5)$$

Imponemos que se reproduzca el álgebra de Lorentz, obteniendo las siguientes relaciones entre los μ 's

$$\mu_6 = \mu_7 = 0 \quad \mu_5 = \mu_1 - 2\mu_2 + 3\mu_3 \quad \mu_4 = -\mu_2 \quad (3.1.6)$$

por lo que finalmente vemos que los *boosts* nos quedan

$$[T(p)]_0 = p_0 + \left(\vec{p} \cdot \vec{\xi} \right) \left(1 + \frac{\mu_1}{\Lambda^2} p_0^2 + \frac{\mu_2}{\Lambda^2} \vec{p}^2 \right) \quad (3.1.7)$$

$$[T(p)]_i = p_i + \xi_i \left(p_0 + \frac{\mu_3}{\Lambda^2} p_0^3 - \frac{\mu_2}{\Lambda^2} p_0 \vec{p}^2 \right) + \frac{\mu_1 - 2\mu_2 + 3\mu_3}{\Lambda^2} p_0 p_i \left(\vec{p} \cdot \vec{\xi} \right) \quad (3.1.8)$$

La invariancia de la relación de dispersión modificada impone que

$$\alpha_3 = -2\mu_2 + 2\mu_3 \quad \alpha_4 = -\mu_1 + 4\mu_2 - 3\mu_3 \quad (3.1.9)$$

Para el caso de una transformación al sistema de tres partículas, tenemos que

$$\begin{aligned} T_{p,q}^{(1)}(k) &= T(k) + \bar{T}_{p,q}^{(1)}(k) & T_{k,q}^{(2)}(p) &= T(p) + \bar{T}_{k,q}^{(2)}(p) \\ T_{k,p}^{(3)}(q) &= T(q) + \bar{T}_{k,p}^{(3)}(q) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{T}_{p,q}^{(1)}(k) &= \bar{T}_p^L(k) + \bar{T}_q^L(k) + \bar{T}_{p,q}^{(1)}(k) \\ \bar{T}_{k,q}^{(2)}(p) &= \bar{T}_k^R(p) + \bar{T}_q^L(p) + \bar{T}_{k,q}^{(2)}(p) \\ \bar{T}_{k,p}^{(3)}(q) &= \bar{T}_k^R(q) + \bar{T}_p^R(q) + \bar{T}_{k,p}^{(3)}(q) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Estas transformaciones de la forma más general toman las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \bar{T}_p^L(k)|_0 &= \frac{\chi_1^L}{\Lambda^2} p_0^2 \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_2^L}{\Lambda^2} \vec{p}^2 \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_3^L}{\Lambda^2} k_0^2 \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_4^L}{\Lambda^2} \vec{k}^2 \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_5^L}{\Lambda^2} k_0 p_0 \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \\ &\quad \frac{\chi_6^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{p} \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_7^L}{\Lambda^2} k_0 p_0 \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_8^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{p} \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_9^L}{\Lambda^2} k_0 \left(\vec{k} \times \vec{p} \right) \vec{\xi} + \frac{\chi_{10}^L}{\Lambda^2} p_0 \left(\vec{k} \times \vec{p} \right) \vec{\xi} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_p^L(k)|_i &= \frac{\chi_{11}^L}{\Lambda^2} k_0^2 p_0 \xi_i + \frac{\chi_{12}^L}{\Lambda^2} k_0 p_0^2 \xi_i + \frac{\chi_{13}^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{p} k_0 \xi_i + \frac{\chi_{14}^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{p} p_0 \xi_i + \frac{\chi_{15}^L}{\Lambda^2} \vec{k}^2 p_0 \xi_i + \\ &\quad \frac{\chi_{16}^L}{\Lambda^2} k_0 \vec{p}^2 \xi_i + \frac{\chi_{17}^L}{\Lambda^2} k_0 p_i \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_{18}^L}{\Lambda^2} k_i p_0 \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_{19}^L}{\Lambda^2} k_0 p_i \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_{20}^L}{\Lambda^2} k_i p_0 \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) + \\ &\quad \frac{\chi_{21}^L}{\Lambda^2} k_i \left(\vec{k} \times \vec{p} \right) \vec{\xi} + \frac{\chi_{22}^L}{\Lambda^2} p_i \left(\vec{k} \times \vec{p} \right) \vec{\xi} + \frac{\chi_{23}^L}{\Lambda^2} k_0^2 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k + \frac{\chi_{24}^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{\xi} \epsilon_{ijk} \hat{k}_j p_k + \frac{\chi_{25}^L}{\Lambda^2} k_0 p_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k + \\ &\quad \frac{\chi_{26}^L}{\Lambda^2} \vec{p} \vec{\xi} \epsilon_{ijk} k_j p_k + \frac{\chi_{27}^L}{\Lambda^2} p_0^2 \epsilon_{ijk} k_j \xi_k + \frac{\chi_{28}^L}{\Lambda^2} k_0 p_0 \epsilon_{ijk} k_j \xi_k + \frac{\chi_{29}^L}{\Lambda^2} k_0 k_i \vec{p} \vec{\xi} + \frac{\chi_{30}^L}{\Lambda^2} p_0 p_i \vec{k} \vec{\xi} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{p,q}^{(1)}(k) \Big|_0 &= \frac{\chi_1^{(1)}}{\Lambda^2} k_0 p_0 \left(\vec{q} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_2^{(1)}}{\Lambda^2} k_0 q_0 \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_3^{(1)}}{\Lambda^2} p_0 q_0 \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_4^{(1)}}{\Lambda^2} \left(\vec{k} \vec{p} \right) \left(\vec{q} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_5^{(1)}}{\Lambda^2} \left(\vec{k} \vec{q} \right) \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) + \\ &\frac{\chi_6^{(1)}}{\Lambda^2} \left(\vec{p} \vec{q} \right) \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \frac{\chi_7^{(1)}}{\Lambda^2} k_0 \left(\vec{p} \times \vec{q} \right) \vec{\xi} + \frac{\chi_8^{(1)}}{\Lambda^2} p_0 \left(\vec{k} \times \vec{q} \right) \vec{\xi} + \frac{\chi_9^{(1)}}{\Lambda^2} q_0 \left(\vec{k} \times \vec{p} \right) \vec{\xi} + \frac{\chi_{10}^{(1)}}{\Lambda^2} k_0 p_0 q_0 \vec{\xi} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{p,q}^{(1)}(k) \Big|_i &= \frac{\chi_{11}^{(1)}}{\Lambda^2} k_0 p_0 q_0 \xi_i + \frac{\chi_{12}^{(1)}}{\Lambda^2} \left(\vec{k} \times \vec{p} \right) \vec{q} \xi_i + \frac{\chi_{13}^{(1)}}{\Lambda^2} k_0 \vec{p} \vec{q} \xi_i + \frac{\chi_{14}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{q} p_0 \xi_i + \frac{\chi_{15}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{p} q_0 \xi_i + \\ &\frac{\chi_{16}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{\xi} p_0 q_i + \frac{\chi_{17}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{\xi} p_i q_0 + \frac{\chi_{18}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{p} \vec{\xi} k_i q_0 + \frac{\chi_{19}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{p} \vec{\xi} k_0 q_i + \frac{\chi_{20}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{q} \vec{\xi} k_i p_0 + \\ &\frac{\chi_{21}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{q} \vec{\xi} k_0 p_i + \frac{\chi_{22}^{(1)}}{\Lambda^2} q_i \left(\vec{k} \times \vec{p} \right) \vec{\xi} + \frac{\chi_{23}^{(1)}}{\Lambda^2} p_i \left(\vec{k} \times \vec{q} \right) \vec{\xi} + \frac{\chi_{24}^{(1)}}{\Lambda^2} k_i \left(\vec{p} \times \vec{q} \right) \vec{\xi} + \frac{\chi_{25}^{(1)}}{\Lambda^2} k_0 p_0 \varepsilon_{ijk} q_j \xi_k + \\ &\frac{\chi_{26}^{(1)}}{\Lambda^2} k_0 q_0 \varepsilon_{ijk} p_j \xi_k + \frac{\chi_{27}^{(1)}}{\Lambda^2} p_0 q_0 \varepsilon_{ijk} k_j \xi_k + \frac{\chi_{28}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{\xi} \varepsilon_{ijk} p_j q_k + \frac{\chi_{29}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{p} \vec{\xi} \varepsilon_{ijk} k_j q_k + \frac{\chi_{30}^{(1)}}{\Lambda^2} \vec{q} \vec{\xi} \varepsilon_{ijk} k_j p_k \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

y de forma similar para el resto de expresiones.

