



Universidad
Zaragoza

FACULTAD DE CIENCIAS

Un modelo computacional de simulación de flujo en arterias

Realizado por:

Pablo Trasobares Fernández de Heredia

Dirigido por:

Dr. Pilar García Navarro

Un modelo computacional de simulación de flujo en arterias

Resumen

En este trabajo se ha realizado una simulación computacional del flujo en arterias. Para ello, en primer lugar se han derivado las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del sistema y después, se han resuelto por medio del método de las características. Dicho método aprovecha una propiedad de las ecuaciones hiperbólicas, que consiste en que en ciertas familias de curvas, llamadas curvas características, la solución de dichas ecuaciones varía de una forma específica, que depende de dichas ecuaciones. El objetivo es proponer un modelo de simulación numérica de flujos transitorios en vasos elásticos. Los resultados numéricos se han validado por comparación con soluciones exactas de problemas simplificados. Se ha analizado la sensibilidad de dichas soluciones a diversos parámetros tanto físicos como numéricos. Para dar por finalizado el trabajo, se han expuesto una serie de conclusiones obtenidas de las distintas simulaciones realizadas.

Índice de figuras

2.1. Volumen de control usado para la ecuación de conservación de la masa.	4
3.1. Líneas de pendiente c en el plano (x,t)	8
3.2. Discretización espacial y temporal	9
3.3. Propagación de un pulso en la ecuación lineal.	10
3.4. Función escalón y sus rectas características	11
3.5. Propagación de un pulso rectangular en la ecuación no lineal	12
3.6. Líneas características en el sistema de ecuaciones no lineales	14
3.7. Método numérico en el sistema de ecuaciones no lineales	15
3.8. u en el punto de entrada y H en el punto de salida	17
4.1. Evolución de las variables velocidad, caudal y presión.	22
4.2. Comparación de la evolución de las variables con $E=200000$ Pa.	23
4.3. Comparación de la evolución de las variables con $r_0=0,5$ cm.	24
4.4. Distintos valores de R	24

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Descripción del sistema circulatorio	2
1.2. Simulación numérica y objetivos	3
2. Ecuaciones gobernantes	4
2.1. Ecuación de conservación de la masa	4
2.2. Ecuación de conservación del momento	5
2.3. Velocidad de onda	6
3. Método de las características	8
3.1. Una ecuación lineal	8
3.2. Una ecuación no lineal	11
3.3. Sistema de ecuaciones no lineales	12
4. Aplicación al sistema de flujo en arterias	18
4.1. Tratamiento característico de las ecuaciones	18
4.2. Método numérico	20
4.3. Condiciones de contorno y condiciones iniciales	20
4.4. Simulación	22
4.5. Conclusiones	23
Bibliografía	25

1. Introducción

1.1. Descripción del sistema circulatorio

El sistema cardiovascular, o circulatorio, transporta oxígeno y nutrientes a todos los tejidos del cuerpo, desde donde se elimina dióxido de carbono y otros desechos que se producen. La sangre pobre en oxígeno penetra en el corazón desde el cuerpo y sale hacia los pulmones. Una vez que en los pulmones se recarga de oxígeno, vuelve a entrar al corazón desde donde sale hacia el cuerpo a través de la arteria aorta. La aorta se divide en otras arterias y arteriolas, que transportan la sangre hasta los capilares. En los capilares tiene lugar el intercambio de oxígeno, agua, dióxido de carbono y otros muchos nutrientes y sustancias entre la sangre y los tejidos de alrededor de los capilares. Entonces, los capilares se transforman en vénulas, que a su vez se juntan para formar las venas que retornan la sangre desoxigenada al corazón.

El corazón proporciona la energía para mover la sangre a través del sistema circulatorio. Consiste en cuatro cavidades: dos ventrículos y dos aurículas, cuyos tamaños varían durante el ciclo cardiaco debido a la actividad del corazón. La aurícula derecha recibe la sangre del sistema venoso. La sangre fluye de la aurícula derecha al ventrículo derecho y sale a los pulmones a través de los vasos pulmonares. De los pulmones vuelve a la aurícula izquierda a través de las venas pulmonares, baja al ventrículo izquierdo y sale por la aorta hacia el resto del cuerpo. Además, existen cuatro válvulas, una a la salida de cada cavidad, que regulan el flujo de sangre en el corazón y se aseguran de que solo haya movimiento en un sentido. La sangre consiste en una solución acuosa (plasma) que transporta las distintas sustancias que hemos comentado antes (oxígeno, nutrientes...) en suspensión. Estos materiales entran y salen de la sangre cuando pasan a través de los capilares. Debido a que más del 90/100 del plasma es agua y a que los materiales en suspensión son varios órdenes de magnitud más pequeños que el diámetro de las arterias, la sangre se aproxima como un fluido homogéneo e incompresible de densidad 1050 Kg/m^3 . Esta aproximación no es válida en los capilares ya que son mucho más estrechos que las arterias y, en ellos, el tamaño de los materiales en suspensión no es despreciable.

En la eyección ventricular de la sangre y su interacción con las paredes distensibles de las arterias se generan ondas de presión y de flujo (o velocidad). La sangre se aproxima a un fluido incompresible. Debido a esto, la aorta y el resto de las arterias deben distenderse para acomodarse al repentino flujo de sangre producido por la expulsión ventricular. Cuando la sangre es eyectada, las arterias se distienden debido a un incremento de la presión y los tejidos de las paredes acumulan energía elástica. La distensión empieza en la aorta y se propaga a lo largo del sistema arterial. Cuando la energía elástica acumulada durante la distensión es liberada, las arterias se contraen de la misma forma que se habían distendido. Los cambios en la velocidad y en la presión se propagan como ondas a través de las arterias. Por tanto, las arterias presentan un latido regular, llamado pulso, que sigue el latido del corazón. La velocidad de estas ondas es uno o dos órdenes de magnitud

mayores que la velocidad del flujo. Por tanto, durante un ciclo cardiaco son capaces de llegar a los capilares y reflejarse. La velocidad del pulso depende del módulo elástico (módulo de Young) de tal manera que cuanto mayor es el módulo más rápido viajan las ondas.

1.2. Simulación numérica y objetivos

La aplicación de modelos numéricos en el estudio y en la simulación de la circulación de la sangre en el cuerpo humano es frecuente en la actualidad [2] y podría jugar un papel importante en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiovasculares, las cuales son la principal causa de mortalidad en países desarrollados [1]. Varias de estas enfermedades introducen algunas variaciones en las propiedades físicas que pueden cambiar de forma significativa la forma de los pulsos de onda que viajan por el sistema. Por ejemplo, la aterosclerosis, que es una enfermedad común y bastante peligrosa, consiste en la formación de depósitos dentro de los vasos, venas o arterias. Debido a ello, disminuye el diámetro de dichos vasos y disminuye, o incluso se frena, el flujo de sangre. Estas variaciones también afectan al patrón de los pulsos de presión y velocidad.

En este trabajo el sistema arterial se simula como un conjunto de tubos flexibles a través de los cuales se propagan ondas de presión y de velocidad. Solamente se simula la componente axial, ya que una simulación tridimensional (3-D) no es factible debido a su coste computacional, porque el sistema circulatorio contiene un número muy grande de vasos. Una simulación en una dimensión (1-D) es rápida y permite llevar a cabo un análisis sensible. Aunque el modelo 1-D es más simple y mas barato que el modelo 3-D, proporciona información relevante, debido a que la propagación de las ondas ocurre principalmente en la dirección axial de las arterias.

