TESIS DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

2015

84

Joaquín Comas Roqueta

La enseñanza de las matemáticas en la Armada Española en el siglo XIX

Departamento

Ciencias de la Documentación e Historia de la Ciencia

Director/es

Ausejo Martínez, Elena

ISSN 2254-7606

ISSN 2254-7606

Universidad Zaragoza

1542

Tesis Doctoral

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ARMADA ESPAÑOLA EN EL SIGLO XIX

Autor

Joaquín Comas Roqueta

Director/es

Ausejo Martínez, Elena

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Ciencias de la Documentación e Historia de la Ciencia

2015

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ARMADA ESPAÑOLA EN EL SIGLO XIX

Joaquín Comas Roqueta

Memoria presentada para la obtención del grado de Doctor.
Programa de Doctorado en Historia de la Ciencia.

Directora: Dra. Dña. Elena Ausejo Martínez

Universidad de Zaragoza
Departamento de Ciencias de la Documentación e Historia de la Ciencia.

Zaragoza, 2015

A Chus, Pablo y Marta, lo que más quiero.

A Mariano, mi maestro.

Quiero expresar mi gratitud a mis dos directores de Tesis, Mariano Hormigón y Elena Ausejo. Mariano me introdujo en el apasionante mundo de la Historia de las Matemáticas; su especial forma de describir en las clases el desarrollo de esta ciencia y de sus protagonistas, el apoyo que me dio para empezar a investigar, y especialmente su carácter humano, me han dejado una impronta que siempre le agradeceré.
Con Elena retomé la investigación tras la desaparición de Mariano; pese a la distancia física y mis dificultades personales para llevar adelante el trabajo, siempre ha estado guiándome, exigiéndome mejoras cuando fue necesario y dándome ánimos cuando los necesité.

Agradezco a Chus, mi mujer, y a Pablo y Marta, mis hijos, su apoyo y paciencia durante todos estos años.

Gracias por ayudarme a conseguir este sueño.

Índice

TOMO I

JUSTIFICACIÓN

Esta Memoria se enmarca dentro de los estudios sobre Historia de las Matemáticas en la España decimonónica, en particular de su presencia en las instituciones docentes, desarrollados en el Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón bajo la dirección del Prof. Dr. Mariano Hormigón[1] en la Universidad de Zaragoza. A lo largo de más de tres décadas han sido abordados distintos aspectos de la Matemática y de la Ciencia española, principalmente en el periodo que va desde la Ilustración a la Guerra Civil.

Entre los estudios sobre la presencia de las Matemáticas en las instituciones docentes, cabe destacar los trabajos de Fernando Vea sobre Enseñanza Secundaria [1986 & 1995], Mª Ángeles Velamazán sobre Ingeniería militar [1994], Mª Ángeles Martínez sobre Ingeniería civil [2004] y Elena Ausejo y Francisco Javier Medrano sobre la figura de Gabriel Ciscar como matemático [2012].

Continuando con esta línea de trabajo en torno al estudio de la evolución de las Matemáticas dentro de las Fuerzas Armadas españolas, en esta Memoria se presenta un estudio global del desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas en la Armada Española, especialmente en los centros de formación de Guardias Marinas a lo largo del siglo XIX.

Por otra parte, el periodo que abarca esta investigación ha sido estudiado tanto desde ángulos específicamente históricos y culturales, dentro del marco general de la Historia de la Navegación, como en el marco de la Historia de las Ciencias, centrándose fundamentalmente en el ámbito de la Astronomía. Diferentes trabajos y publicaciones nos han permitido establecer el marco general de partida y han sido de especial relevancia para enmarcar la investigación.

Respecto a la Historia de la Navegación en España, especialmente de los centros de formación, nos hemos apoyado esencialmente en los trabajos de [LAFUENTE & SELLÉS, 1986] y [SELLÉS, 1988a; 1988b].

En cuanto a estudios sobre aspectos científicos en la Navegación a lo largo del siglo XVIII y XIX, destacamos las Tesis doctorales de [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994], [IBÁÑEZ FERNÁNDEZ, 2000] e [IGLESIAS, 2000], junto con las publicaciones de [LAFUENTE & SELLÉS, 1988; 1889], [GONZÁLEZ GONZÁLEZ, 1992], [LÓPEZ SÁNCHEZ & VALERA CANDEL & LÓPEZ FERNÁNDEZ, 1995] y [SELLÉS, 2000].

Por otra parte, diversos trabajos nos han facilitado una visión sobre la Historia Naval en España, destacando las publicaciones de [GUILLÉN, 1918a; 1918b; 1919], [BLANCA, 1979; 1991; 1993], [ARROYO, 1994] y [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008].

[1] Entre sus numerosas obras y trabajos sobre la Historia de la Ciencia que han sido punto de partida para la investigación a lo largo del desarrollo de este trabajo, cabe resaltar [HORMIGÓN, 1995].

A lo largo de la Memoria se realiza un análisis de contenidos de los textos de Matemáticas utilizados en la Armada Española en el siglo XIX, debidamente contextualizados en su uso docente en los diferentes centros y Planes de Estudio.

PLAN DE TRABAJO

Los textos analizados en esta Memoria son manuales, tratados o compendios utilizados en la formación de los oficiales de la Armada Española a lo largo del siglo XIX que cumplen al menos uno de los siguientes criterios:

- Haber sido declarado obra de texto o preparatorio para las Academias de Guardias Marinas, el Colegio Real y Militar de Caballeros Guardias Marinas, el Colegio Naval Militar o la Escuela Naval Flotante.
- Haber sido redactado por profesores de estos centros.
- Haber sido citado en los Reglamentos o Planes de Estudio de estos centros.
- Haber sido citado, en relación con la formación en la Armada, en revistas y otras publicaciones relacionadas con la Navegación.

En el caso del estudio de la Trigonometría Rectilínea y Esférica se han seleccionado además textos de referencia del siglo XVIII.

Al realizar el estudio sobre Pedro José Rodríguez Riola, se han considerado también las principales obras sobre Trigonometría Esférica en el primer tercio del siglo XIX en España y Estados Unidos.

La agrupación de todos los textos seleccionados por disciplinas matemáticas presenta un total de seis obras sobre Aritmética, nueve sobre Álgebra, seis sobre Geometría elemental, tres sobre Geometría Descriptiva, cuatro sobre Geometría Analítica, cinco sobre Análisis Matemático, seis sobre Trigonometría Rectilínea, ocho sobre Trigonometría Esférica y cinco obras españolas y siete extranjeras para el estudio comparado de la obra de Rodríguez.

Cuatro apéndices recogen la sistematización realizada para el estudio de estas obras. Se presentan en los dos primeros las Portadas e Índices de los libros seleccionados, reconstruyendo los índices de las obras que carecen de ellos.

Un tercer apéndice muestra en siete subapartados las tablas que resumen los datos generales de las obras seleccionadas y el análisis comparativo de sus contenidos para las diferentes disciplinas matemáticas. El último apéndice recopila los Reglamentos, órdenes y programas de los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante, a fin de determinar el nivel matemático exigido a los Aspirantes para ingresar en este centro.

El primer capítulo de la Memoria, *Marco institucional y legal: centros docentes y Planes de Estudio*, está conformado por dos apartados.

En el primero, *Presencia de las Matemáticas en la Armada a finales del s. XVIII*, se repasan los antecedentes de la formación básica y superior de las Academias de Guardias Marinas en cuanto a Planes de Estudio y textos de Matemáticas.

En el segundo apartado, *Las Matemáticas en la organización y estructura de los estudios desarrollados en la Armada en el siglo XIX*, se revisan cronológicamente las cinco etapas en que se ha divido el periodo en relación al centro de formación existente: Academia de Guardias Marinas (1802-1824), Colegio Real y Militar de Caballeros Guardias Marinas (1825-1828), sin centro docente (1828-1844), Colegio Naval Militar (1844-68) y Escuela Naval Flotante (1869-1909). Para cada etapa se realiza una síntesis del periodo y se analizan los desarrollos de la formación básica y superior (si la hay): Planes de Estudio, disciplinas matemáticas y textos matemáticos utilizados.

El segundo capítulo, *Las Matemáticas en los textos de formación náutica militar*, se compone de diez apartados.

En el primer apartado, *Revisión de la producción matemática en la Armada en el siglo XIX*, se seleccionan aquellas obras de cuyo uso para la formación de los Guardias Marinas o para la preparación de las pruebas de ingreso en la Escuela Naval Flotante tenemos constancia.

En los seis siguientes apartados se realizan los estudios comparativos del tratamiento y desarrollo de la Aritmética, el Álgebra, la Geometría elemental, la Geometría Descriptiva, la Geometría Analítica y el Análisis Matemático en la Armada durante el siglo XIX. Para cada una de las materias se examinan las obras utilizadas, se determina la presencia en los textos de los principales contenidos de la materia y se formulan conclusiones sobre la evolución y grado de actualidad de la materia a lo largo del siglo XIX.

Entre los autores revisados destacan Gabriel Ciscar y Ciscar, Saturnino Montojo y Juan Cortázar, tanto por su número de obras como por su prestigio científico a nivel nacional. Son las personalidades más influyentes a lo largo del siglo XIX en la formación de los oficiales, por lo que se realizan estudios comparativos en las materias que fueron tratadas por los tres autores: Aritmética, Álgebra y Geometría elemental.

En los apartados octavo y noveno se presenta un estudio más detallado y pormenorizado de los tratamientos y desarrollos de la Trigonometría Rectilínea y Esférica, al ser ambas materias de especial importancia en la formación de los Guardias Marinas por sus aplicaciones a la Navegación.

En el décimo y último apartado se revisa la vida y obra de Pedro José Rodríguez Riola, un autor singular cuya obra estaba pendiente de localización y estudio. Este mahonés ejerció como Professor of Mathematics and Navigation of Midshipmen of the U. S. Navy Yard, Gosport, en el estado norteamericano de Virginia, desde 1827 hasta su fallecimiento en 1838. Su principal obra, *Elements of spherical trigonometry, designed as an introduction to the study of nautical* *astronomy*, es ampliamente examinada al objeto de determinar qué obras, tanto nacionales como extranjeras, pudieron influir en su elaboración.

Una vez desarrollados los dos capítulos de la Memoria, se indican las principales conclusiones obtenidas en relación a la enseñanza de las Matemáticas en la Armada Española en el siglo XIX.

CAPÍTULO I. MARCO INSTITUCIONAL Y LEGAL: CENTROS DOCENTES Y PLANES DE ESTUDIO

I.1. Presencia de las Matemáticas en la Armada a finales del s. XVIII

I.1.1. Inicios de las Academias de Guardias Marinas

En 1717 son creadas por José Patiño y Rosales, Intendente General de Marina, la Compañía y la Academia de Guardias Marinas en el Castillo de la Villa de Cádiz, tomando como referencia básica el modelo francés de pensionado al que se le añaden periodos de embarco como en el modelo inglés.

Desde sus inicios, la Academia es pieza fundamental en la renovación institucional de los primeros años borbónicos. Su principal objetivo es implantar, a partir de una nobleza baja a quien se prometía su ascensión social, una oficialidad para una Armada permanente y constituir un complejo científico y tecnológico de primer orden en España [SELLÉS, 1988b, p. 173].

En la *Instrucción sobre diferentes puntos, que se han de observar en el Cuerpo de la Marina de España; y ha de tener fuerza de Ordenanzas, hasta que su Majestad mande publicar las que inviolablemente deberán practicarse*, Patiño diseña un cuerpo de cadetes en formación, si bien no se determina claramente su estructura y finalidad [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 51-52][2].

Durante los primeros años, la enseñanza en la Academia queda en manos del Director, que establece el programa y las asignaturas durante los dos semestres de formación.

En 1735, ante las dificultades para regular los problemas entre la estructura castrense y la docente, así como los contenidos que recibían los cadetes, el ingeniero Diego Bordick elabora la *Instrucción que forma el Brigadier Ingeniero Director de los ejército de S.M. Dn… para el Profesor Principal y Maestro de facultades Matemáticas, a cuyo cargo estará la enseñanza de la compañía de Cadetes y Guardias Marinas de S.M. en conformidad a la Instrucción dada por el Exmo. Sr. Dn. Joseph Patiño en Cádiz a 15 de abril de 1718, la que hasta aquí tiene fuerza de ordenanza, hasta que S.M. determine otra cosa"* [LAFUENTE & SELLÉS, 1986, pp. 162-163].

En la *Instrucción* se determina una duración de los estudios de dos años y la obligación del maestro de enseñar a los cadetes a aplicar la lógica en los razonamientos, considerando a las Matemáticas como una ciencia experimental [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 68-69].

---

[2] Las reputadas publicaciones de Antonio Lafuente y Manuel A. Sellés ([LAFUENTE & SELLÉS, 1986, 1988, 1989] y [SELLÉS, 1988b, 1992, 2000]) nos han facilitado una descripción detallada sobre las Academias de Guardias Marinas a lo largo del siglo XVIII.

La reforma no obtiene los resultados esperados, acrecentándose progresivamente la crisis en la Academia; uno de los principales obstáculos para la formación teórica son los largos periodos de embarque que realizan los cadetes [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 58].

El Secretario de Estado y del Despacho Universal de Guerra, Marina, Indias y Hacienda, Zenón de Somodevilla y Bengoechea –Marqués de la Ensenada-, propone un vasto programa de potenciación naval en 1748. En las *Ordenanzas de Su Magestad para su Real Armada* se pretende solventar tanto los problemas estructurales y organizativos del centro, como la relación entre los oficiales de la Compañía y los maestros de la Academia. Se realiza una renovación de la docencia, estableciéndose como principal objetivo el estudio de la Navegación, considerándose accesorias las demás enseñanzas teóricas e implantado una estricta política de exámenes [SELLÉS, 1988b, p. 176].

En 1752, el Marqués de la Ensenada otorga plenos poderes a Jorge Juan, Comandante de la Compañía, abriendo una etapa de transición en la Academia con la apertura del Observatorio y la potenciación de la formación teórica, especialmente de los estudios matemáticos [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 86-87].
Jorge Juan realiza reformas con la intención de desarrollar un centro altamente cualificado de formación teórica y técnica que mejore los estudios de los cadetes durante los dos años en la Academia. Por una parte refuerza la enseñanza de las Matemáticas, situando a Louis Godín como director de la Academia y publicando éste un importante compendio matemático para uso de los Guardias Marinas [GODÍN, 1758]. Por otra parte, Jorge Juan introduce novedades y aplica normas, que aun estando previstas en las Ordenanzas no se habían llevado a cabo o estaban en desuso, como la realización de exámenes, la celebración de Certámenes, la edición de manuales en la imprenta del centro, el aumento de honorarios profesionales y la consideración para el ascenso del tiempo del destino en la Academia [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 118-119].
Las reformas introducidas entre 1753 y 1756 por Juan son tan profundas que Lafuente y Sellés [1988, p. 103] califican este periodo como reinstitucionalizador de la Academia, formando a unos oficiales capaces de asumir los grandes proyectos de rearme del Marqués de Ensenada [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, p. 103].
El declive de la Academia se inicia con la destitución del Marqués de Ensenada y los múltiples proyectos encomendados a Juan. La falta de medios económicos para el sostenimiento de la Academia y las tensiones entre los oficiales del Cuerpo General y el Ministerio de Marina

respecto al centro, dejan al final de la década de los sesenta una Academia en una situación similar a como se hallaba antes de la llegada de Juan [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 63].

Tal y como indica Sellés [2000, p. 221], tras la etapa de renovación aportada por Jorge Juan a la Academia de Guardias Marinas sobrevino otra etapa de relajación. En 1769 la Academia es trasladada a la Isla de León, en la bahía de Cádiz. Al seguir aumentando el número de buques de la Armada se crean en 1776 dos nuevas Academias en Cartagena y Ferrol, que dependerán de la de Cádiz.

José de Mazarredo, ante el bajo nivel impartido y las dificultades para formar adecuadamente a los cadetes en un periodo de dos años, propone en 1777 a Pedro González de Castejón, ministro de Marina, la recuperación del nivel de las enseñanzas y la incorporación a las mismas de los nuevos métodos para la obtención de la longitud por medio de cronómetros y distancias lunares. Sus demandas no serán tenidas en cuenta hasta 1783, tras la finalización de la guerra de independencia norteamericana [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 212-213].

I.1.2. Formación Básica

Desarrollo durante el período

El ministro de Marina, Antonio Valdés y Fernández Bazán, ante la deficiencia y disparidad de los planes de estudio entre las tres Academias, convoca en Madrid a los Capitanes de las tres Compañías de Guardias Marinas para consensuar un plan homogéneo, con un equilibrio entre la formación científica y la práctica de la Navegación [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 90].

Con fecha de trece de diciembre de 1783 se establece el *Plan de estudios que parece más conforme para la enseñanza de Guardias Marinas*, elaborado por Miguel Gastón (Comandante en Cádiz), José de Mazarredo (Comandante en Cartagena) y Francisco Gil y Lemos (Comandante en Ferrol). En el Plan se impone una mayor disciplina académica a lo largo de dos años, divididos en semestres.

Vicente Tofiño, Director de la Academia de Guardias Marinas de Cádiz, aprueba el Plan, aunque con reservas sobre la utilidad de este tipo de documentos oficiales. Tofiño insiste en la importancia de un mayor control en el acceso de los cadetes y en el reforzamiento de la autoridad de los maestros [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 220-221].

El Plan brinda un mayor equilibrio entre la formación científica y práctica, orientando el currículo a la generalización del estudio de los métodos para la determinación de la longitud en el mar, según la línea de trabajo esgrimida por Mazarredo en la Academia de Guardias Marinas de Cartagena [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 222-223].

Durantes los años siguientes, el Plan sufre algunas modificaciones parciales y aclaraciones de puntos específicos, buscando el equilibrio entre los estudios teóricos y los viajes de prácticas. En 1793 se permite adelantar semestres a aquellos cadetes que demuestren un talento y aplicación suficientes.

Este Plan supone una importante estructuración de los estudios en las tres Academias, estableciendo el nivel científico mínimo que un Guardia Marina necesita para manejar las nuevas técnicas de Navegación. No se pretende ofrecer una extensa preparación teórica a los cadetes, cometido encomendado a los *Cursos de Estudios Mayores* [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 92].

El Plan se mantendrá vigente, con pequeñas variaciones, hasta la aparición del *Curso de estudios elementales de marina* de Gabriel Ciscar en 1803 [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, pp. 98-99].

Durante esta etapa, las Academias de Guardias Marinas continuaron en sus sedes: la Isla de León, Cartagena y Ferrol.

De la revisión del Plan de 1783 y de diversos Estados Generales de la Armada [SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA, 1799 & 1800], observamos que por lo general el número de maestros en cada Academia era de nueve, incluido el director, siendo tres de ellos de Matemáticas; aunque el Plan de 1783 amplía el número de profesores con un cuarto y un quinto maestro de Matemáticas, en 1799 y 1800 hay en Cádiz tres profesores de Matemáticas más uno comisionado, en Ferrol hay tres y en Cartagena hay cuatro.

La edad de admisión es de entre dieciséis y dieciocho años en 1783, teniendo los capitanes de las Compañías facultad para dispensar a los de quince y diecinueve años cumplidos. Según Hervás [1995, p. 107], no existe un criterio único respecto de la edad idónea para acceder a la Academia; Mazarredo considera que los cadetes deben empezar los estudios antes de los dieciséis años, mientras que Tofiño considera que la excesiva juventud e inmadurez de los alumnos no les permite entender las demostraciones, limitándose a memorizarlas.

Respecto a la documentación para ingresar, en 1799 y 1800 es necesario ser Caballero hijodalgo notorio por ambas líneas, saber leer y escribir, no tener imperfección corporal, aprovechar los estudios y resistir las fatigas de la navegación.

Plan de Estudios

Plan de 1783 [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 220-221]:

Duración de dos años, a curso por semestre.

Asignaturas: Aritmética, Geometría Plana y Sólida, Trigonometría Plana, Cosmografía, Trigonometría Esférica con la práctica de resoluciones trigonométricas (mediante logaritmos, escalas plana y de Gunter, cuadrante de reducción y demás instrumentos trigonométricos) y Navegación, con la práctica de las observaciones de latitud y longitud.

Durante la tarde se impartirían las clases de Dibujo, Fortificación, Francés, Artillería y Maniobra, Armas, Danza y Esgrima y Geometría práctica, cada cual según sus posibilidades, sin exigir más que unos conocimientos elementales.

Texto para la enseñanza:

- *Compendio de matemáticas para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas. Aritmética*, de Louis Godín (añadido de un tema de logaritmos y otro de decimales en tanto Cipriano Vimercati, Director de la Academia de Ferrol, elaboraba un nuevo tratado, que al parecer no escribió).
- *Compendio de la geometría elemental y trigonometría rectilínea*, de Vicente Tofiño (más una lección sobre sólidos y otra de planimetría escrita por el Director de Cádiz).

- *Trigonometría esférica, para uso de la Compañía de guardias-marinas*, de Antonio Gabriel Fernández.

I.1.3. Formación Superior

Curso de Estudios Mayores

La actividad en el Observatorio sufre una reactivación al ocupar Tofiño en 1768 el puesto de Director, estableciendo la necesidad de seleccionar un pequeño grupo de cadetes para mejorar su formación teórica. Esta propuesta es aprobada por el ministro de Marina, Pedro de Castejón, con el deseo de prestigiar el estudio de las ciencias y promover la profesionalización científica de oficiales [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 229-230].

El proyecto no se desarrolla hasta 1883, cuando las necesidades científicas y tecnológicas de la Armada, especialmente relacionadas con un ambicioso proyecto hidrográfico, demandan la creación del *Curso de Estudios Mayores*. Su puesta en marcha supone la reactivación del Observatorio y la instauración de la Astronomía náutica en España [SELLÉS, 2000, pp. 224-225].

Con el *Curso* se pretende establecer un cuerpo selecto de oficiales que realicen estudios de nivel superior mediante un ciclo de estudios avanzados, con el fin de soportar el esfuerzo expedicionario e hidrográfico de la Armada, de disponer de profesorado para las Academias y de cubrir los más altos escalones del Cuerpo [LAFUENTE & SELLÉS, 1989, pp. 487-488].

Miguel José Gastón, Comandante de la Compañía de Cádiz, aprueba una representación el veintinueve de mayo de 1783 sobre la conveniencia de agregar oficiales a su Compañía para realizar estudios avanzados. Gastón encarga a Tofiño la redacción de un Plan de Estudios con el objetivo de adiestrar en la Navegación por medio de la Astronomía a los oficiales agregados [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, p. 230].

La creación del *Curso* no es tarea fácil ante la disparidad de criterios en las tres Academias, siendo numerosas las desavenencias sobre su diseño entre Mazarredo, Gil y Lemos, Jacinto Ceruti (Director de la Academia de Cartagena) y Cipriano Vimercati (Director en Ferrol)[3]. Finalmente, los contenidos, su extensión y los tratados seguidos quedan en manos de los directores de las tres Academias, aunque con tendencia a seguir el esquema del *Curso* seguido en Cartagena [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 235-236].

Gabriel Ciscar, siendo Ayudante de la Compañía de Cartagena, propone en 1785 un nuevo Plan más completo y moderno, orientado a la física teórica y experimental. Mazarredo aprueba y

[3] Para conocer más sobre el complicado proceso de elaboración de este Plan, se puede consultar [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 230-235] y [GIL, 2013].

defiende la propuesta, recibiendo el beneplácito de Gil y Lemos; el Plan es sancionado por Real Orden de catorce de noviembre de 1785 [LAFUENTE & SELLÉS, 1989, pp. 497-499].

Este Plan establece que al finalizar los estudios, se celebre un certamen público de alto nivel científico.[4]

Plan de Estudios [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, pp. 230-236]:

- Curso de Estudios Mayores en Cádiz (1783):
  Después de un extenso curso de Trigonometría se insiste en el aprendizaje del método de las distancias lunares y el empleo de los cronómetros marinos y todo lo relativo de “lo que se llama la Astronomía Náutica”
- Curso de Estudios Mayores en Cartagena (1783):
  Repaso a fondo de todas las enseñanzas que recibieron de cadetes, seguido del estudio del curso matemático en cuatro volúmenes de las *Leçons élémentaires* de La Caille
- Curso de Estudios Mayores en Ferrol (1783):
  Tres años de estudios seguidos de otro de “ejercicio”. En los primeros, se estudiarían a fondo las Matemáticas, incluyendo el Cálculo diferencial e integral, así como la Óptica y la Astronomía, por los tratados de Bézout y La Caille.
- Curso de Estudios Mayores en las tres Academias (1785):
  Duración cuatro años. El Álgebra por las lecciones de La Caille a las que se añade una exposición del Cálculo de variaciones. La Trigonometría, Secciones cónicas, etc., se tratarán de estudiar aplicándolas en lo posible a la Astronomía u otras materias a contemplar en el curso.

Textos para la enseñanza:

- *Lecons élémentaires de mathématiques*, de La Caille, en la edición de 1784 comentada por Marie (se añadirá una exposición del cálculo de variaciones).
- *Cours de mathematiques a l’usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, de Bézout.
- *Examen Marítimo,* de Jorge Juan (la Trigonometría, Secciones cónicas, etc., se tratarán de estudiar aplicándolas en lo posible a la Astronomía u otras materias a contemplar en el curso, cuidando que la mayoría de los ejemplos y ejercicios procedan del *Examen Marítimo* y las demás obras adaptadas como texto para el Curso).

[4] Se pueden consultar los detalles del *Plan de los certámenes que se presentan los oficiales que han estudiado el curso de Matemáticas Sublimes bajo la dirección del teniente de Navío D. Gabriel de Ciscar, Director de la Academia de Guardias Marinas* en [SELLÉS & LAFUENTE, 1989, pp. 500-502].

Curso de Matemáticas Sublimes

Por Real Orden de veintidós de mayo de 1787 se crea el *Curso de Matemáticas Sublimes*. Al igual que con los *Cursos de Estudios Mayores*, se pretende establecer un amplio grupo de oficiales que sustenten el programa hidrográfico y constituyan un escalón superior en la Armada. Se darán ciertas polémicas sobre la dureza de los conocimientos, si bien se exigirán a un número reducido de oficiales a los que se les dará libertad de elegir el ramo de especialización [LAFUENTE & SELLÉS, 1988, p. 242].

El dieciséis de junio de 1787 se establece que los directores de las Academias enseñen a los oficiales que realicen el curso la Geometría sublime, el Cálculo y su aplicación a la Astronomía, la Mecánica y la Construcción [SÁNCHEZ CARRIÓN, 2009, p. 71].

Ese mismo año, Gabriel Ciscar propone dividir el *Curso* en tres partes y realizar un *Certamen Público* al concluir cada una de ellas para aumentar el interés de los oficiales, servir de repaso y permitir profundizar en algunas materias. Ciscar propone un *Certamen* para cada uno de los tres años del *Curso* y dividir cada una de las tres asignaturas (Álgebra, Mecánica y Astronomía) en diez partes, tantas como asistentes al *Curso*. Domingo de Nava, Capitán en Cartagena y Mazarredo, Comandante del Cuerpo, se muestran a favor de la propuesta, mientras que Gil y Lemos se muestra en contra al considerar excesivo el tiempo que se debería dedicar a los repasos previos a los *Certámenes*. Por Real Orden de dieciséis de junio de 1787 se impide la división de materias del *Curso*, si bien el quince de enero de 1789 Ciscar logra que se apruebe el *Plan de los certámenes que pueden hacer los ocho oficiales destinados al curso de estudios mayores, que se hallan en el departamento de Cartagena* [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 119].

El *Curso de Matemáticas Sublimes* es concebido en un principio para Astrónomos, profesores de las Academias y miembros del alto mando, si bien éstos formarán únicamente el 39 por 100 del total de participantes, siendo el resto oficiales ingenieros de Marina [SÁNCHEZ CARRIÓN, 2009, pp. 71-72].

En opinión de Gil [2013, p. 58], no parece aventurado concluir que los estudios mayores o sublimes de Matemáticas constituyeron uno de los episodios más brillantes de la educación científica española de la Ilustración.

Sobre la asistencia de oficiales a los *Cursos de Estudios Mayores* y a los *Cursos de Matemáticas Sublimes*, en Cádiz fueron destinados cuarenta oficiales entre 1783 y 1792, doce en 1799 y en 1800; en Cartagena ocho en 1783 y en 1791, cuatro en 1799 y en 1800; en Ferrol quince en 1785, veinte en 1787, trece en 1789, nueve en 1799 y en 1800 [SECRETARÍA DE ESTADO Y

DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA, 1799 & 1808] & [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 120] & [GIL, 2013, p. 55]

Plan de Estudios

Tres Compañías, dieciséis de junio de 1787 [SÁNCHEZ CARRIÓN, 2009, p. 71]:

Geometría sublime, el Cálculo y su aplicación a la Astronomía, la Mecánica y la Construcción.

Ferrol, 1787 [SÁNCHEZ CARRIÓN, 2009, p. 73]:

Álgebra y Geometría superior, Cálculo diferencial e integral, Mecánica, Óptica y Astronomía.

I.2. Las Matemáticas en la organización y estructura de los estudios desarrollados en la Armada en el siglo XIX

I.2.1. Academia de Guardias Marinas (1802-1824)

I.2.2.1. Síntesis del periodo

Esta etapa comienza con una cierta decadencia durante los inicios del reinado de Carlos IV que se agudiza tras la derrota de Trafalgar, si bien la Guerra de Independencia supuso el mayor deterioro en las tres Academias de Guardias Marinas.

Durante estos años, Gabriel de Ciscar es la figura más representativa. Por un lado es el autor en 1803 del *Curso de Estudios Elementales de Marina* [CISCAR, 1803a], obra elaborada para dar uniformidad a los estudios básicos de las Academias de Guardias Marinas. Este *Curso* determinó los contenidos que un aspirante debía adquirir durante su formación, desempeñando la función de un Plan de Estudios y siendo el texto de mayor repercusión en la formación en la Armada a lo largo del siglo XIX.

Por otro lado, Ciscar elabora en 1807 un Plan para el *Curso de Estudios Mayores* que no se llevará a cabo como consecuencia de la Guerra de la Independencia, aunque en 1812 y 1814 se realizaron *Cursos de Estudios Mayores* para la formación superior de oficiales.

En 1814, un decreto ordena la suspensión de la entrega de cartas-órdenes de asiento para Guardias Marinas, dando lugar al cierre efectivo de las Compañías de Cartagena y Ferrol y a la reagrupación de los tres centros de formación en la Academia de Cádiz por Real Orden de agosto de 1824 [LÓPEZ SÁNCHEZ & VALERA CANDEL & LÓPEZ FERNÁNDEZ, 1995, Clausura de la academia].

I.2.2.2. Formación Básica

Desarrollo durante el período

El interés por equiparar en las tres Academias las enseñanzas impartidas, su amplitud y objetivos, motivan el encargo por parte del ministro Grandallana a Gabriel Ciscar, mediante una Real Orden de veinte de junio de 1802, de *"(...) un curso o tratado de estudios para el uso de las Academias de Guardias Marinas, pues que siendo uno mismo el fin y la ciencia debe por* *consiguiente ser también uniforme la enseñanza, la cual deberá asimismo extenderse a las Academias de Pilotos, Colegios de San Telmo y demás Escuelas Náuticas del Reino."* [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 155].

Este nuevo tratado debía contener *"… lo puramente necesario para las aplicaciones ordinarias de la guerra y navegación, que no debe ignorar ningún oficial de Marina, y que dicha obra ha de escribirse con la concisión y claridad que exige la comprehensión de los jóvenes"* [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 155], por lo que se pretendían dejar fuera aquellos conocimientos teóricos innecesarios para los cadetes.

En agosto de 1802 Ciscar remite a Grandallana el Plan del Curso, constando de seis partes, junto con el extracto de cada uno de los tratados correspondientes. El dieciséis de septiembre de 1802 se establece el *Dictamen sobre el plan de estudios del Curso de estudios elementales de Marina* [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 156], siendo aprobada la propuesta en su mayoría y autorizando la confección de la obra a Ciscar.

En 1803 el *Curso* fue declarado texto obligatorio en las Academias de Guardias Marinas, sirviendo como nuevo Plan de Estudios para la formación básica en los tres centros. El veinticuatro de noviembre de 1805 se convierte en texto para las Escuelas de Náutica, siendo durante buena parte del siglo el referente imprescindible para la formación teórica de los marinos españoles.

La obra de Ciscar se adaptó plenamente a las necesidades del momento en la Armada, permitiendo por primera vez que los cadetes pudieran asimilar todo los contenidos a lo largo de su formación. Como ha señalado López Sánchez[5] [1994, p. 219], la experiencia acumulada por Ciscar durante los años de profesor y Director de la Academia de Cartagena desempeñó un papel fundamental en este enfoque. El texto presenta un nivel elemental sin renunciar al rigor e incluye contenidos sobre algunas de las más recientes técnicas de Navegación, como las distancias lunares o los cronómetros.

Cabe observar la aparente contradicción de Ciscar al afirmar que el estudio de la Trigonometría Esférica resultaba innecesario para un oficial, dado que seis años antes había publicado un texto sobre la materia [CISCAR, 1796]. Sobre esto, López Sánchez [1994, p. 158] opina que *"… parece producto de su propia experiencia como profesor y director. No en vano, Ciscar, que*

[5] La obra de Juan Francisco López Sánchez [1994] nos ha proporcionado valiosa y abundante información sobre la producción de Gabriel Ciscar y los centros de formación en la Armada a finales del siglo XVIII y principios del XIX.

había dirigido un completo y actualizado Curso de Estudios Mayores para oficiales, y que había sido responsable de las enseñanzas de los cadetes de la Academia de Cartagena durante diez años, era consciente de que un buen oficial de marina no tenía que poseer necesariamente una formación muy amplia -para esto ya se convocaban los Cursos para oficiales-, sino que era preferible tener menos conocimientos, pero bien asentados. Por ello el Curso era elemental, y obligatorio para todos los aspirantes a oficiales. Desde este punto de vista, el conocimiento profundo de la trigonometría esférica y sus aplicaciones quedaba reservado para los estudios de especialización."

En el *Curso de Estudios Elementales de Marina* podemos encontrar tres partes notoriamente diferenciadas. La primera presenta a lo largo de dos tomos –Aritmética y Geometría- las herramientas matemáticas necesarias para poder manejar el resto de tratados de la obra y tiene como objetivo uniformar el nivel básico de conocimientos matemáticos de los cadetes. La segunda parte la integran los tomos de Cosmografía, Pilotaje y Maniobra, que persiguen formar teórica y prácticamente al oficial de la Armada, siendo destacable el tratamiento de la Trigonometría Esférica en los primeros capítulos del tratado sobre Cosmografía. La última parte de la obra corresponde al sexto tomo, que presenta contenidos de carácter militar.
Los dos últimos tomos, titulados *Tratado de Maniobra, dividido en dos partes* y *Rudimentos de Arte Militar Marítimo* no fueron publicados, teniendo López Sánchez [1994, pp. 207-217] constancia de sus extractos pero no de su elaboración.

Durante el periodo estudiado, las Academias de Guardias Marinas continuaron en sus respectivas sedes: la Isla de León (Cádiz), Cartagena y Ferrol.
De la revisión de diversos Estados Generales de la Armada, [SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA, 1808, 1815 & 1818], observamos que por lo general el número de maestros en cada Academia era de nueve, incluido el Director, siendo tres de ellos de Matemáticas. La duración de los estudios era de dos años, al igual que en el anterior periodo. La edad de admisión fue variando, por ejemplo, entre dieciséis y dieciocho en 1808, de trece a dieciséis en 1818. Igualmente fue variando la documentación para ingresar, siendo necesario en 1808 ser Caballero hijodalgo notorio por ambas líneas, condición que se suprimió por Real Decreto de trece de agosto de 1813, que fue a su vez derogado el cuatro de mayo de 1814, restablecido el siete de marzo de 1820 y nuevamente derogado el doce de diciembre de 1823, recobrando su vigencia la disposición de siete de marzo de 1820. El número de plazas se mantuvo estable, siendo en general de cuarenta por Compañía.

Plan de Estudios

Extraído del índice del *Curso de Estudios Elementales de Marina*:

I. Tratado de Aritmética, en que se dará razón de las operaciones, y se reducirán estas a las más precisas para facilitar la práctica de la Navegación.

II. Tratado de Geometría, en que se demostrarán las propiedades de las líneas, superficies y sólidos, que sirven de base para la resolución de los problemas náuticos y comprehenderá las nociones de Geometría práctica y de Trigonometría rectilínea de que se hace uso en el Pilotage.

III. Tratado de Cosmografía, que comprehenderá algunas nociones sobre los círculos, líneas y puntos que se imaginan en la esfera, los elementos de Astronomía y Geografía que facilitan la inteligencia del Pilotage, y la solución de los Problemas usuales de Astronomía náutica, por métodos más expeditos que los que se deducen inmediatamente de la Trigonometría Esférica, cuyo estudio resulta innecesario.

IV. Tratado de Pilotage, que comprehenderá el manejo de los instrumentos de esta Arte, y la explicación de los métodos más adequados para determinar el punto de la Nave y dirigir la derrota, por la resolución de los Problemas que dependen de la línea del rumbo, y por las observaciones astronómicas.

V. Tratado de Maniobra, dividido en dos partes.

La primera, baxo el título de parte teórica, comprehenderá la exposición y aplicación de algunos principios de Mecánica.

La segunda, bajo el título de parte práctica, comprehenderá las maniobras y faenas más esenciales para el manejo y conservación de la Nave, al ancla y a la vela.

VI. Rudimentos de Arte Militar Marítimo, divi[di]dos en tres partes.

La primera parte, baxo el título de Nociones de Artillería, comprehenderá todo lo relativo al manejo de las armas y artificios de fuego de que se hace uso a bordo de los Navíos.

La segunda parte, baxo el título de Advertencias esenciales sobre las maniobras de combate, comprehenderá las prevenciones para combate, y las reglas más precisas para dar caza, abordar, y batir, al ancla y a la vela.

La tercera parte, baxo el título de Nociones de Táctica Naval, comprehenderá únicamente las definiciones y preceptos fundamentales de esta Arte, de la que sólo se dará una idea general.

Materias de Matemáticas:

Extraído del índice del *Curso de Estudios Elementales de Marina*:

- Aritmética

- Geometría (en que se demostrarán las propiedades de las líneas, superficies y sólidos, que sirven de base para la resolución de los problemas náuticos y comprehenderá las nociones de Geometría práctica y de Trigonometría rectilínea de que se hace uso en el Pilotage)
- Algunas nociones sobre los círculos, líneas y puntos que se imaginan en la esfera.

Texto para la enseñanza:
Curso de Estudios Elementales de Marina, de Gabriel Ciscar.

I.2.2.3. Curso de Estudios Mayores

Desarrollo durante el período
Manuel Godoy, primer ministro de Carlos IV, encarga a Ciscar en 1807 un proyecto de Plan de Estudios para un nuevo *Curso de Estudios Mayores* [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 125].
Por su parte, Ciscar, en su escrito *"Ydeas sobre la enseñanza de los Cursos de Estudios Mayores, en cumplimiento de orden del Serenísimo Señor Príncipe Generalísimo Almirante del 11 de Agosto último"* propone para su ingreso un examen sobre los cuatro primeros tratados del *Curso de Estudios Elementales de Marina*, junto con conocimientos de francés y haber realizado algunas navegaciones [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 125].
Tal y como recoge González González [1992, p. 126 ss.], Ciscar plantea una duración de tres años, tres profesores para impartirlo (preferiblemente oficiales de Marina) y un número máximo de veinte alumnos. Se impartirían diariamente dos horas y media de clase y las asignaturas propuestas son Álgebra, Mecánica de sólidos, Fluidos, Astronomía, Construcción naval y Obras hidráulicas.
Las asignaturas directamente relacionadas con las Matemáticas son Álgebra finita, con sus aplicaciones a la Aritmética y la Geometría, Secciones cónicas, Cálculo diferencial e integral y Mecánica de sólidos y fluidos.
Los textos recomendados son los tomos 3º, 4º y 5º del *Cours de mathematiques a l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* (6 Vols.) de Bézout en la edición de 1764, el *Examen Marítimo de Jorge Juan, adicionado por Ciscar* de Juan en la edición de 1793 [JUAN, 1793] y el *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix en la edición de 1797-1800. De igual modo se podrían utilizar las *Lecons élémentaires de mathématiques* de La Caille, en la edición de 1784 comentada por Marie, que ya recomendara Ciscar en 1785.

Ciscar plantea la posibilidad de que los textos fueran obras de autores castellanos, con lo que: "*… pudiera estudiarse el Algebra finita, con sus aplicaciones, por el Curso de D. Benito Bails*[6]*, los cálculos diferencial e integral por los principios generales, que preceden al primer libro del Examen Marítimo adicionado*[7]*…*" [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 128]. En los últimos cinco meses del tercer año del *Curso* se realizaría un repaso general, tras el que se efectuarían certámenes públicos.

López Sánchez [1994, p. 127] indica que los oficiales que quisieran ser destinados al ramo de ingenieros estudiarían durante el cuarto año teoría y práctica de Arquitectura hidráulica y Construcción naval, mientras que los interesados en Astronomía cursarían su teoría y práctica durante el cuarto y quinto años.

El trece de abril de 1808, Espinosa envió al ministro Gil y Lemos el Plan de Ciscar, si bien no se tienen más noticias sobre el mismo, presumiblemente debido al inicio de la Guerra de Independencia [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, p. 128].

Podemos ver que las Matemáticas constituyen el núcleo formativo del Proyecto de Plan de Estudios para el *Curso de Estudios Mayores* de 1807 de Ciscar, siendo destacable que *"… el conjunto de autores recomendados dejan clara la evolución de su posición, al menos docente, en lo que a la aceptación del cálculo diferencial continental de matriz francesa se refiere."* [AUSEJO & MEDRANO, 2012, p. 315].

El dieciséis de abril de 1812, el ministro Vázquez Figueroa ordenó la apertura en cada uno de los Departamentos de un *Curso de Estudios Mayores*, debiendo ser impartido por el primer maestro de cada Academia [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1994, pp. 128-129]. En este *Curso* se siguieron los textos de Bézout, Lalande y La Caille, si bien cabe notar que José Sánchez Cerquero, Director de la Academia de Guardias Marinas de Cartagena, manifestó su desacuerdo con los mismos al no considerarlos suficientemente actuales.

Posteriormente se realizó otro curso en 1814 y se dio orden para comenzar un curso en 1817, que no llegó a iniciarse.

Plan de Estudios

Plan propuesto por Ciscar en 1807:

---

[6] Según Ausejo & Medrano [2012, p. 314-315], "… resulta imposible determinar si Ciscar se refiere a los *Elementos de Matemática* (10 vols., Madrid, 1772-1783) o a *los Principios de Matemática* (3 vols., Madrid, 1776, 3ª ed. 1795, 4ª ed. 1805) de Bails".

[7] [JUAN, 1793]

- Álgebra
- Mecánica de sólidos
- Fluidos
- Astronomía
- Construcción naval
- Obras hidráulicas

Materias de Matemáticas:

Plan propuesto por Ciscar en 1807:

- Álgebra finita, con sus aplicaciones a la Aritmética y la Geometría.
- Secciones cónicas.
- Cálculo diferencial e integral.
- Mecánica de sólidos y fluidos.

Textos para la enseñanza:

Plan propuesto por Ciscar en 1807:

- Tomos 3º, 4º y 5º del *Tours de mathematiques a l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* (6, Vols., París, 1764-69) de Bézout.
- *Examen Marítimo de Jorge Juan, adicionado por Ciscar* (Madrid, 1793).
- *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* (2 Vols., París, 1797-1800) de Lacroix.
- *Lecons élémentaires de mathématiques* de La Caille, en la edición de 1784 comentada por Marie.

Curso en 1812:

- *Cours de mathematiques a l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, de Bézout.
- *Astronomie* (deducimos que es esta obra, no lo ponía explícitamente) de Lalande.
- *Lecons élémentaires de mathématiques* de La Caille, en la edición de 1784 comentada por Marie.

I.2.2. Colegio Real y Militar de Caballeros Guardias Marinas (1825-1828)

I.2.2.1. **Síntesis del periodo**

La orden de agosto de 1824 sobre el reagrupamiento de las tres Compañías de Guardias Marinas indicaba *"…que se lleve a efecto sin pérdida de tiempo la reunión de las tres Compañías de Guardias Marinas en una sola, y que se informe sobre si la única compañía que debe quedar, ha de establecerse en San Fernando en el Puerto de Santa María."* [LÓPEZ SÁNCHEZ & VALERA CANDEL & LÓPEZ FERNÁNDEZ, 1995, Clausura de la academia].
De esta forma se retornó a la ordenación existente antes de 1776, pasando la Compañía resultante por varias ubicaciones durante 1824 e instalándose finalmente en el arsenal de La Carraca bajo la denominación de Colegio Real y Militar de Caballeros Guardias Marinas.

El centro estuvo en funcionamiento durante cuatro años, pero las dificultades económicas, dada la mala situación de la Hacienda y el hecho de que el recinto del Colegio no reuniera las condiciones adecuadas, motivaron su cierre. Éste se dispuso por Real Orden de veintidós de enero de 1827, llevándose a cabo en febrero de 1828 [BLANCA, 1991, pp. 25-26].

I.2.2.2. **Formación Básica**

El centro se abre el catorce de abril de 1825 en el arsenal de La Carraca, San Fernando, restableciéndose la admisión de cadetes tras haber sido suspendida desde 1821, después de sendos intentos en Cádiz y El Puerto de Santamaría [BLANCA, 1991, p. 24].

El *Reglamento provisional aprobado por el rey nuestro señor, para el establecimiento y gobierno del colegio real y militar de caballeros guardias marinas* [MINISTERIO DE MARINA, 1825], firmado por el ministro Luís María Salazar, se estableció en 1825. En su artículo 101 encontramos que "*El curso de estudios que se siga en el Colegio será el mismo que se observa actualmente en las Academias de Guardias Marinas. Pero sin embargo de esto el examen de entrada que hagan los Colegiales, según el artículo 73, y el de las otras materias que puedan tener adelantadas, se verificará por los mismos autores que hayan seguido, caso de* *pedirlo los interesados.*" [MINISTERIO DE MARINA, 1825, p. 39], por lo que la duración de los estudios y el Plan seguido no se alteraron en el nuevo centro.

El veintiocho de enero de 1826 se inician las clases del Colegio bajo la dirección del brigadier Manuel Lobo Campos. En el centro los alumnos realizaban sus estudios en un régimen de internado, hasta que saliesen a navegar. El Colegio estaba bajo la inspección y autoridad del Director y Capitán General de la Real Armada, que era el Capitán General del Departamento de Cádiz.

Para la admisión de los Aspirantes en el centro, a los que se les pedían pruebas de nobleza, era necesario tener entre trece y dieciséis años. Debían superar un examen de ingreso para el que, entre otros conocimientos, tenían que disponer de "*…grado suficiente de elementos de Aritmética y Geometría*" [MINISTERIO DE MARINA, 1825, p. 29].
El número de Colegiales Guardias Marinas era de sesenta, entre los que estuvieran cursando los estudios y los nuevos ingresos.
Respecto a la duración de las clases, "*Las horas de Academia y repaso las arreglará el Director principal del Colegio con la Junta directiva segun las estaciones; en el concepto de que deberán ser tres horas por la mañana, y dos por la tarde, y que habrá que preceder la aprobación del Director general de la Armada.*" [MINISTERIO DE MARINA, 1825, p. 40].
Es destacable el hecho de que oficiales jubilados o retirados de la Armada y del Ejército pudieran ser maestros de Matemáticas y Navegación.
Los exámenes que se realizaban para que los alumnos pasasen de una clase a otra se celebraban en presencia de la Junta directiva, oficiales y Maestros.

Cuando el Guardia Marina concluía los estudios académicos, hallándose en estado de poder embarcar para comenzar su carrera naval, debía examinarse sobre todas las materias científicas.
Ya embarcado, el Comandante de cada buque debía organizar el método y las horas de estudio que diariamente empleaban los Guardias Marinas para repasar los elementos de Matemáticas que tuvieran estudiados y singularmente el Pilotaje astronómico y loxodrómico. Cumplidos seis años de navegación, realizaban un último examen de la parte elemental y práctica del pilotaje, maniobra y artillería.

I.2.3. Sin centro docente (1828-1844)

Tras el cierre del Colegio Real y Militar de Caballeros Guardias Marinas y la suspensión de la realización del proyectado Colegio Naval por Real Orden de veintidós de enero de 1828, se pusieron en venta los libros y mobiliarios de las antiguas Academias, disponiéndose que "…*los jóvenes que pretendiesen servir de Guardias Marinas, deberían hacer sus estudios particularmente hechos, probar su suficiencia ante una Junta de jefes de la Armada que los examinase en la capital del Departamento de Cádiz, y que, una vez aprobados, habían de recibir seguidamente la orden de embarco.*" [FERNÁNDEZ GAYTÁN, 1997, p. 202].

De esta forma, los Aspirantes a oficiales de Marina realizaban sus estudios de forma privada en centros autorizados, como los Colegios de San Telmo de Sevilla y Málaga o las Escuelas de Pilotaje. Posteriormente, previa concesión de una carta-orden, necesitaban aprobar un examen de materias elementales y otras relacionadas con la Navegación ante la Junta de Jefes creada al efecto en Cádiz.

En épocas anteriores coexistieron los llamados "aventureros", jóvenes que se embarcaban sin sueldo ni uniforme pero con gratificación de mesa, si bien Blanco & Fernández [2008, p. 22] revelan que no han podido localizar disposiciones que documenten esta clase de aventureros durante el periodo.
Una vez admitidos procedían a embarcar por un período de seis años, al igual que en la etapa anterior, realizando finalmente un examen sobre ejercicios teóricos y prácticos de las materias necesarias para un oficial de Marina. Superado el examen alcanzaban el grado de Alférez de Navío.

En mayo de 1831 se restableció la *Academia experimental* a bordo de la fragata *Perla*, realizándose también prácticas de Navegación en el navío *Soberano* [BLANCA, 1991, p. 25].
Durante todos estos años se realizaron gestiones para poner en marcha un nuevo centro de formación, el Colegio Naval. Afirma Blanca [1993, p. 52], que el dos de julio de 1832, a propuesta del Director del Colegio de San Telmo de Sevilla, José Primo de Rivera, se determina mantener el régimen interior de los Colegios de pilotos de Sevilla y de Málaga mientras se estudia la posibilidad de instalar el nuevo centro en el Colegio de San Telmo de Sevilla y de convertir el de Málaga en una escuela de Náutica. El proyecto tuvo una buena acogida en

concordancia con la idea del Ministerio de crear un centro general de enseñanza para todos los Cuerpos de la Armada, pero el Plan quedó en suspenso.

Blanco y Fernández [2008, p. 21] sostienen que en junio de 1834 se propuso sustituir las clases que se impartían a los Guardias Marinas por cursos de estudios superiores. Dicha propuesta no se llevó a cabo al publicarse un nuevo reglamento por Real Orden de diez de noviembre del mismo año. En este mismo año fueron suprimidas definitivamente las pruebas de nobleza.

Según Blanca [1993, p. 54], el seis de noviembre de 1837, el ministro de Marina Francisco Javier Ulloa y Ramírez de Laredo propuso, mediante decreto, la supresión de los Colegios de Pilotos de San Telmo y la aplicación de sus rentas, efectos y mobiliario al ansiado Colegio Naval. Dicho decreto fue impreso y puesto en circulación, aunque finalmente se archivó al cesar Ulloa como ministro.

Su sucesor, Manuel de Cañas Trujillo, encargó a Saturnino Montojo, primer astrónomo del Observatorio de San Fernando, un informe para la formación del Colegio Naval en el mes de diciembre. Las nuevas gestiones fueron paralizadas por las guerras carlistas hasta que el veintiocho de febrero de 1841, un decreto del ministro de Marina Joaquín Frías Mollá dispuso que el nuevo centro se estableciese en el Colegio de San Telmo de Sevilla, con una primera promoción de cincuenta alumnos; los alumnos de dicho centro debían ser trasladados al Colegio de San Telmo de Málaga. La orden quedó de nuevo sin efecto debido al cambio de política por el cese del ministro [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 21].

El nuevo ministro de Marina, Andrés García Camba, firmó el decreto de veintitrés de junio de 1841 en el que se indicaba que el futuro Colegio Naval se establecería en el Departamento de Ferrol. La redacción del reglamento del centro, que llegó a ser publicada, se encomendó al Director del Observatorio, José Sánchez Cerquero, pero finalmente fue desestimada la ubicación del Colegio [BLANCA, 1991, p. 26].

Blanco & Fernández [2008, p. 22] indican que el ministro de Marina, Dionisio Capaz, ordenó en 1842 la creación de un Colegio Naval en San Fernando; en un principio se tenía pensado instalarlo en La Carraca, pero se renunció a este emplazamiento por las limitaciones del recinto. Los alumnos ingresarían como Aspirantes de Marina, clase anterior a la de Guardias Marinas creada en 1841.

El ministro de Marina, Comercio y Gobernación, José Filiberto Portillo, realiza el veintidós de enero de 1844 una memoria dirigida a la Reina Isabel II titulada *"Sobre el decadente estado de la Marina y medidas para fomentarlo..."*, en la que denuncia los principales problemas en la Armada a lo largo de los últimos treinta años. Dicho informe fundamentaría la "*Exposición de Motivos*" del Real Decreto de veintidós de enero de 1844 donde se determina el establecimiento de un Colegio Naval Militar. En dicho decreto se indicaba que el Colegio se establecería "*… en el Departamento de Marina que señale el Ministro de este ramo como más conveniente."* [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 23].

Finalmente, siendo ministro de Marina Francisco Armero y Pañaranda, se elegiría la nueva población de San Carlos en la Isla de León como sede del Colegio Naval Militar por decreto de dieciocho de septiembre de 1844 [BLANCA, 1991, p. 27].

I.2.4. Colegio Naval Militar (1844-68)

I.2.4.1. Síntesis del periodo

El Colegio Naval Militar es inaugurado el uno de enero de 1845 en la población de San Carlos, San Fernando. Durante sus años de actividad se producen numerosos adelantos industriales que demandarán una reiterada revisión de los Planes de Estudios y Reglamentos en el Colegio.

La enseñanza que recibían los futuros oficiales se dividía en tres etapas. La primera la realizaban los Aspirantes en el Colegio y era eminentemente teórica; según el Reglamento vigente, tuvo una duración de dos años y medio a tres años y medio. Una vez aprobados los exámenes en el centro, ascendían a Guardias Marinas de 2ª clase y embarcaban en buques de instrucción para continuar la segunda etapa de su formación. Posteriormente, tras aprobar un examen, ascendían a Guardias Marinas de 1ª y en esta tercera etapa eran repartidos por los buques de la Armada hasta que tenían vacante de Oficial, volviendo al Colegio Naval y examinándose para ascender a Alférez de Navío.

Asimismo, se impartieron *Cursos de Estudios Sublimes* en el Colegio Naval Militar. Estos cursos tenían una duración de entre dos y tres años según el Reglamento vigente y proporcionaban a la Armada oficiales científicos, astrónomos al Observatorio de San Fernando e hidrógrafos y oficiales al Cuerpo del Estado Mayor de Artillería de la Armada.

A lo largo de veintitrés años se formaron 1.002 alumnos en el Colegio, distribuidos en cuarenta y dos promociones. El número excesivo de Guardias Marinas, serias dificultades de la Hacienda y el Sexenio Revolucionario aceleraron el cierre del Colegio el diez de mayo de 1868.

I.2.4.2. Formación Básica

Desarrollo durante el período

El veintiséis de febrero de 1844 se aprueba el primer Reglamento del Colegio Naval Militar, siendo sustituido por otro el dieciocho de septiembre del mismo año con la intención de mejorar el funcionamiento del futuro centro. El Plan de Estudios es de tres años, estableciéndose una capacidad de ochenta alumnos y una edad de ingreso de entre trece y quince años, con ciertas excepciones para hijos del Cuerpo [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, pp. 24-25][8].

El centro se inaugura el uno de enero de 1845 en la población de San Carlos, abriendo sus puertas el ocho de marzo y siendo su primer Comandante-Director José del Río Eligio [FERNÁDEZ GAYTÁN, 1997, p. 203].

Saturnino Montojo, por Real Orden de veintidós de marzo de 1848, es comisionado para redactar el curso de estudios elementales del Colegio Naval, si bien no pudo efectuarlo al tener que trabajar plenamente en la elaboración del almanaque náutico español [BLANCA, 1991, pp. 34-35]. Posteriormente, Montojo elaboró los tratados elementales de Aritmética, Álgebra y Trigonometría para la formación en el Colegio[9].

Por Real Decreto de veintinueve de noviembre de 1848 se promulga un nuevo Reglamento, siendo destacable que la duración de la formación son siete semestres y los Aspirantes deben realizar un examen al finalizar sus estudios [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 27].
Es también relevante la posibilidad de que "*Si algun pretendiente á su ingreso en el Colegio estuviese en disposicion de adelantar uno ó dos semestres que hubiese estudiado privadamente, será examinado de la materia de él ó de ellos por la junta de exámenes semestrales. Se les dará dos semanas de término por cada semestre que crean poder ganar, á fin de que puedan repasar las materias contenidas en ellos. Para salir bien en estos exámenes y adelantar curso se requiere el grado de muy bueno por pluralidad en las materias principales, y el de mediano en las accesorias correspondientes al exámen que haga, segun el sistema establecido en el Colegio.*" [MINISTERIO DE MARINA, 1848, p. 23].

Un nuevo Reglamento es aprobado por Real Orden de siete de julio de 1855. Se fija la edad de ingreso entre los once y catorce años, debiéndose examinarse del primer y segundo semestre los que tuvieran doce y trece años [GUILLÉN, 1919, p. 181].

La Real Orden de uno de enero de 1856 dispuso un nuevo Reglamento formulado por el jefe de escuadra y vocal del almirantazgo, Juan José Martínez Espinosa y Tacón. Otra Real Orden, de

[8] La obra de los Capitanes de Navío Pedro Fernández Núñez y José María Blanco Núñez [2008] nos ha proporcionado cuantiosa información sobre el Colegio Naval Militar y la Escuela Naval Flotante.
[9] Véanse respectivamente los apartados II.2, II.3 y II.8-9.

treinta y uno de diciembre de 1857, suprimió el curso semestral de repaso, que pasaría a verificarse dentro de los tres últimos meses del curso anterior [BLANCA, 1991, pp. 32-33].

El veintiocho de abril de 1859 es aprobado por Real Orden un nuevo Reglamento, estableciéndose una duración de los estudios de cinco semestres [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 28].

El diez de marzo de 1867 se dispone que "*…hasta nueva determinación, dejasen de verificarse en el Colegio Naval los concursos semestrales que venían sucediéndose para cubrir por oposición las vacantes que resultaban en el número de plazas de Aspirantes de Marina; y expresando que no se prohibiese el ingreso de Aspirantes en la Armada, se suspendía eventualmente, porque así lo aconsejan las consideraciones que se manifiestan…*" [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 28], ordenándose los trámites previos a la clausura mediante Real Orden de trece de diciembre de 1867 [BLANCA, 1991, p. 36].

Por Real Decreto de cuatro de marzo de 1868 se crea en el Departamento de Cádiz una Junta que debía reformar el Reglamento del Colegio y redactar un proyecto sobre el sistema a seguir para la admisión de Aspirantes [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, pp. 29-33].

El centro cierra sus puertas el diez de mayo de 1868 [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 33], acelerando su cierre, en opinión de Blanca [1991, p. 37], el número excesivo de Guardias Marinas, serias dificultades de la Hacienda y el Sexenio Revolucionario.

En general, los numerosos Reglamentos y órdenes durante la etapa supusieron cuantiosos cambios en diversos aspectos del Colegio. La edad de ingreso varió entre los once y dieciséis años y el número de plazas comenzó en ochenta, siendo de ciento ochenta en 1862 y ciento catorce en 1863.

Observamos que el número de profesores aumentó respecto del periodo anterior, oscilando entre dieciocho (siete de Matemáticas) y veinte (once de Matemáticas), siendo destacable que el número de profesores de Matemáticas se sitúa en torno al 50% del profesorado del centro.

Para ingresar, los Aspirantes debían presentar certificación de robustez y acreditar la legitimidad y pureza de sangre, sin probanza nobiliaria alguna. Además realizaban un examen de acceso con ciertos contenidos, como los exigidos en el artículo 24 del Reglamento de 1848: "… *doctrina cristiana, leer y escribir al dictado correctamente, con regular forma de letra, gramática* *castellana y ortografía, y las cuatro primeras reglas de aritmética, á las que se agregarán las mismas aplicadas á las fracciones decimales y comunes, debiendo operar con soltura, aunque no sepa las demostraciones.* “ [MINISTERIO DE MARINA, 1848, p. 22].

Eran numerosos los exámenes que los alumnos debían superar durante su carrera profesional, una vez finalizado su paso por el Colegio. Afirma Guillén [1919, p. 186] que recibían una formación progresiva a partir de los conocimientos básicos adquiridos en el Colegio. Una vez aprobados los cursos del Colegio Naval y en posesión de la carta orden de Guardia Marina de 2ª clase, se embarcaban en una corbeta o navío de instrucción, realizando un examen al cuarto año con el que se podía ascender a Guardia Marina de lª clase. Seguidamente les eran asignados buques hasta que tenían vacante de Oficial, debiendo examinarse de nuevo en el Colegio Naval para obtener su ascenso a Alférez de navío, siempre que tuviesen seis años de embarco en buques armados.
Indicamos los contenidos matemáticos en estos exámenes [GUILLÉN, 1919, pp. 183-184].
Examen a los dos años de embarco:

- Matemáticas, Cosmografía y Navegación (de nivel similar a lo exigido en los exámenes finales del Colegio).

Examen de ascenso a Guardia Marina de lª clase:

- Mismas disciplinas bastante más ampliadas.

Examen de ascenso a Oficial:

- Matemáticas, con la Cosmografía y la Navegación teórica.

Plan de Estudios

Plan en el Reglamento de 18 de septiembre de 1844 [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 26]:
Duración de tres años, a curso por semestre.
1er. Año:
1er. Semestre: Álgebra, ecuaciones de segundo grado y los logaritmos. Aritmética. Geografía e Idiomas. Dibujo e Instrucción.
2º Semestre: Geometría elemental y Trigonometría Rectilínea. Idiomas y Dibujo. Instrucción Militar.
2º Año:
1er. Semestre: Trigonometría Esférica. Geometría practica. Idiomas. Instrucción orden abierto.
2º Semestre: Cosmografía. Principios de Artillería. Idiomas. Dibujo. Instrucción.
3er. Año:

1er. Semestre: Navegación de altura y costera. Mecánica elemental. Sobre construcción de buques etc.

2º Semestre: Repaso general para el examen final general que han de sufrir antes de salir del Colegio.

Plan en el Reglamento de diciembre de 1848 [MINISTERIO DE MARINA, 1848, pp. 117-121]:

Duración de tres años y medio, a curso por semestre.

1er. Semestre: Aritmética y como materias accesorias Historia sagrada y profana, Moral y Religión, Dibujo, Esgrima, Gimnástica, Ejercicios militares y Balie.

2º Semestre: Álgebra elemental y como materias accesorias Francés, Dibujo, Esgrima, Gimnástica, Ejercicios militares y Balie.

3er. Semestre: Geometría elemental (teniendo cuidado de presentar a los alumnos modelos de planos y sólidos bien construidos, pues es probable que por sus pocos años no entiendan aquellos estas materias sin estos auxilios) y como materias accesorias las del segundo semestre, teniendo siempre muy a la vista la instrucción militar

4º Semestre: rudimentos de Geometría Analítica, Trigonometría Plana y Esférica y aplicaciones al arte de levantar planos; como accesorias las mismas que el anterior semestre.

5º Semestre: Principios de Mecánica, Física experimental y Química; como accesorias las de los últimos semestres salvo el cambio de Francés por Inglés y el estudio de los principios de Artillería.

6º Semestre: Cosmografía y Pilotaje; como accesorias Geografía, Ingles, Maniobra, nociones de Construcción naval y las clases de esta especie a que puedan asistir mencionadas en los cursos anteriores.

7º Semestre: Repaso general de las materias de que se hayan examinado los alumnos en los seis semestres anteriores.

El Director del Colegio puede disponer que un alumno pase de un Semestre a otro según su adelantamiento. El número de horas diarias de enseñanza no serán menos de cinco al día, siendo dos de Matemáticas [MINISTERIO DE MARINA, 1848, pp. 131-132].

Plan hacia 1858 [BLANCA, 1991, p. 31]:

El período de formación facultativa y militar de los Aspirantes, que era de tres años y medio, quedaría reducido a sólo tres a principio de 1858.

El curso general para todos los alumnos estaba distribuido de la siguiente forma:

1er. Año: Aritmética, Álgebra, Francés, Dibujo natural, Instrucción militar con el conocimiento y uso de armas y las Ordenanzas Generales.
2º Año: Geometría elemental, Trigonometría Rectilínea y Esférica, principios de Topografía, Inglés, Dibujo lineal, Topográfico de perspectiva, Instrucción teórica y práctica de Artillería y Ordenanzas Generales.
3er. Año: Cosmografía, Navegación, principios de Mecánica y sus aplicaciones a las maniobras de a bordo y máquinas de vapor.
Estos tres años eran comunes a todos los alumnos. Tras haber sufrido el examen general de todas las materias que contienen, los aprobados optaban entre pasar a adquirir los conocimientos teórico-prácticos para el servicio de los buques de guerra, o continuar durante otros dos años el curso de estudios superiores preparatorio para artillería o ingenieros.

Plan en el Estado general de la Armada de 1863 [SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA, 1862, p. 46][10]:
Duración de dos años y medio, a curso por semestre.
Asignaturas: Álgebra elemental, Geometría elemental, Trigonometría Plana y Esférica, Geometría práctica, principios de la Analítica, Cosmografía, Navegación, principios de Física experimental, de Meteorología y de Química, Artillería, Francés o Inglés, Ordenanzas de la Armada y Ejército, Formación de partes y sumarias, Geografía, Historia sagrada, profana y particular de la Marina, Religión y moral, Maniobra, Dibujo, Esgrima, Gimnástica, Natación, Ejercicios militares y Baile.

Textos para la enseñanza:

- *Tratado elemental de aritmética*, de Saturnino Montojo Díaz.
- *Tratado elemental de álgebra*, de Saturnino Montojo Díaz.
- *Tratado elemental de trigonometría*, de Saturnino Montojo Díaz.

I.2.4.3. Curso de Estudios Sublimes

Desarrollo durante el período

[10] Este Plan es similar al de 1864 [SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA, 1863, p. 48].

El centro disponía de una *Sección de Estudios Superiores* compuesta por un jefe de estudios, un profesor de Matemáticas, otro de Literatura e Idiomas, otro de Química e Historia natural y otro de Dibujo.

Por una orden de veintisiete de enero de 1845, se establecía que una vez abierto el Colegio Naval ya no se admitirían solicitudes de oficiales y Guardias Marinas para cursar los estudios en sus casas, debiendo realizarlos en el Colegio. Por su parte, los que estuvieran haciendo el curso debían realizar un examen, dando cuenta del resultado al Director del Observatorio de San Fernando [BLANCA, 1991, p. 32].

El diecisiete de marzo de 1848, una Real Orden modifica los estudios mayores que se realizan en el Colegio Naval, añadiendo la asignatura de Arquitectura naval [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 27].

En el artículo 293 del Reglamento de 1848 se expresan los requisitos para acceder al *Curso de Estudios Sublimes* y los objetivos del mismo. Se establece una Junta examinadora que determinará los alumnos que mejores resultados hayan obtenido en el examen general y en los anteriores, pudiendo acceder al *Curso de Estudios Sublimes* cuando sean oficiales. Se establece que se formará un reglamento de estos estudios sublimes de total aplicación a la Marina [MINISTERIO DE MARINA, 1848, p. 143].

Estos cursos tenían, según el Reglamento vigente, una duración de entre dos y tres años; se buscaba proporcionar a la Armada oficiales científicos, astrónomos al Observatorio de San Fernando e hidrógrafos y oficiales al Cuerpo del Estado Mayor de Artillería de la Armada [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 27].

Plan de Estudios

Plan en torno a 1858 [BLANCA, 1991, p. 31]:

Duración de dos años.

Cuarto año: Cálculo diferencial e integral; Geometría Analítica y aplicaciones teóricas de los cálculos, Geodesia, Geometría Descriptiva, Teoría de las sombras, Topografía, Delineación de artillería y de las tres arquitecturas: civil, hidráulica y naval.

Quinto año: Mecánica especulativa, Mecánica aplicada, Máquinas, Óptica y Perspectiva aérea, Física general y Química.

Por la tarde asistían a los trabajos del Parque de Artillería y Arsenal.

Al concluir el quinto año debían presentarse a un examen general de todas las materias que comprendía el cuarto y quinto cursos, y una vez aprobados eran promovidos a Alféreces alumnos de las academias especiales de Artillería e Ingenieros, en las que debían completar su formación durante dos años y, previo examen favorable, eran promovidos a Alféreces de navío, o tenientes de Artillería o de Ingenieros.

I.2.5. Escuela Naval Flotante (1869-1909)

I.2.5.1. **Síntesis del periodo**

La Escuela Naval Flotante inicia sus clases el uno de abril de 1871 abordo de la fragata *Asturias*, fondeada en aguas de La Graña, Ferrol. Durante los años en los que estuvo abierto el centro se produjeron múltiples adelantos tecnológicos en artillería, en la adaptación del hierro a las corazas de los buques y en el uso de vapor como método de propulsión; todo ello demandará una reiterada revisión de los Planes de Estudios y Reglamentos.
La enseñanza que recibían los futuros oficiales se dividía en tres etapas. La primera, básicamente teórica, la realizaban los Aspirantes en el centro, con una duración entre uno y tres años. Una vez aprobados los exámenes en la Escuela, los Aspirantes ascendían a Guardias Marinas de 2ª clase y embarcaban en una corbeta o navío de instrucción. Al año eran trasbordados a otros buques, donde estudiaban táctica y torpedos. Pasado otro año se examinaban de las materias principales para ascender a Guardias Marinas de 1ª clase. Los siguientes ocho meses los dedicaban a diversos servicios de la Escuadra, volviendo posteriormente a la Escuela Naval Flotante para asistir a un curso naval de conferencias sobre las asignaturas que configurarían el examen a realizar al finalizar el tercer año con el objetivo de ser promovidos a oficiales.

A partir de 1885, los Alféreces de Navío y los Tenientes podían conseguir diversos diplomas de aptitud en Artillería, Torpedos, Construcción naval e Ingeniería hidrográfica. Para ello debían superar exámenes específicos que se preparaban en la *Academia de Ampliación*.

Es destacable que las pruebas de ingreso a la Escuela Naval Flotante fueron mucho más exigentes que en anteriores etapas, con una notable cantidad y calidad de contenidos matemáticos, muchos de ellos anteriormente incluidos en los programas de los centros predecesores.

A lo largo de cuarenta años se formaron en el centro 980 alumnos, distribuidos en cincuenta y cinco promociones. En enero de 1907 queda suspendido el ingreso en todos los cuerpos de la Armada y no se vuelven a convocar oposiciones hasta la apertura, en 1913, de la Escuela Naval Militar de San Fernando.

I.2.5.2. **Formación Básica**

Desarrollo durante el período

El diez de septiembre de 1869, siendo ministro de Marina Juan Bautista Topete y Carballo, se establece por Decreto la Escuela Naval Flotante, aprobándose el Reglamento que determina la forma en que ha de verificarse el ingreso y el Plan de Estudios a seguir.

La duración de los estudios es de un año, debiendo realizar los Aspirantes un examen de todo lo estudiado al finalizar y en caso de aprobar se les concede la carta orden de Guardia Marina de 2ª. A los desaprobados se les concedían seis meses para repasar y repetir el examen; en caso de no aprobar debían salir de la Escuela [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, pp. 42-45].

Las clases en la Escuela se iniciaron en Ferrol el uno de abril de 1871 en el buque-escuela *Asturias*, siendo su primer Comandante-Director Victoriano Sánchez Barcaiztegui [GUILLÉN, 1919, p. 189].

El uno de agosto de 1872 se publica un nuevo Reglamento en el que se establece una formación de dos años repartidos en cuatro semestres, implantándose la posibilidad de poder examinarse del primer y segundo semestre a los quince días de ingresar con el fin de acortar el tiempo de formación en la Escuela [GUILLÉN, 1919, p. 190].

El diez y once de enero de 1877 se aprueba un nuevo Reglamento con pocas variaciones, siendo destacable la posibilidad de cursar un semestre extraordinario en el que se estudiarán las materias del segundo ejercicio, para aquellos Aspirantes que aprueben únicamente el primero [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 53].

La Real Orden de uno de enero de 1885 contiene, entre otros reglamentos, el de la Escuela Naval Flotante, afectando especialmente al *Régimen y Gobierno interior* y a las *Juntas de Exámenes de Oposición a ingreso* [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 54].

El *Reglamento para el Ingreso, Régimen, Dirección y Gobierno de la Escuela Naval Flotante*, determinado por Real Orden de uno de septiembre de 1888, amplía el periodo de formación en el centro a cinco semestres [FERNÁNDEZ GAYTÁN, 1997, p. 205].

En el Reglamento determinado por Real Orden de nueve de mayo de 1900, el periodo de formación se amplía a tres cursos académicos de un año cada uno, fijándose la duración total de la carrera en seis años y concediéndose durante el último año de instrucción el empleo de Alférez de fragata-alumno [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, pp. 54-55].

El uno de septiembre de 1906 ingresan los quince alumnos de la última promoción que cursará sus estudios en la *Asturias*.
Por Real Decreto de treinta y uno de enero de 1907 se suspende el ingreso en todos los cuerpos de la Armada. No se convocarán oposiciones para ingreso hasta la apertura en 1913 de la Escuela Naval Militar de San Fernando [BLANCA, 1991, p. 39].

Al igual que en el Colegio Naval Militar, los numerosos Reglamentos y órdenes durante la etapa motivaron múltiples cambios en diversos aspectos del centro.
La edad de ingreso varió entre los trece y los dieciocho años, con una ampliación de la edad de entre seis meses y un año para hijos de militares; durante algunos años se estableció únicamente una edad tope.
Hasta 1888 cada convocatoria fijaba las plazas de nuevo ingreso, variando entre cuarenta y cinco y ciento veinte. A partir de ese año, se fijan las plazas que se admiten en cada nuevo curso, oscilando entre ocho y veinticuatro.

En la Escuela Naval Flotante se formaron cincuenta y cinco promociones, con 1.090 alumnos ingresados de los que 980 finalizaron la carrera [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 207].
El cuerpo de profesores estaba integrado por unos quince componentes, en su mayoría oficiales de Marina ayudados por profesores civiles en asignaturas como Francés, Inglés y Dibujo.

Una vez los Aspirantes aprobaban los cursos en el centro y estaban en posesión de la carta orden de Guardia Marina de 2ª clase, eran embarcados en una corbeta o navío de instrucción. Al año eran destinados a otros buques, estudiando Táctica y Torpedos. Pasado otro año se examinaban de las materias principales estudiadas desde que habían salido del centro. Los siguientes ocho meses los dedicaban a diversos servicios de la Escuadra, volviendo posteriormente a la Escuela Naval Flotante para asistir a un curso naval de conferencias de las asignaturas que conformaban el examen que debían realizar al finalizar el tercer año. Éste examen se realizaba en la fragata *Asturias* y comprendía Navegación, Mecánica aplicada, Máquinas de vapor, Arte marinero, Balística, Artillería, Táctica naval, Francés e Inglés [JONES, 1899, pp. 684-685].

Por la disposición de tres de febrero de 1885, se instala en San Fernando la *Academia de Ampliación* como escuela naval superior [AZCÁRATE, 1897, p. 160].
Los Alféreces de Navío y los Tenientes podían obtener diplomas de aptitud en Artillería, Torpedos, Construcción naval e Ingeniería hidrográfica. Para ello debían aprobar unos exámenes específicos que se preparaban en la *Academia de Ampliación*. El Reglamento de siete de julio de 1885 establecía que el acceso a estos cursos se determinaría mediante un examen, siendo necesario haber navegado al menos cuatro años como oficiales [BURT, 1899, p. 146].

El Real Decreto de siete de agosto de ese mismo año establece que la Escuela Naval y la *Academia de Ampliación* serán los centros de instrucción para el personal facultativo de la Armada [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 146].

Plan de Estudios
Reglamento para el régimen, dirección y gobierno de la Escuela Naval Flotante, 13 de septiembre de 1870 [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, pp. 50-51]:
Duración de un año (se repartirá en dos semestres que empezarán respectivamente en los primeros días de enero y julio de cada año).
1er. Semestre: Astronomía, Física elemental y Maquinas de vapor, Idiomas, Artillería, Maniobra, Ordenanzas y Reglamentos militares, Formación de procesos, Derecho marítimo internacional, Historia marítima y militar, Esgrima, Ejercicios militares, marineros, de señales y de táctica, Gimnasia.
2º Semestre: Navegación, Física elemental y Máquinas de vapor, Idiomas, Artillería, Maniobra, Ordenanzas y reglamentos militares, Formación de procesos, Derecho marítimo internacional, Historia marítima y militar, Esgrima, Gimnasia, Ejercicios militares, marineros, de señales y de táctica.
Las clases de Astronomía, Navegación, Idiomas y Gimnasia serán diarias; y las restantes alternarán, según su importancia relativa, a juicio del Director. Concurrirán los Aspirantes a las operaciones importantes que se verifiquen en el Arsenal y Astillero. Durante los dos semestres se harán observaciones meteorológicas, estudios de vientos, corrientes, mareas y demás que constituyen la geografía física del mar.

Reglamento de 1 de agosto de 1872.- Para el régimen, dirección y gobierno de la fragata-Escuela Naval [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, pp. 52-53]:

Duración de dos años, a curso por semestre (que empezarán respectivamente en los primeros días de enero y julio de cada año).

1er. Semestre: Curso de Análisis (por Meunier Joannet), Física (por Ganot), Derecho marítimo internacional (por Negrín), Idioma inglés (traducir), Ejercicios militares, Gimnasia.

2º Semestre: Mecánica racional y aplicada (por P. Sacias), Física y elementos de Química, Historia marítima y militar, Idioma inglés (traducir y escribir), Ejercicios militares con fuego, Gimnasia.

3er. Semestre: Astronomía (por Dubois), Artillería, primera parte (por Barrios), Máquinas de vapor (por Chacón u Ortolán), Maniobra, primera parte (por Chacón y Vallarino), Ejercicios marineros, Esgrima, Natación.

2º Semestre: Navegación y Geodesia (por Dubois), Artillería, segunda parte (por Barrios), Construcción Naval, Geografía física del mar (por Vizcarrondo), Maniobra, segunda parte (por Chacón), Ordenanzas y Reglamentos (los vigentes), Formación de procesos (por Bacardi), Esgrima, Ejercicios marineros, de Señales y Táctica, Natación.

Las clases de Astronomía, Navegación, Idiomas y Gimnasia, serán diarias; y las restantes alternarán, según su importancia relativa, a juicio del Director.

Plan hacia 1882 [LLABRÉS, 1953, pp. 88-89]:

Duración de dos años, a curso por semestre.

1er. Semestre: Análisis (por Mr. Meunier-Joannet, Pierre Jules), Física (por el conocido tratado de Ganot), Idioma inglés (traducción), Ejercicios militares y marineros, Gimnasia y Natación.

2º Semestre: Mecánica racional y aplicada (por P. Sassias), Física y Meteorología (por los *Apuntes de Meteorología Náutica y Geográfica, Física del Mar,* de D. Francisco Chacón y Pery, declarados de texto por Orden de 4 de febrero de 1878), Idioma inglés (traducción y escritura), Ejercicios militares con fuego, Gimnasia y Natación. Las *Nociones Elementales de Táctica Militar* del Capitán de Artillería de Marina D. Germán Hermida, figuraron también entre los textos obligatorios por Orden de 17 de febrero de 1881.

3er. Semestre: Astronomía (por Edmond Dubois, *Cours d'astronomtie a l'usage des officiers de la Marine Imperiale*), Máquinas de Vapor (por la obra del Ingeniero Jefe de segunda clase D. Gustavo Fernández Rodríguez), Química, Maniobra, primera parte (por el tratado escrito por Chacón y D. Baltasar Vallarino), Ejercicios marineros, Esgrima y Natación.

4º Semestre: Navegación y Geodesia (por Dubois), Artillería (por el texto de1 Brigadier de Artillería de Marina D. Cándido Barrios), Maniobra, segunda parte, Ejercicios marineros, de señales y táctica, Esgrima y Natación.

Las clases de Astronomía, Navegación, Idiomas y Gimnasia eran diarias.
El estudio de la Construcción naval, que se cursaba por las *Lecciones* del ingeniero D. Gustavo Fernández, declaradas de texto desde 25 de septiembre de 1876, se mandó suprimir del Plan por orden de 31 de enero de 1881, disponiéndose que los encargados de los Guardias Marinas en los buques los instruyesen debidamente en dicha materia.

Reglamento de 1895 [GUILLÉN, 1919, p. 193]:
Duración de tres años, a curso por semestre.
1er. Año:
1er. Semestre: Complemento Álgebra, Trigonometría y Geometría Descriptiva.
2º Semestre: Analítica y Física.
2º Año:
1er. Semestre: Cálculo, Electricidad y Química.
2º Semestre: Mecánica, Máquinas y Construcción Naval.
3er. Año:
1er. Semestre: Astronomía y Teoría del buque.
2º Semestre: Navegación y Artillería.
Como accesorias, en cada año, Ordenanzas, Maniobra, Francés e Inglés.
Todas las asignaturas principales eran diarias y, además, durante los tres cursos tenían dos veces por semanas Ejercicios militares, Ejercicios marineros, Gimnasia y Esgrima. Los primeros eran algo más intensos en los tres primeros meses del primer curso, para que pudiesen incorporarse a la Compañía; semestralmente había ejercicio de fogueo y tiro al blanco, con todas las armas que había en la Escuela.

Plan hacia 1902 [ANÓNIMO, 1902, p. 14]:
Duración de tres años, a curso por semestre.
Asignaturas: Álgebra superior, Trigonometría Rectilínea y Esférica, Geometría Descriptiva, Geometría Analítica, Física, Cálculo, Mecánica, Electricidad, Química, Astronomía, Teoría del buque, Máquinas de vapor, Artillería, Navegación, Maniobras, Inglés, Ordenanzas y Construcción naval.
De todas estas materias, las fundamentales de Matemáticas se estudian en toda la extensión requerida para el conocimiento perfecto y posterior de las ciencias profesionales.

Textos para la enseñanza:

- *Curso de Trigonometría rectilínea y esférica*, de José A. Barreda y Manuel García.
- *Lecciones elementales de geometría analítica: redactadas con arreglo al programa vigente en la Escuela Naval*, de Juan Luís De María.
- *Cours élémentaire d'analyse*, de Pierre Jules Meunier-Joannet.
- *Lecciones de cálculo infinitesimal*, de Augusto Miranda.

I.2.5.3. **Pruebas de ingreso**

Desarrollo durante el período

Las pruebas de ingreso durante este periodo fueron mucho más exigentes que en anteriores etapas, destacando la cantidad y calidad de los contenidos matemáticos que se les pedía a los futuros Aspirantes. Muchos de estos contenidos, que constituían parte de la formación en los anteriores centros, pasaron a ser un requerimiento para acceder a la Escuela Naval Flotante.

Los requisitos y las pruebas fueron cambiando notablemente a lo largo del periodo. Realizamos un estudio más detallado sobre los mismos en el Apéndice 4, *Reglamentos, Órdenes y Programas de los Exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante*, con el fin de determinar el nivel matemático que se exigía a los Aspirantes para ingresar en la Escuela.

Numerosas órdenes ministeriales harán llamamientos a concursos públicos para el ingreso de Aspirantes; dependiendo de cada convocatoria, las pruebas se realizarán en los tres Departamentos marítimos, en Madrid o en Ferrol.

A modo de muestra, en el Real Decreto de diez de septiembre de 1869 se determina que para el ingreso en la Escuela Naval como Aspirante de Marina es necesario [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, pp. 92-93]:

"1º: Dirigir solicitud escrita y firmada por el interesado al Sr. Ministro de Marina, expresando su domicilio y acompañando la partida de nacimiento debidamente legalizada, por la que conste haber cumplido, la edad de trece años y que el día fijado para el ingreso, no excederán de la de diez y ocho los hijos de paisanos ó de diez y nueve los de militares.

2° Hallarse en posesión de los derechos de ciudadano español.

3° Ser de inmejorable robustez, y buena complexión física, sin ningún género de imperfección corporal, para lo que serán reconocidos previamente por una comisión de médicos de la Armada, que se sujetará al cuadro especial de defectos físicos y enfermedades que constituyen causa de inutilidad.
4° Ganar la plaza en pública oposición, en la que probarán el conocimiento completo de las materias respectivas.
5º.- Ganar la plaza en pública oposición, en la que probarán el conocimiento completo de las materias que expresan el siguiente programa:
Presentar ante la Junta de exámenes certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía; Historia universal y particular de España.
Leer, traducir y escribir correctamente el francés, dibujo natural, hasta cabezas y principios del topográfico.
Aritmética; Álgebra; Geometría.
Trigonometría rectilínea y esférica; Topografía.
Geometría descriptiva; Geometría analítica.
Se publica el Programa detallado.”

Textos para la enseñanza:

- *Tratado de geometría descriptiva, sombras, topográfico y sistema de acotaciones*, de José Bielsa (*Principios de Geometría descriptiva, con la extensión de los capítulos I y II de la obra de D. José Bielsa. -Segunda edición*).
- *Lecciones de álgebra elemental y superior*, de Ch. Briot; traducidas, ampliadas y completadas con numerosas notas y extensos apéndices por C. Sebastian y B. Portuondo.
- *Tratado de álgebra elemental*, de Juan Cortázar (*Álgebra por cualquier autor, con la extensión cuando menos del clásico tratado de Cortázar*).
- *Tratado de Geometría elemental*, de Juan Cortázar (*Geometría por cualquier autor, con la extensión cuando menos del clásico tratado de Cortázar*).
- *Tratado de Trigonometría y Topografía*, de Juan Cortázar (*Trigonometría rectilínea y esférica y Topografía con la extensión de Cortázar*).
- *Tratado elemental de geometría descriptiva*, de Miguel García Villar.
- *Teoría de rectas y planos de geometría descriptiva: redactada, con arreglo al programa de ingreso para la Escuela Naval Flotante y recomendada por su Reglamento de 10 de Enero de 1877 en el Pár. 4º, Art. 5º. Tit. II.*, de Joaquín Ibáñez.

- *Lecciones de geometria analítica: redactadas para uso de los aspirantes á guardias-marinas*, de Julio Merás y Uría.
- *Cours élémentaire d'analyse*, de Pierre Jules Meunier-Joannet (Álgebra y Geometría Analítica)
- *Álgebra: escrita con sujeción al programa vigente para los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante*, de Jaime Montaner Vega-Verdugo.
- *Tratado elemental de trigonometría: para uso de los aspirantes al Colegio Naval Militar*, de Saturnino Montojo.
- *Geometría*, de Miguel Ortega y Sala.
- *Tratado de álgebra: escrito con arreglo al nuevo programa de ingreso en la Escuela Naval Flotante*, de Pedro del Peral.
- *Tratado de geometría elemental*, de E. Rouché y Ch. de Comberousse, traducido por A. Portuondo y J. Portuondo.
- *Álgebra*, de Ignacio Salinas y Manuel Benítez.
- *Aritmética*, de Ignacio Salinas y Manuel Benítez.
- *Tratado de aritmética*, de la edición revisada por J.-A. Serret y Ch. de Comberousse, traducida y aumentada por T. Monteverde.
- *Tables de logarithmes a sept décimales pour les nombres depuis 1 jusqu'a 108000 et pour les fonctions trigonométriques de dix en dix secondes*, de Ludwing Schrön.
- *Ejercicios y problemas de aritmética: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia,* de Antonio Terry y Rivas (*Aritmética, Algebra y Geometría, aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de D. Antonio Terry y Rivas*; el nombre que aparecía en la fuente era *Problemas del Cálculo Aritmético*)
- *Problemas y ejercicios del cálculo algebraico: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia,* de Antonio Terry y Rivas (*Aritmética, Algebra y Geometría, aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de D. Antonio Terry y Riva*; el nombre que aparecía en la fuente era *Complemento de Algebra).*
- *Ejercicios de algebra, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia,* de Antonio Terry y Rivas (*Aritmética, Algebra y Geometría, aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de D. Antonio Terry y Rivas*; el nombre que aparecía en la fuente era *Complemento de Algebra).*
- *Ejercicios de Geometría,* de Antonio Terry y Rivas. *(Aritmética, Algebra y Geometría, aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de D. Antonio Terry y Rivas*)
- *Ejercicios de Trigonometría*, de Antonio Terry y Rivas.

CAPÍTULO II. LAS MATEMÁTICAS EN LOS TEXTOS DE FORMACIÓN NÁUTICA MILITAR

II.1. Revisión de la producción matemática en la Armada a lo largo del siglo XIX

Se han seleccionado aquellas obras de cuyo uso para la formación de los Guardias Marinas o para la preparación de las pruebas de ingreso en la Escuela Naval Flotante tenemos constancia. Nos hemos basado tanto en fuentes primarias y secundarias, como en los Programas de ingreso en el Boletín Oficial de la provincia de Madrid, las advertencias sobre el progreso de las propias obras y diversos artículos en revistas especializadas.

Presentamos la Tabla 3. 1: *Obras seleccionadas y asignaturas relacionadas con las Matemáticas en cada periodo*, en la que se muestran, para cada una de las diferentes instituciones educativas involucradas en la formación de los Guardias Marinas a lo largo del siglo XIX, las asignaturas con contenidos matemáticos y las obras recomendadas y utilizadas.

En primer lugar se estudian las obras revisadas en cada una de las materias, en orden cronológico con respecto a su primera edición, con el fin de poder valorar la evolución de este tipo de textos a lo largo del siglo XIX.

Para poder tener una adecuada contextualización de las obras presentamos una Tabla sobre cada materia en la que aparecen los principales datos de los textos revisados.

Se indica para cada obra el año de su publicación (entre paréntesis se indica el año de la primera edición en el caso de que no lo sea), el autor con las fechas de nacimiento y defunción cuando sean conocidas, el título completo de la obra, el lugar de edición, la imprenta, el número de páginas numeradas relacionadas con la materia, el número de páginas dedicadas a preliminares, el número de páginas dedicadas a tablas, gráficos y apéndices relacionados con la materia, si la obra cuenta con índice y por último en que centro fueron usados como libro de texto.

Entre todos los autores revisados destacan tres, tanto por su número de obras como por su prestigio científico a nivel nacional y especialmente en la Armada Española: Gabriel Ciscar y Ciscar, Saturnino Montojo y Juan Cortázar.

Gabriel Ciscar y Ciscar (Oliva, 1760-Gibraltar, 1829) es uno de los principales autores de obras de texto para la formación de los Guardias Marinas. Ingresó con diecisiete años en la Academia de Guardias Marinas de Cartagena, pasando al servicio activo en la Marina, donde participó en algunas campañas en el Mediterráneo y el Atlántico, hasta 1783, en que pasó a ocuparse de la clase de Navegación en la Academia de Cartagena. En 1785 fue profesor de la de Matemáticas

Sublimes, siendo ascendido tres años después a Teniente de Navío y nombrado Director de la Academia. En febrero de 1808 es nombrado Capitán de la Compañía de Guardias Marinas en Cartagena.

Durante la guerra de la Independencia fue miembro de la Junta Central y Regente del Reino en dos ocasiones. Encarcelado tras el regreso de Fernando VII, fue ascendido a teniente general a partir del pronunciamiento constitucional de 1820 y nombrado de nuevo Regente en 1823. La vuelta al absolutismo significó para Ciscar la condena a muerte y la confiscación de todos sus bienes, escapando finalmente a Gibraltar donde contó con la ayuda económica del duque de Wellington.

Entre sus numerosas obras podemos destacar *Tratado de Aritmética: para la instrucción de los guardias marinas* [CISCAR, 1795], *Tratado de Trigonometría Esférica para la instrucción de los Guardias Marinas* [CISCAR, 1796] y *Curso de estudios elementales de Marina* [CISCAR, 1803a, 1811].

La obra *Curso de estudios elementales de Marina* fue encargada a Ciscar por el ministro Grandallana mediante Real Orden de 20 de julio de 1802, ante la necesidad de uniformar las enseñanzas en las tres Academias de Guardias Marinas y fijar definitivamente la amplitud y el carácter de estos estudios. La obra presenta un nivel de dificultad asequible para los Guardias Marinas, sin que ello significase la renuncia al rigor, ni a la inclusión de aquellos temas que, como las distancias lunares o los cronómetros, colocaban a los oficiales y pilotos ante las más recientes técnicas de navegación. En 1803 fue declarado texto obligatorio en las Academias de Guardias Marinas y dos años más tarde en las Escuelas de Náutica, iniciándose así un largo período en el que esta obra de Ciscar contribuiría decisivamente a la formación teórica de varias generaciones de marinos españoles.

Saturnino Montojo y Díaz (Ferrol, 1796-San Fernando, 1856) es otro de los marinos científicos que publicaron importantes obras de referencia para la formación en las Academias de Guardias Marinas. Sentó plaza de Guardia Marina en la Academia de Guardias Marinas de Ferrol en 1812, trasladándose a la Academia del Palacio Real de Madrid en 1816 para ampliar sus estudios. A partir de 1823 participa en diversas campañas que alterna a partir de 1826 con su trabajo en el Observatorio de Marina de San Fernando, la Jefatura de Estudios del Colegio Naval Militar de forma interina en 1845, la dirección del Observatorio en 1847 y la redacción del Plan de Estudios del Colegio en 1848. Sus tres obras fueron libros de texto en el Colegio Naval Militar y obras de referencia para el ingreso en la Escuela Naval Flotante: *Tratado elemental de Aritmética redactado para el uso del Colegio Naval Militar en virtud de Real órden* [MONTOJO, 1849], *Tratado elemental de Álgebra redactado para el uso del Colegio Naval Militar en virtud de Real órden* [MONTOJO, 1850] y *Tratado elemental de Trigonometría. Escrito de Real Órden para el uso de los aspirantes del Colegio Naval Militar* [MONTOJO, 1865].

El último de estos autores, Juan Cortázar (Bilbao, 1809-1873), fue un reconocido matemático e ingeniero, catedrático de Álgebra Superior y Geometría Analítica. En 1857 fue elegido académico de la Real Academia de Ciencias Exactas, renunciando a su cargo por enfermedad. Fue un prolífico y reconocido autor de libros de texto sobre numerosas materias matemáticas en universidades, institutos, escuelas industriales, escuelas normales y como preparatorio para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. Entre sus obras destacamos *Tratado de Álgebra elemental* [CORTÁZAR, 1857], *Tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica, y de Topografía* [CORTÁZAR, 1859], *Tratado de Aritmética* [CORTÁZAR, 1860] y *Tratado de Geometría Elemental* [CORTÁZAR, 1864].

Podemos afirmar que Ciscar, Montojo y Cortázar fueron los autores más influyentes a lo largo del siglo XIX en la formación de los Guardias Marinas en las Academias, el Colegio Real y Militar de Caballeros Guardias Marinas, el Colegio Naval Militar y la Escuela Naval Flotante. Es por ello, que a lo largo de la exposición procedemos a realizar estudios comparativos en las materias estudiadas por estos autores: Aritmética, Álgebra y Geometría elemental.
A partir de las obras de estos tres autores, los más influyentes durante el periodo, trataremos de aportar mayor información para establecer la manera en que fueron tratadas dichas materias en los textos relacionados con la formación básica de los Guardias Marinas durante el siglo XIX.

Por otra parte, de entre todas las materias que un Guardia Marina necesitaba para el desarrollo de su profesión destaca sobre las demás la Trigonometría, tanto Rectilínea como Esférica, y especialmente esta última, dadas sus aplicaciones náuticas. Consecuentemente se va a proceder a realizar un estudio mucho más detallado y pormenorizado de estas materias.

Por último, se revisará la vida y obra de P. J. Rodríguez Riola, un autor singular cuya obra estaba pendiente de localización y estudio. Este mahonés ejerció como Professor of Mathematics and Navigation of Midshipmen of the U.S. Navy Yard, Gosport, en el estado norteamericano de Virginia, desde 1827 hasta su fallecimiento en 1838. Su principal obra, *Elements of spherical trigonometry, designed as an introduction to the study of nautical astronomy*, será ampliamente examinada con el objetivo de poder determinar qué obras, tanto nacionales como extranjeras, pudieron influir en su elaboración.

II.2. Aritmética

II.2.1. Obras

Se examinan seis obras con contenidos aritméticos que fueron utilizadas para la formación de los Guardias Marinas durante el siglo XIX; en la Tabla 3.2.1, *Datos generales de los textos sobre Aritmética*, se recoge información básica sobre las obras. Con el objetivo de facilitar una visión general de los contenidos tratados en cada obra presentamos la Tabla 3.3.1, *Temas presentes en los textos sobre Aritmética*, en la que aparecen los principales contenidos relacionados con la Aritmética y su presencia o ausencia en las obras revisadas.

La primera obra sobre Aritmética en orden cronológico con respecto a la primera edición, *Curso de estudios elementales de Marina,* pertenece a Gabriel Ciscar y Ciscar. Su primera edición es de 1803 y los cuatro tomos que conforman el *Curso* fueron durante muchos años la principal obra para la instrucción de Guardias Marinas (de 1803 a 1844) y de pilotos en las Escuelas de Náutica. El primer tomo trata la Aritmética y ha sido revisado en su primera edición de 1803, constando el libro de ciento diecisiete páginas en trece capítulos.

Es una obra en la que se estudian de forma básica los contenidos, tratando muy superficialmente o no apareciendo algunos de los principales elementos de la Aritmética, como la divisibilidad, los números inconmensurables, las aplicaciones de las proporciones y los sistemas de medidas.

Este es un planteamiento consecuente con el objetivo principal del autor, consistente en "… *facilitar la práctica del Pilotage, y la inteligencia de algunas proposiciones de maniobra y artillería.*" [CISCAR, 1803a, I, p. III].

La selección de contenidos responden a este objetivo, por lo que "… *se explican en él extensamente las reglas y propiedades de que se hará mucho uso en dichos Tratados, al paso que se tocan muy por encima otras utilísimas para las aplicaciones de la Aritmética al Comercio y á varias Ciencias y Artes, de que se prescinde en este Curso elemental.*" [CISCAR, 1803a, I, p. III].

En la obra podemos encontrar un buen número de ejemplos, aunque no aparecen ejercicios para practicar. Es importante recalcar que, tal y como indica Ciscar en el *Prólogo*, a lo largo de la obra muestra numerosos ejemplos y explicaciones en letra menor para diferenciar los contenidos principales de los secundarios.

Por último, el autor presenta un lenguaje y un discurso característico de las obras sobre la materia propios del siglo XVIII, resaltando la ausencia de desarrollos algebraicos y el escaso tratamiento de cantidades aproximadas.

La segunda obra es *Tratado de Aritmética*, de Juan Cortázar, cuya primera edición data de 1846. La obra estuvo destinada al uso en universidades, institutos, escuelas industriales, escuelas normales y como preparatorio para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. Se ha revisado la duodécima edición de 1860, constado la obra de doscientas treinta y tres páginas y una lámina [CORTÁZAR, 1860].

Cortázar divide en dos partes el estudio de la Aritmética, tratando en primer lugar el cálculo de los números abstractos y seguidamente tratando las aplicaciones usuales en la Aritmética.

Es una obra muy completa al estudiar de forma pormenorizada los principales contenidos, salvo el tratamiento de las potencias y las aproximaciones numéricas. También es destacable la importante ausencia de progresiones y logaritmos, aunque estudiará estos últimos contenidos en su tratado sobre Álgebra elemental, tal y como se verá en otra parte del estudio.

Es reseñable que el texto de Cortázar es una obra de carácter general destinada como libro de texto en un amplio espectro de centros docentes, por lo que es razonable un estudio pormenorizado del Sistema métrico decimal.

A lo largo de la obra presenta una gran cantidad de notas de ampliación, con un nivel mucho más alto que en el resto del texto. El *Tratado* sigue una exposición mediante un enfoque algebraico, con un estilo ordenado, contando con bastantes ejemplos y con un número reducido de ejercicios.

La siguiente obra es *Tratado elemental de Aritmética: Redactado para uso del Colegio Naval Militar en virtud de Real Orden*, de Saturnino Montojo. Hay al menos dos ediciones en 1849 y 1855, siendo obra de texto en el Colegio Naval Militar. Se ha revisado la primera edición de 1849 y en ella el libro consta de doscientas ocho páginas, todas ellas dedicadas en seis capítulos a la Aritmética.

Montojo indica en el *Prólogo* de su obra que su objetivo es "*Reunir en un tratado de poco volumen las doctrinas esenciales de la Aritmética*" [MONTOJO, 1849, p. V] para los alumnos del Colegio Naval. Para ello explica que la obra la traduce en su mayor parte de la cuarta edición del *Curso completo de Matemáticas* de Francoeur[11], habiendo elegido este tratado de entre otros por *"… la concisión con que están presentadas en él las materias y que he procurado conservar*" [MONTOJO, 1849, p. V].

La obra recoge todos los contenidos presentes en la Aritmética, adaptándolos al uso en el Colegio Naval Militar. Es por ello que no trata en profundidad los temas y hace un estudio básico de los sistemas de pesos y medidas.

El autor presenta una gran cantidad de notas de ampliación a lo largo de la obra, bajo un enfoque más algebraico y con un nivel más alto que en el resto de contenidos del *Tratado*. En la obra se encuentran multitud de ejemplos junto con varias tablas de datos y equivalencias, elementos que facilitan el uso del libro a los estudiantes, aunque no presenta ejercicios.

La obra *Ejercicios y problemas de Aritmética, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* es de Antonio Terry y Rivas, marino gaditano, capitán de fragata de la Armada, coronel graduado del ejército, contralmirante de la Armada y oficial 1º de secretaría del Ministerio de Marina. Terry y Rivas redactó obras de ejercicios sobre varias disciplinas matemáticas para ser utilizados como libros de texto en las oposiciones de ingreso en el Cuerpo General de la Armada.

La obra fue utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante y cuenta con al menos diez ediciones, habiendo revisado la primera edición de 1880 [TERRY Y RIVAS, 1880]. Presenta ejemplos y ejercicios sobre Aritmética y consta de dos tomos. El primero está dedicado a presentar los enunciados de los problemas relacionados con la Aritmética a lo largo de doscientas treinta páginas y el segundo tomo contiene las soluciones razonadas a los ejercicios y problemas del primer tomo en doscientas ochenta y siete páginas.

Terry y Rivas trata todos los contenidos habituales sobre Aritmética, exceptuando el tratamiento de números inconmensurables y aproximaciones numéricas. Es una obra eminentemente práctica en la que se presentan una gran cantidad de ejercicios y problemas. El tratamiento de los diferentes contenidos tiene un estilo bien estructurado, aunque algunos son tratados brevemente, como los relacionados con las progresiones y los logaritmos.

---

11 Louis Benjamin Francoeur (1773-1849). Matemático francés, profesor de la École Polytechnique, miembro de la Academia de Ciencias y autor de varios tratados.

La siguiente de las obras consultadas, *Tratado de Aritmética*, es de Joseph Alfred Serret, matemático francés que realizó importantes avances en Geometría Diferencial. La obra fue utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. El Tratado tuvo numerosas ediciones y se ha examinado la sexta edición de 1879 revisada por el autor junto con Charles de Comberousse[12] y traducida y aumentada por T. Monteverde. Consta de trescientas sesenta y ocho páginas, todas ellas dedicadas a la Aritmética [SERRET, 1879].

Es una obra muy completa, que contiene los principales contenidos a tratar dentro de la Aritmética. Es reseñable la gran cantidad de notas de ampliación que presenta a lo largo del tratado, junto con numerosos ejemplos y bastantes ejercicios en cada capítulo.

Presenta varios contenidos que no están en la mayoría del resto de obras, como las operaciones abreviadas y propiedades de la Teoría de Números. También trata con bastante profundidad a lo largo de toda la obra las operaciones con radicales y las aproximaciones numéricas. La exposición es ordenada y sigue un enfoque algebraico, con un estilo similar al de cualquier tratado actual.

La última de las obras consultadas, *Aritmética*, es de Ignacio Salinas Angulo y Manuel Benítez y Parodi, coroneles del Estado Mayor en el momento de publicar el texto. La obra fue utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante.

La primera edición data de 1884 y se ha revisado la cuarta edición de 1898, constando de trescientas siete páginas, todas ellas dedicadas a la Aritmética [SALINAS & BENÍTEZ Y PARODI, 1898b].

La obra contiene los principales contenidos de la Aritmética, salvo la ausencia de progresiones y logaritmos, contenidos que al igual que Cortázar estudiarán en su tratado sobre Álgebra.

Es reseñable la gran cantidad de notas de ampliación que presentan los autores a lo largo de la obra, así como el número de ejemplos durante las explicaciones y de ejercicios al final de cada capítulo. Tratan con bastante profundidad a lo largo de toda la obra el uso de congruencias para estudiar la divisibilidad, el estudio de los números inconmensurables y el concepto de límite para aproximar números, contenido novedoso en las obras estudiadas. El texto presenta un claro enfoque algebraico, influenciado por un tratamiento analítico al estudiar la teoría de los límites.

12 Charles Jules Felix de Comberousse (1826-1897). Matemático francés, profesor en París de la École Centrale y del Conservatoire des Artes et Métiers.

II.2.2. Ciscar, Cortázar y Montojo

Como ya se comentó en la Introducción, se va a proceder a realizar un estudio pormenorizado de las obras de los tres autores más influyentes durante el siglo XIX en la formación de los Guardias Marinas. Para ello se han revisado y comparado sus tres obras, elaborando la Tabla 3.4.1, *Temas presentes en los textos de Ciscar, Cortázar y Montojo sobre Aritmética*, como resumen de los principales contenidos presentes en estos textos. Para realizar la comparativa han sido seleccionados ochenta y tres ítems agrupados en diversas temáticas y subtemáticas.

Las tres obras siguen a grandes rasgos una estructura similar, aunque los contenidos no siempre se presentan en el mismo orden y algunos no son tratados en todas las obras.
Los principales contenidos tratados sobre Aritmética son los Números Enteros, la Divisibilidad, las Fracciones, las Potencias y Raíces, los Números inconmensurables y Aproximaciones, las Proporciones, las Progresiones y Logaritmos, los Números Complejos y el Sistema Métrico Decimal.
Pasamos a ver la forma en que se han desarrollado cada uno de estos contenidos para poder valorar su evolución a lo largo del siglo XIX.

Respecto a los Números Enteros, los principales contenidos tratados son los sistemas de numeración y las cuatro operaciones fundamentales. Estos contenidos son tratados de forma similar por los tres autores.

Encontramos diferencias en el tratamiento de la Divisibilidad. Los principales contenidos tratados son las condiciones de divisibilidad, el cálculo y las aplicaciones del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo, los números primos y la descomposición factorial de un número. Ciscar trata la Divisibilidad de manera muy escueta, mientras que Cortázar y Montojo realizan de forma similar un tratamiento más profundo, en el que destaca el mayor estudio de los criterios de divisibilidad por parte de Cortázar.

En cuanto al tratamiento de las Fracciones, los principales contenidos son la simplificación de fracciones, las operaciones básicas con fracciones y decimales, las aproximaciones de números decimales, el cálculo de la fracción generatriz y las fracciones continuas. Ciscar realiza un estudio basado en la aplicación de las operaciones básicas con fracciones y decimales, Montojo presenta prácticamente todos los contenidos usuales con una mayor influencia algebraica y Cortázar trata la mayoría de contenidos bajo un enfoque similar al de Montojo, aunque con la importante ausencia de aproximaciones de números decimales.

Los principales contenidos relacionados con las Potencias y las Raíces son las propiedades de las potencias y la extracción de raíces cuadradas y cúbicas, tanto exactas como aproximadas. Ciscar no trata las propiedades de las potencias y lo hace muy brevemente con las raíces. Montojo, por un lado trata brevemente las potencias y por otro estudia detalladamente la extracción de raíces, utilizando aproximaciones para las raíces inconmensurables. Cortázar realiza un estudio similar al de Montojo, haciendo mayor hincapié en el cálculo de raíces de quebrados y de raíces inconmensurables.

Respecto a los Números inconmensurables y las Aproximaciones, Ciscar y Montojo no los contemplan directamente en sus obras, si bien Montojo maneja aproximaciones al tratar las raíces. Cortázar trata brevemente la aproximación de números irracionales, dando la definición de límite de una cantidad variable, siempre desde un enfoque eminentemente práctico.

En cuanto a las Proporciones, los principales contenidos tratados son las distintas reglas de tres, los repartos proporcionales, los intereses, los descuentos, la regla conjunta y la regla de aligación. Ciscar se limita a presentar las razones aritméticas y geométricas junto con sus propiedades, la regla de tres simple y la regla de tres compuesta. Montojo explica la mayoría de contenidos y Cortázar realiza un desarrollo algo más completo junto con numerosos ejemplos de ampliación.

Respecto a las Progresiones y Logaritmos, los principales contenidos son las progresiones aritméticas y geométricas, el concepto de logaritmo, sus propiedades, la formación y uso de tablas, el cálculo del logaritmo de un número y del número correspondiente a un número dado y las aplicaciones del cálculo logarítmico. Cabe notar que Cortázar no contempla estos contenidos en su obra, si bien lo hace en su tratado sobre Álgebra elemental. En cuanto a las progresiones, no hay grandes variaciones entre Ciscar y Montojo, si bien el primero lo hace de forma más resumida. Respecto a los logaritmos, sí que vemos diferencias; Ciscar trata superficialmente los logaritmos, presentándolos como herramientas para facilitar el cálculo en diversas operaciones, mientras que Montojo realiza un estudio más completo sobre las propiedades y utilidades de los logaritmos, e indica la construcción y manejo de las tablas logarítmicas. Vemos que el tratamiento de los logaritmos va aumentando a lo largo del siglo, pasando de un planteamiento básico como herramienta a otro más teórico en el que se explica la elaboración y uso de las tablas junto con nuevas propiedades y aplicaciones.

Los dos últimos contenidos comparados, los Números Complejos y el Sistema Métrico Decimal, tratan principalmente por un lado las operaciones de este tipo de números, la reducción de un número complejo a un incomplejo, y por otro lado el Sistema Métrico Decimal.
Ciscar no incluye los Sistemas Métricos en su obra, limitándose a presentar reglas para reducir un número complejo a otro de menor o mayor denominación y realizar operaciones básicas con este tipo de números. Montojo trata los números concretos y complejos, continuando con el sistema de múltiplos y submúltiplos adoptados en cada sistema, haciendo únicamente mención de los más usuales y presentando la forma de realizar las cuatro operaciones básicas con estos sistemas. Por su parte, Cortázar realiza un amplio estudio de estos contenidos, en consonancia al amplio alumnado al que iba dirigida su obra.

Las obras de Montojo y Cortázar son más completas que la obra de Ciscar, siendo similares tanto en los contenidos tratados como en el enfoque y desarrollo seguidos para su presentación.

II.2.3. Resultados

A partir de estos datos cabe destacar cómo en algunos contenidos se observa el paso de un enfoque eminentemente práctico a otro más teórico, en el que el que el Álgebra va adquiriendo mayor peso.

A principios de siglo Ciscar presenta unos mínimos conocimientos aritméticos bajo un enfoque eminentemente práctico.

Posteriormente las obras de Montojo y Cortázar ofrecen un tratamiento más amplio y algebraico de la materia, aunque con un tratamiento muy superficial de los números inconmensurables (irracionales) y aproximados (aproximaciones numéricas en operaciones, i.e. errores, extracción de raíces…).

A finales de siglo, las obras de Terry y Rivas, Serret y Salinas y Benítez profundizan el enfoque algebraico en todos los contenidos, especialmente en el estudio de la divisibilidad, los logaritmos y las aproximaciones numéricas.

II.3. Álgebra

II.3.1. Obras

Se examinan nueve obras con contenidos algebraicos que fueron utilizadas para la formación de los Guardias Marinas durante el siglo XIX; en la Tabla 3.2.2, *Datos generales de los textos sobre Álgebra*, se recoge información básica sobre las obras. Con el objetivo de facilitar una visión general de los contenidos tratados en cada obra, presentamos la Tabla 3.3.2, *Temas presentes en los textos sobre Álgebra elemental y superior*, en la que aparecen los principales contenidos relacionados con el Álgebra y su presencia o ausencia en las obras revisadas.

La primera obra, en orden cronológico, es *Tratado de Álgebra elemental*, de Juan Cortázar. Cuenta con numerosas ediciones, siendo la primera de 1848 y estando destinada al uso en universidades, institutos, escuelas industriales y como preparatorio para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. Se ha revisado la octava edición de 1857, constado la obra de doscientas dieciocho páginas [CORTÁZAR, 1857].
Es una obra muy completa al tratar de forma pormenorizada los principales contenidos del Álgebra elemental, en coherencia con el hecho de que es un texto de carácter general destinado como libro de texto en varios centros docentes. La única ausencia destacada es el tratamiento de las inecuaciones.
Es reseñable la presencia de notas de ampliación a lo largo de la obra, el extenso número de ejemplos y la ausencia ejercicios. La exposición tiene un estilo ordenado y los contenidos se muestran de forma clara y concisa, de manera similar a como son tratados actualmente.

La siguiente obra es *Tratado elemental de Álgebra: Redactado para uso del Colegio Naval Militar en virtud de Real Orden*, de Saturnino Montojo. La obra fue libro de texto en el Colegio Naval Militar y hay al menos dos ediciones, la primera de ellas de 1850. Se ha revisado esta primera edición y en ella el libro tiene trescientas siete páginas, todas ella sobre Álgebra, de las cuales cuarenta y siete están dedicadas al Álgebra superior [MONTOJO, 1850].
Tal y como indica Montojo en el *Prólogo*, este tratado es continuación del de Aritmética, pero en esta ocasión, con el objetivo de realizar un texto adaptado a los alumnos del Colegio Naval, el autor no sigue fielmente el texto de Francoeur "… *á fin de completar algunas teorías que este autor con arreglo al plan de su obra deja para mas adelante. He procurado hacerlo sin salir de*

los límites mas elementales, y aun así he separado con carácter mas menudo varios teoremas y doctrinas que pueden suprimirse enteramente, ó lo que es mejor reservarse para el caso de que enterados los alumnos de los ramos que no deben ignorar y que han constituido hasta aquí la clase de Algebra, permita el tiempo y se preste la disposicion de ellos á dar tal ensanche á la enseñanza.” [MONTOJO, 1850, pp. V-VI].

El autor trata el Álgebra elemental en los primeros cuatro capítulos de la obra, dedicando el quinto a contenidos del Álgebra superior.

La obra de Montojo recoge todos los contenidos presentes en el Álgebra elemental, adaptándolos al uso en el Colegio Naval Militar. Podemos apreciar que algunos contenidos, como las progresiones y los logaritmos, son tratados brevemente al ser estudiados en su tratado de Aritmética, mientras que otros, como las fracciones continuas (pese al estar también estudiadas en su tratado de Aritmética) o los problemas indeterminados de ecuaciones de primer grado, son estudiados de forma extensa y detallada.

Por otra parte, el quinto capítulo incluye contenidos propios del Álgebra superior relacionados con el Binomio de Newton y especialmente sobre el estudio de las Series.

En la obra se encuentran numerosos ejemplos que facilitan el uso del libro a los estudiantes, algunos de ellos contextualizados en situaciones propias de la Armada; cabe notar que no presenta ejercicios. La exposición tiene un estilo ordenado y equilibrado entre teoría y aplicaciones, aunque al tratar algunos temas, como las fracciones continuas, los contenidos teóricos tienen un peso mucho mayor.

El autor del *Cours élémentaire d’analyse: contenant un très grand nombre d’applications: à l'usage des élèves de l'Ecole Navale et des élèves de l'Ecole centrale des arts et manufactures*, es Pierre Jules Meunier-Joannet, matemático francés profesor de Hidrografía y de Análisis en la Escuela Naval Imperial. El libro está dedicado principalmente al Análisis Matemático, pero tiene un apartado sobre Álgebra que es recomendado como Complemento de Álgebra en el programa para el ingreso en la Escuela Naval Flotante en el año 1869. Parece ser que la obra tuvo dos ediciones, la primera de ellas en 1850, habiendo revisado la edición de 1858 en la que se dedican doce páginas al Álgebra superior [MEUNIER-JOANNET, 1858].

Los contenidos sobre Álgebra están relacionados únicamente con el binomio de Newton y sus aplicaciones para el desarrollo en serie del número *e*, la suma de algunos tipos de progresiones aritméticas y el estudio de pilas de balas. Es por ello un complemento sobre estos contenidos a otra obra que trate directamente sobre Álgebra.

La obra *Problemas y ejercicios del cálculo algebraico: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*, de Antonio Terry y Rivas, fue utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante y al parecer tuvo una única edición en 1879 [TERRY Y RIVAS, 1879]. Presenta ejemplos y ejercicios sobre Álgebra elemental y consta de dos tomos, estando el primero dedicado a presentar los enunciados de los problemas relacionados con el Álgebra elemental a lo largo de ciento noventa y ocho páginas, y el segundo tomo contiene las soluciones razonadas a los ejercicios y problemas del primer tomo en doscientas sesenta y dos páginas.

Terry y Rivas trata todos los contenidos habituales sobre Álgebra elemental e incluye unos pocos contenidos del Álgebra superior como los números combinatorios y el Binomio de Newton. Es una obra eminentemente práctica, en la que se tratan una gran cantidad de ejercicios y problemas que son mostrados de forma gradual según su dificultad. En la segunda parte de la obra, el autor presenta previamente al desarrollo de las soluciones de los ejercicios y problemas un resumen teórico de cada contenido. El tratamiento de los diferentes contenidos es equilibrado y tiene un estilo bien estructurado.

Charles Briot, autor de *Lecciones de álgebra elemental y superior*, fue un matemático francés que trabajó sobre funciones elípticas, galardonado con el Premio Poncelet en 1882. La obra fue traducida al español por C. Sebastian y B. Portuondo, Comandantes de Artillería e Ingenieros del Ejército y ex-Profesores de la Academias especiales de sus armas respectivas. El texto fue utilizado para el ingreso en la Escuela Naval Flotante y parece ser que tuvo una única edición en 1880 [BRIOT, 1880].

La obra consta de setecientas noventa y cinco páginas, de las que doscientas ochenta y ocho tratan el Álgebra elemental y el resto el Álgebra superior. El autor trata los principales contenidos del Álgebra elemental desde un enfoque claramente teórico, aunque presentando una gran cantidad de ejemplos ilustrativos.

Respecto a los contenidos relacionados con el Álgebra superior, estudia las Funciones, los Números complejos, las Series, el Análisis Combinatorio, brevemente los Determinantes, las Derivadas y de forma extensa las Ecuaciones algebraicas y las raíces de ecuaciones numéricas.

Por otra parte, los traductores presentan al final de la obra diecisiete apéndices complementarios de todo tipo de contenidos con el objetivo de adaptar la obra a la preparación de carreras facultativas, tanto civiles como militares. A lo largo del texto se pueden encontrar una gran cantidad de notas aclaratorias, siendo en general una obra muy completa que destaca entre las obras estudiadas por su alto nivel de contenidos.

Terry y Rivas es de nuevo el autor de una obra sobre Álgebra, *Ejercicios de Algebra, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*. El texto fue utilizado para el ingreso en la Escuela Naval Flotante y tuvo varias ediciones, de las que revisamos la tercera edición de 1885 [TERRY Y RIVAS, 1885]. Presenta ejemplos y ejercicios sobre Álgebra elemental y superior; consta de dos tomos, estando el primero dedicado a presentar los enunciados de los problemas relacionados con el Álgebra a lo largo de doscientas trece páginas y el segundo contiene las soluciones razonadas a los ejercicios y problemas del primer tomo en doscientas ochenta y siete páginas.

Terry y Rivas incluye todos los contenidos tratados en su anterior obra y los aumenta al tratar varios contenidos de Álgebra superior: la Teoría general de ecuaciones, la resolución de las ecuaciones numéricas de grados superiores y los Determinantes. Al igual que su anterior libro, es una obra eminentemente práctica en la que se presentan un gran número de ejercicios y problemas. Muchos de los ejercicios y problemas de los contenidos sobre Álgebra elemental coinciden con los de su anterior obra e igualmente presenta en el segundo tomo un resumen teórico de cada uno de estos contenidos antes de mostrar las soluciones de los ejercicios y problemas.

En cuanto a los contenidos sobre Álgebra superior, son tratados brevemente los relacionados con la Teoría general de ecuaciones, como la transformación de ecuaciones, las raíces iguales, los límites de las raíces de las ecuaciones y el Teorema de Sturm. También trata de forma resumida la resolución de las ecuaciones numéricas de grados superiores mediante el Método de aproximación de Newton. Finalmente presenta un mayor número de contenidos e introducciones teóricas al tratar los Determinantes, estudiando entre otros temas su transformación y propiedades, los determinantes menores, su suma, resta y multiplicación, su cálculo y sus aplicaciones.

Es destacable que el tratamiento de los diferentes contenidos es equilibrado y tiene un estilo bien estructurado.

La siguiente obra es *Tratado de álgebra: escrito con arreglo al nuevo programa de ingreso en la Escuela Naval Flotante*, de Pedro Peral y Caballero, Teniente de Navío y alumno de Estudios Superiores en el Observatorio de Cádiz. El texto fue utilizado para el ingreso en la Escuela Naval

Flotante y parece ser que tuvo una única edición en 1885, constando de trescientas setenta y una páginas dedicadas al Álgebra elemental y superior [PERAL, 1885].

El autor, al redactar la obra, atendía una cátedra en un colegio preparatorio para la Escuela Naval Flotante; considerando que no había ningún autor que tratase el Álgebra con sujeción al programa exigido para el ingreso, elabora este texto con contenidos en Álgebra elemental y superior. Presenta los contenidos con un lenguaje asequible para este tipo de alumnos y en general los temas son tratados sin mucha profundidad, mostrando en cada capítulo ejemplos y bastantes ejercicios para practicar.

La obra recoge todos los contenidos habituales relativos al Álgebra elemental, que va intercalando con otros propios del Álgebra superior. Entre estos contenidos de mayor nivel se encuentran el estudio de las Cantidades Imaginarias, los Radicales algebraicos, el Análisis Combinatorio, los Determinantes, las Series y las Derivadas, todos ellos tratados de forma esencial. Se echan en falta otros contenidos propios del Álgebra superior como las Funciones, las Ecuaciones Algebraicas y las Raíces de ecuaciones numéricas. Concluye la obra con el tratamiento de Números Inconmensurables, contenido más propio de la Aritmética.

La octava de las obras consultadas, *Álgebra*, es de Ignacio Salinas Angulo y Manuel Benítez y Parodi, coroneles del Estado Mayor del Ejército en el momento de publicar el texto. La obra fue utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante en 1900, siendo de texto en el concurso celebrado el 28 de febrero de 1885 por la Dirección general de Instrucción Militar. Tuvo numerosas ediciones, la primera de ellas en 1885, habiendo revisado la tercera edición de 1898 [SALINAS & BENÍTEZ Y PARODI, 1898a] (incompleta), y la undécima de 1939 [SALINAS & BENÍTEZ Y PARODI, 1939], constando esta última de setecientas setenta y dos páginas dedicadas al Álgebra elemental y superior.

Es una obra muy completa que recoge de forma exhaustiva todos los contenidos habituales tanto del Álgebra elemental como del Álgebra superior, mediante un enfoque altamente teórico que va desarrollando con numerosos ejemplos y ejercicios.

Es destacable la gran cantidad de notas aclaratorias y de ampliación que ofrece a lo largo de todo el texto. Por todo ello, esta obra es una de las más completas entre las revisadas.

La última de las obras consultadas, *Álgebra: escrita con sujeción al programa vigente para los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante*, pertenece a Jaime Montaner Vega-Verdugo, capitán de fragata. El libro fue utilizado para el ingreso en la Escuela Naval Flotante y declarado de texto por Real Orden de 28 de agosto de 1898. Parece ser que tuvo una única edición en 1898, constando de doscientas ochenta y seis páginas dedicadas al Álgebra elemental y superior [MONTANER, 1898].

A lo largo de la obra, el autor utiliza un lenguaje sencillo, con el que se tratan los contenidos de forma breve y resumida mediante una fundamentación teórica básica.

Presenta todos los contenidos del Álgebra elemental y respecto al Álgebra superior únicamente trata el Análisis Combinatorio y los Determinantes.

Ofrece ejemplos a lo largo de todo el texto y al final de cada capítulo muestra ejercicios de la obra de Terry y Rivas *Ejercicios de Algebra, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* [TERRY Y RIVAS, 1885].

La obra de Montaner presenta de forma asequible, para Aspirantes a ingresar en la Escuela Naval Flotante, los principales conceptos del Álgebra elemental junto con unos pocos contenidos del Álgebra superior.

II.3.2. Cortázar y Montojo

Se procede a realizar un estudio más pormenorizado de las obras de Cortázar y Montojo, dado que Ciscar no trata el Álgebra en sus obras. Para ello se han revisado y comparado sus dos textos, elaborando la Tabla 3.4.2, *Temas presentes en los textos de Cortázar y Montojo sobre Álgebra elemental y superior*, como resumen de los principales contenidos presentes en estos textos. Para realizar la comparativa han sido seleccionados cuarenta y siete ítems agrupados en diversas temáticas. Por otra parte, al no haber una clara separación entre los contenidos elementales y superiores, se han incluido nueve bloques de Álgebra superior para comprobar si fueron estudiados por los autores.

Las obras estudiadas siguen a grandes rasgos una estructura similar, aunque no se presentan todos los contenidos en el mismo orden y algunos contenidos importantes difieren en las dos obras.

Los principales contenidos tratados sobre Álgebra elemental por los dos autores son Polinomios, Potencias, Raíces, Progresiones y Logaritmos, Proporciones, Ecuaciones de primer grado y Ecuaciones de segundo grado.

Pasamos a ver la forma en que se han desarrollado cada uno de estos contenidos para poder valorar su evolución a lo largo del siglo XIX.

Respecto a los Polinomios, los principales contenidos tratados son las cantidades algébricas, monomios y polinomios, ordenación, simplificación, grado y valor numérico, adición, substracción, multiplicación y división de polinomios y fracciones algebraicas. Estos contenidos son tratados de forma similar por ambos autores.

Las principales diferencias se encuentran en el tratamiento de números negativos y polinomios homogéneos únicamente por parte de Cortázar y el mayor estudio de las fracciones algebraicas por parte de Montojo.

En cuanto al tratamiento de las Potencias, los principales contenidos son las potencias de los monomios, el manejo de permutaciones y combinaciones, la fórmula del binomio de Newton y las potencias de los polinomios. Los dos autores tratan todos los contenidos, si bien destaca por su mayor profundidad el tratamiento de las permutaciones y combinaciones por parte de Cortázar y el amplio estudio del binomio de Newton y sus propiedades por Montojo.

Los principales contenidos relacionados con las Raíces son las raíces de los monomios y polinomios, las propiedades de los radicales, la multiplicación, división y elevación a potencias, y el cálculo de las cantidades imaginarias de segundo grado. Los dos autores tratan los contenidos de forma similar, aunque Cortázar trata con mayor detalle el estudio de las raíces de un polinomio y las cantidades imaginarias.

Respecto a las Progresiones y los Logaritmos, los principales contenidos son las progresiones aritméticas y geométricas, las pilas de balas, el concepto de logaritmo, sus propiedades, la formación y uso de tablas, el cálculo del logaritmo de un número y del número correspondiente a un número dado. Encontramos menos contenidos en la obra de Montojo, especialmente en cuanto a la formación y uso de tablas de logaritmos, dado que los trató con mayor detenimiento al estudiar la Aritmética. Por otra parte, Cortázar presenta ecuaciones exponenciales y trata los problemas de pilas de balas con menor detalle que Montojo, pues éste último estudia los casos en los que las pilas están incompletas y emplea los números figurados.

En cuanto a las Proporciones, los principales contenidos tratados son los intereses, anualidades y rentas vitalicias. Ambos autores tratan los contenidos brevemente al ser contenidos estudiados en la Aritmética, siendo Cortázar el autor que trata estos contenidos en menor profundidad y destacando el uso de la regla de falsa posición por parte de Montojo.

Respecto a las Ecuaciones de primer grado, los principales contenidos tratados son las ecuaciones con una incógnita, las ecuaciones con varias incógnitas junto con los métodos de sustitución, igualación y reducción, los sistemas de ecuaciones en que el número de éstas es mayor o menor que el de las incógnitas, los problemas y las inecuaciones. Aunque el tratamiento básico de las ecuaciones de primer grado es similar en ambos autores, encontramos importantes diferencias tanto en el enfoque como en los contenidos presentados. Montojo realiza un estudio más profundo y teórico de este tipo de ecuaciones, destacando la exposición de aplicaciones numéricas, el método de los límites para descomponer una ecuación en dos más sencillas y el análisis de problemas indeterminados. También presenta importantes contenidos que no son tratados por Cortázar, como las inecuaciones o las fracciones continuas y su aplicación para resolver ecuaciones del tipo $ax+by=A$. Es destacable la contextualización que realiza de algunos problemas en relación con situaciones en las que se puede encontrar un Guardia Marina.

Los últimos contenidos son las Ecuaciones de segundo grado. Los principales aspectos tratados son las ecuaciones incompletas y completas, sus propiedades, la discusión de la ecuación general, el planteamiento y resolución de problemas, la aplicación de las ecuaciones a problemas de máximos y mínimos, las ecuaciones bicuadradas y las raíces de la unidad. Al igual que con las ecuaciones de primer grado, el tratamiento básico es similar en ambos autores, aunque encontramos algunas diferencias en los contenidos presentados, entre los que destacan el tratamiento por parte de Cortázar de este tipo de ecuaciones para la resolución de problemas de máximos y mínimos y por parte de Montojo el estudio de ecuaciones de cuarto grado y de ecuaciones con coeficientes irracionales.

Ambas obras indican en sus títulos que tratan sobre el Álgebra elemental, aunque Montojo trata con detenimiento las Series, contenido propio del Álgebra superior. Es destacable que Cortázar recoge los contenidos más importantes de esta parte del Álgebra en su obra *Tratado de Álgebra Superior*, por lo que es comprensible que no aparezcan en su tratado sobre Álgebra elemental.

II.3.3. Resultados

A partir de esta revisión podemos concluir que a lo largo del siglo XIX se observa que los contenidos esenciales del Álgebra elemental se van entrelazando con contenidos propios del Álgebra superior, exigiéndose muchos de ellos a finales de siglo para el ingreso en la Escuela Naval Flotante.

También es importante destacar, que el Álgebra elemental aparece por primera vez como materia propia de los estudios básicos en el Colegio Naval Militar, dado que en la primera mitad del siglo XIX no es tratada directamente en la formación de los Guardias Marinas.
Todas las obras estudiadas, a excepción de la de Meunier-Joannet –que ofrece contenidos de Álgebra superior como complemento–, tratan los principales contenidos del Álgebra elemental, si bien destacan por su enfoque claramente teórico los textos de Briot y Salinas y Benítez.

En cuanto a los contenidos propios del Álgebra superior, también aparecen por primera vez dentro de los estudios básicos en el Colegio Naval Militar mediante la obra de Montojo, tomando un importante impulso en las pruebas de ingreso de la Escuela Naval Flotante. Los contenidos no serán introducidos durante el último tercio del siglo de forma gradual, siendo destacable la inclusión o exclusión de algunos contenidos para el ingreso a la Escuela Naval de un curso a otro, lo que indica la falta de uniformidad sobre los estudios de Álgebra superior necesarios para la formación de los Guardias Marinas.
Son destacables la introducción de las Series por Montojo dentro de los contenidos básicos estudiados en el Colegio Naval Militar, el manejo del binomio de Newton y sus aplicaciones para el desarrollo en serie del número *e* por parte de Meunier-Joannet para los exámenes de ingreso de 1869 como complemento a los contenidos de la obra de Cortázar, el estudio de Funciones, Números complejos, Análisis Combinatorio, Determinantes, Derivadas, Ecuaciones algebraicas y raíces de ecuaciones numéricas por parte de la obra de Briot para los exámenes de ingreso de 1885, y el estudio más completo de Determinantes por parte de Salinas y Benítez para los exámenes de ingreso de 1900.

Las dos obras más completas son las de Briot y Salinas y Benítez, con un alto nivel de contenidos y una mayor exigencia que en el resto de obras, lo que nos permite deducir que a lo largo del siglo XIX los contenidos algebraicos para la formación básica de un Guardia Marina aumentaron considerablemente, siendo mucho más extensos y teóricos.

II.4. Geometría elemental

II.4.1. Obras

Se examinan seis obras con contenidos elementales de Geometría que fueron utilizadas para la formación de los Guardias Marinas durante el siglo XIX; en la Tabla 3.2.3, *Datos generales de los textos sobre Geometría elemental*, se recoge información básica sobre las obras. Con el objetivo de facilitar una visión general de los contenidos tratados en cada obra presentamos la Tabla 3.3.3, *Temas presentes en los textos sobre Geometría elemental*, en la que aparecen los principales contenidos relacionados con la Geometría elemental y su presencia o ausencia en las obras revisadas.

La primera obra sobre Geometría elemental en orden cronológico con respecto a la primera edición, *Curso de estudios elementales de Marina,* pertenece a Gabriel Ciscar y Ciscar. Su primera edición es de 1803, y como ya se comentó, los cuatro tomos que conforman el *Curso* fueron durante muchos años el principal texto para la instrucción de Guardias Marinas (de 1803 a 1844) y de pilotos en las Escuelas de Náutica. El segundo tomo trata la Geometría y ha sido revisado en su primera edición de 1803, constando el libro de ciento treinta y seis páginas en diecinueve capítulos [CISCAR, 1803a].

En esta parte del *Curso* se sigue el mismo enfoque y distribución que en su Tomo I sobre Aritmética, estudiando de forma resumida los principales contenidos básicos de la Geometría elemental y mostrando ejemplos y explicaciones en letra menor para diferenciar los contenidos principales de los secundarios. Ciscar indica, que aunque son pocas las proposiciones de Geometría de las que se hacen uso en la práctica ordinaria de la Navegación, estos principios son de mayor utilidad "*… en quanto preparan el entendimiento para discurrir con acierto sobre las materias facultativas*." [CISCAR, 1803a, II, p. III].

Los contenidos son tratados de forma resumida, destacando la ausencia del cálculo de áreas y volúmenes de algunos sólidos, tras indicar que no tienen uso en la práctica ordinaria de la Navegación. Por otra parte, es relevante el interés del autor en la aplicación de los contenidos a la práctica de la Navegación, como el cálculo del área de la sección de un navío por la lumbre del agua; dedica un capítulo a exponer el manejo y uso de instrumentos de dibujo, otro a tratar nociones para el levantamiento de planos y tres capítulos a la Trigonometría Rectilínea (vid. II.8). En el texto encontramos bastantes ejemplos y no aparecen ejercicios para practicar.

El autor presenta, mediante el método sintético, un lenguaje y un discurso característico de las obras sobre la materia propios del siglo XVIII.

La segunda obra es *Tratado de Geometría elemental*, de Juan Cortázar, cuya primera edición data de 1847. La obra estuvo destinada al uso en universidades, institutos, escuelas industriales, escuelas normales y como preparatorio para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. Se ha revisado la duodécima edición de 1864, constado la obra de doscientas páginas y siete láminas [CORTÁZAR, 1864].

El autor diferencia claramente dos grandes bloques, la Geometría Plana y la del Espacio, tratando con detalle todos los contenidos propios de la materia mediante una estructura ordenada, diferenciando claramente entre las definiciones de conceptos, los teoremas que va deduciendo y los problemas resueltos como ejemplos de aplicación de las propiedades. Presenta bastantes ejemplos y no ofrece ejercicios. Entre los contenidos tratados sobresale el estudio de elipses, parábolas y hélices. Al tratar contenidos sobre construcciones geométricas y problemas gráficos, el autor sigue el método sintético, mientras que para contenidos con mayor generalidad o numéricos emplea el método analítico; es destacable que a la hora de comprobar algunos teoremas realiza demostraciones utilizando ambos métodos.

Como indicamos al tratar el Álgebra, la obra *Cours élémentaire d'analyse: contenant un très grand nombre d'applications: à l'usage des élèves de l'Ecole Navale et des élèves de l'Ecole centrale des arts et manufactures* pertenece a Pierre Jules Meunier-Joannet y está dedicada principalmente al Análisis Matemático. Tiene un apartado sobre Geometría que es recomendado como Complemento de Geometría en el programa para el ingreso en la Escuela Naval Flotante en el año 1869. Se ha revisado la edición de 1858 [MEUNIER-JOANNET, 1858], en la que se dedican dieciséis páginas a la Geometría. En este complemento de Geometría, el autor estudia sintéticamente las secciones cónicas, especialmente la elipse, ofreciendo propiedades básicas sobre las mismas y problemas a modo de ejemplos para realizar construcciones.

La siguiente obra es *Tratado de Geometría elemental* de Eugène Rouché y Charles de Comberousse; Rouché fue un reconocido matemático francés, profesor en el Conservatorio de Artes y Oficios de París y examinador de la Escuela Politécnica, mientras que Comberousse fue un matemático e ingeniero francés; la obra fue traducida al español por los hermanos Antonio[13] y Joaquín Portuondo, siendo utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. Contó con numerosas ediciones, la primera de ellas en 1873; se ha revisado la tercera, de 1878, que contiene quinientas veintiuna páginas y doce láminas con quinientas diez figuras [ROUCHÉ & COMBEROUSSE, 1878]. Cabe destacar que Antonio Portuondo publicó un complemento a esta obra, bajo el título de *Notas al Tratado de Geometría Elemental de W.Rouché y Ch. de Comberousse*, que contó con bastantes ediciones. Hemos revisado la edición de 1879 de este complemento, que aparece en la obra de Rouché y Comberousse que estudiamos; contiene doce notas en sesenta y seis páginas y una lámina con cuarenta y ocho figuras. Portuondo tiene como principal objetivo de su trabajo evitar a los alumnos, en lo posible, tomar apuntes aclaratorios en clase.

La obra de Rouché y Comberousse es una obra muy completa que contiene todos los contenidos propios de la Geometría elemental, salvo el tratamiento de curvas. Estos contenidos son estudiados, por lo general, bajo el método sintético, si bien encontramos también aplicaciones del método analítico, con una extensión y detalle por encima del resto de autores. Destacan el estudio de circunferencias, polos y polares, inversiones, homotecias, figuras simétricas, poliedros convexos, triángulos esféricos y áreas sobre la superficie esférica. Todo ello supone un mayor nivel de exigencia de las pruebas de acceso a la Escuela Naval Flotante y por lo tanto para la formación de los Guardias Marinas a finales del siglo XIX.

La obra *Ejercicios de Geometría: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*, es de Antonio Terry y Rivas. Fue utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante y al parecer tuvo una única edición en 1881 [TERRY Y RIVAS, 1881a]. Trata la Geometría elemental a lo largo de doscientas cuarenta y seis páginas y diez láminas con figuras.

El autor comienza indicando varios métodos y principios para la resolución de problemas geométricos, explicando las diferencias entre los procedimientos sintéticos y los analíticos.