Ahora, pedimos que

$$C \left(T_{p,q}^{(1)}(k) \right) = C(k) \quad (3.1.16)$$

obteniendo que

$$\chi_3^L = \chi_7^L = \chi_{20}^L = \chi_{21}^L = \chi_{22}^L = \chi_1^{(1)} = \chi_2^{(1)} = \chi_7^{(1)} = \chi_{10}^{(1)} = \chi_{18}^{(1)} = \chi_{20}^{(1)} = \chi_{22}^{(1)} = \chi_{23}^{(1)} = \chi_{24}^{(1)} = 0 \quad (3.1.17)$$

$$\begin{aligned} \chi_1^L &= \chi_{12}^L & \chi_2^L &= \chi_{16}^L & \chi_4^L &= \chi_{29}^L & \chi_5^L &= \chi_{11}^L & \chi_6^L &= \chi_{13}^L + \chi_{17}^L \\ \chi_8^L &= \chi_{19}^L & \chi_9^L &= \chi_{23}^L & \chi_{10}^L &= \chi_{25}^L & \chi_{14}^L &= -\chi_{30}^L & \chi_{15}^L &= -\chi_{18}^L \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

$$\chi_3^{(1)} = \chi_{11}^{(1)} \quad \chi_4^{(1)} = \chi_{21}^{(1)} \quad \chi_5^{(1)} = \chi_{19}^{(1)} \quad \chi_6^{(1)} = \chi_{13}^{(1)} \quad \chi_8^{(1)} = \chi_{25}^{(1)}$$

$$\chi_9^{(1)} = \chi_{26}^{(1)} \quad \chi_{12}^{(1)} = -\chi_{28}^{(1)} \quad \chi_{14}^{(1)} = -\chi_{16}^{(1)} \quad \chi_{15}^{(1)} = -\chi_{17}^{(1)} \quad (3.1.19)$$

Si imponemos que se satisfaga el álgebra de Lorentz llegamos a las siguientes relaciones

$$\chi_1^L = \chi_8^L = -\chi_{14}^L = \chi_{19}^L = \chi_{30}^L = \chi_1^L \quad \chi_5^L = \chi_{11}^L = \chi_{17}^L = \chi_4^L + \chi_6^L \quad \chi_6^L = -\chi_{13}^L = \frac{1}{2} \chi_{17}^L$$

$$-\chi_{15}^L = \chi_{18}^L = \chi_{29}^L = \chi_4^L, \chi_{23}^L = -\chi_{24}^L = -\chi_{28}^L = \chi_9^L \quad \chi_{25}^L = -\chi_{26}^L = -\chi_{27}^L = \chi_{10}^L \quad \chi_2^L = \chi_{16}^L = 0 \quad (3.1.20)$$

$$\chi_3^{(1)} - \chi_4^{(1)} = \chi_5^{(1)} = -\chi_{14}^{(1)} = \chi_{16}^{(1)} = \chi_{19}^{(1)} \quad \chi_4^{(1)} = -\chi_{15}^{(1)} = \chi_{17}^{(1)} = \chi_{21}^{(1)} \quad \chi_8^{(1)} = \chi_{25}^{(1)}$$

$$\chi_9^{(1)} = \chi_{26}^{(1)} \quad \chi_{12}^{(1)} = -\chi_{28}^{(1)} \quad \chi_8^{(1)} - \chi_{12}^{(1)} = \chi_{29}^{(1)} \quad -\chi_9^{(1)} + \chi_{12}^{(1)} = \chi_{30}^{(1)} \quad (3.1.21)$$

Haciendo un cambio de notación, nuestra transformación queda finalmente de la forma

$$\begin{aligned} \bar{T}_p^L(k) \Big|_0 &= \frac{\tau_1^L}{\Lambda^2} \left(p_0^2 \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \vec{k} \vec{p} \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) \right) + \frac{\tau_2^L}{\Lambda^2} \left(\vec{k}^2 \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) + k_0 p_0 \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) \right) + \\ &\frac{\tau_3^L}{\Lambda^2} \left(k_0 p_0 \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \vec{k} \vec{p} \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) \right) + \frac{\tau_4^L}{\Lambda^2} k_0 \left(\vec{k} \times \vec{p} \right) \vec{\xi} + \frac{\tau_5^L}{\Lambda^2} p_0 \left(\vec{k} \times \vec{p} \right) \vec{\xi} \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

$$\bar{T}_p^L(k) \Big|_i = \frac{\tau_1^L}{\Lambda^2} \left(k_0 p_0^2 \xi_i - \vec{k} \vec{p} p_0 \xi_i + k_0 p_i \vec{p} \vec{\xi} + p_0 p_i \vec{k} \vec{\xi} \right) + \frac{\tau_2^L}{\Lambda^2} \left(k_0^2 p_0 \xi_i - \vec{k}^2 p_0 \xi_i + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + k_i p_o \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + k_0 k_i \vec{p} \vec{\xi} \right) + \frac{\tau_3^L}{\Lambda^2} \left(k_0^2 p_0 \xi_i - \vec{k} \vec{p} k_0 \xi_i + 2 k_0 p_i \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) \right) + \\
& \frac{\tau_4^L}{\Lambda^2} \left(k_0^2 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k - k_0 p_0 \epsilon_{ijk} k_j \xi_k - \vec{k} \vec{\xi} \epsilon_{ijk} k_j p_k \right) + \frac{\tau_5^L}{\Lambda^2} \left(k_0 p_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k - p_0^2 \epsilon_{ijk} k_j \xi_k - \vec{p} \vec{\xi} \epsilon_{ijk} k_j p_k \right) \quad (3.1.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{p,q}^{(1)}(k) \Big|_0 &= \frac{\tau_1^{(1)}}{\Lambda^2} \left(p_0 q_0 \left(\vec{k} \vec{\xi} \right) + \left(\vec{k} \vec{q} \right) \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) \right) + \frac{\tau_2^{(1)}}{\Lambda^2} \left(\left(\vec{k} \vec{p} \right) \left(\vec{q} \vec{\xi} \right) - \left(\vec{k} \vec{q} \right) \left(\vec{p} \vec{\xi} \right) \right) \\
& + \frac{\tau_3^{(1)}}{\Lambda^2} p_0 \left(\vec{k} \times \vec{q} \right) \vec{\xi} + \frac{\tau_4^{(1)}}{\Lambda^2} q_0 \left(\vec{k} \times \vec{p} \right) \vec{\xi} \quad (3.1.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{p,q}^{(1)}(k) \Big|_i &= \frac{\tau_1^{(1)}}{\Lambda^2} \left(k_0 p_0 q_0 \xi_i - \vec{k} \vec{q} p_0 \xi_i + \vec{k} \vec{\xi} p_0 q_i + \vec{p} \vec{\xi} k_0 q_i \right) + \frac{\tau_2^{(1)}}{\Lambda^2} \left(\vec{k} \vec{q} p_0 \xi_i - \vec{k} \vec{p} q_0 \xi_i - \vec{k} \vec{\xi} p_0 q_i + \vec{k} \vec{\xi} p_i q_0 - \right. \\
& \left. \vec{p} \vec{\xi} k_0 q_i + \vec{q} \vec{\xi} k_0 p_i \right) + \frac{\tau_3^{(1)}}{\Lambda^2} \left(k_0 p_0 \epsilon_{ijk} q_j \xi_k - p_0 q_0 \epsilon_{ijk} k_j \xi_k + \vec{p} \vec{\xi} \epsilon_{ijk} k_j q_k \right) + \frac{\tau_4^{(1)}}{\Lambda^2} \left(k_0 q_0 \epsilon_{ijk} p_j \xi_k - p_0 q_0 \epsilon_{ijk} k_j \xi_k - \vec{q} \vec{\xi} \epsilon_{ijk} k_j p_k \right) \quad (3.1.25)
\end{aligned}$$