El objetivo de este trabajo es realizar varias simulaciones que permitan determinar la sensibilidad del sistema a variaciones de diversos parámetros, como el radio del conducto (vena o arteria), el espesor o el módulo de elasticidad del mismo. Para ello es necesario familiarizarse con las ecuaciones que describen el comportamiento de un fluido incompresible en conductos elásticos, así como con las ecuaciones hiperbólicas y el método de las características.

2. Ecuaciones gobernantes

Cada arteria es aproximada por un tubo impermeable de longitud l en 1-D, cuya dirección axial es x . El área circular variable $A(x, t)$ es normal a x y tiene espesor h . El flujo de sangre está descrito en la dirección axial a través de $u(x, t)$, definido como la velocidad media sobre el área $A(x, t)$. Además, hablamos también del caudal $Q(x, t)$ que es igual al producto del área por la velocidad media $Q(x, t) = A(x, t)u(x, t)$. La pared arterial se deforma por la acción de la presión interna, denotada por $p(x, t)$, que se asume constante en los puntos de cada área.

2.1. Ecuación de conservación de la masa

Se va a utilizar un volumen de control, como en la Figura 2.1, para aplicar el teorema de transporte de Reynolds [9]. Dentro de este volumen de control la variación total en el tiempo de la masa m debe ser igual a cero:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int \rho dV = 0 \quad (2.1)$$

Aplicando el teorema de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \oint_{SC} \rho(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = 0 \quad (2.2)$$

con \mathbf{u} la velocidad del fluido. La primera integral tiene en cuenta la variación de la masa dentro del VC debido al cambio de densidad o volumen en el tiempo y la segunda integral tiene en cuenta la variación de la masa dentro del VC debido a la existencia de un flujo neto de masa distinto de cero a través de la SC. Desarrollando esta expresión, se llega a la primera ecuación:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

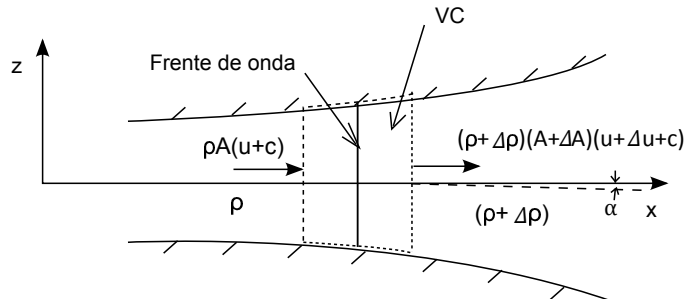


Figura 2.1: Volumen de control usado para la ecuación de conservación de la masa.

El desarrollo completo de esta expresión se encuentra en el *Anexo 1*.

2.2. Ecuación de conservación del momento

Utilizando un volumen de control en un fluido:

$$\mathbf{P} = \int_{VC} \rho \mathbf{u} dV \quad (2.4)$$

Se puede aplicar la segunda ley de Newton a un fluido dentro del volumen de control. La variación del momento \mathbf{P} en el tiempo es igual a la suma de las fuerzas que actúan en el volumen de control:

$$\frac{D(\mathbf{P})}{Dt} = \oint_{SC(t)} \tilde{F}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{VC(t)} \mathbf{F}_v dV \quad (2.5)$$

donde la primera integral tiene en cuenta las fuerzas de superficie y la segunda integral las fuerzas de volumen que actúan dentro del VC. \tilde{F}_s es el llamado *tensor de esfuerzos*. Nuevamente, se aplica el teorema de Reynolds y se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC(t)} \rho \mathbf{u} dV + \oint_{SC(t)} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = \oint_{SC(t)} \tilde{F}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{VC(t)} \mathbf{F}_v dV \quad (2.6)$$

Para completar esta ecuación es necesario definir las fuerzas de volumen y de superficie que aparecen en el lado derecho de la ecuación. Las fuerzas de superficie vienen dadas por la acción de la presión y la fricción en las paredes:

$$\oint_{SC(t)} \tilde{F}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \oint_{SC(t)} p(x, t) \hat{\mathbf{n}} dS + \oint_{SC} \tilde{\tau}_v \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.7)$$

donde p es la presión en las paredes y $\tilde{\tau}_v$ es el tensor de esfuerzos viscosos. Únicamente es de interés la componente axial, por ello:

$$\oint_{SC(t)} (\tilde{F}_s \cdot \hat{\mathbf{n}})_x dS = - \oint_{SC(t)} p n_x dS + \oint_{SC} (\tilde{\tau}_v \cdot \hat{\mathbf{n}})_x dS \quad (2.8)$$

La única fuerza volumínica a incluir en la ecuación es la fuerza gravitatoria. Dicha fuerza gravitatoria por unidad de volumen en el eje x vendrá dada por:

$$F_{v,x} = \rho g S \sin \alpha \quad (2.9)$$

donde α es la inclinación del conducto respecto a la horizontal. Ahora que todos los términos están definidos, se desarrolla la expresión y se obtiene la segunda ecuación:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Qu)}{\partial x} = - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f_v \pi D}{\rho} - g A S \sin \alpha \quad (2.10)$$

donde f_v es la componente x de esfuerzo viscoso y u es la velocidad media $u = Q/A$.

2.3. Velocidad de onda

La ecuación de conservación de la masa obtenida es:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A u)}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

Separando las derivadas parciales queda:

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho A \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial A}{\partial x} + A u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

Dividiendo por ρA y agrupando se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.13)$$

que puede reescribirse como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

Donde $D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$ es la derivada sustancial en una dimensión espacial [5]. Como $\rho = \rho(p)$ y $A = A(p)$, la ecuación anterior queda:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dp} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

Sacando factor común a $\frac{Dp}{Dt}$ se llega a:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dp} \right) \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

que se reescribe como:

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

con:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{d\rho}{dp} + \frac{\rho}{A} \frac{dA}{dp} \quad (2.18)$$

Siendo c la velocidad de onda [5]. El primer término del lado derecho de la ecuación (2.18) representa el efecto de la compresibilidad de un fluido en la velocidad de onda y el segundo término representa el efecto de la elasticidad del conducto. Por tanto, puede resolverse la velocidad de onda de un fluido compresible en un conducto rígido por medio

de $dA/dp = 0$. Sin embargo, el caso que se trata aquí es el de un fluido incompresible en un conducto elástico, que se obtiene por medio de $d\rho/dp = 0$ y que lleva a:

$$c^2 = \frac{A}{\rho} \frac{dp}{dA} \quad (2.19)$$

El sistema inicial, compuesto por la ecuación de conservación de la masa y por la ecuación de conservación del momento, es:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Qu)}{\partial x} = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f_v \pi D}{\rho} - gA \sin \alpha \quad (2.21)$$

Manipulando dicho sistema, se ha llegado a otra formulación del mismo:

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.23)$$

La primera formulación es habitual para el caso de flujo en arterias y la segunda para el flujo en tuberías pero ambas son equivalentes. Además, ambos son sistemas hiperbólicos.

3. Método de las características

Una vez que se han obtenido las ecuaciones que rigen el sistema, hay que resolverlo. Para ello se utiliza el método de las características debido a que el sistema de ecuaciones es hiperbólico. Sin embargo, para resolver numéricamente un sistema de ecuaciones no lineales como el que se tiene, se ha partido del caso más simple (una ecuación lineal) y se ha ido avanzando progresivamente hasta llegar al sistema de ecuaciones no lineales.

