FACULTAD DE CIENCIAS

Grado en Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado:

CUESTIONES DE IRRACIONALIDAD Y TRASCENDENCIA

Carmen Molina Lalueza

Tutorizado por:
Francisco J. Ruiz

ABSTRACT

The purpose of this final degree work is to tackle issues of the irrationality and transcendence of real numbers.

For that, we are going to make use of some result of the diophantine approximation, which is the part of the theory of numbers that deals the approximation of real numbers by rational numbers.

In particular, in **Chapter 1**, we are going to show the Dirichlet's theorem and its corollary, and we give a useful criterion of irrationality. This last result, is based on affirm that a number is irrational if we are able to find a succession of fractions that satisfies a property.

After that, we give the definition of Farey's successions and some of its properties, with which we will prove another results of diophantine approximation such as the Hurwitz's theorem and a proposition about the approximation of the golden ratio.

Related to the transcendence, we state and prove the Liouville's theorem that gives a characteristic of the algebraic numbers of degree bigger than 1. Moreover, we define the Liouville's numbers and we prove its irrationality and its transcendence.

The following chapters address more specific issues:

Namely, in **Chapter 2** we are going to prove the irrationality of the numbers e, π and $\zeta(3)$.

We will do it using the criterion of irrationality that we have just mentioned. So the goal of this section is to find a succession satisfying the statement of this criterion.

First, the demonstration of the irrationality of e, is made from the definition of this number as a summation. Later, we prove the irrationality of $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ and $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, through integrals that are equals either to this values, or to a linear transformation of them. We use these integrals because they are easier to bound, and then, it is easier to arrive at the condition of the criterion of irrationality.

Once we prove the irrationality of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ it is almost immediate see that also π is irrational.

Finally,in **Chapter 3**, we are going to prove that the number e and the

number π are transcendent. In both proofs, we suppose that the number is algebraic and we arrive to a contradiction.

For the number e, we define a polynomial f(x), and also, the polynomial which is the sum of f(x) and its derivatives. Then, we start to operate with these two polynomials and with the one for which e is a root, and we arrive at an equality. Analysing both sides of this equality, we see that it is a contradiction.

For the number pi, first we give some previous results that we will use in the proof, and we show that $i\pi$ is transcendent (it is equivalent to prove the transcendent of π, because algebraic numbers forms a field). For that, we will make a similar procedure as in the proof of the transcendence of e, but we will have to study more fully the best election for the polynomial that we are going to derivate

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es estudiar las clasificaciones de los números reales en racionales o irracionales y en algebraicos o trascendentes. Para empezar, definiremos estas clases de números y daremos una idea de la importancia y dificultad de su estudio.

- Los números **racionales** son aquéllos que se pueden expresar como el cociente entre dos números enteros. Es decir, una fracción a/b con b no nulo. Los números racionales, denotados por $\mathbf{Q}$ incluyen los números enteros y son un subconjunto de los números reales.

- Por el contrario, los números que no se pueden expresar como cociente entre dos números enteros se denominan números **irracionales**. Por ejemplo, el número e, el número π y $\sqrt{2}$.

- Los números **algebraicos** son aquellos que son solución de alguna ecuación polinómica de coeficientes números racionales. De la propia definición se sabe que cualquier número racional p/q es algebraico ya que es solución de la ecuación $x - p/q$. Pero no sólo estos, también hay números irracionales como $\sqrt{2}$ que es algebraico por ser solución de $x^2 - 2 = 0$.

- Los números que no son solución de ninguna ecuación polinómica de coeficientes racionales se llaman **trascendentes**.

Una vez definidos, se puede pensar que hay muchos más números algebraicos que trascendentes, y más racionales que irracionales ya que son más fáciles de encontrar y de probar que lo son. Sin embargo, todos estos conjuntos tienen cardinalidad infinita. Es más, el conjunto de los números algebraicos y el de los racionales son numerables, mientras que el conjunto de números reales no lo es. Por tanto, al ser complementarios, el conjunto de los números trascendentes es no numerable, y el de los irracionales también. Luego, se puede decir que hay más números trascendentes que algebraicos, y más irracionales que racionales.

La prueba de la existencia de los números irracionales se le atribuye a Hipaso de Metaponto, en torno al siglo V a.C., un filósofo griego que se cree que probó por primera vez la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Se puede demostrar la irracionalidad de muchos otros números, en este trabajo, probaremos la irracionalidad de e, de π y de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Sin embargo, hoy en día existen números reales para los que no se ha sabido demostrar si son racionales o irracionales, como, por ejemplo: $\zeta(5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$.

Por otro lado, la búsqueda de números trascendentes ha resultado siempre muy costosa, siendo Liouville en 1844 el primero que probó su existencia y acabó concluyendo la trascendencia del número $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$.

En 1873, Charles Hermite probó la trascendencia del primer número "no construido", (es decir, que no se había definido específicamente para probar su trascendencia), cuando demostró que **e** es transcendente. Después, en 1884, Lindemann dio la primera demostración de la trascendencia de π.

Este trabajo, lo dividiremos en tres bloques.

En el primero, daremos un criterio de irracionalidad y veremos resultados de aproximación diofántica, que es la parte de la Teoría de números que se encarga de la aproximación de un número real por racionales. Después, llegaremos a la verificación de la existencia de los números trascendentes, con el teorema y los números de Liouville.

En el segundo, utilizaremos el criterio de irracionalidad dado en el capítulo 1 para demostrar la irracionalidad de e, de π, y de $\zeta(3)$. Para los dos últimos, utilizaremos un artículo de F. Beukers titulado *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$.

Por último, en el tercer capítulo, demostramos la trascendencia de pi y de e, utilizando las demostraciones dadas en el libro de Shidlovskii, AB. titulado *Tascendental Numbers.*

CAPÍTULO 1

Aproximación de un número real por racionales

El objetivo de este capítulo es empezar con el teorema de Dirichlet que de primeras da una simple inecuación pero, como corolario, sacamos una útil caracterización de los números irracionales. Para demostrar el teorema utilizaremos el **principio del palomar** que dice:
Si tenemos n cajas para colocar m palomas, y $n < m$, entonces habrá una caja que contenga más de una paloma.

Teorema (Dirichlet)
Sea $x \in \mathbf{R}$ y $n \in \mathbf{N} \Rightarrow$ existe $\frac{p}{q}$ racional, es decir, $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$, tal que $\mid x - \frac{p}{q} \mid < \frac{1}{qn}$ con $1 \leq q \leq n$.