Es una obra práctica en la que se presentan problemas relacionados sobre Geometría Plana y del Espacio. Respecto a los primeros, destacan los problemas relacionados con rectas perpendiculares y paralelas, triángulos y otros polígonos, círculos, polígonos semejantes, polígonos regulares y cálculo de áreas. En cuanto a los problemas sobre Geometría en el Espacio, se centra en el cálculo de áreas y volúmenes de poliedros, de cuerpos redondos y de cuerpos engendrados por figuras planas, junto con el cálculo de máximos y mínimos. No trata

[13] Antonio Portuondo Barceló (1845-1927), ingeniero y matemático hispano-cubano, profesor y director de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.

contenidos relacionados con curvas y respecto al estudio de planos, ángulos diedros o triedros, poliedros y cuerpos redondos, se limita a su utilización para el cálculo de áreas y volúmenes. A lo largo de la obra utiliza principalmente desarrollos sintéticos para la comprobación de propiedades, mientras que para el cálculo de áreas y volúmenes se basa en desarrollos analíticos.

La última de las obras consultadas, *Geometría*, pertenece a Miguel Ortega y Sala, Coronel graduado, Teniente Coronel de Ejército, Comandante de Ingenieros y profesor de su Academia. La obra fue elegida como libro de texto para el ingreso en academias militares por Real Orden de 7 de octubre de 1884, en el concurso que se celebró el 30 de abril de ese mismo año por la Dirección General de Instrucción Militar, y para el ingreso en la Escuela Naval en 1900. El texto tuvo numerosas ediciones a lo largo de más de sesenta años, habiendo sido revisada la primera edición de 1885 que consta de trescientas noventa y siete páginas y quince láminas con figuras [ORTEGA Y SALA, 1885].

Esta obra recoge todos lo contenidos propios de la Geometría elemental, salvo el estudio de curvas como la elipse y la parábola. Trata de forma exhaustiva todos estos contenidos, combinado los enfoques sintéticos y analíticos, aunque el primero de ellos predomina a lo largo de la obra; lo hace teniendo en cuenta la juventud de lo estudiantes, indicando que se han "*…adoptado siempre las demostraciones más sencillas, sin perjudicar, por esto, su rigorismo, exponiéndolas con toda la claridad y concisión que hemos sabido…*" [ORTEGA Y SALA, 1885, p. XIV].

Por su desarrollo y detenimiento, resalta el tratamiento de las proyecciones en el plano, las figuras semejantes y los polígonos regulares en la Geometría Plana y de posiciones relativas de rectas y planos, poliedros estrellados y cuerpos semejantes en la Geometría del Espacio. Cabe destacar el tratamiento de centros de distancias proporcionales y centros de gravedad que realiza al finalizar la obra. Encontramos un importante número de ejemplos mediante problemas al tratar la Geometría Plana, mientras que al tratar la Geometría del Espacio el número es escaso.

II.4.2. Ciscar y Cortázar

Se procede a realizar un estudio más pormenorizado de las obras de Ciscar y Cortázar, dado que Montojo no trata la Geometría elemental en sus obras. Para ello se han revisado y comparado sus dos obras, elaborando la Tabla 3.4.3, *Temas presentes en los textos de Ciscar y Cortázar sobre Geometría elemental*, como resumen de los principales contenidos presentes en estos textos. Para realizar la comparativa han sido seleccionados cuarenta y cinco ítems agrupados en diversas temáticas.

Las obras estudiadas presentan importantes diferencias en los contenidos tratados y en su desarrollo, tanto en la Geometría Plana como en la del Espacio.

Los principales contenidos comparados sobre Geometría elemental Plana son Rectas y Ángulos, Polígonos, el Círculo, Áreas y Curvas. Respecto a la Geometría elemental del Espacio, los contenidos comparados son Planos, Ángulos, Poliedros, Cuerpos redondos, Áreas y Volúmenes.

Pasamos a ver la forma en que se han desarrollado cada uno de estos contenidos, para poder valorar su evolución a lo largo del siglo XIX. Estudiamos en primer lugar los ítems de la Geometría Plana y seguidamente los de la Geometría del Espacio.

El primer contenido que comparamos en la Geometría elemental Plana son las Rectas y Ángulos. Los principales elementos tratados son las rectas, los ángulos y sus propiedades, las rectas perpendiculares y oblicuas, las rectas paralelas y las líneas. Ciscar trata todos estos contenidos elementales a lo largo de tres capítulos discontinuos, presentando un número considerable de definiciones y propiedades. Por su parte, Cortázar presenta un número reducido de definiciones y propiedades básicas. Tanto Ciscar como Cortázar desarrollan los contenidos bajo el método sintético.

En cuanto al tratamiento de los Polígonos, los principales contenidos son las figuras, los triángulos, los polígonos, las líneas proporcionales y los polígonos semejantes, las consecuencias de la semejanza de triángulos y los polígonos regulares. Ciscar no presenta algunos de estos contenidos, como los polígonos semejantes y los polígonos regulares; con respecto al resto de contenidos, son tratados de forma básica centrándose en mayor medida en las definiciones que en las propiedades de los elementos. Por su parte, Cortázar trata todos los contenidos de una manera más ordenada, clara y mucho más detallada. Ambos fundamentan sus demostraciones en desarrollos sintéticos, si bien Cortázar utiliza algunas herramientas analíticas.

Respecto al estudio del Círculo, los principales elementos estudiados son la circunferencia, las líneas rectas en el círculo, la intersección y contacto de dos circunferencias y la medida de ángulos en la circunferencia. Al igual que con los anteriores contenidos, son tratados superficialmente por Ciscar; por otro lado, no trata la intersección y contacto de dos circunferencias. Cortázar, por su parte, sigue tratando todos los contenidos de forma más profunda y ordenada.

Los principales contenidos al estudiar las Áreas son el cálculo de las áreas de los polígonos y del círculo, junto con la comparación entre áreas. Cortázar realiza un estudio mucho más profundo a como lo hace Ciscar; ambos realizan un desarrollo más analítico para hallar las áreas, mientras que para compararlas siguen el método sintético.

Para concluir los contenidos de la Geometría Plana, Cortázar estudia con detenimiento las propiedades de tres curvas: la elipse, la parábola y la hélice. Por su parte, Ciscar no trata estos contenidos en su obra.

Pasamos ahora revisar los contenidos tratados por estos autores al estudiar la Geometría elemental en el Espacio. En el primero de ellos, Planos, destacamos las rectas perpendiculares oblicuas a un plano, el paralelismo en el espacio y las proyecciones sobre el plano. Ambos autores realizan demostraciones sintéticas al tratar estos temas. De nuevo, Ciscar presenta los contenidos mínimos de forma básica y en esta ocasión no trata propiedades relacionadas con proyecciones sobre el plano. Por su parte, Cortázar presenta un mayor número de propiedades y trata todos los contenidos.

En el siguiente ítem, Ángulos, podemos diferenciar entre diedros y poliedros. Ciscar trata brevemente los ángulos diedros y únicamente define los ángulos poliedros. Por su parte, Cortázar realiza un amplio estudio de ambos tipos de ángulos con numerosas propiedades que demuestra mediante relaciones de los ángulos en el plano y desarrollos sintéticos.

En cuanto al tratamiento de los Cuerpos redondos, son estudiados el cono, el cilindro y la esfera. Ciscar trata de forma muy breve el cono y el cilindro, dando sus definiciones y unas mínimas propiedades; respecto a la esfera, la estudia con algo más de detenimiento destacando la ausencia del estudio de triángulos esféricos, elementos que tratará con profundidad en el Tomo III, *Cosmografía*. Por su parte, Cortázar trata con mayor detalle las propiedades del cono y el cilindro, realizando un estudio mucho más profundo sobre la esfera y los triángulos esféricos, presentando numerosas propiedades sobre estos últimos.

Los principales contenidos al estudiar las Áreas son el cálculo de las áreas de poliedros, conos, cilindros, esferas, junto con la comparación entre áreas. Ciscar no trata dichos contenidos, dado que a su entender "*El determinar las superficies de los sólidos no tiene uso en la práctica ordinaria de la Navegación*". [CISCAR, 1803a, p. 84]. Cortázar estudia el área de estos elementos junto con el de los triángulos esféricos, concluyendo con la comparación de áreas entre varios elementos.

En cuanto al estudio de Volúmenes, los elementos a estudiar son poliedros, conos, cilindros o esferas y la comparación entre varios de ellos. Ciscar estudia únicamente el cálculo de volúmenes de poliedros, al considerar que el resto de volúmenes no son de aplicación a la Navegación. Por su parte, Cortázar trata todos los volúmenes siguiendo el mismo proceso que al estudiar las áreas.

Es destacable el estudio que hace Ciscar de la Trigonometría Plana logarítmica, único de los autores que trata este contenido al estudiar la Geometría elemental. También cabe resaltar el capítulo que dedica a la Geometría práctica, donde expone reglas para la determinación de puntos y líneas sobre el papel, la construcción de escalas de partes iguales y el uso de la regla, el compás, la escuadra y el transportador de ángulos, constatando el objetivo práctico del texto.

Podemos concluir que la obra de Ciscar trata los contenidos de forma muy básica y resumida, destacando la ausencia del tratamiento de curvas en el plano junto con el cálculo de áreas y volúmenes en el espacio. Su enfoque es eminentemente práctico, para posteriores aplicaciones a la Cosmografía y Navegación en los estudios de los Guardias Marinas.
Por su parte, Cortázar presenta una obra de marcado carácter teórico pensada para un público más amplio, mucho más completa tanto en el número de contenidos como en su tratamiento.

II.4.3. Resultados

A partir del estudio de las obras, cabe destacar que el número y profundización de los contenidos exigidos en la formación de los Guardias Marinas va aumentando de forma considerable a lo largo del siglo.

En general, las obras tratan la mayoría de contenidos mediante desarrollos sintéticos, principalmente para la comprobación de propiedades. Por otra parte, para el cálculo de áreas y volúmenes se basan esencialmente en desarrollos analíticos.

A principios de siglo, Ciscar presenta unos mínimos conocimientos geométricos bajo un enfoque eminentemente práctico.
Posteriormente, las obras de Cortázar y Terry y Rivas ofrecen un tratamiento más teórico y profundo de la materia.
A finales de siglo, las obras de Rouché y Conmberousse y Ortega y Sala aumentan considerable la profundización de los contenidos teóricos, lo que supone un mayor nivel de exigencia de las pruebas de acceso a la Escuela Naval Flotante y por lo tanto para la formación de los Guardias Marinas a finales del siglo XIX.

II.5. Geometría Descriptiva

II.5.1. Obras

Se examinan tres obras con contenidos sobre Geometría Descriptiva que fueron utilizadas para la preparación de los exámenes de ingreso de los Aspirantes a la Escuela Naval Flotante; en la Tabla 3.2.4, *Datos generales de los textos sobre Geometría Descriptiva*, se recoge información básica sobre las obras. Con el objetivo de facilitar una visión general de los contenidos tratados en cada obra, presentamos la Tabla 3.3.4, *Temas presentes en los textos sobre Geometría Descriptiva*, en la que aparecen los principales elementos relacionados con la materia y su presencia o ausencia en las obras revisadas.

La primera obra en orden cronológico con respecto a la primera edición, *Tratado de geometría descriptiva, sombras, topográfico y sistema de acotaciones,* pertenece a José Bielsa y Ciprián, Coronel, Teniente Coronel de Artillería y Profesor de la Academia de Artillería en el momento de realizar la obra. La primera edición es de 1846, habiéndose revisado la segunda de 1857 con doscientas cuarenta y siete páginas [BIELSA Y CIPRIÁN, 1857]. La obra fue preparatoria para el ingreso en la Escuela Naval Flotante según *Real Decreto de 10 de septiembre de 1869 para el ingreso y estudios de los Aspirantes de marina*, donde se indica que los Principios de Geometría Descriptiva se requerirán "*Con la extensión de los capítulos I y II de la obra de D. José Bielsa.- Segunda edición.*" [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 44]; entendemos que dichos capítulos se refieren al Libro I de la obra.

Los contenidos necesarios para la prueba de ingreso en la Escuela recogen las nociones básicas sobre la Geometría Descriptiva y problemas relativos a rectas y planos. Comienza presentando el concepto de proyección junto con varios principios sobre su uso y el trazado de figuras, considerando que por lo general las proyecciones serán siempre rectangulares. A continuación muestra, mediante problemas, la resolución de diversas situaciones en las que se relacionan rectas y planos, basándose en propiedades de las proyecciones. Entre estas propiedades podemos destacar el cálculo de trazas, proyecciones, rebatimientos, intersecciones, distancias y ángulos, junto con el cálculo de rectas y planos sujetos a ciertas condiciones de paralelismo o perpendicularidad. Es destacable la construcción de proyecciones de varios poliedros regulares y la resolución del ángulo triedro.

La obra también trata, con bastante profundidad, la generación y representación de superficies, los planos tangentes a una superficie y la intersección de superficies. Realiza un estudio pormenorizado de las superficies desarrollables y de las gauchas o alabeadas, igualmente de la intersección de superficies y secciones planas, finalizando con el tratamiento de sistemas de acotaciones y de sombras.

La obra de Bielsa y Ciprián trata con bastante detenimiento los principales temas de la Geometría Descriptiva, si bien únicamente fueron requeridas para las pruebas de acceso a la Escuela Naval Flotante nociones básicas sobre proyecciones y problemas relacionados con rectas y planos.

La segunda obra es *Teoría de rectas y planos de geometría descriptiva: redactada, con arreglo al programa de ingreso para la Escuela Naval Flotante y recomendada por su Reglamento de 10 de Enero de 1877 en el Pár. 4º, Art. 5º. Tit. II.*, de Joaquín Ibáñez y Valera, Teniente de Navío de 1ª clase de la Armada en el momento de publicar la segunda edición del texto [IBÁÑEZ Y VALERA, 1877]. El texto fue preparatorio para el ingreso en la Escuela Naval Flotante.

En este pequeño libro, de ochenta y una páginas, el autor trata los principios generales de las proyecciones, junto con problemas relativos a rectas, planos y a la resolución de ángulos triedros, si bien no recoge contenidos relacionados con sólidos y superficies.

Comienza con conceptos básicos sobre proyecciones, como la proyectante, la generatriz o la directriz, junto con propiedades sin demostrar sobre perpendicularidad y paralelismo. Continúa presentando conceptos básicos como traza y rebatimiento, siguiendo con determinaciones de puntos, rectas y planos en el espacio, siendo destacable que el autor considera que los planos de proyección son perpendiculares entre sí. Una vez tratadas las nociones básicas presenta una amplia cantidad de problemas relativos a rectas y planos en los que se hallan trazas, proyecciones, distancias, intersecciones o ángulos y se construyen rectas y planos sujetos a ciertas condiciones.

Concluye la obra tratando brevemente la resolución del ángulo triedro a lo largo de seis problemas, según sean dados tres de los seis elementos que lo forman.

Ibáñez y Valera presenta de forma clara y concisa un número considerable de problemas relativos a rectas y planos, junto con un breve estudio del ángulo triedro, si bien no trata contenidos relacionados con cuerpos y superficies.

La última de las obras es *Tratado elemental de Geometría Descriptiva escrito por encargo de la Junta Facultativa de la Escuela Naval para servir en ella de texto*, cuyo autor es Miguel García

Villar, Teniente de Navío en 1883, año de publicación de la única edición del texto, con ciento cincuenta y cuatro páginas [GARCÍA VILLAR, 1883]. La obra fue preparatoria para el ingreso en la Escuela Naval Flotante.

Es interesante la aclaración que realiza el autor sobre los motivos que le llevan a realizar el libro: "*La Junta Facultativa de la Escuela Naval me encargó la redaccion de esta obra, por no creer conveniente el adoptar como texto alguna de las muchas y muy buenas escritas sobre la materia, no aceptables á causa de su mucha extension, dada la aplicacion escasa que en nuestra carrera encuentra la GEOMETRÍA DESCRIPTIVA, y el corto tiempo que se dedica en la Escuela á su enseñanza*." [GARCÍA VILLAR, 1883, p. V].

El índice del texto coincide plenamente con el programa de ingreso en la Escuela Naval Flotante del año 1885.

García Villar recoge todos los contenidos relacionados con la Geometría Descriptiva con la excepción de la resolución de ángulos triedros, al no aparecer estos contenidos en el programa. Trata todos los temas con la profundidad necesaria "…*para la fácil comprensión de las proyecciones y dibujos de las máquinas y aparatos diversos, que se encuentran despues principalmente en los estudios de Artillería y Máquinas de vapor*." [GARCÍA VILLAR, 1883, p. V], e indica que no hace uso de la Geometría Analítica en algunas demostraciones "…*porque el objeto es únicamente dar en esta obra una idea de la forma y generacion de estas superficies*." [GARCÍA VILLAR, 1883, p. 114].

En primer lugar presenta unos principios generales sobre la Geometría Descriptiva, pasando a estudiar ciertos problemas sobre rectas y planos relacionados con el cálculo de trazas y rebatimientos, proyecciones, intersecciones, distancias y ángulos. También trata la construcción de rectas y planos sujetos a ciertas condiciones, si bien todos estos contenidos son tratados con menor profundidad que en los anteriores autores. Seguidamente revisa la representación de poliedros, sus secciones por planos e intersecciones entre sí, principalmente de prismas rectos y oblicuos.

A continuación trata la generación, proyección, cortes por planos e intersecciones de las principales superficies curvas, especialmente de cilindros y conos. Pasa a generar y presentar aplicaciones relacionadas con proyecciones e intersecciones de las principales superficies de revolución: esfera, elipsoide, paraboloide de revolución, hiperboloide de dos hojas y toro. Posteriormente, realiza un estudio similar de las principales superficies gauchas o alabeadas: hiperboloide de una hoja, paraboloide hiperbólico y helizoide gaucho, junto con la generación y propiedades de la hélice y sus aplicaciones en tornillos y hélices propulsoras.

Finaliza con unas ideas básicas respecto a las sombras y sus aplicaciones, como los eclipses, los distintos tipos de perspectivas y unas nociones generales para el levantamiento de un plano.
Concluye la obra defendiendo un tratamiento práctico de la Geometría Descriptiva, "*…procurando que sea á la vez un curso de Dibujo, no dejándose guiar nunca por la figura del libro solamente, sino verificando por sí mismo todas las construcciones y ejercitándose mucho en el manejo de la regla y el compas, por medio de dibujos y proyecciones de los objetos más sencillos y usuales, que podrán llevarse á cabo con facilidad, y resolviendo ademas problemas y ejercicios con los que el buen juicio del profesor sabrá hacer á la vez agradable y fácil su estudio, supliendo al mismo tiempo la concision y los defectos de esta obra.*" [GARCÍA VILLAR, 1883, p. 154].

II.5.2. Resultados

A partir del estudio de las obras, cabe destacar que la Geometría Descriptiva pasa a formar parte de la formación de los Guardias Marinas durante el periodo correspondiente a la Escuela Naval Flotante, principalmente en las pruebas de ingreso. En el reglamento de 1895 aparece la Geometría Descriptiva como una de las asignaturas del primer semestre del primer curso [GUILLÉN, 1918b, p. 193] y también encontramos referencias a la asignatura en [ANÓNIMO, 1902, p.14].

En las tres obras revisadas se sigue un planteamiento similar en el desarrollo de los contenidos, si bien se encuentran diferencias respecto a los elementos tratados y la profundidad con que son estudiados.

En los primeros años de la Escuela Naval Flotante, un capítulo del libro de Bielsa y Ciprián cubre todos los contenidos necesarios para la prueba de acceso basados en nociones básicas sobre Geometría Descriptiva, problemas relativos a rectas y planos y resolución del ángulo triedro.

Posteriormente, el referente es la obra de Ibáñez y Valera, que incluye los mismos contenidos y sigue una estructura y tratamiento similar al de Bielsa y Ciprián.

Por último, el texto de García Villar supone un aumento significativo de los contenidos al incluir el tratamiento de sólidos, superficies desarrollables, superficies de revolución y superficies gauchas, junto con unas nociones sobre sombras y perspectiva; sin embargo no estudia la resolución del ángulo triedro.

De esta forma, vemos que los contenidos sobre Geometría Descriptiva que son exigidos a los Aspirantes a Guardias Marinas en la Escuela Naval Flotante aumentan considerablemente a lo largo del último tercio del siglo XIX, siguiendo un planteamiento y desarrollo similar por parte de todos los autores.

II.6. Geometría Analítica

II.6.1. Obras

Se examinan cuatro obras con contenidos sobre Geometría Analítica; las tres primeras fueron utilizadas para la preparación de los exámenes de ingreso de los Aspirantes a la Escuela Naval Flotante y la cuarta en el propio centro; en la Tabla 3.2.5, *Datos generales de los textos sobre Geometría Analítica*, se recoge información básica sobre las obras. Con el objetivo de facilitar una visión general de los contenidos tratados en cada obra presentamos la Tabla 3.3.5, *Temas presentes en los textos sobre Geometría Analítica*, en la que aparecen los principales elementos relacionados con la materia y su presencia o ausencia en las obras revisadas.

La primera obra en orden cronológico con respecto a la primera edición, *Cours élémentaire d'analyse: contenant un très grand nombre d'applications: à l'usage des élèves de l'Ecole Navale et des élèves de l'Ecole centrale des arts et manufactures*, es de Pierre Jules Meunier-Joannet. El libro está dedicado principalmente al Análisis Matemático, si bien tiene un apartado sobre Geometría Analítica a lo largo de treinta y nueve páginas, que fue preparatorio para el ingreso en la Escuela Naval Flotante [MEUNIER-JOANNET, 1858].
La obra trata básicamente los sistemas de coordenadas, las rectas y las elipses bajo un enfoque plenamente analítico. Comienza revisando los sistemas de coordenadas rectilíneos y polares, destacando la relación entre las coordenadas de un punto en una línea y su ecuación, para lo que muestra las ecuaciones tanto en coordenadas rectilíneas como polares de la elipse, la parábola y la hipérbola, junto con la construcción de curvas dadas por sus ecuaciones. Seguidamente estudia la transformación de coordenadas entre distintos ejes, la distancia entre dos puntos y la ecuación del círculo. A continuación trata las rectas, presentando esencialmente sus distintas ecuaciones y el cálculo de ángulos y distancias. Concluye con la construcción de la elipse y el cálculo de sus tangentes, normales y radio.
La obra de Meunier-Joannet presenta unos limitados contenidos sobre Geometría Analítica en dos dimensiones basándose en un enfoque analítico.

La segunda obra es *Lecciones de geometria analítica: redactadas para uso de los aspirantes á guardias-marinas*, de Julio Merás y Uría, Teniente de Navío de 2ª clase de la Armada y profesor de la Escuela Naval Flotante en el momento de publicar el texto, siendo posteriormente Director entre 1903 y 1906. El texto, que cuenta con una única edición de doscientas ocho páginas, fue preparatorio para el ingreso en la Escuela Naval Flotante con el objetivo, tal y como indica el autor, de "*…sustituir á la obra de Meunier-Joannet, en la arte que á dicha asignatura se refiere*" [MERÁS Y URÍA, 1879, Advertencia]. Esta obra se debía complementar, para el estudio en tres dimensiones, con el libro de Salmon, que será revisado a continuación.

En este libro, Merás y Uría trata los principios generales de la Geometría Analítica, especialmente en dos dimensiones. Comienza con unas nociones básicas sobre funciones, pasando a estudiar los sistemas de coordenadas y las ecuaciones de las líneas más importantes junto a su clasificación. Seguidamente estudia la transformación de coordenadas rectilíneas y la representación geométrica de las principales líneas a partir de sus ecuaciones. Pasa a revisar con mayor detenimiento las rectas: sus distintas ecuaciones, ángulos, distancias y construcciones según ciertas condiciones. Posteriormente trata las elipses, hipérbolas y parábolas, destacando el estudio de sus definiciones y propiedades, el cálculo de sus centros, tangentes y normales, junto con la resolución geométrica de ciertos problemas. A continuación estudia los centros, diámetros y ejes de una curva, realizando un estudio detallado para curvas de segundo grado. Siguiendo con este tipo de curvas, estudia la forma de reducir una ecuación de segundo grado con dos variables a su forma más sencilla mediante el cambio de los ejes coordenados. Concluye el estudio de dos dimensiones tratando las asíntotas rectilíneas de las curvas y el uso de coordenadas polares, centrándose en las aplicaciones sobre las elipses, hipérbolas y parábolas.

En el último capítulo de la obra presenta unas nociones básicas de Geometría Analítica en tres dimensiones. Trata principalmente las coordenadas rectilíneas, el cálculo de distancias entre dos puntos y algunas ecuaciones de rectas y planos sujetos a ciertas condiciones.

Merás y Uría presenta los principales contenidos sobre Geometría Analítica en dos dimensiones bajo un enfoque más geométrico, centrando su estudio en la recta, la elipse, la hipérbola y la parábola. Por otra parte, realiza un estudio básico sobre ecuaciones de rectas y planos en el espacio.

La tercera obra es *Tratado de geometría analítica de tres dimensiones; traducido de la cuarta edicion inglesa por L. de la Fuente*, de George Salmon, reconocido geómetra y teólogo irlandés, profesor en el Trinity College. La obra, que cuenta con una única edición española de ciento treinta y cinco páginas, fue preparatoria para el ingreso en la Escuela Naval Flotante como complemento de la obra de Merás y Uría en la parte sobre Geometría de tres dimensiones [SALMON, 1888].

El texto de Salmon presenta los principales contenidos sobre Geometría Analítica de tres dimensiones bajo un enfoque plenamente algebraico, sin utilizar figuras geométricas de apoyo y con continuas referencias a su obra sobre Álgebra superior. Comienza presentando los sistemas de coordenadas en el espacio como una extensión de los de dos dimensiones, entrelazándolos con principios sobre proyecciones y razones de proporcionalidad. Continúa con el cálculo de distancias, cosenos directores y la transformación de coordenadas haciendo uso de sistemas de ecuaciones y determinantes. Posteriormente, recalca el carácter algebraico de la obra al interpretar las ecuaciones como superficies, líneas o puntos, dependiendo de su número y grado. A continuación, pasa a estudiar los planos y sus ecuaciones según estén sujetas a ciertas condiciones, siendo destacable el uso de coordenadas cuadriplanares; análogamente investiga las líneas rectas e incluye varias propiedades sobre el tetraedro para su uso posterior. El enfoque algebraico permite revisar propiedades comunes a todas las superficies de segundo grado, realizando numerosas referencias al estudio sobre las cónicas y presentando contenidos como plano y recta polar o plano diametral conjugado. Realiza una clasificación de las superficies de segundo grado y estudia sus principales propiedades según tengan o no centro, manejando contenidos relacionados con diámetros conjugados, secciones circulares, generatrices rectilíneas y superficies de revolución. Concluye la obra con ejemplos de aplicación del Álgebra al estudio de lugares geométricos.

Salmon, a lo largo del texto, aplica propiedades de la Geometría Algebraica para realizar el estudio de la Geometría Analítica en tres dimensiones, destacando la utilización de propiedades de sistemas de ecuaciones y determinantes para obtener ecuaciones que satisfagan ciertas condiciones en el espacio.

La última de las obras es *Lecciones elementales de Geometría Analítica redactadas con arreglo al programa vigente en la Escuela Naval*, de Juan Luís de María, Teniente de Navío en 1900, año de publicación de la única edición del texto [MARÍA, 1900]. La obra, de doscientas catorce páginas, fue utilizada para la formación de los Guardias Marinas en la Escuela Naval Flotante.

De María recoge todos los contenidos relacionados con la Geometría Analítica en dos y en tres dimensiones, tratándolos de forma pormenorizada y bajo un enfoque más algebraico que Meunier-Joannet y Merás y Uría.

En primer lugar estudia la Geometría Analítica en dos dimensiones. Comienza tratando los sistemas de coordenadas cartesianos y polares, el cálculo de distancias entre dos puntos y el manejo de puntos imaginarios. Seguidamente, presenta unas amplias nociones sobre funciones y lugares geométricos; respecto a estos últimos, trata sus ecuaciones y realiza una clasificación de las líneas planas. A continuación, efectúa un estudio elemental de algunas líneas como la Lemniscata, la espiral de Arquímedes o la Cicloide. Pasa a tratar con más detalle que el resto de autores las rectas y numerosos problemas relacionados con las mismas, destacando el estudio de rectas imaginarias, de ecuaciones que representan un sistema de rectas y el uso de determinantes para deducir relaciones. El siguiente elemento revisado es el círculo, sus ecuaciones, propiedades, rectas tangentes, rectas normales y construcciones según condiciones.

Posteriormente realiza un estudio de propiedades generales sobre las líneas de segundo grado, destacando la revisión de sus asíntotas, diámetros, tangentes, polares y la simplificación de las ecuaciones de las cónicas. Una vez analizados estos conceptos, presenta estudios pormenorizados de la elipse, la hipérbola y la parábola, destacando la aplicación de los teoremas de Apolonio y el cálculo de áreas.

En la segunda parte de la obra trata la Geometría Analítica en el espacio. La inicia presentando las coordenadas cartesianas, polares y esféricas, junto con la transformación de las mismas. Muestra conceptos básicos, como la determinación de un punto en el espacio y el cálculo de distancias y ángulos. Pasa a tratar con mayor profundidad las rectas, sus ecuaciones, el cálculo de sus cosenos directores, ángulos y distancias, junto con problemas relacionados con condiciones; es destacable el manejo de rectas imaginarias y conjugadas. Realiza un estudio similar sobre los planos, presentando numerosos problemas sobre el cálculo de ecuaciones, distancias y ángulos, volviendo a usar determinantes durante los desarrollos.

Concluye la obra con el estudio de las superficies de segundo grado. En primer lugar presenta nociones básicas, como centro o plano diametral; seguidamente examina las principales superficies de centro, como el elipsoide, la esfera o los hiperboloides de una o dos hojas, y posteriormente las superficies sin centro, como los paraboloides elípticos e hiperbólicos y el cilindro parabólico.

De María presenta una obra completa y bajo un enfoque algebraico, en el que muestra los principales contenidos de la Geometría Analítica del plano y del espacio, ofreciendo un buen número de ejemplos y ejercicios para facilitar su comprensión.

II.6.2. Resultados

A partir del estudio de las obras, cabe destacar que la Geometría Analítica pasa a formar parte de la formación de los Guardias Marinas durante el periodo correspondiente a la Escuela Naval Flotante, tanto en las pruebas de ingreso como en su formación.

En los primeros años de la Escuela, la obra preparatoria de Meunier-Joannet presenta unos contenidos básicos sobre Geometría Analítica en dos dimensiones.
Posteriormente, las obras, también preparatorias, de Merás y Uría y Salmon aumentan de forma considerable los contenidos; el primero estudia principalmente el plano bajo un enfoque geométrico y el segundo el espacio basándose plenamente en el Álgebra.
Finalmente, la obra de De María, de uso en la formación de la Escuela, supone un aumento considerable de contenidos respecto a las anteriores obras, especialmente en dos dimensiones, bajo un enfoque algebraico.

De esta forma, vemos que los contenidos sobre Geometría Analítica que son exigidos a los Aspirantes a Guardias Marinas en la Escuela Naval Flotante aumentan ampliamente, bajo un enfoque cada vez más algebraico, a lo largo del último tercio del siglo XIX.

II.7. Análisis Matemático

II.7.1. Obras

Se examinan cinco obras con contenidos sobre Análisis Matemático que fueron utilizadas para la formación de los Guardias Marinas durante el siglo XIX; en la Tabla 3.2.6, *Datos generales de los textos sobre Análisis Matemático*, se recoge información básica sobre las obras. Con el objetivo de facilitar una visión general de lo tratado en cada obra, presentamos la Tabla 3.3.6, *Temas presentes en los textos sobre Análisis Matemático*, en la que aparecen los principales elementos relacionados con el tema y su presencia o ausencia en las obras revisadas.

La primera obra es *Leçons élémentaires de mathématiques*, de Nicolás Louis de La Caille, prestigioso matemático y astrónomo francés. La obra fue utilizada en los *Cursos de Estudios Mayores* de la Academia de Guardias Marinas durante los periodos 1783-1802 y 1802-1824, encontrándose también dentro de las obras propuestas por Ciscar en el Plan de 1808. El texto tuvo numerosas ediciones, la primera de ellas en 1741, habiéndose examinado la edición de 1784 comentada por el abad Marie [LA CAILLE, 1784]. El autor realiza un repaso elemental de los principales contenidos matemáticos a lo largo de quinientas veintisiete páginas, noventa y ocho de las cuales versan sobre el Cálculo diferencial e integral en los dos últimos capítulos.
Dado el carácter elemental de la obra, el tratamiento de contenidos relacionados con el Análisis Matemático es bastante limitado, destacando su enfoque eminentemente geométrico.
Los principales elementos tratados al estudiar el Cálculo diferencial son: las reglas básicas de cálculo, las diferenciales de las principales funciones de una sola variable, el estudio de máximos, mínimos y puntos de inflexión (bajo un enfoque geométrico), los desarrollos de las funciones trigonométricas y las aplicaciones al estudio de la teoría de curvas, tratando conceptos básicos como tangente, normal, subtangente, curvatura y radio de curvatura. No contempla el estudio de funciones compuestas, implícitas o de varias variables.
Respecto al Cálculo integral, presenta especialmente algunos de los métodos para la integración de funciones (sin presentar los principales métodos generales), aplicaciones para la cuadratura y rectificación de curvas, junto con el cálculo de áreas de superficies, de longitudes de curvas y de volúmenes de sólidos. Finaliza con un breve estudio de algunas Ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado, especialmente en relación con el método inverso de las tangentes.

El autor desarrolla una síntesis de los principales elementos del Cálculo diferencial e integral bajo un enfoque geométrico, que se encontraba ya en fase de superación a finales del siglo XVIII.

El siguiente texto es el cuarto volumen sobre Mecánica del *Cours de mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, de Etienne Bézout, matemático francés miembro de la Académie des Sciences que encabezó en 1763 la instrucción de la Marine Royale[14]. Fue utilizado, al igual que el texto de La Caille, en los *Cursos de Estudios Mayores* de la Academia de Guardias Marinas durante los periodos 1783-1802 y 1802-1824, encontrándose también dentro de las obras propuestas por Ciscar en el Plan de 1808. El texto tuvo varias ediciones, la primera de ellas en 1764-69, habiéndose examinado la edición de 1770 [BÉZOUT, 1770].

En este volumen, destinado a los principios generales de la Mecánica a lo largo de cuatrocientas treinta y dos páginas, Bézout dedica doscientas veintidós a estudiar el Cálculo diferencial e integral. Ofrece un estudio más pormenorizado y amplio que el desarrollado por La Caille en su texto, siendo destacable un mayor peso de los desarrollos algebraicos frente a los geométricos. En primer lugar trata el Cálculo diferencial, comenzando con el concepto de diferencial y el cálculo de las diferenciales de las principales funciones, aunque no trata el estudio de funciones compuestas, implícitas o de varias variables. A continuación desarrolla algunas aplicaciones, especialmente geométricas; entre estas aplicaciones estudia las curvas y sus principales elementos como tangentes, subtangentes, normales, subnormales, curvatura y desarrollos. Aún así se observa un incompleto desarrollo en el estudio de las propiedades de las curvas. También estudia máximos, mínimos, puntos múltiples y de inflexión, apreciándose un escaso tratamiento de desarrollos en serie.

Al estudiar el Cálculo integral trata en primer lugar las integrales de funciones binomias, presentando posteriormente aplicaciones como la cuadratura, la rectificación de curvas y el cálculo de superficies y de volúmenes; destaca el tratamiento que realiza sobre tablas de latitudes crecientes y cartas reducidas. Continúa con la integración de funciones trigonométricas, el cálculo aproximado de algunas integrales y la integración de funciones, tanto racionales como exponenciales. Pasa a estudiar la integración de cantidades de dos o más variables y finaliza con un estudio básico de Ecuaciones diferenciales, principalmente de primer orden.

En la obra de Bézout encontramos contenidos básicos relacionados con el Cálculo diferencial e integral, mediante un enfoque más algebraico que en el texto de La Caille. La claridad de su

[14] En el trabajo de Liliane Alfonsi [2010] encontramos amplia información sobre el importante papel de Bézout en las enseñanzas científicas y tecnológicas desarrolladas en las *écoles des Gardes de la Marine*.

desarrollo y las explicaciones son acordes con la intención de facilitar la formación a oficiales de la Armada francesa.

La tercera obra es *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral: précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées*, de Sylvestre François Lacroix, célebre matemático francés miembro de la Académie des Sciences, especialmente reconocido por su producción de libros de texto. La obra se encuentra dentro de las propuestas de Ciscar en el Plan de 1808 para los *Cursos de Estudios Mayores* de la Academia de Guardias Marinas. No se tiene constancia de su utilización en dichos cursos, a consecuencia de la interrupción que supuso la Guerra de Independencia. La obra consta de quinientas setenta y cuatro páginas, todas ellas destinadas al estudio del Cálculo diferencial e integral. El texto tuvo numerosas ediciones, la primera en 1797, habiéndose examinado la edición de 1802 [LACROIX, 1802].

La obra de Lacroix estudia de forma rigurosa y extensa el Cálculo diferencial, el Cálculo integral y las Ecuaciones diferenciales, bajo un enfoque plenamente analítico.

Comienza tratando el Cálculo diferencial, del que realiza un estudio pormenorizado de los principales contenidos sobre la diferenciación de funciones de una o varias variables. Destaca el tratamiento de los desarrollos de Taylor, la diferenciación de funciones transcendentes y la aplicación del Cálculo diferencial a la teoría de curvas. En el estudio de estas últimas trata con especial detalle las curvas osculatrices, las principales curvas transcendentes, las curvas de doble curvatura y las superficies curvas.

En cuanto al Cálculo integral, es destacable el estudio sobre la integración por series y de las funciones diferenciales de segundo orden o superior. También son reseñables las aplicaciones del Cálculo integral a la cuadratura y rectificación de curvas, a la cuadratura de superficies curvas, al cálculo de volúmenes que comprenden, a la curvatura de los cuerpos determinados por superficies curvas, a la cuadratura de sus áreas y a la rectificación de curvas de doble curvatura.

Respecto al estudio de Ecuaciones diferenciales, Lacroix realiza una revisión mucho mayor que los anteriores autores examinados, tratando con detenimiento la integración, la separación de variables, la resolución aproximada y la construcción geométrica de Ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden. También trata la integración de Ecuaciones diferenciales de orden superior o de más de una variable, el método de variaciones y el manejo de Ecuaciones diferenciales de primer orden.

En conclusión, la obra desarrolla los temas en profundidad con una línea expositiva totalmente analítica.

La cuarta obra es *Cours élémentaire d'analyse: contenant un très grand nombre d'applications: à l'usage des élèves de l'Ecole Navale et des élèves de l'Ecole centrale des arts et manufactures*, de Pierre Jules Meunier-Joannet. La obra fue utilizada para el ingreso y la formación en la Escuela Naval Flotante, constando de trescientas ochenta y tres páginas, todas ellas destinadas al estudio del Cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones. Los datos recogidos nos indican que el texto tuvo al menos dos ediciones, la primera de ellas en 1850, habiéndose examinado la edición de 1858 [MEUNIER-JOANNET, 1858].

Meunier-Joannet estudia ampliamente el Cálculo diferencial e integral mediante un enfoque analítico. Comienza el texto con una amplia introducción en la que presenta unos complementos de Geometría, Álgebra y Geometría Analítica que utilizará a lo largo de la obra. Seguidamente trata los principales contenidos del Cálculo diferencial, entre los que podemos destacar las demostraciones de varios teoremas sobre la diferenciación, los desarrollos en serie de una función, la diferenciación de las funciones implícitas y la revisión de las más destacadas propiedades sobre las curvas. Además realiza un amplio estudio de algunos contenidos: Series, interpolación, diferencias sucesivas y la obtención de la curva de errores.

En cuanto al Cálculo integral, trata los principales contenidos de la materia. Podemos destacar el uso del método de integración por series y el estudio de propiedades de curvas relacionadas con asíntotas, diámetros, contactos, desarrollos, construcción de lugares a partir de la ecuación de una curva y la obtención de cuadraturas.

Al tratar las Ecuaciones diferenciales, se limita a presentar un amplio número de ejemplos, en los que se debe encontrar una curva mediante Ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden que cumple ciertas condiciones.

Finaliza la obra con unas nociones de Geometría Analítica de tres dimensiones y algunas cuestiones de aplicación en Mecánica.

La obra sigue una línea analítica, tratando teóricamente y con profundidad el Cálculo diferencial e integral y de forma más práctica las Ecuaciones diferenciales.

La última de las obras consultadas, *Lecciones de cálculo infinitesimal*, es de Augusto Miranda Godoy, Almirante y Ministro de Marina español. En el momento de publicar el texto era Teniente de Navío y profesor de la Escuela Naval Flotante. La obra fue utilizada para la enseñanza en la Escuela.

Se ha revisado la primera edición de 1884 [MIRANDA, 1884] y hay al menos una segunda edición de 1888. La obra consta de cuatrocientas dieciocho páginas, todas ellas dedicadas al Cálculo infinitesimal.

El texto contiene los principales contenidos sobre Cálculo diferencial e integral, junto con nociones básicas de Ecuaciones diferenciales y Series.

Para comenzar, presenta fundamentos sobre la convergencia de series, de aplicación a lo largo de la obra. Al tratar el Cálculo diferencial e integral trata, entrelazando los conceptos de derivación e integración, los principales contenidos para funciones de una o varias variables, explícitas o implícitas, haciendo especial hincapié en sus aplicaciones analíticas y geométricas.

Al tratar la derivación podemos destacar el uso de funciones implícitas, el cálculo de la diferencial de un determinante y el uso de las diferenciaciones hiperbólicas y logarítmicas. Respecto al estudio de la integración, es de mencionar la introducción de la función primitiva después de definir la derivada de una función.

Al estudiar las aplicaciones analíticas, tienen especial importancia los desarrollos en serie y el tratamiento de las formas indeterminadas. En cuanto a las aplicaciones geométricas, trata con bastante profundidad contenidos propios de la Geometría Analítica, entre ellos propiedades de las curvas planas, las superficies, las curvas de doble curvatura y los volúmenes.

En cuanto a las Ecuaciones diferenciales, son revisadas por el autor de forma básica; analiza principalmente las propiedades de las Ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado, de grado superior al primero y de orden superior al primero.

La obra de Miranda, destinada para la formación en la Escuela Naval Flotante, ofrece lecciones sobre los principales contenidos y aplicaciones del Cálculo infinitesimal bajo un tratamiento analítico.

II.7.2. Resultados

En primer lugar es reseñable que las tres primeras obras, debidas a La Caille, Bézout y Lacroix, están seleccionadas para la formación de alumnos de los *Cursos de Estudios Mayores* de las Academias de Guardias Marinas, mientras que las obras de Meunier-Joannet y Miranda lo son para alumnos de la Escuela Naval Flotante.
Es significativo que estos contenidos son considerados a principios del siglo XIX dentro de los estudios superiores, para pasar a ser contenidos básicos en la formación de la Escuela Naval Flotante.

A principios de siglo, las obras de La Caille y Bézout muestran de forma resumida y bajo un enfoque geométrico y algebraico respectivamente, los principales contenidos del Cálculo diferencial e integral, y de forma aún más reducida las Ecuaciones diferenciales.
Por otra parte, la obra de Lacroix es un texto plenamente analítico de alto nivel que recoge exhaustivamente estos tres contenidos. No tenemos constancia de su utilización en las Academias de Guardias Marinas por lo que no podemos considerarlo como un referente directo del nivel alcanzado en la formación de las Academias.

Las obras de Meunier-Joannet y Miranda siguen el estilo analítico de Lacroix, aunque adaptados para la enseñanza en escuelas navales. Ambos textos recogen la mayoría de los contenidos del Cálculo diferencial e integral, junto con los conceptos básicos de las Series y las Ecuaciones diferenciales.
La obra de Miranda es algo más equilibrada que la de Meunier-Joannet en el tratamiento de los diversos contenidos y ofrece un desarrollo de los temas similar al de los actuales libros de texto.

A partir de la revisión de las cinco obras, observamos que al tratar los contenidos propios del Análisis Matemático se pasa de un enfoque principalmente geométrico a otro analítico, mostrando una relación con la Geometría Analítica cada vez mayor.

II.8. Trigonometría Rectilínea

II.8.1. Referente metodológico

La finalidad de esta comparativa es establecer la forma en que fueron tratados los contenidos sobre Trigonometría Rectilínea en los textos relacionados con la formación de los Guardias Marinas durante el siglo XIX.

Como base del estudio histórico sobre el desarrollo de la Trigonometría Rectilínea hemos considerado a modo de referente el trabajo realizado por Van Sickle [2011] en su tesis doctoral, *A History of Trigonometry Education in the United States: 1776-1900*. Su estudio trata sobre la evolución de la enseñanza de la Trigonometría Rectilínea en los colegios y universidades de los Estados Unidos durante este periodo.

Para realizar el estudio, Van Sickle analizó principalmente libros de texto, otras fuentes primarias como catálogos de cursos, exámenes finales, manuscritos o cartas, y finalmente artículos de publicaciones y escritos académicos.

El análisis de libros de texto es la parte más importante del estudio, siendo analizados los siguientes aspectos:

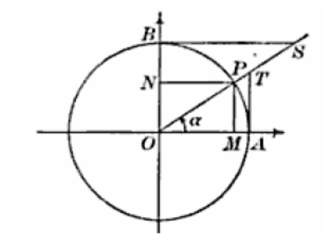
1. Método para la definición de las funciones trigonométricas.
2. Los temas abordados, incluyendo una lista completa y el análisis de los teoremas que son presentados.
3. Orden de los temas, incluidos los teoremas que se demuestran como resultado de los demás.
4. Tipo y número de preguntas planteadas y si las soluciones y/o respuestas son proporcionadas.
5. Otras herramientas pedagógicas incluidas en el libro de texto.

Tal y como indica Van Sickle, "*The coding and analysis of textbooks requires careful tabulation and comparison, but ultimately this is a qualitative comparison of the textbooks, and this analysis answers all parts of the first research question*." [VAN SICKLE, 2011, p. 5].

La Trigonometría Rectilínea fue materia de estudio en colegios y universidades de los EEUU durante el siglo XIX, cambiando sustancialmente a lo largo del mismo la forma en que fue definida y enseñada, así como su amplitud y enfoque.

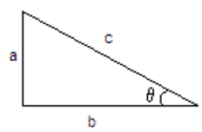
El principal aspecto que se trata en el trabajo de Van Sickle es la evolución en la concepción de las funciones trigonométricas desde el *Sistema de Líneas* hasta el *Sistema de Proporciones*, debido principalmente a los avances en la Trigonometría Analítica por Leonhard Euler y otros en los siglos XVII y XVIII, denominando a estas dos nociones respectivamente "*Line System*" y "*Ratio System*".

El primer enfoque, "*Line System*", define las funciones trigonométricas a partir de las líneas trigonométricas como segmentos de línea en un círculo. (*Figure 2.1*)
El segundo, "*Ratio System*", entiende las funciones trigonométricas para ángulos entre 0º y 90º como proporciones de los lados de un triángulo rectángulo *(Figure 2.2)* [VAN SICKLE, 2011, p. 12].



PM = sine	NP = cosine
TA = tangent	RS = cotangent
OT = secant	OS = cosecant

Figure 2.1[1]



$\sin\theta = a/c$	$\cos\theta = b/c$
$\sec\theta = c/b$	$\csc\theta = c/a$
$\tan\theta = a/b$	$\cot\theta = b/a$

Figure 2.2

Este cambio de concepción supondrá el paso de la Trigonometría geométrica a la Trigonometría algebraica.

Con el objetivo de ver la evolución de la enseñanza de la Trigonometría Rectilínea, la autora se plantea las siguientes preguntas [VAN SICKLE, 2011, p. 3-4]:
1. How did trigonometry textbooks change from 1776-1900:
a) in content? What topics were covered during this time period, and how do the topics change over time?
b) in approach? Namely, in what order are the topics presented, and with what emphasis on each topic?
c) in pedagogy? Particularly, what types of questions and problems are posed to students within the textbooks, are answers and/or solutions given, and how many? What other pedagogical techniques are used?

2. How did the contributions of Euler and others in the field of trigonometry influence the teaching of trigonometry in colleges and universities?
3. What were the major social and political factors affecting higher education during this time period, and how did these factors affect trigonometry education?
4. What individuals played major roles in trigonometry education during this time, and what influence did they have on the teaching of trigonometry?

Las principales conclusiones, en relación a nuestro estudio, a las que llega la autora son las siguientes:
En cuanto a los contenidos tratados a finales de siglo XVIII y principios del XIX, los libros de texto de Trigonometría se centraron en el cálculo de las funciones trigonométricas. Los logaritmos tenían una gran importancia en las obras sobre Trigonometría porque posibilitaron cálculos trigonométricos mucho más sencillos, siendo el cálculo de tablas trigonométricas un tema principal en los libros. Destacó el tratamiento de aplicaciones de la Trigonometría, como la Agrimensura y la Navegación. El enfoque basado en el *Sistema de Líneas* era el único medio para definir las funciones trigonométricas.
En el periodo anterior a la guerra de independencia de los EEUU, los libros de texto de Trigonometría crecieron en tamaño y contenido. El enfoque basado en el *Sistema de Proporciones* apareció y creció en importancia. Las aplicaciones de las funciones trigonométricas estuvieron dirigidas a la Topografía y la Navegación, continuando la importancia de los logaritmos para realizar cálculos trigonométricos.
A finales del siglo XIX, el *Sistema de Proporciones* dominó por completo las definiciones en los libros de texto, aunque se seguía encontrando en algunos el *Sistema de Líneas*. Las demostraciones de las identidades trigonométricas y la resolución de ecuaciones trigonométricas fueron temas importantes. La importancia del cálculo de tablas trigonométricas disminuyó al utilizarse los desarrollos en serie del seno y del coseno para calcular las tablas con precisión arbitraria, aunque los logaritmos seguían siendo importantes para los cálculos.

Respecto a los distintos enfoques de los libros de texto, la tendencia principal fue pasar de un tratamiento geométrico a otro algebraico.
A finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, la Trigonometría era una extensión de la Geometría. Las demostraciones de los teoremas eran desarrolladas mediante métodos geométricos y las funciones trigonométricas se definían geométricamente como líneas en un círculo.

Progresivamente los métodos algebraicos hicieron acto de presencia y el uso de proporciones se fue consolidando en la demostración de teoremas.
Finalmente, el *Sistema de Proporciones* se convirtió en la forma de definir las funciones trigonométricas y muchos otros teoremas fueron demostrados utilizando el Álgebra en lugar de la Geometría.

A finales del siglo XIX, el *Sistema de Líneas* fue desplazado por el *Sistema de Proporciones*.
El desarrollo de la enseñanza de la Trigonometría Rectilínea entre finales del siglo XVIII y el siglo XIX no fue siempre lineal, produciéndose fases de estancamiento, de cambios bruscos y de cambios graduales entre el *Sistema de Líneas* y el *Sistema de Proporciones*.

Una vez expuesta la línea de trabajo desarrollada por Van Sickle en su Tesis Doctoral, disponemos de un importante referente metodológico para establecer la manera en que fueron tratados los contenidos sobre Trigonometría Rectilínea, especialmente respecto a la evolución en la concepción de las funciones trigonométricas, en los textos relacionados con la formación de los Guardias Marinas durante el siglo XIX.

II.8.2. Obras utilizadas en la Armada en el siglo XVIII

Con el objetivo de disponer de una amplia perspectiva a la hora de poder comparar las obras sobre Trigonometría Rectilínea que se utilizaron en las Academias de Guardias Marinas a lo largo del siglo XIX, se va a realizar un estudio de las obras que se utilizaron en estas Academias a lo largo del siglo XVIII, tanto españolas como francesas.

I.8.2.1. **Obras españolas**

A lo largo del siglo XVIII, en las Academias de Guardias Marinas se utilizaron cinco obras españolas con contenidos directamente relacionados con la Trigonometría Rectilínea.
Se va a proceder a describir brevemente cada una de estas obras, con el objetivo de contextualizar e identificar los contenidos esenciales de la Trigonometría que un Guardia Marina necesitaba a finales de este siglo.
Las obras se estudiarán conforme a su primera edición, coincidiendo durante este siglo con el orden de aparición en los programas de la Academia.

La primera de las obras es el volumen tercero del *Compendio Mathemático, en que se contienen todas las materias mas principales de las Ciencias, que tratan la Cantidad*, de Tomás Vicente Tosca, obra utilizada durante el periodo fundacional de la Academia de Guardias Marinas entre 1717 y 1734. El autor es matemático, cartógrafo y teólogo, promotor del movimiento de los Novatores. Esta es su obra más conocida cuya primera edición se publicó en 1707, compuesta por nueve tomos, habiendo revisado la edición de 1710 [TOSCA, 1710].
El Tratado VII del *Compendio* contiene la Trigonometría y consta de seis libros y un *Apéndice*, tratando en los tres primeros libros la Trigonometría Rectilínea y en los otros tres la Esférica.
El texto no contiene prólogo y Tosca comienza indicando que considera la Trigonometría como *"… una Ciencia que enseña el modo de refolver los Triangulos.*" [TOSCA, 1710, p. 1], diferenciando entre Trigonometría Rectilínea y Esférica, y siendo destacable el uso en las demostraciones de proposiciones de los *Elementos Geométricos* de Euclides.
Para la resolución de los triángulos rectilíneos tiene en cuenta que los lados de cualquier triángulo son cuerdas del círculo que lo circunscribe, y dado que los arcos y cuerdas de diferentes círculos tienen entre sí la misma razón que los radios, si se sabe en un círculo la razón

que tienen las cuerdas con el radio se podrán deducir en los demás triángulos por regla de tres el valor de sus cuerdas conociendo otras, y consecuentemente sus ángulos y arcos.
Así pues, es necesario saber la proporción que tienen en un círculo las cuerdas entre sí y con el radio, para lo que presenta las Tablas denominadas Canon Trigonométrico.

En el Libro I define los senos, tangentes y secantes y explica la forma de construir y manejar el Canon. En primer lugar da las definiciones del seno, seno segundo (coseno en notación actual), seno verso, tangente y secante mediante las líneas trigonométricas de un arco dado, tratándolas como rectas que se consideran en el círculo para la resolución de los triángulos.
Seguidamente y apoyándose en propiedades geométricas, demuestra propiedades de las cuerdas necesarias para la elaboración del Canon de los Senos. Entre estas propiedades encontramos las relaciones entre el seno y el coseno, entre el seno de un arco y el del arco doble o mitad y el seno de la suma de dos arcos, explicando finalmente la forma de fabricar el Canon.
De manera similar indica los pasos para elaborar el Canon de las Tangentes y de las Secantes, destacando entre las propiedades demostradas la relación entre la tangente, el seno y el coseno.

En el Libro II define y presenta propiedades de los Logaritmos, dado que estos facilitan en gran manera las operaciones para la resolución de los triángulos, donde *"… fe executa por la Regla de tres, tomando del Canon Trigonometrico de los Senos, ò Tangenetes de los terminos conocidos, y multiplicando el fegundo por el tercero, y partiendo el producto por el primero.*" [TOSCA, 1710, p. 12], siendo todas estas operaciones muy laboriosas.
Seguidamente explica la elaboración de la Tabla Logarítmica y su aplicación al Canon Trigonométrico, *"... fubfituyendo, en lugar de los numeros geometricos que le componen, los Logarithmos fus correspondientes*." [TOSCA, 1710, p. 31].
A continuación explica el uso del Canon Trigonométrico con los Senos y Tangentes logarítmicos suponiendo el Radio 10.000.000 y la Tabla de los logaritmos correspondientes a los números desde el 1 hasta 10.000.
Concluye este libro presentando varios problemas de aplicación de los logaritmos a diferentes operaciones y las dos tablas.

En el Libro III trata propiamente la Trigonometría Rectilínea. Tosca presenta tres teoremas fundamentales que considera necesarios para la resolución de los triángulos rectángulos. Comienza con el teorema del Seno, que demuestra geométricamente a partir del círculo circunscrito al triángulo; posteriormente demuestra mediante semejanzas que en un triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto, y el tercer teorema indica que un cateto es igual al producto del otro por la tangente del ángulo opuesto, o al del otro por la cotangente del ángulo adyacente.

Seguidamente trata la resolución de triángulos rectángulos, estudiando siete casos según los datos de que se disponen y el dato que se quiere hallar. En cada caso, parte de unos datos numéricos y a partir de ellos calcula el que falta. Como regla general, indica que cuando la hipotenusa entra en la proporción se debe utilizar el segundo teorema, y cuando se tienen dos lados se utiliza el tercero; también recuerda que al querer hallar en cada uno de los casos un cuarto proporcional a los tres términos dados, utiliza las propiedades de los logaritmos para facilitar las operaciones.

Como muestra presentamos el caso en que se tiene la hipotenusa y un lado, queriendo hallar los ángulos [TOSCA, 1710, p. 12]:

PROP. V. Problema.

En el Triangulo rectangulo, dada la hypotenuſa, y vn lado, hallar los angulos. fig. 9.

EN el miſmo triangulo ABC, dada la hypotenuſa AC, 1425. pies, y el lado AB 1230. pies, ſe pide el angulo C.

Proporcion. propoſ. 2.	*Logarithmos.*
Como la hypot. AC 1425. *pies*	C.L. 6.8461851
al radio	10.0000000.
aſsi AB 1230. *pies*	3.0899051.
al ſeno del angulo C 59. *gr.* 40. *min.*	9.9360902.

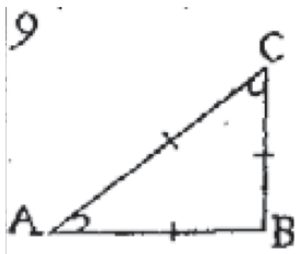


Figura 9

Posteriormente, presenta dos teoremas que considera suficientes para la resolución de los triángulos oblicuángulos. En primer lugar el teorema de la Tangente y posteriormente el siguiente: "*En cualquier triangulo, el lado mayor fe hà con la fuma de los otros lados, como la diferencia de eftos à la diferencia de los fegmentos hechos en el lado mayor con la perpendicular tirada del vertice à dicho lado*" [TOSCA, 1710, p. 57].

Tosca advierte que "*Eftos Theoremas fon absolutamente bastantes para demostrar la refolucion de qualefquiera triangulos rectilineos obliquangulos; y afsi por la brevedad omito otras, que à mas de fer canfados, folo firven para demonftrar otras practicas de refolver, que para mayor abundancia fe pondrán en fu lugar*." [TOSCA, 1710, pp. 58-59].

A continuación trata la resolución de triángulos oblicuángulos, estudiando cinco casos según los datos de que se dispone y el dato que se quiere hallar, de manera similar a como lo hace en el caso de triángulos rectángulos. De igual forma, en cada caso parte de unos datos numéricos y a partir de ellos calcula el que falta apoyándose en este caso en el teorema del Seno, el de la Tangente o dividiendo el triángulo en dos rectángulos (es decir, aplicando el método del *Perpendículo*) y aplicando el segundo teorema sobre triángulos oblicuángulos.

Al igual que con los triángulos rectángulos, presenta en algunos casos más de un método de resolución aplicando otras propiedades y relaciones como la siguiente [TOSCA, 1710, p. 65]:

Como el rectangulo ab , ac , de los lados que comprehenden al angulo a,
al rectangulo cdb de la ſuma, y ſemidiferencia ſobredichas:
aſsi el quadrado del radio ab,
al quadrado de bp, ſeno del angulo bap', mitad del angulo bac;

Tosca concluye la parte de Trigonometría de su obra con un *Apéndice*, en el que resume la resolución de cualquier triángulo tanto rectilíneo como esférico. Para ello presenta los términos proporcionales dispuestos en cada especie en el mismo orden que se guardó en los problemas presentados a lo largo de la obra, mostrando en primer lugar las resoluciones que sirven para hallar lo ángulos y seguidamente las que sirven para hallar los lados.

Vemos que Tosca basa su estudio sobre la resolución de triángulos en el hecho de que todo triángulo está incluido en un círculo junto con diversas relaciones y proporciones que deduce geométricamente. Considera como líneas trigonométricas de un arco dado, entre otras, al seno y la tangente, presentando el Canon Trigonométrico y las Tablas Logarítmicas a modo de herramientas para los cálculos necesarios.

A la hora de resolver los triángulos, lo hace presentando unas pocas propiedades y teoremas que posteriormente utiliza en la resolución de diversos casos mediante ejemplos numéricos, destacando por su utilización el teorema del Seno, el de la Tangente y la aplicación del método del *Perpendículo*.

La siguiente obra es *Trigonometría aplicada á la Navegacion, afsi por el beneficio de las Tablas de los Senos, y Tangentes Logarithmicas; como por el vfo de las dos Efcalas Plana y Artificial* de Pedro M. Cedillo, maestro en el Real Colegio Seminario de San Telmo al escribir la obra, 2º profesor de Matemáticas en la Academia de Guardias Marinas de 1724 a 1728 y Director de la misma desde 1728 hasta su jubilación en 1753. Es una de las obras utilizada en la Academia en los periodos 1717-1734 y 1748-53, junto con la obra de Tosca. La primera edición de la obra (y parece que única) es de 1718 [CEDILLO, 1718].

En la Introducción, Cedillo comienza resaltando la utilidad de la Trigonometría, "… *pues con ella fe miden la Tierra, los Mares y los Cielos*" [CEDILLO, 1718, p. I de la Introducción].
Seguidamente denuncia la idea extendida entre los marinos "… *en dezir proverbialmente, que defde que ay Seniftas (que afsi llaman à los Profeffores de la Trigonometria) fe pierden los Navios*" [CEDILLO, 1718, p. I de la Introducción], achacando esta idea a la mala utilización de los principios trigonométricos por parte *"… de los que fe entrometen à Seniftas, fin tener fundamento alguno, de la Trigonometría, ni faber fi los principios, que suponen para las refoluciones, fon ciertos, dudosos, ò falfos"* [CEDILLO, 1718, p. II de la Introducción].
Indica que el libro pretende evitar caer en errores y saber los fundamentos necesarios para las resoluciones trigonométricas y del uso de las Escalas, "… *que vno, y otro es lo mas primoroso de la nobilifsima Arte Nautica"* [CEDILLO, 1718, p. I de la Introducción].
Seguidamente presentan unas definiciones básicas sobre Geometría, agrupadas en tres especies: Línea, Superficie y Cuerpo, concluyendo con el planteamiento y la resolución de cuatro problemas necesarios para la construcción y uso de las Escalas.

La obra consta de dos libros, el primero sobre la Trigonometría aplicada a la Navegación y el segundo sobre los usos de las Escalas Plana y Artificial aplicados a la Navegación.
Comienza el primer libro indicando que "*La Trigonometria es la Ciencia, que enseña à refolver los triangulos, conocidas primero las partes neceffarias para fu refolucion.*" [CEDILLO, 1718, p. 1]. Esta definición es acorde con la idea práctica que Cedillo quiere dar a la obra, y por ello expone que a lo largo del texto trata de aplicar la Trigonometría a la Navegación, omitiendo las demostraciones trigonométricas "… *porque ferà raro el que tenga en la navegación fundamentos para entenderlas*" [CEDILLO, 1718, p. 1] y recomienda a los versados en Geometría las obras de Zaragoza [1672] y de Tosca.
Al igual que Tosca, pasa a dar las expresiones trigonométricas mediante las líneas trigonométricas de un arco dado, tratándolas como rectas que se consideran en el círculo para la

resolución de los triángulos. Da las definiciones del seno, seno segundo, seno verso, tangente primera, tangente segunda (cotangente en notación actual) y secante.

Seguidamente presenta y explica el uso de las tablas de los senos y tangentes logarítmicas, de las tablas de los logaritmos y de las tablas de latitud crecida, o de partes Meridionales. Todas estas tablas las presenta al final de la obra.

A continuación enuncia varias propiedades básicas sobre la Trigonometría Plana "*... para conocer las condiciones de los triangulos rectilineos, y fi los datos, que fe suponen, fon, ó no proporcionados para las refoluciones de dichos triangulos.*" [CEDILLO, 1718, p. 13].

También presenta las relaciones trigonométricas en los triángulos rectángulos, y los teoremas del Seno y de la Tangente para triángulos oblicuángulos.

Una vez presentados los contenidos teóricos, trata la resolución de triángulos aplicados a la Navegación mediante problemas resueltos.

En primer lugar, explica la resolución de los triángulos rectángulos usando en las operaciones la proporcionalidad de tres términos dados, por la que tras sumar los términos segundo y tercero se resta el primero y se obtiene el que se busca.

En el caso de la resolución de los triángulos rectángulos planos aplicados a la Navegación según las propiedades de los logaritmos, presenta tres reglas específicas de aplicación que reducen los cálculos a unas sumas y restas.

En los demás casos (la aplicación de los triángulos rectángulos por partes Meridionales, la resolución de problemas para la práctica de la Navegación, la corrección de la fantasía, y el cálculo de la distancia y rumbo variado por corrientes) utiliza para su resolución el complemento logarítmico.

El segundo libro, que contiene los usos de las Escalas Plana y Artificial a la Navegación, no trata contenidos trigonométricos propiamente y se podría considerar dentro del campo de la Cosmografía.

Comienza explicando qué es una Escala, su construcción y utilidad para la resolución de problemas náuticos y astronómicos.

Seguidamente explica los usos de la Escala Plana y mediante ella resuelve varios problemas comunes en la Navegación. De igual forma trata problemas con las partes Meridionales, la corrección de la fantasía, el modo de hallar la distancia y rumbo variado de las corrientes, y el uso de las líneas de los senos, tangentes, y secantes.

Finalmente trata brevemente diversos usos de la Escala Artificial mediante problemas resueltos.

Concluye la obra con una tabla de latitudes y longitudes de lugares de las Indias occidentales, otra de senos y tangentes con radio 1.000.000, otra de logaritmos correspondientes a los números desde 1 hasta 4.400, y una última de las partes meridionales o de latitudes crecidas.

La obra de Cedillo ofrece, sin demostrar, muy pocos contenidos trigonométricos, estando centrada en la aplicación de la Trigonometría Plana a la Navegación. Comparte con la obra de Tosca el concepto de Trigonometría y de las expresiones trigonométricas, aunque dado el objetivo práctico de la obra, se limita a enumerar algunas de las propiedades trigonométricas básicas partiendo de la consideración del seno, tangente y secante como rectas en un círculo y apoyándose en el cálculo logarítmico para los cálculos necesarios en la resolución de triángulos que aparecen en problemas de Navegación. Cabe destacar que hace un mayor uso de las proporciones que Tosca, pero a diferencia de éste, no utiliza el método del *Perpendículo* para resolver los triángulos.

La tercera de las obras de este periodo es *Compendio de la Geometría elementar, Aritmética inferior, y Trigonometría plana, y espherica*, de Antonio Gabriel Fernández, obra utilizada en la Academia, al menos en el periodo 1734-1748. El autor fue colegial en el Real Seminario de San Telmo y maestro de Matemáticas en la Real Academia de Guardias Marinas de Cádiz. La obra cuenta con dos ediciones, la segunda de ellas en 1735, que es la que se revisa [FERNÁNDEZ, 1735].

El libro no contiene índice, constando de trescientas veintidós páginas de las que cuarenta y siete páginas y catorce figuras tratan la Trigonometría Rectilínea.

El Tratado Tercero contiene la Trigonometría y consta de tres libros, presentando en los dos primeros la Trigonometría Rectilínea y en el tercero la Esférica.

El texto no contiene prólogo y Fernández comienza indicando que considera la Trigonometría como *"… la ciencia, que enſeña à reſolver los triangulos, conociendo primero las partes competentes, para ſu reſolucion.*" [FERNÁNDEZ, 1735, p. 175].

Seguidamente indica que para sus operaciones se necesitan las tablas de los Senos, Tangentes y Secantes. Advierte que estas operaciones se han facilitado enormemente gracias al uso de los logaritmos.

En el Libro Primero, *De la construccion, y uso de las Tablas de los Senos, Tangentes, y Secantes naturales, y de los Logarithmos*, comienza definiendo las líneas trigonométricas como cuerdas de un arco en relación a un círculo, tratando el seno primero, el seno segundo, el seno verso, la tangente primera, la tangente segunda, la secante primera y la secante segunda.

En el capítulo I trata la construcción de las tablas de los Senos, las Tangentes, las Secantes naturales y logarítmicas, y de los Logaritmos. Fernández sigue un desarrollo similar aunque algo más escueto al que presenta Tosca, mostrando prácticamente las mismas propiedades y explicando la construcción de las tablas.

En el capítulo II presenta los Logaritmos comunes y sus propiedades, indicando la construcción de las Tablas Logarítmicas de los Senos, de las Tangentes y de las Secantes, suponiendo el radio dividido en 100.000.000 partes. En el capítulo III trata el uso del Canon Trigonométrico y la Tabla Logarítmica, y en el capítulo IV la aplicación de los Logaritmos en las operaciones Trigonométricas, reglas de proporción, extracción de raíces y otros cálculos aritméticos. Todos estos capítulos los presenta de forma más resumida a como lo hace Tosca.

El Libro Segundo trata la Trigonometría Rectilínea y consta de tres capítulos, aunque no podemos indicar el título del libro ni del primer capítulo al no disponer de las dos primeras páginas en el documento revisado.

En el primer capítulo presenta cinco propiedades de los triángulos rectilíneos. No disponemos de las tres primeras páginas, pero las referencias a las mismas en posteriores demostraciones nos indican que una de ellas es el teorema del Seno; por otra parte, la proposición cuarta es el teorema de la Tangente.

En el capítulo II trata, al igual que Tosca, la resolución de los triángulos rectilíneos rectángulos en siete casos, según los datos de que se disponen.

En el capítulo III presenta la resolución de los triángulos rectilíneos oblicuángulos, y de forma similar a Tosca ofrece un método alternativo de resolución aplicando la propiedad: "*En todo triangulo rectilineo el rectangulo de los lados que incluyen un angulo à el cuadrado de el radio, es como el rectangulo de las diferencias de dichos lados, y la femifuma de los tres alquadrado de el feno de la mitad de el angulo comprehendido.*" [FERNÁNDEZ, 1735, p. 219].

Fernández comparte el enfoque presentado por Tosca, si bien de forma menos extensa, tanto en el concepto de las expresiones trigonométricas, la elaboración y uso de las tablas y las propiedades necesarias para la resolución de triángulos. Por otra parte, realiza un tratamiento similar en la resolución de los triángulos, aunque a diferencia de Tosca no estudia únicamente los diferentes casos mediante ejemplos numéricos; Fernández indica en cada caso las proporciones que aplica y los pasos a seguir para obtener los elementos buscados del triángulo según los elementos dados.

La cuarta obra revisada es *Tratado de Trigonometria plana general, con la construccion, y ufo de las Tablas de los Logarithmos, y del Canon Trigonometrico de Senos, Tangentes, y Secantes logarithmicas*, de Juan Sánchez Reciente, obra utilizada durante el periodo de 1748 a 1753 en la Academia de Guardias Marinas. El autor era profesor de Matemáticas en el Real Colegio Seminario San Telmo de Sevilla.

La primera edición de la obra parece ser de 1739, habiendo revisado la edición de 1742 [SÁNCHEZ RECIENTE, 1742]. En el *Prólogo al lector*, el autor advierte que hay un número amplio de tratados sobre Trigonometría, algunos demasiado extensos y otros demasiado breves, e indica que su tratado tiene como objetivo la educación de los alumnos del Colegio de San Telmo de Sevilla, alumnado que *"… entra à estudiar efta Facultad fin conocimiento alguno de la otra; fino folamente instruidos en el Arte de leer, y escribir; y por tanto, es neceffario fundamentarlos en todo lo conducente à la Navegacion*" [SÁNCHEZ RECIENTE, 1742, pp. I-II del Prólogo], por lo que cree necesario su obra adaptada para los alumnos del Colegio.

El texto consta de tres partes y dos tablas, siguiendo una estructura muy similar a la empleada por Tosca en su *Compendio*. En primer lugar explica la naturaleza de las líneas trigonométricas, trata posteriormente la construcción y uso de las tablas trigonométricas y logarítmicas, y finalmente la resolución de triángulos.

Comienza con una definición de la Trigonométrica basada en la medición y resolución de triángulos, diferenciando entre Trigonometría Rectilínea y Esférica; a lo largo de la obra hará uso de proposiciones de los *Elementos Geométricos* de Euclides.

En la *Primera Parte* de la obra define las líneas trigonométricas como cuerdas de un arco en relación a un círculo, tratando el seno primero, seno segundo, seno verso, tangente primera, tangente segunda, secante primera y secante segunda, presentando a lo largo de estas definiciones propiedades básicas y casos particulares para algunos ángulos.

En la *Parte Segunda* trata la construcción de las tablas de los Senos, Tangentes y Secantes naturales y logarítmicas, y de los Logaritmos. Sánchez Reciente sigue los mismos pasos y presenta prácticamente las mismas propiedades que utiliza Tosca, añadiendo en la mayoría de propiedades ejemplos numéricos y explicando con mayor detenimiento los pasos seguidos para su mejor comprensión.

Igualmente realiza el mismo proceso que Tosca para presentar los Logaritmos y sus propiedades, justificando su uso en que son necesarios numerosos cálculos para resolver triángulos mediante la regla de tres, y gracias a los logaritmos "… *quedarán las operaciones mas faciles, exactas, y breves*" [SÁNCHEZ RECIENTE, 1742, p. 40].

En la *Parte Tercera* trata el uso de las tablas de los Senos logarítmicos, de las tablas de Logaritmos y la resolución de los triángulos, indicando que "… *del buen uso de las tablas de los fenos logarithmicos, y de los logaritmos, pende la seguridad en las refoluciones trigonometricas, fe hace neceffario tratar de dicho ufo.*" [SÁNCHEZ RECIENTE, 1742, p. 81].

En primer lugar explica el uso de las tablas de los Senos logarítmicos, Tangentes y Secantes y seguidamente el manejo de la tabla de logaritmos junto con dos proposiciones para hallar el tercer y cuarto proporcional mediante logaritmos.

A continuación trata la Trigonometría Rectilínea. Comienza presentando lo que considera fundamentos necesarios para la resolución de triángulos, indicando los tipos de triángulos, sus partes y elementos, junto con diversas propiedades elementales.

Seguidamente presenta las mismas reglas generales que trata Tosca para la resolución de triángulos cualesquiera, aunque en diferente orden e indicando para cada regla cuándo se puede aplicar.

La primera es el teorema del Seno, haciéndolo mediante una demostración menos directa que la realizada por Tosca, e indicando que "*Por efta regla fe refolverà cualquier triangulo, en que fe dieren conocidos dos lados, y un angulo opuesto, ù dos angulos, y un lado opuesto*." [SÁNCHEZ RECIENTE, 1742, p. 122].

La siguiente regla es el teorema de la Tangente por el que "… *fe refolverà qualquier triangulo, en que fe dieren conocidos dos lados, y el angulo comprendido entre ellos*" [SÁNCHEZ RECIENTE, 1742, p. 125].

La tercera regla indica la proporcionalidad entre los lados del triángulo y de los lados de los dos triángulos rectángulos en que se puede dividir el primero, regla por la que se resolverán triángulos en que se den conocidos los tres lados.

Posteriormente pasa a tratar las reglas particulares para triángulos rectángulos. Comienza indicando que un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto, regla con la que se puede resolver un triángulo rectángulo en el que se conozcan la hipotenusa y un lado.

La siguiente regla indica que un cateto es igual al producto del otro por la tangente del ángulo opuesto, regla que permite resolver triángulos rectángulos en los que se conozcan los dos catetos.
La última regla indica que un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la secante del ángulo comprendido entre el cateto y la hipotenusa, regla que permite resolver triángulos rectángulos en los que se conozcan un lado y la hipotenusa.
Una vez que ha indicado cuándo se puede aplicar cada regla, trata la resolución de los triángulos oblicuángulos, presentando un estudio diferente al realizado por Tosca, Fernández y Cedillo. En lugar de estudiar los distintos casos según los datos de que se dispone, Sánchez Reciente estudia los casos según los lados del triángulo, y dentro de cada tipo según sus ángulos, presentando en la mayoría de casos ejemplos numéricos.
En primer lugar trata brevemente los triángulos equiláteros, pasando a estudiar los triángulos isósceles rectángulos, obtusángulos y acutángulos. Finaliza el estudio tratando ampliamente los triángulos escalenos según sean rectángulos (mediante nueve casos) u oblicuángulos (cinco casos).
Concluye la obra con la tabla de los logaritmos correspondientes a los números absolutos desde 1 hasta 1.000 y la tabla de los senos, tangentes y secantes logarítmicas con el radio 100.000. Ambas tablas son de menor precisión que las elaboradas por Tosca.

Se puede observar que Sánchez Reciente sigue la línea de estudio presentada por Tosca tanto en el concepto de las expresiones trigonométricas, la elaboración y uso de las tablas y las propiedades necesarias para la resolución de triángulos.
Sin embargo, existe un tratamiento distinto en la resolución de los triángulos, realizando el estudio en base al tipo de triángulo del que se quiere hallar algún elemento, a diferencia de Tosca, Fernández y Cedillo que realizan el estudio a partir de los elementos que se tienen.
Es destacable el interés del autor por adaptar la obra a sus alumnos en el Colegio de San Telmo, consciente de su bajo nivel académico, lo que le lleva a recordar y explicar con más detenimiento propiedades básicas y a presentar un gran número de ejemplos ilustrativos.

La última de las obras de este periodo es *Compendio de la geometría elemental y trigonometría rectilínea: para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas en su Academia*, de Vicente Tofiño, obra utilizada durante los periodos de 1753 a 1783 y de 1783 a 1802 en la Academia de Guardias Marinas. El autor fue profesor y Director de la Academia de Guardias Marinas de Cádiz.

La primera edición de la obra parece ser de 1771 [TOFIÑO, 1771]. El texto trata en primer lugar la Geometría elemental en tres libros y posteriormente presenta el *Compendio de la Trigonometria Rectilinea*.

En la *Introducción*, Tofiño hace únicamente referencia a los contenidos geométricos, por lo que se puede entender que es un preámbulo a la primera parte de la obra. Aun así, cabe destacar que indica que la obra está pensada para la formación de los Guardias Marinas, pues al explicar el proceso que ha seguido para presentar la obra, ratifica su puesta en práctica indicando que "… *afsi lo hà verificado la experiencia, en trece Cavalleros Guardias-Marinas*" [TOFIÑO, 1771, Introducción p. V].

Como en las anteriores obras, comienza explicando que la Trigonometría Plana es la ciencia que enseña a resolver los triángulos Rectilíneos, resaltando que "… *es de fuma importancia para los Tratados de Navegacion, Geometría practica, y otros.*" [TOFIÑO, 1771, p. 85]. Continúa definiendo las expresiones trigonométricas seno primero, seno segundo, seno verso, tangente y secante como líneas a partir del arco, aunque sin el fundamento conceptual que podemos encontrar en las obras de Tosca, Fernández y Sánchez Reciente.

Seguidamente presenta unas proposiciones trigonométricas que considera necesarias para la construcción de las tablas de los Senos. En todas ellas realiza demostraciones geométricas y entre las proposiciones encontramos la relación entre el seno y coseno de un ángulo, el seno del ángulo doble, del ángulo mitad, de la suma de dos ángulos, de la diferencia; todas estas proposiciones son tratadas de forma similar, aunque algo más resumida, a como lo hacen Tosca y Sánchez Reciente.

Continúa con la relación entre el seno, coseno y tangente, indicando posteriormente que "*La refolucion de los Triangulos fe consigue por medio de las Tablas de Senos, Tangentes, y Secantes: formando una regla de proporcion con los tres terminos conocidos, que fe refuelve multiplicando el fegundo por el tercero, y partiendo el producto por el primero*" [TOFIÑO, 1771, p. 92]. Indica que los logaritmos facilitan los cálculos, por lo que al final de la obra incluye las tablas de los logaritmos de los Senos, Tangentes y Secantes suponiendo el radio dividido en 100.000.000 partes, y la de Logaritmos de todos los números naturales desde 1 hasta 5.600.

Posteriormente estudia la resolución de triángulos. Para ello presenta los principales teoremas de forma similar a como lo hacen Tosca, Fernández y Sánchez Reciente, indicando al igual que Sánchez Reciente qué caso se puede resolver con cada teorema. A partir de estos teoremas resuelve diversos ejemplos de triángulos según los casos, comenzando con triángulos rectángulos y continuando con oblicuángulos, todo ello siguiendo la estructura seguida por Tosca, si bien de forma menos detallada y con la peculiaridad de estudiar con mayor detenimiento los triángulos obtusángulos al considerar que son especialmente complicados de resolver.

De esta forma, observamos que la obra de Tofiño utiliza los mismos conceptos y orden que Tosca aunque de forma más sintetizada, siendo destacable que realiza una explicación superficial del uso de las tablas.

Una vez revisadas las obras, observamos que siguen en general una estructura similar, comenzando con la definición y propiedades básicas de las expresiones trigonométricas necesarias para elaborar las tablas trigonométricas, explicando el uso de estas tablas y pasando a la resolución de los triángulos, habiendo presentado previamente propiedades y teoremas que permitan el estudio de casos.
Pasamos a ver la forma en que ha evolucionado cada uno de estos elementos a lo largo del siglo XVIII.

Respecto al concepto y definición de las expresiones trigonométricas, todos se basan en el concepto geométrico de líneas trigonométricas y presentan propiedades similares. Tosca presenta la construcción más completa de las expresiones trigonométricas a partir de la idea de que los lados de cualquier triángulo son cuerdas del círculo que lo circunscribe, y dado que los arcos y cuerdas de diferentes círculos tienen entre sí la misma razón que los radios, si se sabe en un círculo la razón que tienen las cuerdas con el radio se podrán deducir en los demás triángulos por regla de tres el valor de sus cuerdas conociendo otras, y consecuentemente sus ángulos y arcos. El resto de autores recogen el concepto de líneas trigonométricas de forma más resumida.

A la hora de elaborar las tablas del Seno, Tangente y Secante los autores siguen un proceso muy parecido, destacando por su mayor detenimiento las obras de Tosca y Sánchez Reciente. Las tablas trigonométricas de mayor precisión corresponden a las de Fernández y Tofiño, mientras que las de menor precisión a las de Sánchez Reciente.
Junto con las tablas trigonométricas, todos los autores tratan las tablas logarítmicas, ofreciendo un estudio más completo Tosca y Sánchez Reciente en contrapartida a la obra de Tofiño, que las trata poco. Las tablas logarítmicas de mayor precisión corresponden a las de Tosca, y las de menor precisión a las de Sánchez Reciente.

En cuanto a la resolución de triángulos rectilíneos, los cinco autores presentan los teoremas fundamentales tanto para los triángulos rectángulos como para los oblicuángulos, con demostraciones geométricas basadas en relaciones de proporcionalidad, aunque el orden no siempre es el mismo. Cedillo comienza con teoremas relacionados con los triángulos rectángulos y Sánchez Reciente con los oblicuángulos, mientras que Tosca, Fernández y Tofiño mezclan teoremas de los dos tipos de triángulos.

Una vez presentados los teoremas, los autores proceden a la resolución de los triángulos, pudiendo encontrar dos enfoques diferentes para su estudio. La mayoría realizan el estudio mediante ejemplos prácticos para cada uno de los casos planteados.
Por una parte, Tosca, Cedillo, Fernández y Tofiño presentan los diferentes casos según los datos de que se disponen, empezando por triángulos rectángulos y estudiando posteriormente los oblicuángulos, mientras que por otra parte, Sánchez Reciente lo hace estudiando los casos según lados del triángulo, y dentro de cada tipo según sus ángulos.
Cabe destacar que Tosca y Fernández presentan en ocasiones más de un método de resolución para un mismo caso.

En cuanto a la cantidad de contenidos presentados en las cinco obras, las de Tosca y Sánchez Reciente son las más completas, las de Fernández y Tofiño presentan los contenidos de una forma más compacta y resumida, mientras que Cedillo únicamente enuncia los mínimos conceptos teóricos centrándose en las aplicaciones a la Navegación.

A partir de estos resultados podemos concluir que a lo largo del siglo XVIII no cambiaron sustancialmente los contenidos esenciales de Trigonometría que un Guardia Marina necesitaba para su formación, siendo el tratado de Tosca un referente para el resto de obras.
Estos contenidos eran el conocimiento de las líneas trigonométricas y sus propiedades básicas, la elaboración y uso de tablas trigonométricas, y la resolución de triángulos rectilíneos junto con las propiedades y teoremas necesarios para ello.

I.8.2.2. **Obras francesas**

A lo largo del siglo XVIII, en las Academias de Guardias Marinas se utilizaron dos obras francesas directamente relacionadas con la Trigonometría Rectilínea; ambas obras fueron utilizadas para la formación de diversos contenidos en los *Cursos de Estudios Mayores* durante los periodos 1783-1802 y 1802-1824.

Su estudio nos puede ofrecer información del desarrollo de la Trigonometría a nivel internacional, para poder posteriormente valorar si las enseñanzas en la Armada estaban dentro de la banda de modernidad europea.

Se va a proceder a describir brevemente cada una de las obras, con el objetivo de contextualizar e identificar los contenidos de Trigonometría Rectilínea que se estudiaban en Europa a finales de este siglo.

La primera de las obras estudiadas es *Cours de mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Seconde Partie, Contenant le Élemens de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne & la Trigonométrie fphérique* de Etienne Bézout.

La primera edición de este tomo de la obra es de 1765 y tuvo numerosas reediciones, habiendo revisado la de 1771 [BÉZOUT, 1771]. Esta obra fue recomendada en el año 1783 para el programa del *Curso de Estudios Mayores* en la Academia de Guardias Marinas del Ferrol. En el Plan propuesto en 1807 por Gabriel Ciscar para el *Curso de Estudios Mayores* también se recomienda los volúmenes 3º, 4º y 5º de la obra, estando finalmente en la lista de libros utilizados para el *Curso* en 1812.

La obra fue recomendada en todas las ocasiones junto con la obra de La Caille, que estudiaremos posteriormente.

En el *Prefacio*, Bézout comienza indicando la importancia de los contenidos de la obra para los estudiantes de Marina y la práctica de la Navegación. Advierte de la necesidad de tener unos conocimientos básicos para poder seguir la obra, y que a lo largo del texto pretende deducir consecuencias útiles y aplicaciones a partir de las proposiciones y principios que se expongan. Posteriormente, describe las secciones en que divide las tres partes de la obra (Geometría, Trigonometría Rectilínea y Trigonometría Esférica) y concluye advirtiendo que para facilitar el estudio del libro no utilizará términos como Axioma o teorema, aunque explica sus significados por si los lectores consultan otras obras.

La parte dedicada en la obra a la Trigonometría lleva por título *De la Trigonométrie*.
Bézout comienza indicando que la palabra Trigonometría significa medida de triángulos y en ella se trata el arte de la resolución de los triángulos, tanto rectilíneos como esféricos.
Pasa a estudiar la Trigonometría Rectilínea y antes de definir las líneas trigonométricas, advierte que en el caso de conocer los tres ángulos de un triángulo éste no queda determinado, y que si se tienen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos el problema queda indeterminado, debiendo estudiar si los ángulos que hay que hallar son agudos u obtusos.

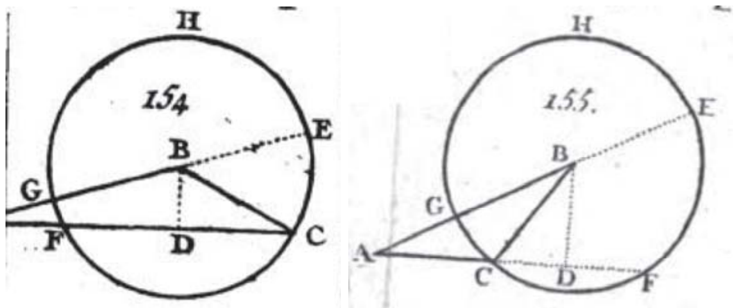
Bézout presenta las definiciones geométricas de las expresiones trigonométricas como líneas dentro del círculo, denominando coseno al complemento del seno. Seguidamente presenta relaciones trigonométricas básicas como los valores de los ángulos principales y las relaciones de los ángulos complementarios y suplementarios, todas ellas necesarias para la elaboración de las tablas de los Senos, y a partir de éstas las de las Tangentes y Secantes como consecuencia de las relaciones entre las líneas trigonométricas $\cos AB : senAB :: R : \tan AB$ y $\cos AB : R :: R : \sec AB$ a partir de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras.
Continúa con la explicación de la elaboración de las tablas logarítmicas del seno y para ello presenta geométricamente diversas proposiciones, como la relación entre el seno y el coseno, el seno del ángulo mitad y el ángulo doble, el seno de la suma y de la diferencia de dos ángulos o la relación $\dfrac{senA + senB}{senA - senB} = \dfrac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$. A partir de estas proposiciones explica el método de la construcción de las tablas, tomando un radio de 10.000.000.000 partes y resaltando la utilidad de los logaritmos para facilitar las operaciones, dando varios ejemplos de utilización.

Prosigue Bézout con la resolución de los cuatro casos habituales de triángulos rectángulos a partir de la propiedad trigonométrica que relaciona un cateto con la hipotenusa y el coseno del ángulo adyacente, junto con la propiedad que relaciona un cateto con el producto del otro y la tangente del ángulo opuesto, propiedades que demuestra utilizando de nuevo triángulos semejantes y el teorema de Pitágoras. En cada uno de los casos explica el proceso a seguir y da un ejemplo numérico.
Seguidamente trata la resolución de triángulos oblicuángulos, que divide en cuatro casos. En primer lugar presenta las relaciones necesarias para resolver cada caso, explica el proceso de resolución y da un ejemplo numérico.

Comienza con la demostración del teorema del Seno, mediante semejanzas de triángulos. Indica que por medio de este teorema se pueden resolver triángulos en los que son conocidos dos ángulos y un lado y triángulos en los que se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de los lados, tratando en este caso la ambigüedad de los ángulos que se quieren hallar.

A continuación trata varias propiedades sobre proporciones entre sumas y restas de cantidades y entre lados y ángulos, que le permiten resolver el caso en el que se tienen los tres lados del triángulo. Es destacable la siguiente relación: [BÉZOUT, 1771, p. 282].

302. *Dans tout triangle rectiligne* ABC (fig. 154 & 155), *ſi de l'un des angles on abaiſſe une perpendiculaire ſur le côté oppoſé; on aura toujours cette proportion : le côté* AC *ſur lequel tombe, ou ſur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, eſt à la ſomme* AB + BC *des deux autres côtés, comme la différence* AB — BC *de ces mêmes côtés, eſt à la différence des ſegments* AD *&* DC, *ou à leur ſomme, ſelon que la perpendiculaire tombe en dedans ou au dehors du triangle.*



Figuras 154 y 155

El último caso, en el que son dados dos lados y el ángulo que forman, lo resuelve mediante el teorema de la Tangente, que demuestra a partir del teorema del Seno y de la relación

$$\frac{senA + senB}{senA - senB} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}.$$

Una vez estudiados los cuatro casos, indica que *"Tels font les moyens qu'on peut employer pour la réfolution des triangles: voici maintenant quelques exemples de l'application qu'on peut en* *faire aux figures plus compofées*" [BÉZOUT, 1771, p. 289], pasando a estudiar detenidamente varios ejemplos prácticos de aplicación (medición de alturas, doble observación…).

En el último apartado trata brevemente la Nivelación, es decir, determinar cuándo un objeto se halla más alejado que otro al centro de la Tierra, debido a su forma prácticamente esférica. Para ello explica diversas aplicaciones de la Trigonometría Rectilínea a la práctica de Navegación, varios ejemplos prácticos y el uso de un instrumento de medición. Para profundizar en esta materia recomienda la obra *Traité du Nivellement* de M. Picard.

Concluimos que la obra de Bézout sigue un enfoque totalmente geométrico para el desarrollo de la Trigonometría Rectilínea, basándose en proporciones que se pueden deducir a partir de la semejanza de triángulos y del teorema de Pitágoras.
Bézout sigue el clásico planteamiento y desarrollo para el estudio de la Trigonometría Rectilínea a lo largo de la obra, siendo destacable la cantidad de explicaciones, de ejemplos y de aplicaciones prácticas en concordancia al tipo de alumnado al que va dirigido.

La segunda de las obras estudiadas es *Leçons élémentaires de mathématiques* de Nicolas Louis de La Caille. La primera edición de la obra es de 1741 y tuvo numerosas reediciones, habiendo revisado la de 1784 [LA CAILLE, 1784]. Esta obra fue recomendada en el programa del *Curso de Estudios Mayores* en el año 1783 en la Academia de Guardias Marinas de Cartagena, tras el repaso a fondo de todas la enseñanzas que habían recibido los cadetes; también lo fue ese mismo año en la Academias de Guardias Marinas del Ferrol. En el año 1785 aparece en el Plan de Estudios del *Curso de Estudios Mayores* de las tres Academias para estudiar el Álgebra, añadiéndole una exposición del cálculo de variaciones.
En el Plan propuesto por Gabriel Ciscar para el *Curso de Estudios Mayores* en 1807 también se recomienda la obra, estando finalmente en la lista de libros utilizados para el Curso en 1812.

La Caille comienza el *Prefacio* indicando que al contener en su obra un conjunto amplio de materias ha debido suprimir a menudo las operaciones intermedias en los cálculos, aunque en su opinión "*Cette lutte continuelle produit les meilleurs effets pour les jeunes Gens deftinés à faire des progrès rapides Dans les Mathèmatiques*" [LA CAILLE, 1784, p. iv] y da indicaciones metodológicas para la lectura de la obra.

La parte dedicada a la Trigonometría en la obra lleva por título *Application des principes de Géométrie et d'Algèbre au calcul des Sinus et a la Trigonométrie*, por lo que podemos deducir que conjuga los enfoques geométrico y el algebraico al tratar la Trigonometría.

La Caille comienza indicando que la Trigonometría es la ciencia que trata la resolución de los triángulos, tanto rectilíneos como esféricos. Seguidamente da la definición clásica del seno como línea dentro del círculo y análogamente lo hace con las demás expresiones trigonométricas. Una vez definidas las líneas trigonométricas, presenta propiedades básicas de las mismas, siendo destacable la relación fundamental de la Trigonometría a partir del teorema de Pitágoras y de la semejanza de triángulos.

Seguidamente deduce algebraicamente otras propiedades, como las relaciones de las líneas trigonométricas de la suma de dos ángulos, del ángulo doble y del ángulo mitad, "*Mais comme ces formules fuppofent que les finus & cofinus font déja connus, il faut, avanti d'aller plus loin, apprenddre à les connoître.*" [LA CAILLE, 1784, p. 328]. Es por ello que explica a partir del seno de 1'' y de las propiedades vistas, la forma de calcular los senos de todos los arcos, para lo que basta con calcular los senos de los arcos menores de un cuarto de círculo, y explica que el coseno de un ángulo se deducirá a partir del seno del mismo arco y la relación fundamental. A continuación deduce algebraicamente las transformaciones de sumas y diferencias de las líneas trigonométricas en productos y otras relaciones del tipo $\frac{senA+senB}{senA-senB}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$. Finaliza este apartado indicando que "*Au refte toutes ces formules peuvent être variées d'une infinté de manieres, en les ajoutant, fouftrayant, divifant, &. Mais el eft inútiles d'infifter fur une matiere auffi facile; voyez l'Intrudction a l'analyfe dee Infinis par M. Euler.*" [LA CAILLE, 1784, p. 333].

Pasa al cálculo de las Tablas de los Senos, indicando que su elaboración ha sido anteriormente muy laboriosa, exponiéndolas brevemente mediante series tal y como propone Jean Bernoulli en el segundo volumen de sus obras, lo que supone un novedoso tratamiento analítico respecto a las demás obras estudiadas. De esta forma deduce los desarrollos del seno, coseno, tangente y cotangente de un ángulo considerando que el radio es la unidad.

Utiliza las tablas ordinarias del seno, coseno, tangente y cotangente con el radio 10.000.000.000, no tratando las de las secantes y cosecantes porque considera que su uso es poco frecuente y se pueden deducir de sus relaciones con el coseno y el seno respectivamente.

Una vez explicado la forma de calcular el valor de una línea trigonométrica dado el arco, trata el problema inverso de calcular el arco dado el valor de una línea trigonométrica. Lo hace para el caso del seno, pues indica que para las demás líneas trigonométricas es similar, y para ello utiliza el método inverso de la serie del arco en función del seno y de la tangente.

Aplica este método para investigar el diámetro de una circunferencia y concluye este apartado remarcando que a partir de las relaciones trigonométricas y de los valores del seno, coseno y tangente y cotangente de un ángulo *a* se pueden deducir el de sus ángulos múltiplos, tal y como presenta en la tabla resumen para el caso del seno y coseno [LA CAILLE, 1784, p. 340]:

arcs multiples. Car faiſant $\sin a = s$, $\cos a = c$, $\operatorname{tang} a = t$, on aura la Table ſuivante.......

$\sin a = s$	$\cos a = c.$
$\sin 2a = 2sc.$	$\cos 2a = c^2 - s^2.$
$\sin 3a = 3sc^2 - s^3.$	$\cos 3a = c^3 - 3cs^2.$
$\sin 4a = 4sc^3 - 4cs^3.$	$\cos 4a = c^4 - 6c^2s^2 + s^4.$
$\sin 5a = 5sc^4 - 10s^3c^2 + s^5.$	$\cos 5a = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4.$
&c.	&c.

También indica que a partir de las mismas fórmulas, se pueden encontrar por un lado las ecuaciones que sirven para dividir un ángulo cualquiera en un número dado de partes iguales, y por otro lado un método para resolver por aproximación toda ecuación de tercer grado en el caso irreducible, presentando tres ejemplos ilustrativos.

En el último apartado sobre contenidos de Trigonometría Rectilínea, La Caille trata sin mucho detalle la resolución de triángulos Rectilíneos.

Comienza indicando que todo triángulo rectilíneo se puede inscribir en un círculo, por lo que cada lado del triángulo es la cuerda de un arco doble del ángulo opuesto, deduciendo a partir de esta relación el teorema del Seno. Seguidamente deduce que en un triángulo rectángulo se cumplen las tres relaciones trigonométricas que relacionan lados y ángulos, presentando una tabla para la resolución de los triángulos rectángulos con las fórmulas necesarias de nueve casos (no considera las simetrías que reducen estos casos a los cuatro casos habituales). La tabla es la siguiente [LA CAILLE, 1784, p. 344]:

Etant donnés	Trouver	FORMULES.
AB, AC	BC B C	$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)}$. AB : AC : : R : *tang* B. AC : AB : : R : *tang* C.
AB, BC	AC B C	$AC = \sqrt{(BC^2 - AB^2)}$. BC : AB : : R : *coſ* B. BC : AB : : R : *ſin* C.
AC, BC	AB B C	$AB = \sqrt{(BC^2 - AC^2)}$. BC : AC : : R : *ſin* B. BC : AC : : R : *coſ* C.
AB, B	AC BC	R : *tang* B : : AB : AC. *coſ* B : R : : AB : BC.
AC, B	AB BC	R : *cot* B : : AC : AB. *ſin* B : R : : AC : BC.
AB, C	AC BC	R : *cot* C : : AB : AC. *ſin* C : R : : AB : BC.
AC, C	AB BC	R : *tang* C : : AC : AB. *coſ* C : R : : AC : BC.
BC, B	AB AC	R : *coſ* B : : BC : AB. R : *ſin* B : : BC : AC.
BC, C	AB AC	R : *ſin* C : : BC : AB, R : *coſ* C : : BC : AC.

En cuanto a los triángulos oblicuángulos, trata su resolución mediante cuatro casos que resuelve teóricamente y en algún caso presenta un ejemplo numérico. En la resolución de los casos aplica los teoremas del Seno, de la Tangente y como novedades el teorema del Coseno y las Fórmulas de Briggs, calculando algunos datos alternativamente mediante el método del *Perpendículo*. Cabe destacar que no comenta que haya problemas de ambigüedad sobre los ángulos a calcular en el caso de tener conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Finalmente indica que con estos principios de la Trigonometría "*On peut les appliquer à plufieurs autres problêmes fur les triangles*" [LA CAILLE, 1784, p. 348], y procede a dar un ejemplo consistente en hallar los tres lados de un triángulo dados el ángulo agudo y la superficie del mismo.

Podemos concluir que la obra de La Caille se encuentra a camino entre el desarrollo geométrico y el algebraico de la Trigonometría Rectilínea. Comienza definido geométricamente las expresiones trigonométricas como líneas y utiliza herramientas algebraicas para ir deduciendo relaciones y propiedades.

Por otra parte, explica la elaboración de tablas trigonométricas a partir de desarrollos en serie y hace un uso limitado de logaritmos.

Respecto a la resolución de triángulos, además del manejo de los teoremas clásicos del Seno y de la Tangente y el método del *Perpendículo*, trata por primera vez entre las obras estudiadas el teorema del Coseno y las fórmulas de Briggs. Realiza un breve estudio de la resolución de triángulos, aunque trata todos los casos dependiendo de los elementos que se tienen, tanto para triángulos rectángulos como oblicuángulos.

II.8.3. Obras utilizadas en la Armada en el siglo XIX

Una vez revisadas las obras sobre Trigonometría Rectilínea que fueron utilizadas para la formación en la Armada Española a lo largo del siglo XVIII, pasamos a estudiar los textos empleados durante el siglo XIX. Las obras se estudiarán conforme a su primera edición.

Se han revisado completamente las seis obras relacionadas con la Trigonometría Rectilínea que fueron utilizadas para la formación de los Guardias Marinas durante el siglo XIX; en la Tabla 3.2.7, *Datos generales de los textos sobre Trigonometría Rectilínea*, aparecen los principales datos de cada uno de los textos.

Por otra parte, se ha realizado la Tabla 3.3.7, *Temas presentes en los textos sobre Trigonometría Rectilínea*, como resumen de los principales contenidos presentes en los textos. Para ello se han seleccionado noventa y un ítems agrupados por las siguientes temáticas y subtemáticas:

- Razones Trigonométricas
    - Ángulos
    - Líneas trigonométricas
    - Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo
    - Valores de las razones trigonométricas de los ángulos
    - Reducciones al primer cuadrante
- Tablas Trigonométricas
    - Disposición y uso
    - Dado un arco hallar la línea trigonométrica
    - Dada una línea trigonométrica hallar el arco
- Razones trigonométricas de la adición
- Triángulos Rectángulos
    - Relaciones trigonométricas
    - Resolución
- Triángulos Oblicuángulos
    - Relaciones trigonométricas
    - Superficie de un triángulo
    - Resolución
- Otros

Se pretende ver la forma en que evolucionaron a lo largo del siglo los contenidos esenciales de Trigonometría Rectilínea que un Guardia Marina necesitaba para su formación, constatando el paso de un enfoque puramente geométrico a otro algebraico y analítico.

I.8.3.1. **Curso de estudios elementales de Marina, Tomo II, por Ciscar**

La primera obra en orden cronológico con respecto a la primera edición, *Curso de estudios elementales de Marina,* pertenece a Gabriel Ciscar y Ciscar. Su primera edición es de 1803 y ya se comentó que los cuatro tomos que conforman el *Curso* fueron durante muchos años la principal obra para la instrucción de Guardias Marinas (de 1803 a 1844) y de pilotos en las Escuelas de Náutica.
Dos de los tomos, el II y III, tienen relación con la Trigonometría, el primero con la Rectilínea y el segundo con la Esférica.

El tomo segundo, *Geometría*, ha sido revisado en su primera edición de 1803, constando el libro de ciento treinta y seis páginas y ciento catorce figuras, aunque sólo catorce páginas y siete figuras tratan sobre Trigonometría Rectilínea en los capítulos XV, XVI y XVII [CISCAR, 1803a].
En este tomo, el autor indica que "*Aunque las proposiciones de Geometría de que se hace uso en la práctica ordinaria de la Navegacion son en corto número, no se puede demostrar su certeza sin establecer muchos principios, que sirven de base para la deduccion de las proposiciones usuales. Estos mismos principios son de la mayor utilidad ,en quanto preparan el entendimiento para discurrir con acierto sobre las materias facultativas; en términos, que aquellos que hayan aprovechado en su estudio, se hallarán en estado de resolver por sí mismos las dificultades que se les presenten, y podrán tomar el mejor partido en algunos casos que no se especifican en los Tratados, en atencion á que en todas las Artes y Ciencias es preciso contar con el buen juicio y discernimiento de los que las profesan.*" [CISCAR, 1803a, II, p. III].

En la *Introducción*, Ciscar indica la importancia de la Geometría para la Navegación, pues sus principios "*… son de la mayor utilidad, en quanto preparan el entendimiento para discurrir con acierto sobre las materias facultativas*" [CISCAR, 1803a, II, p. III]. Posteriormente explica que se ponen en letra menor los ejemplos y aclaraciones menos esenciales, dado que "*… no es preciso que se exijan de todos los que se dediquen á la práctica del Pilotage, sin embargo de su mucha utilidad.*" [CISCAR, 1803a, II, p. III]. Distribuye el Tratado en diecinueve capítulos y advierte, que para que sea más claro el tratado *"… se han establecido y demostrado tal qual vez como lemas algunas verdades, que consideradas aisladamente debian ocupar un lugar distinto de aquel en que se han puesto por razon de sus aplicaciones.*" [CISCAR, 1803a, II, p. III].

Seguidamente pasa a comentar brevemente cada capítulo. Los capítulos relacionados con la Trigonometría Plana son el XV, XVI y XVII. Explica que el capítulo XV contiene las nociones generales de la Trigonometría Plana logarítmica, sus propiedades y la disposición y uso de las tablas. En el capítulo XVI trata la resolución de los triángulos rectilíneos rectángulos por medio de los logaritmos. En el XVII se presenta la resolución de los triángulos rectilíneos oblicuángulos mediante logaritmos, indicando que se puede ampliar su contenido en su *Tratado de Trigonometría Esférica para la instrucción de los Guardias Marinas* [CISCAR, 1803a, II, pp. VII-VIII].[15]

Finaliza comentando la estructura y disposición de las citas, dando recomendaciones didácticas y justificando la ausencia de algunas demostraciones, pues en otro caso "*Los Tratados de Geometría resultarian de un volumen excesivo, y la ciencia mas propia para formar el discurso quedaria reducida á un ejercicio pesado y material de la memoria, si en dichos Tratados se expresasen extensamente todas las proposiciones de que se puede hacer uso.*" [CISCAR, 1803a, II, p. X].

Como ya hemos comentado, Ciscar presenta tres capítulos sobre Trigonometría Rectilínea.

La parte de la obra sobre Trigonometría comienza con el capítulo XV, *Nociones generales de trigonometría plana logarítmica*, donde muestra nociones elementales de Trigonometría Rectilínea.

Comienza definiendo el concepto de Trigonometría Plana logarítmica como *"… la ciencia que enseña á resolver los triángulos rectilíneos, empleando los logaritmos de los valores de sus lados y de unas líneas que tienen relación con los ángulos, y se designan con el nombre de líneas trigonométricas.*" [CISCAR, 1803a, II, p. 91].

El autor recalca de esta forma el empleo de los logaritmos como herramienta para facilitar las operaciones en la resolución de los triángulos rectilíneos, siendo un planteamiento similar al seguido por autores como Tosca, Sánchez Reciente o Tofiño.

A continuación presenta los elementos trigonométricos seno, coseno, cotangente, secante, cosecante, seno verso y coseno verso a partir de las definiciones geométricas de las líneas trigonométricas.

---

[15] Esta obra de Ciscar será analizada en el apartado II.9.

Seguidamente indica la relación de cada línea trigonométrica de un arco con el de su suplemento, y presenta el valor en algunos arcos particulares como 0º, 30º, 45º, 60º, 90º y 180º.

Posteriormente demuestra relaciones como $\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$ y $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$, basándose en propiedades geométricas de las líneas trigonométricas y semejanzas de triángulos.

A continuación explica la disposición y uso de las tablas de las líneas trigonométricas, considerando un radio igual a diez mil millones y que la *"…Geometría suministra métodos para determinar los valores de las líneas trigonométricas de todos los arcos, en partes del radio. Por dichos métodos se obtienen los valores de las líneas expresadas, con toda la aproximación que se quiere."* [CISCAR, 1803a, II, pp. 95-96].

Explica por una parte cómo dado un arco se puede hallar por medio de las tablas el logaritmo de cualquiera de sus líneas trigonométricas y por otra parte cómo dado el logaritmo de una línea trigonométrica se puede hallar por medio de las tablas el arco correspondiente. Advierte, que *"Para las operaciones relativas á los triángulos rectilíneos, y á los curvilíneos que forma la línea de la derrota que sigue la nave, basta hallar los valores de los ángulos con diferencia de un minuto; y esto se executa fácilmente por medio de las tablas en que se expresan los logaritmos de las líneas trigonométricas de minuto en minuto."* [CISCAR, 1803a, II, pp. 97-98], aunque también trata tablas de 10'' en 10'' y de 1'' en 1'' para cálculos que exigen mayor exactitud.

En el capítulo XVI, *De la resolución de los triángulos rectilíneos rectángulos por medio de los logaritmos*, demuestra las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo $c = asenC$, $b = a\cos C$ y $c = b\tan C$, indicando que "*Estas proposiciones son suficientes para la resolución de los triángulos rectángulos*" [CISCAR, 1803a, II, p. 101]; expone tres ejemplos de la resolución de este tipo de triángulos mediante logaritmos, uno para el caso en el que se tiene un ángulo y la hipotenusa, otro cuando se tienen dos catetos y un tercero cuando se tiene un ángulo y el cateto adyacente, no haciendo mención del caso en el que se tiene la hipotenusa y un cateto.

El capítulo XVII, *De la resolución de los triángulos rectilíneos oblicuángulos empleando los logaritmos*, es el último dedicado a la Trigonometría Rectilínea. Comienza con la demostración de la relación $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$ a partir de las relaciones de los triángulos rectángulos y seguidamente trata la propiedad que indica que si en un triángulo se baja la perpendicular desde un ángulo al lado opuesto a su prolongación, las distancias de los extremos de dicho lado a la perpendicular serán recíprocamente proporcionales con las tangentes de sus ángulos adyacentes. El autor explica que estas dos proposiciones y lo visto para triángulos rectángulos *"… basta para resolver los triángulos obliquángulos en que se conocen dos lados y el ángulo comprendido.*" [CISCAR, 1803a, II, p. 103], presentando dos ejemplos de resolución. Seguidamente indica que "*Esto basta para que no haya dificultad en resolver por los dos teoremas (art. 550 y 552) todos los casos que pueden ofrecerse sobre los triángulos obliquángulos, excepto quando solo se conocen los tres lados.*" [CISCAR, 1803a, II, p. 104]. Comenta que este último caso no tiene mucho uso y en lugar de demostrarlo da los pasos para resolverlo, junto con un ejemplo.

Podemos ver que Ciscar sigue una estructura similar a la realizada por Tosca, Sánchez Reciente, Tofiño y Bézout, pero se encuentra alejado del planteamiento algebraico presentado por La Caille.

Ciscar parte de la definición geométrica de las líneas trigonométricas y presenta varias propiedades de las mismas, que permitan comprender y manejar las tablas trigonométricas logarítmicas. Posteriormente trata los triángulos rectángulos con las relaciones que permiten su resolución y pasa a estudiar los triángulos oblicuángulos a partir del teorema del Seno y la división en triángulos rectángulos.

Sin embargo, la obra de Ciscar, dado su carácter elemental, trata todos los temas de manera más superficial que sus antecesores, centrándose en los contenidos mínimos que le permitan tratar la resolución de triángulos. El número de relaciones y proposiciones es muy limitado y al igual que sus predecesores, se basa en proporciones geométricas y semejanzas de triángulos para demostrarlas.

Para la resolución de triángulos no realiza una clasificación de los distintos casos y únicamente presenta ejemplos numéricos de algunos.

Es destacable el énfasis que pone en indicar la utilidad de los logaritmos para facilitar los cálculos, añadiendo el adjetivo "logarítmica" a la Trigonometría Rectilínea. Por otra parte, es el primer autor español de los estudiados que utiliza el término coseno en su obra.

La obra de Ciscar, pese a estar destinada a la formación de los Guardias Marinas y Pilotos, contiene en la parte de Trigonometría un reducido número de ejemplos y ningún ejercicio, posiblemente debido a que el libro servía de guía para el profesor y este presentaría ejemplos y ejercicios en el desarrollo de las clases.

I.8.3.2. **Tratado de Trigonometría y Topografía, por Cortázar**

La segunda obra es *Tratado de Trigonometría y Topografía*, de Juan Cortázar, cuya primera edición data de 1848. La obra estuvo destinada al uso en universidades, institutos, escuelas industriales y como preparatorio para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. Se han revisado la sexta edición de 1859 [CORTÁZAR, 1859] y la décima de 1865 [CORTÁZAR, 1865]. En la primera de ellas, el libro consta de ciento noventa y seis páginas y ochenta y cuatro figuras, y en la segunda doscientas tres páginas y ochenta y cuatro figuras. La parte de Trigonometría Rectilínea consta en ambas ediciones de ciento seis páginas y dieciocho figuras.

En el *Prólogo*, el autor se limita a indicar las tres correcciones realizadas a la primera edición. En primer lugar explica la reducción de las líneas trigonométricas a cuatro, dejando de usar las secantes y cosecantes dado que son cantidades recíprocas de los cosenos y los senos. El autor advierte críticamente que muchos de "*… los autores de trigonometría han continuado, y continúan todavía, ocupándose de las secantes y cosecantes; líneas mas inútiles aún en la teoría que en la práctica, pues allí donde entra la secante ó la cosecante, puede entrar sencillamente el coseno ó el seno*." [CORTÁZAR, 1859, p. 1ª del Prólogo].
Las otras dos correcciones están relacionadas con la Trigonometría Esférica.

Cortázar divide en dos partes el estudio de la Trigonometría Rectilínea, presentando en primer lugar las líneas trigonométricas y seguidamente tratando la resolución de triángulos.
El autor basa las demostraciones de la mayoría de proposiciones en las propiedades geométricas de las líneas trigonométricas, la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras, tratando en primer lugar ángulos positivos y menores de 90º y generalizando para otros ángulos mediante el teorema de Descartes.
En la primera parte, que denomina *Libro I, Líneas Trigonométricas*, comienza el primer capítulo, *Nociones preliminares*, explicando que la Trigonometría Rectilínea trata la resolución de los triángulos rectilíneos por medio del cálculo presentando, al igual que los anteriores autores revisados, las principales líneas trigonométricas a partir de una circunferencia (seno, coseno, tangente y cotangente) y otras cuatro (secante, seno-verso, cosecante y coseno-verso) de las que comenta que *"Como actualmente no se hace uso ninguno de estas cuatro líneas trigonométricas, nosotros prescindiremos de ellas."* [CORTÁZAR, 1859, p. 3]. Seguidamente trata los valores absolutos de las líneas trigonométricas y presenta relaciones para ángulos complementarios y suplementarios.

En el segundo capítulo, *Valores de las líneas trigonométricas de varios arcos particulares*, presenta el valor de las líneas trigonométricas para los ángulos 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 135º, 150º, 180º, 270º y 360º.

En el tercer capítulo, *Relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco*, enuncia y demuestra las principales relaciones como $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2$, $\frac{\tan\alpha}{r} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, $sen\alpha = \frac{r \cdot \tan\alpha}{\pm\sqrt{r^2 + \tan^2\alpha}}$ para cualquier arco con un radio *r* dado y posteriormente para *r*=1, indicando que "*… para restablecer el radio, no hay mas que hacer la fórmula homogénea.*" [CORTÁZAR, 1859, p. 16].

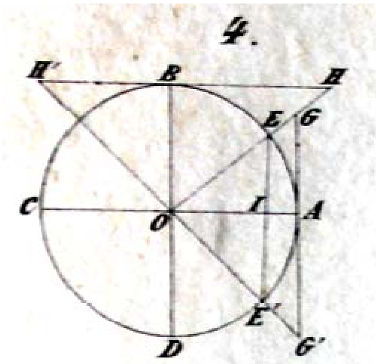
En el capítulo IV, *Espresiones generales de los arcos que corresponden á una misma línea trigonométrica*, presenta las expresiones generales de todos los arcos que tienen igual seno, tangente, coseno y cotangente.

Seguidamente, en el capítulo *Relaciones entre las líneas trigonométricas, de tres arcos a, b y* $a \pm b$, trata las líneas trigonométricas de la adición y substracción de ángulos y de ángulos complementarios. A partir de estas relaciones, deduce algebraicamente las relaciones del ángulo doble y del ángulo mitad, dando de esta última otras relaciones distintas de la habitual, como por ejemplo $sen\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sqrt{1+senA} + \frac{1}{2}\sqrt{1-senA}$. Posteriormente deduce relaciones para transformar una suma o diferencia de líneas trigonométricas en productos y finaliza el apartado transformando en un producto la suma o diferencia de los senos, de los cosenos, de las tangentes y de las cotangentes de los tres ángulos de un triángulo, obteniendo a partir de estas relaciones, otras del tipo $\frac{senA + senB}{senA - senB} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$.

En el capítulo VI, *Construccion de las tablas trigonométricas*, presenta su elaboración "… *pues, es necesario, dada una cualquiera de las lineas trigonométricas, saber hallar con poco trabajo el valor del ángulo correspondiente; y al contrario, dado el ángulo, hallar cualquiera de sus lineas trigonométricas. Esto se consigue por medio de tablas en que al lado de los ángulos que* *crecen de minuto en minuto, ó de 10'' en 10'', ó de 1'' en 1'', etc. estén colocados los valores de las líneas trigonométricas correspondientes.*" [CORTÁZAR, 1859, p. 34].

Comienza demostrando dos teoremas que presentan condiciones del arco con su seno y tangente:

1.° FIG. 4. *Todo arco* AB̆ *positivo y menor que un cuadrante es mayor que su seno* BD *y menor que su tangente* AE.



2.° *El seno de un arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que la diferencia que hay entre el arco y la cuarta parte del cubo del arco* (a).

A partir de estas relaciones, calcula el seno del arco 1' y el coseno del mismo arco.

Seguidamente trata varios métodos para hallar los senos y cosenos de los demás arcos de las tablas, explicando con detalle el método debido a Simpson[16].

En este método se parte de las relaciones:

$$sen(a+1') = sena\cos 1' + \cos a sen 1'$$

$$sen(a-1') = sena\cos 1' - \cos a sen 1'$$

Se suman y despejando se obtiene $sen(a+1') = sen\, a \cdot 2\cos 1' - sen(a-1')$, por lo que "*... conociendo los senos de dos arcos consecutivos a-1' y a, se hallará el del arco siguiente a+1' multiplicando el seno del mediano por la cantidad constante y conocida 2cos1', y restando del producto el seno del menor.*" [CORTÁZAR, 1859, p. 39].

De esta manera, conocidos el seno de cero y del arco 1´ se hallará el de 2´ y sucesivamente hasta calcular el arco de 60º. Para arcos entre 60º y 90º, aplica la relación $sen(60^{o}+a) = sen\, a + sen(60^{o}-a)$, pudiendo obtener los cosenos de todos estos arcos mediante el cálculo del seno del arco complementario.

[16] Thomas Simpson (20 de agosto de 1710, Market Bosworth, Leicestershire, Inglaterra, Reino Unido - 14 de mayo de 1761). La regla fue publicada en 1743 en su obra *Mathematical Dissertation on a Variety of Physical and Analytical Subjects*.

Comenta que autores contemporáneos han abreviando considerablemente los cálculos al sustituir en la relación dada por Simpson $2\cos 1'$ por 2- *k*, donde *k* es el exceso de 2 sobre $2\cos 1'$, al considerar que $\cos 1'$ difiere poco de 1 y consecuentemente el doble difiere poco de 2.

Como consecuencia, se obtiene la relación $sen\left(a+1'\right)=sen\,a\cdot\left(2-k\right)-sen\left(a-1'\right)$, de donde $sen\left(a+1'\right)-sen\,a=sen\,a-sen\left(a-1'\right)-ksen\,a$, y por lo tanto "*… siendo a-1´, a y a+1´ tres arcos consecutivos de las tablas, se hallará la diferencia de los senos del mayor y mediano, restando de la diferencia de los senos del mediano y menor el producto del seno del mediano por la cantidad constante k: conocida dicha diferencia, añadiéndola al seno del mediano, se tendrá el del mayor.*" [CORTÁZAR, 1859, p. 40].

Así, conociendo el seno de 0´ y 1´, se pueden obtener de los demás arcos con un menor coste de operaciones que en el método de Simpson.

Una vez hallados los senos y cosenos de todos los arcos de las tablas hasta 90º, indica que las tangentes se pueden hallar mediante la fórmula $\tan\alpha=\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$ y análogamente las cotangentes. A continuación, explica que "*Las tablas no contienen ordinariamente mas que los logaritmos de las lineas trigonométricas, que son los que se emplean en la practica. Conociendo los senos y cosenos, tangentes y cotangentes de los arcos de las tablas, se hallarán sus logaritmos, y se tendrán unas tablas de logaritmos de lineas trigonométricas.*" [CORTÁZAR, 1859, p. 41], explicando su construcción e indicando que se toma como radio 10^{10}.

En el último capítulo de este apartado, *Disposicion y uso de las tablas trigonométricas*, comienza advirtiendo que las tablas sobre las que se va a trabajar son de Lalande, extendidas a siete decimales por Mr. Marie [ARIAS, 1846]. Explica su disposición y uso, dando ejemplos de cómo "*Dado un arco hallar por medio de las tablas el logaritmo de cualquiera de sus lineas trigonométricas.*" [CORTÁZAR, 1859, p. 43] y seguidamente estudia el caso en el que "*Dado el logaritmo de una linea trigonométrica, hallar por medio de las tablas el arco correspondiente.*" [CORTÁZAR, 1859, p. 44].

En la segunda parte sobre Trigonometría Rectilínea, que denomina *Libro II, Resolución de los triángulos*, considera que el radio en las tablas es 1.

Comienza el primer capítulo, *Teoremas de los triángulos*, enunciando y demostrando mediante semejanza de triángulos las tres relaciones para triángulos rectángulos: $b=a\cos C$, $c=asen\,C$ y $c=b\tan C$.

Seguidamente, presenta el teorema del Seno aplicando el método del *Perpendículo* y como corolario el teorema de la Tangente.
Continúa demostrando el teorema del Coseno a partir de las relaciones de los triángulos rectángulos, siendo el primer autor español de los revisados que lo contempla, y deduce algebraicamente a partir de este teorema el teorema del Seno.

En el segundo capítulo, *Resolucion de los triángulos rectángulos*, estudia los cuatro casos posibles para la resolución de este tipo de triángulos a partir de las relaciones tratadas anteriormente, teniendo en cuenta que si en las tablas el radio es 10^{10} hay que restablecer el radio en las ecuaciones o hacerlas homogéneas. No presenta ejemplos numéricos de resolución.

En el último capítulo del *Libro II*, *Resolucion de los triángulos oblicuángulos o generales*, presenta los cuatro casos con un desarrollo similar al caso de los triángulos rectángulos, siendo destacable que deduce las fórmulas de Briggs y que hace un estudio completo de la especie de uno de los ángulos en el caso en el que se tienen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Finaliza con un ejercicio propuesto, en el que da las seis partes de un triángulo *"… que pueden servir para darse tres, y ver si los resultados que se hallen, son exactos.*" [CORTÁZAR, 1859, p. 67].

Una vez tratada la Trigonometría Rectilínea, pasa a ver la Trigonometría Esférica y seguidamente la Topografía. En esta parte de la obra podemos ver aspectos directamente relacionados con la Trigonometría Rectilínea como el capítulo tercero, *Medicion de distancias inaccesibles*, y el cuarto, *Medicion de alturas inaccesibles*, en los que aplica la resolución de triángulos para resolver las situaciones planteadas.
También encontramos en el octavo capítulo, *Medicion de superficies*, el cálculo del área de un triángulo mediante la fórmula $S = \frac{1}{2} bc sen\ A$ y la fórmula de Herón.

Cortázar concluye la obra con un último apartado, *Complemento de la Trigonometría*, en el que presenta ocho capítulos de variado contenido.
En el primer capítulo, *Fórmula de Moivre*, deduce algebraicamente operaciones básicas (multiplicación, división, potenciación y extracción de raíz) entre expresiones que tengan la forma $\cos a + \sqrt{-1} sen\ a$, obteniendo la Fórmula de Moivre para un arco cualquiera y para un exponente entero, fraccionario o negativo.

El segundo, *Cálculo de las cantidades imaginarias*, presenta algebraicamente el paso de la forma binómica a la forma trigonométrica de un número complejo o cantidad imaginaria junto con ejemplos, y demuestra mediante las líneas trigonométricas varias relaciones de los números complejos.

En el tercer capítulo, *Resolucion trigonométrica de las ecuaciones binomias*, explica cómo calcular algebraicamente la raíz n-ésima de un número complejo en varios casos, junto con un ejemplo ilustrativo.

En el capítulo IV, *Ecuaciones trinomias*, el autor estudia brevemente la resolución algebraica de ecuaciones del tipo $Ax^{2m} + bx^m + C = 0$.

El quinto capítulo, *Valores de sen ma y cos ma en funcion de sen a y cos a, y de cos a, y de tg ma en funcion de tg a*, presenta a partir de la Fórmula de Moivre el desarrollo de estas líneas trigonométricas, junto con varios ejemplos.

En el sexto capítulo, *Limites de las razones del seno al arco y de la tangente al arco*, deduce brevemente que $\lim_{a\to 0}\frac{sen\ a}{a} = 1$ y $\lim_{a\to 0}\frac{\tan a}{a} = 1$.

Seguidamente, en el séptimo capítulo, *Hallar los valores de sen x y cos x en funcion del arco x*, el autor construye a partir de los dos capítulos anteriores el desarrollo en serie del seno y coseno en función de su arco. Ello permite construir tablas de senos y cosenos tal y como indica para el arco 1'.

Para concluir la obra, en el octavo y último capítulo, *Deduccion de las fórmulas de los triángulos rectilineos de las correspondientes de los triángulos esféricos*, indica cómo se obtienen a partir de los desarrollos en serie del seno y del coseno algunas de estas fórmulas, ya que "… *dada una fórmula de un triángulo esférico, se hallará su correspondiente del triángulo rectilineo, introduciendo en la primera la condicion de que el radio de la esfera es* ∞*.*"[CORTÁZAR, 1859, p. 185].

Vemos que en la obra de Cortázar podemos encontrar dos partes claramente diferenciadas al tratar la Trigonometría Rectilínea: por un lado los capítulos de la obra y por otro los apéndices.

A lo largo de los capítulos de la obra, Cortázar sigue una estructura clásica en la que parte de las líneas trigonométricas, da relaciones sobre ellas para poder construir las tablas, explica su manejo y pasa a resolver los triángulos previa demostración de las principales relaciones trigonométricas.

Sin embargo, podemos encontrar algunas innovaciones y características especiales, en parte debido a que la obra estaba destinada a la formación de un diverso y variado alumnado.

En primer lugar, podemos destacar la gran cantidad de relaciones y propiedades presentadas que son deducidas mediante un tratamiento algebraico, a diferencia de los anteriores autores españoles que lo hacen utilizando herramientas geométricas. En este sentido realiza un desarrollo similar al realizado por La Caille.

Algunas de estas relaciones son inéditas entre las obras estudiadas, pudiendo destacar las siguientes:

La transformación en un producto de la suma o diferencia de los senos de los tres ángulos de un triángulo:

$$sen\ A + sen\ B + sen\ C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$sen\ A + sen\ B - sen\ C = 4sen\frac{A}{2}sen\frac{B}{2}sen\frac{C}{2}$$ [CORTÁZAR, 1859, p. 30].

$$sen\ A - sen\ B - sen\ C = -4\cos\frac{A}{2}sen\frac{B}{2}sen\frac{C}{2}$$

La transformación en un producto de la suma de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo:

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ [CORTÁZAR, 1859, p. 31].

La transformación en un producto de la suma o diferencia de los cosenos de tres arcos a, b y c, cuya suma sea un cuadrante:

$$\cos a + \cos b + \cos c = 4\cos\left(45^o - \frac{a}{2}\right)\cos\left(45^o - \frac{b}{2}\right)\cos\left(45^o - \frac{c}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b - \cos c = 4\sin\left(45^o - \frac{a}{2}\right)\cos\left(45^o - \frac{b}{2}\right)\cos\left(45^o - \frac{c}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b - \cos c = -4\cos\left(45^o - \frac{a}{2}\right)\cos\left(45^o - \frac{b}{2}\right)\cos\left(45^o - \frac{c}{2}\right)$$

[CORTÁZAR, 1859, p. 31].

La transformación en un producto de la suma de las cotangentes de tres arcos a, b y c, cuya suma es un cuadrante:

$\cot a + \cot b + \cot c = \cot a \cdot \cot b \cdot \cot c$ [CORTÁZAR, 1859, p. 32].

La relación $msen\ a + n\cos a = \frac{m}{\cos\varphi} sen\ (a + \varphi)$ [CORTÁZAR, 1859, p. 33].

También es reseñable el paso de un radio cualquiera a un radio unidad en muchas de las relaciones obtenidas y el estudio pormenorizado de las propiedades para todos los tipos de ángulos.

En cuanto a la construcción de las tablas trigonométricas, sigue un desarrollo clásico, con radio 10^{10}, utilizando varios métodos, como el de Simpson, para facilitar su elaboración.
Respecto a la resolución de triángulos, considera que el radio de las tablas es 1 y demuestra las principales relaciones de forma similar a las anteriores obras, con las excepciones del teorema del Coseno y las fórmulas de Briggs, que son tratadas por primera vez en las obras españolas revisadas. En relación a la resolución propiamente, trata todos los casos y los resuelve teóricamente, no ofreciendo ejemplos numéricos ilustrativos.
El tratamiento de la Topografía en la obra es consecuente con el amplio público al que iba destinada, realizando un extenso estudio en el que se encuentra el cálculo del área de un triángulo.
Vemos que Cortázar realiza un estudio más teórico que sus antecesores, por lo que los logaritmos pasan a un segundo plano como simples herramientas prácticas.

Por otra parte, Cortázar sigue una línea mucho más moderna en el *Complemento de la Trigonometría*, pues por primera vez en las obras españolas revisadas se ve el tratamiento de los números complejos, la Fórmula de Moivre, la resolución trigonométrica de ecuaciones, los valores de las líneas trigonométricas de un arco múltiplo de otro del que se conocen sus valores, y los límites de las razones del seno al arco y de la tangente al arco. Todos estos contenidos son tratados algebraicamente con el objetivo de obtener los desarrollos en serie del seno y coseno en función de su arco, y poder construir mejor las tablas trigonométricas.

Podemos concluir que Cortázar sigue un planteamiento similar al desarrollado por La Caille, realizando a lo largo de la obra una transición desde un tratamiento geométrico a otro algebraico para el estudio de la Trigonometría Rectilínea.

I.8.3.3. Tratado elemental de trigonometría: para uso de los aspirantes al colegio Naval Militar, por Montojo

La siguiente obra es *Tratado elemental de trigonometría: para uso de los aspirantes al Colegio Naval Militar*, de Saturnino Montojo. La única edición, póstuma, data de 1865 y fue obra de texto en el Colegio Naval Militar [MONTOJO, 1865]. El libro consta de doscientas ochenta páginas, constituyendo la parte de Trigonometría Rectilínea ciento setenta y cuatro páginas y doce figuras. Cabe destacar que es el primero de los libros revisados sobre Trigonometría que tiene insertadas las figuras a lo largo de la obra, lo que nos indica que el autor elaboró el libro tanto para ser explicado en clase[17] como para el autoestudio de los alumnos.

El *Prólogo* parece estar realizado por oficiales de Marina discípulos del autor, posiblemente profesores en el Colegio Naval Militar. Comienzan indicando que el tratado fue escrito por Real orden para formar parte del curso de Matemáticas del Colegio Naval Militar, al igual que sus tratados de Aritmética y Álgebra. La obra estaba concluida y lista para prensa antes de la muerte del autor en 1856, pero causas ajenas a su voluntad impidieron su publicación, siendo el principal motivo de su publicación el deseo de su familia de que no se desconociera el trabajo. Tal y como se indica, "*No podemos mencionar en este como lo hace el autor en sus prólogos las obras que ha tenido á la vista para la redaccion de esta de Trigonometria, y así nos limitaremos tan solo á llamar la atencion de los lectores sobre algunos puntos y teorias tratados en el presente libro con mas estension y claridad que se encuentran hoy en ninguno de nuestros autores de matematicas.*" [MONTOJO, 1865, p. 1ª del Prólogo].

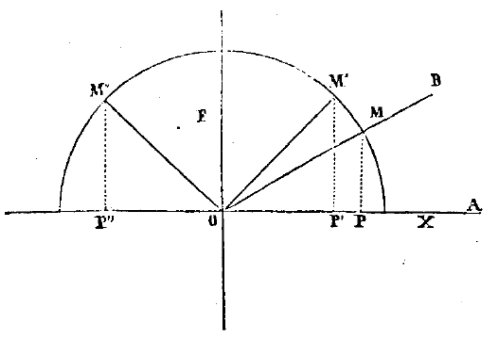
Seguidamente se destaca que en los dos primeros capítulos se trata la aplicación del Álgebra a la Geometría y en el cuarto se trata la formación de tablas, uso de la interpolación y la aplicación de logaritmos. También se explica que al tratar la resolución de triángulos se utilizan algunas transformaciones propias y que en las aplicaciones se ha prescindido de los problemas de Geodesia, dado que "*… como el autor manifiesta en el mismo texto, en el estado actual de la ciencia se deben estudiar estas en tratados especiales que requieren mas conocimientos que los que exije el presente.*" [MONTOJO, 1865, p. 2ª del Prólogo].

---

[17] A partir de la revolución francesa, la mayoría de libros de texto disponían todas las figuras agrupadas al final de la obra. El motivo era facilitar que un alumno las copiara en la pizarra del aula antes de comenzar la clase y facilitar la explicación del profesor sobre esa pizarra. Tal y como indican Velamazán y Ausejo, *"El método llamado de pizarras consistía en colocar en ella, antes de la hora de clase, los cálculos, figuras o resúmenes necesarios para la explicación del tema; así, la pizarra se convertía en un cuadro sinóptico, organizado y ordenado que contenía todas las ecuaciones, fórmulas, cálculos y figuras necesarias para comprender los diversos aparatos, máquinas y construcciones."* VELAMAZÁN Y AUSEJO [1989, p. 421].

Montojo trata la Trigonometría Rectilínea a lo largo de cinco capítulos de su obra. En el primer capítulo, *Nociones preliminares*, expone cómo se puede aplicar la generalidad y los recursos del Álgebra a la Geometría, presentando varios problemas a modo de ejemplo, entre ellos la Fórmula de Herón para el cálculo de la superficie de un triángulo. Concluye el apartado con la explicación detallada "*… del modo de fijar la situación de un punto ó de una recta por medio de ciertas líneas cuyo valor y dirección sean conocidas.*" [MONTOJO, 1865, p. 14], siendo el primer autor de los estudiados que utiliza el sistema de referencia cartesiano y utiliza las herramientas de la Geometría Analítica en su obra. Concluye este apartado indicando que "*Supuestas las definiciones y convenios precedentes, vamos a entrar ya en el objeto esencial de este tratado.*" [MONTOJO, 1865, p. 17].

El segundo capítulo, *Trigonometría*, comienza con su definición "*… aunque tomada de su primitiva aplicacion que se reducia á la medicion de triangulos.*" [MONTOJO, 1865, p. 18].
Continúa explicando el concepto de magnitud angular y su medida, tanto en grados sexagesimales como en radianes, e indicando el paso de una a otra medida, volviendo a ser el primer autor de los estudiados que trabaja estos conceptos.
Seguidamente se tiene una gran novedad de concepto con respecto a obras anteriores, al presentar las principales funciones trigonométricas, que considera "*… relaciones de líneas que en los cálculos han de representar las magnitudes angulares.*" [MONTOJO, 1865, p. 22].
Partiendo de un ángulo cualquiera $AOB = \theta$, toma un radio r=OM y un eje de abcisas xx, y a partir de la figura presenta las seis funciones principales trigonométricas.



En el caso de seno de θ, lo obtiene a partir de la relación $\frac{\text{PM}}{\text{OM}} = \frac{y}{r} = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}}$, denominándolo $\sin\theta$, pues "*Para uniformidad con los escritores de matemáticas de los diversos idiomas* *europeos escribo sin, de la raíz latina, como abreviatura de seno.*" [MONTOJO, 1865, p. 39, Nota].

Conviene destacar que en las anteriores obras revisadas, ningún autor considera las expresiones trigonométricas como funciones.

Estas funciones son seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, junto con seno-verso, coseno-verso, subverso y subcoverso. A partir de las seis relaciones o funciones principales, se desprenden otras de forma algebraica como $\cos\sigma \cdot \sec\sigma = 1$ o $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, indicando que *"… combinando estas fórmulas con las anteriores se puede espresar una cualquiera de las seis funciones por medio de otra cualquiera de las otras cinco"* [MONTOJO, 1865, p. 25], presentando una tabla con estas relaciones.

Posteriormente muestra los valores de las funciones trigonométricas para los principales ángulos, realizando una tabla resumen. Continúa revisando el signo de las funciones según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo y muestra, mediante una tabla, la reducción al primer cuadrante de las funciones seno, coseno y tangente a través de las relaciones de las coordenadas, recalcando *"… que todas las funciones trigonométricas son esencialmente periódicas, y que 2π es en todo caso la extensión angular de uno ó de mas periódos*." [MONTOJO, 1865, p. 35].

Seguidamente indica los límites de las razones del seno al arco, $\frac{sen\,\sigma}{\sigma}$, y de la tangente al arco, $\frac{\text{tang}\,\sigma}{\sigma}$, a partir de un polígono de *n* lados, indicando que con estas relaciones se pueden facilitar algunas demostraciones.

Posteriormente presenta las líneas trigonométricas, en "*… el modo que hasta hace poco se hallaba adoptado casi universalmente para definirlas*." [MONTOJO, 1865, p. 39], a partir de una circunferencia de radio *r*, indicando que *"…Todas estas definiciones ó funciones lineales se convierten en las dadas anteriormente, que son numéricas, con solo dividir las primeras por el radio.*" [MONTOJO, 1865, p. 40]. Es destacable que Montojo utiliza la expresión "*función lineal*" para referirse a las líneas trigonométricas clásicas, no teniendo relación alguna con el concepto actual de función lineal.

Concluye indicando que los dos sistemas concurren en uno cuando suponemos *r* = 1, aunque "*Queda, sin embargo, en todo caso una distincion esencial entre los dos sistemas: en el uno la funcion es siempre una línea, y en el otro un numero abstracto: en aquel se depende de una unidad convenida lineal, y en este hay completa independencia de toda medida lineal."* [MONTOJO, 1865, p. 41].

En el tercer capítulo, *Fórmulas trigonométricas que abrazan dos ó más ángulos*, Montojo comienza deduciendo el seno y coseno de la suma y diferencia de dos arcos a partir de las relaciones de dos ángulos en el sistema de referencia cartesiano, indicando que a partir de estas relaciones se pueden deducir algebraicamente otras, como las del ángulo doble, ángulo mitad, o del tipo $\frac{sen\ A + sen\ B}{sen\ A - sen\ B} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$, concluyendo que "*Otras muchas transformaciones ó equivalencias, pudieramos hallar, variando convenientemente los métodos de combinación de las ya encontradas: mas con las que preceden hay bastante para que se forme idea de la fecundidad del análisis trigonométrico, y sobre todo para las aplicaciones que habrémos de hacer de él.*" [MONTOJO, 1865, pp. 53-54].