3.1. Una ecuación lineal

Se analiza la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + c \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

con c una constante. Esta ecuación es hiperbólica de primer orden como se explica en el *Anexo 2* y se le denomina *ecuación del color* o *ecuación de convección lineal* [8]. Si en la ecuación (3.1) se reemplaza c por:

$$c = \frac{dx}{dt} \quad (3.2)$$

la ecuación (3.1) queda:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dg}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

Lo cual nos muestra que g es constante a lo largo de estas líneas características $x = x_0 + ct$, como se aprecia en la Figura 3.1. La ecuación del color describe la propagación de una señal a lo largo de una dirección del espacio. Si se conoce g en $t = 0$, $g(x, 0)$, la solución analítica a dicha ecuación será la traslación de la función $g(x, 0)$ con velocidad c en dirección positiva a lo largo eje x . Se va a implementar un método numérico y a comparar los resultados obtenidos por dicho método con la solución analítica. De esta manera, se comprueba que el método numérico se ha realizado de forma correcta.

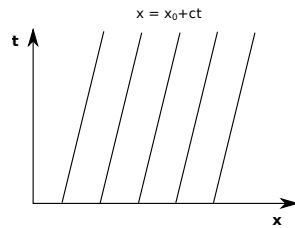


Figura 3.1: Líneas de pendiente c en el plano (x, t)

El dominio en el que se trabaja se discretiza, de tal manera que el punto (i, n) del plano (x, t) va a indicar el punto espacial $x = i\Delta x$ y el momento temporal $t = n\Delta t$. Debido a esto, se habla de Δx , que es la distancia entre dos puntos en el eje espacial y de Δt , que es la distancia entre dos puntos en el eje temporal. Para explicar cómo se obtiene el valor de la solución en el punto i en el siguiente instante temporal $n + 1$, es decir, en el punto $(i, n + 1)$, se utiliza la Figura 3.2.

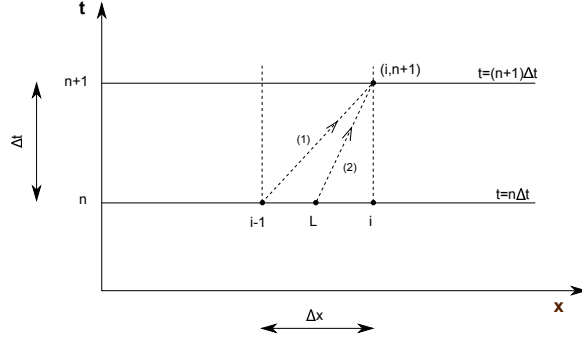


Figura 3.2: Discretización espacial y temporal

El valor de c viene dado por las condiciones del problema. Δx se escoge y se deja fijado inicialmente. Se define Δt_0 :

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta x}{c} \quad (3.4)$$

como el que hace que la recta que pasa por el punto $(i, n + 1)$ salga del punto $(i - 1, n)$. El Δt utilizado se relaciona con dicho Δt_0 de la siguiente manera:

$$\Delta t = CFL \Delta t_0 \quad (3.5)$$

donde CFL es el *número de Courant-Friedrichs-Levy* [8]. Dicho número es el cociente entre el paso de tiempo numérico, Δt y el tiempo característico Δt_0 . La condición:

$$0 < CFL \leq 1 \quad (3.6)$$

hace que el punto L sea tal que:

$$x_{i-1} \leq x_L \leq x_i \quad (3.7)$$

Se va a utilizar esta condición a lo largo de todo el trabajo. A partir de la Figura 3.2, utilizando una aproximación lineal se tiene:

$$\frac{g_L^n - g_{i-1}^n}{g_i^n - g_{i-1}^n} = \frac{x_L - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (3.8)$$

lo que da:

$$g_L^n = g_{i-1}^n + \frac{g_i^n - g_{i-1}^n}{\Delta x} (x_L - x_{i-1}) \quad (3.9)$$

Además:

$$c = \frac{x_i - x_L}{\Delta t} \Rightarrow x_L = x_i - c\Delta t \quad (3.10)$$

Llevando el resultado de (3.10) a (3.9) se obtiene:

$$g_i^{n+1} = g_L^n = g_{i-1}^n + \frac{g_i^n - g_{i-1}^n}{\Delta x} (x_i - c\Delta t - x_{i-1}) \quad (3.11)$$

Para el caso en el que $CFL = 1$ se tiene que $\Delta t = \Delta t_0$ y la ecuación (3.11) queda:

$$g_i^{n+1} = g_L^n = g_{i-1}^n \quad (3.12)$$

Siempre serán necesarias condiciones iniciales y, dependiendo del caso, una o dos condiciones de contorno en los puntos de entrada y/o salida. Para la comprobación del método, se va a utilizar un pulso rectangular que actúa como condición inicial. Ahora son necesarias las condiciones de contorno para los puntos de entrada y de salida. Como la solución viaja hacia la derecha, es necesaria una condición de contorno en el punto de entrada. La condición de contorno de entrada va a ser $g(0, t) = b$, con b la base del pulso. Esta condición de contorno va a suponer que el pulso viaja hasta el límite y desaparezca.

Se va a comprobar que el pulso viaja a la velocidad adecuada y cómo afecta el valor de CFL . Los valores de programación escogidos han sido $\Delta x = 0,1$ y $c = 0,5$, por su parte se han utilizado dos valores de CFL : 0,5 y 1. En la Figura 3.3 se representa el pulso en cinco instantes de tiempo y se ve que se propaga a la velocidad adecuada en ambos casos y que por tanto el método numérico se ha implementado correctamente. Además se ve que con $CFL=1$ la propagación es perfecta mientras que con $CFL=0,5$ el pulso sufre una deformación, debida a la disipación de los valores de la solución y a la difusión espacial a lo largo del eje x . El siguiente paso es la ecuación no lineal.

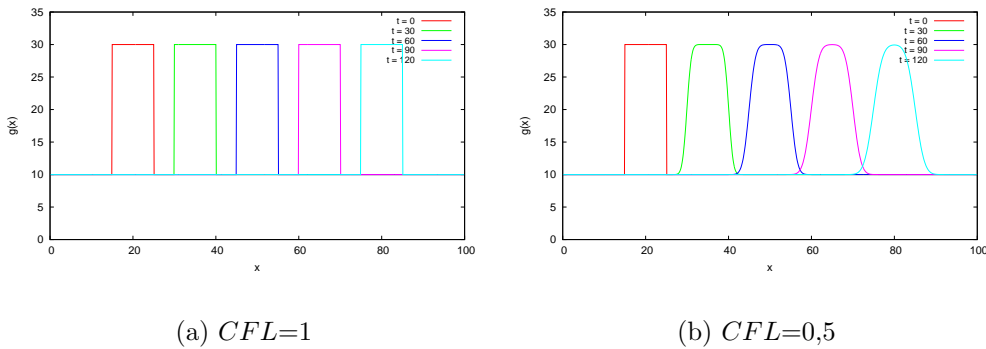


Figura 3.3: Propagación de un pulso en la ecuación lineal con $c=0,5$. a) $CFL=1$. b) $CFL=0,5$.

3.2. Una ecuación no lineal

La ecuación que se va a tratar ahora es la llamada *ecuación de Burgers no viscosa* [3], que tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

La solución analítica de esta ecuación puede calcularse de sus curvas características. Dado que $u = u(x, t)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

de donde:

$$\frac{dx}{dt} = u \Rightarrow u = \text{constante} \quad (3.15)$$

Ahora, las curvas características van a ser rectas de pendiente u , que tiene distintos valores en los puntos del sistema. Para ilustrar esto, se utiliza la función inicial escalón. En la Figura 3.4 se presentan los dos tipos de escalones. Cuando se produce la intersección de dos curvas características se tiene una *onda de choque*, como es el caso del escalón (b). Por otra parte, cuando existe una zona en la que no llega ninguna curva característica lo que se tiene es una *onda de rarefacción*, como es el caso del escalón (a) [3] [6].

