



**Universidad**  
Zaragoza

## Trabajo Fin de Máster

Tiempo *discreto vs continuo* en un modelo  
macroeconómico sencillo

Autor/es

Lucía Bolea Marcén

Director/es

Julio Sánchez Chóliz  
Gloria Jarne Jarne  
Isabel Almudí Higuera

Facultad de Economía y Empresa/ Máster en Economía  
2015

**TÍTULO:** Tiempo *discreto vs continuo* en un modelo macroeconómico sencillo

**AUTORA:** Lucía Bolea Marcén

**DIRECTORES:** Julio Sánchez Chóliz, Gloria Jarne Jarne e Isabel Almudí Higuera.

**TITULACIÓN:** Máster en Economía

## **RESUMEN**

La Gran Recesión de 2007 obligó a los economistas a revisar una gran cantidad de cuestiones que creían tener resueltas, y que la crisis puso en evidencia. Se volvió la vista al tipo de modelos usados, a los criterios de racionalidad y al horizonte temporal. En concreto hoy se está trabajando con modelos mucho más simples y contrastables, globales y si es posible que consideren los tres horizontes temporales (c/p, m/p y l/p), de forma que permitan estudiar, entre otros temas, la evolución de las fluctuaciones y ciclos económicos. Es bien conocido que las conclusiones teóricas cambian dependiendo de si se trabaja en los modelos con ecuaciones diferenciales o en diferencias.

En este trabajo se hace uso de un modelo macroeconómico relativamente sencillo analizado inicialmente en Almudí *et al.* (2015) que presenta una cierta consistencia temporal ya que considera los tres horizontes temporales y que incorpora políticas de inversión, monetarias y fiscales. Nos centraremos principalmente en los resultados obtenidos tras su conversión a tiempo continuo y en las consecuencias que esto tiene en el análisis del comportamiento de los ciclos que presenta.

## ABSTRACT

The Great Recession of 2007 forced economists to review a lot of issues they thought have them resolved, and that the crisis revealed. Models used, the criteria of rationality and time horizon were rejected. Specifically today, it is working with much simpler, verifiable and global models and it is possible to consider the three time horizons (c/p, m/p y l/p), so for the study, among other things, the evolution of fluctuations and economic cycles. It is well known that the theoretical conclusions change depending on whether you are working on models with differential or difference equations.

In this work we are using a relatively simple macroeconomic model originally analyzed in Almudi *et al.* (2015). It presents a certain temporal consistency because it considers the three time horizons and incorporates investment policies, monetary and fiscal. We will focus mainly on the results obtained after conversion to continuous time and the consequences this has on behavior analysis of cycles presented.

## ÍNDICE

Introducción.....	1
1. Contexto económico: la crisis y el debate teórico formal.....	4
1.1. La crisis de 2007-?.....	4
1.2. Una breve aproximación sobre el debate teórico-formal suscitado a raíz de la crisis .....	6
2. Un modelo macroeconómico sencillo.....	9
2.1. Descripción formal del modelo .....	9
2.1.1. La posición de Krugman.....	11
2.1.2. La política monetaria sin la curva LM.....	13
2.2. Principales resultados del modelo .....	14
2.2.1. Equilibrios.....	14
2.2.2. Estabilidad .....	15
3. El problema del tiempo en los modelos formales: <i>discreto vs continuo</i> .....	17
3.1. Ecuaciones lineales de orden 1 con coeficientes constantes .....	17
3.2. Ecuaciones no lineales de orden 1 .....	22
3.3. Sistemas lineales 2x2 de orden 1 con coeficientes constantes.....	27
3.4. Sistemas no lineales 2x2 de orden 1 .....	29
3.5. Reflexión general. <i>Discreto vs continuo</i> .....	34
4. El tratamiento del problema del tiempo aplicado al modelo .....	38
4.1. El modelo en tiempo continuo .....	38
4.2. Equilibrio y estabilidad. <i>Discreto vs Continuo</i> .....	39
5. Conclusiones.....	44
6. Bibliografía .....	46

## INTRODUCCIÓN

La Gran Recesión de 2007 obligó a los economistas a revisar una gran cantidad de cuestiones que creían tener resueltas, y que la crisis puso en evidencia. Se volvió la vista al tipo de modelos usados, a los criterios de racionalidad y al horizonte temporal, lo que llevó a algunos investigadores a trabajar con modelos mucho más simples y contrastables, globales y que incluyen los tres horizontes temporales (c/p, m/p y l/p), lo que permite estudiar, entre otros temas, la evolución de las fluctuaciones y ciclos económicos.

En este trabajo se hace uso de un modelo macroeconómico relativamente sencillo analizado inicialmente en Almudi *et al.* (2015) que presenta una cierta consistencia temporal ya que considera los tres horizontes temporales y que incorpora políticas de inversión, monetarias y fiscales. Partiendo de él, en este Trabajo Fin de Máster nos centraremos principalmente en los resultados obtenidos tras su conversión a tiempo continuo y en las consecuencias que esto tiene en el análisis del comportamiento de los ciclos que presenta.

En consecuencia, los objetivos guía de este trabajo son: 1) Estudiar en qué medida un modelo sencillo, que incluye políticas de inversión, monetarias y fiscales y que aborda las tres dimensiones temporales, c/p, m/p y l/p, genera resultados distintos de los obtenidos cuando analizamos modelos parciales; 2) Analizar hasta qué punto dichos resultados son consecuencia del tratamiento que se hace del tiempo. Esto es un primer paso de una investigación sobre la crisis actual y sobre su impacto en nuestra visión macroeconómica, investigación que me gustaría hacer en el futuro.

En concreto, las preguntas que tratamos de contestar en este trabajo son:

- ¿Cómo quedaría caracterizado el estado estacionario en un modelo que incorpora instrumentos de política económica del c/p, m/p y l/p? ¿Qué interpretación económica podemos darle? ¿Hay un equilibrio o múltiples? ¿Es estable(s)?
- ¿Hasta qué punto los resultados obtenidos dependen de si el modelo se formula en tiempo discreto o continuo?

Para analizar estas cuestiones tomaremos como modelo de referencia, como hemos señalado antes, el analizado en Almudi *et al.* (2015). Éste, es un modelo de crecimiento exógeno, sin microfundamentos, impulsado por la demanda, en el que hay desempleo e inflación y la política monetaria viene endógenamente determinada por una regla de Taylor y en el que recientemente se han incorporado políticas fiscales.

He elegido este modelo (usaré su versión sin las recientes incorporaciones) porque considero que es un modelo relativamente manejable, con una cierta consistencia temporal ya que considera el  $c/p$ , el  $m/p$  y el  $l/p$  al mismo tiempo, y permite estudiar el origen de algunas inestabilidades de la economía. Como se verá en el apartado 2 del presente trabajo, aunque es un modelo de crecimiento exógeno, incorpora cuestiones de demanda en línea con Krugman (2009). Asimismo, no incluye un mercado de dinero explícito sino que la política monetaria viene determinada por una regla de Taylor, tal y como propone Romer (2000). Ambos extremos se explican en los apartados correspondientes (ver, 2.1.1 y 2.1.2).

Los resultados que obtienen los autores ponen de manifiesto que la consideración de los tres horizontes temporales es esencial, incluso en los modelos macroeconómicos más sencillos, ya que las conclusiones del análisis pueden cambiar radicalmente. Asimismo, descubren que el paso del medio al largo plazo, provoca que las características del equilibrio estacionario se modifiquen, de manera que en el medio plazo puede parecer que la economía tiende a un equilibrio estable, cuando en realidad se encuentra sobre un equilibrio que tiende a explotar en el largo plazo debido a su gran inestabilidad.

La relevancia de este resultado de cara a posibles interpretaciones de los periodos de aparente estabilidad económica hace que nos preguntemos, ¿hasta qué punto dichos resultados dependen del tratamiento que se hace del tiempo en el modelo? Los autores plantean el modelo en tiempo discreto, pero, ¿se mantienen los resultados cuando el modelo se formula en tiempo continuo? En caso de que cambie la caracterización del estado estacionario o la estabilidad de los equilibrios, ¿A qué se debe?, ¿cómo debe cambiar nuestra interpretación económica?

Para contestar a estas preguntas, en primer lugar describo la problemática matemática que subyace al tratamiento de los sistemas dinámicos en tiempo discreto *vs* continuo. Seguidamente, planteo el sistema de ecuaciones del modelo descrito en Almudi *et al.* (2015) en tiempo continuo y obtengo que, a pesar de que se llega al

mismo sistema de ecuaciones de estado estacionario que en el caso discreto, los resultados cambian, pero también se mantienen aspectos fundamentales. En tiempo continuo, la consideración del horizonte temporal no es tan relevante, ya que el modelo es, en general, más estable y suele converger al equilibrio con más rapidez y facilidad que en el caso discreto.

Como se puede apreciar, a lo largo de todo el trabajo se ha hecho un esfuerzo por relacionar los principales resultados con la problemática de la crisis actual y las principales conclusiones que se derivan de política fiscal y monetaria.

El trabajo se organiza como sigue, en la primera parte se presenta el contexto actual y la crisis, después se describe el modelo de Almudi *et al.* (2015) justificando las cuestiones de demanda y la utilización de la regla de Taylor, a continuación se exponen los principales resultados obtenidos por los autores.

En la segunda parte, se analiza el problema del tratamiento del tiempo, estudiando las ecuaciones diferenciales y en diferencias para diferentes órdenes. Asimismo, se trata la cuestión de la linealidad o no linealidad, para apreciar con mayor rigor las diferencias que surgen en los distintos casos. Y en el último apartado, se realiza una revisión general del análisis *discreto vs continuo*.

En la tercera parte, se analiza hasta qué punto los resultados obtenidos en el modelo presentado por Almudi *et al.* (2015) dependen del tratamiento del tiempo. Para ello, se realiza la conversión del modelo a tiempo continuo y se presentan los principales resultados obtenidos del análisis del modelo.

Finalmente, se sintetizan las conclusiones.

# 1. CONTEXTO ECONÓMICO: LA CRISIS Y EL DEBATE TEÓRICO FORMAL

## 1.1. LA CRISIS DE 2007-?

La crisis financiera internacional que comenzó en 2007 y que representa el colapso más importante desde la crisis de 1929, provocó graves desajustes en las variables macroeconómicas, poniendo en evidencia las actuaciones de los bancos centrales a nivel internacional.

Todo empezó mediados de 2007, en concreto en agosto, cuando el mercado de hipotecas de alto riesgo (hipotecas *subprime*) de los EE.UU. se colapsó, y como consecuencia, surgieron serias turbulencias en el funcionamiento interno del mismo, llevando a su ruptura. Junto con esto, uno de los principales bancos de inversión estadounidenses, *Lehman Brothers*, comenzó a tener dificultades financieras, y poco a poco, fue contagiando al resto de entidades, hasta que en septiembre de 2008 se declaró en quiebra, dando lugar al comienzo de lo que ha venido a llamarse la Gran Recesión (2007-?).

La crisis fue mucho más allá de Estados Unidos, afectando a Islandia, Irlanda y otros países de la Europa continental. Conforme el pánico aumentaba, los mercados de crédito se congelaban y los activos inundaban el mercado causando un círculo vicioso de disponibilidad menguante de crédito<sup>1</sup>. De manera que todos estos problemas llevaron a que en 2009 estallara, en la zona euro, la crisis de deuda soberana como consecuencia de los altos niveles de endeudamiento registrados por el sector público<sup>2</sup> y de la llamada “fragmentación financiera”<sup>3</sup>. Un primer chispazo de dicha crisis podemos situarlo en la economía griega, donde los datos de déficit y de deuda pública eran alarmantes, llegando a alcanzar esta última el 115% del PIB, cuando los criterios de convergencia de Maastricht establecen que la deuda no debe superar el 60% del PIB. Por Grecia y por otros países comenzaron a surgir tensiones en los mercados financieros acerca de la viabilidad de pago de las deudas soberanas y los inversores empezaron a exigir una mayor rentabilidad para comprar su deuda. Ello provocó que en mayo de 2010, la prima

---

<sup>1</sup> Véase Wolf (2015)

<sup>2</sup> Aclarar que, como es bien sabido, la crisis de la deuda soberana fue consecuencia (y no causa) del sobreendeudamiento privado (fundamentalmente del sector financiero). De hecho, en países como España, el SBCC había sido sistemáticamente negativo durante más de una década antes de que estallase la crisis de 2007.

<sup>3</sup> Se produce como consecuencia de una ruptura de los mercados financieros que da lugar a distintos costes de financiación entre los países.



de riesgo griega se situase por encima de los 900 puntos básicos, una cifra extremadamente alarmante en los mercados.

Las dudas sobre la solvencia de Grecia se fueron extendiendo a otros países periféricos, como España, Irlanda o Portugal, generando una reacción en cadena que acabó afectando a los canales de transmisión de la política monetaria y anuló sus efectos sobre la economía real. Los acontecimientos sucedidos, provocaron que los principales bancos centrales, como la Reserva Federal y el BCE se vieran obligados a tomar una serie de medidas convencionales y no convencionales con el objetivo de controlar la economía y evitar la caída en la “trampa de la liquidez”<sup>4</sup>.