A continuación, pasa a ver fórmulas que comprenden más de dos ángulos por medio del desarrollo sucesivo a partir de las fórmulas del seno y coseno de la suma y resta de dos ángulos. Por ejemplo, en el caso del coseno de la suma de tres ángulos se basa en la suma del primero más la de los otros dos [MONTOJO, 1865, p. 54]:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi + \overline{\theta + \psi}) &= \cos\varphi \cos(\theta + \psi) - \sin\varphi \sin(\theta + \psi) \\ &= \left.\begin{aligned} &\cos\varphi \cos\theta \cos\psi - \cos\varphi \sin\theta \sin\psi \\ &\qquad - \cos\theta \sin\varphi \sin\psi \\ &\qquad - \cos\psi \sin\varphi \sin\varphi; \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (1)\end{aligned}$$

A partir de los desarrollos de la suma de cuatro o más ángulos, el autor indica que se observa la siguiente ley: "*si se designa por* S_0 *el producto de todos los cosenos, por* S_1 *la suma de todos los productos en que solo entra un seno por factor, por* S_2 *la suma de todos los productos en que solo entran dos senos, y así sucesivamente, se tendrá por coseno y seno de la suma* Σ *de un número cualquiera de ángulos*

$$\left.\begin{aligned} \cos\ \Sigma &= S_0 - S_2 + S_4 - \text{etc.} \\ \sin\ \Sigma &= S_1 - S_3 + S_5 - \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \quad (3)$$

"

[MONTOJO, 1865, pp. 54-55].

En el caso de tener un número *n* de ángulos, indica que el término S_m consta del número de combinaciones que pueden hacerse con *n* senos tomados *m* a *m*, que denota como (*n C m*), en cada una de las cuales entrará el producto de los restantes *n-m* cosenos, dando el mismo número de combinaciones al ser (*n C n-m*) = (*n C m*).

Para el caso de ser todos los ángulos iguales, se tendrá $\Sigma = n\theta$ y denotando $\cos\theta$ por c y $\sin\theta$ por s se obtiene $S_m = (n\,C\,m)c^m s^{n-m}$ y consecuentemente:

$$\left.\begin{array}{l}\cos n\theta = c^n - (n\,C2)c^{n-2}s^2 + (n\,C4)c^{n-4}s^4 - \text{etc.}\\ \sin n\theta = (n\,C1)c^{n-1}s - (n\,C3)c^{n-3}s^3 + (n\,C5)c^{n-5}s^5 - \text{etc.}\end{array}\right\} \quad (4)$$

Indica que estas fórmulas se pueden hallar fácilmente por medio del binomio de Newton

$$(c+s)^n = c^n + (n\,C1)c^{n-1}s + (n\,C2)c^{n-2}s^2 + (n\,C3)c^{n-3}s^3 + \text{etc}$$

al separar los términos impares de los pares y cambiar alternativamente los signos en cada separación.

Análogamente, indica cómo calcular la tangente de un número cualquiera de ángulos.

Seguidamente deduce de los anteriores desarrollos las Series trigonométricas y su convergencia, indicando el desarrollo del seno, coseno y tangente en función del ángulo.

Posteriormente compara los desarrollos en serie del seno y del coseno con identidades algebraicas presentadas en su *Tratado elemental de Álgebra*, obteniendo $\cos\theta = \dfrac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2}$, $sen\,\theta = \dfrac{e^{\theta\sqrt{-1}} - e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2}$ y consecuentemente la fórmula de Moivre $\left(\cos\theta \pm \sqrt{-1}sen\,\theta\right)^n = \cos n\theta \pm \sqrt{-1}sen\,n\theta$ para n natural, aunque posteriormente los demuestra para un exponente real cualquiera.

De esta forma, Montojo deduce la fórmula de Moivre de forma diferente a cómo lo hace Cortázar, pues éste la presenta en primer lugar para los exponentes 2 y 3 y generaliza sin demostración para cualquier exponente, sea entero, fraccionario o negativo.

Es destacable el gran número de aplicaciones que Montojo indica a partir de la fórmula de Moivre y explica algunas de sus aplicaciones más usuales, como el cálculo de las raíces de la unidad, la expresión del ángulo en función de la tangente y la aproximación en el cálculo aproximado del valor de π con hasta 250 decimales.

Al comienzo del cuarto capítulo, *Logaritmos de las funciones trigonometricas*, el autor indica que "*Para sacar partido de las funciones trigonométricas y de las diversas transformaciones comprendidas en el capitulo anterior, cuando se trata de su aplicación al calculo numérico, es indispensable tener á la mano una tabla de valores de aquellas funciones, dispuesta de modo que siempre que se nos ofrezca el coseno, seno, etc. de un angulo cualquiera, podamos hallar inmediatamente el número que la representa para introducirlo en el calculo; y vice versa, por medio del valor del coseno, seno, etc. que del calculo resulte hallar el ángulo correspondiente. Y si en lugar del numero mismo la tabla nos diese desde luego los logaritmos vulgares de tales* *funciones, es clara que se tendria así bajo la forma mas conveniente para todo objeto práctico.*" [MONTOJO, 1865, p. 80]. Explica conceptos como argumento, intervalo, función o diferencia y cómo se puede formar una tabla de valores de las funciones trigonométricas con un intervalo suficientemente pequeño para que a simple inspección, o con un cálculo muy pequeño, se encuentre en la tabla la función correspondiente a un ángulo cualquiera. Indica que es ventajoso utilizar el sistema sexagesimal y comienza calculando el seno y coseno de 10'' mediante el desarrollo en serie de los mismos, limitándose a diez cifras decimales. Posteriormente calcula los de 20'', 30''… pudiendo llegar hasta 30º y de allí hasta los de 45º, que se pueden obtener por simple resta.

A continuación, pasa a describir y explicar el funcionamiento de las tablas de logaritmos de funciones trigonométricas de la colección de Callet [1863][18], donde presenta los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes.

Seguidamente trata la primera aplicación, en la que dado el ángulo hay que hallar la función trigonométrica que le corresponde; indica que en el caso de que el dato que sirve de argumento se halle comprendido entre dos argumentos consecutivos de la tabla hay que recurrir a la interpolación, aspecto no tratado en profundidad en las anteriores obras revisadas, pasando a explicar detenidamente el fundamento general de la interpolación de primer orden, basado en que si *F(x)* representa una función de *x*, y *h* un aumento en *x* de cierto grado de pequeñez, se tiene siempre con suficiente aproximación $F(x+h)=F(x)+hF'(x)$, representado por $F'(x)$ otra función de *x* dependiente de la primera en cuanto a forma y carácter, pero independiente de *h*. De esta forma, suponiendo que ω es el intervalo de la tabla y φ un ángulo cualquiera, se puede deducir con suficiente aproximación:

$$\sin(\varphi+\omega)=\sin\varphi+\omega\cos\varphi,\quad \cos(\varphi+\omega)=\cos\varphi-\omega\sin\varphi,$$

$$\tan(\varphi+\omega)=\tan\varphi+\frac{\omega}{\cos^2\varphi},\quad \cot(\varphi+\omega)=\cot\varphi-\frac{\omega}{\sin^2\varphi}:$$

A partir de estas expresiones, deduce otras relaciones y presenta varios ejemplos numéricos de aplicación.

A continuación indica la segunda aplicación, hallar el ángulo cuando se da el valor de una función trigonométrica o su logaritmo, para lo que se debe resolver la ecuación $\log F(\theta)=\alpha$ respecto de la variable θ, representando por *F* una cualquiera de las funciones trigonométricas de las tablas; seguidamente presenta varios ejemplos de aplicación.

[18] Se ha tomado esta edición por ser la anterior más cercana a la obra de Montojo.

Continúa mostrando algunas ventajas que las funciones trigonométricas proporcionan para la aplicación del cálculo logarítmico de varias expresiones. Para ello presenta el uso de ángulos auxiliares, que mediante una transformación adaptan la expresión con la que se desea trabajar al cálculo logarítmico.

Entre otros ejemplos, trata uno en el que hay que hallar el valor de x en la ecuación $x = a \pm b$, siendo a y b expresiones más o menos complicadas en que conviene hacer uso de los logaritmos.

Realiza el cambio $\tan\varphi = \frac{b}{a}$, resultando que $x = a\frac{\cos(45^{\circ} \mp \varphi)\sqrt{2}}{\cos\varphi} = b\frac{\cos(45^{\circ} \mp \varphi)\sqrt{2}}{sen\,\varphi}$, pudiendo calcular el ángulo φ por medio de las tablas que dan en la ecuación $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.

Otras situaciones en las que se puede aplicar ángulos auxiliares es en conjuntos de sumandos $a \pm b \pm c \pm ...$ o en expresiones como $x = \frac{a-b}{a+b}$.

También indica que la introducción de los ángulos auxiliares es de especial utilidad para el cálculo de radicales, como por ejemplo para el cálculo de las raíces de la ecuación general de segundo grado.

Pasa a calcular el valor de x en la ecuación $x = asen\,\varphi \pm b\cos\varphi$ realizando el cambio $a = r\cos\theta, b = rsen\,\theta$ y utilizando coordenadas polares, aunque sin denominar de esta forma el cambio.

Finaliza explicando el modo de presentar las expresiones, sin que aparezca en ellas explícitamente el ángulo auxiliar por medio de las funciones inversas. Explica que cuando se introduce un ángulo auxiliar φ determinado, por ejemplo por la condición $\tan\varphi = \alpha$, se pueden deducir por las tablas de logaritmos de las funciones trigonométricas que $\varphi = ángulo(\tan\alpha)$, aunque "*Los autores ingleses han adoptado un sistema mas cómodo, que conviene dar a conocer, en virtud del cual escriben la ecuacion (2)* $\varphi = \text{ángulo}(\tan\alpha)$ *en la forma* $\varphi = tan^{-1}\alpha$" [MONTOJO, 1865, p. 119].

Pasa a explicar qué se entiende por función inversa $\phi^{-1}(x)$ de una dada $\phi(x)$, siendo el primer autor de los estudiados que lo contempla. Parte de que $\phi(x)$ se entiende como la expresión que resulta de someter la variable x, sola o acompañada de constantes, a una serie de operaciones definida por la característica ϕ, suponiendo que si sobre la expresión designada por $\phi(x)$ se ha de repetir la misma serie de operaciones se denota por $\phi(\phi(x))$, siguiendo por analogía que $\phi^{-1}(x)$ representa una cantidad tal que sometida a la operación de ϕ da por resultado x, y por lo tanto $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$.

Seguidamente deduce varios teoremas trigonométricos que quedan demostrados mediante las funciones inversas; entre ellos deduce que partiendo de la relación $2sen\,\theta\cos\theta = sen\,2\theta$ y el cambio $\theta = sen^{-1}x$ se obtiene $sen\left(2sen^{-1}x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$, aunque advierte que "*Conviene no perder nunca de vista, en la interpretacion de las ecuaciones, la modificacion que en ellas introduce la multiplicidad de valores de las funciones inversas, la cual da lugar a que si bien* $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$*, ya no se obtenga solo x por valor de* $\phi^{-1}(\phi(x))$."[MONTOJO, 1865, p. 121].

Concluye indicando que se pueden realizar muchas otras transformaciones siguiendo estos principios que facilitan los cálculos, presentando varias de ellas.

En el último capítulo, *Trigonometría rectilínea*, trata la resolución de triángulos, es decir, "*… el modo de resolver los problemas que tienen por objeto la determinacion de algunas de las partes constitutivas de un triángulo por medio de otras que se suponen conocidas.*" [MONTOJO, 1865, p. 129]. Para ello, partiendo de la propiedad de que la suma de los tres ángulos de un triángulo suma 180º y tras demostrar el teorema del Seno, basándose en la definición de la función seno, demuestra algebraicamente el teorema del Coseno.

Seguidamente estudia la resolución de triángulos rectángulos, comenzando con las simplificaciones del teorema del Seno y del Coseno con un ángulo recto; a continuación presenta en una tabla resumen el estudio de los cuatro casos, incluyendo el cálculo de la área del triángulo, concluyendo con un ejercicio para practicar y el estudio de varios casos particulares.

Posteriormente trata la resolución de triángulos oblicuángulos, estudiando algebraicamente cinco casos, aunque dos de ellos se incluyen en el caso de tener un lado y dos ángulos. Cabe destacar que en dos de los casos presenta varias formas de resolverlos y que deduce las fórmulas de Briggs.

También trata problemas en los que los datos no son únicamente ángulos o lados del triángulo, e indica que estos tipos de problemas son muy numerosos, estudiando únicamente cinco, como por ejemplo resolver un triángulo conocido su área y sus tres ángulos.

Con el fin de poder ejercitar todos los casos, ofrece una tabla de las partes constitutivas de un triángulo para resolver los diferentes casos propuestos, y da un ejemplo para el caso en el que se dan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Concluye presentando varias aplicaciones de la Trigonometría mediante problemas. Entre estos, destacamos el hallar la distancia de un punto a otro inaccesible o hallar la distancia que separa dos puntos inaccesibles, junto con algunas aplicaciones a la Geometría "*… como muestra de la facilidad con que por medio de el se pueden demostrar muchos teoremas.*" [MONTOJO, 1865, p. 170].

La obra de Montojo supone, respecto a las anteriores obras, un nuevo enfoque sobre la Trigonometría Rectilínea, tanto en los conceptos básicos como en su desarrollo.
Por una parte no utiliza las líneas trigonométricas, apoyándose en el sistema de referencia cartesiano para presentar las funciones trigonométricas, con toda la potencialidad de las mismas. Desde este momento puede aplicar la generalidad y los recursos del Álgebra a la Geometría, lo que permitirá un estudio más riguroso y profundo.

Este nuevo enfoque se puede observar a lo largo de toda la obra, comenzando con la explicación de conceptos como magnitud angular y su medida, tanto en grados sexagesimales como radianes, apareciendo estos por primera vez en las obras estudiadas.

Al presentar las funciones trigonométricas puede hacer uso de su periodicidad y propiedades, lo que le permite realizar demostraciones algebraicas de las principales relaciones. Es destacable que Montojo explica la relación entre las funciones trigonométricas y las líneas trigonométricas, indicando las ventajas de las primeras respecto a las segundas.

Este planteamiento analítico, totalmente novedoso entre las obras estudiadas, le permite deducir los desarrollos en serie del seno, coseno y tangente, junto con la fórmula de Moivre y todas sus aplicaciones.

Respecto a la elaboración de las tablas trigonométricas, utiliza los desarrollos en serie, y en cuanto a su uso, explica con detenimiento un método de interpolación y el manejo de las funciones inversas, siendo ambos conceptos novedosos.

La resolución de triángulos sigue una estructura similar a la de los otros autores, aunque basándose siempre en relaciones algebraicas para su estudio y presentando tablas resumen para facilitar su uso a los estudiantes.

I.8.3.4. Ejercicios de Trigonometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, por Terry y Rivas

La obra *Ejercicios de Trigonometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* es de Antonio Terry y Rivas. La obra fue utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante.

La primera edición, parece ser que única, data de 1881 y en ella se presentan ejemplos y ejercicios sobre Trigonometría [TERRY Y RIVAS, 1881b]. La parte de Trigonometría Rectilínea consta de doscientas veinte páginas y noventa y seis figuras insertadas a lo largo de la obra.

En la *Introducción* de la obra, el autor únicamente explica en detalle el uso de las líneas trigonométricas auxiliares y sus propiedades, pues "*Como la mayor parte de los textos de Trigonometría no traen con toda su extensión las líneas trigonométricas auxiliares introducidas por el inmortal Mendoza*[19] [MENDOZA Y RÍOS, 1800] *en sus excelentes Tablas de Navegación, siempre de uso constante entre los oficiales de la Armada, creemos necesario, no tan solo darlas á conocer, sino también manifestar sus propiedades.*" [TERRY Y RIVAS, 1881b, p. 1].

En primer lugar presenta las líneas trigonométricas auxiliares de un arco o ángulo, donde Verso es la mitad del seno-verso del mismo, Coverso es el verso de su complemento, Subverso es el verso del suplemento a 180º, y Subcoverso es el verso del complemento a 270º.

Seguidamente estudia geométricamente el signo de las mismas y las líneas trigonométricas auxiliares de un arco negativo en función de las del mismo arco tomado positivamente. Concluye la introducción tratando las líneas trigonométricas auxiliares de dos arcos complementarios, de dos arcos suplementarios y las relaciones entre las líneas trigonométricas auxiliares de un mismo arco. Como indica el autor, las líneas trigonométricas auxiliares eran de uso constante entre los oficiales de la Armada y por ello tiene especial interés en recalcar sus propiedades, aunque en las demás obras estudiadas no son por lo general tratadas pues se deducen de las principales líneas trigonométricas.

Terry y Rivas presenta en su obra seis capítulos sobre la Trigonometría Rectilínea.

---

[19] Josef de Mendoza y Ríos (Sevilla, 1763-Brighton, 1816). Marino y astrónomo español que destacó por sus obras en el campo de la Navegación y la Astronomía Náutica. Como astrónomo, ideó un método para determinar la longitud a partir de la observación de las distancias lunares.

El primer capítulo tiene tres apartados. En el primero, *Valores numéricos de las funciones circulares ó líneas trigonométricas correspondientes á ciertos arcos*, partiendo de las definiciones geométricas clásicas de las líneas trigonométricas utiliza relaciones básicas y reducciones al primer cuadrante para resolver ejercicios y presentar una tabla con los valores de las líneas trigonométricas de los principales arcos. En bastantes ejercicios denomina x a la línea trigonométrica y resuelve algebraicamente el ejercicio.

En el segundo apartado, *Identidades entre las líneas trigonométricas de un mismo arco*, utiliza las principales identidades para demostrar algebraicamente otras identidades menos usuales.

El tercer apartado, *Resolución de algunas ecuaciones trigonométricas*, recoge ejercicios sobre ecuaciones trigonométricas que basan su resolución en lo visto en los dos apartados anteriores.

El segundo capítulo también tiene tres apartados. En el primero, *Aplicaciones de la suma, resta, multiplicación y división de los arcos para determinar los valores numéricos de ciertas líneas trigonométricas*, presenta ejercicios en los que utiliza estas propiedades para su resolución.

En el segundo apartado, *Identidades entre las líneas trigonométricas de arcos cualesquiera*, utiliza las identidades del apartado anterior para demostrar otras identidades menos usuales.

El tercer apartado, *Resolución de ecuaciones trigonométricas*, recoge ejercicios sobre ecuaciones trigonométricas que se resuelven ayudándose de lo visto en los apartados anteriores.

El tercer capítulo tiene cuatro apartados. En el primero, *Identidades entre las líneas trigonométricas de arcos que satisfacen á ciertas condiciones*, presenta ejercicios en los que hay que utilizar relaciones de los capítulos anteriores.

En el segundo apartado, *Eliminación de uno ó mas arcos entre varias ecuaciones*, trata ejercicios en los que es necesario eliminar arcos de las ecuaciones planteadas.

En el tercer apartado, *Funciones circulares inversas*, presenta y explica este tipo de funciones, que posteriormente utiliza para deducir relaciones entre ellas y las funciones circulares, por lo que pasa de considerar las expresiones trigonométricas como líneas trigonométricas, a considerarlas como funciones, reforzando el tratamiento algebraico de los ejercicios.

En el cuarto apartado, *Resolución de algunas ecuaciones*, presenta ejercicios sobre ecuaciones trigonométricas que se apoyan para su resolución en las funciones circulares inversas.

El cuarto capítulo tiene dos apartados. En el primero, *Transformación de expresiones para el cálculo logarítmico y resolución de las ecuaciones de segundo grado por medio de las tablas trigonométricas*, comienza explicando en profundidad cómo determinar por medio de logaritmos

el valor de x en la ecuación $x = a \pm b$ y seguidamente trata numerosos ejercicios, en los que resuelve ecuaciones de segundo grado por medio de las tablas trigonométricas.
En el segundo apartado, *Uso de las tablas trigonométricas*, trata ejercicios con ecuaciones en los que utiliza las tablas trigonométricas para su resolución.

El quinto capítulo tiene dos apartados. En el primero, *Resolución de triángulos en general*, comienza presentando una tabla con las fórmulas necesarias para la resolución de triángulos rectilíneos rectángulos según los cuatro casos, y también facilita la fórmula para el cálculo del área en cada caso. Seguidamente, muestra un ejemplo de resolución de cada caso aplicando las fórmulas y presenta ejercicios para practicar.
Posteriormente sigue la misma estructura al tratar los triángulos oblicuángulos.
En el segundo apartado, *Resolución de los triángulos en que los datos no son todos lados ó ángulos*, presenta ejercicios que no corresponden directamente a alguno de los casos, tanto para triángulos rectángulos como oblicuángulos.

El sexto capítulo tiene dos apartados. En el primero, *Problemas diversos*, presenta una variedad de problemas geométricos en los que utiliza relaciones trigonométricas para resolverlos.
En el segundo apartado, *Aplicaciones numéricas*, trata problemas geométricos en los que hay que calcular un valor o valores determinados utilizando herramientas trigonométricas.

En el séptimo y último capítulo sobre Trigonometría Rectilínea, *Aplicaciones de la TRIGONOMETRÍA á diferentes cuestiones que se presentan para el levantamiento de planos*, el autor advierte que "*En la imposibilidad de indicar, ni aun con rapidez, la variedad de las aplicaciones que pueden hacerse de la Trigonometría para el levantamiento de planos, nos limitaremos á presentar unos cuantos problemas de los que con más frecuencia se ofrecen en la práctica.*" [TERRY Y RIVAS, 1881b, p. 202].
Es por ello que presenta una variedad de problemas en los que hay que calcular principalmente alturas o distancias inaccesibles.

Dado que la obra de Terry y Rivas está destinada a la práctica y resolución de problemas relacionados con la Trigonometría para el ingreso en el Cuerpo General de la Armada, el texto recoge una gran variedad y diversidad de ejercicios.

Lo más destacable para nuestro estudio es que se parte de las clásicas líneas trigonométricas, cuando ya parecen superadas en la obra de Montojo a través de las funciones trigonométricas. Sin embargo no condiciona en exceso el estilo de la obra, pues la mayoría de los ejemplos y ejercicios tratados tienen como principal herramienta el Álgebra.

Dentro de la variedad de ejercicios, destacan por su novedad respecto a las obras anteriores la utilización de las funciones inversas y la resolución de diferentes tipos de ecuaciones trigonométricas.

También es reseñable la amplia utilización de ejemplos para que el alumno adquiera las destrezas necesarias en la resolución de los triángulos rectilíneos.

I.8.3.5. **Trigonometría, por Ortega y Sala**

La siguiente obra en orden cronológico con respecto a la primera edición, *Trigonometría*, está escrita por Miguel Ortega y Sala. La obra fue libro de texto en la Academia del Cuerpo de Ingenieros, siendo incluida en el estudio por haber escrito el autor otra obra sobre Geometría utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. La primera edición es de 1881, que es la que revisamos [ORTEGA Y SALA, 1881], teniendo constancia de una segunda edición en 1902. En la edición revisada, el libro tiene ciento ochenta y cuatro páginas y treinta y tres figuras. La parte sobre Trigonometría Rectilínea son ciento veintiún páginas y veintitrés figuras.

Comienza la obra con un apartado previo, *Advertencia*, en el que indica que la obra está destinada como libro de texto en la Academia de Ingenieros al estar agotado el anterior libro. Muestra el carácter práctico que quiere imprimir a la obra cuando anuncia que "*Despojada, pues, en gran parte, del carácter de ciencia especulativa y de investigacion, queda, sin embargo, para la trigonometría la verdadera importancia de su principal objeto, cual es la resolucion de triángulos, poderoso auxiliar de la topografía, geodesia, astronomia. etc., y bajo tal concepto me propongo desarrollar sus teorías, prescindiendo de las que no conduzcan á este fin, pero dando en cambio la debida amplitud á las que llenen tal requisito.*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. XI].

Además, señala que también atenderá la parte práctica del manejo de tablas y uso de las fórmulas para la resolución de los triángulos. Todo ello reduciendo "*… este libro á las más cortas*

dimensiones, sin perjudicar la enseñanza" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. XII], por lo que realizará en cada cuestión un estudio particular para simplificarla y abreviarla, indicando que "… *para ello he tenido que separarme algunas veces de la marcha seguida en la generalidad de las trigonometrías, buscando caminos expeditos para el término que me proponía*." [ORTEGA Y SALA, 1881, p. XII]. También indica que ha insertado los ejemplos indispensables a lo largo del texto, en notas o en los apéndices finales del libro.
Concluye la *Advertencia* con la esperanza de que el libro sea útil en la enseñanza, y con el convencimiento de *"… haber conseguido una ventaja, cual es comprender en un número de lecciones bastante menor las mismas teorías que encierran las que hoy se dan en las clase á que dedico este libro*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. XIV].

Inicia la *Introducción* estableciendo las diferencias entre el Álgebra y la Geometría, indicando que "*Ambos procedimientos tienen ventajas é inconvenientes. El del álgebra, ó analitico, admite mayor generalidad y proporciona resultados más aproximados, cuando no pueden obtenerse exactos, y el de la geometria, ó gráfico, es, por lo general, más expedito y se presta más fácilmente á las aplicaciones prácticas."* [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 3], pasando a mostrar un ejemplo para apreciar las ventajas de cada procedimiento.
Denomina Geometría Analítica a la Geometría que surge al aplicarle el Álgebra, y considera la Trigonometría como *"… la parte de las matemáticas que se ocupa de resolver los triángulos por procedimientos analíticos*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 4], primera definición de la Trigonometría entre las obras revisadas que resalta su carácter analítico. Seguidamente trata conceptos propios de este enfoque analítico, como sistema de coordenadas, abcisas u ordenadas.

En el capítulo primero, *Arcos, líneas trigonométricas y sus propiedades*, comienza explicando el concepto de arco y varias de sus propiedades.
Seguidamente introduce las líneas trigonométricas, diferenciando entre las de un arco y las de un ángulo, siendo estas últimas "*... las relaciones entre las líneas de igual nombre correspondientes al arco que mide dicho ángulo y el rádio de este arco.*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 13].
Suponiendo un ángulo *AOB* que denomina *A*, medido por cualquiera de los arcos *a, a' a''*… con radio *R, R', R''*… respectivamente tal y como se observa en la figura,

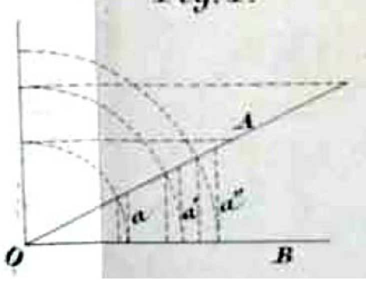


Fig. 1.

se tiene $senA = \frac{sena}{R} = \frac{sena'}{R'} = \frac{sena''}{R''} = ...$

En el caso de que R=1 obtenemos $senA = sena = \frac{sena'}{R'} = \frac{sena''}{R''} = ...$

e igualmente para las demás líneas trigonométricas.

Por lo tanto, las líneas trigonométricas de un ángulo son las mismas que las del arco que lo mide y cuyo radio se toma como unidad, aclarando que esto "*… no implica que el rádio sea verdaderamente la unidad lineal de medida 1 metro, 1 vara, etc., si no que dicho rádio, cualquiera que sea su valor, se haya tomado por unidad de medida para las líneas trigonométricas, de modo que éstas vendrán expresadas en rádios.*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 14].

Seguidamente explica que las líneas trigonométricas de arcos semejantes son proporcionales a los radios de estos, siendo el valor de la relación el de la línea trigonométrica correspondiente al arco cuyo radio sea la unidad o se haya tomado por unidad. Concluye que aunque las fórmulas están calculadas en estas condiciones, se pueden aplicar a arcos de radio distinto sustituyendo en las fórmulas las líneas que contengan por sus relaciones al nuevo radio, no alterándose las fórmulas y poniendo así el radio de manifiesto. Esta operación recibe el nombre de *restablecimiento del radio*.

Vemos pues, que Ortega y Sala parte de la definición clásica de líneas trigonométricas tras haber anunciado un tratamiento algebraico-analítico de la Trigonometría, suponiendo un retroceso respecto a la obra de Montojo. Además, es el único de los autores estudiados que diferencia entre las líneas trigonométricas de arcos y ángulos.

Una vez definidas las líneas trigonométricas, establece algebraicamente relaciones entre ellas, estudiando sus signos en los diferentes cuadrantes y mostrando un cuadro con los principales valores, estableciendo su crecimiento, decrecimiento y valores límites.

Seguidamente trata geométricamente relaciones trigonométricas de arcos cuyos extremos son simétricos respecto al eje de los senos, simétricos respecto al eje de los cosenos, simétricos respecto al centro, cuya suma es un cuadrante y cuya diferencia es un cuadrante. Concluye el apartado estudiando relaciones entre arcos que tienen iguales líneas.

En el segundo capítulo, *Fórmulas concernientes a las líneas trigonométricas*, explica que el problema de determinar las restantes líneas trigonométricas, dada una de ellas, se reduce a un ejercicio algebraico al disponer de las cinco relaciones anteriormente halladas que se verifican entre las seis líneas trigonométricas de un arco, formando un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

A continuación estudia las líneas trigonométricas de la suma y diferencia de dos arcos, partiendo de figuras geométricas y semejanzas de triángulos, junto con desarrollos algebraicos de las relaciones y estudiando los diferentes casos según los tipos de arcos. Pasa a ver las relaciones con varios arcos y combina diversas fórmulas para deducir otras. A partir de estar relaciones, deduce algebraicamente las líneas trigonometrías del arco doble, triple, mitad… y en general de los arcos ma y $\frac{a}{m}$.

Seguidamente introduce los números complejos, que denomina *expresiones algebráicas imaginarias*, y que según el autor "*… encontraron en la trigonometría, ántes de descubrirse su verdadero significado geométrico, una interpretación cómoda que permitia hacerlas intervenir en los cálculos.*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 45], lo cual supone un enfoque más moderno de los números complejos con respecto a las anteriores obras revisadas.

Indica el paso de la forma binómica de un número complejo a su forma trigonométrica y deduce algebraicamente la fórmula de Moivre para todo tipo de exponentes, presentando la determinación de las líneas de los arcos múltiplos y submúltiplos como aplicación de la fórmula, lo que le lleva a deducir los desarrollos en serie del seno, coseno y tangente.

En el capítulo tercero, *Tablas Trigonométricas*, el autor comienza indicando que "*Dado un arco hallar sus lineas, ó dada una de éstas buscar el menor arco que le corresponde, son, pues, dos problemas recíprocos cuya solucion es de suma importancia para resolver los triángulos*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 59], lo cual motiva que se manejen las tablas trigonométricas.

En primer lugar explica la construcción de las tablas trigonométricas, comenzando con el cálculo mediante desarrollos en serie del seno y coseno de 10´´, deduciendo mediante las fórmulas de Simpson otros valores y realizando la comprobación del método para algunos valores.

Seguidamente trata la disposición de las tablas trigonométricas de Callet, que considera las más comunes, aunque indica que recientemente se habían publicado las de L. Schrön[20] [1880], que mejoran las primeras. Realiza observaciones sobre el radio elegido y explica la disposición de las primeras y las segundas tablas.

A continuación explica el uso de las tablas, comentando en primer lugar varias reglas y principios generales a todas las tablas, como los casos de arcos muy próximos a 0º o 90º y la propiedad que dice que las diferencias entre arcos muy próximos son proporcionales a las de los logaritmos de sus líneas trigonométricas.

Posteriormente explica de forma resumida el uso de las tablas de Callet cuando dado un arco hay que hallar los logaritmos de sus líneas trigonométricas, diferenciando casos según el valor del arco y basándose en proporciones de las diferencias tabulares.

Igualmente trata el problema cuando se tiene el logaritmo de una línea trigonométrica y se debe hallar el arco menor a que corresponde, utilizando de nuevo proporciones de las diferencias tabulares y tratando separadamente varios casos según los valores dados de los logaritmos, mostrando en ambos problemas ejemplos ilustrativos.

Para terminar este capítulo, el autor comenta que "*El profesor deberá completarlo todavía con numerosos ejemplos, único medio de acostumbrarse al manejo de las referidas tablas.*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 82].

El quinto capítulo, *Trigonometría Rectilínea*, trata la resolución de triángulos por procedimientos algebraicos, que según indica "*... requiere que las incógnitas estén relacionadas con los datos por medio de ecuaciones, y siendo seis los elementos de todo triángulo (ángulos y lados) y debiendo haber tres conocidos para que sea determinado, según enseña la geometría, se reduce el problema en cada caso á resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 85], por lo que se necesitan expresiones que contengan cuatro elementos del triángulo, obteniendo quince posibles combinaciones que agrupa en cuatro casos, según los elementos dados.

Pasa a considerar tres relaciones que utilizará para la resolución de triángulos. La primera es el teorema del Coseno, que denomina *Primer grupo*, deducida a partir de relaciones geométricas en el triángulo. La segunda relación es el teorema del Seno, denominada *Segundo grupo*, deducida al aplicar el método del *Perpendículo*. La tercera relación, *Tercer grupo*, es el teorema de la Tangente, deducida algebraicamente a partir del teorema del Seno. A partir de estas propiedades,

[20] Se ha tomado esta edición por ser la anterior más cercana a la obra de Ortega y Sala.

observa cómo se relacionan entre sí y deduce que en un triángulo un lado cualquiera es igual a la suma de los otros dos multiplicados por los cosenos de los ángulos que forman con el primero.

Con estas relaciones para un triángulo oblicuángulo deduce sus respectivas para el caso particular en que el triángulo es rectángulo.

Seguidamente deduce algunas relaciones que faciliten los cálculos con logaritmos, entre ellas las fórmulas de Briggs. Continúa presentando las ecuaciones $a\cos x + b\sin x = c$ y $x = a + b$, que resuelve algebraicamente mediante las relaciones trigonométricas.

A partir de lo visto anteriormente, deduce el procedimiento para resolver triángulos, "*… que consiste en agrupar en cada caso los tres datos con una incógnita distinta, con lo que resultarán tres ó cuatro elementos, según el triángulo de que se trate.*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 96], aplicando las relaciones vistas anteriormente.

Advierte que se debe comprobar siempre la exactitud de los resultados y es recomendable determinar las incógnitas en función directa de los datos, y no de las incógnitas ya deducidas para no acumular errores.

Seguidamente comienza con la resolución de triángulos rectángulos por su mayor sencillez. En cada uno de los cuatro casos presenta los dos datos que se tienen y las dos incógnitas buscadas, diferenciando dos grupos según se busque cada una de las incógnitas e indicando las fórmulas a utilizar.

4.° Datos: b, B. Incógnitas: a, c, puesto que $C = 90° - B$.

$$\textbf{Grupos}\begin{cases} b, B, a \\ b, B, c \end{cases} \textbf{Fórmulas}\begin{cases} b = a \operatorname{sen} B \\ b = c \operatorname{tg} B \end{cases} \textbf{de las que}\begin{cases} a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \\ c = \dfrac{b}{\operatorname{tg} B} \end{cases}$$

Ejemplo de uno de los casos tratados.

Concluye el tratamiento de los triángulos rectángulos presentando varias fórmulas para calcular su área e incluyendo en el *Apéndice I*, *Ejemplos de triángulos rectángulos*, un ejemplo resuelto de cada uno de los casos.

Una vez estudiados los triángulos rectángulos, pasa a estudiar los triángulos oblicuángulos, siguiendo el mismo método de grupos (en este caso tres, al tener tres datos dados). Realiza la discusión de los casos ambiguos, presentando un cuadro resumen para el caso en el que se tienen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Al igual que con los triángulos rectángulos, finaliza el estudio presentando varias fórmulas p ara calcular el área de un triángulo, entre las que se encuentra la fórmula de Herón, e incluye en el *Apéndice II*, *Ejemplos de triángulos oblicuángulos*, un ejemplo resuelto de cada uno de los casos.

Cabe destacar que si bien sigue un planteamiento algebraico para los desarrollos, busca la seguridad del método geométrico al manifestar que "*Estos resultados se comprueban geométricamente por el trazado del triángulo (figura 22), siendo de notar la concordancia perfecta entre la discusión trigonométrica y la que enseña la geometría.*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 106].

La obra de Ortega y Sala sigue una estructura similar al resto de las obras, aunque de una forma reducida y simplificada con la intención de que sea más accesible a los estudiantes.

El texto se encuentra a medio camino entre un planteamiento algebraico y otro geométrico de la Trigonometría Rectilínea.

Desde el principio de la obra, deja claro que parte de una concepción algebraica de la materia y pretende resolver triángulos por procedimientos analíticos. Estos procedimientos podemos verlos a lo largo de toda la obra, pero en continua interacción con procedimientos geométricos clásicos que el autor prefiere mantener. El ejemplo más claro lo tenemos en el mantenimiento de las líneas trigonométricas como punto de partida en el estudio, lo que supone un retroceso respecto a la obra de Montojo.

Conviene destacar que el autor estudia en primer lugar las líneas trigonométricas de un arco y posteriormente las de un ángulo. Al estudiar las líneas trigonométricas, parte de razonamientos geométricos que, junto con el tratamiento algebraico, le permiten deducir las principales relaciones. De nuevo resalta el carácter algebraico al querer determinar las restantes líneas trigonométricas a partir de una de ellas, indicando que se ha de resolver un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Igualmente sigue un tratamiento analítico al tratar los números complejos, la fórmula de Moivre y los desarrollos en serie del seno, coseno y tangente.

En el tratamiento de las tablas trigonométricas conjuga el modelo clásico junto con los desarrollos en serie para su construcción.

En cuanto a la resolución de triángulos, presenta los tres teoremas principales e indica que el problema se puede reducir a resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, aunque en la práctica plantea las relaciones necesarias para su resolución según los datos, separando dentro de cada caso por grupos según el elemento que se quiere hallar.

Podemos concluir que la obra no tiene un planteamiento totalmente definido, mezclando los enfoques geométricos y algebraicos mediante un tratamiento personal de los contenidos al tratar de hacer una obra adaptada a sus alumnos.

I.8.3.6. Trigonometría elemental: obra declarada de texto para el ingreso en la escuela Naval, por Barreda y García

La última de las obras consultadas, *Trigonometría elemental: obra declarada de texto para el ingreso en la Escuela Naval*, escrita por los capitanes de fragata José A. Barreda y Manuel García Velázquez, fue obra de texto para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. La primera edición parece ser de 1899 y se ha revisado la edición de 1917, teniendo constancia de una cuarta edición en 1921 y una quinta edición en 1928. En la edición revisada [BARREDA & GARCÍA, 1917], el libro tiene doscientas setenta y una páginas; la parte de Trigonometría Rectilínea son doscientas treinta y una páginas y ocho figuras, estando todas las figuras insertadas a lo largo de la obra.

La obra no presenta prólogo o introducción, pasando directamente a trabajar la Trigonometría Rectilínea a lo largo de siete lecciones y un apéndice.

En la primera lección, *Nociones preliminares*, explican conceptos previos como variable, función, crecimiento, sistema de ejes rectangulares o coordenadas. Seguidamente definen la Trigonometría como *"… la introducción de los ángulos en el cálculo siendo su objeto especial la resolución de los triángulos por medio de fórmulas*" [BARREDA & GARCÍA, 1917, p. 9], ofreciendo una definición más amplia que la clásica.

A continuación presentan la magnitud angular y su medida, junto con algunas propiedades. Pasan a ver, a partir de un ángulo y un sistema de referencia cartesiano, las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente) y comentan brevemente otras secundarias (seno verso, coseno verso, subverso, subcoverso), todo ello de manera análoga a como lo hace Montojo. A través de las coordenadas, deducen algebraicamente las principales relaciones trigonométricas y una tabla para deducir el valor de una función trigonométrica a partir de las otras.

En la segunda lección, *Funciones Trigonométricas*, expresan las funciones trigonométricas de un ángulo positivo por medio de las de un ángulo del primer cuadrante, ofreciendo una tabla resumen de las relaciones. Seguidamente deducen las funciones trigonométricas de 30º, 60º y 45º junto con una tabla para los principales ángulos hasta 360º, comentando la periodicidad de estas funciones. A continuación, estudian las relaciones con ángulos opuestos y demuestran que los límites de $\frac{sen\,\sigma}{\sigma}$ y $\frac{\text{tang}\,\sigma}{\sigma}$ cuando σ tiende a cero valen uno, aunque lo hacen de forma distinta a como lo hace Montojo, basándose en desigualdades geométricas.

En la tercera lección, *Funciones Trigonométricas*, continúan con propiedades de las funciones de manera similar a como lo hace Montojo, aunque de forma más resumida. Tratan propiedades como las razones de la suma y diferencia de dos ángulos, del ángulo mitad y la relación $\frac{sen\,A+sen\,B}{sen\,A-sen\,B}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$. Finalizan el capítulo con varios ejemplos y ejercicios sobre otras relaciones y transformaciones.

La cuarta lección, *Tablas de Logaritmos*, comienza con una descripción de las tablas de Schrön [SCHRÖN, 1880], en las que se dan de 10’’en 10’’ y con siete decimales los logaritmos del seno, coseno, tangente y cotangente de los arcos comprendidos entre 0º y 90º.

Indican que para ángulos comprendidos entre 3º y 87º se encuentra la columna *differences* después de la columna titulada *sinus*, e igualmente después de la columna *cosinus*, siendo estas diferencias las que existen entre dos logaritmos consecutivos de la tabla, expresados en unidades del séptimo orden decimal y escritas entre los logaritmos cuya diferencia representan. Análogamente, entre las columnas de las tangentes y cotangentes se encuentra la columna *diferencias comunes*, que son las diferencias que existen entre dos logaritmos consecutivos de la tabla. A todas estas diferencias se les denomina generalmente *diferencias tabulares* y los autores explican su distribución en las tablas.

Seguidamente explican con detenimiento el uso de las tablas para arcos que se dan o se buscan entre 3º y 87º, admitiéndose que hay proporcionalidad entre los pequeños incrementos dados a un arco y el incremento correspondiente de los logaritmos de sus relaciones trigonométricas. Advierten que dicha hipótesis no es cierta, pero sí admisible dentro de los límites de aproximación adoptados para la formación de las tablas.

Cuando se quiere hallar el logaritmo de un seno o una tangente se toma el logaritmo seno o logaritmo tangente del arco de la tabla que se le aproxima más por defecto, y en el caso del coseno o cotangente el que se aproxima más por exceso. En todos los casos se aumenta posteriormente el logaritmo tomado de las tablas en la cantidad $\delta = \triangle \times \frac{d}{D}$, donde $\triangle$ es la diferencia tabular correspondiente a los dos logaritmos de la tabla que comprenden al que se busca, d es la diferencia que existe entre el arco dado y el considerado en la tabla, y D es la diferencia constante entre dos arcos consecutivos de la tabla. La aproximación que se obtiene para δ es por lo menos del mismo orden que $\triangle$ y consecuentemente, el logaritmo de una relación trigonométrica calculado mediante este proceso se obtiene en menos de una unidad del séptimo orden decimal.

Seguidamente estudian la manera de hallar el ángulo o el arco de una función trigonométrica cuando se tiene el valor de su logaritmo, aplicando de forma similar las *diferencias tabulares*.

Para una mejor comprensión del procedimiento de interpolación presentan ejemplos ilustrativos.

En el siguiente apartado estudian detalladamente los casos en que el ángulo es menor de 3º o mayor de 87º, al ser entre estos límites las diferencias tabulares muy variables y no poderse admitir la proporcionalidad entre los pequeños incrementos de los arcos y los de los logaritmos de sus relaciones trigonométricas.

Cuando dado un arco comprendido entre 0º y 3º se quiere hallar el logaritmo de una de sus relaciones trigonométricas, se reduce el arco a segundos, denominando a la parte entera y h la parte decimal. Al tratarse de un arco próximo a cero grados se puede considerar $\frac{sen(a+h)}{a+h} = \frac{sen\, a}{a}$ y $\frac{tan(a+h)}{a+h} = \frac{tan\, a}{a}$, por estar las fracciones muy próximas a la unidad. Aplicando logaritmos se deduce $\log sen(a+h) = \log(a+h) + \log\frac{sen\, a}{a}$ y $\log tan(a+h) = \log(a+h) + \log\frac{tan\, a}{a}$.

Por una parte, los autores explican cómo hallar en las tablas $\log(a+h)$, y por otra explican la forma de hallar los valores de $\log\frac{sen\, a}{a}$ y $\log\frac{tan\, a}{a}$, llamados respectivamente S y T. Indican cómo se encuentran estos valores en las tablas y comentan que la interpolación se realiza con la ayuda de una columna diferencia denominada D, teniendo en cuenta que la relación $\frac{sen\,\sigma}{\sigma}$ decrece a medida que el arco aumenta y la relación $\frac{\mathrm{tang}\,\sigma}{\sigma}$ crece.

Si el arco estuviese comprendido entre 87º y 90º, al cumplirse la relación $sen\, a = \cos(90º - a)$ se puede tomar el complemento al arco dado y hallar el logaritmo del coseno de este complemento sin interpolación, por las tablas trigonométricas.

Posteriormente, estudian el caso en el que se da el logaritmo de una relación trigonométrica de un arco comprendido entre 0º y 3º y se quiere hallar el arco correspondiente. Parten de las anteriores relaciones $\log sen\left(a+h\right)=\log\left(a+h\right)+\log\frac{sen\,a}{a}$ y

$\log tan\left(a+h\right)=\log\left(a+h\right)+\log\frac{tan\,a}{a}$. Despejando se obtiene

$\log\left(a+h\right)=\log sen\left(a+h\right)-\log\frac{sen\,a}{a}$ y $\log\left(a+h\right)=\log tan\left(a+h\right)-\log\frac{tan\,a}{a}$, siendo conocidos $\log sen\left(a+h\right)$ o $\log tan\left(a+h\right)$ y pretendiendo conocer *(a+h).* Explican cómo calcular en las tablas el arco desconocido con un error menor de 10’’ e indican que el límite superior del error que se puede cometer para *(a+h)* está dado por el número $\triangle a''$, escrito en la parte baja de la tabla auxiliar empleada. Concluyen el apartado comentando cómo se trata el problema cuando el arco se encuentra entre 87º y 90º o se quiere calcular para el coseno y la cotangente.

A lo largo de todo el capítulo presentan ejemplos ilustrativos de cada uno de los casos estudiados.

En la quinta lección, *Logaritmos*, explican la forma en que se pueden preparar expresiones de la forma $x=a\pm b$, $x=\frac{a-b}{a+b}$, $x=a sen\,\varphi\pm b\cos\varphi$ o $x=a\cos\varphi\pm b sen\,\varphi$ para el cálculo logarítmico, transformándolas en expresiones ligadas sólo por los signos de la multiplicación, división, potencias y raíces. En la resolución de triángulos se hará uso de transformaciones de esta clase para poder hallar los elementos buscados del triángulo.

La sexta lección, *Triángulos Rectilíneos*, tratan la resolución de triángulos. Realizan un estudio prácticamente idéntico al de Montojo, comenzando con la propiedad de que la suma de los tres ángulos de un triángulo suma 180º, demostrando los teoremas del Seno y del Coseno y estudiando seguidamente las relaciones en el caso particular de los triángulos rectángulos.

Pasan a estudiar los cinco casos para triángulos rectángulos, diferenciando los casos en el que se tiene un cateto y el ángulo adyacente o el ángulo opuesto, y presentan un ejemplo de resolución de cada caso.

En la séptima lección, *Triángulos Rectilíneos Oblicuángulos*, de nuevo siguen un procedimiento muy similar al realizado por Montojo con algunos matices. Estudian los mismos cinco casos de estos triángulos (vuelven a diferenciar el caso en el que se tiene un lado y dos ángulos, en un caso siendo los dos ángulos adyacentes y en otro uno adyacente y otro opuesto) y hacen un estudio más profundo que Montojo para estudiar la ambigüedad cuando se tienen los dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Durante el estudio de los casos usan las Fórmulas de Briggs y calculan las áreas de los triángulos. Finalizan el apartado con un ejemplo de cada uno de los cuatro primeros casos.

El último apartado sobre Trigonometría Rectilínea es el apéndice al final de la obra, *Construcción de una Tabla Trigonométrica*. Comienzan explicando los conceptos y elementos necesarios para elaborar y utilizar este tipo de tablas, como argumento, intervalo o diferencia tabular, y mostrando la necesidad de su uso. Seguidamente exponen el procedimiento para construir una tabla trigonométrica, si bien advierten que "*… es más elemental y no el que hoy día se seguiría, pues éste requiere conocimientos superiores, fuera del los límites propuestos*." [BARREDA & GARCÍA, 1917, p. 235].

El método tiene su fundamento en que los límites de $\frac{sen\,\sigma}{\sigma}$ y $\frac{\tan g\sigma}{\sigma}$ son la unidad cuando σ decrece de $\frac{\pi}{2}$ a 0, obteniendo condiciones entre un arco y su seno que permiten construir las tablas con suficiente aproximación. Si bien Montojo también hace uso de estos límites, son los primeros autores entre las obras revisadas que los aplican para la construcción de tablas trigonométricas.

En el segundo apartado del apéndice, *Descripción y uso de las Tablas de Logaritmos de las Funciones Circulares reglamentarias de la Armada*, los autores explican este tipo de tablas que contienen tabulados los logaritmos de las funciones circulares seno, coseno, tangente, cotangente, secantes, cosecante, seno cuadrado de la mitad, coseno cuadrado de la mitad, tangente cuadrado de la mitad y cotangente cuadrado de la mitad del ángulo. El argumento está expresado en magnitud angular sexagesimal de arco y en su correspondiente de tiempo, de 0º a 180º y de 0 horas a 12 horas, siendo el intervalo de un minuto de ángulo o cuatro segundos de tiempo. Son tablas de simple entrada con una disposición que permite que cada logaritmo corresponda a cuatro funciones diferentes de otros tantos argumentos, o a dos funciones diferentes.

Presentan cinco ejemplos ilustrativos de su manejo y estudian separadamente los casos en los que el ángulo es menor que 3º o mayor que 87º, mostrando otros cinco ejemplos de cálculo.

Concluyen la obra con tres ejemplos detallados de resolución de triángulos usando las tablas reglamentarias de la Marina.

La obra de Barreda y García tiene una clara influencia de la obra de Montojo, presentando una buena parte de contenidos prácticamente idénticos.

Parten de una concepción algebraica de la Trigonometría Rectilínea, para lo que dan unas nociones preliminares como variable, función o coordenadas, pasando a definir las funciones trigonométricas como relaciones en el sistema de referencia cartesiano al igual que Montojo, pero a diferencia de éste no las relacionan con las clásicas líneas trigonométricas, quizá porque se pueden considerar superadas en los años que transcurren entre las dos obras.

Estudian las propiedades de las funciones trigonométricas de una forma más resumida a como lo hace Montojo, y es destacable que realizan una demostración distinta para ver que los límites de $\frac{sen\,\sigma}{\sigma}$ y $\frac{\mathrm{tang}\sigma}{\sigma}$ cuando σ tiende a cero valen uno.

Sí que podemos encontrar diferencias a la hora de la elaboración de las Tablas trigonométricas, pues para su construcción se apoyan en relaciones geométricas y los anteriores límites, no utilizando herramientas como la fórmula de Moivre y los desarrollos en serie, lo que supone un descenso de nivel matemático.
En cuanto al uso de las tablas también difieren de lo explicado por Montojo, basándose en las diferencias tabulares y la interpolación por proporcionalidad o la relación $\frac{sen\,\sigma}{\sigma}$, según sean los ángulos comprendidos o no entre 3º y 87º.
Para la resolución de los triángulos rectilíneos, tanto rectángulos como oblicuángulos, siguen un proceso muy similar al realizado por Montojo.
Es destacable la descripción y uso que hacen de las tablas reglamentarias en la Armada, siendo los únicos autores de los revisados que las manejan.

Podemos concluir que la obra de Barreda y García se encuentra bajo la influencia de la obra de Montojo en cuanto a los conceptos trigonométricos y la resolución de triángulos, mientras que en cuanto a la construcción y manejo de tablas sigue una línea más clásica basándose en aspectos geométricos.

II.8.4. Resultados

Las obras estudiadas siguen a grandes rasgos una estructura análoga a la seguida por las obras publicadas durante el siglo XVIII.
Se comienza con la definición y propiedades básicas de las expresiones trigonométricas necesarias para elaborar las tablas trigonométricas, se explica la construcción y el uso de estas tablas y se pasa a la resolución de los triángulos, habiendo presentado previamente propiedades y teoremas que permitan el estudio de casos.

Pasamos a ver la forma en que han evolucionado cada uno de estos aspectos a lo largo del siglo XIX.
Comenzamos con el concepto y definición de las expresiones trigonométricas.
A lo largo del siglo XVIII observamos una uniformidad en las obras revisadas. Se parte del concepto geométrico de líneas trigonométricas y se deducen relaciones a partir de sus relaciones geométricas (excepto La Caille que utiliza herramientas algebraicas).
En el siglo XIX vemos una evolución en el concepto y definición de las expresiones trigonométricas y la deducción de las relaciones entre ellas.
Ciscar parte de una definición geométrica de las líneas trigonométricas análoga a la de las obras del s. XVIII, aunque dado el carácter elemental de su obra el número de relaciones y proposiciones es muy limitado, basándose al igual que sus antecesores en proporciones geométricas y semejanzas de triángulos para demostrarlas.
Cortázar sigue un tratamiento clásico partiendo de las líneas trigonométricas, aunque con algunas innovaciones en su desarrollo. Es destacable la gran cantidad de relaciones y propiedades presentadas, algunas de ellas inéditas en las obras anteriores, siendo novedoso el tratamiento algebraico en un gran número de demostraciones. También es reseñable el paso de un radio cualquiera a un radio unidad en muchas de las relaciones obtenidas y el estudio pormenorizado de las propiedades para todos los tipos de ángulos.
La obra de Montojo supone un nuevo enfoque sobre la Trigonometría Rectilínea respecto a las anteriores obras, tanto en los conceptos básicos como en su desarrollo. Por una parte no utiliza las líneas trigonométricas, apoyándose en el sistema de referencia cartesiano para presentar las funciones trigonométricas, con toda la potencialidad de las mismas. Desde ese momento puede aplicar la generalidad y los recursos del Álgebra a la Geometría, lo que permitirá un estudio más riguroso y profundo. Al presentar las funciones trigonométricas puede hacer uso de su

periodicidad y propiedades, permitiéndole realizar demostraciones algebraicas de las principales relaciones. Dado que realiza un novedoso enfoque de las expresiones trigonométricas, explica la relación entre las funciones trigonométricas y las líneas trigonométricas, indicando las ventajas de las primeras respecto a las segundas.

La obra de Terry y Rivas está destinada a la práctica y resolución de problemas relacionados con la Trigonometría, por lo que no realiza un tratamiento propiamente teórico. La obra parte de las clásicas líneas trigonométricas aunque esto no condiciona en exceso su estilo, pues la mayoría de los ejemplos y ejercicios tratados tienen como principal herramienta el Álgebra.

Ortega y Sala se encuentra a medio camino entre un planteamiento algebraico y otro geométrico de la Trigonometría Rectilínea. Por una parte deja claro desde el principio de la obra que parte de una concepción algebraica de la materia, pero en continua interacción con procedimientos geométricos clásicos que el autor prefiere mantener. Este hecho se observa al mantener las líneas trigonométricas como punto de partida en el estudio, lo que supone un retroceso respecto a la obra de Montojo. En primer lugar estudia las líneas trigonométricas de un arco y posteriormente las de un ángulo. Al estudiar las líneas trigonométricas parte de razonamientos geométricos, que junto con el tratamiento algebraico, le permiten deducir las principales relaciones.

Barreda y García presentan una clara influencia de la obra de Montojo, partiendo de una concepción algebraica de la Trigonometría Rectilínea, para lo que dan unas nociones preliminares como variable, función o coordenadas. Posteriormente pasan a definir las funciones trigonométricas como relaciones en el sistema de referencia cartesiano al igual que Montojo, pero a diferencia de éste no las relacionan con las clásicas líneas trigonométricas, quizá porque se pueden considerar superadas en los años que transcurren entre las dos obras.

Podemos concluir que a lo largo del siglo XIX se pasa de una concepción geométrica de las expresiones trigonométricas, heredada de las líneas trigonométricas utilizadas en el siglo XVIII, a un enfoque algebraico-analítico a partir de la obra de Montojo, basado en las funciones trigonométricas, aunque no todos los autores posteriores dejan atrás las líneas trigonométricas, coexistiendo ambos enfoques durante la parte final del siglo.

El segundo aspecto comparado es la elaboración y uso de la tablas trigonométricas logarítmicas del Seno, Tangente y Secante.

En el siglo XVIII todos los autores revisados se apoyan en propiedades geométricas para establecer relaciones que permitan elaborar las tablas con mayor o menor precisión, con la excepción de La Caille, que explica la elaboración de tablas trigonométricas a partir de desarrollos en serie. Respecto al uso de las tablas, describen el manejo de las mismas ante los dos principales problemas: dado un arco hallar el valor de la línea trigonométrica y dado el valor de la línea trigonométrica de un arco, hallar el arco.

Ciscar sigue una estructura similar a la realizada en el siglo XVIII al presentar varias propiedades de las líneas trigonométricas que permitan comprender y manejar las tablas trigonométricas logarítmicas, basándose en proporciones geométricas y semejanzas de triángulos para demostrar las propiedades. Es destacable el énfasis que pone en indicar la utilidad de los logaritmos para facilitar los cálculos, añadiendo el adjetivo “logarítmica” a la Trigonometría Rectilínea.

En la obra de Cortázar podemos destacar la cantidad de relaciones y propiedades tratadas algebraicamente para poder construir las tablas trigonométricas, siguiendo un desarrollo clásico y utilizando varios métodos, como el de Simpson, para facilitar su elaboración y uso. Por otra parte, Cortázar sigue una línea mucho más moderna en la parte final de la obra, *Complemento de la Trigonometría*, pues por primera vez en las obras españolas revisadas se ve el tratamiento de los números complejos, la Fórmula de Moivre, la resolución trigonométrica de ecuaciones, los valores de las líneas trigonométricas de un arco múltiplo de otro del que se conocen sus valores, los límites de las razones del seno al arco y de la tangente al arco. Todos estos contenidos son tratados algebraicamente, con el objetivo de obtener los desarrollos en serie del seno y coseno en función de su arco, y poder construir mejor las tablas trigonométricas. Vemos en Cortázar una transición entre el método clásico de elaboración de las tablas y el uso de desarrollos en serie, método que no explota en su totalidad y lo presenta dentro de un complemento de la obra.

Montojo, siguiendo un planteamiento analítico, deduce los desarrollos en serie del seno, coseno y tangente, junto con la fórmula de Moivre y todas sus aplicaciones, con el objetivo de elaborar las tablas trigonométricas utilizando los desarrollos en serie. En cuanto a su uso, explica con detenimiento un método de interpolación y el manejo de las funciones inversas, siendo ambos conceptos novedosos.

Terry y Rivas se limita a dar algunos ejemplos de los problemas clásicos a la hora de utilizar las tablas.

Ortega y Sala sigue un tratamiento analítico al tratar los números complejos, la fórmula de Moivre y los desarrollos en serie del seno, coseno y tangente; sin embargo, en el tratamiento de las tablas trigonométricas conjuga el modelo clásico junto con los desarrollos en serie para su construcción.

Barreda y García estudian las propiedades de las funciones trigonométricas de una forma similar, aunque más resumida, a como lo hace Montojo, pero podemos encontrar diferencias a la hora de la elaboración de las Tablas trigonométricas, pues para su construcción se apoyan en relaciones

geométricas, no utilizando herramientas como la fórmula de Moivre y los desarrollos en serie. En cuanto al uso de las tablas, también difieren de lo explicado por Montojo, basándose en las diferencias tabulares y la interpolación por proporcionalidad o la relación $\frac{sen\,\sigma}{\sigma}$, según sean los ángulos comprendidos o no entre 3º y 87º. Es destacable la descripción y uso que hacen de las tablas reglamentarias en la Armada, siendo los únicos autores de los revisados que las manejan.
Concluimos que respecto a la elaboración y uso de las tablas trigonométricas logarítmicas, si bien en general hay un desarrollo y perfeccionamiento en la elaboración y uso de las tablas con respecto al siglo XVIII, el verdadero avance se produce con la obra de Montojo al utilizar directamente los desarrollos en serie para la elaboración de las tablas, mientras otros autores como Cortázar y Barreda y García ven los desarrollos en serie pero no los aplican directamente a la construcción de las tablas.

El tercer aspecto a revisar es la resolución de triángulos rectilíneos. Los autores de las obras escritas en el siglo XVIII presentan en primer lugar los teoremas fundamentales, tanto para triángulos rectángulos como oblicuángulos, con demostraciones geométricas basadas en relaciones de proporcionalidad. Una vez presentados los teoremas, los autores proceden a la resolución de los triángulos, pudiendo encontrar dos enfoques diferentes para su estudio, siendo el más habitual el estudio de los diferentes casos según los datos de que se disponen.
Ciscar trata los triángulos rectángulos con las relaciones que permiten su resolución y pasa a estudiar los triángulos oblicuángulos a partir del teorema del Seno y la división en triángulos rectángulos. El número de relaciones y proposiciones es muy limitado, y al igual que sus antecesores se basa en proporciones geométricas y semejanzas de triángulos para demostrarlas. Para la resolución de triángulos no realiza una clasificación de los distintos casos y únicamente presenta ejemplos numéricos de algunos.
Cortázar considera que el radio en las tablas es la unidad y demuestra las principales relaciones de forma similar a las anteriores obras, con las excepciones del teorema del Coseno y las fórmulas de Briggs, que son tratadas por primera vez en las obras españolas revisadas y serán utilizadas en el resto de obras posteriores. En cuanto a la resolución propiamente, trata todos los casos y los resuelve teóricamente, no ofreciendo ejemplos numéricos ilustrativos.
Montojo sigue una estructura similar a la de los otros autores, aunque basándose siempre en relaciones algebraicas para su estudio y presentando tablas resumen para facilitar su uso a los estudiantes, no suponiendo un cambio sustancial en el tratamiento de los casos.
Terry y Rivas se limita a presentar en su obra una amplia cantidad de ejemplos para que el alumno adquiera las destrezas necesarias en la resolución de los triángulos rectilíneos.

Ortega y Sala presenta los teoremas principales e indica que el problema se puede reducir a resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, aunque en la práctica plantea las relaciones necesarias para su resolución según los datos, separando dentro de cada caso por grupos según el elemento que se quiere hallar.

Barreda y García siguen para la resolución de los triángulos rectilíneos un proceso muy similar al realizado por Montojo.

Podemos concluir que a lo largo del siglo XIX no hay grandes avances en la resolución de triángulos rectilíneos. A partir de la obra de Cortázar se incorporan el teorema del Coseno y las fórmulas de Briggs, lo que facilita los procesos de resolución, aunque no suponen un cambio de metodología. Sí es destacable que cada autor da su toque personal a la hora de clasificar y resolver los distintos casos.

Pasemos a comentar otros aspectos o peculiaridades resaltables en las obras revisadas.

La obra de Ciscar, pese a estar destinada a la formación de los Guardias Marinas y pilotos, contiene en la parte de Trigonometría un reducido número de ejemplos y ningún ejercicio, posiblemente debido a que el libro servía de guía para el profesor y este presentaría ejemplos y ejercicios en el desarrollo de las clases.

Cortázar sigue un planteamiento similar al realizado por La Caille, realizando a lo largo de la obra una transición desde un tratamiento geométrico a otro algebraico para el estudio de la Trigonometría Rectilínea.

Montojo supone un cambio de planteamiento y desarrollo de la Trigonometría Rectilínea respecto del resto de obras.

Terry y Rivas parte de una concepción clásica de la Trigonometría Rectilínea aunque hace uso de herramientas algebraicas para la resolución de los ejercicios que presenta.

Ortega y Sala no tiene un planteamiento totalmente definido, mezclando los enfoques geométricos y algebraicos bajo un tratamiento personal de los contenidos, al tratar de hacer una obra adaptada a sus alumnos.

Barreda y García se encuentran bajo la influencia de la obra de Montojo en cuanto a los conceptos trigonométricos y la resolución de triángulos, mientras que en cuanto a la construcción y manejo de tablas siguen una línea más clásica basándose en aspectos geométricos.

Conviene recordar que este estudio sobre la Trigonometría Rectilínea ha tenido como referente metodológico el trabajo realizado por Van Sickle [2011] en su tesis doctoral *A History of Trigonometry Education in the United States: 1776-1900*. Como ya se comentó, la autora estudia el paso entre el *Sistema de Líneas* y el *Sistema de Proporciones* en los colegios y universidades de los Estados Unidos durante este periodo.

Como hemos comprobado, en las obras españolas revisadas se ha constatado un cambio desde un enfoque basado en las líneas trigonométricas que corresponde al *Sistema de Líneas* presentando por Van Sickle, a otro enfoque en el que se parte de un sistema de referencia cartesiano, enfoque que no corresponde al *Sistema de Proporciones* donde se tratan las relaciones en un triángulo rectángulo.

Podemos determinar que existe una similitud a lo largo del siglo XIX sobre la evolución conceptual de las funciones trigonométricas entre las obras utilizadas para la formación de la Armada Española y las obras usadas en los colegios y universidades de los Estados Unidos.

Sin embargo, aunque en los dos estudios se parte de una concepción de las funciones trigonométricas como líneas trigonométricas, en el caso estadounidense evoluciona hacia un sistema de proporciones, mientras que en el caso español se basa en la utilización de un sistema de referencia cartesiano.

A partir de estos resultados, concluimos que a lo largo del siglo XIX evolucionaron los contenidos esenciales de Trigonometría que un Guardia Marina necesitaba para su formación, pasando de un enfoque puramente geométrico a otro algebraico y analítico acorde con la evolución de la Trigonometría Rectilínea a nivel internacional.

Los principales cambios se producen al pasar de las líneas trigonométricas a las funciones trigonométricas y al realizar la construcción de tablas mediante desarrollos en serie.

La evolución es menor en los métodos de resolución de triángulos rectilíneos, siendo destacables la incorporación del teorema del Coseno y de las fórmulas de Briggs como herramientas de resolución.

El autor que mayor aportación realiza a este proceso es Montojo, que destaca notablemente en el desarrollo de todos los aspectos estudiados.

II.9. Trigonometría Esférica

II.9.1. Referente metodológico

La finalidad de esta comparativa es establecer la manera en que fueron tratados los contenidos sobre Trigonometría Esférica en los textos relacionados con la formación de los Guardias Marinas durante el siglo XIX.

Por una parte, la obra de Brummelen [2013] nos ha permitido establecer la forma en el que la Trigonometría Esférica se ha ido desarrollando desde la antigüedad hasta la navegación astronómica.

Por otra pate, tal y como ya se comentó al estudiar la Trigonometría Rectilínea, hemos considerado a modo de referente para el estudio el trabajo realizado por Van Sickle [2011] en su tesis doctoral *A History of Trigonometry Education in the United States: 1776-1900*. La autora estudia en la Trigonometría Rectilínea el paso entre el *Sistema de Líneas* y el *Sistema de Proporciones* en los colegios y universidades de los Estados Unidos durante este periodo.

A partir de este planteamiento, a lo largo del estudio queremos determinar si existe una evolución conceptual en la Trigonometría Esférica a lo largo del siglo XIX, que tiene como principal objetivo la resolución de los triángulos oblicuángulos, desde un enfoque geométrico basado en el teorema del Seno y el método del *Perpendículo* hacia un enfoque algebraico, que tiene como pieza clave el teorema del Coseno para los lados.

II.9.2. Obras utilizadas en la Armada en el siglo XVIII

Con el objetivo de disponer de una amplia perspectiva a la hora de poder comparar las obras sobre Trigonometría Esférica que se utilizaron en los centros de formación de los Guardias Marinas a lo largo del siglo XIX, se va a realizar un estudio de las obras, tanto españolas como francesas, que se utilizaron en estos centros durante el siglo XVIII.

I.9.2.1. **Obras españolas**

A lo largo del siglo XVIII, en las Academias de Guardias Marinas se utilizaron cuatro obras con contenidos directamente relacionados con la Trigonometría Esférica.
Se va a proceder a describir brevemente cada una de estas obras, con el objetivo de contextualizar e identificar los contenidos esenciales de la Trigonometría Esférica que un Guardia Marina necesitaba a finales de este siglo.
Las obras se estudiarán conforme a su primera edición, coincidiendo durante este siglo con el orden de aparición en los programas de las Academias.

La primera de las obras es el volumen tercero del *Compendio Mathemático, en que se contienen todas las materias mas principales de las Ciencias, que tratan la Cantidad*, de Tomás Vicente Tosca, obra utilizada durante el periodo fundacional de la Academia de Guardias Marinas entre 1717 y 1734 [TOSCA, 1710].

El Tratado VII del *Compendio* contiene la Trigonometría. Está formado por seis libros y un *Apéndice*, estudiando en los tres primeros libros la Trigonometría Rectilínea y en los otros tres la Esférica.
El texto no contiene prólogo, comenzando la obra con la consideración de que la Trigonometría es "*una Ciencia que enseña el modo de refolver los Triangulos.*" [TOSCA, 1710, p. 1]. Diferencia entre Trigonometría Rectilínea y Esférica, siendo destacable el uso en las demostraciones de proposiciones geométricas de los *Elementos Geométricos* de Euclides (se ha revisado [EUCLIDES, 1774]).

Comienza el tratamiento de la Trigonometría Esférica en el Libro IV, *Isagogico para la refolucion de los triangulos esfericos, ò curvilineo,* explicando que "*… fu empleo es únicamente* *la Analyfi, ó refolucion de los Triangulos curvilineos esfericos, formados en la superficie de vna esfera con tres arcos de circulo máximo*" [TOSCA, 1710, p. 68], e indica que va a presentar y demostrar algunos teorema elementales "*… para que no tenga necefsidad el Lector de recurrir á los esfericos de Theodofio, y Menelao.*" [TOSCA, 1710, p. 68].

Pasa a definir conceptos básicos como círculo máximo, polo, ángulo esférico, seno, tangente y secante de un ángulo esférico, siendo estos últimos iguales que los rectilíneos "*… folo que los fenos eftán incluidos dentro de la esfera; y afsi, cualquiera radio, como EG, es el feno total, ù del cuadrante AE: y la recta HI, perpendicular al radio CE, es el feno recto del arco IE: y afsi de los demás.*" [TOSCA, 1710, p. 68].

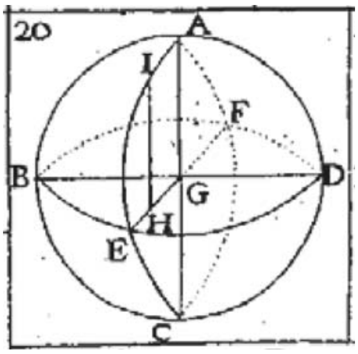


Figura 20

Seguidamente, presenta propiedades básicas sobre círculos máximos y ángulos esféricos, que demuestra apoyándose en figuras y propiedades geométricas elementales.

Pasa a indicar los tipos de triángulos esféricos y demuestra por el mismo procedimiento propiedades de los triángulos con respecto a sus lados y ángulos, presentando los cuatro criterios de igualdad para triángulos esféricos: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado, ángulo-ángulo-ángulo y ángulo-lado-ángulo.

Entre los teoremas destaca la proposición XVIII: "*Dos triangulos esfericos pueden tener dos angulos iguales el uno al otro, cada uno à fu correspondiente: y un lado opuesto à dichos angulos iguales, tambien igual, y fer los triangulos desiguales.*" [TOSCA, 1710, p. 79], de la que deduce que dados dos ángulos y un lado opuesto en un triángulo, puede haber ambigüedad en su resolución, aunque "*Efta ambigüedad fe quitara à fabiendo antes de què especie fea el lado opuesto al angulo*" [TOSCA, 1710, p. 79]. De manera análoga, deduce que si se tienen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos también hay ambigüedad y es necesario saber la especie del tercer ángulo. Finaliza estas propiedades sobre los triángulos tratando las relaciones entre un triángulo y su triángulo polar.

A continuación, pasa a tratar propiedades básicas de los triángulos esféricos rectángulos con respecto a sus lados y ángulos.

Posteriormente presenta propiedades de los triángulos esféricos oblicuángulos, siendo interesante la indicación de que para resolver triángulos se usa en muchas ocasiones el método del *Perpendículo*, *"… el qual no es otra cofa que un arco de circulo maximo, que en un triangulo defciende de uno des fus angulos perpendiculamente fobre el lado opuefto*." [TOSCA, 1710, p. 91]. Con el objetivo de poder aplicar el método del *Perpendículo* presenta entre otras la proposición XXX que será de aplicación en otros teoremas: "*En qualquiera triangulo obliquangulo, fi los angulos fobre la bafe fon de una mefma efpecie, la perpendicular del angulo vertical à la bafe cae dentro del triangulo, y es de la mifma especie que los dichos angulos; pero fi eftos angulos fobre la bafe fon de diferente especie, la perpendicular fobredicha cae fuera del triangulo, y es de la mefma efpecie que el angulo externo. fig. 31.*" [TOSCA, 1710, p. 91].

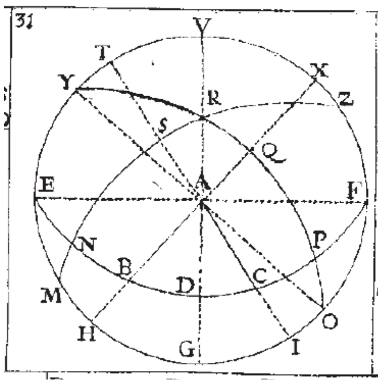


Figura 31

En el Libro V, *De la refolucion de los triangulos esfericos rectangulos*, trata por un lado los teoremas fundamentales para resolver estos triángulos y por otra la forma de resolverlos.

En primer lugar, denomina *hipotenusa* al lado opuesto al ángulo recto y *perpendículo* y *bafe* a los lados que comprenden al ángulo recto. Indica que la resolución de los triángulos esféricos rectángulos se basa en la analogía y proporción de sus partes, que pasa a demostrar mediante dos teoremas, en los que utiliza para su demostración triángulos polares, relaciones de perpendicularidad y propiedades de los triángulos rectilíneos. Los dos teoremas son:

PROPOS. I. En los triangulos rectangulos que tienen un mefmo angulo agudo fobre la bafe, los fenos de las hypotenufas fon proporcionales à los fenos de los perpendiculos. fig. 36. [TOSCA, 1710, pp. 99-100].

Expresándolo como:

Como CE ſeno de la hypotenuſa, ò arco ED,
à EL ſeno del perpendiculo, ò arco EB,
aſsi HF ſeno de la hypotenuſa, ò arco FD,
à FI ſeno del perpendiculo, ò arco FG.

PROPOS. II. En los mifmos triangulos rectangulos, lo fenos de las bafes fon proporcionales con las tangentes de los perpendiculares. fig. 36. [TOSCA, 1710, pp. 100-101].

Expresándolo como:

Como CB ſeno de la baſe BD,
à BM tangente del perpendiculo EB,
aſsi NG ſeno de la baſe GD,
à GK tangente del perpendiculo FG.

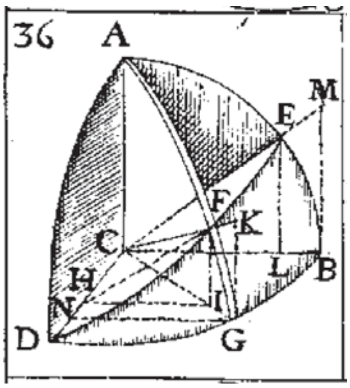


Figura 36

Para la resolución de un triángulo rectángulo se basa en dos triángulos con un ángulo común, *"… como la fig. 36. Los dos triángulos fon DEB, DFG, que tienen el angulo comun D: en los quales fe vè claramente, que el vno, que es DEB, siempre tiene la hypotenufa, y bafe cuadrantes, como lo fon DE, DB: y à efte llamamos Triangulo principal; y al otro, Triangulo proporcional.*" [TOSCA, 1710, p. 102].

También advierte que en las resoluciones de triángulos se dispondrán los términos de la misma forma en que se hace con los triángulos rectilíneos: *"… efto es, en lugar del Logarithmo primero, tomaremos fu complemento Logarithmico; y la fuma de los tres, menos el radio, ferá el Logarithmo del quarto termino que fe bufca.*" [TOSCA, 1710, p. 102].

Con estas herramientas, junto con propiedades que determinan los casos ambiguos cuando los datos que se conocen son un cateto y su ángulo opuesto, presenta trece casos en los que se dan dos elementos del triángulo esférico y se quiere hallar un tercero. En todos estos casos comienza con un ejemplo numérico en el que da los pasos a seguir y posteriormente demuestra las relaciones utilizadas. Por ejemplo, dado el triángulo *DFG* rectángulo en *G*, en el que se dan un ángulo oblicuo *F* que mide 72 grados 25 minutos y un lado *FG* de 37 grados 21 minutos contiguo al ángulo, se quiere hallar el otro ángulo *D*, por lo que aplicando la primera proporción se tiene [TOSCA, 1710, p. 103]:

Proporcion. prop. 1.	Logarithmos.
Como el radio	C.L. 0 0000000.
al ſeno del angulo F 72.gr.25.min.	9.9792198.
aſsi el ſeno ſegundo del lado FG 37.gr.21.m.	9.9003367.
al ſeno ſegundo del angulo D 40.gr.44.m.	9.8795565.

Finaliza el estudio de los triángulos rectángulos explicando la manera de resolver triángulos cuadrantales, reduciendo el problema al estudio de su triángulo polar mediante los casos anteriores.

En el Libro VI, *De la refolucion de los triangulos esfericos obliquangulos*, demuestra en primer lugar los principales teoremas en que fundamenta la resolución de estos triángulos y seguidamente explica la manera de resolverlos.

Comienza indicando que la mayoría de los triángulos esféricos oblicuángulos se resuelven mediante el método del *Perpendículo*, al reducir el triángulo dado a dos triángulos rectángulos.

Los teoremas los va presentando dependiendo de los elementos de que se disponen en el triángulo a estudiar.

La primera relación que presenta es el teorema del Seno, $\frac{sen\,a}{sen\,A}=\frac{sen\,b}{sen\,B}=\frac{sen\,c}{sen\,C}$, aplicando para su demostración el método del *Perpendículo* y propiedades de los triángulos esféricos rectángulos. El teorema del Seno y el método del *Perpendículo* serán el fundamento de la resolución de los triángulos oblicuángulos.

Continúa con proposiciones, en las que a partir de la aplicación del método del *Perpendículo* sobre un triángulo, presenta relaciones de proporcionalidad entre los senos, cosenos y tangentes de los ángulos de los dos triángulos en que se divide el primero, deduciendo entre otras la relación del ángulo mitad para el seno, $sen\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{sen(p-b)\cdot sen(p-c)}{sen\,b\cdot sen\,c}}$.

Pasa a tratar la resolución de los triángulos oblicuángulos, indicando que todos los problemas se reducen a tres especies: "*En la primera fe dan conocidas tres partes alternas: En la fegunda dos alternas, y vna intermedia: En la tercera dos alternas, y vna opuefta.*" [TOSCA, 1710, p. 126].

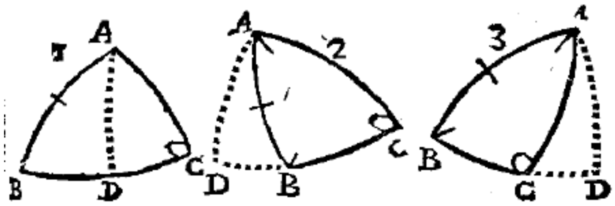
Se basa fundamentalmente en el método del *Perpendículo* e indica varias reglas para conocer la especie de los ángulos en los casos de ambigüedad.

Trata los casos de manera similar a como lo hace al estudiar los triángulos rectángulos, presentando doce casos en los que se dan tres elementos del triángulo esférico y se quiere hallar un cuarto. Para cada uno de los casos da en primer lugar un ejemplo numérico con los pasos a seguir y demuestra posteriormente las relaciones utilizadas.

Como ya se comentó al estudiar la Trigonometría Rectilínea, Tosca concluye la parte de Trigonometría de su obra con un *Apéndice* en el que resume la resolución de cualquier triángulo, tanto rectilíneo como esférico. Para ello, presenta los términos proporcionales dispuestos en cada especie en el mismo orden en que se trataron los problemas a lo largo de la obra, mostrando en primer lugar las resoluciones que sirven para hallar los ángulos y seguidamente las que sirven para hallar los lados.

A modo de ejemplo se presenta el caso en el que se tienen dos lados y el ángulo intermedio, queriendo hallar el ángulo restante [TOSCA, 1710, p. 151]:

1. EN el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y el lado intermedio, hallar el tercer angulo.



1. *Como el radio,*
al ſeno 2. del lado AB.
aſsi la tangente de ABC.
à la tangente 2. de BAD.

Hallado BAD, ſe hallarà CAD.

2. *Como el ſeno de* BAD.
al ſeno de CAD.
aſsi el ſeno 2. de ABC.
al ſeno 2. de ACD.

Adviertaſe, que el angulo ACD, y el angulo ACB en el triangulo 1. y 2. ſon vno meſmo; pero en el 3. es diferente; y aſsi en eſte, el angulo hallado ACD ſe reſtarà de 180. gr. para ſaber el ACB, que es el que ſe deſea.

Tosca basa su estudio sobre los triángulos esféricos en un amplio número de propiedades que deduce geométricamente sobre los lados y ángulos de los triángulos, de las relaciones con sus triángulos polares y de la aplicación del método del *Perpendículo*.

A la hora de resolver los triángulos, se basa principalmente en el método del *Perpendículo* y proporciones deducidas anteriormente, e indica varias reglas para conocer en los casos de ambigüedad la especie de los ángulos.

Trata todos los casos de resolución de triángulos, tanto para rectángulos como para oblicuángulos, dando para cada caso varios elementos del triángulo esférico con el objetivo de hallar otro. Para cada uno de los casos da en primer lugar un ejemplo numérico con los pasos a seguir y presenta posteriormente las relaciones utilizadas.

La segunda de las obras de este periodo es *Compendio de la Geometría elementar, Aritmética inferior, y Trigonometría plana, y espherica*, de Antonio Gabriel Fernández, obra utilizada en la Academia al menos en el periodo 1734-1748.

La obra cuenta con dos ediciones, la segunda de ellas en 1735, que es la que se revisa [FERNÁNDEZ, 1735].

El libro no contiene índice, constando de trescientas veintidós páginas, de las que cuarenta y cuatro páginas y diecinueve figuras tratan la Trigonometría Esférica.

El *Tratado Tercero* contiene la Trigonometría y consta de tres libros, presentando en los dos primeros la Trigonometría Rectilínea y en el tercero la Esférica.

El texto no contiene prólogo y Fernández comienza definiendo conceptos básicos como Trigonometría Esférica, círculo máximo, polo, ángulo esférico o triángulo esférico.

En el primer capítulo, *De las propiedades de los Triángulos efphericos*, el autor presenta algunas proposiciones sobre propiedades de los triángulos esféricos, aunque de forma mucho más reducida a como lo hace Tosca. Comienza demostrando geométricamente propiedades de los triángulos con respecto a sus lados y ángulos, apoyándose en los primeros libros de la obra. También presenta tres de los cuatro criterios de igualdad para triángulos esféricos: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-lado-ángulo.

Al igual que Tosca, presenta una propiedad con el objetivo de poder aplicar el método del *Perpendículo*: "*En el triángulo Efpherico Obliquangulo (ABC) fi los angulos fobre la bafe fon de una efpecie, la perpendicular tirada del angulo vertical à la bafe, cae dentro del triangulo; y fuera, fi dichos angulos fobre la bafe fon de diferente efpecie.*" [FERNÁNDEZ, 1735, p. 231].

Posteriormente, en el segundo capítulo, *De los Theoremas Fundamentales para las refoluciones de los Triángulos Efphericos Rectangulos*, presenta dos teoremas que considera esenciales para la resolución de los triángulos Esféricos rectángulos. Son similares a los presentados por Tosca, aunque la demostración está basada en la utilización de triángulos planos.

El primero de ellos, Proposición XVI dice: "*En el triangulo Efpherico Rectangulo (ABC.) cuyos tres lados fon menores que quadrantes, el feno de la hypothenufa (AB.) es al feno del angulo recto (C.) ò radio: como el feno del lado (BC.) al feno del angulo agudo opuefto (BAC.)*" [FERNÁNDEZ, 1735, p. 236].

El segundo teorema, Proposición XVII dice: "*En el triangulo Efpherico rectangulo (ABC.) el feno del lado (AC.) con termino à el angulo agudo (A.) es à la tangente del lado (CB.) opuefto à dicho angulo, como el feno del angulo recto (C.) ò radio à la tangente del angulo (A.)*" [FERNÁNDEZ, 1735, p. 238].

Seguidamente, en el tercer capítulo, *De la Resolución de los Triangulos Efphericos Rectangulos*, Fernández estudia la resolución de seis casos en los que se dan dos elementos del triángulo esférico y se quiere hallar un tercero, no estudiando todos los casos posibles. Los demuestra apoyándose en los dos teoremas tratados anteriormente, y aunque comenta que en uno de los casos puede haber ambigüedad, no indica la forma de tratarla. Vemos que hace un tratamiento menos exhaustivo que Tosca y no presenta ejemplos ilustrativos de resolución.

Finaliza este apartado tratando los triángulos cuadrantales; se apoya en triángulos rectángulos que construye según los datos de que se dispongan, no utilizando, a diferencia de Tosca, los triángulos polares.

En el cuarto capítulo, *De los Theoremas fundamentales para la refolucion de los Tringulos Efphericos Obliquangulos*, trata los triángulos esféricos oblicuángulos siguiendo un procedimiento muy similar a Tosca, tanto en los teoremas tratados como en las demostraciones y el proceso seguido.

Al igual que Tosca, trata en primer lugar el teorema del Seno, aplicando para su demostración el método del *Perpendículo* y propiedades de los triángulos esféricos rectángulos. A continuación trata proposiciones en las que a partir de la aplicación del método del *Perpendículo* sobre un triángulo obtiene relaciones de proporcionalidad entre los senos, cosenos y tangentes de los ángulos de los dos triángulos en que se divide el primero, destacando por su importancia la relación del ángulo mitad para el seno.

En el quinto capítulo, *De las resoluciones de los Triángulos Efphericos Obliquangulos,* estudia mediante el método del *Perpendículo* doce casos al igual que Tosca, aunque los casos con ambigüedad los comenta sin estudiarlos.

En los casos en que se conocen tres lados o tres ángulos se limita a dar un ejemplo numérico, siendo destacable que el segundo de estos casos lo deduce a partir del primero al relacionar el triángulo con otro mediante el siguiente lema: "*Dado qualquier triangulo (ABC.) en los polos de fus arcos (EDF.) fe forma otro triangulo (FED.) de quien los lados (EF. ED.) fon iguales à los angulos (BAC. CBA.) del primero: y el tercer lado (FD.) es complemento al femicirculo del tercer angulo (ACB.)*" [FERNÁNDEZ, 1735, p. 262].

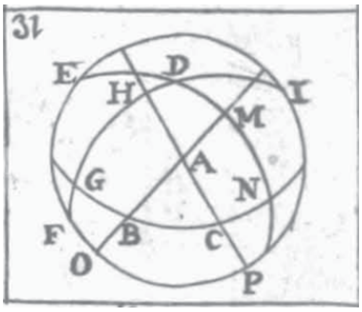


Figura 31

A partir de este lema, también deduce la igualdad de dos triángulos que tienen tres ángulos iguales, relación que no trató al comienzo del estudio sobre la Trigonometría Esférica en su obra.

El estudio de la Trigonometría Esférica en la obra de Fernández sigue en líneas generales un desarrollo similar al realizado por Tosca, aunque claramente su obra es mucho más reducida en contenidos.

Al igual que Tosca, fundamenta la resolución de los triángulos en el método del *Perpendículo*; sin embargo, sus demostraciones difieren en ocasiones al estar las de Fernández basadas en la utilización de triángulos planos y sus propiedades.

En cuanto a la resolución de los triángulos esféricos rectángulos, hace un tratamiento menos exhaustivo que Tosca y no presenta ejemplos ilustrativos de resolución.

Respecto a la resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos, sigue un procedimiento muy similar a Tosca, tanto en los teoremas tratados como en las demostraciones y el proceso seguido.

La tercera de las obras de este periodo es *Trigonometría Esférica para el uso de la Compañía de guardias-marinas de Cádiz*, también de Antonio Gabriel Fernández. La obra fue utilizada en la Academia en el periodo 1783-1802, contando con al menos tres ediciones en 1783, 1784 y 1789.
Es una pequeña obra de la que se ha revisado la edición de 1784, reimpresión elaborada para uso de la Compañía de Guardias Marinas de Cartagena que contiene un complemento en forma de apéndice respecto a las otras dos ediciones [FERNÁNDEZ, 1784]. El libro no contiene índice, constando de cincuenta y cinco páginas y dos láminas con veintiséis figuras.

La obra es una reproducción del anterior libro revisado, *Compendio de la Geometría elementar, Aritmética inferior, y Trigonometría plana, y espherica*, en el que se emplea un castellano más moderno.
En la edición para uso de la Compañía de Guardias Marinas de Cartagena, el autor incluye un *Apéndice* "*Para que nada falte á una perfecta instrucción en materia de resoluciones Trigonometricas, y para facilitar mas y mas la practica de estas resoluciones, y la varia combinación y aplicación de los Theoremas fundamentales.*" [FERNÁNDEZ, 1784, p. 38].
El autor presenta tablas que contemplan todos los casos de resolución de triángulos rectángulos y los más usuales de los triángulos oblicuángulos, junto con problemas de aplicación a la Navegación y la Astronomía.

En primer lugar trata los triángulos rectángulos. Comienza recordando las relaciones más importantes para la resolución de este tipo de triángulos y presenta los triángulos que denomina *complementarios* a un triángulo rectángulo, cuyos lados y ángulos son iguales o complementarios a los del primer triángulo.
Explica cómo a partir de las relaciones entre los triángulos complementarios y las dos propiedades principales, se puede construir la tabla resumen: "*1. el radio es á la hypotenusa como el seno de un angulo oblicuo al seno de su lado opuesto: 2. el radio, es al seno de uno de los catetos, como la tangente del angulo comprendido entre dicho cateto y la hypotenusa, á la tangente del lado opuesto (prop. 16. y 17.), ya sean los tres lados menores cada uno de 90. grados, ya sean los dos catetos mayores de 90. grados*." [FERNÁNDEZ, 1784, pp. 38-39], que el autor elige de "*… entre muchas que se encuentran en diferentes Autores.*" [FERNÁNDEZ, 1784, p. 40].

41

TABLA QUE CONTIENE LA RESOLUCION DE TODOS LOS CASOS posibles en un triangulo esférico rectangulo. En esta tabla uno de los catetos es A, *y su angulo opuesto* m; *el otro cateto* B, *su angulo opuesto* n, *la hypotenusa será* C.

Cãt. dad.	Cãt. bus.	CALCULO.	*Casos en los quales lo que se pide ha de ser menor que 90 grados.*
A B	C	(1) l. Cos.C = l. Cos. A + l. Cos.B — l.R	Si A y B son de la misma especie.
	m	(2) l. Cot.m = l. Cot. A + l. Sen.B — l.R	Si A es menor de 90 grados.
	n	(3) l. Cot. n = l. Sen. A + l.Cot.B — l.R	Si B es menor de 90 grados.
A C	B	(4) l. Cos.B = l. R + l. Cos. C — l. Cos.A	Si A y C son de la misma especie.
	m	(5) l.Sen. m = l.R. + l.Sen. A — l.Sen. C	Si A es menor de 90 grados.
	n	(6) l. Cos. n = l.Tang.A + l.Cot.C — l.R	Si A y C son de la misma especie.
B C	A	(7) l. Cos. A = l.R + l. Cos. C — l. Cos.B	Si B y C son de la misma especie.
	m	(8) l.Cos. m = l.Tang.B + l.Cot. C — l.R	Si B y C son de la misma especie.
	n	(9) l. Sen. n = l. R + l. Sen. B — l. Sen.C	Si B es menor de 90 grados.
A n	B	(10) l.Tang.B = l.Tang. n + l.Sen.A — l.R	(a) Si n es menor de 90 grados.
	C	(11) l. Cot. C = l.Cot. A + l.Cos.n — l.R	Si A y n son de la misma especie.
	m	(12) l. Cos. m = l.Cos.A + l. Sen. n — l.R	Si A es menor de 90 grados.
A m	B	(13) l. Sen. B = l.Tang.A + l.Cot. m — l.R	(b) (c) Casos dudosos.
	C	(14) l. Sen. C. = l.R + l.Sen.A — l.Sen.m	
	n	(15) l. Sen. n = l. R + l.Cos. m — l.Cos.A	
B n	A	(16) l. Sen. A = l.Tang. B + l.Cot.n — l.R	Casos dudosos.
	C	(17) l. Sen. C = l. R + l. Sen. B — l. Sen. n	
	m	(18) l. Sen. m = l. R + l. Cos. n — l. Cos.B	
B m	A	(19) l. Tang. A = l.Sen.B + l.Tang.m — l.R	(d) Si m es menor de 90 grados.
	C	(20) l. Cot. C = l. Cot. B + l. Cos. m — l. R	Si B y m son de la misma especie.
	n	(21) l. Cos. n = l. Cos.B + l. Sen. m — l.R	Si B es menor de 90 grados.
C n	B	(22) l. Sen. B = l. Sen. C + l. Sen. n — l.R	Si n es menor de 90 grados.
	A	(23) l.Tang.A = l.Tang.C + l.Cos. n — l.R	Si C y n son de la misma especie.
	m	(24) l. Cot. m = l.Cos.C + l.Tang.n — l.R	Si C es menor de 90 grados.
C m	A	(25) l. Sen. A = l. Sen. C + l.Sen. m — l.R	Si m es menor de 90 grados.
	B	(26) l.Tang.B = l.Tang.C + l.Cos. m — l.R	Si C y m son de la misma especie.
	n	(27) l.Cot. n = l. Cos.C + l. Tang.m — l.R	Si C y m son de la misma especie.
n m	A	(28) l. Cos. A = l.Cos. m + l R. — l.Sen.n	Si m es menor de 90 grados.
	B	(29) l. Cos. B = l. Cos. n + l.R. — l. Sen.m	Si n es menor de 90 grados.
	C	(30) l. Cos. C = l.Cot. n + l.Cot. m — l.R	Si m y n son de la misma especie.

Seguidamente presenta cinco problemas prácticos de uso en Navegación y Astronomía, en los que se pueden aplicar las fórmulas presentadas en la tabla.

En segundo lugar, presenta una tabla que contiene la resolución de los doce casos más frecuentes de los triángulos oblicuángulos, aunque advierte que si se quisiera realizar una tabla de todos los casos posibles, se llegaría a sesenta.

Recuerda que el fundamento principal de la resolución se basa en el método del *Perpendículo*, por lo que se pueden usar las fórmulas presentadas en la anterior tabla, a las que añade tres fórmulas que deduce a partir de las anteriores y de relaciones de la Trigonometría Rectilínea. Por otra parte, es el primer autor que utiliza las relaciones del ángulo mitad para la resolución de los triángulos. Con estos principios y fórmulas, puede resolver los primeros seis casos de los doce que presenta en la tabla, y para los demás casos hace uso del triángulo polar que denomina *suplementario* [FERNÁNDEZ, 1784, pp. 52-53].

52

TABLA QUE CONTIENE LA RESOLUCION DE LOS CASOS mas frequentes del triangulo oblicuangulo.

Cãti-dades dadas	Cãti-dades busc.	CALCULO.	*Casos en los que lo que se busca ha de ser menor de 90. grados.*
m	B	(1) l. Sen. B = Sen. m + l. Sen. C — l. Sen. p.	Dudoso.
p	A	por el n. 4. form. XXIII. l. Tang. x = l. Cos. m + l. Tang. C — l. R	Si tanto C, como m son < 90°.
		Por el n. 7. 2. l. Sen. z = l. Tang. m + l. Sen. x — l. Tang. p	Si tanto p, como B son < 90°.
		(2) A es igual à la suma, ò à la diferencia de los segmentos x, z segun que m, p son de la misma ù de diferente especie.	
C	n	Por el n. 4. form. XXIV. l. Cot. v = l. Cos. C + l. Tang. m — l. R.	Si tanto C, como m es < 90°.
		Por el n. 7. 5. l. Sen. y = l. Cos. p + l. Sen. v — l. Cos. m.	Si tanto B, como p es < 90°.
		(3) n es igual à la suma ó à la diferencia de v, y segun que m, p son de la misma ù de diferente especie.	
n	B	(4) Por el n. 7. 4. l. Cot. B = l. Cos. y + l. Cot. C — l. Cos. v.	Si y, m son de la misma especie.
m	A	Por el n. 4. form. XXIV. l. Cot. y = l. Cos. C. + l. Tang. n — l. R.	Si tanto C, como m es < 90°.
		Segun la posicion de la perpendicular se halla v igual à la suma ù à la diferencia de y, m.	
C	p	(5) Por el n. 7. 5. l. Cos. p = l. Sen. y + l. Cos. m — l. Sen. v.	Si v < n, y m < 90°.
m	C	Por el n. 4. form. XXIV. l. Cot. v = l. Cos. A + l. Tang. p — l. R. Segun la posicion de la perpendicular, se hallará y igual à la suma ù à la diferencia de m, v.	Si tanto A como p es < 90°.
A	n	(6) l. Sen. n = l. Sen. A + l. Sen. p — l. Sen. C.	Dudoso.
C	m	Por el n. 4. form. XXIV. l. Cot. v = l. Cos. A + l. Tang. p — l. R.	Si tanto A, como p es < 90°.
		Por el n. 7. 4. l. Cos. y = l. Tang. A + l. Cos. v — l. Tang. C.	Si tanto C, como p es < 90°.
		(7) m es igual à la suma, ò à la diferencia de v, y segun que A, C son de la misma, ò de diferente especie.	

53

Cãtidades dadas	Cãtidades busc.	CALCULO.	*Casos en los que lo que se busca ha de ser menor de 90. grados.*
p	B	Por el n. 4. form. XXIII. l. Tang. x = l. Tang. A + l. Cos. p — l. R. Por el n. 7. 3. l. Cos. z = l. Cos. C + l. Cos. x — l. Cos. A. (8) B es igual à la suma, ò à la diferencia de x, z segun que A, C son de la misma, ò de diferente especie.	Si tanto A, como p es $< 90^{\circ}$. Si tanto C, como p es $< 90^{\circ}$.
A	p	(9) Por el n. 7. 2. l. Tang. p = l. Sen. z + l. Tang. m — l. Sen. z.	Si tanto C, como m es $< 90^{\circ}$.
C	n	Por el n. 4. form. XXIII. l. Tang. z = l. Tang. A + l. Cos. m — l. R. Segun la posicion de la perpendicular se hallará x igual à la suma, ò à la diferencia de z, C.	Si tanto A, como m es $< 90^{\circ}$.
m	B	(10) Por el n. 7. 3. l. Cos. B = l. Cos. z + l. Cos. C — l. Cos. x.	Si tanto C, como m es $< 90^{\circ}$.
A	P	(11) Por el n. 9. l. Sen. ½ P = $\frac{2\,\text{l.R} + \text{l.Sen.}\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \text{l.Sen.}\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C - \text{l.Sen.A} - \text{l.Sen.B}}{2.}$	
p	C	(12) Por el n. 9. l. Cos. ½ C = $\frac{2\,\text{l.R} + \text{l.Cos.}\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n + \text{l.Cos.}\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n - \text{l.Sen.m} - \text{l.Sen.n}}{2.}$	

Concluye el *Apéndice* comentando y explicando una nota presentada por Bézout al final de su Trigonometría Esférica, que veremos al estudiar este autor, por la que "*Suponiendo siempre que ninguna de las partes de un triangulo esferico no excede de 180 grados, se puede con una regla muy facil determinar, si el termino que se busca es realmente menor de 90 grados, ò si puede ser mayor ò menor de 90 grados.*" [FERNÁNDEZ, 1784, p. 54]. Es destacable el hecho de que Fernández es el primero de los autores españoles revisados que cita y comenta a Bézout, lo que da muestras del conocimiento de este autor sobre desarrollo de la Trigonometría Esférica fuera de España.

Así pues, tal y como se comentó en su obra *Compendio de la Geometría elementar, Aritmética inferior, y Trigonometría plana, y espherica*, la obra de Fernández sigue en líneas generales un desarrollo similar al realizado por Tosca, aunque claramente su obra es mucho más reducida en contenidos.

En el *Apéndice* de la obra, Fernández presenta tablas que contemplan todos los casos de resolución de triángulos rectángulos y los más usuales de los triángulos oblicuángulos, junto con problemas de aplicación a la Navegación y la Astronomía, siendo el primer autor de los estudiados que presenta este tipo de tablas.

La cuarta obra en orden cronológico, *Tratado de Trigonometría Esférica para la instrucción de los Guardias Marinas*, pertenece a *Gabriel Ciscar y Ciscar*, maestro de Matemáticas de la Real Academia de Guardias Marinas de Cartagena durante el periodo 1778-1788 y posteriormente Director de la misma durante el periodo 1788-1798. La primera edición data de 1795 y fue usada para la instrucción de los Guardias Marinas. Se ha revisado la edición de 1796, que consta de ochenta y cuatro páginas y dos láminas con treinta y nueve figuras [CISCAR, 1796].

En el *Prólogo*, el autor realiza una descripción de los diferentes capítulos de la obra y da indicaciones didácticas para su estudio, como por ejemplo el uso de letra menor en algunas proposiciones.

Ciscar comienza en el primer capítulo, *Nociones generales sobre los planos*, presentando definiciones y propiedades de Geometría elemental sobre rectas y planos, pues según el autor, "*No se puede emprender el estudio de la Trigonometría esférica y Cosmografía, sin el conocimiento de algunas propiedades de los planos que van a demostrarse*." [CISCAR, 1796, p. 1]. La mayoría de estos contenidos no aparecen en las anteriores obras revisadas, al considerarse conocidos.

Continúa en los tres siguientes capítulos con lo que, según Ciscar, numerosos autores denominan *Esféricos*, esto es, *"… como si dixéramos la Geometría de las líneas descritas sobre la superficie de una esfera."* [CISCAR, 1796, p. 1ª Prólogo].
A lo largo de estos capítulos, el autor hace continuas referencias a su obra *Tratado de Aritmética: para la instrucción de los guardias marinas* [CISCAR, 1795] y a la obra de Tofiño, *Compendio de la geometría elemental y trigonometría rectilínea: para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas en su Academia* [TOFIÑO, 1771].
En el segundo capítulo, *De las curvas descritas sobre las superficies de la esfera y de sus ángulos*, Ciscar trata definiciones básicas y propiedades relacionadas con conceptos como esfera, círculo máximo, polo, ángulo esférico o círculos menores, de forma similar a como lo hacen Tosca y Fernández.

En el tercer capítulo, *Del valor de lados y ángulos de los triángulos esféricos y de su Igualdad*, sigue un desarrollo similar al realizado por Tosca. Indica los tipos de triángulos esféricos y presenta propiedades básicas sobre los triángulos con respecto a sus lados y ángulos. Posteriormente presenta los cuatro criterios de igualdad para triángulos esféricos: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado, ángulo-ángulo-ángulo y ángulo-lado-ángulo, aunque su demostración difiere de las de Tosca y Fernández al basarse en propiedades de los triángulos rectilíneos.

En el siguiente capítulo, *De la relación que hay entre las especies de los lados y ángulos de los triángulos esféricos*, demuestra varios teoremas que relacionan los lados y ángulos de triángulos rectángulos y oblicuángulos. También trata la posición del *perpendículo*, para lo que introduce conceptos como *ángulo vertical*, *base*, *primer lado*, *primer ángulo* o *secmento*, con el objetivo de poder aplicar posteriormente el método del *Perpendículo*.
Finaliza este apartado presentando una tabla con las combinaciones de las especies de los lados y los ángulos de triángulos esféricos oblicuángulos [CISCAR, 1796, p. 45]:

Lados	Angulos
Tres obtusos	Tres obtusos
Dos obtusos y un agudo	Tres obtusos
	Dos obtusos y un agudo
	Dos agudos y un obtuso
Dos agudos y un obtuso	Dos agudos y un obtuso
Tres agudos.	Tres agudos
	Dos agudos y un obtuso

Tabla con las combinaciones de las especies de los lados y los ángulos de triángulos esféricos oblicuángulos

En el siguiente capítulo, *De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esf*éricos, indica que "… *los senos, cosenos, tangentes, y cotangentes, se designarán en general con el nombre de líneas trigonométricas.*" [CISCAR, 1796, p. 46], aunque no da un definición explícita de las líneas.

Comenta brevemente el manejo de tablas de líneas trigonométricas naturales y demuestra que para estudiar las relaciones que tienen entre sí las líneas trigonométricas de los términos de un triángulo rectángulo, basta con comprobarlo para el caso en el que los tres lados son agudos.

Pasa a demostrar tres teoremas que relacionan los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Dos de ellos son equivalentes a los que presentan Tosca y Fernández:

"*En qualquier triángulo esférico rectángulo, el radio es al seno de uno de los ángulos oblicuos, como el seno de la hipotenusa al seno del cateto opuesto á dicho ángulo*" [CISCAR, 1796, p. 48].

"En todo triángulo esférico rectángulo, el radio es á la tangente de uno de los ángulos oblicuos, como el seno del cateto adyacente, á la tangente del cateto opuesto á dicho ángulo" [CISCAR, 1796, p. 50].

El tercero no aparece en las anteriores obras:

"*En qualquier triángulo esférico rectángulo, el radio es al coseno de uno de los ángulos oblicuos, como la tangente de la hipotenusa á la tangente del cateto adyacente á dicho ángulo*." [CISCAR, 1796, p. 52].

De nuevo, basa las demostraciones en utilizar las relaciones de un triángulo plano.

El autor recalca su apoyo en la Trigonometría Rectilínea al comentar que no presenta ejemplos numéricos *"… por ser estas soluciones muy semejantes á las de la trigonometría rectilínea; y en la Cosmografía y Navegación se verán aplicadas á la práctica con utilidad.*" [CISCAR, 1796, p. 50].

Seguidamente, al igual que Fernández, define y trata propiedades sobre el *triángulo complementario* a uno dado. De esta forma, resuelve todos los casos de triángulos esféricos rectángulos, presentando una *regla general* en la que se indican los casos y las relaciones que hay que utilizar en cada situación para resolverlos.

Presenta dos ejemplos numéricos y un resumen con las seis analogías fundamentales que recogen las relaciones de todos los términos de los triángulos rectángulos, tomados tres a tres [CISCAR, 1796, p. 56]:

Caso 1.º La hipotenusa y los dos catetos.
R : cos. cateto 1.º : : cos. cateto 2.º : cos. hipotenusa.
Caso 2.º La hipotenusa , un cateto , y el ángulo opuesto.
R : sen. ángulo : : sen. hipotenusa : sen. cateto.
Caso 3.º La hipotenusa , un cateto , y el ángulo adyacente.
R : cos. ángulo : : tan. hipotenusa : tan. cateto.

Caso 4.º La hipotenusa y los dos ángulos.
R : cos. hipotenusa : : tan. ángulo 1.º : cot. ángulo 2.
Caso 5.º Los dos catetos y un ángulo.
R : tan. ángulo :: sen. cateto adyacente : tan. cateto opuesto.
Caso 6.º Un cateto y los dos ángulos.
R : cos. cateto : : sen. ángulo adyacente : cos. ángulo opuesto.

Vemos que realiza un tratamiento más superficial al realizado por Tosca, presentando los casos a partir de tres elementos de los que se conocen dos, en lugar de la usual clasificación según los elementos de que se dispone, y no tratando las posibles ambigüedades que se pueden presentar.

En el capítulo *De la resolución de los triángulos quadrantales* se apoya en los *triángulos suplementarios* para estudiar el triángulo rectángulo asociado, método distinto a los utilizados por Tosca y Fernández.

Posteriormente, en el capítulo *De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos,* Ciscar comienza indicando, que salvo en los casos de conocerse los tres lados o los tres ángulos de un triángulo, la resolución de un triángulo esférico oblicuángulo se realiza mediante el método del *Perpendículo*, que explica paso a paso. Aplicando el método demuestra el teorema del Seno, dando la relación dentro de la resolución de un problema.
Siguiendo estos pasos, resuelve varias situaciones de resolución de triángulos, algunas distintas a las tratadas por Tosca y Fernández al introducir como datos los *secmentos*.
Pasa a demostrar las fórmulas del ángulo mitad para el seno y el coseno basándose en triángulos rectilíneos y concluye el apartado reuniendo los principios y proporciones expuestos, de manera que se puedan usar directamente en los problemas de resolución de triángulos.

Seguidamente, en el capítulo *Aplicaciones*, comenta que "*Quando lo que se busca no se puede hallar directamente por alguna de las fórmulas del artículo antecedente, es preciso recurrir al perpendículo, y resolver el triángulo por la siguiente regla.*" [CISCAR, 1796, p. 69], que explica en tres pasos.
Pasa a explicar los seis casos de resolución de triángulos oblicuángulos utilizando el método del *Perpendículo*, comentando en los dos que presentan ambigüedad, únicamente que el ángulo puede tener dos valores.

En el capítulo *De las aplicaciones de la trigonometría esférica a la rectilínea*, Ciscar da una breve explicación de cómo aplicar las fórmulas de la Trigonometría Esférica a la Rectilínea, siendo el primero de los autores estudiados en tratar el tema. Se basa en que todo triángulo rectilíneo se puede considerar como un triángulo esférico con lados sumamente pequeños y a partir de esta idea, considera que se pueden aplicar a la Trigonometría Rectilínea muchas de las proposiciones de la Trigonometría Esférica.

El siguiente capítulo, *De los defectos del método ordinario de resolver los triángulos esféricos en ciertos casos*, estudia el problema de cómo afectan los errores en los cálculos cuando se toman ciertos valores extremos, como por ejemplo el cálculo del seno para ángulos cercanos a 0º ó 180º, siendo el primero de los autores estudiados en tratar el tema.

Comenta que "*Conviene evitar en ciertos casos las expresiones en que el término que se busca se halla por medio de su seno ó coseno, y substituirles otras que (aunque sea con mas trabajo) manifiesten el resultado con mas exactitud.*" [CISCAR, 1796, p. 74].

También indica que *"Quando se ha de obtener el valor de un arco ó ángulo medios por medio de su seno, ó el de un arco ó ángulo extremos por medio de su coseno , basta una leve omisión en los datos para introducir un error considerable en el resultado : y mucho mas si dichos datos son senos tangentes ó cotangentes de arcos extremos , ó cosenos , tangentes, ó cotangentes de arcos medios."* [CISCAR, 1796, p. 74].

Muestra un ejemplo de sustitución de expresiones para poder obtener el error con una aproximación determinada, y concluye el apartado explicando que las demostraciones de las fórmulas necesarias para evitar estos errores requieren de más principios de los que presenta la obra.

Continúa Ciscar con el capítulo *De los triángulos diferenciales*. El autor, el primero de los estudiados que trata este contenido, indica que en algunos casos un pequeño error en los términos conocidos de un triángulo produce un importante error en los datos que se buscan, no tanto por el método de cálculo si no por la naturaleza del triángulo. Esta circunstancia es de gran importancia al hacer observaciones astronómicas cuando se busca que los astros estén en una posición determinada en la que aunque se cometa algún error en los términos del triángulo que se conocen por observación, se obtenga un error despreciable.

Es por ello que conviene establecer la relación entre las variaciones o diferencias pequeñas de los términos de los triángulos esféricos, relaciones que se expresan por medio de las líneas trigonométricas de los términos del triángulo propuesto. Indica que es una materia muy extensa, denominada *triángulos diferenciales*, limitándose a dar unas breves nociones sobre las características de algunos ángulos de los triángulos que se pueden estudiar durante los usos ordinarios de la Navegación. Finaliza el apartando recomendando el tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica de Cagnoli [1804].

Seguidamente, en el capítulo *Advertencias para la práctica*, Ciscar indica la mejor forma de trabajar con logaritmos y presenta un resumen de las condiciones que debe cumplir todo triángulo esférico con el objetivo de poder determinar si tiene sentido cualquier ejercicio planteado.

En el último capítulo, *Advertencias sobre algunos artículos*, presenta varios comentarios y aclaraciones sobre artículos y proposiciones presentados a lo largo de la obra.

La obra de Ciscar sigue en líneas generales la estructura de las obras de Tosca y Fernández, aunque presenta ciertas peculiaridades.
Si bien es una obra más reducida que la de Tosca, comienza el libro con unas nociones generales sobre rectas y planos que no aparecen en las anteriores obras.
Pasa a estudiar los *Esféricos* de forma similar a como lo hace Tosca, basándose en el método del *Perpendículo*, aunque en sus demostraciones hace un mayor uso de las propiedades de los triángulos rectilíneos.

Al estudiar la resolución de triángulos rectángulos presenta, además de los dos teoremas tratados por Tosca y Fernández, una tercera relación. Resuelve todos los casos de triángulos rectángulos y ofrece un resumen con las seis analogías fundamentales que recogen las relaciones de todos los términos de los triángulos rectángulos, tomados tres a tres. Su planteamiento de los casos es diferente al realizado por Tosca y Fernández, presentando los casos a partir de tres elementos de los que se conocen dos, en lugar de la usual clasificación según los elementos de que se dispone, y no tratando las posibles ambigüedades que se pueden presentar.

En cuanto a la resolución de triángulos oblicuángulos, presenta el teorema del Seno a lo largo del estudio de un problema usando en su demostración el método del *Perpendículo*. Posteriormente vuelve a realizar un resumen con los principios y proporciones necesarios para la resolución de los triángulos. No trata los casos que presentan ambigüedad, indicando únicamente su existencia.

Ciscar es el primer autor de los revisados que trata, si bien brevemente, las aplicaciones de la Trigonometría Esférica a la Rectilínea, los errores de los cálculos cuando se toman ciertos valores extremos de ángulos, y los triángulos diferenciales.

Vemos que Ciscar realiza un tratado en el que los Guardias Marinas puedan aprender, sin necesidad de usar otras obras, los contenidos básicos sobre la Trigonometría Esférica, presentando a lo largo de la obra resúmenes que son de directa aplicación para la resolución de los triángulos.

Una vez revisadas las obras, observamos que las cuatro estudiadas siguen una estructura similar, comenzando con definiciones y propiedades básicas de la Trigonometría Esférica, presentando posteriormente propiedades de los triángulos esféricos rectángulos junto con el estudio de su resolución, y aplicando el método del *Perpendículo* y el teorema del Seno para demostrar propiedades y resolver los triángulos esféricos oblicuángulos.

Pasamos a ver la forma en que evolucionaron cada uno de estos elementos a lo largo del siglo XVIII.

Respecto a las definiciones y propiedades básicas de la Trigonometría Esférica, Tosca presenta un amplio número de propiedades, apoyándose en figuras y propiedades geométricas elementales junto con los triángulos polares; por otra parte estudia los casos de ambigüedad.

Fernández lo hace de manera similar a Tosca, pero de una forma mucho más reducida.

Ciscar presenta previamente definiciones y propiedades de Geometría elemental sobre rectas y planos, que no incluyen los otros autores. Trata una cantidad de contenidos similares a los que ve Tosca, haciendo especial hincapié en el estudio de las combinaciones de las especies de los lados y los ángulos de triángulos esféricos oblicuángulos.

En cuanto al estudio de las propiedades y la resolución de los triángulos esféricos rectángulos, Tosca trata en primer lugar propiedades básicas con respecto a sus lados y ángulos. Posteriormente presenta dos teoremas que aportan las relaciones que aplicará en la resolución de estos triángulos; con estas relaciones y las propiedades que determinan los casos ambiguos cuando los datos que se conocen son un cateto y su ángulo opuesto, presenta trece casos en los que se dan dos elementos del triángulo esférico y se quiere hallar un tercero; en todos los casos ofrece ejemplos ilustrativos. En el *Apéndice* de su obra presenta los términos proporcionales dispuestos en cada especie en el mismo orden que se trataron los problemas a lo largo de la obra, mostrando en primer lugar las resoluciones que sirven para hallar los ángulos y seguidamente las que sirven para hallar los lados. Finaliza el estudio de los triángulos rectángulos explicando la manera de resolver triángulos cuadrantales, reduciendo el problema al estudio de su triángulo polar mediante los casos anteriores.

Fernández presenta las dos relaciones de forma similar a como lo hace Tosca, aunque las demostraciones están basadas en la utilización de triángulos planos. Pasa a estudiar la resolución de los triángulos esféricos rectángulos revisando seis casos en los que se dan dos elementos del triángulo esférico y se quiere hallar un tercero, no estudiando todos los casos posibles. Aunque comenta que en uno de los casos puede haber ambigüedad, no indica la forma de tratarla, y tampoco presenta ejemplos ilustrativos de resolución. En el *Apéndice* de su segunda obra presenta una tabla que contempla todos los casos de resolución de triángulos rectángulos, junto con problemas de aplicación a la Navegación y la Astronomía. En cuanto al tratamiento de los triángulos cuadrantales, se apoya en triángulos rectángulos que construye según los datos de que se dispone sin utilizar triángulos polares, como hace Tosca.

Ciscar, además de las dos relaciones estudiadas por Tosca y Fernández, presenta una tercera, basando sus demostraciones en la utilización de relaciones en los triángulos planos. Ayudado de las propiedades del *triángulo complementario* a uno dado resuelve todos los casos de triángulos esféricos rectángulos, presentando una *regla general* en la que se indican los casos y las relaciones que hay que utilizar en cada situación para resolverlos. A diferencia de los demás autores, presenta los casos a partir de tres elementos de los que se conocen dos, en lugar de la usual clasificación según los elementos de que se dispone, y no trata las posibles ambigüedades que se pueden presentar. Respecto al tratamiento de los triángulos cuadrantales, se apoya en los *triángulos suplementarios* para estudiar el triángulo rectángulo asociado.

En cuanto al estudio de las propiedades y la resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos, los tres basan el estudio en la aplicación del método del *Perpendículo* y las relaciones del teorema del Seno.

Tosca comienza demostrando el teorema del Seno, continuando con proposiciones en las que a partir de la aplicación del método del *Perpendículo* sobre un triángulo presenta relaciones de proporcionalidad entre los senos, cosenos y tangentes de los ángulos de los dos triángulos en que se divide el primero, deduciendo entre otras la relación del ángulo mitad para el seno. Pasa a tratar la resolución de los triángulos oblicuángulos, indicando que todos los problemas se reducen a tres especies. Trata los casos de manera similar a como lo hace al estudiar los triángulos rectángulos, presentando doce casos en los que se dan tres elementos del triángulo esférico y se quiere hallar un cuarto. Para cada uno de los casos da en primer lugar un ejemplo numérico con los pasos a seguir y demuestra posteriormente las relaciones utilizadas. Al igual que con los triángulos rectángulos, en el *Apéndice* de su obra presenta los términos proporcionales dispuestos en cada especie en el mismo orden en que se trataron los problemas a lo largo de la obra, mostrando en primer lugar las resoluciones que sirven para hallar lo ángulos y seguidamente las que sirven para hallar los lados.

Fernández sigue un procedimiento muy similar a Tosca, tanto en los teoremas tratados como en las demostraciones y el proceso seguido. En cuanto a la resolución de triángulos, estudia mediante el método del *Perpendículo* doce casos al igual que Tosca, aunque los casos con ambigüedad los comenta sin estudiarlos. En el *Apéndice* incluye una tabla resumen de los doce casos.

Ciscar, al tratar los triángulos esféricos oblicuángulos utiliza el teorema del Seno y resuelve varias situaciones de resolución de triángulos, algunas distintas a las tratadas por Tosca y Fernández al introducir como datos los *secmentos*. Pasa a demostrar las fórmulas del ángulo mitad para el seno y el coseno, basándose en triángulos rectilíneos, y concluye el apartado reuniendo los principios y proporciones expuestos de manera que se puedan usar directamente en los problemas de resolución de triángulos. Seguidamente explica los seis casos de resolución de triángulos oblicuángulos mediante el método del *Perpendículo*, comentando únicamente en los dos casos que presentan ambigüedad que el ángulo puede tener dos valores.

Por otra parte, es destacable que Ciscar introduce ciertas novedades con respecto a Tosca y Fernández, al tratar brevemente las aplicaciones de la Trigonometría Esférica a la Rectilínea, los errores de los cálculos cuando se toman ciertos valores extremos de los ángulos y la utilización de los triángulos diferenciales.

Vemos que los tres autores fundamentan la resolución de los triángulos en las proporciones del teorema del Seno y en el método del *Perpendículo*, aunque el estudio de los distintos casos varía entre los autores, presentando Ciscar un planteamiento diferente al de Tosca y Fernández.

A partir de estos resultados podemos concluir que a lo largo del siglo XVIII no cambiaron sustancialmente los contenidos esenciales sobre Trigonometría Esférica que un Guardia Marina necesitaba para su formación, siendo el tratado de Tosca un referente para el resto de obras.

Estos contenidos eran por una parte el manejo de los triángulos esféricos y sus propiedades básicas, y por otra parte la resolución de triángulos esféricos junto con las propiedades y teoremas necesarios para ello, destacando la aplicación del teorema del Seno y el uso del método del *Perpendículo* para la resolución de los triángulos oblicuángulos.

I.9.2.2. **Obras francesas**

Como ya comentamos al estudiar la Trigonometría Rectilínea, a lo largo del siglo XVIII en las Academias de Guardias Marinas se utilizaron dos obras francesas directamente relacionadas con la Trigonometría; ambas obras fueron utilizadas para la formación de diversos contenidos en los *Cursos de Estudios Mayores* durante los periodos 1783-1802 y 1802-1824.
Su estudio nos puede ofrecer información del desarrollo de la Trigonometría Esférica a nivel internacional para poder valorar posteriormente si las enseñanzas en la Armada estaban dentro de la banda de modernidad europea.
Se va a proceder a describir brevemente cada una de las obras, con el objetivo de contextualizar e identificar los contenidos de Trigonometría Esférica que se estudiaban en Europa a finales de este siglo.

La primera de las obras estudiadas es *Cours de mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Seconde Partie, Contenant le Élemens de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne & la Trigonométrie fphérique* de Etienne Bézout [BÉZOUT, 1771].
La obra fue recomendada en todas las ocasiones junto con la obra de La Caille que estudiaremos posteriormente.

Recordamos que en el *Prefacio*, Bézout indica la importancia de los contenidos de la obra para los estudiantes de Marina y para la práctica de la Navegación. Advierte de la necesidad de tener unos conocimientos básicos para poder seguir la obra, y que a lo largo del texto pretende deducir consecuencias útiles y aplicaciones a partir de las proposiciones y principios que se expongan. Posteriormente, describe las secciones en que divide las tres partes de la obra (Geometría, Trigonometría Rectilínea y Trigonometría Esférica) y concluye señalando que para facilitar el estudio del libro no utilizará términos como axioma o teorema, aunque explica sus significados por si los lectores consultan otras obras.

La parte dedicada en la obra a la Trigonometría Esférica lleva por título *Trigonométrie Sphérique*.

Comienza el primer apartado, *Notions préliminaires*, con definiciones y propiedades básicas de los ángulos en los triángulos esféricos y de los polos de un círculo máximo. Seguidamente explica brevemente conceptos astronómicos y de navegación como meridianos, paralelos, latitud o longitud.

En el segundo apartado, *Propriétés des Triangles Sphériques*, explica de forma similar a como lo hace Tosca, propiedades de los triángulos con respecto a sus lados y ángulos, introduciendo los triángulos suplementarios y presentando los cuatro criterios de igualdad para triángulos esféricos: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado, ángulo-ángulo-ángulo y ángulo-lado-ángulo.

En el tercer apartado, *Moyens de reconnaître dans quel cas les angles ou les còtés qu'on cherche dans les Triangles sphériques Rectangles doivent être plus grands ou plus petits que 90º*, continúa presentado propiedades sobre los triángulos esféricos rectángulos con respecto a sus lados y ángulos.

En el cuarto, *Principes pour la Réfolution des Triangles Sphériques Rectangles*, presenta tres principios fundamentales para la resolución de este tipo de triángulos, junto con ejemplos aclaratorios. Uno de los principios es de aplicación para cualquier tipo de triángulo y los otros dos exclusivamente para triángulos rectángulos.

El primer principio es el teorema del Seno, que enuncia de la siguiente forma: "*Dans tout triangle fphérique ABC (Fig. 175), on a toujours cette proportion: Lé finus d'un des angles, eft au finus du còté oppsfé à cet angle, comme le finus d'un autre angle, eft aur finus du còté oppofé à celui-ci*." [BÉZOUT, 1771, p. 322].

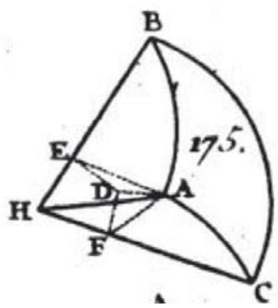


Figura 175

Para su demostración se apoya en relaciones de triángulos planos deducidos a partir del triángulo esférico.

El segundo principio da la relación en un triángulo rectángulo, entre los senos y tangentes de los lados y ángulos: “*Dans tout triangle fphérique rectangle, le rayon eft au finus d’un des côtés de l’angle droit, comme la tangente de l’angle oblique oppofé à l’autre côté de l’angle droit, eft à la tangente de c même côté*.” [BÉZOUT, 1771, p. 323].

El tercer principio se basa en la construcción de un triángulo complementario a un triángulo rectángulo dado, para poder deducir nuevas propiedades a partir de dicho triángulo: “*Dans tout triangle fphérique rectangle ABC (Fig. 177), fi l’on prolonge les deux côtés BC, AC d’un des angles obliques, jufqu’en D et E, de maniere que BD, AE foient Chacón de 90º, et qu’on joigne les extrémités D et E par un arc de grand cercle DE; on aura un Nouveau triangle CED rectangle en E, dont les parties feront, ou égales à celles du triangle ABC, ou leur complément*.” [BÉZOUT, 1771, p. 324].

Después de mostrar varios ejemplos, vuelve a recalcar la utilidad de los triángulos complementarios y presenta una tabla en el apartado *Table pour la Réfolution de tous les cas poffibles des Triangles Sphériques*. En dicha tabla indica en cada caso el principio que hace falta para hallar un elemento del triángulo según los elementos dados [BÉZOUT, 1771, p. 333].

Table pour la réſolution de tous les cas poſſibles des Triangles Sphériques Rectangles (a).

Etant donnés	*Trouver*	*Proportion à faire.*	*Cas où ce que l'on cherche doit être moindre que 90°.*
AB, AC	C	*Sin* AC : R :: *ſin* AB : *ſin* C	Si AB eſt moindre que 90°.
	A	*Cot* AB : *cot* AC :: R : *coſ* A	Si AB & AC ſont de même eſpece.
	BC	*Coſ* AB : *coſ* AC :: R : *coſ* BC	Si AB & AC ſont de même eſpece.
AB, BC	A	*Sin* AB : R :: *tang* BC : *tang* A	Si BC eſt moindre que 90°.
	C	*Sin* BC : R :: *tang* AB : *tang* C	Si AB eſt moindre que 90°.
	AC	R : *coſ* BC :: *coſ* AB : *coſ* AC	Si AB & BC ſont de même eſpece.
AB, A	C	R : *coſ* AB :: *ſin* A : *coſ* C	Si AB eſt moindre que 90°.
	AC	R : *coſ* A :: *cot* AB : *cot* AC	Si AB & A ſont de même eſpece.
	BC	R : *ſin* AB :: *tang* A : *tang* BC	Si A eſt moindre que 90°.
AB, C	A	*Coſ* AB : R :: *coſ* C : *ſin* A	Douteux.
	AC	*Sin* C : *ſin* AB :: R : *ſin* AC	Douteux.
	BC	*Tang* C : *tang* AB :: R : *ſin* BC	Douteux.
BC, AC	A	*Sin* AC : R :: *ſin* BC : *ſin* A	Si BC eſt moindre que 90°.
	C	*Cot* BC : *cot* AC :: R : *coſ* C	Si AC & BC ſont de même eſpece.
	AB	*Coſ* BC : *coſ* AC :: R : *coſ* AB	Si AC & BC ſont de même eſpece.
BC, A	C	*Coſ* BC : R :: *coſ* A : *ſin* C	Douteux.
	AC	*Sin* A : *ſin* BC :: R : *ſin* AC	Douteux.
	AB	*Tang* A : *tang* BC :: R : *ſin* AB	Douteux.
BC, C	A	R : *coſ* BC :: *ſin* C : *coſ* A	Si BC eſt moindre que 90°.
	AC	R : *coſ* C :: *cot* BC : *cot* AC	Si BC & C ſont de même eſpece.
	AB	R : *ſin* BC :: *tang* C : *tang* AB	Si C eſt moindre que 90°.
AC, A	C	*Coſ* AC : R :: *cot* A : *tang* C	Si AC & A ſont de même eſpece.
	AB	*Coſ* A : R :: *cot* AC : *cot* AB	Si AC & A ſont de même eſpece.
	BC	R : *ſin* AC :: *ſin* A : *ſin* BC	Si A eſt moindre que 90°.
AC, C	A	R : *coſ* AC :: *tang* C : *cot* A	Si AC & C ſont de même eſpece.
	AB	R : *ſin* AC :: *ſin* C : *ſin* AB	Si C eſt moindre que 90°.
	BC	*Coſ* C : R :: *cot* AC : *cot* BC	Si AC & C ſont de même eſpece.
A, C	AC	*Tang* C : *cot* A :: R : *coſ* AC	Si A & C ſont de même eſpece.
	AB	*Sin* A : *coſ* C :: R : *coſ* AB	Si C eſt moindre que 90°.
	BC	*Sin* C : *coſ* A :: R : *coſ* BC	Si A eſt moindre que 90°.

(a) Cette Table ſe rapporte au triangle *ABC* de la *Figure* 177, dans laquelle *B* eſt l'angle droit.

Es destacable que a diferencia de los anteriores autores revisados, no hace referencia a los triángulos cuadrantales.

En el sexto apartado, *Des Triangles Sphériques Obliquangles*, indica que para resolver los triángulos rectángulos hace falta una única relación para cada caso, mientras que en varios de los casos para triángulos oblicuángulos son necesarias dos relaciones al aplicar el *método del Perpendículo*, pasando a explicar algunas propiedades relacionadas con el método.

En el séptimo apartado, *Principes pour la Réfolution des Triangles Sphériques Obliquangles*, comienza indicando que para resolver todos los posibles casos bastan cinco principios. Dos de ellos están explicados previamente, el uso del triángulo suplementario a uno dado y el teorema del Seno. Los otros tres presentan relaciones, no habiendo sido tratada la última de ellas en las obras revisadas hasta el momento.

Estas relaciones se basan en propiedades de triángulos planos y son las siguientes:

"*Dans tout triangle fphérique ABC (Fig. 179), fi d'un angle A on abaiffe l'arc de grand cercle aD perpendiculairement fur le côté oppfé BC, on aura toujours cette proportion: Le cofinus du fegment BD, eft aur cofinus du fegment CD, comme le cofinus du côté AB, eft au cofinus du côté AC.*" [BÉZOUT, 1771, p. 337].

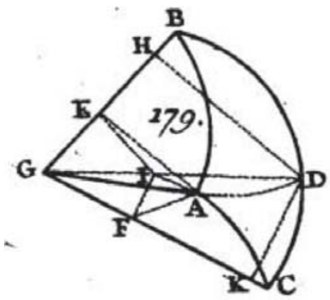


Figura 179

"*Les mêmes chofes étant fuppoféfes que dans la propofition précédente, on a cette autre proportion: Le finus de BD, eft au finus de CD, comme la cotangente de Pangle B, eft à la cotangente de l'angle C.*" [BÉZOUT, 1771, p. 338].

"*Dans tout triangle fphérique ABC (Fig. 180), fi d'un angle A on abaiffe l'arc perpendiculairre D fur le côté oppofé BC, on a cêtte proportion: La tangente de la moitié du côté BC, eft à la tangente de la moitié de la fomme des deux autres côtés, comme la tangenten de la moitié de leur différence, eft à la tangente de la moitié de la différence des deux fegments CD, BC, ou (Fig. 181) à la tangente de la moitié de leur fomme.*" [BÉZOUT, 1771, pp. 339-340].

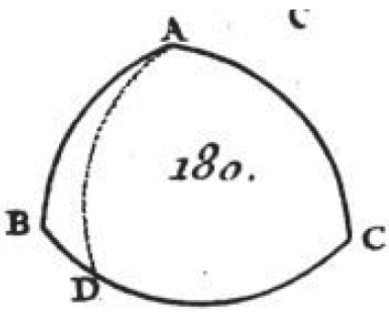


Figura 180

Es destacable que a diferencia de los anteriores autores revisados, no hace referencia a las relaciones del ángulo mitad.

En el último apartado, *Réfolution des Triangles Sphériques Obliquangles*, explica que con estas relaciones se pueden resolver todos los casos de triángluos oblicuángulos. En primer lugar trata seis casos y el resto los deduce de éstos; indica la existencia de casos ambiguos, pero no los estudia. Posteriormente presenta ejemplos numéricos de resolución de situaciones relacionadas con la Astronomía.

Finaliza el estudio de la Trigonometría Esférica con una observación, en la que explica una regla para determinar la especie del término que se busca en un triángulo esférico. Sobre esta nota, ya se indicó que Fernández hace un comentario al final de su obra [FERNÁNDEZ, 1784, p. 54].

Bézout no trata una gran cantidad de contenidos a lo largo de la obra, basándose para sus demostraciones en relaciones geométricas y la utilización de triángulos planos.
Al estudiar la resolución de triángulos, presenta de forma conjunta propiedades sobre triángulos rectángulos y oblicuángulos. Tiene presente el método del *Perpendículo*, aunque hace un uso limitado de esta herramienta. Por otra parte, es el único de los autores revisados hasta ahora que no hace referencia a los triángulos cuadrantales y las relaciones del ángulo mitad.

La segunda de las obras estudiadas es *Leçons élémentaires de mathématiques* de Nicolas Louis de La Caille [LA CAILLE, 1784].
La Caille comienza el *Prefacio* indicando que al contener en su obra un conjunto amplio de materias, ha debido suprimir a menudo las operaciones intermedias en los cálculos, aunque en su opinión *"Cette lutte continuelle produit les meilleurs effets pour les jeunes Gens deftinés à faire des progrès rapides Dans les Mathèmatiques"* [LA CAILLE, 1784, p. iv], pasando a dar indicaciones metodológicas para la lectura de la obra.

En el primer apartado sobre Trigonometría Esférica de la obra, *Résolution des Triangles Sphériques*, el autor presenta un reducido número de conceptos como polo y triángulo suplementario, junto con relaciones básicas de los lados y ángulos de los triángulos esféricos.

En el siguiente apartado, *Principes & Proportions pour la réfolution des Triangles fphériques*, trata varias propiedades de este tipo de triángulos, junto con algunas para triángulos esféricos cualesquiera.

La primera de estas relaciones, "*Dans tout triangle fphérique rectangle, le rayon eft au finus de la'hypothénufe, comme le finus d'un des angles obliques eft au finus du côte qui lui eft oppofé*" [LA CAILLE, 1784, p. 355], la generaliza en el teorema del Seno.
Ayudándose de los triángulos complementarios obtiene la relación "*Dans tout triangle fphérique rectangle, le rayon eft au cofinus d'un des côtes de l'angle droite, comme le cofinus de l'autre côté eft au cofinus de l'hypothénufe.*" [LA CAILLE, 1784, p. 356], deduciendo consecuentemente el método del *Perpendículo* y propiedades relacionadas con el método.

Seguidamente, en el apartado *Application des Principes & des Proportions qui précédent*, indica que hay treinta posibles casos de resolución de triángulos rectángulos, ofreciendo una tabla resumen basada en dos de las relaciones vistas para triángulos rectángulos y las propiedades de los triángulos complemetarios:
"*Le rayon eft au finus de l'hypothénufe, comme le finus d'un des angles obliques, eft aur finus du côté qui lui eft oppofé.*"
"*Le rayon eft au finus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique oppofé à l'autre côté, eft à la tangente de ce dernier côté.*" [LA CAILLE, 1784, p. 358].

TABLE *pour la réſolution de tous les cas poſſibles dans un Triangle ſphérique* **ABC**, *rectangle en* **A.**

Etant donnés	Trouver	PROPORTIONS.
BC & B	AC AB C	R : *ſin* BC : : *ſin* B : *ſin* AC. R : *coſ* B : : *tang* BC : *tang* AB. R : *coſ* BC : : *tang* B : *cot* C.
BC & C	AB AC B	R : *ſin* BC : : *ſin* C : *ſin* AB. R : *coſ* C : : *tang* BC : *tang* AC. R : *coſ* BC : : *tang* C : *cot* B.
AC & C	AB BC B	R : *ſin* AC : : *tang* C : *tang* AB. R : *coſ* C : : *cot* AC : *cot* BC. R : *coſ* AC : : *ſin* C : *coſ* B.
AC & B	AB BC C	*tang* B : *tang* AC : : R : *ſin* AB. *ſin* B : *ſin* AC : : R : *ſin* BC. *coſ* AC : *coſ* B : : R : *ſin* C.
AC & BC	AB B C	*coſ* AC : *coſ* BC : : R : *coſ* AB. *ſin* BC : *ſin* AC : : R : *ſin* B. *tang* BC : *tang* AC : : R : *coſ* C.
AB & C	AC BC B	*tang* C : *tang* AB : : R : *ſin* AC. *ſin* C : *ſin* AB : : R : *ſin* BC. *coſ* AB : *coſ* C : : R : *ſin* B.
AB & B	AC BC C	R : *ſin* AB : : *tang* B : *tang* AC. R : *coſ* B : : *cot* AB : *cot* BC. R : *ſin* B : : *coſ* AB : *coſ* C.
AB & AC	BC B C	R : *coſ* AB : : *coſ* AC : *coſ* BC. R : *ſin* AB : : *cot* AC : *cot* B. R : *ſin* AC : : *cot* AB : *cot* C.
AB & BC	AC B C	*coſ* AB : *coſ* BC : : R : *coſ* AC. R : *tang* AB : : *cot* BC : *coſ* B. *ſin* BC : *ſin* AB : : R : *ſin* C.
B & C	AB AC BC	*ſin* B : *coſ* C : : R : *coſ* AB. *ſin* C : *coſ* B : : R : *coſ* AC. R : *cot* B : : *cot* C : *coſ* BC.

Suite de la Table pour la réſolution de tous les cas poſſibles dans un Triangle ſphérique **ABC**, *rectangle en* **A.**

Ce que l'on cherche, doit avoir moins de 90°.
Si B a moins de 90°. Si BC & B ſont de même eſpece. Si BC & B ſont de même eſpece.
Si C a moins de 90°. Si BC & C ſont de même eſpece. Si BC & C ſont de même eſpece.
Si C a moins de 90°. Si AC & C ſont de même eſpece. Si AC a moins de 90°.
Ce cas eſt douteux. Ce cas eſt douteux. Ce cas eſt douteux.
Si BC & AC ſont de même eſpece. Si AC a moins de 90°. Si AC & BC ſont de même eſpece.
Ce cas eſt douteux. Ce cas eſt douteux. Ce cas eſt douteux.
Si B a moins de 90°. Si AB & B ſont de même eſpece. Si AB a moins de 90°.
Si AB & AC ſont de même eſpece. Si AC a moins de 90°. Si AB a moins de 90°.
Si BC & AB ſont de même eſpece. Si BC & AB ſont de même eſpece. Si AB a moins de 90°.
Si C a moins de 90°. Si B a moins de 90°. Si B & C ſont de même eſpece.

Seguidamente, presenta ejemplos numéricos de resolución de este tipo de triángulos. Finaliza el apartado comentando que de los treinta casos, seis son indeterminados. Por otra parte, indica que los treinta casos se pueden reducir a dieciséis, agrupando casos similares.
Al igual que Bézout, no hace referencia a los triángulos cuadrantales.

En el siguiente apartado, *Réfolution des Triangles fphériques obliquangles*, La Caille reduce a doce casos la resolución de triángulos esféricos oblicuángulos. Presenta un ejemplo numérico de resolución de cada uno de los casos, obteniendo la fórmula del ángulo mitad para el seno y el coseno. También comenta brevemente que las relaciones de la Trigonometría Esférica en las que aparecen senos y tangentes se pueden generalizar para triángulos rectilíneos, mientras que no se puede hacer cuando aparecen cosenos y cotangentes.