Demostración
Dados el número real x y el número natural n, empecemos dividiendo el intervalo [0,1) en n intervalos, de longitud $1/n$, del tipo [j/n,(j + 1)/n), para cada $0 \leq j \leq n-1$. Estos serán nuestros n *nidos*; definamos ahora las *palomas*. Consideremos los n-1 números siguientes: {x}, {2x}, {3x},..., {(n-1)x}, donde {kx}, con k=1, ..., n-1, significa la parte fraccionaria de kx (obsérvese que tenemos más nidos que palomas). Distinguiremos tres casos:

1. Si existe $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ tal que {kx}, pertenece al último intervalo, se tendrá que
$$\mid 1 - \{kx\} \mid \leq 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$
Pero, {kx} = kx-[kx], así que
$$\mid kx - (1 + [kx]) \mid \leq \frac{1}{n}$$
Y tendríamos el resultado que buscamos tomando q=k y p=1+[kx]

2. Si uno de los números {kx} estuviera en el primer intervalo, tendríamos que
$$\mid \{kx\} \mid \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \mid kx - [kx] \mid \leq \frac{1}{n} \text{ donde } 0 < k < n.$$
Ahora, q=k y p=[kx]

3. Por último, si ninguno de los n-1 números estuviera en alguno de los intervalos extremos, tendríamos n-1 *palomas* en n-2 *nidos*, luego por el principio del palomar, existirían entonces $1 \leq j < k \leq n-1$ tales que $\{kx\}$ y $\{jx\}$ estén en el mismo intervalo. Entonces,
$$\frac{1}{n} \geq \mid \{kx\} - \{jx\} \mid = \mid (k-j)x - ([kx] - [jx]) \mid .$$
Ahora $q = k - j$ (que cumple que $0 < q < n$) y $p = [kx] - [jx]$.

Así hemos probado que para todo número real x y natural n, existen p y q, con $0 < q < n$, tales que

$$| qx - p | \leq \frac{1}{n}, de\ donde\ | x - \frac{p}{q} | \leq \frac{1}{qn}$$

Y queda probado el resultado.
$\diamond$

Corolario (Dirichlet)
x es irracional si y sólo si existen infinitos $\frac{p_n}{q_n}$, *con* $mcd(p_n, q_n) = 1$, *tales que*

$$0 <| x - \frac{p_n}{q_n} |< \frac{1}{q_n^2}$$

Demostración
Demostraremos ambas implicaciones por reducción a lo absurdo:

- $\Rightarrow$) Sea x un irracional, por el teorema de Dirichlet (ya que es un número real) sabemos que para cada n $\in$ **N** existe una fracción $\frac{p_n}{q_n}$ tal que

  $$| x - \frac{p_n}{q_n} | \leq \frac{1}{q_n n} \leq \frac{1}{q_n^2}\ ya\ que\ 0 < q_n < n.$$

  Como x es irracional tenemos que $| x - \frac{p_n}{q_n} |> 0$. Si la sucesión p_n/q_n fuese finita, existiría un $\beta \in (0, +\infty)$ tal que: $|x - \frac{p_n}{q_n}| \geq \beta > 0$, pero en la desigualdad del teorema podemos coger n suficientemente grande como para que:

  $$| x - \frac{p_n}{q_n} |< \frac{1}{q_n n} \ \rightarrow\ 0\ cuando\ n\ \rightarrow\ \infty$$

  Luego llegamos a contradicción.

- $\Leftarrow$) Supongamos que existen infinitas fracciones que cumplen la desigualdad anterior, supongamos también que x es racional $x = a/b$ y veamos la contradicción.

  $$\frac{1}{(q_n)^2} > \left| \frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|aq_n - bp_n|}{bq_n} \geq \frac{1}{bq_n},$$

  ya que $aq_n - bp_n$ es un entero no nulo, porque $|x - \frac{p_n}{q_n}| > 0$. Entonces,

  $$\frac{1}{bq_n} \leq \frac{1}{(q_n)^2} \ \Rightarrow\ b \geq q_n$$

  Y si los q_n tendrían que ser naturales y menores que b no pueden ser infinitos. Luego necesariamente, x es irracional. $\diamond$

(Ver referencia en [V])

La implicación que va de derecha a izquierda del corolario anterior se puede afinar un poco más como muestra el siguiente:

CRITERIO DE IRRACIONALIDAD

Si existen infinitas fracciones p_n/q_n *con* $p_n \in \mathbf{Z}$, *y* $q_n \in \mathbf{N}$ *tales que*

$$0 < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = o\left(\frac{1}{q_n}\right) \Rightarrow x \textit{ es irracional.}$$

Demostración Si x es racional, x=p/q con $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ entonces, para todo p_n/q_n tal que

$$0 < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|pq_n - p_n q|}{q\ q_n} \geq \frac{1}{q\ q_n}$$

Ya que el numerador es un entero positivo distinto de cero. Y como,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(q\ q_n)}{1/q_n} = \frac{1}{q} \neq 0$$

Entonces, para toda fracción p_n/q_n distinta de x $|x - \frac{p_n}{q_n}| \neq o\left(\frac{1}{q_n}\right)$.

$\diamond$

Éste último resultado será el que utilizaremos en el próximo capítulo para probar la irracionalidad de e, de π y de $\zeta(3)$.

Sucesiones de Farey

Introducimos ahora, el concepto de sucesión de Farey, con él, llegaremos al teorema de Hurwitz, que es una mejora del corolario (Dirichlet), y a una propiedad del número áureo.
En 1926, John Farey, un geólogo y escritor inglés, mandó a una revista la construcción de una sucesión de fracciones como mera curiosidad. Sin saberlo, había propuesto una serie con propiedades muy interesantes que ha sido muy útil en la teoría de números.
Veamos cómo se define, cómo se construye y cuáles son sus propiedades.

Dado $N \in \mathbf{N}$, la **sucesión de Farey de orden N**, que denotamos por $\mathbf{F_N}$, es el conjunto de fracciones irreducibles de denominador no mayor que N comprendidas entre 0 y 1. Por ejemplo, para N=3:

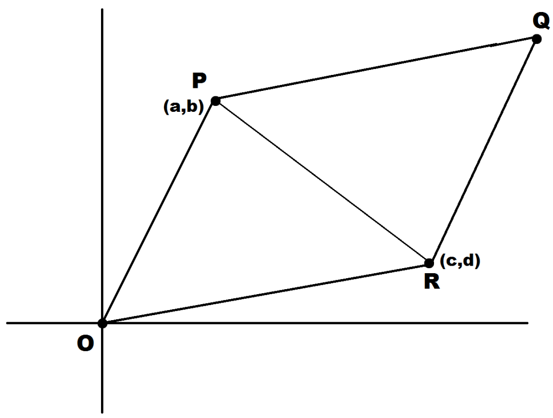
$$F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$$

Teorema Sea F_N la sucesión de Farey de orden N y $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ consecutivos en $F_N \Rightarrow$

$$bc - ad = 1$$

Demostración

Consideremos la figura:



Obsérvese que el Área$\overline{OPRQ} = |bc - ad|$. Hay que probar que el área del triangulo es 1/2. Para ello, vamos a hacer uso de una regla geométrica muy sencilla para calcular áreas: Si colocamos un rectángulo en una cuadrícula, y entendemos como puntos los vértices de los cuadrados que la forman, su área es igual a

$$n^o\ de\ puntos\ de\ dentro + \frac{n^o\ de\ puntos\ del\ contorno}{2} - 1$$

Para comprobarlo, supongamos un rectángulo general, de vértices: (n,m), (n, m+h), (n+k,m+h), (n+k, m) cuyo área sabemos que es base por altura: kh. Si lo hacemos con la fórmula anterior, tenemos:

- Puntos de dentro: (k-1)(h-1)
- Puntos del contorno: 2k + 2h

Luego el área:

$$(k-1)(h-1) + \frac{2h+2k}{2} - 1 = kh$$

Así, para calcular el área de trapecios y triángulos, completamos éstos hasta llegar a rectángulos para ver que las fórmulas del área de ellos son: la misma que el rectángulo para el trapecio y para el triángulo, la misma dividida entre 2.
Vemos así que el triángulo de la figura tiene que tener área de 1/2 ya que si fuera mayor, tendría que haber al menos un punto interior (e,f) y entonces la fracción e/f pertenecería a F_N y estaría entre a/b y c/d, en contradicción con que sean consecutivos.