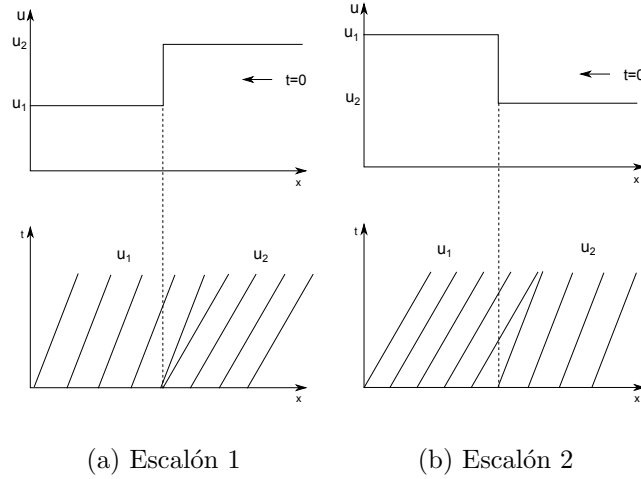


Figura 3.4: Función escalón y sus rectas características. a) Escalón creciente. b) Escalón decreciente.

Nuevamente, se fija el valor de Δx . Cada punto tendrá una velocidad distinta, u_i (en nuestro ejemplo, como estamos explicando el escalón, tenemos dos grupos con dos velocidades distintas) y, por tanto, una pendiente distinta y un Δt_i distinto, $\Delta t_i = \Delta x / u_i$. Se escoge Δt_0 como el menor de todos los Δt_i .

$$\Delta t_0 = \min\{\Delta t_i\} \quad (3.16)$$

$$\Delta t = CFL \Delta t_0, \quad CFL \leq 1 \quad (3.17)$$

El motivo es que el punto que tenga menor pendiente será el más restrictivo y esto garantiza que todas las rectas vayan a parar a un punto situado entre $(i-1, n)$ y (i, n) . Si se escogiese como Δt_0 otro que no fuera el asociado al punto de menor pendiente (mayor velocidad), alguna de las rectas de los otros puntos no iría a parar a algún punto situado entre $(i-1, n)$ y (i, n) sino que se iría más hacia la izquierda y esto es algo que se evita en este trabajo.

Nuevamente, harán falta condiciones iniciales y de contorno. La condición inicial vendrá dada por un pulso de la siguiente forma:

$$u(x, 0) = \begin{cases} -u_1, & \forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty) \\ u_2, & \forall x \in [x_1, x_2] \end{cases} \quad (3.18)$$

cuya solución analítica es, según [4]:

$$u(x, t) = \begin{cases} -u_1, & \forall x \in (-\infty, x_1 - u_1 t) \cup (x_2 + \frac{u_2 - u_1}{2} t, \infty) \\ \frac{x - x_1}{t}, & \forall x \in [x_1 - u_1 t, x_1 + u_2 t] \\ u_2, & \forall x \in [x_1 + u_2 t, x_2 + \frac{u_2 - u_1}{2} t] \end{cases} \quad (3.19)$$

Nuevamente, la información viaja hacia la derecha y únicamente será necesaria la condición de contorno de entrada. Igual que en caso anterior, será igual a la base del pulso. En la Figura 3.5 se comprueba el comportamiento de un pulso rectangular como el indicado con valores $x_1=32,5$, $x_2=77,5$, $u_1=1$, $u_2=2$ y se halla la solución transcurrido un tiempo $t=20$ [4]. Se compara la solución obtenida con la solución analítica y coinciden. Por tanto, el método numérico se ha implementado correctamente y se puede pasar a analizar el sistema de ecuaciones.

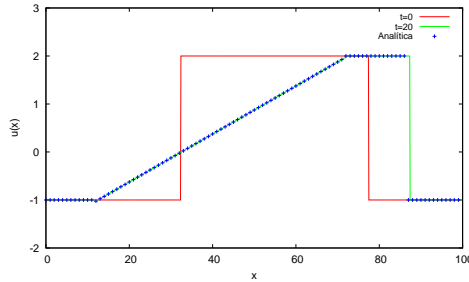


Figura 3.5: Propagación de un pulso rectangular en la ecuación no lineal

3.3. Sistema de ecuaciones no lineales

El sistema de ecuaciones escogido es el compuesto, respectivamente, por las ecuaciones (2.22) y (2.23):

$$(E_1) \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

$$(E_2) \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.21)$$

Para dar la presión, muchas veces se utiliza la altura piezométrica de la siguiente manera:

$$p = \rho g H \quad (3.22)$$

Una forma de determinar las direcciones características es:

$$(E_2) + \lambda(E_1) = 0 \quad (3.23)$$

Agrupando de forma conveniente queda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + \lambda \rho c^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \left(u + \frac{1}{\rho \lambda} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.24)$$

Lo que implica:

$$\frac{dx}{dt} = u + \lambda \rho c^2 = u + \frac{1}{\rho \lambda} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\rho c} \quad (3.25)$$

De esta forma se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.26)$$

Y queda:

$$\frac{D}{Dt} \left(u + \frac{p}{\rho c} \right) = \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{g}{c} H \right) = 0, \quad \text{sobre } \frac{dx}{dt} = u + c \quad (3.27)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(u - \frac{p}{\rho c} \right) = \frac{D}{Dt} \left(u - \frac{g}{c} H \right) = 0, \quad \text{sobre } \frac{dx}{dt} = u - c \quad (3.28)$$

Estas dos ecuaciones implican que las líneas características van a ser líneas de pendiente $u + c$ y $u - c$ a través de las cuales se van a conservar las magnitudes $u \pm gH/c$.

El tamaño relativo de las cantidades u y c define el *número de Froude*, $Fr = u/c$. Si $Fr < 1$, $u + c > 0$ y $u - c < 0$, hablamos de régimen subcrítico. Si $Fr > 1$, $u + c > 0$ y $u - c > 0$, hablamos de régimen supercrítico.

Este mismo resultado podría haberse obtenido de otra manera, en la cual se define el sistema como un conjunto de vectores:

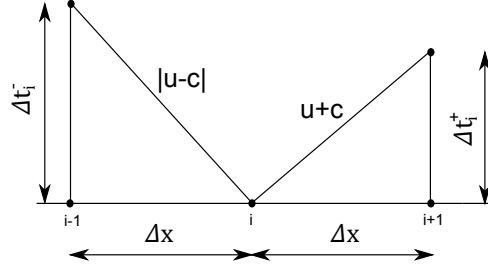


Figura 3.6: Líneas características en el sistema de ecuaciones no lineales

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

A continuación se define una matriz Jacobiana, que permite reescribir el sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (3.30)$$

Los autovalores de \mathbf{J} son las direcciones características de nuestro sistema y, cambiando a la base de autovectores de \mathbf{J} se obtienen las dos invariantes de Riemann que se conservan [4].

Para explicar la elección del paso de tiempo se utiliza la Figura 3.6. Cada punto tendrá dos líneas con pendientes $u + c$ y $u - c$. Se definen para cada punto Δt_i^+ y Δt_i^- , que son los Δt_i asociados a las pendientes $u_i + c$ y $|u_i - c|$ respectivamente. El Δt_0 debe elegirse siguiendo el mismo criterio que en la ecuación de Burgers pero adaptado a nuestro sistema de ecuaciones, es decir, como el mínimo Δt_i de entre todos los Δt^+ y Δt^- .

$$\Delta t_0 = \min\{\Delta t_i^+, \Delta t_i^-\} \quad (3.31)$$

Como la velocidad se reflejará en los límites, adoptará tanto valores positivos como negativos, por tanto, se define para cada punto:

$$\Delta t_{min}^i = \frac{\Delta x}{|u_i| + c} \quad (3.32)$$

Se escoge como Δt_0 al menor de los Δt_{min} .

$$\Delta t_0 = \min\{\Delta t_{min}^i\} \quad (3.33)$$

Con esto se garantiza que ambas rectas de todos los puntos vayan a parar a un punto entre $i, i - 1$ e $i, i + 1$ según corresponda. Nuevamente, el Δt vendrá dado por:

$$\Delta t = CFL \Delta t_0 \quad (3.34)$$

Una vez escogido el Δt , se computan los valores de u y H en el paso de tiempo siguiente. La notación utilizada se presenta en la Figura 3.7.