Las actuaciones que han realizado las autoridades monetarias para intentar evitar la caída de los principales países desarrollados, han sido muchas pero no suficientes para evitar que la crisis acabase afectando a la economía real. Podemos resumir en tres los efectos sobre la economía real: el efecto riqueza, el acelerador financiero y el desapalancamiento. En primer lugar, la caída continuada del precio de los activos desde 2008, ha generado que la riqueza financiera de los agentes privados de la economía se vea mermada, y como consecuencia se ha producido una caída del consumo y la inversión. En segundo lugar, debido al comportamiento procíclico del mercado financiero y a la existencia de información asimétrica entre los agentes, se ha generado una cierta desconfianza por parte de los bancos a la hora de prestar ya que no conocen la verdadera situación de sus prestatarios, lo que ha provocado que las garantías exigidas sean más elevadas. Y en tercer lugar, se encuentra el efecto “desapalancamiento”, que es la reducción necesaria en los niveles de consumo e inversión, como consecuencia de que los agentes económicos dedican esa parte de la renta a pagar parte de la deuda acumulada.

Una vez que la crisis acabó llegando a la economía real, los gobiernos de los diferentes países comenzaron a actuar para apoyar a sus respectivos sistemas financieros, coincidiendo con la bajada de tipos de interés cercanos a cero de los principales bancos centrales. Estas medidas, permitieron que dichos bancos, como la Reserva Federal, ofreciesen a sus entidades dinero “gratis” desde 2009, actuando como prestamistas de última instancia e impidiendo que los pánicos bancarios creasen una

---

<sup>4</sup> Es un término muy utilizado en la economía keynesiana que se refiere al hecho de que las inyecciones de liquidez que realiza el Banco Central a los bancos privados, no surten efectos en la economía real. El dinero inyectado se retiene y ni se presta ni se invierte.

crisis de liquidez sistémica. Destacar que, a pesar de que las medidas de política monetaria consiguieron estabilizar el sistema, evitando la quiebra de España o Italia, dicha política con tipos cercanos al 0% se quedó (y sigue estando) sin margen de maniobra para estimular la demanda. Al mismo tiempo que se exigía a los países del sur de Europa medidas fiscales contractivas que deprimían también por ese lado la demanda agregada. En este escenario cabe preguntarse cuál era el estado de la teoría al comienzo de la crisis y si algo ha cambiado a raíz de la misma.

## **1.2. UNA BREVE APROXIMACIÓN SOBRE EL DEBATE TEÓRICO-FORMAL SUSCITADO A RAÍZ DE LA CRISIS.**

Tras un siglo de debates, revoluciones y contrarrevoluciones en la teoría macroeconómica, el comienzo del siglo XXI dio lugar a tres patrones aparentemente claros sobre política macroeconómica<sup>5</sup>:

- 1) De acuerdo con el pensamiento dominante en la disciplina, la herramienta fundamental de la política macroeconómica es la política monetaria, que tiene que ser manejada por los bancos centrales de manera independiente, rigurosa y transparente. El control a corto plazo de los tipos de interés y de las operaciones de mercado abierto tiene que estar centrado en el mantenimiento de una tasa de inflación estable, predecible y reducida (en torno al 2%). Estos objetivos eran considerados condiciones cuasi suficientes para la estabilidad macroeconómica.
- 2) Las políticas de flexibilización y la eliminación de los fallos de mercado (información asimétrica, competencia imperfecta, externalidades) permitirían a los mercados asignar los recursos de manera eficiente y harían posible que el sistema económico de las economías avanzadas (considerado esencialmente estable) tendiera hacia su equilibrio natural. De esta manera, las variables reales per cápita crecerían a la tasa a la que creciera el progreso técnico y, una vez fueran corregidas las imperfecciones y rigideces relevantes, la tasa de desempleo natural se reduciría. La consecuencia inmediata es que los ciclos económicos no eran muy relevantes y eran cuestiones del pasado o de errores en política económica.

---

<sup>5</sup> Un tratamiento extenso se abarca en Blanchard *et al.* (2013).

3) Usar la política fiscal como una política estabilizadora no era recomendable.

Esta visión (expuesta de manera muy simplificada) del consenso que existía entre los economistas antes de la crisis en temas de política macroeconómica, en parte, se debía a la creencia de que la Ciencia económica había alcanzado un alto nivel científico y que era capaz de interpretar y controlar la realidad económica, control al que ayudaba el uso de instrumentos sofisticados como los “DSGE models” (Blanchard, 2009)<sup>6</sup>. Por otra parte, los patrones de política mencionados anteriormente (provenientes de dichos modelos y de los avances en la Ciencia económica), parecían estar respaldados por los hechos. Por este motivo, al final del siglo XX – un siglo que había visto dos guerras mundiales, la Gran Depresión, varias recesiones de larga duración, un periodo de estanflación y la desinflación de Volcker – el periodo de 1986-2006 fue visto como un gran éxito en términos de gestión macroeconómica. Estas dos décadas de Gran Moderación estuvieron caracterizadas por la disminución de la volatilidad de las series de inflación y de PIB, niveles de inflación moderados y estables, tasas de crecimiento menores que las esperadas, pero mantenidas a lo largo del tiempo, y niveles aceptables de desempleo en las economías más avanzadas (Bernanke, 2013).

Este contexto, favorecido por el consenso teórico existente y apoyado por las políticas económicas supuestamente eficientes, se vino abajo con el estallido de la Gran Recesión de 2007. La Gran Moderación fue, abrupta e intensamente, interrumpida por la crisis mundial más profunda vivida en los últimos 60 años<sup>7</sup>. La intensa y prolongada recesión desde 2007 ha provocado el surgimiento de un debate en Macroeconomía respecto a la capacidad de los modelos estocásticos dinámicos para explicar la crisis y restablecer el crecimiento y el empleo (Solow, 2008; Stiglitz, 2011) y sobre los fundamentos que los justificaban. Además, desde el estallido del “gigante financiero” han ido surgiendo dudas sobre la validez de las convicciones auto-complacientes del periodo anterior a la crisis en materia de política macroeconómica. Por ejemplo, los trabajos de Romer (2012) o Blanchard y Johnson (2013) advierten que la Gran Recesión nos ha obligado a revisar las prácticas y los mecanismos de política macroeconómica que creíamos entender antes del estallido de la crisis financiera, pero que ahora parece

---

<sup>6</sup> Modelos de este tipo, que se diferencian en el horizonte temporal de los fenómenos involucrados, son (por ejemplo) los modelos DSGE de fluctuaciones de corto/medio plazo en Clarida *et al.* (2000) o Woodford (2003); o los modelos dinámicos de equilibrio estocástico de crecimiento de largo plazo en Aghion y Howitt (1998).

<sup>7</sup> Véase Krugman (2011); Blanchard *et al.* (2013).

que no entendíamos tan bien. Tal vez, como señala el trabajo de Blanchard (2009), algunas de las respuestas a las nuevas preguntas a las que nos enfrentamos actualmente, se puedan conocer mediante el estudio de los “poco conocidos” mecanismos de medio plazo, que vinculan el corto con el largo plazo en los modelos macroeconómicos<sup>8</sup>. A continuación se presenta un modelo en esta dirección.

---

<sup>8</sup> Detallado en Fatas-Villafranca *et al.* (2012).

## 2. UN MODELO MACROECONÓMICO SENCILLO

Como consecuencia de los debates surgidos en macroeconomía a raíz del estallido de la crisis financiera, comenzaron a aparecer una gran cantidad de preguntas sin respuesta, que hasta ese momento se creían saber. Para dar un pequeño paso en la solución a dichas cuestiones, en este TFM nos apoyaremos en el modelo tomado de Almudi *et al.*, 2015.

### 2.1. DESCRIPCIÓN FORMAL DEL MODELO

Antes de entrar en más detalle, vamos a realizar una breve descripción del modelo, especificando la forma que adopta cada una de sus funciones principales:

En primer lugar, el sector productivo produce de acuerdo a una función de producción Cobb-Douglas, donde las empresas utilizan toda su capacidad para satisfacer la demanda y ajustan el nivel de empleo a sus necesidades de producción.

$$Y_t = K_t^\mu (A_t L_t)^{1-\mu}, \quad \mu \in (0,1) \quad (1)$$

siendo  $Y_t$  la producción,  $K_t$  el stock de capital y  $L_t$  el nivel de empleo en cada momento del tiempo  $t$ . En el modelo se supone que hay progreso técnico exógeno determinado por el aumento constante de la eficiencia de la mano de obra ( $A_t L_t$ ), y que la población crece a tasa constante. La suma de ambos factores definen una tasa de crecimiento constante  $\alpha$ . En el modelo se utilizarán variables normalizadas (indicadas con minúsculas) obtenidas dividiendo las distintas variables por  $A_t L_t$ .

El equilibrio entre oferta y demanda se recoge en la siguiente ecuación, que muestra que la demanda está constituida por tres partes, la primera es el consumo privado, la segunda la inversión y la tercera el gasto público:

$$y_{t+1} = \frac{b}{1+\alpha} y_t + \frac{1}{1+\alpha} [\beta - \theta(R_t - \pi_t)] y_t + g \quad (2)$$

siendo  $0 < b < 1$  la propensión marginal a consumir.

La inflación ( $\pi_t$ ) evoluciona endógenamente a partir de la dinámica proporcionada por una curva de Phillips compatible con la hipótesis de la tasa natural:

$$\pi_{t+1} = -\gamma + \rho \left( \frac{y_t}{k_t^\mu} \right)^{\frac{1}{1-\mu}} + \pi_t, \quad \rho > \gamma > 0 \quad (3)$$

La dinámica de la producción y la inflación condicionan la formulación (endógena) de la política monetaria. Se supone que dicha política (Banco Central) determina el tipo de interés nominal ( $R_t$ ) de acuerdo con una regla de Taylor:

$$R_{t+1} = R_t + a_\pi (\pi_t - \pi^*) + a_y (y_t - y^*), \quad a_\pi > a_y > 0 \quad (4)$$

donde  $\pi^*$  y  $y^*$  son los objetivos de inflación y de renta nacional en cualquier momento del tiempo.

Esto, a su vez, afecta a la inversión ( $i$ ) mediante la modificación de las tasas de interés ( $R_t$ ):

$$i_{t+1} = \frac{1}{1+\alpha} [\beta - \theta(R_t - \pi_t)] y_t, \quad 0 < \beta < 1, \theta > 0 \quad (5)$$

Estando el stock de capital ( $k$ ) dado por:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+\alpha} (k_t + i_t) \quad (6)$$

Por tanto, el modelo recoge un proceso de acumulación de capital, partiendo de una inversión endógena, una ecuación de equilibrio en el mercado de bienes, una curva de Phillips compatible con la hipótesis de la tasa natural y una regla de política monetaria. El modelo es descrito por el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\left. \begin{aligned} k_{t+1} &= \frac{1}{1+\alpha} (k_t + i_t) \\ y_{t+1} &= \frac{b}{1+\alpha} y_t + \frac{1}{1+\alpha} [\beta - \theta(R_t - \pi_t)] y_t + g \\ i_{t+1} &= \frac{1}{1+\alpha} [\beta - \theta(R_t - \pi_t)] y_t \\ \pi_{t+1} &= -\gamma + \rho \left( \frac{y_t}{k_t^\mu} \right)^{\frac{1}{1-\mu}} + \pi_t \\ R_{t+1} &= R_t + a_\pi (\pi_t - \pi^*) + a_y (y_t - y^*) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Las condiciones de los posibles equilibrios o estados estacionarios están dadas por:

$$\left. \begin{aligned}
k &= \frac{1}{1+\alpha}(k+i) \\
y &= \frac{b}{1+\alpha}y + \frac{1}{1+\alpha}[\beta - \theta(R - \pi)]y + g \\
i &= \frac{1}{1+\alpha}[\beta - \theta(R - \pi)]y \\
\pi &= -\gamma + \rho\left(\frac{y}{k^\mu}\right)^{\frac{1}{1-\mu}} + \pi \\
R &= R + a_\pi(\pi - \pi^*) + a_y(y - y^*)
\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

A pesar de que se trata de un modelo de crecimiento exógeno, la incorporación de la demanda en un modelo de largo plazo, se justifica apelando a Krugman (2009). Por otra parte, el modelo no presenta un mercado de dinero explícito, sino que la política monetaria viene dada por la ecuación (4), donde se aprecia claramente que queda determinada por una regla de Taylor, y no a partir de una curva LM. Para justificar este punto los autores se apoyan en Romer (2000).

### 2.1.1. La posición de Krugman

De acuerdo con Krugman (2009), en un artículo ciertamente incendiario, es necesario considerar la demanda en los modelos de medio y largo plazo. Según este autor, con la llegada de la crisis financiera, todo lo que los economistas pensaban que habían logrado alcanzar en el campo de la macroeconomía se vino abajo. Pocos fueron los que vieron con anticipación la crisis en la que nos hemos visto inmersos en los últimos años, pero sin duda, lo más importante fue la ceguera de la profesión a la posibilidad de fallos catastróficos en una economía de mercado.

Paul Krugman asegura que lo que ocurrió es que los economistas como grupo, confundieron la belleza, el ropaje de las matemáticas de aspecto impresionante, con la verdad, es decir, con lo que estaba ocurriendo realmente. El deseo de abarcarlo todo, junto con la visión idealizada de una economía en la que interactúan individuos racionales en mercados perfectos, llevó al fracaso de la profesión.

La ideología más asentada del siglo XIX era la de la economía “neoclásica”, que asegura que debemos tener fe en el sistema de mercado. Sin embargo, esta fe fue destrozada por la Gran Depresión de 1929. Por este motivo, la mayoría de los economistas de la época se dirigieron a las ideas de John Maynard Keynes para explicar de alguna forma lo que había sucedido y dar una solución a las depresiones futuras. Lo

que buscaban las ideas keynesianas, al contrario de lo que muchos se imaginaban, no era acabar con el capitalismo sino arreglarlo, cuestionándose la idea de si las economías de libre mercado pueden funcionar sin un “cuidador” y expresando particular desprecio por los mercados financieros, según él, dominados por la especulación a corto plazo.