El último apartado, *Quelques applications de la Trigonométrie fphérique*, presenta varios ejemplos de aplicación a la Astronomía.

De esta forma, vemos que La Caille muestra un reducido número de propiedades sobre los triángulos esféricos, apoyándose en un enfoque geométrico. Seguidamente trata relaciones sobre los triángulos rectángulos, que junto con el teorema del Seno y el método del *Perpendículo*, le permiten resolver cualquier caso de triángulo esférico.

Concluimos que las obras de Bézout y La Caille, dos obras de referencia a nivel internacional sobre la Trigonometría Esférica, presentan una estructura similar a la de los autores españoles revisados.
Esto nos permite afirmar que durante el siglo XVIII, el estudio de la Trigonometría Esférica era bastante homogéneo a nivel internacional, siguiendo las obras españolas un desarrollo y unos contenidos en coherencia con el enfoque que se daba en el resto de Europa.

II.9.3. Obras utilizadas en la Armada en el siglo XIX

Una vez revisadas las obras sobre Trigonometría Esférica que fueron utilizadas para la formación en la Armada Española a lo largo del siglo XVIII, pasamos a estudiar los textos empleados durante el siglo XIX. Las obras se estudiarán conforme a su primera edición.

Se han revisado completamente las ocho obras relacionadas con la Trigonometría Esférica que fueron utilizadas para la formación de los Guardias Marinas durante el siglo XIX; en la Tabla 3.2.8, *Datos generales de los textos sobre Trigonometría Esférica*, aparecen los principales datos de cada uno de los textos.

Por otra parte, se ha realizado la Tabla 3.3.8, *Temas presentes en los textos sobre Trigonometría Esférica*, como resumen de los principales contenidos presentes en los textos. Para ello se han seleccionado noventa y un ítems agrupados por las siguientes temáticas y subtemáticas:

- Triángulo Esférico
    - Conceptos
    - Propiedades
- Fórmulas que relacionan los elementos de un triángulo Esférico
- Resolución de triángulos Esféricos Oblicuángulos
- Triángulo Esférico Rectángulo
    - Fórmulas obtenidas a partir de fórmulas generales
    - Propiedades (A=90º)
- Resolución de los triángulos Esféricos Rectángulos
- Triángulos Esféricos Rectiláteros (lado recto A)
- Áreas de triángulos
- Aplicaciones de la Trigonometría Esférica a la Navegación
- Otros

Se pretende ver la forma en que evolucionaron a lo largo del siglo los contenidos esenciales de Trigonometría Esférica que un Guardia Marina necesitaba para su formación, constatando el paso de un enfoque puramente geométrico basado en el teorema del Seno y el método del *Perpendículo* a otro algebraico y analítico fundamentado en el teorema del Coseno para los lados.

II.9.3.1. Curso de estudios elementales de Marina, Tomo III, por Ciscar

La primera obra en orden cronológico con respecto a su primera edición, *Curso de estudios elementales de Marina,* pertenece a Gabriel Ciscar y Ciscar. Como ya se comentó al tratar la Trigonometría Rectilínea, su primera edición es de 1803 y los cuatro tomos que conforman el *Curso* fueron durante muchos años la principal obra para la instrucción de Guardias Marinas (de 1803 a 1844) y de pilotos en las Escuelas de Náutica.
Dos de los tomos, el II y III, tienen relación con la Trigonometría, el primero con la Rectilínea y el segundo con la Esférica.

El Tomo III, *Cosmografía*, ha sido revisado en las ediciones de 1811 [CISCAR, 1811] y 1817 [CISCAR, 1817]; en ellas, el libro consta de ciento treinta y tres páginas y cinco láminas, aunque sólo trece páginas y trece figuras tratan sobre Trigonometría Esférica en los capítulos I y II y cinco páginas en un *Apéndice*, en el que se demuestran algunas de las proposiciones de Trigonometría Esférica anunciadas en el capítulo II. Este Tomo III tiene como objetivo tratar la Cosmografía, y como explica Ciscar: *"El Capítulo II (art. 72 á 114) contiene las nociones de Trigonometría esférica, de que se hará uso en lo sucesivo; y será muy conveniente el que se aprendan de memoria todas las proposiciones de letra mayor. Entre lo que va de letra menor los artículos 76, 77 y 78 son los únicos que son indispensables para la inteligencia de las demostraciones de todas las proposiciones de Trigonometría esférica, de que se hace uso en el Pilotage astronómico, segun se manifiesta en el Apéndice con que se termina este Tratado."* [CISCAR, 1811, III, p. V].

En la *Introducción,* Ciscar indica que "*El estudio de la Cosmografía es indispensable para la inteligencia de la Navegación*" [CISCAR, 1811, III, p. III] y resalta su importancia "… *en cuanto facilita la inteligencia de los términos facultativos de la Astronomía náutica*" [CISCAR, 1811, III, p. III]. Pasa a dar algunas indicaciones para el estudio de la Cosmografía y advierte *"… que entre los dos casos extremos de reglas complicadas deducidas de teorías muy sencillas, y de reglas sencillas deducidas de teorías difíciles y complicadas, hay muchos casos intermedios, mas ó menos distantes de los dos extremos indicados; á mas de que la dificultad y complicacion no son absolutas, sino relativas á la disposicion de los sugetos.*" [CISCAR, 1811, III, p. IV]. Por ello, recomienda que los Maestros modifiquen el método de la enseñanza según las facultades intelectuales de cada uno de los discípulos, pero "… *si bien hay circunstancias en que será muy conveniente el suprimir conocimientos teóricos, se debe tener un especial cuidado* *en no dar ideas falsas con el pretexto de facilitar la inteligencia de las explicaciones*" [CISCAR, 1811, III, p. IV].

Seguidamente pasa a comentar brevemente los once capítulos, apareciendo los contenidos de Trigonometría Esférica en los capítulos I, II y el *Apéndice* final. En el capítulo I trata entre otros temas la esfera y sus propiedades. El capítulo II contiene las nociones de Trigonometría Esférica, indicando que "*… será muy conveniente el que se aprendan de memoria todas las proposiciones de letra mayor.*" [CISCAR, 1811, III, p. V]. En el *Apéndice* se demuestran las proposiciones del capítulo II, que según el autor *"… son las unicas que se hace uso en la práctica ordinaria de la Navegación.*" [CISCAR, 1811, III, p. XIII].

Seguidamente, "*Para facilitar á los Discípulos aplicados la inteligencia de unos principios de que se deducen consecuencias de tanto uso*" [CISCAR, 1811, III, p. XIII], expone la construcción de un simple aparato, pues "*Explicando la Trigonometría esférica sobre unos modelos construidos segun se acaba de manifestar, creemos que su estudio no será mas dificultoso que el de la Trigonometría rectilínea."* [CISCAR, 1811, III, p. XIII].

Finaliza comentando la estructura y disposición de las citas, indicando que para estudiar la Trigonometría Esférica y la Cosmografía con más extensión, se puede recurrir a su *Tratado de Trigonometría Esférica para la instrucción de los Guardias Marinas* [CISCAR, 1796], corrigiendo diversas erratas que enumera.

Se observa que con sus recomendaciones, Ciscar dirige la forma de actuar de los maestros en coherencia con un modelo educativo caracterizado porque en el proceso de enseñanza-aprendizaje el papel fundamental está desempeñado por los libros de texto y no por los profesores.

Comienza el capítulo I, *Nociones generales*, con unos conceptos y rudimentos básicos de Astronomía, Geografía y Cosmografía. Seguidamente presenta relaciones elementales sobre la esfera y sus elementos, tratando propiedades y teoremas relacionados con círculos máximos, polos, ángulos esféricos y distancias angulares. Para las demostraciones se apoya en figuras geométricas y en propiedades del tomo sobre Geometría, dentro del *Curso de estudios elementales de Marina*.

En el segundo capítulo, *Nociones de Trigonometría Esférica*, podemos encontrar definiciones elementales como triángulo esférico o Trigonometría Esférica y propiedades sobre triángulos esféricos que son demostradas basándose en figuras geométricas y triángulos rectilíneos. También presenta los triángulos cuadrantales y enuncia teoremas esenciales para la práctica ordinaria de la Navegación, como el teorema del Seno, y varias relaciones de los triángulos esféricos rectángulos como las siguientes:

"*En los triángulos rectángulos será el radio al seno de la hypotenusa, como el seno de uno de los ángulos obliquos, es al seno de su lado opuesto, de la misma especie del ángulo*" [CISCAR, 1811, III, p. 17].

"*En los triángulos rectángulos es también el radio al seno de uno de los catetos, como la tangente del ángulo oblicuo, formado por dicho cateto, es á la tangente del cateto opuesto, de la misma especie del ángulo*" [CISCAR, 1811, III, p. 17].

"*En todo triángulo esférico rectángulo, el radio es al coseno de uno de los ángulos oblicuos, como la tangente de la hypotenusa, es á la tangente del cateto adyacente á dicho ángulo.*" [CISCAR, 1811, III, p. 18].

"*En todo triángulo rectángulo el coseno de uno de los catetos es al radio, como el coseno de la hypotenusa es al coseno del otro cateto.*" [CISCAR, 1811, III, pp. 18-19].

Finaliza el capítulo indicando la fórmula del ángulo mitad para el coseno, e indica que se usa para hallar los ángulos de un triángulo esférico del que se conocen los tres lados.

Concluye la parte de Trigonometría Esférica con un *Apéndice* al final de la obra, *En que se demuestran las proposiciones de Trigonometría esférica anunciadas en el Capítulo II*.

Ciscar demuestra varias proposiciones, destacando por su importancia la del teorema del Seno. En su demostración utiliza unas construcciones diferentes a las realizadas por los autores revisados, donde emplea rotaciones, perpendicularidades y numerosas referencias al Tomo II de *Geometría*.

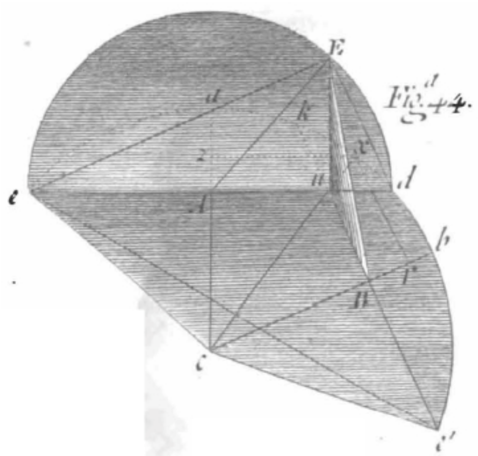


Figura 44

También enuncia y demuestra varios teoremas sobre propiedades de los triángulos esféricos rectángulos en relación a las especies de los catetos y la hipotenusa.

El *Curso de Estudios Elementales de Marina* tiene un reducido número de contenidos relacionados con la Trigonometría Esférica.

Expone definiciones y propiedades básicas de los triángulos esféricos, junto con algunas relaciones entremezcladas sobre triángulos oblicuángulos y rectángulos que demuestra al final de la obra basándose en figuras y propiedades geométricas.

Por todo ello esta obra supone un retroceso de contenidos respecto a las anteriores obras revisadas.

II.9.3.2. **Elementos de Trigonometría esférica y Geografía astronómica: para el uso de la casa de educación sita en la calle de san Mateo de esta corte, por Lista y Aragón**

La obra *Elementos de Trigonometría esférica y Geografía astronómica: para el uso de la casa de educación sita en la calle de San Mateo de esta corte*, está escrita por Alberto Lista y Aragón[21].

La primera edición, que parece ser única, es de 1823 [LISTA Y ARAGÓN, 1823] y está destinada a los alumnos a los que el autor imparte docencia en una casa de educación en Madrid, "*… con el objeto de hacer este tratado util aun para aquellos cuyas nociones en matemáticas puras no pasan de la geometria elemental, lo hemos dispuesto de manera, que omitidas las lecciones en que se necesitan principios mas altos, quede todavía un tratado facil de aprender con la esplicacion del maestro"* [LISTA Y ARAGÓN, 1823, p. 2ª del Prólogo].

No es una obra diseñada para a la formación de los Guardias Marinas, si bien la consideramos en el estudio al encontrarse en la Biblioteca de Marina de Cartagena.

El libro consta de ciento cuarenta y seis páginas y dos láminas, aunque sólo diez páginas y dos figuras tratan sobre Trigonometría Esférica en el primer capítulo, pues la mayor parte de la obra trata sobre Geografía Astronómica.

En el *Prólogo*, el autor comienza indicando que *"En un curso elemental de matemáticas puras y mistas no es posible dar á las ciencias astronómicas toda la estension que merecen. Es preciso atender á no prolongar demasiado el tiempo de la enseñanza, y dar la preferencia á los ramos*

[21] Si bien en la obra únicamente aparecen del autor las siglas D.A.L., todas las fuentes secundarias consultadas (entre ellas la Bibliteca Digital Hispánica y Divulgamat) indican que corresponden a Don Alberto Lista, director de la Casa de Educación de la calle de San Mateo.

en que mas generalmente desean instruirse los alumnos." [LISTA Y ARAGÓN, 1823, p. 1ª del Prólogo].

Continúa explicando que mediante el tratado pretende exponer los principios astronómicos necesarios para enseñar la Geografía. Considera "… *inútiles y aun dañosos los innumerables trataditos de geografia que se han impreso para enseñar esta ciencia sin nociones astronómicas*" [LISTA Y ARAGÓN, 1823, p. 1ª del Prólogo], por lo que no se omite en la obra ninguna de las teorías astronómicas. Tal y como indica el autor, *"Nuestro objeto ha sido poner al alumno en estado de no desconocer ninguna de las principales verdades de la astronomia…"* [LISTA Y ARAGÓN, 1823, p. 2ª del Prólogo] y explica que "*Por esta razon hemos hecho uso de todos los medios que el cálculo y la geometria sublime prestan á la astronomia para la demostracion de sus principios.*" [LISTA Y ARAGÓN, 1823, p. 2ª del Prólogo].

Comenta el autor que el tratado está dispuesto de tal forma que, omitidas las lecciones en las que se necesite la teoría más complicada, el maestro disponga de un tratado fácil de aprender. También indica que en la *Casa de Educación*, para cuyo uso se publica el tratado, se enseña la Geografía Astronómica al finalizar el tercer año de Matemáticas, "… *cuando ya los alumnos han estudiado con la debida estension el álgebra sublime, la teórica de las curvas y los cálculos diferencial é integral*." [LISTA Y ARAGÓN, 1823, p. 3ª del Prólogo].

Para finalizar este *Prólogo*, indica que precede al tratado la colección de fórmulas necesarias para la resolución de los triángulos esféricos, "… *deducidas todas del principio de Eulero, que redujo la teórica de estos triángulos á la del angulo triedro*." [LISTA Y ARAGÓN, 1823, p. 3ª del Prólogo]. Concluye el *Prólogo* indicando que este tercer tomo de su curso de Matemáticas puras y mixtas se completará próximamente con los elementos de Mecánica e Hidráulica.

Lista y Aragón comienza el primer apartado del capítulo sobre Trigonometría Esférica, *Fórmula fundamental*, con definiciones básicas como ángulo esférico o triángulo esférico, dando para este último concepto una definición algo más extensa de lo habitual, al utilizar expresamente el concepto de ángulo triedro: *"Llámese triángulo esférico el que forman en la superficie de la esfera tres arcos de círculo máximo que se cortan. Estos arcos son las intersecciones con la esfera de tres planos, que pasan por su centro, y que forman en él un ángulo triedro."* [LISTA Y ARAGÓN, 1823, p. 1].

Seguidamente explica que el objeto de la Trigonometría Esférica es conocer los tres lados y tres ángulos de un triángulo esférico, problema que reduce a conocer sus tres ángulos planos y sus ángulos diedros en un ángulo diedro. A continuación, presenta consecuencias en las que trata los cuatro criterios de igualdad para triángulos esféricos y algunas propiedades entre sus ángulos y lados, basándose en el triángulo suplementario a uno dado junto con propiedades de los ángulos triedros.

Posteriormente presenta el teorema del Seno, realizando en su demostración una construcción en la que obtiene cuatro triángulos rectángulos planos de los que va obteniendo relaciones básicas que llevan a la relación buscada.

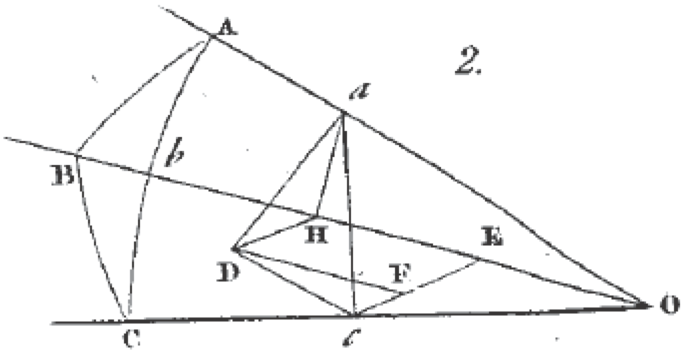


Figura II

A continuación presenta el teorema del Coseno para los lados, que el autor denomina *"Fórmula fundamental"*, siendo el primer autor de los estudiados que lo presenta y utiliza. En su demostración construye de nuevo a partir del triángulo esférico dos triángulos rectilíneos rectángulos y mediante sus relaciones deduce el teorema.

A partir de este teorema y de las propiedades de los ángulos suplementarios deduce el teorema del Coseno para los ángulos, siendo el primer autor de los revisados que lo trata, y advierte que de estas fórmulas se pueden deducir todas las necesarias para la resolución de los triángulos esféricos.

En el segundo apartado, *Resolución de los triángulos esféricos rectángulos*, presenta a partir de los teoremas del Seno y del Coseno para los lados, particularizando en el caso de que un ángulo sea recto, seis relaciones para resolver triángulos rectángulos. Las presenta a través de una notación mediante igualdades, como por ejemplo $\cos a = \cos b \cdot \cos c$, sin utilizar proporciones como se ha visto en los anteriores autores revisados.

Indica que con esas seis relaciones se pueden resolver todos los casos posibles y comenta, sin demostrar, que existe ambigüedad cuando la incógnita que se busca es el seno de un arco o ángulo.

En el tercer apartado, *Resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos*, se presentan los seis casos de resolución para este tipo de triángulos. En cada caso deduce algebraicamente las relaciones que necesita a partir de los teoremas del Seno, del Coseno para los lados y de las propiedades de los triángulos suplementarios. No comenta la existencia de ambigüedades y a lo largo del estudio de cada caso obtiene entre otras relaciones las funciones del ángulo mitad y las analogías de Neper, siendo el primer autor que presenta estas analogías y que sigue claramente un desarrollo algebraico para ir deduciendo nuevas relaciones.

Termina el apartado con dos aplicaciones. La primera es un ejercicio propuesto, en el que se dan los seis elementos de un triángulo en el que se pueden escoger tres de ellos y se deben deducir el resto; la otra es una aplicación a la Astronomía, donde explica cómo reducir un ángulo medido en un plano oblicuo con respecto al horizonte.

La obra de Lista y Aragón tiene un reducido número de contenidos sobre Trigonometría Esférica.

Presentan muy pocas propiedades de los triángulos esféricos y partiendo de los teoremas del Seno, del Coseno para los lados y las propiedades de los triángulos suplementarios deduce las relaciones necesarias para resolver todos los casos de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

Es el primer autor que utiliza herramientas algebraicas en la mayoría de las demostraciones, y también el primero que presenta el teorema del Coseno para los lados, el teorema del Coseno para los ángulos y las analogías de Neper.

A diferencia de la mayoría de los autores revisados, al utilizar el teorema del Coseno para los lados no tiene la necesidad de utilizar el método del *Perpendículo*, lo que supone un gran cambio de planteamiento.

II.9.3.3. **Sumario de Trigonometría Esférica para uso de los principiantes en la carrera de la navegación, por Castillo y Castro**

La siguiente obra estudiada es *Sumario de Trigonometría Esférica para uso de los principiantes en la carrera de la navegación*, coordinado por Miguel Castillo y Castro. La primera edición, parece ser única, es de 1834 y está destinada a alumnos que se inician en la carrera de la Navegación [CASTILLO Y CASTRO, 1834]. No es una obra diseñada para a la formación de los Guardias Marinas, aunque la consideramos en el estudio al encontrarse en la Biblioteca de Marina de Cartagena. El libro consta de ochenta y ocho páginas y una lámina con diecinueve figuras, estando íntegramente dedicado a la Trigonometría Esférica.

Castillo y Castro comienza una larga *Introducción* comentando que aunque la Trigonometría Esférica "*… se presenta á los jóvenes principiantes como muy intrincada y escabrosa, no es, á nuestro parecer, tan obscura y dificultosa como ellos se la figuran.*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 3].

Seguidamente explica la construcción de un ingenioso y simple instrumento, similar al explicado por Ciscar en el Tomo III de su *Curso*, con el que a partir de "*… unos cartones, cortados del modo que diremos, se tocará palpablemente la verdad de este aserto*." [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 3].

A continuación indica que el tratado de Ciscar *"… procuró despejar á esta parte de la geometría de todo aquello que mas podia ofuscar á tales estudiantes, y no era necesario á los conocimientos que exigia su carrera; mas la experiencia ha hecho ver que aun en lo que escribió, todavía los alumnos encuentran sus tropiezos* " [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 6].

Comenta que "*Movidos nosotros, pues, de los deseos de estos jóvenes, y llevados del vivo interes que nos anima por su utilidad y aprovechamiento, hemos probado á darles en el presente escrito el sumario de que se trata*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 7].

Seguidamente explica la estructura del libro, indicando que se ha dividido la obra en dos partes. Por una parte se estudia para la resolución de los triángulos esféricos *"… la especie del ángulo ó del lado que se busca; y otra, su valor numérico en grados del círculo"* [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 7].

Pasa a explicar con más detalle cada una de las partes e indica que "*Para la redaccion ó coordinacion de ambas partes no solo hemos tenido presente la obra del señor Ciscar, sino tambien las de otros varios autores, de donde hemos tomado proposiciones, demostraciones, figuras, &c."* [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 8].

Advierte que el objetivo de la obra no es el de dar un tratado completo de Trigonometría, sino el de facilitar el manejo de lo triángulos esféricos en la mar, señalando que aunque los pilotos de altura no necesitan estas herramientas, conviene que las conozcan.

Se omiten en la obra las primeras nociones y definiciones "… *que fácilmente se aprenden en las academias, y quedan impresas en la memoria*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 8], empezando directamente en los contenidos para conseguir el objetivo marcado. Indica que las figuras empleadas en explicaciones ha "… *tratado de economizarlas cuando no ha perjudicado* *á la claridad, asi como las hemos prodigado cuando la misma claridad lo ha exigido.*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 9].

Seguidamente explica que el orden elegido para presentar las seis primeras analogías "… *ayuda maravillosamente á la memoria, segun nos ha enseñado la práctica…*"[CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 9], pues a su entender "… *ademas de empezar todas por el radio en las relaciones de este con las restantes líneas trigonométricas se guarda el orden mas natural, que es el de comparar primero con el seno, después con el coseno, y luego con la tangente, en primer lugar de los ángulos, y en segundo lugar de los lados*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 9]. También indica que la séptima analogía ocupa su lugar propio después de las otras seis.

Comenta que en la segunda parte se han deducido analogías aplicables a los triángulos oblicuángulos a partir de los tres primeros teoremas, y que "… *asi tambien pudiéramos haber inferido otras de casi todos los demas; pero por no complicar y confundir hemos omitido todas las innecesarias á la resolucion de dichos triángulos por el camino mas claro.*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 10].

Por otra parte, comenta que como punto de curiosidad "… *hemos agregado á continuacion del último teorema una noticia del valor respectivo de las líneas trigonométricas de ángulos y lados de cualquier triángulo esférico, expresado en las relaciones de todas ellas con las de otros cualesquiera dos términos del mismo triángulo.*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 10].

Reitera que en la primera parte del escrito se ha omitido todo aquello que no fuese necesario para el objeto del libro, indicando que "… *el que quiera ó necesite estudiar de primera intencion ó imponerse de nuevo en todas estas cosas, puede acudir á la obra del señor Ciscar, ó á las de otros cualesquiera autores originales que tratan de la materia con mas ó menos extensión: aquí solo se intenta facilitar á la mano el resumen de cuanto enseñan tales autores para resolver los triángulos.*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 11].

Cabe destacar, que para facilitar el uso de la Trigonometría a los jóvenes principiantes, realiza doce cuadros resumen, donde "… *se proponen cuantos casos caben en la combinación de los datos con respecto á la especie de los ángulos y lados de todo triángulo que ocurriese resolver*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 12], disculpándose por si hay algún error en ellos.

Concluye indicando que el fin de la publicación "… *no puede ser mas puro: si de ella resulta, en efecto, alguna utilidad á los jóvenes principiantes, á cuyo provecho la consagramos, habremos cogido todo el fruto, y logrado toda la satisfaccion á que aspiramos.*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 12].

Castillo y Castro realiza, tal y como indica en la *Introducción*, una separación en dos partes. En la primera realiza un estudio de las especies de los ángulos y de los lados en un triángulo esférico, y en la segunda trata propiedades y relaciones para la resolución de triángulos.

Comienza la primera parte, *Sobre la especie de los ángulos y lados de los triángulos esféricos*, con un postulado en el que considera un triángulo esférico "… *como una pirámide triangular que tiene en el centro de la misma esfera su vértice ó ángulo sólido de cuyos ángulos planos son medida los respectivos lados del triángulo, al paso que los ángulos de este son los mismos que forman entre sí las caras o planos de la pirámide.*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 13], siendo esta una definición distinta a las de los demás autores revisados.

A partir de esta definición, y basándose en propiedades de la Geometría Plana, presenta diecisiete teoremas con corolarios y escolios sobre relaciones entre los ángulos y lados de triángulo esférico, siendo novedosas algunas de las relaciones que deducen los tipos de ángulos y lados según las condiciones iniciales. También presenta y utiliza las propiedades del triángulo suplementario a uno dado.

Entre las propiedades se encuentra la que justifica que se pueda aplicar el método del *Perpendículo*: "*Teorema 10º. Si desde cualquiera de los ángulos de un triángulo esférico, en cuyo lado opuesto no haya ángulo recto, se baja un arco de círculo máximo perpendicular sobre dicho lado, prolongando si fuese necesario, caerá el tal arco dentro del triángulo, si los otros dos ángulos son entre sí de una misma especie, y fuera en el caso contrario.*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, pp. 28-29].

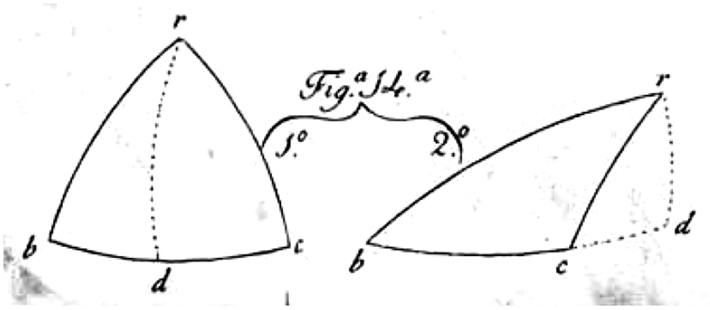


Figura 14 de Castillo y Castro

Al final de este apartado presenta un extracto de las setenta y seis proposiciones demostradas, "… *ó resumen de los hechos geométricos consignados en ellas y en sus corolarios.*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 41], resaltando en una nota final "… *la correspondencia, la contraposicion y aun puede decirse la simetría y armonía que guardan entre sí todos los términos suplementarios recíprocos.*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 46].

En la segunda parte, *Dirigida puramente á la resolución inmediata de los triángulos esféricos; esto es, á formar analogías para hallar el valor numérico de todos sus términos*, comienza presentando seis teoremas que tratan relaciones para triángulos rectángulos, de los que deduce propiedades para triángulos oblicuángulos mediante el uso del método del *Perpendículo*, como el teorema del Seno. Para demostrar las relaciones en los triángulos esféricos rectángulos se apoya en las propiedades de los triángulos rectángulos rectilíneos.
En el último teorema del apartado demuestra la función del ángulo mitad para el coseno.

Castillo y Castro presenta un último apartado, *Punto de curiosidad para los estudiosos. Noticia del valor respectivo de las líneas trigonométricas de ángulos y lados de cualquier triángulo esférico, expresado en las relaciones de todas ellas con las de otros dos términos del mismo triángulo*. A partir de las relaciones demostradas en la segunda parte "*… y de sus combinaciones con otros principios*" [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 64], va presentando, sin demostrar, varios teoremas importantes para la resolución de los triángulos oblicuángulos.
El primero de ellos es el teorema del Seno, dando primero la relación para seno de un ángulo y posteriormente de un lado [CASTILLO Y CASTRO, 1834, pp. 65-66]:

1.º

$$\text{sen. A} = \frac{\text{sen. } a \times \text{sen. B}}{\text{sen. } b} = \frac{\text{sen. } a \times \text{sen. C}}{\text{sen. } c}$$

$$\text{sen. B} = \frac{\text{sen. } b \times \text{sen. A}}{\text{sen. } a} = \frac{\text{sen. } b \times \text{sen. C}}{\text{sen. } c}$$

$$\text{sen. C} = \frac{\text{sen. } c \times \text{sen. A}}{\text{sen. } a} = \frac{\text{sen. } c \times \text{sen. B}}{\text{sen. } b}$$

2.º

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. A} \times \text{sen. } b}{\text{sen. B}} = \frac{\text{sen. A} \times \text{sen. } c}{\text{sen. C}}$$

$$\text{sen. } b = \frac{\text{sen. B} \times \text{sen. } a}{\text{sen. A}} = \frac{\text{sen. B} \times \text{sen. } c}{\text{sen. C}}$$

$$\text{sen. } c = \frac{\text{sen. C} \times \text{sen. } a}{\text{sen. A}} = \frac{\text{sen. C} \times \text{sen. } b}{\text{sen. B}}$$

De la misma forma, presenta el teorema del Coseno para los lados y el teorema del Coseno para los ángulos. Igualmente muestra la fórmula de las cuatro partes $\cos a \cdot \cos C = sen\, a \cdot ctg\, b - sen\, C \cdot ctg\, B$ y dos relaciones más, siendo el primer autor de los revisados que trata estas tres relaciones.

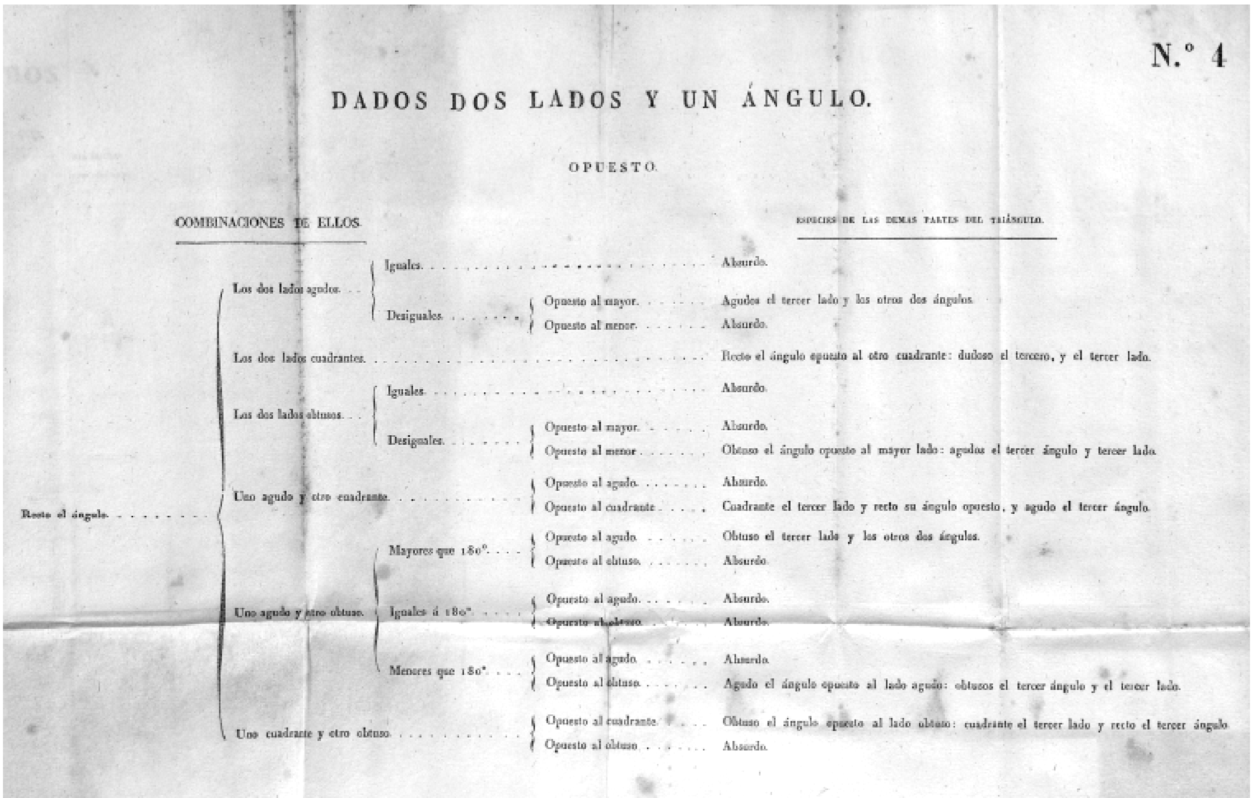
A continuación presenta el apartado *Resumen*, "*Para hacer mas patente á la simple vista la identidad y reciprocidad de estas fórmulas y de las analogías que las producen*." [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 73]. Muestra las relaciones que corresponden a ángulos y lados, "*… no tomando mas que las primeras en los casos en que hay dos equivalentes, ni mas que las relativas* *al primer ángulo A y al primer lado a, porque lo que se diga de estas, se dice de las demas.”* [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 73].

Reitera que a partir de las relaciones presentadas se pueden deducir otras para otros lados y ángulos “*… con solo sustituir ó permutar letras mayúsculas con minúsculas y cambiar signos donde los haya.*” [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 75], advirtiendo “*… que no pueden ocultarse ni aun al mas corto en matemáticas.*” [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 74].

Finaliza el apartado repitiendo la observación que comenta en la primera parte de la obra “*… sobre la correspondencia, la contraposición y aun la simetria y armonia que hasta en tales fórmulas guarda esta trigonometría*” [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 75].

Concluye la obra con dos erratas y doce cuadros resumen, donde presenta los cuatro casos para la resolución de triángulos oblicuángulos (dados tres lados, dos lados y un ángulo, un lado y dos ángulos o tres ángulos) con respecto a la especie de los lados y los ángulos.

Es el único autor que trata los distintos casos centrándose en las especies de los datos dados y de los datos que se quieren encontrar, aunque en ningún momento explica si este método es o no mejor que el método usual. Tampoco presenta ejemplos o ejercicios que permitan poder valorar la utilidad de los cuadros.



N.° 4

DADOS DOS LADOS Y UN ÁNGULO.

OPUESTO.

	COMBINACIONES DE ELLOS.			ESPECIES DE LAS DEMAS PARTES DEL TRIÁNGULO.
Recto el ángulo.	Los dos lados agudos.	Iguales.		Absurdo.
		Desiguales.	Opuesto al mayor.	Agudos el tercer lado y los otros dos ángulos.
			Opuesto al menor.	Absurdo.
	Los dos lados cuadrantes.			Recto el ángulo opuesto al otro cuadrante: dudoso el tercero, y el tercer lado.
	Los dos lados obtusos.	Iguales.		Absurdo.
		Desiguales.	Opuesto al mayor.	Absurdo.
			Opuesto al menor.	Obtuso el ángulo opuesto al mayor lado: agudos el tercer ángulo y tercer lado.
	Uno agudo y otro cuadrante.		Opuesto al agudo.	Absurdo.
			Opuesto al cuadrante.	Cuadrante el tercer lado y recto su ángulo opuesto, y agudo el tercer ángulo.
	Uno agudo y otro obtuso.	Mayores que 180°.	Opuesto al agudo.	Obtuso el tercer lado y los otros dos ángulos.
			Opuesto al obtuso.	Absurdo.
		Iguales á 180°.	Opuesto al agudo.	Absurdo.
			Opuesto al obtuso.	Absurdo.
		Menores que 180°.	Opuesto al agudo.	Absurdo.
			Opuesto al obtuso.	Agudo el ángulo opuesto al lado agudo: obtusos el tercer ángulo y el tercer lado.
	Uno cuadrante y otro obtuso.		Opuesto al cuadrante.	Obtuso el ángulo opuesto al lado obtuso: cuadrante el tercer lado y recto el tercer ángulo.
			Opuesto al obtuso.	Absurdo.

Ejemplo de cuadro resumen de uno de los casos

Vemos que la obra de Castillo y Castro tiene un carácter singular entre las obras revisadas.
Por un lado se centra en el estudio de las especies de los ángulos y lados de un triángulo, y por otro presenta las principales relaciones para resolver triángulos rectángulos y oblicuángulos aunque a lo largo de la obra no estudia su resolución.

Entre las relaciones tratadas podemos destacar la utilización del teorema del Coseno para los lados y de la fórmula de las cuatro partes, siendo el primer autor que presenta esta relación. Por otra parte, si bien utiliza el método del *Perpendículo* en algunas demostraciones, no es una herramienta fundamental a lo largo de la obra.

Es el único autor que realiza cuadros resumen donde se ve la combinación de los datos con respecto a la especie de los ángulos y lados de todo triángulo por resolver, una vez dados tres de sus términos.

II.9.3.4. **Tratado de Trigonometría y Topografía, por Cortázar**

La siguiente obra es *Tratado de Trigonometría y Topografía*, de Juan Cortázar, cuya primera edición data de 1848. Ya se comentó al estudiar la Trigonometría Rectilínea que la obra estuvo destinada al uso en universidades, institutos, escuelas industriales y como preparatorio para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. Se han revisado la sexta edición de 1859 [CORTÁZAR, 1859] y la décima de 1865 [CORTÁZAR, 1865]; en la primera de ellas, el libro consta de ciento noventa y seis páginas y ochenta y cuatro figuras, y en la segunda de doscientas dieciséis páginas y ochenta y cuatro figuras. La parte de Trigonometría Esférica consta de cuarenta páginas y nueve figuras en la edición de 1859, y de cincuenta y cinco páginas y nueve figuras en la edición de 1865, al contener un capítulo más sobre la materia.

En el *Prólogo* de la obra el autor se limita a indicar las tres correcciones realizadas a la primera edición. En primer lugar, en relación con la Trigonometría Rectilínea, explica la reducción de las líneas trigonométricas a cuatro, dejando de usar las secantes y cosecantes dado que son cantidades recíprocas de los cosenos y los senos.
Las otras dos correcciones están relacionadas con la Trigonometría Esférica. En la segunda suprime los teoremas particulares de los triángulos rectángulos esféricos, dado que "… *es muy*

raro tener necesidad de alguno de los seis teoremas de los triángulos rectangulos esféricos; y cuando tal sucede, se deduce fácilmente de alguno de los cuatro teoremas generales, segun nosotros lo hacemos.” [CORTÁZAR, 1859, p. 2ª del Prólogo]. También argumenta que suprimiendo estos seis teoremas se evita la dificultad de retenerlos, facilitándose el estudio de la Trigonometría Esférica.

La tercera corrección es la introducción de las analogías de Delambre; revela cómo él mismo las descubrió de forma independiente en 1838, habiendo sido descubiertas por Delambre en 1807. Comenta sobre estas analogías que: “… *las incluimos desde 1848 en nuestro tratado bajo el nombre de analogias de Délambre; pero aun asi, ningun autor, al menos francés ó español, nos ha precedido en la inclusion de estas fórmulas en la Trigonometría. Los programas modernos del Gobierno francés las incluyen tambien, y como consecuencia todos los autores modernos franceses, quienes dan la demostración que nosotros damos.”* [CORTÁZAR, 1859, p. 3ª del Prólogo].

Concluye afirmando que su tercera reforma ha sido generalmente admitida, pero las dos primeras no, aunque “… *el tiempo las traera consigo, pues son mucho mas utiles que la introduccion de las analogías de Délambre*.” [CORTÁZAR, 1859, p. 3ª del Prólogo].

Cortázar comienza el primer capítulo de la parte de su obra sobre Trigonometría Esférica, *Formulas generales*, explicando el concepto de Trigonometría Esférica. Seguidamente, sin presentar previamente propiedades o relaciones sobre los triángulos esféricos, indica que “*Para resolver los triángulos esféricos, deberemos hallar las relaciones que ligan á los lados y ángulos de estos triángulos: estas relaciones están comprendidas en los cuatro teoremas siguientes*.” [CORTÁZAR, 1859, p. 68]. Por ello enuncia y demuestra los teoremas del Coseno para los lados, del Seno, de la Cotangente y del Coseno para los ángulos.

El primer teorema es del Coseno para los lados, que denomina *Teorema Fundamental*, e indica que da una relación entre los tres lados y un ángulo de un triángulo esférico. Partiendo del caso en que los dos lados que comprenden al ángulo son menores que un cuadrante, realiza una construcción en la que obtiene dos triángulos rectángulos planos con los que aplica propiedades trigonométricas hasta deducir el teorema; cabe destacar, que durante la demostración considera que el radio es uno. Seguidamente deduce que la fórmula también es válida cuando alguno de los lados es mayor o igual que un cuadrante: *“Hemos demostrado el teorema, suponiendo que los lados b y c son menores que 90º: mas, según el teorema de Descartes (Alg. 108), y en virtud de los convenios (4), este teorema debe ser general, como lo vamos a demostrar.”* [CORTÁZAR, 1859, p. 69].

El siguiente teorema que presenta es el del Seno, que da una relación entre dos lados y sus dos ángulos opuestos. En su demostración parte de dos ecuaciones que son consecuencia del teorema del Coseno para los lados, en las que realiza operaciones algebraicas básicas hasta obtener la relación buscada.

El tercer teorema es el de la Cotangente, que ofrece una relación entre dos lados, el ángulo comprendido y el ángulo opuesto a uno de ellos. En su demostración parte de ecuaciones que son consecuencia del teorema del Coseno para los lados y del Seno, con las que de nuevo realiza operaciones algebraicas básicas hasta obtener la relación buscada.

El cuarto teorema es el del Coseno para los ángulos, que da una relación entre los tres ángulos y un lado. Lo deduce a partir del teorema del Coseno para los lados y de las propiedades del triángulo suplementario a uno dado.

El autor es el primero de los revisados que demuestra estos dos últimos teoremas.

En el segundo capítulo, *Resolución de los triángulos esféricos rectángulos*, no enuncia ni demuestra relaciones para este tipo de triángulos, aunque podrían deducirse fácilmente a partir de las vistas anteriormente, tal y como advertía en el *Prólogo*.

En primer lugar presenta tres propiedades de los ángulos y lados en los triángulos rectángulos, que deduce del teorema del Coseno para los lados, y pasa directamente a ver la forma de resolver cada uno de los seis casos, basándose en los cuatro teoremas del apartado anterior cuando uno de los ángulos es recto. Para cada uno de los casos da indicaciones detalladas de los procesos, tratando y explicando el caso de ambigüedad.

En el tercer capítulo, *Resolución de los triángulos oblicuángulos o generales*, estudia pormenorizadamente los seis casos posibles usando las cuatro fórmulas de Bessel[22]. Para cada caso deduce algebraicamente relaciones a partir de los cuatro teoremas, buscando la forma más adecuada para facilitar el cálculo logarítmico. A lo largo de las demostraciones hace uso de las funciones del ángulo mitad, de diversos ángulos auxiliares y de las propiedades de los triángulos suplementarios.

El autor comenta los dos casos con ambigüedad, dejándolos para un estudio pormenorizado en el quinto capítulo.

En el capítulo IV, *Resolución de los triángulos esféricos en los cuatro casos 1.º, 2.º, 5.º y 6.º por las analogías de Neper y las de Delambre*, explica los pasos a seguir para resolver, esta vez

[22] Las cuatro fórmulas de Bessel son: 1ª Teorema del Coseno para los lados, 2ª Teorema del Seno, 3ª Teorema de la Cotangente, 4ª Teorema del Coseno para los ángulos.

usando las analogías de Neper y Delambre, los casos en los que son conocidos los dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, un lado y los dos ángulos adyacentes, dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, y dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.
En primer lugar demuestra las analogías de Neper mediante un desarrollo algebraico a partir de las fórmulas del ángulo mitad y las propiedades de los triángulos suplementarios; seguidamente demuestra las analogías de Delambre a partir de la expresión del coseno de la diferencia de dos ángulos. Una vez presentadas las analogías, las utiliza para resolver cada uno de los casos.

En el último capítulo de este apartado, *Discusión del caso dudoso de la Trigonometría esférica*, estudia de forma detallada los dos casos que presentan ambigüedad. Concluye el capítulo con dos ejemplos numéricos de resolución de triángulos esféricos en Astronomía.

En la última parte del libro, *Complemento de Trigonometría*, presenta relaciones entre las fórmulas de los triángulos rectilíneos y esféricos en el capítulo VIII, *Deducción de las fórmulas de los triángulos rectilíneos de las correspondientes de los triángulos esféricos*. Ya se comentó al estudiar la Trigonometría Rectilínea, que el autor indica cómo se obtienen a partir de los desarrollos en serie del seno y del coseno algunas de estas fórmulas pues "… *dada una fórmula de un triángulo esférico, se hallará su correspondiente del triángulo rectilineo, introduciendo en la primera la condicion de que el radio de la esfera es* ∞*.*"[CORTÁZAR, 1859, p. 185].

En la décima edición de la obra encontramos un noveno capítulo, *Resolución de los triángulos rectilíneos y esféricos cuando en vez de uno ó dos elementos del triángulo se dan una ó dos combinaciones de dichos elementos,* donde estudia la resolución de algunos de estos problemas.

Vemos que la obra de Cortázar supone la ratificación del uso del teorema del Coseno para los lados como herramienta fundamental en el estudio de la resolución de los triángulos esféricos, en detrimento del método del *Perpendículo*.

Basándose en las cuatro fórmulas de Bessel, deduce algebraicamente todas las relaciones necesarias para la resolución de los triángulos. En algunos casos estudia varias formas distintas de resolución al introducir, por primera vez entre las obras revisadas, las analogías de Neper y Gauss-Delambre.

La obra se centra en la resolución de los triángulos esféricos, presentando un escaso número de propiedades sobre los lados y ángulos de los triángulos esféricos. Por otra parte, no deduce las relaciones para el caso particular de los triángulos esféricos rectángulos, al considerar que estas relaciones se pueden obtener de las fórmulas de Bessel al imponer que uno de lo ángulos es recto.

Se puede concluir que a partir de la obra de Cortázar se confirma el enfoque algebraico en la Trigonometría Esférica, teniendo como relación fundamental el teorema del Coseno para los lados.

II.9.3.5. **Tratado elemental de trigonometría: para uso de los aspirantes al Colegio Naval Militar, por Montojo**

La siguiente obra es *Tratado elemental de trigonometría: para uso de los aspirantes al Colegio Naval Militar*, de Saturnino Montojo. Ya se comentó al tratar la Trigonometría Rectilínea que la única edición, póstuma, data de 1865 y fue obra de texto en el Colegio Naval Militar [MONTOJO, 1865]. El libro consta de doscientas ochenta páginas, de las que ciento seis páginas y cuatro figuras corresponden a la Trigonometría Esférica.

El *Prólogo* parece estar realizado por oficiales de Marina discípulos del autor, posiblemente profesores en el Colegio Naval Militar. Comienzan indicando que el tratado fue escrito por Real Orden para formar parte del curso de Matemáticas del Colegio Naval Militar, al igual que sus tratados de Aritmética y Álgebra. La obra estaba concluida y lista para prensa antes de la muerte del autor en 1856, pero causas ajenas a su voluntad impidieron su publicación, siendo el principal motivo de la publicación el deseo de su familia de que no se desconociera el trabajo. Tal y como se indica, "*No podemos mencionar en este como lo hace el autor en sus prólogos las obras que ha tenido á la vista para la redaccion de esta de Trigonometria, y así nos limitaremos tan solo á llamar la atencion de los lectores sobre algunos puntos y teorias tratados en el presente libro con mas estension y claridad que se encuentran hoy en ninguno de nuestros autores de matematicas.*" [MONTOJO, 1865, p. 1ª del Prólogo], siendo destacable que se indica que al tratar la resolución de triángulos se utilizan algunas transformaciones propias.

Montojo trata la Trigonometría Esférica en los cinco últimos capítulos de su obra.

En el capítulo VI, *Trigonometría Esférica*, comienza explicando que "*El objeto de esta seccion es resolver los triángulos esféricos, entendiendo por tales los formados en la superficie de una esfera por tres arcos de círculo máximo, cada uno de ellos menor que 180º; por manera que considerando unidos los tres vértices del triangulo con el centro O de la esfera, resultará en este un ángulo triedro cuyos ángulos planos BOC, COA y AOB estarán medidos por los lados del triangulo esférico, ó si se quiere por las relaciones de los arcos BC, AC y AB al radio r de la esfera, mientras que los ángulos respectivamente opuestos BAC, ABC y BCA en el mismo triangulo vendrán a ser los ángulos diedros BOAC, AOBC y AOCB.*" [MONTOJO, 1865, p. 175].

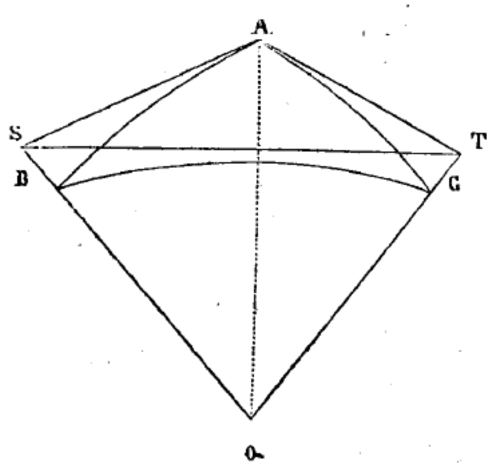


Figura de Montojo

Observamos que Montojo parte de las relaciones de los ángulos triedros y diedros para disponer de propiedades básicas en los triángulos esféricos, ya que "… *todas las propiedades demostradas en la geometria respecto de los triedros tendran lugar en el triangulo esférico*" [MONTOJO, 1865, p. 176].

A continuación explica que seis lados y ángulos determinan un triángulo esférico, con lo que basta relacionar cuatro de ellos para, que conocidos tres, se pueda hallar el cuarto y consecutivamente los restantes.

Pasa a presentar una primera ecuación entre los tres lados y un ángulo, el teorema del Coseno para los lados, con la intención de deducir a partir de ella el teorema del Seno, el teorema de la Cotangente y el teorema del Coseno para los ángulos, además de poder obtener nuevas ecuaciones que faciliten la resolución de los triángulos esféricos.

Al presentar el teorema del Coseno para los lados, realiza una demostración similar a la de Cortázar, aunque con un radio genérico r. Primero estudia el caso en el que los dos lados que comprenden al ángulo son menores que un cuadrante y posteriormente deduce que la fórmula también es válida cuando alguno de los lados es mayor o igual que un cuadrante. Para el caso particular en que uno de los ángulos es recto, obtiene la relación $\cos a = \sin b \cdot \cos A$.

Al igual que Cortazar, a partir de las distintas permutaciones de la relación del teorema del Coseno para los lados deduce algebraicamente el teorema del Seno, el de la Cotangente y el del Coseno para los ángulos.

El teorema del Seno también lo demuestra en el siguiente capítulo a partir de las relaciones del ángulo mitad.

Finaliza el capítulo deduciendo algebraicamente la Fórmula de Cagnoli, $sen\, b \cdot sen\, c + \cos b \cdot \cos c \cdot \cos A = sen\, B \cdot sen\, C - \cos B \cdot \cos C \cdot \cos a$, siendo el primer autor de los revisados que la trata.

En el siguiente capítulo, *Resolución de los triángulos esféricos, rectángulos y rectiláteros*, aplica las fórmulas del capítulo anterior a los diferentes casos que puede presentar la resolución de estos triángulos esféricos.

Comienza con los triángulos rectángulos, deduciendo seis relaciones a partir de las fórmulas generales con las que estudia los seis casos posibles de resolución, tratando con detenimiento el caso ambiguo. En algunos casos, presenta transformaciones del coseno a la tangente para evitar incertidumbres cuando los lados o ángulos son muy pequeños, o del seno a la tangente cuando son próximos a 90º.

Seguidamente presenta los triángulos rectilateros o cuadrantales, deduciendo sus relaciones mediante las propiedades de los triángulos suplementarios.

Termina esta sección presentando un ejemplo numérico con los cinco elementos constitutivos de un triángulo esférico rectángulo, con el fin de poder ensayar la aplicación de las fórmulas establecidas.

En el capítulo VIII, *Resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos*, trata los seis casos posibles, presentando y demostrado a lo largo del estudio otras propiedades, como las funciones del ángulo mitad, las analogías de Neper y las de Gauss-Delambre, de forma similar a como lo hace Cortázar.

En algunos casos, presenta varios métodos de resolución. A modo de ejemplo, en el caso en el que se conocen tres lados aplica tres métodos. El primero de los métodos es análogo al utilizado por Lista y Aragón y Cortázar, mediante las fórmulas del ángulo mitad. El segundo método parte del teorema del Coseno para los lados y mediante transformaciones y el uso de un ángulo auxiliar, obtiene una nueva relación para obtener el ángulo buscado. El tercero tiene como objetivo calcular dos ángulos a la vez, para lo que divide el triángulo esférico oblicuángulo en dos rectángulos y aplica en ellos relaciones conocidas de este tipo de triángulos.

A lo largo del estudio de los casos deduce numerosas relaciones entre los lados y ángulos del triángulo, realizando además un amplio estudio de los dos casos indeterminados.

Finaliza con un ejemplo numérico, en el que calcula todos los elementos de un triángulo con los logaritmos de sus funciones trigonométricas "*… a fin de que con ellos pueda esperimentarse la exactitud de las fórmulas, y a un juzgar de si se toman las mas convenientes para la determinacion del elemento desconocido*." [MONTOJO, 1865, pp. 226-227].

En el capítulo IX, *Algunas aplicaciones de la trigonometría esférica*, comenta que "*Las aplicaciones principales de la trigonometría esférica tendran lugar en la Cosmografia, al tratar de los problemas astronómicos: entre tanto indicaremos ligeramente algunas de diferentes clases*." [MONTOJO, 1865, p. 232].

Comienza expresando el volumen de un paralepípedo oblicuo, en función de las tres aristas y de los ángulos que éstas forman entre sí. Seguidamente explica la reducción de un ángulo al horizonte, la determinación del arco de círculo máximo y los ángulos entre los meridianos de dos lugares, la determinación del punto de intersección de un círculo con el ecuador, y la combinación de ecuaciones para la resolución de varios problemas.

Finaliza el apartado presentando las ventajas de las Analogías diferenciales, con el objetivo de "*… formar juicio del grado de exactitud con que según las circunstancias pueden obtenerse los elementos que se buscan, aun cuando en los datos que para ello se empleen exista alguna incertidumbre*." [MONTOJO, 1865, p. 250].

A partir de las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} sen\,a \cdot sen\,B = sen\,b \cdot sen\,A \\ sen\,a \cdot \cos B = \cos b \cdot sen\,c - sen\,b \cdot \cos c \cdot \cos A \\ \cos a = \cos b \cdot \cos c + sen\,b \cdot sen\,c \cdot \cos A \end{array}\right\}$$

toma pequeños incrementos en los ángulos y en los lados, obteniendo las analogías buscadas. Indica que se puede aplicar el mismo procedimiento a otras ecuaciones para obtener nuevas analogías, que son de gran utilidad para la Astronomía Náutica, y advierte que los resultados son tanto más aproximados, cuanto más pequeñas son las variaciones.

En el décimo y último capítulo, *Área del triángulo esférico*, presenta una variedad de temas, comenzando con el estudio del área de un triángulo esférico y del exceso esférico, siendo el primer autor de los estudiados que lo hace. Se basa en propiedades geométricas y en procedimientos algebraicos para deducir numerosas expresiones que determinan el área de un triángulo esférico, según los datos de que se disponen.

Seguidamente trata las analogías existentes entre las fórmulas halladas para los triángulos esféricos con las dadas para los triángulos rectilíneos, basándose, al igual que Cortázar, en los desarrollos en serie del seno y del coseno.

Posteriormente presenta numerosas relaciones de los radios del círculo inscrito y circunscrito a un triángulo esférico, que son tratadas por primera vez entre los autores revisados.

A continuación considera el caso de los triángulos esféricos cuyos lados son pequeños relativamente al radio de la esfera, indicando que "*… todas las fórmulas dadas en esta parte de la trigonometría se convierten en tal supuesto análogas de la trigonometría plana*." [MONTOJO, 1865, p. 272].

El autor deduce relaciones, muchas de ellas inéditas en el resto de obras estudiadas, entre las que destaca el teorema de Legendre. Dicho teorema se basa en la idea de que un triángulo esférico, con lados muy pequeños comparativamente al radio de la esfera, se puede resolver como un triángulo rectilíneo con aproximación superior a la que se necesita en la práctica, siendo de aplicación para simplificar considerablemente las operaciones geodésicas.

La obra de Montojo supone la confirmación de un enfoque algebraico en la Trigonometría Esférica a partir del teorema del Coseno para los lados.

Su obra tiene bastantes puntos en común con la de Cortázar, siendo más completa en cuanto a relaciones, pues además de tratar la mayoría de las presentadas por Cortázar, incorpora nuevas relaciones como la Fórmula de Cagnoli.

También introduce nuevas propiedades relacionadas con el estudio de las áreas de los triángulos, las analogías diferenciales, los radios del círculo inscrito y circunscrito a un triángulo, propiedades de los triángulos esféricos cuyos lados son pequeños relativamente al radio de la esfera y el teorema de Legendre.

La obra presenta pocas propiedades sobre las relaciones de los lados y ángulos, al darlas por conocidas en los tratados de Geometría, centrándose en los teoremas y relaciones de los triángulos esféricos, tanto oblicuángulos como rectángulos, necesarios para su resolución. Realiza un estudio detallado de cada uno de los casos, tratando en profundidad las situaciones indeterminadas.

II.9.3.6. Ejercicios de Trigonometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, por Terry y Rivas

La obra *Ejercicios de Trigonometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* es de Antonio Terry y Rivas. La obra fue utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante.
La primera edición, y parece ser que única, data de 1881 y en ella se presentan ejemplos y ejercicios sobre Trigonometría [TERRY Y RIVAS, 1881b]. La parte de Trigonometría Esférica consta de cuarenta páginas y cuatro figuras insertadas a lo largo de la obra.

Terry y Rivas en la *Introducción* de su obra explica únicamente el uso de las líneas trigonométricas auxiliares y sus propiedades, aspecto comentado al estudiar la Trigonometría Rectilínea.

El autor trata la Trigonometría Esférica en los dos últimos capítulos de la segunda parte de su obra, *Esférica*.
En el capítulo I, *Resolución de los triángulos esféricos en general*, presenta en primer lugar la resolución de triángulos rectángulos. Comienza haciendo referencia a la obra *Historie des Mahtématiques* de Montucla[23] y explicando el *Pentágono de Neper*, siendo Terry y Rivas el primer autor de los estudiados que lo presenta, aunque no lo usa a lo largo de la obra.
Seguidamente muestra una tabla resumen con las fórmulas que dan la resolución de los triángulos esféricos rectángulos en los seis casos habituales, donde las fórmulas necesarias son las que ha indicado para la construcción del *Pentágono de Neper* [TERRY Y RIVAS, 1881b, p. 224]:

[23] MONTUCLA, J. F. (1758) *Historie des Mathématiques*. París, Chez Ch. Ant. Jombert

678. *Expresar en una tabla las fórmulas que nos dan la resolucion de los triángulos esféricos rectángulos.*

CASOS	DATOS	RESULTADOS	FÓRMULAS
1.º	b	a , B	$\cos a = \cos b \cos c$, $\tan B = \dfrac{\tan b}{\operatorname{sen} c}$
	c	C	$\tan C = \dfrac{\tan c}{\operatorname{sen} b}$

Primer caso de los estudiados en la Tabla

Posteriormente realiza un ejemplo de la resolución de cada uno de los seis casos que se pueden encontrar utilizando las relaciones de la tabla, estudiando el caso de indeterminación, y propone dieciocho ejercicios con solución.

Seguidamente pasa a tratar la resolución de los triángulos oblicuángulos, dando una nueva tabla resumen con las fórmulas necesarias, mostrando entre otras las que presentan el teorema del Seno, las funciones del ángulo mitad y las analogías de Neper, pero en las que están ausentes las proporcionadas por el teorema del Coseno para los lados, el de la Contangente y el del Coseno para los ángulos. La ausencia de estas relaciones supone un retroceso en cuanto a la disponibilidad de ecuaciones para resolver los triángulos, si bien de ellas se deducen las que presenta.
Seguidamente realiza un ejemplo de cada uno de los seis casos de resolución de triángulos oblicuángulos, discutiendo los casos con ambigüedad, y propone catorce ejercicios con solución.

CASOS.	DATOS.	RESULTADOS.	FÓRMULAS.	FÓRMULAS que dan directamente cada uno de los elementos del triángulo.
2.º	A	a	$= \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$	$\tan\varphi=\frac{\cot A}{\cos C}$ $\cot a=\frac{\cot c\cos(B-\varphi)}{\cos\varphi}$
	B	b	$= \frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)$	$\tan\varphi=\frac{\cot B}{\cos c}$ $\cot b=\frac{\cot c\cos(A-\varphi)}{\cos\varphi}$
	C	c	$\cot\frac{1}{2}C=\tan\frac{1}{2}(A+B)\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$ $\cot\frac{1}{2}C=\tan\frac{1}{2}(A-B)\frac{\mathrm{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}(a-b)}$	$\cot\varphi=\tan A\cos c$ $\cos C=\frac{\cos A\,\mathrm{sen}(B-\varphi)}{\mathrm{sen}\,\varphi}$

Segundo caso de los estudiados en la Tabla

En el capítulo II, *Alguna aplicaciones de la Trigonometría Esférica*, comienza indicando que "*Como las aplicaciones principales de la TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA tienen lugar en la Astronomía y Navegación, nos limitaremos tan solo á dar algunas de diferentes clases.*" [TERRY Y RIVAS, 1881b, p. 248].

Presenta diecisiete ejemplos, en los que mediante las relaciones de las dos Tablas anteriores junto con las analogías de Gauss-Delambre, resuelve triángulos esféricos con ciertas relaciones entre sus lados y ángulos, halla el radio del círculo inscrito y del círculo circunscrito a un triángulo esférico, calcula el área de un triángulo esférico en función de sus lados y presenta relaciones de los poliedros regulares, los paralelepípedos y las pirámides.

La obra de Terry y Rivas está destinada a la práctica y resolución de problemas relacionados con la Trigonometría y consecuentemente no realiza demostraciones teóricas, limitándose a presentar en dos tablas resumen las principales relaciones en los triángulos esféricos, con las que posteriormente estudiar todos los casos de resolución de triángulos.

Entre estas relaciones hay algunas ausencias importantes, como los teoremas del Coseno para los lados, de la Cotangente y del Coseno para los ángulos.

Por otra parte, es el primer autor de los revisados en presentar el *pentágono de Neper*, aunque no lo utiliza en la resolución de los ejercicios.

II.9.3.7. **Trigonometría, por Ortega y Sala**

La siguiente obra en orden cronológico, *Trigonometría*, está escrita por Miguel Ortega y Sala. Ya se comentó al tratar la Trigonometría Rectilínea que la obra fue libro de texto en la Academia del Cuerpo de Ingenieros, siendo incluida en el estudio por haber escrito el autor otra obra sobre Geometría utilizada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. La primera edición es de 1881, que es la que revisamos, teniendo constancia de una segunda edición en 1902. En la edición revisada [ORTEGA Y SALA, 1881], el libro tiene ciento ochenta y cuatro páginas y treinta y tres figuras, constando la parte de Trigonometría Esférica de sesenta y cuatro páginas y diez figuras.

Comienza con un apartado previo, *Advertencia*, en el que indica que la obra está destinada como libro de texto en la Academia de Ingenieros, al estar agotado el anterior libro. Muestra el carácter práctico que quiere imprimir a la obra cuando anuncia que "*Despojada, pues, en gran parte, del carácter de ciencia especulativa y de investigacion, queda, sin embargo, para la trigonometría la verdadera importancia de su principal objeto, cual es la resolucion de triángulos, poderoso auxiliar de la topografía, geodesia, astronomia. etc., y bajo tal concepto me propongo desarrollar sus teorías, prescindiendo de las que no conduzcan á este fin, pero dando en cambio la debida amplitud á las que llenen tal requisito*." [ORTEGA Y SALA, 1881, p. XI].
Además, señala que también atenderá la parte práctica y uso de las fórmulas para la resolución de los triángulos, todo ello reduciendo "*… este libro á las más cortas dimensiones, sin perjudicar la enseñanza*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. XII], por lo que realizará en cada cuestión un estudio particular para simplificarla y abreviarla, indicando que "… *para ello he tenido que separarme algunas veces de la marcha seguida en la generalidad de las trigonometrías, buscando caminos expeditos para el término que me proponía*." [ORTEGA Y SALA, 1881, p. XII]. Indica que el teorema de Legendre ha sido objeto de especial estudio, ante las habituales dificultades encontradas por los alumnos.
También explica que se han insertado los ejemplos indispensables a lo largo del texto, en notas o en los apéndices finales del libro.

Concluye la *Advertencia* con la esperanza de que el libro sea útil en la enseñanza, y con el convencimiento de *"… haber conseguido una ventaja, cual es comprender en un número de lecciones bastante menor las mismas teorías que encierran las que hoy se dan en las clase á que dedico este libro*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. XIV].

Inicia la *Introducción* estableciendo las diferencias entre el Álgebra y la Geometría, indicando que "*Ambos procedimientos tienen ventajas é inconvenientes. El del álgebra, ó analitico, admite mayor generalidad y proporciona resultados más aproximados, cuando no pueden obtenerse exactos, y el de la geometria, ó gráfico, es, por lo general, más expedito y se presta más fácilmente á las aplicaciones prácticas."* [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 3], pasando a mostrar un ejemplo para apreciar las ventajas de cada procedimiento.
Denomina Geometría Analítica a la Geometría que surge al aplicarle el Álgebra, y considera la Trigonometría como *"… la parte de las matemáticas que se ocupa de resolver los triángulos por procedimientos analíticos*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 4], primera definición de la Trigonometría, entre las obras revisadas, que resalta su carácter analítico. Seguidamente trata conceptos propios de este enfoque analítico, como sistema de coordenadas, abcisas u ordenadas.

El quinto capítulo, *Trigonometría Esférica*, es el único de la obra dedicado a este tipo de Trigonometría.
En el primer apartado, *Fórmulas de relación*, sigue un procedimiento similar al realizado al estudiar la resolución de triángulos planos, pues "*Los elementos desconocidos de un triángulo esférico se deducen en funcion de los tres datos mediante relaciones que se establecen entre unos y otros, siendo tambien de gran conveniencia que estas relaciones sólo contengan cuatro elementos para despejar de cada una el elemento incógnito, sin necesidad de recurrir á los medios algebráicos de eliminación."* [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 111].
Al igual que en los triángulos planos, hay quince posibles combinaciones, que agrupa en cuatro casos según los elementos dados. Destaca que a diferencia de lo que ocurre en la Trigonometría Rectilínea, con una esfera de radio conocido se puede construir un triángulo dados los tres ángulos, y que dicho radio se considerará generalmente la unidad, o que sin serlo, se ha considerado como tal.
Pasa a considerar cuatro relaciones fundamentales, denominados grupos, que utilizará para la resolución de triángulos. La primera es el teorema del Coseno para los lados, que designa como *Primer grupo*, realizando una demostración similar a la realizada por Cortázar. Partiendo del caso en que los dos lados que comprenden al ángulo son menores que un cuadrante, realiza una

construcción en la que obtiene dos triángulos rectángulos y a partir de ellos deduce la relación. Seguidamente deduce que la fórmula también es válida cuando alguno de los lados es mayor o igual que un cuadrante, mediante relaciones geométricas en el triángulo.

La segunda relación es el teorema del Coseno para los ángulos, denominada *Segundo grupo*, que deduce mediante el triángulo suplementario a uno dado.

La tercera relación es el teorema del Seno, deducida algebraicamente a partir del teorema del Coseno para los lados, demostración novedosa con respecto a las anteriores obras revisadas.

La cuarta relación corresponde al teorema de la Cotangente, deducida al eliminar de las ecuaciones del teorema del Coseno para los lados un lado y un ángulo que no sea el opuesto.

Indica que las fórmulas de los tres primeros grupos no presentan gran dificultad para recordarlas, pero las del cuarto grupo son más complicadas, por lo que presenta una regla empírica consistente en "*… igualar el producto de las dos cotangentes de los elementos opuestos al producto de las cotangentes de los otros dos, convertir el segundo miembro en cosenos y separar luego en el primer miembro las líneas de las letras minúsculas de las de las mayúsculas, por medio del signo.*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 117].

Una vez presentados los cuatro grupos, el autor se detiene a comentar la semejanza de las fórmulas del tercer grupo con las análogas de los triángulos rectilíneos, que observa también en otras fórmulas, por lo que indica que debe existir alguna correlación entre ellas. Considera un plano como límite de una esfera cuyo radio crece hasta el infinito, deduciendo que todo triángulo plano puede ser tomado como límite de uno esférico en el que el radio de su esfera ha crecido indefinidamente, y consecuentemente los ángulos de uno y otro triángulo serán distintos, mientras que los lados del triángulo rectilíneo serán los mismos que los del esférico rectificados. De esta forma y siguiendo un proceso similar al realizado por Montojo, considera que la Trigonometría Rectilínea puede considerarse un caso particular de la Esférica, pudiendo obtenerse las fórmulas de la primera al introducir en la segunda la hipótesis de ser el radio infinito. Advierte que las fórmulas que se han deducido previamente lo han sido con el supuesto de ser el radio la unidad, condición que no influye cuando se consideran los lados por su valor gradual; sin embargo, cuando se trabaja con las longitudes de dichos lados, sí puede influir al ser las longitudes proporcionales a los radios de las esferas, por lo que se debe restablecer el radio dividiendo las rectificaciones por su valor.

Una vez aclarada la necesidad de restablecer el radio cuando no es la unidad, muestra la forma en que a partir de las fórmulas del tercer grupo se deducen las análogas de los triángulos rectilíneos, indicando que "*Por iguales medios y bajo las mismas consideraciones se pasa de las* *fórmulas fundamentales de una trigonometría á las de la otra*” [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 120].

A continuación particulariza las fórmulas vistas para el caso en que el triángulo sea rectángulo, presentando las *reglas de Neper* (aunque sin darles ese nombre) como una regla empírica para evitar su memorización.

Para facilitar los cálculos logarítmicos al resolver triángulos, deduce algebraicamente las funciones del ángulo mitad, las analogías de Gauss-Delambre y las analogías de Neper, explicando una nueva regla nemotécnica para recordar estas últimas analogías.

En el segundo apartado, *Resolución de triángulos*, plantea que mediante las fórmulas obtenidas previamente se pueden resolver los triángulos esféricos agrupando los datos con cada una de las incógnitas, eligiendo y preparando la fórmula que interese para el cálculo logarítmico, y finalmente obteniendo el elemento desconocido. También indica que pueden utilizarse procedimientos particulares de resolución, tal y como presenta en algunos de los casos que resuelve por varios métodos.

En primer lugar trata la resolución de los triángulos rectángulos; presenta una tabla resumen de todos los casos y seguidamente discute el caso de indeterminación.

Posteriormente presenta la resolución de los triángulos oblicuángulos, estudiando cada caso mediante varios métodos. En general utiliza, de entre las fórmulas fundamentales, las relacionadas con las tangentes para facilitar los cálculos logarítmicos; también hace uso de las propiedades de los triángulos suplementarios y maneja el método del *Perpendículo* como método de resolución alternativo. Es destacable, que partiendo de las fórmulas fundamentales, realiza numerosas transformaciones con el objetivo de facilitar los cálculos mediante logaritmos. Por otra parte, estudia los casos de indeterminación, ofreciendo tablas resumen sobre las mismas.

Concluye el apartado tratando el área de un triángulo esférico, advirtiendo que las expresiones del área en función de tres elementos del triángulo no son tan fáciles de determinar como en la Trigonometría Rectilínea. Por este motivo se limita a estudiarlas en dos casos, de forma más resumida a como lo hace Montojo, que deduce algebraicamente a partir de las analogías de Delambre.

La primera de las relaciones, es la fórmula debida a L’Huillier (sic)[24], que permite calcular el área de un triángulo esférico conocidos sus tres lados:

[24] Simon Antoine Jean L'Huillier (Ginebra, Suiza 1750- Ginebra 1840), matemático conocido por sus investigaciones sobre el concepto de límite matemático, elaboración de fórmulas sobre la Trigonometría Esférica, trabajos en el campo del Análisis matemático y la generalización de la fórmula de Euler relativa al grafo planar y a los poliedros regulares.

$$tg\frac{1}{2}S=\sqrt{tg\frac{1}{2}p\,tg\frac{1}{2}(p-a)tg\frac{1}{2}(p-b)\,tg\frac{1}{2}(p-c)}\ .$$

La segunda relación permite calcular el área de un triángulo esférico en función de dos lados y el ángulo comprendido.

En el apartado tercero, *Resolución de triángulos en circunstancias especiales*, explica que en las aplicaciones de la Astronomía y la Geodesia, el radio de la esfera en que se supone trazado el triángulo es muy grande, por lo que es necesaria mucha precisión en los cálculos. Por ello conviene emplear en estos casos procedimientos especiales que permitan fijar de antemano el límite del error que no se quiere exceder. Los desarrollos en serie son especialmente interesantes en estos casos, advirtiendo el autor que hay que tener en cuenta que en los desarrollos, los arcos están tomados en valor lineal o rectificados. Seguidamente presenta detalladamente varios de estos casos, junto con ejemplos numéricos.
Concluye el apartado presentando y demostrando el teorema de Legendre, de forma similar a como lo hace Montojo. Comenta que el teorema es adecuado para resolver operaciones geodésicas, en los que la distancia entre dos puntos no puede exceder de ciertos límites: "*Si se rectifican los tres lados de un triángulo esférico cuyos tres lados sean muy pequeños respecto al rádio de la esfera á que pertenece y se resuelve el triángulo rectilíneo resultante, sus ángulos, aumentados en la tercera parte de la superficie del mismo, son iguales á lo del triángulo esférico propuesto.*" [ORTEGA Y SALA, 1881, pp. 154-155]. Advierte que el teorema sólo es cierto dentro del grado de aproximación que se admite en el cálculo, e indica el modo de aplicar el teorema, requiriendo en algunos casos procedimientos que el autor explica por medio de ejemplos numéricos.

Concluye el tratamiento de los triángulos esféricos presentando ejemplos numéricos de resolución en el *Apéndice III*, *Ejemplos de triángulos esféricos*. Lo hace en tres de los casos, "*… puesto que los tres restantes se reducen á estos mismos.*" [ORTEGA Y SALA, 1881, p. 179].
De nuevo se puede observar la influencia de Montojo al tomar el autor el primero de los triángulos de su obra.

La parte sobre Trigonometría Esférica de la obra de Ortega y Sala sigue una estructura similar al texto de Montojo, aunque de una forma más compacta y práctica, con la intención de que sea más accesible a sus estudiantes.

Se centra en la resolución de los triángulos esféricos, para lo que presenta los teoremas fundamentales en cuatro grupos que puede aplicar en cada caso de resolución, incorporando las *reglas de Neper* como regla nemotécnica de las relaciones en los triángulos rectángulos. Es destacable el interés del autor por facilitar los cálculos logarítmicos durante la resolución de los triángulos y el uso del método del *Perpendículo*, método en desuso por la mayoría de los autores, como herramienta alternativa de resolución.

Siguiendo el desarrollo de la obra de Montojo, estudia aspectos sobre el área de un triángulo esférico, las relaciones entre la Trigonometría Esférica y la Rectilínea y la resolución de triángulos esféricos muy grandes, especialmente mediante el teorema de Legendre.
De esta forma, el autor se basa en la obra de Montojo con el objetivo de ofrecer una adaptación de los contenidos para sus alumnos.

II.9.3.8. **Trigonometría elemental: obra declarada de texto para el ingreso en la Escuela Naval, por Barreda y García**

La última de las obras consultadas, *Trigonometría elemental: obra declarada de texto para el ingreso en la Escuela Naval*, escrita por los capitanes de fragata José A. Barreda y Manuel García Velázquez fue obra de texto para el ingreso en la Escuela Naval Flotante. Ya se comentó, al estudiar la Trigonometría Rectilínea, que la primera edición parece ser de 1899 y se ha revisado la edición de 1917, teniendo constancia de una cuarta edición en 1921 y una quinta edición en 1928. En la edición revisada [BARREDA & GARCÍA, 1917], el libro tiene doscientas setenta y una páginas. La parte de Trigonometría Esférica son cuarenta páginas y seis figuras, estando todas las figuras insertadas a lo largo de la obra.

La obra no presenta prólogo o introducción, pasando directamente a trabajar la Trigonometría a lo largo de catorce lecciones y un *Apéndice*. Tratan la Trigonometría Esférica en las siete últimas lecciones de la obra, y como se verá a lo largo del estudio, el texto está muy influenciado por la obra de Montojo, por lo que haremos continuas alusiones a su libro.

En la lección 8ª, *Trigonometría esférica. Triángulos Esféricos*, comienzan explicando el concepto de triángulo esférico como "… *la figura formada sobre la superficie de una esfera, por* *tres arcos de círculos máximos que se cortan, cada uno de ellos menor de 180° y se sabe tambien que los lados y los ángulos de un triángulo esférico son las medidas respectivas de las caras y los diedros del triedro que se forma, uniendo los tres vértices del triángulo con el centro de la esfera a cuya superficie pertenece."* [BARREDA & GARCÍA, 1917, p. 121].

Seguidamente indican varias propiedades sobre ángulos y lados que "… *nos son todas conocidas por Geometría*." [BARREDA & GARCÍA, 1917, p. 122].

Pasan a tratar las fórmulas que relacionan cuatro elementos del triángulo esférico, asociando cada una con una situación en la que se conocen tres de los cuatro elementos de la relación.

Comienzan con la relación que trata tres lados y un ángulo, el teorema del Coseno para los lados. Realizan una demostración idéntica a la de Montojo, salvo en la notación al permutar las letras *S* y *T*; de igual forma estudian primero el caso en el que los ángulos son menores de 90º y posteriormente lo ven para cualquier ángulo.

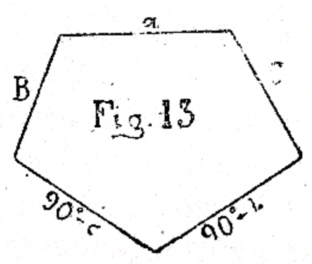
Seguidamente deducen el teorema del Coseno para los ángulos, con el que se relacionan tres ángulos y un lado. Lo hacen utilizando el teorema anterior y las propiedades de los triángulos suplementarios.

Para la relación que trata dos lados y los dos ángulos opuestos, presentan el teorema del Seno con una demostración a partir del teorema del Coseno de los lados, idéntica a la de Montojo.

Concluyen la lección con el teorema de la Cotangente, con el que relacionan dos lados, el ángulo comprendido y el opuesto a uno de ellos. Realizan una demostración algebraica algo distinta a la de Montojo.

En la lección 9ª, *Triángulos Esféricos Rectángulos*, muestran las fórmulas para este tipo de triángulos a partir de las relaciones fundamentales de la lección anterior.

Seguidamente presentan propiedades que se deducen de las fórmulas, destacando la descripción del *pentágono de Neper*, siendo los primeros que representan la figura del pentágono, aunque sin darle este nombre.



Continúan explicando algunas propiedades de los ángulos y lados de los triángulos rectángulos, pasando a resolver los seis casos de resolución de los triángulos, con un proceso prácticamente igual al realizado por Montojo, aunque realizan una discusión del sexto caso más profunda y dan un ejemplo numérico de cada uno de los casos.

En la 10ª lección, *Triángulos Esféricos Oblicuángulos*, presentan el estudio de los dos primeros casos, conocidos los tres lados y conocidos tres ángulos.

Los autores hacen notar que "*La resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos presenta seis casos distintos que pueden agruparse de dos en dos por las propiedades de los triángulos polares*" [BARREDA & GARCÍA, 1917, p. 156].

Durante el estudio del caso en que se conocen tres lados, demuestran las funciones del ángulo mitad a partir del teorema del Coseno para los lados, de forma análoga a como lo hace Montojo al presentar su primer método de resolución para este caso.

Para el estudio del caso en que se conocen tres ángulos, lo hacen de dos formas distintas, al igual que Montojo, a partir del teorema del Coseno para los ángulos o ayudándose del triángulo suplementario. Concluyen la lección con un ejemplo numérico de cada caso.

En la 11ª lección, *Triángulos Esféricos Oblicuángulos*, demuestran las analogías de Gauss-Delambre y de Neper, de las que harán uso en posteriores lecciones, haciendo un estudio de las mismas más profundo que el realizado por Montojo.

También demuestran que si dos lados son desiguales, los ángulos opuestos son desiguales, y el ángulo mayor se opone al lado mayor, y recíprocamente.

En la 12ª lección, *Triángulos Esféricos Oblicuángulos*, presentan el estudio de otros dos casos.

En el primero son conocidos los dos lados y el ángulo comprendido entre ellos; comentan que se pueden aplicar las analogías de Gauss-Delambre, aunque realizan una demostración basándose en ángulos auxiliares, similar a la realizada por Montojo en el primer método que realiza para este caso.

En el segundo caso, son conocidos un lado y los dos ángulos adyacentes. Explican que se pueden aplicar las analogías de Neper, aunque de nuevo utilizan ángulos auxiliares, esta vez con más detenimiento a como lo hace Montojo en el segundo método que presenta para este caso. También explican la manera de resolverlo aplicando las propiedades de los triángulos suplementarios. Como en las anteriores lecciones, concluyen con un ejemplo numérico de cada caso.

En la 13ª lección, *Triángulos Esféricos Oblicuángulos*, presentan el estudio de los dos últimos casos. En el primero son conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Realizan un proceso similar al aplicado por Montojo, basado en el teorema del Seno y en las analogías de Neper, si bien añaden una interpretación geométrica del proceso.
En el segundo son conocidos dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, basándose igualmente en el teorema del Seno y las analogías de Neper como Montojo, pero en esta ocasión hacen un estudio más detallado, advirtiendo como en casos anteriores, que también se pueden aplicar las propiedades de los triángulos suplementarios.
En ambos casos comentan la existencia de indeterminaciones, que estudiarán en la siguiente lección.

En la 14ª y última lección, *Triángulos Esféricos Oblicuángulos*, presentan la discusión de las indeterminaciones de los dos últimos casos, de forma similar a como lo hace Montojo, presentando una tabla resumen de la discusión del primero de ellos e indicando que el otro caso "*… es susceptible de una discusión análoga con sólo cambiar b en B y a en A y la elección de los elementos se discutiría también de igual manera, obteniendo un cuadro igual que el anterior reemplazando las mayúsculas por las minúsculas y al contrario.*" [BARREDA & GARCÍA, 1917, p. 225].
Concluyen la lección con un ejemplo numérico de cada caso.

La parte sobre Trigonometría Esférica de la obra de Barreda y García sigue la estructura de la parte de resolución de triángulos en la obra de Montojo, tratando en general de forma similar los contenidos presentados.

Realizan un estudio detallado de todos los casos de resolución de triángulos esféricos, tanto rectángulos como oblicuángulos. No utilizan tantos métodos como hace Montojo, si bien estudian con más detenimiento los casos de indeterminación y dan ejemplos numéricos de la resolución de todos los casos para su mejor aprendizaje.
A diferencia de Montojo, presentan el *pentágono de Neper*, aunque no hacen uso directo de la regla.

En la obra no tratan otros contenidos, como áreas de triángulos esféricos o aplicaciones de la Trigonometría Esférica a la Navegación, por lo que podemos concluir que la obra es básicamente una actualización de la parte de resolución de triángulos esféricos de Montojo.

II.9.4. Resultados

En la mayoría de las obras estudiadas encontramos una estructura similar, comenzando con definiciones y propiedades básicas de la Trigonometría Esférica, presentando posteriormente relaciones de los triángulos esféricos oblicuángulos y rectángulos, junto con el estudio de la resolución de cada uno de estos tipos de triángulos esféricos.
Consecuentemente, pasamos a ver la forma en que evolucionaron cada uno de estos elementos a lo largo del siglo XIX.

El primer aspecto a comparar es la forma en que se presentan las definiciones y propiedades básicas de la Trigonometría Esférica.
Ciscar presenta un reducido número de definiciones y propiedades básicas, apoyándose en figuras geométricas y triángulos rectilíneos.
Lista y Aragón realiza una definición de triángulo esférico basándose en el concepto de ángulo triedro y deduciendo que la resolución de un triángulo esférico se reduce a conocer sus tres ángulos planos y sus ángulos diedros en un ángulo diedro. A continuación, presenta consecuencias en las que trata los cuatro criterios de igualdad para triángulos esféricos y algunas propiedades entre sus ángulos y lados, basándose en el triángulo suplementario a uno dado junto con propiedades de los ángulos triedros.
Castillo y Castro parte de una definición de triángulo esférico a partir de una pirámide triangular, definición distinta a las de los demás autores revisados, y basándose en propiedades de la Geometría Plana, presenta numerosas relaciones entre los ángulos y lados de triángulo esférico, siendo novedosas algunas de las relaciones que deducen los tipos de ángulos y lados según las condiciones iniciales.
Cortázar centra su obra en la resolución de los triángulos esféricos, presentando un escaso número de propiedades sobre los lados y ángulos de los triángulos esféricos.
Montojo parte de las relaciones de los ángulos triedros y diedros para disponer de propiedades básicas en los triángulos esféricos, aunque presenta pocas propiedades sobre las relaciones de los lados y ángulos, al darlas por conocidas.

La obra de Terry y Rivas está destinada a la práctica y resolución de problemas relacionados con la Trigonometría, no presentando definiciones o propiedades de los triángulos esféricos.
Ortega y Sala no presenta definiciones y propiedades básicas, centrándose en la resolución de triángulos.
Barreda y García, al igual que Montojo, parten de las relaciones de los ángulos triedros y diedros, presentando varias propiedades básicas de los triángulos esféricos.
Vemos, que mientras en las obras estudiadas durante el siglo XVIII se presentan un amplio número de propiedades relacionadas con los lados y ángulos de los triángulos esféricos, a lo largo del siglo XIX los autores van reduciendo estos contenidos al darlos por conocidos y centrarse en la resolución de triángulos.
No hay un criterio único respecto del orden seguido al tratar las relaciones y el estudio de la resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos y rectángulos. Lo más habitual es tratar en primer lugar las relaciones de los triángulos esféricos oblicuángulos y seguidamente las de los rectángulos. En cambio, a la hora de resolver los triángulos, se suelen estudiar primero los rectángulos y posteriormente los oblicuángulos.

El segundo aspecto a comparar es el tratamiento de las relaciones de los triángulos esféricos oblicuángulos, junto con el estudio de su resolución.
Ciscar entremezcla las pocas propiedades que presenta sobre triángulos rectángulos y oblicuángulos, basándose en figuras y propiedades geométricas. Demuestra varias proposiciones sobre los triángulos oblicuángulos, destacando por su importancia la del teorema del Seno, aunque no trata la resolución de triángulos. Es el primero de los autores revisados que no utiliza el método del *Perpendículo*, quizá porque no trata directamente la resolución de los triángulos esféricos en la obra.
Lista y Aragón parte de los teoremas del Seno, del Coseno para los lados y las propiedades de los triángulos suplementarios, con la finalidad de deducir las relaciones necesarias para resolver todos los casos de triángulos oblicuángulos, si bien no comenta la existencia de ambigüedades. Es el primer autor que utiliza herramientas algebraicas en la mayoría de las demostraciones, y también el primero que presenta el teorema del Coseno para los lados y las analogías de Neper. Al utilizar el teorema del Coseno para los lados, no tiene la necesidad de utilizar el método del *Perpendículo*, lo que supone un gran cambio de planteamiento.
Castillo y Castro presenta las principales relaciones para resolver triángulos oblicuángulos, aunque a lo largo de la obra no estudia su resolución. Por otra parte, si bien utiliza el método del *Perpendículo* en algunas demostraciones, no es una herramienta fundamental a lo largo de la

obra. Es el único autor que realiza cuadros resumen donde se ve la combinación de los datos con respecto a la especie de los ángulos y lados de todo triángulo por resolver, una vez dados tres de sus términos.

Cortázar supone la ratificación del uso del teorema del Coseno para los lados como herramienta fundamental en el estudio de la resolución de los triángulos esféricos, en detrimento del método del *Perpendículo*. Basándose en las cuatro fórmulas de Bessel, deduce algebraicamente todas las relaciones necesarias para la resolución de los triángulos. En algunos casos estudia varias formas distintas de resolución al introducir, por primera vez entre las obras revisadas, las analogías de Neper y de Gauss-Delambre.

Montojo establece, definitivamente, un enfoque algebraico en la Trigonometría Esférica a partir del teorema del Coseno para los lados. Su obra tiene bastantes puntos en común con la de Cortázar, siendo más completa en cuanto a relaciones, pues además de tratar la mayoría de las presentadas por Cortázar, incorpora nuevas relaciones, como la Fórmula de Cagnoli. Realiza un estudio detallado de cada uno de los casos de resolución de los triángulos oblicuángulos, presentando para cada caso varios métodos de resolución y tratando en profundidad las situaciones indeterminadas.

Terry y Rivas trata la resolución de los triángulos oblicuángulos mediante una tabla resumen con las fórmulas necesarias, presentando entre otras, las del teorema del Seno, las funciones del ángulo mitad y las analogías de Neper, pero en las que están ausentes las proporcionadas por el teorema del Coseno para los lados, el de la Contangente y el del Coseno para los ángulos.

Ortega y Sala se basa en la obra de Montojo, con el objetivo de ofrecer una adaptación de los contenidos para sus alumnos. Presenta los teoremas fundamentales en cuatro grupos, que puede aplicar en cada caso de resolución, incorporando las *reglas de Neper* como regla nemotécnica de las relaciones en los triángulos rectángulos. Es destacable el interés del autor por facilitar los cálculos logarítmicos durante la resolución de los triángulos y el uso del método del *Perpendículo* como herramienta alternativa de resolución, método ya en desuso por la mayoría de los autores.

Barreda y García siguen la estructura de la obra de Montojo, tratando en general de forma similar los contenidos presentados. Realizan un estudio detallado de todos los casos de resolución de triángulos esféricos, tanto rectángulos como oblicuángulos. No utilizan tantos métodos como hace Montojo, si bien estudian con más detenimiento los casos de indeterminación y dan ejemplos numéricos de la resolución de todos los casos para su mejor aprendizaje.

Se observa que hay una gran evolución respecto al siglo anterior a la hora de tratar las relaciones en los triángulos oblicuángulos. En las obras revisadas en el siglo XVIII, por lo general parten del teorema del Seno, continuando con proposiciones en las que a partir de la aplicación del método del *Perpendículo* sobre un triángulo presenta relaciones de proporcionalidad entre los senos, cosenos y tangentes de los ángulos de los dos triángulos en que se divide el primero. Ciscar en su *Curso Elemental de Marina* sigue este enfoque, pero paulatinamente se va imponiendo el teorema del Coseno para los lados como propiedad fundamental para deducir el resto de relaciones de aplicación en la resolución de los triángulos oblicuángulos. A partir de las obras de Cortázar, y sobre todo de Montojo, se impone este nuevo enfoque algebraico a la hora de estudiar los triángulos oblicuángulos.

En cuanto a la resolución de los triángulos oblicuángulos, en el siglo XVIII se fundamentan los métodos en el teorema del Seno y en el método del *Perpéndiculo*, mientras que a lo largo del siglo XIX el teorema del Coseno para los lados permite establecer nuevas relaciones para la resolución, destacando de entre estas, las analogías de Gauss-Delambre y de Neper al facilitar el cálculo logarítmico.

El tercer aspecto a comparar son las relaciones de los triángulos esféricos rectángulos, junto con el estudio de su resolución.

Como ya se comentó, Ciscar entremezcla las pocas propiedades que presenta sobre triángulos rectángulos y oblicuángulos, basándose en figuras y propiedades geométricas. Entre estas, enuncia y demuestra varios teoremas sobre propiedades de los triángulos esféricos rectángulos en relación a las especies de los catetos y la hipotenusa, aunque no trata la resolución de triángulos en su obra.

Lista y Aragón presenta a partir de los teoremas del Seno y del Coseno para los lados, particularizando en el caso de que un ángulo sea recto, seis relaciones para resolver triángulos rectángulos. Indica que con esas seis relaciones se pueden resolver todos los casos posibles y comenta, sin demostrar, que existe ambigüedad cuando la incógnita que se busca es el seno de un arco o ángulo.

Castillo y Castro presenta seis teoremas que tratan relaciones para triángulos rectángulos, apoyándose en las propiedades de los triángulos rectángulos rectilíneos, aunque a lo largo de su obra no trata la resolución de triángulos.

Cortázar no enuncia ni demuestra relaciones para este tipo de triángulos, indicando que se pueden deducir fácilmente a partir de las de los triángulos oblicuángulos. Estudia la forma de resolver cada uno de los seis casos, basándose en las fórmulas de Bessel al imponer que uno de lo ángulos es recto. Para cada uno de los casos da indicaciones detalladas de los procesos, tratando y explicando el caso de ambigüedad.

Montojo deduce seis relaciones a partir de las fórmulas generales de los triángulos oblicuángulos, con las que estudia los seis casos posibles de resolución, tratando con detenimiento el caso ambiguo. Seguidamente presenta los triángulos cuadrantales, deduciendo sus relaciones mediante las propiedades de los triángulos suplementarios.

Terry y Rivas presenta una tabla resumen con las fórmulas que dan la resolución de los triángulos esféricos rectángulos en los seis casos habituales, habiendo indicado previamente la construcción del *Pentágono de Neper*. Posteriormente realiza un ejemplo de la resolución de cada uno de los casos que se pueden encontrar utilizando las relaciones de la Tabla, estudiando el caso de indeterminación.

Ortega y Sala particulariza las fórmulas que ha tratado para el caso en que el triángulo sea rectángulo, presentando las *reglas de Neper* como una regla nemotécnica de las relaciones en los triángulos rectángulos. Respecto a la resolución de los triángulos rectángulos, indica que mediante las fórmulas obtenidas previamente se pueden resolver agrupando los datos con cada una de las incógnitas, eligiendo y preparando la fórmula que interese para el cálculo logarítmico, y finalmente obteniendo el elemento desconocido. Presenta una tabla resumen de todos los casos y seguidamente discute el caso de indeterminación.

Barreda y García presentan las fórmulas para este tipo de triángulos a partir de las relaciones fundamentales de los triángulos oblicuángulos. Seguidamente presentan propiedades que se deducen de las fórmulas, destacando la descripción del *pentágono de Neper*. Continúan explicando algunas propiedades de los ángulos y lados de los triángulos rectángulos, pasando a resolver los seis casos de resolución de los triángulos, con un proceso prácticamente igual al realizado por Montojo.

Podemos ver que hay una considerable evolución respecto al siglo anterior a la hora de tratar las relaciones en los triángulos rectángulos. En las obras revisadas en el siglo XVIII, por lo general se parten de dos teoremas, a partir de propiedades geométricas en triángulos planos, que aportan las relaciones para la resolución de estos triángulos.

Por otra parte, en la mayoría de las obras del siglo XIX, especialmente las de la segunda mitad del siglo, se presentan los teoremas fundamentales de los triángulos oblicuángulos y posteriormente se particularizan para los triángulos rectángulos.

En cuanto a la resolución de los triángulos rectángulos, si bien en el siglo XVIII no hay tanta uniformidad en los casos a estudiar, a lo largo del siglo XIX las obras que los tratan presentan los mismos seis casos, en los que aplican las relaciones para estos tipos de triángulos.

Conforme avanza el siglo XIX surgen otros contenidos que van adquiriendo importancia, especialmente a partir de la obra de Montojo. Entre estos, podemos destacar propiedades relacionadas con el estudio de las áreas de los triángulos, las analogías diferenciales, los radios del círculo inscrito y circunscrito a un triángulo, propiedades de los triángulos esféricos cuyos lados son pequeños relativamente al radio de la esfera y la aplicación del teorema de Legendre.

A partir de estos resultados, podemos concluir que a lo largo del siglo XIX hubo una evolución respecto a los contenidos esenciales sobre Trigonometría Esférica que un Guardia Marina necesitaba para su formación.

El manejo de los triángulos esféricos, junto con sus propiedades básicas, fue perdiendo protagonismo, centrándose las obras en la resolución de triángulos esféricos.
Esta resolución dejó de tener al teorema del Seno y al método del *Perpendículo* como pilares de un enfoque geométrico, pasando a un nuevo enfoque algebraico en el que el teorema del Coseno para los lados es su fundamento.

Además, se van incorporando nuevos contenidos, entre los que destacan el cálculo de áreas de triángulos y las relaciones entre la Trigonometría Esférica y la Rectilínea.

La obra que mejor recoge esta evolución es el texto de Montojo, marcando el camino a seguir para los autores que le suceden.

II.10. Un autor singular: P. J. Rodríguez

II.10.1. Presentación

II.10.1.1. Introducción

En el presente estudio se va a revisar la vida y obra de P. J. Rodríguez Riola (Mahón 1802 – Portsmouth, Virginia 1838). Ejerció como Professor of Mathematics and Navigation of Midshipmen of the U.S. Navy Yard, Gosport, en el estado norteamericano de Virginia, desde 1827 hasta su fallecimiento.

Se estudian los artículos y obras publicados por el autor, junto con todos aquellos documentos que se han localizado sobre Rodríguez. Seguidamente se realiza una comparativa pormenorizada de su principal obra, *Elements of spherical trigonometry, designed as an introduction to the study of nautical astronomy* [RODRÍGUEZ, 1829b], con otras obras españolas y extranjeras para establecer sus fuentes.

II.10.1.2. Interés por el personaje

El interés por Pedro José Rodríguez durante la investigación surge al revisar las publicaciones sobre Náutica en España recogidas en la Tesis Doctoral de Ibáñez [2000]. En este trabajo encontramos una breve e interesante referencia a Rodríguez, en la que se indica que "*Este marino menorquín acabó ingresando en la Armada estadounidense el 4 de agosto de 1827, con el nombramiento de "Acting Sailing Master" -piloto interino-, con destino en la Escuela Naval de Norfolk, donde participó en la formación de los guardiamarinas como profesor de navegación, matemáticas e idiomas.*" [IBÁÑEZ FERNÁNDEZ, 2000, p. 492].

Aun más interesante para nuestro estudio era la información sobre sus publicaciones, pues Ibáñez comenta que "*Entre sus publicaciones se encuentran: "On the observations of Comets" (1829) y Elements of spherical trigonometry, designed as an introduction to the study of nautical* *astronomy (N. York, 1830). Asimismo, según Llabrés Bernal, publicó en 1830 unas tablas para calcular la latitud por medio de la estrella polar, dejando otros trabajos manuscritos, entre los que se incluye un tratado de astronomía náutica.*" [IBÁÑEZ FERNÁNDEZ, 2000, pp. 492-493].

El hecho de que un español hubiera trabajado como profesor de Matemáticas en la Armada estadounidense y publicase obras en ese país sobre Trigonometría y Astronomía, nos pareció un tema suficientemente interesante para investigar.

En el trabajo de Ibáñez encontramos otras fuentes en las que poder consultar información sobre el autor, algunas de ellas de gran interés como Vernet [1975], Llabrés [1959], Burr [1939] y Karpinski [1940].

Por otra parte, se realizó una búsqueda de documentos relacionados con Rodríguez, siendo de interés los trabajos biográficos sobre Rodríguez por parte de Bover de Roselló [1842; 1868] y especialmente de Flaquer [1957].

También contrastamos la existencia de las tres publicaciones de Rodríguez en Valera [2006] y fuimos localizando varios artículos del autor en revistas norteamericanas y documentos que confirmaban su tarea docente, entre los que destacan los aparecidos en las publicaciones *The Mathematical diary* y *Army and navy chronicle, and Scientific repository*.

Durante este proceso se localizó la obra *Tables for determining the Latitude at sea, by an altitude, The Polar Star. Observed at any distance from the meridian* y el ensayo *On the observations of Comets* [RODRÍGUEZ, 1830].

Sin embargo, su obra más importante para nuestro estudio, *Elements of spherical trigonometry, designed as an introduction to the study of nautical astronomy*, seguía sin localizarse. Se realizaron búsquedas exhaustivas en varios repositorios y archivos, entre los que se encuentran United States Naval Academy, Nimitz Library, American Philosophical Society of Philadelphia, National Archives, West Point USMA Library y Library of Congress. Finalmente se localizó la obra en la New York Public Library.

Una vez recopilados todos los documentos relacionados con este singular personaje se procedió al estudio de los mismos, tal y como presentamos a lo largo del apartado.

II.10.1.3. **Biografía de Rodríguez**

Según la más amplia fuente biográfica sobre el personaje, Flaquer [1957, pp. 2-3], Pedro María José Rodríguez y Riola, hijo de Pedro Rodríguez y Prats y de Dª Agueda Riola y Rosas, nació en Mahón el treinta de mayo de 1802. Su padre era Maestro Director por S. M. de la Escuela Náutica de la Isla de Menorca y fue su único maestro[25]. Con él aprendió en su infancia los elementos de la gramática castellana y principios de los idiomas francés, inglés e italiano. Seguidamente, estudió *el Curso de estudios elementales de Marina* escrito por Gabriel Ciscar [1803a] y nociones de Álgebra.

En torno a los catorce años aprendió la gramática latina con el Padre Francisco Pons y por último dibujo con el Sr. Chiesa. También recibió una especial instrucción por parte de D. Juan y D. Antonio Ramis sobre los principios del arte Numismático, unas de las pasiones de Rodríguez, facilitándole las obras de su importante Librería y orientándole sobre su estudio.
Bover de Roselló [1842, pp. 341-342] y Flaquer [1957, p. 3] indican que concluidos sus estudios náuticos realizó, en 1818, varios viajes al Mar Negro y posteriormente se examinó en Mahón de tercer piloto de los mares de Europa el diecinueve febrero 1825, obteniendo la calificación de sobresaliente.

Flaquer [1957, p. 3] también comenta que el cuatro de Abril de 1826 comenzó su tarea docente como Maestro de Guardias Marinas, a bordo del navío de guerra de los Estados Unidos *North Carolina*, encontrándose en dicho navío el Comodoro John Rogers. Posteriormente realizó varios cruceros al Levante en otro navío hasta 1827, año en el que se trasladó a los EEUU a propuesta del Comodoro Rogers para ejercer como profesor de Guardias Marinas en la Academia de Náutica del Departamento de Gosport, en la provincia de Virginia.

Según Vernet [1975, p. 221] ingresó en la Armada estadounidense el cuatro de agosto de 1827, con el nombramiento de *Acting Sailing Master* ("piloto interino"), con destino en la Escuela Naval de Norfolk, donde participó en la formación de los Guardias Marinas como profesor de Navegación, Matemáticas e Idiomas.

[25] Según Motilla [2005, p. 27], en 1812 "*el senyor Pere Rodríguez es dedicava a l'ensenyament dels estudis de nàutica al seu propi domicili, els alumnes del qual havien d'examinar-se fora de l'Illa per validar els seus estudis. El mateix Rodríguez sollicita a la Universitat que demanés a la superioritat que li concedís aprovació per examinar els seus alumnes i així evitar el necessari trasllat d'aquests perquè els fossin reconeguts els estudis cursats.*", mientras que según Ramis [1819, p. 342], aparece dentro de la lista de los subscriptores de la obra indicando que es *"Maestro por S. M. de la Escuela Náutica de Menorca"*.

Ibáñez [2000, pp. 492-493], sobre la información recibida de Jim Cheevers (USNA Museum) en cuanto a la constatación de que Rodríguez trabajó en la Marina estadounidense, escribe: *"The published annual registers of U.S, Navy and Marine Corps Officers for the period 1828 to 1838 list a P. J. Rodríguez who entered the service on 4 August 1827, was given a commission as an Acting Sailing Master, and was assigned to the naval school at Norfolk, Virginia. By the mid-1830s the Navy began listing Rodríguez and others as "'Teachers at Naval Schools" and calling them professors of mathematics and languages, but, from 1836 to 1838, he is only a Professor of Mathematics […]".*

También indica Ibáñez, que pese a no tener referencias sobre el trabajo de Rodríguez como profesor de Navegación, se puede encontrar una prueba de ello en las memorias del Contralmirante Charles Steedman, según cita Burr: *"At last the dreaded day for me to appear before the Board arrived [...] After the commodore had asked a few questions, he turned me over to Captain Bolton, who put me through my seamanship and then handed me over to professor Rodríguez, to be examined in mathematics and navigation. This was the branch I dreaded, but I got through quite creditably and received my certificate of having passed (Jan, 14, 1834), and was shaken by the hand and congratulated by the members of the board."* [BURR, 1939, p.180].

En una carta dirigida al Dr. Antonio Ramís y Ramís, con el que mantenía correspondencia[26], fechada el uno de febrero de 1828 desde Gosport, Rodríguez explica cómo son sus primeros meses en el Nuevo Mundo: *"Nosotros llegamos aqui el día 23 de julio del año próximo pasado, después de una feliz navegación, durante la cual visitamos, la isla de Santo Domingo y nos detuvimos dos dias enfrente de la Habana. Poco tiempo después de nuestra llegada, el buque fue desarmado en este Arsenal, y el Secretario de Marina me dió el nombramiento Sailing Master o sea Primer Piloto en la Marina de los Estados Unidos, ordenándome enseñar las Matemáticas y la Náutica a los Guardias Marinas que él mandase a esta escuela. En consecuencia empecé dar Escuela a bordo del Navío "North Carolina", y en esta ocupación he continuado todo este tiempo. V. M. puede juzgar de la novedad que en este pais la diferencia de idioma, de costumbres de trato, que al principio produciria en mí. Más ahora me voy ya acostumbrando a todo ello y los modales francos y afables de los habitantes me hacen mi residencia aqui muy soportable y tan agradable como podría serlo para un extranjero lejos de su patria."* [FLAQUER, 1957, p. 7].

[26] Se pueden encontrar cuatro de estas cartas en [FLAQUER, 1957].

Este mismo año colabora en el volumen segundo del diario matemático de Nueva York, *The mathematical diary: containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents,* [*The mathematical diary, 2* (1828), 1828, pp. 32, 83, 104, 119-121, 128-129, 134-135], proponiendo varios problemas y dando la solución a tres propuestos por otros autores.

En 1829 publica el artículo *On the observations of Comets* en la revista *The American journal of science and arts, Volumen 16* [RODRÍGUEZ, 1829a]. En este pequeño ensayo trata la determinación de las posiciones de los cometas mediante las distancias observadas.

El mismo año aparece su obra más importante, *Elements of spherical trigonometry, designed as an introduction to the study of nautical astronomy* [RODRÍGUEZ, 1829b]. Publicada por el propio autor en Nueva York, es un pequeño tratado sobre Trigonometría Esférica, especialmente elaborado para el uso de los Guardias Marinas.
Esta obra le supuso cierto reconocimiento, como el recogido el diez de enero de 1830 en una reseña de la revista *The American Journal of Sciences and Arts*, dirigida por Benjamin Silliman:
4. Elements of Spherical Trigonometry; designed as an Introduction to the Study of Nautical Astronomy; by J. P. Rodríguez, U.S. Navy Yard, Gosport. 8vo. pp. 24.-This little work is valuable in itself; and still more so from the promise it holds out, of something further from the same author. He is known to us as a young gentleman of high mathematical attainments. His object is to prepare for our Naval officers a work, in which the higher principles of Navigation shall be developed, but which at the same time will be suited to their contracted opportunities for study and improvement on this subject. Such a work is needed, and we wish Mr. Rodríguez success. [ANÓNIMO, 1830, p. 415].

Su última obra, editada por C. Hall en Norfolk en 1830 es *Tables for determining the Latitude at sea, by an altitude, The Polar Star. Observed at any distance from the meridian* [RODRÍGUEZ, 1830]. En esta breve obra elabora unas tablas para determinar la latitud de un barco en el mar mediante la altitud de la estrella Polar.

Varios autores indican que el autor estaba realizando un Tratado de Astronomía Náutica, pero no se ha podido confirmar su existencia.[27]

[27] En [FLAQUER, 1957, p.3] podemos encontrar "*Finalmente está para publicar unas tablas para hallar la Latitud por medio de la Estrella Polar, con tanta precisión como por el método Trigonométrico. Igualmente saldrá a luz un Tratado de Astronomía Náutica.*" Por otra parte, según [LLABRÉS BERNAL, 1959, p. 71] "*… a su muerte […]*

Con fecha de dos de abril de 1835 encontramos un artículo publicado en el periódico de Washington *Army and Navy Chronicle, and Scientific Repository* en el que se informa que el Consejo que se ha de reunir para el examen de Guardias Marinas tendrá como examinadores matemáticos a Rodríguez en Norfolk y a Ward en Nueva York:

WASHINGTON CITY; THURSDAY APRIL 2, 1835
The Board, which has been ordered to convene in Baltimore next month, for the examination of Midshipmen, will be composed of Commodore JACOB JONES, President, and Captains Red, Ballard, Dallas and Kearny.
The Mathematical Examiners are, Mr. E. C. Ward, of New York, and Mr. P. J. Rodríguez, of Norfolk.
[ANÓNIMO, 1835, p. 108].

En marzo de 1836 hallamos un artículo suyo publicado en el *Army and Navy Chronicle, and Scientific Repository* recomendando la obra *Treatise on Navegation* de M. F. Maury:

U. S. NAVY YARD, Gosport, 7th March, 1836
I have examined a Treatise on Navegation, written by M.F. Maury, of the U. S. Navy, and have no hesitation in recommending it to students of that science. The explanations are clear, the views are illustrated by many examples, and the new arrangement of some of the tables exemplify the calculations of the Navigator.
Mr. Maury is deserving of great credit for that work, and I wish him every success.
P. J. RODRÍGUEZ,
Prof. Math. U. S. N.
[RODRÍGUEZ, 1836, p. 281].

En junio de ese mismo año y en el mismo periódico, se encuentra un artículo en el que se informa del Consejo reunido en Baltimore para el examen de guardiamarinas y se cita a Rodríguez como profesor de Matemáticas y Navegación junto con Ward:

---

legó a la Sociedad Filosófica de Filadelfia entre otros manuscritos profesionales, un tratado de náutica". En [BOVER DE ROSELLÓ, 1868, pp. 285-286] indica que entre sus obras se encuentra el *"Tratado de astronomía náutica, con todas sus explicaciones y figuras. 1t. 4.º Ms. Muy voluminoso, que con otros varios opúsculos tambien Mss. se entregaron despues de su muerte, por haberlo dispuesto así, á. la sociedad filosófica de Filadelfia."*

WASHINGTON CITY; THURSDAY JUNE 9, 1836

The Board which assembled at Baltimore for the examination of midshipmen, adjourned on Thursday last.

The following is a list of the midshipmen who passed, arranged in the order assigned them by the Board.

(LA LISTA CON NOMBRES)

Warrants, bearing date 4th June, 1836, will be granted to the class of 1830.

Professors Ward and Rodríguez, remained in session for the examination of applicants for the office of professors of mathematics and navigation, in the U. S. Navy.

[ANÓNIMO, 1836, p. 360].

Otro artículo en el que se hace referencia a Rodríguez lo encontramos en abril de 1837, de nuevo en el *Army and Navy Chronicle, and Scientific Repository*, para volver a indicar que Rodríguez es el examinador de Matemáticas, junto con Ward, en los exámenes de Guardias Marinas:

WASHINGTON CITY; THURSDAY APRIL 20, 1837.

The Board for the examination of Midshipmen, ordered to assemble at Baltimore, on Monday the 22d day of May next, will be composed of Commodores James Biddle, and M. T. Woolsey, Captains George C. Read, Joseph J. Nicholson, and David Conner.

The mathematical examiners are E. C. Ward and P. J. Rodríguez.

[ANÓNIMO, 1837, p. 248].

Rodríguez falleció el catorce de octubre de 1838 a los treinta y seis años de edad. Su muerte fue recogida en el *Army and Navy Chronicle, and Scientific Repository* el veintiocho de octubre con las siguientes palabras:

"In Portsmouth, Va. On Sunday morning 14th inst. Mr. PETER J. RODRÍGUEZ, in the 38th year of his age. Mr. Rodríguez has for years filled the situation of Professor of Mathematics in the U.S. navy, the responsible an arduous duties of which he performed with eminent service to the country and the immediate recipients of his extensive acquirements. As a man, strictly honest, liberal and benevolent in his disposition, sincere an ardent in his principles, he won and retained the esteem of all who knew him; and this community in which he so long associated, will recur in memory with pleasing recollections to his many amiable qualities, long after he shall rest in his early tomb." [ANÓNIMO, 1838, p. 272].

Podemos apreciar el reconocimiento a su trabajo como profesor de Matemáticas en la Armada, describiéndolo como un hombre rigurosamente honesto, liberal y afable, sincero y constante en sus principios.

II.10.2. Primeros trabajos de Rodríguez

II.10.2.1. Problemas propuestos y resueltos en *The Mathematical Diary*

La primera publicación de Rodríguez de la que tenemos constancia se produce en 1828 al colaborar en el diario *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *Volumen 2*.

Tal y como indica en el título del diario, eran propuestos y resueltos problemas matemáticos por ingeniosos corresponsales, personas relacionadas con las Matemáticas gustosos de compartir problemas y sus soluciones.

Rodríguez plantea en esta publicación dos problemas y resuelve otros tres.

La primera referencia sobre Rodríguez la encontramos en un problema planteado por William H. Sidell[28] sobre Trigonometría Plana:

QUESTION XII. *(165.)- Mr. WilIiam H. Sidell.*

The base, difference of the squares of the sides and the sum of the tangents of the angels at the base being given, to construct the triangle.

Se presentan dos soluciones, la segunda de ellas por Rodríguez de la siguiente forma[29].

Let the sides AB and BC be represented by m and n respectively, the base AC=b, one of the segments AD of the base, made by the perpendicular BD, equal to x, the sum of the tangents of the angles A an C=s, and the difference of the squares of the sides. Then on account of the perpendicular BD, we have

$m^2 - x^2 = n^2 - (b-x)^2 ; \therefore m^2 - n^2 = 2bx - b^2$,

and consequently, $x = \dfrac{d+b^2}{2b}$,

We have also $x \tan A = (b-x)\tan C$.

[28] Véase [SIDELL, 1828, p. 82].

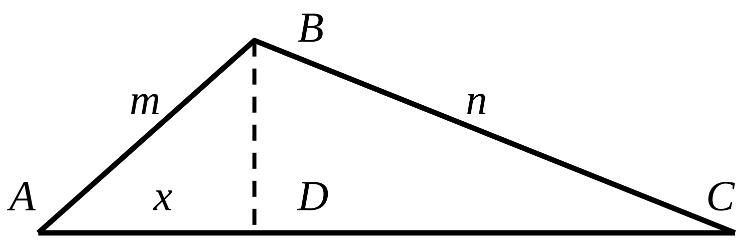
[29] Véase [RODRÍGUEZ, 1828a, p. 83].

Substituting in this equation the values of x and of $\tan A = s - \tan C$, *we have*

$$\frac{d+b^2}{2b}\left(s-\tan C\right)=\left(b-\frac{d+b^2}{2b}\right)\tan C\ ;$$

hence, $\tan C = s\left(\dfrac{d+b^2}{2b}\right)$.

Para facilitar su compresión, se presenta una figura del triángulo ABC, en el que se tienen como datos $AC = b, \tan A + \tan C = s, d = m^2 - n^2$



La segunda referencia de Rodríguez en el diario es para plantear dos problemas, de nuevo sobre Trigonometría Plana.

QUESTION IX*. (184.)- By Mr. P.J. Rodríguez*[30]

In a plane Triangle ABC, given the angle A, its opposite side BC, and the rectangle of the other two sides, to find the analytical expression of the value of the angle C.

A la primera cuestión se presentarán tres soluciones distintas[31].

QUESTION X. (185.)*- By the same.*[32]

To find an arc, such, that its sine be half the tangent of twice that arc.

A la segunda cuestión se presentarán dos soluciones.[33]

[30] Véase [RODRÍGUEZ, 1828b, p. 104].
[31] Véase [SHERRY, 1828, pp. 119-120], [WILT, 1828, p. 120] & [LEE, 1828, p. 120].
[32] Véase [RODRÍGUEZ, 1828c, p. 104].
[33] Véase [SWINBURNE, 1828, pp. 120-121] & [MESSERS & JONES, 1828, p. 121].

Posteriormente Rodríguez da una solución a la cuestión planteada por J. Thompson[34] sobre integrales:

***QUESTION XV**. (190.)- By Mr. J. Thompson, Nashville University, Tennessee*

The integral of $\frac{x^2dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ *is commonly found by means of the circular arc. It is required to find the same by means of the circular area. Also, the value of the integral, when x=a and when x=0.*

En esta ocasión hay tres soluciones, la primera de ellas es ofrecida por Rodríguez utilizando instrumentos geométricos y propiedades básicas de integrales.

***FIRST SOLUTION**- By Mr. P. J. Rodríguez.*[35]

The formula for the integration of binomials gives

$$\int\frac{x^2dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}x\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a^2\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)}}$$

But by the known expression of the area of a circular, we have

$$\frac{1}{2}a^2\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)}}=s-\frac{1}{2}x\sqrt{\left(a^2-x^2\right)}$$

Where 2a is the diameter of the circle, x the abscissa having the origin at the centre, and s the segment formed by the ordinate and that part of the diameter intercepted between the ordinate and the end of the arc. Substituting the last equation in the first, it comes

$$\int\frac{x^2dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=s-x\sqrt{\left(a^2-x^2\right)}$$

When x=0, s becomes a quadrant, and when x=a, then s=0. The second term of the second member is zero in both cases.

La última colaboración encontrada en este diario, es la solución a la cuestión planteada por Omicron, N. C.[36] para hallar la altitud del lugar, dados su latitud, momento de observación, rumbo de la nube y la distancia y rumbo de la sombra de la estación de la observación.

***QUESTION XX**. (195.)- By Omicron, N. C.*

[35] Véase [RODRÍGUEZ, 1828d, p. 129].
[36] Véase [OMNICRON, 1828, p. 134-135].

Given the latitude of the place, the time of observation, the bearing of a cloud, and the distance and bearing of its shadow from the station of the observance, to find its altitude.

Hay cuatro soluciones, la tercera de las cuales es ofrecida por Rodríguez.

THIRD SOLUTION*-By Mr. P. J. Rodríguez.*[37]
Let o be the station of the observer, a the shadow of the cloud, and ob its bearig; let us suppose a plane abc perpendicular to the horizontal plane abo, so that c be the cloud, and cb its perpendicular height, the sun s will be in the straight line ac extended towards s. The figure can be readily supplied by the reader.
In the triangle abo the angle aob is the difference between the bearing of the cloud and the bearing of its shadow; the side ao is known, and also the angle bao, since ab is the bearing of the sun from the point a. With these data the side ab will be found. Then in the right-angled triangle abc the angle cab is the altitude of the sun, which may be ascertained with the time, the latitude and the declination. With that angle and the side ab, the altitude cb will be easily found.

II.10.2.2. **On the observations of Comets**

El primer trabajo del autor, *On the observations of Comets* [RODRÍGUEZ, 1829a], es el artículo XIII aparecido en 1829 en *The American journal of science and arts*, *Volumen 16*, pp. 94-98.
Es un pequeño ensayo en el que trata la determinación de las posiciones de los cometas mediante las distancias observadas. Expone que las distancias se verán afectadas por la refracción, pudiéndose reducir a distancias reales por cualquiera de los métodos conocidos, o por el método que él expone. Finalmente, pone un ejemplo de su método mediante el cálculo de un cometa en 1819, del que hizo las observaciones con un sextante.

Comienza el artículo planteando que en el periodo en que se escribe el artículo, los cometas son los únicos cuerpos del sistema solar cuyos elementos no se conocen con el grado de exactitud que otras partes de la Astronomía han alcanzado, principalmente debido a la falta de observaciones correctas.

---

[37] Véase [RODRÍGUEZ, 1828e, p. 135].

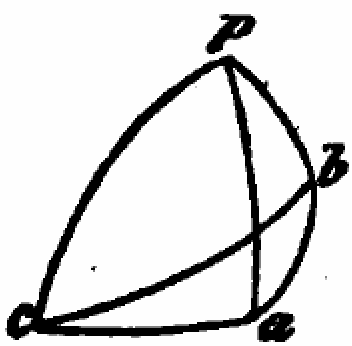
Tal y como explica, *"… it is not improbable, that in the antarctic expeditions now preparing, there may be discovered a comet, altogether invisible from any observatory. It is therefore, highly desirable for the advancement of astronomy, that all lovers of science should make all possible observations whenever a comet appears."* [RODRÍGUEZ, 1829a, Vol. 16, p. 95].

Advierte que la falta de instrumentos adecuados es un gran impedimento, aunque opina que incluso sin telescopio, las posiciones de un cometa podrían determinarse con suficiente precisión mediante el método empleado por Hevelius y Halley para la formación de sus catálogos de estrellas, midiendo con un círculo de reflexión, o un sextante sus distancias a dos cuerpos celestes cuyas otras posiciones se conocen con exactitud.
En su opinión, este método podría ser utilizado en el mar por su simplicidad, dada la dificultad para utilizar los instrumentos astronómicos.

Todo ello le lleva a comentar que *"These considerations have induced me to present to the public, the following essay, on the manner or ascertaining the positions of comets from the distances observed."* [RODRÍGUEZ, 1829a, Vol. 16, p. 95].

Seguidamente comienza a exponer sus ideas sirviéndose de la Figura 1, donde *p* es el polo de la tierra, *c* la posición del cometa y *a* y *b* dos estrellas fijadas.
Pc será la distancia al polo, y el ángulo *cpa* la diferencia entre su ascensión recta y la de la estrella *a*. Midiendo las distancias *ca* y *cb* desde el cometa a cada estrella se tomará la hora.

Fig. 1.



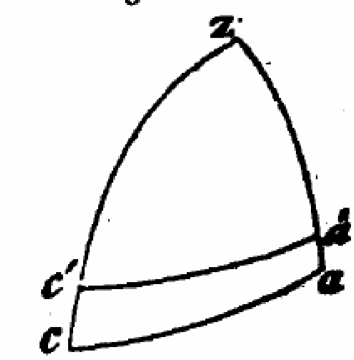
Respecto a la observación de las distancias a las dos estrellas, Rodríguez indica que se tomarán de forma simultánea si hay dos observadores, pero si sólo hay uno la distancia a una de las estrellas se debe reducir a la hora en la que las distancias desde la otra estrella se tomaron.

Indica que el mejor instrumento para las observaciones es el círculo de reflexión y si se toman con un sextante será necesario tomar la media entre varias mediciones.

Advierte que las distancias estarán afectadas por la refracción y se podrán reducir a las distancias verdaderas por cualquiera de los métodos conocidos o por el que él presenta, que considera "*sufficiently, simple and correct*." [RODRÍGUEZ, 1829a, Vol. 16, p. 95].

Para ello, considera *z* el cenit y *c* y *a* las posiciones reales del cometa y la estrella, siendo *c'* y *a'* sus posiciones aparentes, tal y como indica en la Figura 2.

Fig. 2.



Haciendo *c'z=N*, *a'z=N'*, y *c'a'=D* se tiene que:

$$
\begin{aligned}
dD &= dN'\cos za'c' + dN\cos zc'a' \\
&= dN'\left(\frac{\cos N - \cos D\cos N'}{\sin D\sin N'}\right) + dN\left(\frac{\cos N' - \cos D\cos N}{\sin D\sin N}\right) \\
&= dN'\left(\frac{\cos N}{\sin D\sin N'} - \cot D\cot N'\right) + dN\left(\frac{\cos N'}{\sin D\sin D} - \cot D\cot N\right) \\
&= \frac{dN'\cos N\cos ecN' + dN\cos N'\cos ecN}{\sin D} - \frac{dN'\cot N' + dN\cot N}{\tan D}
\end{aligned}
$$

Ahora, llamando *a* la altitud del cometa, *r* su refracción, *A* la altitud de la estrella y *R* su refracción, la anterior fórmula se puede expresar como:

$$dD = \frac{R\sin a\sec A + r\sin A\sec a}{\sin D} - \frac{R\tan A + r\tan a}{\tan D}$$

Cabe notar que hay un error en el segundo paréntesis de la tercera línea al poner en el denominador *sin D* en lugar de *sin N*.

También conviene advertir las relaciones *dN'=R*, *dN=r*, *cos N=sin a* y *con N'=sin A*.

Una vez corregidas las distancias, se encuentran en el triángulo *pab* (Figura 1) el ángulo *pab* y el lado *ab*. Conocidos los tres lados del triángulo *cab*, se halla el ángulo *cab*. Posteriormente, teniendo los lados *pa* y *ca*, y el ángulo *pac* en el triángulo *cap*, se hallan el lado *cp* y el ángulo *cpa*, y consecuentemente la declinación y la ascensión recta del cometa.

Seguidamente, para determinar el efecto producido en las posiciones del cometa debido a los errores en las distancias, Rodríguez denomina *cb=a*, *ca=b*, *ab=c*, y *cab=x* realiza los siguientes pasos:

$$\cos x=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$\cos x'=\frac{\cos a'-\cos b'\cos c}{\sin b'\sin c},$$

and on account of the little difference between sin *b* and sin *b'*, we may suppose

$$\cos x-\cos x'=\frac{\cos a-\cos a'+(\cos b'-\cos b)\cos c}{\sin b\sin c},$$

$$-2\sin\tfrac{1}{2}(x+x')\sin\tfrac{1}{2}(x-x')=$$

$$\frac{-2\sin\frac{1}{2}(a+a')\sin\frac{1}{2}(a-a')-2\sin\frac{1}{2}(b'+b)\sin\frac{1}{2}(b'-b)\cos c}{\sin b\sin c}$$

making $x-x'=dx$, $a-a'=da$, and $b'-b=db$; and supposing these are equal to their sines, we have

$$\tfrac{1}{2}dx\sin\tfrac{1}{2}(x+x')=\frac{\frac{1}{2}da\sin\frac{1}{2}(a+a')+\frac{1}{2}db\sin\frac{1}{2}(b'+b)\cos c}{\sin b\sin c},$$

$$dx=\frac{da\sin a+db\sin b\cos c}{\sin b\sin c\sin x}\quad\text{nearly;}$$

and supposing *da* and *db* of the same sign, this equation becomes

$$dx=\frac{da\sin a-db\sin b\cos c}{\sin b\sin c\sin x}.$$

$$=\frac{da\sin a}{\sin b\sin c\sin x}-\frac{db\cot c}{\sin x}.\quad(1)$$

which shews that the distances producing the least errors are when *cab* is a right angle.

In the triangle *cap*, let $cp=v$, $cap=z$, $ca=b$, $pa=n$. Then

$$\cos v=\cos z\sin b\sin n+\cos b\cos n$$

$$\cos v'=\cos z'\sin b'\sin n+\cos b'\cos n-$$

$$\cos v-\cos v'=(\cos z\sin b-\cos z'\sin b')\sin n+(\cos b-\cos b')\cos n$$

$$=(\cos z-\cos z')\sin b\sin n+(\cos b-\cos b')\cos n,$$

nearly; $-2\sin\frac{1}{2}(v+v)\sin\frac{1}{2}(v'-v')=$

$$=-2\sin\tfrac{1}{2}(z+z')\sin(z-z')\sin b\sin n-2\sin\tfrac{1}{2}(b+b')\sin\tfrac{1}{2}(b-b')\cos n.$$

$$dv\sin\tfrac{1}{2}(v+v')=dz\sin\tfrac{1}{2}(z+z')\sin b\sin n+db\sin\tfrac{1}{2}(b+b')\cos n$$

$$dv=\frac{dz\sin z\sin b\sin n+db\sin b\cos n}{\sin v}$$

$$=\frac{dx\sin z\sin b\sin n+db\sin b\cos n}{\sin v}\quad(2)$$

Let $cpa=w$, and we have $\sin w=\frac{\sin b\sin z}{\sin v}$; and taking the differentials,

$$dw\cos w=\frac{(db\cos b\sin z+dz\cos z\sin b)\sin v-dv\cos v\sin b\sin z}{\sin v^2}$$

$$dw=\frac{da\cos b\sin z+dx\cos z\sin b}{\sin v\cos w}-\frac{dv\sin b\sin z}{\sin v\tan v\cos w}\quad(3)$$

Cabe notar que utiliza la derivación para obtener la ecuación (3).

Posteriormente aplica su método a un cometa sobre el que el autor hizo observaciones en 1819 con un sextante, observando los siguientes datos:

1819.	True time.	Observ. distance to Arcturus.	Observ. distance to α Lyra.
July 10, - -	9h 39′ 48″	82° 6′ 30″	90° 32′ 30″
11, - - -	9 20 37	81 26 26	90 6 34
12, - -	9 29 41	80 46 25	89 37 58
13, - -	9 9 33	80 17 00	89 18 00
14, - -	9 11 29	79 45 30	88 57 30
16, - - -	9 33 25	78 49 30	88 25 45
24, - -	9 35 34	76 2 00	87 28 30

Con estas observaciones obtiene:

	True R.A.	True Declin,
Arcturus,	211° 51' 36"	20° 7' 41"
α Lyra,	277º 42' 50"	38º 37' 25"

Indica, que para corregir las distancias es necesario conocer la altitud del cometa y esta puede ser hallada en primer lugar por el globo, y una vez comprobadas la declinación y la ascensión recta, se puede calcular correctamente la altitud; en el caso de que sea muy diferente de la supuesta, las distancias se deberían volver a corregir. Supone, por tanto, que la altura aparente del cometa es 5° 19'.

Dado que la latitud del lugar de observación es 39° 52' 30" N, el autor calcula las altitudes de las estrellas correspondiente a la hora en que fueron observadas, obteniendo una altitud aparente para Arcturus de 48° 57' y de 71º 45' para α Lyra.

Con estos datos, obtiene para la primera distancia *dD*=6' 58" y para la segunda *dD*=9' 8" y consecuentemente las distancia verdadera de Arcturus es 82° 13' 28" y de α Lyra es 90º 41' 38".

Concluye la ejemplificación notando que, si en la Figura 1 consideramos *c* el cometa, *a* Arcturus y *b* la otra estrella, los valores que se tienen del cometa el diez de julio a las 9h 39' 48" son una ascensión recta de 109° 32' 20" y un declinación de 50° 4' 19" N.

Finaliza el artículo indicando que suponiendo un error de 1' en cada una de las distancias observadas, la fórmula $dx = \frac{da \sin a}{\sin b \sin c \sin x} - \frac{db \cot c}{\sin x}$ nos da como resultado *dx* = 34" 8, que una vez substituido en las fórmulas $dv = \frac{dx \sin z \sin b \sin n + db \sin b \cos n}{\sin v}$ y $dw = \frac{da \cos b \sin z + dx \cos z \sin b}{\sin v \cos w} - \frac{dv \sin b \sin z}{\sin v \tan v \cos w}$ da los valores *dv* = 50" 6 y *dw* = - 45" 2.

II.10.2.3. **Tables for determining the latitude at sea, by an altitude, the polar star. Observed at any distance from the meridian**

Este libro, posterior a los *Elements*, fue publicado en Nueva York en 1830 por C. Hall [RODRÍGUEZ, 1830]. Es una pequeña obra de doce páginas, en la que Rodríguez presenta tres tablas para calcular la Latitud de un barco por medio de la altitud de la estrella Polar a cualquier distancia del meridiano terrestre.

En primer lugar, presenta sus motivos para realizar la obra, pasando a explicar el uso de las tres tablas y terminando con la exposición de las fórmulas usadas para la obtención de las tablas y varias observaciones.

En el *Advertisement* indica que la facilidad y exactitud con que se puede calcular la Latitud en el mar mediante la estrella Polar, le ha llevado a calcular las Tablas con la confianza de que sean más exactas que las publicadas hasta el momento. También comenta, que las fórmulas usadas se anexan al final de la obra junto con unas observaciones sobre el grado de exactitud con el que se puede calcular la Latitud mediante sus tablas. Termina este apartado con su nombre, P.J. Rodríguez y el lugar y fecha en que lo redactó: U. S. Navy Yard, Gosport, August 4th, 1830.

Continúa en el apartado *Use of the Tables*, explicando detenidamente el uso de las Tablas I y II y los pasos a seguir para calcular la Latitud de un barco, comentando que cuando el número exacto de minutos en la hora o grados de latitud no se encuentren en las tablas, ambas correcciones se pueden obtener mediante proporciones.

Seguidamente presenta un ejemplo, en el que indica paso a paso el uso de las tablas hasta calcular la Latitud.

TABLE I.

Correction 1st.

Minutes.	0 Hours. Correction.	0 Hours. An. Var.	1 Hour. Correction.	1 Hour. An. Var.	2 Hours. Correction.	2 Hours. An. Var.	3 Hours. Correction.	3 Hours. An. Var.	4 Hours. Correction.	4 Hours. An. Var.	5 Hours. Correction.	5 Hours. An. Var.	Minutes.
0	1° 32′ 59″	20″ 4	1° 36′ 11″	19″ 4	1° 3[illegible]′ 50″	20″ 4	1° 23′ 9″	20″ 0	1° 7′ 49″	18″ [illegible]	0° 47′ 50″	15″ [illegible]	[illegible]
5	1 33 30	20 3	1 36 9	19 [illegible]	1 32 16	20 [illegible]	1 22 5	19 9	1 6 18	18 0	0 46 1	14 [illegible]	[illegible]
10	1 33 58	20 2	1 36 5	19 6	1 31 38	20 3	1 20 58	19 7	1 4 46	17 7	0 44 9	14 [illegible]	[illegible]
15	1 34 24	20 1	1 35 57	19 6	1 30 59	20 3	1 19 49	19 6	1 3 12	17 5	0 42 17	14 2	[illegible]
20	1 34 46	20 0	1 35 48	19 7	1 30 17	20 2	1 18 38	19 5	1 1 36	17 3	0 40 25	13 [illegible]	[illegible]
25	1 35 7	20 0	1 35 35	19 8	1 29 3[illegible]	20 [illegible]	1 17 24	19 4	0 59 59	17 6	0 38 28	13 6	[illegible]
30	2 35 24	19 9	1 35 19	19 9	1 28 45	20 2	1 16 8	19 [illegible]	0 58 20	16 8	0 36 32	13 3	[illegible]
35	1 35 39	19 8	1 35 1	20 0	1 27 55	20 2	1 14 50	19 [illegible]	0 56 38	16 6	0 34 35	12 [illegible]	[illegible]
40	1 35 51	19 7	1 34 40	20 0	1 27 3	20 1	1 13 30	18 9	0 54 56	16 3	0 32 37	12 3	[illegible]
45	1 36 0	19 6	1 34 17	20 1	1 26 8	20 1	1 12 8	18 7	0 53 12	16 0	0 30 38	12 2	[illegible]
50	1 36 6	19 6	1 33 50	20 2	1 25 11	20 [illegible]	1 10 44	18 6	0 51 26	15 7	0 28 39	11 [illegible]	[illegible]
55	1 36 11	19 5	1 33 21	20 3	1 24 11	20 [illegible]	1 9 17	18 4	0 49 39	15 5	0 26 38	11 [illegible]	[illegible]
60	1 36 11	19 4	13 2 50	20 4	1 23 9	20 [illegible]	1 7 49	18 2	0 47 50	15 2	0 24 37	11 1	[illegible]
	12 hours. +		13 hours. +		14 hours. +		15 hours. +		16 hours. +		17 hours. +		

TABLE I.

Correction 1st.

Minutes.	6 Hours. − Correction.	6 Hours. − An. Var. −	7 Hours. + Correction.	7 Hours. + An. Var. −	8 Hours. + Correction.	8 Hours. + An. Var. −	9 Hours. + Correction.	9 Hours. + An. Var. −	10 Hours. + Correction	10 Hours. + An. Var. −	11 Hours. + Correction.	11 Hours. + An. Var. −	Minutes.
[illegible]	0° 24′ 37″	11″ 1	0° 0′ 18″	6″ 4	0° 25′ 11″	11″ 2	0° 48′ 22″	15″ 3	1° 8′ 14″	18′ 3	1° 23′ 27″	20″ 0	0
[illegible]	0 22 35	10 7	0 2 24	6 9	0 27 12	11 6	0 50 10	15 5	1 9 41	18 4	1 24 28	20 0	5
[illegible]	0 20 32	10 3	0 4 30	7 2	0 29 13	11 9	0 51 56	15 8	1 11 7	18 6	1 25 28	20 1	10
[illegible]	0 18 28	10 0	0 6 35	7 6	0 31 13	12 3	0 53 42	16 1	1 12 31	18 7	1 26 24	20 1	15
[illegible]	0 16 24	9 6	0 8 41	8 0	0 33 11	12 6	0 55 26	16 3	1 13 53	18 9	1 27 18	20 1	20
[illegible]	0 14 20	9 2	0 10 46	8 4	0 35 9	13 0	0 57 8	16 6	1 15 13	19 0	1 28 10	20 1	25
[illegible]	0 12 16	8 8	0 12 51	8 9	0 37 5	13 4	0 58 48	16 9	1 16 30	19 2	1 28 59	20 2	30
[illegible]	0 10 11	8 4	0 14 56	9 3	0 39 1	13 7	1 0 27	17 1	1 17 45	19 4	1 29 46	20 2	35
[illegible]	0 8 5	8 0	0 17 0	9 7	0 40 56	14 0	1 2 4	17 4	1 18 58	19 5	1 30 29	20 3	40
[illegible]	0 6 0	7 6	0 19 4	10 1	0 42 49	14 3	1 3 39	17 6	1 20 8	19 7	1 31 11	20 3	45
[illegible]	0 3 54	7 2	0 21 7	10 5	0 44 41	14 6	1 5 13	17 8	1 21 17	19 8	1 31 49	20 3	50
[illegible]	0 1 48	6 8	0 23 9	10 9	0 46 32	14 9	1 6 44	18 0	1 22 24	19 9	1 32 26	20 4	55
[illegible]			0 25 11	11 2	0 48 22	15 3	1 8 14	18 3	1 23 27	20 0	1 32 59	20 4	60
	18 hours. +		19 hours. −		20 hours. −		21 hours. −		22 hours. −		23 hours. −		

TABLE II.

Correction 2d.