Proposición Para todo $n \in \mathbf{N}$, si $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ son tres elementos consecutivos de F_N

$$\Rightarrow \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1+a_3}{b_1+b_3}$$

Demostración

$$\begin{array}{l} a_2b_1 - a_1b_2 = 1 \\ a_3b_2 - a_2b_3 = 1 \end{array} \Rightarrow a_2(b_1+b_3) - b_2(a_1+a_3) = 0$$

despejando,

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1+a_3}{b_1+b_3}$$

Veamos ahora la utilidad que tienen estas sucesiones en el estudio de los números irracionales:
◇
Teorema *Si x es irracional ⇒ existen infinitos racionales h/k tales que*

$$\left| x - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{2k^2}$$

Demostración

La hacemos, sin pérdida de generalidad, para $x \in (0,1)$. Esto se debe a que si $x \notin (0,1)$, $x = [x] + \{x\}$, con $\{x\} \in (0,1)$, si se cumple el enunciado para $\{x\}$, para x se tiene

$$\left| [x] + \{x\} - \frac{h + k[x]}{k} \right| < \frac{1}{2k^2}$$

Sea a/b y c/d dos elementos consecutivos de F_N tales que

$$\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$$

Si suponemos que ni a/b ni c/d cumplen la propiedad del enunciado, llegaríamos a la contradicción de que

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2} - \frac{2}{db} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right)^2 < 0$$

Ahora bien, habrá otro N' tal que existirán p_1/q_1 y p_2/q_2 en $F_{N'}$ tales que:

$$\frac{a}{b} < \frac{p_1}{q_1} < x < \frac{p_2}{q_2} < \frac{c}{d}$$

y análogamente se tendría que cumplir el teorema para uno de los dos. Repitiendo reiteradamente este proceso obtendríamos infinitos números que cumplieran el enunciado. Ya que entre un número irracional y un racional siempre habrá una fracción de una sucesión de Farey.

◇

Teorema de Hurtwitz Si x es irracional ⇒ existen infinitas fracciones h/k irreducibles, tales que:

$$\left|x - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}$$

Demostración Sea x un número irracional y a/b y c/d en F_n tales que $\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$, sabemos que $\frac{a+c}{b+d}$ está entre las dos fracciones, lo que no sabemos es si es mayor o menor que x. Distinguimos entonces, dos casos:

- Si

  $$x < \frac{a+c}{b+d}.$$

  Supongamos:

  $$x - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{b^2\sqrt{5}}$$

  Entonces,

  $$\frac{a+c}{b+d} - x \geq \frac{1}{(b+d)^2\sqrt{5}} \text{ y } \frac{c}{d} - x \geq \frac{1}{d^2\sqrt{5}}$$

  ahora,

  $$\left(\frac{1}{bd} =\right) \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} - x\right) + \left(x - \frac{a}{b}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2}\right)$$

  Poniendo como denominador común b^2d^2 que es positivo,

  $$\Rightarrow \sqrt{5}bd \geq b^2 + d^2$$

Además

$$\left(\frac{1}{b(b+d)} =\right) \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{(b+d)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}b(b+d) \geq (b+d)^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}(b^2+2bd) \geq 3b^2 + 2bd + 2d^2 \Rightarrow$$

$$4d^2 - 4(\sqrt{5}-1)bd + (\sqrt{5}-1)^2b^2 \leq 0 \quad (porque 2(3-\sqrt{5}) = (\sqrt{5}-1)^2$$

$$\Rightarrow (2d - (\sqrt{5}-1)b)^2 \leq 0$$

Hemos llegado a contradicción.

- Si

  $$x > \frac{a+c}{b+d}$$

  la demostración es análoga.

$\diamond$

Proposición
Para el número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la constante $c = \sqrt{5}$, no puede ser reemplazada por un valor más grande que cumpla el teorema de Hurwitz.

Demostración

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = x^2 - x - 1$$

$$0 \neq \left|\frac{h}{k} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\left|\frac{h}{k} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5}\right| =$$

$$\left|\frac{h^2}{k^2} - \frac{h}{k} - 1\right| = \frac{1}{k^2}\left|h^2 - hk + k^2\right| \geq \frac{1}{k^2}$$

El último paso se debe a que como h y k son primos entre sí, $h - k \neq 0$, y entero $\Rightarrow (h-k)^2 \geq 1$. Supongamos que existen infinitos racionales h_j/k_j con $k_j > 0$ y m real y positivo, tales que:

$$\left|\frac{h_j}{k_j} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < \frac{1}{mk_j^2} \;\Rightarrow\; \left|h_j - k_j\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < \frac{1}{mk_j}$$

$$\Rightarrow\; k_j\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{mk_j}<h_j<k_j\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{mk_j}$$

Luego para cada k_j existe un número finito de h_j. Entonces para que haya infinitos, necesariamente $k_j \;\rightarrow\; \infty$. Entonces,

$$\frac{1}{k_j^2}\leq\left|\frac{h}{k}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\left|\frac{h}{k}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{5}\right|\leq\frac{1}{mk_j^2}\left(\frac{1}{mk_j^2}+\sqrt{5}\right)$$

Por tanto,

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{mk_j^2}+\sqrt{5}\right)\geq 1\;\Rightarrow\; m\leq\frac{1}{mk_j^2}+\sqrt{5}\;\Rightarrow\; m\leq\sqrt{5}\;si\;k\rightarrow\;+\infty$$

$\diamond$

Lo que nos está diciendo esta proposición es que, si para algún x encontramos infinitas fracciones p_n/q_n que cumplan

$$0<\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{cq_n^2}\;con\;c>\sqrt{5}.$$

podremos determinar, que x no es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

<u>Trascendencia</u>
En este apartado, vemos como, continuando con argumentos de este tipo, podemos llegar a conclusiones para números algebraicos de grado n o para números trascendentes. Teniendo en cuenta que: *un número algebraico a se dice que es* **de grado n** *si su polinomio mínimo es de grado n. El polinomio mínimo es el polinomio mónico de menor grado para el que a es raíz.*
El teorema de Liouville nos dice que todo número algebraico de grado $n\geq 2$ tiene que cumplir una característica. Luego si un número no la cumple y no es racional (esto es, que no es algebraico de grado 1) podemos concluir que es trascendente.
Este teorema, como decíamos en la introducción fue el primero que probó la existencia de los números trascendentes en 1844.