A pesar de los esfuerzos realizados por la corriente keynesiana, la historia de la economía durante el último medio siglo pasado es, en gran medida, la historia de un retroceso en el keynesianismo y la vuelta al neoclasicismo, apoyada principalmente por el monetarismo de Milton Friedman.

Es sobre todo a partir de los años setenta del siglo XX cuando ambas corrientes se confrontan intentando interpretar la realidad económica. Por un lado, como es bien conocido, la corriente neoclásica defendía el libre mercado como mecanismo esencial para que una economía funcione, y afirmaba que las recesiones no eran problemas de demanda insuficiente porque los precios siempre se mueven con la oferta y la demanda. Por otro lado, un grupo de economistas, los llamados keynesianos, se opusieron a estas ideas y encontraron la evidencia de que las recesiones son en realidad insuficiencias de demanda, cuestión de demasiado peso para rechazar. Sin embargo, a pesar de sus diferencias en la forma de pensar, ni unos ni otros fueron capaces de predecir lo que se venía encima, el estallido de una burbuja inmobiliaria que haría desestabilizarse a la teoría macroeconómica.

¿Cómo es posible que nadie se diera cuenta?, se preguntan muchos. La mejor explicación es que las tasas de interés, inusualmente bajas, acompañadas de una falsa paz sobre el campo de la macroeconomía, la época de la Gran Moderación (1986-2006), hacían tapar en parte lo que se venía encima. Además de esto, los grandes políticos y economistas estaban convencidos de que no podía existir una burbuja de la vivienda ya que los mercados de vivienda son menos líquidos, pero la gente es muy cuidadosa cuando compra su casa porque es la mayor inversión que van a realizar, y por eso deben mirar a su alrededor con mucho cuidado y comparar precios. Con esta explicación parecía que nunca podía suceder lo que ocurrió en 2007, pero estaban tan equivocados que ahora que la burbuja ha estallado, ha sido revelado el grado de riesgo real de activos supuestamente seguros, y el sistema financiero ha demostrado su fragilidad.

Como consecuencia de los acontecimientos ocurridos en los últimos años, las corrientes de pensamiento tienen que cambiar, y según el economista Paul Krugman, deben “*volver a abrazar a Keynes*”. En definitiva, los economistas tienen que hacer



frente a la inconveniente realidad de que los mercados financieros están muy lejos de la perfección, que están sujetos a perturbaciones y además, tienen que admitir que la economía keynesiana sigue siendo probablemente el mejor marco que tenemos para dar sentido a las recesiones y depresiones. Por ello, parece conveniente incluir la demanda agregada en los modelos de medio y largo plazo.

### 2.1.2. Una nueva política monetaria con regla de Taylor

A pesar de que el modelo tradicionalmente utilizado en la práctica sea el IS-LM, donde se representa la demanda agregada de la economía combinando el mercado de bienes (IS) y el mercado de dinero (LM), en el presente trabajo se va a hacer uso de otro tipo de modelo donde la curva que representa el mercado monetario no es la LM, sino que viene dada por la regla de Taylor. En el artículo de Romer (2000) se exponen varios motivos por los que es necesario dicho cambio. Una de las razones es que en el modelo IS-LM la política monetaria tiene como objetivo mover la oferta monetaria (M), sin embargo, el objetivo de los Bancos Centrales no es la oferta monetaria, sino los tipos de interés reales. Otra de las razones, relacionada con la primera, es que el modelo IS-LM no está representado en tipos de interés reales. Y la tercera razón se debe a que lo interesante es poder analizar los efectos de una determinada política (de oferta o de demanda) sobre la tasa de inflación y no sobre el nivel de precios.

Debido a esto, en su artículo, Romer desarrolla un modelo alternativo llamado IS-MP-IA, donde la curva IS se mantiene como en el modelo básico, la que cambia es la LM que pasa a llamarse MP (política monetaria) y a definirse como una función en la que el tipo de interés real depende exclusiva y positivamente de la inflación esperada:  $r = r(\pi)$ , siendo estable a c/p (gráficamente horizontal). Por tanto, la demanda agregada se construye a partir de las curvas IS-MP, relacionando el output con la inflación. Por otra parte, para definir la oferta agregada parte de dos hipótesis, la primera que los precios reaccionan muy lentamente a variaciones en el producto y, la segunda, que la inflación solo aumenta (o disminuye) cuando el producto es mayor (o menor) que el producto de equilibrio.

En definitiva, tenemos que a partir de las curvas IS-MP se representa la demanda agregada de la economía, que nos permite ver cómo afectan en el total de la economía (output, tipo de interés real e inflación) las políticas fiscales (representadas por aumentos o disminuciones del gasto público) y políticas monetarias (basadas en

aumentos o disminuciones del tipo de interés real). Esta demanda agregada se complementa con una oferta agregada cuyos precios crecen tan lentamente que, siempre y cuando la renta no se desvíe del equilibrio, no varían en el corto plazo.

## 2.2. PRINCIPALES RESULTADOS DEL MODELO

### 2.2.1. Equilibrios

Partiendo de la definición de equilibrio y de las ecuaciones (8) que los definen, se trata de encontrar el número de soluciones que presenta (unicidad o multiplicidad de estados estacionarios). Para ello, en Almudi *et al.* (2015) se usa una función auxiliar  $h(k)$  que indica el nivel de ahorro normalizado en la situación natural de la economía, donde  $k$  es el stock de capital de equilibrio,  $k\alpha$  la inversión en el equilibrio y  $g$  el gasto público:

$$h(k) = Tk^\mu = k\alpha + g, \text{ con } T = \left(1 - \frac{b}{1 + \alpha}\right) \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1-\mu} \quad (9)$$

Se prueba en Almudi *et al.* (2015) que dicha función es cóncava, que tiene una pendiente infinita en el origen y que decrece conforme avanza hacia infinito tendiendo a ser horizontal. Estas propiedades dan lugar al gráfico siguiente:

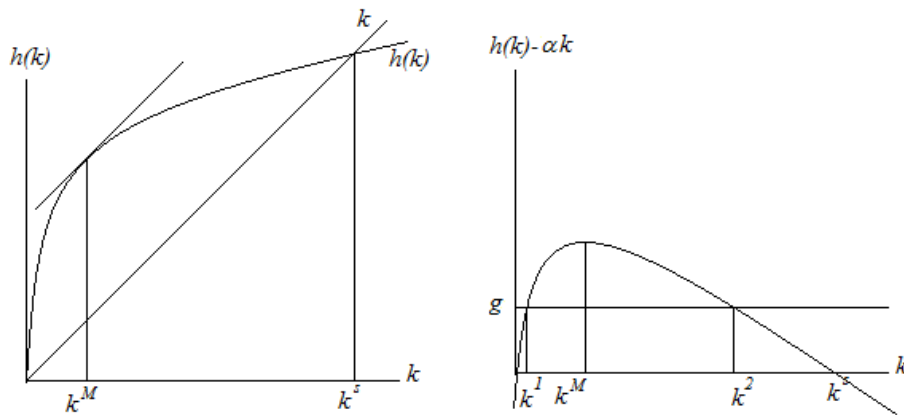


Figura 2.1. Existencia y multiplicidad de estados estacionarios

Las condiciones de la ecuación (9), como puede verse en el gráfico, permiten ver que existen dos posibles “ $k$ ” de equilibrio. El resto de variables en equilibrio tienen la siguiente expresión:

$$\left. \begin{aligned}
& \left(1 - \frac{b}{1 + \alpha}\right) \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1-\mu} k^\mu = \alpha k + g \\
& y = \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1-\mu} k^\mu \\
& i = \alpha k \\
& \pi = \pi^* - \frac{a_y}{a_\pi} \left[ \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1-\mu} k^\mu - y^* \right] \\
& R = \pi^* - \frac{a_y}{a_\pi} \left[ \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1-\mu} k^\mu - y^* \right] + \frac{1}{\theta} \left[ \beta - \alpha(1 + \alpha)k^{1-\mu} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{\mu-1} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Analizando el comportamiento del modelo en el equilibrio se extraen varias conclusiones. Primero, resaltar que, la existencia de equilibrios está directamente ligada con el valor del gasto público, por tanto, dependiendo del nivel de gasto se tiene:

- Puede haber dos posibles estados estacionarios “ $k$ ” que serían  $k^1 < k^M < k^2$ , para cada valor del gasto público  $g$ , en general.
- Puede ocurrir que solamente exista uno,  $k^M$ , cuando el gasto público alcanza el mayor valor admisible en el modelo.
- Puede suceder que si el gasto público es suficientemente elevado, no exista ningún equilibrio.

Nótese que estos resultados entran en contradicción con un resultado de la macroeconomía estándar, la importancia que tiene la política fiscal (en este caso representada por  $g$ ) para la existencia del equilibrio estacionario, y su influencia por tanto, en el largo plazo.

### 2.2.2. Estabilidad

Después de establecer el comportamiento de las variables en el estado estacionario, hace falta analizar su estabilidad. Para ello, una condición que asegura la estabilidad (local) del punto de equilibrio es que los valores propios de la ecuación característica de la matriz jacobiana tengan un módulo por debajo de uno. Si uno de ellos tiene módulo mayor que la unidad, es motivo suficiente para que el estado estacionario sea inestable. Su aplicación lleva en el artículo citado a los siguientes resultados:

- Para los equilibrios  $k^l < k^M < k^2$  se establece que el menor de ellos dos será inestable, aunque puede existir al menos una senda estable que converja a este equilibrio, ya que existe un valor propio que es menor que  $\frac{1}{1+\alpha}$ .
- Para los equilibrios  $k > k^M$ , hay valores de los parámetros que aseguran que el equilibrio es asintóticamente estable. No obstante, el modelo no permite afirmar que siempre exista este tipo de estabilidad, ya que en muchos casos algunos de los valores propios del jacobiano tienen un módulo mayor que la unidad. Además, si el valor del gasto público ( $g$ ) es cercano o tiende a cero, el equilibrio será inestable. En este caso la inestabilidad revela la necesidad de que el consumo, público o privado, mantenga unos niveles mínimos. No obstante, también en estos equilibrios existen sendas estables aunque sean inestables, al igual que ocurría con los equilibrios con  $k$  menores.

En Almudi *et al.* (2015) se prueba también otro hecho muy relevante en relación con la estabilidad. Cuando la regla de estabilización de Taylor tiene sus coeficientes muy grandes (la reactividad de la política de ajuste es muy intensa), la política fiscal vuelve inestable a la economía. Aún en el caso de estabilidad asintótica, esta puede perderse si los coeficientes de reacción a la inflación y a la renta son muy elevados. Esto confirma la ya comentada contradicción con la macroeconomía estándar.

Finalmente, las simulaciones matemáticas del modelo permiten ver un resultado bastante sorprendente, asociado con el hecho de que los puntos de inestabilidad tienen siempre sendas estables. Las simulaciones (que podemos identificar de cara a la interpretación con el devenir real del modelo) pueden presentar aparente estabilidad durante largos periodos. Sin embargo, esta estabilidad permanente puede cambiar radicalmente volviéndose oscilante explosiva y no recuperándose la situación anterior. Si esto explica situaciones como la pasada Gran Moderación es una cuestión abierta.

Estos son los principales resultados obtenidos por Almudi *et al.* (2015), pero ¿hasta qué punto se mantienen dichos resultados cuándo modelamos el tiempo de otra manera?, en concreto, ¿cuándo usamos tiempo continuo en lugar de discreto? Para dar respuesta a la pregunta, en primer lugar abordaremos la problemática del tiempo en los modelos formales.

### **3. EL PROBLEMA DEL TIEMPO EN LOS MODELOS FORMALES: *DISCRETO VS CONTINUO***

Las ecuaciones diferenciales y en diferencias son esenciales para el estudio de temas relacionados con diversas materias, como la Física, la Biología o la Economía, cuando la dimensión temporal es relevante (análisis dinámico). Cuando consideramos el tiempo como una variable continua, aparecen las ecuaciones diferenciales, que relacionan una o varias variables independientes, una función de dicha o dichas variables y las derivadas sucesivas de esta función hasta un determinado orden. Y cuando estamos en tiempo discreto, se utilizan las ecuaciones en diferencias finitas, que relacionan una variable, una función de dicha variable y diferencias sucesivas de esta función.

La consideración del tiempo como una variable continua o discreta es un tema relevante puesto que los resultados obtenidos en el análisis del modelo pueden ser diferentes según la opción tomada. En general, la modelización dinámica en tiempo discreto da lugar a comportamientos más variados que la modelización en tiempo continuo, como se puede apreciar por ejemplo, con la ecuación logística en tiempo discreto o continuo que veremos más adelante.

En este apartado haremos una breve descripción, que no pretende ser rigurosa, de los modelos dinámicos en tiempo continuo y discreto, centrandó la atención en el cálculo de los puntos de equilibrio o estados estacionarios, en el análisis de su estabilidad y en los diferentes comportamientos de las trayectorias solución. Para mostrar los resultados, se presentan simulaciones de los modelos considerados con el software Wolfram Mathematica 7.0.

Todo lo que se expone a continuación, puede verse con más detalle en Fernández, Vázquez y Vegas (2003) y en Gandolfo (2010).