Para que se cumpla

$$k \oplus p \oplus q \oplus r = 0 \quad (3.1.26)$$

debemos tener que

$$\begin{aligned}
k_0 &= -p_0 - q_0 - r_0 + \frac{\beta_3}{\Lambda^2} \left((p_0 + q_0 + r_0) (\vec{p}^2 + \vec{q}^2 + \vec{r}^2) - p_0 (\vec{q}^2 + \vec{r}^2) - q_0 \vec{r}^2 \right) - \frac{\beta_4}{\Lambda^2} \left(r_0 (\vec{p}^2 + \vec{q}^2) + q_0 \vec{p}^2 + \right. \\
& \left. (p_0 + q_0 + r_0) (\vec{p} + \vec{q} + \vec{r})^2 \right) - \frac{\beta_5}{\Lambda^2} \left((\vec{p} + \vec{q} + \vec{r})^2 (p_0 + q_0 + r_0) + p_0 (\vec{p} \vec{q} + \vec{p} \vec{r}) + q_0 \vec{q} \vec{r} \right) + \frac{\beta_6}{\Lambda^2} \left((\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) \vec{q} q_0 + \right. \\
& \left. (\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) \vec{p} p_0 + (\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) \vec{r} r_0 - \vec{p} \vec{q} q_0 - \vec{p} \vec{r} r_0 - \vec{q} \vec{r} r_0 \right) - \frac{\beta_7}{\Lambda^2} \left(p_0^2 (q_0 + r_0) + q_0^2 r_0 + (p_0 + q_0 + r_0)^3 \right) + \\
& + \frac{\beta_8}{\Lambda^2} \left((p_0 + q_0 + r_0) (p_0^2 + q_0^2 + r_0^2) - p_0 (q_0^2 + r_0^2) - q_0 r_0^2 \right) + \frac{\beta_9}{\Lambda^2} \left((p_0 + q_0 + r_0) (p_0 q_0 + p_0 r_0 + q_0 r_0) - p_0 q_0 r_0 \right) + \\
& \frac{\beta_{10}}{\Lambda^2} \left((\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) (\vec{p} q_0 + \vec{p} r_0 + \vec{q} r_0) - \vec{p} \vec{q} r_0 \right) + \frac{\beta_{11}}{\Lambda^2} \left((\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) (\vec{q} p_0 + \vec{r} q_0 + \vec{r} p_0) - \vec{p} \vec{r} q_0 \right) + \\
& + \frac{\beta_{12}}{\Lambda^2} \left((p_0 + q_0 + r_0) (\vec{p} \vec{q} + \vec{p} \vec{r} + \vec{q} \vec{r}) - \vec{q} \vec{r} p_0 \right) \quad (3.1.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_i &= -p_i - q_i - r_i - \frac{\gamma_4}{\Lambda^2} \left((p_0 + q_0 + r_0)^2 (p_i + q_i + r_i) + p_0^2 (q_i + r_i) + q_0^2 r_i \right) + \frac{\gamma_5}{\Lambda^2} \left((p_0^2 + q_0^2 + r_0^2) (p_i + q_i + r_i) - \right. \\
& \left. r_0^2 (p_i + q_i) - q_0^2 p_i \right) - \frac{\gamma_6}{\Lambda^2} \left(p_0 p_i (q_0 + r_0) + q_0 r_0 q_i + (p_0 + q_0 + r_0)^2 (p_i + q_i + r_i) \right) + \\
& \frac{\gamma_7}{\Lambda^2} \left((p_0 + q_0 + r_0) (p_0 p_i + q_0 q_i + r_0 r_i) - p_0 q_0 q_i - p_0 r_0 r_i - r_0 q_0 r_i \right) - \frac{\gamma_8}{\Lambda^2} \left((\vec{p} + \vec{q} + \vec{r})^2 (p_i + q_i + r_i) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_i \vec{p} (\vec{q} + \vec{r}) + \vec{q} \vec{r} q_i \Big) + \frac{\gamma_9}{\Lambda^2} ((\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) (\vec{p} p_i + \vec{q} q_i + \vec{r} r_i) - \vec{p} \vec{q} q_i - \vec{p} \vec{r} r_i - \vec{r} \vec{q} r_i) - \\
& - \frac{\gamma_{10}}{\Lambda^2} ((\vec{p} + \vec{q} + \vec{r})^2 (p_i + q_i + r_i) + p_i (\vec{q}^2 + \vec{r}^2) + q_i \vec{r}^2) + \frac{\gamma_{11}}{\Lambda^2} ((\vec{p}^2 + \vec{q}^2 + \vec{r}^2) (p_i + q_i + r_i) + q_i \vec{p}^2 - r_i (\vec{p}^2 + \vec{q}^2)) - \\
& - \frac{\gamma_{12}}{\Lambda^2} \epsilon_{ijk} (p_0 p_j (q_k + r_k) + q_0 q_j r_k) + \frac{\gamma_{13}}{\Lambda^2} \epsilon_{ijk} (p_0 p_j (q_k + r_k) + q_0 q_j r_k) + \\
& \frac{\gamma_{14}}{\Lambda^2} ((p_0 + q_0 + r_0) (p_0 q_i + q_0 r_i + p_0 r_i) - p_0 q_0 r_i) + \frac{\gamma_{15}}{\Lambda^2} ((p_0 + q_0 + r_0) (r_0 q_i + q_0 p_i + r_0 p_i) - p_0 r_0 q_i) + \\
& \frac{\gamma_{16}}{\Lambda^2} ((p_i + q_i + r_i) (p_0 q_0 + p_0 r_0 + q_0 r_0) - r_0 q_0 p_i) + \frac{\gamma_{17}}{\Lambda^2} ((\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) (\vec{p} q_i + \vec{q} r_i + \vec{p} r_i) - \vec{p} \vec{q} r_i) + \\
& \frac{\gamma_{18}}{\Lambda^2} ((\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) (\vec{r} q_i + \vec{q} p_i + \vec{r} p_i) - \vec{p} \vec{r} q_i) + \frac{\gamma_{19}}{\Lambda^2} ((p_i + q_i + r_i) (\vec{p} \vec{q} + \vec{p} \vec{r} + \vec{q} \vec{r}) - \vec{r} \vec{q} p_i) + \\
& \frac{\gamma_{20}}{\Lambda^2} \epsilon_{ijk} ((p_0 + q_0 + r_0) (p_j q_k + q_j r_k + p_j r_k) - p_0 q_j r_k) - \frac{\gamma_{21}}{\Lambda^2} \epsilon_{ijk} (p_0 p_j q_k + p_0 p_j r_k + q_0 q_j r_k) \\
& - \frac{\gamma_{22}}{\Lambda^2} \epsilon_{ijk} (q_0 p_j q_k + q_0 p_j r_k + r_0 (p_j r_k + p_j q_k + q_j r_k)) \tag{3.1.28}
\end{aligned}$$

Ahora imponemos el principio de relatividad, que es la siguiente ley de conservación

$$k \oplus p \oplus q \oplus r = 0 \implies T_{p,q,r}^{(1)}(k) \oplus T_{k,q,r}^{(2)}(p) \oplus T_{k,p,r}^{(3)}(q) \oplus T_{k,p,q}^{(4)}(r) = 0 \tag{3.1.29}$$

lo que da lugar a un sistema de ecuaciones, de las cuales sólo son linealmente independientes las siguientes:

$$\beta_3 = \beta_4 + \beta_5 - \beta_6 - \gamma_4 + \gamma_5 - \gamma_6 + \gamma_7 - 2\gamma_8 + 2\gamma_9 - 2\gamma_{10} + 2\gamma_{11}, \beta_7 = \beta_8 - \gamma_8 + \gamma_9 - \gamma_{10} + \gamma_{11} \tag{3.1.30}$$

$$\mu_2 - \mu_1 = -\beta_4 - \beta_5 - 3\beta_8 + \beta_9 + \frac{\beta_{10}}{3} + \frac{\beta_{11}}{3} + \frac{\beta_{12}}{3} + \gamma_4 + \gamma_6 + 2\gamma_8 - 3\gamma_9 + 2\gamma_{10} - 3\gamma_{11} - \frac{\gamma_{14}}{3} - \frac{\gamma_{15}}{3} - \frac{\gamma_{16}}{3} + \frac{\gamma_{17}}{3} + \frac{\gamma_{18}}{3} + \frac{\gamma_{19}}{3} \tag{3.1.31}$$