Teorema de aproximación de Liouville
Sea x_0 un número algebraico de grado $n\geq 2$, esto es, un número cuyo **polinomio mínimo** *(siendo este el polinomio mónico de menor grado que tiene a x_0 como raíz) es de grado n. Entonces existe una constante $c(x_0)>0$ tal que para toda fracción h/k se tiene:*

$$\left|x_0-\frac{h}{k}\right|>\frac{c(x_0)}{k^n}$$

Demostración Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in \mathbf{Q}[x]$, irreducible tal que $P(x_0) = 0$. Por el teorema del valor medio, tenemos:

$$P\left(\frac{h}{k}\right) = P\left(\frac{h}{k}\right) - P(x_0) = P'(\xi)\left(\frac{h}{k} - x_0\right) \quad \xi \in \left(x_0, \frac{h}{k}\right)$$

$$P\left(\frac{h}{k}\right) = a_0 + ... + a_n\left(\frac{h}{k}\right)^n = \frac{N}{k^n}, \quad N \in \mathbf{Z} - \{0\}$$

$$\Rightarrow \left|P\left(\frac{h}{k}\right)\right| \geq \frac{1}{k^n} \;\Rightarrow\; \frac{1}{k^n} \leq |P'(\xi)|\left|\frac{h}{k} - x_0\right|$$

Sea $d = |\frac{h}{k} - x_0|$.

- Si $d > 1$, $\left|x_0 - \frac{h}{k}\right| > \frac{1}{k^n}$, y se cumple el enunciado con $c(x_0) = 1$.
- Si $d \leq 1 \;\Rightarrow\; |\xi - x_0| \leq 1 \;\Rightarrow\; |\xi| \leq |x_0| + 1$. Entonces,

  $|P'(\xi)| \leq |a_1| + |2a_2\xi| + ... + |na_n\xi^{n-1}| \leq |a_1| + ... + |na_n|(|x_0| + 1)^{n-1} = A(x_0)$,

  Luego,

  $$|P'(\xi)| < A(x_0) + 1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{h}{k} - x_0\right| > \frac{1}{1 + A(x_0)}\frac{1}{k^n}$$

  Y se cumple el enunciado para $c(x_0) = \frac{1}{1+A(x_0)}$.

$\diamond$

Lo que este teorema nos muestra es que un número algebraico irracional, no puede ser aproximado "muy cerca"por números racionales. Dicho de otro modo, si α es un número irracional algebraico, existe una constante $c(\alpha) > 0$ tal que no existe un par $(p, q) \in \mathbf{Z}x\mathbf{N}$ que cumpla:

$$0 <\mid \alpha - \frac{p}{q} \mid < \frac{c(\alpha)}{q^n}.$$

Es decir, no hay una aproximación por números racionales de orden mejor que $\frac{1}{q^n}$.

Números de Liouville

Un número real α se dice número de Liouville si para todo entero n, existen $p \in \mathbf{Z}$ y $q \in \mathbf{N}$ tales que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}, \qquad q > 1$$

Los números de Liouville son aquéllos que podemos aproximar tanto cuanto queramos por números racionales. Probemos ahora, que todo número de Liouville es irracional y trascendente:

Teorema. *Todo número de Liouville es irracional.*

DEMOSTRACIÓN
Supongamos que existe un número de Liouville $\alpha = a/b$, sea n un entero positivo tal que $2^{n-1} > b$. Como α es un número de Liouville, tenemos

$$0 < \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

La primera desigualdad nos dice que $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$ lo que equivale a decir, ya que son todos números enteros, que $\mid aq - bp \mid \geq 1$, así

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq - bp}{bq}\right| \geq \frac{1}{bq} > \frac{1}{2^{n-1}q} \geq \frac{1}{q^n},$$

esto nos lleva a contradicción.
$\diamond$
Teorema. *Todo número de Liouville es trascendente.*

DEMOSTRACIÓN
Lo haremos por reducción a lo absurdo. Si α es de Liouville, para todo natural j existen p,q tales que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^j}$$

Si α un número algebraico de grado n. Según el teorema de Liouville existe una constante $c(\alpha)$ positiva tal que para todo $(p, q) \in \mathbf{Z}x\mathbf{N}, p/q \neq \alpha$, tenemos:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^n}$$

Entonces queda:

$$\frac{1}{q^j} > \frac{c(x_0)}{q^n} \;\Rightarrow\; c(x_0) < \frac{1}{q^{j-n}}$$

Si hacemos tender j a infinito, como q es un natural quedaría $c(x_0) < 0$, contradicción.
$\diamond$

CAPÍTULO 2

Irracionalidad de e

Probaremos la irracionalidad de e, usando la expresión: $\mathbf{e} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n!}}$, viendo que sus sumas parciales satisfacen el criterio de irracionalidad del Capítulo 1.

Consideremos, para cada valor de N, las sumas parciales de la serie:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \frac{1}{N!}(N! + \frac{N!}{2!} + ... + \frac{N!}{(N-1)!} + 1) = \frac{p_N}{N!}$$

Llamando p_N al número que está entre paréntesis en esa expresión. Los p_N son enteros ya que son cocientes entre factoriales con numerador mayor que denominador. Sumamos la serie geométrica:

$$0 < \left| e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + ... \right| = \frac{1}{(N+1)!}(1 + \frac{1}{(N+2)} +$$

$$+ \frac{1}{(N+2)(N+3) + ...)} < \frac{1}{(N+1)!}(1 + \frac{1}{(N+1) + \frac{1}{(N+1)^2} + ...)} =$$

$$= \frac{1}{(N+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^j} = \frac{1}{(N+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^j} =$$

$$= \frac{1}{(N+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} = \frac{1}{NN!} = o\left(\frac{1}{N!}\right),$$

Así ya tenemos la sucesión de fracciones $p_N/N!$ que cumple:

$$0 < \left| e - \frac{p_N}{N!} \right| = o\left(\frac{1}{N!}\right)$$

Y por el corolario anterior se tiene que **e es irracional**.