#### **3.1. ECUACIONES LINEALES DE ORDEN 1 CON COEFICIENTES CONSTANTES**

Una ecuación diferencial de orden 1,  $\dot{x} = f(x)$ , es lineal si la función  $f$  es lineal (análogamente en caso discreto,  $x_{t+1} = f(x_t)$ ).

### 3.1.1. Caso continuo

En el caso a tratar, la ecuación será la siguiente:

$$\dot{x} = ax + b \quad \text{donde } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (11)$$

Al ser una ecuación diferencial lineal, la resolución de la misma suele ser sencilla y permite encontrar fórmulas que dan explícitamente todas sus soluciones. Además, este tipo de ecuaciones son importantes tanto por sí mismas como por la aproximación que permiten realizar a las ecuaciones no lineales mediante el desarrollo de Taylor de orden 1 de la función no lineal. Pero dicho desarrollo se verá más adelante.

Una vez planteada la ecuación, se procede a su correspondiente resolución cuantitativa siguiendo la técnica expuesta en Jarne, Pérez-Grasa y Minguillón (2001). La solución general es de la forma:

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$  ; donde  $x_h(t)$  es la solución general de la ecuación homogénea asociada,  $\dot{x} = ax$  , y  $x_p(t)$  es una solución particular de la ecuación completa (11).

Cálculo de  $x_h(t)$  :

La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea,  $\dot{x} = ax \Leftrightarrow \dot{x} - ax = 0$  , es  $\lambda - a = 0$  cuya solución es  $\lambda = a$  , luego:  $x_h(t) = Ce^{at}$  donde  $C \in \mathbb{R}$  es una constante arbitraria.

Cálculo de  $x_p(t)$  :

Se propone como solución particular  $x_p(t) = A$  . Sustituyendo en la ecuación  $\dot{x} = ax + b$  , al ser  $\dot{x}_p = 0$  , queda  $0 = aA + b$  , de donde al ser  $a \neq 0$  , se obtiene que

$$x_p(t) = A = \frac{-b}{a} .$$

Por tanto, la solución general de la ecuación completa (11) es:

$$x(t) = Ce^{at} + \left( \frac{-b}{a} \right)$$

Si se especifica a priori el valor que ha de tener  $x(t)$  en un instante inicial  $t=0$ , entonces queda determinada una única solución de la ecuación, es decir, la única que satisface la condición inicial. Así, suponiendo que  $x(0)=x_0$  se tiene:

$$x_0 = C - \frac{b}{a} \rightarrow C = x_0 - \left(\frac{-b}{a}\right) \rightarrow x(t) = \left[ x_0 - \left(\frac{-b}{a}\right) \right] e^{at} + \left(\frac{-b}{a}\right) \quad (12)$$

Es importante señalar que la solución particular obtenida  $x_p(t) = \frac{-b}{a}$  es una solución de equilibrio o estado estacionario, ya que si inicialmente se parte de ese valor y no hay ninguna perturbación externa, se sigue tomando ese valor indefinidamente. Así, para calcular los estados estacionarios o puntos de equilibrio de la ecuación (11) se ha de imponer  $\dot{x} = 0$  obteniéndose  $x^e = \frac{-b}{a}$  al ser  $a \neq 0$ .

En este sentido  $x_h(t) = \left[ x_0 - \left(\frac{-b}{a}\right) \right] e^{at}$  representa las desviaciones de la trayectoria (12) respecto del equilibrio ( $x^e$ ). Se observa que el comportamiento en el tiempo de dichas desviaciones depende del signo que tome el parámetro  $a$ . Por tanto se verifica que:

- Si  $a < 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x_h(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^e \Leftrightarrow x^e$  es un equilibrio asintóticamente estable.
- Si  $a > 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x_h(t) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \pm\infty \Leftrightarrow x^e$  es un equilibrio inestable (explosivo).

En las siguientes figuras se aprecia el comportamiento de la trayectoria solución (12) dependiendo del valor del parámetro  $a$ . Si éste es negativo, la trayectoria de la función converge hacia el equilibrio, pero si es positivo, se aprecia cómo la trayectoria se aparta del equilibrio y no tiende a estabilizarse.

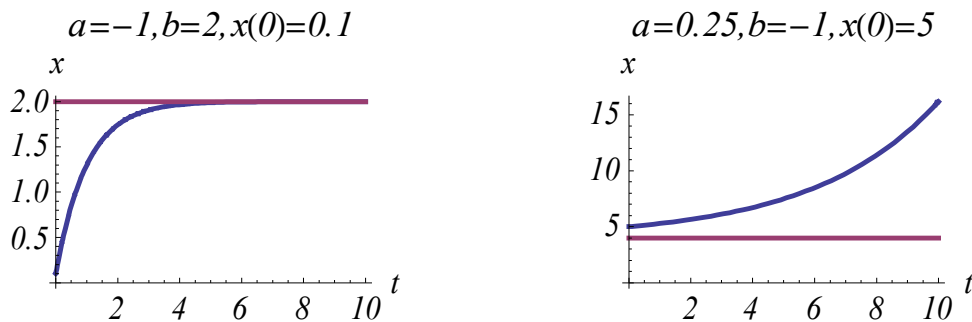


Figura 3.1. Distintos comportamientos de la solución de una ecuación diferencial lineal de orden 1

Para algunas ecuaciones diferenciales, en concreto cuando la ecuación es no lineal, no siempre será posible obtener su solución como una función algebraica. De manera que será necesario recurrir a otros instrumentos que permitan obtener información sobre el comportamiento de las soluciones de la ecuación sin necesidad de calcularlas. Esto es lo que se conoce como análisis cualitativo y consiste esencialmente en calcular los puntos de equilibrio y en realizar un análisis de la estabilidad de los mismos, así como en la obtención de valores particulares de la solución y de representaciones aproximadas.

### 3.1.2. Caso discreto

Se considera la siguiente ecuación en diferencias finitas lineal de orden 1:

$$x_{t+1} = ax_t + b, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0, 1 \quad (13)$$

En primer lugar, se realiza el análisis cuantitativo de la ecuación, para encontrar la trayectoria temporal que sea solución de la ecuación. De nuevo, la solución general es de la forma:  $x_t = x_t^h + x_t^p$ , donde  $x_t^h$  es la solución general de la ecuación homogénea asociada,  $x_{t+1} = ax_t$ , y  $x_t^p$  es una solución particular de la ecuación completa.

Siguiendo la teoría expuesta en Jarne, Pérez-Grasa y Minguillón, 2001, y respetando el mismo esquema que en el caso continuo nos queda:

Cálculo de  $x_t^h$ :

La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea  $x_{t+1} = ax_t \Leftrightarrow x_{t+1} - ax_t = 0$ , es  $\lambda - a = 0$  cuya solución es  $\lambda = a$ ; nos queda:  $x_t^h = Ca^t$  donde  $C \in \mathbb{R}$  es una constante arbitraria.

Cálculo de  $x_t^p$ :

Se propone como solución particular  $x_{t+1}^p = A$ . Sustituyendo en la ecuación  $x_{t+1} = ax_t + b$ , al ser  $x_{t+1}^p = A$ , queda  $A - aA = b$ , de donde se obtiene  $x_t^p = A = \frac{b}{1-a}$ .

La solución general de la ecuación completa es:

$$x_t = Ca^t + \left( \frac{b}{1-a} \right)$$



Nuevamente si se supone a priori el valor de la función en el momento inicial  $t=0$ , siendo este  $x(0) = x_0$ , obtenemos:

$$x_0 = C + \frac{b}{1-a} \rightarrow C = x_0 - \frac{b}{1-a} \rightarrow x_t = \left( x_0 - \frac{b}{1-a} \right) a^t + \frac{b}{1-a} \quad (14)$$

Hay que tener en cuenta que la solución particular obtenida  $x_t^p = \frac{b}{1-a}$  es una solución de equilibrio porque si inicialmente se parte de ese valor y no hay ninguna perturbación externa, la solución seguirá tomando siempre dicho valor. Por tanto, para calcular los estados estacionarios de la ecuación (13) se impone que  $x_{t+1} = x_t = x^e$ , obteniéndose que  $x^e = \frac{b}{1-a}$ , siendo  $a \neq 0, 1$ .

Siguiendo el mismo esquema que en el caso anterior, las desviaciones respecto del equilibrio de la trayectoria (14) vienen representadas por  $x_t^h = \left[ x(0) - \frac{b}{1-a} \right] a^t$ . Se comprueba que:

- El equilibrio o estado estacionario  $x^e$  de la ecuación es asintóticamente estable  $\Leftrightarrow |a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a < 1$ . Se distinguen dos casos:
  - La convergencia hacia el equilibrio  $x^e$  será monótona si:  $0 < a < 1$
  - La convergencia hacia el equilibrio  $x^e$  será fluctuante si:  $-1 < a < 0$
- El equilibrio ( $x^e$ ) es inestable (explosivo)  $\Leftrightarrow$  El módulo de  $a$  es mayor que la unidad:  $|a| > 1 \Leftrightarrow a > 1$  ó  $a < -1$ . De nuevo, se distinguen dos casos:
  - La divergencia será monótona si:  $a > 1$
  - La divergencia será fluctuante si:  $a < -1$

En las siguientes figuras observamos los diferentes comportamientos de las soluciones gráficamente:

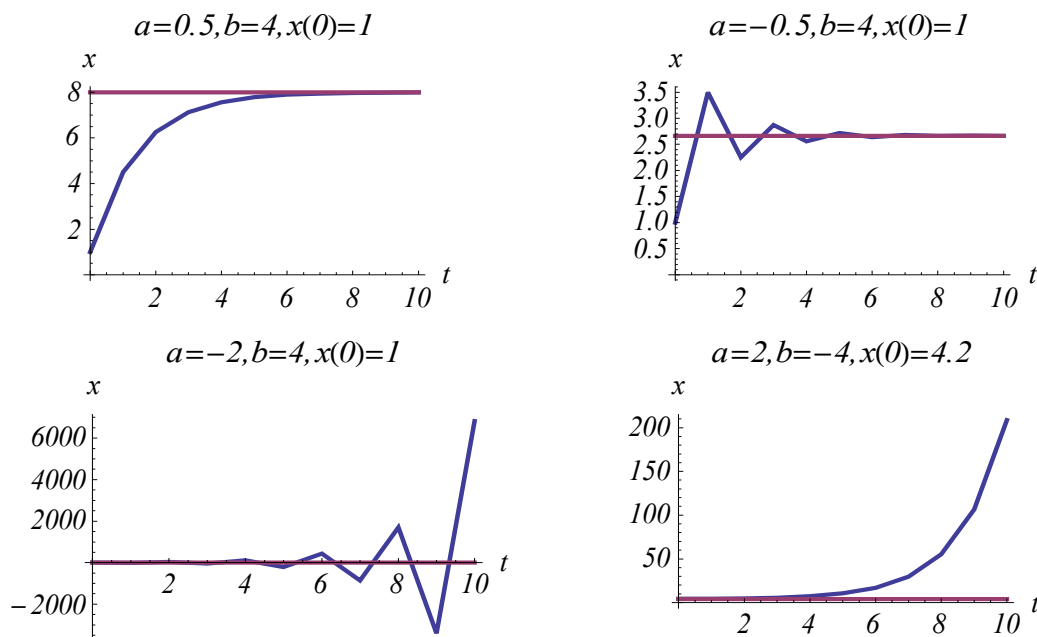


Figura 3.2. Distintos comportamientos de una ecuación en diferencias lineal de orden 1

Considerando simplemente las ecuaciones más sencillas, cuyas soluciones se han representado gráficamente en las figuras 3.1 y 3.2, se puede comprobar cómo el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones en diferencias es mucho más diverso que el de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, y permitirá realizar estudios más elaborados.

### 3.2. ECUACIONES NO LINEALES DE ORDEN 1

Como se ha señalado anteriormente, en ocasiones es difícil disponer de una fórmula que represente la solución de una ecuación diferencial o en diferencias y por eso, el estudio cualitativo de las soluciones a partir de la propia ecuación resulta de gran interés. Este hecho se manifiesta con claridad en el campo de la no linealidad. En este apartado, se van a utilizar ecuaciones de la forma:  $\dot{x} = f(x)$  en el caso continuo; y  $x_{t+1} = f(x_t)$  en el caso discreto, donde  $f$  es una función no lineal.<sup>9</sup>

En todos los apartados se seguirá el mismo esquema, se determinarán los puntos de equilibrio, y seguidamente, se analizará la estabilidad local de dichos puntos mediante la linealización de la función  $f$  no lineal en un entorno del correspondiente punto de equilibrio.

<sup>9</sup> En todos los casos consideraremos ecuaciones autónomas, porque la ley que rige la evolución de la magnitud representada por  $x(t)$  es independiente, autónoma respecto al tiempo.

### 3.2.1. Caso continuo

Se considera la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = f(x) \tag{15}$$

Para obtener los puntos de equilibrio o estados estacionarios de la ecuación, se calculan las soluciones de la ecuación  $f(x) = 0$ . Supongamos que  $x^e$  es una solución.

