

Análisis estadístico de datos reales sobre la patología del hombro.



Alma Gaya Pando

Trabajo de fin del grado en Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Summary

This work consists of two parts: a theoretical analysis of two and three dimensional contingency tables and a case study of a real data set.

0.1. 2x2 tables

The study of two-dimensional tables begins by introducing 2x2 tables. Let X and Y denote two categorical variables, each with two categories. Let π_{ij} denote the probability that (X, Y) occurs in the cell in row i and column j , $i, j = 1, 2$. The probability distribution $\{\pi_{ij}\}$ is the joint distribution of (X, Y) and it is clear that $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \pi_{ij} = 1$.

The marginal distributions are defined as the individual behaviour of each variable, so $\pi_{i+} = \pi_{i1} + \pi_{i2}$ and $\pi_{+j} = \pi_{1j} + \pi_{2j}$. The conditional probability of Y given on $X = i$ is denoted by $\pi_{j|i} = \frac{\pi_{ij}}{\pi_{i+}}$ and then $\pi_{1|1} + \pi_{2|1} = 1$ y $\pi_{1|2} + \pi_{2|2} = 1$. We write $\pi_{1|1} = \pi_1$, $\pi_{1|2} = \pi_2$, $\pi_{2|1} = 1 - \pi_1$ and $\pi_{2|2} = 1 - \pi_2$ for short. The quantity n_{ij} is the number of individuals with the value (i, j) . Let $n = n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22}$ be the sample size.

The probabilities π_{ij} are estimated by maximum likelihood, where the likelihood function is given by

$$\mathcal{L}(x, \pi) = \pi_{11}^{n_{11}} \pi_{12}^{n_{12}} \pi_{21}^{n_{21}} \pi_{22}^{n_{22}}.$$

Therefore, the maximum likelihood estimator of π_{ij} is

$$\hat{\pi}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n} \quad \forall i, j.$$

Independence and measures of association

Two variables are independent if and only if $\pi_{ij} = \pi_{i+} \pi_{+j} \quad \forall i, j$. To test the independence ($H_0 : \pi_{ij} = \pi_{i+} \pi_{+j} \quad \forall i, j$ vs $H_1 : \text{not } H_0$) the goodness of fit statistic can be used:

$$Q = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(n_{ij} - n \frac{n_{i+}}{n} \frac{n_{+j}}{n})^2}{n \frac{n_{i+}}{n} \frac{n_{+j}}{n}}.$$

This statistic has an asymptotic χ_1^2 distribution under H_0 and independence is rejected if $Q > \chi_{1;1-\alpha}^2$.

The difference of proportions is defined by $d = \pi_1 - \pi_2$, but this measure does not reflect the real differences between two samples. When the probabilities π_i are close to zero it is preferable to use the relative risk $r = \frac{\pi_1}{\pi_2} \in (0, \infty)$. Another measure of association in 2x2 tables is the odds ratio, $\theta = \frac{\pi_{11} \pi_{22}}{\pi_{12} \pi_{21}} \in (0, \infty)$. The variables X and Y are independent if and only if $\theta = 1$, therefore, they are independent if $\pi_{11} \pi_{22} = \pi_{12} \pi_{21}$.

Fisher's exact test and McNemar's test

The goodness of fit statistic shown above has some limitations because it must be used for large samples ($n \geq 30$) and it does not work well when there are unbalanced cells. In those cases it is better to use Fisher's exact test, based on the distribution of the statistic n_{11} , which has an hypergeometric distribution with parameters n, n_{1+}, n_{+1} .

If instead of a random sample of a bidimensional vector, we have paired design, McNemar's statistic (defined as $\frac{(n_{12}n_{21})^2}{n_{12}+n_{21}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_1^2$) can be used for testing independence. Under the hypothesis of independence McNemar's statistic has asymptotically a χ_1^2 distribution. Thus the hypothesis of independence is rejected if $\frac{(n_{12}n_{21})^2}{n_{12}+n_{21}} > \chi_{1;1-\alpha}^2$.

0.2. IxJ tables

The notation for 2x2 tables extends to $I \times J$ table. The statistic of goodness of fit is defined as

$$Q = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_i+n_j}{n}\right)^2}{\frac{n_i+n_j}{n}}.$$

The asymptotic distribution of this statistical under H_0 is $Q \sim \chi_{I^2-I-J+1}^2$ when $n \uparrow \infty$, and the independence is rejected when $Q > \chi_{I^2-I-J+1;1-\alpha}^2$.

Odds ratio

In $I \times J$ tables, there are as many odds ratio as 2x2 subtables. To characterize independence, fix a table element, for example (1,1) and define $\theta^{(i,j)} = \frac{\pi_{ij}\pi_{11}}{\pi_{i1}\pi_{1j}} \forall i = 2, \dots, I; j = 2, \dots, J$. Thus, $\theta^{(i,j)} = 1 \forall i, j \Leftrightarrow X$ and Y are independent.

0.3. Three-dimensional tables

We now turn to three-dimensional tables. The notation of the marginal distributions in tables $I \times J \times K$ is

$$\begin{aligned} \pi_{ij+} &= \sum_{k=1}^K \pi_{ijk}; & \pi_{i+k} &= \sum_{j=1}^J \pi_{ijk}; & \pi_{+jk} &= \sum_{i=1}^I \pi_{ijk} \\ \pi_{i++} &= \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \pi_{ijk} = \sum_{j=1}^J \pi_{ij+} = \sum_{k=1}^K \pi_{i+k}; & \pi_{+j+} &= \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \pi_{ijk}; & \pi_{+++} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \pi_{ijk}. \end{aligned}$$

In three-dimensional tables different models of association of variables can be considered. These types are as follows:

- (0) X, Y and Z are jointly independent. $\pi_{ijk} = \pi_{i++}\pi_{+j+}\pi_{++k} \forall i, j$;
- (1) X is independent of (Y, Z) . $\pi_{ijk} = \pi_{i++}\pi_{+jk} \forall i, j$;
- (2) Y is independent of (X, Z) . $\pi_{ijk} = \pi_{+j+}\pi_{i+k} \forall i, j$;
- (3) Z is independent of (X, Y) . $\pi_{ijk} = \pi_{++k}\pi_{ij+} \forall i, j$;
- (4) X and Y are independent given the values of Z . $\pi_{ij|k} = \pi_{i+|k}\pi_{+j|k} \Leftrightarrow \pi_{ijk} = \frac{\pi_{i+k}\pi_{+jk}}{\pi_{++k}} \forall i, j$;
- (5) X and Z are independent given the values of Y . $\pi_{ik|j} = \pi_{i+|j}\pi_{+k|j} \Leftrightarrow \pi_{ijk} = \frac{\pi_{ij+}\pi_{+jk}}{\pi_{++j}} \forall i, j$;
- (6) Y and Z are independent given the values of X . $\pi_{jk|i} = \pi_{j+|i}\pi_{+k|i} \Leftrightarrow \pi_{ijk} = \frac{\pi_{ij+}\pi_{i+k}}{\pi_{i++}} \forall i, j$;
- (7) Homogeneous association. $\frac{\pi_{111}\pi_{ijl}}{\pi_{11l}\pi_{1j1}} = \frac{\pi_{11k}\pi_{ijk}}{\pi_{1k1}\pi_{1jk}} \forall i = 2 \dots I, j = 2 \dots J, k = 2 \dots K$.

To compute the distribution of the statistic $Q = \sum_{i,j,k} \frac{(n_{ijk} - \hat{\mu}_{ijk}^{(l)})^2}{\hat{\mu}_{ijk}^{(l)}}$ a more general framework is set and we show that its asymptotic distribution is a χ_{gl}^2 , where gl are the degrees of freedom.

Finally we present the model selection problem using the log-linear model formulation.

In the second part of the work we have the data of 121 patients (45 men and 76 women) with shoulder pain and motion limitation attending primary care centers in the city of Zaragoza. All patients had a detailed physical examination by the clinician. These physical examinations aim to locate trigger points in various muscles of the shoulder. A trigger point is an irritable node pressure point. Once the trigger points are diagnosed, the clinician establishes an appropriate treatment for the patient. Moreover, sociodemographic, clinical and diagnostic variables were recorded for each patient. After treatment some of the variables were measured again.

The sociodemographic variables were sex, age, and sport activity. The clinical variables are: pain (0 to 10), daily activities (0 to 20), range of motion (0 to 40) and nocturnal pain. Finally, the diagnostic variables are the algometries within each muscle. These algometries were measured in different muscles (supraspinatus, infraspinatus, teres, subscapular, deltoids and pectoral).

First the main variables are analyzed separately. Most patients are between 40 and 69 years and do not play sports regularly. It is observed that many patients have severe pain, are unable to perform many daily activities, have a range of acceptable mobility and have nocturnal pain. To end an initial analysis, we conclude that there is a very high percentage of patients with 3 or more trigger points and women have, in the average, more trigger points than men.

We then analyze the association among diagnostic variables. We observe that the presence of a trigger point in the deltoid group has no influence on the presence of a trigger point in the supraspinatus and teres group. In contrast, the percentage of patients with trigger point in the teres group is twice as high in patients with trigger point in the supraspinatus than in those not having it. In addition, the percentage of patients with trigger point in the supraspinatus group is 1,2 times as high in women than in men.

It is also interesting to study the relationship between clinical variables and diagnostic variables before treatment. We have found that the pain and daily activities are influenced by the number of trigger points presented by patients. We also observe that trigger points in the teres group and the supraspinatus are the most relevant to the clinical variables.

Finally, we study whether the treatment has been effective, obtaining that the number of trigger points decreases globally and also in each muscle group (except in the infraspinatus and the pectoral muscles) and all clinical variables improved. Furthermore, the presence of trigger points in muscle groups after treatment is not related to clinical variables.

Prólogo

El presente trabajo consta de dos partes: una primera parte teórica que trata el estudio de tablas de contingencia bidimensionales y tridimensionales y una parte práctica de análisis estadístico de un conjunto de datos reales.

Comenzaremos detallando esta segunda parte. Los datos, que serán analizados, forman parte de un estudio desarrollado en los centros de salud de atención primaria en la ciudad de Zaragoza. El problema que aborda este estudio es principalmente el dolor en el hombro y su patología. En el diseño se incluyeron 121 pacientes y los objetivos se han centrado sobre el análisis de 14 variables de diferente naturaleza. Desde un punto de vista médico se pueden clasificar las variables en clínicas y diagnósticas, además de las variables sociodemográficas habituales. Las variables clínicas sirven para describir el estado del paciente en cuanto a su dolor, movilidad y posibilidad de realizar actividades cotidianas. Las variables diagnósticas están basadas en exploraciones físicas realizadas por el experto en cada paciente y son las posibles causantes de la dolencia en el hombro.

Así, en el análisis estadístico de los datos se buscarán relaciones entre las variables clínicas y diagnósticas, se analizarán posibles asociaciones entre las propias variables de tipo diagnóstico y se estudiará la evolución de las variables tras el tratamiento efectuado por el fisioterapeuta, entre otros objetivos.

Algunas de las técnicas necesarias para el análisis son básicas en el sentido de que su aprendizaje se ha realizado durante el Grado en Matemáticas (herramientas descriptivas, técnicas de inferencia paramétrica y no paramétrica para la comparación de poblaciones, regresión lineal múltiple, etc.) pero otras no han sido tratadas en el mismo. Por ello, la primera parte del trabajo está dedicada al estudio de datos categóricos. El objetivo no es hacer una revisión de todas las técnicas que se emplean en el análisis de datos cualitativos, sino la introducción de las técnicas, necesarias para el objetivo planteado, proporcionando una justificación teórica de los resultados más importantes que se presentan.

El trabajo está estructurado como sigue. El capítulo 2 recoge una breve exposición del tratamiento de tablas bidimensionales centrandose especial atención a las tablas 2x2. En este estudio se incluyen algunas medidas y test de asociación, como el test de independencia clásico, el test exacto de Fisher y el test de McNemar. El estudio se extiende a tablas tridimensionales en las que se plantean los distintos modelos de asociación existentes entre las variables. Cada modelo lleva asociado un contraste de hipótesis que permite tomar una decisión sobre si es adecuado para modelar los datos. Todos estos contrastes están basados en el estadístico de la bondad de ajuste de Pearson. En este trabajo se estudia su distribución asintótica mediante el uso del teorema de la función implícita y del método delta, en un marco más general que el de las tablas tridimensionales. El estudio de dichas tablas concluye con la selección del modelo de asociación.

El capítulo 3 contiene el análisis de los datos acerca de la patología del hombro. Este análisis se ha realizado utilizando el software *IBM SPSS Statistics v22*.

Índice general

Summary	III
0.1. 2x2 tables	III
0.2. IxJ tables	IV
0.3. Three-dimensional tables	IV
Prólogo	VII
1. Análisis de tablas de contingencia bidimensionales y tridimensionales	1
1.1. Introducción	1
1.2. Tablas 2x2	1
1.2.1. Definición	1
1.2.2. Independencia y medidas de asociación	2
1.2.3. Test exacto de Fisher y test de McNemar	4
1.3. Tablas IxJ	5
1.3.1. Definición	5
1.3.2. Independencia y medidas de asociación	6
1.4. Tablas tridimensionales	6
1.4.1. Definición	6
1.4.2. Tipos de asociación	7
1.4.3. Estadístico Q de la bondad del ajuste	8
1.4.4. Contrastes de los tipos de asociación	12
1.4.5. Selección del modelo de asociación	14
2. Estudio de datos reales	17
2.1. Introducción	17
2.2. Definición de las variables en estudio.	18
2.3. Análisis de las variables principales	18
2.3.1. Variables sociodemográficas	18
2.3.2. Variables clínicas	19
2.3.3. Variables diagnósticas	20
2.4. Asociación de las variables diagnósticas	21
2.5. Relación de las variables clínicas y las variables diagnósticas antes del tratamiento	22
2.6. Efectividad del tratamiento	24
2.7. Conclusiones	26

Bibliografía	27
Anexo	29

Capítulo 1

Análisis de tablas de contingencia bidimensionales y tridimensionales

1.1. Introducción

El objetivo de este capítulo será proporcionar los conceptos y las técnicas necesarias para el análisis de los datos que se presentarán en el siguiente capítulo.

Un estudio básico del análisis de datos categóricos puede encontrarse, por ejemplo, en [7]. Un tratamiento más riguroso, desde un punto de vista matemático, de las tablas bidimensionales se puede consultar en [1]. Para el estudio de tablas tridimensionales una de las referencias más habituales por el enfoque teórico que presenta es [4].

Este capítulo comenzará con el estudio de tablas 2×2 y se generalizará a tablas tridimensionales, en las que se presentan los distintos modelos de asociación y los contrastes asociados. Como se ha comentado en el prólogo se estudia la distribución asintótica del estadístico utilizado en estos contrastes.

1.2. Tablas 2×2

1.2.1. Definición

Dadas dos variables categóricas, X e Y , con X presentando I categorías e Y J categorías, podemos representarlas en una tabla con $I \times J$ celdas. Estas tablas son llamadas tablas de contingencia.