Para la irracionalidad de π y de $\zeta(3)$ hemos utilizado un artículo de F. Beukers (Ver referencia [II])

Irracionalidad de π

Vamos a probar la irracionalidad de

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Para empezar, veamos el valor de una integral del tipo

$$\int_0^1\int_0^1\frac{P(s,t)}{1-st}dsdt$$

Como la integración es una operación lineal, analicemos integrales más sencillas primero. Para ello, utilizaremos el Teorema de la Convergencia Monótona (TCM):
Si tenemos una sucesión de funciones f_n creciente convergente a una función f, si éstas funciones son integrables en I=[a,b] (con $a,\ b\in\mathbf{R},\ a<b$): $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=\int_I\lim_{n\to\infty}f_n=\int_I f$. *Luego, si g_k es una sucesión de funciones positivas, como $\sum_{k=0}^{\infty}g_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}g_k$, y al ser sumas finitas de funciones positivas, éstas forman una sucesión creciente, se tiene:*

$$\int_I\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}g_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_I g_k=\sum_{k=0}^{\infty}\int_I g_k.$$

- Sabiendo que el desarrollo en serie de Taylor de $\frac{1}{1-st}$ es $\sum_{k=0}^{\infty}s^kt^k$ si $|st|<1$

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\frac{\mathbf{dsdt}}{\mathbf{1-st}}=\int_0^1\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}s^kt^kdsdt=(s,t\in(0,1)\ \Rightarrow\ |st|<1)$$

Por el TCM ya que $s^kt^k>0$ si $s,t\in(0,1)x(0,1)$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 s^kt^kdsdt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\left.\frac{s^{k+1}t^k}{k+1}\right|_0^1dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\frac{t^k}{k+1}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}=\zeta(\mathbf{2})$$

- Sean $\alpha,\beta\in\mathbf{N}$ suponiendo, sin pérdida de generalidad, $\alpha>\beta$.

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\frac{\mathbf{t^{\alpha}s^{\beta}}}{\mathbf{1-st}}\mathbf{dsdt}=\int_0^1\int_0^1 s^{\beta}t^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}s^kt^kdsdt=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 s^{\beta+k}t^{\alpha+k}dsdt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha+k+1}\frac{1}{\beta+k+1} =$$

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta+k}-\frac{1}{\alpha+k}\right) = (*)$$

Como β y α son números naturales existirá un $N \in \mathbf{N}$ tal que $\beta+N = \alpha$, así:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta+N+k}-\frac{1}{\alpha+k} = 0$$

Luego,

$$(*) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(0+\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{\beta+k}\right) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\beta+1}+...+\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$$

con $B \leq mcm(1,2,...,\alpha)^2$, porque los $\alpha-\beta, \beta+1, ..., \alpha$ son números naturales menores que α.

- Si $\alpha = \beta$

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\frac{\mathbf{t}^{\alpha}\mathbf{s}^{\alpha}}{\mathbf{1}-\mathbf{st}}\mathbf{dsdt} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k)^2} = \zeta(2) - \sum_{0}^{\alpha}\frac{1}{k^2} = \zeta(\mathbf{2}) - \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$$

Entonces, si tenemos un polinomio P(s,t) de grado menor o igual que α y coeficientes enteros se tendrá:

$$\int_0^1\int_0^1\frac{P(s,t)}{1-st}dsdt = A\zeta(2)+B$$

Con A entero y B racional de denominador no mayor que $(mcm(1,2,...,\alpha))^2$
Lo que queremos ahora es encontrar un polinomio que haga las integrales más pequeñas. Elegimos el polinomio de Legrende de grado n:

$$P_n(s,t) = (1-t)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{ds^n}((1-s)^n s^n)\right)$$

Ahora acotamos:

$$\left|\int_0^1\int_0^1\frac{(1-t)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{ds}\right)^{(n)}((1-s)^n s^n)}{1-st}dsdt\right| =$$

$$\int_0^1\int_0^1\frac{P_n(s,t)}{1-st}dsdt = A_n\zeta(2)+B_n$$

$$\left|\int_0^1\int_0^1\frac{(1-t)^n t^n(1-s)^n s^n}{(1-st)^{n+1}}dsdt\right| \leq \sup_{s,t\in[0,1]}\left|\frac{(1-t)t(1-s)s}{1-st}\right|^n\zeta(2)$$

Calculando las derivadas parciales, viendo los puntos que las anulan y el signo del hessiano, vemos que el máximo que alcanza la función en [0,1]x[0,1] es $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Así vemos:

$$0 < \left| \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(s,t)}{1-st} dsdt \right| = |\zeta(2) + \frac{B_n}{A_n}| < \frac{1}{A_n} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5n} \zeta(2).$$

Luego, si llamamos $d_n = mcm[1, 2, ..., n]$

$$0 < |\zeta(2) + \frac{d_n^2 B_n}{d_n^2 A_n}| \leq \frac{1}{d_n^2 A_n} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5n} d_n^2 \zeta(2)$$

Veamos que

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5n} d_n^2 \zeta(2) \ \rightarrow \ 0 \ cuando \ n \ \rightarrow \ \infty$$

$$d_n = mcm(1, 2, ..., n) = \prod_{p \leq n} p^{\gamma(p)} \leq \prod_{p \leq n} p^{\frac{log \ n}{log \ p}} =_{(*)} \prod_{p \leq n} n = n^{\pi(n)}$$

(*) se debe a que: $p^{\frac{log \ n}{log \ p}} = e^{log \ p \frac{log \ n}{log \ p}} = e^{log \ n} = n$. Ahora, el teorema del número primo (ver demostración en referencia [IV]), nos dice que *el número de primos en [1,n]=*$\pi(n) \sim \frac{n}{log \ n}$. Es decir,

$$lim_{n \to \infty} \left(\frac{\pi(n)}{n/log \ n} \right) = 1$$

Luego existe un ϵ pequeño, tal que: $\pi(n) \leq \frac{n(1+\epsilon)}{log \ n}$. Y así podemos demostrar que la cota que teníamos tiende a cero:

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^5 e^{2(1+\epsilon)} \leq \left(\frac{2'25-1}{2} \right)^5 3^2 < 0'86$$

Es decir,

$$\frac{1}{d_n^2 A_n} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5n} d_n^2 \zeta(2) < \frac{0'86^n \zeta(2)}{d_n^2 A_n} \ \rightarrow \ 0 \ si \ n \ \rightarrow \ \infty.$$

Luego,

$$0 < \left| \zeta(2) + \frac{d_n^2 B_n}{d_n^2 A_n} \right| = o\left(\frac{1}{d_n^2 A_n} \right)$$

Y con el corolario del teorema de Dirichlet queda demostrado que $\pi^2/6$ es irracional. Entonces, si $\pi = a/b \Rightarrow \ \pi^2/6 = a^2/6b^2$ y también sería racional, necesariamente entonces, π **es irracional**.

Irracionalidad de $\zeta(3)$:

$$\zeta(\mathbf{3}) = \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^3}}$$

Ahora queremos ver el valor de una integral del tipo:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{P(s,t)log(s,t)}{1-st} dsdt$$

Para ello, analicemos de nuevo integrales más sencillas, reescribimos la integral de la demostración anterior.