El segundo paso consiste en estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio, pero al tratarse de sistemas no lineales, dicha estabilidad será solo local y no global como en el caso anterior de linealidad. Para realizar el estudio el método más usual es la linealización de la función en un entorno de  $x^e$ , siempre que sea posible, mediante la aproximación del polinomio de Taylor de la función que define (15).

$$f(x) = f(x^e) + f'(x^e)(x - x^e) + \dots = f'(x^e)(x - x^e) + \dots$$

Nos quedamos solamente con el polinomio de grado 1, despreciando los demás términos de mayor grado. Siempre que  $f'(x^e) \neq 0$ , el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación dada, será semejante, en el entorno de  $x^e$ , al de las soluciones de la ecuación lineal:  $\dot{x} = f'(x^e)(x - x^e)$ . Aplicando lo visto para la ecuación (11),  $[a = f'(x^e)]$ , obtenemos:

- $f'(x^e)$  es negativa  $\Rightarrow x^e$  es localmente asintóticamente estable.
- $f'(x^e)$  es positiva  $\Rightarrow x^e$  es inestable (explosivo).
- En el caso de que  $f'(x^e) = 0$ , la linealización no da información del carácter del punto de equilibrio  $x^e$ . En este caso se dice que  $x^e$  es un punto de equilibrio no hiperbólico.

#### Aplicación a la ecuación logística

Una ecuación diferencial no lineal muy utilizada en muchos campos (dinámica de poblaciones, ciclo de vida de un producto, ondas largas,...) es la ecuación logística, cuya expresión más sencilla es<sup>10</sup>:

$$\dot{x} = rx(1 - x), \quad r > 0 \tag{16}$$

---

<sup>10</sup> En Fernández, Vázquez y Vegas (2003), se puede ver una descripción detallada de la aplicación de esta ecuación a la dinámica de poblaciones.

Se obtienen dos puntos de equilibrio, simplemente igualando a cero la derivada respecto del tiempo:  $\dot{x} = 0 \rightarrow rx(1-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Una vez establecidos dichos puntos, lo siguiente es estudiar la estabilidad de los mismos realizando la linealización de la función a través de la aproximación del polinomio de Taylor:  $\dot{x} = f'(x^e)(x - x^e)$ , siendo:

$$f'(x) = r - 2rx$$

Calculamos la derivada en cada uno de los puntos de equilibrio de la función para estudiar su estabilidad local (en un entorno del mismo):

- $f'(0) = r > 0 \Rightarrow x = 0$  es un equilibrio inestable (explosivo).
- $f'(1) = -r < 0 \Rightarrow x = 1$  es localmente asintóticamente estable.

El comportamiento de las soluciones de la ecuación (16) se puede ver en la siguiente figura, donde se muestran dos evoluciones diferentes que siguen las trayectorias de la ecuación dependiendo del valor que tome la condición inicial  $x_0$ :

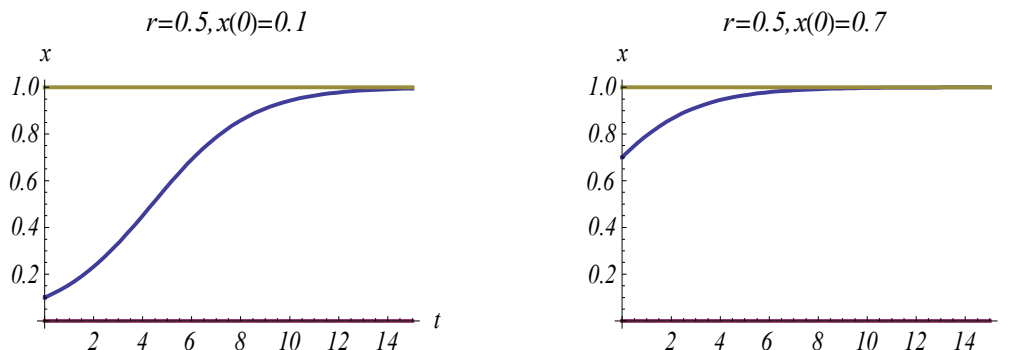


Figura 3.3. Distintas soluciones de la ecuación logística en el caso continuo.

### 2.2.2. Caso discreto

Se considera la siguiente ecuación:

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{17}$$

Para calcular los puntos de equilibrio de la ecuación, se impone la siguiente condición:

$$x^e = f(x^e) \text{ , siendo } x^e \text{ un punto fijo de la función } f.$$

De nuevo, se linealiza la función para realizar el correspondiente estudio de estabilidad, mediante el polinomio de Taylor, en un entorno de  $x^e$ :

$$f(x) \approx f(x^e) + f'(x^e)(x - x^e) = x^e + f'(x^e)(x - x^e) \rightarrow \\ \rightarrow x_{t+1} = f'(x^e)x_t + (1 - f'(x^e))x^e$$

El comportamiento de las soluciones de la ecuación (17) con condiciones iniciales suficientemente próximas a  $x^e$  será cualitativamente similar al correspondiente a las soluciones de la ecuación lineal  $x_{t+1} = f'(x^e)x_t + (1 - f'(x^e))x^e$ .

Por tanto se verifica:

- Si  $|f'(x^e)| < 1 \Leftrightarrow -1 < f'(x^e) < 1$ ,  $x^e$  es localmente asintóticamente estable. Se distinguen dos casos:
  - La convergencia al equilibrio será monótona si  $0 < f'(x^e) < 1$
  - La convergencia será fluctuante si  $-1 < f'(x^e) < 0$
- Si  $|f'(x^e)| > 1$ ,  $x^e$  es inestable (explosivo). Se distinguen dos casos:
  - La divergencia será monótona si  $f'(x^e) > 1$
  - La divergencia será fluctuante si  $f'(x^e) < -1$
- Si  $|f'(x^e)| = 1$ , la linealización no proporciona información y se dice que  $x^e$  es un punto de equilibrio no hiperbólico.

### Aplicación a la ecuación logística

Consideramos la ecuación logística en tiempo discreto:

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t), \quad r > 0 \tag{18}$$

Se observa que tiene dos puntos de equilibrio, simplemente imponiendo  $x_{t+1} = x_t = x^e$ :

$$x = rx(1 - x) \rightarrow \begin{cases} x^e = 0 \\ x^e = 1 - \frac{1}{r} \end{cases}$$

Para realizar el análisis de estabilidad se calcula:

$$f'(x) = r - 2rx$$

Y se valora la derivada en cada uno de los puntos de equilibrio obtenidos:

- $f'(0) = r > 0 \rightarrow x^e = 0$  será localmente asintóticamente estable cuando  $r < 1$  y las soluciones con condición inicial suficientemente cercana convergerán hacia el equilibrio de manera monótona. Si  $r > 1$ , el equilibrio  $x^e = 0$  será inestable y las trayectorias solución se alejarán de él.
- $f'\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r \rightarrow x^e = 1 - \frac{1}{r}$  será localmente asintóticamente estable cuando:  $|2 - r| < 1 \Leftrightarrow 1 < r < 3$ , y será inestable cuando la derivada, en términos absolutos, sea mayor que la unidad, es decir,  $r > 3$  o  $r < 1$ . Solamente se tratará de un punto de equilibrio no hiperbólico cuando  $r=1$  ó  $r=3$ .

En la siguiente figura se observan los diferentes comportamientos de las soluciones de (18) conforme aumenta el valor del parámetro  $r$ :

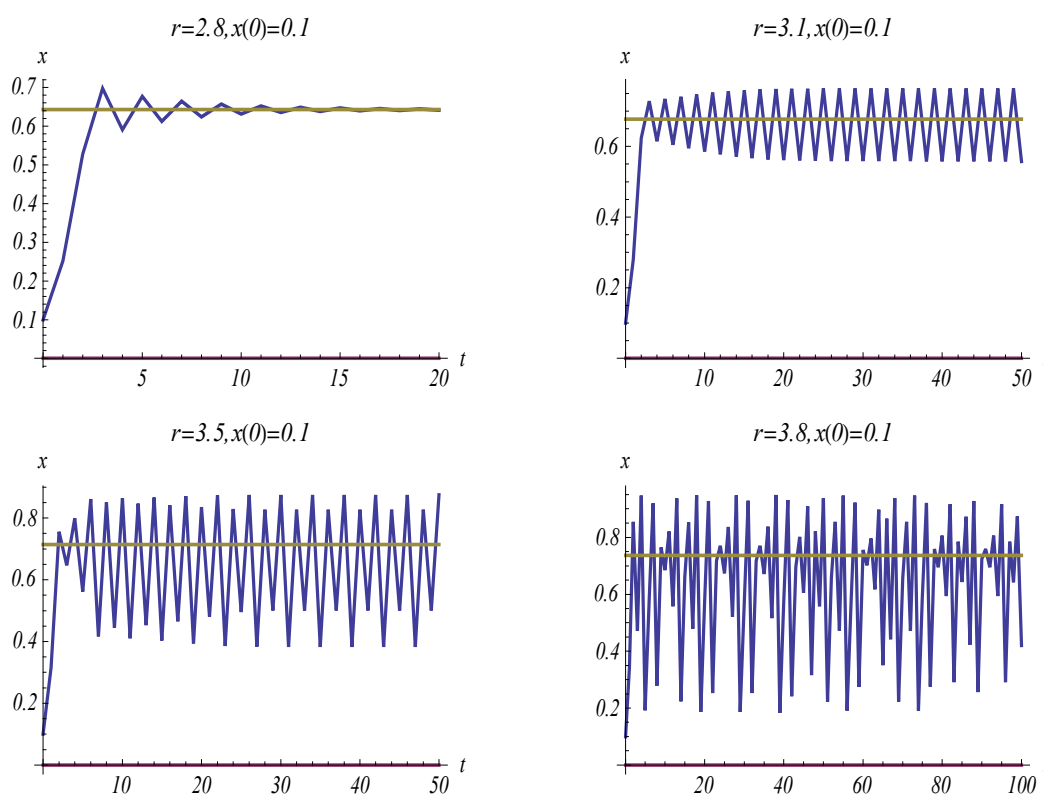


Figura 3.4. Distintas soluciones de la ecuación logística en el caso discreto

Como se puede ver, el estado estacionario  $x^e = 1 - \frac{1}{r}$ , pierde su estabilidad cuando  $r$  se hace mayor que 3, apareciendo un 2-ciclo. Si  $r$  sigue aumentando, aparecen

ciclos de periodo mayor e incluso comportamientos caóticos. Un análisis en profundidad de las diferentes dinámicas generadas por la ecuación logística en tiempo discreto, se pueden ver en Gandolfo (2010).

### 3.3. SISTEMAS LINEALES 2x2 DE ORDEN 1 CON COEFICIENTES CONSTANTES

En este apartado, se trata de estudiar sistemas dinámicos lineales bidimensionales, tanto en el caso continuo como en el discreto. Para ello, se seguirá el mismo enfoque cualitativo que en el caso anterior, calculando primero los puntos de equilibrio, y seguidamente, estudiando la estabilidad dinámica de dichos puntos.

#### 3.3.1. Caso continuo

Se parte del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Una vez planteado, lo escribimos en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B \begin{cases} B = 0 & \text{sistema homogéneo} \\ B \neq 0 & \text{sistema completo} \end{cases}$$

El primer paso es calcular los puntos de equilibrio del sistema, y para ello partimos del sistema de ecuaciones lineal:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 0 = A\bar{x} + B \rightarrow \bar{x}^e = A^{-1}(-B) = -A^{-1}B; \quad \text{siempre y cuando } \exists A^{-1}$$

Las desviaciones respecto del equilibrio ( $\bar{x}^e$ ) se construyen con los valores propios ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) y los vectores propios ( $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ ) de  $A$ , de manera que si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ <sup>11</sup>:

$$\bar{x}_h(t) = C_1\bar{v}_1e^{\lambda_1 t} + C_2\bar{v}_2e^{\lambda_2 t}$$

Por tanto, el punto de equilibrio  $\bar{x}^e$  será asintóticamente estable cuando  $\bar{x}_h \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, 2$ .

<sup>11</sup> Para considerar todos los casos posibles ver Fernández, Vázquez y Vegas (2003).

Para llegar a ello, tenemos que calcular los autovalores de la matriz de coeficientes  $A$ , es decir, las raíces de su ecuación característica:

$$|A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + b\lambda + c = 0 \rightarrow \begin{cases} c = \text{Det}(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ b = -\text{Traza } A = -(a_{11} + a_{22}) \end{cases}$$

que son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{\text{Traza } A \pm \sqrt{(\text{Traza } A)^2 - 4\text{Det } A}}{2}$$

Sin embargo, existen condiciones que permiten asegurar la estabilidad asintótica de  $x^e$ , en función de la *Traza*  $A$  y el *Det*  $A$ , sin necesidad de calcular los valores propios. Son las llamadas condiciones de estabilidad de Routh-Hurwitz:

$$\bar{x}^e \text{ es asintóticamente estable} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} b = -\text{Traza } A > 0 &\Leftrightarrow \text{Traza } A < 0 \\ c = \text{Det } A > 0 &\Leftrightarrow \text{Det } A > 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Dependiendo de cómo sean los valores propios de la matriz  $A$ , el equilibrio  $x^e$  se puede comportar de las siguientes formas (ver Fernández, Vázquez y Vegas (2003)):

- Si los autovalores son reales de distinto signo:  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ ,  $x^e$  es un **punto de silla**, ya que hay trayectorias que se acercan a  $x^e$  cuando  $t \rightarrow \infty$  mientras otras se alejan de él.
- Si los autovalores son reales distintos del mismo signo,  $x^e$  es un **nodo**. Si son negativos:  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  se trata de un **nodo estable** (todas las trayectorias tienden a  $x^e$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ). Si los autovalores son positivos:  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ,  $x^e$  es un **nodo inestable** (todas las trayectorias se alejan de  $x^e$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ).
- Si los autovalores de  $A$  son un par de números complejos conjugados  $a \pm ib$ ,  $b > 0$ ,  $x^e$  es un **foco** o **punto espiral**. Las trayectorias son curvas espirales que tienden a  $x^e$  cuando  $t \rightarrow \infty$  si  $a < 0$  (**foco estable**) y se alejan de él si  $a > 0$  (**foco inestable**).
- Si los autovalores son un par de números imaginarios conjugados  $\pm ib$ ,  $b > 0$ ,  $x^e$  es un **centro** (las trayectorias oscilan con amplitud constante alrededor de  $x^e$ ).