Las tablas de contingencia más simples son las tablas 2×2 , que surgen a partir de dos variables dicotómicas. Los datos en forma de tablas 2×2 se producen con mucha frecuencia en las ciencias sociales, la educación y la investigación médica.

Cada celda de la tabla representa las probabilidades de cada pareja de valores (i, j) con $i, j = 1, 2$. Se denota por π_{ij} la probabilidad de que el par (X, Y) presente el valor (i, j) . A $\{\pi_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, lo llamaremos distribución de probabilidad conjunta de (X, Y) . Es claro que se tiene $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \pi_{ij} = 1$.

Las distribuciones marginales se definen como el comportamiento individual de cada una de las variables. Así, $\pi_{i+} = \pi_{i1} + \pi_{i2}$ y $\pi_{+j} = \pi_{1j} + \pi_{2j}$.

X/Y	1	2	
1	π_{11}	π_{12}	π_{1+}
2	π_{21}	π_{22}	π_{2+}
	π_{+1}	π_{+2}	1

Tabla 1.1: Distribución de (X, Y)

En muchas ocasiones una de las variables es una variable respuesta (por ejemplo Y) y la otra es una variable explicativa (X). En este caso, se estudia para cada valor de X el comportamiento de la variable Y . Por ello se habla de distribuciones condicionadas.

El concepto de distribución condicionada tiene sentido en cualquier pareja de variables, y se denota $\pi_{j|i} = \frac{\pi_{ij}}{\pi_{i+}}$, $j = 1, 2$ a la probabilidad condicionada de Y a $X=i$, ($\pi_{i+} > 0$).

Se tiene $\pi_{1|1} + \pi_{2|1} = 1$ y $\pi_{1|2} + \pi_{2|2} = 1$. Para abreviar la notación se escribe $\pi_{1|1} = \pi_1$, $\pi_{1|2} = \pi_2$, $\pi_{2|1} = 1 - \pi_1$ y $\pi_{2|2} = 1 - \pi_2$.

En general no se dispone de las probabilidades teóricas conjuntas sino de las frecuencias obtenidas en una muestra aleatoria simple. Dadas X e Y , se define n_{ij} al número de individuos que presentan el valor (i, j) . Estas frecuencias se representan en tablas 2×2 de forma análoga a la anterior.

X/Y	1	2	
1	n_{11}	n_{12}	n_{1+}
2	n_{21}	n_{22}	n_{2+}
	n_{+1}	n_{+2}	n

Tabla 1.2: Tabla de contingencia de (X, Y)

A lo largo del capítulo supondremos que n , el tamaño de la muestra, es fijo, no aleatorio; así estaremos ante un muestreo multinomial, es decir, la distribución conjunta de las frecuencias n_{ij} sigue una distribución multinomial de parámetros n , π_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$. La estimación de las probabilidades π_{ij} se realiza mediante máxima verosimilitud. Así la verosimilitud en nuestro modelo es:

$$\mathcal{L}(x, \pi) = \pi_{11}^{n_{11}} \pi_{12}^{n_{12}} \pi_{21}^{n_{21}} \pi_{22}^{n_{22}},$$

por tanto es inmediato al derivar el logaritmo de \mathcal{L} respecto a cada π_{ij} e igualar a 0, que el estimador máximo verosímil de π_{ij} es:

$$\hat{\pi}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n} \quad \forall i, j.$$

1.2.2. Independencia y medidas de asociación

Independencia

En general, dos variables X e Y son independientes si y solo si $\pi_{ij} = \pi_{i+}\pi_{+j}$, $\forall i, j$; es decir, si la distribución conjunta es el producto de las marginales. Cuando las probabilidades π_i marginales son distintas de 0, X e Y son independientes si y solo si $\pi_{i|j} = \pi_{i+}$, j ($\pi_{j|i} = \pi_{+j}$).

Para contrastar la independencia ($H_0 : \pi_{ij} = \pi_{i+}\pi_{+j}$, $\forall i, j$, frente a $H_1 : \pi_{ij} \neq \pi_{i+}\pi_{+j}$ para algún $i \neq j$) se puede utilizar el test de la razón de verosimilitudes o bien el estadístico de la bondad del ajuste. A lo largo del capítulo los contrastes de independencia o de las distintas asociaciones entre variables se realizarán con este último ya que uno de los objetivos del trabajo es su construcción y la demostración de su distribución asintótica en general, como se verá en el apartado 1.4.3.

En este caso particular de independencia en tablas 2x2, el estadístico de la bondad del ajuste adopta la siguiente forma:

$$Q = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(n_{ij} - n \frac{n_{i+}}{n} \frac{n_{+j}}{n})^2}{n \frac{n_{i+}}{n} \frac{n_{+j}}{n}}.$$

Bajo H_0 , la distribución asintótica de Q es χ_1^2 (la distribución chi-cuadrado con 1 grado de libertad). Por tanto, si $Q > \chi_{1;1-\alpha}^2$, rechazamos la independencia a nivel α .

Diferencia de proporciones y riesgo relativo

La diferencia de proporciones es una medida de asociación y se define como $d = \pi_1 - \pi_2$. Si el suceso $\{Y=1\}$ se considera como “éxito”, π_i es la probabilidad de éxito en el grupo $\{X=i\}$ y d es la diferencia de las probabilidades de éxito en cada grupo. Si $d = 0$ estamos ante independencia entre las variables.

Es una medida absoluta muy sencilla de calcular pero en algunos casos no refleja las diferencias reales existentes. Por ejemplo, en un estudio en el que se comparan dos tratamientos a través de la probabilidad de que un individuo muera, la diferencia entre 0,010 y 0,001 puede ser más digna de mención que la diferencia entre 0,410 y 0,401, a pesar de que ambas son 0,009.

En este caso, en el que las probabilidades π_i están cerca de cero es preferible el uso del riesgo relativo que se define como

$$r = \frac{\pi_1}{\pi_2} \in (0, \infty).$$

Un riesgo relativo igual a 1 corresponde a la independencia. Para las proporciones dadas antes, los riesgos relativos son $\frac{0,010}{0,001} = 10$ y $\frac{0,410}{0,401} = 1,02$. Por tanto en el primer caso la proporción de individuos que mueren es 10 veces superior en un tratamiento que en el otro; sin embargo en el segundo caso son prácticamente iguales.

Odds ratio

Otra medida de asociación importante en tablas 2x2 es el odds ratio. Sea π la probabilidad de un suceso (éxito), definimos el odds asociado como:

$$\Omega = \frac{\pi}{1 - \pi} \equiv \frac{\text{probabilidad de éxito}}{\text{probabilidad de fracaso}}.$$

Se define el odds ratio como:

$$\theta = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{\frac{\pi_1}{1-\pi_1}}{\frac{\pi_2}{1-\pi_2}} = \text{cociente de los odds de cada fila.}$$

Expresando π_1 y π_2 en términos de las probabilidades conjuntas obtenemos:

$$\theta = \frac{\pi_{11}/\pi_{12}}{\pi_{21}/\pi_{22}} = \frac{\pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{12}\pi_{21}}.$$

Al odds ratio también se le llama razón de productos cruzados.

Proposición 1.2.1. $\theta \in (0, \infty)$, y se tiene que X e Y son independientes $\Leftrightarrow \theta = 1$. Por tanto, independencia $\Leftrightarrow \pi_{11}\pi_{22} = \pi_{12}\pi_{21}$.

Demostración. Es inmediato, puesto que X e Y son independientes $\Leftrightarrow \pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \theta = 1$. \square

Si $\theta > 1$ entonces $\pi_1 > \pi_2$, la probabilidad de éxito en el primer grupo ($X = 1$) es mayor que en el segundo ($X = 2$). Si $\theta < 1$ entonces $\pi_1 < \pi_2$. En general, si $\theta \neq 1$, habrá asociación entre las variables.

El riesgo relativo y el odds ratio están relacionados mediante:

$$\theta = r \frac{1 - \pi_2}{1 - \pi_1}.$$

Cuando π_1 y π_2 son muy bajos, $\theta \approx r$, y se puede interpretar θ como r .

1.2.3. Test exacto de Fisher y test de McNemar

Test exacto de Fisher

El test de independencia que se ha mostrado en el apartado 1.2.2, tiene limitaciones pues, debe usarse para muestras grandes ($n \geq 30$) y cuando hay celdas descompensadas no funciona bien. En estos casos el test Q es conservativo. Cuando se tiene que $n \leq 30$ o más del 20% de las casillas tienen una frecuencia esperada ≤ 5 , se utilizará el test exacto de Fisher.

Este test es válido para cualquier tabla 2×2 y está basado en la distribución del estadístico n_{11} que es una hipergeométrica de parámetros n, n_{1+}, n_{+1} .

Test unilateral a nivel α

H_0 : $\theta = 1$ (odds ratio=1) \equiv independencia

H_1 : $\theta < 1$ (Probabilidad de éxito en la primera fila < probabilidad de éxito en la segunda fila)

Para realizar este contraste se necesita calcular el p-valor $P(n_{11} < t_0)$, con t_0 el valor observado de n_{11} . Si el p-valor es menor que α entonces se rechaza la hipótesis nula. Análogamente se contrastaría $H_1 : \theta > 1$.

Test bilaterales

H_0 : $\theta = 1 \equiv$ Independencia

H_1 : $\theta \neq 1 \equiv \nexists$ Independencia

$$\text{p-valor} = \sum_{k \in A} P(n_{11} = k), \quad A = \{k \text{ t.q. } P_k \leq P_{t_0}\},$$

donde t_0 es el valor de n_{11} observado en la muestra y P_k es la probabilidad de que $n_{11} = k$.

Test de McNemar

Los emparejamientos exactos se utilizan con frecuencia por los investigadores para aumentar la precisión de una comparación. El emparejamiento se hace generalmente en variables como la edad, sexo, peso, índice de inteligencia, y similares, esta información suele estar fácilmente disponible. De esta forma, dos muestras diferentes deben ser consideradas como correlacionadas en lugar de independientes; en consecuencia, la prueba de Chi-cuadrado habitual no es estrictamente aplicable para evaluar la diferencia entre las frecuencias obtenidas de dichas muestras.

Por ejemplo, el test de McNemar puede ser útil para comprobar la efectividad de un tratamiento, en el que se mide, a un conjunto de pacientes, una característica (por ejemplo, la presencia de un síntoma determinado) antes y después de su aplicación.

El esquema general es el siguiente: tenemos una variable que se mide en dos muestras distintas que no son independientes. X ="Característica sobre muestra 1" e Y ="Característica sobre muestra 2". Se supone que la característica que se mide solo representa 2 valores.

Se quiere contrastar que la característica se comporta igual en las 2 muestras, es decir, que las distribuciones marginales son iguales,

$$H_0 : \pi_{1+} = \pi_{+1}$$

$$H_1 : \pi_{1+} \neq \pi_{+1}.$$

Pero decir que $\pi_{1+} = \pi_{+1}$ es equivalente que $\pi_{12} = \pi_{21}$; por tanto el test anterior es equivalente a:

$$H_0 : \pi_{12} = \pi_{21}$$

$$H_1 : \pi_{12} \neq \pi_{21}.$$

El test se reduce a contrastar la igualdad de dos proporciones. Contrastar $\pi_{12} = \pi_{21}$ es equivalente a $\frac{\pi_{12}}{\pi_{12} + \pi_{21}} = \frac{1}{2}$. Además $\frac{\pi_{12}}{\pi_{12} + \pi_{21}}$ es la probabilidad del valor (1,2) condicionada a los individuos de la diagonal, es decir $n_{12} + n_{21}$. Llamando $\pi = \frac{\pi_{12}}{\pi_{12} + \pi_{21}}$ y $n^* = n_{12} + n_{21}$, el test resultante es:

$$H_0 : \pi = \frac{1}{2}$$

$$H_1 : \pi \neq \frac{1}{2}.$$

Condicionado a n^* , $n_{12} \sim \text{Bin}(n^*, \pi)$ (distribución binomial de parámetros n^* y π) y por las propiedades de la distribución binomial,

$$\frac{P_0 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n^*}}} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0, 1),$$

cuando $n^* \uparrow \infty$, con $P_0 = \frac{n_{12}}{n_{12} + n_{21}}$ y $\mathcal{N}(0, 1)$ denota la distribución normal estándar.

Así se obtiene el test de McNemar:

$$M = \frac{(n_{12} - n_{21})^2}{n_{12} + n_{21}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_1^2.$$

Si $M > \chi_{1;1-\alpha}^2$ se rechaza la hipótesis nula de que la característica bajo estudio se comporta igual en las dos muestras.

1.3. Tablas IxJ

1.3.1. Definición

Se puede generalizar el caso de las tablas 2x2 a tablas IxJ. Sean dos variables categóricas, X e Y , con I y J categorías, respectivamente. Como antes, se pueden representar en una tabla con IxJ celdas. Cada celda representa las frecuencias de cada pareja de valores (i, j) con $i = 1 \dots I$, $j = 1 \dots J$.

La notación es igual al caso 2x2. Se denota por π_{ij} la probabilidad de que el par (X, Y) presente el valor (i, j) , $i = 1 \dots I$, $j = 1 \dots J$. La distribución conjunta es: $\{\pi_{ij}\}$, $i = 1 \dots I$, $j = 1 \dots J$, y se tiene $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \pi_{ij} = 1$. Se definen también las distribuciones marginales, $\pi_{i+} = \sum_{j=1}^J \pi_{ij}$ y $\pi_{+j} = \sum_{i=1}^I \pi_{ij}$.

1.3.2. Independencia y medidas de asociación

Independencia

El contraste de independencia es:

$$H_0: \pi_{ij} = \pi_{i+}\pi_{+j} \quad \forall i, j$$

$$H_1: \pi_{ij} \neq \pi_{i+}\pi_{+j} \quad \text{para algún } i \neq j$$

De manera análoga al caso 2x2, se tiene el estadístico Q de la bondad del ajuste, cuya forma y distribución asintótica son:

$$Q = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i+}n_{+j}}{n})^2}{\frac{n_{i+}n_{+j}}{n}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{I \cdot J - I - J + 1}^2.$$

Por tanto, si $Q > \chi_{I \cdot J - I - J + 1; 1 - \alpha}^2$ se rechaza la hipótesis nula de independencia.

Odds Ratio

En el caso de tablas $I \times J$ hay muchas medidas de asociación entre las variables, dependiendo de la naturaleza de las mismas. Puesto que no es uno de los objetivos del trabajo, solo se definirán los odds ratio, que se utilizarán de nuevo para el estudio de un tipo de asociación en tablas tridimensionales.

En una tabla $I \times J$, se tienen $\binom{I}{2} \binom{J}{2}$ subtablas 2x2 y, por tanto, el mismo número de odds ratio.

Para caracterizar la independencia a través de los odds ratio (como se hizo en tablas 2x2) se fija un elemento de la tabla, por ejemplo (1,1), y se define el odds ratio como:

$$\theta^{(i,j)} = \frac{\pi_{ij}\pi_{11}}{\pi_{i1}\pi_{1j}} \quad \forall i = 2, \dots, I \text{ y } j = 2, \dots, J.$$

Así, el número de odds ratio necesarios para caracterizar la independencia es $(I-1)(J-1)$. Es inmediato que

$$\theta^{(i,j)} = 1, \quad i = 2, \dots, I \quad j = 2, \dots, J \Leftrightarrow \text{independencia de } (X, Y).$$

1.4. Tablas tridimensionales

1.4.1. Definición

En muchas situaciones, es interesante analizar las tablas resultantes de la clasificación en más de dos variables categóricas. El análisis de las tablas tridimensionales plantea nuevos problemas conceptuales en comparación con el análisis de las de dos dimensiones.