- Si $\alpha > \beta$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{t^\alpha s^\beta log(st)}{1-st} dsdt = -\int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} -log(st) t^{\alpha+k} s^{\beta+k} \ dsdt = (*)$$

Si $s,t \in (0,1) \ \Rightarrow \ st \in (0,1) \ \Rightarrow \ log(st) < 0 \ y \ t^{\alpha+k}s^{\beta+k} > 0 \ \Rightarrow$ $-log(st)t^{\alpha+k}s^{\beta+k} > 0$ Usando el TCM de nuevo,

$$(*) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 log(st) t^{\alpha+k} s^{\beta+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (log(s)+log(t)) t^{\alpha+k} s^{\beta+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 t^{\alpha+k} \left(\int_0^1 log(s) \ s^{\beta+k} ds \right) dt + \int_0^1 s^{\beta+k} \left(\int_0^1 log(t) \ t^{\alpha+k} dt \right) ds \right) =$$

Integrando por partes y evaluando en 0 y 1, queda:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{(\alpha+k+1)(\beta+k+1)^2} - \frac{1}{(\alpha+k+1)^2(\beta+k+1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{\alpha-\beta} \frac{1}{(\beta+k+1)^2} = \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{(\beta+1)^2} + ... + \frac{1}{\alpha^2} \right) =$$

Así vemos que dicha suma, es un número racional con denominador no mayor que d_r^3 con $d_r = mcm[1,2,...,r]$.

- Si $\alpha = \beta$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{log \ st}{1-ts} s^\alpha t^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(\alpha+k+1)^3} =$$

$$= -2 \left(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - ... - \frac{1}{\alpha^3} \right).$$

Consideramos ahora la integral:

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{log\ st}{1-st}P_n(s)P_n(t)dsdt.$$

Con P_n el polinomio de Legrende de s y de t de grado n. Sabemos entonces que esta integral será igual a $(A_n + B_n\zeta(3))d_n^{-3}$ con $A_n, B_n \in \mathbf{Z}$.
Teniendo en cuenta:

$$\frac{-log\ st}{1-st} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-st)z}dz,$$

$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{log\ st}{1-st}P_n(s)P_n(t)dsdt = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(s)P_n(t)}{1-(1-st)x}dsdtdz.$$

Derivamos n veces respecto a s y tendremos:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(stz)^n(1-s)^nP_n(t)}{(1-(1-st)z)^{n+1}}dsdtdz$$

Haciendo el cambio de variable $w = \frac{1-z}{1-(1-st)z}$ tendremos la integral:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (1-s)^n(1-w)^n\frac{P_n(t)}{1-(1-st)z}dsdtdw.$$

Derivamos n veces respecto a t y tenemos:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{s^n(1-s)^nt^n(1-t)^nw^n(1-w)^n}{(1-(1-st)w)^{n+1}}dsdtdw.$$

Hallamos que el máximo valor que alcanza la función $s(1-s)t(1-t)w(1-w)(1-(1-st)w)^{-1}$ y es $(\sqrt{2}-1)^4$ en [0,1]x[0,1]x[0,1]. Entonces,

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{|s^n(1-s)^nt^n(1-t)^nw^n(1-w)^n|}{(1-(1-st)w)^{n+1}}dsdtdw \leq$$

$$(\sqrt{2}-1)^{4n}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-(1-st)w}dsdtdw =$$

$$(\sqrt{2}-1)^{4n}\int_0^1\int_0^1 \frac{-log\ st}{1-st}dsdt = 2(\sqrt{2}-1)^{4n}\zeta(3)$$

Tenemos:

$$0 < |A_n + B_n\zeta(3)|d_n^{-3} < 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n},$$

Es decir,

$$0 < \left|\zeta(3) + \frac{A_n}{B_n}\right| < \frac{2\zeta(3)d_n^3(\sqrt{2}-1)^{4n}}{d_n^3B_n}$$

$$\leq \frac{2\zeta(3)(27(\sqrt{2}-1)^4)^n}{d_n^3B_n} < \frac{2\zeta(3)(4/5)^n}{d_n^3B_n} \ \rightarrow\ 0 \quad si\ n \rightarrow \infty$$

Luego el último término es una o pequeña del denominador $d_n^3B_n$. Por tanto, por el criterio de irracionalidad, $\zeta(3)$ **es irracional**.

CAPÍTULO 3

Observación *Un polinomio es algebraico en* **Z***[x] si y sólo si lo es en* **Q***[x].*

Esto se debe a que dado un número real a, si encontramos un polinomio $p(x)$ en **Q**[x] tal que $p(a) = 0$, multiplicaríamos por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes de $p(x)$, llamémosle b, y tendríamos un polinomio $bp(x)$ en **Z**[x] que cumpliría también $bp(a) = 0$, y a sería algebraico en los enteros. La otra implicación es obvia ya que **Z**[x]⊂**Q**[x].

Trascendencia de e

Supongamos que existe un polinomio $p(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbf{Z}$, tal que e es una de sus raíces ($a_m e^m + ... + a_1 e + a_0 = 0$). Supongamos, sin pérdida de generalidad que $a_0 \neq 0$, en caso contrario, dividiriamos por x, y a_1 sería el nuevo término independiente, y como $e \neq 0$, $\frac{P(e)}{e} = 0/e = 0$ y e seguiría siendo raíz.
Definimos ahora:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p...(x-m)^p}{(p-1)!}$$

Con p número primo arbitrario. Definimos también:

$$F(x) = f(x) + f'(x) + ... + f^{(mp+p-1)}(x)$$

Obsérvese que F(x)-F'(x)=f(x), ya que el ultimo término de F'(x) sería $f^{mp+p)}(x) = 0$ por ser f(x) un polinomio de grado mp+p-1.
Vemos que si $0 < x < m$

$$|f(x)| \leq \frac{m^{p-1}m^{mp}}{(p-1)!} = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$

Y para F(x):

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = e^{-x}(F'(x) - F(x)) = -e^{-x}f(x)$$

Por lo que, por la regla de Barrow:

$$a_j \int_0^j e^{-x}f(x)dx = a_j[-e^{-x}F(x)]_0^j = a_jF(0) - a_je^{-j}F(j)$$

Multiplicando a ambos lados por e^j, y sumando en j=0,1,...,m llegamos a:

$$\sum_{j=0}^{m} \mathbf{a_j e^j} \int_0^{\mathbf{j}} \mathbf{e^{-x} f(x) dx} = \mathbf{F(0)0} - \sum_{j=0}^{m} \mathbf{a_j F(j)} = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{mp+p-1} \mathbf{a_j f^{(i)}(j)} \qquad \mathbf{(1)}$$

(El 0 que multiplica F(0) se debe a que al sumar en j nos queda $\sum_{j=0}^{m} a_j e^j = 0$ ya que e es raíz del polinomio por hipótesis).
En lo que sigue de la demostración vamos a probar que la igualdad **(1)** nos lleva a una contradicción.
Veamos ahora que $f^{(i)}(j)$ es un número divisible por p excepto en el caso de i=p-1 y j=0.

$$((x-j)^p)^{(k)} = \begin{cases} (x-j)^p \ si \ k=0 \\ p(p-1)...(p-k+1)(x-j)^{p-k} \ si \ k<p \\ p! \ si \ k=p \\ 0 \ si \ k>p \end{cases}$$