$$\mu_3 - \mu_1 = -2\beta_4 - 2\beta_5 - 4\beta_8 + \frac{4\beta_9}{3} + \frac{2\beta_{10}}{3} + \frac{2\beta_{11}}{3} + \frac{2\beta_{12}}{3} + 2\gamma_4 + 2\gamma_6 + 4\gamma_8 - 4\gamma_9 + 4\gamma_{10} - 4\gamma_{11} - \frac{2\gamma_{14}}{3} - \frac{2\gamma_{15}}{3} - \frac{2\gamma_{16}}{3} \tag{3.1.32}$$

$$\mu_1 - \tau_1^L - \tau_2^R - \tau_3^R - \tau_1^1 = 2\beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + 3\beta_8 - \beta_9 - \beta_{10} - \beta_{11} - \gamma_5 - \gamma_6 - 2\gamma_8 + 2\gamma_9 - 2\gamma_{10} - 2\gamma_{11} + \gamma_{16} \tag{3.1.33}$$

$$\tau_1^L - \tau_1^R - \tau_2^L + \tau_2^R - \tau_3^L + \tau_2^{(3)} = \gamma_4 - \gamma_5 + \gamma_6 - \gamma_7 + \gamma_8 - \gamma_9 + \gamma_{10} - \gamma_{11} \tag{3.1.34}$$

$$\mu_1 - \tau_1^R - \tau_2^L - \tau_3^L + \tau_1^{(2)} = 2\beta_4 + 2\beta_5 + 3\beta_8 - \beta_9 - \beta_{10} - \beta_{12} - \gamma_4 - \gamma_6 - 3\gamma_8 + 3\gamma_9 - 3\gamma_{10} + 3\gamma_{11} + \gamma_{15} \tag{3.1.35}$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 - \tau_1^R - 2\tau_2^L + \tau_2^R - \tau_3^L + \tau_2^{(1)} + \tau_2^{(2)} &= 2\beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + 3\beta_8 - \beta_9 - \frac{4\beta_{10}}{3} + \frac{\beta_{11}}{3} + \frac{\beta_{12}}{3} - \gamma_5 - \gamma_7 - \gamma_8 + \\
& \gamma_9 - 2\gamma_{10} + 2\gamma_{11} + \frac{\gamma_{14}}{3} + \frac{\gamma_{15}}{3} + \frac{\gamma_{16}}{3} + \frac{2\gamma_{17}}{3} - \frac{\gamma_{18}}{3} - \frac{\gamma_{19}}{3} \tag{3.1.36}
\end{aligned}$$

$$\mu_1 + \tau_1^L - 2\tau_1^R - \tau_2^L - \tau_3^L + \tau_1^{(3)} = 2\beta_4 + 3\beta_5 - \beta_6 + 3\beta_8 - \beta_9 - \beta_{11} - \beta_{12} - 2\gamma_4 + \gamma_5 - \gamma_6 - 4\gamma_8 + 4\gamma_9 - 4\gamma_{10} + 4\gamma_{11} + \gamma_{14} \tag{3.1.37}$$

$$\tau_1^L - \tau_1^R - \tau_2^{(1)} + \tau_2^{(3)} = \beta_5 - \beta_6 + \frac{2\beta_{10}}{3} - \frac{\beta_{11}}{3} - \frac{\beta_{12}}{3} - \gamma_4 + \gamma_5 - \gamma_8 + \gamma_9 - \gamma_{10} + \gamma_{11} + \frac{\gamma_{14}}{3} + \frac{\gamma_{15}}{3} - \frac{2\gamma_{16}}{3} - \frac{\gamma_{17}}{3} + \frac{2\gamma_{18}}{3} - \frac{\gamma_{19}}{3} \tag{3.1.38}$$

$$\tau_4^{(1)} - \tau_3^{(2)} - \tau_4^{(2)} + \tau_3^{(3)} = -\gamma_{20} + \gamma_{22}, \tau_4^L - \tau_4^R + \tau_5^L - \tau_5^R - \tau_3^{(1)} - \tau_4^{(1)} + \tau_4^{(2)} + \tau_4^{(3)} = \gamma_{12} - \gamma_{13} + \gamma_{21} - \gamma_{22} \tag{3.1.39}$$

De estas ecuaciones podemos realizar las siguientes observaciones:

- Al contrario de lo que ocurría a primer orden, no todos los β 's y γ 's están determinados por los μ 's, sino que algunos de ellos son parámetros libres, al igual que pasaba con los α 's, en el que había un parámetro indeterminado (ver (3.1.9)).

- También podemos ver que sin una transformación de los *boosts* distinta de SR tenemos que los parámetros de la composición son en general no nulos.
- Al igual que a primer orden, podemos obtener las «reglas de oro» que envuelven términos de la ley de composición y de la relación de dispersión modificada:

$$\alpha_3 = -2\beta_4 - 2\beta_5 - 2\beta_8 + \frac{2\beta_9}{3} - \frac{2\beta_{10}}{3} - \frac{2\beta_{11}}{3} - \frac{2\beta_{12}}{3} + 2\gamma_4 + 2\gamma_6 + 4\gamma_8 - 2\gamma_9 + 3\gamma_{10} - 2\gamma_{11} + \frac{2\gamma_{14}}{3} + \frac{2\gamma_{15}}{3} + \frac{2\gamma_{16}}{3} - \frac{2\gamma_{17}}{3} - \frac{2\gamma_{18}}{3} - \frac{2\gamma_{19}}{3} \quad (3.1.40)$$

$$\alpha_4 = 2\beta_4 + 2\beta_5 + 2\beta_{10} + 2\beta_{11} + 2\beta_{12} - 2\gamma_4 - 2\gamma_6 - 4\gamma_8 - 2\gamma_{10} - 2\gamma_{14} - 2\gamma_{15} - 2\gamma_{16} + \frac{4\gamma_{17}}{3} + \frac{4\gamma_{18}}{3} + \frac{4\gamma_{19}}{3} \quad (3.1.41)$$

3.2. Cambio de variables

Consideremos el cambio de variable más general posible y veamos si podemos llegar a las relaciones obtenidas en el apartado anterior. El cambio de variables más general es el siguiente:

$$K_0 = k_0 + \frac{v_1}{\Lambda^2} k_0^3 + \frac{v_2}{\Lambda^2} k_0 \vec{k}^2 + \frac{\theta_1^L}{\Lambda^2} k_0^2 (p_0 + q_0) + \frac{\theta_2^L}{\Lambda^2} k_0 (p_0^2 + q_0^2) + \frac{\theta_3^L}{\Lambda^2} k_0 (\vec{p}^2 + \vec{q}^2) + \frac{\theta_4^L}{\Lambda^2} \vec{k}^2 (p_0 + q_0) + \frac{\theta_5^L}{\Lambda^2} k_0 \vec{k} (\vec{p} + \vec{q}) + \frac{\theta_6^L}{\Lambda^2} \vec{k} (\vec{p} p_0 + \vec{q} q_0) + \frac{\theta_7^L}{\Lambda^2} k_0 p_0 q_0 + \frac{\theta_8^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{p} q_0 + \frac{\theta_9^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{q} p_0 + \frac{\theta_{10}^L}{\Lambda^2} \vec{p} \vec{q} k_0 + \frac{\theta_{11}^L}{\Lambda^2} \vec{k} (\vec{p} \wedge \vec{q}) \quad (3.2.1)$$