La notación de las distribuciones marginales en tablas $I \times J \times K$ es

$$\pi_{ij+} = \sum_{k=1}^K \pi_{ijk}, \quad \pi_{i+k} = \sum_{j=1}^J \pi_{ijk}, \quad \pi_{+jk} = \sum_{i=1}^I \pi_{ijk},$$

$$\pi_{i++} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \pi_{ijk} = \sum_{j=1}^J \pi_{ij+} = \sum_{k=1}^K \pi_{i+k}, \quad \pi_{++k} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \pi_{ijk}.$$

Notar que las marginales π_{ij+} , π_{i+k} y π_{+jk} son los valores de una tabla bidimensional $I \times J$, $I \times K$ y $J \times K$, respectivamente.

1.4.2. Tipos de asociación

Dadas tres variables X, Y y Z con I, J y K categorías, respectivamente, se pueden plantear distintos modelos de relación entre las variables: que las variables sean conjuntamente independientes, que una sea independiente de las otras 2, etc. A continuación se enunciarán los tipos de asociación existentes junto con su caracterización probabilística.

(0) X, Y y Z son conjuntamente independientes,

$$\pi_{ijk} = \pi_{i++}\pi_{+j+}\pi_{++k} \quad \forall i, j, k,$$

(1) X es independiente de (Y, Z) ,

$$\pi_{ijk} = \pi_{i++}\pi_{+jk} \quad \forall i, j, k,$$

(2) Y es independiente de (X, Z) ,

$$\pi_{ijk} = \pi_{+j+}\pi_{i+k} \quad \forall i, j, k,$$

(3) Z es independiente de (X, Y) ,

$$\pi_{ijk} = \pi_{++k}\pi_{ij+} \quad \forall i, j, k,$$

(4) X e Y son independientes dados los valores de Z ,

$$\pi_{ij|k} = \pi_{i+|k}\pi_{+j|k} \Leftrightarrow \pi_{ijk} = \frac{\pi_{i+k}\pi_{+jk}}{\pi_{++k}} \quad \forall i, j, k,$$

(5) X y Z son independientes dados los valores de Y ,

$$\pi_{ik|j} = \pi_{i+|j}\pi_{+k|j} \Leftrightarrow \pi_{ijk} = \frac{\pi_{ij+}\pi_{+jk}}{\pi_{+j+}} \quad \forall i, j, k,$$

(6) Y y Z son independientes dados los valores de X ,

$$\pi_{jk|i} = \pi_{j+|i}\pi_{+k|i} \Leftrightarrow \pi_{ijk} = \frac{\pi_{ij+}\pi_{i+k}}{\pi_{i++}} \quad \forall i, j, k,$$

(7) Asociación homogénea. Como se ha visto en el apartado 1.3.2, dada una tabla $I \times J$, se puede ver el grado de asociación de dos variables a través de sus odds-ratio. La asociación homogénea consiste en establecer un modelo en el que estos odds ratio sean iguales para los distintos niveles de k . Tomando $Z = 1$ y $Z = k$ y comparando las dos tablas se comparan los correspondientes $\theta^{(i,j)}$.

$Z=1$		1	j	$Z=k$		1	j
	1	π_{111}	π_{1j1}		1	π_{11k}	π_{1jk}
	i	π_{i11}	π_{ij1}		i	π_{i1k}	π_{ijk}

Se obtiene:

$$\frac{\pi_{111}\pi_{ij1}}{\pi_{i11}\pi_{1j1}} = \frac{\pi_{11k}\pi_{ijk}}{\pi_{i1k}\pi_{1jk}} \quad \forall i = 2 \dots I, j = 2 \dots J, k = 2 \dots K.$$

En el modelo de asociación homogénea todos los pares de variables son condicionalmente dependientes dada la tercera. La asociación parcial entre dos variables no varía con los distintos niveles de la tercera. Así, en el ejemplo que se ha introducido para ilustrar el riesgo relativo, además de las variables “tratamiento” y “resultado” añadimos la variable sexo, una asociación homogénea entre las 3 variables significaría que el resultado ante el tratamiento es el mismo para los hombres que para las mujeres.

Estos 8 modelos están relacionados entre sí cumpliéndose que: el modelo de asociación homogénea (7) engloba a todos los demás; la independencia de Y y Z dados los valores de X (6) engloba a los modelos en los que Y y Z son independientes de (X, Z) y (X, Y) respectivamente ((2) y (3)); la

independencia de X y Z dados los valores de Y (5) engloba a los modelos en que Z y X son independientes de (X, Y) e (Y, Z) respectivamente ((3) y al (1)); el modelo con X e Y independientes dados los valores de Z (4) engloba a los modelos con Y y X independientes de (X, Z) e (Y, Z) ((2) y (1)) y, por último, todos los modelos ((1) a (7)) engloban a la independencia conjunta (0).

El objetivo ahora es, por tanto, realizar contrastes del tipo:

$H_0 : (l)$ es cierta.

$H_1 : (l)$ no es cierta,

$l = 0, \dots, 7$. El estadístico utilizado en todos los casos ($l=0, \dots, 7$) es:

$$Q = \sum_{ijk} \frac{(n_{ijk} - \hat{\mu}_{ijk}^{(l)})^2}{\hat{\mu}_{ijk}^{(l)}}, \quad (1.1)$$

siendo n_{ijk} las frecuencias observadas y $\hat{\mu}_{ijk}^{(l)}$ las frecuencias estimadas con máxima verosimilitud bajo H_0 ($n\hat{\pi}_{ijk}^{(l)}$).

En las siguientes secciones se estudiará la forma y la distribución de Q en cada uno de los modelos planteados.

1.4.3. Estadístico Q de la bondad del ajuste

Como se ha comentado, el principal objetivo es obtener la distribución del estadístico Q dado en (1.1). La demostración habitual de este resultado se basa en las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de máxima verosimilitud, es decir, consistencia, eficiencia y normalidad asintótica. La demostración que se presenta en este trabajo ([5]) requiere alguna hipótesis adicional (regularidad de las funciones) pero es más simple y novedosa y es autocontenida, lo que facilita su comprensión.

Hay dos elementos importantes en la demostración: el teorema de la función implícita y el método Delta ([1]). A continuación enunciamos ambos resultados incluyendo la demostración del método Delta en su versión vectorial.

Teorema 1.4.1. *Teorema de la función implícita (T.F.I)*

Sea $F : \mathbb{R}^{T+S} \rightarrow \mathbb{R}^S$ con derivada continua en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^{T+S}$ conteniendo un punto (x_T, x_S) tal que $F(x_T, x_S) = 0$. Supongamos que $\frac{\partial F}{\partial x_S}$ es una matriz $S \times S$ no singular en (x_T, x_S) .

Entonces, existe un entorno U_0 de x_T en \mathbb{R}^T y una única función $g : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^S$, con derivada continua tal que

$$\begin{cases} g(x_T) = x_S \\ F(x, g(x)) = 0, \quad x \in U_0. \end{cases}$$

Proposición 1.4.2. (*Método Delta*) Sea T_n un estadístico k -dimensional, $n \in \mathbb{N}$ y $\theta \in \Theta$ con Θ un abierto de \mathbb{R}^k tal que:

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

donde $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ denota la distribución normal multivariante de media 0 y matriz de covarianzas Σ .

Sea $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$ con jacobiano continuo y definido positivo en Θ . Entonces:

$$\sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, J\Sigma J')$$

donde J es el jacobiano de g en θ .

Demostración. Sea $i = 1, \dots, S$, por el teorema del valor medio:

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{u}) - g_i(\boldsymbol{\theta})|_{u_j=\theta_j} &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{u_j=u_j^*} (u_j - \theta_j) = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{u_j=\theta_j} (u_j - \theta_j) + \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{u_j=u_j^*} - \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{u_j=\theta_j} \right) (u_j - \theta_j), \end{aligned}$$

donde u_j^* está entre u_j y θ_j .

Como $\frac{\partial g_i}{\partial u_j}$ son continuas, $\frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{u_j=u_j^*} - \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{u_j=\theta_j} \rightarrow 0$, cuando $u_j \rightarrow \theta_j$.

Así,

$$g_i(\mathbf{u}) - g_i(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{u_j=\theta_j} (u_j - \theta_j) + \sum_{j=1}^k o_i(u_j - \theta_j)(u_j - \theta_j),$$

donde o_i verifica $o_i(u) \rightarrow 0$, cuando $u \rightarrow 0$. Por tanto,

$$g_i(T_n) - g_i(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{u_j=\theta_j} (T_n^j - \theta_j) + \sum_{j=1}^k o_i(T_n^j - \theta_j)(T_n^j - \theta_j).$$

$\sqrt{n}(T_n^j - \theta_j)$ converge en distribución y $o_i(T_n^j - \theta_j) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ en probabilidad, por tanto, se tiene

$$\sqrt{n} \sum_{j=1}^k o_i(T_n^j - \theta_j)(T_n^j - \theta_j) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} 0.$$

Finalmente, se concluye

$$\sqrt{n}(g_i(T_n) - g_i(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \left(\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\boldsymbol{\theta}} \right)' \boldsymbol{\Sigma} \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\boldsymbol{\theta}} \right) \quad i = 1, \dots, S.$$

□

Para el estudio del estadístico Q se plantea un marco general basado en la distribución multinomial del que las tablas tridimensionales son un caso particular.

Sea $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_T)'$ un vector cuyos valores son $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_T)$, con $x_i = 0$ ó 1 , $\sum_{i=1}^T x_i = 1$, de tal manera que

$$P(\mathbb{X} = \mathbf{x}) = \pi_1^{x_1} \pi_2^{x_2} \dots \pi_T^{x_T} \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^T \pi_i = 1; \quad 0 < \pi_i < 1, \quad i = 1 \dots T.$$

Consideremos una muestra aleatoria simple de tamaño n , $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$. La verosimilitud asociada a la muestra es $(\mathbf{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{Tj}))$,

$$L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \boldsymbol{\pi}) = \pi_1^{\sum x_{1j}} \dots \pi_T^{\sum x_{Tj}} = \pi_1^{n_1} \dots \pi_T^{n_T}, \quad (1.2)$$

donde $n_i \equiv$ número de elementos de la muestra que presentan el factor i ($n_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$).

Denotamos $p_i = \frac{n_i}{n} \equiv$ proporción de elementos de la muestra que presentan el factor i y $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_T)'$. El vector (n_1, n_2, \dots, n_T) tiene una distribución multinomial $\mathcal{M}(n; \pi_1, \dots, \pi_T)$ y aplicando el teorema central del límite multivariante o la aproximación de la distribución multinomial a la normal, se obtiene el siguiente resultado:

$$\sqrt{n}(\mathbf{p} - \boldsymbol{\pi}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, D(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}') \quad (1.3)$$

donde

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_T)' \text{ y } D(\pi) = \text{diagonal}(\pi_i) = \begin{pmatrix} \pi_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \pi_T \end{pmatrix}.$$

El modelo que se plantea verifica $\pi = f(\theta)$ con θ variando en un espacio paramétrico Θ , un abierto de \mathbb{R}^S con $S < T - 1$. Sea $\theta_0 \in \Theta$ con $f(\theta_0) = \pi_0$. Supongamos que la función f verifica las siguientes hipótesis:

H1. f es una función $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^T$ con segunda derivada continua en un entorno U de θ_0 .

H2. El jacobiano de f , $\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$, que es una matriz $T \times S$, tiene rango completo en el valor $\theta = \theta_0$.

La verosimilitud en este modelo paramétrico es:

$$L(n_1, \dots, n_T, \theta) = L(x_1, \dots, x_T, \pi) = \pi_1^{n_1} \dots \pi_T^{n_T} = f_1(\theta)^{n_1} \dots f_T(\theta)^{n_T}.$$

Considerando las derivadas del logaritmo de la verosimilitud, obtenemos:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^T \frac{n_i}{f_i(\theta)} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} = n \sum_{i=1}^T \frac{p_i}{f_i(\theta)} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}, \quad j = 1 \dots S.$$

A continuación, se van a estudiar los máximos locales de la verosimilitud lo que será de utilidad para analizar el comportamiento de Q .

Por hipótesis f tiene segunda derivada continua en un entorno U de θ_0 . Sea I^T el interior del cubo unidad T -dimensional. Definimos la función $l : I^T \times U \rightarrow \mathbb{R}^S$, mediante $l_j(z, \theta) = \sum_{i=1}^T \frac{z_i}{f_i(\theta)} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}$, $j = 1, \dots, T$.

l será la función a la que le aplicamos el T.F.I. Para ello hay que ver que se verifican las hipótesis de dicho teorema.

En primer lugar, es inmediato que $l(\pi_0, \theta_0) = 0$, pues

$$l(\pi_0, \theta_0) = \sum_{i=1}^T \frac{\pi_{i0}}{f_i(\theta_0)} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}(\theta_0) = \sum_{i=1}^T \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} \Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sum_{i=1}^T f_i(\theta) \right) \Big|_{\theta=\theta_0} = 0,$$

puesto que $\pi_{i0} = f_i(\theta_0)$ y $\sum_{i=1}^T f_i(\theta) = \sum \pi_i = 1$.

La segunda hipótesis del T.F.I es que l tiene derivada continua en un abierto de (π_0, θ_0) y $\frac{\partial l}{\partial \theta}$ es no singular en (π_0, θ_0) . Es inmediato que l tiene segunda derivada continua en un entorno de (π_0, θ_0) ya que f tiene segunda derivada continua. Falta ver que $\frac{\partial l}{\partial \theta}$ es no singular en (π_0, θ_0) :

$$\frac{\partial l_i}{\partial \theta_j} = \sum_{k=1}^T -\frac{z_k}{f_k^2(\theta)} \frac{\partial f_k}{\partial \theta_i} \frac{\partial f_k}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^T \frac{z_k}{f_k(\theta)} \frac{\partial f_k^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

$$\frac{\partial l_i}{\partial \theta_j} \Big|_{\theta_j} = - \sum_{k=1}^T \frac{1}{f_k(\theta_0)} \frac{\partial f_k}{\partial \theta_{i0}} \frac{\partial f_k}{\partial \theta_{j0}} = - \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_0} \right)' D(\pi_0) \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_0} \right).$$

Definiendo $A = D(\pi_0)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_0} \right)$, se tiene:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = -A'A. \quad (1.4)$$

Por hipótesis, $A'A$ tiene rango completo. Así, se puede aplicar el T.F.I a la función l y obtenemos que existe un entorno de π_0 , sea U_0 , y una función $\theta : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^S$ con derivada continua tal que $\theta(\pi_0) = \theta_0$ y $l(\pi, \theta(\pi)) = 0 \quad \forall \pi \in U_0$. Para obtener el jacobiano $\frac{\partial \theta}{\partial \pi}$ se aplica la regla de la cadena en \mathbb{R}^{T+S} .

$$0 = \frac{\partial l}{\partial \pi} + \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \pi} \quad \text{y} \quad \frac{\partial l_j}{\partial \pi_i} = \frac{1}{f_i(\theta)} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} \Rightarrow \frac{\partial l}{\partial \pi_0} = \left(D(\pi_0)^{-\frac{1}{2}} A \right)'.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \pi_0} = - \left(\frac{\partial l}{\partial \theta} \right)^{-1} \frac{\partial l}{\partial \pi} = (A'A)^{-1} A' D(\pi_0)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.5)$$

Como $\mathbf{p} \rightarrow \pi_0$ casi seguramente, $\mathbf{p} \in U_0$ ($n \geq n_0$). Por tanto, $\hat{\theta} = \theta(\mathbf{p})$ es solución de las ecuaciones de verosimilitud y es única en un entorno de θ_0 .