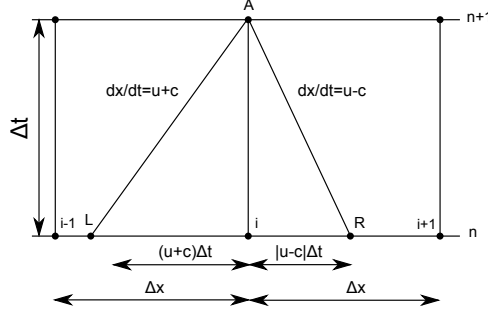


Figura 3.7: Método numérico en el sistema de ecuaciones no lineales

Las características AL y AR con pendientes $u + c$ y $u - c$, respectivamente, pasan a través del punto A , en el cual se quieren obtener los valores de u y de H . Los valores de u, H en L y R (u_L, H_L, u_R, H_R) se pueden computar fácilmente por medio de una interpolación lineal de los valores conocidos $u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n, H_{i-1}^n, H_i^n, H_{i+1}^n$. La interpolación es análoga a la realizada para una ecuación lineal. De esta manera, se tiene:

$$u_L = u_i^n + (u_{i-1}^n - u_i^n) \frac{(u + c)\Delta t}{\Delta x} \quad (3.35)$$

$$u_R = u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n) \frac{|u - c|\Delta t}{\Delta x} \quad (3.36)$$

$$H_L = H_i^n + (H_{i-1}^n - H_i^n) \frac{(u + c)\Delta t}{\Delta x} \quad (3.37)$$

$$H_R = H_i^n + (H_{i+1}^n - H_i^n) \frac{|u - c|\Delta t}{\Delta x} \quad (3.38)$$

Una vez obtenidos estos valores, se computan los de las cantidades auxiliares AL y AR :

$$AL = u_L + \frac{g}{c} H_L \quad (3.39)$$

$$AR = u_R - \frac{g}{c} H_R \quad (3.40)$$

Finalmente se computan los valores de u_i^{n+1} y H_i^{n+1} de la siguiente manera:

$$\left(u + \frac{g}{c} H\right)_i^{n+1} = \left(u + \frac{g}{c} H\right)_L^n = AL^n \quad (3.41)$$

$$\left(u - \frac{g}{c} H\right)_i^{n+1} = \left(u - \frac{g}{c} H\right)_R^n = AR^n \quad (3.42)$$

Sumando y restando las dos ecuaciones anteriores obtenemos, respectivamente:

$$u_i^{n+1} = \frac{AL + AR}{2} \quad (3.43)$$

$$H_i^{n+1} = \frac{c}{g} \frac{AL - AR}{2} \quad (3.44)$$

El caso que se va a estudiar es el llamado "water hammer" [7] [12]. En este caso, se tiene una tubería en el que uno de los extremos es mantenido a presión constante y en el otro se cierra de forma repentina una válvula, lo cual se traduce como que la velocidad en el punto de salida es nula. Hasta que la válvula se cierra, todos los puntos poseen la misma presión y velocidad (H_0 y u_0). Una vez cerrada la válvula, el punto de entrada se mantiene a presión H_0 y el punto de salida a velocidad 0. Por tanto, en este caso se aplican dos condiciones de contorno, una en el punto de entrada y otra en el punto de salida. Según estas condiciones se tiene para el punto de entrada:

$$H_1^{n+1} = H_0 \quad (3.45)$$

$$u_1^{n+1} = \frac{g}{c} H_1^{n+1} + AR_1^n = \frac{g}{c} H_0 + AR_1^n \quad (3.46)$$

Para el punto de salida:

$$u_{imax}^{n+1} = u_0 = 0 \quad (3.47)$$

$$H_{imax}^{n+1} = \frac{c}{g} (AL_{imax}^n - u_{imax}^{n+1}) = \frac{c}{g} AL_{imax}^n \quad (3.48)$$

En [7] y [12] se ve que la solución al problema *water hammer* es una onda rectangular de la presión en el punto de salida y de la velocidad en el punto de entrada, en las que se tienen las siguientes propiedades:

$$c = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{1 + \left(\frac{KD}{eE}\right)}} \quad (3.49)$$

$$T = \frac{4L}{c} \quad (3.50)$$

$$\Delta H = \frac{c}{g} \Delta u \quad (3.51)$$

Donde D es el diámetro interior de la tubería, e es el espesor de la pared, E es el módulo de elasticidad de la pared de la tubería, ρ es la densidad del fluido, K es el módulo de elasticidad del fluido, T es el periodo, Δu la amplitud de u y ΔH es la amplitud de H . Los valores utilizados en el programa son los siguientes: $D=0.5$ m, $e=4$ mm, $H_0=5$ m, $u_0=9.9$ m/s, $L=6000$ m; donde L es la longitud de la tubería y H_0 y u_0 los valores iniciales de presión y velocidad hasta que se cierra la válvula. Introduciendo estos valores en la ecuación (3.49) obtenemos $c=2980$ m/s.

Además, se utilizan los siguientes valores de programación: $\Delta x=10$ m, $CFL=0,5$ y $CFL=1$. En la Figura 3.8 se representan la presión en el punto de salida y la velocidad en el punto de entrada para comprobar que se cumple todo lo recogido en las ecuaciones anteriores y para ver cómo afecta el CFL :

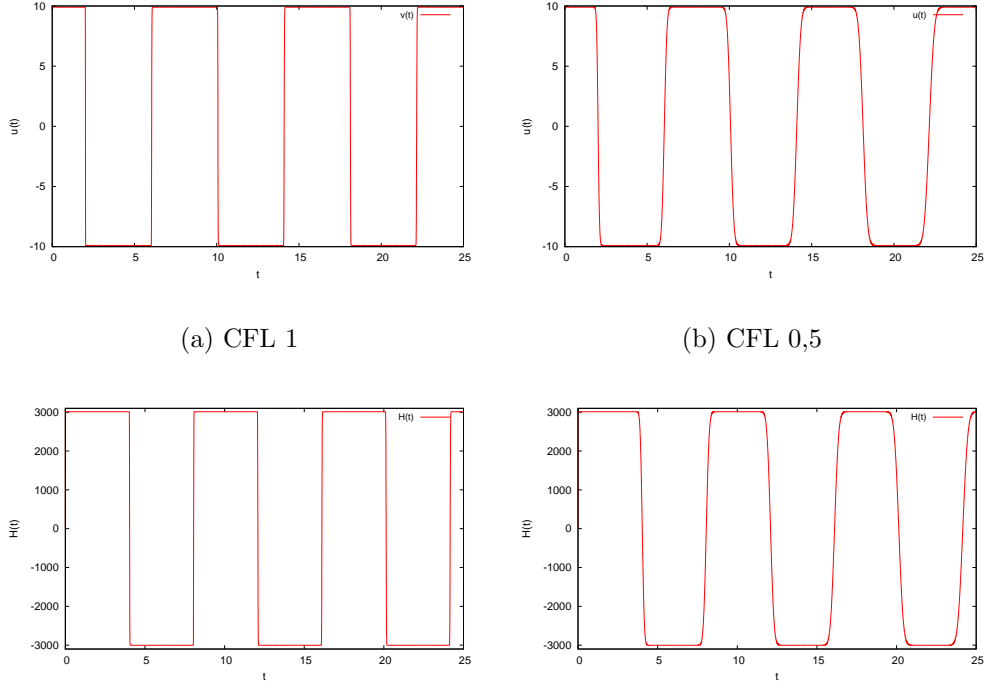


Figura 3.8: u en el punto de entrada (Arriba) y H en el punto de salida (Abajo) con a) $CFL=1$, b) $CFL=0,5$.