$$K_i = k_i + \frac{v_3}{\Lambda^2} k_0^2 k_i + \frac{v_4}{\Lambda^2} \vec{k}^2 k_i + \frac{\theta_{12}^L}{\Lambda^2} k_0^2 (p_i + q_i) + \frac{\theta_{13}^L}{\Lambda^2} (q_0^2 + p_0^2) k_i + \frac{\theta_{14}^L}{\Lambda^2} k_0 k_i (p_0 + q_0) + \frac{\theta_{15}^L}{\Lambda^2} k_0 (q_0 q_i + p_0 p_i) + \frac{\theta_{16}^L}{\Lambda^2} k_i \vec{k} (\vec{p} + \vec{q}) + \frac{\theta_{17}^L}{\Lambda^2} \vec{k} (\vec{q} q_i + \vec{p} p_i) + \frac{\theta_{18}^L}{\Lambda^2} \vec{k}^2 (p_i + q_i) + \frac{\theta_{19}^L}{\Lambda^2} k_i (\vec{p}^2 + \vec{q}^2) + \frac{\theta_{20}^L}{\Lambda^2} k_0 \varepsilon_{ijk} k_j (p_k + q_k) + \frac{\theta_{21}^L}{\Lambda^2} \varepsilon_{ijk} (q_0 q_j + p_0 p_j) k_k + \frac{\theta_{22}^L}{\Lambda^2} k_0 p_0 q_i + \frac{\theta_{23}^L}{\Lambda^2} k_0 q_0 p_i + \frac{\theta_{24}^L}{\Lambda^2} p_0 q_0 k_i + \frac{\theta_{25}^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{p} q_i + \frac{\theta_{26}^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{q} p_i + \frac{\theta_{27}^L}{\Lambda^2} \vec{p} \vec{q} k_i + \frac{\theta_{28}^L}{\Lambda^2} k_0 \varepsilon_{ijk} p_j q_k + \frac{\theta_{29}^L}{\Lambda^2} p_0 \varepsilon_{ijk} q_j k_k + \frac{\theta_{30}^L}{\Lambda^2} q_0 \varepsilon_{ijk} k_j p_k \quad (3.2.2)$$

y de forma semejante para los otros dos momentos.

Los coeficientes de la relación de dispersión que se obtienen al aplicar un cambio de variables a unas variables cuyas relaciones de dispersión son las de SR son:

$$\alpha_3 = 2v_1 + 2v_2 - 2v_3 - 2v_4 \quad \alpha_4 = -2v_2 + 2v_3 + 4v_4 \quad \alpha_5 = -2v_4 \quad (3.2.3)$$

Para que el cambio de variables preserve la separación de variables momento en las relaciones de dispersión se tienen que cumplir las siguientes relaciones entre los coeficientes del cambio de variables:

$$\theta_1^L = \theta_2^L = \theta_3^L = \theta_7^L = \theta_{10}^L = \theta_{13}^L = \theta_{17}^L = \theta_{18}^L = \theta_{19}^L = \theta_{24}^L = \theta_{27}^L = 0$$

$$\theta_4^L = \theta_{14}^L, \theta_5^L = \theta_{12}^L, \theta_6^L = \theta_{15}^L, \theta_8^L = \theta_{23}^L, \theta_9^L = \theta_{22}^L, \theta_{11}^L = \theta_{28}^L, \theta_{16}^L = -\theta_{18}^L, \theta_{25}^L = -\theta_{26}^L \quad (3.2.4)$$

Haciendo un cambio de notación, el cambio de variables más general es

$$K_0 = k_0 + \frac{v_1}{\Lambda^2} k_0^3 + \frac{v_2}{\Lambda^2} k_0 \vec{k}^2 + \frac{\delta_1^L}{\Lambda^2} \vec{k}^2 (p_0 + q_0) + \frac{\delta_2^L}{\Lambda^2} k_0 \vec{k} (\vec{p} + \vec{q}) + \frac{\delta_3^L}{\Lambda^2} \vec{k} (\vec{p} p_0 + \vec{q} q_0) + \frac{\delta_4^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{p} q_0 + \frac{\delta_5^L}{\Lambda^2} \vec{k} \vec{q} p_0 + \frac{\delta_6^L}{\Lambda^2} \vec{k} (\vec{p} \wedge \vec{q}) \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned}
K_i = & k_i + \frac{v_3}{\Lambda^2} k_0^2 k_i + \frac{v_4}{\Lambda^2} \vec{k}^2 k_i + \frac{\delta_1^L}{\Lambda^2} k_0 k_i (p_0 + q_0) + \frac{\delta_2^L}{\Lambda^2} k_0^2 (p_i + q_i) + \frac{\delta_3^L}{\Lambda^2} k_0 (q_0 q_i + p_0 p_i) + \frac{\delta_4^1}{\Lambda^2} k_0 q_0 p_i + \\
& \frac{\delta_5^1}{\Lambda^2} k_0 p_0 q_i + \frac{\delta_6^1}{\Lambda^2} k_0 \epsilon_{ijk} p_j q_k + \frac{\delta_7^L}{\Lambda^2} \left(k_i \vec{k} (\vec{p} + \vec{q}) - \vec{k}^2 (p_i + q_i) \right) + \frac{\delta_8^L}{\Lambda^2} k_0 \epsilon_{ijk} k_j (p_k + q_k) + \frac{\delta_9^L}{\Lambda^2} \epsilon_{ijk} (q_0 q_j + p_0 p_j) k_k + \\
& \frac{\delta_{10}^1}{\Lambda^2} \left(\vec{k} \vec{p} q_i - \vec{k} \vec{q} p_i \right) + \frac{\delta_{11}^1}{\Lambda^2} p_0 \epsilon_{ijk} q_j k_k + \frac{\delta_{12}^1}{\Lambda^2} q_0 \epsilon_{ijk} k_j p_k
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Si ahora vemos cómo deben ser los *boosts* con estas nuevas variables y los comparamos con los obtenidos anteriormente, vemos que tenemos una correspondencia entre los parámetros de la ley de transformación para unas variables momento que resultan de aplicar un cambio de variables a unos momentos que transforman linealmente

$$\mu_1 = v_3 - 3v_1 - 2v_2 \quad \mu_2 = v_4 - v_2 \quad \mu_3 = v_1 - v_3 \tag{3.2.7}$$

$$\tau_1^L = -\delta_3^L, \tau_2^L = -\delta_7^L - \delta_1^L, \tau_3^L = \delta_7^L - \delta_2^L, \tau_4^L = \delta_8^L, \tau_5^L = -\delta_9^L \tag{3.2.8}$$

$$\tau_1^1 = -\delta_4^1 - \delta_5^1, \tau_2^1 = \delta_{10}^1 - \delta_4^1, \tau_3^1 = \delta_6^1 - \delta_{11}^1, \tau_4^1 = \delta_{12}^1 - \delta_6^1 \tag{3.2.9}$$

Veamos qué ocurre ahora para la ley de composición de los momentos que se obtienen mediante un cambio de variables sobre unos momentos cuya ley de composición es aditiva. Los 30 coeficientes β 's y γ 's en función de los 34 coeficientes del cambio de variables quedan de la forma

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \delta_1^R - v_2, \beta_4 = \delta_1^L - v_2, \beta_5 = \delta_3^R + \delta_2^L - 2v_2, \beta_6 = \delta_3^L + \delta_2^R - 2v_2, \beta_7 = \beta_8 = -3v_1, \beta_9 = -6v_1 \\
\beta_{10} &= \delta_4^1 + \delta_4^2 - 2v_2, \beta_{11} = \delta_5^1 + \delta_4^3 - 2v_2, \beta_{12} = \delta_5^2 + \delta_5^3 - 2v_2, \beta_{13} = \delta_6^1 - \delta_6^2 + \delta_6^3 \\
\gamma_4 &= \delta_2^L - v_3, \gamma_5 = \delta_2^R - v_3, \gamma_6 = \delta_3^R + \delta_1^L - 2v_3, \gamma_7 = \delta_3^L + \delta_1^R - 2v_3, \gamma_8 = \delta_7^L - 2v_4, \gamma_9 = \delta_7^R - 2v_4 \\
\gamma_{10} &= -\delta_7^L - v_4, \gamma_{11} = -\delta_7^R - v_4, \gamma_{12} = \delta_8^L + \delta_9^R, \gamma_{13} = \delta_8^R + \delta_9^L, \gamma_{14} = \delta_5^1 + \delta_5^2 - 2v_3, \gamma_{15} = \delta_4^1 + \delta_5^3 - 2v_3 \\
\gamma_{16} &= \delta_4^2 + \delta_4^3 - 2v_3, \gamma_{17} = \delta_{10}^1 + \delta_{10}^2 - 2v_4, \gamma_{18} = \delta_{10}^3 - \delta_{10}^1 - 2v_4, \gamma_{19} = -\delta_{10}^3 - \delta_{10}^2 - 2v_4 \\
\gamma_{20} &= \delta_6^1 - \delta_{11}^2 + \delta_{11}^3, \gamma_{21} = \delta_{11}^1 - \delta_6^2 + \delta_{12}^3, \gamma_{22} = \delta_{12}^1 - \delta_{12}^2 + \delta_6^3
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Si ahora sustituimos en las relaciones (3.1.30)-(3.1.41) este cambio de variables, vemos que las ecuaciones se satisfacen de forma trivial como era de esperar, pues al aplicar un cambio de variables sobre SR se ha de obtener una ley de transformación y una ley de composición compatibles con el principio de la relatividad, lo que constituye una buena comprobación.