Teorema 1.4.3. *Bajo las hipótesis H1 y H2:*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, (A'A)^{-1}).$$

Demostración. Por el método delta y (1.3) se tiene

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \frac{\partial \theta}{\partial \pi} \Big|_{\pi=\pi_0} (D(\pi_0) - \pi_0 \pi_0') \left(\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \Big|_{\pi=\pi_0} \right)' \right).$$

Usando que $A' \sqrt{\pi_0} = 0$ se obtiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \Big|_{\pi=\pi_0} (D(\pi_0) - \pi_0 \pi_0') \left(\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \Big|_{\pi=\pi_0} \right)' = (A'A)^{-1}.$$

□

Teorema 1.4.4. *Bajo las hipótesis H1 y H2:*

$$\sqrt{n}(f(\hat{\theta}) - \pi_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, D(\pi_0)^{\frac{1}{2}} A (A'A)^{-1} A' D(\pi_0)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Demostración. Utilizando el teorema anterior solo queda aplicar el método delta y obtenemos

$$\sqrt{n}(f(\hat{\theta}) - \pi_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \frac{\partial f}{\partial \theta_0} (A'A)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_0} \right)' \right).$$

Utilizando la notación $A = D(\pi_0)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_0} \right)$ se obtiene el resultado. □

A continuación veamos cuál es la relación entre los resultados obtenidos hasta ahora y nuestros modelos de asociación. En cada modelo ($l=0, \dots, 7$) existe una relación entre las probabilidades π_{ijk} . Dicha relación define la función f en cada modelo. Por otro lado, $\hat{\mu}_{ijk}^{(l)}$ es la estimación máximo verosímil (bajo H_0) de las frecuencias esperadas y por tanto es el estimador $f_i(\hat{\theta})$.

Así, para obtener el comportamiento asintótico de Q , debemos definir las discrepancias entre las frecuencias observadas y las estimadas por máxima verosimilitud. En este caso, se define

$$e_i = \sqrt{n} \frac{(p_i - f_i(\hat{\theta}))}{\sqrt{f_i(\hat{\theta})}} = \frac{n_i - n f_i(\hat{\theta})}{\sqrt{n f_i(\hat{\theta})}} \quad \forall i = 1 \dots T.$$

Teorema 1.4.5. *Bajo las hipótesis H1 y H2:*

$$\mathbf{e} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I} - P_A - \sqrt{\pi_0} \sqrt{\pi'_0}\right).$$

Demostración. Para ver su distribución asintótica se utilizará que \mathbf{e} es una función adecuada de \mathbf{p} y se aplicará el método delta.

Se define $r: \mathbb{R}^{2T} \rightarrow \mathbb{R}^T$ dada por $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{y}}}$ con $\sqrt{\mathbf{y}} = (\sqrt{y_1}, \dots, \sqrt{y_T})$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^T$ siendo el cociente componente a componente.

Se define también $g(\boldsymbol{\pi}) = r(\boldsymbol{\pi}, f(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\pi})))$; por tanto $\mathbf{e} = g(\mathbf{p}) = r(\mathbf{p}, f(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$. Para aplicar el método delta hay que calcular $\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\pi}}$. Por la regla de la cadena $\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\pi}} + \frac{\partial r}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\pi}}$. Usando (1.4) y (1.5) y realizando cálculos se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\pi}_0} = D(\boldsymbol{\pi}_0)^{-\frac{1}{2}} - D(\boldsymbol{\pi}_0)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}} (A'A)A'D(\boldsymbol{\pi}_0)^{-\frac{1}{2}} = (\mathbb{I} - A(A'A)A')D(\boldsymbol{\pi}_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

Finalmente aplicando el método delta y denotando $P_A = A(A'A)A'$ se tiene,

$$(\mathbb{I} - P_A)D(\boldsymbol{\pi}_0)^{-\frac{1}{2}}(D(\boldsymbol{\pi}_0) - \pi_0 \pi'_0)D(\boldsymbol{\pi}_0)^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{I} - P_A) = (\mathbb{I} - P_A)(\mathbb{I} - \sqrt{\pi_0} \sqrt{\pi'_0})(\mathbb{I} - P_A) = \mathbb{I} - P_A - \sqrt{\pi_0} \sqrt{\pi'_0}.$$

□

Corolario 1.4.6. *Bajo las hipótesis H1 y H2:*

$$\mathbf{e}'\mathbf{e} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_{T-S-1}^2.$$

Demostración. En primer lugar, recordamos el siguiente resultado sobre formas cuadráticas (véase por ejemplo [6]). Sea $x \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}, B)$, entonces

$$(x - \mathbf{v})'C(x - \mathbf{v}) \stackrel{\mathcal{D}}{\sim} \chi_q^2 \quad \Leftrightarrow BCBCB = BCB,$$

con $q \equiv \text{rango de } CB$.

Aplicando el teorema 1.4.5 y denotando $B = \mathbb{I} - P_A - \sqrt{\pi_0} \sqrt{\pi'_0}$ y $C = \mathbb{I}$, basta ver $BCB = BB$. Ahora bien, es inmediato que P_A y $\sqrt{\pi_0} \sqrt{\pi'_0}$ son matrices idempotentes, con lo que $BCB = BB$ y además

$$\text{rango}(\mathbb{I} - P_A - \sqrt{\pi_0} \sqrt{\pi'_0}) = T - \text{traza}(P_A) - \text{traza}\left(\sqrt{\pi_0} \sqrt{\pi'_0}\right) = T - S - 1.$$

□

Si se aplica el corolario 1.4.6 a las tablas tridimensionales obtenemos que

$$Q = \sum_{ijk} \frac{(n_{ijk} - \hat{\mu}_{ijk}^{(l)})^2}{\hat{\mu}_{ijk}^{(l)}} \stackrel{n \uparrow \infty}{\sim} \chi_{gl}^2,$$

donde $gl = \text{número de parámetros estimados bajo } H_1 - \text{número de parámetros estimados bajo } H_0$.

1.4.4. Contrastes de los tipos de asociación

A continuación veremos qué forma concreta adopta Q en cada modelo y se calcularán los grados de libertad de su distribución.

(0) Independencia completa.

$$H_0 : \pi_{ijk} = \pi_{i++}\pi_{+j+}\pi_{++k} \quad \forall i, j, k$$

$$H_1 : \pi_{ijk} \neq \pi_{i++}\pi_{+j+}\pi_{++k} \text{ para algún } i, j, k$$

Para calcular $\hat{\mu}_{ijk}^{(0)}$, primero se observa que $\hat{\mu}_{ijk}^{(0)} = n\hat{\pi}_{i++}\hat{\pi}_{+j+}\hat{\pi}_{++k}$. Por lo que, se debe calcular $\hat{\pi}_{i++}$, $\hat{\pi}_{+j+}$ y $\hat{\pi}_{++k}$. La estimación es por máxima verosimilitud, por tanto, $\hat{\pi}_{i++} = \frac{n_{i++}}{n}$, $\hat{\pi}_{+j+} = \frac{n_{+j+}}{n}$ y $\hat{\pi}_{++k} = \frac{n_{++k}}{n}$.

Finalmente se tiene,

$$\hat{\mu}_{ijk}^{(0)} = \frac{n_{i++}n_{+j+}n_{++k}}{n^2}.$$

Para calcular el estadístico solo falta saber los grados de libertad, $gl =$ parámetros estimados bajo H_1 - parámetros estimados bajo $H_0 = I \times J \times K - 1 - [(I - 1) + (J - 1) + (K - 1)] = IJK - I - J - K + 2$.

Así,

$$Q = \sum_{ijk} \frac{\left(n_{ijk} - \frac{n_{i++}n_{+j+}n_{++k}}{n^2}\right)^2}{\frac{n_{i++}n_{+j+}n_{++k}}{n^2}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{IJK-I-J-K+2}^2.$$

Se rechaza la hipótesis nula de independencia si $Q > \chi_{IJK-I-J-K+2; 1-\alpha}^2$.

(1), (2), (3) Independencia de una variable con las otras 2.

En este caso se analiza el modelo (3), para los otros dos el cálculo es análogo.

Se tiene:

$$H_0 : \pi_{ijk} = \pi_{ij+}\pi_{++k} \quad \forall (i, j, k).$$

$$H_1 : \pi_{ijk} \neq \pi_{ij+}\pi_{++k} \text{ para algún } i, j, k.$$

Primero se realiza el cálculo de $\hat{\mu}_{ijk}^{(3)}$.

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}(\mathbb{X}, \boldsymbol{\pi}) &= \sum_{ijk} n_{ijk} \log(\pi_{ijk}) = \sum_{ijk} n_{ijk} \log(\pi_{ij+}) + \sum_{ijk} n_{ijk} \log(\pi_{++k}) = \\ &= \sum_{ij} n_{ij+} \log(\pi_{ij+}) + \sum_k n_{++k} \log(\pi_{++k}). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\hat{\pi}_{ij+} = \frac{n_{ij+}}{n}, \quad \hat{\pi}_{++k} = \frac{n_{++k}}{n}.$$

Así,

$$\hat{\mu}_{ijk}^{(3)} = \frac{n_{ij+}n_{++k}}{n}.$$

Para los grados de libertad:

$$gl = IJK - 1 - (IJ - 1 + k - 1) = IJK - IJ - K + 1 = (IJ - 1)(K - 1).$$

Por tanto el estadístico Q y su distribución asintótica es:

$$Q = \sum_{ijk} \frac{\left(n_{ijk} - \frac{n_{ij+}n_{++k}}{n}\right)^2}{\frac{n_{ij+}n_{++k}}{n}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{(IJ-1)(K-1)}^2.$$

Se rechaza la hipótesis nula H_0 cuando $Q > \chi_{(IJ-1)(K-1); 1-\alpha}^2$

(4), (5), (6) Modelos de independencia condicionada.

Como en el caso anterior, se analizará el modelo (4).

$$H_0 : \pi_{ijk} = \frac{\pi_{i+k}\pi_{+jk}}{\pi_{++k}} \quad \forall i, j, k.$$

$$H_1 : \pi_{ijk} \neq \frac{\pi_{i+k}\pi_{+jk}}{\pi_{++k}} \quad \text{para algún } i, j, k.$$

$$\hat{\mu}_{ijk}^{(4)} = n\hat{\pi}_{ijk} = n \frac{\frac{n_{i+k}}{n} \frac{n_{+jk}}{n}}{\frac{n_{++k}}{n}} = \frac{n_{i+k}n_{+jk}}{n_{++k}}.$$

$$gl = IJK - 1 - [K - 1 + (I - 1 + J - 1)K] = (I - 1)(J - 1)K.$$

Así el estadístico y su distribución asintótica son:

$$Q = \sum_{i,j,k} \frac{\left(n_{ijk} - \frac{n_{i+k}n_{+jk}}{n_{++k}} \right)^2}{\frac{n_{i+k}n_{+jk}}{n_{++k}}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{(I-1)(J-1)K}^2.$$

Por tanto, se rechazará la hipótesis nula si $Q > \chi_{(I-1)(J-1)K; 1-\alpha}^2$.

(7) Asociación homogénea

H_0 : Asociación homogénea

H_1 : No asociación homogénea

En este caso, $\hat{\mu}_{ijk}^{(7)}$ es complicado de obtener y en la práctica se utilizan métodos iterativos para su cálculo ([4]). Para obtener los grados de libertad, en este modelo es más sencillo deducirlo del número de restricciones que se imponen. Fijando i, j , $\theta_{ij}^{Z=1} = \dots = \theta_{ij}^{Z=k}$, por tanto se tienen $k - 1$ restricciones. Además, hay $(I - 1)(J - 1)$ odds ratios del tipo θ_{ij} , luego, $gl = (I - 1)(J - 1)(K - 1)$.

1.4.5. Selección del modelo de asociación

En muchas ocasiones al realizar los contrastes vistos en el apartado anterior se pueden “aceptar” varios tipos de asociación. La cuestión es, por tanto, elegir la que mejor se adapta al modelo con el que se está tratando. La selección es sencilla de analizar cuando los modelos se enmarcan dentro de la teoría de modelos log-lineales. Es inmediato que en la formulación de los modelos de asociación de 1.4.2, si tomamos logaritmos en las restricciones de cada modelo obtenemos una relación lineal entre los logaritmos de los parámetros. Por ejemplo, el modelo de independencia conjunta (0) sería equivalente a $\ln(\pi_{ijk}) = \ln(\pi_{i++}) + \ln(\pi_{+j+}) + \ln(\pi_{++k}) = u_i^x + u_j^y + u_k^z$. Esta formulación de los modelos se conoce como modelos log-lineales.

El modelo más general (saturado), que contiene la interacción de las tres variables y, por tanto, las de 2 a 2 y las marginales es:

$$\ln(\pi_{ijk}) = c + u_i^x + u_j^y + u_k^z + u_{ij}^{xy} + u_{ik}^{xz} + u_{jk}^{yz} + u_{ijk}^{xyz}.$$

Todos los modelos (0) a (7) pueden obtenerse eliminando términos del saturado. Se van eliminando, primero interacciones altas (las de 3), después 1 de 2, 2 de 2 y 3 de 2.

Para el primer paso se elimina el término u_{ijk}^{xyz} , así el modelo obtenido es:

$$(7) \ln(\pi_{ijk}) = c + u_i^x + u_j^y + u_k^z + u_{ij}^{xy} + u_{ik}^{xz} + u_{jk}^{yz}$$

Este modelo nos dice que no existe asociación entre las tres variables, sino que la asociación entre X e Y es la misma para cada nivel de Z , es decir, asociación homogénea. Dependiendo de si en el modelo (7) $u_{jk}^{yz} = 0$, $u_{ik}^{xz} = 0$ o bien $u_{ij}^{xy} = 0$ se tienen los modelos:

- (6) $\ln(\pi_{ijk}) = c + u_i^x + u_j^y + u_k^z + u_{ij}^{xy} + u_{ik}^{xz}$ (Y y Z independientes condicionada a X),
 (5) $\ln(\pi_{ijk}) = c + u_i^x + u_j^y + u_k^z + u_{ij}^{xy} + u_{jk}^{yz}$ (X y Z independientes condicionada a Y),
 (4) $\ln(\pi_{ijk}) = c + u_i^x + u_j^y + u_k^z + u_{ik}^{xz} + u_{jk}^{yz}$ (X y Y independientes condicionada a Z).