### 3.3.2. Caso discreto

Se parte del siguiente sistema de ecuaciones en diferencias finitas lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t + b_1 \\ y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t + b_2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{x}_{t+1} = A\bar{x}_t + B \quad (21)$$

En este caso los puntos de equilibrio son los que verifican:  $\bar{x}_{t+1} = \bar{x}_t = \bar{x}^e$

$\bar{x}^e = A\bar{x}^e + B \rightarrow (I - A)\bar{x}^e = B \rightarrow \bar{x}^e = (I - A)^{-1}B$ ; siempre que exista la matriz inversa:  $(I - A)^{-1}$ .

Razonando análogamente al caso continuo, se tiene:

$\bar{x}^e$  es localmente asintóticamente estable  $\Leftrightarrow |\lambda_i| < 1$ , siendo  $\lambda_i$  valor propio de  $A$ .

En este caso, los criterios que permiten asegurar la estabilidad del equilibrio sin necesidad de calcular las raíces de la ecuación característica, son las condiciones de Schur:

$$|\lambda_i| < 1, \quad i=1,2 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 1+b+c > 0 \\ 1-b+c > 0 \\ 1-c > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 1 - \text{Traza } A + \text{Det } A > 0 \\ 1 + \text{Traza } A + \text{Det } A > 0 \\ 1 - \text{Det } A > 0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

que son más complejas que las recogidas en (20).

## 3.4. SISTEMAS NO LINEALES 2x2 DE ORDEN 1

En este apartado, se va a llevar a cabo el análisis cualitativo de sistemas no lineales, con el objetivo de aproximarnos al comportamiento de unas soluciones que, en general, no se conocen explícitamente.

### 3.4.1. Caso continuo

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{array} \right\} \text{ donde } f, g \text{ son funciones no lineales.} \quad (23)$$

Siguiendo el mismo planteamiento anterior, en primer lugar se calculan los puntos de equilibrio del sistema imponiendo:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right\} \bar{x}^e = (x^e, y^e)$$

De la misma manera que se hizo en el apartado de ecuaciones no lineales de primer orden, se aplica el polinomio de Taylor para linealizar el sistema (23) en un entorno del equilibrio<sup>12</sup>:

$$F(x, y) = F(x^e, y^e) + JF(x^e, y^e) \begin{pmatrix} x - x^e \\ y - y^e \end{pmatrix} + \dots$$

Se aprecia claramente como el primer término del sumatorio es cero y la matriz jacobiana de la función de los puntos de equilibrio, una vez eliminados los términos de mayor grado, la podríamos comparar con la matriz  $A$  del sistema (19). Hay que tener en cuenta que la linealización sólo es válida en puntos de equilibrio hiperbólicos, es decir, sin ningún valor propio de la matriz jacobiana con parte real nula.

Bajo las condiciones anteriores se verifica:

Si  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ , siendo  $\lambda_i$  los valores propios de la matriz jacobiana  $JF(x^e, y^e) \Rightarrow \bar{x}^e$  es localmente asintóticamente estable.

Por las condiciones de Routh-Hurwitz, se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Traza } JF(x^e, y^e) < 0 \\ \text{Det } JF(x^e, y^e) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^e \text{ es localmente asintóticamente estable} \quad (24)$$

### Ejemplo Modelo Depredador-Presa

Consideremos como ilustración de la explicación anterior la aplicación al modelo depredador-presa. Se plantea la existencia de dos especies que, compartiendo un mismo medio, están en la relación depredador-presa. En ausencia de depredadores, las presas no tienen prácticamente limitaciones y crecen a una tasa constante positiva  $\dot{x} = ax$  con  $a > 0$ . A su vez, los depredadores irían extinguiéndose, en ausencia de éstas, con una tasa negativa  $\dot{y} = -cy$ . Cuando las dos especies están presentes, la población de depredadores experimenta un incremento por unidad de tiempo proporcional al número de presas susceptibles de ser devoradas ( $d$ ); a su vez, esa caza provoca un descenso en la

---

<sup>12</sup> Denotamos por  $F$  a la función vectorial cuyas componentes son  $f, g$ . Así, la matriz jacobiana será:

$$JF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

población de presas por unidad de tiempo ( $b$ ). Por tanto nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dx \end{array} \right\} \text{ con } a, b, c, d > 0 \quad (25)$$

A pesar de que parece un sistema sencillo, no se dispone de un método concreto para obtener explícitamente sus soluciones. Por tanto, realizamos un análisis cualitativo. Para ello, los puntos de equilibrio del mismo se calculan como:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = 0 \rightarrow 0 = x(a - by) \\ \dot{y} = 0 \rightarrow 0 = y(-c + dx) \end{array} \right\}$$

Se comprueba que hay dos puntos de equilibrio:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^e &= (x_1, y_1) = (0, 0) \\ \bar{x}_2^e &= (x_2, y_2) = \left( \frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right) \end{aligned}$$

El siguiente paso es realizar un análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio, y para ello aplicamos de nuevo la linealización con el polinomio de Taylor de primer orden. La matriz jacobiana del sistema es la siguiente:

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

Si la valoramos para el primero de los puntos de equilibrio nos queda:

$$JF(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Det}JF(0, 0) = -ac < 0 \\ \text{Traza}JF(0, 0) = a - c \end{cases}$$

que no cumple las condiciones de Routh-Hurwitz. Es inmediato comprobar que los valores propios son  $\lambda_1 = a > 0$  y  $\lambda_2 = -c < 0$ , luego  $\bar{x}_1^e = (x_1, y_1) = (0, 0)$  es un punto de silla.

Ahora consideramos el segundo punto de equilibrio del sistema:

$$JF\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Det}JF\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = ac \\ \text{Traza}JF\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = 0 \end{cases}$$

Se comprueba que el segundo punto de equilibrio del sistema,  $\bar{x}_1^e = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ , no cumple las condiciones de Routh-Hurwitz. Si se calculan los valores propios de la matriz jacobiana correspondiente a dicho punto:

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 0 & -bc \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \rightarrow \lambda^2 = -ac$$

Con estos resultados, se puede afirmar que la linealización realizada anteriormente no es válida para este punto ya que los valores propios de la matriz jacobiana tienen parte real nula, y por tanto, se trata de un punto de equilibrio no hiperbólico. En realidad es un centro como se muestra en la siguiente figura:

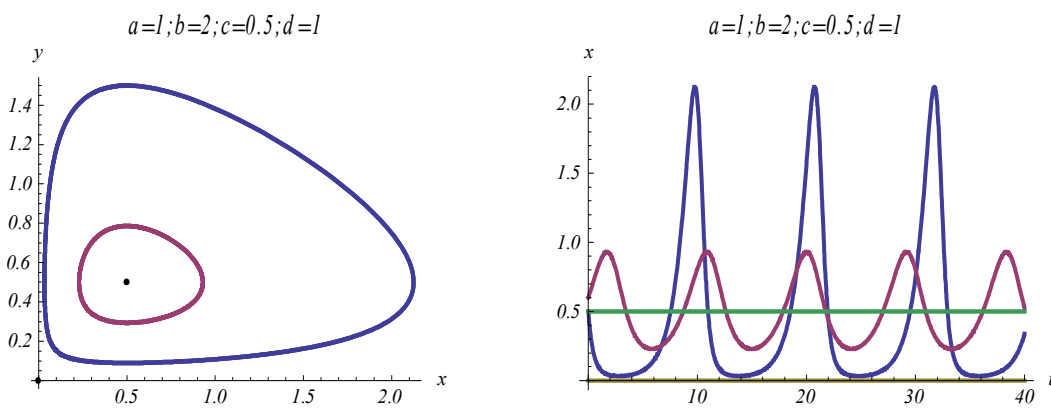


Figura 3.5. Soluciones del modelo depredador-presa en caso continuo

### 3.4.2. Caso discreto

Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases} \text{ donde } f, g \text{ son funciones no lineales.} \quad (26)$$

En este caso, el equilibrio se dará cuando:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t = x^e \\ y_{t+1} = y_t = y^e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases} \rightarrow \bar{x}^e = (x^e, y^e)$$

Razonando de la misma manera que en el caso continuo, se tiene:

Si los valores propios del jacobiano  $JF(x^e, y^e)$ , tienen módulo menor que la unidad, es decir, siempre que  $|\lambda_i| < 1, \Rightarrow \bar{x}^e$  será asintóticamente estable.

En este caso, las condiciones de Schur quedan:

$$|\lambda_i| < 1, \quad i=1,2 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 1+b+c > 0 \\ 1-b+c > 0 \\ 1-c > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 1 - \text{Traza } JF(x^e, y^e) + \text{Det } JF(x^e, y^e) > 0 \\ 1 + \text{Traza } JF(x^e, y^e) + \text{Det } JF(x^e, y^e) > 0 \\ 1 - \text{Det } JF(x^e, y^e) > 0 \end{array} \right\}$$

### Ejemplo Modelo Depredador-Presa

$$\left. \begin{array}{l} x_{t+1} = ax_t - bx_t y_t \\ y_{t+1} = -cy_t + dx_t y_t \end{array} \right\} \text{ con } a, b, c, d > 0 \quad (27)$$

Se calculan los puntos de equilibrio:

$$\left. \begin{array}{l} x_{t+1} = x_t = x^e \rightarrow x = x(a - by) \\ y_{t+1} = y_t = y^e \rightarrow y = y(-c + dx) \end{array} \right\}$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^e &= (x_1, y_1) = (0, 0) \\ \bar{x}_2^e &= (x_2, y_2) = \left( \frac{1+c}{d}, \frac{a-1}{b} \right) \end{aligned}$$

El siguiente paso es realizar un análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio, y para ello aplicamos de nuevo la linealización con el polinomio de Taylor de primer orden. La matriz jacobiana del sistema es la siguiente:

$$JF(x^e, y^e) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

Calculamos el valor de la matriz en el primer punto de equilibrio:

$$JF(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

En este caso es inmediato comprobar que los valores propios son  $\lambda_1 = a$  y  $\lambda_2 = -c$ . Por tanto, si  $a < 1$  y  $c < 1$ , se verifica que el equilibrio será localmente asintóticamente estable.

Ahora, analizaremos la estabilidad del segundo punto de equilibrio existente:

$$JF\left(\frac{1+c}{d}, \frac{a-1}{b}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-b(1+c)}{d} \\ \frac{d(a-1)}{b} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Det}JF\left(\frac{1+c}{d}, \frac{a-1}{b}\right) = ac + a - c \\ \text{Traza}JF\left(\frac{1+c}{d}, \frac{a-1}{b}\right) = 2 \end{cases}$$

De nuevo, aplicamos las condiciones para comprobar su estabilidad:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \text{Traza} JF(x^e, y^e) + \text{Det} JF(x^e, y^e) > 0 \\ 1 + \text{Traza} JF(x^e, y^e) + \text{Det} JF(x^e, y^e) > 0 \\ 1 - \text{Det} JF(x^e, y^e) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -1 + ac + a - c > 0 \\ 3 + ac + a - c > 0 \\ 1 - ac - a + c > 0 \end{cases}$$

$\bar{x}^e = \left(\frac{1+c}{d}, \frac{a-1}{b}\right)$  no es un equilibrio asintóticamente estable, ya que la primera

y la última condición se contradicen, y por tanto, no se cumplen las condiciones de estabilidad. En la siguiente figura se muestra el comportamiento de este punto de equilibrio (foco inestable):

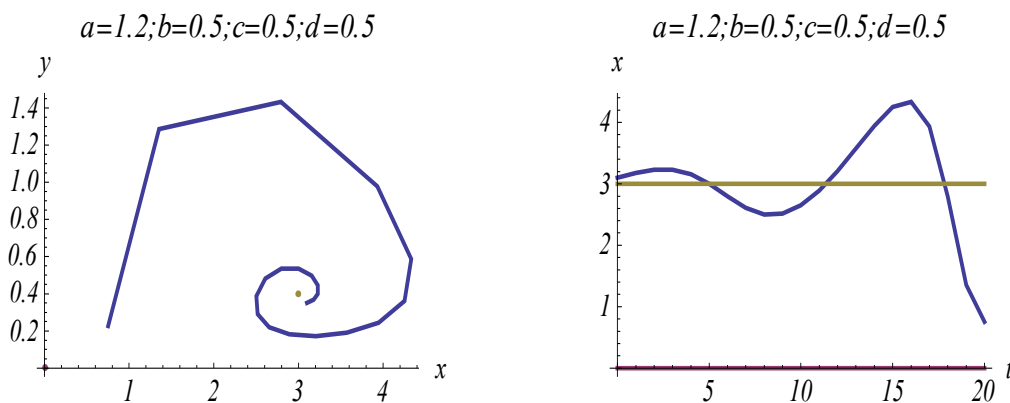


Figura 3.6. Soluciones del modelo depredador-presa en tiempo discreto.

Con la comparación de las figuras 3.5 y 3.6, se comprueba de nuevo que la modelización en tiempo discreto genera más inestabilidad y mayor complejidad.