Altitude.	0° Corr.	0° 15′ Corr.	0° 30′ Corr.	0° 45′ Corr.	1° 0′ Corr.	1° 10′ Corr.	1° 20′ Corr.	1° 30′ Corr.	1° 36′ Corr.	An. Var. −
10°	0′ 14″	0′ 14″	0′ 13″	0′ 11″	0′ 9″	0′ 7″	0′ 4″	2″	0″	
15	0 22	0 21	0 20	0 17	0 13	0 10	0 7	3	0	
20	0 29	0 29	0 27	0 23	0 18	0 14	0 9	4	0	
25	0 38	0 37	0 34	0 29	0 23	0 18	0 12	5	0	
30	0 47	0 45	0 42	0 36	0 28	0 22	0 14	6	0	
35	0 56	1 55	0 51	0 44	0 35	0 27	0 17	7	0	
40	1 8	1 6	1 1	0 53	0 41	0 32	0 21	8	0	
45	1 21	1 19	1 13	1 3	0 49	0 38	0 25	10	0	
50	1 36	1 34	1 27	1 15	0 59	0 45	0 30	11	0	
53	1 47	1 45	1 37	1 24	1 5	0 50	0 33	13	0	
56	2 0	1 57	1 48	1 34	1 13	0 56	0 37	14	0	
59	2 14	2 11	2 1	1 46	1 22	1 3	0 41	17	0	
62	2 32	2 28	2 18	1 59	1 33	1 11	0 47	19	1	1″
64	2 46	2 42	2 30	2 9	1 41	1 18	0 51	21	1	
66	3 2	2 57	2 44	2 22	1 51	1 25	0 56	23	1	
68	3 20	3 15	3 1	2 36	2 2	1 34	1 2	25	1	
70	3 42	3 37	3 21	2 54	2 16	1 44	1 8	28	1	
71	3 55	3 49	3 32	3 3	2 23	1 50	1 12	29	1	
72	4 9	4 3	3 45	3 13	2 32	1 57	1 17	31	1	
73	4 25	4 18	3 59	3 25	2 41	2 4	1 22	33	1	
74	4 42	4 35	4 15	3 40	2 52	2 13	1 27	35	1	
75	5 2	4 55	4 33	3 56	3 4	2 22	1 33	38	1	2
76	5 25	5 17	4 53	4 14	3 18	2 33	1 40	40	1	
77	5 51	5 42	5 18	4 34	3 34	2 45	1 48	44	1	
78	6 22	6 12	5 44	4 58	3 53	2 59	1 57	47	1	
79	6 58	6 48	6 17	5 26	4 14	3 16	2 8	52	1	
80	7 41	7 30	6 59	6 0	4 41	3 36	2 26	57	2	8″1

Posteriormente, comenta el hecho de que cuando la altitud se toma cerca del meridiano no es necesaria una gran exactitud en el tiempo, siendo suficiente regular el reloj mediante la luna o la puesta de sol; pero cuando las estrellas se encuentran lejos del meridiano, un error de cinco minutos en la hora puede producir en ocasiones un error de dos minutos en el cálculo de la Latitud. Por todo ello, recomienda que la altitud sea tomada lo más cerca posible del meridiano.

A continuación, explica que la Tabla III muestra el tiempo de paso de la estrella Polar sobre el meridiano superior y es usada para comprobar el mejor momento para observar la altitud. Indica que la tabla está calculada para el año 1828 y está adaptada para los años bisiestos, explicando su uso.

Finaliza el apartado con una observación entre las relaciones de las estrellas Alioth y Casiopea con respecto a la estrella Polar y sus distancias al meridiano.

TABLE III.

Time of the Polar Star's passing the Meridian.

Days of the Mo	January P. M.	Feb'ry. P. M.	March. P. M.	April. P. M.	May. A. M.	June. A. M.	July, A. M.	August. A. M.	Sept. A. M.	Oct. A. M.	Nov. P. M.	Dec. P. M.
1	6h. 14′	4h. 2′	2h. 9′	0h. 16′	10h·25′	8h. 22′	6h. 19′	4h. 14′	2h. 18′	0h. 31	10h.31′	8h. 27′
2	6 10	3 58	2 6	0 12	10 21	8 18	6 14	4 10	2 15	0 27	10 27	8 23
3	6 5	3 54	2 2	0 9	10 17	8 14	6 10	4 6	2 11	0 23	10 23	8 18
4	6 1	3 50	1 58	0 5	10 13	8 10	6 6	4 2	2 8	0 20	10 19	8 14
5	5 56	3 46	1 54	0 1	10 10	8 6	6 2	3 59	2 4	0 16	10 15	8 10
6	5 52	3 42	1 50	A. M. 11 58	10 6	8 2	5 58	3 55	2 0	0 12	10 11	8 6
7	5 48	3 38	1 47	11 54	10 2	7 58	5 54	3 51	1 57	0 8	10 7	8 1
8	5 43	3 34	1 43	11 50	9 58	7 53	5 50	3 47	1 53	0 5	10 3	7 57
9	5 39	3 30	1 39	11 47	9 54	7 49	5 46	3 43	1 50	0 1	9 59	7 52
10	5 35	3 26	1 36	11 43	9 50	7 45	5 42	3 39	1 46	P. M. 11 55	9 55	7 48
11	5 30	3 22	1 32	11 39	9 46	7 41	5 38	3 36	1 42	11 51	9 51	7 43
12	5 26	3 18	1 28	11 36	9 43	7 37	5 34	3 32	1 39	11 47	9 47	7 39
13	5 21	3 14	1 25	11 32	9 39	7 33	5 29	3 28	1 35	11 43	9 43	7 34
14	5 17	3 10	1 21	11 28	9 35	7 29	5 25	3 25	1 32	11 39	9 39	7 30
15	5 13	3 6	1 17	11 25	9 31	7 24	5 21	3 21	1 28	11 36	9 34	7 25
16	5 9	3 2	1 14	11 21	9 27	7 20	5 17	3 17	1 25	11 32	9 30	7 21
17	5 4	2 58	1 10	11 17	9 23	7 16	5 13	3 13	1 21	11 28	9 26	7 17
18	5 0	2 54	1 7	11 14	9 19	7 12	5 9	3 10	1 17	11 25	9 22	7 12
19	4 56	2 51	1 3	11 10	9 15	7 8	5 5	3 6	1 14	11 21	9 18	7 8
20	4 52	2 47	0 59	11 6	9 11	7 4	5 1	3 2	1 10	11 17	9 14	7 3
21	4 47	2 43	0 56	11 2	9 7	7 0	4 57	2 59	1 7	11 13	9 9	6 59
22	4 43	2 39	0 52	10 59	9 3	6 56	4 53	2 55	1 3	11 9	9 5	6 55
23	4 39	2 35	0 48	10 55	8 59	6 52	4 49	2 51	0 59	11 6	9 1	6 50
24	4 35	2 31	0 45	10 51	8 55	6 47	4 45	2 47	0 56	11 2	8 57	6 46
25	4 30	2 28	0 41	10 47	8 51	6 43	4 41	2 44	0 52	10 58	8 53	6 41
26	4 26	2 24	0 37	10 44	8 47	6 39	4 37	2 40	0 48	10 54	8 48	6 37
27	4 22	2 20	0 34	10 40	8 43	6 35	4 34	2 36	0 45	10 50	8 44	6 33
28	4 18	2 16	0 30	10 36	8 39	6 31	4 30	2 33	0 41	10 46	8 40	6 28
29	4 14	2 13	0 27	10 32	8 34	6 27	4 26	2 29	0 38	10 43	8 36	6 24
30	4 10		0 23	10 29	8 30	6 23	4 22	2 26	0 34	10 39	8 31	6 19
31	4 6		0 19		8 26		4 18	2 22		10 35		6 15

En el siguiente apartado, *Construction of the Tables*, el autor presenta las fórmulas utilizadas para realizar las tres tablas.

Respecto a la primera tabla:

Table I. was constructed by the formula tan m=tan δ cos$h$, where m is the first correction, δ the polar distance=1° 36′ 11″ 4, and h the horary angle, supposing the star's right ascension=14° 49′ 22″

The columns of *An. var.* were found by the formula

$$dm=d\,\delta\cos h-\frac{\delta\, dh\sin h}{R}$$

supposing dδ=—19″ 4, and dh=3′ 47″ 8

Para la segunda tabla:

Table II. was constructed by the formula

$$\sin(a+c) = \frac{\cos m \sin a}{\cos \delta},$$

a being the altitude, and c the second correction.

The same result might be found very nearly by the formula

$$c = \frac{(\delta - m) \tan a \tan(\delta + m)}{2},$$

which is materially the same as the one published by Mr. Ciscár, in his *Explication de algunos métodos graficos.*

The an. var. was calculated by the formula

$$dc = \frac{d\delta \cos m \sin a \tan \delta}{\cos \delta \cos(a+c)}$$

Cabe resaltar que Rodríguez indica que los resultados obtenidos mediante esta segunda tabla se encuentran muy cerca de los que se obtienen mediante la fórmula para la segunda corrección, *c*, publicada en Ciscar [1803b], lo que confirma el importante conocimiento de Rodríguez sobre la obra de Ciscar.

Finaliza la obra con el apartado *Remarks*, indicando varias observaciones relacionadas con el uso de las Tablas.

En la primera de ellas estudia la variación en las cifras de las Tablas I y II que pueden producir los cambios a que se somete la precesión en ascensión recta y en declinación.

Posteriormente explica que la aberración y la nutación no son tenidas en cuenta en las tablas, pues podrían alargar las operaciones para calcular la latitud sin afectar a los resultados.

Concluye las observaciones, tratando de determinar las mejores circunstancias para observar la latitud en el mar mediante la estrella Polar. A partir del triángulo *PZS* formado por el polo de la tierra *P*, el cenit *Z* y la estrella *S*, deduce una relación que permite mostrar que el error en la altitud y la hora producirán un menor efecto en la latitud cuando la estrella es observada cerca del meridiano.

II.10.3. Estudio comparativo de la obra Elements of Spherical Trigonometry

II.10.3.1. **La obra**

La obra que se va a estudiar fue publicada en Nueva York por Pedro José Rodríguez bajo el título de *Elements of Spherical Trigonometry: Designed as an introduction to the Study of Nautical Astronomy*. Se ha revisado la única edición de 1829, que consta de veinticuatro páginas y veintiuna figuras [RODRÍGUEZ, 1829b]. Cabe destacar la dificultad para localizar la obra, al presentarse una errata en el nombre del autor, apareciendo Roderiguez en lugar de Rodríguez.

El libro está dedicado al Comodoro John Rogers, en ese momento presidente de la Junta de comisiones navales; como ya se ha indicado anteriormente, en 1827 Rogers llevó a Rodríguez a la Escuela Naval de Norfolk, Virginia, para impartir instrucción a los Guardias Marinas como profesor de Navegación, Matemáticas e Idiomas.

Como podemos observar, la obra comienza con una advertencia de los motivos que han llevado al autor a realizar el trabajo y sigue con los contenidos sobre Trigonometría Esférica. Comienza con definiciones y propiedades en la esfera, que serán de utilidad en los siguientes capítulos. Pasa a definir y presentar propiedades de los triángulos esféricos, centrándose en primer lugar en los triángulos rectángulos y su resolución, y seguidamente en los triángulos oblicuángulos y su resolución.
Posteriormente presenta varios ejemplos de resolución de triángulos esféricos y comenta los casos en los que se puede encontrar ambigüedad, usando dos tablas resumen para facilitar su manejo. Concluye la obra con una breve exposición de los triángulos quadrantales y ejemplos de su resolución.
Pasamos a examinar con detalle cada uno de los apartados.

En el capítulo previo de presentación al inicio del libro, *Advertisement*, el autor explica los motivos que le llevan a realizarlo, dado que ya hay un número considerable de tratados sobre Trigonometría Esférica. Tal y como indica el propio autor: *"In the course of some experience in teaching the younger Officers of the United States' Navy, the Author has often felt the want of a work suitable for their instruction. The short time that their duties allow them to devote to theoretical studies, does not permit them to acquire that knowledge in Mathematics necessary to* *understand the valuable works of Lacroix, Keith, &c.; and the other works on Spherics, which do not require so much previous study, are not only too complicate, but some even want propositions and principles of great use in Navigation.”* [RODRÍGUEZ, 1829b, p. 1ª del Advertisement].

Así, el autor se basa en su experiencia como profesor de Guardias Marinas para entender que estos alumnos no disponen de tiempo suficiente para asimilar tratados con una importante base matemática. Es por ello que: *“These considerations have produced the present work. Its object is to contain a System of Spherics, as complete as possible, as regards all its applications to Nautical Astronomy, and which may be studied by persons little versed in Mathematics.”* [RODRÍGUEZ, 1829b, p. 1ª del Advertisement].

Advierte que para poder seguir la obra, sólo es necesario estudios previos de Aritmética elemental, Geometría del plano, principios de la Trigonometría Plana y un pequeño conocimiento de Álgebra.

El autor también comenta que para elaborar el trabajo ha aprovechado lo publicado sobre la materia, *“… without expecting by so doing to incur the imputation of plagiarism.”* [RODRÍGUEZ, 1829b, p. VI], tratando de hacer una buena selección y una apropiada disposición.

Finaliza este apartado previo dejando a juicio del lector la valoración de si la obra ha conseguido estos objetivos y anunciando que si la obra tuviese una buena acogida, el autor se podría aventurar a publicar otro trabajo, del que este es una introducción y en el que *“… the Problems of Chronometers, Lunar Distances, and others used in Navigation, are solved and demonstrated by the principies, exposed in the fol1owing pages.”*[38] [RODRÍGUEZ, 1829b, p. VI].

Pasamos a tratar los contenidos de la obra propiamente matemáticos. Se presenta una relación detallada de los principales artículos de cada capítulo, indicando en el caso de definiciones o pequeñas propiedades, el artículo sobre el que trata. Todos los artículos los va enumerando el autor para ulteriores usos durante la obra.

[38] Véase nota 27.

En el primer apartado, *Of Circles and Angles on the Sphere*, Rodríguez comienza definiendo conceptos básicos como esfera, radio, círculo máximo, polo… así como presentando diversos teoremas y corolarios relacionados con la Esfera.

Artículos del capítulo:

1, 2. Sphere

3, 4. Radious, diameter, axis

5. Theorem. Every section of a Sphere made by a plane is a circle.

6. Great circle, small circle.

7, 8. Circles

9. Corollary. All great circles are equal.

10. Corollary. When two great circles intersect each other, they are bisected; for their common intersection passing through the centre, is a diameter. The distance between the two intersections is 180º.

11. Corollary. The centre of a small circle and that of the sphere are in the same line, perpendicular to the plane of the circle.

12. Corollary. Small circles become less, according to their distances from the centre of the sphere.

13. Hemisphere

14. Plane tangent to a sphere.

15. Great circle.

16. Pole of a circle

17. Theorem. If a diameter *DE* be drawn perpendicular to the plane of the great circle *AMB*, the extremities *D* and *E* of that diameter will be the poles of the circle, and of all the other circles, as *FNG*, &c. which are parallel to it.

18. Axis of a circle.

19. Corollary. The pole of a great circle is 90º distant from every point of its circumference.

20. An arc of a great circle described through the poles of another great or small circle, is said to be to perpendicular to it.

21. To find the pole of a given arc.

22. Corollary. If a circle be perpendicular to several great circles which intersect each other, the poles of that circle will be at the intersections; and conversely, if a great circle has a pole at the intersection of several great circles, it will be perpendicular to them, and have the other pole at the other intersection.

23. Corollary. All the circles which have their poles at intersections of those circles, will have the common section for axis, and will be parallel to one other.
24. Corollary. If two great circles a and b are perpendicular to each other, the poles of a will be in the circumference of b, and those of b in that of a.
25. Zone
26. Spherical angle.
27. Theorem. A spherical angle is equal to the inclination of the planes of the circles which form it.
28. Corollary. The measure of a spherical angle is an arc contained between its sides, having the vertex of the angle for its pole.
29. Corollary. The angle formed by two great circles is equal to that formed by their axes, or the less distance between their poles.
30. Corollary. If two arcs of great circles intersect each other, the opposite angles will be equal.
31. Corollary. The spherical angles formed at one point by the intersection of several great circles, are together equal to 360º.
32. Corollary. The spherical angles formed on one side of a semicircle by several arcs of great circles meeting at one point, are together equal to 180º.
33. Theorem. The shortest distance between two points on the surface of a sphere is the smaller arc of a great circle which joins those points.
34. Angular distance.
35. Theorem. The greatest distance between two arcs of great circles is at 90º from their intersection.
36. Corollary. The greatest distance between two great circles is equal to the spherical angle formed by those circles.
Son destacables por su posterior uso los teoremas 17, 33 y los Corolarios 30, 31, 32.

En el segundo apartado, *Of Spherical Triangles*, el autor define ahora conceptos básicos como triángulo esférico y Trigonometría Esférica, presentando posteriormente algunos de los teoremas fundamentales de los triángulos esféricos.
Artículos del capítulo:
37. Spherical triangle
38. Spherical trigonometry
39. Spherical trigonometry does not treat of triangles having a side greater than 180º.

40. Spherical triangles are denominated in the same manner as plane triangles: right-angled, isosceles, &c.
41. Sides and angles alike (or of the same kind) and unlike (or of different kinds).
42. The equality between two spherical triangles is determined in the same manner as between plane triangles.
43. Theorem. In every spherical triangle the sum of two sides is greater than the third.
44. Theorem. The sum of the three sides of a spherical triangle is less than 360º.
45. Theorem. The sum of the angles of a spherical triangle is greater than two rights angles, but less than six.
46. Corollary. In a spherical triangle, two angles are not sufficient to determine the third.
47. Corollary. A spherical triangle can have three right angles, two right and one obtuse, or three obtuse, &c.
48. Theorem. In every isosceles spherical triangle, the angles opposite the equal sides are equal, and the arc drawn from the third angle to the middle of its opposite side is perpendicular to it.
49. Theorem. In every spherical triangle, the greatest side is opposite to the greatest angle.
50. Theorem. The shortest distance from a point on the surface of the sphere to a great circle is an arc of a great circle, less than 90º, described perpendicularly from the point to the circle; and the oblique arcs drawn from that point to the circle are greater as they are farther from the perpendicular.
51. Corollary. When the perpendicular distance from a point to a great circle is greater than 90º, that distance is the greatest, and the oblique distances become less as they are farther from the perpendicular.
52. Corollary. The shortest distance from a point on the surface of a sphere to a small circle, is an arc of a great circle, less than 90º, described perpendicularly from the point to the circle.
53. Angular distance from a point to a great circle.
54. Angular distance from a point to a small circle.
55. Theorem. If from the vertices of a triangle *ABC*, taken for poles, are describe the arcs *FE*, *DE*, and *DF*, these arcs will form a triangle *DFE*, the side and angles of which will be respectively the supplements of the angles and sides of the triangle *ABC*. Supplemental or polar triangles.
56. Corollary. Two spherical triangles are equal when the three angles of the one are respectively equal to the three angles of the other.
Son de especial importancia los teoremas 43, 44, 45, 48, 49 y 55.

El tercer apartado, que hemos denominado *Right-Angled Triangles*, es un apartado que no aparece expresamente pero que consideramos al deducirse claramente de la estructura de la obra. Presenta teoremas de aplicación a los triángulos rectángulos que servirán de base para resolver este tipo de triángulos en el siguiente apartado.

Artículos del capítulo:

57. Theorem. If in a spherical triangle *ABC*, right angled at *B*, we describe the arc *HFE* from the point *A* as a pole, and extend the side *AB*, *AC*, *BC* until they meet at *H*, *G* and *F*, a spherical triangle *CFG*, right angled at *G*, will be formed, in which the angle *CFG* will be the complement of *AB*; the side *FG* the complement of the angle *CAB*, the side *CF* the complement of *BC*, and the side *CG* the complement of *AC*.

58. Corollary. If we extend the arcs *CF* and *GF* of the new triangle *CFG*, and from the point *C* as a pole describe the arc *EDI*, we shall have the triangle *EFD*, right angled at *D*, in which *ED* will be the complement of (angle) *FCG*, the hypothenuse *EF* of *FG*, the side *FD* of *CF,* and the angle *FED* of *CG*.

59 Complemental triangle.

60. Theorem. In every right-angled spherical triangle the oblique angles are of the same kind as their opposite sides.

61. Theorem. When the two legs of a right-angled spherical triangle are of the same kind, the hypothenuse is less than 90º.

62. Theorem. When the two legs of a right-angled spherical triangle are of different kind, the hypothenuse is greater than 90º.

63. Corollary. If the hypothenuse and one leg are of the same kind, the remaining leg will be less than 90º; but greater when the hypothenuse and one of the legs are of different kinds.

64. The hypothenuse is less or greater than 90º according as the oblique angles are of the same or different kinds.

65. The legs and their adjacent angles are of the same or different kinds, according as the hypothenuse is less or greater than 90º.

66. A leg and its opposite angle are both acute or obtuse, according as the hypothenuse and the other leg are alike or unlike.

67. Either oblique angle is acute or obtuse according as the hypothenuse and the other angle are alike or unlike.

Mención especial merece el teorema 57, pues será de utilidad en muchas demostraciones que son diferentes a las que realizan otros autores. También son destacables los teoremas 60, 61 y 62.

En el cuarto apartado, *Solution of Spherical Right-Angled Triangles*, podemos encontrar las seis relaciones de los triángulos rectángulos que permiten resolver este tipo de triángulos.

Artículos del capítulo:

68. Theorem. In every right-angled spherical triangle the radius is to the sine of the hypothenuse, as the sine of one of the oblique angles is to the sine of its opposite leg. (podemos expresarlo en notación actual como $\frac{r}{sen\ a} = \frac{sen\ B}{sen\ b}$)

69. Theorem. In any right-angled spherical triangle, radius is to the sine of one leg, as the tangent of the angle formed by it and the hypothenuse, is to the tangent of the other leg. (podemos expresarlo en notación actual como $\frac{r}{sen\ c} = \frac{tg\ B}{tg\ b}$)

70. Corollary. In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of one leg, as the cosine of the other leg is to the cosine of the hypothenuse.

(podemos expresarlo en notación actual como $\frac{r}{\cos b} = \frac{\cos c}{\cos a}$)

71. Corollary. In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of on the oblique angles, as the tangent of the hypothenuse is to the tangent of the leg adjacent to that angle. (podemos expresarlo en notación actual como $\frac{r}{\cos B} = \frac{tg\ a}{tg\ c}$)

72. Corollary. In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of the hypothenuse, as the tangent of one oblique angle is to the cotangent of the other.

(podemos expresarlo en notación actual como $\frac{r}{\cos a} = \frac{tg\ B}{cotg\ C}$)

73. Remark: The last terms of the prepositions (art.68 and 69) will be known to be either acute or obtuse by Theor. 60. In the other propositions of this section the last term will be ascertained by the following rule: that term is greater than a quadrant when the others terms (excluding the radius) are unlike. In all other cases, it is less than 90º.

A modo de ejemplo sobre la forma de presentar las relaciones para triángulos rectángulos, veamos cómo deduce dos de estas relaciones.

Rodríguez trata la relación $\frac{r}{sen\ a} = \frac{sen\ B}{sen\ b}$ en el artículo 68. Para ello construye dos triángulos rectilíneos rectángulos a partir del triángulo esférico rectángulo y utiliza sus propiedades para obtener la relación.

Por otra parte, trata la relación $\dfrac{r}{\cos b} = \dfrac{\cos c}{\cos a}$ en el artículo 70. Parte de la relación $\dfrac{r}{sen\ a} = \dfrac{sen\ B}{sen\ b}$, que ha visto previamente en el artículo 68, y utiliza las propiedades de los triángulos complementarios para obtener la relación deseada.

Son todos estos teoremas y corolarios de utilidad para resolver triángulos rectángulos. Se echa en falta una tabla resumen, que ante un problema relacione los datos del triángulo que se disponen y la relación a utilizar para encontrar los datos que faltan.

En el quinto apartado, *Solution of Oblique-Angled Triangles*, el autor presenta el teorema del Seno (aunque sin darle este nombre), seguido de un teorema que tiene los mismos fundamentos que el método del *Perpendículo* y la función del ángulo mitad para el coseno.
Artículos del capítulo:
74, 75. Theorem. In every spherical triangle, the sines of the angles are proportional to the sines of their opposite sides. $\dfrac{sen\, a}{sen\, A} = \dfrac{sen\, b}{sen\, B} = \dfrac{sen\, c}{sen\, C}$
76. Theorem. If in a spherical triangle *ABD* a perpendicular *CD* be left fall from one of the angles *C* to its opposite side *AB*, (extended if necessary) this will be divided in two segments *AD* and *BD*, the cosines of which will be proportional to the cosines of their adjacent sides; that is, the cosine of the first segment AD will be to the cosine of the second BD, as the cosine of the first side AC is to the cosines of the other side BC.
77. Theorem. In every spherical triangle, the square of the cosine of half one of the angles is equal to the product of the square of radius, the sine of the half sum of the three sides, and the sine of the difference between that half sum and the side opposite to that angle, the whole divided by the product of the sines of the sides which include the same angle.

$$\cos\frac{1}{2}\widehat{abc} = \sqrt{\frac{R^2 \times \text{sine}\,\frac{1}{2}s \times \text{sine}\left(\frac{1}{2}s - ac\right)}{\text{sine}\ ab \times \text{sine}\ bc}}$$

78. Corollary. Hence, if the three sides of an oblique-angled spherical triangle are known, either of the angles may be found by the following rule (indica el proceso usando logartimos).

Rodríguez presenta el teorema del Seno dividiendo el triángulo oblicuángulo en dos rectángulos, en los que aplica el teorema del artículo 68 (relación $\dfrac{r}{sen\ a} = \dfrac{sen\ B}{sen\ b}$ para triángulos esféricos rectángulos), obteniendo la relación deseada. De esta manera, opta en la obra por estudiar primero los triángulos rectángulos para estudiar posteriormente los oblicuángulos. Aunque en la Figura 15 contempla la posibilidad de que el perpendículo caiga dentro o fuera, no hace alusión expresa en la demostración.

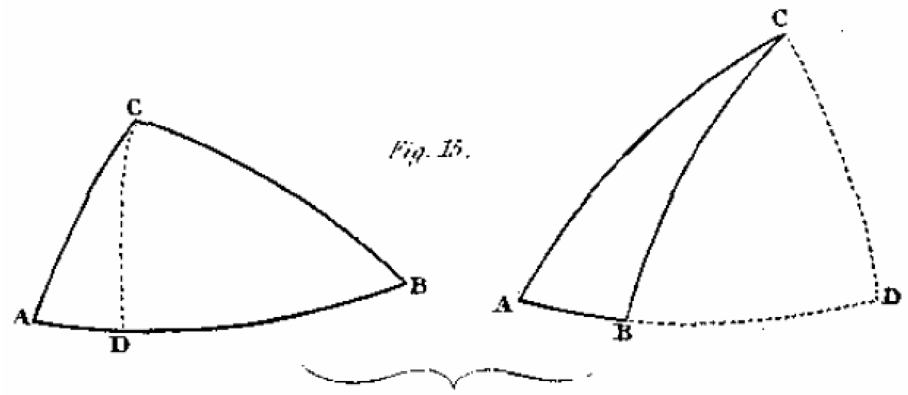


Figura 15

Cabe destacar que no presenta una tabla resumen que relacione ante un problema los datos de que se disponen del triángulo y la relación a utilizar para encontrar los datos que faltan.

En el sexto apartado, *Examples of the solution of Spherical Triangles*, el autor presenta cuatro ejemplos, dos con triángulos rectángulos y dos con oblicuángulos. También hace referencia a la posibilidad de trabajar con el triángulo polar cuando se parte de un triángulo en el que se conocen los tres ángulos.

Artículos del capítulo:

79. Example I.

80. Example II.

80. *Example II.* In the oblique angled triangle ABC (fig. 15.), let AC=50°, AB=116° 12′, and the included angle A=20° 16′: required the third side BC.

Solution. Letting fall the perpendicular CD, we have in the right angled triangle ACD (71.)

R : cos. A 20° 16′	. . . .	log. 9,9722448
: : tang. AC 50°	. . . .	log. 0,0761865
: tang. AD 48° 11′ 17″	. . . .	log. 0,0484313

Subtracting this segment from the whole side AC, we have for the other segment DB=68° 0′ 43″. Then (76.)

	cos. AD 48° 11′ 17″	ar. co. log.	0,1760774
:	cos. DB 68 0 43	log.	9,5733513
: :	cos. AC 50 0 0	log.	9,8080675
:	cos. BC 68 50 20	log.	9,5574962

Example II, apartado 80.

81. Example III.

82, 83. In some cases, the triangle cannot be solved directly by the rules stated in the two preceding sections (68 to 78.) The following is an example…

84. When the three angles of a spherical triangle are given, either of the sides may be found by applying the rule of art. 78 to the polar triangle (55).

En el séptimo apartado, *Of Indeterminate Triangles*, el autor comenta la existencia de casos indeterminados y sus respectivos triángulos indeterminados, triángulos que admiten más de una solución dependiendo de ciertas relaciones entre los datos. Procede a examinar los dos casos indeterminados.

Artículos del capítulo:

85. Indeterminate triangles.

86. First case: Let a, b, and c designate the sides respectively, opposite to the angles A, B and C of an oblique angled-triangle. Given a, b and A.

87. Table 1st. Let a, b, and c designates the sides respectively, opposite to the angles A, B and C of an oblique angled-triangle. Given a, b and A.

88. Other case: Two angles and one side opposite to one of them are known. Table 2d. Given A, B and a. (Tabla del 6º caso de triángulos oblicuos)

89. To make a proper use of the preceding tables, it must be recollected that greatest side is always opposite to the greatest angle.

90. One indeterminate case in right-angled triangles: when one leg and its opposite angle are given.

91. Example.

El artículo 86 da una explicación del primer caso de triángulos oblicuángulos (en los libros actuales suele ser conocido como el 5º caso para triángulos oblicuángulos), con su correspondiente tabla resumen en el artículo 87.

Table 1st.

87. Let a, b, and c designate the sides respectively, opposite to the angles A, B and C of an oblique angled-triangle.

Given a, b and A.

When A $\angle$ 90°.

$b \angle 90°$.	a 7 b	one solution	The perp. falls inside
	$a \angle b$	two solutions	of the triangle.
b 7 90°.	$a+b$ 7 180°.	one solution	The perp. falls out-
	$a+b \angle 180°$.	two solutions	side.

When A 7 90°.

$b \angle 90°$.	$a+b$ 7 180°.	two solutions	
	$a+b \angle 180°$.	one solution	The perp. falls outside
b 7 90°.	a 7 b	two solutions	
	$a \angle b$	one solution	The perp. falls inside.

Tabla del artículo 87

Posteriormente en el artículo 88 presenta, apoyándose en el triangulo polar, el segundo caso (en los libros actuales suele ser conocido como el 6º caso para triángulos oblicuángulos) dando su correspondiente tabla resumen.

Table 2d.

Given A, B and a.

When a 7 90°.

B 7 90°.	A $\angle$ B	one solution
	A 7 B	two solutions
B $\angle$ 90°.	A+B $\angle$ 180°.	one solution
	A+B 7 180°.	two solutions

When $a \angle 90°$.

$B > 90°$.	A+B $\angle$ 180°.	two solutions
	A+B $\angle$ 180°.	one solution
$B < 90°$.	A $\angle$ B	two solutions
	$A > B$	one solution

Tabla del artículo 88

Finalmente, trata en el artículo 90 un caso indeterminado cuando el triángulo es rectángulo (en los libros actuales suele ser conocido como el 6º caso para triángulos rectángulos) y presenta un ejemplo en el artículo 91.

En el octavo y último capítulo, *Of Quadrantal Triangles*, el autor comenta brevemente cómo resolver triángulos cuadrantales[39] y presenta dos ejemplos.

Artículos del capítulo:

92. Quadrantal or rectilateral triangle.
93. Example I.
94. Example II.

Para concluir este apartado, y una vez revisada la estructura del libro, se puede afirmar que el libro de Rodríguez es una pequeña obra bien estructurada y compacta, donde se sigue un método deductivo correcto y se presentan los contenidos conforme se van necesitando.

Rodríguez sigue un estilo propio y aunque su obra es muy breve y concisa, presenta un desarrollo deductivo correcto.

Comienza la obra presentando un amplio número de definiciones y propiedades sobre ángulos y triángulos esféricos, que permitan trabajar la Trigonometría Esférica a alumnos con una escasa formación matemática.

Para resolver los triángulos esféricos rectángulos trata seis relaciones, que deduce a partir de la construcción de triángulos rectilíneos rectángulos.

El estudio de los triángulos esféricos oblicuángulos lo fundamenta en el teorema del Seno y el método del *Perpendículo*, método que utiliza en alguna demostración, aunque no lo hace en la resolución de triángulos oblicuángulos.

Tratándose de una obra con un claro carácter de manual formativo para Guardias Marinas, que no disponen de mucho tiempo para asimilar los contenidos matemáticos, es comprensible la falta de más ejemplos, pero se echan en falta ejercicios y tablas resumen para el estudio de triángulos rectángulos y oblicuángulos. Tampoco aparece un estudio completo de todos los casos de resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

Por otra parte, Rodríguez no hace ninguna referencia a otras fórmulas que relacionan los elementos de un triángulo esférico, como el teorema del Coseno para lados, el teorema de la Cotangente, las analogías de Gauss-Delambre o las analogías de Napier, por lo que la obra de Rodríguez presenta un enfoque geométrico en cierto desuso frente al nuevo enfoque algebraico que está emergiendo en el primer tercio del siglo XIX, aunque apto para estudiantes con escasos conocimientos de Álgebra.

[39] Triángulo esférico que tiene por lados uno o más cuadrantes, es decir, la cuarta parte de una circunferencia.

II.10.3.2. **Posibles influencias en la obra**

II.10.3.2.1. ***Obras españolas***

Con la intención de determinar la influencia de otras obras en el libro de Rodríguez, se ha hecho un primer barrido de textos relacionados con la Trigonometría Esférica en España en torno a 1829, año de publicación de la obra.
Se procede, en la Tabla 3.5.1, *Libros españoles sobre Trigonometría Esférica de posible comparación con Rodríguez*, a una primera selección de obras de los siglos XVIII y XIX que trataron la Trigonometría Esférica.

Una vez revisadas, se han seleccionado por su proximidad temporal y temática cinco obras, tal y como recogemos en la Tabla 3.5.2, *Obras españolas seleccionadas para la comparativa con la obra de Rodríguez*.

Se ha realizado una revisión pormenorizada de definiciones, teoremas y corolarios, tomando como referente el texto de Rodríguez. Una vez seleccionados los principales ítems (con la numeración seguida por Rodríguez) se ha procedido a la revisión de cada una de las obras, en orden cronológico con respecto a la primera edición, de la presencia o no de estos artículos y de su similitud o diferencia en la demostración con respecto a la obra de referencia.
Se han seleccionado treinta y dos artículos del texto de Rodríguez, de los cuales cuatro son definiciones, diecisiete teoremas, seis corolarios, dos apartados y dos tablas.
Como resultado se presenta la Tabla 3.5.3, *Comparativa de la obra de Rodríguez con obras españolas*, en la que se constata la presencia o no de cada artículo en las distintas obras. En el caso de encontrarse el artículo en la obra, se comenta si hay o no similitud y la numeración del artículo o número de página en la que se encuentra dentro de la obra.
Pasamos a presentar brevemente cada una de las obras y a partir de la tabla, extraemos conclusiones en torno a posibles influencias sobre el libro de Rodríguez. Todas estas obras y sus autores fueron tratados al estudiar la Trigonometría Esférica en el Apartado II.9.

La obra española más antigua de las estudiadas, *Trigonometría Esférica para el uso de la Compañía de guardias-marinas de Cádiz*, pertenece a Antonio Gabriel Fernández [FERNÁNDEZ, 1784].

Podemos observar que hay trece artículos de la Tabla 3.5.3 que no aparecen en la obra de Fernández y la mayoría de los que aparecen lo hacen de una forma distinta salvo definiciones básicas y tres teoremas.

Además, podemos apreciar un orden distinto en la presentación y algunos de los teoremas más importantes sobre triángulos rectángulos no aparecen en esta obra. Con todos estos datos podemos concluir que no hay una influencia directa sobre la obra de Rodríguez.

La segunda obra en orden cronológico, *Tratado de Trigonometría Esférica para la instrucción de los Guardias Marinas*, pertenece a Gabriel Ciscar y Ciscar [CISCAR, 1796].

Observamos que hay diez artículos de la Tabla 3.5.3 que aparecen de forma similar en la obra de Rodríguez y otros diez que aparecen aunque con diferentes demostraciones.

Por todo ello, consideramos que esta obra de Ciscar pudo ser una de las fuentes de Rodríguez y realizaremos más adelante un estudio pormenorizado.

La tercera obra en orden cronológico, *Curso de estudios elementales de Marina, Tomo III Cosmografía*, también pertenece a Gabriel Ciscar y Ciscar [CISCAR, 1811].

Es destacable que hay nueve artículos de la Tabla 3.5.3 que aparecen de forma similar en la obra de Rodríguez y otros doce que aparecen, pero con diferentes demostraciones.

Por todo ello, consideramos que esta obra de Ciscar pudo ser otra de las fuentes de Rodríguez y realizaremos más adelante un estudio detallado.

La siguiente obra en orden cronológico, la cuarta que comparamos, es *Elementos de Trigonometría esférica y Geografía astronómica: para el uso de la casa de educación sita en la calle de San Mateo de esta corte*, de Alberto Lista y Aragón [LISTA Y ARAGÓN, 1823].

Observamos que no se encuentran teoremas tratados de forma similar por ambos autores y hay veinticinco artículos de la Tabla 3.5.3 que no aparecen en la obra de Lista y Aragón.

La obra tiene un reducido número de contenidos y sigue un orden distinto en el desarrollo.

Por otra parte, presenta la resolución de triángulos mediante un enfoque algebraico, apoyándose en el teorema del Coseno para los lados.

Por todo ello se puede deducir que esta obra no ha influido en la de Rodríguez.

Terminamos esta comparativa de obras españolas con la quinta obra en orden cronológico, *Sumario de Trigonometría Esférica para uso de los principiantes en la carrera de la navegación*, de Manuel del Castillo y Castro [CASTILLO Y CASTRO, 1834].

Encontramos dos teoremas tratados de forma similar por ambos autores, pero encontramos diecisiete artículos de Rodríguez que no aparecen en la obra de Castillo y Castro.

La obra sigue un orden distinto en el desarrollo y no trata la resolución de triángulos. También es destacable que en la obra se tratan en profundidad las especies de los lados y ángulos, asunto que no aparece en el texto de Rodríguez.

Por todo ello se puede concluir que este tratado no ha influido en la obra.

II.10.3.2.2. ***Obras extranjeras***

Siguiendo con el propósito de encontrar las fuentes en las que Rodríguez se apoyó para hacer su obra, se procede a revisar los principales trabajos sobre Trigonometría Esférica fuera de España y especialmente en Estados Unidos en los años previos a 1829, año en el que Rodríguez publicó su libro.

Dos de estas obras, escritas por Lacroix [1820] y Keith, aparecen referenciadas por Rodríguez en el *Advertisement* de su obra.

Por otra parte, las obras de Keill, Simson, Playfair, Lacroix [1803], Hutton y Webber fueron referentes en la materia en los Estados Unidos en los años previos a la publicación de los *Elements*, tal y como se recoge a lo largo del trabajo realizado por Van Sickle [2011] en su tesis doctoral *A History of Trigonometry Education in the United States: 1776-1900*.

Una vez revisadas, se han seleccionado por su proximidad temporal y temática cinco obras, tal y como recogemos en la Tabla 3.5.4, *Obras extranjeras seleccionadas para la comparativa con la obra de Rodríguez*.

Se procede a realizar un trabajo análogo a como se ha comparado la obra de Rodríguez con las obras españolas. Nos serviremos en este caso de la Tabla 3.5.5, *Comparativa de la obra de Rodríguez con obras extranjeras*, para constatar la presencia o no de cada artículo en las distintas obras, y en el caso de encontrarse se comenta si hay o no similitud y la numeración del artículo o número de página en la que se encuentra dentro de la obra con la que se compara la obra de Rodríguez.

Pasamos a presentar cada una de los textos y a partir de la tabla extraeremos conclusiones en torno a posibles influencias sobre la publicación de Rodríguez.

La primera de las obras, *The Elements of Plain and Spherical Trigonometry. Also a short treatise of the nature an arithmetick of logarithms*, pertenece al matemático escocés John Keill. La obra cuenta con varias ediciones en latín e inglés. La más antigua de las localizadas está edita en 1723 en latín; se ha revisado la tercera edición de 1726, traducida al inglés por Samuel Cunn y corregida por Samuel Fuller [KEILL, 1726]. El libro consta de ciento cuarenta y cuatro páginas, de las que cuarenta y ocho páginas y al menos doce figuras (en el documento revisado no aparecen completas todas las figuras) tratan sobre Trigonometría Esférica.

Keill trata la Trigonometría Esférica en el segundo capítulo, *The Elements of Spherical Triangles*. Podemos observar, que si bien hay cinco teoremas tratados de forma similar por ambos autores, encontramos nueve artículos de la Tabla 3.5.5 que no aparecen en la obra de Keill.

Al comienzo de la obra podemos encontrar algunas similitudes de conceptos y propiedades básicas sobre triángulos esféricos, la mayoría demostradas de forma diferente a como lo hace Rodríguez. Seguidamente, hay importantes diferencias en las propiedades para la resolución de triángulos rectángulos, especialmente en el uso de las dos reglas de Napier, y en la resolución de triángulos oblicuángulos.

Por todo ello, se puede concluir que esta obra no ha influido directamente en la obra de Rodríguez.

La siguiente obra revisada es *The Elements of Euclid, viz. The first six books, together with the eleventh and twelfth. The errors, by which Theon, or others, have long ago vitiated these books, are corrected, and some of Euclid’s demonstrations are restored. Also the book of Euclid's data, in like manner corrected. To this edition are also annexed, Elements of Plane and Spherical Trigonometry*, perteneciente al matemático escocés Robert Simson [1821].

Esta obra cuenta con numerosas ediciones, la primera de 1756; se ha revisado la edición americana de 1821 y en ella el libro consta de quinientas dieciséis páginas, de las que veintiséis páginas y veinticinco figuras tratan sobre Trigonometría Esférica.

Simson trata la Trigonometría Esférica en el segundo capítulo, *Spherical Trigonometry,* del último apartado de la obra, *The Elements of Plane and Spherical Trigonometry*.

Encontramos seis teoremas tratados de forma similar por ambos autores y nueve artículos de la Tabla 3.5.5 que no aparecen en la obra de Simson. Al comienzo del capítulo sobre Trigonometría Esférica se encuentran bastantes similitudes de conceptos y propiedades básicas sobre triángulos esféricos, aunque la mayoría demostradas de forma diferente a como lo hace Rodríguez. Seguidamente, hay diferencias importantes en el estudio de la resolución de triángulos rectángulos, especialmente en el uso de las dos reglas de Napier, y en la resolución de triángulos oblicuángulos.

Por todo ello se puede concluir que esta obra no ha influido directamente en la obra de Rodríguez.

La obra *Elements of Geometry: Containing the first six books of Euclid, with a supplement on the Quadrature of the circle, and the Geometry of Solids; to which are added Elements of Plane and Spherical Trigonometry* pertenece al matemático escocés John Playfair [1824].

Esta obra cuenta con numerosas ediciones, la primera en 1795; se ha revisado la edición americana de 1824 y en ella el libro consta de trescientas treinta y tres páginas, de las que cuarenta y una páginas y veintinueve figuras tratan sobre Trigonometría Esférica. Playfair comienza a tratar la Trigonometría Esférica en el segundo capítulo, *Elements of Spherical Trigonometry,* del apartado de la obra, *The Elements of Plane and Spherical Trigonometry*. Sigue una estructura y presenta los contenidos de forma similar a como lo hace Simson, siendo iguales numerosas proposiciones y demostraciones entre estos dos autores. Cuatro teoremas son tratados de forma similar por Rodríguez y Playfair, si bien nueve artículos de la Tabla 3.5.5 no aparecen en la obra de Playfair.

Al inicio del estudio sobre la Trigonometría Esférica se encuentran bastantes similitudes de conceptos y propiedades básicas sobre triángulos esféricos, aunque la mayoría demostradas de forma diferente a como lo hace Rodríguez.

Seguidamente hay diferencias importantes en la resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos, y en el uso de la regla de las partes circulares.

Por todo ello se puede concluir que esta obra no ha influido directamente en la obra de Rodríguez.

En el *Advertisement* de su obra, Rodríguez comenta, refiriéndose al público al que se dirige su obra, lo siguiente: *"The short time that their duties allow them to devote to theoretical studies, does not permit them to acquire that knowledge in Mathematics necessary to understand the valuable works of Lacroix, Keith, &c. ; and the other works on Spherics, which do not require so much previous study, are not only too complicate, but some even want propositions and principles of great use in Navigation."* [RODRÍGUEZ, 1829b, p. V].

Es por ello que se ha revisado la obra *Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica y de la aplicación del álgebra a la geometría, Volumen 4*, perteneciente a Sylvestre François Lacroix. A principios del s. XIX, el autor es un referente a nivel internacional en numerosas ramas de las Matemáticas, incluida la Trigonometría Esférica.

La primera edición data de 1797 y cuenta con numerosas ediciones. Se han revisado la tercera edición francesa de 1803 [LACROIX, 1803] y la sexta edición española de 1820 [LACROIX, 1820] "*…traducida por los catedráticos de matemáticas de los caballeros pages de S.M*". Las dos contienen los mismos contenidos, salvo la incorporación de un ejemplo en el último artículo sobre Trigonometría Esférica y la numeración de los artículos, que está ampliada en cuatro unidades en la traducción española. Es por ello que se ha revisado la edición de 1820 por ser la primera de las localizadas y estar más próxima a la fecha de la publicación de los *Elements*. Esta edición de 1820 consta de trescientas veintiséis páginas y setenta y cuatro láminas, de las que treinta y seis páginas tratan sobre Trigonometría Esférica.

En la obra de Lacroix no encontramos teoremas tratados de forma similar a como lo hace Rodríguez, localizando veinte artículos de la Tabla 3.5.5 que no aparecen en la obra de Lacroix. Podemos ver grandes diferencias de planteamiento entre las dos obras, pues la obra de Lacroix sigue un enfoque algebraico, centrándose en la deducción de fórmulas que relacionen los elementos de un triángulo esférico, mientras que Rodríguez presenta la Trigonometría Esférica después de haber tratado los círculos y ángulos de la esfera y deduciendo únicamente algunas de estar relaciones geométricamente.

Por todo ello se puede concluir que esta obra no ha influido directamente en la de Rodríguez.

La siguiente obra es *A course of Mathematics, for the use of academies, as well as private tuition*, perteneciente al matemático inglés Charles Hutton. La obra cuenta con numerosas ediciones, la primera en 1798; se ha revisado la tercera edición americana de 1822 [HUTTON, 1822] y en ella el libro consta de seiscientas sesenta y cinco páginas, de las que treinta y cuatro páginas y cinco figuras tratan sobre Trigonometría Esférica.

Encontramos tres teoremas tratados de forma similar por ambos autores y dieciséis artículos de la Tabla 3.5.5 que no aparecen en la obra de Hutton.

Al principio del capítulo sobre Trigonometría Esférica se encuentran algunas similitudes de conceptos y propiedades básicas sobre triángulos esféricos, pero seguidamente podemos encontrar grandes diferencias en el enfoque de la Trigonometría Esférica respecto al texto de Rodríguez, ya que Hutton basa su texto en un desarrollo algebraico a partir del teorema del Coseno para los lados, mientras que Rodríguez realiza un planteamiento geométrico.

Por todo ello se puede concluir que esta obra no ha influido directamente en la obra de Rodríguez.

Junto con Lacroix, nuestro siguiente autor también aparece en el *Advertisement* de Rodríguez como referencia básica para su obra. Es por ello que se ha revisado *An introduction to the theory and practice of Plane and Spherical Trigonometry, and the Stereographic Projection of the sphere; including the theory of Navigation* de Thomas Keith, obra clásica sobre Trignomometría Esférica en EEUU. La primera edición data de 1801 y cuenta con numerosas ediciones.

Se ha revisado la quinta edición [KEITH, 1826] y en ella el libro consta de cuatrocientas cuarenta y ocho páginas y cinco láminas, de las que doscientas cuarenta y tres páginas tratan sobre Trigonometría Esférica en el Libro 3º (consta de cuatro libros).

Es destacable que hay once artículos de la Tabla 3.5.5 que aparecen de forma similar en la obra de Rodríguez y otros quince que aparecen pero con diferentes demostraciones.

Por todo ello consideramos que esta obra pudo ser una de las fuentes de Rodríguez y realizaremos un estudio más detallado.

La última de las obra revisadas es *Mathematics, compiled from the best authors, and intended to be the Text-Book of the course of private lectures on these sciences in the University at Cambridge. Vol II.*, perteneciente al matemático norteamericano Samuel Webber [1808].

La obra cuenta con al menos dos ediciones, la primera en 1801; se ha revisado la segunda edición de 1808 y en ella el libro consta de quinientas ocho páginas, de las que cincuenta páginas y treinta y cinco figuras tratan sobre Trigonometría Esférica.

Encontramos tres teoremas tratados de forma similar por ambos autores y catorce artículos de la Tabla 3.5.5 que no aparecen en la obra de Webber.

Si bien se tiene al principio del capítulo sobre Trigonometría Esférica algunas similitudes de conceptos y propiedades básicas sobre triángulos esféricos, se encuentran grandes diferencias en el enfoque de la Trigonometría Esférica respecto al texto de Rodríguez.
A diferencia de Rodríguez, Webber basa su texto en el método del *Perpendículo*, la relación *Catholic Proposition* y el uso de proyecciones.
Por todo ello se puede concluir que esta obra no ha influido directamente en la obra de Rodríguez.

II.10.3.3. **Comparativa de varios artículos**

Se pasa a comparar cuatro artículos representativos en cada una de las obras, dos definiciones y dos teoremas, con el objetivo de poder apreciar mejor las similitudes y diferencias entre los textos estudiados.

Para cada uno de lo artículos se revisa en primer lugar el presentado por Rodríguez y se irá comparando con lo elaborado en cada una de las demás obras. Empezaremos por las obras españolas y posteriormente las extranjeras, revisándolas en el mismo orden en que han sido tratadas en los apartados anteriores.

II.10.3.3.1. ***Definición de Esfera***

Rodríguez comienza el primer capítulo con dos definiciones de Esfera.
En el artículo 1, considera a la esfera como una superficie cuyos puntos equidistan del centro: *"A Sphere is a solid terminated by a curved surface, all the points of which are equally distant from an interior point called the centre."* [RODRÍGUEZ, 1829b, p. 1].

En el artículo 2, usa otra definición a partir de la revolución de un semicírculo: *"The Sphere may be imagined to be produced by the revolution of a semicircle DAE (fig. 1.) about its diameter DE, for the surface described in this motion by the curve DAE will have all its points equally distant from the centre C."* [RODRÍGUEZ, 1829b, p. 1].

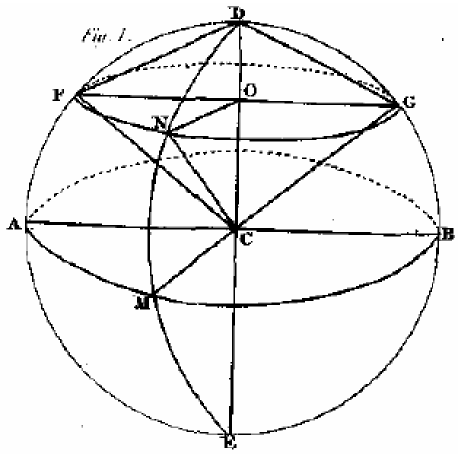


Figura 1 del libro de Rodríguez

Fernández no contempla en su obra la definición de Esfera, dándola por conocida.

Ciscar, en el artículo 68 de su *Tratado*, utiliza la idea de la revolución del semicírculo*:"Esfera ó globo es el solido que resulta (fig. 13ª) de la rotacion del semicírculo mqp sobre el diámetro mcp.*" [CISCAR, 1796, p. 16].

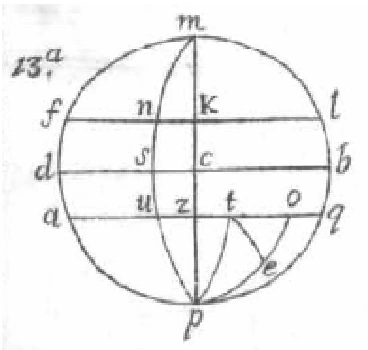


Figura 13 del Tratado de Ciscar

Ciscar, en su *Curso,* Lista y Aragón, Castillo y Castro, Keill, Simson, Playfair, Lacroix y Hutton no contemplan en su obra la definición de Esfera, dándola por sabida.

Keith, en su artículo B de la p. 133, utiliza una definición similar a la primera de Rodríguez: *"A sphere, or globe, is a round solid body, each part of its surface being equidistant from its centre. This centre is common to every circle described on the surface of the sphere, wherein spherical trigonometry is concerned, and such circles are called great circles."* [KEITH, 1826, p. 133].

Webber da una definición que mezcla los dos conceptos presentandos por Rodríguez, en el artículo 8 del capítulo *Mensuration of Solids*: "*A sphere is a solid, bounded by one continued convex surface, every point of which is equally distant from a point within, called the centre. The sphere may be conceived to be formed by the revolution of a semicircle about its diameter, which remains fixed*." [WEBBER, 1808, p. 3].

Una vez revisada la definición de Esfera en todas las obras, podemos concluir que Rodríguez utiliza las dos definiciones más usuales, basadas en puntos equidistantes y en la revolución del semicírculo.

La mayoría de los autores no contemplan la definición al darla por sabida.

Por otra parte, Ciscar en su *Tratado* define la Esfera basándose en la rotación del semicírculo; Keith lo hace basándose en la equidistancia al centro y Webber realiza una definición que entremezcla los dos conceptos.

II.10.3.3.2. *Definición de Triángulo Esférico*

Rodríguez da la siguiente definición de triángulo Esférico en el artículo 37, al comienzo del segundo capítulo, después de haber visto numerosas propiedades sobre círculos y ángulos en la esfera: "*A spherical triangle is a part of the surface of a sphere included by three arcs of great circles."* [RODRÍGUEZ, 1829b, p. 6].

Fernández, en su artículo 4, da una definición similar, dentro de las definiciones de su primer capítulo: *"Triangulo esférico es el que se forma en la superficie de la esfera con tres arcos de circulo maximo."* [FERNÁNDEZ, 1784, p. 1].

Ciscar, en el artículo 108 de su *Tratado*, da otra definición similar y en un orden muy parecido dentro de la estructura de la obra: *"Triángulo esférico es el formado sobre la superficie de la esfera con tres arcos de círculos máximos."* [CISCAR, 1796, p. 26].

Ciscar, en el artículo 72 de su *Curso*, da de nuevo una definición similar y en un orden análogo dentro de la estructura de la obra: *"Por triángulo esférico se entiende el formado sobre la superficie de la esfera, por tres arcos de círculo máximo."* [CISCAR, 1811, III, p. 12].

Lista y Aragón, en el artículo 1, da una definición similar, aunque algo más extensa, utilizando expresamente el concepto de ángulo triedro: *"Llámese triángulo esférico el que forman en la superficie de la esfera tres arcos de círculo máximo que se cortan. Estos arcos son las intersecciones con la esfera de tres planos, que pasan por su centro, y que forman en él un ángulo triedro."* [LISTA Y ARAGÓN, 1823, p. 2].
La definición aparece al principio de la obra, al carecer de demostraciones previas sobre ángulos y círculos.

Castillo y Castro, al comienzo del primer apartado, presenta mediante un postulado el triángulo esférico "… *como una pirámide triangular que tiene en el centro de la misma esfera su vértice ó ángulo sólido de cuyos ángulos planos son medida los respectivos lados del triángulo, al paso que los ángulos de este son los mismos que forman entre sí las caras o planos de la pirámide.* " [CASTILLO Y CASTRO, 1834, p. 13], siendo una definición distinta a las de los demás autores.

Keill, en el artículo cuarto, da una definición similar a la de Rodríguez, si bien utiliza el concepto de figura en lugar de el de superficie: "*A fpherical Triangle is a figure comprehended under the Arcs of three great Circles in a Sphere."* [KEILL, 1726, p. 27].

Simson, en el artículo tercero, ofrece una definición algo diferente al incluir que los lados son menores de 180º: "*A spherical triangle is a figure upon the superficies of a sphere comprehended by three arches of three great circles, each of which is less than a semicircle."* [SIMSON, 1821, p. 491].

Playfair, en el artículo cuarto, da una definición igual a la de Simson: "*A spherical triangle is a figure, upon the superficies of a sphere, comprehended by three arches of three great circles, each of which is less than a semicircle."* [SIMSON, 1821, p. 491].

Lacroix, en su artículo 46, da una definición similar: "*Los triángulos esféricos, que por lo común se calculan, son los que forman sobre la superficie de la esfera tres círculos máximos que se cortan de dos en dos.*" [LACROIX, 1820, p. 73].
Cabe destacar que seguidamente estudia, con bastante profundidad, los ángulos triedros que se forman.

Hutton, en su artículo primero, Definición 1, da un enunciado similar: "*Any portion of a spherical surface bounded by three arcs of great circles is called a Spherical Triangle*" [HUTTON, 1822, p. 25].

Keith, en su artículo E de la p. 133, da una definición algo más amplia, anunciando la idea de resolver este tipo de triángulos: *"A spherical triangle is formed on the surface of the sphere by the intersection of three great circles, and consists of three sides and three angles; any three of which parts being given the rest may be found."* [KEITH, 1826, p. 133].
A diferencia de Rodríguez, presenta la definición al principio del capítulo, junto con otras definiciones.

Webber da una definición similar a la de Rodríguez en el artículo 2, del apartado *Definitions*: "*A spheric triangle is a figure on the surface of a sphere, bounded by three arcs of great circles.*" [WEBBER, 1808, p. 409].

Se puede observar que la definición de triángulo Esférico, tan básica en un libro de Trigonometría Esférica, es similar en la mayoría de las obras, aunque varias de ellas presentan matices que las diferencian.
Lista y Aragón ofrece una definición más extensa utilizando expresamente el concepto de ángulo triedro, Simson y Playfair incluyen en la definición que los lados son menores de 180º, y Keith añade en la definición la idea de resolver este tipo de triángulos.
Por otra parte, Castillo y Castro ofrece una definición distinta a las de los demás autores, basada en una pirámide triangular.
También es destacable que se observan diferencias en la ubicación de la definición, pues algunas obras coinciden con la de Rodríguez en presentar la definición en el momento en que se va a trabajar con lo triángulos, mientras que otras lo presentan junto con otras definiciones al comienzo de la obra o del capítulo sobre Trigonometría Esférica.

II.10.3.3.3. ***Relación entre los senos de un triángulo rectángulo***

Uno de los teoremas más importantes dentro de la Trigonometría Esférica, es el que relaciona los senos de los ángulos y de los lados de un triángulo rectángulo.

Rodríguez, en su artículo 68, presenta este teorema, que forma parte del capítulo *Solution of Spherical Right-Angled Triangles* de la siguiente forma:

68. *Theorem.* In every right-angled spherical triangle the radius is to the sine of the hypothenuse, as the sine of one of the oblique angles is to the sine of its opposite leg.

Demonstration. Let E (fig. 13.) be the centre of the sphere, and ABC a spherical triangle, right-angled at A. Extend the two arcs BC and AB, the one to F and the other to H, until each is a quadrant, and describe the arc HF from the point B as a pole: this arc will be the measure of the angle ABC. Let fall the perpendiculars FG, CI, and CD, respectively on the radii of the sphere EH, EA, and EB; and those lines will be the sines respectively of the arcs HF, CA, and CB. Join ID, and there will result two plane triangles, FGE and CID, which being similar, will give

FE : CD :: FG : CI.

That is, radius is to the sine of the hypothenuse BC, as the sine of the angle B is to the sine of its opposite leg CA.

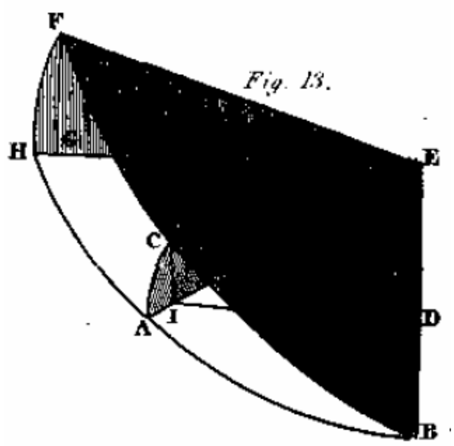


Figura 13 del libro de Rodríguez

Como podemos observar, Rodríguez traza varias perpendiculares para construir dos triángulos planos semejantes, a partir de los cuales obtiene la relación $\dfrac{r}{sen\left(BC\right)}=\dfrac{sen\left(\measuredangle ABC\right)}{sen\left(CA\right)}$.

Por su parte, Fernández, en el artículo 16, ubicado en el capítulo segundo *De los Teoremas fundamentales para las resoluciones de los Triángulos Esféricos rectángulos*, realiza la siguiente demostración:

En el triangulo esferico rectangulo ABC. *cuyos tres lados son menores que quadrantes , el seno de la hypotenusa* AB. *es al seno del angulo recto* C. *ó radio : como el seno del lado* BC. *al seno del angulo agudo opuesto* BAC. (fig. 8.)

Sea D. el centro de la Esfera , y las rectas DA. DB. DC. comunes secciones de los circulos AB. BC. AC. Del punto B. tirense las rectas BE. BF. perpendiculares á los radios DC. DA. y será BE. seno del arco BC. y BF. seno del arco BA. tirese la recta FE.

Demonstracion.

Porque el angulo C. es recto , será el plano BDC. (def. 3.) recto al plano ADC. y la recta BE. que es perpendicular al radio DC. lo será (def. 4. l. 11. Eucl.) al plano ADC: luego (def. 3. l. 11. Eucl.) el angulo BEF. es recto , y por tanto igual al angulo esferico C. Asimismo : porque á los planos inclinados ADC. ADB. los corta el plano BFE. recto. (p. 18. l. 11. Eucl.) á el uno ADC. y de las secciones BF. FE.
18. l. 11. Eucl.) á el uno ADC. y de las secciones BF. FE.
la una BF. es (por const.) perpendicular á la comun seccion AD. lo será tambien (Sch. p. 19. l. 11. Euc.) la otra FE: luego (def. 5. l. 11. Euc.) el angulo BFE. es de la inclinacion de los planos ADB. ADC. el qual (def. 3.) es igual al angulo esferico A.

Finalmente en el triangulo plano BFE. la hypotenusa BF. al seno del angulo recto BEF. es (p. 3. de la Trig.) como el lado BE. al seno del angulo opuesto BFE ; pero los angulos BEF. BFE. son iguales á los angulos esfericos C. y A. y BF. BE. son senos de los lados BA. BC: luego el seno de la hypotenusa BA. al seno del angulo C. ó radio es como el seno del lado BC. al seno del angulo opuesto BA.

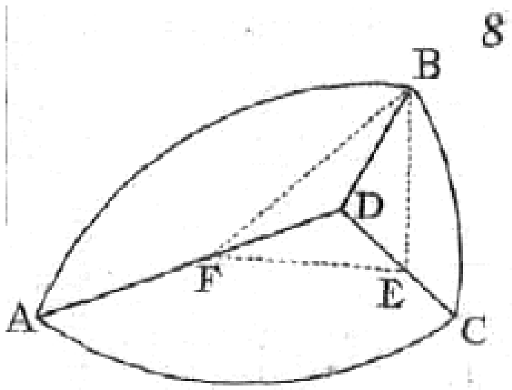


Figura 8 del libro de Fernández

En primer lugar, cabe destacar que Fernández considera que los tres lados son menores de 90º. En la demostración, traza un triángulo auxiliar *BFE* y usando propiedades de perpendicularidad, llega a que este triángulo es recto en *E* y de ahí deduce la relación. Durante la demostración hace varias alusiones a los *Elementos* de Euclides.

En el *Tratado* de Ciscar, su artículo 174, del capítulo *De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esféricos rectángulos*, dice así:

174. En qualquier triángulo esférico rectángulo, *el radio es al seno de uno de los ángulos oblicuos, como el seno de la hipotenusa al seno del cateto opuesto á dicho ángulo.*

Demostracion. Sea el triángulo propuesto *adu* rectángulo en *d*, y supónganse agudos los tres lados. Sea *c* el centro de la esfera, y *ca*, *cu*, *cd* las comunes secciones de los planos de los arcos. Imagínese que por *u* pasa el plano *sue* perpendicular á la comun seccion *ca*; y por el lema antecedente (*núm.* 1.º) será *us* seno de *ua*. Por el mismo lema (*núm.* 3º) será *ue* seno de *ud*, el ángulo *ues* recto; y (*núm.* 2.º) *use*=*a*. Establecido esto, en el triángulo rectilíneo rectángulo *ues*, será (*Geom.* 290)..R : *sen.use* : : *us* : *ue* :

y escribiendo debaxo de cada término su valor correspondiente resultará..................R : *sen. a* : : *sen.ua* : *sen.ud*

Esta es la proposicion que se habia de demostrar, y se verificará en todos los casos por lo establecido (*Art.* 172).

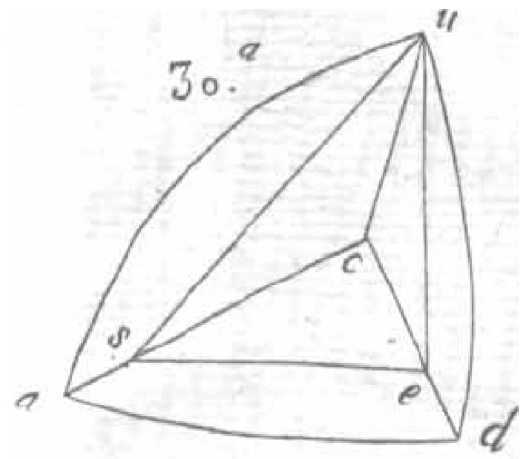


Figura 30 del *Tratado* de Ciscar

Ciscar presenta una demostración análoga a la de Fernández, aunque cambia la notación utilizando letras minúsculas para los ángulos en lugar de mayúsculas. Durante la demostración hace referencias a artículos anteriores de la obra y a un artículo del libro de Geometría de Tofiño [1771].

Por otra parte, en el Tomo III del *Curso de Estudios Elementales de Marina*, capítulo segundo, *Nociones de trigonometría esférica*, Ciscar trata el teorema en el artículo 97:

95 *Proposicion* 1.ª En todo triángulo esférico los senos de los lados son proporcionales con los senos de los ángulos opuestos.

96 Para hacer un buen uso de esta proposicion, se debe saber si es obtuso ó agudo el término que se trata de averiguar.

97 *Corolario.* Como el radio es seno del ángulo recto (*Geom.* 497), en los triángulos rectángulos será el radio al seno de la hipotenusa, como el seno de uno de los ángulos oblicuos es al seno de su lado opuesto de la misma especie que el ángulo.

En esta ocasión, Ciscar cambia radicalmente el planteamiento. Para demostrar el teorema, que denomina Corolario 97, utiliza la propiedad 497 del Tomo II de *Geometría* de la misma obra, para el caso particular de la propiedad 95, teorema del Seno para triángulos oblicuángulos, que veremos en el siguiente punto y cuya demostración presenta al final del tomo en el artículo 740 del *Apéndice*.

Vemos así, que primero ve el caso general, para posteriormente ver el caso de triángulos rectángulos como un caso particular.

Lista y Aragón, estudia la relación al principio del apartado sobre Trigonometría Esférica, en el artículo 2.

3. Supongamos que el ángulo C es recto: c es la hipotenusa. La fórmula $\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. C}}=\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } c}$ se convierte en sen. $\text{B}=\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } c}$.

Vemos que también lo presenta como un caso particular del teorema del Seno en triángulos esféricos oblicuángulos.

Castillo y Castro, en la segunda parte de su obra, *Dirigida puramente á la resolución inmediata de los triángulos esféricos; esto es, á formar analogías para hallar el valor numérico de todos sus términos*, lo presenta como su primer teorema:

TEOREMA I.º

En todo triángulo esférico rectángulo el radio es al seno de uno de los ángulos oblícuos como el seno de la hipotenusa es al seno del cateto opuesto á dicho ángulo oblícuo.

PREPARACION *general que debe servir en la demostracion de los seis primeros teoremas de esta segunda parte.*

Si en la fig. 10.ª se supone el punto *r* centro de la esfera y vértice de la pirámide que forman los sectores *crd*, *crb*, *brd*, cuyos arcos *cd*, *cb*, *bd* constituyen el triángulo esférico *cbd*, rectángulo en *c*, y se tiran *ds* y *df* perpendiculares á las comunes secciones *cr*, *br*, la una en el plano *cdr* y la otra en el *bdr*, serán estas senos del cateto *cd* y de la hipotenusa *bd*, y ademas la *ds* perpendicular al plano *cbr*.

Si en este y desde el punto *f* se tira la *fs* perpendicular á la comun seccion *br*, irá necesariamente á concurrir al punto *s*; porque debiendo el plano que pasase por *fd* y *fs* ser perpendicular al *cbr*, su comun seccion con el *cdr*, que por el supuesto es tambien perpendicular á aquel, sería la perpendicular *ds* al mismo.

Luego el ángulo rectilíneo *dfs* es medida del esférico en *b*; el ángulo en *s* es recto; y el triángulo rectilíneo *dfs* rectángulo en el mismo punto. Todo esto supuesto,

Demostracion. En el triángulo rectilíneo rectángulo *dsf* se tiene la siguiente analogía:

Pero el seno de *dfs* es seno del ángulo esférico en *b*; *df* es seno de la hipotenusa *bd*; y *ds* lo es del cateto *cd* opuesto al ángulo en *b*: luego, sustituyendo, se tendrá probado que

$$R : \text{sen. } b : : \text{sen. } bd : \text{sen. } cd$$

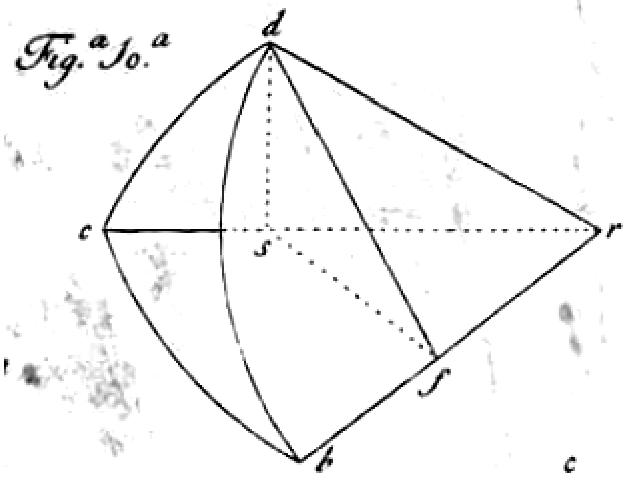


Figura 10 de Castillo y Castro

Podemos observar que Castillo y Castro presenta una demostración análoga a las de Fernández y Ciscar en su *Tratado*, aunque cambia la notación. De nuevo construye un triángulo plano *dsf*, aunque no demuestra que *fs* corta a *cr* en el punto *s*. A partir de este triángulo rectángulo, deduce la relación buscada.

Keill, en el apartado sobre Trigonometría Esférica, lo presenta en la proposición XXXIX:

PROPOSITION XXIX.

S, *of the Hypothenuse* : R : : S, *of the Perpendicular* : S, *of the Angle at the Base.*

IN the aforesaid Triangles, we have S, I F : S, G F : : S, H D : S, G D.

Basa su demostración en propiedades que presenta anteriormente y que no están incluidas en la obra de Rodríguez.

Simson, en el primer apartado sobre Trigonometría Esférica, lo presenta en la proposición XVIII:

PROP. XVIII. FIG. 13.

In right angled spherical triangles the sine of the hypothenuse is to the radius, as the sine of either side is to the sine of the angle opposite to that side.

Let the triangle ABC be right angled at A, and let AC be either of the sides; the sine of the hypothenuse BC will be to the radius as the sine of the arch AC is to the sine of the angle ABC.

Let D be the centre of the sphere, and let CG be drawn prependicular to DB, which will therefore be the sine of the hypothenuse BC; and from the point G let there be drawn in the plane ABD the straight line GH perpendicular to DB, and let CH be joined: CH will be at right angles to the plane ABD, as was shown in the preceding proposition of the straight line FA; wherefore CHD, CHG are right angles, and CH is the sine of the arch AC; and in the triangle CHG, having the right angle CHG, CG is to the radius as CH to the sine of the angle CGH (1. Pl. Tr.); but since CG, HG are at right angles to DGB, which is the common section of the planes CBD, ABD, the angle CGH will be equal to the inclination of these planes (6. def. 11.); that is, to the spherical angle ABC. The sine, therefore of the hypothenuse CB is to the radius as the sine of the side AC is to the sine of the opposite angle ABC. Q. E. D.

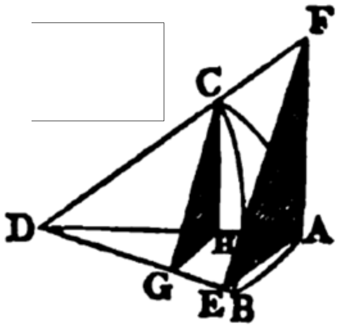


Figura 13 de Simson

De esta manera, Simson construye dos triángulos rectángulos planos, de forma distinta a como hacen otros autores, sobre los que aplica propiedades para obtener la relación.

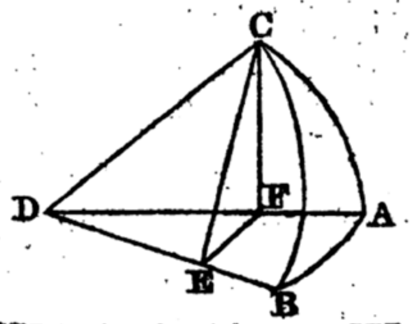
Playfair lo presenta en la proposición XIX, mediante una demostración prácticamente idéntica a la dada por Simson:

PROP. XIX.

In right angled spherical triangles the sine of the hypotenuse is to the radius as the sine of either side is to the sine of the angle opposite to that side.

Let the triangle ABC be right angled at A, and let AC be either of the sides; the sign of the hypotenuse BC will be to the radius as the sine of the arch AC is to the sine of the angle ABC.

Let D be the centre of the sphere, and let CE be drawn perpendicular to DB, which will therefore be the sine of the hypotenuse BC; and from the point E let there be drawn in the plane ABD the straight line EF perpendicular to DB, and let CF be joined: then CF will be at right angles to the plane ABD, because as was shewn of EA in the preceding proposition, it is the common section of two planes, DCF, ECF, each perpendicular to the plane ADB. Wherefore CFD, CFE are right angles, and CF is the sine of the arch AC; and in the triangle CFE having the right angle CFE



CE is to the radius, as CF to the sine of the angle CEF (1. Pl. Tr.). But, since CE, FE are at right angles to DEB, which is the common section of the planes CBD, ABD, the angle CEF is equal to the inclination of these planes, (4. def. 2. Sup.), that is to the spherical angle ABC. Therefore the sine of the hypotenuse CB, is to the radius, as the sine of the side AC to the sine of the opposite angle ABC. Q.E.D.

Lacroix, en el artículo 58 del capítulo II, *De la Trigonometría Esférica*, trata la relación junto con otras de la siguiente forma:

58. Estas mismas fórmulas se simplifican mucho cuando el triángulo propuesto es rectángulo. En efecto, si se supone $C = \frac{1}{2}\pi$, se tendrá

$$\text{sen. } C = 1, \qquad \text{cos. } C = 0;$$

y resultará

$$\text{cos. } c = \text{cos. } a \text{ cos. } b \ (53)$$

$$\text{cos. } c = \frac{\text{cos. A cos. B}}{\text{sen. A sen. B}} = \text{cot. A cot. B} \ (54)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos.\ A = \text{sen.}\ B \cos.\ a \\ \cos.\ B = \text{sen.}\ A \cos.\ b\end{array}\right\} (54)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen.}\ a = \text{sen.}\ c\ \text{sen.}\ A \\ \text{sen.}\ b = \text{sen.}\ c\ \text{sen.}\ B\end{array}\right\} (47)$$

Como se puede observar, se basa en las relaciones para triángulos oblicuángulos, que ha demostrado previamente, siendo *C* un ángulo recto.

Hutton, dentro de la Sección II, *Resolution of Spherical Triangles*, lo presenta como un caso particular del teorema del Seno en triángulos esféricos oblicuángulos, dentro de la demostración del teorema X:

THEOREM X.

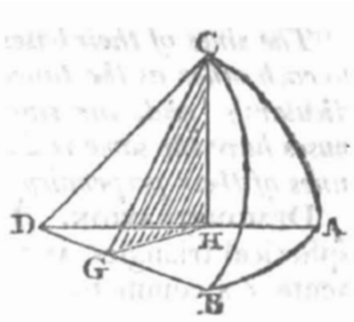
In Any Right-Angled Spherical Triangle, the Cosine of one of the Sides about the right angle, is equal to the Quotient of the Cosine of the Opposite angle divided by the sine of the Adjacent angle.

From th. 7, we have $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a}$; which, when A is a right angle, becomes simply $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$. Again, from th. 9, we

Keith, en el tercer capítulo, *Investigation of general rules for calculating the sides and angles of Rightangled Spherical Triangles, &c.*, presenta el artículo K de la p. 167 de la siguiente forma:

(K) In any right-angled spherical triangle.
Radius is to the sine of the hypothenuse, as the sine of any angle is to the sine of its opposite side.

DEMONSTRATION. Let ABC be a spherical triangle, right-angled at A. rad : sine BC :: sine ∠ B : sine AC.
For, let D be the centre of the sphere, draw the radii DC, DB, and DA.
In the plane DBC draw CG perpendicular to DB, and it will be the sine of the hypothenuse BC.



From the point G in the plane DBA, draw GH perpendicular to DB, and join CH; then (H. 165.) GHC will be a right-angle, and the angle CGH will be equal to the spherical angle ABC.

The plane triangle GHC is right-angled at H, the hypothenuse GC is the sine of the spherical hypothenuse BC; the perpendicular CH is the sine of the spherical perpendicular AC, and the angle CGH is equal to the spherical angle ABC.

Hence,

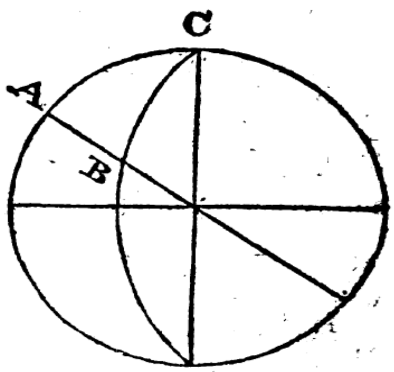
Radius : GC :: sine CGH : CH; that is,
Radius : sine of the hypoth. BC :: sine of the angle CBA : Sine of the perpendicular AC. Q. E. D.

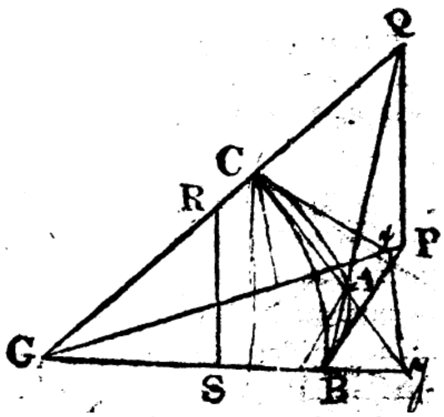
La demostración realizada por Keith, es de nuevo similar a las realizadas por Fernández, Ciscar (en su *Tratado*) y Castillo y Castro, pues consigue obtener un triángulo rectángulo plano, en el que deduce la relación. La principal diferencia es el camino seguido para obtener este triángulo, pues a demás de propiedades de perpendicularidad utiliza el artículo H de la p. 165 del libro que dice así: "*Radius, is to the sine of any side; as the tangent* of *the adjacent angle, is to the tangent of the opposite side.*" [KEITH, 1826, p. 165], artículo 69 del libro de Rodríguez.

Webber, en el teorema I del apartado *Rectangular Spheric Trigonometry*, presenta una demostración diferente a las anteriores, basada en triángulos rectángulos planos y las propias definiciones de las líneas trigonométricas. Esta demostración permite comprobar la mayoría de relaciones en los triángulos rectángulos:

THEOREM I.

In any right-angled spheric triangle BAC, radius is to the sine of the hypotenuse, as the sine of either angle to that of its opposite leg; and the contrary.*





* DEMONSTRATION. Let GBPQ be a pyramid, composed of four right-angled triangles GBQ, GBP, GPQ, and BPQ ; and let AB, AC, and BC, be three circular arcs, described with the centre G of the sphere, and its radius GB, and evidently forming a spheric triangle BAC, right-angled at A. Since the planes GQP, GBP, are perpendicular to each other, if the radius be made equal to unity, the values, specified in the following table, may be easily obtained for all the parts of the triangle ; it being recollected, that tang. $= \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$, and cot. $\frac{RR}{\text{tang.}} = \frac{\text{cos.}}{\text{sin.}}$.

The Arc or Angle.	The Sine.	The Cos.	The Tang.
1. Arc BC, or $\angle$QGB	$\frac{BQ}{GQ}$	$\frac{BG}{GQ}$	$\frac{BQ}{BG}$
2. Arc BA, or $\angle$BGP	$\frac{BP}{GP}$	$\frac{GB}{GP}$	$\frac{BP}{BG}$
3. Arc AC, or $\angle$BGQ	$\frac{QP}{GQ}$	$\frac{GP}{GQ}$	$\frac{QP}{GP}$
4. $\angle$ABC, or QBP	$\frac{PQ}{BQ}$	$\frac{BP}{BQ}$	$\frac{QP}{BP}$
5. $\angle$BCA	$\frac{BP\times GQ}{BQ\times GP}$	$\frac{QP\times BG}{GP\times BQ}$	$\frac{BP\times GQ}{QP\times BG}$.

Now, to show how these several expressions are demonstrated, it is sufficient to give merely the demonstration of the first line. For this purpose assume any line GR, and regard it as the radius of the Tables ; let fall the perpendicular RS on GB. Then it is evident, that RS is the sine of the arc BC, and GS its cosine. In the similar triangles GRS, GQB, as QG : QB :: GR = 1 : RS = sin. BC $= \frac{QB}{QG}$; and QG : GB :: GR = 1 : GS = cos. BC $= \frac{GB}{QG}$; whence is deduced tang. BC $= \frac{BQ}{BG}$, and cot. BC $= \frac{BG}{BQ}$. The other expressions are demonstrated in the same manner.

The expressions for the cotangents, being obtainable by merely inverting those for the tangents, are not inserted in the table.

The truth of the first six Theorems is proved by substituting the particular values of the terms of the proportions to be demonstrated, and then comparing the product of the extremes with that of the means. For the two products will always be found to be exactly equal.

Thus, Theorem I. R : sin. BC :: sin. B : sin. AC.

That is, $1 : \frac{BQ}{GQ} :: \frac{PQ}{BQ} : \frac{QP}{GQ}$;

$$\therefore \frac{QP}{GQ} = \frac{BQ}{GQ} \times \frac{PQ}{BQ} = \frac{PQ}{GQ}. \quad \text{Q. E. D.}$$

NOTE. By this Theorem, the expressions for the sine, cosine, and tangent of the angle BCA were obtained.

Con la comparación realizada, podemos concluir que la demostración efectuada por Rodríguez utiliza pasos diferentes a los realizados por otros autores, basando su demostración en una construcción mediante propiedades de perpendicularidad de dos triángulos planos semejantes.

En el resto de autores revisados, se observan tres tendencias distintas al proceso seguido por Rodríguez para la demostración del teorema, si bien la primera de ellas tiene ciertas similitudes con el desarrollo seguido por Rodríguez.

Por una parte, Simson y Playfair construyen dos triángulos rectángulos planos, de distinta forma a como lo hace Rodríguez, sobre los que aplican propiedades para obtener la relación.

Por otra parte, Fernández, Ciscar en su *Tratado*, Castillo y Castro, y Keith realizan demostraciones similares entre sí, al construir un triángulo sobre el que aplican el teorema del Seno para triángulos planos.

Otro grupo de autores particularizan el teorema del Seno para triángulos oblicuángulos, en el caso de que un ángulo es recto. Estos autores son Ciscar en su *Curso*, Lista y Aragón, Lacroix y Hutton.

Finalmente, Keill y Webber realizan demostraciones distintas a las de los demás autores.

II.10.3.3.4. *Fórmula de la altura esférica*

El teorema de Seno, también llamado 2ª Fórmula de Bessel o Fórmula de la Altura Esférica, es de gran importancia en la resolución de triángulos Oblicuángulos. Es por ello que pasamos a compararlo en las obras.

Rodríguez presenta este teorema en el artículo 74, del capítulo *Solution of Oblique-Angled Triangles*:

74. *Theorem.* In every spherical triangle, the sines of the angles are proportional to the sines of their opposite sides.

Demonstration. In the triangle ABC (fig. 15.) let fall the perpendicular BD from the angle B on the opposite side AC, extended if necessary; and there will result two right-angled triangles ABD and CBD, in which (68.)

R : sine AC :: sine A : sine CD,

R : sine BC :: sine B : sine CD.

Therefore:

sine AC : sine BC :: sine B : sine A.

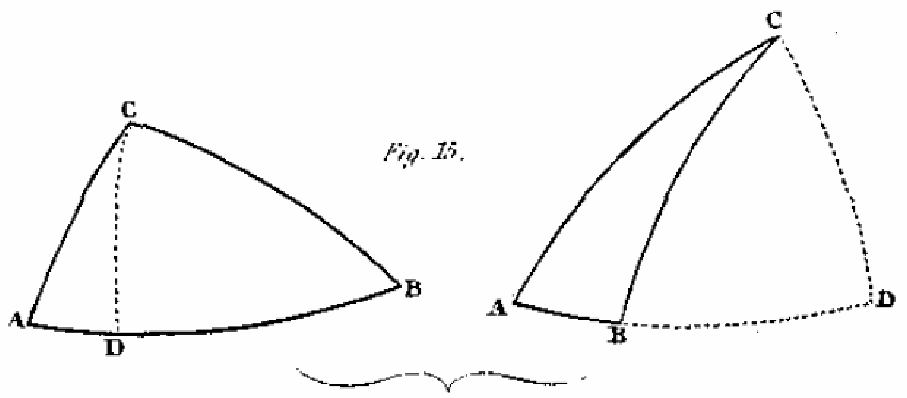


Figura 15 de Rodríguez

Como se puede observar, Rodríguez aplica el método del *Perpendículo* al dividir el triángulo oblicuángulo en dos rectángulos, en los que aplica el teorema del artículo 68 (revisado en el punto anterior), obteniendo la relación deseada. Así, Rodríguez opta en la obra por estudiar primero los triángulos rectángulos, para estudiar posteriormente los oblicuángulos y obtener la relación $\dfrac{sen\,a}{sen\,A}=\dfrac{sen\,b}{sen\,B}=\dfrac{sen\,c}{sen\,C}$.

Aunque en la Figura 15 contempla la posibilidad de que el perpendículo caiga dentro o fuera, no hace alusión expresa en la demostración.

Es reseñable el comentario que hace en el artículo siguiente, el número 75, advirtiendo de la ambigüedad al depender el ángulo del valor del seno.

75. The sine of the last term corresponds to two arcs, the one greater and the other less than a quadrant. In order to obtain its proper value, it must be previously known whether it is greater or less than 90°.

Por su parte, Fernández, en el artículo 25 del capítulo cuarto, *De los Theoremas fundamentales para las resoluciones de los Triángulos Esféricos Oblicuángulos,* presenta:

PROPOSICION XXV. THEOREMA.

En qualquier triangulo esferico ABC. *los senos de los lados* AB. AC. *son proporcionales con los senos de los angulos opuestos* C. *y* B. (fig. 13.)

¶ Caiga desde A. la perpendicular AD.

Demostracion.

En el triangulo rectangulo BDA. son proporcionales (p. 16.) el radio al seno del lado AB. como el seno del angulo B. al seno del perpendiculo AD.

Asimismo en el triangulo rectangulo ADC. son proporcionales el radio al seno del lado AC: como el seno del angulo C. al seno del perpendiculo AD. y como (p. 16. l. 6. Euc.) el rectangulo de los extremos es igual al de los medios ; y los extremos son unos mismos en las dos proporciones , serán los dos rectangulos de los medios iguales entre sí : luego el rectangulo de los senos del lado AB. y angulo B. es igual al rectangulo de los senos del lado AC. y angulo C : luego sus lados son reciprocamente proporcionales (p. 14. l. 6. Euc.) como el seno del lado AB. al seno del lado AC. asi el seno del angulo C. al seno del angulo B. y al contrario.

Lo mismo se demuestra aunque el perpendiculo ĂD. caiga fuera ; porque en este caso los angulos ACB. ACD. tienen un mismo seno.

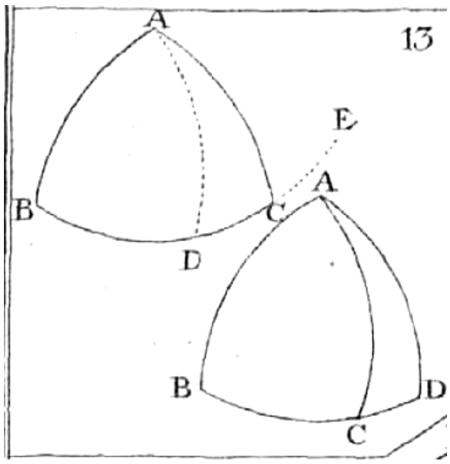


Figura 13 del libro de Fernández

Fernández utiliza el perpendículo, indicando que puede caer dentro o fuera del lado *BC*, para después utilizar, al igual que Rodríguez, el teorema que relaciona los senos y los lados, artículo 16 del libro, apoyándose en algunas propiedades de los *Elementos* de Euclides.

Ciscar, en el artículo 197 del capítulo *De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos* de su *Tratado*, expone:

PROBLEMA I.

197. Determinar la relacion entre los lados y ángulos opuestos.

Resolucion. En el primer triángulo *aeb* rectángulo en *e*, son *ab*, *a*, y *be* los términos que se han de comparar.

Será pues (caso 2.°)...................... $R : sen. A' :: sen. L' : sen. be$.

La relacion entre los términos correspondientes del segundo triángulo *bec* será............... $R : sen. A'' : sen. L'' : sen. be$; y por ser iguales los extremos de las dos proporciones, estarán los medios en razon recíproca,

y resultará................................ $sen. A' : sen. A'' :: sen. L'' : sen. L'$.

y alternando.............................. $sen. A' : sen. L'' :: sen. A'' : sen. L'$.

Esto es, los senos de los lados proporcionales con los senos de los ángulos opuestos.

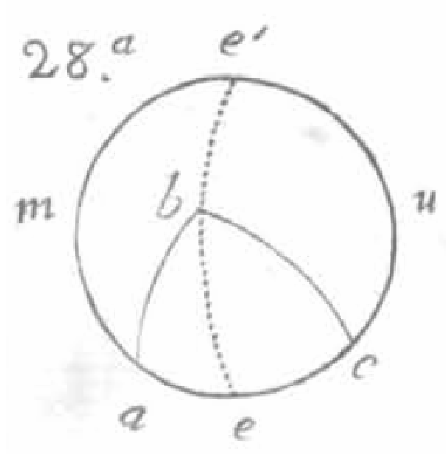


Figura 28 del *Tratado* de Ciscar

Lo presenta como un simple problema, utilizando una demostración análoga a las anteriores, aunque algo más austera, una vez expuesta la forma en que se debe aplicar el método del *Perpendículo*, procedimiento explicado en los artículos 195 y 196.

Ciscar, en su *Curso*, ofrece una demostración totalmente diferente de su artículo 95, en el artículo 740 del *Apéndice*:

95 *Proposicion* 1.ª En todo triángulo esférico los senos de los lados son proporcionales con los senos de los ángulos opuestos.

740 *Demostracion de la proposicion* 1.ª (*art.* 95) (*fig.* 44).

1.° Por lo establecido (*art.* 739 *núm.* 1.°, *y Geom.* 368 *y* 545)

serán {AE : Eu :: R : sen. EAu ; y (*art.* 739 *n.* 2.°) AE : Eu :: R : sen. a
{BE : Eu :: R : sen. EBu ; y (*art.* 739 *n.* 3.°) BE : Eu :: R : sen. b

2.° Por lo establecido (*Arit*, 250) será AE : BE :: sen. *b* : sen. *a*, y (*art.* 739 *núm.* 4.° *y* 5.°) sen. *ea* : sen. *be'* :: sen. *b* : sen. *a*.

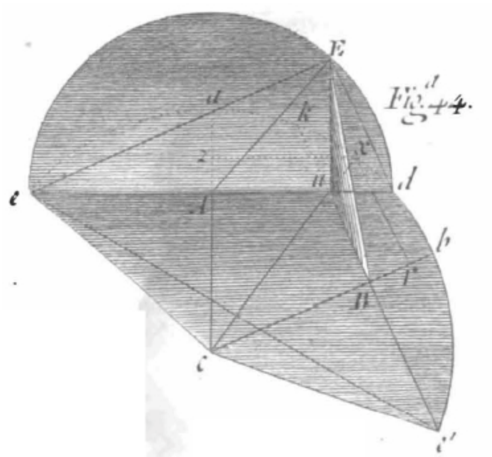


Figura 44 del *Curso* de Ciscar

En su demostración, hace reiteradamente referencia al artículo 739, en el que utiliza unas construcciones totalmente diferentes a las vistas hasta ahora con rotaciones, perpendicularidades y numerosas referencias al Tomo II de *Geometría*. Por todo ello, esta demostración sigue una línea diferente a las vistas hasta ahora.

Lista y Aragón, en su artículo 2 de la p. 3, dentro del apartado 1º del capítulo sobre Trigonometría Esférica, *Fórmula fundamental*, realiza la siguiente exposición:

2. *En todo triángulo esférico los senos de los ángulos son proporcionales á los senos de los lados opuestos.*

Fig. II. Demost. Sea el triángulo ABC. Denomino sus ángulos A, B, C: los lados respectivamente opuestos, a, b, c, y los lados y ángulos respectivamente opuestos en el suplementario a', b', c', A', B', C'.

Desde un punto cualquiera a de la arista AO bajo aD perpendicular al plano BOC: desde el pie D de la perpendicular tiro Dc, DH, perpendiculares á las otras dos aristas: tiro aH, ac, que serán perpendiculares á las aristas BO, CO. Tendremos, que el ángulo esférico B está medido por el rectilíneo aHD, y el esférico C por el rectilíneo Dca. Los triángulos rectángulos aHD, acD, dan aD$=a$H. sen. B, aD$=ac$ sen C: luego aH. sen. B$=ac$. sen. C, ó $\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. C}}=\frac{ac}{a\text{H}}$: pero los triángulos rectángulos Oac, OaH, dan $ac=a\text{O}\times$ sen. b, y $a\text{H}=a\text{O}\times$ sen. c, de donde $\frac{ac}{a\text{H}}=\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } c}$: luego $\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. C}}=\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } c}$: luego ect.

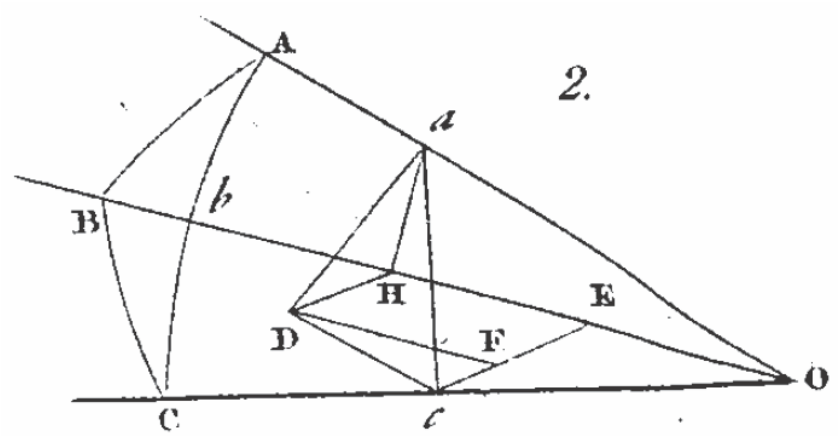


Figura II de Lista y Aragón

Su demostración es diferente a las anteriores, efectuando una construcción en la que obtiene cuatro triángulos rectángulos planos en los que va deduciendo relaciones, que llevan a la propiedad buscada.

Castillo y Castro, en la segunda parte de su obra, *Dirigida puramente á la resolución inmediata de los triángulos esféricos; esto es, á formar analogías para hallar el valor numérico de todos sus términos*, lo presenta como un corolario del primer teorema que da la relación $\frac{R}{sen\, a} = \frac{sen\, B}{sen\, b}$:

COROLARIO.

En los triángulos oblicuángulos los senos de los lados son proporcionales con los senos de los ángulos opuestos:

Porque en los triángulos 1.° y 2.° (fig. 14.ª) se tendrán las analogías siguientes:

R : sen. *rbd* : : sen. *br* : sen. *rd*
R : sen. *rcd* : : sen. *rc* : sen. *rd*

cuyos medios serán recíprocamente proporcionales, pues que sus extremos son idénticos; y se tendrá

sen. *rbd* : sen. *rcd* : : sen. *rc* : sen. *rb*

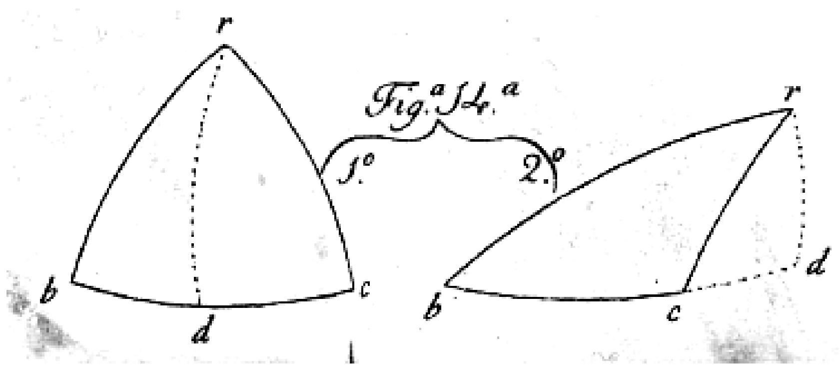


Figura 14 de Castillo y Castro

Observamos que es una demostración similar a las de Rodríguez, Fernández y Ciscar (*Tratado*), pues divide el triángulo oblicuángulo en dos rectángulos y aplica el teorema relativo a este tipo de triángulos.

Castillo y Castro vuelve a enunciar el teorema, aunque sin demostración, en el último apartado de su obra, *Punto de curiosidad para los estudiosos. Noticia del valor respectivo de las líneas trigonométricas de ángulos y lados de cualquier triángulo esférico, expresado en las relaciones de todas ellas con las de otros dos términos del mismo triángulo*. En las relaciones Iº y 2º presenta la relación, sin demostrar, indicando que la deduce a partir de las relaciones demostradas en la segunda parte del libro y de sus combinaciones con otros principios:

1.º

$$\text{sen. } A = \frac{\text{sen. } a \times \text{sen. } B}{\text{sen. } b} = \frac{\text{sen. } a \times \text{sen. } C}{\text{sen. } c}$$

$$\text{sen. } B = \frac{\text{sen. } b \times \text{sen. } A}{\text{sen. } a} = \frac{\text{sen. } b \times \text{sen. } C}{\text{sen. } c}$$

$$\text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c \times \text{sen. } A}{\text{sen. } a} = \frac{\text{sen. } c \times \text{sen. } B}{\text{sen. } b}$$

Y es decir que el seno de un ángulo cualquiera se obtiene partiendo el producto de los senos de su lado opuesto y de uno cualquiera de los otros dos ángulos por el seno del lado opuesto á éste tal segundo ángulo.

2.º

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. } A \times \text{sen. } b}{\text{sen. } B} = \frac{\text{sen. } A \times \text{sen. } c}{\text{sen. } C}$$

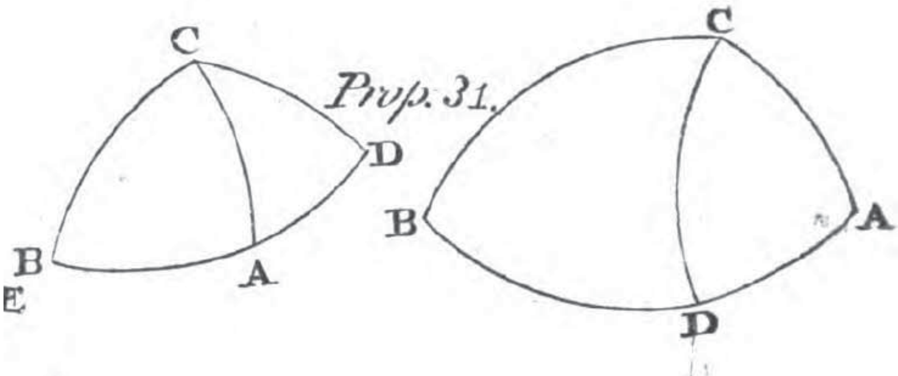
$$\text{sen. } b = \frac{\text{sen. } B \times \text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } B \times \text{sen. } c}{\text{sen. } C}$$

$$\text{sen. } c = \frac{\text{sen. } C \times \text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } C \times \text{sen. } b}{\text{sen. } B}$$

Y es decir que el seno de un lado cualquiera se obtiene partiendo el producto de los senos de su ángulo opuesto y de uno cualquiera de los otros dos lados por el seno del ángulo opuesto á éste tal segundo lado.

Keill presenta en primer lugar el método del *Perpendículo*, de la siguiente forma:

IN the Oblique-angled Spherical Triangle (*Fig. to Prop.* 31.) BCD, if a perpendicular Arc AC be let fall from the Angle C to the Baſe continued, if need be, ſo as to make two Right-angled Spherical Triangles BAC, DAC; then by thoſe Right-angled Triangles, may moſt of the Caſes of Oblique-angled ones be ſolved.



Posteriormente, en la proposición XXXV trata el teorema:

PROPOSITION XXXV.

The Sines of the Sides BC, DC, *are proportional to the Sines of the oppoſite Angles* D *and* B.

BECAUSE by the 29th *of this*, S, BC : R : : S, CA : S, of the Angle B. And by the ſame, inverting R : S, D C : : S, Angle D : S, of C A, whence by Equality of pertur-bate Ratio, S, B C : S, D C : : S, D : S, B,

Vemos que realiza un procedimiento similar al realizado por Rodríguez, aplicando el método del *Perpendículo* y las relaciones de los triángulos esféricos rectángulos.

Simson, en la proposición XXIII, dentro del apartado *Solution of the Sixteen cases of Right-angled Spherical Triangles*, presenta la relación tanto para triángulos rectángulos, como oblicuángulos:

PROP. XXIII. Fig. 16.

In spherical triangles, whether right angled or oblique angled, the sines of the sides are proportional to the sines of the angles opposite to them.

First, let ABC be a right angled triangle, having a right angle at A; therefore by prop. 18. the sine of the hypothenuse BC is to the radius (or the sine of the right angle at A) as the sine of the side AC to the sine of the angle B. And in like manner, the sine of BC is to the sine of the angle A, as the sine of AB to the sine of the angle C; whereof (11.5.) the sine of the side AC is the sine of the angle B, as the sine of AB to the sine of the angle C.

Secondly, let BCD be an oblique angled triangle, the sine of either of the sides BC, will be to the sine of either of the other two CD, as the sine of the angle D opposite to BC is to the sine of the angle B opposite to the side CD. Through the point C, let there be drawn an arch of a great circle CA perpendicular upon BD; and in the right angled triangle ABC (*18. of this*) the sine of BC is to the radius, as the sine of AC to the sine of the angle B; and in the triangle ADC (by 18. of this): and, by inversion, the radius is to the sine of DC as the sine of the angle D to the sine of AC: therefore ex æquo perturbate, the sine of BC is to the sine of DC, as the sine of the angle D to the sine of the angle B. Q. E. D.

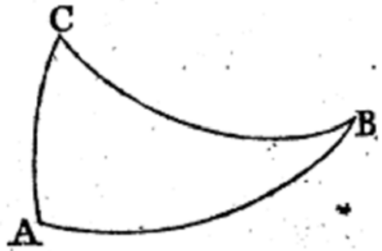
En primer lugar, lo demuestra para triángulos esféricos rectángulos, basándose en la relación entre los senos de un triángulo rectángulo. Seguidamente, realiza un procedimiento similar al realizado por Rodríguez, aplicando el método del *Perpendículo*.

Playfair lo presenta en la proposición XXIV, realizando una demostración prácticamente idéntica a la de Simson:

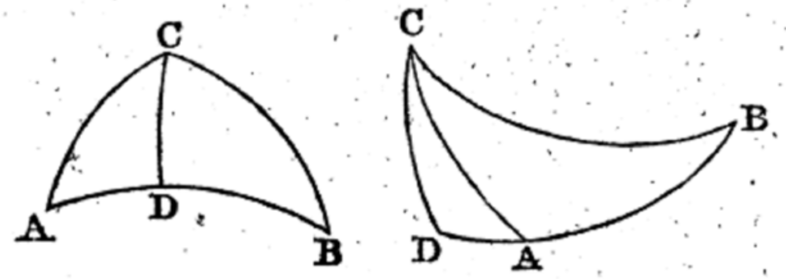
PROP. XXIV.

In spherical triangles, whether right angled or oblique angled, the sines of the sides are proportional to the sines of the angles opposite to them.

First, Let ABC be a right angled triangle, having a right angle at A; therefore, (19.) the sine of the hypotenuse BC is to the radius, (or the sine of the right angle at A), as the sine of the side AC to the sine of the angle B. And, in like manner, the sine of BC is to the sine of the angle A, as the sine of AB to the sine of the angle C; wherefore (11. 5.) the sine of the side AC is to the sine of the angle B, as the sine of AB to the sine of the angle C.



Secondly, Let ABC be an oblique angled triangle, the sine of any of the sides BC will be to the sine of any of the other two AC, as the sine of the angle A opposite to BC, is to the sine of the angle B opposite to AC. Through the point C, let there be drawn an arch of a great circle CD perpendicular to AB; and in the right angled trian-



gle BCD, sin BC : R : : sin CD : sin B, (19.); and in the triangle ADC, sin AC : R : sin CD : sin A; wherefore, by equality inversely, sin BC : sin AC : : sin A : sin B. In the same manner, it may be proved that sin BC : sin AB : : sin A : sin C, &c. Therefore, &c. Q. E. D.

Lacroix, en el artículo 47 al comienzo del capítulo II, *De la Trigonometría Esférica*, advierte que sobre esta relación fundamentará todo lo que expone posteriormente. Realiza la siguiente exposición:

47. Todo lo que vamos á exponer sobre los triángulos esféricos está fundado únicamente sobre la construccion siguiente, que es muy importante percibir bien.

Desde el ángulo C del triángulo ABC se baja una perpendicular CD al plano ASB del lado BA opuesto á este ángulo; desde el punto D se tiran las líneas ED, DF respectivamente perpendiculares á las SA y SB; tírense despues las líneas CE y CF; que serán respectivamente perpendiculares á las líneas SA y SB (*Geometría*). Se sigue de aqui que los ángulos CED y CFD medirán las

inclinaciones de los planos CSA y CSB sobre el plano ASB, ó lo que es lo mismo, darán el valor de los ángulos A y B del triángulo esférico ABC. Designaremos los ángulos de estos triángulos por la letra colocada en su vértice, y los lados que les son opuestos por una letra semejante, pero minúscula; aqui, como en el número 31, el lado BC opuesto al ángulo A, será llamado a, y asi de los demas. Suponiendo el radio de las tablas igual á 1, se tendrá

$$CE = \text{sen. } CA = \text{sen. } b, \qquad SE = \cos. CA = \cos. b,$$
$$CF = \text{sen. } CB = \text{sen. } a, \qquad SF = \cos. CB = \cos. a.$$

En el triángulo rectilíneo CDE, rectángulo en D, y cuyo ángulo CED=A, se hallará

$$CD = CE \text{ sen. } CED = \text{sen. } b \text{ sen. } A,$$
$$DE = CE \cos. CED = \text{sen. } b \cos. A.$$

Del triángulo rectilíneo CDF, rectángulo en D, y en el cual el ángulo CFD=B, se obtendrá

$$CD = CF \text{ sen. } CFD = \text{sen. } a \text{ sen. } B,$$
$$DF = CF \cos. CFD = \text{sen. } a \cos. B.$$

Igualando los dos valores de CD, se sacará

$$\text{sen. } b \text{ sen. } A = \text{sen. } a \text{ sen. } B \ldots\ldots (A);$$

resultado que es, respecto á los triángulos esféricos, el análogo del número 32.

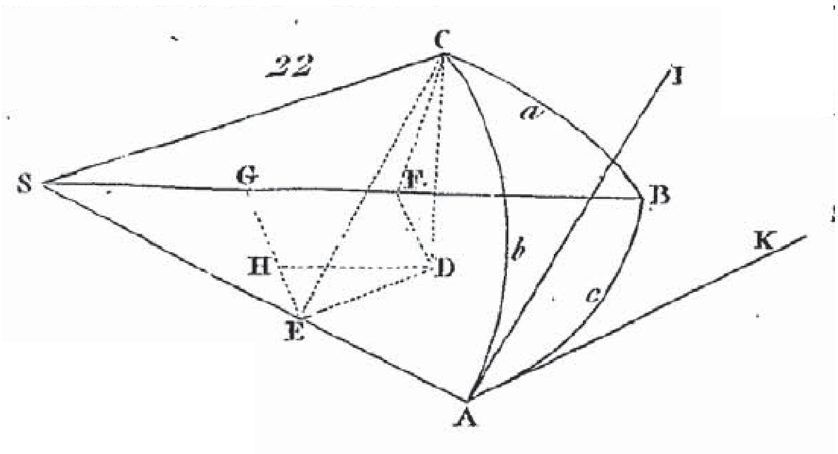


Figura 22 de Lacroix

La demostración es diferente a las anteriores, realizando una construcción en la que obtiene dos triángulos rectángulos planos, sobre los que va deduciendo relaciones que llevan a la relación buscada. Cabe notar que en algunas partes de la demostración realiza pasos similares a los elaborados por Lista y Aragón.

Hutton, dentro de la Sección II, *Resolution of Spherical Triangles*, obtiene la relación algebraicamente a partir del teorema del Coseno para los lados:

THEOREM VII.

In Every Spherical Triangle, the Sines of the Angles are Proportional to the Sines of their Opposite sides.

If, from the first of the equations marked 1, the value of cos A be drawn, and substituted for it in the equation $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, we shall have

$$\sin^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Reducing the terms of the second side of this equation to a common denominator, multiplying both numerator and denominator by $\sin^2 a$ and extracting the sq. root there will result $\sin A =$

$$\sin a \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c.)}}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c}.$$

Here, if the whole fraction which multiplies $\sin a$, be denoted by K (see art. 8 chap. iii), we may write $\sin A = K \cdot \sin a$. And, since the fractional factor, in the above equation, contains terms in which the sides a, b, c, are alike affected, we have similar equations for sin B, and sin C. That is to say, we have

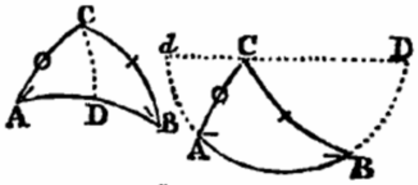
$\sin A = K \cdot \sin a \ldots \sin B = K \cdot \sin b \ldots \sin C = K \cdot \sin c$.

Consequently, $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \ldots$ (II.) which is the algebraical expression of the theorem.

Keith lo presenta en el artículo G de la p. 176, del cuarto capítulo *Investigation of general rules for solving the different cases of Oblique Spherical Triangles, by drawing a perpendicular from the vertical angle upon the base*, que es un corolario del artículo anterior, caso tercero. Trata de resolver un triángulo oblicuángulo en el que se tienen como datos los dos ángulos de la base y un lado opuesto a uno de ellos, queriendo obtener el lado opuesto al otro ángulo.

(F) CASE III. *Suppose the two angles at the base, and a side opposite to one of them were given, to find the side opposite to the other.*

Neither the base nor vertical angle being here concerned, it would be superfluous to find any thing in the triangle BDC.



In the triangle ADC, *rad* × *sine* DC = sine AC × sine ∠ A,
In the triangle BDC, *rad* × *sine* DC = sine BC × sine ∠ B;
Therefore sine ∠ A : sine ∠ B :: sine BC : sine AC.

Had the side AC been given, and the angle A required, the angle A must have been marked, and the proportion would have been, sine AC : sine BC :: sine B : sine A.

(G) COROLLARY I. *The sines of the sides, are in proportion to each other as the sines of their opposite angles, et contra.*

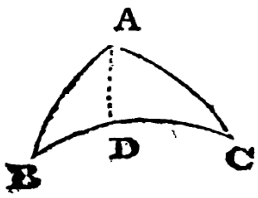
La demostración es diferente a las anteriores, pues como indica en la Proposición XXV de la página 173, aplica las Reglas de Napier después de trazar una perpendicular a la base.

Webber, en el teorema III del apartado *Oblique Spheric Trigonometry*, presenta una demostración similar a la realizada por Rodríguez, aplicando el método del *Perpendículo*:

THEOREM III.

In a spheric triangle, the sines of the sides are as the sines of their opposite angles.†

† DEMONSTRATION. Let BAC be a spheric triangle, and from any angle, as A, draw a perpendicular AD to the opposite side BC. Then, by the Catholic Proposition.



R × sin. AD = sin. AB × sin. B,
R × sin. AD = sin. AC × sin. C ;
∵ sin. AB × sin. B = sin. AC × sin C,
and sin. AB : sin. AC :: sin. C : sin. B. Q. E. D.

Con la comparación realizada, podemos concluir que la demostración efectuada por Rodríguez para demostrar el teorema del Seno, utilizando el método del *Perpendículo* para obtener dos triángulos rectángulos y así poder aplicar la relación entre los senos, es similar a las realizadas por Fernández, Ciscar (en su *Tratado*), Castillo y Castro, Keill, Simson, Playfair y Webber.

Todos estos autores optan en sus obras por estudiar en primer lugar los triángulos rectángulos, para posteriormente tratar los triángulos oblicuángulos y obtener la relación $\frac{sen\,a}{sen\,A}=\frac{sen\,b}{sen\,B}=\frac{sen\,c}{sen\,C}$.

Keith realiza una demostración parecida, aunque una vez descompuesto el triángulo esférico en dos triángulos esféricos rectángulos, aplica las Reglas de Napier para obtener la relación.

Otros autores, como Ciscar (en su *Curso*), Lista y Aragón y Lacroix, elaboran demostraciones diferentes, realizando cada uno construcciones geométricas que les permiten obtener triángulos planos en los que deducir la relación buscada.

Finalmente, Hutton obtiene la relación algebraicamente a partir del teorema del Coseno para los lados.

II.10.3.3.5. ***Influencias por parte de Ciscar y Keith***

La información recopilada hasta el momento nos sugiere que Rodríguez no tuvo un único texto como referencia a la hora de elaborar su obra; más bien parece que escogió de varias obras los contenidos y demostraciones que necesitaba, reordenándolos y presentándolos de forma práctica para alumnos con escasa formación matemática.

A partir de la tablas comparativas de la Tabla 3.5.3 y la Tabla 3.5.5 hemos revelado una mayor influencia de las obras de Ciscar y Keith en el texto de Rodríguez. Por ello vamos a realizar unas comparaciones pormenorizadas de estas obras con la obra de Rodríguez, con el objetivo de poder determinar el grado de influencia.

Previamente, procedemos a realizar la Tabla 3.5.6, *Comparativa de la obra de Rodríguez con las obras de mayor influencia*, en la que se recoge información de los autores con mayor influjo sobre los artículos seleccionados en la obra de Rodríguez.

Respecto al *Tratado de Trigonometría Esférica para la instrucción de los Guardias Marinas*, Ciscar comienza en el primer capítulo, *Nociones generales sobre los planos*, dando unas definiciones y propiedades de Geometría elemental sobre planos, que según comenta el autor *"… pertenecen en rigor á la Geometría elemental"* [CISCAR, 1796, p. 1ª del Prólogo] y que no aparecen en la obra de Rodríguez, al tratar ésta de contenidos básicos en la Trigonometría Esférica.

Continúa en los tres siguientes capítulos con lo que, según Ciscar, numerosos autores denominan Esféricos, esto es, *"… como si dixéramos la Geometría de las líneas descritas sobre la superficie de una esfera."* [CISCAR, 1796, p. 1ª del Prólogo].

Al tratar el segundo capítulo, *De las curvas descritas sobre las superficies de la esfera y de sus ángulos*, Ciscar comienza con una definición de esfera en el artículo 68, similar a la segunda que ofrece Rodríguez en el artículo 2, y durante el capítulo hace continuas referencias al libro de Geometría de Tofiño [1771]. Trata en profundidad los círculos menores y las rectas tangentes a la esfera. Es destacable que dos importantes teoremas se demuestran de manera distinta a como lo hace Rodríguez: el teorema del artículo 100: "*En todo triángulo formado sobre la superficie de la esfera con tres arcos de círculo máximo, la suma de dos lados es mayor que el tercero*" [CISCAR, 1796, pp. 23-24] y el teorema del artículo 102: *"La menor distancia de un punto á otro contada sobre la superficie de la esfera, es el arco de circulo máximo menor que el semicírculo"* [CISCAR, 1796, p. 24], correspondientes a los artículos 43 y 33 respectivamente en Rodríguez.

En el tercer capítulo, *Del valor de lados y ángulos de los triángulos esféricos y de su Igualdad*, da en el artículo 108 una definición análoga de triángulo esférico, pero cambia el orden de presentación de las propiedades, dando unos criterios de igualdad de triángulos en los artículos del 123 al 126 que no aparecen en Rodríguez. Seguidamente, presenta los artículos 111 y 118 con demostraciones diferentes a los artículos 44 y 35 de Rodríguez, para posteriormente tratar el teorema del artículo 128, sobre triángulos isósceles, de manera similar a como lo hace Rodríguez en su obra en el artículo 48.

En el siguiente capítulo, *De la relación que hay entre las especies de los lados y ángulos de los triángulos esféricos*, demuestra varios teoremas, artículos 139, 140 y 142, de forma diferente a como lo hace Rodríguez en los artículos 61, 62 y 60. Posteriormente trata el teorema del artículo 146 de forma similar a Rodríguez en el artículo 50. Finaliza este apartado presentando una Tabla con las combinaciones de las especies de los lados y los ángulos de triángulos esféricos oblicuángulos en el artículo 167 y diversos corolarios y escolios, todo ello ausente en la obra de Rodríguez.

Al tratar el capítulo *De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esféricos rectángulos*, Ciscar hace una demostración del teorema del artículo 174: *"En qualquier triángulo* *esférico rectángulo, el radio es al seno de uno de los ángulos oblicuos, como el seno de la hipotenusa al seno del cateto opuesto á dicho ángulo"* [CISCAR, 1796, p. 48], diferente a como la realiza Rodríguez en su artículo 68; por otra parte, se encuentra una similitud entre el teorema del artículo 176 *"En todo triángulo esférico rectángulo, el radio es á la tangente de uno de los ángulos oblicuos, como el seno del cateto adyacente, á la tangente del cateto opuesto á dicho ángulo"* [CISCAR, 1796, p. 60] y el correspondiente en la obra de Rodríguez, número 69. También es reseñable que Ciscar presenta más tarde que Rodríguez los triángulos complementarios.

En el siguiente capítulo, *Resolución de triángulos esféricos rectángulos*, presenta una regla general y un resumen con los seis casos, aunque a diferencia de Rodríguez, no explica las relaciones de los artículos 70, 71 y 72.

En el capítulo *De la resolución de los triángulos quadrantales*, trabaja de forma similar a Rodríguez, pero aparece en otro orden del libro, ya que en la obra de Rodríguez es el último apartado.

Posteriormente, en el capítulo *De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos*, Ciscar realiza demostraciones usando el método del *Perpendículo*. Las demostración de un teorema tan importante como el teorema del Seno, en el artículo 197, lo realiza utilizando el perpendículo de forma similar a como lo hace Rodríguez. Posteriormente encontramos dos artículos, el 197 y 198, con demostraciones diferentes a las de Rodríguez en los artículos 74 y 76. Ciscar también da tres relaciones más y la Función del ángulo mitad para el seno, propiedades que no aparecen en la obra de Rodríguez. Finaliza el apartado con un escolio como resumen de todos los casos en el apartado 209.

Seguidamente, en el capítulo *Aplicaciones*, explica los seis casos de resolución de triángulos oblicuángulos utilizando el *Perpendículo*, método que como ya hemos comentado usa Rodríguez en algunas demostraciones.

En el resto de la obra, Ciscar trata algunos asuntos que no aparecen en la obra de Rodríguez, dado el carácter elemental y práctico que tiene los *Elements*. Entre estos contenidos, están las aplicaciones de la Trigonometría Esférica a la Rectilínea, el tratamiento de errores al resolver triángulos esféricos y los triángulos diferenciales.

La siguiente obra, *Curso de estudios elementales de Marina, Tomo III Cosmografía*, también pertenece a Gabriel Ciscar y Ciscar. Ya se comentó que sólo trece páginas tratan sobre Trigonometría Esférica en los capítulos I y II y cinco páginas en un *Apéndice* en que se demuestran algunas de las proposiciones de Trigonometría Esférica anunciadas en el capítulo II.

En el capítulo I, *Nociones generales*, se encuentra la definición de Circulo Máximo y se dan varias propiedades sobre Polos en los artículos 47 y 48, utilizando en las demostraciones propiedades del Tomo II de Geometría del propio *Curso de estudios elementales de Marina*, mientras que en la obra de Rodríguez se ven estas propiedades en los artículos del 16 al 24 de forma diferente. Continúa con una definición de Ángulo Esférico igual a la que presenta Rodríguez y en el artículo 49 da una demostración similar a la del artículo 27 de Rodríguez. Ambas obras siguen el mimo orden de los corolarios del artículo 54 de Ciscar (artículos 30, 31, y 32 en Rodríguez) y dan una definición igual de Distancia Angular. Posteriormente, en la obra de Ciscar se habla de Círculos Correspondientes en el artículo 60, pero éstos no aparecen en la obra de Rodríguez. Concluye el capítulo con propiedades de Polos y Distancias, como las del artículo 70, cuya 1ª propiedad es similar a la del artículo 19 de Rodríguez.

En el segundo capítulo, *Nociones de trigonometría esférica*, presenta unas definiciones similares a las de Rodríguez sobre triángulo esférico y Trigonometría Esférica. Continúa con el artículo 75, *"Dos arcos de círculo máximo que salen de un punto a se vuelven á encontrar en un punto e distante 180º de a. Por esta razon, en la Trigonometría esférica no se trata de los triángulos que tienen un lado de mas de 180°."* [CISCAR, 1811, III, p. 13], similar al artículo 39 de Rodríguez. Sin embargo, importantes teoremas como los de los artículos 80, 85 y 87 se demuestran de forma diferente y en otro orden a los que podemos encontrar en los artículos de Rodríguez 43, 33 y 35 respectivamente. Por otra parte, hay bastantes similitudes en varios corolarios y teoremas, como los de los artículos 88, 89, 90, 91 y 92 con respecto a los artículos 36, 44, 45, 46 y 47 de los *Elements*.

Ciscar sigue un orden diferente al de Rodríguez al tratar los teoremas para la resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos, dando algunos de estos teoremas como proposiciones menores. De estos teoremas, da algunas demostraciones en el apéndice final, diferentes a las de Rodríguez: 95 (demostrado en 740), 97, 98 (demostrado en 741), 101 (demostrado en 742), 109 y 110 (demostrado en 744), respectivamente 74, 68, 69, 71, 70 y 77 en Rodríguez.

Concluye la parte de Trigonometría Esférica con el *Apéndice. En que se demuestran las proposiciones de Trigonometría esférica anunciadas en el Capítulo II*, donde además de lo ya enunciado ofrece tres importantes teoremas en diferente orden al seguido por Rodríguez y con demostraciones distintas; estos teoremas son los artículos 746, 747 y 750 de Ciscar y 61, 62 y 60 de Rodríguez.

La tercera obra, *An introduction to the theory and practice of Plane and Spherical Trigonometry, and the Stereographic Projection of the sphere; including the theory of Navigation*, pertenece a Thomas Keith.

El autor trata la Trigonometría Esférica en el Libro 3º. En el primer capítulo del Book III, *Definitions, &c. of Spherical Angles, Arcs, and Triangles*, Keith comienza en el artículo A de la p.133 con la definición de Trigonometría Esférica, de manera diferente a la de Rodríguez en el artículo 38 y en otro orden; seguidamente, en el artículo B de la p.133 da las definiciones de Esfera y Círculo máximo, de forma similar a Rodríguez en los artículos 1 y 6. También son diferentes las definiciones de triángulo Esférico en el artículo E de la p.133 y de Polo en el I de la p.134 con respecto a los artículos 37 y 16 en Rodríguez. Los corolarios sobre Polos en los artículos H e I de p. 134 están sin demostrar, al igual que sus equivalentes 19 y 22 en Rodríguez. Es interesante la diferencia de nomenclatura para denominar a los ángulos de la misma especie, pues mientras Keith los denomina en el artículo K de la p. 134 *same species*, *kind*, or *affection*, Rodríguez en el artículo 41 usa *sides alike* or *same kind*. Seguidamente, encontramos tres propiedades demostradas por Keith en los artículos M de la p. 134, N y P de la p. 135 que no lo están en Rodríguez en los artículos 31, 32 y 29. Hallamos varios teoremas demostrados de forma distinta por los autores (se indica primero el artículo en la obra de Keith y seguidamente en la obra de Rodríguez): artículo T de la p.137 y Thm. 50, Y de la p. 138 y Thm. 43, Z de la p.138 y Thm. 44, F e I de la p.142 que dividen al Thm. 48, P de la p. 145 y Thm. 61, Q de la p. 145 y Thm. 62, R de la p. 145 y Cor. 66, U de la p. 145 y Thm. 50.

Por otra parte, se encuentran propiedades similares en los siguientes artículos: S de la p.136 y Thm. 50, L de la p. 143 y Thm. 49 aunque con otra notación, y L de la p. 151 y Thm. 57. Encontramos dos corolarios que están sin demostrar en ambas obras: artículo S y T de la p. 145 en Keith y Corolarios 65 y 63 en Rodríguez. Para concluir el análisis de este capítulo, encontramos numerosas propiedades que no están presentes en la obra de Rodríguez: artículo W de la p.137, X de la p.138, A de la p.139, K, M, N y O de la p. 143, W de la p.146, X, Y de la p.147, Z, A, B y C de la p.148; D, E, F de la p. 149, G, H, I y K de la p.150.

Respecto al segundo capítulo, *The Stereographic Projection of the Sphere*, no encontramos ninguno de estos contenidos en la obra de Rodríguez.

En el tercer capítulo, *Investigation of general rules for calculating the sides and angles of Rightangled Spherical Triangles, &c*, teoremas de la importancia del artículo H de la p.166 y K de la p.167 difieren en sus demostraciones con los de Rodríguez en los artículos 69 y 68. Además, se encuentran varias propiedades en la obra de Keith que no están presentes en Rodríguez: artículos L y M de la p.167, N de la p.168, O, P y Q de la p.169. Seguidamente, se encuentra una diferencia importante entre las dos obras: el uso por parte de Keith de las Reglas de Napier.

En el cuarto capítulo, *Investigation of general rules for solving the different cases of Oblique Spherical Triangles, by drawing a perpendicular from the vertical angle upon the base*, Keith usa el método del *Perpendículo* al igual que Rodríguez. Por otra parte, Keith demuestra el teorema del Seno en el artículo G de la p.176 de manera distinta a como lo hace Rodríguez en el artículo 76.

En el quinto capítulo, *Investigation of general rules for calculating, the sides and angles of Oblique-angled Spherical Triangles without a perpendicular*, Keith presenta las fórmulas para la resolución de triángulos esféricos oblicuángulos y de nuevo vemos que Rodríguez no usa estos contenidos, salvo la fórmula del ángulo mitad para el coseno, que Keith demuestra en el artículo G de la p.185 de manera distinta a como lo hace Rodríguez en el artículo 77. En el apartado tercero del capítulo, *General observations on the species and ambiguity of the different cases*, Keith trata los casos indeterminados de forma diferente a como lo hace Rodríguez en el apartado *Of indeterminate triangles*. Lo mismo podemos afirmar respecto al apartado cuarto, *Quadrantal, or rectilateral spherical triangles* y el apartado *Of cuadrantal triangles* de Rodríguez. En el apartado sexto, *General observations on the ambiguity of the different cases*, Keith presenta dos tablas, siendo la segunda igual a la Tabla 2d. del artículo 88 de Rodríguez, pero no aparece la Tabla 1st del artículo 87.

En los capítulos VI, VII, VIII y IX presenta reglas prácticas para la resolución de triángulos esféricos rectángulos, rectiláteros y oblicuángulos por diferentes métodos, junto con numerosos ejemplos; además de la aplicación de relaciones de los triángulos rectángulos y del método del

Perpendículo, utiliza la reglas de Napier y el uso de triángulos complementarios, concepto presentado por Rodríguez en el artículo 57 y utilizado en varias de sus demostraciones.

En el resto de capítulos, del X al XIV, no se encuentran contenidos que estén presentes en la obra de Rodríguez.

Tras comparar las tres obras con más detenimiento con respecto al texto de Rodríguez, procedemos a confrontar el orden de contenidos que presentan los diferentes autores. Se ha elaborado la Tabla 3.5.7, *Comparativa de capítulos con contenidos similares entre las obras de Rodríguez, Ciscar y Keith*, para tener una visión más general sobre el orden de los capítulos en cada una de las obras.

Rodríguez comienza con definiciones y propiedades en la esfera, pasando a definir y presentar propiedades de los triángulos esféricos. Seguidamente trata propiedades de los triángulos rectángulos y su resolución, y posteriormente estudia los triángulos oblicuángulos y su resolución. Una vez estudiados los triángulos esféricos, presenta varios ejemplos de resolución de triángulos y comenta brevemente los casos en los que se puede encontrar ambigüedad, usando dos tablas resumen para facilitar su manejo. Concluye la obra con una breve exposición de los triángulos cuadrantales y ejemplos de su resolución.

Ciscar, en su *Tratado*, presenta un orden similar al de Rodríguez, si bien trata en distinto orden los triángulos cuadrantales y va presentando los ejemplos a lo largo del estudio.
Por otro lado, Ciscar, en el *Curso*, comienza con nociones básicas de los triángulos esféricos y entremezcla el estudio de triángulos esféricos rectángulos y oblicuángulos, sin tratar los casos indeterminados ni presentar ejemplos.
Keith sigue una estructura similar a Rodríguez y al igual que él, presenta ejemplos una vez estudiados todos los tipos de triángulos.
De esta forma vemos que Rodríguez presenta los contenidos en un orden similar al que presentan Ciscar en su *Tratado* y Keith.

Para establecer los contenidos en los que Rodríguez coincide con estos autores, revisamos cada uno de los capítulos de la obra de Rodríguez para establecer las mayores influencias de otros

autores. Se ha realizado la Tabla 3.5.8, *Mayores influencias de otras obras, por capítulos, en la obra de Rodríguez*, para tener una apreciación más global sobre estas influencias.
En el primer capítulo, *Of Circles and Angles on the Sphere*, observamos que la mayoría de contenidos se encuentran tratados de forma similar en la obra de Keith y en menor medida en el *Curso* de Ciscar.

El segundo capítulo, *Of Spherical Triangles*, presenta una fuerte influencia por parte de las dos obras de Ciscar. Es destacable que algún artículo no es tratado por Ciscar ni Keith, pero sí lo es en varias obras norteamericanas como las de Keill, Simson, Playfair, Hutton y Webber.

El tercer capítulo, *Right-Angled Triangles*, ofrece similitudes con la obra de Keith, aunque cabe observar que muchos de los artículos también aparecen de forma diferente en las dos obras de Ciscar.
El cuarto capítulo, *Solution of Spherical Right-Angled Triangles*, tiene algunas coincidencias en las demostraciones de los artículos con el *Tratado* de Ciscar. Además, otros artículos son también tratados de forma diferente en el *Curso* de Ciscar.

El quinto capítulo, *Solution of Oblique-Angled Triangles*, ofrece similitudes con el *Tratado* de Ciscar, si bien se observan varias coincidencias con las obras de Keill, Simson y Playfair.

El sexto capítulo, *Examples of the solution of Spherical Triangles*, no es fácilmente comparable, aunque se observan similitudes con la obra de Keith.

El séptimo capítulo, *Of Indeterminate Triangles*, presenta unos contenidos muy resumidos en comparación con el resto de autores, si bien se encuentran similitudes con Keith y el *Tratado* de Ciscar. Por otra parte, autores como Fernández, Keill, Simson, Playfair, Lacroix y Hutton tratan estos contenidos de forma distinta.

El octavo y último apartado, *Of Quadrantal Triangles*, también es muy reducido y presenta un desarrollo similar al seguido por Ciscar en su *Tratado*.

Respecto a la metodología empleada por Rodríguez, al igual que la mayoría de autores, presenta una obra bien estructurada en la que va presentando conceptos y propiedades que demuestra a partir de anteriores relaciones. Es el método habitual entre las obras revisadas, por lo que no podemos determinar ninguna influencia particular de otro autor.

Por último, en cuanto al enfoque seguido por Rodríguez, su obra sigue un planteamiento geométrico en línea con el desarrollado por Ciscar en sus dos obras, mientras que difiere significativamente del enfoque algebraico realizado por Keith.

De esta forma constatamos que Rodríguez recibió una influencia de las dos obras de Ciscar y de la obra de Keith. A nuestro entender, el autor seleccionó de cada texto los contenidos que necesitaba para elaborar su obra y los complementó con los de otras obras norteamericanas de prestigio. Una vez seleccionados estos contenidos, los reelaboró dentro de un enfoque geométrico y los ordenó para confeccionar un prontuario que pudieran utilizar sus alumnos, estudiantes con bajo nivel matemático.

II.10.4. Resultados

Una vez revisadas en profundidad la obra de Rodríguez junto con las principales obras, tanto españolas como extranjeras, que pudieron influir directamente en la elaboración de su libro, podemos establecer las siguientes conclusiones:

- El libro de Rodríguez es una obra bien estructurada y completa desde el punto de vista deductivo, pues va presentando teoremas y corolarios en un orden correcto, para ir utilizándolos en demostraciones posteriores.
- El tratado no contiene un número excesivo de contenidos, en coherencia con el objetivo de tener un manual básico para Guardias Marinas que no disponen de mucho tiempo, y por lo general, tienen una formación básica en Matemáticas.
- La obra comienza presentando un amplio número de definiciones y propiedades sobre ángulos y triángulos esféricos, que permitan trabajar la Trigonometría Esférica a alumnos con una escasa formación matemática.
- El estudio de los triángulos esféricos rectángulos lo fundamenta en seis relaciones, que deduce a partir de la construcción de triángulos rectilíneos rectángulos.
- El estudio de los triángulos esféricos oblicuángulos lo fundamenta en el teorema del Seno y el método del *Perpendículo*, método que utiliza en alguna demostración aunque no lo hace en la resolución de triángulos oblicuángulos.
- Se echa en falta un estudio completo de todos los casos de resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos, tal y como aparecen en la mayoría de las obras comparadas.
- También se echan en falta más ejemplos y tablas resúmenes de los casos indeterminados.
- Rodríguez no hace ninguna referencia a otras fórmulas que relacionan los elementos de un triángulo esférico, como el teorema del Coseno para lados, el teorema de la Cotangente, las analogías de Gauss-Delambre o las analogías de Napier, por lo que la obra presenta un enfoque geométrico en cierto desuso frente al nuevo enfoque algebraico que está emergiendo en el primer tercio del siglo XIX.
- La comparativa de todas las obras revela que Ciscar y Keith pudieron influir en la elaboración de la obra de Rodríguez.
- El estudio pormenorizado de las dos obras de Ciscar y de la obra de Keith indica que estas obras muestran una influencia directa de contenidos en la obra de Rodríguez, si bien también se detectan algunas influencias de otras obras norteamericanas, especialmente por parte de Keill, Simson y Playfair.

- Podemos concluir que la obra de Rodríguez estuvo influenciada principalmente por Ciscar y Keith. A partir de sus obras, el autor realizó bajo un estilo personal, un destacable trabajo de selección y síntesis en forma de prontuario enfocado a sus alumnos, Guardias Marinas de los Estados Unidos, estudiantes con un reducido período para su formación y escasos conocimientos matemáticos.

En resumen, Rodríguez escribió una obra específicamente destinada a la instrucción de los oficiales más jóvenes de la Marina estadounidense, que disponían de poco tiempo para la formación teórica, lo que les impedía adquirir la base matemática necesaria para entender los grandes tratados trigonométricos de la época. Su obra reunió el conjunto de conocimientos trigonométricos necesarios para la práctica de la Astronomía Náutica, presentados de forma que pudieran ser estudiados por personas escasamente versadas en Matemáticas –esto es, Aritmética elemental, Geometría Plana, principios de Trigonometría Plana y rudimentos de Álgebra. Para ello, seleccionó contenidos procedentes de tratados ya publicados, que organizó conforme a su experiencia docente y unos objetivos de formación intensiva en Astronomía Náutica, lo que convierte la obra de Rodríguez en una valiosa fuente de información histórica sobre la formación matemática de la Marina.

CONCLUSIONES

En el transcurso del siglo XIX cabe distinguir tres periodos en cuanto a lo que a la enseñanza de las Matemáticas en la Armada Española se refiere.

En un primer periodo, correspondiente a la formación en las Academias de Guardias Marinas (1802-1824) y en el Colegio Real y Militar de Caballeros Guardias Marinas (1825-1828), la formación básica en Matemáticas sufre un retroceso respecto del nivel alcanzado en el último tercio del siglo XVIII, limitándose al estudio de la Aritmética, la Geometría elemental, la Trigonometría Rectilínea y algunas nociones sobre los círculos, líneas y puntos en la esfera.

El Plan de Estudios sigue el *Curso de Estudios Elementales de Marina*, obra que Ciscar adapta plenamente a las necesidades del momento en la Armada, de manera que los cadetes puedan asimilar todos los contenidos durante su formación. Mediante esta obra, Ciscar delimita claramente lo que un Guardia Marina debe o no debe conocer a lo largo de sus estudios.

En Aritmética y Geometría elemental se presentan unos conocimientos básicos bajo un enfoque eminentemente práctico, utilizando desarrollos sintéticos en el caso de la Geometría.

En Trigonometría Rectilínea se mantiene una concepción geométrica de las expresiones trigonométricas heredada de las líneas trigonométricas utilizadas en el siglo XVIII, mientras que en Trigonometría Esférica Ciscar presenta un reducido número de definiciones y propiedades básicas, apoyándose en figuras geométricas y triángulos rectilíneos, lo que supone un retroceso de contenidos respecto al siglo anterior.

En cuanto a la formación superior durante este periodo, las obras de La Caille y Bézout muestran concisamente los principales contenidos sobre el Cálculo diferencial e integral y tratan de forma reducida las Ecuaciones diferenciales. La Caille sigue un enfoque geométrico, mientras Bézout se apoya principalmente en herramientas algebraicas.

En el segundo periodo, correspondiente a la formación impartida en el Colegio Naval Militar (1844-1868), se produce un avance sustancial en la instrucción matemática bajo la influencia de Saturnino Montojo, figura clave durante esta etapa por su elaboración de tratados para la formación en el centro sobre Aritmética, Álgebra y Trigonometría.

En el Colegio aumentan tanto las asignaturas como el nivel de la formación matemática básica: se instruye a los Aspirantes en Aritmética, Álgebra, Geometría elemental, rudimentos de Geometría Analítica, Trigonometría Rectilínea y Trigonometría Esférica. En Aritmética Montojo realiza un tratamiento más amplio y algebraico que Ciscar, aunque con un manejo básico de los números irracionales y las aproximaciones numéricas.

El Álgebra elemental y superior aparecen por primera vez como materias propias de los estudios básicos en la obra de Montojo, siendo reseñable la introducción de Series.

En cuanto a la Trigonometría Rectilínea, se pasa de un enfoque puramente geométrico a otro algebraico y analítico. Desde una concepción geométrica de las expresiones trigonométricas heredada de las líneas trigonométricas, Montojo evoluciona hacia un enfoque algebraico-analítico basado en las funciones trigonométricas y construye las tablas trigonométricas logarítmicas mediante desarrollos en serie. Si bien la evolución es menos significativa en cuanto a métodos de resolución de triángulos rectilíneos, cabe destacar la incorporación del teorema del Coseno y de las fórmulas de Briggs como herramientas de resolución.