Aquí se refleja claramente como el modelo (7) engloba a todos los demás.

Si en (7) se eliminan dos términos se obtienen los modelos (1), (2) y (3), que equivale a eliminar uno de los modelos (4), (5) y (6).

Eliminando del modelo (6), u_{ik}^{xz} se obtiene el modelo (3) y eliminando u_{ij}^{xy} el modelo (2):

- (3) $\ln(\pi_{ijk}) = c + u_i^x + u_j^y + u_k^z + u_{ij}^{xy}$ (Z independiente de (X, Y)),
 (2) $\ln(\pi_{ijk}) = c + u_i^x + u_j^y + u_k^z + u_{ik}^{xz}$ (Y independiente (X, Z)).

Aquí se observa que el modelo (6) engloba los modelos (2) y (3).

El modelo (3) también se puede obtener de (5) eliminando u_{jk}^{yz} y el (2) del (4) eliminando u_{jk}^{yz} . Por tanto el modelo (5) engloba al (3) y el (4) al (2).

El modelo (1) se puede obtener del (4) y del (5) eliminando u_{ik}^{xz} y u_{ij}^{xy} , respectivamente, y será

- (1) $\ln(\pi_{ijk}) = c + u_i^x + u_j^y + u_k^z + u_{jk}^{yz}$ (X independiente de (Y, Z)).

Por último, el modelo (0) se obtiene de los modelos (1), (2) y (3) eliminando la interacción entre las dos variables.

- (0) $\ln(\pi_{ijk}) = c + u_i^x + u_j^y + u_k^z$ (independencia completa).

Para comparar dos modelos, en primer lugar sólo se deben comparar modelos con alguna relación. Suponiendo que el modelo (r) es más grande que el (s) se trata de contrastar:

H_0 : (r) se cumple

H_1 : (s) se cumple

Si se rechaza H_0 , se elige la alternativa (s) frente a (r); si no rechazamos se elige el modelo (r).

Para hacer este contraste se utiliza el estadístico Q explicado en 1.4.2 donde

$$Q = \frac{\sum_{ijk} \left(\hat{\mu}_{ijk}^{(s)} - \hat{\mu}_{ijk}^{(r)} \right)^2}{\hat{\mu}_{ijk}^{(r)}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{gl}^2$$

siendo gl los grados de libertad calculados como la diferencia de los grados de libertad usados en los contrastes de los modelos (r) y (s).

Para llegar al “mejor” modelo, una manera de proceder es la siguiente: se parte del modelo “más grande” (asociación homogénea) y se comprueba si “se acepta”. Si aceptamos este modelo lo comparamos con los modelos (4), (5) y (6). De estos tres test, se elige el modelo que mayor p-valor tenga, siempre que sea un p-valor adecuado (mayor que el nivel de significación prefijado, α). Así, se habrá seleccionado un único modelo (M). Después se procede a contrastar el modelo (M) con los modelos más pequeños que él y se repite el proceso: elegir el modelo con mayor p-valor. Si ninguno de los p-valores es superior al nivel de significación, se elige el modelo (M); en otro caso, se contrasta el modelo elegido con el modelo (0). De este último test se elige el modelo definitivo.

Capítulo 2

Estudio de datos reales

2.1. Introducción

Los datos que se analizarán a lo largo del presente capítulo forman parte de un estudio que se desarrolló en los centros de salud de atención primaria (AP) en la ciudad de Zaragoza ([9]).

En dicho estudio se incluyeron 121 pacientes que presentaban dolor y limitación de hombro y fueron incorporados de forma secuencial durante los años 2008 al 2010.

El dolor en el hombro y en general su patología constituye uno de los motivos de consulta más frecuente en problemas musculares ([2]), ya que los pacientes sufren esta dolencia durante largos periodos de tiempo, en algunos casos más de un año, donde más del 65 % precisan de tratamiento farmacológico. Aunque principalmente una lesión estructural suele ser una de las causas de dolor en el hombro, cada vez más los expertos se inclinan por otro tipo de estructuras como las causantes de dolor o disfunción. Este hecho junto con la dificultad y el coste económico asociados a la realización de determinadas pruebas (resonancias, ecografías, etc.) hace que la exploración física sea una técnica cada vez más valiosa en las consultas de Atención Primaria. Por ello este estudio se ha centrado en el análisis de variables diagnósticas procedentes de exploraciones físicas llevadas a cabo en el paciente. Estas exploraciones físicas tienen como objetivo el localizar puntos gatillo en distintos músculos del hombro.

Un punto gatillo es un nódulo irritable de dolor a la presión, es decir, una zona sensible que genera dolor o dolor referido al ser presionado. La localización de estos puntos gatillo (PGM) junto con las variables clínicas serán las herramientas fundamentales para explicar la situación del paciente. En este sentido, la valoración clínica de cada individuo que acude al centro de salud se realiza mediante pruebas (en muchas ocasiones cuestionarios) que indican: el nivel de dolor, el rango de movilidad, la presencia de dolor nocturno o el número de actividades diarias que es capaz de realizar el paciente. Todas estas variables junto con variables sociodemográficas constituyen toda la información acerca del paciente en el momento en el que acude al centro de salud. Una vez diagnosticados los puntos gatillo, el clínico establece un tratamiento adecuado al paciente. Tras finalizar el tratamiento se vuelven a evaluar las variables diagnósticas y clínicas de cada paciente.

El objetivo es por un lado confirmar, como apuntan muchos expertos, que la existencia de estos puntos gatillo está relacionada con el estado clínico del paciente, y por otro corroborar que la labor del fisioterapeuta ha sido efectiva, aliviando la situación de dolor con la que llegaba el paciente a la

consulta. Además, también se plantea, puesto que es de interés desde un punto de vista clínico, la relación entre la existencia de puntos gatillo en los músculos más importantes. Esto será una herramienta de gran ayuda para el experto a la hora de establecer pautas de exploración en la localización de los PGM.

2.2. Definición de las variables en estudio.

En este capítulo se van a analizar tres tipos de variables, sociodemográficas, clínicas y diagnósticas. Dentro de las variables sociodemográficas, las variables sexo y edad son las más importantes. También se tendrá en cuenta la variable actividad deportiva por ser interesante para describir la muestra objeto de estudio.

Dentro de las variables clínicas se encuentran las variables dolor, actividades de la vida diaria, rango de movilidad y dolor nocturno. Para las variables dolor, actividades diarias y dolor nocturno los expertos preguntaron a los pacientes y anotaron los valores: la variable dolor presenta una escala del 0 al 10, siendo 0 nada de dolor y 10 máximo dolor; las actividades de la vida diaria varían en una escala del 0 al 20 (0 significa que no realiza bien ninguna actividad y 20 que puede realizar cualquiera de las actividades consideradas); y el dolor nocturno es una variable dicotómica (0 no dolor nocturno y 1 sí dolor nocturno). Con respecto a la variable rango de movilidad, es una variable que midió el experto en el momento que el paciente acudió a la consulta, medido en una escala de 0 a 40 (0 no hay movilidad en el hombro y 40 es movilidad completa).

Por último en el grupo de variables diagnósticas, se encuentran las algometrías dentro de cada músculo. Estas algometrías se miden en los distintos músculos (supraespinoso, infraespinoso, redondo, subescapular, deltoides y pectoral), y presentan el valor 0 cuando no se encuentra ningún punto gatillo o bien un valor mayor que 0 indicando el tiempo que resiste el paciente al dolor. Dichas variables se codifican en variables dicotómicas (=0 no existe punto gatillo, =1 sí existe punto gatillo). A partir de las algometrías se ha construido la variable número de puntos gatillo.

2.3. Análisis de las variables principales

2.3.1. Variables sociodemográficas

En la muestra estudiada observamos que de los 121 pacientes que acuden a los centros de salud, 45 son hombres (37,2%) y 76 son mujeres, lo que representa un 62,8% de la muestra, casi un 70% más de mujeres que de hombres, hecho bastante habitual en esta patología.

En cuanto a la edad, observamos (Tabla 7 del Anexo) que la mayor parte de los pacientes tienen entre 40 y 69 años (constituyen casi el 80% de los pacientes). La edad media es de 53,64 años con una desviación típica de 11,57 años. La mitad de los pacientes tienen menos de 53 años y el 25% más de 63 años (Tabla 8). La distribución de la edad es bastante simétrica, la mayor parte de los pacientes se concentran en la parte central de la distribución, pero con menos frecuencia que la distribución normal, por tanto, encontramos que tiene colas más pesadas, es decir, hay más individuos jóvenes o mayores de los que encontraríamos si la distribución fuera normal (Figura 1 del Anexo).

Analizando las frecuencias de la variable actividad deportiva se observa que 85 pacientes (70,2%)

no realizan ninguna actividad deportiva. Según el sexo se observa que hay más mujeres que no hacen nada de deporte (59/77,6%) que hombres (26/57,8%), y también hay más hombres que realizan una actividad habitual intensa (9/20,0%) que mujeres (3/3,9%) (Figura 2 del Anexo). Al realizar el contraste de independencia con el estadístico Q observamos que efectivamente, en general, los hombres realizan más actividades deportivas que las mujeres (véase Tabla 2.1)).

		SEXO		Total
		HOMBRE	MUJER	
ACTIVIDAD DEPORTIVA	nada	26 (57,8%)	59 (77,6%)	85 (70,2%)
	moderada, esporádica	10 (22,2%)	14 (18,4%)	24 (19,8%)
	actividad habitual intensa	9 (20,0%)	3 (3,9%)	12 (9,9%)
Q				9,136
p-valor				0,010

Tabla 2.1: Tabla de contingencia Actividad deportiva según el sexo.

2.3.2. Variables clínicas

Las medidas básicas de las variables que miden el dolor (VAS), número de actividades de la vida diaria (AVD) y rango de movilidad (RM) se encuentran en la Tabla 11 del Anexo. (en la Tabla 9 del Anexo se encuentran las tablas de frecuencias de estas variables y en la Figura 5 sus representaciones gráficas).

Se observa que el nivel medio de dolor es de 6,43, que en una escala de 0 a 10 se consideraría dolor severo. Más de un 50% de los pacientes presentan un dolor de 7 puntos o más. Solo un 5% de los pacientes tienen un dolor leve (por debajo de 4 puntos) y un total de 11 pacientes (un 9%) presentan niveles de dolor por encima de 8, lo que supone un nivel de dolor muy severo. Se detecta la existencia de un dato atípico; se trata de un paciente varón de 63 años que no presenta dolor (0 en la escala) y no tiene ningún valor anómalo en el resto de las variables.

El comportamiento entre hombres y mujeres es muy similar, siendo algo más elevado el dolor medio en este último (véase Tabla 11 y Figura 4 del Anexo), aunque no relevante, ya que al realizar el contraste para la comparación de ambos grupos se obtiene un p-valor 0,152. A este respecto, la no normalidad de la variable (detectada con un test de Kolmogorov-Smirnov, Tabla 10 del anexo) que mide el dolor tanto en hombres como en mujeres hace que la prueba no paramétrica de Mann-Whitney sea la más adecuada.

Con respecto a la variable actividades de la vida diaria, la media es de 11,83, que en una escala del 0 al 20 se consideraría un número reducido. Más de un 50% de los pacientes pueden realizar 11 actividades o más. Solo un 10% de los pacientes (28) pueden realizar más de 16 actividades de la vida diaria, lo que se consideraría un número aceptable, y un 8,3% (10 pacientes) no pueden realizar más de 6 actividades (Tabla 11 del Anexo).

El comportamiento entre hombres y mujeres es muy similar. Como anteriormente con una prueba no paramétrica de Mann-Whitney se obtiene un p-valor de 0.573, lo que indica que no hay diferencias significativas entre hombres y mujeres.

Realizando un análisis similar a la variable rango de movilidad, se observa que el rango medio es de 30, que en una escala de 0 a 40 se consideraría un rango de movilidad aceptable. Un total de 46 pacientes (15%) tienen un rango de movilidad elevado (más de 33 puntos), y 1,7% (2 pacientes)

tienen un rango de movilidad menor a 12 puntos, lo que supone un rango de movilidad muy reducido (Tabla 11 del Anexo).

Se observa que los hombres tienen en media 2 puntos más de rango de movilidad, pero realizando un test no paramétrico se obtiene que esta diferencia no es significativa (p-valor 0,868).

Además se observa que esta variable tiene un coeficiente de asimetría negativo, lo que significa que los individuos acuden con rango de movilidad bastante altos.

El dolor que presentan los pacientes no procede de un deterioro asociado a la edad, ya que esta variable presenta una correlación no significativa con el dolor de los pacientes. Para ello se han calculado los coeficientes de correlación de Pearson (Tabla 2.2) puesto que la variable Edad se puede considerar normal (Figura 3 del Anexo). Lo mismo ocurre con el número de actividades de la vida diaria y el rango de movilidad.

	Dolor	Actividades	Movilidad
Correlación	-0,106	-0,10	-0,120
p-valores	0,25	0,911	0,196

Tabla 2.2: Coeficientes de correlación de Pearson entre edad y las variables clínicas.

Otra variable clínica de gran importancia es el dolor nocturno. Como se ve en la Tabla 2.3, es elevado el número de pacientes que acuden con este problema (67,77%). Para comprobar si el sexo influye en la respuesta de los pacientes, se realiza un test Chi-cuadrado para la independencia y un test de Fisher y se obtienen unos p-valores 0,545 y 0,688 lo que significa que el sexo no influye en el dolor nocturno de los pacientes. Lo mismo ocurre con respecto a la variable edad.

		Dolor nocturno		Total
		Si	No	
Sexo	Hombres	32 (26,45 %)	13 (10,74 %)	45
	Mujeres	50 (41,32 %)	26 (21,49 %)	76
Total		82 (67,77 %)	39 (32,23 %)	121
		Valor	p-valor	
		χ^2	0,545	
		Fisher	0,688	

Tabla 2.3: Tabla de contingencia entre sexo y dolor nocturno.

Por tanto, se puede concluir de este primer análisis que la mayor parte de los pacientes acuden a la consulta con niveles de dolor moderados o severos, con algunas limitaciones en las actividades diarias que realizan pero con una buena valoración, en general, en cuanto a su rango de movilidad. También se puede concluir que la mayor parte de los pacientes tienen dolor nocturno (82 pacientes). No hay diferencias entre hombres y mujeres, y la edad no es una variable con especial relevancia en esta valoración inicial del paciente.

2.3.3. Variables diagnósticas

Como se ha comentado al comienzo de este capítulo, la principal variable diagnóstica mide el número de puntos gatillo que presenta el paciente. La distribución de dicha variable y sus principales medidas se recogen en la Tabla 12 del Anexo.

Se observa que los pacientes tienen en media 6,36 puntos gatillo, teniendo un 50% de los pacientes 6 o más. En la Tabla 13 y la Figura 6 del Anexo, se puede observar que la mayoría de los pacientes tienen entre 2 y 8 puntos gatillo, no habiendo pacientes con menos de 2 puntos gatillo y siendo el valor más frecuente 6 con 20 pacientes.