Uno puede extraer las siguientes relaciones entre los coeficientes β 's y γ 's de la ley de composición que se obtiene a partir de la ley de composición aditiva mediante un cambio de variables:

$$\beta_7 + \beta_8 - \beta_9 = 0 \quad \beta_7 - \beta_8 = 0 \tag{3.2.12}$$

$$(\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6) - (\beta_{10} + \beta_{11} + \beta_{12}) - (\gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7) + (\gamma_{14} + \gamma_{15} + \gamma_{16}) = 0 \tag{3.2.13}$$

$$\beta_3 - \beta_4 - \beta_5 + \beta_6 + \gamma_4 - \gamma_5 + \gamma_6 - \gamma_7 = 0 \tag{3.2.14}$$

$$\gamma_8 - \gamma_9 + \gamma_{10} - \gamma_{11} = 0 \quad \gamma_8 + \gamma_9 + \gamma_{10} + \gamma_{11} - \gamma_{17} - \gamma_{18} - \gamma_{19} = 0 \tag{3.2.15}$$

Esto quiere decir que hay sólo 24 combinaciones linealmente independientes de los 30 coeficientes que aparecen en una MCL obtenida a partir de un cambio de variables. Vemos por lo tanto que, al contrario de lo que ocurría a primer orden, no toda MCL puede obtenerse a partir de una ley de composición aditiva mediante un cambio de variables. Si comparamos estas relaciones con las obtenidas al implementar el principio de la relatividad en el apartado anterior, vemos que antes teníamos sólo 2 (3.1.30), mientras que ahora tenemos 6. Puede comprobarse fácilmente que las 2 relaciones en (3.1.30) están contenidas en este conjunto nuevo obtenido mediante cambios

de variables, como era de esperar. Introduzcamos ahora una representación de cada ley de composición mediante un vector con (30) componentes para cada uno de los coeficientes $(\beta_3, \dots, \beta_{13}, \gamma_4, \dots, \gamma_{22})$ y representamos cada relación mediante un vector ortogonal al vector que representa la ley de composición. Por ejemplo, el primer vector correspondiente a la primera relación de (3.2.12) tiene todo componentes nulas salvo las componentes 5, 6 y 7 que se corresponden con las posiciones que ocupan los coeficientes β_7, β_8 y β_9 en el vector definido arriba que valen 1, 1 y -1 respectivamente. A los vectores correspondientes a las relaciones (3.2.12)-(3.2.14) los denotaremos por $\vec{1}_{CV}, \dots, \vec{6}_{CV}$ y a los de (3.1.30) por $\vec{1}_{RP}, \vec{2}_{RP}$. Entonces podemos escribir los vectores $\vec{1}_{RP}, \vec{2}_{RP}$ en función de los $\vec{1}_{CV}, \dots, \vec{6}_{CV}$:

$$\vec{1}_{RP} = \vec{2}_{CV} + \vec{5}_{CV} \quad \vec{2}_{RP} = \vec{4}_{CV} + 2 \times \vec{5}_{CV} \quad (3.2.16)$$

La conclusión que puede obtenerse por lo tanto es que no toda cinemática relativista está contenida en un cambio de variables. Esto no ocurría a primer orden. Dado que tenemos 6 relaciones entre los coeficientes de la MCL mediante el cambio de variables y 2 al imponer el principio de la relatividad, tendremos 4 parámetros libres irreducibles en nuestra MCL asociados a cada uno de los 4 vectores perpendiculares a los 2 obtenidos mediante el principio de la relatividad, que son:

$$\vec{1}_{Irrep} = \vec{1}_{CV} \quad \vec{2}_{Irrep} = \vec{3}_{CV} \quad \vec{3}_{Irrep} = \vec{6}_{CV} \quad \vec{4}_{Irrep} = \vec{2}_{CV} + \frac{1}{2} \vec{4}_{CV} - \frac{1}{2} \vec{5}_{CV} \quad (3.2.17)$$

De esta manera determinamos las 4 combinaciones de coeficientes β' s y γ' s que no pueden eliminarse con un cambio de variables. Pueden utilizarse pues 24 de los 34 coeficientes del cambio de variables para eliminar 24 combinaciones linealmente independientes de coeficientes de la MCL. Podemos usar otro coeficiente para eliminar α_5 de la relación de dispersión. Los otros 9 los podríamos utilizar para eliminar parte de las transformaciones de Lorentz no lineales, pero seguiría habiendo parámetros completamente indeterminados.

La MCL irreducible puede escribirse como una combinación lineal de estos vectores, por lo que se pueden construir distintas MCL. Tomemos como ejemplo la MCL irreducible construida a partir del vector $\vec{1}_{Irrep}$

$$k \oplus p \oplus q|_0 = k_0 + p_0 + q_0 + \frac{\omega_1}{\Lambda^2} (q_0 (p_0^2 + k_0^2) + k_0^2 p_0 + k_0 (p_0^2 + q_0^2) + p_0 q_0^2 - k_0 p_0 q_0) \quad (3.2.18)$$

$$k \oplus p \oplus q|_i = k_i + p_i + q_i \quad (3.2.19)$$

Este caso en concreto, vemos que la ley de composición es conmutativa (esto no ocurrirá si aparece en la MCL el vector $\vec{4}_{Irrep}$). Entonces ahora nos podemos preguntar qué ocurre con las transformaciones de Lorentz. Si vamos a las relaciones (3.1.31)-(3.1.39), vemos que

$$\mu_2 - \mu_1 = -4\omega_1, \mu_3 - \mu_1 = -\frac{16\omega_1}{3}, \mu_1 - \tau_1^L - \tau_2^R - \tau_3^R - \tau_1^1 = -4\omega_1 \quad (3.2.20)$$

$$\tau_1^L - \tau_1^R - \tau_2^L + \tau_2^R - \tau_3^L + \tau_2^{(3)} = 0 = \tau_1^L - \tau_1^R - \tau_2^{(1)} + \tau_2^{(3)}, \mu_1 - \tau_1^R - \tau_2^L - \tau_3^L + \tau_1^{(2)} = -4\omega_1 \quad (3.2.21)$$

$$\mu_1 - \tau_1^R - 2\tau_2^L + \tau_2^R - \tau_3^L + \tau_2^{(1)} + \tau_2^{(2)} = -4\omega_1, \mu_1 + \tau_1^L - 2\tau_1^R - \tau_2^L - \tau_3^L + \tau_1^{(3)} = -4\omega_1 \quad (3.2.22)$$

$$\tau_4^{(1)} - \tau_3^{(2)} - \tau_4^{(2)} + \tau_3^{(3)} = -0, \tau_4^L - \tau_4^R + \tau_5^L - \tau_5^R - \tau_3^{(1)} - \tau_4^{(1)} + \tau_4^{(2)} + \tau_4^{(3)} = 0 \quad (3.2.23)$$

y en cuanto a la relación de dispersión

$$\alpha_3 = -\frac{8\omega_1}{3}, \alpha_4 = 0 \quad (3.2.24)$$

Una solución muy simple de (3.2.21)-(3.2.24) corresponde a que todos los coeficientes τ 's se anulan. En ese caso los μ 's quedan determinados. Por lo que resumiendo, tendríamos una cinemática muy sencilla en la que la MDR, la ley de transformación y la MCL serían

$$C(p) = p_0^2 - \vec{p}^2 - \frac{8\omega_1}{3\Lambda^2} p_0^4 \quad (3.2.25)$$

$$[T(p)]_0 = p_0 + \left(\vec{p} \cdot \vec{\xi} \right) \left(1 + \frac{4\omega_1}{\Lambda^2} p_0^2 \right) \quad (3.2.26)$$

$$[T(p)]_i = p_i + \xi_i \left(p_0 - \frac{4\omega_1}{3\Lambda^2} p_0^3 \right) \quad (3.2.27)$$

$$k \oplus p \oplus q|_0 = k_0 + p_0 + q_0 +$$

$$\frac{\omega_1}{\Lambda^2} (q_0 (p_0^2 + k_0^2) + k_0^2 p_0 + k_0 (p_0^2 + q_0^2) + p_0 q_0^2 - k_0 p_0 q_0) \quad (3.2.28)$$

$$k \oplus p \oplus q|_i = k_i + p_i + q_i \quad (3.2.29)$$

Acabamos de ver un ejemplo para una ley de composición irreducible, pero en realidad lo que tendríamos de forma general es una combinación lineal de las cuatro obtenidas anteriormente.