Luego $((x-j)^p)^{(k)}(j)$ es cero excepto en k=p que vale p!. Así, los únicos sumandos de $f^{(i)}(j)$ que no son cero provienen de términos donde el factor $(x-j)^p$ ha sido derivado p veces. En estos casos obtendremos en el numerador p! que cancela a (p-1)! del denominador, es decir, un número entero divisible por p. Además, si i=p-1 y j=0:

$$f^{(p-1)}(0) = \frac{(p-1)!(-1)^p...(-m)^p}{(p-1)!} = (-1)^p...(-m)^p.$$

Si elegimos p mayor que m (ya que era un número primo arbitrario) vemos que este producto tendrá a p como factor primo.
Por tanto, en el lado derecho de la igualdad **(1)** tendremos un número entero múltiplo de p, luego será un número distinto de cero. Es decir,

$$-\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{mp+p-1} a_j f^{(i)}(j) = kp, \quad con \ k \in \mathbf{Z} \ y \ k \neq 0$$

Si hacemos tender p a infinito, utilizando la fórmula de Stirling para la aproximación de factoriales grandes ($n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$), la cota de $|f(x)|$:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} = \lim_{p\to\infty} \frac{m^{mp+p-1}e^{p-1}}{\sqrt{2\pi}(p-1)^{p-1+\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(\lim_{p\to\infty}(-log\ m + ((m+1)log\ m+1)p - (p-\frac{1}{2})log(p-1)) = e^{-\infty} = 0$$

es un número que tiende a 0. Por tanto,

$$\left|\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)dx\right| \leq \sum_{j=0}^{m} |a_j e^j| \int_0^j |e^{-x}||f(x)|dx \ \to \ 0 \ \ si \ p \to \infty$$

Luego podremos encontrar un p suficientemente grande como para que

$$\left|\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)dx\right| < 1$$

Es decir, no podrá ser un número entero distinto de cero.
Esto, sumado con (2), nos lleva a que la igualdad (1) es una contradicción. Por tanto, e no puede ser raíz de ningún polinomio en $\mathbf{Z}$[x], tampoco entonces de ninguno en $\mathbf{Q}$[x]. Es decir, **e es trascendente**. *(Ver referencia en [I, 44, ,45 y 46])*

Trascendencia de π

Utilizaremos los siguientes resultados previos:

Lema 1 *Sea $\alpha \in \mathbf{C}$ un número algebraico de grado n. Sean $\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n$ las raíces conjugadas de α. Supongamos también que*

$$P = P(x, \alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{Q}[x, \alpha_1, ..., \alpha_n]$$

P además, como polinomio de $\alpha_1, ..., \alpha_n$ en $\mathbf{Q}$[x], tiene que ser simétrico en $\alpha_1, ..., \alpha_n$, es decir, que no cambia cuando permutamos las α_j. Entonces,

$$F(x) \in \mathbf{Q}[x]$$

Si α es **algebraico entero**, *esto es, con polinomio mínimo en $\mathbf{Z}$[x]. Entonces,*

$$F = F(\alpha) \in \mathbf{Z}[\alpha], \; y \; F \in \mathbf{Z}$$

(*Ver demostración del lema en [I]*)

Fórmula de Leibnitz. *Sean u,v derivables hasta orden en n en un intervalo I, entonces, para todo $x \in I$ se cumple:*

$$(uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}(x)$$

DEMOSTRACIÓN Se prueba por inducción sobre n.

Lema 2 *Sea $p(x) = (x-a)^n p_1(x)$, con $p_1(x) \in \mathbf{Q}[x]$. Si $l < n$, $l \in \mathbf{N}$, llamando $p^{(l)}(a)$ a la derivada l-ésima de p(x) en a:*

$$\Rightarrow \; p^{(l)}(a) = 0$$

DEMOSTRACIÓN
Llamando $u(x) = (x-a)^n$ y $v(x) = p_1(x)$. Tenemos:

$$u^{(l)}(x) = n.(n-1)...(n-l+1)(x-a)^{n-l} \; si \; l < n \;\Rightarrow\; u^{(l)}(a) = 0$$

$$p^{(l)}(a) = (uv)^{(l)}(a) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} u^{(k)}(a) v^{(l-k)}(a) = 0$$

porque $k \leq l < n$.

Lema 3 *Si $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$, entonces para todo $k \in \mathbf{N}$, todos los coeficientes de la k-ésima derivada $p^{(k)}(x)$ son divisibles por k!:*

Demostración
Como la derivación es una operación lineal, bastará probarlo para cada x^s con $s > 0$. Las derivada k-ésima de x^s es cero si $k > s$ y si $1 \leq k \leq n$ es igual a $k!\binom{s}{k}x^{s-k}$ y $\binom{s}{k}$ es un entero (por ser el número de maneras posibles de ordenar s elementos tomados de k en k).

Teorema *El conjunto de los números algebraicos forma un cuerpo (Ver demostración en [III])*

Trascendencia de π

Supongamos que π es algebraico, como los algebraicos forman un cuerpo $i\pi$ también lo sería (ya que i es raíz del polinomio $x^2 + 1$). Sea v el grado del polinomio mínimo de $i\pi$, y sean $i\pi = \gamma_1, ..., \gamma_v$ todas las raíces del polinomio. Como $e^{\gamma_1} + 1 = e^{i\pi} + 1 = 0$ (fórmula de Euler):

$$(e^{\gamma_1} + 1)...(e^{\gamma_v} + 1) = \prod_{i=1}^{v} (e^{\gamma_i} + 1)$$

Desarrollamos el producto y queda:

$$\prod_{i=1}^{v} (e^{\gamma_i} + 1) = \sum_{\epsilon_1=0}^{1} ... \sum_{\epsilon_v=0}^{1} e^{\epsilon_1\gamma_1 + ... + \epsilon_v\gamma_v} \qquad (1)$$

Los exponentes de e en esta expresión incluyen el 0 (por ejemplo si $\epsilon_i = 0$ para todo i=1,...,v), y todas las posibles sumas de las $\gamma_1, ..., \gamma_v$, ya sean de un sumando, de dos, o de las v si $\epsilon_i = 1$ para todo i.
Supongamos ahora que hay m exponentes no nulos. El número de combinaciones posibles de $\epsilon_1\gamma_1 + ... + \epsilon_v\gamma_v$, con $\epsilon_j\gamma_j = 0, \gamma_j$ y $j = 1, ..., v$ es 2^v (lo podemos ver como dos elementos cogidos de v en v en los que sí importa el orden, y se pueden repetir). Luego $e^0 = 1$ estará en esta suma $2^v - m = a$ veces. Y $a \geq 1$ (al menos hay un cero cuando $\epsilon = 0$ para todo i). Si llamamos $\alpha_1, ..., \alpha_m$ a los exponentes no nulos, escribiremos (1) como:

$$a + e^{\alpha_1} + ... + e^{\alpha_m} = 0$$

Consideremos ahora el polinomio:

$$\phi(x) = \prod_{\epsilon=0}^{1} ... \prod_{\epsilon=0}^{1} (x - (\epsilon_1\gamma_1 + ... + \epsilon_v\gamma_v)),$$

que como polinomio en $\gamma_1, ..., \gamma_v$ con coeficientes en $\mathbf{Z}$[x], es simétrico en $\gamma_1, .., \gamma_v$. Entonces, por el Lema 1, $\phi(x) \in \mathbf{Q}[x]$. El polinomio tiene grado 2^v y tiene por raíces $\alpha_1, ..., \alpha_m$ con multiplicidad 1 y el 0 con multiplicidad a. Entonces, el polinomio $x^{-a}\phi(x) \in \mathbf{Q}[x]$ es de grado m y tiene por raíces $\alpha_1, ..., \alpha_m$. Si llamamos $r \in \mathbf{N}$ al denominador común de los coeficientes del polinomio, tenemos que:

$$\psi(x) = \frac{r}{x^a}\phi(x) = b_m x^m + ... + b_0 \ \in \ \mathbf{Z}[x] \qquad b_m > 0, \ b_0 \neq 0,$$

sigue teniendo por raíces $\alpha_1, ..., \alpha_m$. Lo podemos escribir también como: $\psi(x) = b_m(x - \alpha_1)...(x - \alpha_m)$ Sea ahora:

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} b_m^{mn-1} x^{n-1} \psi^n(x)$$

Sea $F(x) = f(x) + f'(x) + ... + f^{(mn+n-1)}(0)$.
Así $F(x) - F'(x) = f(x)$ ya que el último término de la suma F'(x) se anula por ser f(x) un polinomio de grado mn+n-1. Como, $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}f(x)$

$$\int_0^x e^{-y}f(y)dy = -e^{-x}F(x) - F(0) \ \Rightarrow \ e^x \int_0^1 e^{-y}f(y)dy = -F(x) - e^x F(0)$$

Sustituyendo por $x = \alpha_1, .., \alpha_m$ y sumando nos queda:

$$\mathbf{-aF(0) - \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} f(t)e^{-t}dt.} \quad \mathbf{(2)}$$

El $-a$ se debe a que $\sum_{i=1}^m e^{\alpha_i} = -a$
Veamos ahora la contradicción en esta última igualdad.
Por el Lema 2, tenemos que $f^{(l)}(0) = 0$ para l=1,...,n-2. Y con la fórmula de Leibniz vemos:

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{b_m^{mn-1}}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x^{n-1})^{k)}((x-\alpha_1)^n...(x-\alpha_m)^n)^{n-k+1)} =$$

$$= \frac{b_m^{mn-1}}{(n-1)!} \Big((n-1)!(x-\alpha_1)^n...(x-\alpha_m)^n) + f^{(n-2)}(x)\Big)$$

Luego,

$$f^{(n-1)}(0) = \frac{b_m^{mn-1}}{(n-1)!}(n-1)!(-\alpha_1)...(-\alpha_m) + 0 = b_m^{mn-1} b_0^n$$

Y para $l \geq n$, por el Lema 3, la derivada l-ésima de $x^{n-1}\psi^n(x)$ es divisible por n!, luego $f^{(l)}(0)$ será un múltiplo de n. Y queda:

$$F(0) = \sum_{l=n-1}^{mn+n-1} f^{(l)}(0) = b_m^{mn-1} b_0^n + nA, \quad A \in \mathbf{Z}$$

De nuevo, para α_k, usamos el Lema 2 y vemos:

$$f^{(l)}(\alpha_k) = 0, \quad l = 0, 1, ..., n-1; \quad k = 1, ..., m.$$

Y, por el Lema 3, para $l \geq n$, las derivadas l-ésimas de $x^{n-1}\psi^n(x)$ tienen coeficientes enteros divisibles por n!. Así, los coeficientes de $f^{(l)}(x)$ son enteros divisibles por $b_m^{mn-1}n$. Es decir, para k=1,...,m:

$$F(\alpha_k) = \sum_{l=n}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(\alpha_k) = nb_m^{mn-1}\varphi(\alpha_k)$$

con $\varphi(c) \in \mathbf{Z}[c]$.
Los números $\beta_k = b_m\alpha_k$, k=1,...,m, son algebraicos enteros, y forman el conjunto de todas las raíces de un polinomio mónico en $\mathbf{Z}$[x]. Además,

$$b_m^{mn-1}\varphi(\alpha_k) = H(\beta_k), \;\; H(x) \in \mathbf{Z}[x].$$

Luego por el Lema 1:

$$\sum_{k=1}^{m} b_m^{mn-1}\varphi(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{m} H(\beta_k) = B, \quad B \in \mathbf{Z}$$

Así, tenemos:

$$aF(0) + \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k) = ab_0^n b_m^{mn-1} + n(aA + B).$$

Ahora, como n era un número natural arbitrario, escogemos uno tal que n y b_0b_m sean primos entre sí, y $n > a$. Así: $ab_0^n b_m^{mn-1} + n(aA+B) \neq 0$ y como es entero,

$$\left| aF(0) + \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k) \right| \geq 1$$

Vayamos ahora a la parte izquierda de (2):
Sea $R > 0$ tal que $\alpha_1, ..., \alpha_m$ estén en el círculo $|x| \leq R$. Llamamos

$$C = \max_{|x| \leq R} |b_m^m \psi(x)|$$

(que existirá porque $b_m^m\psi(x)$ es continua y $|x| \leq R$ es un compacto). Vemos que C no depende de n. Entonces,

$$\max_{|x| \leq R} |f(x)| \leq \frac{R^{n-1}C^n}{(n-1)!}$$

Entonces,

$$\left|\sum_{k=1}^{m} w^{\alpha_k}\int_0^{\alpha_k} f(x)e^{-x}dx\right| \leq \sum_{k=1}^{m}\left|\int_0^{\alpha_k} |f(x)||e^{\alpha_k - x}|dx\right| \leq$$

$$\frac{R^{n-1}e^R}{(n-1)!}C^n\sum_{k=1}^{m}\left|\int_0^{\alpha_k} dx\right| \leq me^R\frac{(RC)^n}{(n-1)!}$$

Y como, usando la fórmula de Stirling,

$$lim_{n\to\infty}\frac{(RC)^n}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{R^nC^ne^{n-1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{2\pi n}} = 0$$

Podemos encontrar n suficientemente grande como para que $me^R\frac{(RC)^n}{(n-1)!} < 1$. Entonces, la igualdad (2) llega a la contradicción de que $1 < 1$. Por tanto, $i\pi$ no puede ser raíz de ningún polinomio en $\mathbf{Q}$[x], entonces tampoco lo será π, es decir, π es trascendente. *(Ver referencia [I])*

BIBLIOGRAFÍA

I Beukers, F. *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$. Bull. London Math. Soc. 11 (1979), no. 3, 268–272.

II Shidlovskii, A. B. *Transcendental numbers.* de Gruyter Studies in Mathematics, 12. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1989

III. Niven, Ivan; Zuckerman, Herbert S. *An introduction to the theory of numbers.* Third edition. John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1972.

IV. *Introducción a la teoría analítica de números* de Tom M. Apostol, 1984.

V. *Notas de Matemática Discreta* de Pablo Fernández Gallardo y José Luis Fernández Pérez.