Estudiando los tipos de punto gatillo por grupos musculares, se observa que los grupos supraespinoso, infraespinoso, subescapular y deltoides son los que más prevalecen en los pacientes. Con respecto al grupo pectoral se observa la presencia de punto gatillo en la mitad de los pacientes (Figura 7) del Anexo.

Al estudiar la variable número de puntos gatillo por sexo (véase Figura 8 del Anexo y Tabla 12), se observa que las mujeres tienen más puntos gatillo que los hombres, siendo significativa esta diferencia (p -valor=0,001). En la Figura 8 se aprecia que hay dos pacientes varones que destacan entre los demás por tener un elevado número de puntos gatillo.

Calculando el coeficiente de correlación de Pearson entre las variables número de puntos gatillo y la edad, concluimos que esta no influye en la cantidad de puntos gatillo que sufre el paciente, ya que dicho coeficiente no es significativo (p -valor=0,163).

2.4. Asociación de las variables diagnósticas

Desde un punto de vista clínico es interesante conocer la asociación entre las existencias de puntos gatillo en los distintos grupos musculares. Existen 6 grupos de músculos, lo que hace que además de existir muchos tipos de asociación, algunos de ellos son de difícil interpretación. Por ello se eligen los grupos musculares más importantes para el experto: supraespinoso, redondo y deltoides.

Para estas tres variables se plantean los distintos modelos de asociación vistos en el apartado 1.4.2 y elegimos el más adecuado según el criterio de selección desarrollado en 1.4.5.

En primer lugar se comprueba qué modelos se cumplen para estas tres variables. Los resultados obtenidos al realizar los contrastes se encuentran en la siguiente Tabla 14 del Anexo.

Por tanto, se acepta la independencia del grupo deltoides con respecto a los grupos supraespinoso y redondo; de los grupos supraespinoso y deltoides dado el redondo; del redondo y deltoides dado el supraespinoso y la asociación homogénea.

Lo interesante ahora es saber qué modelo es el más adecuado. Para ello se implementa en el paquete estadístico esta selección y se obtienen los resultados de la Tabla 15 del Anexo.

Llamando S=Supraespinoso, R=Redondo y D=Deltoides, se observa que en el paso (0) se elimina el modelo saturado [SRD] por tener un p -valor=0,893. En el paso (1) el p -valor más alto es 0,633, por tanto el modelo [SR][RD] es el mejor de los 3. En el paso (2) se elimina el modelo [RD] (p -valor 0,180) quedando el modelo [SR][D]. En el paso (3) ningún p -valor es mayor que $\alpha = 0,05$, por tanto ya no se pueden eliminar más interacciones. Así el resultado final es que el grupo deltoides es independiente del grupo supraespinoso y redondo ([SR][D]). Por lo tanto, para estudiar las tres variables es suficiente analizar por separado los músculos supraespinoso y redondo.

	Redondo	
Supraespinoso	Si	No
Si	66	34
No	7	14

Los porcentajes condicionales por filas son:

Supraespinoso	Redondo	
	Si	No
Si	66 %	34 %
No	33,3 %	66,7 %

El valor del riesgo relativo es $r = 1,98$ y el valor del odds ratio es 3,88. Por tanto, vemos que el porcentaje de pacientes que tienen punto gatillo en el redondo es el doble dentro del grupo con punto gatillo en el supraespinoso que en el grupo sin dicho punto gatillo.

Puesto que la variable sexo aparecía como una variable relacionada con el número de puntos gatillo será interesante incorporar esta variable al modelo. Se aprecia en la Tabla 16 del Anexo que el grupo deltoides es independiente del supraespinoso, el redondo y el sexo; y el sexo es independiente del redondo condicionado al supraespinoso. Esto significa que para estudiar el comportamiento conjunto de las variables se deben estudiar las variables supraespinoso y redondo y por separado sexo y supraespinoso, por tanto, solo falta estudiar estas dos últimas.

Sexo	Supraespinoso	
	Sí	No
Mujer	67	9
Hombre	33	12

Los porcentajes condicionales por filas son:

Sexo	Supraespinoso	
	Sí	No
Mujer	88,16 %	11,84 %
Hombre	73,33 %	26,67 %

El valor del riesgo relativo es $r = 1,202$ y el valor del odds ratio es 2,707. Por tanto, se observa que el porcentaje de pacientes que tienen punto gatillo en el grupo supraespinoso es 1,2 veces más alto en las mujeres que en los hombres.

2.5. Relación de las variables clínicas y las variables diagnósticas antes del tratamiento

El objetivo de este apartado es determinar si la variable número de puntos gatillo afecta al estado del paciente. Para ello se analizará la correlación entre el número de puntos gatillo con cada una de las variables clínicas, es decir, dolor, número de actividades de la vida diaria y rango de movilidad. Para determinar si el número de puntos gatillo afecta al dolor nocturno, realizaremos un test paramétrico en caso de normalidad o bien no paramétrico si esta hipótesis se rechaza. Además se analizará un modelo de regresión para predecir, si es posible, el comportamiento de la variable número de actividades de la vida diaria a partir del resto de variables.

Los coeficientes de correlación de Spearman entre el número de puntos gatillo y el dolor y las actividades de la vida diaria son significativos como se puede observar en la Tabla 2.4, así se puede concluir, como era de esperar, que al aumentar el número de puntos gatillo aumentará el dolor del

paciente (coeficiente positivo) y disminuirán el número de actividades (coeficientes negativos). Por el contrario, no existe correlación entre el número de puntos gatillo y el rango de movilidad de los pacientes.

		Dolor	Actividades	Movilidad
Número de puntos gatillo	Coefficiente	0,213	-0,253	-0,151
	p-valor	0,019	0,005	0,100

Tabla 2.4: Coeficientes de correlación de Spearman entre Número de Puntos Gatillo y las variables clínicas.

Para determinar si el número de puntos gatillo afecta al dolor nocturno, se ha realizado el test de Mann-Whitney (ya que no es plausible la normalidad, véase Figura 9 del anexo) siendo este no significativo (p -valor=0,121, Figura 10 del Anexo)

Así, se han encontrado evidencias de que el número de puntos gatillo afecta al dolor y a las actividades de la vida diaria que pueden realizar. Es interesante estudiar, y es lo que se presenta a continuación, qué tipos de punto gatillo afectan a las variables clínicas. Para las variables dolor, actividades diarias y rango de movilidad se realizará un test de comparación de medias o un test no-paramétrico y en el caso de la variable dolor nocturno se obtendrán el test Chi-Cuadrado y el test exacto de Fisher para cada grupo muscular (véase Tabla 17 del Anexo)

Observamos que los puntos gatillo del grupo redondo afectan a las tres variables clínicas, mientras que la presencia de un punto gatillo en los grupos supraespinoso e infraespinoso afectan a las actividades de la vida diarias y en el pectoral al dolor.

Ningún tipo de punto gatillo influye en el dolor nocturno con el que llegan los pacientes.

Estudio de las actividades diarias a partir del resto de variables

Se plantea un modelo de regresión lineal de la variable actividades de la vida diaria (AVD) sobre el resto de variables clínicas y diagnósticas. Para la selección de las variables se utiliza el método de selección hacia adelante, obteniendo el siguiente modelo:

$$AVD = 10,617 - 3,186 * DN + 0,193 * RM - 2,841 * PGSUPRA,$$

con un valor de $R^2 = 0,29$.

Este modelo no incluye ningún tipo de punto gatillo salvo el supraespinoso, lo que concuerda con el hecho ya observado de que el grupo supraespinoso afectaba a las actividades diarias del paciente. Para validar el modelo estudiaremos la linealidad, contrastaremos la normalidad de los residuos, analizaremos la existencia de datos atípicos e influyentes y la heteroscedasticidad.

Linealidad: Comprobar la linealidad de este modelo con un test Reset es equivalente a introducir las interacciones de las variables dicotómicas del modelo (DN y PGSUPRAESPINOSO). Por tanto creamos las interacciones de estas variables con la variable RM y la interacción entre sí. El modelo que se obtiene es el siguiente (ver Figura 11 del Anexo):

$$AVD = 8,302 - 3,623 * DN * PGSUPRA + 0,189 * RM.$$

El valor de $R^2 = 0,27$ es bastante bajo, no obstante, la interpretación de los coeficientes es interesante, puesto que la variable rango de movilidad afecta al número de actividades diarias que pueden

realizar, y además la existencia de un punto gatillo en el supraespinoso en los pacientes con dolor nocturno disminuye en más de 3 puntos el número de actividades diarias que realizan.

Analizaremos a continuación el resto de las hipótesis en el modelo anterior:

Normalidad: Se realiza el test de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y obtenemos que no se rechaza la hipótesis de normalidad con un p-valor de 0,2 (ver Figura 12 del Anexo)

Datos atípicos e influyentes: Calculamos las medidas habituales para detectar la presencia de dichos datos, es decir, distancia de Cook y medidas de influencia como por ejemplo, las medidas Welsch y Kuh. Su expresión y los criterios con los cuales se determina si un dato es influyente puede encontrarse, por ejemplo, en [3]. Se observa que hay dos posibles datos influyentes: ambas son mujeres, de 52 y 51 años. La primera no puede realizar ninguna actividad diaria y la segunda dos. Al analizar el modelo sin estos datos no se detectan cambios importantes ni en la estimación ni en el valor de R^2 , por tanto no los eliminamos del modelo.

Heteroscedasticidad: Finalmente, analizamos la heteroscedasticidad con el contraste de Breuch-Pagan (véase, [8]). Este contraste consiste en analizar si alguna de las variables predictoras o externas explican la variabilidad del modelo. Para ello,

1.- Se estima el modelo inicial y a partir de los residuos (e_i) se calcula: $\hat{e}_i^2 = \frac{e_i^2}{\hat{\sigma}_{MV}^2}$

2- Se estima un modelo de regresión lineal de \hat{e}_i^2 sobre el conjunto de variables que pueden afectar a la varianza y se calcula la variabilidad explicada. Se tiene que cuando $n \rightarrow \infty$, $\frac{VE}{2} \sim \chi_k^2$. Por tanto rechazaremos la igualdad de varianzas cuando $\frac{VE}{2} > \chi_{k;1-\alpha}^2$.

Particularizando a nuestro modelo, el valor obtenido del estadístico $\frac{VE}{2} = 0,145 < \chi_{2;0,95}^2 = 5,99$. Por tanto, no rechazamos la hipótesis de igualdad de varianzas. El modelo final que se obtiene es:

$$AVD = 8,302 - 3,623 * DN * PGSUPRA + 0,189 * RM.$$

Este modelo verifica las hipótesis habituales, como se ha comprobado anteriormente y como se puede ver en la Figura 13 del Anexo, pero tiene poca capacidad predictiva por su bajo valor de R^2 .

2.6. Efectividad del tratamiento

Nos planteamos si el tratamiento ha sido efectivo, es decir, si un paciente tiene menos dolor, realiza más actividades diarias, tiene más movilidad o menos dolor nocturno al finalizar el tratamiento. También es interesante ver si ha disminuido el número de puntos gatillo y analizar qué grupos musculares han respondido bien al tratamiento. También se verá si la relación entre las variables que se veía al comienzo del tratamiento, se mantiene después.

Debido al tamaño de la muestra se puede realizar un test paramétrico de comparación de medias para muestras emparejadas, para las variables dolor, actividades diarias y rango de movilidad.

En la Tabla 18 del Anexo se observa que el dolor y el número de puntos gatillo después del tratamiento han disminuido y que las actividades de la vida diaria y el rango de movilidad han aumentado. Esto supone que estas cuatro variables han respondido positivamente al tratamiento.

Vuelve a ser interesante saber si el sexo ha influido en la respuesta de los pacientes al tratamiento. Para ello, se crean las variables diferencia de puntos gatillo, dolor, actividades de la vida diaria y rango de movilidad antes y después del tratamiento y se realiza un test de comparación de medias para muestras independientes. Se observa que los p-valores son mayores que 0.05, por tanto, el sexo no influye en la respuesta de los pacientes al tratamiento (Tabla 19 del Anexo).

Para analizar la evolución del resto de las variables (puntos gatillo en los distintos grupos musculares y dolor nocturno) se realizará el test de McNemar introducido en el apartado 1.2.3. Obsérvese que cada paciente se ha medido en cada una de las variables antes y después del tratamiento por lo que no podemos considerar que la muestra antes es independiente de los individuos observados después.

Se puede concluir (véase Tabla 2.5) que en el grupo muscular infraespinoso y en el pectoral la respuesta de los pacientes se comporta igual antes y después del tratamiento (p-valores 0,774 y 0,063 respectivamente). En los demás grupos musculares se observan mejorías significativas. Con respecto al dolor nocturno se observa, al igual que con los grupos musculares, que los pacientes han respondido correctamente al tratamiento.

Supraespinoso		Después		Sig.
Antes	NO	SI		
NO	21	0	1,22x10 ⁻⁴	
SI	14	80		

Infraespinoso		Después		Sig.
Antes	NO	SI		
NO	15	7	0,774	
SI	5	89		

Redondo		Después		Sig.
Antes	NO	SI		
NO	45	3	0,035	
SI	12	56		

Subescapular		Después		Sig.
Antes	NO	SI		
NO	20	1	0,001	
SI	14	81		

Deltoides		Después		Sig.
Antes	NO	SI		
NO	22	0	6,1x10 ⁻⁵	
SI	15	74		

Pectoral		Después		Sig.
Antes	NO	SI		
NO	58	0	0,063	
SI	5	54		

Dolor Nocturno		Después		Sig.
Antes	NO	SI		
NO	27	10	1,5x10 ⁻⁵	
SI	41	47		

Tabla 2.5: Test de McNemar.

Como se ha visto el número de puntos gatillo disminuye tanto de forma global como en cada uno de los grupos musculares (salvo el infraespinoso y el pectoral). Lo que se plantea a continuación es si, aunque un paciente continúe con algún punto gatillo, estos se han “desactivado”, en el sentido de que no producen dolor o problemas de movilidad en el paciente. Para ello se comprueba si las variables número de puntos gatillo después del tratamiento y los tipos de punto gatillo después del mismo afectan a las variables clínicas. Como se puede ver en la Tabla 2.6, los tres coeficientes son no significativos, por tanto, el número de puntos gatillo que presentan los pacientes no afectan a las tres variables clínicas. Por otro lado, si se analiza en cada grupo muscular (Tabla 20 del Anexo), se observa que ningún tipo de puntos gatillo afecta al dolor, actividades de la vida diaria, rango de movilidad o al dolor nocturno al obtenerse p-valores no significativos.

		Dolor	Actividades	Movilidad
Puntos Gatillo	Coficiente	0,108	-0,136	-0,119
	Sig.	0,258	0,155	0,212

Tabla 2.6: Correlaciones de Spearman entre el Número de Puntos Gatillo y las variables clínicas.

2.7. Conclusiones

Con respecto a las variables sociodemográficas, se ha observado que la muestra analizada está mayoritariamente formada por hombres. En cuanto a la edad, la mayor parte de los pacientes tienen entre 40 y 69 años y no suelen realizar actividad deportiva.