Estos coeficientes podrían obtenerse experimentalmente, y también mediante experimentos se podría ver si la composición es o no conmutativa.

4. Modificación del álgebra de Heisenberg

En este apartado vamos a explorar una forma de ir más allá de SR distinta a la deformación de relaciones de dispersión y leyes de composición, y que estará íntimamente relacionada con la estructura del espacio-fase, y por tanto, del espacio-tiempo. Nuestro objetivo será tratar de formular unas relaciones de conmutación que generalicen el álgebra de Heisenberg y que permitirían describir los efectos del experimento mental extensión del "microscopio de Heisenberg", tal como describimos en la introducción.

Partimos de las relaciones de conmutación más generales para el álgebra de Heisenberg a segundo orden

$$[x_0, p_0] = -i \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\Lambda^2} p_0^2 + \frac{\varepsilon_2}{\Lambda^2} \vec{p}^2 \right) \quad [x_0, p_i] = i \frac{\varepsilon_3}{\Lambda^2} p_0 p_i \quad (4.0.1)$$

$$[x_i, p_0] = i \frac{\varepsilon_4}{\Lambda^2} p_0 p_i \quad [x_i, p_j] = i \left(\delta_{ij} \left(1 + \frac{\varepsilon_5}{\Lambda^2} p_0^2 + \frac{\varepsilon_6}{\Lambda^2} \vec{p}^2 \right) + \frac{\varepsilon_7}{\Lambda^2} p_i p_j + \frac{\varepsilon_8}{\Lambda^2} p_0 \varepsilon_{ijk} p_k \right) \quad (4.0.2)$$

$$[x_0, x_i] = i \left(\frac{\varepsilon_9}{\Lambda^2} p_0 x_i + \frac{\varepsilon_{10}}{\Lambda^2} x_0 p_i + \frac{\varepsilon_{11}}{\Lambda^2} \varepsilon_{ijk} x_j p_k \right) \quad [x_i, x_j] = i \left(\frac{\varepsilon_{12}}{\Lambda^2} p_0 \varepsilon_{ijk} x_k + \frac{\varepsilon_{13}}{\Lambda^2} x_i p_j + \frac{\varepsilon_{14}}{\Lambda^2} p_i x_j + \frac{\varepsilon_{15}}{\Lambda^2} x_0 \varepsilon_{ijk} p_k \right) \quad (4.0.3)$$

Para determinar las relaciones entre los coeficientes, aplicamos las identidades de Jacobi obteniendo en los casos en los que no se satisfacen de forma trivial

$$x_i, x_j, x_k \implies \varepsilon_{15} = 0, \varepsilon_{14} = -\varepsilon_{13} \quad x_0, x_i, x_j \implies 2\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} \quad (4.0.4)$$

$$p_0, x_0, x_i \implies \varepsilon_{10} = \varepsilon_4 - 2\varepsilon_2 \quad (4.0.5)$$

$$p_i, x_0, x_j \implies \varepsilon_8 = -\varepsilon_{11}, \varepsilon_9 = -\varepsilon_3 - 2\varepsilon_5 \quad p_i, x_j, x_k \implies \varepsilon_{13} = -2\varepsilon_6 + \varepsilon_7 \quad (4.0.6)$$

Vemos que estos resultados contienen el álgebra de Snyder [3],

$$[x_\mu, x_\nu] = -\frac{i}{\Lambda^2} J_{\mu\nu} \quad [x_\mu, p_\nu] = i \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{\Lambda^2} p_\mu p_\nu \right) \quad (4.0.7)$$

pero son más generales. También incluyen otras relaciones exploradas teórica y experimentalmente como en [21].

Ahora hacemos el cambio de variable más general en las x' s siendo éste

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \frac{\rho_1}{\Lambda^2} p_0^2 x_0 + \frac{\rho_2}{\Lambda^2} \vec{p}^2 x_0 + \frac{\rho_3}{\Lambda^2} \vec{x} \vec{p} p_0 \quad (4.0.8)$$

$$\tilde{x}_i = x_i + \frac{\rho_4}{\Lambda^2} p_0^2 x_i + \frac{\rho_5}{\Lambda^2} \vec{p}^2 x_i + \frac{\rho_6}{\Lambda^2} p_0 x_0 p_i + \frac{\rho_7}{\Lambda^2} \vec{x} \vec{p} p_i + \frac{\rho_8}{\Lambda^2} p_0 \epsilon_{ijk} x_j p_k \quad (4.0.9)$$

Queremos que en estas nuevas variables se satisfaga el álgebra de Heisenberg usual, por lo que imponemos que

$$[\tilde{x}_0, \tilde{x}_i] = 0 \implies \epsilon_9 = 2\rho_4 + \rho_3, \epsilon_{10} = 2\rho_2 + \rho_6, \rho_8 = \sigma_{11} \quad (4.0.10)$$

$$[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] = 0 \implies \epsilon_{13} = 2\rho_5 - \rho_7, -2\rho_8 = \epsilon_{12} \quad (4.0.11)$$

$$[\tilde{x}_0, p_0] = -i \implies -\epsilon_1 = \rho_1, -\epsilon_2 = \rho_2 \quad (4.0.12)$$

$$[\tilde{x}_0, p_i] = 0 \implies -\epsilon_3 = \rho_3 \quad (4.0.13)$$

$$[\tilde{x}_i, p_0] = 0 \implies \sigma_4 = \rho_6 \quad (4.0.14)$$

$$[\tilde{x}_i, p_j] = i\delta_{ij} \implies -\epsilon_5 = \rho_4, -\epsilon_6 = \rho_5, -\epsilon_7 = \rho_7 \quad (4.0.15)$$

Podemos ver que es posible hacer un cambio de variables que nos elimine todos los términos a segundo orden, por lo que si consideramos que las variables posición no tienen un significado físico, podemos llevar esta álgebra a la usual. Otra forma de intentar ir más allá de las reglas de conmutación usuales es considerar el álgebra de Hopf, que incluye al álgebra de Poincaré como caso particular (un libro básico de álgebras de Hopf puede encontrarse en [17], y un desarrollo aplicado a las relaciones de conmutación en [18], [19] y [20]).

5. Conclusiones

En este trabajo hemos empezando motivando por qué ir más allá de SR. Existen incompatibilidades entre QFT y GR que nos impiden tener una teoría cuántica de la gravedad. Una forma de ir más allá es considerar que existe una longitud mínima, la longitud de Planck, construida mediante las constantes fundamentales de la física. Al considerar esta longitud mínima, la física cambia completamente: distinciones entre partícula real o virtual, materia-antimateria, materia-radiación,... desaparecen a escalas Planckianas. También el propio espacio-tiempo cambia sus propiedades. Ya no puede hablarse de eventos, ni de distancias de tipo-tiempo o tipo-espacio, ni siquiera de sistemas de referencia. Hay que visualizar el espacio-tiempo como una espuma que hoy en día estamos lejos de poder expresar matemáticamente.

Sin embargo, uno puede intentar construir teorías que nos permitan poco a poco adentrarnos en la gravedad cuántica, como DSR. En este marco, hemos estudiado primero un trabajo previo que considera desviaciones respecto a SR a primer orden en la expansión, para poder reproducir los cálculos a segundo orden. Hemos encontrado que a segundo orden los resultados difieren enormemente de los primeros:

- A primer orden, los parámetros de la MCL y de la MDR están completamente determinados por los parámetros no lineales de los *boosts*. A segundo orden, hay parámetros de la MCL y de la MDR que son completamente libres. De hecho, al contrario de lo que ocurría a primer orden, uno puede tener una MCL y una MDR compatibles con una transformación de Lorentz lineal.
- A primer orden, todas las MCL son compatibles con el principio de relatividad mientras que a segundo, no todas las MCL son compatibles con el principio de relatividad, ya que hemos encontrado relaciones entre los coeficientes.