Se ve en la Figura 3.8 que $\Delta H \simeq 10$ y $\Delta u \simeq 3000$. Introduciendo estos valores en las fórmulas (3.50) y (3.51) debe cumplirse que:

$$T \simeq 8 \quad (3.52)$$

$$\frac{c}{g} = 304,08 = \frac{\Delta H}{\Delta u} \simeq 300 \quad (3.53)$$

La segunda relación se cumple y se puede apreciar que el periodo es el que debe ser. Por tanto, el método numérico se ha implementado correctamente. Además, de nuevo se ve como para $CFL = 1$ la onda permanece rectangular, mientras que para $CFL=0,5$ se deforma. En algunos casos se desprecian los términos convectivos con el objetivo de linealizar el sistema. De esta manera queda:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.55)$$

Este sistema es lineal y, por tanto, su resolución es más sencilla que en el sistema no lineal, lo cual supone una gran ventaja. En este trabajo se ha resuelto también el sistema lineal [8] pero no se ha expuesto ya que el método para comprobarlo es el mismo que en el sistema no lineal (water hammer).

4. Aplicación al sistema de flujo en arterias

4.1. Tratamiento característico de las ecuaciones

En ausencia de rozamiento y de fuerza viscosa, nuestro sistema es el compuesto por las ecuaciones (2.20) y (2.21):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Qu)}{\partial x} = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.2)$$

Es preciso formular la relación entre el área del conducto y la presión del mismo [13]. Para obtener dicha relación, hay que realizar varias hipótesis. La primera es suponer simetría circular. Además, se supone que la pared realizará desplazamientos radiales, esto quiere decir que el radio r del conducto variará respecto del inicial r_0 . La siguiente hipótesis es que los esfuerzos a los que la pared arterial es sometida son planos, es decir, están contenidos en la superficie de la pared arterial (despreciando así los esfuerzos radiales). Además, se supone comportamiento elástico lineal. De esta manera se obtiene la expresión:

$$p = p_{ext} + \beta \left(\sqrt{A} - \sqrt{A_0} \right) = p_{ext} + \beta \sqrt{A} - \beta_0 \quad (4.3)$$

donde:

$$\beta = \frac{\sqrt{\pi} h_0 E}{(1 - \nu^2) A_0} \quad (4.4)$$

con h_0 el espesor del conducto, E el módulo de elasticidad y ν es el radio de Poisson. Usando (2.19):

$$c^2 = \frac{\beta \sqrt{A}}{2\rho} \quad (4.5)$$

A partir de las dos primeras ecuaciones puede definirse el siguiente sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}, x) \quad (4.6)$$

con:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

y:

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Es posible definir una matriz Jacobiana $\mathbf{H}_{\mathbf{F}}$ que linealice el flujo \mathbf{F} como:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Como $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ depende de p , podemos reescribir:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}_{\mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \quad (4.10)$$

donde:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{S}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Es posible definir una nueva matriz:

$$\mathbf{J} = (\mathbf{H}_{\mathbf{F}} - \mathbf{H}_{\mathbf{S}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

que permite expresar el sistema (4.6) como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (4.13)$$

Diagonalizando \mathbf{J} y cambiando el sistema a su base de autovectores obtenemos dos ecuaciones (una con cada autovalor) que cumplen:

$$\frac{Dw^1}{Dt} = 0, \quad dw^1 = \frac{1}{2c}(A(u+c) - Q) \quad (4.14)$$

$$\frac{Dw^2}{Dt} = 0, \quad dw^2 = -\frac{1}{2}(A(u-c) - Q) \quad (4.15)$$

a lo largo de las curvas características $dx/dt = u \mp c$. El término gravitacional y la variación espacial de β , β_0 y p_{ext} se van a despreciar, por tanto $\psi^1 = \psi^2 = 0$ (ya que dependen de estos términos). Para la primera cantidad característica queda:

$$dw^1 = d \left(\frac{1}{2c}(A(u+c) - Q) \right) = 0 \quad (4.16)$$

y desarrollando la expresión e integrando se obtiene:

$$u - 4(c - c_0) = \text{constante} \quad (4.17)$$

sobre $dx/dt = u - c$. Para la segunda cantidad se realiza un desarrollo análogo y se obtiene:

$$u + 4(c - c_0) = \text{constante} \quad (4.18)$$

sobre $dx/dt = u + c$. El desarrollo completo se encuentra en el Anexo 3.

4.2. Método numérico

El método numérico va a ser análogo al del sistema de ecuaciones no lineales, por ello se utilizará la misma notación (AR,AL). La manera de escoger el Δt en cada paso es exactamente la misma así que no se explica de nuevo.

Para obtener los valores de u y c en el siguiente paso de tiempo se van a obtener los valores u_L , u_R , c_L y c_R de la siguiente manera:

$$u_R^n = u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n) \frac{|u - c| \Delta t}{\Delta x} \quad (4.19)$$

$$c_R^n = c_i^n + (c_{i+1}^n - c_i^n) \frac{|u - c| \Delta t}{\Delta x} \quad (4.20)$$

$$u_L^n = u_i^n + (u_{i-1}^n - u_i^n) \frac{(u + c) \Delta t}{\Delta x} \quad (4.21)$$

$$c_L^n = c_i^n + (c_{i-1}^n - c_i^n) \frac{(u + c) \Delta t}{\Delta x} \quad (4.22)$$

Se definen:

$$AR_i^n = (u_L - 4(c_R - c_0))_i^n \quad (4.23)$$

$$AL_i^n = (u_L + 4(c_L - c_0))_i^n \quad (4.24)$$

Y finalmente, despejando los valores de u y c en el punto siguiente:

$$u_i^{n+1} = \frac{AL_i^n + AR_i^n}{2} \quad (4.25)$$

$$c_i^{n+1} = \frac{AL_i^n - AR_i^n}{8} + c_0 \quad (4.26)$$

4.3. Condiciones de contorno y condiciones iniciales

Nuevamente, en régimen subcrítico, se necesitan dos condiciones de contorno, una de entrada y otra de salida.

Para la condición de contorno de entrada, se considera que la sangre es bombeada desde el corazón existiendo un pulso. Por tanto, la condición de contorno de entrada va a ser un pulso de velocidad que se representa a través de una Gaussiana caracterizada por su valor máximo y por su anchura. Por tanto, se tiene:

$$(u - 4(c - c_0))_1^{n+1} = (u - 4(c - c_0))_R^n = AR_1^n \quad (4.27)$$

$$u_1^{n+1} = u(t) = u_{max} \exp \left(-\frac{(t - t_c)^2}{2 \left(\frac{WP}{2\sqrt{2\ln 2}} \right)^2} \right) \quad (4.28)$$

con $u(t)$ la Gaussiana, u_{max} el valor máximo del pulso, WP la anchura del pulso y t_c el tiempo en el que el máximo alcanza el punto de entrada del sistema. Despejando, se obtiene:

$$c_1^{n+1} = \frac{u_1^{n+1}}{4} - \frac{AR_1^n}{4} + c_0 = \frac{u(t)}{4} - \frac{AR_1^n}{4} + c_0 \quad (4.29)$$