Los contenidos sobre Trigonometría Esférica evolucionan considerablemente durante este periodo de la mano de Montojo. El manejo de los triángulos esféricos, junto con sus propiedades básicas, pierde protagonismo, aumentando la importancia de la resolución de triángulos esféricos. El teorema del Seno y el método del *Perpendículo* dejan de ser los pilares del enfoque geométrico, que es sustituido por un nuevo enfoque algebraico basado en el teorema del Coseno para los lados. Montojo introduce también esta orientación algebraica en el estudio de los triángulos oblicuángulos, apoyándose en las analogías de Gauss-Delambre y de Neper. Incorpora además nuevos contenidos, entre los que destacan el cálculo de áreas de triángulos, las analogías diferenciales y diversas relaciones entre la Trigonometría Esférica y la Rectilínea, como el teorema de Legendre.

En cuanto a la formación superior, también se eleva el nivel en Matemáticas al incluirse en los *Cursos de Estudios Sublimes* el Cálculo diferencial e integral, la Geometría Analítica, la Geodesia y la Geometría Descriptiva.

En el tercer periodo, correspondiente a la formación impartida en la Escuela Naval Flotante (1869-1909), se produce un incremento del nivel matemático exigido a los Aspirantes a Guardias Marinas.

En las pruebas de ingreso destacan la cantidad y calidad de los contenidos matemáticos que se exigen en Aritmética, Álgebra, Geometría elemental, Geometría Descriptiva, Geometría Analítica, Trigonometría y Cálculo diferencial e integral. Entre los autores de obras utilizadas para la preparación de las pruebas de ingreso destaca Juan Cortázar, tanto por la variedad de materias que trata como por el nivel de los contenidos presentados. Muchos de ellos, anteriormente contemplados en la formación de las Academias y Colegios precedentes, pasan a ser requisito de acceso a la Escuela Naval Flotante.

Respecto a la formación ofrecida en la Escuela, las materias presentan un mayor nivel, en correspondencia con la acrecentada base matemática de acceso de los Aspirantes.

Las asignaturas impartidas son Análisis (Cálculo diferencial e integral, junto con nociones básicas de Ecuaciones diferenciales y Series), Complemento de Álgebra, Trigonometría Rectilínea, Trigonometría Esférica, Geometría Descriptiva y Geometría Analítica.

Se eliminan pues la Aritmética, el Álgebra elemental y la Geometría elemental, cuya evolución se sigue en las obras preparatorias. Así, en Aritmética Cortázar muestra un enfoque algebraico, similar al de Montojo, en el que profundizan a finales de siglo las obras de Terry y Rivas, Serret y Salinas y Benítez, especialmente en cuanto al estudio de la divisibilidad, los logaritmos y las aproximaciones numéricas.

Por otra parte, el Álgebra elemental se va entrelazando con contenidos propios del Álgebra superior en las pruebas de ingreso. No obstante, los contenidos no son introducidos de forma gradual durante el último tercio del siglo, sino que varían de un curso a otro, lo que muestra la ausencia de criterios fijos sobre los conocimientos de Álgebra superior necesarios para la formación de los Guardias Marinas; es destacable el tratamiento de los Determinantes por parte de Salinas y Benítez para los exámenes de ingreso de 1900.

En cuanto a la Geometría elemental, Cortázar y Terry y Rivas ofrecen un tratamiento más teórico y profundo que Ciscar, que se acentúa a finales de siglo en las obras de Rouché y Comberousse y Ortega y Sala.

La Geometría Descriptiva pasa a integrarse por primera vez en la formación de los Guardias Marinas en la Escuela Naval Flotante, especialmente en las pruebas de ingreso, aumentando a lo largo del periodo los elementos tratados y la profundidad con que son estudiados. En los primeros años de la Escuela, un capítulo de la obra de Bielsa y Ciprián o el texto de Ibáñez y Valera cubren todos los contenidos necesarios para la prueba de acceso, que aumentan significativamente con el texto de García Villar.

También la Geometría Analítica es tratada por primera vez de forma independiente en la Escuela, tanto en las pruebas de ingreso como en su formación, ampliándose paulatinamente los contenidos a lo largo del último tercio del siglo mediante un enfoque cada vez más algebraico. En los primeros años la obra preparatoria de Meunier-Joannet presenta unos contenidos básicos sobre Geometría Analítica en dos dimensiones. Posteriormente, las obras de Merás y Uría y Salmon, también preparatorias, aumentan de forma considerable los contenidos; el primero estudia principalmente el plano bajo un enfoque geométrico y el segundo el espacio basándose plenamente en el Álgebra. Más tarde, la obra de De María, de uso en la formación de la Escuela, supone un aumento considerable de contenidos respecto a las anteriores obras, especialmente en dos dimensiones, bajo un planteamiento algebraico.

El Cálculo diferencial e integral presenta un enfoque plenamente analítico en las obras de Meunier-Joannet y Miranda; ambos textos, adaptados para la enseñanza en escuelas navales, recogen la mayoría de los contenidos del Cálculo diferencial e integral, junto con conceptos básicos de Series y Ecuaciones diferenciales; el texto de Miranda tiene un mayor equilibrio en el tratamiento de los contenidos.

En Trigonometría Rectilínea se sigue un enfoque algebraico-analítico basado en las funciones trigonométricas, aunque no todos los autores dejan atrás las líneas trigonométricas, coexistiendo ambos enfoques durante la parte final del siglo. En la elaboración y uso de las tablas trigonométricas logarítmicas del Seno, Tangente y Secante hay un retroceso respecto a la obra de Montojo por parte de algunos autores que, como Cortázar y Barreda y García, estudian los desarrollos en serie aunque sin aplicarlos directamente a la construcción de las tablas. Por otra parte, el manejo por parte de Cortázar del teorema del Coseno –que aparece en la obra de Cortázar antes que en la de Montojo–y las fórmulas de Briggs facilitan los procesos de resolución de triángulos rectilíneos, sin que esto suponga un cambio metodológico; simplemente cada autor aporta su toque personal a la hora de clasificar y resolver los distintos casos.

La Trigonometría Esférica continúa con el enfoque algebraico seguido por Montojo y Cortázar en el estudio de los triángulos oblicuángulos. Adicionalmente, van adquiriendo importancia otros contenidos, como el cálculo de áreas de triángulos y las relaciones entre la Trigonometría Esférica y la Rectilínea.

Por otra parte, y dada la singularidad del autor, se ha revisado la vida y obra de Pedro José Rodríguez, mahonés que ejerció como Professor of Mathematics and Navigation of Midshipmen of the U.S. Navy Yard, Gosport, en el estado norteamericano de Virginia, desde 1827 hasta su fallecimiento en 1838.

Su obra más importante, *Elements of spherical trigonometry, designed as an introduction to the study of nautical astronomy*, reunió el conjunto de conocimientos trigonométricos necesarios para la práctica de la Astronomía náutica, presentados de forma que pudieran ser estudiados por personas escasamente versadas en Matemáticas –esto es, Aritmética elemental, Geometría Plana, principios de Trigonometría Plana y rudimentos de Álgebra. La obra, influenciada principalmente por Ciscar y Keith, incorpora también elementos procedentes de Keill, Simson y Playfair.

A partir de estos autores, Rodríguez realizó, con un estilo personal, un destacable trabajo de selección y síntesis en forma de prontuario destinado a la formación introductoria básica de los niveles inferiores de acceso a la Marina estadounidense.

335

BIBLIOGRAFÍA

ANÓNIMO (1830) “Elements of Spherical Trigonometry; designed as a n Introduction to the Study of Nautical Astronomy; by J. P. Rodriguez, U. S. Navy Yard, Gosport. 8vo. Pp. 24”. *The American journal of science and arts*, *XVIII*, 415.

ANÓNIMO (1835) “The Board, which has been…”. *Army and navy chronicle, and Scientific repository*, *I*, 108.

ANÓNIMO (1836) “The Board which assembled…”. *Army and navy chronicle, and Scientific repository*, *II*, 360.

ANÓNIMO (1837) “The Board for the examination…”. *Army and navy chronicle, and Scientific repository*, *IV*, 248.

ANÓNIMO (1838) “Deaths”. *Army and navy chronicle, and Scientific repository*, *VII*, 272.

ANÓNIMO (1900) “El ingreso en la Escuela Naval”. *Mundo Naval Ilustrado*, *69* (28), 79-80.

ANÓNIMO (1902) “La Escuela Naval”. *La Vida Marítima*, *3*, 13-16.

ALFONSI, L. (2010) “L’enseignement scientifique et technique au XVIII siècle dans les écoles des Gardes de la Marine : le rôle essentiel d’Étienne Bézout (1730–1783)”. En: *Espaces de l'enseignement scientifique et technique : Acteurs, savoirs, institutions, XVIIe-XXe siècles - IIIe Congrès de la SFHST (Société française d'histoire des sciences et des techniques) du 4 au 6 septembre 2008 à Paris, Session " Histoire des sciences et des techniques et enseignement : les acteurs"*. París, 12 pp.

ARIAS, N. (1846) *Tablas de logaritmos: Por M. J. De Lalande, continuadas hasta siete cifras decimales por M. Marie, y precedidas de una instruccion para conocer los límites de los errores que pueden resultar del uso de los logaritmos de los números y líneas trigonométricas y medios de remediarlos, por el Baron Reynaud, examinador en las escuelas politécnica, de marina y otras. Traducidas libremente de la quinta edición francesa*. Madrid, Imprenta de Alhambra y Compañía.

ARROYO, R. (1994) “Las enseñanzas de náutica en el siglo XVIII”. *Revista de Historia Naval*, *46*, 7-30.

AUSEJO, E. & MEDRANO, J. (2012) “El Cálculo Infinitesimal en Gabriel Ciscar (1760-1829)”. *Llull*, *35*(76), 305-315.

AZCÁRATE, T. de (1897) “Academia de Ampliación de San Fernando”. *El Mundo Naval Ilustrado*, *7* (7), 160-162.

BARREDA, J. A. & GARCÍA M. (1917) *Trigonometría elemental: obra declarada de texto para el ingreso en la Escuela Naval*. San Fernando, Iris.

BÉZOUT, E. (1770) *Cours de Mathématiques a l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine, Quatrieme partie, contenant les Principes généraux de la MÉCHANIQUE, precedes del*

Principes du Calcul qui fervent d'introduction aux Sciences Phyfico-Mathématiques. París, J. B. G. Musier fils.

BÉZOUT, E. (1771) *Cours de Mathématiques a l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine, Seconde partie, contenant le élemens de Géométrie, la Trigonométrie Rectiligne & la Trigonométrie Fphérique.* París, D. Mussieer fils.

BIELSA Y CIPRIÁN, J. (1857*) Tratado de geometría descriptiva, sombras, topográfico y sistema de acotaciones*. 2ª edición. Segovia, Imprenta de los sobrinos de Espinosa.

BLANCA, J. M. (1979) "Cuerpo de Pilotos de la Armada". *Revista General de Marina*, *197*, 165-173.

BLANCA, J. M. (1991) "La Escuela Naval Militar. Su origen histórico". *Revista de Historia Naval*, *32*, 11-43.

BLANCA, J. M. (1993) "Los colegios de Pilotos, la Academia de Guardias Marinas y otros centros docentes de la Armada". *Revista de Historia Naval*, *40*, 41-57.

BLANCO, J. M. & FERNANDEZ, P. (2008) *La Escuela Naval Flotante. Ferrol 1781/1912*. Ministerio de Defensa, Centro de Ayudas a la Enseñanza de la Armada española.

BOVER DE ROSELLÓ, J. M. (1842) *Memoria biográfica de los mallorquines que se han distinguido en la antigua y moderna literatura*. Palma de Mallorca, Imprenta Nacional a cargo de Don Juan Guasp y Pascual.

BOVER DE ROSELLÓ, J.M. (1868) *Biblioteca de escritores Baleares, Volumen 2*. Palma de Mallorca, Imprenta P.J. Gelabert.

BRIOT, C. (1880) *Lecciones de álgebra elemental y superior / de Ch. Briot ; traducidas, ampliadas y completadas con numerosas notas y extensos apéndices por C. Sebastian y B. Portuondo*. Madrid, Imprenta de la viuda é hijos de D. E. Aguado.

BRUMMELEN, G. V. (2013) *Heavenly Mathematics. The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*. Princeton and Oxford, Princeton University Press.

BURT, H. (1899) "Escuela Naval flotante descrita por "The Navy and Army"". *Mundo Naval Ilustrado*, *48*, 145-146.

BURR, H. L. (1939) *Education in the early Navy*. Philadelphia, Temple University.

CAGNOLI, A. (1804) *Trigonometria piana esferica*. 2ª edición. Bolgonia, Per i fratelli Masi e comp.

CALLET, F. (1863) *Tables de logarithmes: contenant les logarithmes des nombres, de 1 à 108,000; les logarithmes des sinus et tangents, de seconde en seconde pour les cinq premiers degrès, et de dix en dix secondes pour tous les degrès du quart de cercle*. París, Firmin Didot Fréres, Imprimeurs de l'Institut, de la Marine, Libraires pour les Mathématique, etc.

CASTILLO Y CASTRO, M. (1834) *Sumario de Trigonometría Esférica para uso de los principiantes en la carrera de la navegación.* Madrid, Miguel de Burgos.

CEDILLO, P. M. (1718) *Trigonometría aplicada á la navegación, así por el beneficio de las tablas de los senos y tangentes logarítmicas, como por el uso de las dos escalas plana y artificial.* Sevilla, Lucas Martín Hermosilla.

CISCAR, G. (1795) *Tratado de Aritmética: para la instrucción de los guardias marinas.* Murcia. Por D. Manuel Muniz, Impresor de Marina.

CISCAR, G. (1796) *Tratado de Trigonometría Esférica para la instrucción de los Guardias Marinas.* Cartagena, En la Oficina de Marina de este Departamento.

CISCAR, G. (1803a) *Curso de estudios elementales de Marina Tomo I Aritmética y Tomo II Geometría.* Madrid, Imprenta Real.

CISCAR, G. (1803b) *Explicación de varios métodos gráficos, para corregir las distancias lunares: con la aproximación necesaria para determinar las longitudes en la mar, y para resolver otros problemas interesantes de la astronomía náutica.* Madrid, Imprenta Real.

CISCAR, G. (1811) *Curso de estudios elementales de Marina Tomo III Cosmografía.* Palma, Imprenta Real.

CISCAR, G. (1817) *Curso de estudios elementales de Marina Tomo III Cosmografía.* 2ª edición. Madrid, Imprenta Real.

CORTÁZAR, J. (1857) *Tratado de Álgebra elemental*. 8ª edición. Madrid, G. Alhambra.

CORTÁZAR, J. (1859) *Tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica, y de Topografía*. 6ª edición. Madrid, M. F. Sánchez.

CORTÁZAR, J. (1860) *Tratado de Aritmética.* 12ª edición. Madrid, M. F. Sánchez.

CORTÁZAR, J. (1864) *Tratado de Geometría Elemental.* 12ª edición. Madrid, Imprenta de A. Peñuelas.

CORTÁZAR, J. (1865) *Tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica, y de Topografía*. 10ª edición. Madrid, A. Peñuelas.

EUCLIDES (1774) *Los seis primeros libros y el undecimo, y duodecimo de los elementos de Euclides: traducidos de nuevo sobre la version latina de Federico Comandino conforme a la fiel, y correctisima edicion de ella*. Madrid, Joachin Ibarra.

FERNÁNDEZ, A. G. (1735) *Compendio de la Geometría elementar, Aritmética inferior, y Trigonometría plana, y espherica*. Sevilla, Imprenta de las Siete Revueltas.

FERNÁNDEZ, A. G. (1784) *Trigonometría Esférica, que dispuso Don Antonio Gabriel Fernández, Maestro de Matemáticas que fue de la Real Academia de Guardias Marinas de*

Cádiz, y se reimprime para uso de la Compañía de Guardias Marinas de Cartagena. Murcia, Imprenta de la Viuda de Felipe Teruel.

FERNÁNDEZ GAYTÁN, J. (1997) "La enseñanza naval en España (siglos XVIII y XIX)". *Revista General de Marina*, *233*, 191-207.

FLAQUER, J. (1957) *D. Pedro J. Rodríguez y Riola*. Monografías Menorquinas, 26. Ciudadela (Isla de Menorca), Allés Quintana.

GARCÍA VILLAR, M. (1883) *Tratado elemental de Geometría Descriptiva escrito por encargo de la Junta Facultativa de la Escuela Naval para servir en ella de texto*. Madrid, Establecimiento Tipográfico de los sucesores de Rivadeneyra, Imprenta de la Real Casa.

GIL, I. (2013) "Origen y desarrollo de los Estudios Mayores o Sublimes de Matemáticas en la Real Armada de la ilustración". *Revista de Historia Naval*, *122*, 31-58.

GODÍN, L. (1758) *Compendio de matematicas para el uso de los cavalleros guardias-marinas*. Cádiz, En la Imprenta de la misma Academia.

GONZÁLEZ GONZÁLEZ, F. J. (1992) *Astronomía y Navegación en España. Siglos XVI-XVIII*. "Colecciones Mapfre", 1492. Madrid, Editorial Mapfre.

GUILLÉN, J. (1918a) "La enseñanza naval militar en España", Parte 1ª. *Revista General de Marina*, *83*, 605-627.

GUILLÉN, J. (1918b) "La enseñanza naval militar en España", Parte 3ª. *Revista General de Marina*, *84*, 179-196.

GUILLÉN, J. (1919) "La enseñanza naval militar en España", Parte 2ª. *Revista General de Marina*, *83*, 49-64.

HERVÁS, R. M. (1995) "La formación académica en la Armada: Guardiasmarinas americanos en Cartagena, 1777-1824". *Revista de Historia Naval*, *49*, 105-112.

HORMIGÓN, M. (1995) *Paradigmas y Matemáticas: Un Modelo Teórico para la Investigación en Historia de las Matemáticas*. "Cuadernos de Historia de la Ciencia", 8. SEHCTAR, Universidad de Zaragoza.

HUTTON, C. (1822) *A course of Mathematics, for the use of academies, as well as private tuition*. 3ª edición Americana. New York, S. Campbell.

IBÁÑEZ FERNÁNDEZ, M. M. (2000) *La difusión de conocimientos náuticos en la España decimonónica: la Navegación Astronómica en los textos de Náutica españoles del siglo XIX*. Tesis doctoral. Universidad del País Vasco.

IBÁÑEZ Y VALERA, J. (1877) *Teoría de rectas y planos de geometría descriptiva: redactada, con arreglo al programa de ingreso para la Escuela Naval Flotante y recomendada por su*

Reglamento de 10 de Enero de 1877 en el Pár. 4º, Art. 5º. Tit. II. 2ª edición. Manila, Imprenta de Ramirez y Giraudier.

IGLESIAS, A. (2000) *Estudio comparativo desde el punto de vista matemático de textos náuticos españoles del siglo XVIII*. Tesis doctoral. Universidad del País Vasco.

JONES, D. (1899) "Los aspirantes de Marina españoles". *Revista General de Marina*, *44*, 680-686.

JUAN, J. (1793) *Examen marítimo teórico prático, ó Tratado de mecánica aplicado á la construcción, conocimiento y manejo de los navíos y demas embarcaciones, por don Jorge Juan, Edición segunda aumentada con una exposición de los principios del cálculo, notas al texto y adiciones, por don Gabriel Ciscar*. Madrid, Imprenta Real.

KARPINSKI, L. C. (1940) *Bibliography of mathematical works printed in America through 1850*. Ann Arbor, The University of Michigan Press

KEILL, J. (1726) *The Elements of Plain and Spherical Trigonometry. Also a short treatise of the nature and arithmetick of logarithms*. Dublin, Printed by W. Wilmot on the Blind-Kev.

KEITH, T. (1826) *An introduction to the theory and practice of Plane and Spherical Trigonometry, and the Stereographic Projection of the sphere; including the theory of Navigation.* 5ª edición. London, Longman, Rees, Orme, Brown, and Green, Paternoster-Row.

LA CAILLE, N. L. (1784) *Leçons élémentaires de mathématiques*. París, Chez la Veuve Desaint.

LACROIX, S. F. (1802) *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral: précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées*. Paris, Chez Duprat.

LACROIX, S. F. (1803) *Traite Élementaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, Et d'appliation de l'Algébre a la Géometrie*. 3ª édition, Paris, Chez Courcier.

LACROIX, S. F. (1820) *Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica y de la aplicación del álgebra a la geometría, Volumen 4*. 6ª edición, Madrid, Imprenta Real.

LAFUENTE, A. & SELLÉS, M. A. (1986) "El proceso de institucionalización de la Academia de Guardiamarinas de Cádiz. (1717-1748)". En: J. Echevarría y M. de Mora (coords.) *Actas del III Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias: San Sebastián, 1 al 6 de octubre de 1984*. San Sebastián, Editorial Guipuzcoana, Vol. 2, 153-175.

LAFUENTE, A. & SELLÉS, M. A. (1988) *El Observatorio de Cádiz (1753-1831).* Madrid, Ministerio de Defensa-Instituto de Historia y Cultura Naval.

LAFUENTE, A. & SELLÉS, M. A. (1989) "Sabios para la Armada: El curso de estudios mayores de Marina en la España del s. XVIII". En: J. L. Peset. *Ciencia, vida y espacio en Iberoamérica*, 3. Madrid, CSIC, 485-504.

LEE, P. (1828) "Article XXII. Question IX. (184), Third Solution". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(11), 120.

LISTA Y ARAGÓN, A. (1823) *Elementos de Trigonometría esférica y Geografía astronómica: para el uso de la casa de educación sita en la calle de San Mateo de esta corte.* Madrid, Imprenta de Don León Amarita.

LLABRÉS, J. (1953) "La Escuela Naval Flotante en 1882". *Revista General de Marina*, *144*, 81-89.

LLABRÉS, J. (1959) *Aportación de los españoles al conocimiento de la ciencia náutica, 1801-1950: ensayo bibliográfico.* Palma de Mallorca, Lulio.

LÓPEZ SÁNCHEZ, J. F. (1994) *Astronomía, Náutica y Metrología en la España Ilustrada: la obra de Gabriel Ciscar (1760-1829).* Tesis doctoral. Universidad de Murcia.

LÓPEZ SÁNCHEZ, J. F. & VALERA CANDEL, M. & LÓPEZ FERNÁNDEZ, C. (1995) "La Academia de Guardias Marinas de Cartagena (1776-1824)". *Antilia. Revista Española de Historia de las Ciencias de la Naturaleza y de la Tecnología*, *I*, *Artículo nº 3*. DL: M-34954-1995, ISSN: 1136-2049 [Consultado 7-1-2005].

MARÍA, J. L. de (1900) *Lecciones elementales de Geometría Analítica redactadas con arreglo al programa vigente en la Escuela Naval*. Ferrol, Imprenta y librería de hijos de R. Pita.

MARTÍNEZ GARCÍA, M. A. (2004) *Las matemáticas en la ingeniería: las matemáticas en los planes de estudio de los ingenieros civiles en España en el siglo XIX*. SEHCTAR, Universidad de Zaragoza.

The mathematical diary: containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents, 2 (1828). New-York, published by James Ryan.

MENDOZA Y RÍOS, J. (1800) *Colección de tablas para varios usos de la Navegación y Astronomía Náutica*. Madrid, Imprenta Real.

MERÁS Y URÍA, J. (1879) *Lecciones de geometria analítica: redactadas para uso de los aspirantes á guardias-marinas*. Ferrol, Imprenta de El Correo Gallego.

MESSRS, E. & JONES, J. C. (1828) "Article XXII. Question X. (185), Second Solution". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(11), 121.

MEUNIER-JOANNET, P. J. (1858) *Cours élémentaire d'analyse :contenant un très grand nombre d'applications : à l'usage des élèves de l'Ecole Navale et des élèves de l'Ecole centrale des arts et manufactures*. París, Libraire de las Société de Géographie.

MINISTERIO DE MARINA (1825*) Reglamento provisional aprobado por el rey nuestro señor, para el establecimiento y gobierno del colegio real y militar de caballeros guardias marinas*. Madrid, Imprenta Real.

MINISTERIO DE MARINA (1848) *Reglamento del Colegio Naval Militar*. Madrid, Imprenta y Librería de D. Roman Matute.

MINISTERIO DE MARINA (1879) *Programa detallado de los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante*. Madrid, Imprenta de Pedro Abienzo.

MINISTERIO DE MARINA (1885) *Programa detallado de los exámenes para ingreso en la Escuela Naval Flotante*. Madrid, Imprenta de Infantería de Marina.

MINISTERIO DE MARINA (1894a) "Programa detallado de los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante", Parte 1 de 4. Boletín Oficial de la Provincia de Madrid, *252* (20 de octubre), 1-3.

MINISTERIO DE MARINA (1894b) "Programa detallado de los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante", Parte 2 de 4. Boletín Oficial de la Provincia de Madrid, *253* (22 de octubre), 1-2.

MINISTERIO DE MARINA (1894c) "Programa detallado de los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante", Parte 3 de 4. Boletín Oficial de la Provincia de Madrid, *254* (23 de octubre), 1.

MINISTERIO DE MARINA (1894d) "Programa detallado de los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante", Parte 4 de 4. Boletín Oficial de la Provincia de Madrid, *255* (24 de octubre), 1-3.

MINISTERIO DE MARINA (1897) *Programa detallado de los exámenes para ingreso en la Escuela Naval Flotante*. Madrid, Imprenta del Asilo de huérfanos del S. C. de Jesús.

MIRANDA, A. (1884) *Lecciones de cálculo infinitesimal*. Ferrol, Establecimiento tipográfico de R. Pita.

MONTANER, J. (1898) *Álgebra: escrita con sujeción al programa vigente para los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante*. Madrid, Imprenta de L. Aguado.

MONTOJO, S. (1849) *Tratado elemental de Aritmética redactado para el uso del Colegio Naval Militar en virtud de Real órden*. Cádiz, Imprenta, Librería y Litografía de la Revista Médica.

MONTOJO, S. (1850) *Tratado elemental de Álgebra redactado para el uso del Colegio Naval Militar en virtud de Real órden*. Cádiz, Imprenta, Librería y Litografía de la Revista Médica.

MONTOJO, S. (1865) *Tratado elemental de Trigonometría. Escrito de Real Órden para el uso de los aspirantes del Colegio Naval Militar*. Cádiz, Imprenta y Librería Española.

MOTILLA, X. (2005) "Els orígens de l'ensenyament secundari públic a Menorca: de l'Escola de Nàutica a l'Institut Lliure de Segon Ensenyament (1855-1869)". *Educació i Cultura*, *18*, 23-38.

OMNICRON, N. C. (1828) "Article XXII. Question XX. (195)". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(10), 135.

ORTEGA Y SALA, M. (1881) *Trigonometría*. Madrid, Imprenta del Memorial de Ingenieros.

ORTEGA Y SALA, M. (1885) *Geometría*. Guadalajara, Imprenta y encuadernación provincial.

PERAL, P. (1885) *Tratado de álgebra: escrito con arreglo al nuevo programa de ingreso en la Escuela Naval Flotante*. Sevilla, Est. Tipográfico y litográfico del Círculo Liberal.

PLAYFAIR, J. (1824) *Elements of Geometry: Containing the first six books of Euclid, with a supplement on the Quadrature of the circle, and the Geometry of Solids; to which are added Elements of Plane and Spherical Trigonometry*. New York, Duyckinck & Long.

RAMIS, J. (1819) *Historia civil y politica de Menorca: Que empieza en las tiempos mas antiguas, y acaba a principios de la era cristiana, Volumen 1*. Mahon, En la imprenta de Pedro Antonio Serra.

RODRÍGUEZ, P. J. (1828a) "Article XXI. Question XII. (165), Second Solution". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(X), 83.

RODRÍGUEZ, P. J. (1828b) "Article XXII. Question IX. (184) ". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(10), 104.

RODRÍGUEZ, P. J. (1828c) "Article XXII. Question X. (185) ". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(10), 104.

RODRÍGUEZ, P. J. (1828d) "Article XXII. Question XV. (190), First Solution ". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(10), 129.

RODRÍGUEZ, P. J. (1828e) "Article XXII. Question XX. (195), Third Solution ". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(10), 135.

RODRÍGUEZ, P. J. (1829a) "On the observations of Comets". *The American journal of science and arts*, *16*, 94-98.

RODRÍGUEZ, P. J. (ed). (1829b) *Elements of spherical trigonometry, designed as an introduction to the study of nautical astronomy*. 1ª edición, New York.

RODRÍGUEZ, P. J. (1830) *Tables for determining the Latitude at sea, by an altitude, The Polar Star. Observed at any distance from the meridian*. Norfolk, Published by C. Hall.

RODRÍGUEZ, P. J. (1836) "I have examined …". *Army and navy chronicle, and Scientific repository*, *II,* 281.

ROUCHÉ, E. & COMBEROUSSE, C. (1878) *Tratado de Geometría Elemental, traducido por A. Portuondo y J. Portuondo*. Traducción de la 3ª edición francesa. Madrid, Imprenta, Estereotipia y Galvanoplastia de Aribau y Cª. Impresores de Cámara de S. M.

SALINAS, I. & BENÍTEZ Y PARODI, M. (1898a) *Álgebra*. 3ª edición. Madrid, Librería de Hernando y Compª.

SALINAS, I. & BENÍTEZ Y PARODI, M. (1898b) *Aritmética*. 4ª edición. Madrid, Librería de Hernando y Compª.

SALINAS, I. & BENÍTEZ Y PARODI, M. (1939) *Álgebra*. 11ª edición. Madrid, Librería y Casa Editorial Victoriano Suárez.

SALMON, G. (1888*) Tratado de geometría analítica de tres dimensiones; traducido de la cuarta edicion inglesa por L. de la Fuente*. El Ferrol, Establecimiento tipográfico de Ricardo Pita.

SÁNCHEZ RECIENTE, J. (1742) *Tratado de trigonometria plana general: con la construccion, y uso de las tablas de los logarithmos, y del canon trigonometrico de senos, tangentes, y secantes logarithmicas*. Sevilla, Imprenta de los Recientes.

SÁNCHEZ CARRIÓN, J. M. (2009) "La división de la Compañía de Guardias Marinas de Cádiz y la creación de las Subalternas (Cartagena y Ferrol) en 1776". *Revista de Historia Naval*, *104*, 49-75.

SCHRÖN, L. (1880) *Tables de logarithmes à sept décimales pour les nombres depuis l jusqu'à 108'000 et pour les functions trigonométriques de dix en dix secondes*. Paris, Gauthier-Villars.

SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA (1799) *Estado general de la Armada. Año de 1799*. Madrid, Imprenta Real, por Don Pedro Pereyra, Impresor de Cámara de S. M.

SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA (1800) *Estado general de la Armada. Año de 1800*. Madrid, Imprenta Real, por Don Pedro Pereyra, Impresor de Cámara de S. M.

SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA (1808) *Estado general de la Armada. Año de 1808*. Madrid, Imprenta Real.

SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA (1815) *Estado general de la Armada. Año 1815*. Madrid, Imprenta Real.

SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA (1818) *Estado general de la Armada. Año de 1818*. Madrid, Imprenta Real.

SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA (1862) *Estado general de la Armada para el Año de 1863*. Madrid, Imprenta Nacional.

SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO UNIVERSAL DE MARINA (1863) *Estado general de la Armada para el Año de 1864*. Madrid, Imprenta Nacional.

SELLÉS, M. A. (1988a) "Astronomía y Navegación". En: M. Sellés y A. Lafuente (eds.) *Carlos III y la ciencia de la ilustración*. Madrid, Alianza Editorial, 81-98.

SELLÉS, M. A. (1988b) "La Academia y Observatorio de Marina". En: M. Sellés y A. Lafuente (eds.) *Carlos III y la ciencia de la ilustración*. Madrid, Alianza Editorial, 173-186.

SELLÉS, M. A. (1992) *Astronomía y navegación en el siglo XVIII*. Madrid, Akal.

SELLÉS, M. A. (2000) *Navegación astronómica en la España del s. XVIII*. Madrid, Universidad Nacional de Educación a Distancia.

SERRET, J. A. (1879) *Tratado Aritmética*. 6ª edición revisada por J.A. Serret y Ch. de Comberousse, traducida y aumentada por T. Monteverde, Comandante de R. M. Madrid, Imprenta y Litografía de La Guirnalda.

SHERRY, F. (1828) "Article XXII. Question IX. (184), First Solution". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(11), 119-120.

SIDELL, W. H. (1828) "Article XXI. Question XII. (165)". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(X), 82.

SIMSON, R. (1821) *The Elements of Euclid, viz. The first six books, together with the eleventh and twelfth. The errors, by which Theon, or others, have long ago vitiated these books, are corrected, and some of Euclid's demonstrations are restored. Also the book of Euclid's data, in like manner corrected. To this edition are also annexed, Elements of Plane and Spherical Trigonometry*. Philadelphia, R. Desilver & T. Desilver.

SWINBURNE, J. (1828) "Article XXII. Question X. (185), First Solution". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(11), 120-121.

TERRY Y RIVAS, A. (1879) *Problemas y ejercicios del cálculo algebraico: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*. Madrid, Imprenta de Pedro Abienzo, 2 vols.

TERRY Y RIVAS, A. (1880) *Ejercicios y problemas de Aritmética: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*. Madrid, Imprenta de Pedro Abienzo, 2 vols.

TERRY Y RIVAS, A. (1881a) *Ejercicios de Geometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*. 2ª edición, Madrid, Imprenta de Pedro Abienzo.

TERRY Y RIVAS, A. (1881b) *Ejercicios de Trigonometría: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*. Madrid, Imprenta de Pedro Abienzo.

TERRY Y RIVAS, A. (1885) *Ejercicios de algebra, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia*. Madrid, Imprenta de Viuda é hijos de Pedro Abienzo, 2 vols.

TOFIÑO, V. (1771) *Compendio de la geometría elemental y trigonometría rectilínea*. Isla de León, Imprenta de la Real Academia.

TOSCA, T.V. (1710) *Compendio Mathematico, en que se contienen todas las materias mas principales de las ciencias, que tratan la cantidad. Tomo III. Trigonometría, Secciones Cónicas, Maquinaria.* Valencia, Imprenta de Antonio Bodazar.

VAN SICKLE, J. (2011) *A History of Trigonometry Education in the United States: 1776-1900.* PhD Dissertation, Columbia University.

VALERA, M. (2006) *Proyección internacional de la Ciencia ilustrada española. Catálogo de la Producción Científica Española Publicada en el Extranjero, 1751-1830*. 1ª edición. Universidad de Murcia, Servicio de Publicaciones.

VEA, F. (1986) *Las matemáticas en los planes de estudios de enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*. SEHCTAR, Universidad de Zaragoza.

VEA, F. (1995) *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*. "Cuadernos de Historia de la Ciencia", 9. SEHCTAR, Universidad de Zaragoza.

VELAMAZÁN, M. A. & AUSEJO, E. (1989) "Los planes de estudio en la Academia de Ingenieros del Ejército de España en el siglo XIX". *Llull*, *12*, 415-453.

VELAMAZÁN, M. A. (1994) *La enseñanza de las Matemáticas en las Academias Militares en España en el siglo XIX*. "Cuadernos de Historia de la Ciencia", 7. SEHCTAR, Universidad de Zaragoza.

VERNET, J. (1975) *Historia de la ciencia española.* Madrid, Instituto de España, Cátedra de "Alfonso X el Sabio".

WEBBER, S. (1808) *Mathematics, compiled from the best authors, and intended to be the Text-Book of the course of private lectures on these sciences in the University at Cambridge*. Vol II. 2ª edición. Cambridge, University Press.

WILT, J. M. (1828) "Article XXII. Question IX. (184), Second Solution". *The Mathematical Diary: Containing new researches and improvements in the mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents*, *2*(11), 120.

ZARAGOZA, J. (1672) *Trigonometria española: resolución de los triangulos planos y esfericos, fabrica y uso de los senos y los logaritmos*. Mallorca, Francisco Oliver.

TOMO II

APÉNDICES

1. PORTADAS DE LOS LIBROS REVISADOS

1.1. Bacas, Darío y Escandón, Ramón. Teoría elemental de las determinantes y sus aplicaciones al álgebra y á la trigonometría (Madrid, 1883)

TEORÍA ELEMENTAL

DE LAS

DETERMINANTES

Y SUS APLICACIONES

AL ÁLGEBRA Y Á LA TRIGONOMETRÍA

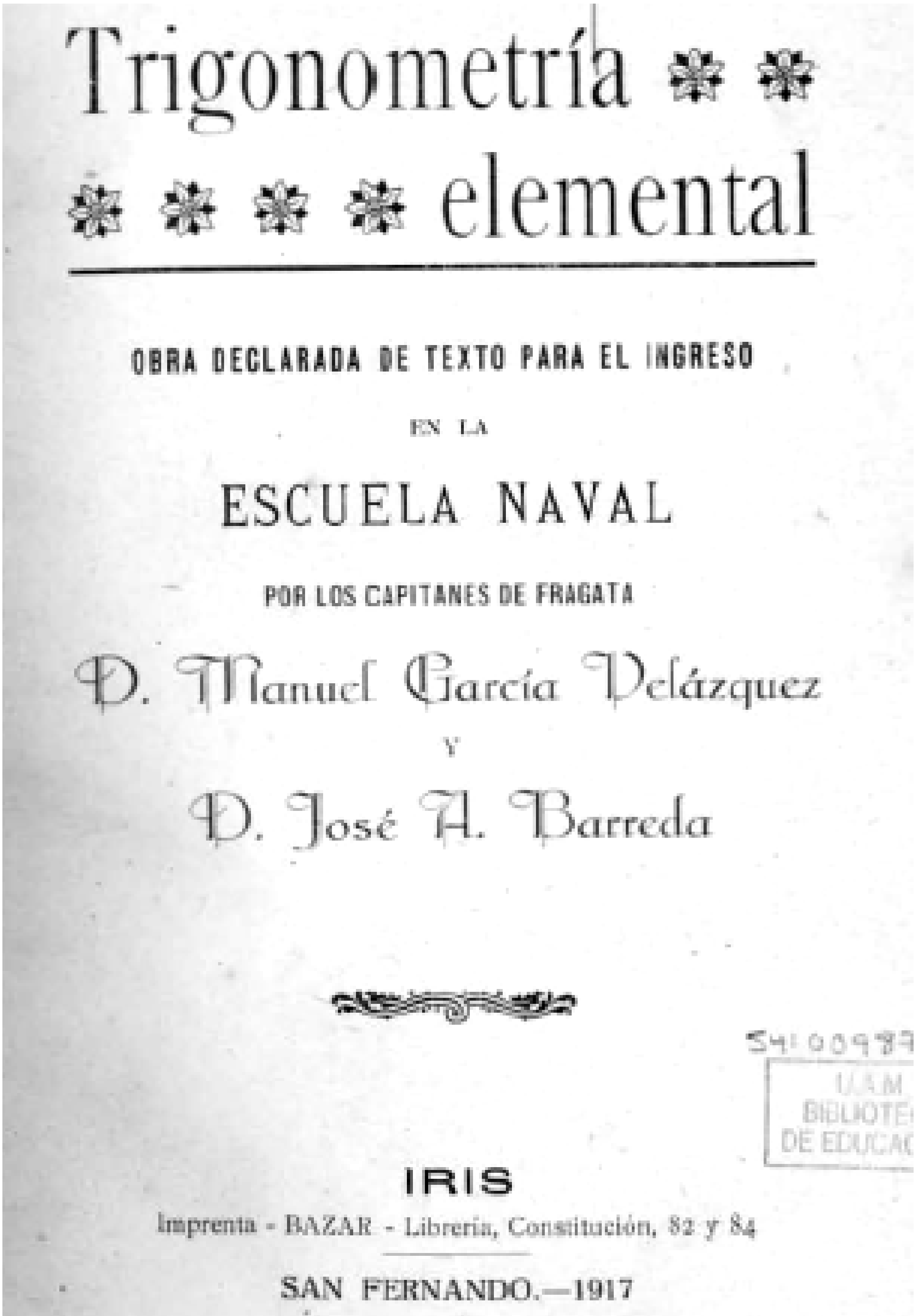
POR

D. DARÍO BACAS
INGENIERO JEFE DE LA ARMADA

D. RAMÓN ESCANDÓN
ASTRÓNOMO DE PRIMERA CLASE
DEL OBSERVATORIO DE SAN FERNANDO

MADRID
IMPRENTA DE D. GREGORIO HERNANDO
calle de Ferraz, núm. 13
1883

1.2. Barreda, José A. y García Velázquez, Manuel. Trigonometría elemental: obra declarada de texto para el ingreso en la Escuela Naval (San Fernando, 1917)



Trigonometría elemental

OBRA DECLARADA DE TEXTO PARA EL INGRESO

EN LA

ESCUELA NAVAL

POR LOS CAPITANES DE FRAGATA

D. Manuel García Velázquez

Y

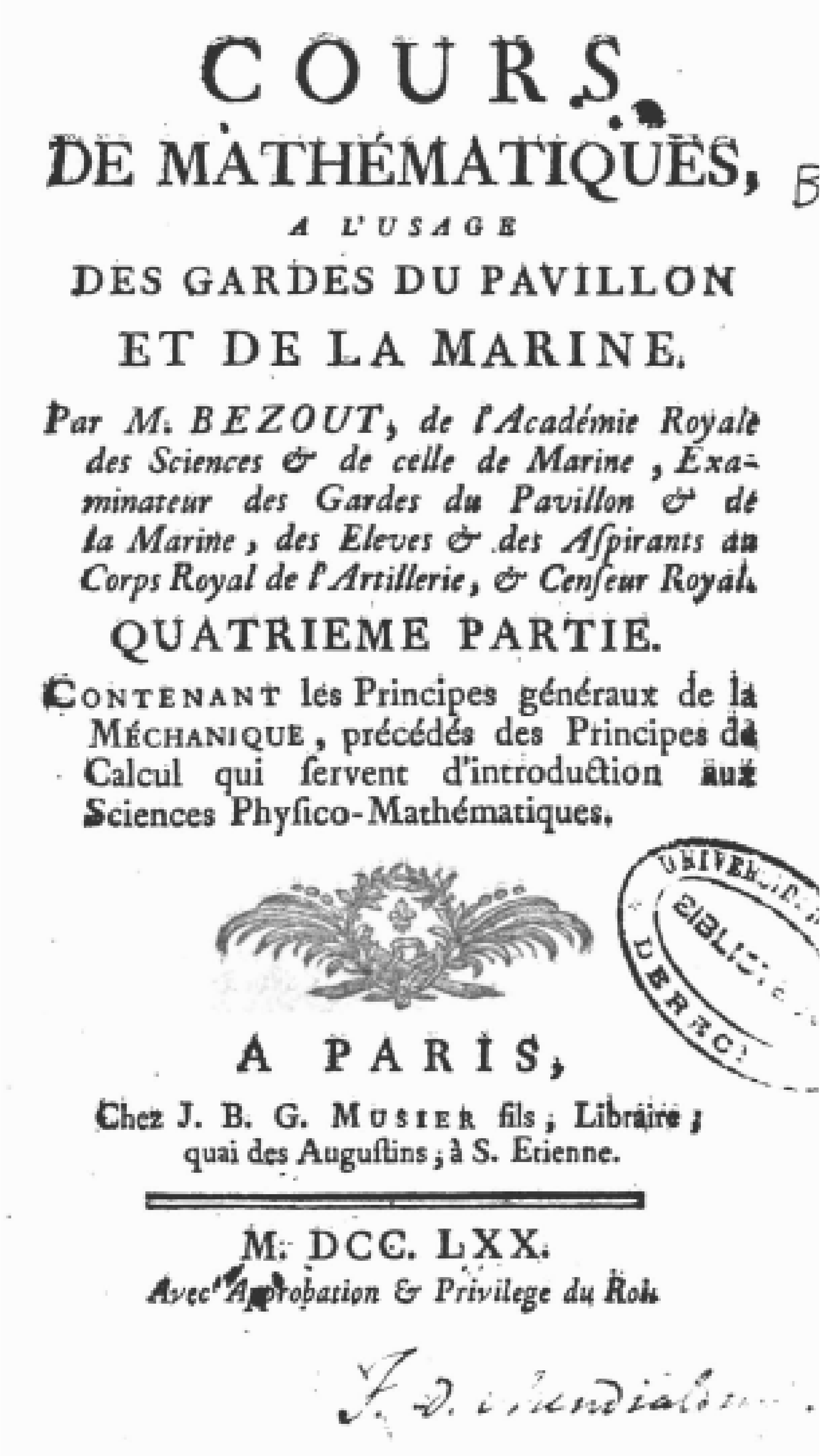
D. José A. Barreda

IRIS

Imprenta - BAZAR - Librería, Constitución, 82 y 84

SAN FERNANDO.—1917

1.3. Bézout, Etienne. Cours de mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, quatrieme partie, contenant les principes généraux de la méchanique, precedes del principes du calcul qui fervent d'introduction aux sciences phyfico-mathématiques (París, 1770)



COURS
DE MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE.

Par M. BEZOUT, de l'Académie Royale des Sciences & de celle de Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Eleves & des Aspirants au Corps Royal de l'Artillerie, & Censeur Royal.

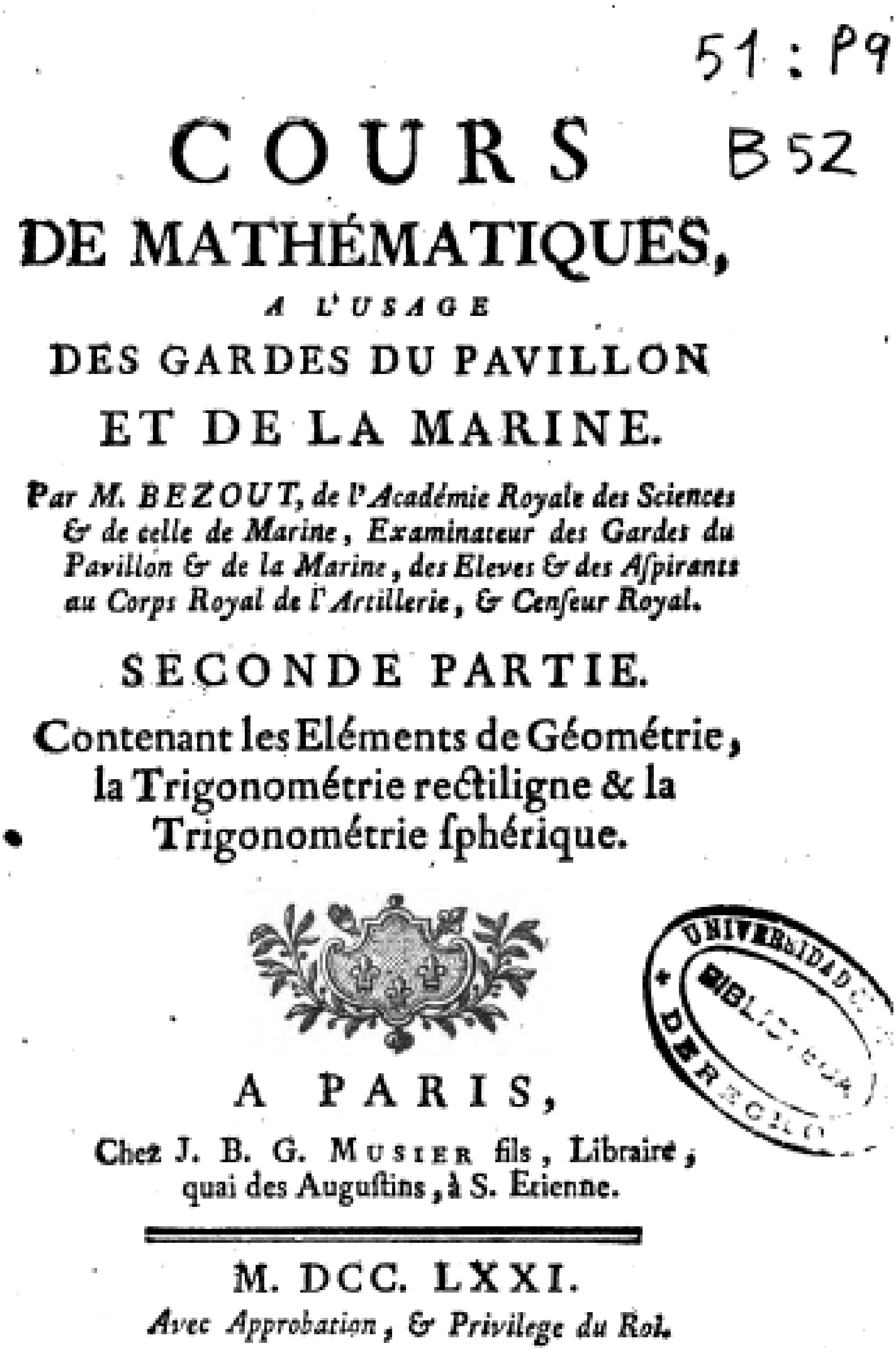
QUATRIEME PARTIE.

CONTENANT les Principes généraux de la MÉCHANIQUE, précédés des Principes du Calcul qui servent d'introduction aux Sciences Physico-Mathématiques.

A PARIS,
Chez J. B. G. MUSIER fils, Libraire, quai des Augustins, à S. Etienne.

M. DCC. LXX.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

1.4. Bézout, Etienne. Cours de mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, seconde partie, contenant le élemens de géométrie, la trigonométrie rectiligne & la trigonométrie fphérique (París, 1771)



COURS
DE MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE.

Par M. BEZOUT, de l'Académie Royale des Sciences & de celle de Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Eleves & des Aspirants au Corps Royal de l'Artillerie, & Censeur Royal.

SECONDE PARTIE.
Contenant les Eléments de Géométrie, la Trigonométrie rectiligne & la Trigonométrie sphérique.

A PARIS,
Chez J. B. G. MUSIER fils, Libraire, quai des Augustins, à S. Etienne.

M. DCC. LXXI.
Avec Approbation, & Privilege du Roi.

1.5. Bielsa y Ciprián, José. Tratado de geometría descriptiva, sombras, topográfico y sistema de acotaciones (Segovia, 1857)

TRATADO

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA,

SOMBRAS, TOPOGRÁFICO

Y

SISTEMA DE ACOTACIONES,

por el Coronel, Teniente Coronel de Artillería, Profesor de la Academia

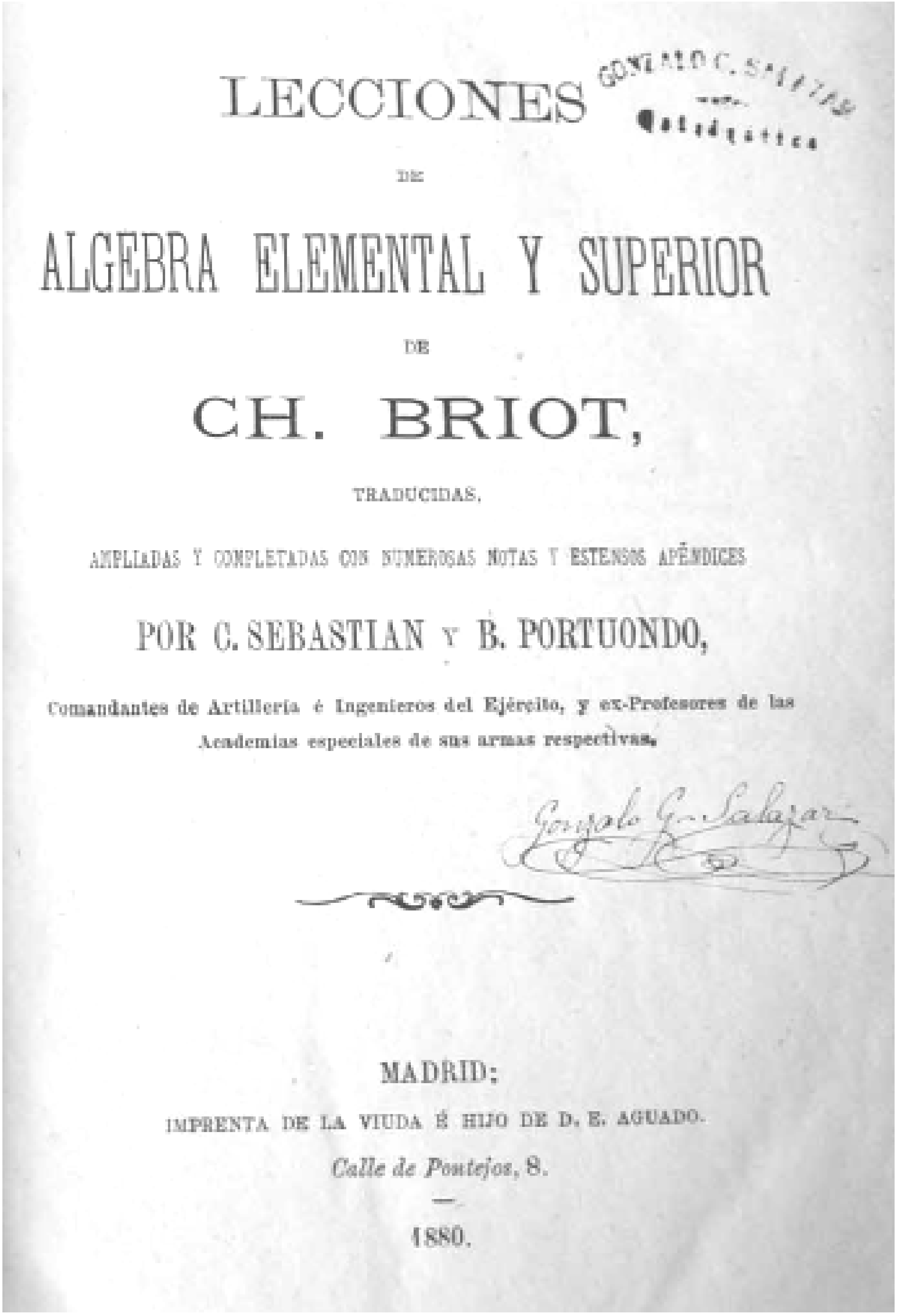
D. JOSE BIELSA Y CIPRIAN.

2.ª edicion.

SEGOVIA, 1857:

Imprenta de los Sobrinos de Espinosa.

1.6. Briot, Charles. Lecciones de álgebra elemental y superior de Ch. Briot, traducidas, ampliadas y completadas con numerosas notas y extensos apéndices por C. Sebastian y B. Portuondo (Madrid, 1880)



LECCIONES

DE

ALGEBRA ELEMENTAL Y SUPERIOR

DE

CH. BRIOT,

TRADUCIDAS,

AMPLIADAS Y COMPLETADAS CON NUMEROSAS NOTAS Y ESTENSOS APÉNDICES

POR C. SEBASTIAN Y B. PORTUONDO,

Comandantes de Artillería é Ingenieros del Ejército, y ex-Profesores de las Academias especiales de sus armas respectivas.

Gonzalo G. Salazar

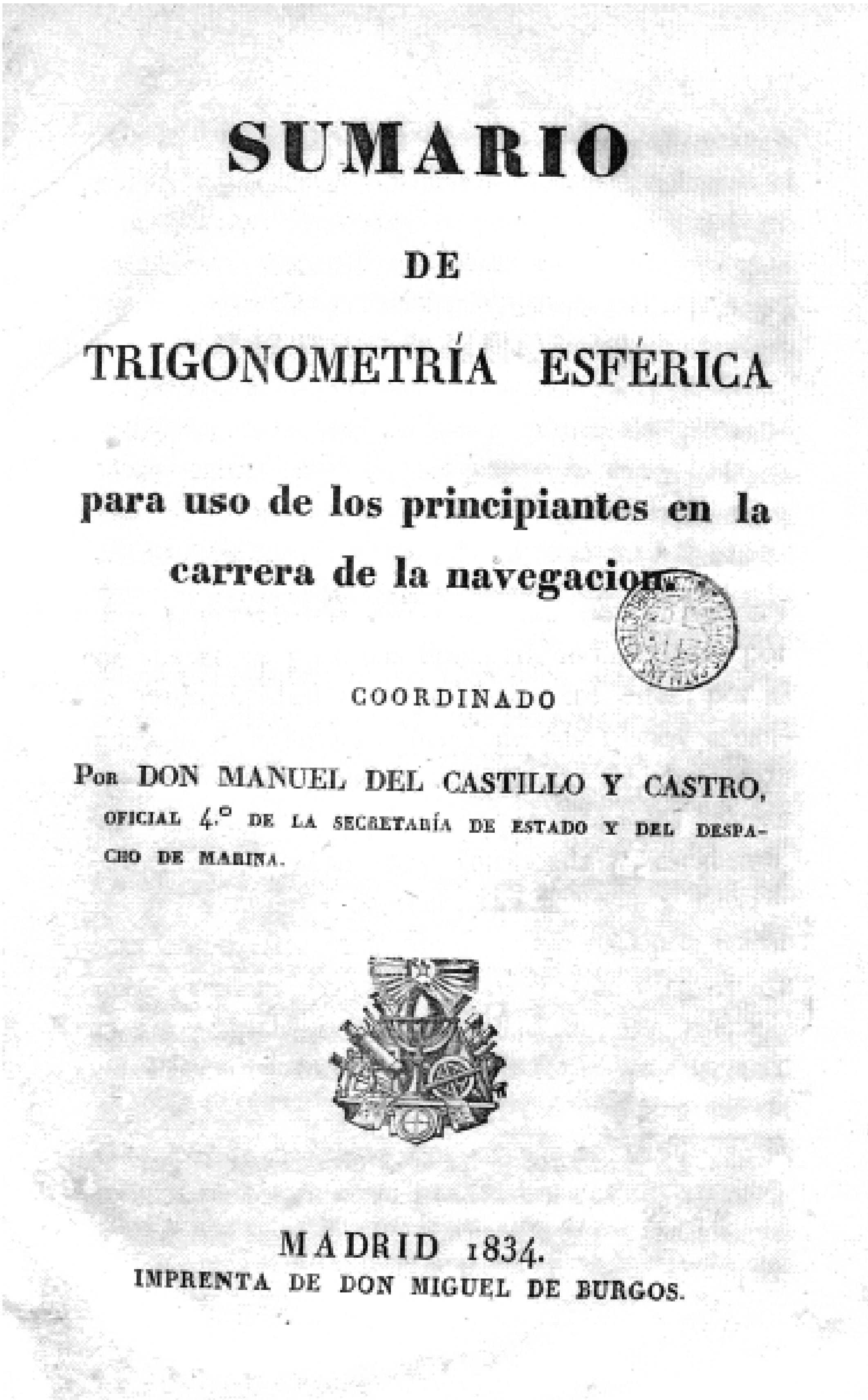
MADRID:

IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJO DE D. E. AGUADO.

Calle de Pontejos, 8.

1880.

1.7. Castillo y Castro, Manuel del. Sumario de trigonometría esférica para uso de los principiantes en la carrera de la navegación (Madrid, 1834)



SUMARIO

DE

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

para uso de los principiantes en la carrera de la navegacion.

COORDINADO

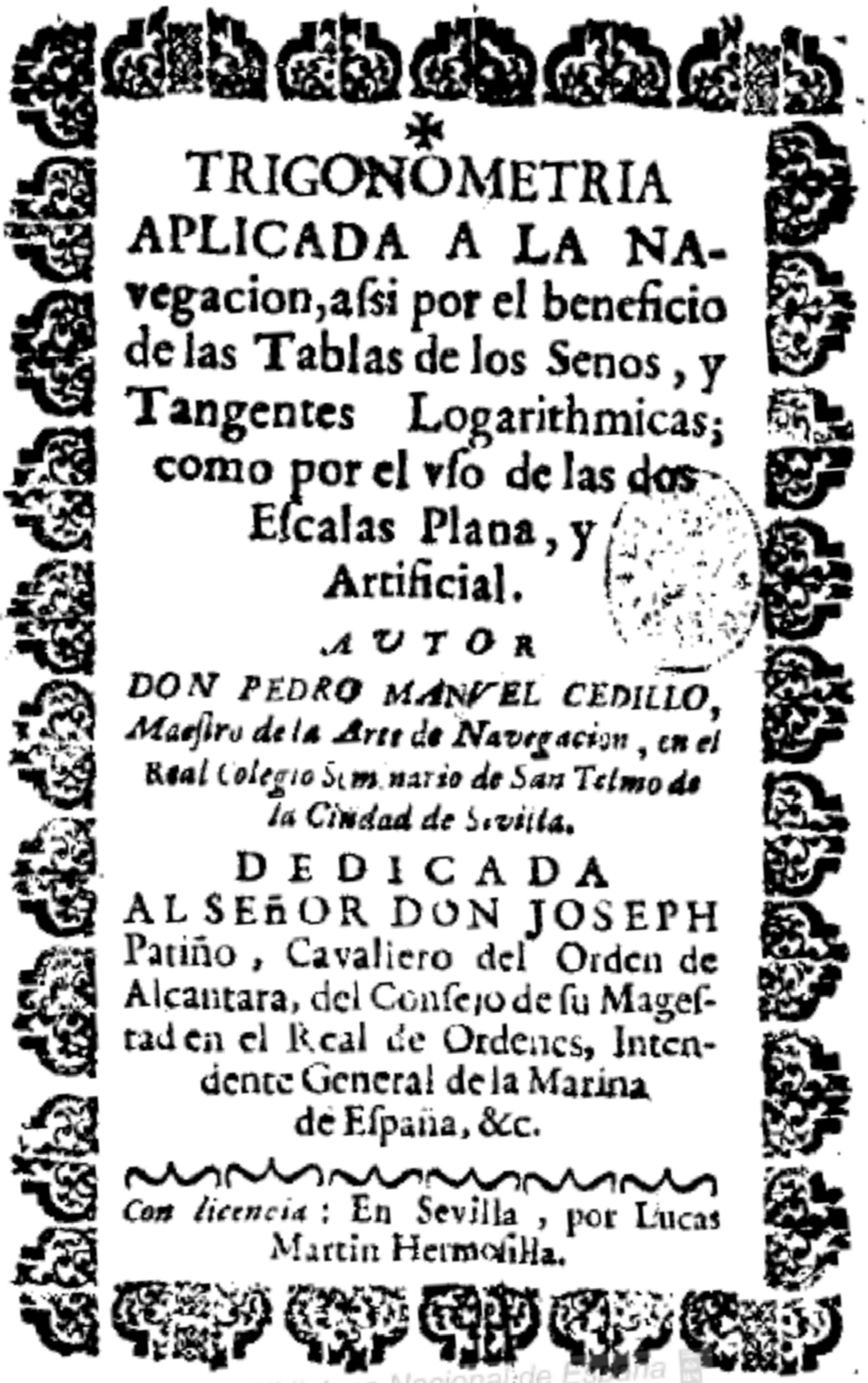
POR DON MANUEL DEL CASTILLO Y CASTRO,

OFICIAL 4.° DE LA SECRETARÍA DE ESTADO Y DEL DESPACHO DE MARINA.

MADRID 1834.

IMPRENTA DE DON MIGUEL DE BURGOS.

1.8. Cedillo, Manuel. Trigonometría aplicada á la navegacion, afsi por el beneficio de las tablas de los senos, y tangentes logarithmicas; como por el vfo de las dos efcalas plana y artificial (Sevilla, 1718)



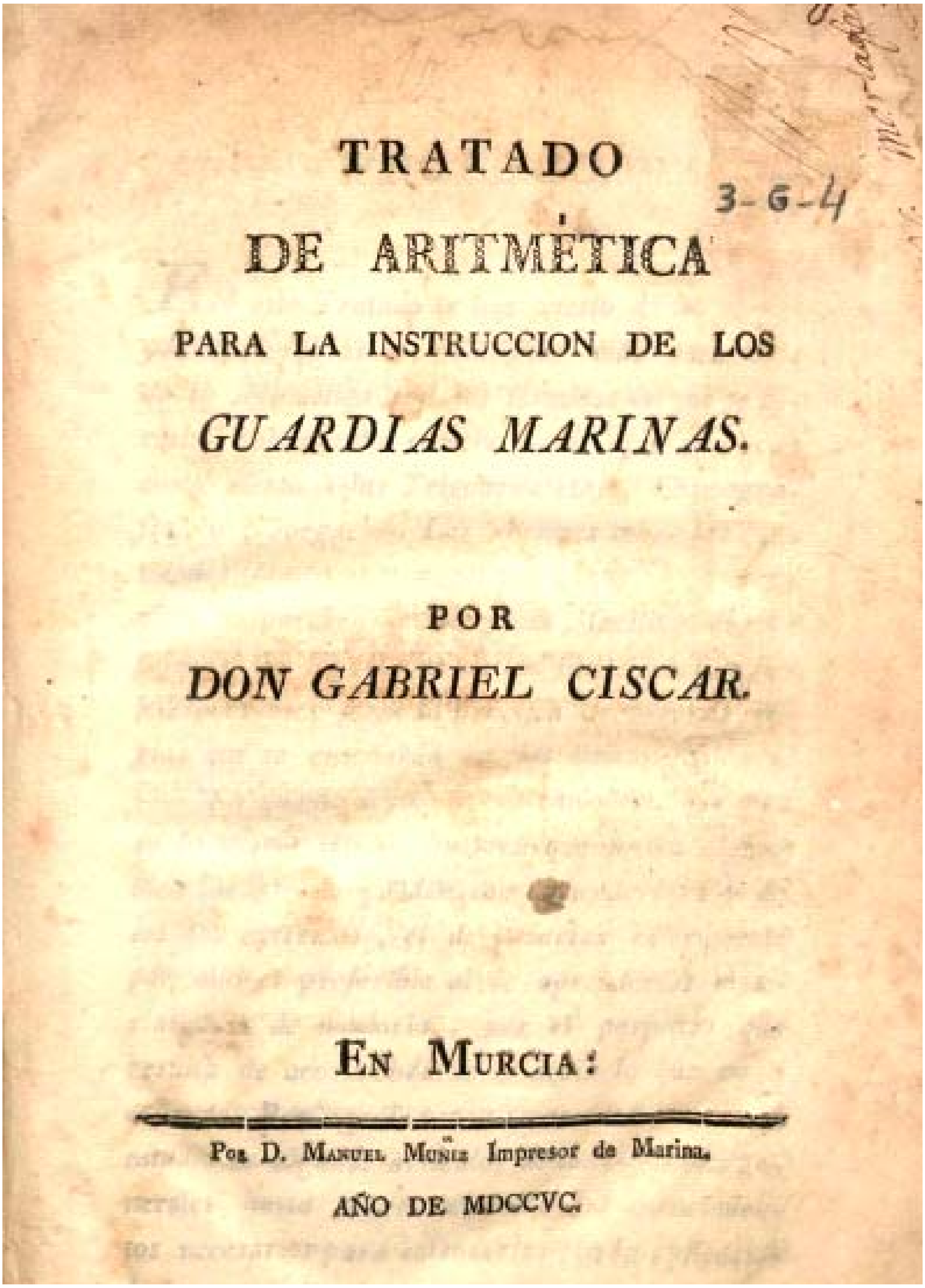
TRIGONOMETRIA
APLICADA A LA NA-
vegacion, aſsi por el beneficio
de las Tablas de los Senos, y
Tangentes Logarithmicas;
como por el vſo de las dos
Eſcalas Plana, y
Artificial.

AUTOR
DON PEDRO MANUEL CEDILLO,
Maeſtro de la Arte de Navegacion, en el
Real Colegio Seminario de San Telmo de
la Ciudad de Sevilla.

DEDICADA
AL SEÑOR DON JOSEPH
Patiño, Cavallero del Orden de
Alcantara, del Conſejo de ſu Mageſ-
tad en el Real de Ordenes, Inten-
dente General de la Marina
de Eſpaña, &c.

Con licencia: En Sevilla, por Lucas
Martin Hermoſilla.

1.9. Ciscar y Ciscar, Gabriel. Tratado de aritmética: para la instrucción de los Guardias Marinas (Murcia, 1795)


TRATADO

3-6-4

DE ARITMÉTICA

PARA LA INSTRUCCION DE LOS

GUARDIAS MARINAS.

POR

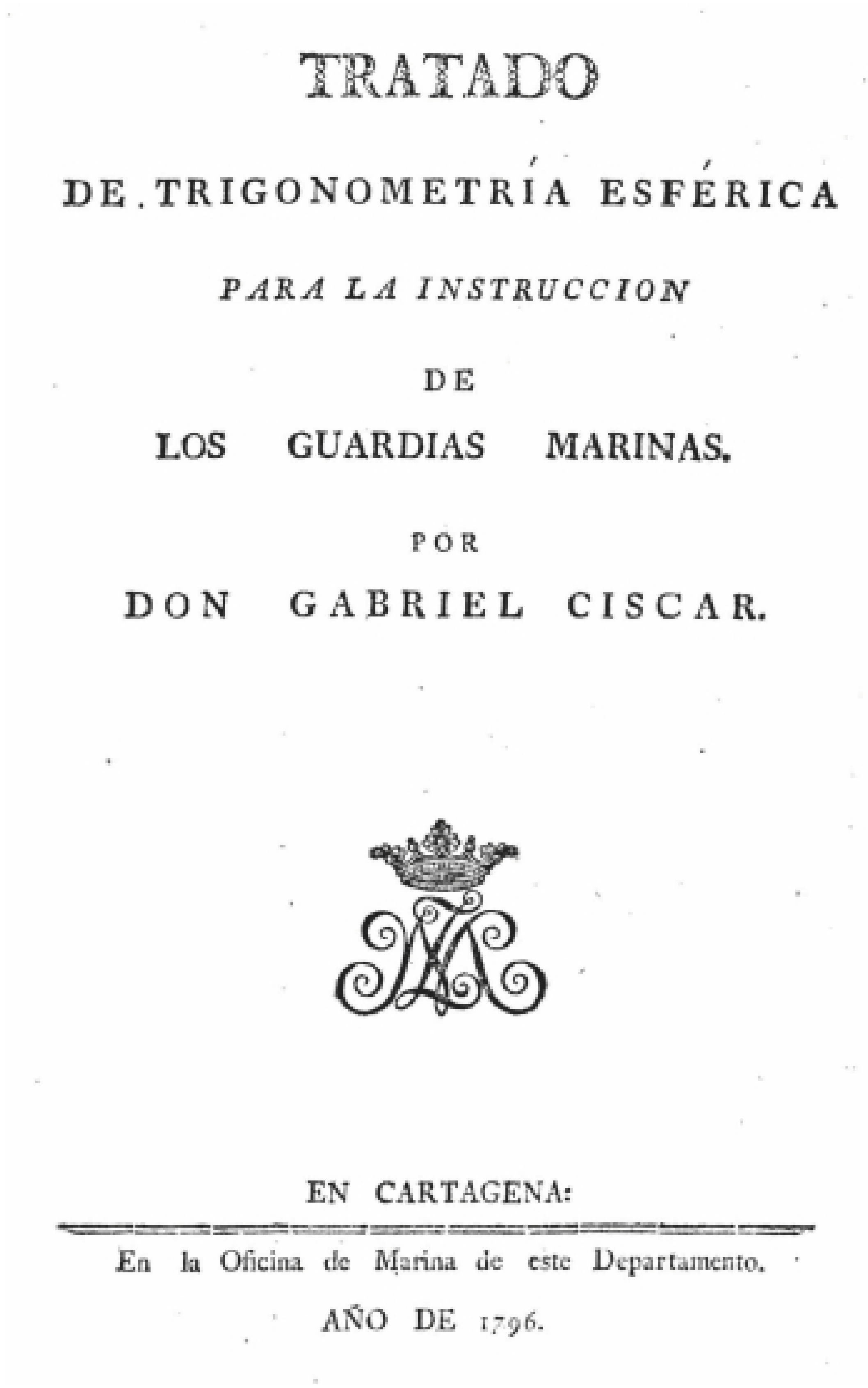
DON GABRIEL CISCAR.

EN MURCIA:

POR D. MANUEL MUÑIZ Impresor de Marina.

AÑO DE MDCCVC.

1.10. Ciscar y Ciscar, Gabriel. Tratado de trigonometría esférica para la instrucción de los Guardias Marinas (Cartagena, 1796)



TRATADO

DE TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

PARA LA INSTRUCCION

DE

LOS GUARDIAS MARINAS.

POR

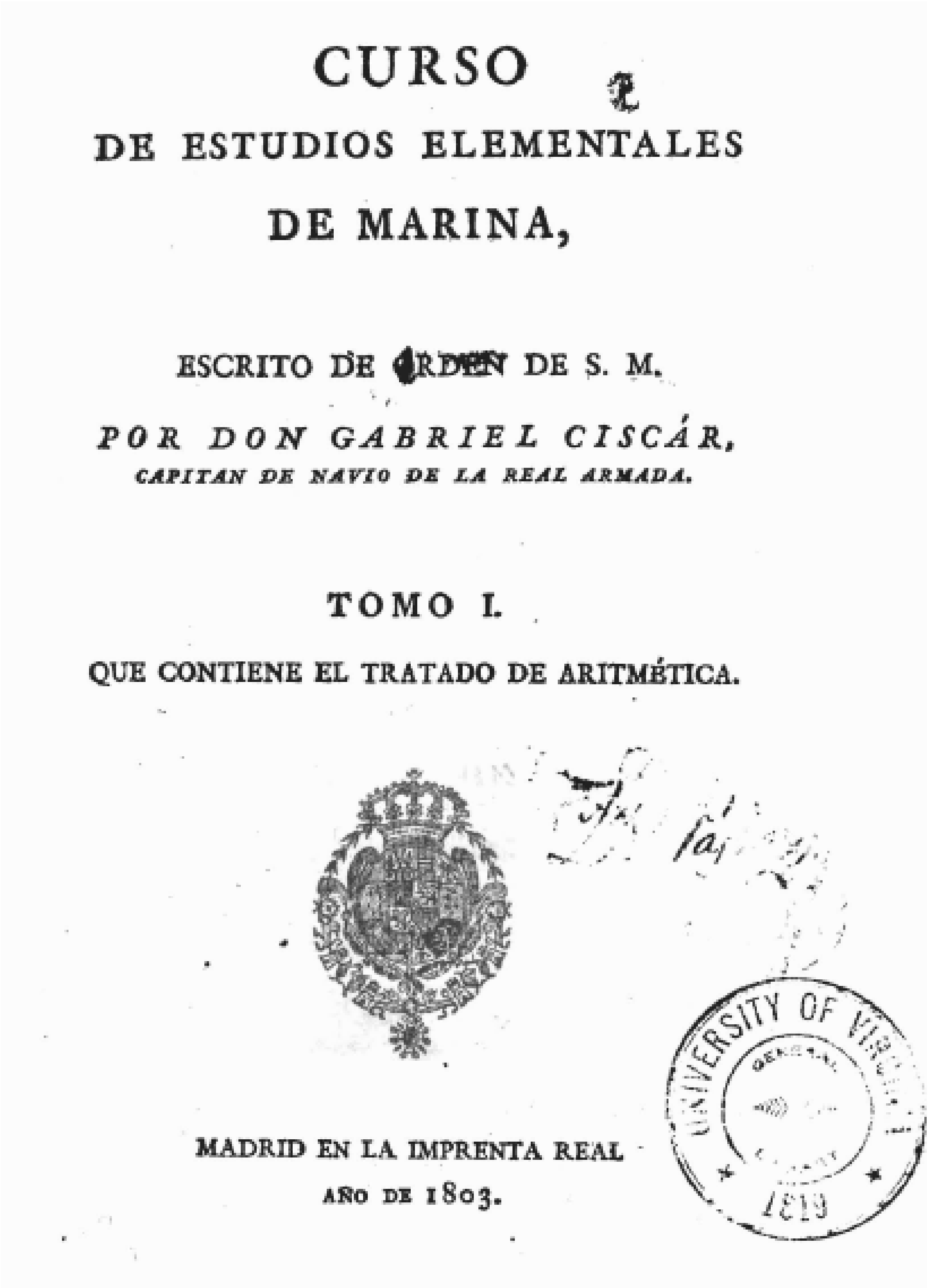
DON GABRIEL CISCAR.

EN CARTAGENA:

En la Oficina de Marina de este Departamento.

AÑO DE 1796.

1.11. Ciscar y Ciscar, Gabriel. Curso de estudios elementales de Marina, Tomo I, que contiene el tratado de aritmética (Madrid, 1803)



CURSO

DE ESTUDIOS ELEMENTALES

DE MARINA,

ESCRITO DE ORDEN DE S. M.

POR DON GABRIEL CISCÁR,

CAPITAN DE NAVIO DE LA REAL ARMADA.

TOMO I.

QUE CONTIENE EL TRATADO DE ARITMÉTICA.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL

AÑO DE 1803.

1.12. Ciscar y Ciscar, Gabriel. Curso de estudios elementales de Marina, Tomo II, que contiene el tratado de geometría (Madrid, 1803)

CURSO

DE ESTUDIOS ELEMENTALES

DE MARINA,

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.

POR DON GABRIEL CISCÁR,

CAPITAN DE NAVIO DE LA REAL ARMADA.

TOMO II.

QUE CONTIENE EL TRATADO DE GEOMETRÍA.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL

AÑO DE 1803.

1.13. Ciscar y Ciscar, Gabriel. Curso de estudios elementales de Marina, Tomo III, que contiene el tratado de cosmografía (Madrid, 1811)

CURSO

DE ESTUDIOS ELEMENTALES

DE MARINA,

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.

POR DON GABRIEL CISCÁR,

siendo Capitan de Navío de la Real Armada, y reimpreso por disposicion y á expensas del Real Consulado de Mallorca, para el uso de los alumnos de su Escuela de Navegacion.

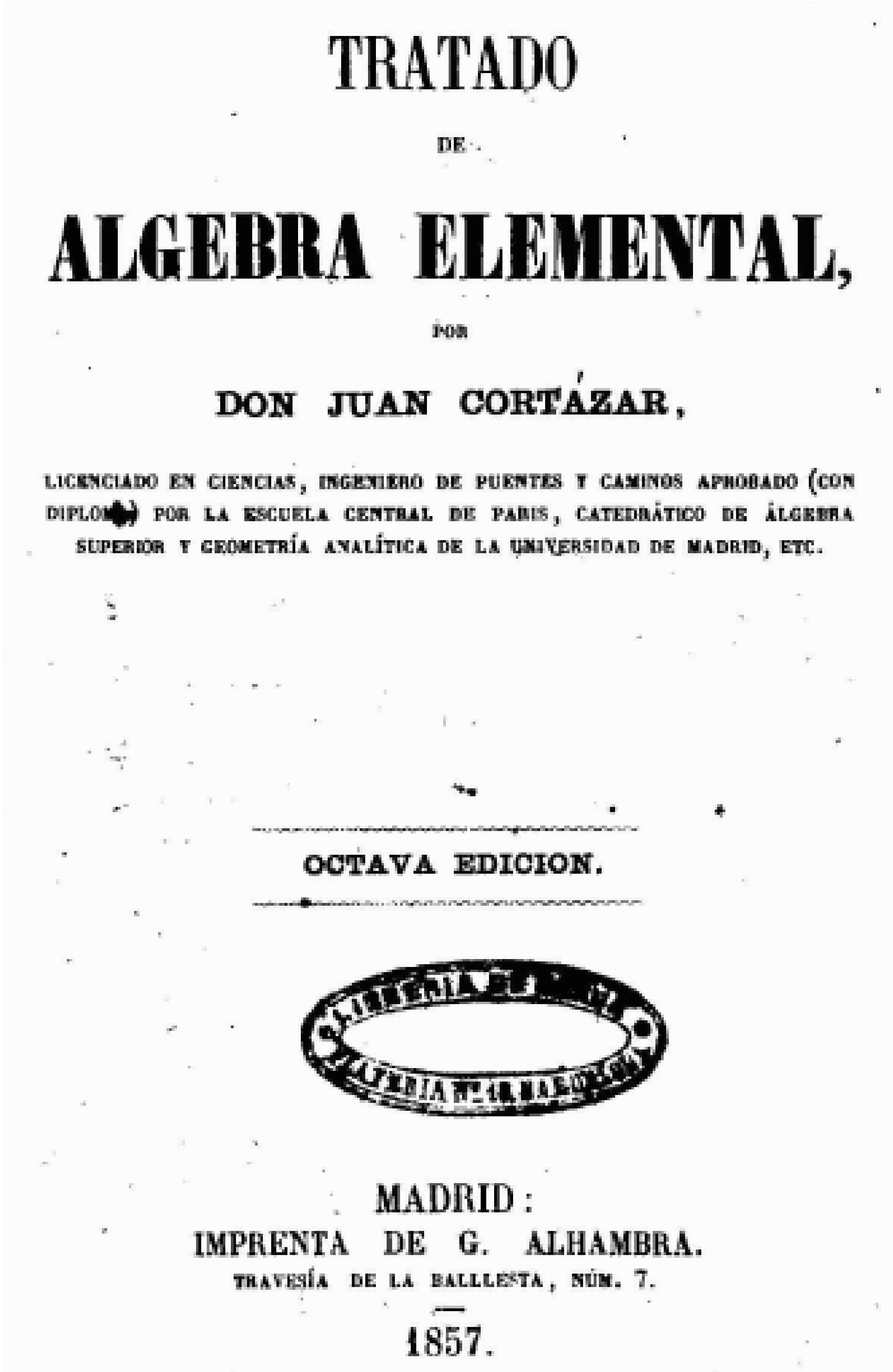
TOMO III.

QUE CONTIENE EL TRATADO DE COSMOGRAFÍA.

PALMA EN LA IMPRENTA REAL

AÑO DE 1811.

1.14. Cortázar, Juan. Tratado de álgebra elemental (Madrid, 1857)



TRATADO

DE

ALGEBRA ELEMENTAL,

POR

DON JUAN CORTÁZAR,

LICENCIADO EN CIENCIAS, INGENIERO DE PUENTES Y CAMINOS APROBADO (CON DIPLOMA) POR LA ESCUELA CENTRAL DE PARIS, CATEDRÁTICO DE ÁLGEBRA SUPERIOR Y GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID, ETC.

OCTAVA EDICION.

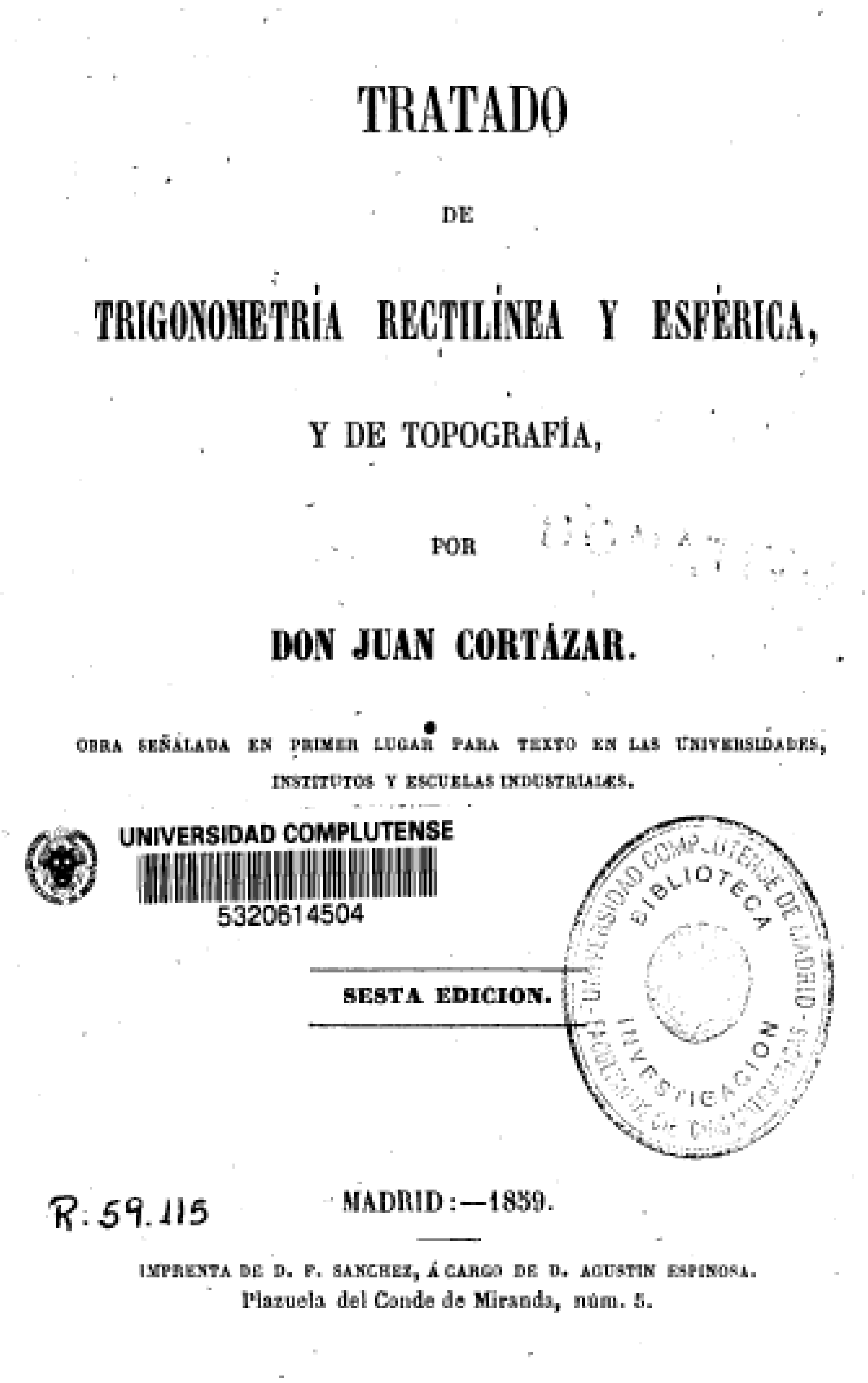
MADRID:

IMPRENTA DE G. ALHAMBRA.

TRAVESÍA DE LA BALLESTA, NÚM. 7.

1857.

1.15. Cortázar, Juan. Tratado de trigonometría y topografía (Madrid, 1859)



TRATADO

DE

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y ESFÉRICA,

Y DE TOPOGRAFÍA,

POR

DON JUAN CORTÁZAR.

OBRA SEÑALADA EN PRIMER LUGAR PARA TEXTO EN LAS UNIVERSIDADES, INSTITUTOS Y ESCUELAS INDUSTRIALES.

SESTA EDICION.

MADRID:—1859.

IMPRENTA DE D. F. SANCHEZ, Á CARGO DE D. AGUSTIN ESPINOSA.
Plazuela del Conde de Miranda, núm. 5.

1.16. Cortázar, Juan. Tratado de aritmética (Madrid, 1860)

TRATADO

DE

ARITMÉTICA,

POR

DON JUAN CORTÁZAR.

OBRA SEÑALADA EN PRIMER LUGAR PARA TEXTO EN LAS UNIVERSIDADES, INSTITUTOS Y ESCUELAS INDUSTRIALES, ADOPTADA ESPONTÁNEAMENTE EN MUCHOS SEMINARIOS CONCILIARES, Y EN LA MAYOR PARTE DE LAS ESCUELAS NORMALES.

DUODÉCIMA EDICION.

MADRID:—1860.

IMPRENTA DE D. F. SANCHEZ, Á CARGO DE D. AGUSTIN ESPINOSA.
Plazuela del Conde de Miranda, núm. 5.

1.17. Cortázar, Juan. Tratado de geometría elemental (Madrid, 1864)

TRATADO

DE

GEOMETRIA ELEMENTAL,

POR

DON JUAN CORTÁZAR.

OBRA SEÑALADA EN PRIMER LUGAR PARA TEXTO EN LAS UNIVERSIDADES, INSTITUTOS Y ESCUELAS PROFESIONALES.

DUODÉCIMA EDICION.

MADRID:—1864.

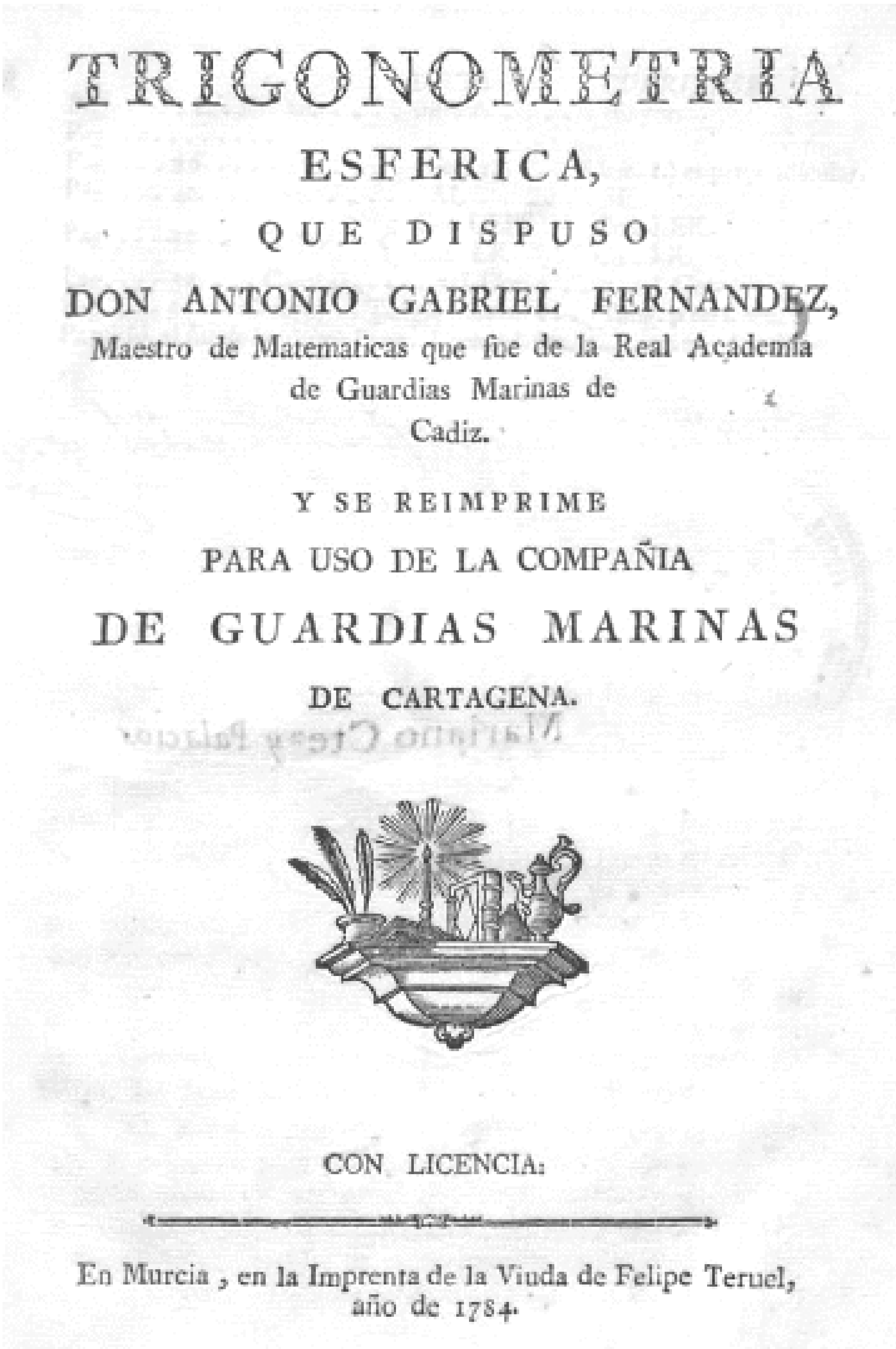
Imprenta de A. Peñuelas, Plazuela del Conde de Miranda, núm. 1.

1.18. Fernández, Antonio Gabriel. Compendio de la geometría elementar, aritmética inferior, y trigonometría plana, y espherica (Sevilla, 1735)

COMPENDIO
DE LA
GEOMETRIA
ELEMENTAR,
ARITMETICA INFERIOR,
Y TRIGONOMETRIA PLANA,
Y ESPHERICA.
LLEVA AñADIDO EN ESTA
SEGUNDA IMPRESSION,
Un Tratado de Geometrìa Practica, ò
uſo de los Inſtrumentos mas comunes
para trabajar en el Papèl, y Terreno, con
la explicacion de los colores mas proprios
para deſignar, y lavar los Planos, y
perfiles de Fortificacion, &c.
DISPUESTO
POR DON ANTONIO GABRIEL
Fernández, Maeſtro Segundo de Mathe-
maticas en la Real Academia de Caba-
lleros Guardias Marinas de la Ciudad
DE CADIZ.
Y LO DEDICA
AL ILLmo. Sr. DON FRANCISCO
de Varas y Valdès, del Conſejo, y Camara
de S.M. en el Real, y Supremo de
Indias, &c.

Con licencia: En Sevilla, en la Imprenta
de la Siete Revueltas.

1.19. Fernández, Antonio Gabriel. Trigonometría esférica, que dispuso don Antonio Gabriel Fernández y se reimprime para uso de la Compañía de Guardias Marinas de Cartagena (Murcia, 1784)



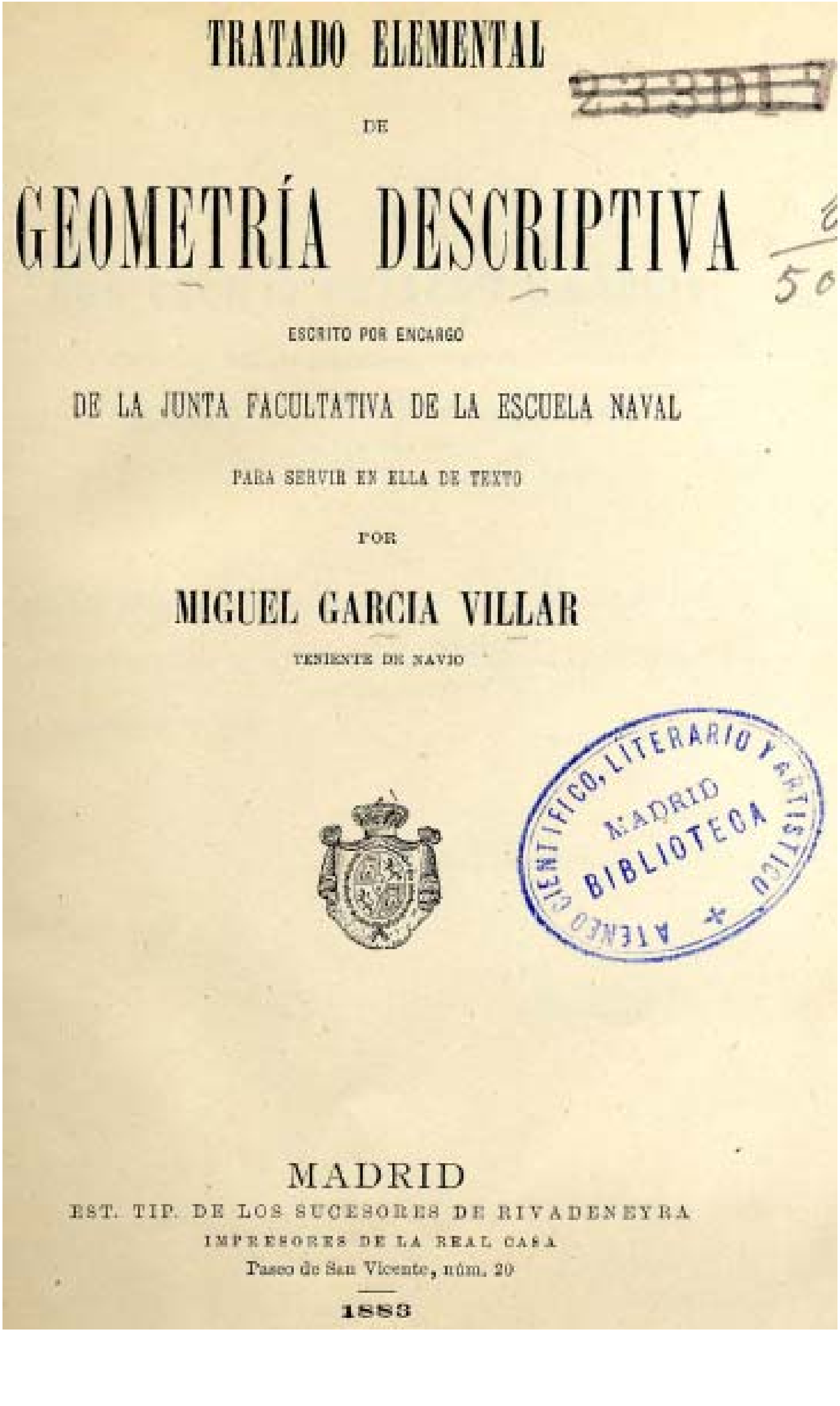
TRIGONOMETRIA
ESFERICA,
QUE DISPUSO
DON ANTONIO GABRIEL FERNANDEZ,
Maestro de Matematicas que fue de la Real Academia
de Guardias Marinas de
Cadiz.

Y SE REIMPRIME
PARA USO DE LA COMPAÑIA
DE GUARDIAS MARINAS
DE CARTAGENA.

CON LICENCIA:

En Murcia, en la Imprenta de la Viuda de Felipe Teruel,
año de 1784.

1.20. García Villar, Miguel. Tratado elemental de geometría descriptiva escrito por encargo de la Junta Facultativa de la Escuela Naval para servir en ella de texto (Madrid, 1883)



TRATADO ELEMENTAL

DE

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

ESCRITO POR ENCARGO

DE LA JUNTA FACULTATIVA DE LA ESCUELA NAVAL

PARA SERVIR EN ELLA DE TEXTO

POR

MIGUEL GARCIA VILLAR

TENIENTE DE NAVIO

MADRID

EST. TIP. DE LOS SUCESORES DE RIVADENEYRA

IMPRESORES DE LA REAL CASA

Paseo de San Vicente, núm. 20

1883

1.21. Hutton, Charles. A course of mathematics, for the use of academies, as well as private tuition (New-York, 1822)

A

COURSE

OF

MATHEMATICS,

FOR THE

USE OF ACADEMIES,

AS WELL AS

PRIVATE TUITION.

IN TWO VOLUMES.

BY

CHARLES HUTTON, LL.D. F. R. S.

Late Professor of Mathematics in the Royal Military Academy.

THE THIRD AMERICAN EDITION:

From the Fifth, Sixth, and Seventh London Editions.

REVISED, CORRECTED, AND IMPROVED.

TO WHICH IS ADDED

An Elementary Essay on Descriptive Geometry.

BY ROBERT ADRAIN, LL. D. F. A. P. S. F. A. A. S. &c.

And Professor of Mathematics and Natural Philosophy, in Columbia College, New-York.

VOL. II.

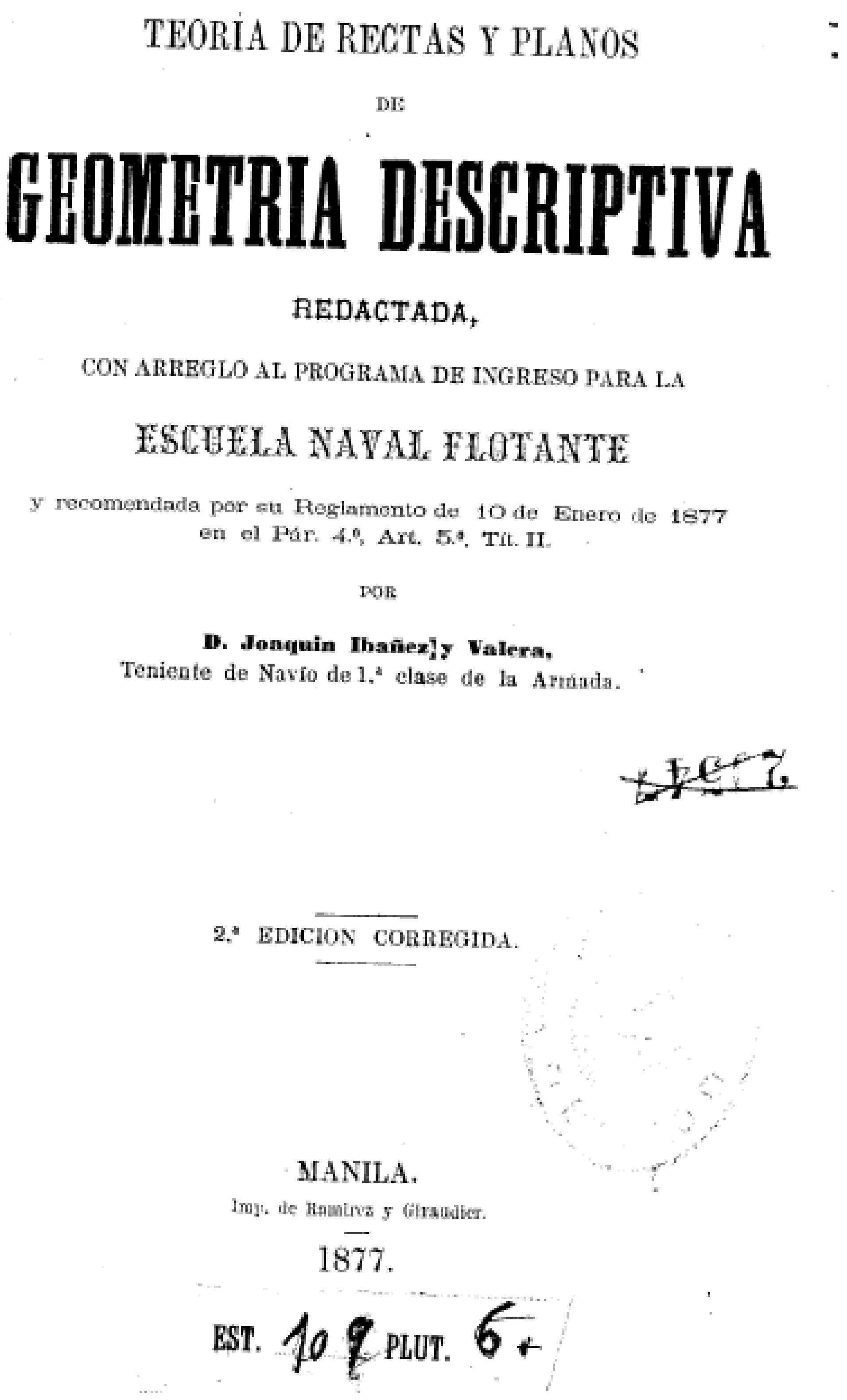
NEW-YORK:

PUBLISHED BY SAMUEL CAMPBELL & SON, EVERT DUYCKINCK, T. & J. SWORDS, R. M'DERMUT, T. A. RONALDS, COLLINS & HANNAY, AND GEORGE LONG.

George Long, Printer, No. 71, Pearl-Street.

1822.

1.22. Ibáñez y Valera, Joaquín. Teoría de rectas y planos de geometría descriptiva: redactada, con arreglo al programa de ingreso para la Escuela Naval Flotante (Manila, 1877)



TEORÍA DE RECTAS Y PLANOS

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

REDACTADA,

CON ARREGLO AL PROGRAMA DE INGRESO PARA LA

ESCUELA NAVAL FLOTANTE

y recomendada por su Reglamento de 10 de Enero de 1877
en el Pár. 4.º, Art. 5.º, Tít. II.

POR

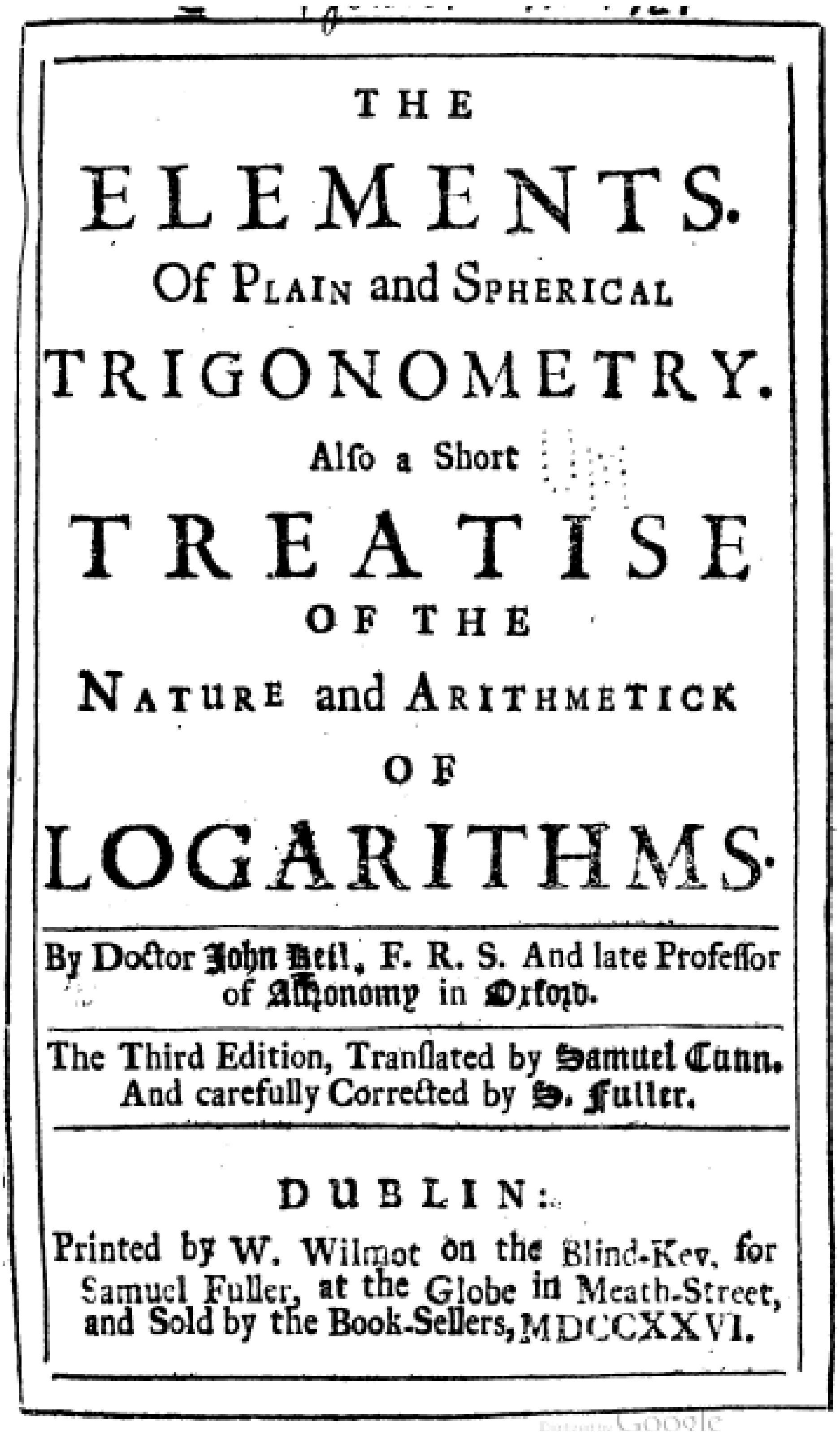
D. Joaquin Ibañez y Valera,
Teniente de Navío de 1.ª clase de la Armada.

2.ª EDICION CORREGIDA.

MANILA.
Imp. de Ramirez y Giraudier.

1877.

1.23. Keill, John. The elements of plain and spherical trigonometry. Also a short treatise of the nature an arithmetick of logartihms (Dublin, 1726)



THE
ELEMENTS.
Of PLAIN and SPHERICAL
TRIGONOMETRY.
Alſo a Short
TREATISE
OF THE
NATURE and ARITHMETICK
OF
LOGARITHMS.

By Doctor John Keil, F. R. S. And late Profeſſor of Aſtronomy in Oxford.

The Third Edition, Tranſlated by Samuel Cunn. And carefully Corrected by S. Fuller.

DUBLIN:
Printed by W. Wilmot on the Blind-Key, for Samuel Fuller, at the Globe in Meath-Street, and Sold by the Book-Sellers, MDCCXXVI.

1.24. Keith, Thomas. An introduction to the theory and practice of plane and spherical trigonometry, and the stereographic projection of the sphere; including the theory of navigation (London, 1826)

AN

INTRODUCTION

TO

THE THEORY AND PRACTICE

OF

PLANE AND SPHERICAL

TRIGONOMETRY,

AND

THE STEREOGRAPHIC PROJECTION OF

THE SPHERE;

INCLUDING

THE THEORY OF NAVIGATION:

COMPREHENDING

A Variety of Rules, Formulæ, &c. with their Practical Applications to the Mensuration of Heights and Distances; to determining the Latitude by two Altitudes of the Sun, the Longitude by the Lunar Observations, and to other important Problems on the Sphere, and on Nautical Astronomy.

BY THOMAS KEITH.

THE FIFTH EDITION, CORRECTED AND IMPROVED.

La Trigonométrie est sans contredit une des plus utiles applications de la Géométrie élémentaire : elle est la base de la Géodésie, de la Géographie, de l'Astronomie et de la Navigation. Discours sur les Progrès des Sciences, rendu par l'Institut de France, 1809, page 6.

LONDON:

PRINTED FOR

LONGMAN, REES, ORME, BROWN, AND GREEN,

PATERNOSTER-ROW.

1826.

1.25. La Caille, Nicolás Louis de. Leçons élémentaires de mathématiques (París, 1784)

LEÇONS

ÉLÉMENTAIRES

DE

MATHÉMATIQUES.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Gottingue, & de l'Inſtitut de Bologne; Profeſſeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

NOUVELLE ÉDITION,

Avec de nouveaux Eléments d'Algèbre, de Géométrie, de Trigonométrie rectiligne & ſphérique, de Sections coniques, de pluſieurs autres Courbes, des Lieux géométriques, de Calcul Différentiel & de Calcul Intégral.

Par M. l'Abbé MARIE, *de la Maiſon & Société de Sorbonne, Sous-Précepteur des Enfants de Monſeigneur* LE COMTE D'ARTOIS; *ci-devant Profeſſeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXIV.

Avec Approbation, & Privilege du Roi.

1.26. Lacroix, Sylvestre François. Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral: précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées (París, 1802)

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL;

Précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées.

silvestre françois

PAR S. F. LACROIX.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN X = 1802.

1.27. Lacroix, Sylvestre François. Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica y de la aplicación del álgebra a la geometría, Volumen 4 (Madrid, 1820)

TRATADO ELEMENTAL

DE TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

Y ESFÉRICA,

Y DE LA APLICACION DEL ÁLGEBRA

Á LA GEOMETRÍA;

DISPUESTO POR S. F. LACROIX,

SEXTA EDICION.

TRADUCIDA POR LOS CATEDRÁTICOS DE MATEMÁTICAS
DE LOS CABALLEROS PAGES DE S. M.

TOMO IV.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL
AÑO DE 1820.

1.28. Lista y Aragón, Alberto. Elementos de trigonometría esférica y geografía astronómica: para el uso de la casa de educación sita en la calle de san Mateo de esta corte (Madrid, 1823)

ELEMENTOS

DE TRIGONOMETRIA ESFERICA

Y

GEOGRAFIA ASTRONOMICA

PARA EL USO

DE LA CASA DE EDUCACION

SITA

EN LA CALLE DE SAN MATEO DE ESTA CORTE.

Por D. A. L.

Quidquid praecipies, esto brevis.
HORAT.

MADRID:
Imprenta de DON LEON AMARITA, plazuela de Santiago, n. 1.
1823.

1.29. María (de) y García, Juan Luís. Lecciones elementales de geometría analítica (Ferrol, 1900)

LECCIONES ELEMENTALES

DE

GEOMETRÍA ANALITICA

REDACTADAS CON ARREGLO AL PROGRAMA VIGENTE
EN LA ESCUELA NAVAL

POR

Juan Luís De-María

Teniente de Navío

FERROL
IMPRENTA Y LIBRERIA DE HIJOS DE R. PITA
142, SINFORIANO LOPEZ 142,

1900

1.30. Meunier-Joannet, Pierre Jules. Cours elementaire d'analyse: contenant un tres grand nombre d’applications: a l'usage des eleves de l'Ecole Navale et des eleves de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures (París, 1858)

COURS ÉLÉMENTAIRE

D’ANALYSE

CONTENANT

UN TRÈS-GRAND NOMBRE D'APPLICATIONS

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE L'ÉCOLE NAVALE

ET DES ÉLÈVES DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES ;

PAR

J. MEUNIER-JOANNET,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR D'HYDROGRAPHIE,
CHARGÉ DU COURS D'ANALYSE A L'ÉCOLE NAVALE IMPÉRIALE.

PARIS

ARTHUS BERTRAND, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE LA SOCIÉTÉ DE GÉOGRAPHIE,
rue Hautefeuille, 21.

1.31. Merás y Uría, Julio. Lecciones de geometria analítica: redactadas para uso de los aspirantes á guardias-marinas (Ferrol, 1879)

LECCIONES

DE

GEOMETRIA ANALÍTICA,

REDACTADAS PARA USO

de los aspirantes á guardias-marinas

POR

D. JULIO MERÁS Y URÍA,

Teniente de Navío de 2.ª clase y profesor en la Escuela naval flotante.

FERROL—1879.

Imprenta de EL CORREO GALLEGO.
Real, 118.

1.32. Miranda, Augusto. Lecciones de cálculo infinitesimal (Ferrol, 1884)

LECCIONES

DE

CALCULO INFINITESIMAL,

REDACTADAS POR

A. MIRANDA,

Teniente de Navío.

FERROL
Establecimiento tipográfico de R. Pita.
97 SINFORIANO LOPEZ 97
1884

1.33. Montaner, Jaime. Álgebra: escrita con sujeción al programa vigente para los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante (Madrid, 1898)

ÁLGEBRA

POR

JAIME MONTANER VEGA-VERDUGO

CAPITÁN DE FRAGATA,

ESCRITA CON SUJECIÓN

AL PROGRAMA VIGENTE PARA LOS EXÁMENES DE INGRESO

EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE

DECLARADA DE TEXTO

POR REAL ORDEN DE 28 DE AGOSTO DE 1898.

MADRID
IMPRENTA DE L. AGUADO
Calle de Pontejos, núm. 8.
1898.

1.34. Montojo, Saturnino. Tratado elemental de aritmética: redactado para uso del Colegio Naval Militar (San Fernando, 1849)

TRATADO ELEMENTAL

DE

ARITMÉTICA.

Redactado
para el uso del Colegio Naval Militar en virtud de Real órden,

POR

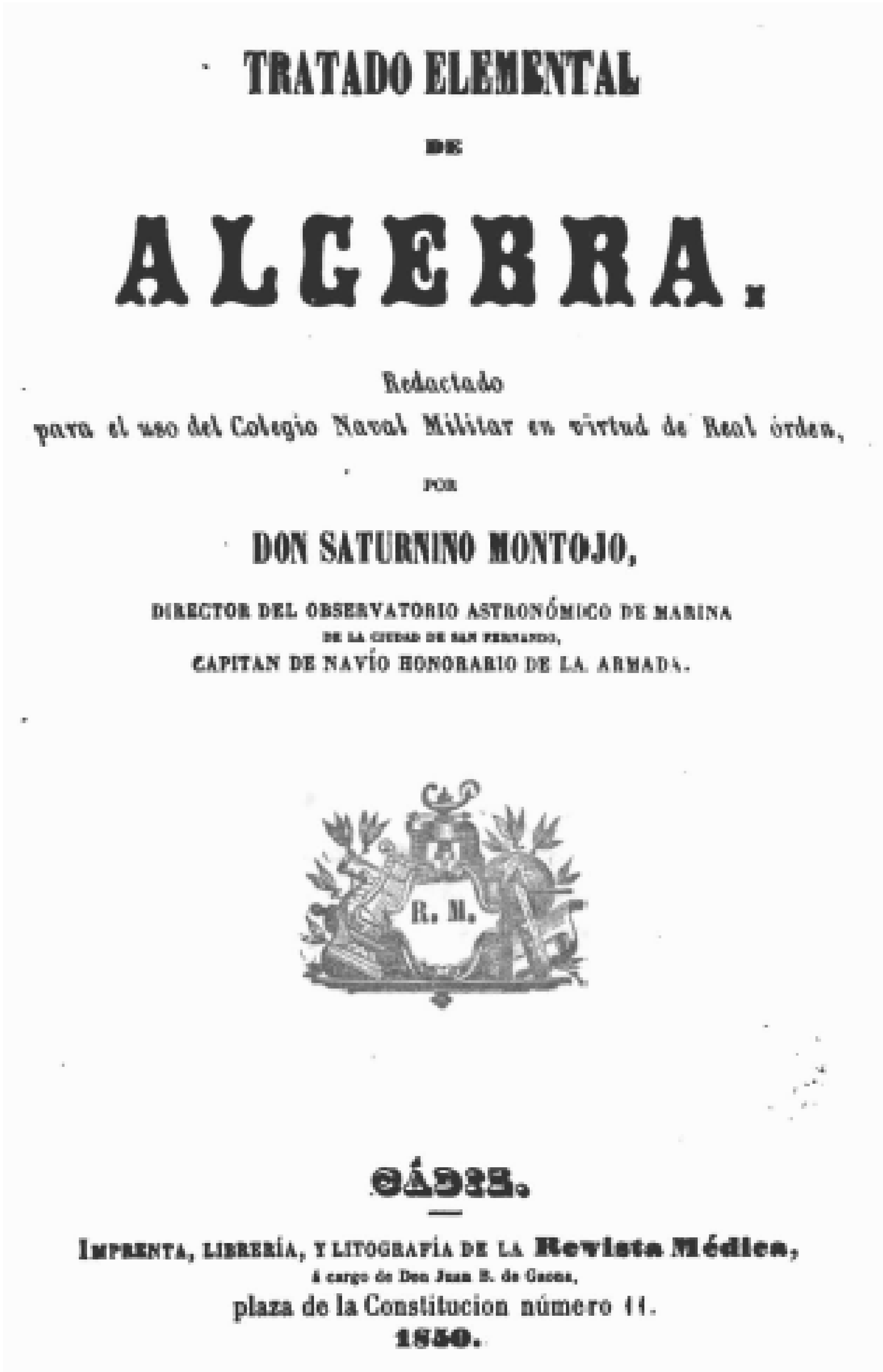
DON SATURNINO MONTOJO,

DIRECTOR DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE MARINA
DE LA CIUDAD DE SAN FERNANDO,
CAPITAN DE NAVIO HONORARIO DE LA ARMADA.

CÁDIZ.

Imprenta, librería y litografía de la Revista Médica,
á cargo de Don Juan B. de Gaona.
plaza de la Constitucion número 11.
1849.

1.35. Montojo, Saturnino. Tratado elemental de álgebra: redactado para uso del Colegio Naval Militar (San Fernando, 1850)



TRATADO ELEMENTAL

DE

ALGEBRA,

Redactado

para el uso del Colegio Naval Militar en virtud de Real órden,

POR

DON SATURNINO MONTOJO,

DIRECTOR DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE MARINA

DE LA CIUDAD DE SAN FERNANDO,

CAPITAN DE NAVÍO HONORARIO DE LA ARMADA.

CÁDIZ.

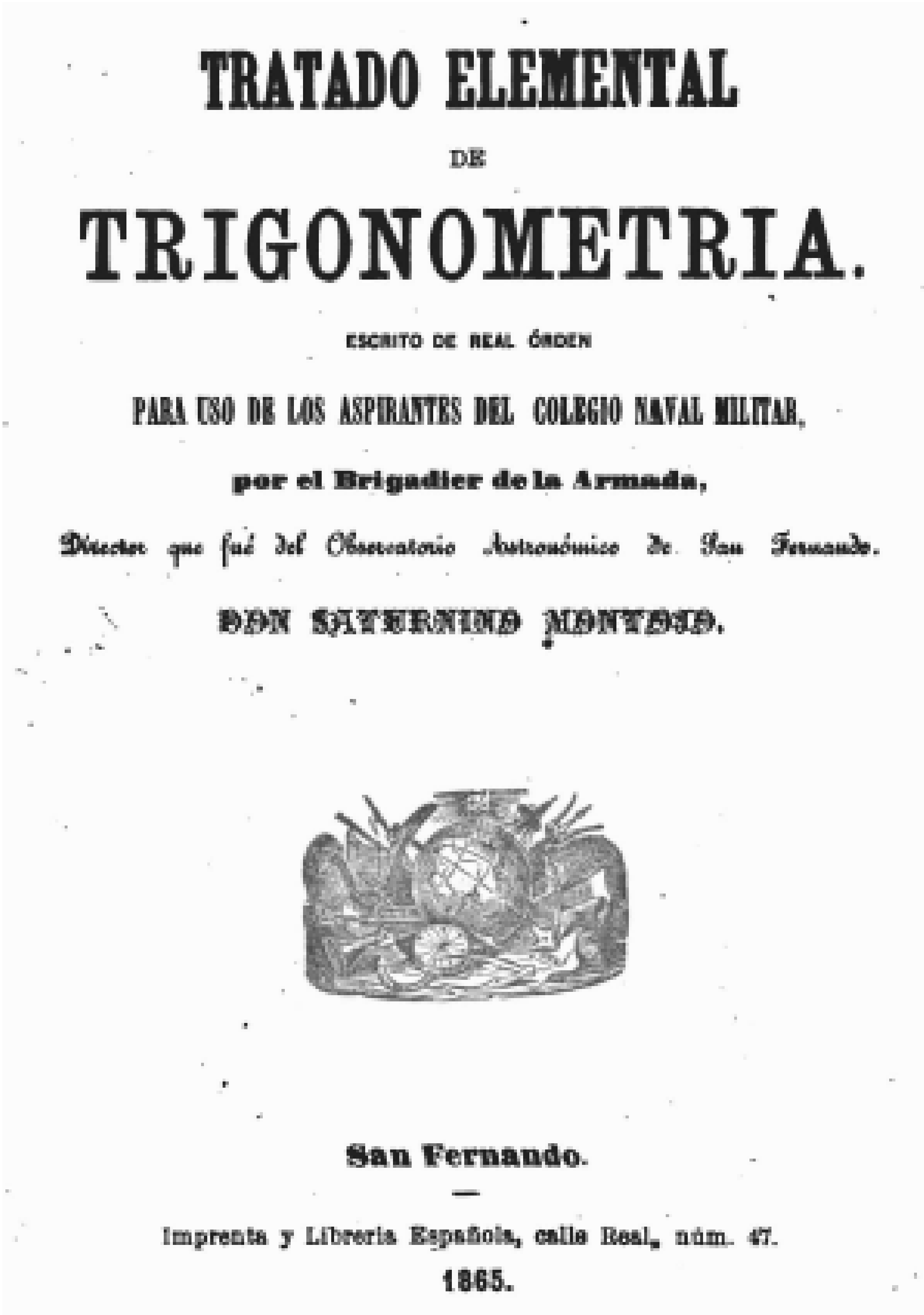
IMPRENTA, LIBRERÍA, Y LITOGRAFÍA DE LA Revista Médica,

á cargo de Don Juan B. de Gaona,

plaza de la Constitucion número 11.

1850.

1.36. Montojo, Saturnino. Tratado elemental de trigonometría: para uso de los aspirantes al Colegio Naval Militar (San Fernando, 1865)



TRATADO ELEMENTAL

DE

TRIGONOMETRIA.

ESCRITO DE REAL ÓRDEN

PARA USO DE LOS ASPIRANTES DEL COLEGIO NAVAL MILITAR,

por el Brigadier de la Armada,

Director que fué del Observatorio Astronómico de San Fernando.

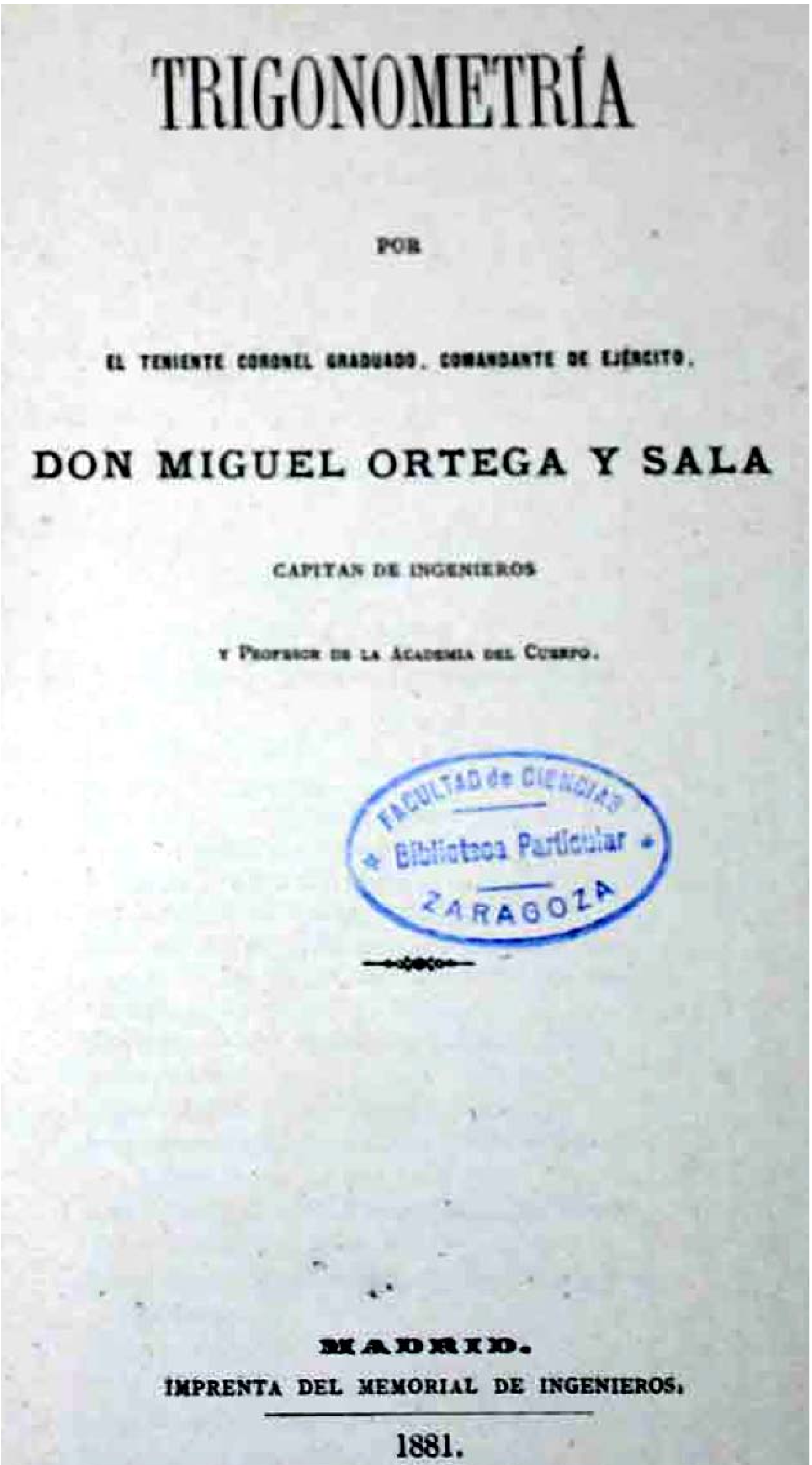
DON SATURNINO MONTOJO.

San Fernando.

Imprenta y Librería Española, calle Real, núm. 47.

1865.

1.37. Ortega y Sala, Miguel. Trigonometría (Madrid, 1881)



TRIGONOMETRÍA

POR

EL TENIENTE CORONEL GRADUADO, COMANDANTE DE EJÉRCITO,

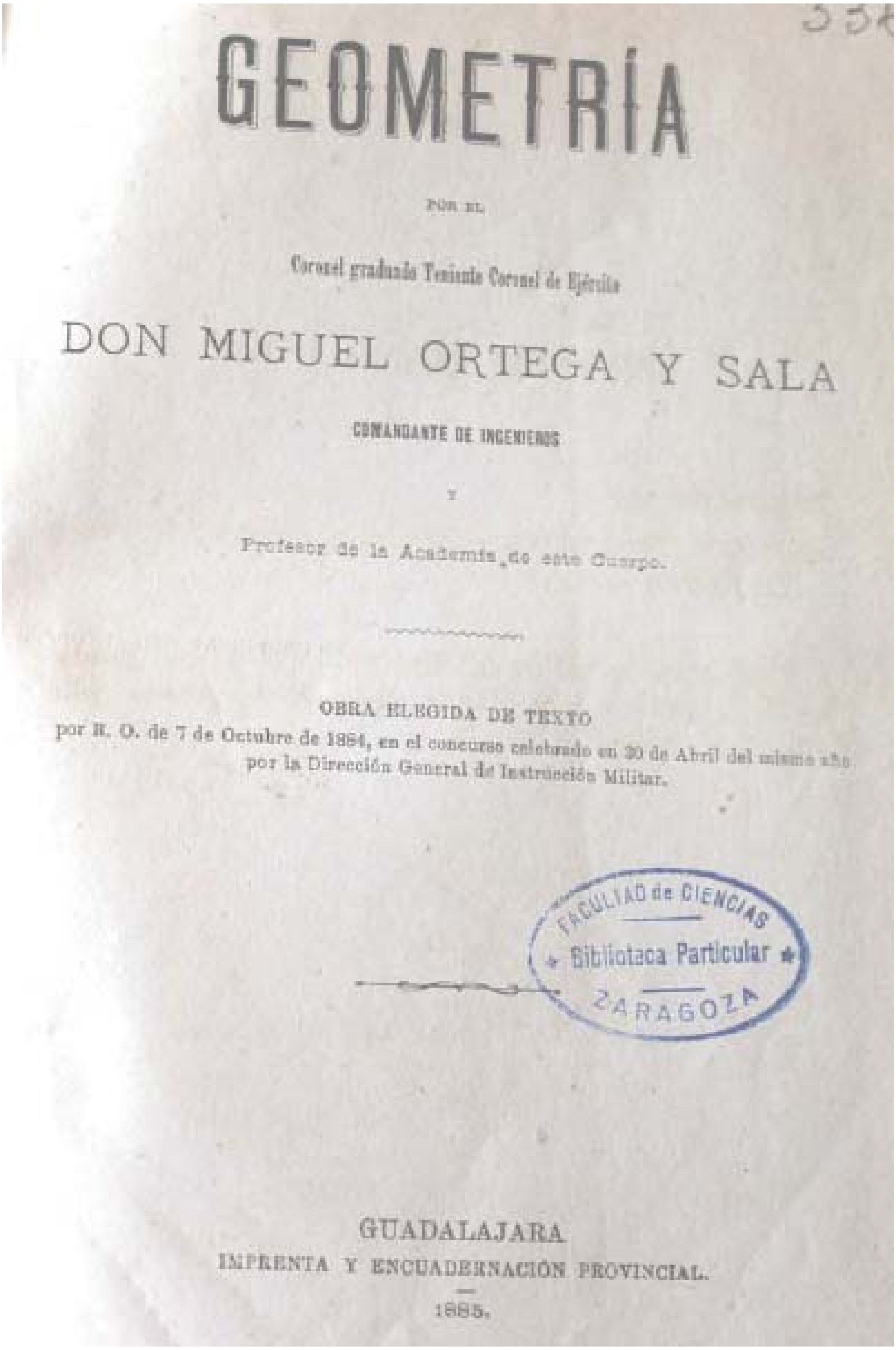
DON MIGUEL ORTEGA Y SALA

CAPITAN DE INGENIEROS

Y PROFESOR DE LA ACADEMIA DEL CUERPO.

MADRID.
IMPRENTA DEL MEMORIAL DE INGENIEROS.
1881.

1.38. Ortega y Sala, Miguel. Geometría (Madrid, 1885)



GEOMETRÍA

POR EL

Coronel graduado Teniente Coronel de Ejército

DON MIGUEL ORTEGA Y SALA

COMANDANTE DE INGENIEROS

Y

Profesor de la Academia de este Cuerpo.

OBRA ELEGIDA DE TEXTO
por R. O. de 7 de Octubre de 1884, en el concurso celebrado en 20 de Abril del mismo año
por la Dirección General de Instrucción Militar.

GUADALAJARA
IMPRENTA Y ENCUADERNACIÓN PROVINCIAL.
1885.

1.39. Peral, Pedro del. Tratado de álgebra: escrito con arreglo al nuevo programa de ingreso en la Escuela Naval Flotante (Sevilla, 1885)

TRATADO

DE

ÁLGEBRA

ESCRITO

CON ARREGLO AL NUEVO PROGRAMA DE INGRESO

EN LA

ESCUELA NAVAL FLOTANTE

POR

PEDRO DEL PERAL,

TENIENTE DE NAVÍO.

[illegible]

[illegible]

SEVILLA.-1885.

Est. tipográfico y litográfico del Círculo Liberal.

CALLE ROSARIO, NÚM. 21.

1.40. Playfair, John. Elements of geometry: containing the first six books of Euclid, with a supplement on the quadrature of the circle, and the geometry of solids; to which are added elements of plane and spherical trigonometry (New York, 1824)

ELEMENTS

OF

GEOMETRY:

CONTAINING

THE FIRST SIX BOOKS OF EUCLID

WITH A

SUPPLEMENT

ON THE

QUADRATURE OF THE CIRCLE AND THE GEOMETRY OF SOLIDS;

TO WHICH ARE ADDED

ELEMENTS OF PLANE AND SPHERICAL TRIGONOMETRY.

BY

JOHN PLAYFAIR, F. R. S. LOND. & EDIN.

PROFESSOR OF NATURAL PHILOSOPHY, FORMERLY OF MATHEMATICS, IN THE UNIVERSITY OF EDINBURGH.

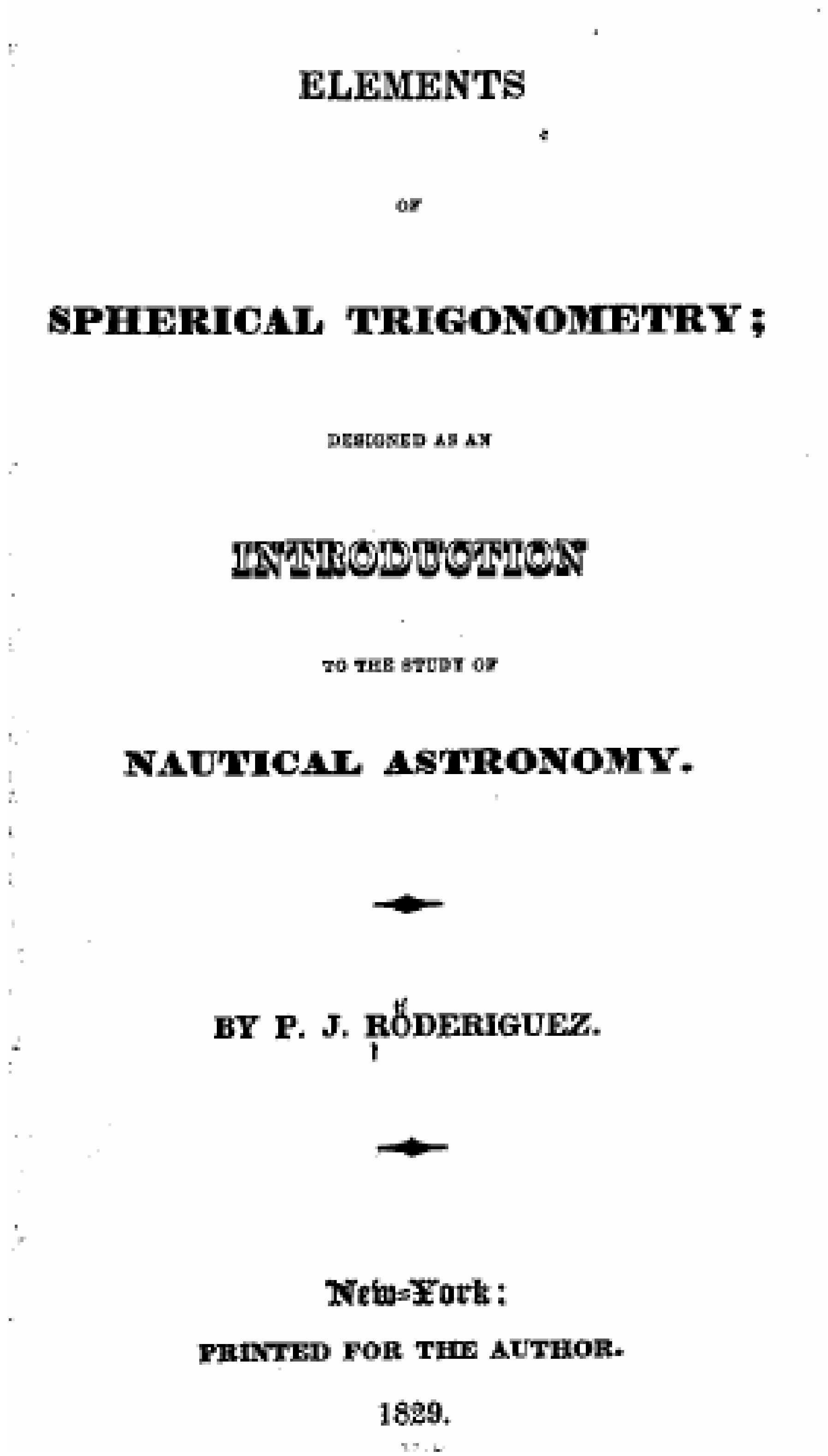
FROM THE LAST LONDON EDITION, ENLARGED.

NEW-YORK:

PUBLISHED BY E. DUYCKINCK, AND GEORGE LONG.

G. Long, Printer, No. 71, Pearl-Street.

1.41. Rodríguez Riola, Pedro José. Elements of spherical trigonometry, designed as an introduction to the study of nautical astronomy (New York, 1829)



ELEMENTS

OF

SPHERICAL TRIGONOMETRY;

DESIGNED AS AN

INTRODUCTION

TO THE STUDY OF

NAUTICAL ASTRONOMY.

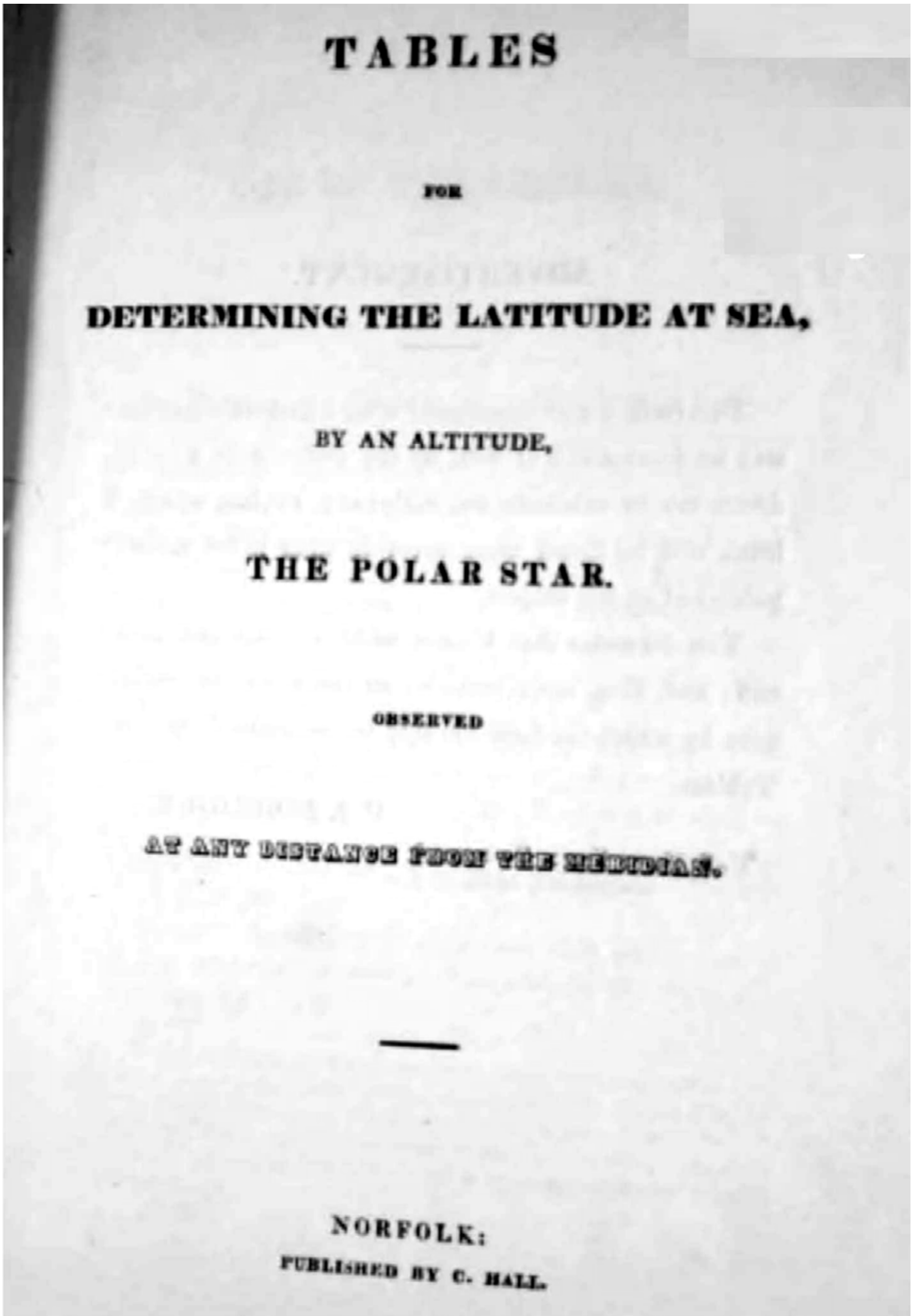
BY P. J. RODERIGUEZ.