### 3.5. REFLEXIÓN GENERAL. *DISCRETO VS CONTINUO*

Una vez que en los anteriores apartados hemos comprobado como la modelización en tiempo discreto, en general, da lugar a mayor inestabilidad, además de comportamientos más complejos, en este apartado se intentará razonar teóricamente sobre este hecho. Esto nos servirá de base para la aplicación que se presenta en el último apartado del presente trabajo.

Se considera un sistema en tiempo discreto bidimensional<sup>13</sup>:

$$\left. \begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} &= g(x_t, y_t) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

con  $(x^e, y^e)$  un estado estacionario.

Tomando la aproximación  $\dot{x} \approx x_{t+1} - x_t$ ,  $\dot{y} \approx y_{t+1} - y_t$  el anterior sistema se convierte en el sistema continuo:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) - x \\ \dot{y} &= g(x, y) - y \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

donde  $(x^e, y^e)$  será un estado estacionario ya que verifica  $f(x^e, y^e) - x^e = 0$ ,  $g(x^e, y^e) - y^e = 0$  al ser equilibrio de (28).

Se sabe que la condición que asegura la estabilidad asintótica de  $(x^e, y^e)$  en el sistema discreto es que los valores propios de  $J_D = \begin{pmatrix} f_x(x^e, y^e) & f_y(x^e, y^e) \\ g_x(x^e, y^e) & g_y(x^e, y^e) \end{pmatrix}$  tengan módulo menor que la unidad.

Asimismo, la condición que lo asegura en el sistema continuo es que los valores propios de la matriz  $J_C = \begin{pmatrix} f_x(x^e, y^e) - 1 & f_y(x^e, y^e) \\ g_x(x^e, y^e) & g_y(x^e, y^e) - 1 \end{pmatrix}$  tengan parte real negativa.

Es inmediato ver que  $J_C = J_D - I_2$ , luego al considerar la ecuación característica de ambas matrices jacobianas se tiene:

$$|J_C - \lambda I_2| = |J_D - I_2 - \lambda I_2| = |J_D - (1 + \lambda)I_2|$$

Por tanto, se tiene:

$$\lambda_D \text{ es un valor propio de } J_D \Leftrightarrow \lambda_C = \lambda_D - 1 \text{ es un valor propio de } J_C$$

Veamos una comparación entre la estabilidad del estado estacionario  $(x^e, y^e)$  en el sistema discreto y en el sistema continuo.

---

<sup>13</sup> Se considera un sistema de dos ecuaciones por sencillez ya que los resultados en mayores dimensiones serían análogos.

1. Si  $(x^e, y^e)$  es asintóticamente estable en el sistema discreto, entonces también lo será en el continuo. En efecto, si  $|\lambda_D| < 1$ :

- Si  $\lambda_D$  es real se tiene:

$$|\lambda_D| < 1 \Leftrightarrow -1 < \lambda_D < 1 \Leftrightarrow -2 < \underbrace{\lambda_D - 1}_{\lambda_C} < 0$$

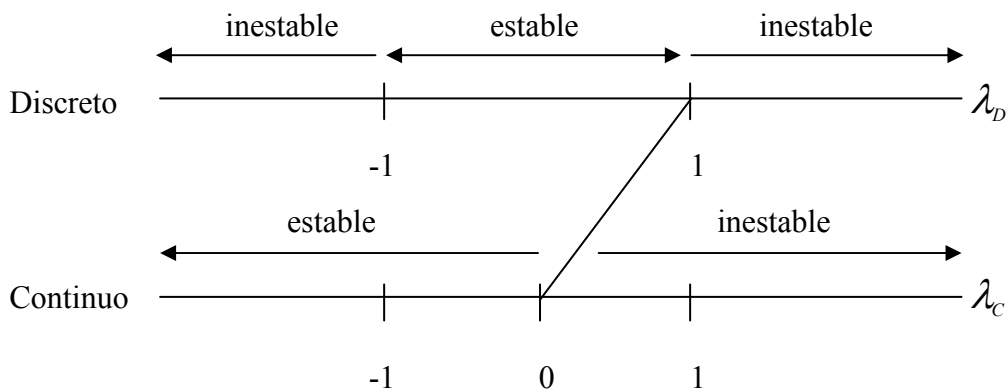
- Si  $\lambda_D$  es complejo:  $\lambda_D = \sqrt{a+ib}$ :

Como  $a \leq |a| < \sqrt{a^2 + b^2} < 1$ ; entonces  $\lambda_C = \lambda_D - 1 = a - 1 + ib$ , con  $a - 1 < 0$ .

2. Si  $(x^e, y^e)$  es inestable en continuo, entonces también lo será en discreto. En efecto, si  $\text{Re}(\lambda_C) > 0$ :

- Si  $\lambda_C$  es real, entonces  $\lambda_C > 0 \Rightarrow \lambda_D = 1 + \lambda_C > 1$
- Si  $\lambda_C$  es complejo, entonces  $\lambda_C = a + ib$  con  $a > 0$  y se tiene:  $\lambda_D = 1 + a + ib$  con  $|\lambda_D| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} > 1$ .

En el siguiente gráfico se ilustra lo anterior:



Del análisis anterior se desprende como el sistema en continuo es “más estable” en el sentido de que la región donde los valores propios dan lugar a estabilidad es mayor.

En concreto, la inestabilidad fluctuante en el caso discreto, al convertir el sistema a tiempo continuo, con la aproximación considerada, se amortigua y se convierte en estabilidad. Sin embargo, la inestabilidad monótona en discreto sigue siéndolo en continuo.



No significa esto que en el caso continuo no puedan existir oscilaciones explosivas (pensar en el caso de valores propios complejos conjugados con parte real positiva).

## 4. EL TRATAMIENTO DEL PROBLEMA DEL TIEMPO APLICADO AL MODELO

En este último apartado se va a plantear el problema que surge con el tratamiento del tiempo, aplicándolo al modelo descrito en el apartado 2 del presente trabajo. El modelo de Almudi *et al.* (2015) está compuesto por un sistema de ecuaciones en diferencias, es decir, las variables aparecen evaluadas en instantes determinados del tiempo. Por este motivo, en esta sección se va a llevar a cabo el análisis del modelo en tiempo continuo, para poder apreciar con mayor claridad las diferencias que surgen dependiendo de cómo se considere el tiempo.

### 4.1. EL MODELO EN TIEMPO CONTINUO

Tras realizar el estudio del modelo en tiempo discreto, voy a tratar de convertir el sistema de ecuaciones presentado en el apartado 2 del trabajo a tiempo continuo, es decir, transformando las ecuaciones en diferencias en ecuaciones diferenciales.

Para convertir el modelo discreto (7) en un modelo continuo se diferencia cada una de las variables respecto del tiempo, considerando la diferencial del tiempo igual a la unidad:

a) Acumulación del capital:

$$\frac{dk}{dt} \approx \frac{\Delta k}{\Delta t} = \frac{k_{t+1} - k_t}{1} \rightarrow \dot{k} \approx k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+\alpha}(k_t + i_t) - k_t \rightarrow \dot{k} = \frac{1}{1+\alpha}(k + i) - k$$

b) La ecuación de la renta:

$$\dot{y} \approx y_{t+1} - y_t = \frac{b}{1+\alpha}y_t + \frac{1}{1+\alpha}[\beta - \theta(R_t - \pi_t)]y_t + g - y_t$$

$$\rightarrow \dot{y} = \frac{b}{1+\alpha}y + \frac{1}{1+\alpha}[\beta - \theta(R - \pi)]y + g - y$$

c) La inversión:

$$\dot{i} \approx i_{t+1} - i_t = \frac{1}{1+\alpha}[\beta - \theta(R_t - \pi_t)]y_t - i_t \rightarrow \dot{i} = \frac{1}{1+\alpha}[\beta - \theta(R - \pi)]y - i$$

d) La tasa de inflación:

$$\dot{\pi} \approx \pi_{t+1} - \pi_t = -\gamma + \rho \left( \frac{y_t}{k_t^\mu} \right)^{\frac{1}{1-\mu}} + \cancel{\mathcal{R}'_t} - \cancel{\mathcal{R}'_t} \rightarrow \boxed{\dot{\pi} = \gamma + \rho \left( \frac{y}{k^\mu} \right)^{\frac{1}{1-\mu}}}$$

e) El tipo de interés nominal:

$$\dot{R} \approx R_{t+1} - R_t = \cancel{\mathcal{R}'_t} + a_\pi (\pi_t - \pi^*) + a_y (y_t - y^*) - \cancel{\mathcal{R}'_t} \rightarrow \boxed{\dot{R} = a_\pi (\pi - \pi^*) + a_y (y - y^*)}$$

Por tanto, el modelo en tiempo continuo se presenta como:

$$\left. \begin{aligned} \dot{k} &= \frac{1}{1+\alpha} (k+i) - k \\ \dot{y} &= \frac{b}{1+\alpha} y + \frac{1}{1+\alpha} [\beta - \theta(R-\pi)] y + g - y \\ \dot{i} &= \frac{1}{1+\alpha} [\beta - \theta(R-\pi)] y - i \\ \dot{\pi} &= -\gamma + \rho \left( \frac{y_t}{k_t^\mu} \right)^{\frac{1}{1-\mu}} \\ \dot{R} &= a_\pi (\pi - \pi^*) + a_y (y - y^*) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

## 4.2. EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD. *DISCRETO VS CONTINUO.*

Una vez establecido el modelo en tiempo continuo, se comprueba que al imponer la condición de equilibrio, llegamos a las mismas ecuaciones de equilibrio que en el caso discreto (véase (8) y (10)).

Por tanto, no es necesario recurrir de nuevo al estudio de la existencia y multiplicidad de los equilibrios, ya que obtendríamos lo mismo que en Almudi *et al.* (2015) y que comentamos en el apartado 2.2 del presente trabajo. Más aún, de acuerdo con lo visto en 3.5, todos los equilibrios estables del caso discreto, lo serán del continuo.

De cara a comparar ambas situaciones, recordemos que los hechos principales que se obtuvieron en el caso discreto son:

- a) Dependencia de la existencia de equilibrio respecto del valor del gasto público  $g$ .

- b) Para los valores admisibles del gasto público existen siempre dos equilibrios, salvo para un máximo valor admisible que sólo existe uno y al que corresponde un valor de  $k^M$ .
- c) Los equilibrios con  $k < k^M$  son siempre inestables.
- d) Los equilibrios con  $k > k^M$  pueden ser estables pero también inestables, siéndolo siempre que el gasto público es suficientemente pequeño.
- e) A medida que aumenta la reactividad de la política monetaria (ajuste a las desviaciones de la inflación y de la renta de los objetivos marcados), la inestabilidad del equilibrio aumenta, pudiendo dejar de ser estable un equilibrio que lo es inicialmente.
- f) Todos los equilibrios, sea su  $k$  mayor o menor que  $k^M$ , tienen al menos una senda estable, lo que puede generar situaciones de larga duración engañosamente estables.

Veamos ahora que pasa con el caso continuo, comparando situaciones equivalentes del caso continuo y del discreto. Podemos adelantar, como ya puede suponerse por todo lo visto, que el caso continuo presenta mayores estabilidades y menos complejidad.

### 1) Simulaciones 1

Los valores del modelo que se van a utilizar son:  $g=0.5$ ;  $a_{\pi}=0.06$ ;  $a_y=0.015$ ;  $\pi^*=0.02$ ;  $y^*=9.9$ ;  $\beta=0.3$ ;  $\alpha=0.006$ ;  $\theta=0.2$ ;  $\gamma=0.00084$ ;  $\mu=0.4$ ;  $b=0.7$ ;  $\rho=0.001$ ;  $i_0=2$ ;  $\pi_0=0.025$ ;  $R_0=0.0251$ ;  $k_0=40$ , donde  $y_0 = \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1-\mu} k_0^\mu$ .

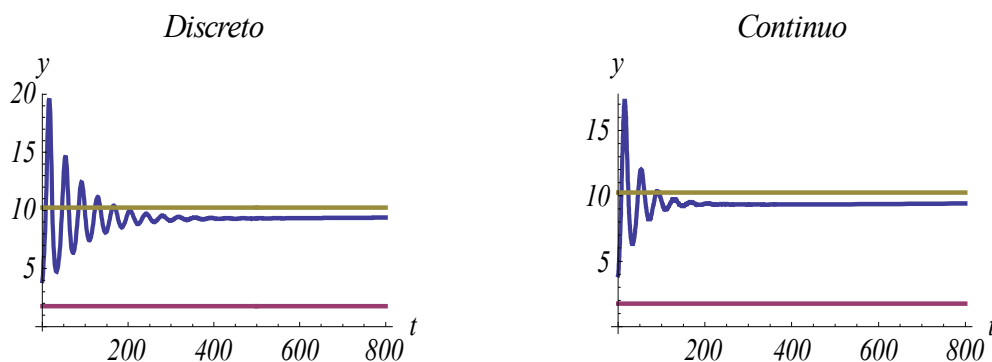


Figura 4.1. Simulaciones del modelo *discreto vs continuo* (I)

En el primer gráfico se muestra cómo se comporta el equilibrio en tiempo discreto y en el segundo caso, en tiempo continuo. En el primero de ellos, se observa que el equilibrio es localmente asintóticamente estable y la convergencia al mismo se produce de manera fluctuante. Por otro lado, en el caso continuo, el estado estacionario también es localmente asintóticamente estable y la convergencia al equilibrio es fluctuante, pero éste se alcanza más rápido que en el caso anterior. Esto es debido a que, como ya se ha comentado anteriormente, cuando transformamos un modelo de discreto a continuo, se vuelve más estable y se aproxima al equilibrio de una forma más rápida.