La condición de contorno de salida vendrá dada por el *coeficiente de reflexión*, R , que se define de la siguiente manera:

$$R = -\frac{w^1}{w^2} = -\frac{(u - 4(c - c_0))_{i_{max}}^{n+1}}{(u + 4(c - c_0))_{i_{max}}^{n+1}} \quad (4.30)$$

donde i_{max} hace referencia al último punto de la red. Esto deriva en:

$$(u - 4(c - c_0))_{i_{max}}^{n+1} = -R(u + 4(c - c_0))_{i_{max}}^{n+1} = -R(u + 4(c - c_0))_L^n = -R \cdot AL_{i_{max}}^n \quad (4.31)$$

que junto a:

$$(u + 4(c - c_0))_{i_{max}}^{n+1} = (u - 4(c - c_0))_L^n = AL_{i_{max}}^n \quad (4.32)$$

nos permite despejar el valor de c y u en el paso de tiempo siguiente:

$$u_{i_{max}}^{n+1} = \frac{1 - R}{2} AL_{i_{max}}^n \quad (4.33)$$

$$c_{i_{max}}^{n+1} = \frac{1 + R}{8} AL_{i_{max}}^n \quad (4.34)$$

El factor R estará relacionado con los llamados modelos cerodimensionales (0-D) que son los modelos que se utilizan para describir el efecto de la propagación de un pulso de onda en arterias pequeñas, arteriolas y capilares. Aunque los modelos 0-D no hayan sido objeto de estudio en este trabajo sí que es necesario comentarlos. Los modelos 0-D realizan una analogía eléctrica [14] [10] [11], donde el caudal se corresponde con la intensidad, la resistencia de los vasos con la resistencia eléctrica y la presión sanguínea con el potencial eléctrico. La gran ventaja de estos modelos es la posibilidad de hacer modelos que abarquen gran parte del sistema cardiovascular con un coste computacional bajo.

Una vez explicadas las condiciones de contorno, hace falta comentar acerca de los valores iniciales. Inicialmente se define un caudal nulo en todos los puntos, lo cual implica que la velocidad sea nula. Además, en ausencia de caudal, todos los puntos tendrán el mismo radio y por tanto, el misma área. Después, con la llegada del pulso, se irán produciendo variaciones en todos estos valores.

4.4. Simulación

En la Figura 4.1 se muestra cómo avanza el pulso y cómo se ven afectadas las diferentes magnitudes que se tienen en cuenta (presión, área, caudal y velocidad). Como se simula una arteria, se ha escogido una longitud $L=0,5$ m, un radio $r_0=1$ cm, un espesor $h_0=1.5$ mm y un módulo de Young de $E=400000$ Pa. La densidad de la sangre vendrá dada por $\rho=1000$ kg/m³. Por otra parte, los valores numéricos han sido los siguientes: $\Delta x=0,01$, $CFL=1$ y $R=0,3$, lo que implica que se refleja el 30 % del pulso.

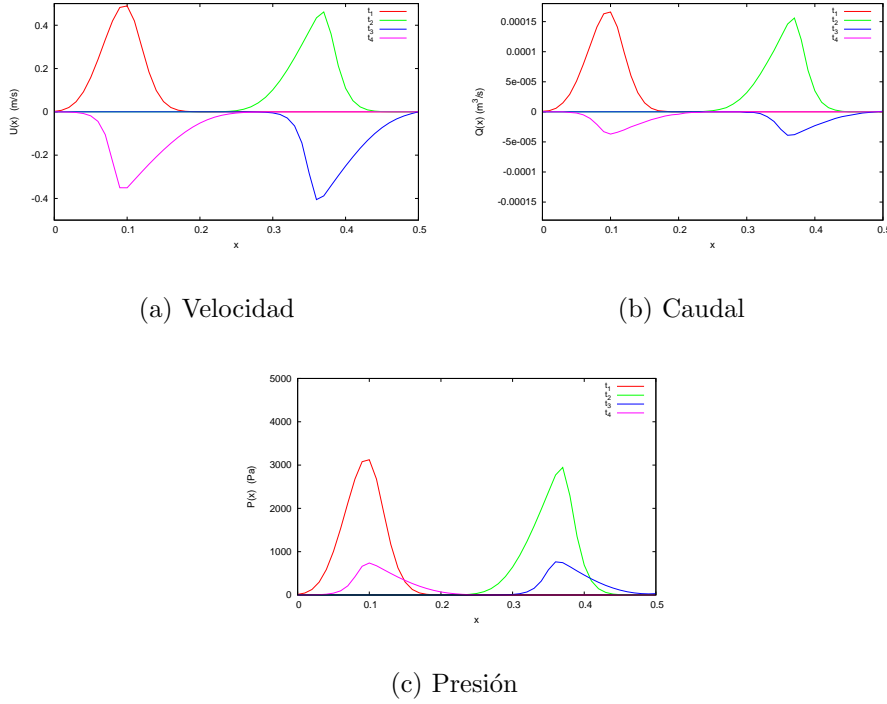


Figura 4.1: Evolución de las variables velocidad, caudal y presión.

Se van a realizar simulaciones variando algunos parámetros. En primer lugar, veamos cómo afecta el módulo de elasticidad. En la Figura 4.2 se utilizan los mismos valores que en la Figura 4.1, lo único que varía es el valor del módulo de elasticidad, que será la mitad, es decir, $E = 200000$ Pa. Con un valor del módulo de elasticidad mayor los pulsos se propagan más rápido. Además, los valores del pico de presión son más altos.

A continuación se va a ver qué ocurre con el radio del conducto (vena o arteria). Este caso resulta particularmente interesante puesto que en la introducción se ha hablado acerca de una enfermedad relacionada con la variación del radio del conducto (la aterosclerosis). Esta enfermedad consiste en que se forman depósitos en las arterias y por tanto, disminuye el valor efectivo del radio del conducto. En la Figura 4.3 se realiza la simulación con los mismos valores que en la Figura 4.1 modificando únicamente el valor del radio, que se reduce a la mitad ($r_0=0,5$ cm). Se aprecia que los pulsos avanzan mucho más rápido y que el área y el caudal disminuyen, como cabía esperar. Por tanto, cuanto menor sea el radio (dicho de otra forma, cuanto más tienda a 0) menor será el flujo de

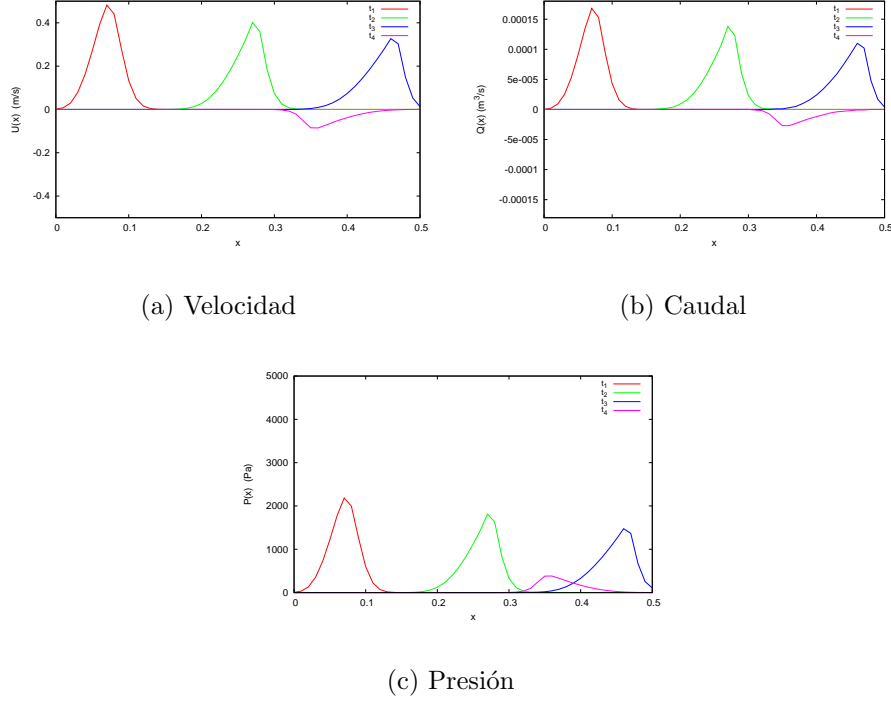


Figura 4.2: Comparación de la evolución de las variables con $E=200000$ Pa.

sangre que circule por el conducto, pudiendo llegar incluso a detenerse en el caso extremo.