Estudiando las variables clínicas se observa que los pacientes acuden con dolor severo, no pudiendo realizar muchas actividades de la vida diaria, con un rango de movilidad aceptable y mayoritariamente con dolor nocturno.

Para acabar con un análisis inicial, se concluye que hay un porcentaje muy alto de pacientes con tres o más puntos gatillo, presentando más las mujeres que los hombres.

Analizando la asociación entre las variables diagnósticas, se ha observado que la presencia de punto gatillo en el grupo deltoides no influye en la presencia de puntos gatillo en el grupo supraespinoso y redondo. Por el contrario, el porcentaje de pacientes con punto gatillo en el grupo redondo es el doble dentro de los pacientes con punto gatillo en el supraespinoso que en los que no lo tienen. Además, el porcentaje de pacientes con punto gatillo en el grupo supraespinoso es 1,2 veces en las mujeres que en los hombres.

Estudiando la relación entre las variables clínicas y las diagnósticas antes del tratamiento, se ha comprobado que el dolor y las actividades de la vida diaria están influidas por el número de puntos gatillo que presentan los pacientes. También se ha observado que los puntos gatillo en el grupo redondo y en el supraespinoso son los que más afectan a las variables clínicas.

Por último, se ha estudiado si el tratamiento ha sido efectivo, obteniéndose que, el número de puntos gatillo disminuye de forma global y en cada grupo muscular (salvo en el infraespinoso y en el pectoral) y que todas las variables clínicas han mejorado. Por el contrario, se tiene que la presencia de punto gatillo en los grupos musculares después del tratamiento ya no está relacionada con las variables clínicas.

Bibliografía

- [1] Alan Agresti. *Categorical Data Analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics, 2002.
- [2] C. Bron, A. De Gast, J. Dommerholt, B. Stegenga, M. Wensing, R.A. Oostendorp. “Treatment of myofascial trigger points in patients with chronic shoulder pain: a randomized, controlled trial”. *BMC Medicine* (2011), p. 9-8.
- [3] Samprit Chatterjee, Ali S. Hadi y Bertram Price. *Regression Analysis by Example*. John Wiley and Sons, 2000.
- [4] Ronald Christensen. *Log-Linear Models*. Springer-Verlag, 1990.
- [5] Christopher Cox. “An Elementary Introduction to Maximum Likelihood Estimation for Multinomial Models: Birch’s Theorem and the Delta Method”. *The American Statistician*, vol. 38, nº4 (1984).
- [6] J.A. Cristóbal. *Inferencia estadística*. Prensas Universitarias de Zaragoza, 1995.
- [7] B.S. Everitt. *The Analysis of Contingency Tables*. Chapman & Hall, 1977.
- [8] George G. Judge, William E. Griffiths, R. Carter Hill, Helmut Lütkepohl y Tsoung-Chao Lee. *The Theory and Practise of Econometrics*. John Wiley and Sons, 1985.
- [9] S. Perez-Palomares, B. Olivan-Blazquez, A.M Arnal-Burro, et al. “Contributions of myofascial pain in diagnosis and treatment of shoulder pain. A randomized control trial”. *BMC Musculoskelet Disord* (2009), p. 24-92.

Anexo

A.1. Análisis de las variables principales

Variables sociodemográficas

EDAD			
	Frecuencia	%	% acumulado
Desde 20 hasta 29	2	1,7	1,7
Desde 30 hasta 39	10	8,3	10,1
Desde 40 hasta 49	36	29,8	40,3
Desde 50 hasta 59	31	25,6	66,4
Desde 60 hasta 69	29	24,0	90,8
Desde 70 hasta 79	9	7,4	98,3
Desde 80 hasta 89	2	1,7	100,0
Total	119	98,3	

Tabla 7: Distribución de frecuencias de la variable Edad.

EDAD	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
Media	52,8	54,1	53,64
Mediana	52,5	53	53
DT	12,4	11,1	11,5
Q1	44	46	45
Q3	63	62	63

Tabla 8: Medidas de la variable EDAD según el sexo y para el conjunto de la muestra.

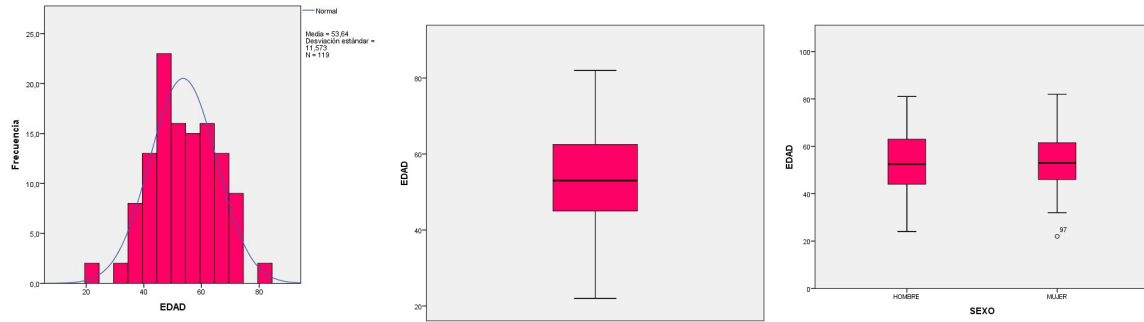


Figura 1: Histograma y diagrama de caja de la variable EDAD.

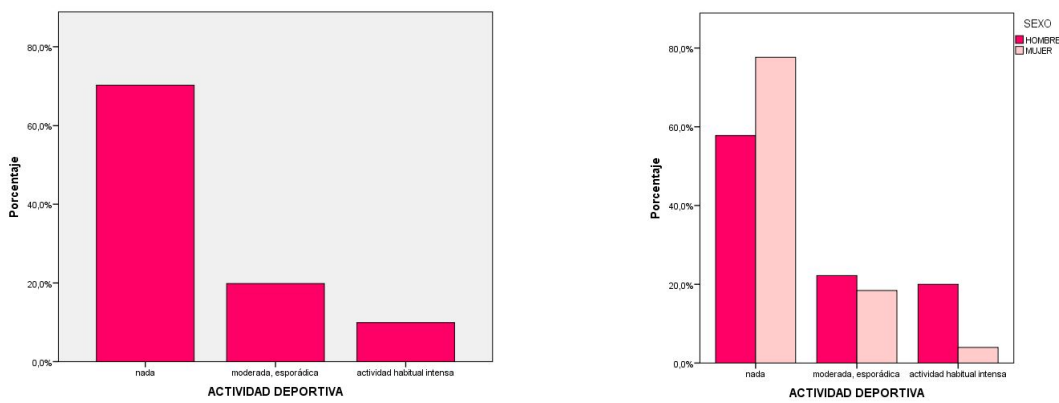


Figura 2: Diagrama de barras de la variable actividad deportiva para el conjunto de la muestra y según el sexo.

Variables clínicas

VAS				AVD				RM			
	Frec	%	% acu.		Frec	%	% acu.		Frec	%	% acu.
0	1	,8	,8	[0, 1.9]	1	,8	,8	[5, 8]	1	,8	,8
2	3	2,5	3,3	[2, 3.9]	4	3,3	4,2	[9, 12]	1	,8	1,7
3	2	1,7	5,0	[4, 5.9]	5	4,2	8,3	[13, 16]	5	4,2	5,8
4	6	5,0	9,9	[6, 7.9]	7	5,8	14,2	[17, 20]	13	10,8	16,7
5	21	17,4	27,3	[8, 9.9]	17	14,2	28,3	[21, 24]	13	10,8	27,5
6	21	17,4	44,6	[10, 11.9]	27	22,5	50,8	[25, 28]	17	14,2	41,7
7	37	30,6	75,2	[12, 13.9]	11	9,2	60,0	[29, 32]	24	20,0	61,7
8	19	15,7	90,9	[14, 15.9]	20	16,7	76,7	[33, 36]	28	23,3	85,0
9	10	8,3	99,2	[16, 17.9]	15	12,5	89,2	[37, 40]	18	15,0	100,0
10	1	,8	100,0	[18, 20]	13	10,8	100,0	Total	120	100,0	
Total	121	100,0		Total	120	100,0					

Tabla 9: Frecuencias de las variables Dolor, Actividades de la Vida Diaria y Rango de Movilidad.

Pruebas de normalidad							
SEXO	Kolmogorov-Smirnov			Shapiro-Wilk			
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.	
VAS	HOMBRE	,177	44	,001	,935	44	,016
	MUJER	,189	75	,000	,938	75	,001
AVD	HOMBRE	,118	44	,136	,969	44	,273
	MUJER	,109	75	,029	,968	75	,054
RML	HOMBRE	,162	44	,005	,935	44	,015
	MUJER	,123	75	,007	,941	75	,002

Tabla 10: Normalidad de las variables Dolor, Actividades de la Vida Diaria y Rango de Movilidad con respecto al Sexo.

Resumen de contrastes de hipótesis			
Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1 La distribución de EDAD es normal con la media 53,639 y la desviación estándar 11,57.	Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra	,168 ¹	Conserve la hipótesis nula.

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es ,05.

¹Lilliefors corregido

Figura 3: Test de normalidad de la variable Edad

	Dolor			Actividades			Movilidad		
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total
Media	6,09	6,61	6,43	11,39	12,01	11,83	29,45	29,39	29,28
Mediana	6,5	7	7	11,5	11	11	32	30	30
SD	1,974	1,497	1,692	4,741	4,525	4,601	7,132	7,3	7,314
Q1	5	6	5	8,25	9	9	24	24	24
Q3	7	8	7,5	15	16	15	35,5	36	36
p-valor Mann-Whitney	0,152			0,573			0,868		

Tabla 11: Estadísticos de las variables clínicas.

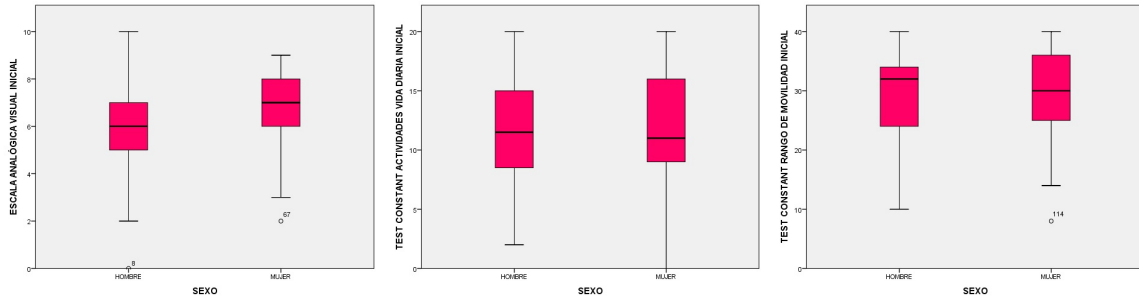


Figura 4: Diagrama de caja de Escala Analógica Visual, Actividades vida diaria y Rango Movilidad según sexo.

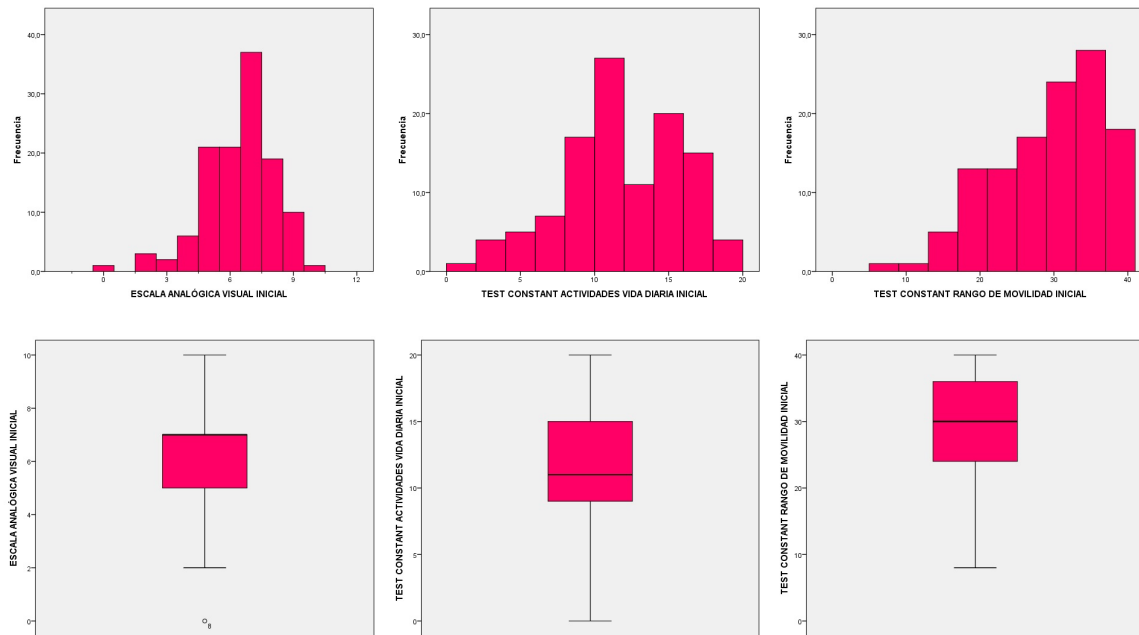


Figura 5: Representaciones gráficas de Escala analógica visual, Actividades vida diaria y Rango Movilidad.

Variables diagnósticas

	Número Puntos Gatillo		Total
	Hombres	Mujeres	
Mínimo	2	2	2
Máximo	13	14	14
Media	5,33	6,97	6,36
Mediana	5	7	6
SD	2,93	2,688	2,693
p-valor Mann-Whitney	0,001		

Tabla 12: Estadísticos de Número de Puntos Gatillo.

Nº Puntos Gatillo			
	frec.	%	% acu.
2	7	5,8	5,8
3	10	8,3	14,0
4	15	12,4	26,4
5	17	14,0	40,5
6	20	16,5	57,0
7	15	12,4	69,4
8	14	11,6	81,0
9	5	4,1	85,1
10	9	7,4	92,6
11	4	3,3	95,9
12	1	0,8	96,7
13	3	2,5	99,2
14	1	0,8	100,00

Tabla 13: Frecuencias de la variable Número de Puntos Gatillo.

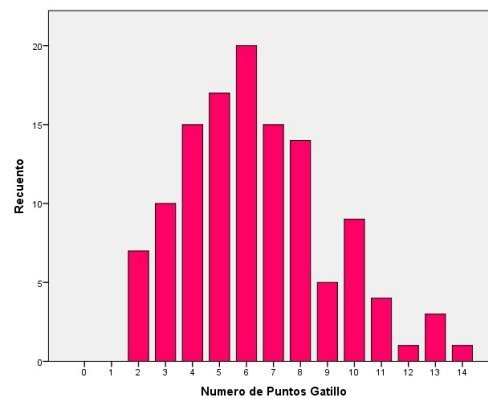


Figura 6: Diagrama de barras de la variable número de puntos gatillo.