- Si uno no tiene en cuenta que las variables momento tienen un significado físico, a primer orden puede llegarse a SR sin más que hacer un cambio de variables. En cambio hemos visto que a segundo orden, mediante un cambio de variables no es posible eliminar todos los parámetros de la MCL. Encontramos toda una familia de MCL con cuatro parámetros independientes, los cuales podrían determinarse mediante observaciones experimentales. También encontramos que los parámetros de la ley de transformación no pueden eliminarse mediante un cambio de variables y que el principio de la relatividad nos impone tan sólo condiciones para algunos de ellos.

Como hemos visto, los experimentos actuales ponen fuertes restricciones a posibles desviaciones a primer orden, pero en un próximo futuro podrían ser sensibles a desviaciones a segundo orden. La extensión natural del presente trabajo sería tratar de analizar implicaciones de un modelo sencillo con leyes de composición irreducibles a segundo orden compatible con el Principio de Relatividad, como el presentado al final de la sección 3, en experimentos de observación de fotones de rayos-gamma (MAGIC, Fermi) y de neutrinos cosmológicos de muy alta energía (IceCube).

Por último, hemos estudiado la forma más general que tienen las leyes de commutación en el espacio de fase, viendo que, en el caso en el que uno no considere que las coordenadas tienen un significado físico, mediante un cambio de variables uno puede obtener las relaciones del álgebra de Heisenberg usual. Esto no está en contradicción con lo visto en la sección del modelo a segundo orden, ya que a diferencia del modelo de DSR estudiado a segundo orden, en el que resulta crucial considerar la composición de varios momentos, en el tratamiento final del álgebra de Heisenberg estábamos considerando únicamente el sector de una partícula. Ir más allá del sector de una partícula en este lenguaje algebraico requeriría considerar álgebras de Hopf, un trabajo que esperamos desarrollar en un próximo futuro.

Referencias

- [1] Amelino-Camelia, Giovanni. “Quantum-Spacetime Phenomenology.” *Living Reviews in Relativity* 16 (2013). doi:10.12942/lrr-2013-5.
- [2] Amelino-Camelia, Giovanni. “Doubly-Special Relativity: Facts, Myths and Some Key Open Issues.” arXiv:1003.3942 [gr-Qc], March 20, 2010. <http://arxiv.org/abs/1003.3942>.
- [3] Hossenfelder, Sabine. “Minimal Length Scale Scenarios for Quantum Gravity.” *Living Reviews in Relativity* 16 (2013). doi:10.12942/lrr-2013-2.
- [4] Almheiri, Ahmed, Donald Marolf, Joseph Polchinski, and James Sully. “Black Holes: Complementarity or Firewalls?” *Journal of High Energy Physics* 2013, no. 2 (February 2013). doi:10.1007/JHEP02(2013)062.
- [5] Schiller, Christoph. “Does Matter Differ from Vacuum?” arXiv:gr-qc/9610066, October 28, 1996. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9610066>.
- [6] Garay, Luis J. “Quantum Gravity and Minimum Length.” *International Journal of Modern Physics A* 10, no. 02 (January 20, 1995): 145–65. doi:10.1142/S0217751X95000085.
- [7] Vasileiou, V., A. Jacholkowska, F. Piron, J. Bolmont, C. Couturier, J. Granot, F. W. Stecker, J. Cohen-Tanugi, and F. Longo. “Constraints on Lorentz Invariance Violation from Fermi-Large Area Telescope Observations of Gamma-Ray Bursts.” *Physical Review D* 87, no. 12 (June 4, 2013). doi:10.1103/PhysRevD.87.122001.
- [8] Vasileiou, Vlasios, Jonathan Granot, Tsvi Piran, and Giovanni Amelino-Camelia. “A Planck-Scale Limit on Spacetime Fuzziness and Stochastic Lorentz Invariance Violation.” *Nature Physics* 11, no. 4 (April 2015): 344–46. doi:10.1038/nphys3270.
- [9] Amelino-Camelia, Giovanni, Marco Matassa, Flavio Mercati, and Giacomo Rosati. “Taming Nonlocality in Theories with Planck-Scale-Deformed Lorentz Symmetry.” *Physical Review Letters* 106, no. 7 (February 16, 2011). doi:10.1103/PhysRevLett.106.071301.
- [10] Amelino-Camelia, Giovanni, Laurent Freidel, Jerzy Kowalski-Glikman, and Lee Smolin. “Relative Locality: A Deepening of the Relativity Principle.” *General Relativity and Gravitation* 43, no. 10 (October 2011): 2547–53. doi:10.1007/s10714-011-1212-8.
- [11] Amelino-Camelia, Giovanni, Stefano Bianco, Francesco Brighenti, and Riccardo Junior Buonocore. “Causality and Momentum Conservation from Relative Locality.” *Physical Review D* 91, no. 8 (April 21, 2015). doi:10.1103/PhysRevD.91.084045.
- [12] Amelino-Camelia, Giovanni, Giulia Gubitosi, and Giovanni Palmasano. “Pathways to Relativistic Curved Momentum Spaces: De Sitter Case Study.” arXiv:1307.7988 [gr-Qc, Physics:hep-Th], July 30, 2013. <http://arxiv.org/abs/1307.7988>.
- [13] Amelino-Camelia, Giovanni. “Born’s Prophecy Leaves No Space for Quantum Gravity.” arXiv:1205.1636 [gr-Qc], May 8, 2012. <http://arxiv.org/abs/1205.1636>.
- [14] Carmona, J. M., J. L. Cortes, and F. Mercati. “Relativistic Kinematics beyond Special Relativity.” *Physical Review D* 86, no. 8 (October 11, 2012). doi:10.1103/PhysRevD.86.084032.
- [15] Amelino-Camelia, Giovanni. “On the Fate of Lorentz Symmetry in Relative-Locality Momentum Spaces.” *Physical Review D* 85, no. 8 (April 24, 2012). doi:10.1103/PhysRevD.85.084034.

- [16] Jafari, Nosratollah, and Ahmad Shariati. “Doubly Special Relativity: A New Relativity or Not?” arXiv:gr-qc/0602075 841 (2006): 462–65. doi:10.1063/1.2218214.
- [17] Dascalescu, Sorin, Constantin Nastasescu, and Serban Raianu. Hopf Algebra: An Introduction. CRC Press, 2000.
- [18] Agostini, Alessandra, Giovanni Amelino-Camelia, and Francesco D’andrea. “Hopf-Algebra Description of Noncommutative-Space–time Symmetries.” International Journal of Modern Physics A 19, no. 30 (December 10, 2004): 5187–5219. doi:10.1142/S0217751X04020919.
- [19] Borowiec, Andrzej, and Anna Pachoł. “ κ -Minkowski Spacetimes and DSR Algebras: Fresh Look and Old Problems.” Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, October 20, 2010. doi:10.3842/SIGMA.2010.086.
- [20] Kowalski-Glikman, J, and S Nowak. “Doubly Special Relativity Theories as Different Bases of κ –Poincaré Algebra.” Physics Letters B 539, no. 1–2 (July 11, 2002): 126–32. doi:10.1016/S0370-2693(02)02063-4.
- [21] Pikovski, Igor, Michael R. Vanner, Markus Aspelmeyer, M. S. Kim, and Časlav Brukner. “Probing Planck-Scale Physics with Quantum Optics.” Nature Physics 8, no. 5 (May 2012): 393–97. doi:10.1038/nphys2262.
- [22] Stecker, Floyd W., Sean T. Scully, Stefano Liberati, y David Mattingly. «Searching for traces of Planck-scale physics with high energy neutrinos.» Physical Review D 91, n.º 4 (9 de febrero de 2015): 045009. doi:10.1103/PhysRevD.91.045009.
- [23] «Phys. Rev. Lett. 93, 191301 (2004) - Lorentz Invariance and Quantum Gravity: An Additional Fine-Tuning Problem?» Accedido 15 de septiembre de 2015. <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.93.191301>.
- [24] Allanach, B. C., y C. G. Lester. «Multidimensional mSUGRA likelihood maps.» Physical Review D 73, n.º 1 (25 de enero de 2006): 015013. doi:10.1103/PhysRevD.73.015013.