New-York:

PRINTED FOR THE AUTHOR.

1829.

1.42. Rodríguez Riola, Pedro José. Tables for determining the latitude at sea, by an altitude, the polar star. Observed at any distance from the meridian (Norfolk, 1830)



TABLES

FOR

DETERMINING THE LATITUDE AT SEA,

BY AN ALTITUDE,

THE POLAR STAR.

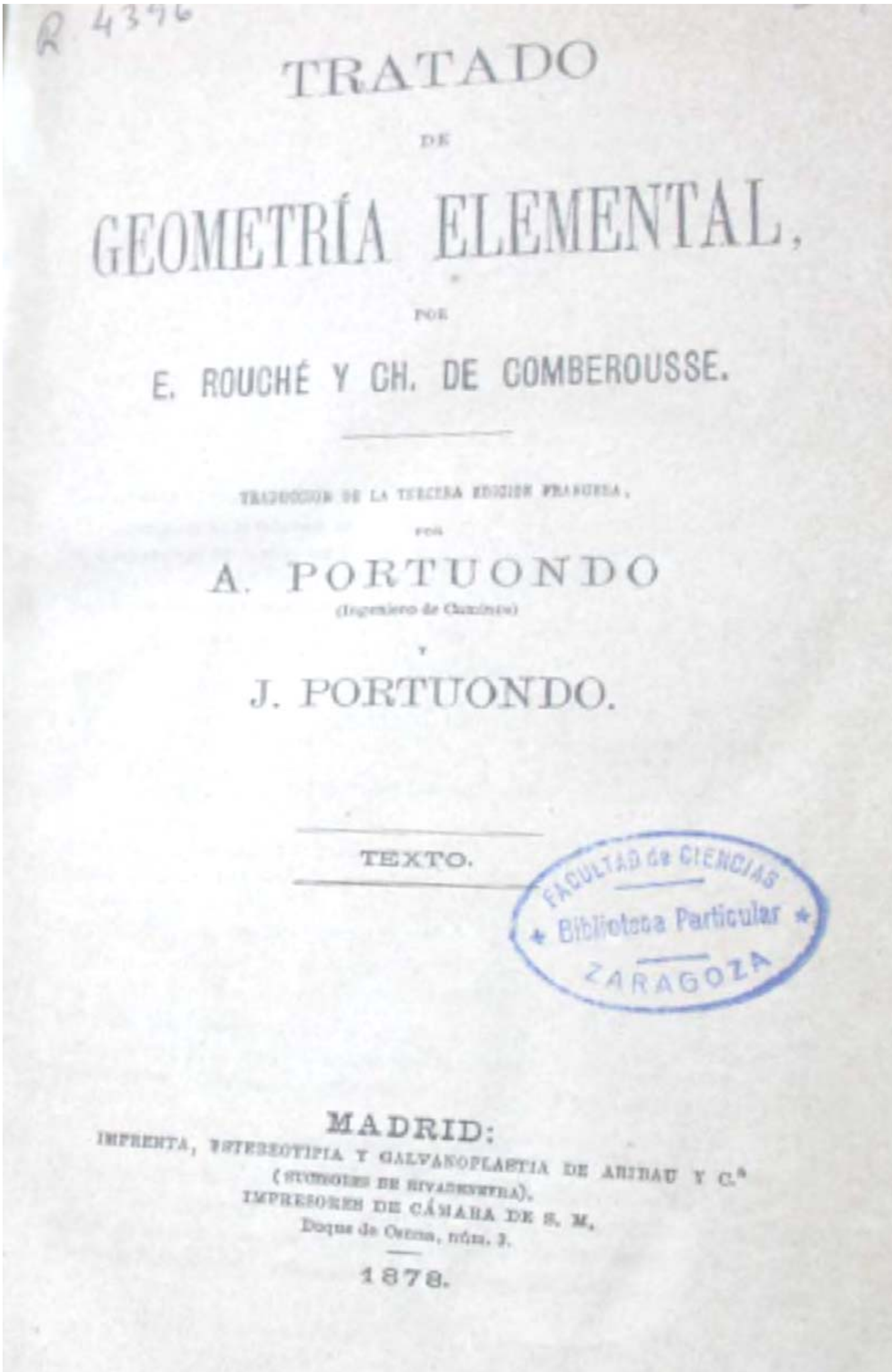
OBSERVED

AT ANY DISTANCE FROM THE MERIDIAN.

NORFOLK:

PUBLISHED BY C. HALL.

1.43. Rouché, Eugène y Comberousse, Charles. Tratado de geometría elemental, traducido por A. Portuondo y J. Portuondo (Madrid, 1878)



TRATADO

DE

GEOMETRÍA ELEMENTAL,

POR

E. ROUCHÉ Y CH. DE COMBEROUSSE.

TRADUCCION DE LA TERCERA EDICION FRANCESA,

POR

A. PORTUONDO

(Ingeniero de Caminos)

Y

J. PORTUONDO.

TEXTO.

MADRID:
IMPRENTA, ESTEREOTIPIA Y GALVANOPLASTIA DE ARIBAU Y C.ª
(SUCESORES DE RIVADENEYRA).
IMPRESORES DE CÁMARA DE S. M.
Duque de Osuna, núm. 3.

1878.

1.44. Sánchez Reciente, Juan. Tratado de trigonometria plana general, con la construccion, y ufo de las tablas de los logarithmos, y del canon trigonometrico de senos, tangentes, y secantes logarithmicas (Sevilla, 1742)

TRATADO
DE
TRIGONOMETRIA
PLANA GENERAL,
CON LA CONSTRUCCION,
y uſo de las Tablas de los Logarithmos, y del Canon Trigonometrico de Senos, Tangentes, y Secantes logarithmicas.
DEDICADO
à los Señores Caballeros Mayordomo, y Diputados de la Univerſidad de Marcantes, y del Real Colegio Seminario de Señor San Telmo de Sevilla.
DISPUESTO
por Don Juan Sanchez Reciente, Preſbytero, Maeſtro de Mathematicas en dicho Real Colegio.
Año de 1742.
CON LICENCIA:
En Sevilla: En la Imprenta de los RECIENTES, en la Pajeria.

1.45. Salinas Angulo, Ignacio y Benítez y Parodi, Manuel. Álgebra (Madrid, 1898)

ALGEBRA

POR

D. IGNACIO SALINAS Y ANGULO

Y

D. MANUEL BENÍTEZ Y PARODI

CORONELES DEL CUERPO DE E. M. DEL EJÉRCITO

SEGUNDA PARTE

elegida de texto por real orden de 21 de octubre de 1886
en el concurso celebrado el 3 de octubre de 1885 por la Dirección general
de Instrucción Militar

TERCERA EDICIÓN
NOTABLEMENTE CORREGIDA

MADRID
LIBRERÍA DE HERNANDO Y COMP.ª—ARENAL, NÚM. 11

IMPRENTA DEL DEPÓSITO DE LA GUERRA
1898

1.46. Salinas Angulo, Ignacio y Benítez y Parodi, Manuel. Aritmética (Madrid, 1898)

ARITMÉTICA

POR

DON IGNACIO SALINAS Y ANGULO

Y

DON MANUEL BENÍTEZ Y PARODI

CORONELES DE ESTADO MAYOR

OBRA ELEGIDA DE TEXTO

para todas las academias militares, por real orden de 28 de junio de [illegible],
en el concurso celebrado, el 30 de abril del mismo año, por la Dirección General
de Instrucción Militar, y premiada con medalla de oro
en la Exposición Universal de Barcelona

CUARTA EDICIÓN

CORREGIDA Y AUMENTADA

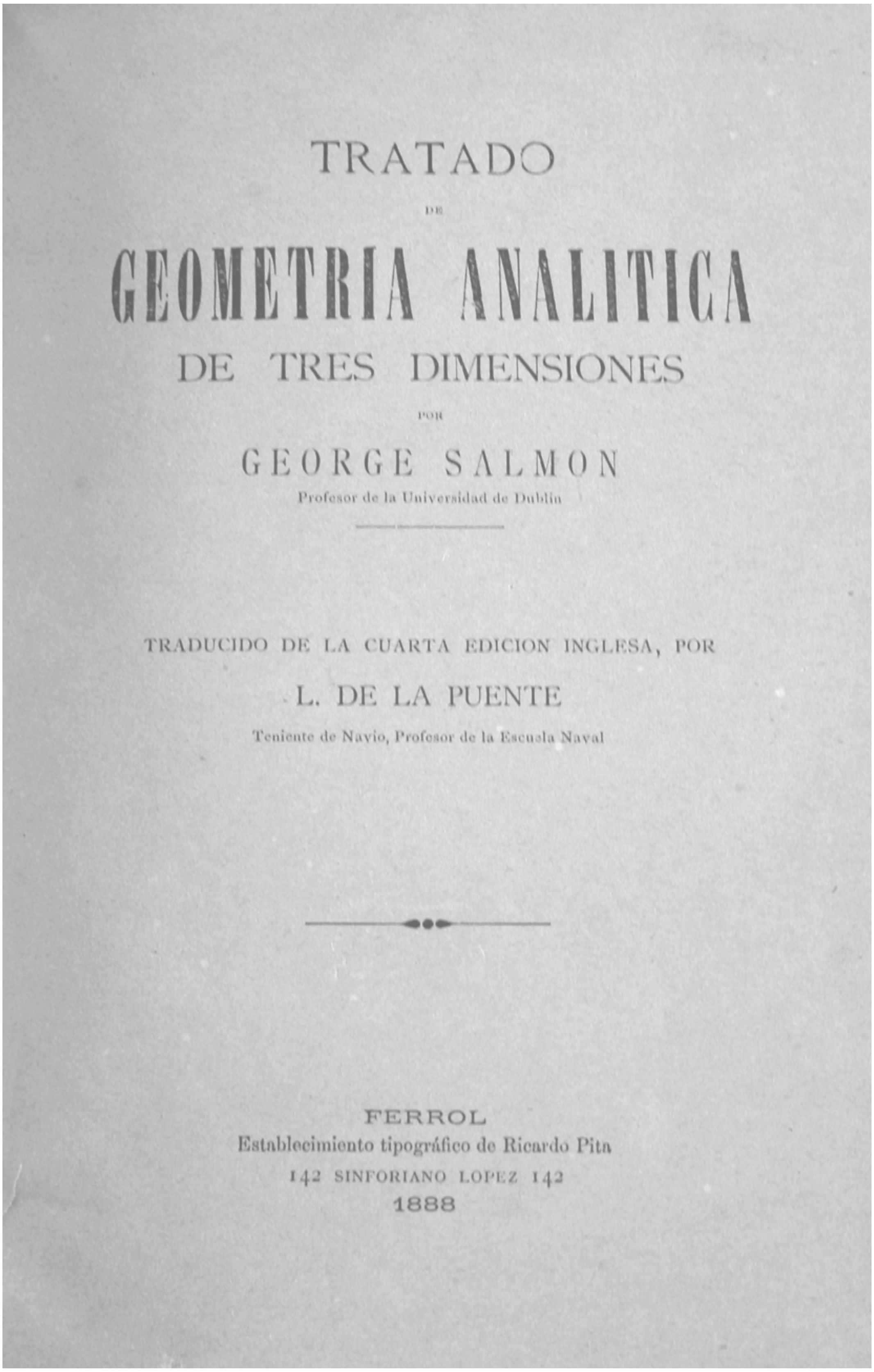
MADRID

LIBRERÍA DE HERNANDO Y COMP.ª — ARENAL, NÚM. [illegible]

IMPRENTA DEL DEPÓSITO DE LA GUERRA

1898

1.47. Salmon Weekes, George. Tratado de geometría analítica de tres dimensiones; traducido de la cuarta edicion inglesa por L. de la Puente (El Ferrol, 1888)



TRATADO

DE

GEOMETRIA ANALITICA

DE TRES DIMENSIONES

POR

GEORGE SALMON

Profesor de la Universidad de Dublin

TRADUCIDO DE LA CUARTA EDICION INGLESA, POR

L. DE LA PUENTE

Teniente de Navio, Profesor de la Escuela Naval

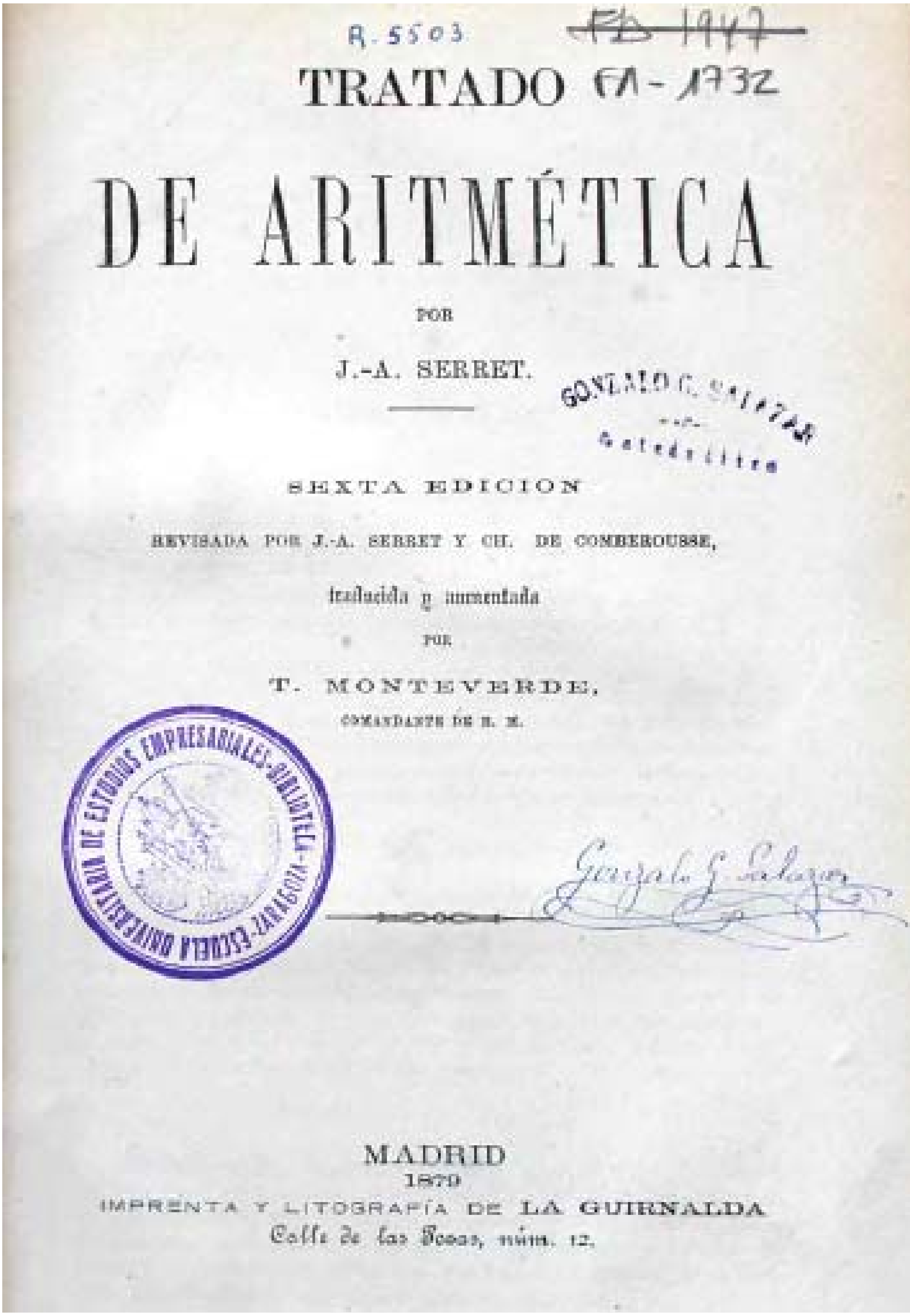
FERROL

Establecimiento tipográfico de Ricardo Pita

142 SINFORIANO LOPEZ 142

1888

1.48. Serret, J. A. Tratado de aritmética (Madrid, 1879)



TRATADO

DE ARITMÉTICA

POR

J.-A. SERRET.

SEXTA EDICION

REVISADA POR J.-A. SERRET Y CH. DE COMBEROUSSE,

traducida y aumentada

POR

T. MONTEVERDE,

COMANDANTE DE E. M.

Gonzalo G. Salazar

MADRID
1879
IMPRENTA Y LITOGRAFÍA DE LA GUIRNALDA
Calle de las Fosas, núm. 12.

1.49. Simson, Robert. The elements of Euclid, viz. The first six books, together with the eleventh and twelfth. The errors, by which Theon, or others, have long ago vitiated these books, are corrected, and some of Euclid's demonstrations are restored. Also the book of Euclid's data, in like manner corrected. To this edition are also annexed, elements of plane and spherical trigonometry (Philadelphia, 1821)

THE

ELEMENTS OF EUCLID,

VIZ.

THE FIRST SIX BOOKS,

TOGETHER WITH THE

ELEVENTH AND TWELFTH.

THE ERRORS,

BY WHICH THEON, OR OTHERS, HAVE LONG AGO VITIATED THESE BOOKS, ARE CORRECTED, AND SOME OF EUCLID'S DEMONSTRATIONS ARE RESTORED.

ALSO,

THE BOOK OF EUCLID'S DATA,

IN LIKE MANNER CORRECTED.

BY ROBERT SIMSON, M. D.

Emeritus Professor of Mathematics in the University of Glasgow.

TO THIS EDITION ARE ALSO ANNEXED,

ELEMENTS OF PLANE AND SPHERICAL TRIGONOMETRY.

PHILADELPHIA:

PUBLISHED BY

ROBERT DESILVER, NO. 110, WALNUT STREET,

AND

THOMAS DESILVER, NO. 253, MARKET STREET.

J. Maxwell, Printer.

1821.

1.50. Terry y Rivas, Antonio. Problemas y ejercicios del cálculo algebraico, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, Tomo I (Madrid, 1879)

PROBLEMAS

Y

EJERCICIOS DEL CÁLCULO ALGEBRÁICO

PARTE ORIGINALES

Y PARTE ESCOGIDOS DE LOS PRINCIPALES AUTORES QUE TRATAN DE LA MATERIA

POR

ANTONIO TERRY Y RIVAS

CAPITAN DE FRAGATA DE LA ARMADA, CORONEL GRADUADO DE EJÉRCITO

OBRA DE TEXTO

PARA EL EXÁMEN DE INGRESO EN EL CUERPO GENERAL DE LA ARMADA

TOMO I

MADRID
IMPRENTA DE PEDRO ABIENZO
San Andrés, 20 y Paz, 6

1879

1.51. Terry y Rivas, Antonio. Soluciones de los problemas y resultados de los ejercicios del cálculo algebraico, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, Tomo II (Madrid, 1879)

SOLUCIONES

DE LOS

PROBLEMAS Y RESULTADOS DE LOS EJERCICIOS

DEL CÀLCULO ALGEBRÀICO

POR

ANTONIO TERRY Y RIVAS

CAPITAN DE FRAGATA DE LA ARMADA, CORONEL GRADUADO DE EJÉRCITO

OBRA DE TEXTO

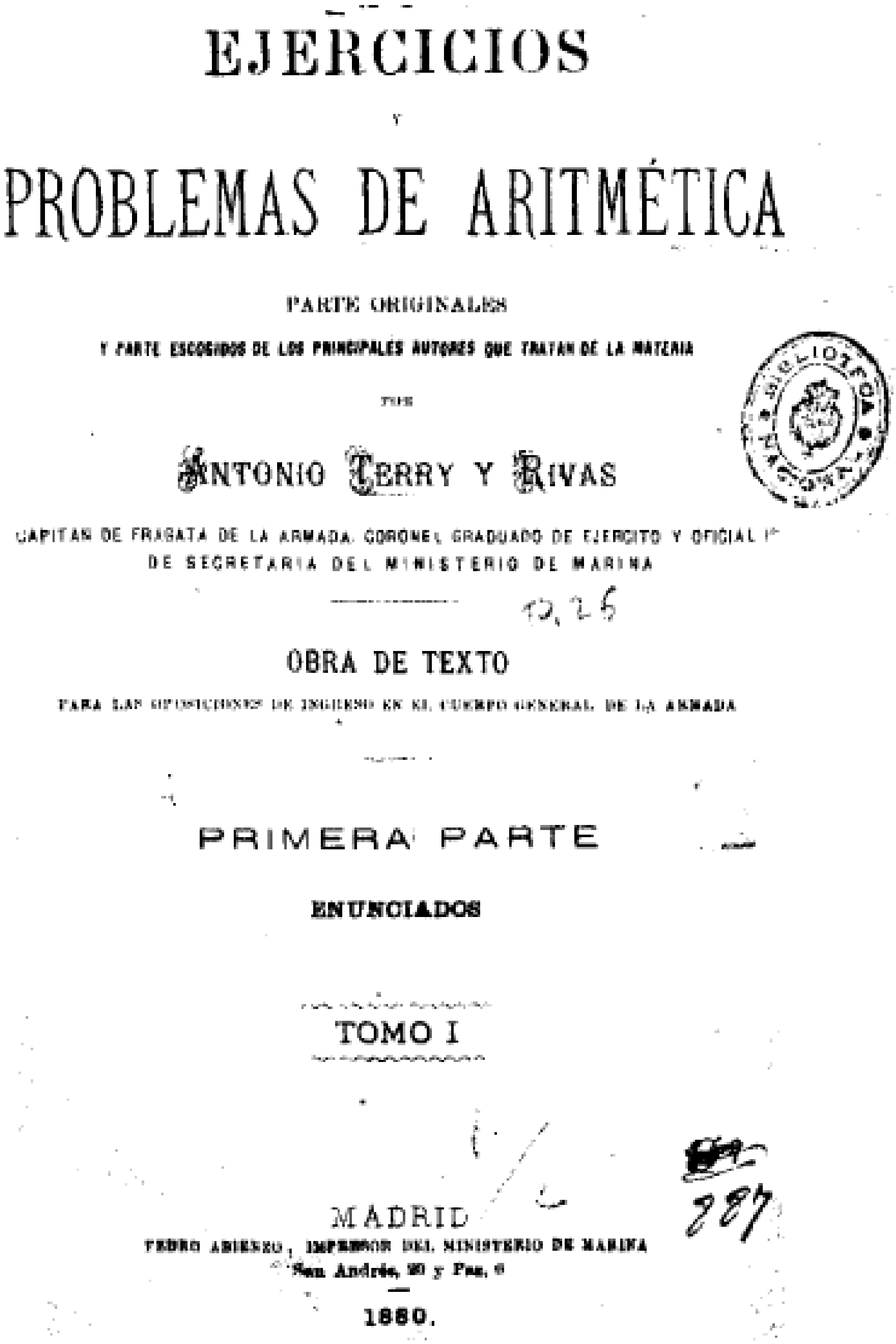
PARA EL EXÁMEN DE INGRESO EN EL CUERPO GENERAL DE LA ARMADA

TOMO II

MADRID
IMPRENTA DE PEDRO ABIENZO.
San Andrés, 20 y Paz, 6

1879

1.52. Terry y Rivas, Antonio. Ejercicios y problemas de aritmética, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, Tomo I enunciados (Madrid, 1880)



EJERCICIOS

Y

PROBLEMAS DE ARITMÉTICA

PARTE ORIGINALES

Y PARTE ESCOGIDOS DE LOS PRINCIPALES AUTORES QUE TRATAN DE LA MATERIA

POR

ANTONIO TERRY Y RIVAS

CAPITAN DE FRAGATA DE LA ARMADA, CORONEL GRADUADO DE EJERCITO Y OFICIAL 1º DE SECRETARIA DEL MINISTERIO DE MARINA

12,25

OBRA DE TEXTO

PARA LAS OPOSICIONES DE INGRESO EN EL CUERPO GENERAL DE LA ARMADA

PRIMERA PARTE

ENUNCIADOS

TOMO I

287

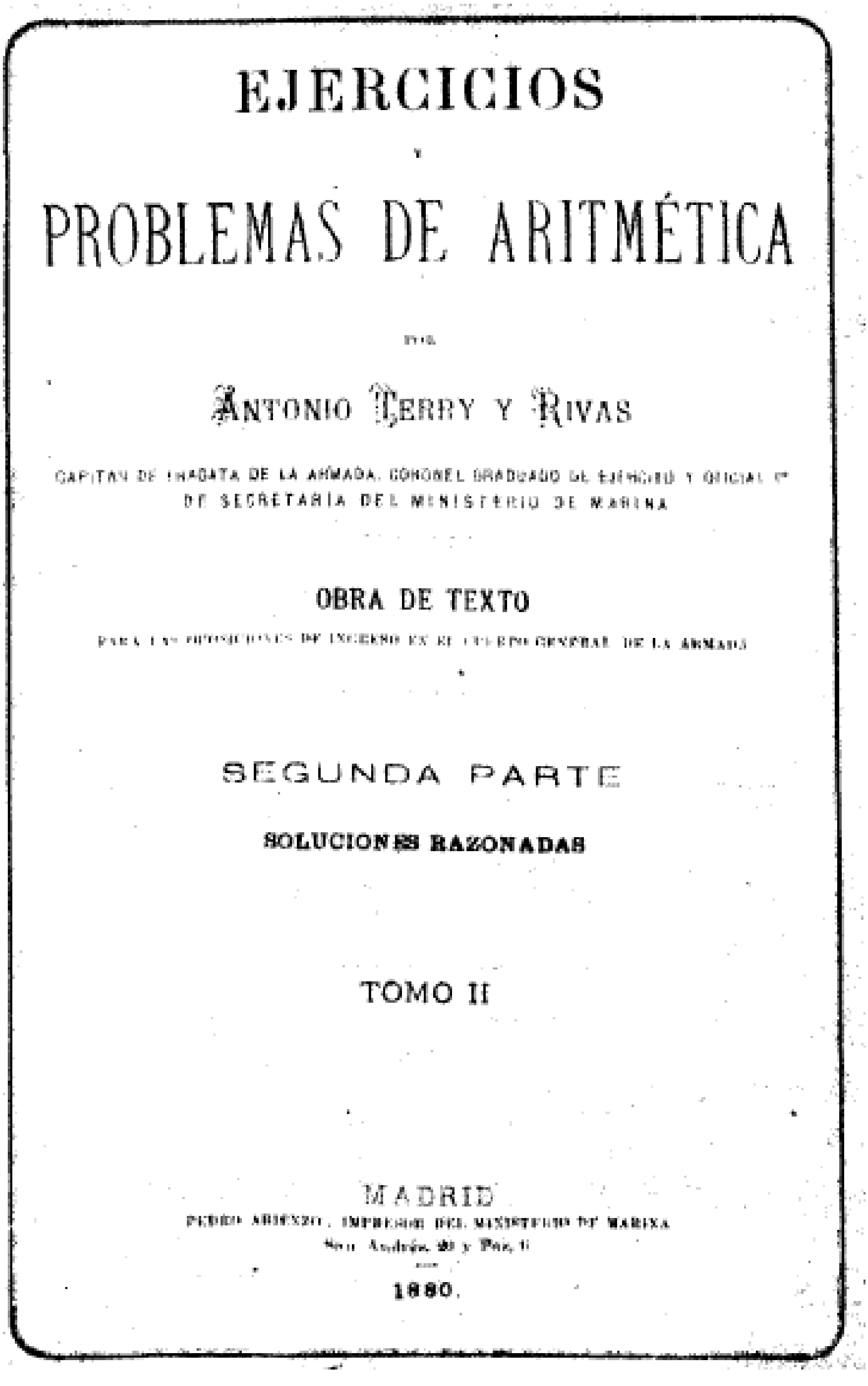
MADRID

PEDRO ABIENZO, IMPRESOR DEL MINISTERIO DE MARINA

San Andrés, 20 y Pez, 6

1880.

1.53. Terry y Rivas, Antonio. Ejercicios y problemas de aritmética, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, Tomo II soluciones razonadas (Madrid, 1880)



EJERCICIOS

Y

PROBLEMAS DE ARITMÉTICA

POR

ANTONIO TERRY Y RIVAS

CAPITÁN DE FRAGATA DE LA ARMADA, CORONEL GRADUADO DE EJÉRCITO Y OFICIAL 1º DE SECRETARÍA DEL MINISTERIO DE MARINA

OBRA DE TEXTO

PARA LAS OPOSICIONES DE INGRESO EN EL CUERPO GENERAL DE LA ARMADA

SEGUNDA PARTE

SOLUCIONES RAZONADAS

TOMO II

MADRID

PEDRO ABIENZO, IMPRESOR DEL MINISTERIO DE MARINA

San Andrés, [illegible] y Pez, [illegible]

1880.

1.54. Terry y Rivas, Antonio. Ejercicios de geometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia (Madrid, 1881)

EJERCICIOS

DE

GEOMETRÍA

PARTE ORIGINALES

Y PARTE ESCOGIDOS DE LOS PRINCIPALES AUTORES QUE TRATAN DE LA MATERIA

POR

ANTONIO TERRY Y RIVAS

CAPITAN DE FRAGATA DE LA ARMADA, CORONEL GRADUADO DE EJÉRCITO
Y OFICIAL 1.º DE SECRETARÍA DEL MINISTERIO DE MARINA

In scientiis addiscendis, exempla magis prosunt quam præcepta.—NEWTON.

OBRA DE TEXTO

PARA LAS OPOSICIONES DE INGRESO EN EL CUERPO GENERAL DE LA ARMADA

MADRID
PEDRO ABIENZO, IMPRESOR DEL MINISTERIO DE MARINA
SAN ANDRÉS, 20, Y PAZ, 6

1881

1.55. Terry y Rivas, Antonio. Ejercicios de trigonometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia (Madrid, 1881)

EJERCICIOS

DE

TRIGONOMETRÍA

PARTE ORIGINALES

Y PARTE ESCOGIDOS DE LOS PRINCIPALES AUTORES QUE TRATAN DE LA MATERIA

POR

ANTONIO TERRY Y RIVAS

CAPITAN DE FRAGATA DE LA ARMADA, CORONEL GRADUADO DE EJÉRCITO

Y OFICIAL 1.º DE SECRETARÍA DEL MINISTERIO DE MARINA

OBRA DE TEXTO

PARA LAS OPOSICIONES DE INGRESO EN EL CUERPO GENERAL DE LA ARMADA

MADRID

PEDRO ABIENZO, IMPRESOR DEL MINISTERIO DE MARINA

SAN ANDRÉS, 20 Y PAZ, 6

1881.

1.56. Terry y Rivas, Antonio. Ejercicios de algebra, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, primera parte (Madrid, 1885)

EJERCICIOS

DE

ALGEBRA

PARTE ORIGINALES

Y PARTE ESCOGIDOS DE LOS PRINCIPALES AUTORES QUE TRATAN DE LA MATERIA

POR

ANTONIO TERRY Y RIVAS

CAPITAN DE FRAGATA DE LA ARMADA Y CORONEL GRADUADO DE EJÉRCITO

OBRA DE TEXTO

Para las oposiciones de ingreso en el Cuerpo General, Infantería y Administrativo de la Armada

TERCERA EDICION

CORREGIDA Y AUMENTADA CON LAS ECUACIONES DE GRADOS SUPERIORES Y LOS DETERMINANTES

In scientiis addiscendis, exempla magis prosunt quam præcepta.— NEWTON.

PRIMERA PARTE

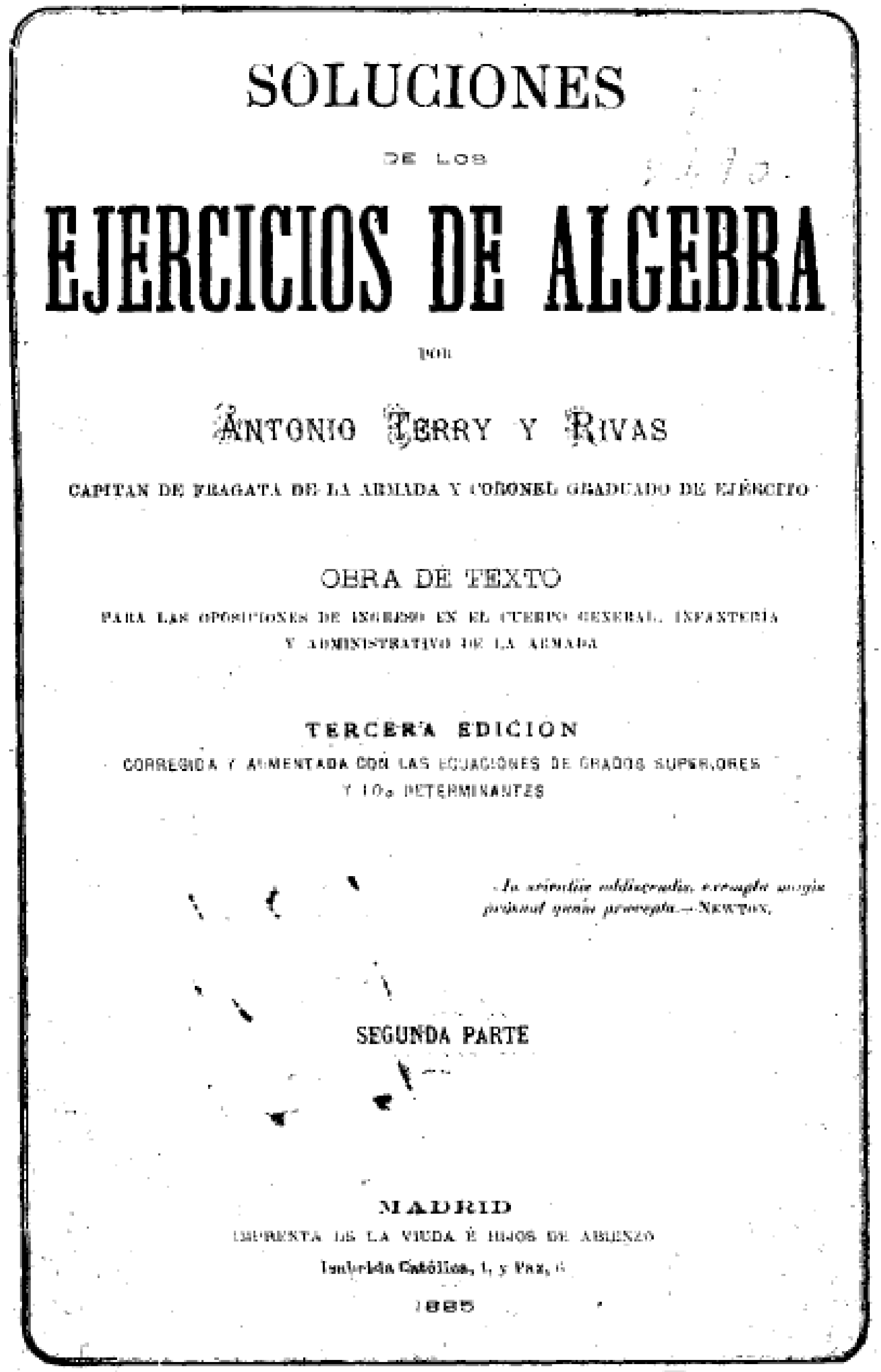
MADRID

IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJOS DE AHIENZO

Isabel la Católica, 4, y Paz, 6

1885

1.57. Terry y Rivas, Antonio. Soluciones de los ejercicios de algebra, segunda parte (Madrid, 1885)



SOLUCIONES

DE LOS

EJERCICIOS DE ALGEBRA

POR

ANTONIO TERRY Y RIVAS

CAPITAN DE FRAGATA DE LA ARMADA Y CORONEL GRADUADO DE EJÉRCITO

OBRA DE TEXTO

PARA LAS OPOSICIONES DE INGRESO EN EL CUERPO GENERAL, INFANTERÍA
Y ADMINISTRATIVO DE LA ARMADA

TERCERA EDICION

CORREGIDA Y AUMENTADA CON LAS ECUACIONES DE GRADOS SUPERIORES
Y LOS DETERMINANTES

In scientiis addiscendis, exempla magis prosunt quam præcepta.—NEWTON.

SEGUNDA PARTE

MADRID
IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJOS DE ABIENZO
Isabel la Católica, 1, y Paz, 6
1885

1.58. Tofiño, Vicente. Compendio de la geometría elemental y trigonometría rectilínea: para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas en su Academia (Isla de León, 1771)

COMPENDIO
DE LA GEOMETRIA
ELEMENTAL,
Y TRIGONOMETRIA
RECTILINEA:
PARA EL USO DE LOS
CAVALLEROS
GUARDIAS-MARINAS
EN SU ACADEMIA.

ESCRITO POR DON VICENTE TOFIÑO de San Miguél, Theniente de Navio de la Real Armada, y Director de la misma Academia.

CON LICENCIA:

Impresso en la Isla de Leon, en la Imprenta de la Real Academia, Año de 1771.

1.59. Tosca, Tomás Vicente. Compendio mathemático, en que se contienen todas las materias mas principales de las ciencias, que tratan la cantidad. Tomo III. Trigonometría, secciones cónicas, maquinaria (Valencia, 1710)

COMPENDIO
MATHEMATICO,
EN QVE SE CONTIENEN
TODAS LAS MATERIAS MAS
principales de las Ciencias que
tratan de la cantidad.

QVE COMPVSO EL DOCTOR THOMAS Vicente Tosca, Presbitero de la Congregacion del Oratorio de San Felipe Neri de Valencia.

Y DEDICA
AL SEÑOR
D. FELIPE QVINTO
EL ANIMOSO,
REY DE LAS ESPAÑAS.

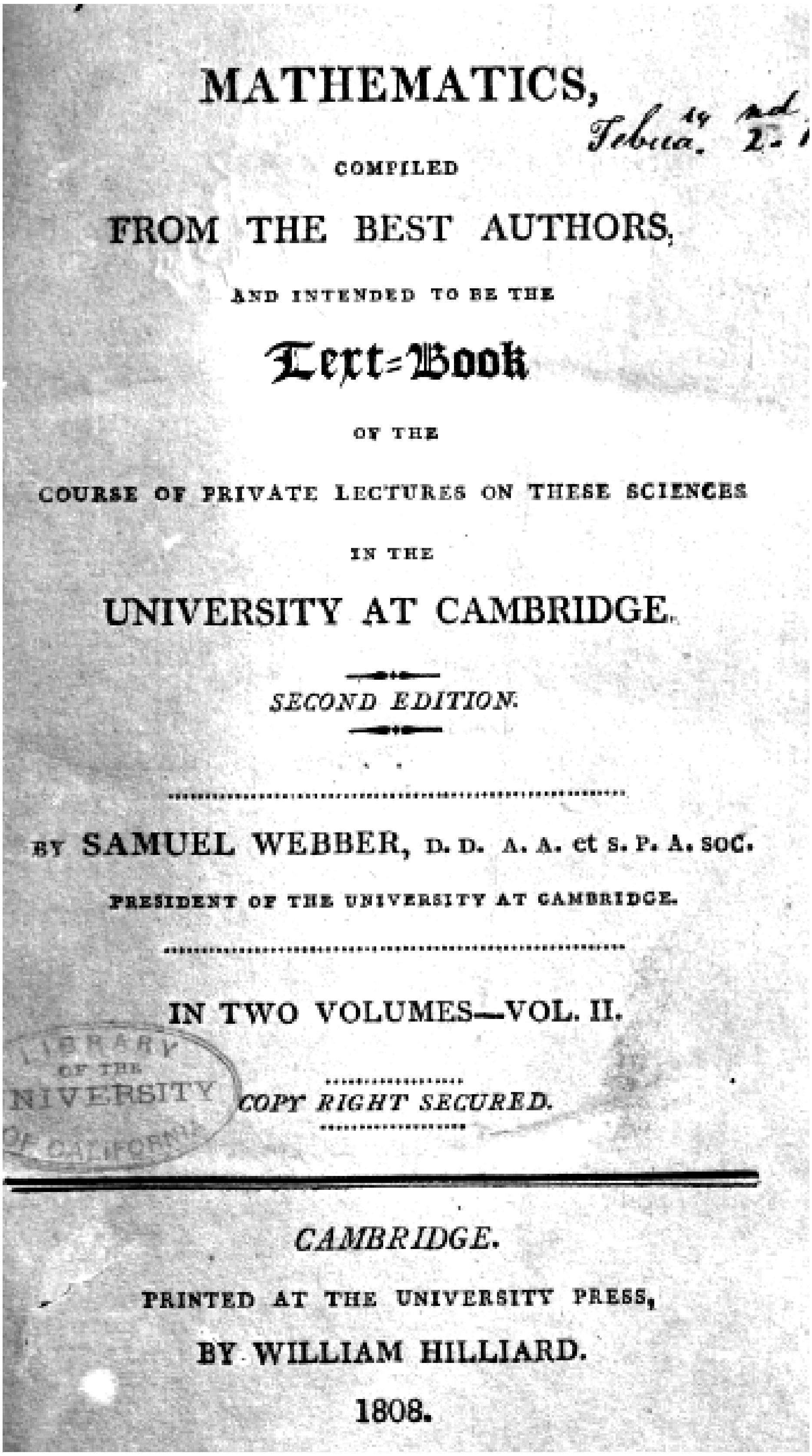
TOMO III.

Que comprehende: TRIGONOMETRIA. SECCIONES CONICAS. MAQUINARIA.

(**) (**)

En Valencia, por Antonio Bordazar. Año 1710.

1.60. Webber, Samuel. Mathematics, compiled from the best authors, and intended to be the text-book of the course of private lectures on these sciences in the university at Cambridge, Vol. II (Cambridge, 1808)



MATHEMATICS,

COMPILED

FROM THE BEST AUTHORS,

AND INTENDED TO BE THE

Text-Book

OF THE

COURSE OF PRIVATE LECTURES ON THESE SCIENCES

IN THE

UNIVERSITY AT CAMBRIDGE.

SECOND EDITION.

BY SAMUEL WEBBER, D. D. A. A. et S. P. A. SOC.

PRESIDENT OF THE UNIVERSITY AT CAMBRIDGE.

IN TWO VOLUMES—VOL. II.

COPY RIGHT SECURED.

CAMBRIDGE.

PRINTED AT THE UNIVERSITY PRESS,

BY WILLIAM HILLIARD.

1808.

2. *ÍNDICES DE LOS LIBROS REVISADOS*

2.1. Bacas, Darío y Escandón, Ramón. Teoría elemental de las determinantes y sus aplicaciones al álgebra y á la trigonometría (Madrid, 1883)

CAPÍTULO III. PRODUCTOS Y POTENCIAS DE LAS DETERMINANTES

I.- MULTIPLICACIÓN DE LAS DETERMINANTES

Teorema XVI. Grado del producto de dos determinantes del grado n. Regla para la formación del producto de dos determinantes del mismo grado

Caso en que las determinantes son de grados diferentes

II. POTENCIAS DE LAS DETERMINANTES

Elevación á potencias de las determinantes

CAPÍTULO IV. DETERMINANTES ESPECIALES.

I.- DETERMINANTES RECÍPROCAS Ó ADJUNTAS.

Definición

Teorema XVII. Relación entre una determinante cualquiera y su recíproca

Corolario I

Corolario II

II.- DETERMINANTES SIMÉTRICAS.

Definición

Consecuencias de la definición

Ejercicios

III.- DETERMINANTES HEMI-SIMÉTRICAS.

Definición

Teorema XVIII. La determinante hemi-simétrica de grado par es nula

Ejercicios

IV.- DETERMINANTES PSEUDO- SIMÉTRICAS.

Definición

Ejercicios

V.- DETERMINANTES MÚLTIPLES

Definición

Desarrollo de la determinante múltiple

Ejercicios

LIBRO II. APLICACIONES DE LAS DETERMINANTES

CAPÍTULO PRIMERO. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES EN FORMA DE DETERMINANTES CON UNA INCÓGNITA.

Ejercicios

III- RESULTANTE DE DOS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Ecuaciones generales

Resultantes

Fórmula para hallar los valores de x conjugados con los de y

Grado de la ecuación final ó resultante

Ejercicios

CAPÍTULO IV. APLICACIONES A LA TRIGONOMETRÍA

Interpretación geométrica de las determinantes de segundo grado

Expresión del seno del arco (a-b)

Consecuencias de esta fórmula

Relaciones entre los cosenos y entre las tangentes de los ángulos de un triángulo

Reducción y cálculo de las determinantes trigonométricas

2.2. Barreda, José A. y García Velázquez, Manuel. Trigonometría elemental: obra declarada de texto para el ingreso en la Escuela Naval (San Fernando, 1917)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

LECCIÓN 1ª. NOCIONES PRELIMINARES.

LECCIÓN 2ª. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

LECCIÓN 3ª. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

LECCIÓN 4ª. TablaS DE LOGARITMOS.

LECCIÓN 5ª. LOGARITMOS.

LECCIÓN 6ª. TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS

LECCIÓN 7ª. TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS OBLICUÁNGULOS.

LECCIÓN 8ª. Trigonometría esférica. TRIÁNGULOS ESFERICOS.

LECCIÓN 9ª. TRIÁNGULOS ESFERICOS RECTÁNGULOS.

LECCIÓN 10ª. TRIÁNGULOS ESFERICOS OBLICUÁNGULOS.

LECCIÓN 11ª. TRIÁNGULOS ESFERICOS OBLICUÁNGULOS.

LECCIÓN 12ª. TRIÁNGULOS ESFERICOS OBLICUÁNGULOS.

LECCIÓN 13ª. TRIÁNGULOS ESFERICOS OBLICUÁNGULOS.

LECCIÓN 14ª. TRIÁNGULOS ESFERICOS OBLICUÁNGULOS.

APÉNDICE. CONSTRUCCIÓN DE UNA Tabla TRIGONOMÉTRICA.

I.

II. Descripción y uso de las tablas de logaritmos de las funciones circulares reglamentarias de la Armada.

2.3. Bézout, Etienne. Cours de mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, quatrieme partie, contenant les principes généraux de la méchanique, precedes del principes du calcul qui fervent d'introduction aux sciences phyfico-mathématiques (París, 1770)

(Sólo puntos principales)

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Eléments de Calcul différentiel

Des Différences fecondes, troifiemes, &c.

Des Différentielles de finus, cofinus, &c.

Des Différentielles logarithmiques.

Des Différentielles des quantités exponentielles.

Applications des Regles précédentes.

Applications aux Soutangentes, Tangentes, &c, des Lignes courbes.

Applilcations aux limites des lignes courbes, & en général aux limites des quantités, & aux queftions de Maximis & Minimis.

Des Points multiples.

Des Points d'inflexion vifibles & invifibles.

Des Points de rebrouffement.

Des Rayons de courbure ou de la développée.

Eléments du Calcul intégral.

Des Différentielles á unae feule variable, qui ont une intégrale algébrique ; & premiérement des Différentielles monomes.

Des Différentielles complexes dont l'intégration rentre dans la regle fondamentale.

Des Différentielles binomes qui peuvent s'intégrer algébriquement.

Application des Regles précédentes, á la quadrature des courbes.

Application á la rectification des lignes courbes.

Application aux furfaces courbes.

Application á la mefure des folidités.

De l`Intégration des quantités qui renferment des finus & cofinus.

De la maniere d'intégrer para approximation, & quelques ufages de cette méthode.

Ufages des approximations précédentes pour l'intégration de diverfes quantités.

De la maniere de ramener, lorfque cela eft poffible, l'intégration d'unes différentielles propofée, à celle d'une autre différentielle connue, & de diftinguer les cas aù cela fe peut.

Des Fractions rationnelles.

De quelque transformations qui peuvent faciliter les intégrations.

De l'Intégration des quantités exponentielles.

De l'Intégration des quantités à deux ou à un plus grand nombre de variables.

Des Equations différentielles.

Des Equations différentielles du fecond, troifieme, &c. Ordre.

Principes généraux de la Méchanique.

2.4. Bézout, Etienne. Cours de mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, seconde partie, contenant le élemens de géométrie, la trigonométrie rectiligne & la trigonométrie fphérique (París, 1771)

(Sólo la parte de Trigonometría)

PREFACIO

DE LA TRIGONOMÉTRIE

De la Trigonométrie plane ou rectiligne

Des Sinus, Cofinus, Tangentes, Cotangentes, Sécantes et Cofécantes

De la Réfolution des Triangles Rectangles

Réfolution des Triangles Obliquangles

Du Nivellement

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Notions préliminaires

Propriétés des Triangles Sphériques

Moyens de reconnaître dans quel cas les angles ou les còtés qu'on cherche dans les Triangles sphériques

Rectangles doivent être plus grands ou plus petits que 90º

Principes pour la Réfolution des Triangles Sphériques Rectangles

Table pour la Réfolution de tous les cas poffibles des Triangles Sphériques Rectangles

Des Triangles Sphériques Obliquangles

Principes pour la Réfolution des Triangles Sphériques Obliquangles

Réfolution des Triangles Sphériques Obliquangles

Remarque

2.5. Bielsa y Ciprián, José. Tratado de geometría descriptiva, sombras, topográfico y sistema de acotaciones (Segovia, 1857)

(Sólo puntos principales)

LIBRO I.

CAPITULO I. Nociones preliminares.

CAPITULO II. Problemas relativos à la línea recta y el plano.

LIBRO II.

CAPITULO I. Generación y representación de las superficies.

CAPITULO II. De los planos tangentes en general.

CAPITULO III. De los planos tangentes.

CAPITULO IV. (planos tangentes a superficies revolución)

LIBRO III.

CAPITULO ÚNICO (superficies desarrollables)

LIBRO IV.

CAPITULO I. Intersección de superficies.

CAPITULO II. Secciones planas.

CAPITULO III. (intersecciones)

2.6. Briot, Charles. Lecciones de álgebra elemental y superior de Ch. Briot, traducidas, ampliadas y completadas con numerosas notas y extensos apéndices por C. Sebastian y B. Portuondo (Madrid, 1880)

Definiciones
Polinomio
Términos semejantes
Ordenacion de polinomios
CAPÍTULO II. ADICION Y SUSTRACCIÓN.
Adicion
Sustraccion
CAPÍTULO III. MULTIPLICACIÓN.
Multiplicacion de dos potencias de un número
Multiplicacion de dos monomios
Multiplicacion de un polinomio por un monomio
Multiplicacion de un polinomio por otro polinomio
Regla de los signos
Ejemplos
Observaciones sobre la multiplicacion
CAPÍTULO IV. DIVISIÓN.
Cociente de dos potencias del mismo número
Exponente cero
Division de los monomios
Division de un polinomio por un monomio
Division de polinomios
Ejemplos
Observaciones sobre la division
Ejemplos
CAPÍTULO V. FRACCIONES ALGÉBRICAS.
Ejemplos
Aplicaciones del libro primero

LIBRO II. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

CAPÍTULO I. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.
Definiciones
Resolucion de una ecuacion de primer grado con una incógnita
Resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
Ejemplos

SEGUNDA PARTE.

LIBRO III. SERIES

CAPÍTULO I. PROPIEDADES ELEMENTALES DE LAS SÉRIES.

Series que tienen todos sus términos positivos

Ejemplos

Series cuyos términos tienen signos diferentes

Series de términos alternativamente positivos y negativos

Ejemplos

Teorema general

CAPÍTULO II. DEL NÚMERO E.

Límite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$, cuando m aumenta indefinidamente

CAPÍTULO III. FRACCIONES CONTÍNUAS.

Fracciones contínuas periódicas

Análisis indeterminado

LIBRO IV. LOGARITMOS.

CAPÍTULO I. ESTUDIO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

CAPÍTULO II. DE LOS LOGARITMOS.

Definicion por la funcion exponencial

Propiedades de los logaritmos

Definicion de los logaritmos por progresiones

Cambio de base

Logaritmos neperianos

Logaritmos vulgares

Resolucion de las ecuaciones exponenciales

Ejemplos

LIBRO V. DERIVADAS.

CAPÍTULO I. DERIVADAS.

Derivada de una suma

Derivada de una funcion entera

Ejemplo

Desarrollo de una funcion entera f(x) segun las potencias crecientes de h cuando se reemplaza x por x+h

I. LEY DE COCIENTES.

II. MÉTODO DE BEZOUT

III. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y BICUADRADAS

IV. PROBLEMA DE LAS LUCES

V. ANÁLISIS INDETERMINADO

Resolucion de la ecuacion $ax+by=c$ en números enteros

Resolucion de la ecuacion $ax+by=c$ en números enteros y positivos

Resolucion en números enteros de m ecuaciones con m+1 incógnitas

Resolucion en números enteros una ecuacion que contenga más de dos incógnitas

Resolucion en números enteros de un sistema cualquiera mas que indeterminado

Observacion importante

VI. PROGRESIONES

Fórmulas fundamentales aritméticas

Fórmulas fundamentales geométricas

VII. LOGARITMOS

Introduccion

Propiedades de los logaritmos

Conclusion

VIII. CANTIDADES INCONMESURABLES

IX. MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS.- POTENCIAS Y RAICES DE LOS POLINOMIOS.- FÓRMULA DEL BINOMIO.

Potencias de los polinomios

Raices de polinomios

X. GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA DEL BINOMIO.

XI. PROBLEMAS DE ANÁLISIS COMBINATORIO.

XII. PILAS DE BALAS, Y SUS RECÍPROCAS.

Recíproca

Pila cuadrangular

Pila rectangular

XIII. MULTIPLICACIÓN DE LAS DETERMINANTES.

XIV. APLICACIÓN DE LAS DETERMINANTES Á LAS FRACCIONES CONTÍNUAS.

XV. CONVENGENCIA DE LAS FRACCIONES CONTÍNUAS.

Números inconmensurables

XVI. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES BINOMIAS.

XVII. MÉTODO DE APROXIMACIÓN DE LAS RAICES DE UNA ECUACIÓN $f(x)=0$, CUANDO SE LA PUEDE PONER BAJO LA FORMA $x=\varphi(x)$

ERRATAS MÁS IMPORTANTES

LÁMINAS 1ª. Y 2ª.

2.7. Castillo y Castro, Manuel del. Sumario de trigonometría esférica para uso de los principiantes en la carrera de la navegación (Madrid, 1834)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

- INTRODUCCION
- PRIMERA PARTE

Sobre la especie de los ángulos y lados de los triángulos esféricos.

- SEGUNDA PARTE

Dirigida puramente á la resolución inmediata de los triángulos esféricos; esto es, á formar analogías para hallar el valor numérico de todos sus términos.

- PUNTO DE CURIOSIDAD PARA LOS ESTUDIOSOS.

Noticia del valor respectivo de las líneas trigonométricas de ángulos y lados de cualquier triángulo esférico, expresado en las relaciones de todas ellas con las de otros dos términos del mismo triángulo.

2.8. Cedillo, Manuel. Trigonometría aplicada á la navegacion, afsi por el beneficio de las tablas de los senos, y tangentes logarithmicas; como por el vfo de las dos efcalas plana y artificial (Sevilla, 1718)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

Introducción

LIBRO PRIMERO. DE LA TRIGONOMETRÍA APLICADA à la Navegacion.

SECCION I: de la explicación de las tablas trigonométricas y de los fundamentos de la trigonometría plana.

CAPITVLO I: De los senos tangentes y secantes y la explicacion de sus tablas.
Dificiones.
Explicacion y ufo de las tablas de los fenos y tangentes logarithmicas y de las tablas de los logarithmos.
Hallar el complemento logarítmico.
Vfo de las tablas de latitud crecida ô de partes Meridionales.

CAPITVLO II: De las observaciones y fundamentos de la trigonometría plana.
Observaciones para las resoluciones de los triángulos rectilíneos.
De los fundamentos de la Trigonometría plana.

SECCION II: De la aplicacion de la trigonometria plana á la Navegacion.

CAPITVLO I: De la refolucion de los Triangulos rectangulos aplicados á la Navegacion.

CAPITVLO II: De la aplicación de los triangulos rectangulos planos á la navegacion por las partes Meridionales.

CAPITVLO III: Del exercicio de los Problemas antecedentes para la practica de la navegacion y de la correccion de la fantafia.

CAPITVLO IV: De la refolución de los triangulos rectangulos planos aplicados à la navegacion fegun las propiedades de los logarithmos.

CAPITVLO V: Del modo de hallar la diftancia y rumbo variado por las corrientes.

LIBRO SEGUNDO DE LA TRIGONOMETRIA Inftrumentaria. Contiene los ufos de las Efcalas Plana y Artificial, aplicados à la navegacion.

SECCION I: de los ufos de la Efcala Plana para la Navegacion.

CAPITVLO I: De 1os Problemas comunes de la Navegacion.

CAPITVLO II: De los Problemas aplicados á la Navegacion, con las partes Meridionales.

CAPITVLO III: De la correccion de la fantafia.

CAPITVLO IV: Del modo de hallar la distancia, y rumbo variado de las corrientes, por la Efcala Plana.
CAPITVLO V: Del ufo de las líneas de los Senos, Tangentes, y Secantes y linea de partes iguales, de quienes 100 partes hazen el Seno de 90 gr. ó Radio, con las proporciones Trigonométricas aplicadas á la Navegacion.

SECCION II: De los ufos de la Efcala Artificial.

CAPITVLO I: De los Problemas refueltos para la Efcala Artificial.

CAPITVLO II: De los Problemas Nauticos, refueltos por Efcala Artificial.

Tabla DE LAS LATITUVDES Y LONGItudes de los Lugares de nuestra navegacion de las Indias Occidentales, fegun la que efcrivió el Capitán Don Antonio de Gaftañeta en fu libro del Quadrante de Reducción.

Tabla DE LOS SENOS Y TANGENTES SIENDO EL RADIO 1000000.

Tabla DE LOS LOGARITHMOS CORRESPONDIENTES A LOS numeros, defde 1, hafta 4400

Tabla DE LAS PARTES MERIDIONALES O DE LATITUDES crecidas.

2.9. Ciscar y Ciscar, Gabriel. Tratado de aritmética: para la instrucción de los Guardias Marinas (Murcia, 1795)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

- Nociones generales.
- Del modo de enunciar cualquier cantidad numérica y representarla con cifras.
- De las cantidades positivas y negativas.

- Del sumar y restar los números simples.
- Del complemento aritmético.
- Del multiplicar.
- Del partir.
- De los divisores de los números.
- Del modo de operar con los quebrados.
- Del modo de operar con los números complejos.
- De las potestades y raíces en general.
- De la formación del cuadrado y de su raíz,
- De la formación del cubo y de su raíz.
- De las potestades y raíces de los quebrados.
- De la extracción de las raíces de las cantidades aproximadas.
- De las razones y proporciones en general.
- De las sazones y proporciones aritméticas.
- De las razones y proporciones geométricas.
- De la regla de tres simple.
- De la regla de tres compuesta.
- De los otros problemas que se reducen a la regla de tres.
- Advertencias para la práctica.
- De las progresiones.
- De los logaritmos.
- De las tablas de simple entrada.
- Aplicación a los logaritmos.
- Suplemento a algunos articulas.
- Suplemento sobre el uso de las tablas de logaritmos.

2.10. Ciscar y Ciscar, Gabriel. Tratado de trigonometría esférica para la instrucción de los Guardias Marinas (Cartagena, 1796)

- Nociones generales sobre los planos.
- De las curvas descritas sobre la superficie de la esfera y de sus ángulos.

- Del valor de los lados y ángulos de los triángulos esféricos y de su Igualdad.
- De la relación que hay entre las especies de los lados y ángulos de los triángulos esféricos.
- De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esféricos rectángulos.
- Resolución de los triángulos esféricos rectángulos.
- De la resolución de los triángulos quadrantales.
- De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos.
- Aplicaciones.
- De las aplicaciones de la trigonometría esférica a la rectilínea.
- De los defectos del método ordinario de resolver los triángulos esféricos en ciertos casos.
- De los triángulos diferenciales.
- Advertencias para la práctica.
- Advertencias sobre algunos artículos.

2.11. Ciscar y Ciscar, Gabriel. Curso de estudios elementales de Marina, Tomo I, que contiene el tratado de aritmética (Madrid, 1803)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

- INTRODUCCION
- Capítulo I. Nociones generales.
- Capítulo II. Del modo de enunciar cualquier cantidad numérica, y representarla con cifras.
    - De los quebrados
    - De los números complexos
- Capítulo III. De las cantidades positivas y negativas.
- Capítulo IV. Del sumar y restar los números simples.
    - Del sumar
    - Del restar
    - Regla para el restar numérico de los números simples
    - Regla general para sumar varias partidas, aunque tengan diferentes signos
    - Regla para restar un conjunto de cantidades de otro conjunto, atendiendo á los signos
- Capítulo V. Del multiplicar.
    - Regla para multiplicar cualquiera cantidad numérica simple por unidades simples

  - Regla general para la multiplicación de cantidades numéricas simples
  - Regla general para multiplicar cualquier número por la unidad en cualquiera clase de los enteros
- Capítulo VI. Del partir.
  - Regla general para la division de los números simples
  - Regla para tantear las cifras que se han de escribir al quociente
  - Regla para partir con prontitud
  - Regla para dividir por la unidad con ceros á la derecha
  - De los divisores de los números
- Capítulo VII. Del modo de operar con los quebrados.
  - Regla para simplificar los quebrados
  - Regla para reducir dos ó mas fracciones á comun denominador
  - Regla para la suma de los quebrados
  - Regla para la resta de los quebrados
  - De la multiplicación y partición de los quebrados
  - Regla para multiplicar los quebrados entre sí
  - Regla para partir un quebrado
  - Regla para reducir los quebrados compuestos á simples
- Capítulo VIII. Del modo de operar con los números complexos.
  - Regla para reducir un número á otro de menor denominacion
  - Regla para reducir un número á otro de mayor denominacion
  - Aplicación de las reglas para reducir las cantidades de una especie á otra
  - Regla para sumar los números complexos
  - Regla para restar los números complexos
  - Regla para la multiplicación de los números complexos por un multiplicador simple
  - Regla para partir los números complexos por un divisor simple
  - Regla para sacar la unidad de un número propuesto
- Capítulo IX. De las potestades y raíces en general.
- Capítulo X. De las razones y proporciones en general.
  - De las razones y proporciones aritméticas
  - De las razones y proporciones geométricas
- Capítulo XI. De la regla de tres.
  - Regla para la resolucion de los problemas que dependen de la regla de tres simple

    - De la regla de tres compuesta
    - Regla para la resolucion de los problemas que dependen de la regla de tres compuesta
- Capítulo XII. De las progresiones.
- Capítulo XIII. De los logaritmos.
    - Problema Iº
    - Problema IIº
    - Problema IIIº
- Del complemento aritmético
    - Problema IVº
    - Problema Vº
    - Problema VIº
    - Problema VIIº
- Apéndice primero. Que contiene algunas aplicaciones de la regla de tres al uso de las tablas.
- Apéndice segundo. Que contiene algunas aplicaciones de las reglas de sumar, restar, y sacar la mitad de un número propuesto.

2.12. Ciscar y Ciscar, Gabriel. Curso de estudios elementales de Marina, Tomo II, que contiene el tratado de geometría (Madrid, 1803)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

- INTRODUCCION
- Capítulo I. Nociones generales
- Capítulo II. De las líneas.
- Capítulo III. De las figuras en general.
- Capítulo IV. Del ángulo y de la circunferencia.
- Capítulo V. De las líneas perpendiculares.
- Capítulo VI. De las líneas paralelas.
- Capítulo VII. De los ángulos inscritos.
- Capítulo VIII. De los triángulos en general.
- Capítulo IX. De las figuras semejantes.
- Capítulo X. De los cuadriláteros y polígonos.

- Capítulo XI. De las superficies planas.
- Capítulo XII. De las líneas que se hallan en distintos planos.
- Capítulo XIII. De los sólidos en general.
- Capítulo XIV. De las solideces.
- Capítulo XV. Nociones generales de trigonometría plana logarítmica. (p. 91, la 230 del libro)
- Capítulo XVI. De la resolución de los triángulos rectilíneos rectángulos por medio de los logaritmos.
- Capítulo XVII. De la resolución de los triángulos rectilíneos oblicuángulos empleando los logaritmos.
- Capítulo XVIII. Nociones de geometría práctica.
- Capítulo XIX. Nociones sobre el modo de levantar un plano.

2.13. Ciscar y Ciscar, Gabriel. Curso de estudios elementales de Marina, Tomo III, que contiene el tratado de cosmografía (Madrid, 1811)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

- INTRODUCCION
- Capítulo I. Nociones generales
- Capítulo II. Nociones de trigonometría esférica.
- Capítulo III. Del sistema del Mundo.
- Capítulo IV. Del modo de determinar la posición de los cuerpos celestes.
    - De la comparación de los Astros con la eclíptica
    - De la comparación de los Astros con la equinoccial
    - Resúmen
- Capítulo V. De la Tierra.
    - De los términos de comparación que se imaginan en la esfera celeste, movible con el observador
    - Resúmen
- Capítulo VI. De los fenómenos que resultan del movimiento girador de la Tierra.
    - De la diferencia entre las horas de varios lugares
    - De la relacion que hay entre las alturas de los Astros, y sus horarios y azimutes
- Capítulo VII. De los fenómenos que resultan por movimiento de traslación de la Tierra.

- De los días aparente, medio y sidéreo
- De las estaciones

- Capítulo VIII. De la Luna.
  - De las mareas
- Capítulo IX. De las correcciones que deben aplicarse a las alturas de los astros.
  - De la depresion de horizonte
  - De la refraccion astronómica
  - De la paralaje
  - De los semidiámetros aparentes de los Astros
  - Egemplo de las correcciones
- Capítulo X. De la resolución de algunos problemas que tienen aplicación al pilotaje.
  - Problema I. Determinar la latitud del observador por medio de la altura meridiana de un astro.
  - Problema II. Hallar las horas del nacer y del ponerse verdadero del Sol; esto es, las horas en que el centro de dicho astro se halla en el horizonte racional del observador.
  - Problema III. Hallar la amplitud verdadera del Sol: esto es, la amplitud correspondiente al caso de hallarse el centro de dicho astro en el horizonte verdadero.
  - Problema IV. Hallar el acimut correspondiente a cualquier altura del Sol.
  - Problema V. Determinar la hora y la altura correspondientes al caso de hallarse el Sol en el vertical primario (opcional).
  - Problema VI. Determinar la hora del paso de una estrella fija por el meridiano del observador.
  - Problema VII. Determinar la hora del meridiano de un observador correspondiente al horario de un astro (opcional).
  - Problema VIII. Determinar el horario de un astro correspondiente a una hora conocida del meridiano del observador.
  - Problema IX. Hallar la hora del meridiano del observador, correspondiente a la altura de un astro.
  - Problema X. Determinar la altura de un astro, correspondiente a una hora del meridiano del observador.
  - Problema XI. Determinar la latitud por medio de la altura de la estrella polar, tomada fuera del meridiano.
- Capítulo XI. De la hidrografía.

- Apéndice. En que se demuestran las proposiciones de Trigonometría esférica anunciadas en el Capítulo II.

2.14. Cortázar, Juan. Tratado de álgebra elemental (Madrid, 1857)

(Se ha ampliado con artículos y subartículos)

Artículo 1º: Esponentes negativos

Artículo 2º: Interpretacion de las espresiones $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$

LIBRO 2º-ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Cap. I. Nociones preliminares

Cap. II. Resolucion de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Cap. III. Eliminacion de una incógnita entre dos ecuaciones de primer grado con dos ó mas incógnitas

1º. Método de Sustitucion

2º. Método de Adicion ó Sustraccion

3º. Método de Igualacion

Cap. IV. Resolucion de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas

Cap. V. Casos de imposibilidad é indeterminacion en las ecuaciones de primer grado. Discusion de las fórmulas generales de las ecuaciones de primer grado

Artículo 1º: Ecuacion numérica con una incógnita

Artículo 2º: Discusion de la ecuación literal con una incógnita

Artículo 3º: Dos ó mas ecuaciones numéricas con igual números de incógnitas

Artículo 4º: Discusion de dos ó mas ecuaciones literales con igual números de incógnitas

Cap. VI. Resolucion de un cierto número de ecuaciones de primer grado con mayor número de incógnitas

Cap. VII. Resolucion de varias ecuaciones de primer grado con menor número de incógnitas

LIBRO 3º-PROBLEMAS DETERMINADOS DE PRIMER GRADO.

Cap. I. Nociones preliminares

Cap. II. Problemas particulares de primer grado con una incógnita

Cap. III. Problemas particulares de primer grado con dos ó mas incógnitas

Cap. IV. Problemas generales

Cap. V. Casos de imposibilidad en los problemas de primer grado. Valores negativos de las incógnitas

LIBRO 4º-POTENCIAS Y RAICES DE LAS CANTIDADES ALGÉBRICAS.

Cap. I. Potencias y raices de los monomios

Artículo 1º: Potencias de los monomios

Artículo 2º: Raices de los monomios

LIBRO 5º-ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

LIBRO 6º -PROGRESIONES y LOGARITMOS:

2.15. Cortázar, Juan. Tratado de trigonometría y topografía (Madrid, 1859)

CAP. III. Resolucion de los triángulos oblicuángulos o generales

TRIGONOMETRIA ESFERICA.

CAP. I. Formulas generales

CAP. II. Resolucion de los triángulos esféricos rectángulos

CAP. III. Resolucion de los triángulos oblicuángulos o generales

CAP. IV. Resolucion de los triángulos esféricos en los cuatro casos 1.º, 2.º, 5.º y 6.º por las analogias de Neper y las de Delambre

CAP. V. Discusion del caso dudoso de la Trigonometría esférica

TOPOGRAFIA.

CAP. I. Nociones preliminares

CAP. II. Operaciones fundamentales

Alineaciones

Medicion directa de líneas accesibles

CAP. III. Medicion de distancias inaccesibles

CAP. IV. Medicion de alturas inaccesibles.

CAP. V. Nivelacion

CAP. VI. Levantamiento de planos

Orientacion

CAP. VII. Medicion de superficies

CAP. VIII. Division de terrenos

COMPLEMENTO DE LA TRIGONOMETRIA.

CAP. I. Fórmula de Moivre

CAP. II. Cálculo de las cantidades imaginarias

CAP. III. Resolucion trigonométrica de las ecuaciones binomias

CAP. IV. Ecuaciones trinomias

CAP. V. Valores de sen ma y cos ma en funcion de sen a y cos a, y de cos a, y de tg ma en funcion de tg a

CAP. VI. Limites de las razones del seno al arco y de la tangente al arco

CAP. VII. Hallar los valores de sen x y cos x en funcion del arco x

CAP. VIII. Deduccion de las fórmulas de los triángulos rectilineos de las correspondientes de los triángulos esféricos

2.16. Cortázar, Juan. Tratado de aritmética (Madrid, 1860)

2.17. Cortázar, Juan. Tratado de geometría elemental (Madrid, 1864)

NOTA III.

Simetría en el espacio.

2.18. Fernández, Antonio Gabriel. Compendio de la geometría elementar, aritmética inferior, y trigonometría plana, y espherica (Sevilla, 1735)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

TRATADO DE LA GEOMETRIA ELEMENTAR.

LIBRO PRIMERO DE LOS ELEMENTOS GEOMETRICOS de Euclides.

Definiciones.

Peticiones.

Axiomas.

LIBRO SEGUNDO

Definiciones.

LIBRO TERCERO

Definiciones.

LIBRO QUINTO.

Definiciones

LIBRO SEXTO.

Definiciones.

LIBRO VII. QUE ES EL ONZENO DE EUCLIDES.

Definiciones.

LIBRO VIII. QUE ES EL DOZENO DE EUCLIDES.

Definiciones.

TRATADO SEGUNDO DE LA ARITHMETICA.

CAPITULO I. DE LA LOGISTICA DE LOS NUMEROS enteros.

CAPITULO II. DE LA NATURALEZA, Y REDUCION DE LOS Quebrados.

CAPITULO III. DE LA LOGISTICA DE LOS QUEBRADOS.

CAPITULO IV. DE LA LOGISTICA DE LOS NUMEROS Denominados.

CAPITULO V. DE LA REGLA DE TRES, O DE Proporcion.

CAPITULO VI. DE LAS REGLAS DE COMPAÑIAS, Y Repartimientos.

CAPITULO VII. De la .Aligacion.

TRATADO TERCERO: De la Trigonometría.

TRATADO IV DE LA GEOMETRIA PRACTICA, ò ufo de los Inftrumemos mas comunes para trabajar en el Papél y Terreno.

CAPITULO I. DE LA DIVISION, Y FORMACION DE ANGULOS, modo de tirar Lineas Paralelas, Perpendiculares y Tangentes.

CAPITULO II. DE LA DIVISION, Y PROPORCION de las lineas.

CAPITULO III. DE LA FORMACION DE LAS FIGURAS planas, y fu infcripcion en el Circulo.

CAPITULO IV. DE La PROPORCION DE LA S FIGURAS Planas, Solidos, y Metales.

CAPITULO V. DE LA LONGIMETRIA, o METHODO DE levantar Planos, copiarlos y reducirlos.

CAPITULO VI. DEL MODO DE DELINEAR, Y lavar los Planos.

2.19. Fernández, Antonio Gabriel. Trigonometría esférica, que dispuso don Antonio Gabriel Fernández y se reimprime para uso de la Compañía de Guardias Marinas de Cartagena (Murcia, 1784)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

- Capítulo I. De las propiedades de los Triángulos esféricos.
- Capítulo II: De los Theoremas fundamentales para las resoluciones de los Triángulos Esféricos Rectángulos.
- Capítulo III. De la resolución de los Triangulos Esféricos Rectángulos.
- Capítulo IV. De los Theoremas fundamentales para las resoluciones de los Triángulos Esféricos Oblicuángulos.
- Capítulo V. De la resolución los Triángulos Esféricos Oblicuángulos.

Apendice

2.20. García Villar, Miguel. Tratado elemental de geometría descriptiva escrito por encargo de la Junta Facultativa de la Escuela Naval para servir en ella de texto (Madrid, 1883)

(Sólo puntos principales)

PRÓLOGO

CAPÍTULO I. Principios generales

CAPÍTULO II. Rectas y planos

CAPÍTULO III. Representación de poliedros, secciones de éstos por planos é intersecciones entre sí.

CAPÍTULO IV. Secciones curvas, su generación, proyecciones, cortes por planos e intersecciones entre sí.

CAPÍTULO V. Superficies de revolución y gauchas, sus intersecciones y aplicaciones prácticas.

CAPÍTULO VI. Ligera idea de sombras y perspectiva.

2.21. Hutton, Charles. A course of mathematics, for the use of academies, as well as private tuition (New-York, 1822)

(Sólo se detallan en profundidad los puntos de especial importancia en la comparativa)

SPHERICAL TRIGONOMETRY

SECTION I. General Properties of Spherical Triangles

SECTION II. Resolution of Spherical Triangles

Questions for Exercise in Spherical Trigonometry

2.22. Ibáñez y Valera, Joaquín. Teoría de rectas y planos de geometría descriptiva: redactada, con arreglo al programa de ingreso para la Escuela Naval Flotante (Manila, 1877)

DEFINICIONES Y PROPOSICIONES DE GEOMETRIA ELEMENTAL, APLICABLES Á LAS NOCIONES QUE VAMOS Á EXPONER.

Capítulo I. Nociones preliminares

1. Objeto de la Geometría Descriptiva.
2. Determinacion de un punto en el espacio.
3. Determinacion de una recta en el espacio.
6. Determinacion de una línea cualquiera en el espacio.
8. Condicion que deben cumplir las dos proyecciones de un mismo punto.
11. Determinacion de un plano.

Capítulo II. Principios generales.

73. Por un punto dado trazar un plano perpendicular á dos dados.
74. Por un punto de una recta trazar perpendiculares á ella.
75. Hallar la distancia de un punto á un plano dado.
76. Hallar la menor distancia de un punto á una recta dada.
77. Hallar las distancias entre dos rectas paralelas.
78. Hallar la menor distancia entre dos rectas que no están en un mismo plano.
79. Por un punto dado hacer pasar una recta que forme con la línea AZ un ángulo dado.
80. Hallara el ángulo que forman dos rectas dadas.
82. Construir la bisectriz del ángulo formado por dos rectas dadas.
83. Hallar el ángulo formado por una recta y un plano.
84. Determinar los ángulos que una recta forma con los de proyeccion.
85. Construir una recta que forme ángulos con los de proyeccion.
89. Hallar los ángulos que un plano dado forma con los de proyeccion.
90. Construir un plano que forme con los de proyeccion ángulos dados.
91. Construir el plano bisector del ángulo diedro formado por dos planos dados.
92. Dado un punto rebatido, hallar sus proyecciones.

Capítulo IV. Resolución del ángulo triedro.

93. Dados los tres ángulos planos de un triedro, hallar los tres ángulos diedros.
94. Dados dos ángulos planos de un triedro y el diedro comprendido, hallar los otros elementos.
95. Dadas dos caras de un ángulo triedro y el ángulo diedro opuesto á una de ellas, hallar las otras tres partes.
96. Referir un ángulo del espacio al plano horizontal.

2.23. Keill, John. The elements of plain and spherical trigonometry. Also a short treatise of the nature an arithmetick of logartihms (Dublin, 1726)

THE ELEMENTS OF PLAIN TRIGONOMETRY

THE ELEMENTS OF SPHERICAL TRIANGLES

- Of the Solution of Right-angles Spherical Triangles, by the five Circular Parts.

- The following REMARK by Samuel Cun.
- Sam. Cunn's Obfervations on the preceding Trigonometrical Tract.
- APPENDIX By another Hand. Containing the Elements of Aftronomy, by the Solution of Spherical Triangles upon the Globe.

A SHORT TREATISE OF THE NATURE AND ARITHMETICK OF LOGARITHMS.

- The Preface.
- Chap. I. Of the Origin and Nature of Logartihms.
- Chap. II. Of the Arithmetick of Logarithms in whole Numbers, or whole Numbers adjoined to Decimal Fractions.
- Chap. III. Of the Arithmetick of Logarithms when the Numbers are Fractions.
- Chap. IV. Of the Golden Rule of Proportion by Logarithms.
- Chap. V. Of the continual Increments of proportional Quantities, and how to find by Logarithms any Term in a Series of Proportionals, either increafing or decreafing.
- Chap. VI. Of the Method by which Mr. Brigg's computed his Logarithms and the Demonftration thereof.

2.24. Keith, Thomas. An introduction to the theory and practice of plane and spherical trigonometry, and the stereographic projection of the sphere; including the theory of navigation (London, 1826)

(Sólo se detallan en profundidad los puntos de especial importancia en la comparativa)

BOOK I (sobre Logaritmos)

BOOK II (sobre Trigonometría Plana)

BOOK III

- Chapter I. Definitions, &c. Of Spherical Angles, Arcs, and Triangles.
  II. Spherical Geometry, or general properties of spherical angles, arcs, and triangles, &c.
- Chap.II. The Stereographic Projection of the Sphere
  I. Stereographical theorems
  II. Stereographical problems

- Chap. III. Investigation of general rules for calculating the sides and angles of Rightangled Spherical Triangles, &c.

  2. BARON NAPIER'S universal rules for solving right-angled Spherical triangles
- Chap. IV. Investigation of general rules for solving the different cases of Oblique Spherical Triangles, by drawing a perpendicular from the vertical angle upon the base
- Chap. V. Investigation of general rules for calculating, the sides and angles of Oblique-angled Spherical Triangles without a perpendicular

  2. GENERAL FORMULAE for the solution of the different cases of right-angled spherical triangles

  3. General observations on the species and ambiguity of the different cases

  4. Quadrantal, or rectilateral spherical triangles

  5. GENERAL FORMULAE for the solutions of the different cases of oblique-angled spherical triangles

  6. General observations on the ambiguity of the different cases
- Chap. VI. Practical rules for the solutions of all the different cases of Right-Angled Spherical Triangles, with their application by Logarithms
- Chap. VII. Practical rules for solving the different cases of Rectilateral or Quadrantal Spherical Triangles, with their application by Logarithms
- Chap. VIII. Practical rules for solving all the different cases of Oblique-angled Spherical Triangles with a perpendicular, &c.; and their application by Logarithms
- Chap. IX. Practical rules for solving all the different cases of Oblique-angled Spherical Triangles without a perpendicular, with their application by Logarithms
- Chap. X. Astronomical definitions and introductory problems
- Chap. XI. The application of Right angled Spherical Triangles to Astronomical problems
- Chap. XII. The application of Oblique-angled Spherical Triangles to Astronomical problems
- Chap. XIII. Of the Fluxional Analogies of Spherical Triangles. The use of the fluxional analogies.
- Chap. XIV. Miscellaneous propositions &c.

BOOK IV. The Theory of Navigation.

2.25. La Caille, Nicolás Louis de. Leçons élémentaires de mathématiques (París, 1784)

(Sólo se detallan en profundidad los puntos de especial importancia en la comparativa)

PREFACIO

APPLICATION DES PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE ET D'ALGÈBRE AU CALCUL DES SINUS ET A LA TRIGONOMÉTRIE

Du Calcul des Sinus

Du Calcus des Tables de Sinus par les Séries

Méthode d'approximation pour trouver la Quadrature du Cercle

Réfolution des Équations du troifieme degré dans le cas irrécutible, par les Sinus

Réfolution des Triangles, par les Sinus, Cofinus, etc

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES

Principes & Proportions pour la Réfolution des Triangles fphériques

Application des Principes & des Proportions qui précédent

Réfolution des Triangles fphériques- obliquangles

Quelques Applications de la Trigonométries fphérique

Remarque

ÉLEMENTS D'ARITHMÉTIQUE.

DES FRACTIONS.

DES FRACTIONS DÉCIMALES.

ÉLEMENTS D'ALGEBRE.

APPLICATION DE L'ALGEBRE.

DES RAPPORTS ET DES PROPORTIONS.

DE LA REGLE DE TROIS.

DES LOGARITHMES.

INTRODUCTION A LA RÉSOLUTION DES EQUATIONS DES DEGRÉS SUPÉRIEURS.

ÉLEMENTS GÉOMÉTRIE.

PREMIER PARTIE.

SECONDE PARTIE DES ÉLEMENTS DE GÉOMÉTRIE.

TROISIEME PARTIE DES ÉLEMENTS DE GÉOMÉTRIE.

APPLICATION DES PRINCIPIES DE GÉOMÉTRIE ET D'ALGEBRE AU CALCUL DES SINUS ET A LAS TRIGONOMÉTRIE.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES.

ÉLEMENTES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Regles du Calcul différentiel.

Des Différentielles fecondes, troifiemes, &c.

Des Différentielles Logarithmiques & Exponentielles.

Des Différentielles des quantités affectées de Sinus, de Cofinus, &c.

Applications du Calcul différentiel à la théorie des Courbes.

Des Développées.

Des Points d'inflexion, & de la Méthode de Maximis & Minimis.

Des Fractions dont le Numérateur & le Dénominateur Fe réduifent à zéro dans certains cas.

Quelques autres Applications du Calcul différentiel.

ÉLEMENTES DU CALCUL INTÉGRAL.

Méthode pour ramener l'intégration de plufieurs Différentielles binomes à celles d'autres Différentielles connues.

De l'intégration des Fractions différentielles, rationelles.

Méthode pour intégrer para Séries.

De l'intégration des Différentielles Logarithmiques & Exponentielles.

De l'intégration des Quantités Différentielles où il entre des Sinus, des Cofinus, &c.

De l'intégration des Différentielles à plufieurs Variables.

Applications du Calcul Intégral.

De la Quadrature des Courbes.

De la Rectificasion des Courbes.

De la Mefure des Solidités.

Des Surfaces courbes des Solides de révolution.

De la Méthode inverfe des Tangentes, & des Equationes différentielles.

Réfultats des Solutions de quelques Problèmes énoncés dans le cours de l'Ouvrage.

2.26. Lacroix, Sylvestre François. Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral: précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées (París, 1802)

(Sólo puntos principales)

PREMIÈRE PARTIE

Calcul differentiel.

Notions préliminaires et principes de la differentiation des fonctions d'une seule variable.

Des differentiatios des fonctions transcendantes

Recherche des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable

Application du Calcul differential a la theorie des courbes.

Recherche des points singuliers des courbes

Exemple de l'analyse d'une courbe.

Des courbes osculatrices.

Des courbes transcendantes.

Du changement de la variable independante, o u commnet on change la differentiell qu'on a prise pour constante, en une autre qui ne le soit plus.

De la differentiation des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

Recherche des maxima et des minima de fonctions de deux variables.

Notions genereales sur l'application du Calcul differentiel à la théorie des courbes à double corubure et des surfaces courbes.

SECONDE PARTIE

Calcul integral.

DE l'integration des fonctions rationnelles dùne seule variable.

De l'integration des fonctions irrationnelles.

De l'integration des differentielles binomes.

De l'integration par les séries.

De l'integration des quantités logarithmiques et exponentielles.

De l'integration des fonctions circulaires.

Methode generale pour obtenir les valeurs approchees des integrales.

Application du Calcul intégral à la quadrature des courbes et à leur rectification, à la quadrature des surfaces courbes et à l'évaluation des volumes qu'elles comprennent.

De la cubature des corps terminés para des surfaces courbes, et de la quadrature des leurs aires ; de la rectification des courbes à double courbure.

De l'intégration des équations différentielles à deux variables.

De la separtion des variables dans les equations differentielels du premier ordre.

Recherche du facteur propre à rendre intègrable une équation differentielle du premier ordre.

Des equationes du premier ordre dan lesquelles les différentielles passent le premier degré.

Des solutions particulières des equationes différentielles du premier ordre.

Methodes pour réoudre para approximation les équations differentielles du premier ordre.

De la construction géometrique des équations différentielles du premier ordre.

De l'intégration des equations differentielles du second ordre par le moyen des transformations.

Methodes pour resoudre para approximation les equationes différentielles du second ordre.

De l'intégration des equations differentielles des ordres superieurs au second.

De l'intégration des fonctions de deux, ou d'un plus grand nombre de variables.

Recherche de'une fonction de plusieurs variables lorsque tous ses coefficiens differentiels d'un meme ordre sont donnes explicitement ou implicitement.

Integration des equations diffferntielels partielles du premier ordre.

De l'intégration des equations differentielles partielels des ordres superieurs au premier.

Des equations differentielles totales que ne satisfont pas aux conditions d'integrabilité.

De la mèthode des variations.

Des maxima et des minima des formules integrales indeterminees.

APPENDICE AU TRATIÉ ÉLEMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Des differences et des séries

Du Calcul direct des différences.

Application du Calcul des différences à l'interpolation des suites.

Du calcul inverse des différences pra rapport aux fonctions d'une seule variable, données de forme.

Application du Calcul des différences à al sommation des suites.

De l'integration des equations aux différences à deux variables.

De la nature dees arbitries introduites para l'integration des équations aux différences, et de la construction de ces quantités.
Application du Calcul integral à la theorie des suites.

ADDITONS

2.27. Lacroix, Sylvestre François. Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica y de la aplicación del álgebra a la geometría, Volumen 4 (Madrid, 1820)

(Sólo se detallan en profundidad los puntos de especial importancia en la comparativa)

CAPÍTULO PRIMERO. DE LA TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

CAPÍTULO II. DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

- Un triángulo esférico es el que forman sobre la superficie de la esfera tres circunferencias de círculos máximos que se cortan de dos en dos
- Construcción en que está fundada la trigonometría esférica
- Ecuaciones que contienen implícitamente todas las relaciones que tienen entre sí las seis cosas que se consideran en un triángulo esférico
- NOTA. Expresión del volumen de un tetraedro, por los ángulos comprendidos entre sus aristas
- Preparación de las ecuaciones anteriores para aplicarlas inmediatamente á la resolución de los triángulos esféricos
- Lo que se entiende por triángulo suplementario
- Simplificación de las fórmulas para el caso en que el triángulo es rectángulo
- Transformación de las ecuaciones fundamentales, para aplicar á ellas cómodamente el cálculo de los logaritmos
- Fórmulas que contienen todas las combinaciones de los ángulos y de los lados de un triángulo esférico
- Fórmulas de Neper
- Recapitulación de las fórmulas necesarias para resolver un triángulo esférico

- Observación acerca de las diversas condiciones que deben verificarse para que los mismo datos convengan á uno ó a dos triángulos esféricos

Application de la trigonométrie sphérique à un problême

CAPÍTULO III. DE LA APLICACIÓN DEL ALGEBRA A LA GEOMETRÍA.

APENDICE

- QUE CONTIENE LOS PRIMEROS PRINCIPIOS DE LA APLICACIÓN DEL ALGEBRÁ. A LAS SUPERFICIES CURVAS Y A LAS CURVAS DE DOBLE CURVATURA
- DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO
- DE LAS CURVAS CONSIDERADAS EN EL ESPACIO.

2.28. Lista y Aragón, Alberto. Elementos de trigonometría esférica y geografía astronómica: para el uso de la casa de educación sita en la calle de san Mateo de esta corte (Madrid, 1823)

- PRÓLOGO
- TRIGONOMETRÍA ESFERICA
  - 1.° Fórmula fundamental
  - 2.° Resolución de los triángulos esféricos rectángulos .
  - 3.° Resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos .
- GEOGRAFÍA ASTRONÓMICA
  - 1.º Observaciones fundamentales
  - 2.° Movimiento anuo
  - 3.º Cosmografía.
  - 4.º Gnomología
  - 5.º Del tiempo.
  - 6.° Diámetros, paralages, refracciones.
  - 7.° De las desigualdades de los movimientos planetarios .
  - 8.° Sistema de Copérnico .
  - 9.º Movimiento elíptico de los planetas.
  - 10. Nutación y aberración.

- 11. De los cometas y satélites.
- 12. Magnitud y figura de la tierra.
- De las proyecciones y mapas.
- 15. Geografía antigua y moderna.
- 16. De los eclipses.
- 17. Náutica.
- 18. Calendario.

2.29. María (de) y García, Juan Luís. Lecciones elementales de geometría analítica (Ferrol, 1900)

(Sólo puntos principales)

PRIMERA PARTE.-GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA.

LECCION PRIMERA. Definiciones. Sistemas de coordenadas.

LECCION SEGUNDA. Nociones sobre las funciones. Lugares geométricos. Ecuaciones de los mismos. Clasificación de las líneas planas.

LECCION TERCERA. Estudio elemental de algunas líneas.

LECCION CUARTA. Transformación de coordenadas.

LECCION QUINTA. Estudio de la línea recta.

LECCION SEXTA. Problemas sobre la línea recta.

LECCION SEPTIMA. Rectas imaginarias. Ecuaciones que representan un sistema de rectas.

LECCION OCTAVA. Estudio elemental del círculo.

LECCION NOVENA. Estudio de las líneas de segundo grado.

LECCION DECIMA. Continuación al estudio de las líneas de segundo grado.

LECCION UNDECIMA. Tangente y polar á las curvas de segundo grado. Simplificación de la ecuacion de las cónicas.

LECCION DUODECIMA. Estudio de la elipse.

LECCION DECIMOTERCERA. Estudio de la hipérbola.

LECCION DECIMACUARTA. Estudio de la parábola.

SEGUNDA PARTE-GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO

LECCION DECIMAQUINTA. Determinación de un punto en el espacio. Sistemas de coordenadas. Transformación de las mismas. Interpretación de las ecuaciones. Clasificación de las superficies.

LECCION DECIMASEXTA. Estudio de la línea recta del espacio.

LECCION DECIMASEPTIMA. Estudio del plano.

LECCION DECIMAOCTAVA. Nociones sobre las superficies de segundo grado.

2.30. Meunier-Joannet, Pierre Jules. Cours elementaire d'analyse: contenant un tres grand nombre d'applications: a l'usage des eleves de l'Ecole Navale et des eleves de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures (París, 1858)

(Sólo puntos principales)

INTRODUCTION

I. Complément de geometrie.

La section obtenue para un plan que recontre toutes les génératrices d'une même nappe d'un cône droit est limitée dans tous les sens.-Cette courbe est le lieu des points dont la somme des distnaces à deux points fixes est constante (ellipse).

La lignte qui joint les foyers et la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette ligne sont les deux axes de l'ellipse.

Le point-milieu de la ligne qui joint les foyers est le centre de l'elipse.

La ligne qui joint les foyers est la ligne la plus grande que l'on puisse mener par le centre de l'ellipse.

Expression de la distance du centre à l'un des foyers de l'ellipse $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Construction de l'ellipse au moyen de ses axes.

Définition de la tangente à une courbe.

La tangentte en un point de l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vexteurs de ce point.

Les tangentes aux extrémités des axes de l'ellipse sont perpendiculaires à ces axes.

Probléme.- Mener par un point une tangenete à l'ellipse (deux solutions, si ce point est hor de la courbe ; une seule, si le point est sur la courbe).

Probléme.- Parallèlement à une droite donnée, mener une tangente à l'ellipse (deux solutions).

Secction du cône droit par un plan parallèle à l'une des génératrices du cône.- Cette section est le lieu des points équidastants d'une droite et d'un point fixe.- On la nomme parabole.

La parabole peut être considérée comme une ellipse dont le centre et l'un des foyers sont situés à l'infini.

Construction de la parabole par points, connaissant son foyer et sa directice.

La tangente à la parabole, fait des angles égaux avec le rayon vecteur et la parallèle à l'axe, menés par le point de contact.

Probléme.- Mener par un point donné, une tangente à la parabole (deux solutions, si le point est hors de la courbe ; unes seule, si le point est sur la courbe).

Probléme.- Parallèlemente à une droit donnée, mener une tangente à la parabole (une seule solution, toujours possible, excepté le cas où la direction donnée est parallèle à l'axe).

La sous-normale en un point de la parabole est constante et égale à la distance du foyer à la directrice.

Section du cône droit, par un plan qui recontre toutes les génératrices dùne même nappe.- Cette section est le lieu des points, donta l différence des distances à deux points fixes est constante.

II. Complément d'algébre.

Formule du binòme de Newton.

$$\left(x+a\right)^m = x^m + \max^{m-1} + \frac{m\left(m-1\right)}{1.2} a^2 x^{m-2} + ...a^m \, .$$

Loi de formation du développement précédent.

Les coefficients des terms du binôme vont en croissant jusqu'au terme du milieu.

Application de la formule du binôme.

Calcul du nombre *e*.

$e = Lim\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ lorsque α tend vers zéro.

Quand on dit que α tend vers zéro, il faut entendre que α prend la valeur que lòn obtient par la pensée, en passant de l`état zéro au premier nombre.- Il faut concevoir que α soit le passage de ce qui nèst pas, à ce quie est infiniment petit.

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + etc..... = 2,71828 \, .$$

Le nombre *e* est compris entre 2 et 3.

Le nombre *e* est incommensurable.

Recherche de la somme des puissances semblables des termes d'une progression airthmétique.

$$s_m = \frac{(l+r)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)r} - \frac{m}{1.2} r.s_{m-1} - \frac{(m-1)m}{1.2.3} r^2.s_{m-2}.$$

Application à la suite naturelle des nombres.

$$s_1 = \frac{n(n+1)}{1.2},\ s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3};\ s_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = s_1{}^2$$

Sommation des piles de boulets.

Pile triangulaire $P_\triangle = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$.

Pile quadrangulaire $P_\square = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$.

Pile rectangulaire $P_{\square} = \dfrac{n(n+1)(2n+3p+1)}{1.2.3}$.

Dans cette deerniére formule : *n* est le nombre de boulet contenus dans le plus petit côté de la base et *p* désigne le nombre -1, de boulets contenus dans la pile horizontale que forme l'arête.

III. NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Étude de la ligne doite.

De quelques propiétés de l'ellipse.

ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

Derivée et différentielle.

Règles de la differentiation des fonctions explicites d'une seule variable.

Différentiation des fonctions transcendantes.

Différentiation des fonctions cirulaires.

Applictions des séries de Taylor et de Mac-Laurin.

Etude des séries.

De la courbure et du rayon de courbure.

De l'interpolation.

NOTINS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL INTÉGRAL

Applications diverses.

Concvité et convexité des courbes.

Applications des théories précédentes.

Des trois courbes représentées par l'équation génerale du deuxiéme degré à deux variables.

Simplification de l'équation générale du 2º degré à deux variables.

Théorie des asymptotes.

De quelques courbes sur lesquelles on applique les théories précédentes.

Du centre des courbes.

Des diamètres d'une courbe.

Contact des courbes planes.

Équation de la développée d'une courbe.

De quelques quadratures.

Étude de la cycloide.

De la chainette.

DE QUELQUES QUESTIONS DAN LESQUELLES ON EST CONDUIT A DES ÉQUATIONS DIFFÉRNTIELLES.

NOTIONS DE GÉOMETRIRE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS.

APPENDICE.

De quelques questions qui recontrent leur application en mécanique.

2.31. Merás y Uría, Julio. Lecciones de geometria analítica: redactadas para uso de los aspirantes á guardias-marinas (Ferrol, 1879)

(Sólo puntos principales)

INTRODUCCION. Nociones sobre las funciones

LECCION PRIMERA. Objeto de la geometría analítica.-Sistemas de coordenadas

LECCION SEGUNDA. Ecuaciones de las líneas.

LECCION TERCERA. Trasformacion de coordenadas rectilíneas.- Clasificacion de las líneas.

LECCION CUARTA. Representacion geométrica de las ecuaciones.

LECCION QUINTA. Estudio de la línea recta.

LECCION SESTA. Estudio de la elipse.

LECCION SEPTIMA. Estudio de la hipérbola.

LECCION OCTAVA. Estudio de la parábola.

LECCION NOVENA. Centros, diámetros y ejes de las curvas.-Estudio de las líneas de 2º órden.-Centro, diámetros y ejes de las curvas de 2.º grado.

LECCION DÉCIMA. Redudir la ecuacion de 2.º grado con dos variables à sus formas mas sencillas, por el cambió de ejes coordenados.

LECCION UNDECIMA. Asíntotas rectilíneas de las curvas.-De las coordenadas polares.

LECCION DUODÉCIMA. Nociones de geometría analítica de tres dimensiones.

2.32. Miranda, Augusto. Lecciones de cálculo infinitesimal (Ferrol, 1884)

INTRODUCCION. Algunos teoremas sobre convergencia de series, á los cuales se hace referencia en estas Lecciones.

1.ª PARTE.-PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

LECCIÓN I. Nociones preliminares.- Constantes y variables.- Límites.- Infinitamente pequeños ó infinitamente grandes.- Teoremas fundamentales.

CÁLCULO DIFERENCIAL.

II. Cambios de valor de las funciones.- Continuidad.- Diferencial y derivada.- Función primitiva.- Relaciones entre las funciones y sus derivadas.

III. Diferenciales y derivadas de funciones de una sola variable.- Integrales fundamentales.- Funciones algébricas y exponenciales.

IV. Funciones circulares directas é inversas.- Funciones hiperbólicas.- Funciones de funciones.- Diferenciacion logarítmica.

V. Funciones de varias variables.- Funciones de mas de una variable independiente.- Funciones compuestas.- Funciones implícitas.

VI. Diferenciales y derivadas de órdenes superiores.- Funciones de una sola variable.

VII. Funciones de funciones. Cambio de variable independiente.- Funciones de muchas variables.- Funciones implícitas.

CÁLCULO INTEGRAL

VIII. Métodos generales de integracion.- Integral definida.- Cambio é interpolacion de límites.- Cálculo de la integral indefinida.

IX. Integración de funciones algébricas.- Funciones racionales.

X. Funciones que contienen radicales de monomios ó de un mismo binomio de primer grado.- Trinomio de segundo grado bajo radical cuadrado.- Diferencias binomiales.

XI. Integracion de funciones transcendentes.- Fórmulas diversas.

XII. Integrales definidas.- Integracion de funciones de varias variables.- Observaciones sobre las integrales definidas.- Diferenciacion é integración bajo el signo $\int$.- Cálculo aproximado de la integral definida.- Integracion de funciones de mas de una variable.

2.ª PARTE. - APLICACIONES.

APLICACIONES ANALÍTICAS.

XIII. Desarrollo de funciones en serie.- Serie de Taylor.

XIV. Serie de Maclaurin.- Otra forma de la serie de Taylor.- Series de Taylor y de Maclaurin para funciones de mas de una variable.- Propiedades de las funciones homogéneas.

XV. Fórmula de Lagrange.- Desarrollo en serie por integración.- Integracion por serie.

XVI. Formas indeterminadas.- Verdadero valor de las expresiones que presentan las formas $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0$ y 1^∞.

XVII. Máximos y mínimos.- Funciones de una sola variable independiente.

XVIII. Funciones de mas de una variable independiente.

APLICACIONES GEOMÉTRICAS

XIX. Tangentes á las curvas planas.- Ecuaciones de la tangente y de la normal.- Longitudes de la subtangente, subnormal, etc.- Curvas algébricas.- Sentido de la concavidad ó convexidad.- Puntos de inflexion.

XX. Puntos singulares.- Asíntotas.

XXI. Curvatura y contactos de las curvas planas.- Expresion de la diferencial de un arco de curva.- Ángulo de contingencia.- Curvatura.- Contactos.- Curvas osculatrices.

XXII. Evolutas y evolventes.- Envolventes.- Ecuaciones y propiedades generales de estas curvas.

XXIII. Superficies y curvas de doble curvatura.- Tangentes y normales á las curvas y á las superficies.- Plano osculador y normal principal.- Curvatura.- Superficies envolventes.

XXIV. Rectificacion de curvas.- Curvas planas y de doble curvatura.- Ecuacion intrínseca.

XXV. Cuadratura de superficies.- Superficies planas y curvas.

XXVI. Volúmenes.- Cuerpos de revolucion.- Otros volúmenes que pueden obtenerse por una sola integración.- Cuerpos terminados por superficies cualesquiera.

3.ª PARTE.-ECUACIONES DIFERENCIALES

XXVII. Ecuaciones diferenciales de primer órden.- Significacion de las ecuaciones diferenciales.- Integracion de la de primer órden y primer grado.

XXVIII. Ecuaciones de grado superior al primero.

XXIX. Ecuaciones diferenciales de órden superior al primero.- Ecuaciones de las formas $f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, x\right) = 0$, $f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0$ y $f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right) = 0$.- Algunos casos en que puede reducirse el órden de la ecuacion.- Integracion por las series.

ERRATAS

2.33. Montaner, Jaime. Álgebra: escrita con sujeción al programa vigente para los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante (Madrid, 1898)

INTRODUCCIÓN.

Simbolismo algebraico

Objeto del Algebra.-Signos algebraicos.-Empleo de las letras

Empleo de los signos como medio de abreviación

Empleo de las letras como medio de generalización

Planteo de los problemas

LIBRO PRIMERO. CÁLCULO ALGEBRAICO.

Capítulo I.-Nociones preliminares

EJERCICIOS DE TERRY

Capítulo II-Operaciones algebraicas

Suma

Resta

Enunciados más sencillos de los resultados precedentes

Capítulo III.-Multiplicación

Multiplicación de potencias de la misma letra

Multiplicación de monomios

2.34. Montojo, Saturnino. Tratado elemental de aritmética: redactado para uso del Colegio Naval Militar (San Fernando, 1849)

Tablas

2.35. Montojo, Saturnino. Tratado elemental de álgebra: redactado para uso del Colegio Naval Militar (San Fernando, 1850)

CAP. I. CÁLCULOS ALGEBRÁICOS

CAP. II. ECUACIONES DEL PRIMER GRADO

CAP. III. DE LAS POTESTADES, DE LAS RAICES Y DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

CAP. IV DE LAS RAZONES

CAP. V NOCIONES ACERCA DE LAS SÉRIES. METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS. BINOMIO DE NEWTON. SÉRIES ESPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS. PILAS DE BALAS. NÚMEROS FIGURADOS

2.36. Montojo, Saturnino. Tratado elemental de trigonometría: para uso de los aspirantes al Colegio Naval Militar (San Fernando, 1865)

CAPITULO I

CAPITULO II.

denominaciones trigonometricas; líneas trigonometricas, 39.-Diferencia entre las funciones y líneas trigonométricas, 41.

CAPITULO III.

Fórmulas trigonométricas. Fórmulas que comprenden dos ángulos: Seno y coseno de la suma de dos arcos, 42.-Estension de estas fórmulas á todos los arcos, 43.-Seno y coseno de la diferencia de dos arcos, 45.-Suma y diferencia de senos y cosenos, 46.-Relaciones entre estas espresiones, 47.-Productos de dos senos ó de dos cosenos, 47.-Fórmulas relativas á las tangentes, 48.-Relacion que guardan entre sí las funciones trigonometricas de un ángulo con las de su mitad, 49.-Aplicacion á algunos ángulos, 51.

Fórmulas que comprenden mas de dos ángulos. Senos y cosenos de la suma Z de muchos arcos, 54.-Fórmulas de $\sin m\sigma$ y $\cos m\sigma$ en funcion de $\sin\sigma$ y $\cos\sigma$, 55.-Lo mismo de las tangentes, 56.-Algunas relaciones entre los tres ángulos de todo triángulo rectilíneo, 58.

Series trigonometricas. Desarrollo del seno y coseno en série, 61.-Desarrollo de la tangente en série, 64.-Fórmula de Moivre, 64.-0tra demostracion de la fórmula de Moivre, 65.-Algunas de sus aplicaciones mas usuales, 67.-Sentido multiplo que se debe hacer notar en esta fórmula, 68.-Raices de la unidad, 70.-Solucion de la ecuacion ($x^2 \pm 1 = 0$), 72.-Espresion del ángulo en funcion de la tangente, 74.-Valor de π, 75.-0tra aplicacion de la fórmnla de Moivre, 76.

CAPÍTULO IV.

Logaritmos de las funciones trigonometricas. Necesidad de una tabla de valores de las funciones trigonométricas, y mejor aun de sus logaritmos vulgares, 80.- Definiciones, 81. -Modo de determinar: los valores de las funciones trigonometricas, disposición en las tablas, 85.-Sobre la característica de los logaritmos de las funciones trigonometricas, 87.-Problemas referentes a las tablas, 88.Fundamento de la interpolación de primer orden, 89.-Dificultad de la inlerpolacion en los 5 primeros y últimos grados y ventaja de los logaritmos S y T, 95.-Ejemplos, 96.-Indeterminacion del problema inverso, 100.-Ejemplos, 101.-Incertidumbre de los ángulos correspondientes à logaritmos de senos y cosenos que se aproximan mucho á 0° ó á 90°, 108.-Ventaja de la aplicación de las funciones trigonometricas al calculo logaritmico de varias espresiones, 110.-Angulo auxiliar, 111.-Ventaja de la introducción de los ángulos auxiliares en el cálculo de radicales, 113.-Modo de adaptar al cálculo logaritmico otras espresiones, 115.-Modo de presentar las espresiones anteriores sin que aparezca el ángulo auxiliar, por medio de las funciones inversas, 118.-Teoremas trigonometricos presentados en forma algebraica por medio

Área del triángulo esférico. Semejanza de las expresiones referentes ó este con las del triángulo rectilíneo, 262.-Radios del círculo inscripto y circunscripto, 266.-Triángulos esféricos cuyos lados son pequeños relativamente al radio de la esfera, 272.Teorema de Legendre, 275.

2.37. Ortega y Sala, Miguel. Trigonometría (Madrid, 1881)

2.38. Ortega y Sala, Miguel. Geometría (Madrid, 1885)

I. Preliminares
II. Medida de la línea recta
III. Medida de un arco
IV. Medida de ángulos

CAPÍTULO V. Problemas.

I. Consideraciones preliminares
II. Problemas sobre la linea recta
III. Problemas sobre polígonos
IV. Problemas sobre la circunferencia
V. Observaciones generales sobre los problemas

CAPÍTULO VI. Líneas proporcionales y semejanza de figuras.

I. Consideraciones preliminares
II. Segmentos proporcionales
III. Semejanza de figuras
IV. Propiedades y relaciones métricas entre las diferentes partes de un triángulo
V. Problemas

CAPÍTULO VII. Polígonos regulares.

I. Polígonos regulares convexos
II. Polígonos regulares estrellados
III. Problemas sobre polígonos regulares

CAPÍTULO VIII. Medida de la circunferencia y relación de ésta con el diámetro.

I. Consideraciones preliminares
II. Medida de la circunferencia
III. Relación de la circunferencia al diámetro

CAPÍTULO IX. Áreas.

I. Determinación de áreas
II. Comparación de áreas
III. Problemas sobre áreas

SEGUNDA PARTE-GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

CAPÍTULO X. Rectas y planos.

I. Determinación de un plano
II. Posiciones relativas de rectas, de planos y de rectas y planos
III. Propiedades de las rectas y planos debidas á su posición relativa

2.39. Peral, Pedro del. Tratado de álgebra: escrito con arreglo al nuevo programa de ingreso en la Escuela Naval Flotante (Sevilla, 1885)

LIBRO TERCERO

CAPITULO PRIMERO. Progresiones.

I. Progresiones aritméticas

II. Suma de las potencias enteras de los términos de una progresión por diferencia

III. Pilas de balas

IV. Progresiones geométricas

V. Progresiones armónicas

Ejercicios

CAPITULO SEGUNDO. De los logaritmos.

I. Definicion de los logaritmos

II. Estudio de la ecuación exponencial $n = b^x$

III. Propiedades de los logaritmos

IV. Módulo de un sistema de logaritmos

V. Construccion de una tabla de logaritmos

VI. Propiedades de los logaritmos vulgares

VII. Complementos aritméticos

VIII. Transformaciones que pueden hacerse con los logaritmos

IX. Multiplicacion y division de los logaritmos por un número entero

X. Descripcion y uso de las tablas de los logaritmos

XI. Uso de las tablas

XII. Operaciones por medio de los logaritmos

Ejercicios

XIII. Interés compuesto

XIV. Anualidades

LIBRO CUARTO

CAPITULO PRIMERO. Séries.

I. Definiciones

II. Comparacion de dos séries

III. Convergencia de las séries de términos positivos

IV. Séries cuyos términos tienen signos diferentes

V. Del número *e*.

Ejercicio.

CAPITULO SEGUNDO. Derivadas.

2.40. Playfair, John. Elements of geometry: containing the first six books of Euclid, with a supplement on the quadrature of the circle, and the geometry of solids; to which are added elements of plane and spherical trigonometry (New York, 1824)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo; sólo se detallan en profundidad los puntos de especial importancia en la comparativa)

2.41. Rodríguez Riola, Pedro José. Elements of spherical trigonometry, designed as an introduction to the study of nautical astronomy (New York 1829)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

2.42. Rodríguez Riola, Pedro José. Tables for determining the latitude at sea, by an altitude, the polar star. Observed at any distance from the meridian (Norfolk, 1830)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

2.43. Rouché, Eugène y Comberousse, Charles. Tratado de geometría elemental, traducido por A. Portuondo y J. Portuondo (Madrid, 1878)

(Sólo puntos principales)

ÍNDICE.

LIBRO VI. POLIEDROS.

LIBRO VII. CUERPOS REDONDOS.

2.44. Sánchez Reciente, Juan. Tratado de trigonometria plana general, con la construccion, y ufo de las tablas de los logarithmos, y del canon trigonometrico de senos, tangentes, y secantes logarithmicas (Sevilla, 1742)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

PARTE SEGUNDA: De la construcción de las tablas de los Senos, Tangentes y Secantes naturales, y logarítmicas, y de los Logarithmos.
Capitulo I. De los fundamentos de el Canon Trigonométrico, ù de el Canon de los Senos.
Capitulo II. De las tablas de las tangentes y secantes naturales.
Capitulo III. De los logarithmos.
Capitulo IV. De la naturaleza y propiedad de los logarithmos.
Capitulo V. De la fábrica de los logarithmos.

PARTE TERCERA: Del uso de las tablas de los Senos, y Logarithmos, y de la resolución de los triángulos planos.
Capitulo I. De la explicación de las tablas de los fenos logarithmicos, tangentes, y fecantes.
Capitulo II. Del uso de las tablas del Canon Trigonometrico.
Capitulo III. Del uso de la tabla de los Logarithmos.
Capitulo IV. De los fundamentos necesarios à la Trigonometria plana.
Capitulo V. De las reglas generales para las resoluciones de los triángulos.
Capitulo VI. De la resolución de los triángulos planos.

SIGUE LA Tabla DE LOS LOGARITHOS CORRESPONDIENTES A LOS NUMEROS ABSOLUTOS defde I. hafta I000.

SIGUE LA Tabla DE LOS SENOS, TANGENTES y Secantes logarithmicas, fiendo el Radio de I00000.

2.45. Salinas Angulo, Ignacio y Benítez y Parodi, Manuel. Álgebra (Madrid, 1898)

LIBRO PRIMERO. ALGORITMO ALGEBRÁICO.
CAPÍTULO PRIMERO. NOCIONES FUNDAMENTALES.
I. DEFINICIONES Y NOTACIÓN SIMBÓLICA.
Función
Ley matemática
Problema
Álgebra

Multiplicación

División

Potencia

Raíz

Ejercicios

VII. APLICACIÓN DE LOS LOGARITMOS Á LA REGLA DE INTERÉS COMPUESTO Y Á LAS ANUALIDADES.

Fórmulas relativas al interés

Fórmulas referentes á las anualidades

Ejercicios

VIII. REGLA DE CÁLCULO.

Objeto de la regla y medios para realizarlo

Descripción de la regla

Uso de la regla

Ejercicios

LIBRO SEGUNDO. APLICACIÓN DEL ALGORITMO ALGEBRÁICO Á LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES.

CAPÍTULO I. PLANTEO DE LOS PROBLEMAS Y PRINCIPIOS GENERALES DE TRANSFORMACIÓN.

I. PRELIMINARES

Identidad

Ecuación

Sistema de ecuaciones

Procedimiento para plantear los problemas

II. TRANSFORMACIONES QUE PUEDE EXPERIMENTAR UNA ECUACIÓN

Objeto de las transformaciones

Teoremas fundamentales de transformación

Forma general de una ecuación

Clasificación de las ecuaciones

III. TRANSFORMACIONES QUE PUEDE EXPERIMENTAR UN SISTEMA DE ECUACIONES

Objeto de la transformación

Transformaciones aisladas

Cambio de base y módulo.

Nuevas aplicaciones de los logaritmos.

Ejercicios.

CAPÍTULO II. FUNCIONES DE VARIABLES IMAGINARIAS Y CÁLCULO DE LOS RADICALES ALGÉBRICOS.

I. SIGNIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES IMAGINARIAS ELEMENTALES Y FORMA EN QUE SE PRESENTAN.

Origen algorítmico de las expresiones imaginarias.

Significación de las expresiones $\sqrt{-1}$ y $a\sqrt{-1}$.

Binomio imaginario.

Clasificación de las expresiones imaginarias.

Interpretación geométrica de las expresiones imaginarias.

Denominaciones diversas.

Módulo y argumento.

Modulación.

Modulación factorial de las expresiones imaginarias.

Ejercicios.

II. OPERACIONES CON LAS EXPRESIONES IMAGINARIAS.

Necesidad de someter las expresiones imaginarias á los procedimientos operativos.

Observaciones preliminares al cálculo de las expresiones imaginarias.

Adición de expresiones imaginarias.

Interpretación geométrica de la suma de expresiones imaginarias.

Substracción de expresiones imaginarias.

Interpretación geométrica de la substracción de expresiones imaginarias.

Suma y resta, combinadas, de expresiones imaginarias.

Multiplicación de expresiones imaginarias.

Producto de expresiones imaginarias moduladas.

Interpretación geométrica del producto de expresiones imaginarias.

División de expresiones imaginarias.

Cociente de expresiones imaginarias moduladas.

Interpretación geométrica del cociente de expresiones imaginarias.

Elevación á potencias de expresiones imaginarias.

Potencia de una expresión imaginaria modulada.

Interpretación geométrica de las potencias de expresiones imaginarias.

Extracción de raíces de expresiones imaginarias.

Interpretación geométrica de las raíces de expresiones imaginarias.

Ejercicios.

III. RADICALES ALGÉBRICOS.

Valores múltiples de un radical algebraico.

Notación de los radicales ALGÉBRICOS.

Cálculo de los radicales ALGÉBRICOS.

Escolio general.

Ejercicios.

IV. FUNCIÓN DE VABIABLES IMAGINARIAS.

Definición.

Diversas clases de funciones imaginarias.

Continuidad de las funciones imaginarias.

Representación geométrica de la función de variable imaginaria.

Ejercicios.

CAPÍTULO III. TEORÍA ELEMENTAL DE LAS SERIES.

I. PRELIMINARES.

Definición.

Algoritmo de las series.

Clasificación de las series.

Suma y resta de una serie.

Ejercicios.

II. CONVERGENCIA.

Condiciones generales de convergencia.

Caracteres de convergencia.

Operaciones que pueden efectuarse con las series sin que su convergencia se altere.

Ejercicios.

III. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES.

Definición.

Posibilidad ó imposibilidad del desarrollo.

Objeto de la transformación.

Procedimiento operativo directo.

Proposiciones fundamentales.

Método de los coeficientes indeterminados.

Ejercicios.

IV. ADICIÓN DE LAS SERIES, NUEVOS DESARROLLOS Y APLICACIONES IMPORTANTES.

Definiciones y procedimiento aditivo.

Límite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, cuando m crece ilimitadamente en valor absoluto.

Cálculo del número e.

Desarrollo de e^x.

Desarrollo de $(1+x)^m$.

Generalización de la fórmula del binomio.

Ejercicios.

LIBRO CUARTO. ANÁLISIS COMBINATORIO.

CAPÍTULO I. OPERACIONES COORDINATORIAS.

I. PRELIMINARES.

Definiciones.

Clasificación de las coordinaciones.

Coordinaciones con repetición.

Sucesiones é inversiones.

Notación simbólica en las operaciones coordinatorias.

Ejercicios.

II. VARIACIONES.

Formación y número de variaciones sin repetición.

Variaciones con repetición.

Ejercicios.

III. PERMUTACIONES.

Permutaciones sin repetición.

Permutaciones con repetición.

Ejercicios.

IV. COMBINACIONES.

Combinaciones sin repetición.

Combinaciones con repetición.

Adición y substracción.

Multiplicación.

División.

Elevación á potencias.

Ejercicios.

IV. APLICACIÓN DE LAS DETERMINANTES Á LA RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Procedimiento resolutivo.

Discusión de las fórmulas obtenidas.

Resolución de un sistema homogéneo.

Ejercicios.

LIBRO QUINTO. FUNCIONES DERIVADAS.

CAPÍTULO I. DERIVADAS EN GENERAL Y DE LAS FUNCIONES DE FORMA OPERATIVA.

I. NOCIONES PRELIMINARES.

Definición.

Derivadas de distintos órdenes y su notación simbólica.

Formas diversas del incremento de una función.

Significación geométrica de la derivada.

Ejercicios.

II. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA DE OPERACIÓN.

Derivada de una suma algebraica.

Derivada de un producto.

Derivada de un cociente.

Derivada de una potencia.

Derivada de una raíz.

Ejercicios

CAPÍTULO II. DETERMINACIÓN DE LAS DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SIMPLES Y DE LAS FUNCIONES DE FORMA ENTERA.

I. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES POTENCIAL ENTERA, EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA.

Derivada de la función potencial simple.

Divisores comunes y condición de divisibilidad.

Máximo común divisor y raíces comunes á dos ecuaciones.

Caracteres de multiplicidad de las raíces.

Descomposición de una ecuación que tiene raíces iguales.

Ejercicios.

III. PROPOSICIONES RELATIVAS A LOS NÚMEROS DE RAÍCES REALES É IMAGINARIAS DE UNA ECUACIÓN.

Caracteres que revelan la existencia de raíces reales.

Regla de signos de Descartes.

Límite inferior del número de raíces imaginarias.

Número de raíces positivas y negativas cuando todas son reales.

Teorema de Rolle.

Condiciones de realidad de todas las raíces de una ecuación.

Teorema de Sturm.

Ejercidos.

IV. TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE LAS ECUACIONES.

Objeto de la transformación.

Procedimiento general.

Problemas más usuales de transformación.

Ejercicios

CAPÍTULO II. LÍMITES Y SEPARACIÓN DE LAS RAICES DE UNA ECUACIÓN NUMÉRICA.

I. LÍMITES DE LAS RAÍCES.

Definiciones.

Límite superior de las raíces positivas.

Límite inferior de las raíces positivas.

Límites, superior é inferior, de las raíces negativas.

Ejercicios.

II. SEPARACIÓN DE LAS RAÍCES.

Definición.

Método de las substituciones sucesivas.

Método de Lagrange.

Método de Sturm.

IV. EXPRESIÓN DE MULTIPLICIDAD DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN POR MEDIO DE LOS DISCRIMINANTES.

Nuevo carácter de multiplicidad.

Discriminantes.

Aplicaciones.

Ejercicios.

2.46. Salinas Angulo, Ignacio y Benítez y Parodi, Manuel. Aritmética (Madrid, 1898)

<u>PARTE PRIMERA.-ALGORITMO ARITMÉTICO</u>

LIBRO PRIMERO. NÚMEROS ENTEROS.

CAPÍTULO I. NOCIONES PRELIMINARES

IV. Definiciones

V. Numeración hablada

VI. Numeración escrita

CAPÍTULO II. OPERACIONES FUNDAMENTALES

I. Adición

II. Substracción

III. Multiplicación

IV. División

CAPÍTULO III. DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS

I. Principios fundamentales

II. Caracteres generales de divisibilidad

III. Pruebas de la multiplicación y división por medio de los restos relativos a un módulo cualquiera

CAPÍTULO IV. MÁXIMO COMÚN DIVISOR

I. Máximo común divisor de un número

II. Máximo común divisor de varios números

CAPÍTULO V. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

I. Mínimo común múltiplo de un número

II. Mínimo común múltiplo de varios números

CAPÍTULO VI. NÚMEROS PRIMOS

I. Principios fundamentales y determinación de estos números

II. Teoremas referentes á los números primos

CAPÍTULO VII. APLICACIONES DE LOS NÚMEROS PRIMOS

I. Descomposición en factores primos

II. Investigación de los divisores de un número

III. Determinación, en factores primos, del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo

LIBRO SEGUNDO. FRACCIONES.

CAPÍTULO I. PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES ORDINARIAS

I. Preliminares

II. Numeración y algoritmo de las funciones ordinarias

III. Transformación de fracciones

IV. Alteración de las fracciones

CAPÍTULO II. OPERACIONES CON LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

I. Adición

II. Substracción

III. Multiplicación

IV. División

CAPÍTULO III. FRACCIONES COMPLEJAS E IGUALDADES FRACCIONARIAS

I. Fracciones complexas

II. Igualdades fraccionarias

CAPÍTULO IV. FRACCIONES CONTÍNUAS

I. Preliminares

II. Reducidas y cálculo de la fracción continua

CAPÍTULO V. FRACCIONES DECIMALES

I. Numeración y propiedades de las fracciones decimales

II. Adición

III. Substracción

IV. Multiplicación

V. División

CAPÍTULO VI. REDUCCIÒN DE FRACCIONES

I. Reducir un número fraccionario a otro de denominador dado

II. Reducir una fracción ordinaria o decimal a fracción continua

2.47. Salmon Weekes, George. Tratado de geometría analítica de tres dimensiones; traducido de la cuarta edicion inglesa por L. de la Puente (El Ferrol, 1888)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo)

2.48. Serret, J. A. Tratado de aritmética (Madrid, 1879)

2.49. Simson, Robert. The elements of Euclid, viz. The first six books, together with the eleventh and twelfth. The errors, by which Theon, or others, have long ago vitiated these books, are corrected, and some of Euclid’s demonstrations are restored. Also the book of Euclid's data, in like manner corrected. To this edition are also annexed, elements of plane and spherical trigonometry (Philadelphia, 1821)

(Se ha extraído al no disponer el texto del mismo; sólo se detallan en profundidad los puntos de especial importancia en la comparativa)

2.50. Terry y Rivas, Antonio. Problemas y ejercicios del cálculo algebraico, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, Tomo I (Madrid, 1879)

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS Y RESULTADOS DE LOS EJERCICIOS DEL CÁLCULO ALGEBRAICO.

2.51. Terry y Rivas, Antonio. Soluciones de los problemas y resultados de los ejercicios del cálculo algebraico, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, Tomo II (Madrid, 1879)

Valores numéricos de las cantidades algebráicas

Adicion de las cantidades algebráicas

Sustraccion de las cantidades algebráicas

Multiplicacion de las cantidades algebráicas

Division de las cantidades algebraicas

Descomposicion en factores de ciertas expresiones algebráicas

Máximo comun divisor

Mínimo comun múltiplo

Reduccion de las fracciones algebráicas á su más simple expresion

FRACCIONES

Adicion y sustraccion de las fracciones algebráicas

Multiplicacion de las fracciones algebráicas

Division de las fracciones algebráicas

Combinacion de las operaciones anteriores

Elevacion á potencias y extracción de raices

- Elevacion a potencias
- Extraccion de raices
- Raíz cuadrada
    - Raíz cuarta
    - Raíz octava
    - Raíz cúbica
    - Raíz sexta

Cálculo de los radicales reales é imaginarios

- Reduccion
- Adicion y sustraccion
- Multiplicacion
- Division
- Elevacion á potencias
- Extraccion de raíces

Módulos

Transformacion de un quebrado en que el denominador sea irracional ó imaginario en otro cuyo denominador sea racional

Transformacion de expresiones de la forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, $\sqrt{A+\sqrt{B+\sqrt{C}}}$ y $\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}$

2.52. Terry y Rivas, Antonio. Ejercicios y problemas de aritmética, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, Tomo I enunciados (Madrid, 1880)

2.53. Terry y Rivas, Antonio. Ejercicios y problemas de aritmética, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, Tomo II soluciones razonadas (Madrid, 1880)

NÚMEROS ENTEROS

Adición

Sustraccion

Multiplicacion

Division

Ejercicios diversos sobre las cuatro reglas de los números enteros

Máximo común divisor

Mínimo común múltiplo

Factores simples y compuestos

FRACCIONES

Resolución de fracciones á su más simple expresión

Adición

Sustraccion

Multiplicacion

Division

Ejercicios diversos sobre las fracciones

DECIMALES

Transformacion de los decimales en fracciones ordinarias

Expresar las fracciones en decimales

Adición

Sustraccion

Multiplicacion

Division

Transformación de las fracciones en decimales

Generatrices de las fracciones decimales, periódicas puras y periódicas mixtas.

Ejercicios diversos sobre las operaciones decimales.

EXTRACCIÓN DE RAICES

Raíz cuadrada

Raíz cúbica

Raíces de diferentes grados, cuya determinación depende de las raíces cuadradas y cúbicas.

NÚMEROS COMPLEJOS

Reducción de números complejos á incomplejos y vice-versa

Adicion

Sustraccion

Multiplicacion

Division

Ejercicios diversos

SISTEMA MÉTRICO

Medidas longitudinales

Medidas superficiales y agrarias

Medidas de solidez

Medidas de capacidad

Medidas de peso

Problemas diversos sobre el sistema métrico

Proporciones. Regla de tres simple y compuesta

Interés simple y compuesto.

Regla de descuento.

Repartimientos proporcionales. Regal de compañía

Regla de aligacion

Regla conjunta

Tanto p% en genral. Rentas sobre el papel del Estado ó fondos públicos. Corretajes. Ganancias. Pérdidas. Taras. Comisiones. Impuestos. Seguros.

PROGRESIONES

Progresiones por diferencias.

Progresiones por cociente.

Logaritmos.

Apéndice. Diferentes sistemas de numeración.

Tablas

2.54. Terry y Rivas, Antonio. Ejercicios de geometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia (Madrid, 1881)

ÍNTRODUCCIÓN

PRIMERA PARTE. GEOMETRÍA PLANA.

CAPITULO PRIMERO.

Perpendiculares y oblicuas- Paralelas – Triángulos – Polígonos en general- Líneas rectas en el círculo – Intersección y contacto de circunferencias.

CAPÍTULO II.

Líneas proporcionales- Polígonos semejantes- Polígonos regulares

CAPÍTULO III .

Áreas de los polígonos y del círculo. - Comparacion y equivalencia de las áreas

SEGUNDA PARTE. GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

CAPÍTULO PRIMERO.

Areas de los poliedros y de los cuerpos redondos. - Comparacion y equivalencia de las áreas

CAPITULO II.

Volúmenes de los poliedros y de los cuerpos redondos. - Comparacion y equivalencia de los volúmenes

CAPITULO III.

Áreas y volúmenes engendrados por figuras planas. - Máximos y mínimos.

Índice sacado de Divulgamat:

PRIMERA PARTE

CAPÍTULO I

I. Rectas y ángulos. II. Circunferencia. III. Polígonos: 1. Triángulos en general.

2. Triángulos isósceles. 3. Triángulos rectángulos. 4. Paralelogramos. 5.

Rectángulos. 6. Rombos. 7. Trapecios. 8. Polígonos en general.

CAPÍTULO II

I. Rectas proporcionales. II. Triángulos. III. Circunferencia y polígonos regulares.

CAPÍTULO III

Áreas de los polígonos y círculo. Comparación y equivalencia de las áreas.

APÉNDICE. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

SEGUNDA PARTE. GEOMETRÍA DEL ESPACIO

CAPÍTULO I

Áreas de los poliedros y cuerpos redondos. Comparación y equivalencia de áreas.

CAPÍTULO II. VOLÚMENES. COMPARACIÓN Y EQUIVALENCIAS

I. Prismas. II. Pirámides. III. Conos. IV. Cilindros. V. Esfera. VI. Equivalencia y volúmenes.

CAPÍTULO III

Áreas y volúmenes engendrados por figuras planas.

2.55. Terry y Rivas, Antonio. Ejercicios de trigonometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia (Madrid, 1881)

Aplicaciones de la TRIGONOMETRÍA á diferentes cuestiones que se presentan para el levantamiento de planos.

ESFÉRICA

CAPITULO PRIMERO

Resolución de los triángulos esféricos en general

CAPITULO II

Algunas aplicaciones de la TRIGONOMETRÍA esférica

2.56. Terry y Rivas, Antonio. Ejercicios de algebra, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia, primera parte (Madrid, 1885)

CAPÍTULO PRIMERO. VALORES NUMÉRICOS DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS. LAS CUATRO OPERACIONES SIMPLES CON LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS

I. Valores numéricos de las cantidades algebraicas

II. Las cuatro operaciones simples con las cantidades algebráicas:

1º. Adición de las cantidades algebraicas

2º. Sustracción de las cantidades algebraicas

3º. Multiplicación de las cantidades algebraicas

4º. División de las cantidades algebraicas

5º. Consecuencias de la multiplicación y división

6º. Descomposición en factores de ciertas expresiones algebráicas

CAPÍTULO II. MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

I. Máximo común divisor

II. Mínimo común múltiplo

CAPÍTULO III. FRACCIONES ALGEBRAICAS

I. Reduccion de expresiones algebráicas á la forma fraccionaria y la de esta á cantidades enteras ó mixtas

II. Reduccion de las fracciones albebráicas á su más mínima expresión

III. Operaciones con fracciones algebráicas:

1º. Adición y sustracción de las fracciones

2º. Multiplicación de las fracciones

3º. División de las fracciones

4º. Combinación de las operaciones anteriores

5º. Ejercicios sobre los símbolos $\frac{0}{m}, \frac{m}{0}, \frac{0}{0}$

CAPÍTULO IV. ELEVACIÓN Á POTENCIAS Y EXTRACCIÓN DE RAÍCES

I. Elevación a potencias

II. Extracción de raíces:

Raíz cuadrada

Raíz cuarta

Raíz octava

Raíz cúbica

Raíz sexta

CAPÍTULO V. CÁLCULO DE LOS RADICALES REALES É IMAGINARIOS

I. Transformación de radicales: Introducción debajo del radical del coeficiente de este último. Poner en evidencia un factor delante del radical. Reducción de radicales á un mismo índice. Transformación de radicales en raíces semejantes.

II. Operaciones con los radicales:

1º. Adición y sustracción de radicales

2º. Multiplicación de radicales

3º. División de radicales

4º. Elevación de radicales á una potencia

5º. Extracción de raíces de los radicales

III. Módulos

IV. Transformación de un quebrado en que el denominador sea irracional ó imaginario en otro cuyo denominador sea racional

V. Transformación de los radicales de la forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}, \sqrt{A+\sqrt{B+\sqrt{C+\sqrt{D}}}}, \sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$ en la suma de radicales simples

VI. Transformación de la suma ó diferencia de dos radicales simples en un solo radical

CAPÍTULO VI. CÁLCULO DE LAS CANTIDADES AFECTADAS DE EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS POSITIVOS Ó NEGATIVOS

1º. Adición y sustracción

2º. Multiplicación

3º. División. Simplificar las expresiones siguientes

4º. Elevación á potencias

5º. Extracción de raíces

CAPÍTULO VII. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

I. Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita

II. Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita que contienen radicales

III. Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita que contienen exponentes fraccionarios

IV. Ecuaciones exponenciales que se resuelven como las de primer grado

V. Problemas que dan ecuaciones de primer grado con una sola incógnita

VI. Ecuaciones de primer grado con dos ó más incógnitas. Ecuaciones que requieren ciertos artificios particulares para su más pronta resolución

VII. Problemas que dan ecuaciones de primer grado con dos ó más incógnitas

CAPÍTULO VIII. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

I. Ecuaciones de segundo grado con una sola incógnita:

1º. Ecuaciones incompletas

2º. Ecuaciones completas

II. Ecuaciones de grados superiores que pueden resolverse como las de segundo grado.

1º. Ecuaciones bicuadradas y trinomias. Ecuaciones que requieren ciertos artificios particulares para su resolucion.

2º. Ecuaciones recíprocas

III. Ecuaciones de segundo grado con dos ó más incógnitas. Ecuaciones que requieren ciertos artificios particulares para su resolucion.

IV: Problemas que dan ecuaciones de segundo grado con una ó varias incógnitas

CAPÍTULO IX. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DEPENDIENTES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

CAPÍTULO X. DE LAS DESIGUALDADES

I. De las desigualdades de primer grado

II. De las desigualdades de segundo grado

CAPÍTULO XI. ECUACIONES INDETERMINADAS

I. Ecuaciones indeterminadas de primer grado

Hallar las soluciones enteras y positivas de las ecuaciones siguientes

Hallar las soluciones enteras y negativas de las ecuaciones siguientes

Hallar las soluciones enteras tanto positivas como negativas de las ecuaciones siguientes

Hallar las soluciones enteras y positivas de las ecuaciones siguientes

II. Ecuaciones indeterminadas del segundo grado

Resolver en números enteros las ecuaciones siguientes

Hallar los valores de x que reduzca á cuadrados perfectos los polinomios siguientes

Hallar los valores enteros de x é y para que reduzcan á cuadrados perfectos los polinomios siguientes

III. Problemas que dan ecuaciones indeterminadas de primero y segundo grado

CAPÍTULO XII. PERMUTACIONES, COORDINACIONES Y COMBINACIONES.- BINOMIO DE NEWTON

I. Permutaciones, coordinaciones y combinaciones

II. Binomio de Newton

CAPÍTULO XIII. PROGRESIONES

I. Progresiones aritméticas.

II. Suma de las potencias semejantes y enteras de varias cantidades de progresión aritmética

Pilas de balas

III. Progresiones geométricas

CAPÍTULO XIV. FRACCIONES CONTÍNUAS

Reducir las fracciones ordinarias á fracciones contínuas; formar las reducidas y reducir las fracciones contínuas á ordinarias

Reducir los radicales á fracciones contínuas y formar las reducidas

CAPÍTULO XV. LOGARITMOS

Formular el logaritmo de las expresiones siguientes

Hallar los logaritmos de los números siguientes

Hallar los números correspondientes de los logaritmos siguientes

Calcular por medio de los logaritmos las expresiones siguientes

Ecuaciones exponenciales

Resolver las ecuaciones siguientes

Expresar en números el valor de una cantidad dada por su logaritmo

CAPÍTULO XVI. INTERESES Y ANUALIDADES

Intereses y anualidades

CAPÍTULO XVII. TEORÍA GENERAL DE ECUACIONES. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS DE GRADOS SUPERIORES

I. Teoría general de ecuaciones

Transformación de ecuaciones

Raíces iguales

Límites de las raíces de las ecuaciones

Teorema de Sturm

II. Resolución de las ecuaciones numéricas de grados superiores

Método de aproximación de Newton

CAPÍTULO XVIII. DETERMINANTES

I. De los determinantes en general

II. Transformacion de los determinantes

III. Propiedades generales de los determinantes

IV. De los determinantes menores

V. Suma y resta de los determinantes

VI. Propiedades de los determinantes que tienen uno ó varios de sus elementos iguales á cero

VII. Multiplicacion de dos determinantes

VIII. Cálculo de los determinantes

IX. Apliacion de los determinantes

2.57. Terry y Rivas, Antonio. Soluciones de los ejercicios de algebra, segunda parte (Madrid, 1885)

CAPÍTULO PRIMERO. VALORES NUMÉRICOS DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS. LAS CUATRO OPERACIONES SIMPLES CON LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS

CAPÍTULO II. MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

CAPÍTULO III. FRACCIONES ALGEBRAICAS

CAPÍTULO IV. ELEVACIÓN Á POTENCIAS Y EXTRACCIÓN DE RAÍCES

Raíz octava

Raíz cúbica

Raíz sexta

CAPÍTULO V. CÁLCULO DE LOS RADICALES REALES É IMAGINARIOS

I. Transformación de radicales: Introducción debajo del radical del coeficiente de este último. Poner en evidencia un factor delante del radical. Reducción de radicales á un mismo índice. Transformación de radicales en raíces semejantes.

II. Operaciones con los radicales:

1º. Adición y sustracción de radicales

2º. Multiplicación de radicales

3º. División de radicales

4º. Elevación de radicales á una potencia

5º. Extracción de raíces de los radicales

III. Módulos

IV. Transformación de un quebrado en que el denominador sea irracional ó imaginario en otro cuyo denominador sea racional

V. Transformación de los radicales de la forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, $\sqrt{A+\sqrt{B+\sqrt{C+\sqrt{D}}}}$, $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$ en la suma de radicales simples

VI. Transformación de la suma ó diferencia de dos radicales simples en un solo radical

CAPÍTULO VI. CÁLCULO DE LAS CANTIDADES AFECTADAS DE EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS POSITIVOS Ó NEGATIVOS

1º. Adición y sustracción

2º. Multiplicación

3º. División. Simplificar las expresiones siguientes

4º. Elevación á potencias

5º. Extracción de raíces

CAPÍTULO VII. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

I. Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita

II. Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita que contienen radicales

III. Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita que contienen exponentes fraccionarios

IV. Ecuaciones exponenciales que se resuelven como las de primer grado

V. Problemas que dan ecuaciones de primer grado con una sola incógnita

VI. Ecuaciones de primer grado con dos ó más incógnitas. Ecuaciones que requieren ciertos artificios particulares para su más pronta resolución

VII. Problemas que dan ecuaciones de primer grado con dos ó más incógnitas

CAPÍTULO VIII. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

I. Ecuaciones de segundo grado con una sola incógnita:

1º. Ecuaciones incompletas

2º. Ecuaciones completas

II. Ecuaciones de grados superiores que pueden resolverse como las de segundo grado.

1º. Ecuaciones bicuadradas y trinomias. Ecuaciones que requieren ciertos artificios particulares para su resolucion.