## 2) Simulaciones 2

Utilizando los mismos datos que en la simulación anterior, pero estableciendo un menor valor para el gasto público:  $g = 0.2$ . Se obtienen los siguientes resultados:

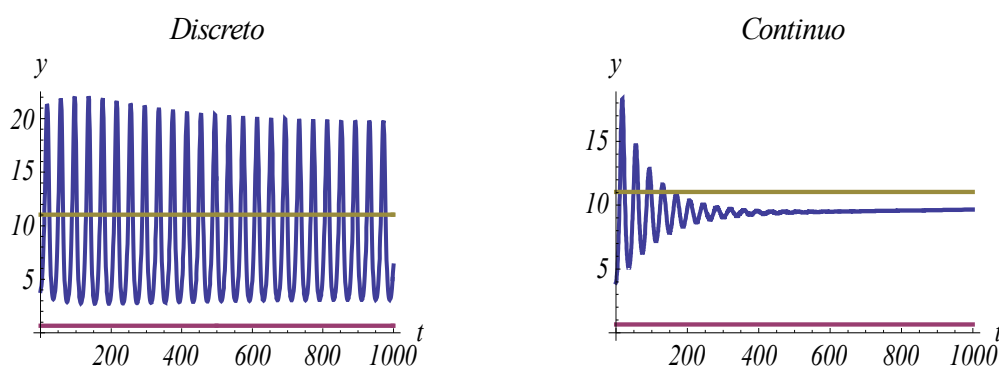


Figura 4.2. Simulaciones del modelo *discreto vs continuo* (II)

El primer gráfico corresponde al modelo en tiempo discreto, donde se aprecia que se trata de un equilibrio inestable. Sin embargo, en tiempo continuo, se observa cómo el mismo equilibrio es estable aunque oscile inicialmente, ya que las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa. Este caso revela la importancia que tiene el valor del gasto público en el comportamiento del modelo. Se observa que cuando  $g$  es suficientemente cercano a 0, en este caso 0.2, el modelo en tiempo discreto se vuelve inestable, presentando una divergencia fluctuante del equilibrio.

## 3) Simulaciones 3

En ocasiones, las simulaciones pueden dar lugar a situaciones engañosas. Se produce cuando un equilibrio es inestable de tipo silla y nos movemos cerca de las sendas estables de dicho equilibrio. En principio éstos parecen estables, pero en realidad no lo son.

Para corroborar este hecho, se utiliza el mismo escenario paramétrico que en la primera simulación, pero estableciendo  $g = 0.3$  :

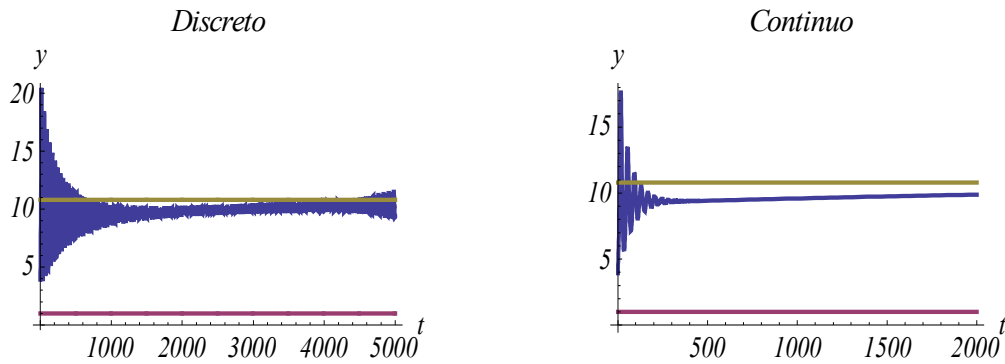


Figura 4.3. Simulaciones del modelo *discreto vs continuo* (III)

El primer gráfico corresponde de nuevo al modelo en tiempo discreto y el segundo al modelo en tiempo continuo. Nótese que en el primero de ellos, las fluctuaciones aparentemente parecen estabilizarse, pero explotan cuando aumenta el número de periodos simulados. Se trata de un equilibrio inestable de tipo punto de silla. Sin embargo, en el segundo caso, las oscilaciones se van amortiguando y tienden a converger al estado estacionario. Hecho corroborado ya que todos los valores propios de la matriz jacobiana del modelo en tiempo continuo, presentan parte real negativa. De nuevo, se comprueba cómo dicho modelo da lugar a sendas de equilibrio menos complejas y más estables.

#### 4) Simulaciones 4

En este caso, los valores utilizados para la simulación son los mismos que en el primero, pero  $g = 0.1$  y  $a_\pi = 1.5$  :

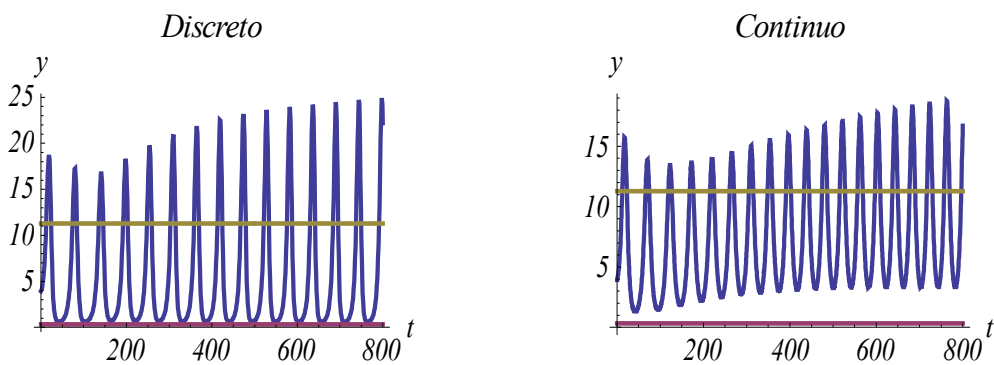


Figura 4.4. Simulaciones del modelo *discreto vs continuo* (IV)

Como se aprecia con claridad en la simulación, ambos casos son inestables, en concreto, divergen del equilibrio de manera fluctuante. Tanto el modelo en tiempo discreto como en continuo, presentan un comportamiento similar ya que el valor del gasto público es suficientemente cercano a cero, lo que provoca que ambos equilibrios se vuelvan inestables. Con los resultados de esta simulación, se comprueba la importancia que tiene la política fiscal para la estabilidad de estados estacionarios.

### 5) Simulaciones 5

Hay múltiples casos donde se pueden apreciar los distintos comportamientos que presenta el modelo en tiempo discreto y continuo. Sin embargo, hay uno que considero que tiene una mayor importancia a nivel económico. Utilizando el mismo escenario paramétrico que en el primer caso, excepto  $a_{\pi} = 4$ , se tiene:

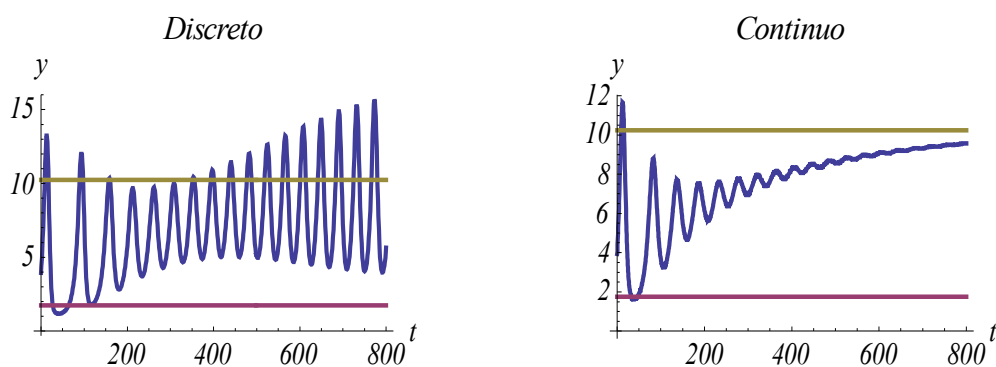


Figura 4.5. Simulaciones del modelo *discreto vs continuo* (V)

Se comprueba que el modelo en tiempo continuo se mantiene estable y acaba convergiendo al equilibrio de manera fluctuante debido a que todos los valores propios de su matriz jacobiana presentan parte real negativa. Sin embargo, en el caso discreto no ocurre lo mismo. Cuando la regla de estabilización de Taylor tiene sus coeficientes muy elevados (en este caso  $a_{\pi}=4$ , siendo antes  $a_{\pi}=0.06$ ), se produce un efecto desestabilizador por parte de la política monetaria, volviendo a la economía inestable en tiempo discreto. En este caso, se comprueba la importancia que tiene también el papel de la política monetaria en la existencia y estabilidad de los equilibrios, al igual que lo establece la macroeconomía estándar.

## 5. CONCLUSIONES

El estallido de la crisis financiera de 2007 provocó que, el consenso que existía entre los economistas en temas de política macroeconómica, diera lugar a un debate como consecuencia de la limitada capacidad de los modelos estocásticos dinámicos para explicar la crisis y restablecer el crecimiento en las economías.

Tal y como aparece indicado en la introducción, el principal objetivo del trabajo era analizar en qué medida el modelo macroeconómico explicado en Almudi *et al.* (2015), que reúne los tres horizontes temporales, era capaz de generar distintos resultados dependiendo de si se trataba en tiempo continuo o en discreto. Para ello, se ha abordado la problemática del tiempo con ecuaciones diferenciales y en diferencias lineales y no lineales, mostrando la importancia del mismo y los distintos resultados que se obtienen. Al final de esta memoria, he tratado de focalizar el análisis del modelo en tiempo continuo, estudiando la existencia y multiplicidad de sus equilibrios así como la estabilidad de los mismos, usando las representaciones gráficas para una mejor comprensión.

Varios son los resultados que pueden extraerse de dicho análisis. Desde un punto de vista más formal, se ha comprobado que el tratamiento del tiempo es uno de los problemas fundamentales en el análisis de los modelos. Los resultados que se obtienen pueden ser incluso contradictorios entre una modelización y otra, lo que lleva a reflexionar sobre cómo es la realidad económica, ¿continua o discreta? Además, se ha demostrado la importancia que tiene el horizonte temporal considerado ya que ciertas situaciones pueden ser engañosas. Un equilibrio puede parecer estable en el medio plazo, pero no serlo en el largo plazo, lo que puede llevarnos a interpretar largos periodos de la historia económica como estables, cuando en realidad no lo son. Un ejemplo de ello, podría ser la época de la Gran Moderación (1986-2006) donde queda una cuestión abierta: ¿Fue realmente un periodo estable o se trataba de una situación engañosa y era inestable de tipo punto de silla?

Desde un punto de vista más económico, y a diferencia de lo que se establece en la macroeconomía estándar, se demuestra que el papel de la política fiscal es fundamental en el estudio de los modelos porque puede provocar inestabilidad por la vía del gasto público. Además, la política monetaria puede desestabilizar la economía si dicha política es muy intensa.



Tras haber realizado este trabajo, ver cómo pueden aplicarse las técnicas matemáticas más complejas a modelos relativamente sencillos como el usado en el mismo, me ha servido para darme cuenta de la importancia que tiene el estudio de los sistemas dinámicos en el campo de la Economía. Asimismo, he comprobado que tratar con modelos no lineales, a pesar de ser más complejos y en ocasiones obtener resultados no esperados, es mucho más prometedor ya que la realidad económica no es lineal.

Por último, agradezco las financiaciones parciales recibidas de los proyectos ECO2013-41353-P del Ministerio español de Economía y Competitividad, del grupo consolidado S10 financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo en los años 2014 y 2015.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Almudi, I., Fatas-Villafranca, F., Jarne, G. y Sanchez-Choliz, J.** (2015). Rethinking macroeconomic policy within a simple dynamic model. Working paper en revisión. *Metroeconomica*.
- Bernanke, B.S.** (2013). *The Federal Reserve and the Financial Crisis*. Princeton University Press. New Jersey.
- Blanchard, O.** (2009). The State of Macro. *Annual Review of Economics*, 1, 209-228.
- Blanchard, O. and Johnson, D.** (2013). *Macroeconomics*. Pearson. New Jersey.
- Fatas-Villafranca, F., Jarne, G. y Sanchez Choliz, J.** (2012). Innovation, Cycles and Growth. *Journal of Evolutionary Economics*, 22, 207-233.
- Fernández, C., Vázquez, F.J. y Vegas, J.M.** (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias, sistemas dinámicos*. Thomson.
- Gandolfo, G.** (2010). *Economic Dynamics*. Springer. Fourth edition.
- Jarne, G., Pérez-Grasa, I. y Minguillón, E.** (2001). *Matemáticas para la economía. Programación matemática y Sistemas Dinámicos*. Mc Graw Hill.
- Krugman, P.** (2009). How did economists get it so wrong? *The New York Times*.
- Krugman, P.** (2011). The Profession and the Crisis. *Eastern Economic Journal*, 37, 307-312.
- Romer, D.** (2000). Keynesian Macroeconomics without the LM curve. *Journal of Economic Perspectives*, 14(2), 149-169.
- Romer, D.** (2012). *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill. New York.
- Solow, R. M.** (2008). The State of Macroeconomics. *Journal of Economic Perspectives*, 22, 243-249.
- Stiglitz, J.** (2011). Rethinking Macroeconomics: What failed and How to Repair It. *Journal of the European Economic Association*, 9, 591-645.
- Wolf, M.** (2015). *La gran crisis: cambios y consecuencias. Lo que hemos aprendido y lo que todavía nos queda por aprender de la crisis financiera*. Ediciones Deusto.