Por último, se va a comprobar qué ocurre con el factor de reflexión. Todas las simulaciones hasta ahora se han realizado con $R=0,3$ y, en ellas, se refleja un 30 % del pulso. Se va a comprobar para una de las variables (el comportamiento será análogo para el resto de variables) qué ocurre con $R=1$, que equivale a un conducto obstruido en el que se refleja todo el pulso, y $R=0$, que equivale a que todo el pulso se transmita. En la Figura 4.4 se aprecia que para $R=1$ se refleja todo el pulso y que para $R=0$ no se refleja nada.

4.5. Conclusiones

Se han realizado varias simulaciones del sistema variando una serie de parámetros relacionados con las propiedades del conducto tales como su módulo de elasticidad, su radio o la unión de dicho conducto con otro. Se ha observado que cuanto menor sea el radio del conducto, menor será el caudal de sangre a través del mismo y esto puede llegar a suponer un problema. También se ha observado la dependencia con el módulo de elasticidad, de forma que cuanto mayor es el módulo de elasticidad del conducto mayor es la presión en el mismo. Por último, se ha visto cómo afecta el coeficiente de reflexión R . Por tanto, puede concluirse que el modelo utilizado es adecuado para comprobar estos aspectos del sistema.

Para el modelo se han utilizado algunas aproximaciones que faciliten la resolución del problema, como por ejemplo despreciar el rozamiento. Utilizando aproximaciones más

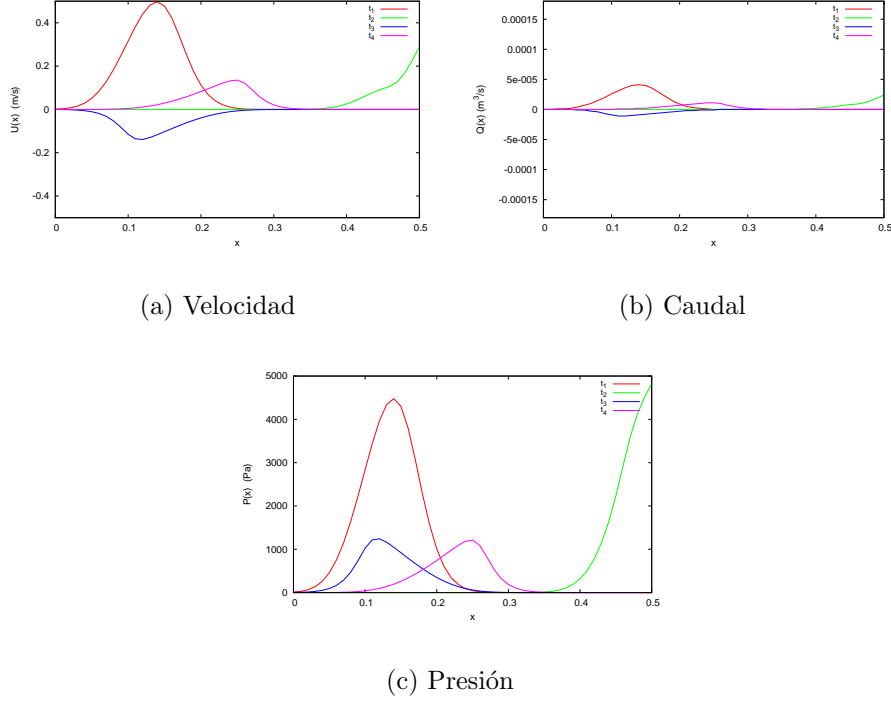


Figura 4.3: Comparación de la evolución de las variables con $r_0=0,5$ cm.

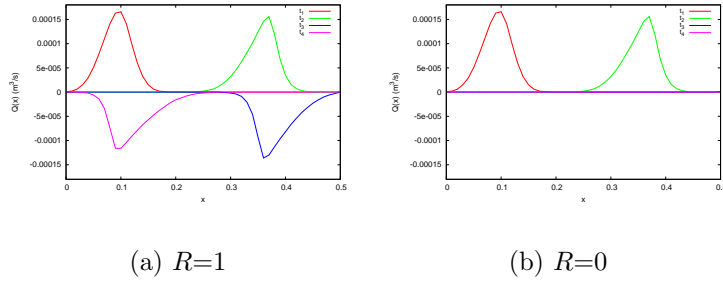


Figura 4.4: Distintos valores de R . a) $R=1$. b) $R=0$.

precisas podría mejorarse el modelo hasta realizar una simulación que se aproxime mucho a la realidad. Por ejemplo, si con nuestro sistema hemos comprobado como la disminución del radio hace que el caudal disminuya, con un modelo más preciso quizá podrían obtenerse otros datos de interés al respecto, como por ejemplo algún valor crítico a partir del cual la persona empezaría a tener problemas. De la misma manera, con un modelo más preciso, pueden realizarse pruebas con respecto a otros parámetros. Por tanto, la simulación computacional puede ser de una gran utilidad en este campo.

Bibliografía

- [1] P. García-Navarro A. Navas-Montilla, J. Murillo. 1-d human arterial system model, 2013.
- [2] Jordi Alastruey Arimon. *Numerical Modelling of Pulse Wave propagation in the Cardiovascular System: development, validation and clinical applications*. PhD thesis, Departments of Aeronautics and Bioengineering. Imperial College London, 2006.
- [3] J. Billingham and A.C. King. *Wave Motion*. Cambridge University Press, 2000.
- [4] J. Burguete and P. García-Navarro. Improving simple explicit methods for unsteady open channel and river flow. *International Journal for Numerical Methods*, 45:125–156, 2004.
- [5] M. Ghidaoui and M. Zhao. A review of water hammer theory and practice. *Applied Mechanics Reviews*, 58, 2005.
- [6] Julio Gratton. *Introducción a la mecánica de fluidos*, 2002.
- [7] J. Cassidy J. Roberson and M. Chaudhry. *Hydraulic Engineering*. Houghton Mifflin Company, 1988.
- [8] Christopher G. Koutitas. *Elements of Computational Hydraulics*. Pentech Press, 1983.
- [9] James A. Liggett. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, 1994.
- [10] Lucas O. Müller and Eleuterio F. Toro. A global multiscale mathematical model for the human circulation with emphasis on the venous system. *International Journal For Numerical Methods In Biomedical Engineering*, 2014.
- [11] J. Murillo and P. García-Navarro. An energy balance solver for 1d arterial blood flow with variable mechanical properties and solute transport. *Computers and Fluids*, 117:149–167, 2015.
- [12] M.J. Cervantes S.D. Saemi, M. Raisee and A. Nourbakhsh. Computation of laminar and turbulent water hammer flows. In *11th World Congress on Computational Mechanics; 5th European Conference on Computational Mechanics; 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics*, 2014.
- [13] M. Zamir. *The Physics of Pulsatile Flow*. Biological Physics Series, 2000.
- [14] M. Zamir. *The Physics of Coronary Blood Flow*. Biological and Medical Physics. Biological Engineering, 2005.