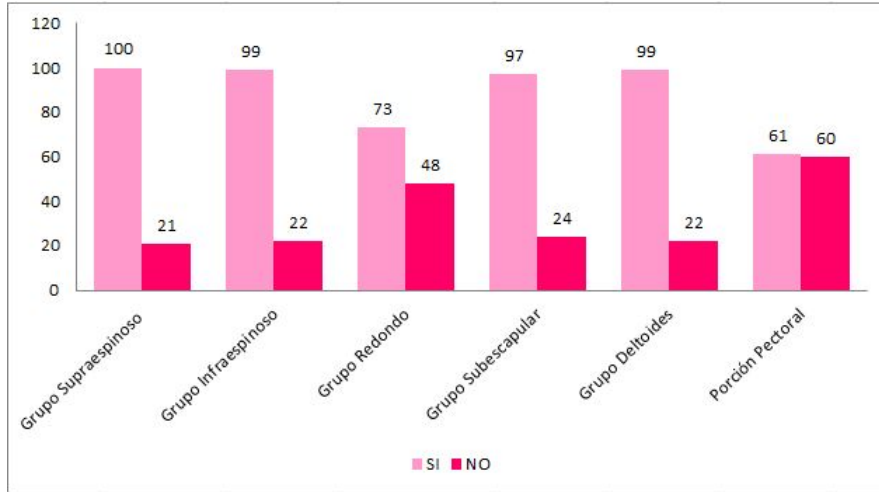


Figura 7: Prevalencia de cada tipo de punto gatillo.

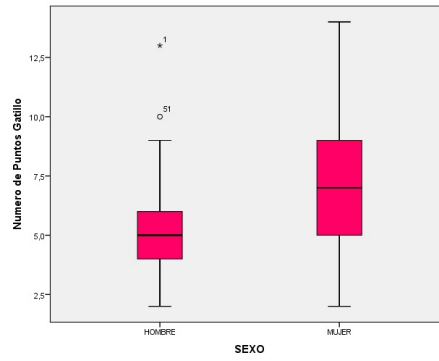


Figura 8: Diagrama de cajas de número de Puntos Gatillo según el sexo.

A.2. Asociación de las variables diagnósticas

	Q	p-valor
(0) Independencia completa	9,511	0,049
(1) Supraespinoso independiente de redondo y deltoides	7,942	0,047
(2) Redondo independiente de supraespinoso y deltoides	9,584	0,022
(3) Deltoides independiente de supraespinoso y redondo	1,999	0,573
(4) Supraespinoso y redondo independientes dado deltoides	7,938	0,019
(5) Supraespinoso y deltoides independientes dado redondo	0,258	0,879
(6) Redondo y deltoides independientes dado supraespinoso	1,975	0,373
(7) Asociación homogénea	0,018	0,893

Tabla 14: Contrastes de independencia y asociación homogénea

Resumen de los pasos					
Escalón		Effects	Chi-cuadrado	gl	Sig.
0	Clase generadora	[SRD] Supraespinoso*Redondo*Deltoides	0,000	0	,893
	Efecto suprimido	1 Supraespinoso*Redondo*Deltoides	,018	1	
1	Clase generadora	[SR] Supraespinoso*Redondo, [SD] Supraespinoso*Deltoides, [RD] Redondo*Deltoides	,018	1	,893
	Efecto suprimido	1 Supraespinoso*Redondo	7,813	1	,005
		2 Supraespinoso*Deltoides	,227	1	,633
		3 Redondo*Deltoides	2,010	1	,156
2	Clase generadora	[SR] Supraespinoso*Redondo, [RD] Redondo*Deltoides	,246	2	,884
	Efecto suprimido	1 Supraespinoso*Redondo	7,598	1	,006
		2 Redondo*Deltoides	1,795	1	,180
3	Clase generadora	[SR] Supraespinoso*Redondo, [D] Deltoides	2,041	3	,564
	Efecto suprimido	1 Supraespinoso*Redondo	7,598	1	,006
		2 Deltoides	53,000	1	,000
4	Clase generadora	[SR] Supraespinoso*Redondo, [D] Deltoides	2,041	3	,564

Tabla 15: Selección del mejor modelo de asociación entre los grupos supraespinoso, redondo y deltoides.

Resumen de los pasos						
Escalón		Effects		Chi-cuadrado	gl	Sig.
0	Clase generadora	[SRDSe]	Supra*Redondo*Deltoides*Sexo	0,000	0	
	Efecto suprimido	1	Supra*Redondo*Deltoides*Sexo	1,570	1	,210
1	Clase generadora	[SRD]	Supra*Redondo*Deltoides,	1,570	1	,210
		[SRSe]	Supra*Redondo*Sexo,			
		[SDSe]	Supra*Deltoides*Sexo			
		[RDSe]	Redondo*Deltoides*Sexo			
	Efecto suprimido	1	Supra*Redondo*Deltoides	,046	1	,831
	2	Supra*Redondo*Sexo	,190	1	,663	
	3	Supra*Deltoides*Sexo	,108	1	,742	
	4	Redondo*Deltoides*Sexo	,279	1	,597	
2	Clase generadora	[SRSe]	Supra*Redondo*Sexo,	1,616	2	,446
		[SDSe]	Supra*Deltoides*Sexo			
		[RDSe]	Redondo*Deltoides*Sexo			
	Efecto suprimido	1	Supra*Redondo*Sexo	,234	1	,628
	2	Supra*Deltoides*Sexo	,094	1	,759	
	3	Redondo*Deltoides*Sexo	,245	1	,620	
3	Clase generadora	[SRSe]	Supra*Redondo*Sexo,	1,710	3	,635
		[RDSe]	Redondo*Deltoides*Sexo			
		[SD]	Supra*Deltoides			
	Efecto suprimido	1	Supra*Redondo*Sexo	,291	1	,589
	2	Redondo*Deltoides*Sexo	,343	1	,558	
	3	Supra*Deltoides	,087	1	,768	
4	Clase generadora	[SRSe]	Supra*Redondo*Sexo,	1,797	4	,773
		[DRSe]	Redondo*Deltoides*Sexo			
	Efecto suprimido	1	Supra*Redondo*Sexo	,283	1	,595
	2	Redondo*Deltoides*Sexo	,347	1	,556	
5	Clase generadora	[RDSe]	Redondo*Deltoides*Sexo,	2,079	5	,838
		[SR]	Supra*Redondo			
		[SSe]	Supra*Sexo			
	Efecto suprimido	1	Redondo*Deltoides*Sexo	,347	1	,556
	2	Supra*Redondo	6,320	1	,012	
	3	Supra*Sexo	2,914	1	,088	
6	Clase generadora	[SR]	Supra*Redondo,	2,426	6	,877
		[SSe]	Supra*Sexo			
		[RD]	Redondo*Deltoides			
		[RSe]	Redondo*Sexo			
		[DSe]	Deltoides*Sexo			
	Efecto suprimido	1	Supra*Redondo	6,320	1	,012
	2	Supra*Sexo	2,914	1	,088	
	3	Redondo*Deltoides	2,217	1	,136	
	4	Redondo*Sexo	1,554	1	,213	
	5	Deltoides*Sexo	1,193	1	,275	

7	Clase generadora	[SR]	Supra*Redondo,	3,619	7	,822	
		[SSe]	Supra*Sexo				
		[RD]	Redondo*Deltoides				
		[RSe]	Redondo*Sexo				
	Efecto suprimido	1		Supra*Redondo	6,320	1	,012
	2		Supra*Sexo	2,914	1	,088	
	3		Redondo*Deltoides	1,795	1	,180	
	4		Redondo*Sexo	1,252	1	,263	
8	Clase generadora	[SR]	Supra*Redondo,	4,871	8	,771	
		[SSe]	Supra*Sexo				
		[RD]	Redondo*Deltoides				
	Efecto suprimido	1		Supra*Redondo	7,598	1	,006
		2		Supra*Sexo	4,192	1	,041
	3		Redondo*Deltoides	1,795	1	,180	
9	Clase generadora	[SR]	Supra*Redondo,	6,666	9	,672	
		[SSe]	Supra*Sexo				
		[D]	Deltoides				
	Efecto suprimido	1		Supraespinoso*Redondo	7,598	1	,006
		2		Supra*Sexo	4,192	1	,041
	3		Deltoides	53,000	1	,000	
10	Clase generadora	[SR]	Supra*Redondo,	6,666	9	,672	
		[SSe]	Supra*Sexo				
		[D]	Deltoides				

Tabla 16: Selección del mejor modelo de asociación entre los grupos supraespinoso, redondo y deltoides y la variable sexo.

A.3. Relación de las variables clínicas y las variables diagnósticas antes del tratamiento

		Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
		Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
NPG1	NO	,105	39	,200*	,965	39	,264
	SÍ	,143	82	,000	,942	82	,001

*. Esto es un límite inferior de la significación verdadera.

a. Corrección de significación de Lilliefors

Figura 9: Normalidad entre Número de Puntos Gatillo y Dolor Nocturno.

	Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1	La distribución de Numero de Puntos Gatillo es la misma entre las categorías de DOLOR NOCTURNO.	Prueba U de Mann-Whitney para muestras independientes	,121	Conserve la hipótesis nula.

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es ,05.

Figura 10: Test de Mann-Whitney entre Número de Puntos Gatillo y Dolor Nocturno.

Supraespinoso	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	6,57	1,59	0,006	11,31	4,7	0,008(a)	29,34	7,2	0,476	0,53	0,61
NO	5,76	2,02		14,24	3,21		29	8,05			
Infraespinoso	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	6,52	1,67	0,146	11,48	4,78	0,029	29,05	7,11	0,143	0,96	1
NO	6,05	1,76		13,36	3,36		30,32	8,24			
Redondo	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	6,79	1,57	0,002	11,13	4,43	0,011	28,01	7,65	0,011	0,36	0,44
NO	5,88	1,73		12,88	4,7		31,19	6,39			
Subescapular	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	6,54	1,54	0,203	11,84	4,55	0,337	29,52	7,03	0,320	0,11	0,14
NO	6	2,19		11,78	4,92		28,33	8,44			
Deltoides	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	6,41	1,76	0,463	11,5	4,72	0,051	29	7,6	0,244	0,58	0,8
NO	6,5	1,4		13,27	3,81		30,62	7,31			
Pectoral	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	6,69	1,67	0,039	11,82	4,98	0,99(a)	29,29	7,38	0,491	0,53	0,61
NO	6,17	1,69		11,83	4,22		29,28	7,31			

Tabla 17: Influencia de los Puntos Gatillo de cada grupo muscular en las variables clínicas. ((a)p-valor obtenido con un test paramétrico)

Estudio de las actividades diarias a partir del resto de variables

Coefficientes^a

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error estándar	Beta		
1	(Constante)	14,059	,583		24,107	,000
	DN_SUPRA	-3,985	,771	-,431	-5,166	,000
2	(Constante)	8,302	1,651		5,029	,000
	DN_SUPRA	-3,623	,739	-,392	-4,901	,000
	TEST CONSTANT			,296	3,702	,000
	RANGO DE MOVILIDAD INICIAL	,189	,051			

a. Variable dependiente: TEST CONSTANT ACTIVIDADES VIDA DIARIA INICIAL

Figura 11: Regresión lineal.

Resumen de contrastes de hipótesis

	Hipótesis nula	Prueba	Sig.	Decisión
1	La distribución de Residual es normal con la media -0,000 y la desviación estándar 3,87.	Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra	,200 ^{1,2}	Conserve la hipótesis nula.

Se muestran significaciones asintóticas. El nivel de significancia es ,05.

¹Lilliefors corregido

²Este es un límite inferior de la verdadera significancia.

Figura 12: Normalidad de los residuos no estandarizados y la desviación estandar.

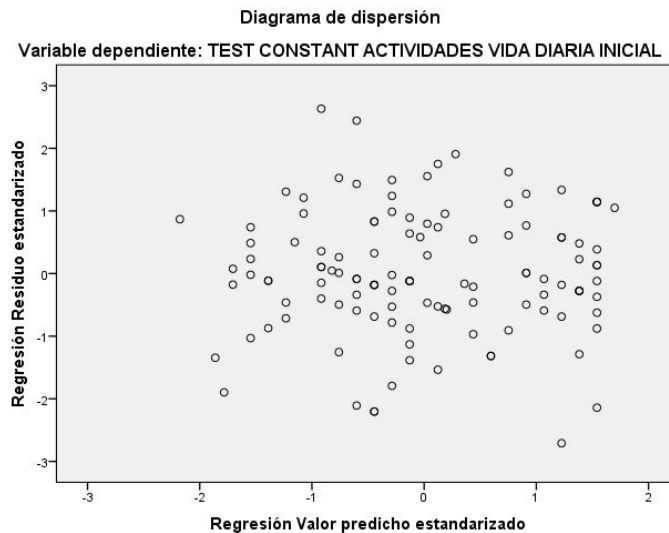


Figura 13: Diagrama de dispersión de los residuos

A.4. Efectividad del tratamiento

Prueba de muestras emparejadas					
	Antes		Después		p-valor
	Media	SD	Media	SD	
Dolor	6,43	1,692	4,17	2,227	0
Actividades	11,38	4,601	14,64	4,857	0
Movilidad	29,28	7,314	32,82	6,72	0
Puntos gatillo	6,36	2,693	5,34	2,48	0

Tabla 18: Respuesta al tratamiento de las variables clínicas y del Número de Puntos Gatillo.

	Puntos Gatillo			Dolor			Actividades			Movilidad		
	M	SD	Sig	M	SD	Sig	M	SD	Sig	M	SD	Sig
Hombre	-1,23	1,38	0,48	-2,11	3,04	0,79	3,28	6,09	0,29	2,66	7,28	0,61
Mujer	-1,43	1,58		-2,25	2,57		2,12	5,39		3,42	8,10	

Tabla 19: Media (M), desviación típica (SD) y p-valor (comparación de grupos).

Supraespinoso	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	4,12	2,18	0,438	14,07	4,87	0,020	32,94	6,54	0,379	0,088	0,066
NO	4,29	2,21		14,55	4,86		32,54	7,21			
Infraespinoso	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	4,28	2,21	0,251(a)	14,55	4,86	0,303	32,86	6,44	0,457	0,591	0,392
NO	3,65	2,21		15,05	4,94		32,60	8,11			
Redondo	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	4,27	2,15	0,242	13,97	4,93	0,066	32,17	7,38	0,298	0,321	0,212
NO	4,07	2,32		15,33	4,73		33,49	5,95			
Subescapular	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	4,13	2,18	0,392	14,57	4,90	0,419	32,52	6,94	0,215	0,259	0,179
NO	4,26	2,37		14,79	4,83		33,53	6,21			
Deltoides	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	4,36	2,08	0,320(a)	14,89	4,88	0,218	32,70	7,06	0,337	0,742	0,453
NO	3,92	2,48		14,16	4,78		32,68	6,35			
Pectoral	Dolor			Actividades			Movilidad			Dolor Nocturno	
	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	Media	DT	sig.	χ^2	Fisher
SI	4,14	2,24	0,252	14,82	4,81	0,59	32,82	6,79	0,435	0,889	0,592
NO	4,71	2,06		11,86	5,15		32,86	5,98			

Tabla 20: Influencia de puntos gatillo en las variables clínicas después del tratamiento. ((a) p-valor obtenido con un test paramétrico)