2º. Ecuaciones recíprocas

III. Ecuaciones de segundo grado con dos ó más incógnitas. Ecuaciones que requieren ciertos artificios particulares para su resolucion.

IV: Problemas que dan ecuaciones de segundo grado con una ó varias incógnitas

CAPÍTULO IX. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DEPENDIENTES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

CAPÍTULO X. DE LAS DESIGUALDADES

I. De las desigualdades de primer grado

II. De las desigualdades de segundo grado

CAPÍTULO XI. ECUACIONES INDETERMINADAS

I. Ecuaciones indeterminadas de primer grado

Hallar las soluciones enteras y positivas de las ecuaciones siguientes

Hallar las soluciones enteras y negativas de las ecuaciones siguientes

Hallar las soluciones enteras tanto positivas como negativas de las ecuaciones siguientes

Hallar las soluciones enteras y positivas de las ecuaciones siguientes

II. Ecuaciones indeterminadas del segundo grado

Resolver en números enteros las ecuaciones siguientes

Hallar los valores de x que reduzca á cuadrados perfectos los polinomios siguientes

Hallar los valores enteros de x é y para que reduzcan á cuadrados perfectos los polinomios siguientes

III. Problemas que dan ecuaciones indeterminadas de primero y segundo grado

CAPÍTULO XII. PERMUTACIONES, COORDINACIONES Y COMBINACIONES.- BINOMIO DE NEWTON

I. Permutaciones, coordinaciones y combinaciones

II. Binomio de Newton

CAPÍTULO XIII. PROGRESIONES

I. Progresiones aritméticas.

II. Suma de las potencias semejantes y enteras de varias cantidades de progresión aritmética

Pilas de balas

III. Progresiones geométricas

CAPÍTULO XIV. FRACCIONES CONTÍNUAS

Reducir las fracciones ordinarias á fracciones contínuas; formar las reducidas y reducir las fracciones contínuas á ordinarias

Reducir los radicales á fracciones contínuas y formar las reducidas

CAPÍTULO XV. LOGARITMOS

Formular el logaritmo de las expresiones siguientes

Hallar los logaritmos de los números siguientes

Hallar los números correspondientes de los logaritmos siguientes

Calcular por medio de los logaritmos las expresiones siguientes

Ecuaciones exponenciales

Resolver las ecuaciones siguientes

Expresar en números el valor de una cantidad dada por su logaritmo

CAPÍTULO XVI. INTERESES Y ANUALIDADES

Intereses y anualidades

CAPÍTULO XVII. TEORÍA GENERAL DE ECUACIONES. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS DE GRADOS SUPERIORES

I. Teoría general de ecuaciones

Transformación de ecuaciones

Raíces iguales

Límites de las raíces de las ecuaciones

Teorema de Sturm

II. Resolución de las ecuaciones numéricas de grados superiores

Método de aproximación de Newton

CAPÍTULO XVIII. DETERMINANTES

I. De los determinantes en general

II. Transformacion de los determinantes

III. Propiedades generales de los determinantes

IV. De los determinantes menores

V. Suma y resta de los determinantes

VI. Propiedades de los determinantes que tienen uno ó varios de sus elementos iguales á cero

VII. Multiplicacion de dos determinantes

VIII. Cálculo de los determinantes

IX. Apliacion de los determinantes

2.58. Tofiño, Vicente. Compendio de la geometría elemental y trigonometría rectilínea: para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas en su Academia (Isla de León, 1771)

Nociones preliminares, que explican el objeto, y principios fundamentales de la Geometría.

LIBRO I: QUE TRATA LAS LINEAS

SECCION I. De la Linea Recta.

SECCION II. De la Linea Circular.

SECCION III. De los Angulos.

SECCION IV. De la Perpendicular.

SECCION V. De las paralelas.

SECCION VI. De algunas propiedades de las Lineas Rectas consideradas en el Circulo.

2.59. Tosca, Tomás Vicente. Compendio mathemático, en que se contienen todas las materias mas principales de las ciencias, que tratan la cantidad. Tomo III. Trigonometría, secciones cónicas, maquinaria (Valencia, 1710)

TRATADO VII. DE LA TRIGONOMETRIA

LIBRO I. De los Senos, Tangentes, y Secantes; y del Canon Trigonometrico

Definiciones

Cap. 1. De los fundamentos, y compoficion del Canon de los Senos

Cap. 2. De los fundamentos, y compoficion del Canon de las Tangentes, y Secantes

LIBRO II. De los Logarithmos

Definicion unica

Cap. 1. De la naturaleza, y propiedades de los Logarithmos

Cap. 2. De la fabrica de los Logarithmos

Cap. 3. Del ufo del Canon Trigonometrico, y Tabla Logarihmica

Cap. 4. Aplicación de los Logarithmos á diferentes operaciones

Tablas Trigonometricas, y Logarithmicas

LIBRO III. De la Trigonometria rectilinea

Definiciones

Cap. 1. Theoremas fundamentales para la refolucion de los triangulos rectilineos rectangulos

Cap. 2. De la refolucion de los triangulos rectilineos rectangulos

Cap. 3. Theoremas fundamentales para la refolucion de los triangulos rectilineos obliquangulos

Cap. 4. De la refolucion de los triangulos rectilineos obliquangulos

LIBRO IV. Isagogico para la refolucion de los triangulos esfericos, ò curvilineos

Definiciones

Cap. 1. De las propiedades de los circulos maximos, y angulos esfericos

Cap. 2. De las propiedades de los triangulos esfericos en comun

Cap. 3. De las propiedades de los triangulos esfericos rectangulos

Cap. 4. De las propiedades de los triangulos esfericos obliquangulos

LIBRO V. De la refolucion de los triangulos esfericos rectangulos

Cap. 1. Theoremas fundamentales para la refolucion de los triangulos esfericos rectangulos

Cap. 2. De la refolucion de los triangulos esfericos rectangulos

LIBRO VI. De la refolucion de los triangulos esfericos obliquangulos

Cap. 1. Theoremas fundamentales para la refolucion de los triangulos esfericos obliquangulos quando fe dan concocidos 2. ang. Y1. lado, ò 2. lados, y 1. ang.

Cap. 2. Theoremas fundamentales para la refolucion de los triangulos esfericos obliquangulos quando fe dan concocidos fus 3. lados, ò fus 3. angulos

Cap. 3. En que fe refuelven los triangulos esfericos obliquangulos

1. Refolucion de los triangulos esfericos obliquangulos, en que fe dan tres partes alternas

2. Refolucion de los triangulos esfericos obliquangulos, en que fe dan dos partes alternas, y una intermed.

3. Refolucion de los triangulos esfericos obliquangulos, en que fe dan 2. partes alternas, y 1. opuesta

Apendice

2.60. Webber, Samuel. Mathematics, compiled from the best authors, and intended to be the text-book of the course of private lectures on these sciences in the university at Cambridge, Vol. II (Cambridge, 1808)

(Sólo se detallan en profundidad los puntos de especial importancia en la comparativa)

MENSURATION OF SOLIDS

GAUGING

HEIGHTS AND DISTANCES SURVEYING

NAVIGATION

CONIC SECTIONS

DIALING

SPHERIC GEOMETRY

Definitions

Orthographic Projection

Stereographic Projection

Projections of the Sphere

SPHERIC TRIGONOMETRY

3. TABLAS

3.1. Obras seleccionadas y asignaturas relacionadas con las matemáticas en cada periodo

Notación:
- AGM: ACADEMIAS DE GUARDIAS MARINAS
- CRMCGM: COLEGIO REAL Y MILITAR DE CABALLEROS GUARDIAS MARINAS
- CNM: COLEGIO NAVAL MILITAR
- ENF: ESCUELA NAVAL FLOTANTE

ETAPA	ASIGNATURAS	LIBROS
AGM (1802-1824) BÁSICO	I. Tratado de Aritmética, en que se dará razón de las operaciones, y se reducirán estas a las más precisas para facilitar la práctica de la Navegación. II. Tratado de Geometría, en que se demostrarán las propiedades de las líneas, superficies y sólidos, que sirven de base para la resolución de los problemas náuticos y comprehenderá las nociones de Geometría práctica y de Trigonometría rectilínea de que se hace uso en el Pilotage. III. Tratado de Cosmografía, que comprehenderá algunas nociones sobre los círculos, líneas y puntos que se imaginan en la esfera, los elementos de Astronomía y Geografía que facilitan la inteligencia del Pilotage, y la solución de los Problemas usuales de Astronomía náutica, por métodos más expeditos que los que se deducen inmediatamente de la Trigonometría Esférica, cuyo estudio resulta innecesario.	o Ciscar, Gabriel: *Curso de Estudios Elementales de Marina.*

ETAPA	ASIGNATURAS	LIBROS
AGM (1802-1824) ESTUDIOS MAYORES	Plan propuesto por Ciscar en 1808 : o Álgebra finita, con sus aplicaciones a la aritmética y geometría. o Secciones cónicas. o Cálculo diferencial e integral.	Plan propuesto por Ciscar en 1808 : o Bézout, Etienne: *Cours de mathematiques a l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, Tomos 3º, 4º y 5º. o Juan, Jorge*: Examen marítimo teórico práctico ó Tratado de Mecánica aplicado á la construccion, conocimiento y manejo de los navíos y demás embarcaciones, adicionado por Ciscar*. o La Caille, Nicolás Louis de: *Lecons élémentaires de mathématiques* (en la edición de 1784 comentada por Marie) o Lacroix, Sylvestre François*: Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral*. En 1812: o Bézout, Etienne: *Cours de mathematiques a l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* o La Caille, Nicolás Louis de: *Lecons élémentaires de mathématiques* (en la edición de 1784 comentada por Marie) o Lalande, Joseph: *Astronomie* (suponemos que se trata de esta obra, no lo ponía explícitamente)
CRMCGM (1825-1828) BÁSICO	Igual que en el periodo anterior.	Igual que en el periodo anterior.

ETAPA	ASIGNATURAS	LIBROS
CNM (1844-1868) BÁSICO	o Aritmética. o Álgebra. o Geometría elemental. o Geometría Analítica. o Trigonometría Rectilínea y Esférica.	o Montojo Díaz, Saturnino: *Tratado elemental de aritmética.* o Montojo Díaz, Saturnino: *Tratado elemental de álgebra.* o Montojo Díaz, Saturnino: *Tratado elemental de trigonometría.*
CNM (1844-1868) ESTUDIOS SUBLIMES	o Cálculo diferencial e integral. o Geometría Analítica y aplicaciones teóricas de los cálculos. o Geodesia. o Geometría Descriptiva.	

<table>
<tr><th>ETAPA</th><th>ASIGNATURAS</th><th>LIBROS</th></tr>
<tr><td>ENF
(1869-1909)
EXAMEN INGRESO</td><td>o Aritmética.
o Álgebra.
o Geometría.
o Trigonometría Plana y Esférica.
o Construcciones geométricas de las expresiones algebraicas.
o Complemento de Álgebra y Geometría.
o Geometría Analítica.
o Cálculo diferencial e integral.
o Geometría Descriptiva.</td><td>o Bielsa y Ciprián, José: Tratado de geometría descriptiva, sombras, topográfico y sistema de acotaciones (Principios de Geometría descriptiva.- Con la extensión de los capítulos I y II de la obra de D. José Bielsa.- Segunda edición)
o Briot, Charles: Lecciones de álgebra elemental y superior; traducidas, ampliadas y completadas con numerosas notas y extensos apéndices por C. Sebastian y B. Portuondo.Cortázar, Juan: Tratado de Aritmética. (Aritmética por cualquier autor, con la extensión cuando menos del clásico tratado de Cortázar)
o Cortázar, Juan: Tratado de álgebra elemental. (Álgebra por cualquier autor, con la extensión cuando menos del clásico tratado de Cortázar)
o Cortázar, Juan: Tratado de Geometría elemental. (Geometría por cualquier autor, con la extensión cuando menos del clásico tratado de Cortázar)
o Cortázar, Juan: Tratado de Trigonometría y Topografía. (Trigonometría rectilínea y esférica y Topografía con la extensión de Cortázar)
o García Villar, Miguel: Tratado elemental de geometría descriptiva.
o Ibáñez Valera, Joaquín: Teoría de rectas y planos de geometría descriptiva: redactada, con arreglo al programa de ingreso para la Escuela Naval Flotante y recomendada por su Reglamento de 10 de Enero de 1877 en el Pár. 4º, Art. 5º. Tit. II.
o Merás y Uría, Julio: Lecciones de geometria analítica: redactadas para uso de los aspirantes á guardias-marinas.
o Meunier-Joannet, Pierre Jules: Cours élémentaire d'analyse. (Álgebra y Geometría Analítica)
o Montaner Vega-Verdugo, Jaime: Álgebra: escrita con sujeción al programa vigente para los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante.
o Montojo Díaz, Saturnino: Tratado elemental de trigonometría: para uso de los aspirantes al Colegio Naval Militar
o Ortega y Sala, Miguel: Geometría.
o Peral, Pedro del: Tratado de álgebra: escrito con arreglo al nuevo programa de ingreso en la Escuela Naval Flotante.
o Rouché, Eugène y Comberousse, Charles de: Tratado de geometría elemental; traducido por A. Portuondo y J. Portuondo</td></tr>
</table>

		o Salinas Angulo, Ignacio y Benítez y Parodi, Manuel: *Aritmética* o Salmon, George: *Tratado de geometría analítica de tres dimensiones; traducido de la cuarta edicion inglesa por L. de la Fuente* Salinas Angulo, Ignacio y Benítez y Parodi, Manuel: *Álgebra* o Schrön, Ludwig: *Tables de logarithmes a sept décimales pour les nombres depuis 1 jusqu'a 108000 et pour les fonctions trigonométriques de dix en dix secondes; introduction par J. Hoüel*. o Serret, Joseph Alfred: *Tratado de aritmética / ed. rev. por J.-A. Serret y Ch. de Comberousse ; traducida y aum. por T. Monteverde*. o Terry y Rivas, Antonio: *Ejercicios y problemas de aritmética: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Aritmética, Algebra y Geometría, aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de D. Antonio Terry y Rivas; el nombre que aparecía en la fuente era *Problemas del Cálculo Aritmético*) o Terry y Rivas, Antonio: *Problemas y ejercicios del cálculo algebraico: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia* (Aritmética, Algebra y Geometría, aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de D. Antonio Terry y Rivas; el nombre que aparecía en la fuente era *Complemento de Algebra)*. o Terry y Rivas, Antonio*: Ejercicios de Geometría. (*Aritmética, Álgebra y Geometría, aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de D. Antonio Terry y Rivas) o Terry y Rivas, Antonio *Ejercicios de Trigonometría*.
ENF (1869-1909) BÁSICO	o Análisis. o Complemento Álgebra (también Álgebra superior). o Trigonometría Rectilínea y Esférica. o Geometría Descriptiva. o Cálculo.	o Barreda, José A. y García Velázquez, Manuel: *Curso de Trigonometría rectilínea y esférica*. o María, Juan Luís de: *Lecciones elementales de geometría analítica: redactadas con arreglo al programa vigente en la Escuela Naval*. o Meunier-Joannet, Pierre Jules: *Cours élémentaire d'analyse*. o Miranda, Augusto: *Lecciones de cálculo infinitesimal*.

3.2. Datos generales de los textos por materias

Notación:
(1) Nº paginas relacionadas
(2) Nº paginas dedicadas a preliminares
(3) Nº paginas dedicadas a tablas, gráficos y apéndices relacionados

3.2.1. Datos generales de los textos sobre Aritmética.

Año	Autor	Título	Lugar edición	Imprenta	(1)	(2)	(3)	Índ ice	Libro de texto en
1803	**Ciscar y Ciscar (1769-1829)**	Curso de Estudios Elementales de Marina, Tomo I, que contiene el tratado de Aritmética	Madrid	Imprenta Real.	108	8	9	No	Academias de Guardias Marinas y Escuelas Navales.
1860 (1ª Ed. 1846)	**Cortázar (1809-1873)**	Tratado de Aritmética	Madrid	Imp. de D. F. Sánchez.	216	4	0	2	Ingreso en Escuela Naval Flotante. Utilizado en universidades, institutos y escuelas industriales.
1849	**Montojo (1796-1856)**	Tratado elemental de Aritmética	San Fernando	Imprenta, Librería y Litografía de la Revista Médica.	198	5	3	2	Colegio Naval Militar.
1880	**Terry y Rivas (1838-1900)**	Ejercicios y problemas de aritmética: : parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia	Madrid	Pedro Abienzo, impresor del Ministerio de Marina.	498	4	11	4	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1883	**Serret (1819-1885)**	Tratado de aritmética / ed. rev. por J.-A. Serret y Ch. de Comberousse ; traducida y aum. por T. Monteverde /	Madrid	Imprenta y Litografía de La	278	2	90	7	Ingreso en Escuela Naval Flotante.

		/ por J.-A. Serret ; 6		Guirnalda.					
1898 (1ª Ed. 1884)	**Salinas y Benítez (1845-1911)**	Aritmetica	Madrid	Imprenta del depósito de la Guerra.	299	1	0	7	Ingreso en Escuela Naval Flotante.

3.2.2. Datos generales de los textos sobre Álgebra elemental y superior

Año	Autor	Título	Lugar edición	Imprenta	(1)	(2)	(3)	Índ ice	Libro de texto en
1857 (1ª Ed. 1848)	**Cortázar (1809-1873)**	Tratado de álgebra elemental	Madrid	Imprenta de G. Alhambra.	218	1	0	2	Ingreso en Escuela Naval Flotante. Utilizado en universidades, institutos y escuelas industriales.
1850	**Montojo (1796-1856)**	Tratado elemental de Álgebra	Cádiz	Imprenta, Librería y Litografía de la Revista Médica.	222	5	0	2	Colegio Naval Militar.
1858	**Meunier-Joannet**	Cours élémentaire d'analyse :contenant un très grand nombre d'applications : à l'usage des élèves de l'Ecole Navale et des élèves de l'Ecole centrale des arts et manufactures / par J. Meunier-Joannet	París	Arthus Bertand, Éditeur. Libraire de la Société de Géographie.	12	2	0	35	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1879	**Terry y Rivas (1838-1900)**	Problemas y ejercicios del cálculo algebraico: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia	Madrid	Imprenta de Pedro Abienzo.	198 + 262	2 +0	0 +0	2 + 2	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1880	**Briot (1817-1882)**	Lecciones de álgebra elemental y superior / de Ch. Briot ; traducidas, ampliadas y completadas con numerosas notas y extensos apéndices por C. Sebastian y B. Portuondo	Madrid	Imprenta de la Viuda é Hijo de D.E. Aguado.	667	3	134	5	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1885 (1ª Ed. 1881)	**Terry y Rivas (1838-1900)**	Ejercicios de algebra, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia	Madrid	Imprenta de la Vda. e Hijos de Abienzo.	213 + 287	0 + 0	0 + 0	4 + 4	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1883	**Peral (1849-1897)**	Tratado de álgebra : escrito con arreglo al nuevo programa de ingreso en la Escuela Naval Flotante	Sevilla	Est. tipográfico y litográfico del Círculo Liberal.	371	4	0	6	Ingreso en Escuela Naval Flotante.

1898 y 1936 (1ª Ed. 1885)	**Salinas y Benítez (1845-1911)**	Algebra. Tomos I y II	Madrid	Librería y casa editorial Victoriano Suarez.	772	4	3	19	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1898	**Montaner Vega**	Álgebra: escrita con sujeción al programa vigente para los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante	Madrid	Imprenta de L. Aguado.	286	0	0	2	Ingreso en Escuela Naval Flotante.

3.2.3. Datos generales de los textos sobre Geometría elemental

Año	Autor	Título	Lugar edición	Imprenta	(1)	(2)	(3)	Índ ice	Libro de texto en
1803	**Ciscar y Ciscar (1769-1829)**	Curso de Estudios Elementales de Marina, Tomo II, que contiene el tratado de Geometría	Madrid	Imprenta Real.	136	8	3	No	Academias de Guardias Marinas y Escuelas Navales.
1864 (1ª Ed. 1847)	**Cortázar (1809-1873)**	Tratado de Geometría elemental	Madrid	Imp. de A. Peñuelas.	200	0	7	2	Ingreso en Escuela Naval Flotante. Utilizado en universidades, institutos y escuelas industriales.
1858	**Meunier-Joannet**	Cours élémentaire d'analyse: contenant un très grand nombre d'applications : à l'usage des élèves de l'Ecole Navale et des élèves de l'Ecole centrale des arts et manufactures / par J. Meunier-Joannet	París	Arthus Bertand, Éditeur. Libraire de la Société de Géographie.	16	2	0	35	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1881	**Terry y Rivas (1838-1900)**	Ejercicios de Geometría: parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia	Madrid	Pedro Abienzo, impresor del Ministerio de Marina.	246	3	10	1	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1885	**Ortega y Sala**	Geometría	Guadalajara	Imprenta y encuadernación provincial.	397	3	15	2	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1878 (1ª Ed. 1873)	**Rouché (1832-1910) y Comberousse (1826-1897)**	Tratado de Geometría Elemental, traducido por A. Portuondo y J. Portuondo	Madrid	Imprenta, Estereotipia y Galvanoplastia de Aribau y Cª. Impresores de Cámara de S. M.	521	14	68	15	Ingreso en Escuela Naval Flotante.

3.2.4. Datos generales de los textos sobre Geometría Descriptiva

Año	Autor	Título	Lugar edición	Imprenta	(1)	(2)	(3)	Índ ice	Libro de texto en
1857 (1ª Ed. 1846)	**Bielsa**	Tratado de geometría descriptiva, sombras, topográfico y sistema de acotaciones	Segovia	Imprenta de los sobrinos de Espinosa.	247	6	31 (ed. de 1846)	10	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1877	**Ibáñez y Valera**	Teoría de rectas y planos de geometría descriptiva: redactada, con arreglo al programa de ingreso para la Escuela Naval Flotante y recomendada por su Reglamento de 10 de Enero de 1877 en el Pár. 4º, Art. 5º. Tit. II	Manila	Imprenta de Ramirez y Giraudier.	81	1	0	0	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1883	**García**	Tratado elemental de Geometría Descriptiva escrito por encargo de la Junta Facultativa de la Escuela Naval para servir en ella de texto	Madrid	Imprenta de la Real Casa.	154	3	19	5	Ingreso en Escuela Naval Flotante.

3.2.5. Datos generales de los textos sobre Geometría Analítica

Año	Autor	Título	Lugar edición	Imprenta	(1)	(2)	(3)	Índ ice	Libro de texto en
1858	**Meunier-Joannet**	Cours élémentaire d'analyse: contenant un très grand nombre d'applications : à l'usage des élèves de l'Ecole Navale et des élèves de l'Ecole centrale des arts et manufactures / par J. Meunier-Joannet	París	Arthus Bertand, Éditeur. Libraire de la Société de Géographie.	40	2	0	35	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1879	**Merás y Uría**	Lecciones de geometria analítica: redactadas para uso de los aspirantes á guardias-marinas / por Julio Merás y Uría, Teniente de Navío	Ferrol	Impreso de El Correo Gallego.	208	4	0	7	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1888 (1ª Ed. en inglés 1862)	**Salmon (1819-1904)**	Tratado de geometría analítica de tres dimensiones / por George Salmon ; traducido de la cuarta edicion inglesa por L. de la Fuente	Ferrol	Establecimiento Tipográfico de R icardo Pita.	135	0	0	0	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1900	**De María**	Lecciones elementales de Geometría Analítica redactadas con arreglo al programa vigente en la Escuela Naval	Ferrol	Imprenta y Librería de hijos de R. Pita.	214	2	0	11	Escuela Naval Flotante.

3.2.6. Datos generales de los textos sobre Análisis Matemático

Año	Autor	Título	Lugar edición	Imprenta	(1)	(2)	(3)	Índice	Libro de texto en
1784	**La Caille (1713-1762)**	Leçons élémentaires de mathématiques	París	La Veuve Desaint, Libraire.	98	5	9	7	Academias de Guardias Marinas (1783-1802) Estudios Mayores. Academias de Guardias Marinas (1802-1824) Estudios Mayores (Plan propuesto por Ciscar en 1808 y Plan de 1812).
1770	**Bézout (1730-1783)**	Cours de mathématiques a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Vol. IV: Mecánica	París	J. B. G. Musier fils.	222	3	2	3	Academias de Guardias Marinas (1783-1802) Estudios Mayores. Academias de Guardias Marinas (1802-1824) Estudios Mayores (Plan propuesto por Ciscar en 1808 y Plan de 1812).
1802	**Lacroix (1765-1843)**	Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral: précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées	París	Duprat, Libraire pour les Mathématiques.	574	28	3	10	Estudios Mayores (Plan propuesto por Ciscar en 1808).
1858	**Meunier-Joannet**	Cours élémentaire d'analyse: contenant un très grand nombre d'applications : à l'usage des élèves de l'Ecole Navale et des élèves de l'Ecole centrale des arts et	París	Arthus Bertand, Éditeur. Libraire de la Société de	383	1	5	35	Escuela Naval Flotante.

		manufactures / par J. Meunier-Joannet		Géographie.					
1884	**Miranda (1855-1920)**	Lecciones de cálculo infinitesimal	Ferrol	Establecimiento tipográfico R. Pita.	406	12	2	3	Escuela Naval Flotante.

3.2.7. Datos generales de los textos sobre Trigonometría Rectilína

Año	Autor	Título	Lugar edición	Imprenta	(1)	(2)	(3)	Índi ce	Libro de texto en
1803	**Ciscar y Ciscar (1769-1829)**	Curso de Estudios Elementales de Marina, Tomo II, que contiene el tratado de Geometría	Madrid	Imprenta Real.	15	8	0	No	Academias de Guardias Marinas y Escuelas Navales.
1859 (1ª Ed. 1848)	**Cortázar (1809-1873)**	Tratado de Trigonometría y Topografía	Madrid	Imp. de D. F. Sánchez.	188	4	4	2	Ingreso en Escuela Naval Flotante. Utilizado en universidades, institutos y escuelas industriales.
1865	**Montojo (1796-1856)**	Tratado elemental de trigonometría: para uso de los aspirantes al Colegio Naval Militar	San Fernando	Imprenta y Librería Española.	280	2	0	4	Colegio Naval Militar e ingreso en Escuela Naval Flotante.
1881	**Terry y Rivas (1838-1900)**	Ejercicios de Trigonometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia.	Madrid	Pedro Abienzo, impresor del Ministerio Marina.	260	3	0	1	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1881	**Ortega y Sala**	Trigonometría	Madrid	Imp. Memorial de Ingenieros.	184	5	2	4	Escuelas de ingenieros de minas e ingenieros industriales y en otros centros de enseñanza.
1917 (1ª Ed. 1899)	**Barreda & García (1867-1927)**	Trigonometría elemental: obra declarada de texto para el ingreso en la Escuela Naval	San Fernando	Iris. Imprenta Bazar.	231	0	40	No	Ingreso en Escuela Naval Flotante.

3.2.8. Datos generales de los textos sobre Trigonometría Esférica

Año	Autor	Título	Lugar edición	Imprenta	(1)	(2)	(3)	Índice	Libro de texto en
1817 (1ª Ed. 1803)	**Ciscar y Ciscar**	Curso de Estudios Elementales de Marina, Tomo III, que contiene el tratado de Cosmografía	Madrid	Imprenta Real.	19	12	5	No	Academias de Guardias Marinas y Escuelas Navales.
1823	**Lista y Aragón (1775-1848)**	Elementos de Trigonometría esférica y Geografía astronómica: para el uso de la casa de educación sita en la calle de San Mateo de esta corte	Madrid	Imprenta de D. Leon Amarita.	10	3	1	2	Casa de educación.
1834	**Castillo y Castro**	Sumario de Trigonometría Esférica para uso de los principiantes en la carrera de la navegación	Madrid	Imp. de D. Miguel de Burgos.	63	12	14	No	Escuelas Navales.
1859 (1ª Ed. 1848)	**Cortázar (1809-1873)**	Tratado de Trigonometría y Topografía	Madrid	Imp. de D. F. Sánchez.	188	4	4	2	Ingreso en Escuela Naval Flotante. Utilizado en universidades, institutos y escuelas industriales.
1865	**Montojo (1796-1856)**	Tratado elemental de trigonometría: para uso de los aspirantes al Colegio Naval Militar	San Fernando	Imprenta y Librería Española.	280	2	0	4	Colegio Naval Militar e ingreso en Escuela Naval Flotante.
1881	**Terry y Rivas (1838-1900)**	Ejercicios de Trigonometría, parte originales y parte escogidos de los principales autores que tratan de la materia.	Madrid	Pedro Abienzo, impresor del Ministerio de Marina.	260	3	1	1	Ingreso en Escuela Naval Flotante.
1881	**Ortega y Sala**	Trigonometría	Madrid	Imp. Memorial de Ingenieros.	184	5	2	4	Escuelas de ingenieros de

									minas e ingenieros industriales y en otros centros de enseñanza.
1917 (1ª Ed. 1899)	**Barreda & García (1867-1927)**	Trigonometría elemental: obra declarada de texto para el ingreso en la Escuela Naval	San Fernando	Iris. Imprenta Bazar.	231	0	40	N	Ingreso en Escuela Naval Flotante.

3.3. Temas presentes en los textos por materias

3.3.1. Temas presentes en los textos sobre Aritmética

	Ciscar y Ciscar (Tomo I)	Cortázar	Montojo	Terry y Rivas	Serret	Salinas y Benítez
NÚMEROS ENTEROS	X	X	X	X	X	X
DIVISIBILIDAD	X	X	X	X	X	X
FRACCIONES	X	X	X	X	X	X
POTENCIAS, RAICES CUADRADA Y CÚBICA DE LOS NÚMEROS.	X	X	X	X	X	X
NÚMEROS INCONMESURABLES Y APROXIMADOS	No	X	No	No	X	X
PROPORCIONES	X	X	X	X	X	X
PROGRESIONES Y LOGARITMOS	X	No	X	X	X	No
NÚMEROS COMPLEJOS / NÚMEROS CONCRETOS / SISTEMA MÉTRICO	X	X	X	X	X	X
OTROS						
Nº EJEMPLOS	Muchos	Muchos	Muchos	Pocos	Muchos	Bastantes
Nº EJERCICIOS	No	Pocos	No	Muchos	Bastantes	Muchos
	Ciscar y Ciscar (Tomo I)	**Cortázar**	**Montojo**	**Terry y Rivas**	**Serret**	**Salinas y Benítez**

3.3.2. Temas presentes en los textos sobre Álgebra elemental y superior

	Cortázar	Montojo	Meunier-Joannet	Terry y Rivas (1879)	Briot	Terry y Rivas (1881)	Peral	Salinas y Benítez	Montaner
ÁLGEBRA ELEMENTAL									
POLINOMIOS	X	X	No	X	X	X	X	X	X
POTENCIAS	X	X	No	X	X	X	X	X	X
RAÍCES	X	X	No	X	X	X	X	X	X
PROGRESIONES	X	X	No	X	X	X	X	X	X
LOGARITMOS	X	X	No	X	X	X	X	X	X
INTERESES, ANUALIDADES Y RENTAS VITALICIAS	X	X	No	X	X	X	X	X	X
ECUACIONES DE PRIMER GRADO	X	X	No	X	X	X	X	X	X
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	X	X	No	X	X	X	X	X	X
ÁLGEBRA SUPERIOR									
FUNCIONES	No	No	No	No	X	No	No	X	No
CANTIDADES IMAGINARIAS	Brevemente	Brevemente	No	Brevemente	X	Brevemente	X	X	No
RADICALES ALGEBRAICOS (RAÍCES N-ÉSIMAS Y PROPIEDADES DE RAÍCES)	No	No	No	No	X	No	X	X	No
SERIES	X		Poco	No	X	No	X	X	No
ANÁLISIS COMBINATORIO	Brevemente	Brevemente	Poco	Brevemente	X	Brevemente	X	X	X
DETERMINANTES	No	No	No	No	Poco	X	X	X	X
DERIVADAS	No	No	No	No	X	No	X	X	No
ECUACIONES ALGEBRAICAS	No	No	No	No	X	Poco	No	X	No

RAÍCES DE ECUACIONES NUMÉRICAS	No	No	No	No	X	Poco	No	X	No
OTROS									
Nº EJEMPLOS	Bastantes	Muchos	Pocos	No	Muchos	No	Bastantes	Bastantes	Bastantes
Nº EJERCICIOS	No	No	No	Muchos	No	Muchos	Muchos	Bastantes	Muchos
	Cortázar	**Montojo**	**Meunier**	**Terry y Rivas (1879)**	**Briot**	**Terry y Rivas (1881)**	**Peral**	**Salinas y Benítez**	**Montaner**

3.3.3. Temas presentes en los textos sobre Geometría elemental

	Ciscar y Ciscar	Cortázar	Meunier-Joannet	Rouché y Comberousse	Terry y Rivas	Ortega y Sala
GEOMETRÍA PLANA						
RECTAS Y ÁNGULOS	X	X	No	X	X	X
POLÍGONOS	X	X	No	X	X	X
CÍRCULO	X	X	No	X	X	X
ÁREAS	X	X	No	X	X	X
CURVAS	No	X	X	No	No	Las define
GEOMETRÍA EN EL ESPACIO						
PLANOS	X	X	No	X	No	X
ÁNGULOS	X	X	No	X	No	X
POLIEDROS	X	X	No	X	No	X
CUERPOS REDONDOS	X	X	No	X	No	X
ÁREAS	No	X	No	X	X	X
VOLÚMENES	X	X	No	X	X	X
OTROS						
Nº EJEMPLOS	Bastantes	Bastantes	Pocos	Muchos	Muchos	Bastantes
Nº EJERCICIOS	No	No	No	No	No	No
	Ciscar y Ciscar	**Cortázar**	**Meunier-Joannet**	**Rouché y Comberousse**	**Terry y Rivas**	**Ortega y Sala**

3.3.4. Temas presentes en los textos sobre Geometría Descriptiva

	Bielsa y Ciprián	Ibáñez y Valera	García
PRINCIPIOS GENERALES	X	X	X
PROYECCIONES	X	X	X
REBATIMINIENTOS	X	X	X
INTERSECCIONES	X	X	X
DISTANCIAS	X	X	X
ÁNGULOS	X	X	X
PRISMAS	X	No	X
PLANOS TANGENTES	X	No	No
SUPERFICIES DESARROLLABLES			
PROPIEDADES	X	No	X
CILINDRO RECTO	X	No	X
CONO RECTO	X	No	X
SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN			
PROPIEDADES	X	No	X
ESFERA	X	No	X
ELIPSOIDES	X	No	X
PARABOLOIDE DE REVOLUCIÓN	X	No	X
HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS	X	No	X
TORO	X	No	X
SUPERFICIES GAUCHAS O ALABEADAS			
PROPIEDADES	X	No	X
HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA	X	No	X
PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO	X	No	X
HÉLICE	X	No	X
HELIZOIDE GAUCHO	X	No	X
SOMBRAS	X	No	X
PERSPECTIVAS	X	No	X
RESOL. ÁNGULO TRIEDRO	X	X	No

OTROS			
Nº EJEMPLOS	Bastantes	Bastantes	Bastantes
Nº EJERCICIOS	No	No	No
	Bielsa y Ciprián	**Ibáñez y Valera**	**García**

3.3.5. Temas presentes en los textos sobre Geometría Analítica

	Meunier-Joannet	Merás y Uría	Salmon	De María
GEOMETRÍA EN DOS DIMENSIONES				
NOCIONES SOBRE FUNCIONES	No	X	No	X
OBJETO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA	No	X	No	X
SISTEMAS DE COORDENADAS				
RECTILÍNEAS	X	X	No	X
POLARES	X	X	No	X
TRANSFORMACIONES	X	X	No	X
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS	X	X	No	X
PUNTOS IMAGINARIOS	No	No	No	X
ECUACIONES DE LAS LÍNEAS				
CONCEPTO	X	X	No	X
LÍNEAS CLÁSICAS	Poco	Poco	No	X
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	X	X	No	X
RECTA				
CONCEPTO	X	X	No	X
DISTINTAS ECUACIONES	X	X	No	X
ÁNGULOS Y DISTANCIAS	X	X	No	X
COORDENADAS POLARES		No	No	X
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	X	X	No	X
CONSTRUCCIÓN SEGÚN CONDICIONES	X	X	No	X
RECTAS IMAGINARIAS	No	No	No	X
CÍRCULO				

CONCEPTO	X	X	No	X
PROPIEDADES	No	X	No	X
TANGENTE Y NORMAL	No	No	No	X
COORDENADAS POLARES	No	No	No	X
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	X	X	No	X
CONSTRUCCIÓN SEGÚN CONDICIONES	No	No	No	X
ECUACIONES DE 2º GRADO				
CENTROS, DIÁMETROS Y EJES	No	X	No	X
ESTUDIO	No	X	No	X
REDUCCIÓN	No	X	No	X
ASÍNTOTAS DE LAS CURVAS	No	X	No	X
ELIPSE				
CONCEPTO	X	X	No	X
PROPIEDADES	X	X	No	X
TANGENTE Y NORMAL	X	X	No	X
ECUACIONES POLARES	X	X	No	X
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	X	X	No	X
POLAR	No	X	No	X
ÁREA	No	No	No	X
HIPÉRBOLA				
CONCEPTO	X	X	No	X
PROPIEDADES	No	X	No	X
TANGENTE Y NORMAL	No	X	No	X
ASÍNTOTAS	No	X	No	X
ECUACIONES POLARES	X	X	No	X
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	X	X	No	X
POLAR	No	X	No	X
ÁREAS	No	No	No	X

PARÁBOLA				
CONCEPTO	X	X	No	X
PROPIEDADES	No	X	No	X
TANGENTE Y NORMAL	No	X	No	X
ECUACIONES POLARES	X	X	No	X
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	X	X	No	X
POLAR	No	X	No	X
ÁREAS	No	No	No	X
GEOMETRÍA EN TRES DIMENSIONES				
SISTEMAS DE COORDENADAS				
RECTILÍNEAS	No	X	X	X
POLARES	No	No	Poco	X
TRANSFORMACIONES	No	No	X	X
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS	No	X	X	X
PUNTOS IMAGINARIOS	No	No	No	X
RECTAS				
CONSTRUCCIÓN	No	No	X	X
ECUACIONES	No	X	X	X
ÁNGULOS Y DISTANCIAS	No	Poco	X	X
COSENOS DIRECTORES	No	No	X	X
CONSTRUCCIÓN SEGÚN CONDICIONES	No	Poco	X	X
RECTAS IMAGINARIAS	No	No	No	X
PLANOS				
CONSTRUCCIÓN	No	No	X	X
ECUACIONES	No	X	X	X
ÁNGULOS Y DISTANCIAS	No	No	X	X
CONSTRUCCIÓN SEGÚN CONDICIONES	No	Poco	X	X
PLANO IMAGINARIO	No	No	No	X

PROBLEMAS DE RECTAS Y PLANOS	No	No	X	X
SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO				
ECUACIÓN GENERAL	No	No	X	X
CENTRO	No	No	X	X
PLANOS DIAMETRALES	No	No	X	X
SUPERFICIES CON CENTRO	No	Poco	X	X
SUPERFICIES SIN CENTRO	No	No	X	X
OTROS				
Nº EJEMPLOS	Pocos	Bastantes	Bastantes	Bastantes
Nº EJERCICIOS	Pocos	Pocos	Pocos	Bastantes
	Meunier-Joannet	**Merás y Uría**	**Salmon**	**De María**

3.3.6. Temas presentes en los textos sobre Anális Matemático

	La Caille	Bézout	Lacroix	Meunier-Joannet	Miranda
CÁLCULO DIFERENCIAL					
DIFERENCIAL Y DERIVADA DE UNA SOLA VARIABLE					
CONCEPTO	X	X	X	X	X
DE FUNCIONES ALGEBRAICAS	X	Poco	X	X	X
DE FUNCIONES TRANSCENDENTES	X	X	X	X	X
DE FUNCIONES COMPUESTAS	No	No	X	X	X
DE FUNCIONES IMPLICITAS	No	No	X	X	X
DIFERENCIALES Y DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES	X	Muy poco	X	X	X
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES	No	No	X	X	X
CÁLCULO INTEGRAL					
CONCEPTO	X	X	X	X	X
MÉTODOS GENERALES	No	Poco	X	X	X
DE FUNCIONES RACIONALES	X	X	X	X	X
DE FUNCIONES BINOMIAS	X	X	X	No	X
DE FUNCIONES TRANSCENDENTES	X	X	X	X	X
INTEGRALES DEFINIDAS	No	X	X	X	X
CÁLCULO APROXIMADO DE LA INTEGRAL DEFINIDA	Muy poco	X	X	No	X
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES	Poco	X	X	No	X
APLICACIONES ANALÍTICAS					

DESARROLLOS EN SERIE	Muy poco	Muy poco	X	X	X
FORMAS INDETERMINADAS	Muy poco	No	X	X	X
MÁXIMOS Y MÍNIMOS	Geométricamente	X	X	X	X
APLICACIONES GEOMÉTRICAS					
CURVAS PLANAS					
TANGENTE, NORMAL, SUBTANGENTE Y SUBNORMAL	X	X	X	X	X
CONCAVIDAD, CONVEXIDAD, PUNTOS DE INFLEXIÓN	X	X	X	X	X
PUNTOS SINGULARES, ASÍNTOTAS	No		X	X	X
CURVATURA Y RADIO DE CURVATURA	Poco	X	X	X	X
CONTACTO DE CURVAS, CURVAS OSCULATRICES	No	No	X	X	X
EVOLUTAS, EVOLVENTES Y ENVOLVENTES	Poco	X	Poco	X	X
RECTIFICACIÓN DE CURVAS	Poco	Poco	X	X	X
SUPERFICIES Y CURVAS DE DOBLE CURVATURA	Poco	X Poco	X	X	X
VOLÚMENES	Poco	X	X	X	X
ECUACIONES DIFERENCIALES					
DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO	Muy poco, básicamente el método inverso de las tangentes.	X	X	Encontrar curvas que cumplen una serie de condiciones.	X
DE PRIMER ORDEN Y DE GRADO SUPERIOR AL PRIMERO	No	Muy poco	X	Encontrar curvas que cumplen una serie de condiciones.	X
DE ORDEN SUPERIOR AL	No	X	X	X	X

PRIMERO				Encontrar curvas que cumplen una serie de condiciones.	
MÉTODO DE VARIACIONES	No	No	X	No	No
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES	No	No	X	No	No
SERIES					
CONCEPTO Y PRINCIPIOS	No	No	X	X	X
OTROS					
Nº EJEMPLOS	Bastantes	Bastantes	Bastantes	Bastantes	Bastantes
Nº EJERCICIOS	No	No	No	No	No
	La Caille	**Bézout**	**Lacroix**	**Meunier-Joannet**	**Miranda**

3.3.7. Temas presentes en los textos sobre Trigonometría Rectilína

	Ciscar y Ciscar (Tomo II)	Cortazar	Montojo	Terry y Rivas	Ortega y Sala	Barreda & García
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS						
Concepto de Ángulo	No	No	5	No	No	4, 5
Unidades de los ángulos:						
Sistema sexagesimal	Lo usa	Lo usa	Lo usa	Lo usa	Lo usa	4
Sistema centesimal	No	No	No	No	No	No
El Radián	No	No	5	No	No	4
Definición Trigonometría Rectilínea	493, Trigonometría plana logarítmica	1	4, 38	No	p. 4	3
Considerar primero radio r y luego r=1	No	Sí	Sí	No	No en 6, Sí en 14	Sí
Definición de líneas trigonométricas	496	2	11	No	7-8, 14	6
Líneas trigonométricas de un ángulo:						
A partir del arco o ángulo	Del arco, en el capítulo XV	2	6	No	14	No
A partir de la Circunferencia goniométrica.	No	No	11	No	No	6
A partir de un triángulo rectángulo.	No	No	No	No	No	No
Diferencia entre las funciones y líneas trigonométricas	No	No	Sí	Para resolver sí.	No	Sí
Líneas: $\sin a = MP$ $\cos a = OM$ $\tan a = AQ$	496 (seno), 504 (cos), 510 (tan)	2	11	No	7-9	No
Líneas: $\operatorname{cosec} a = OT$ $\sec a = OQ$	514 (cotg), 517 (sec), 520 (cosec)	2	6, 11	No	7-9	6

ctg a = BT						
Líneas, Otras: Seno-verso, Coseno-veros	522 (sen verso), 523 (cos verso)	3	6, 11	No	9 (nota)	6
Funciones trigonométricas	No	No	6	No	No	6
Signo de las razones trigonométricas de un ángulo	No	4	6	No	13, 20, 21	9
Sistema de referencia cartesiano	No	No	Sí	No	Sí, 1	Sí
Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo:						
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	524	11	6	11	18, 36-40	8
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	No	11, 12,13	6, 7	11 y utilizado Cap. I	18, 36-40	8
$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$	No	No	6	11	18, 36-40	8
$1 + \cot^2\alpha = \mathrm{cosec}^2\alpha$	No	No	6	11	18, 36-40	8
Tabla con más relaciones	No	12	6	No	36-40	8
Valores de las razones trigonométricas de los ángulos de:						
0º, 30º, 45º, 60º, 90º.	501, 502, 505, 508, 509, 513 (tan 45º),	10	6, 8	2, 13	23	10
Tabla con más relaciones 120º, 135º, 150º, 180º, 270º, 360º	501 (180º)	10	8	13	23	12
El seno de un arco menor que media circunferencia es mitad de la cuerda del arco duplo.	498	9	No	2	11	No
Razones trigonométricas de ángulos complementarios: $\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$ $\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha$ $\tan(90^o - \alpha) = \cot\alpha$	504 (cos), 514 (cot)	6	7	Utilizado Cap I-Apartado II	10, 30, 31	9
Razones trigonométricas de ángulos suplementarios:	500 (seno), 507 (cos), 512 (tan)	7	7	Utilizado Cap I-Apartado II	27, 33	9

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$						
Razones trigonométricas de ángulos opuestos: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	No	5	7	Utilizado Cap I-Apartado II	28, 33	13
Razones trigonométricas de ángulos que difieren en dos rectos: $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$ $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$ $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$	No	No	7	Utilizado Cap I-Apartado II	29, 33	9
TablaS TRIGONOMÉTRICAS:						
Elaboración de las tablas trigonométricas	527	21-26	29	No	73-78	20 + Apéndice I.
Radio de la circunferencia	10^{10}	10^{10}	10^{10}	No especificado	10^{10}	No especificado
Construcción geométrica	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí
El seno de un arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que la diferencia que hay entre el arco y la cuarta parte del cubo del arco.	No	21, 2º	No	No	No	Apéndice I, B
Construcción mediante series	No	No	29	No	68-72	No
Fórmula de Moivre	No	113	24	No	59-62	No
Hallar los valores de sen x y cos x en función del arco x (desarrollo en serie)	No	125	23	Para resolver sí.	63-65	No
Modo de empleo de las tablas	527-529, 533-544	27, 30	30	No	79	21-22 + Apéndices I y II
Autor de las tablas utilizadas	No especificado	Lalande, extendidas a siete decimales por Marie.	Callet con siete decimales	No especificado	Callet, con siete decimales	Schrön con siete decimales + Apéndice tablas reglamentarias en la Armada
Dado un arco hallar por medio de las tablas el	530, 536	28	31, 32	Utilizado Cap	80-82	21, 22 +

logaritmo de cualquiera de sus líneas trigonométricas.				IV-Apartado II		Apéndice I.
Dado el logaritmo de una línea trigonométrica, hallar por medio de las tablas el arco correspondiente.	531, 538	29	33	Utilizado Cap IV-Apartado II	83-85	21 + Apéndice I.
Logaritmos de las funciones trigonométricas	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Ejemplos	No	4	5 + 5	5	18	20
Ejercicios	No	0	1	44	No	0
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ADICIÓN						
Razones trigonométricas del ángulo (a+b)						
$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$	No	15	12	Utilizado Cap II-Apartado I	41, 42	15
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$	No	15	12	Utilizado Cap II	41, 42	15
$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$	No	16	16	Utilizado Cap II	43	18
Razones trigonométricas del ángulo (a-b) $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$	No	15 ,16	13, 16	Utilizado Cap II	44	16, 18
Razones trigonométricas del ángulo doble: 2a $\sin 2a=2\sin a\cos a$ $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$	No	17	17	Utilizado Cap II-Apartado I	48-49	19
Razones trigonométricas del ángulo mitad: a/2 $\sin\dfrac{a}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$ $\cos\dfrac{a}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$	No	18	17	Utilizado Cap II-Apartado I	54-55	19

$\tan\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$						
$\sin\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin A} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin A}$	No	18; también coseno y tangente.	17; también coseno.	No	54-55	No
Valores de sen ma y cos ma en función de sen a y cos a, y de cos a, y de tg ma en función de tg a	No	122, 123	20, 25	Para resolver sí.	52, 62	No
Limites de las razones del seno al arco y de la tangente al arco: $\frac{\sin\sigma}{\sigma}$ y $\frac{\text{tang}\sigma}{\sigma}$	No	124	10	Para resolver sí.	63	14
Relaciones del tipo: $\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$	No	20	14	No	No	17
Transformaciones de sumas de razones trigonométricas en productos: $\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\bullet\cos\frac{A-B}{2}$ $\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\bullet\sin\frac{A-B}{2}$ $\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\bullet\cos\frac{A-B}{2}$ $\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\bullet\sin\frac{A-B}{2}$ $\tan A+\tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$ $\tan A-\tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$	No	19 + dos ejemplos	14, 16	No	46	No

Fórmulas que comprenden mas de dos ángulos	No	No	20-23	Utilizado Cap II-Apartado I	No	No
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS						
Orden de presentación de las proposiciones para la resolución de triángulos	Primero triángulos rectángulos y luego oblicuángulos	Primero triángulos oblicuángulos y luego rectángulos	Primero triángulos oblicuángulos y luego rectángulos	Primero triángulos rectángulos y luego oblicuángulos	Primero triángulos oblicuángulos y luego rectángulos	Primero triángulos oblicuángulos y luego rectángulos
Orden de resolución de triángulos	Primero triángulos rectángulos y luego oblicuángulos	Primero triángulos rectángulos y luego oblicuángulos	Primero triángulos rectángulos y luego oblicuángulos	Primero triángulos rectángulos y luego oblicuángulos	Primero triángulos rectángulos y luego oblicuángulos	Primero triángulos rectángulos y luego oblicuángulos
Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo:						
En un triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente. $b = a\cos C$	546	31, 1º	41	419	93	25
En un triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto. $c = a\sin C$	545	31, 1º	41	419	93	25
En un triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto del otro por la tangente del ángulo opuesto, o al del otro por la cotangente del ángulo adyacente. $c = b\tan C, b = c\cot C$	547	31, 2º	41	419	93	25
Resolución de triángulos rectángulos:						
Primer caso: Dados un ángulo y la hipotenusa $b = a\cos C$ $c = a\sin C$ $B = 90^{\circ} - C$	548, Exemplo Iº	38	41	419 + utilizado Cap V Ap. I	97 3º	25-3
Segundo caso: Dados un cateto y un ángulo agudo:	548, Exemplo 3º	37	41	419 + utilizado Cap V Ap. I	97 4º	25-4 y 5

$a = \dfrac{b}{\cos C}$ $c = b \tan C$ $B = 90^{\circ} - C$						
Tercer caso: Dados la hipotenusa y un cateto: $\cos C = \dfrac{b}{a}$ $\sin B = \dfrac{b}{a}$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	No	36	41	419 + utilizado Cap V Ap. I	97 2º	25-2
Cuarto caso: Dados los dos catetos: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $\sin B = \dfrac{b}{a}$ $\tan C = \dfrac{c}{b}$	548, Exemplo 2º	35	41	419 + utilizado Cap V Ap. I	97 1º	25-1
Nº Ejemplos	3, artículo 548	1	0	30	4	5+3 apéndice
Nº Ejercicios	0	0	1	18	0	0
Tabla resumen	No	No	41	419	No	0
Casos particulares	No	No	42, 43	No	No	No
Método de doble observación (distancias y alturas inaccesibles)	No	Topografía: CAP. III. Medicion de distancias inaccesibles + CAP. IV. Medicion de alturas inaccesibles	50	Cap. VII	No	No
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS						

Teorema del Coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	No	32, 2º	39	564 en un ejercicio, muy poco.	87	24
Teorema del Seno: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$	550	32, 1º y consecuencia de 32, 2º en el 33	38	442	88	24
Teorema de la Tangente: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$	No	32, 1º, Corolario.	No	No	89	No
Fórmulas de Briggs: $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$ $\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$	No	43	44	442	94	26
Superficie de un triángulo:						
$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$	No	110, 1º	44	442	98, 107	No
Fórmula de Herón: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	No	110, 3º	II, p.4	442	107	No
En función del radio del círculo inscrito: $S = p \bullet r$	No	No	44	No	No	No
$S = \dfrac{abc}{4R}$	No	No	II, p.4	No	No	No
Resolución de triángulos oblicuángulos:						
Caso I: Dados un lado y dos ángulos: b, A, B. Por el teorema del Seno.	556 y ejemplo 1º de 554	42	47 y 48, dos casos distintos	442 + utilizado Cap V Ap. I	106	26-4 y 5
Caso II: Dados dos lados y el ángulo que	553 y ejemplo 2º	41, tres notas	45	442 + utilizado	102	26-2

forman: a, b, C. Por el teorema del Coseno o Por el teorema de la Tangente.	de 554	interesantes		Cap V Ap. I		
Caso III: Dados los tres lados: a, b, c. Por el teorema del Coseno o Por las fórmulas de Briggs.	557	43	44	442 + utilizado Cap V Ap. I	100-101	26-1
Caso IV: Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos: a, b, A. Por el teorema del Seno, caso dudoso: A>90º, única solución con B agudo. A=90º y a>b, única solución. A<90º varias posibilidades: No hay solución, $a < b \sin A$ Una solución, $a = b \sin A$ (rectángulo en B) Dos soluciones, $b > a > b \sin A$ Además, si a>b una solución.	556	45	46	442 + utilizado Cap V Ap. I	103-105	26-3
Nº Ejemplos	3	1	1	37	4	5+ 3 apéndice
Nº Ejercicios	0	0	1	40	0	0
Tabla resumen	No	No	No	442	No	26
OTROS						
Funciones trigonométricas inversas	No	No	35-37	Cap. III Apartado III		No
Forma trigonométrica de un número complejo.	No	114 (pone 144 por error) Salen más cosas y ejemplos	34	Para resolver sí.	59-60	No
Las cantidades imaginarias, cuyo índice sea 4,	No	116	No	Para resolver sí.	No	No

	Ciscar y Ciscar (Tomo II)	Cortazar	Montojo	Terry y Rivas	Ortega y Sala	Barreda & García
6, 8…pueden transformarse en cantidades imaginarias de 2º grado, por lo que el cálculo de todas las cantidades imaginarias se reduce al cálculo de las imaginarias de 2º grado.						
Resolución trigonométrica de las ecuaciones binomios (cálculo de la raíz n-ésima).	No	117, 118, 119, 120	26	Para resolver sí.	No	No
Ecuaciones trinomias	No	121	No	Para resolver sí.	No	No
Deducción de las fórmulas de los triángulos rectilíneos de las correspondientes de los triángulos esféricos	No	126	106	Para resolver sí.	No	No
Algunas aplicaciones a la Geometría	No	No	51	Capítulo VI	No	No
Nº EJEMPLOS	6	16	8	585	3+3+1+18+4+4= 33	24
Nº EJERCICIOS	0	0	2	92	0	10
USO DE LOGARITMOS	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
TablaS RESUMEN	No	No	5	3	2	4
NÚMERO DE FIGURAS	7	10 rectilínea + 8 topografía	12	96	23	8

3.3.8. Temas presentes en los textos sobre Trigonometría Esférica

	Ciscar y Ciscar (Tomo III)	Lista y Aragón	Castillo y Castro	Cortazar	Montojo	Terry y Rivas	Ortega y Sala	Barreda & García
TRIÁNGULO ESFÉRICO								
CONCEPTOS								
Sobre la esfera y propiedades en ella: círculo máximo, polo, ángulo esférico, distancia angular	Del 44 al 71	No	No	No	No	No	No	No
Def. Triángulo esférico	72	1 (pág. 1)	Postulado (p. 13)	No	52	No	p. 4	27
Trigonometría Esférica	73	1 (pág. 1)	No	46	52	No	p. 4	27
Triedro correspondiente al triángulo	No	Sí	No	No	Explicado en el tratado de Geometría	No	No	Lo da por sabido por Geometría.
Triángulos esf. Polares o suplementarios	No	Fig I. (pág. 2)	Corolario 3º (p. 16); Escolio 1º (p. 18)	Los usa en 50; 59, 4º caso	Los utiliza	No	Los utiliza	Los utiliza en 30
PROPIEDADES								
a, b, c, A, B y C < 180º	75	No	Para los lados, Teorema 2º (p. 14)	No	Explicado en el tratado de Geometría	No	No	27, Lo da por sabido por Geometría.
b - c < a < b + c	80	2 (pág. 2)	Teorema 1º (p. 14)	No	Explicado en el tratado de Geometría	No	No	27, Lo da por sabido por Geometría; 35
a + b + c < 360º (Las suma de los tres	89	3 (pág. 2)	Teorema 3º	No	Explicado en	No	No	27, Lo da

lados es menor que 360º)			(p. 14)		el tratado de Geometría			por sabido por Geometría.
180º<A+B+C<540º (La suma de los tres ángulos es mayor que 180º y menor que 540º)	90	Consecuencia 3ª de Fig. I (pág. 2)	Teorema 4º (p. 15)	No	Explicado en el tratado de Geometría	No	No	27, Lo da por sabido por Geometría.
a = b sii A = B (Si dos lados son iguales, los ángulos opuestos son iguales, y recíprocamente)	No	No	Teorema 5º (p. 19) + Corolario 1º (p. 21)	No	77	No	No	No
a < b sii A < B (Si dos lados son desiguales, los ángulos opuestos son desiguales, y el ángulo mayor se opone al lado mayor, y recíprocamente)	No	No	Teorema 6º (p. 21) + Corolario (p.22)	No	77	No	No	36
A + 180º > B + C	No	No	No	No	No	No	No	35
a + b < (>,=) 180º sii A + B < (>,=) 180º	No	No	Teorema 7º (p. 22) + Corolario 1º (p.23)	No	77	No	No	No
A’ + a = 180º	No	3 (pág. 2)	Corolario 3º (p. 16)	Lo usa en 59, 4º caso	Lo utiliza	No	utiliza	Lo utiliza
Criterios de igualdad de triángulos: LAL, ALA, LLL, AAA.	No	Consecuencia 1ª de 1 (pág. 1), Consecuencia 2ª de Fig. I (pág. 2)	AAA Corolario 4º (p. 17)	No	No	No	No	No
Clasificación de triángulos esféricos	93	No	No	No	No	No	No	No
FÓRMULAS QUE RELACIONAN LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO								
1ª FÓRMULA DE BESSEL $\cos a = \cos b \cdot \cos c + sen\, b \cdot sen\, c \cdot \cos A$	No	Fórmula fundamental (pág. 3)	Curiosidad 3ª (p. 67)	47	53 (α)	No	112	28, 29

2ª FÓRMULA DE BESSEL $\dfrac{sen\,a}{sen\,A}=\dfrac{sen\,b}{sen\,B}=\dfrac{sen\,c}{sen\,C}$	95 (dem. 740)	2 (pág. 3)	Corolario (p. 49) + Curiosidad 1º y 2ª (p. 65-66)	48	55 y 71	En Tabla 703	114	31
3ª FÓRMULA DE BESSEL $ctg\,b\cdot sen\,c=\cos c\cdot\cos A+sen\,A\cdot ctg\,B$	No	No	Curiosidad 6ª (p. 70)	49	57 ($\beta'_{2,2}$)	No	115	32
4ª FÓRMULA DE BESSEL $\cos A=-\cos B\cdot\cos C+sen\,B\cdot sen\,C\cdot\cos a$	No	Fórmula fundamental (pág. 4)	Curiosidad 4ª (p. 68)	50	59	No	113	30
FÓRMULA DE LAS CUATRO PARTES $\cos a\cdot\cos C=sen\,a\cdot ctg\,b-sen\,C\cdot ctg\,B$	No	No	Curiosidad 5ª (p. 69)	No	No	No	No	No
FÓRMULA DE CAGNOLI $sen\,b\cdot sen\,c+\cos b\cdot\cos c\cdot\cos A=sen\,B\cdot sen\,C-\cos B\cdot\cos C\cdot\cos a$	No	No	No	No	60	No		No
FUNCIONES DEL ÁNGULO MITAD $\mathrm{sen}\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{sen}\,(p-b)\cdot\mathrm{sen}(p-c)}{\mathrm{sen}\,b\cdot\mathrm{sen}\,c}}$	110, 111 (dem. 744)	4 (pág. 6)	Teorema 7º (p. 57)	59, 3er caso	71	En Tabla 703	120	35
ANALOGÍAS DE GAUSS-DELAMBRE: $\dfrac{\mathrm{sen}\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}$	No	No	No	56	77	En ejemplo 748	121	36
ANALOGÍAS DE NEPER: $\mathrm{tg}\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\cdot\mathrm{cotg}\dfrac{C}{2}$	No	5 (pág. 6)	No	55	77	En Tabla 703	121	36

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS OBLICUÁNGULOS								
1er. caso: conocidos los tres lados: a,b,c	111 y 110	4 (pág. 5)	No	59, 3er caso	71, 72, 73	En ejemplo 706	127	35, 1er caso + ejemplo
2. ° caso: conocidos los tres ángulos: A, B, C	No	4 (pág. 6)	No	59, 4º caso	74	En ejemplo 707	128	35, 2º caso + ejemplo
3er. caso: conocidos los dos lados y el ángulo comprendido entre ellos: a, b, C	104	5 (pág. 6)	No	59, 1er caso; 57	75, 76, 77, 78	En ejemplo 704	129	37, 3er caso + ejemplo
4. ° caso: conocidos un lado y los dos ángulos adyacentes: c, A, B	No	5 (pág. 7)	No	59, 2º caso; 58	79, 80, 81, 82	En ejemplo 705	130	37, 4º caso + ejemplo
5. ° caso: conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos: a, b, A	105	6 (pág. 8)	No	59, 5º caso; 59 pág. 97	83	En ejemplo 708	131-135	38, 5º caso + ejemplo
Discusión del 5° caso.	No	No	No	59, 5º caso; 63	84, 85, 86	En ejemplo 708	132-133	39 + resumen + ejemplo
6. ° caso: conocidos dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos: A, B, a	No	6 (pág. 8)	No	59, 6º caso; 60	87	En ejemplo 709	136	38, 6º caso + ejemplo
Discusión del 6° caso.	No	No	No	59, 6º caso; 65	87	En ejemplo 709	136	39 + ejemplo
Cuadro Resumen	No	No	No	No	No	Tabla 703	No	No
Método del perpendículo	No	No	Lo utiliza a veces en el 2º apartado	No	73	No	Sí	Lo comenta en 37, 38
Nº Ejemplos	No	No	No	2 (en 66)	1 (en 88)	6 (en 704-709)	4	8 (en 35, 37, 38 y 39)
Nº Ejercicios	No	No	No	No	No	710-743 (son 14)	No	No
TRIÁNGULO ESFÉRICO RECTÁNGULO								
Reglas de Neper	No	No	No	No	No	Antes del 678	119	33
$\cos a = \cos b \cdot \cos c$	109 y 108	3 (pág. 4)	Teorema 4º (p.53) y Parte del	No	61 (1)	En Tabla 678	117	33

			Teorema 17 (p. 40).					
$sen\, b = sen\, a \cdot sen\, B$ $\frac{r}{sen\ a} = \frac{sen\ B}{sen\ b}$	97	3 (pág. 4)	Teorema 1º (p. 48)	No	61 (2)	En Tabla 678	117	33
$tg\ b = tg\ a \cdot \cos C$	No	3 (pág. 4)	No	No	61 (3)	En Tabla 678	117	33
$tg\ b = sen\, c \cdot tg\ B$	98 (dem. 741)	3 (pág. 5)	Teorema 3º (p. 51)	No	61 (4)	En Tabla 678	117	33
$\cos C = ctg\ a \cdot tg\ b$	101 (dem. 742)	No	Teorema 2º (p. 50)	No	No	En Tabla 678	117	33
$\cos B = sen\, C \cdot \cos b$	No	3 (pág. 5)	Teorema 6º (p. 56)	No	61 (6)	En Tabla 678	117	33
$\cos a = ctg\ B \cdot ctg\ C$	No	3 (pág. 4)	Teorema 5º (p. 54)	No	61 (5)	En Tabla 678	117	33
Ningún lado puede ser 90º.	No	No	No	No	No	No	No	No
Lado y ángulo opuesto son de la misma especie $B < 90^o \Leftrightarrow b < 90^o \wedge$ $B > 90^o \Leftrightarrow b > 90^o$	750	No	Teorema 8º (p. 25) + Corolario (p.26)	52	61	No	118	33
Los tres lados son menores de 90º, o sólo uno de ellos es menor de 90º los otros dos mayores.	No	No	N No	51	61	No	118	33
Si los dos catetos son de la misma especie, la hipotenusa es aguda y si son de distinta especie, es obtusa.	746, 747, 748, 749	No	Teorema 9º (p. 26)	No	No	No	No	No
Un cateto es menor que su ángulo opuesto si ambos son menores de 90º y mayor en caso contrario.	No	No	No	No	Lo utiliza en 67	No	No	No
b>a>180º-b	No	No	No	No	No	No	No	No
90º<B+C<270º, B-C<90º	No	No	No	No	No	No	No	No
RESOLUCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS								

1er.caso: conocidos la hipotenusa a y un cateto b	No	No	No	55, 2º caso	62	En ejemplo 680	124, 1er caso	34, 1er caso + ejemplo
2. º caso: conocidos los dos catetos b y c	No	No	No	55, 1er caso	63	En ejemplo 679	124, 2º caso	34, 2º caso + ejemplo
3er. caso: conocidos la hipotenusa a y un ángulo B	No	No	No	55, 3er caso	64	En ejemplo 681	124, 3er caso	34, 3er caso + ejemplo
4. ° caso: conocidos los dos ángulos B y C	No	No	No	55, 6º caso	65	En ejemplo 684	124, 6º caso	34, 4º caso + ejemplo
5. ° caso: conocidos un cateto b y el ángulo opuesto al otro cateto C	No	No	No	55, 4º caso	66	En ejemplo 682	124, 4º caso	34, 5º caso + ejemplo
6. ° caso: conocidos un cateto b y su ángulo opuesto B	No	No	No	55, 5º caso	67	En ejemplo 683	124, 5º caso	34, 6º caso + ejemplo
Discusión del 6. ° caso	No	Muy levemente, pág. 5	No	55, 5º caso	67	No	125	34, 6º caso + cuadro resumen
Cuadro Resumen	No	No	No	No	No	Tabla 678	124	N
Nº Ejemplos	No	No	No	55	69	679-684 (seis)	No	Seis en 34
Nº Ejercicios	No	No	No	No	No	685-702 (son 18)	No	No
TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTILÁTEROS (lado recto a)								
Definición	93	No	No	No	68	No	126	33
Propiedades	No	No	No	No	68	No	No	No
Resolución	No	No	No	No	No	No	No	No
Resolución de Triángulos birrectángulos y trirrectángulos	No	No	No	No	No	No	No	No
Ejemplos	No	No	No	No	No	No	No	No
ÁREAS DE TRIÁNGULOS								
Aparecen	No	No	No	No	99, 100, 101	No	137	No
Exceso esférico	No	No	No	No	99, 100, 101	No	143	No
APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA A LA NAVEGACIÓN								
Aparecen	No (sí en el	7 (pág. 9) y	No	66 (2	90, 91, 92,	Ejemplos	139-142	No

	resto del libro)	en el resto del libro		ejemplos)	93, 94 (ejemplo)	744-760, aunque no son todos directamente aplicados a la navegación		
ORDEN: 1º OBLICUÁNGULOS Y 2º RECTÁNGULOS	Sí	Sí, aunque para resolver al revés	No	Sí, aunque para resolver al revés	Sí, aunque para resolver al revés	No	Sí, aunque para resolver al revés	Sí, aunque para resolver al revés
Nº EJEMPLOS	No	No	No	2	3	29	4 + 4=8	14
Nº EJERCICIOS	No	1	No	No	No	32	No	No
USO DE LOGARITMOS	Sí (muy poco)	No	No	Sí (muy poco)	Sí	Sí	Sí	Sí
TablaS RESUMEN	No	No	Extracto p. 41 y ss. Resumen p. 73 y ss.	No	No	678, 703	117, 124, 134	34, 39
NÚMERO DE FIGURAS	Total 13: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 19, 44, 47	Total 2: I, II	Todas, 19	Total 9: 11, 12, 13, 14, 15,16, 19, 20, 21	4	Total 4: 97, 98, 99, 100	10	Total 6: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
	Ciscar y Ciscar (Tomo III)	**Lista y Aragón**	**Castillo y Castro**	**Cortazar**	**Montojo**	**Terry y Rivas**	**Ortega y Sala**	**Barreda & García**

3.4. Comparativa sobre otras materias entre Ciscar, Cortázar y Montojo

3.4.1. Temas presentes en los textos de Ciscar, Cortázar y Montojo sobre Aritmética

	Ciscar y Ciscar	Montojo	Cortázar
NÚMEROS ENTEROS			
Unidad	3	1	1
Sistema de numeración	38-56	6, 7	2-3+ Cap. I del Complemento
Operaciones fundamentales:			
Adición	75-80	2, 8	4
Sustracción	81-92	4, 9	5-6
Multiplicación	93-117	3, 11-14	7-15
División	118-152	4, 15-19	16-26
Pruebas de las cuatro operaciones	No	35	29
Producto de varios factores	No	No	32
Cantidades negativas	72-73	91-92	No
DIVISIBILIDAD			
Divisibilidad de los números (condiciones de divisibilidad)	153-162	26, 30,33-34	37-49
Máximo común divisor	162	23-25, 31	50-59
Mínimo común múltiplo	No	32	60-62
Números primos	No	20-22	63-70
Descomposición factorial	No	27-29	71-77
FRACCIONES			
Fracciones propias e impropias	57	36-37	78
Reducción a común denominador	166-169	38	90-93
Simplificación	165	38	94
Operaciones con los números fraccionarios:			
Adición	163, 171	39	98
Sustracción	163, 172	39	99
Multiplicación	163, 173-175	40-42	100-102

División	163, 173,176	40-42	103-104
Fracciones complejas	No	No	No
Producto de varios factores	No	No	105-111
Números decimales	No	43-44	114-116
Operaciones con los números decimales:			
Adición	75-80	45	117
Sustracción	81-92	45	118
Multiplicación	93-117	46	119
División	118-152	47	120
Aproximaciones	No	48-49	No
Conversión de fracciones comunes en decimales	No	50-52	121-123, 126-129
Fracciones periódicas	No	51-52	No
Fracción generatriz	No	53	124
Fracciones continuas	No	54-59	No
POTENCIAS, RAICES CUADRADA Y CÚBICA DE LOS NÚMEROS			
Potencias de los números	209-212,214,216-219	12, 67	36
Propiedades de las potencias	No	67	No
Potencias de fracciones	No	No	112-113
Cuadrado de un número compuesto de dos sumandos	No	68	135
Extracción de la raíz cuadrada o Raíz Cuadrada	213, 219-221	69,73	130-148
Raíces cuadradas irracionales	328-329	70-72	144
Formación del cubo (tercera potestad)	No	74	152
Extracción de la raíz cúbica	215, 219-221	75	149-161
Raíces cúbicas irracionales y aproximadas	No	76	158-160
Raíces de diferentes grados, cuya determinación depende de las raíces cuadradas y cúbicas.	No	No	No
NÚMEROS INCONMESURABLES Y APROXIMADOS			
Números inconmesurables / límites	No	No	Cap. III del Complemento
Aproximaciones numéricas	No	No	No
PROPORCIONES			
Concepto y propiedades	222-269	77-81	162-175
Proporción simple o regla de tres simple	270-280, Apéndice I	82-84	195-196, 201-202

Proporción compuesta o regla de tres compuesta	281-283	85	197-200, 203
Repartos proporcionales y regla de compañía	No	86	204-206
Interés	No	87	207
Descuento	No	88	208
Regla conjunta	No	89-90	209-210
Regla de alegación	No	No	211-215
Tanto % en. Rentas sobre el papel del Estado o fondos públicos. Corretajes. Ganancias. Pérdidas. Taras. Comisiones. Impuestos. Seguros.	No	No	No
PROGRESIONES Y LOGARITMOS			
Progresión Aritmética	284-290	93, 95	No
Progresión Geométrica	284-290	94-95	No
Logaritmos	291-301	96	No
Propiedades de los logaritmos	No	97	No
Formación de las tablas	No	98-99	No
Uso de las tablas	No	100	No
Hallar el logaritmo de un número	303-306	101	No
Hallar el número correspondiente a un logaritmo	307-309	102-103	No
Logaritmo de los números sexagesimales	No	104	No
Cálculo logarítmico	310-329	105-107	No
NÚMEROS COMPLEJOS / NÚMEROS CONCRETOS / SISTEMA MÉTRICO			
Números concretos	5	60	176
Números complejos	59-71	60	176
Reducción de un número complejo a incomplejo y viceversa	178-185	No	184-187
Operaciones con los números complejos:			
Adición	186-189	62	188
Sustracción	190-192	62	189
Multiplicación	193-198	63	190
División	199-205	64	192-194
Sistema métrico decimal	No	66	Cap. IV del Complemento
Medidas longitudinales	No	61(1º)	176

Medidas superficiales y agrarias	No	No	183
Medidas de capacidad	No	No	176
Medidas de peso	No	61(2º)	176
Medidas sexagesimales	No	61(4º)	176
Medidas monetarias	No	61(3º)	176
OTROS			
Nº EJEMPLOS	Muchos	Muchos	Muchos
Nº EJERCICIOS	0	0	7
TablaS DE DATOS	2	5	18
TablaS RESUMEN	0	0	0
NÚMERO DE FIGURAS	0	0	10
	Ciscar y Ciscar	**Montojo**	**Cortázar**

3.4.2. Temas presentes en los textos de Montojo y Cortázar sobre Álgebra elemental y superior

	Montojo	Cortázar
ÁLGEBRA ELEMENTAL		
POLINOMIOS		
Números negativos	No	8-16
Cantidades algébricas.	108-109	7
Polinomios: Monomio y polinomio, Ordenación, Simplificación, Grado, Valor numérico.	109	7, 17-19
Adición, substracción, multiplicación de polinomios.	110-113	20-31
División de polinomios	114-116	32-50
Fracciones algebraicas	117-119	51-61
Polinomios enteros y homogéneos.	No	30
POTENCIAS		
Potencias de los monomios.	166	112-115
Permutaciones y combinaciones.	211	126-132
Fórmula del binomio de Newton $(x+a)^m$.	210-213	133-140
Potencias de los polinomios.	211	141-142
RAÍCES		
Raíces de los monomios.	166-169	116
Raíces de los polinomios.	175-177	143-151
Propiedades de los radicales.	172-174	152-167
Multiplicación, división, elevación a potencias	168	120-125
Cálculo de las cantidades imaginarias de segundo grado, $\sqrt{-1}$	170-171	167-176
PROGRESIONES		
Progresión Aritméticas	188-189	231-235

Progresión Geométrica	190-192	236-242
Pilas de balas	219-222	243-247
LOGARITMOS		
Logaritmos	193	204-206
Propiedades de los logaritmos	194-197	200-209,214-224
Formación de las tablas	No	210-213
Uso de las tablas	No	224
Hallar el logaritmo de un número	No	225
Hallar el número correspondiente a un logaritmo	No	226
Logaritmo de los números sexagesimales	No	No
Cálculo logarítmico	No	No
INTERESES, ANUALIDADES Y RENTAS VITALICIAS		
Intereses	199	248-249
Anualidades	200	250
Rentas vitalicias	200	251
ECUACIONES DE PRIMER GRADO		
Ecuaciones con una incógnita.	120-125	68-81,90-95
Ecuaciones con varias incógnitas. Métodos de sustitución, igualación y reducción.	126-129	82-89
Sistemas de ecuaciones en que el número de éstas sea mayor o menor que el de las incógnitas.	157-165	96-100
Explicación de los símbolos ∞ y $\frac{0}{0}$.	123-124	91
Problemas de primer grado.	122, 128, 164-165	101-111
Inecuaciones de primer grado.	132-18	No
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO		
Ecuaciones incompletas.	No	177-179
Ecuación completa.	178-179	180-181 + Nota
Propiedades	178	182-186

Discusión de la ecuación general de segundo grado.	178	190-193
Problemas de segundo grado.	180	194
Cuestiones sobre máximos y mínimos que pueden resolverse por las ecuaciones de segundo grado.	No	195-196
Ecuaciones bicuadradas.	181	187
Raíces de la unidad	186-187	197
Trasformación de expresiones de la forma $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.	182	197
ÁLGEBRA SUPERIOR		
FUNCIONES	No	No
CANTIDADES IMAGINARIAS	Brevemente 170-171 + 186-187	Brevemente 167-176 + 197
RADICALES ALGEBRAICOS (RAÍCES N-ÉSIMAS Y PROPIEDADES DE RAÍCES)	No	No
SERIES	Completo 203-222	No
ANÁLISIS COMBINATORIO	Brevemente 210-213	Brevemente 112-140
DETERMINANTES	No	No
DERIVADAS	No	No
ECUACIONES ALGEBRAICAS	No	No
RAÍCES DE ECUACIONES NUMÉRICAS	No	No
OTROS		
Nº EJEMPLOS	Bastantes	Muchos
Nº EJERCICIOS	No	No
	Montojo	**Cortázar**

3.4.3. Temas presentes en los textos de Ciscar y Cortázar sobre Geometría elemental

	Ciscar y Ciscar	Cortázar
GEOMETRÍA PLANA		
RECTAS Y ÁNGULOS		
Rectas	25-39	No (definidas en 1,3)
Ángulos y propiedades	80-97	8,11-14,T2-5, T11-12
Rectas perpendiculares y oblicuas	160-178	9-10, T1, P1-5
Rectas paralelas	187-211	15-17, T6-10, P6-7
Líneas	40-65	102-106
POLÍGONOS		
Figuras	66-79	No (definidas en 2)
Triángulos	114, 223-247	18-22, T13-25, P8-12
Polígonos en general	271-295	23-25, T26-35
Líneas proporcionales	248-261	39-40, T54-57, P24-29
Polígonos semejantes	No	41, T58-64 (triángulos) 65-66 (polígonos), P30
Consecuencias de la semejanza de triángulos	262-270	42, 67-76 (71 Pitágoras)
Polígonos regulares	No	43-47, T77-89, P31-40
CÍRCULO		
Circunferencia	98-126, 296-308	No (definida en 6)
Líneas rectas en el círculo	179-186, 212	26-27, T36-44, P13-19
Intersección y contacto de dos circunferencias	No	T45-46
Medida de ángulos en la circunferencia	127-159, 213-222	28-32, T47-53, P20-23
ÁREAS		
Áreas de los polígonos	309-336, 341-353	48, T90-96
Área del círculo	337-340	49-52, T97-98
Comparación	354-358	T99-109, P41-47
CURVAS		
Elipse	No	107-109, T228-233, P55-57
Parábola	No	110-111, T234-239, P58-60

Hélice	No	112-117, T240-242, P61-62
GEOMETRÍA DEL ESPACIO		
PLANOS		
Rectas perpendiculares y oblicuas a un plano	359-377	53-55, T110-120, P49-50
Paralelismo en el espacio	386-405	56-57, T121-131
Proyecciones sobre el plano	No	58-59, T132-134
ÁNGULOS		
Ángulos diedros	378-385	60-68, T135-147
Ángulos poliedros	407-408	69-71, T148-157
POLIEDROS		
Poliedros	406-413, 425-429	72
Pirámides	430-435, 440-443	73-74, T158, P51
Prismas	414-424	75-79, T159-161
Poliedros semejantes	No (definido en 12)	91-92, T184-188
Poliedros regulares	No (definido en 410)	93, T189
CUERPOS REDONDOS		
Cono	436-439, 444	80, T162-163, P52; Nota II: 5-9, T243-244
Cilindro	428-429	81, T164-165; Nota II: 10-12, T245-247
Esfera	445-467	82-90, T166-183, P53
ÁREAS		
Poliedros	No 467 *El determinar las superficies de los sólidos no tiene uso en la práctica ordinaria de la Navegación.*	T190-193
Cono y Cilindro		T194-197
Esfera		94-95, T198-202
Comparación		97-98, T203-206
VOLÚMENES		
Poliedros	468-492	99, T207-217, P54
Cono y Cilindro	No 492 *Se han omitido las reglas para determinar con toda exactitud la solidez de una pirámide, de un cono, de un cono truncado, y de una esfera, porque no tienen uso en la práctica ordinaria de la Navegación.*	T218-221
Esfera		100-101, T222-223
Comparación		T224-227

VARIOS		
Resolución de problemas geométricos	No	Nota I: 1-4
Geometría práctica	559-642	33-38 (Utensilios de dibujo)
TRIGONOMETRÍA PLANA LOGARÍTIMICA		
Trigonometría Plana logarítmica	493-544	No
Resolución de triángulos rectilíneos rectángulos por medio de logaritmos	545-549	No
Resolución de triángulos rectilíneos oblicuángulos por medio de logaritmos	550-558	No
OTROS		
Nº EJEMPLOS	Bastantes	Bastantes
Nº EJERCICIOS	No	No
	Ciscar y Ciscar	**Cortázar**

3.5. Tablas relacionadas con P. J. Rodríguez

3.5.1. Libros españoles sobre Trigonometría Esférica de posible comparación con Rodríguez

PRÓXIMOS TEMPORALMENTE AL LIBRO DE RODRÍGUEZ

Autor	1ª Ed.	Título
Fernández, Antonio Gabriel	1784	Trigonometría Esférica para el uso de la Compañía de guardias-marinas de Cádiz
Ciscar y Ciscar, Gabriel	1795	Tratado de Trigonometría Esférica para la instrucción de los Guardias Marinas
Ciscar y Ciscar, Gabriel	1803	Curso de estudios elementales de Marina Tomo III Cosmografía / escrito de orden de S.M. Por Gabriel Ciscar
Lista y Aragón, Alberto	1823	Elementos de Trigonometría esférica y Geografía astronómica : para el uso de la casa de educación sita en la calle de San Mateo de esta corte
Castillo y Castro, Manuel del	1834	Sumario de Trigonometría Esférica para uso de los principiantes en la carrera de la navegación

ANTERIORES Y MÁS ALEJADOS TEMPORALMENTE AL LIBRO DE RODRÍGUEZ

Autor	1ª Ed.	Título
Vicente Tosca, Tomás	1707	Compendio Mathematico, Tomo III. Trigonometría, Secciones Cónicas, Maquinaria
Cedillo, Pedro Manuel	1718	Trigonometría aplicada á la navegación, así por el beneficio de las tablas de los senos y tangentes logarítmicas, como por el uso de las dos escalas plana y artificial
Gabriel Fernández, Antonio	1735	Compendio de Geometría elemental y Aritmética Superior, y Trigonometría plana y espherica
Sánchez Reciente, Juan	1742	Tratado de Trigonometría Náutica y de la construcción y uso de las escalas Plana y Artificial y de la Tabla de Partes Meridionales y algunos problemas curiosos

POSTERIORES Y MÁS ALEJADOS TEMPORALMENTE AL LIBRO DE RODRÍGUEZ

Autor	1ª Ed.	Título
Cortazar, Juan	1848	Tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica, y de Topografía
Montojo, Saturnino	1865	Tratado elemental de trigonometría : para uso de los aspirantes al Colegio Naval Militar
Terry y Rivas, Antonio	1881	Ejercicios de Trigonometría

3.5.2. Obras españolas seleccionadas para la comparativa con la obra de Rodríguez

Autor	1ª Ed.	Ed. revisada	Título	Impresión
Fernández, Antonio Gabriel	1784	1784	Trigonometría Esférica para el uso de la Compañía de guardias-marinas de Cádiz	Imprenta de la Viuda de Felipe Teruel. Murcia.
Ciscar y Ciscar, Gabriel	1795	1796	Tratado de Trigonometría Esférica para la instrucción de los Guardias Marinas	En la Oficina de Marina de este Departamento. Cartagena.
Ciscar y Ciscar, Gabriel	1803	1811	Curso de estudios elementales de Marina Tomo III Cosmografía / escrito de orden de S.M. Por Gabriel Ciscar	Imprenta Real. Palma de Mallorca.
Lista y Aragón, Alberto	1823	1823	Elementos de Trigonometría esférica y Geografía astronómica : para el uso de la casa de educación sita en la calle de San Mateo de esta corte	Imprenta de Don León Amarita. Madrid.
Castillo y Castro, Manuel del	1834	1834	Sumario de Trigonometría Esférica para uso de los principiantes en la carrera de la navegación	Imprenta de don Miguel de Burgos. Madrid.

3.5.3. Comparativa de la obra de Rodríguez con obras españolas

Rodríguez	Fernández	Ciscar (Tratado)	Ciscar (Curso)	Lista y Aragón	Castillo y Castro
1. Sphere	No	Similar a la 2ª (68)	No	No	No
19. Cor. The pole of a great circle is 90º distant from every point of its circumference. **Sin demostrar**	No	No	Propiedades totalmente distintas y utilizando el libro de Geometría (47,48). 19 como consecuencia en el Cor. (70).	No	No
22. Cor. If a circle be perpendicular to several great circles which intersect each other, the poles of that circle will be at the intersections; and conversely, if a great circle has a pole at the intersection of several great circles, it will be perpendicular to them, and have the other pole at the other intersection. **Sin demostrar**	No	No		No	No
27. Thm. A spherical angle is equal to the inclination of the planes of the circles which form it.	No	No	Similar (49)	No	No
30. Cor. If two arcs of great circles intersect each other, the opposite angles will be equal. **Sin demostrar**	Sin demostrar	No	54	No	No
31. Cor. The spherical angles formed at one point by the intersection of several great circles, are together equal to 360º. **Sin demostrar**	No	No	54	No	No
32. Cor. The spherical angles formed on one side of a semicircle by several arcs of great circles meeting at one point, are together equal to 180º. **Sin demostrar**	No	No	54	No	No
33. Thm. The shortest distance between two points on the surface of a sphere is the smaller arc of a great circle which joins those points.	No	Diferente (102)	Diferente y en otro orden (85)	No	No
37. Spherical triangle	Igual (4 pág 2)	Igual (108)	Igual (72)	Al principio (1ª,	Diferente (Postulado

				pag. 1)	p. 13)
38. Spherical trigonometry	Igual (pag 1)	Igual (Prólogo)	Igual (74)	Al principio (1ª, pag. 1)	No
41. Sides and angles alike (or of the same kind) and unlike (or of different kinds).	Lo denomina especie, pero sin definición	Igual (133)	Lo denomina especie, pero sin definición	No	No
43. Thm. In every spherical triangle the sum of two sides is greater than the third.	Diferente (4)	Diferente (100)	Diferente (80)	Sin demostrar en (consecuencia 2ª, pag. 2).	Diferente Teorema 1º (p. 14) (a partir del Postulado p. 13)
44. Thm. The sum of the three sides of a spherical triangle is less than 360º.	Diferente (6)	Diferente (111)	Similar (89)	Sin demostrar en (consecuencia 3ª, pag. 2).	Diferente Teorema 3º (p. 14) (a partir del Postulado p. 13)
45. Thm. The sum of the angles of a spherical triangle is greater than two rights angles, but less than six.	Diferente (9)	Diferente (118)	Similar (90)	Diferente (consecuencia 3ª, pag. 2 final)	Diferente, Teorema 4º (p. 15)
48. Thm. In every isosceles spherical triangle, the angles opposite the equal sides are equal, and the arc drawn from the third angle to the middle of its opposite side is perpendicular to it.	Parte de él y diferente (2)	Similar (128)	No	No	Diferente, Teorema 5º (p. 19)
49. Thm. In every spherical triangle, the greatest side is opposite to the greatest angle.	Diferente (5)	No	No	No	Similar, Teorema 6º (p. 21)
50. Thm. The shortest distance from a point on the surface of the sphere to a great circle is an arc of a great circle, less than 90º, described perpendicularly from the point to the circle; and the oblique arcs drawn from that point to the circle are greater as they are farther from the perpendicular.	No	Similar pero en otro orden (146)	No	No	No
55. Thm. If from the vertices of a triangle *ABC*, taken for poles, are describe the arcs *FE*, *DE*, and *DF*, these arcs will form a triangle *DFE*, the side and angles of which will be respectively the supplements of the angles and sides of the	No	No	No	No	No

triangle *ABC*. Supplemental or polar triangles.					
57. Thm. If in a spherical triangle *ABC*, right angled at *B*, we describe the arc *HFE* from the point *A* as a pole, and extend the side *AB*, *AC*, *BC* until they meet at *H*, *G* and *F*, a spherical triangle *CFG*, right angled at *G*, will be formed, in which the angle *CFG* will be the complement of *AB*; the side *FG* the complement of the angle *CAB*, the side *CF* the complement of *BC*, and the side *CG* the complement of *AC*.	Similar (3 apéndice)	No	No	No	No
60. Thm. In ever right-angled spherical triangle the oblique angles are of the same kind as their opposite sides.	Diferente (10)	Diferente (142)	Diferente (750)	No	Diferente, Teorema 8º (p. 25)
61. Thm. When the two legs of a right-angled spherical triangle are of the same kind, the hypothenuse is less than 90º.	No	Diferente (139)	Diferente (746) y en otro orden del libro	No	Diferente, Teorema 9º (p. 26) + corolarios
62. Thm. When the two legs of a right-angled spherical triangle are of different kind, the hypothenuse is greater than 90º. + Corolarios. **Sin demostrar**	Diferente (11)	Diferente (140)	Diferente (747).	No	Diferente, Teorema 9º (p. 26) + corolarios
68. Thm. In every right-angled spherical triangle the radius is to the sine of the hypothenuse, as the sine of one of the oblique angles is to the sine of its opposite leg. $\frac{r}{sen\ a}=\frac{sen\ B}{sen\ b}$	Diferente (16)	Diferente (174)	Totalmente diferente (97)	No	Diferente, Teorema 1º (p. 48)
69. Thm. In any right-angled spherical triangle, radius is to the sine of one leg, as the tangent of the angle formed by it and the hypothenuse, is to the tangent of the other leg. $\frac{r}{sen\ c}=\frac{tg\ B}{tg\ b}$	Diferente (17)	Similar (176)	Diferente (98 y demostrado en 741)	No	Diferente, Teorema 3º (p. 51)
70. Cor. In any right-angled spherical triangle,	No	No	Diferente (109)	No	Diferente, Teorema 4º

radius is to the cosine of one leg, as the cosine of the other leg is to the cosines of the hypothenuse. $\frac{r}{\cos b}=\frac{\cos c}{\cos a}$					(p. 53)
71. Cor. In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of on the oblique angles, as the tangent of the hypothenuse is to the tangent of the leg adjacent to that angle. $\frac{r}{\cos B}=\frac{tg\ a}{tg\ c}$	No	No	Diferente (101 y demostrado en 742)	No	No
72. Cor. In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of the hypothenuse, as the tangent of one oblique angle is to the cotangent of the other. $\frac{r}{\cos a}=\frac{tg\ B}{cotg\ C}$	No	No	No	No	Diferente, Teorema 5º (p. 54)
74. Thm. In every spherical triangle, the sines of the angles are proportional to the sines of their opposite sides. $\frac{sen\, a}{sen\, A}=\frac{sen\, b}{sen\, B}=\frac{sen\, c}{sen\, C}$	Similar (25)	Similar (197)	Totalmente diferente (95 y demostrado en 740)	Diferente (2, pag. 3)	Similar, Corolario del Teorema 1º (p. 49) y sin demostrar en Curiosidad 1º y 2ª (p. 65-66)
76. Thm. If in a spherical triangle *ABD* a perpendicular *CD* be left fall from one of the angles *C* to its opposite side *AB*, (extended if necessary) this will be divided in two segments *AD* and *BD*, the cosines of which will be proportional to the cosines of their adjacent sides; that is, the cosine of the first segment AD will be to the cosine of the second BD, as the cosine of the first side AC is to the cosines of the other side BC.	No	Diferente (198)	No	No	No
77. Thm. In every spherical triangle, the square of the cosine of half one of the angles is equal to the product of the square of radius, the sine of the	No	Difícil de comparar (207)	Diferente (110 y demostrado en 744).	No	Diferente, Teorema 7º (p. 57)

half sum of the three sides, and the sine of the difference between that half sum and the side opposite to that angle, the whole divided by the product of the sines of the sides which include the same angle. $\cos\frac{1}{2}\widehat{abc}=\sqrt{\frac{R^2\times\text{sine}\frac{1}{2}s\times\text{sine}\left(\frac{1}{2}s-ac\right)}{\text{sine }ab\times\text{sine }bc}}$					
85. Indeterminate triangles.	No	Comentarios a lo largo de la obra	No	No	No
87. Tabla del 5º caso de triángulos oblicuos. Let *a*, *b*, and *c* designate the sides respectively, opposite to the angles *A*, *B* and *C* of an oblique angled-triangle. Given *a*, *b* and *A*…	Tabla para resolver triángulos oblicuos y explicación con mucho apoyo en la Trigonometría plana (pág. 52-53). Todos los casos	No	No	No	No
88. Tabla del 6º caso de triángulos oblicuos. …two angles and one side opposite to one of them are known…		No	No	No	No
92. Quadrantal or rectilateral triangle.	Más extenso (24)	Similar pero en otro orden del libro	No	No	No
Rodríguez	**Fernández**	**Ciscar (Tratado)**	**Ciscar (Curso)**	**Lista y Aragón**	**Castillo y Castro**

3.5.4. Obras extranjeras seleccionadas para la comparativa con la obra de Rodríguez

Autor	1ª Ed.	Ed. revisada	Título	Impresión
John Keill	1723	1726	The Elements of Plain and Spherical Trigonometry. Also a short treatise of the nature an arithmetick of logarithms	W. Vilmot. Dublin.
Robert Simson	1756	1821	The Elements of Euclid, viz. The first six books, together with the eleventh and twelfth. The errors, by which Theon, or others, have long ago vitiated these books, are corrected, and some of Euclid's demonstrations are restored. Also the book of Euclid's data, in like manner corrected. To this edition are also annexed, Elements of Plane and Spherical Trigonometry	Robert Desilver & Thomas Desilver. Philadephia.
John Playfair	1795	1824	Elements of Geometry: Containing the first six books of Euclid, with a supplement on the Quadrature of the circle, and the Geometry of Solids; to which are added Elements of Plane and Spherical Trigonometry	E. Duyckinck and George Long. New York.
Sylvestre François Lacroix	1797	1820	Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica y de la aplicación del álgebra a la geometría, Volumen 4	Imprenta Real. Madrid.
Charles Hutton	1798	1822	A course of Mathematics, for the use of academies, as well as private tuition	Samuel Campbell & son, Evert Duyckinck, T. & J. Swordas, R. M'Dermut, T. A. Ronalds, Collins & Hannav, and George

				Long. New York.
Thomas Keith	1801	1826	An introduction to the theory and practice of Plane and Spherical Trigonometry, and the Stereographic Projection of the sphere; including the theory of Navigation	Longman, Rees, Orme, Brown, and Green. London.
Samuel Webber	1801	1808	Mathematics, compiled from the best authors, and intended to be the Text-Book of the course of private lectures on these sciences in the University at Cambridge. Vol. II.	W. Hilliard. Cambridge.

3.5.5. Comparativa de la obra de Rodríguez con obras extranjeras

Rodríguez	Keill	Simson	Playfair	Lacroix	Hutton	Keith	Webber
1. Sphere	No	No	No	No	No	B 133 Similar a la 1ª	No
19. Corolario The pole of a great circle is 90º distant from every point of its circumference. **Sin demostrar**	Corolario I del II	Diferente P II	Diferente P II	No	8 & 14	Sin demostrar H 134	No
22. Corolario If a circle be perpendicular to several great circles which intersect each other, the poles of that circle will be at the intersections; and conversely, if a great circle has a pole at the intersection of several great circles, it will be perpendicular to them, and have the other pole at the other intersection. **Sin demostrar**	Corolario II del II	No	No	No	No	Sin demostrar I 134	No
27. Thm. A spherical angle is equal to the inclination of the planes of the circles which form it.	Sin demostrar V	Diferente P IV	Diferente PIII	No	No	No	No
30. Corolario If two arcs of great circles intersect each other, the opposite angles will be equal. **Sin demostrar**	No	No	No	No	No	Corolario 30 N 135 con demostración	No
31. Corolario The spherical angles formed at one point by the intersection of several great circles, are together equal to 360º. **Sin demostrar**	No	No	No	No	No	Corolario 31 y Corolario 32 en Proposición M 134 con demostración	No
32. Corolario The spherical angles formed on	No	No	No	No	No	Corolario 31	No

one side of a semicircle by several arcs of great circles meeting at one point, are together equal to 180º. **Sin demostrar**						y Corolario 32 en Proposición M 134 con demostración	
33. Thm. The shortest distance between two points on the surface of a sphere is the smaller arc of a great circle which joins those points.	No	No	No	No	Diferente 11	No	5 p. 367
37. Spherical triangle	Definición IV	Diferente P III	Diferente IV	No	Definición 1 & 5	Diferente E 133	2 p. 409
38. Spherical trigonometry	No	No	No	Similar y empieza con esto 46	Definición 2 Diferente	Diferente A 133 y empieza con esto	1 p. 409
41. Sides and angles alike (or of the same kind) and unlike (or of different kinds).	Denomina same affection y different affection	Denomina same affection y different affection	Denomina same affection y different affection	No	Definición 5 alike & same affection vs. unlike & different affection	Diferente nomenclatura: species, kind, or affection K 134	6 p.409 alike & same affection vs. unlike & different affection
43. Thm. In every spherical triangle the sum of two sides is greater than the third.	Diferente IX	Diferente P VI	Diferente P VII	No	Diferente Teorema 1	Diferente Y 138	Diferente Teorema I, p. 411
44. Thm. The sum of the three sides of a spherical triangle is less than 360º.	Diferente XI	Diferente P VII	Diferente P VIII	No	Diferente Teorema 2	Diferente Z 138	Diferente Teorema II, p. 412
45. Thm. The sum of the angles of a spherical triangle is greater than two rights angles, but less than six.	Diferente XVII	Diferente P XI	Diferente P XII	No	Diferente Teorema 3	Diferente T 137	Teorema III, p. 412 Diferente
48. Thm. In every isosceles spherical triangle, the angles opposite the equal sides are equal, and the arc drawn from the third angle to the middle of its opposite side is perpendicular to it.	Diferente VI	Diferente P IV	Diferente P V	No	No	Dividido en F 142 diferente e I 142 igual	No

49. Thm. In every spherical triangle, the greatest side is opposite to the greatest angle.	Diferente XII	Similar P VIII	Diferente P VIII	No	No	Similar con otra notación L 143	Sin demostrar 1 p. 411
50. Thm. The shortest distance from a point on the surface of the sphere to a great circle is an arc of a great circle, less than 90º, described perpendicularly from the point to the circle; and the oblique arcs drawn from that point to the circle are greater as they are farther from the perpendicular.	No	Diferente P XII	Diferente P XIII	No	No	Diferente U 145	No
55. Thm. If from the vertices of a triangle *ABC*, taken for poles, are describe the arcs *FE*, *DE*, and *DF*, these arcs will form a triangle *DFE*, the side and angles of which will be respectively the supplements of the angles and sides of the triangle *ABC*. Supplemental or polar triangles.	Similar XIV	Similar P X	Similar P XI	Sin demostrar 50	Similar Teorema 4 & Corol. 1	No	Similar Teorema IV, p. 413
57. Thm. If in a spherical triangle *ABC*, right angled at *B*, we describe the arc *HFE* from the point *A* as a pole, and extend the side *AB*, *AC*, *BC* until they meet at *H*, *G* and *F*, a spherical triangle *CFG*, right angled at *G*, will be formed, in which the angle *CFG* will be the complement of *AB*; the side *FG* the complement of the angle *CAB*, the side *CF* the complement of *BC*, and the side *CG* the complement of *AC*.	No	No	No	No	No	Similar a L 151	No
60. Thm. In ever right-angled spherical triangle the oblique angles are of the same kind as their opposite sides.	Diferente XVIII	Diferente P XIII	Similar P XIV	No	No	No	Diferente Teorema VIII, p. 419
61. Thm. When the two legs of a right-angled spherical triangle are of the same kind, the hypothenuse is less than 90º.	Diferente XIX	Similar P XIV	Diferente P XIV	No	No	Diferente P 145	Diferente Teorema VIII, p. 419
62. Thm. When the two legs of a right-angled	Diferente	Similar P	Diferente P	No	No	Diferente Q	Diferente

spherical triangle are of different kind, the hypothenuse is greater than 90º. + Corolarios. **Sin demostrar**	XX	XIV	XIV			145; Corolario 66 diferente R 145; Corolario 65 sin demostrar como S 145; Corolario 63 sin demostrar como T 145	Teorema VIII, p. 419
68. Thm. In every right-angled spherical triangle the radius is to the sine of the hypothenuse, as the sine of one of the oblique angles is to the sine of its opposite leg. $\frac{r}{sen\ a}=\frac{sen\ B}{sen\ b}$	Diferente XXIX	Diferente P XVIII	Diferente P XIX	Diferente 58	Teorema X, dentro de la demostración	Diferente K 167	Diferente Teorema I, p. 414
69. Thm. In any right-angled spherical triangle, radius is to the sine of one leg, as the tangent of the angle formed by it and the hypothenuse, is to the tangent of the other leg. $\frac{r}{sen\ c}=\frac{tg\ B}{tg\ b}$	Diferente XXVII	Diferente P XVII	Diferente P XVIII	Diferente 58	Diferente Teorema XI	Diferente H 166	Diferente Teorema V, p. 417
70. Corolario In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of one leg, as the cosine of the other leg is to the cosines of the hypothenuse. $\frac{r}{\cos b}=\frac{\cos c}{\cos a}$	Diferente XXVI	Diferente P XXI	Diferente P XXII	Diferente 58	Diferente Teorema VIII	No	Diferente Teorema III, p. 416
71. Corolario In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of on the oblique angles, as the tangent of the hypothenuse is to the tangent of the leg adjacent to that angle. $\frac{r}{\cos B}=\frac{tg\ a}{tg\ c}$	Diferente XXVIII	Diferente P XX	Diferente P XXI	Diferente 58	Diferente Teorema IX	No	Diferente Teorema II, p. 416

72. Corolario In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of the hypothenuse, as the tangent of one oblique angle is to the cotangent of the other. $\frac{r}{\cos a} = \frac{tg\ B}{cotg\, C}$	Diferente XXX	Diferente P XIX	Diferente P XX	Diferente 58	Diferente Teorema XII	No	Diferente Teorema VI, p. 417
74. Thm. In every spherical triangle, the sines of the angles are proportional to the sines of their opposite sides. $\frac{sen\, a}{sen\, A} = \frac{sen\, b}{sen\, B} = \frac{sen\, c}{sen\, C}$	Similar XXXV	Similar P XXIII	Similar P XXIV	Diferente 47	Diferente Teorema VII	Diferente G 176	Similar Teorema III, p. 436
76. Thm. If in a spherical triangle *ABD* a perpendicular *CD* be left fall from one of the angles *C* to its opposite side *AB*, (extended if necessary) this will be divided in two segments *AD* and *BD*, the cosines of which will be proportional to the cosines of their adjacent sides; that is, the cosine of the first segment AD will be to the cosine of the second BD, as the cosine of the first side AC is to the cosines of the other side BC.	Similar XXXII	Similar P XXV	Similar P XXVI	No	No	No	No
77. Thm. In every spherical triangle, the square of the cosine of half one of the angles is equal to the product of the square of radius, the sine of the half sum of the three sides, and the sine of the difference between that half sum and the side opposite to that angle, the whole divided by the product of the sines of the sides which include the same angle. $\cos\frac{1}{2}\widehat{abc} = \sqrt{\frac{R^2 \times \text{sine}\frac{1}{2}s \times \text{sine}\left(\frac{1}{2}s - ac\right)}{\text{sine } ab \times \text{sine } bc}}$	Diferente XXXVI	No	Diferente Appendix	Diferente 59	Diferente Problema II	Diferente G 185	Enunciado en nota p 450, sin demostrar

85. Indeterminate triangles.	Comenta un poco en las dos tablas	Comenta un poco en las dos tablas	Comenta en las dos tablas	Diferente 57	Diferente Scholium p. 48	Diferente Apartado 3. General observations on the species and ambiguity of the different cases 199	No
87. Tabla del 5º caso de triángulos oblicuos. Let *a*, *b*, and *c* designate the sides respectively, opposite to the angles *A*, *B* and *C* of an oblique angled-triangle. Given *a*, *b* and *A*…	Comenta un poco en la segunda tabla	Comenta un poco en la segunda tabla	Comenta un poco en la segunda tabla	Diferente 61	Diferente Scholium p. 48	No	No
88. Tabla del 6º caso de triángulos oblicuos. …two angles and one side opposite to one of them are known…	Comenta un poco en la segunda tabla	Comenta un poco en la segunda tabla	Comenta un poco en la segunda tabla	Diferente 61	Diferente Scholium p. 48	Igual a Table II 207	No
92. Quadrantal or rectilateral triangle.	No	No	No	No	No	Diferente apartado 4. Quadrantal, or rectilateral spherical triangles 199	Diferente p. 434-435
Rodríguez	**Keill**	**Simson**	**Playfair**	**Lacroix**	**Hutton**	**Keith**	**Webber**

3.5.6. Comparativa de la obra de Rodríguez con las obras de mayor influencia

Rodríguez	Ciscar (Tratado)	Ciscar (Curso)	Keith	Otros
1. Sphere	Similar a la 2ª (68)	No	B 133 Similar a la 1ª	
19. Cor. The pole of a great circle is 90º distant from every point of its circumference. **Sin demostrar**	No	Propiedades totalmente distintas y utilizando el libro de Geometría (47,48). 19 como consecuencia en el Cor. (70).	Sin demostrar H 134	Keill Hutton
22. Cor. If a circle be perpendicular to several great circles which intersect each other, the poles of that circle will be at the intersections; and conversely, if a great circle has a pole at the intersection of several great circles, it will be perpendicular to them, and have the other pole at the other intersection. **Sin demostrar**	No		Sin demostrar I 134	Keill
27. Thm. A spherical angle is equal to the inclination of the planes of the circles which form it.	No	Similar (49)	No	Keill (sin demostrar)
30. Cor. If two arcs of great circles intersect each other, the opposite angles will be equal. **Sin demostrar**	No	54	Corolario 30 N 135 con demostración	Fernández
31. Cor. The spherical angles formed at one point by the intersection of several great circles, are together equal to 360º. **Sin demostrar**	No	54	Corolario 31 y Corolario 32 en Proposición M 134 con demostración	
32. Cor. The spherical angles formed on one side of a semicircle by several arcs of great circles meeting at one point, are together equal to 180º. **Sin demostrar**	No	54	Corolario 31 y Corolario 32 en Proposición M 134 con demostración	
33. Thm. The shortest distance between two points on the surface of a sphere is the smaller arc of a great circle which joins those points.	Diferente (102)	Diferente y en otro orden (85)	No	Webber

37. Spherical triangle	Igual (108)	Igual (72)	Diferente E 133	Fernández Lista y Aragón Keill Hutton Webber
38. Spherical trigonometry	Igual (Prólogo)	Igual (74)	Diferente A 133 y empieza con esto	Fernández Lista y Aragón Lacroix Webber
41. Sides and angles alike (or of the same kind) and unlike (or of different kinds).	Igual (133)	Lo denomina especie, pero sin definición	Diferente nomenclatura: species, kind, or affection K 134	Hutton
43. Thm. In every spherical triangle the sum of two sides is greater than the third.	Diferente (100)	Diferente (80)	Diferente Y 138	Lista y Aragón (sin demostrar)
44. Thm. The sum of the three sides of a spherical triangle is less than 360º.	Diferente (111)	Similar (89)	Diferente Z 138	Lista y Aragón (sin demostrar)
45. Thm. The sum of the angles of a spherical triangle is greater than two rights angles, but less than six.	Diferente (118)	Similar (90)	Diferente T 137	
48. Thm. In every isosceles spherical triangle, the angles opposite the equal sides are equal, and the arc drawn from the third angle to the middle of its opposite side is perpendicular to it.	Similar (128)	No	Dividido en F 142 diferente e I 142 igual	
49. Thm. In every spherical triangle, the greatest side is opposite to the greatest angle.	No	No	Similar con otra notación L 143	Castillo y Castro Simson Webber (sin demostrar)
50. Thm. The shortest distance from a point on the surface of the sphere to a great circle is an arc of a great circle, less than 90º, described perpendicularly from the point to the circle; and the oblique arcs drawn from that point to the circle are greater as they are farther from the perpendicular.	Similar pero en otro orden (146)	No	Diferente U 145	
55. Thm. If from the vertices of a triangle *ABC*, taken	No	No	No	Keill

for poles, are describe the arcs *FE*, *DE*, and *DF*, these arcs will form a triangle *DFE*, the side and angles of which will be respectively the supplements of the angles and sides of the triangle *ABC*. Supplemental or polar triangles.				Simson Playfair Hutton Webber
57. Thm. If in a spherical triangle *ABC*, right angled at *B*, we describe the arc *HFE* from the point *A* as a pole, and extend the side *AB*, *AC*, *BC* until they meet at *H*, *G* and *F*, a spherical triangle *CFG*, right angled at *G*, will be formed, in which the angle *CFG* will be the complement of *AB*; the side *FG* the complement of the angle *CAB*, the side *CF* the complement of *BC*, and the side *CG* the complement of *AC*.	No	No	Similar a L 151	Fernández
60. Thm. In ever right-angled spherical triangle the oblique angles are of the same kind as their opposite sides.	Diferente (142)	Diferente (750)	No	Playfair
61. Thm. When the two legs of a right-angled spherical triangle are of the same kind, the hypothenuse is less than 90º.	Diferente (139)	Diferente (746) y en otro orden del libro	Diferente P 145	Simson
62. Thm. When the two legs of a right-angled spherical triangle are of different kind, the hypothenuse is greater than 90º. + Corolarios. **Sin demostrar**	Diferente (140)	Diferente (747).	Diferente Q 145; Corolario 66 diferente R 145; Corolario 65 sin demostrar como S 145; Corolario 63 sin demostrar como T 145	Simson
68. Thm. In every right-angled spherical triangle the radius is to the sine of the hypothenuse, as the sine of one of the oblique angles is to the sine of its opposite leg. $\frac{r}{sen\ a} = \frac{sen\ B}{sen\ b}$	Diferente (174)	Totalmente diferente (97)	Diferente K 167	Hutton
69. Thm. In any right-angled spherical triangle, radius is to the sine of one leg, as the tangent of the angle	Similar (176)	Diferente (98 y demostrado en 741)	Diferente H 166	

formed by it and the hypothenuse, is to the tangent of the other leg. $\frac{r}{sen\ c}=\frac{tg\ B}{tg\ b}$				
70. Cor. In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of one leg, as the cosine of the other leg is to the cosines of the hypothenuse. $\frac{r}{\cos b}=\frac{\cos c}{\cos a}$	No	Diferente (109)	No	
71. Cor. In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of on the oblique angles, as the tangent of the hypothenuse is to the tangent of the leg adjacent to that angle. $\frac{r}{\cos B}=\frac{tg\ a}{tg\ c}$	No	Diferente (101 y demostrado en 742)	No	
72. Cor. In any right-angled spherical triangle, radius is to the cosine of the hypothenuse, as the tangent of one oblique angle is to the cotangent of the other. $\frac{r}{\cos a}=\frac{tg\ B}{cotg\ C}$	No	No	No	Diferente en varios: Castillo y Castro Keill Simson Playfair Lacroix Hutton Webber
74. Thm. In every spherical triangle, the sines of the angles are proportional to the sines of their opposite sides. $\frac{sen\, a}{sen\, A}=\frac{sen\, b}{sen\, B}=\frac{sen\, c}{sen\, C}$	Similar (197)	Totalmente diferente (95 y demostrado en 740)	Diferente G 176	Fernández Castillo y Castro Keill Simson Playfair
76. Thm. If in a spherical triangle *ABD* a perpendicular *CD* be left fall from one of the angles *C* to its opposite side *AB*, (extended if necessary) this will be divided in two segments *AD* and *BD*, the cosines of which will be proportional to the cosines of their adjacent sides; that is, the cosine of the first segment AD will be to the cosine of the second BD, as the cosine of the first side	Diferente (198)	No	No	Keill Simson Playfair

AC is to the cosines of the other side BC.				
77. Thm. In every spherical triangle, the square of the cosine of half one of the angles is equal to the product of the square of radius, the sine of the half sum of the three sides, and the sine of the difference between that half sum and the side opposite to that angle, the whole divided by the product of the sines of the sides which include the same angle. $\cos\frac{1}{2}\widehat{abc}=\sqrt{\frac{R^2\times\text{sine}\frac{1}{2}s\times\text{sine}\left(\frac{1}{2}s-ac\right)}{\text{sine } ab\times\text{sine } bc}}$	Difícil de comparar (207)	Diferente (110 y demostrado en 744).	Diferente G 185	
85. Indeterminate triangles.	Comentarios a lo largo de la obra	No	Diferente Apartado 3. General observations on the species and ambiguity of the different cases 199	
87. Tabla del 5º caso de triángulos oblicuos. Let *a*, *b*, and *c* designate the sides respectively, opposite to the angles *A*, *B* and *C* of an oblique angled-triangle. Given *a*, *b* and *A*…	No	No	No	Diferente en varios: Fernández Keill Simson Playfair Lacroix Hutton
88. Tabla del 6º caso de triángulos oblicuos. …two angles and one side opposite to one of them are known…	No	No	Igual a Table II 207	Diferente en varios: Fernández Keill Simson Playfair Lacroix Hutton
92. Quadrantal or rectilateral triangle.	Similar pero en otro orden del libro	No	Diferente apartado 4. Quadrantal, or	Fernández

			rectilateral spherical triangles 199	
Rodríguez	**Ciscar (Tratado)**	**Ciscar (Curso)**	**Keith**	**Otros**

3.5.7. Comparativa de capítulos con contenidos similares entre las obras de Rodríguez, Ciscar y Keith

Rodríguez	Ciscar (Tratado)	Ciscar (Curso)	Keith
Cap. **1º** *Of Circles and Angles on the Sphere*	**Cap**. **2º** *De las curvas descritas sobre las superficies de la esfera y de sus ángulos*	**Cap**. **1º** *Nociones generales*	**Cap**. **1º** *Definitions, &c. of Spherical Angles, Arcs, and Triangles*
Cap. **2º** *Of Spherical Triangles*	**Cap**. **2º** *De las curvas descritas sobre las superficies de la esfera y de sus ángulos* **Cap**. **3º** *Del valor de lados y ángulos de los triángulos esféricos y de su Igualdad* **Cap. 4º** *De la relación que hay entre las especies de los lados y ángulos de los triángulos esféricos*	**Cap**. **2º** *Nociones de trigonometría esférica*	**Cap**. **1º** *Definitions, &c. of Spherical Angles, Arcs, and Triangles*
Cap. **3º** *Right-Angled Triangles*	**Cap. 5º** *De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esféricos rectángulos*	**Cap**. **2º** *Nociones de trigonometría esférica* *Apéndice. En que se demuestran las proposiciones de Trigonometría esférica anunciadas en el Capítulo II*	**Cap**. **1º** *Definitions, &c. of Spherical Angles, Arcs, and Triangles*
Cap. 4º *Solution of Spherical Right-Angled Triangles*	**Cap. 5º** *De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esféricos rectángulos* **Cap. 6º** *Resolución de triángulos esféricos rectángulos*	**Cap**. **2º** *Nociones de trigonometría esférica*	**Cap**. **3º** *Investigation of general rules for calculating the sides and angles of Rightangled Spherical Triangles, &c*
Cap. 5º *Solution of Oblique-Angled Triangles*	**Cap. 8º** *De las analogías que sirven para la resolución de los triángulos esféricos oblicuángulos*	**Cap**. **2º** *Nociones de trigonometría esférica*	**Cap. 4º** *Investigation of general rules for solving the different cases of Oblique Spherical Triangles* **Cap. 5º** *Investigation of general rules for calculating, the sides and angles of*

			Oblique-angled Spherical Triangles without a perpendicular
Cap. 6º *Examples of the solution of Spherical Triangles*	A lo largo de la obra	No contempla ejercicios	**Cap. 6º** *Practical rules for the solutions of all the different cases of Right-Angled Spherical Triangles, with their application by Logarithms* **Cap. 8º** *Practical rules for solving all the different cases of Oblique-angled Spherical Triangles with a perpendicular, &c.; and their application by Logarithms* **Cap. 9º** *Practical rules for solving all the different cases of Oblique-angled Spherical Triangles without a perpendicular, with their application by Logarithms*
Cap. 7º *Of Indeterminate Triangles*	A lo largo de la obra	No lo trata	**Cap. 5º** *Investigation of general rules for calculating, the sides and angles of Oblique-angled Spherical Triangles without a perpendicular.* **Apartado 5** *General observations on the species and ambiguity of the different cases +* **Apartado 6** *General observations on the ambiguity of the different cases*
Cap. 8º *Of Quadrantal Triangles*	**Cap. 7º** *De la resolución de los triángulos cuadrantales*	**Cap**. **2º** *Nociones de trigonometría esférica*	**Cap. 5º** *Investigation of general rules for calculating, the sides and angles of Oblique-angled Spherical Triangles without a perpendicular.* **Apartado 4** *Quadrantal, or rectilateral spherical triangles* **Cap. 7º** *Practical rules for solving the different cases of Rectilateral or Quadrantal Spherical Triangles, with their application by Logarithms*
Rodríguez	**Ciscar (Tratado)**	**Ciscar (Curso)**	**Keith**

3.5.8. Mayores influencias de otras obras, por capítulos, en la obra de Rodríguez

CAPÍTULO DE LA OBRA DE RODRÍGUEZ	OBRAS CON CONTENIDOS SIMILARES
Of Circles and Angles on the Sphere	Keith y en menor medida Ciscar (Curso)
Of Spherical Triangles	Ciscar (Tratado) y Ciscar (Curso)
Right-Angled Triangles	Keith y tratado de forma diferente en Ciscar (Tratado) y Ciscar (Curso)
Solution of Spherical Right-Angled Triangles	Ciscar (Tratado) y tratado de forma diferente en Ciscar (Curso)
Solution of Oblique-Angled Triangles	Ciscar (Tratado), Keill, Simson y Playfair
Examples of the solution of Spherical Triangles	No se compara
Of Indeterminate Triangles	Ciscar (Tratado), Keith y diferente Fernández, Keill, Simson, Playfair, Lacroix y Hutton
Of Quadrantal Triangles	Ciscar (Tratado)

4. REGLAMENTOS, ÓRDENES Y PROGRAMAS DE LOS EXÁMENES DE INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE

4.1. Introducción

Las pruebas de ingreso de los Aspirantes de Marina en la Escuela Naval Flotante constituyen una interesante fuente para poder valorar el nivel matemático que se les exigía a estos Aspirantes para ser admitidos y poder llevar adelante los estudios de Guardias Marinas.

Es por ello que se ha realizado una búsqueda de documentos que traten sobre el acceso a la Escuela Naval Flotante. Nos hemos apoyado en varios programas detallados de los exámenes de ingreso, en Reales Ordenes y Reales Decretos, varios de ellos recogidos en la obra de José María Blanco Núñez y Pedro Fernández Núñez sobre la Escuela Naval Flotante, y en artículos aparecidos en diversas revistas relacionadas con la Marina como Mundo Naval Ilustrado y la Revista General de Marina.

La alta diversidad de fuentes ha propiciado que se encuentren algunas leves discrepancias entre los autores por lo que se ha expuesto para cada año la información obtenida en todas las fuentes.

Para poder discernir más claramente los contenidos matemáticos que se pedían a los candidatos, en el segundo apartado se han resaltado en negrita todas aquellas asignaturas o materias relacionadas con las Matemáticas, se ha elaborado un cuadro resumen de materias y autores recomendados y otro cuadro sobre los autores recomendados por materias durante todo el periodo.

Se concluye con la exposición de los programas detallados de los exámenes de ingreso de los años 1879, 1885, 1894 y 1897. Dada su gran extensión y nivel de concreción nos limitaremos a presentar a modo de ejemplo los títulos de las papeletas relacionadas con Álgebra.

4.2. Reglamentos, órdenes y estudios para el ingreso

4.2.1. Año 1869

TÍTULO: REGLAMENTO PARA EL INGRESO DE ASPIRANTES DE MARINA EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE, Y ESTUDIOS QUE DEBERÁN CURSAR PARA SER ADMITIDOS EN DICHA ESCUELA Y ASCENDER DESPUÉS A GUARDIAS MARINAS.

FUENTES:

- REAL DECRETO DE 10 DE SEPTIEMBRE DE 1869. ESTABLECIENDO UNA ESCUELA NAVAL FLOTANTE, PARA EL INGRESO Y ESTUDIOS DE LOS ASPIRANTES DE MARINA, Y APROBANDO EL REGLAMENTO QUE DETERMINA LA FORMA EN QUE HA DE VERIFICARSE EL INGRESO, ASÍ COMO EL PLAN DE ESTUDIOS, CON LO DEMÁS QUE SE EXPRESA.
- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, pp. 40-45]

TEXTO RELACIONADO:

Reglamento para el ingreso de Aspirantes de Marina en la Escuela Naval Flotante, y estudios que deberán cursar para ser admitidos en dicha Escuela y ascender después a Guardias Marinas.

Articulo 1º.- Para ingresar en la Escuela flotante, como Aspirantes de Marina, se necesita:

1º.- Gozar de los derechos de ciudadano español.

2º.- Tener mas de quince años de edad y menos de diecisiete; pero atendiendo a que varios jóvenes que esperaban su inmediato ingreso en la Armada cuando la suspensión temporal del Colegio Naval, pudieran exceder de la edad máxima señalada para el ingreso en la Escuela Naval Flotante, se concede, para sólo el primer ingreso, la dispensa de un año de exceso de edad, a todos los que se presenten a la oposición.

3º.- Ser de inmejorable robustez y de buena conformación física, sin ningún género de imperfección corporal; para lo que serán reconocidos previamente por una comisión de Médicos de la Armada, presidida por un Jefe de la misma Armada.

4º.- Ganar la plaza en pública oposición, en la que probarán el conocimiento completo de las materias que expresa el siguiente programa:

Aritmética; Álgebra; Geometría; Trigonometría rectilínea y esférica; Topografía**; Construcciones geométricas de las expresiones algebraicas**.- Con la extensión de los tratados de D. Juan Cortázar. Última edición.

Complemento del Álgebra y de la Geometría; Geometría analítica de dos y tres dimensiones; Elementos de cálculo diferencial e integral.- Con la extensión de la obra de J. Meunier Joanet.- Primera edición.

Principios de Geometría descriptiva.- Con la extensión de los capítulos I y II de la obra de D. José Bielsa.- Segunda edición.

Elementos de Mecánica racional.- Con la extensión de la obra de P. Sasias.- Primera edición.

Principios de Física y Meteorología.- Con la extensión de la obra de D. Francisco Chacón y Horta, exceptuando la parte estudiada en la Mecánica.

Elementos de Historia Universal.- Con la extensión de la obra de D. Manuel Ibo Alfaro.- Madrid 1866.

Elementos de Geografía universal.- Con la extensión de la obra de D. Manuel Merelo.- Madrid 1865.

Traducir y escribir correctamente los idiomas francés e inglés.

Dibujo natural, hasta cabezas.

Dibujo lineal y topográfico.- Con la extensión de las lecciones de dibujo topográfico de D. José Maria Riudaverst.- Madrid 1864.

Las obras que se citan, sólo se considerarán como índices de las materias y extensión con que se han de estudiar y probar en la oposición.

Cada joven puede elegir el autor que más le convenga.

4.2.2. Año 1871

TÍTULO: REAL DECRETO DE 11 DE ENERO DE 1871

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 96]

TEXTO RELACIONADO:

El artículo 6º del Decreto promulgado el día 11 de enero de 1871, entre otras cosas dice: “El Almirantazgo procederá a la redacción del programa que haya de servir en lo sucesivo para la admisión de alumnos en la Escuela naval flotante”.

4.2.3. Año 1872

TÍTULO: REGLAMENTO DE 1º DE AGOSTO DE 1872. PARA EL RÉGIMEN, DIRECCIÓN Y GOBIERNO DE LA FRAGATA-ESCUELA NAVAL.

FUENTE: [GUILLÉN, 1919, p. 190]

TEXTO RELACIONADO:

En 1872 se publicó, con carácter provisional, el Reglamento que anuló a varios anteriores, no habiendo otros asuntos dignos de reseña que el primer reparto de premios a los Aspirantes que habían obtenido la nota máxima, acto a que asistió el Comandante general del departamento y distinguida concurrencia, ante la cual, y la Compañía de Aspirantes, con armas, leyó D. Victoriano S. Barcaiztegui el discurso de apertura del nuevo curso. Por el citado Reglamento, las Historias Universal y de España y la Geografía, debían aprobarse en los Institutos; y por oposición, **Aritmética**, **Algebra**, **Geometría**, **Trigonometrías**, Topografía, **Geometría descriptiva**, Dibujos natural y topográfico y francés; la edad tenía que ser mayor de trece y menor de diez y siete años.

4.2.4. Año 1876

TÍTULO: REAL ORDEN DE 24 DE AGOSTO DE 1876 DETERMINANDO LAS CONDICIONES EN QUE DEBEN VERIFICARSE LAS OPOSICIONES PARA EL INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 112]

TEXTO RELACIONADO:

No cubriéndose el número de vacantes con los que obtengan aprobación en los dos ejercicios, obtendrán plazas los que hayan aprobado el primero; en cuyo caso deberán permanecer un semestre más en la Escuela, en el que cursarán lo que comprende el segundo.

Se convoca concurso para cubrir 62 plazas vacantes que comenzará el 20 de octubre de 1876.

Se publican los requisitos para concursar…

4.2.5. Año 1879

TÍTULO: PROGRAMA DETALLADO DE LOS EXÁMENES DE INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE.

FUENTE: [MINISTERIO DE MARINA, 1879]

TEXTO RELACIONADO:

ARTÍCULO 5º DEL REGLAMENTO DE LA ESCUELA.

Para ingresar en la Escuela Naval como aspirante de Marina se necesita:

1º. Dirigir solicitud, escrita y firmada por el interesado, á la Autoridad que se designe á la publicación del concurso para ingreso, acompañando la partida de bautismo debidamente legalizada.

2.º Gozar de los derechos de ciudadano español.

3.º Ser de inmejorable robustez y buena conformidad física sin ningun género de imperfección corporal, para la que serán reconocidos previamente por una comision de Médicos de la Armada, presidida por un Jefe de la misma.

4.º Ganar la plaza en pública oposición, en la que probarán el conocimiento completo de las materias que expresa el siguiente

PROGRAMA

Primer ejercicio.

Presentar ante la Junta de exámenes certificados de los Institutos de haber probado las asignaturas de Geografía, Historia universal y particular de España.

Leer, traducir y escribir correctamente el francés, dibujo natural, hasta cabezas y principios del topográfico.

Aritmética, Algebra, Geometría: Por el autor que hayan estudiado, con la extensión, cuando ménos, de Cortázar, con el aumento de las papeletas 23 y 24 de Terry y problemas de Álgebra del mismo autor. **Complemento de Geometría** de Cortázar.

Segundo ejercicio

Trigonometría rectilínea y esférica, Topografía: Con la extensión de Cortázar.

Geometría descriptiva, con la extensión de la obra del Teniente de navío D. Joaquín Ibáñez, por ahora.

Geometría analítica de Morni.

La edad para el ingreso será la comprendida entre los trece y diez y ocho años.

PROGRAMA DE ARITMÉTICA

26 papeletas

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

24 papeletas

PROGRAMA DE GEOMETRÍA

41 papeletas

PROGRAMA DE TRIGONOMETRÍA

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

10 papeletas

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

10 papeletas

PROGRAMA DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

17 papeletas

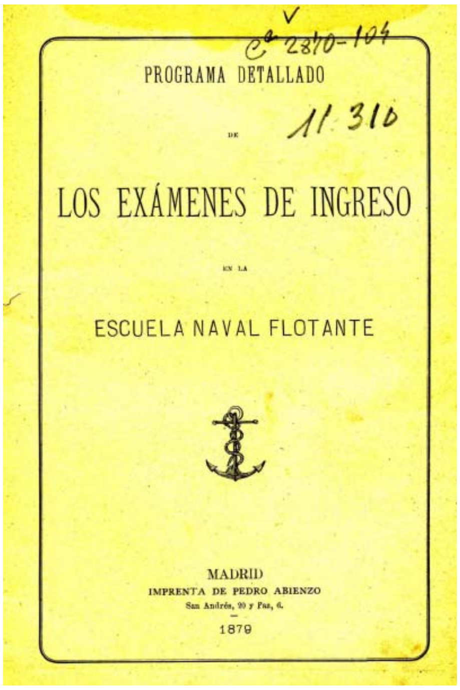
PROGRAMA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA DE DOS Y TRES DIMENSIONES

15 papeletas

OBSERVACIONES:

No se detallan las papeletas debido a su extensión.

El libro consta de trenta y nueve hojas; no aparecen títulos en cada papeleta.



Portada del Programa

4.2.6. Año 1880

TÍTULO: REAL ORDEN DE 18 DE FEBRERO DE 1880

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 126]

TEXTO RELACIONADO:

… S.M ha tenido a bien de que, á contar desde el segundo semestre del año actual, los exámenes para el ingreso en la Escuela Naval se verifiquen en Ferrol; debiendo ser constituida la Junta de exámenes por los Jefes y Profesores de la Escuela Naval Flotante.

4.2.7. Año 1881

TÍTULO: REAL ORDEN DE 11 DE MARZO DE 1881

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 130]

TEXTO RELACIONADO:

Modificó los artículos 15 y 16 del reglamento para el régimen y gobierno interior de las Juntas de exámenes de oposición a ingreso, y algunos artículos del Reglamento de la Escuela Naval Flotante referentes a las calificaciones y censura en los exámenes finales, repeticiones de curso y pérdidas del mismo.

TÍTULO: REAL ORDEN DE 22 DE SEPTIEMBRE DE 1881

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 132]

TEXTO RELACIONADO:

Dictando varias reglas para el ingreso en la Escuela Naval Flotante, y disponiendo que en lo sucesivo tengan lugar los exámenes en Madrid y en dicha Escuela simultáneamente.

Que del número de plazas que se convoquen podrán optar a tres cuartas partes de ellas los que se presenten en la Corte, y a la cuarta parte restante los que lo verifiquen en la Escuela.

TÍTULO: REAL ORDEN DE 3 DE DICIEMBRE DE 1881

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 132]

TEXTO RELACIONADO:

Disponiendo que los exámenes para el ingreso en la Escuela Naval Flotante se verifiquen en lo sucesivo, en los tres Departamentos.

4.2.8. Año 1882

TÍTULO: Desconocido

FUENTE: [LLABRÉS, 1953, pp. 83-84]

TEXTO RELACIONADO:

El ingreso en la Escuela, exigía en 1882 que los solicitantes tuvieran de trece a dieciocho años de edad, fueran de probada robustez y buena conformidad física, y aprobasen en pública oposición los ejercicios siguientes:

Primero: Presentar ante la Junta examinadora certificados de haber cursado en un instituto de Segunda Enseñanza las asignaturas de Geografía, Historia Universal y particular de España, Dibujo natural hasta cabezas y principios del topográfico; leer y escribir con corrección el francés, para cuya prueba seguíase el texto titulado *Selectas francesas,* de D. Javier O'Ferral, señalado por orden de 19 de noviembre de 1874; **Aritmética, Algebra y Geometría**; por cualquier autor, con la extensión cuando menos del clásico tratado de Cortázar y el aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de D. Antonio Terry y Rivas, y los *Problemas del Cálculo Aritmético* del mismo, declarado de texto para estos exámenes por Orden de 23 de mayo de 1880. También se exigía, por otra Orden de 11 de noviembre de 1879, el *Complemento de Algebra,* de este distinguido Capitán de Fragata, y sus *Ejercicios de Geometría,* igualmente obligatorios por resolución ministerial de 15 de marzo de 1881.

Segundo: **Trigonometría rectilínea y esférica** y Topografía con la extensión de Cortázar, siendo las de Schrön las tablas Numéricas mandadas observar; **Geometría, Geometría descriptiva** por la *Teoría de rectas y planos* del Teniente de Navío D. Joaquín Ibáñez Valera; y **Geometría analítica** por las L*ecciones* del también Teniente de Navío Don Julio Merás y Uría, de texto en virtud de Real orden de 30 de marzo de 1880.

TÍTULO: REAL ORDEN DE 18 DE JULIO DE 1882

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 136]

TEXTO RELACIONADO:

Resolviendo que los exámenes de oposición para ingreso en la Escuela Naval Flotante, se verifiquen en lo sucesivo en el Departamento de Ferrol, donde radica la Escuela Naval.

4.2.9. Año 1884

TÍTULO: REAL ORDEN DE 14 DE ENERO DE 1884
FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 142]
TEXTO RELACIONADO:
Todos los exámenes en la Armada tendrán lugar en los lugares donde radiquen las Escuelas.

TÍTULO: REAL ORDEN DE 9 DE FEBRERO DE 1884
FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 142]
TEXTO RELACIONADO:
Verificadas las oposiciones, que tendrán lugar en el próximo mes de abril, para cubrir las plazas que resulten vacantes en la Escuela Naval Flotante, quede en suspenso hasta nueva determinación el ingreso de Aspirantes en la mencionada Escuela.

4.2.10. Año 1885

TÍTULO: PROGRAMA DETALLADO DE LOS EXÁMENES DE INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE.
FUENTE: [MINISTERIO DE MARINA, 1885]
TEXTO RELACIONADO:
PROGRAMA DETALLADO DE LOS EXÁMENES PARA INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE
PRIMER EJERCICIO
Presentar ante la Junta de exámenes, certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía é Historia universal y particular de España.
Dibujo natural hasta cabezas y principios del topográfico.
Esta materia no causará nota numérica; pero sí desaprobación, si el candidato no saca las copias de las muestras que se le presenten con el parecido y perfección que la Junta crea deber exigir, para lo que recaerá la correspondiente votación.
Leer, traducir y escribir el francés.
Aritmética, Serret, traducción de Monteverde.
Álgebra Briot, traducción de Sebastian y Portuondo.
Geometría, Rouché y Comberouse; traducción, Portuondo.
Trigonometría, D. Saturnino Montojo.

SEGUNDO EJERCICIO.

Geometría descriptiva, García Villar.

Geometría analítica, Merás (adicionada).

[Sobre Geometría de tres dimensiones, por Salmón, de la que se hará una traducción para el uso de la Escuela.]

PROGRAMA DE ARITMÉTICA

10 papeletas

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

18 papeletas

PROGRAMA DE GEOMETRÍA

GEOMETRÍA PLANA

10 papeletas

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

8 papeletas

PROGRAMA DE TRIGONOMETRÍA

6 papeletas

PROGRAMA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

17 papeletas

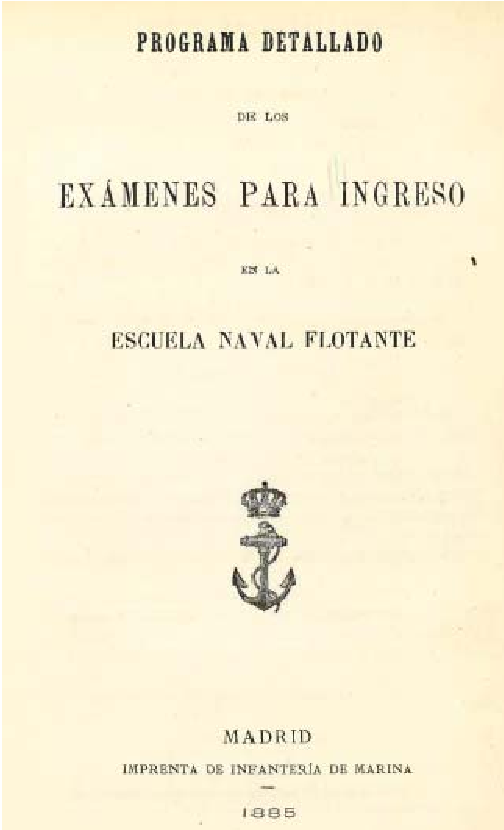
PROGRAMA DESCRIPTIVO

16 papeletas

OBSERVACIONES:

No se detallan las papeletas al ser un texto muy extenso; no aparecen títulos en cada papeleta.

El libro consta de trece hojas.


PROGRAMA DETALLADO

DE LOS

EXÁMENES PARA INGRESO

EN LA

ESCUELA NAVAL FLOTANTE

MADRID

IMPRENTA DE INFANTERÍA DE MARINA

1885

Portada del Programa

TÍTULO: PROGRAMA PUBLICADO POR LA DIRECCIÓN GENERAL DE INSTRUCCIÓN MILITAR, Y QUE HA SERVIDO PARA, ESCRIBIR ESTA OBRA.
FUENTE: [SALINAS & BENÍTEZ Y PARODI, 1898a, pp. III-VI]

TEXTO RELACIONADO:

PRIMERA PARTE

ÁLGEBRA ELEMENTAL

Algoritmo algébrico.

l.- Operaciones elementales.

II.- Potencias y raíces

III.- Progresiones.

IV.- Logaritmos

Aplicación del algoritmo algébrico á la resolución de las ecuaciones.

I.- Ecuaciones de primer grado.

II.- Ecuaciones de segundo grado,

SEGUNDA PARTE

ÁLGEBRA SUPERIOR

Funciones generales.

I.-Algoritmo.

II- Análisis combinatorio

III.-Resolución de las ecuaciones.

OBSERVACIONES:

La edición de la obra es de 1939 y no se puede deducir con seguridad que el programa sea de 1885, pues no aparece explícitamente; se ha deducido al considerar que en la portada del libro podemos encontrar: "*ELEGIDA DE TEXTO en el concurso celebrado el 28 de Febrero de 1885 por la Dirección general de Instrucción Militar*"

TÍTULO: REAL ORDEN DE 1º DE ENERO DE 1885 APROBANDO LA COLECCIÓN DE CONVENIOS INTERNACIONALES LEYES Y REGLAMENTOS RECOPILADOS Y ADICIONADOS POR EL NEGOCIADO DE LEGISLACIÓN DE LA SUBSECRETARÍA DEL MINISTERIO DE MARINA, LA CUAL EMPEZARÁ A REGIR EN 1º DE ENERO DEL AÑO ACTUAL, CON CARÁCTER OBLIGATORIO, EN SUSTITUCIÓN DE LO REGLAMENTADO HASTA EL DÍA.

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 144]

TEXTO RELACIONADO:

Admisión de Aspirantes:

Para ingresar en la Escuela Naval como Aspirante de Marina, se necesita:

Dirigir solicitud, escrita y firmada por el interesado, a la Autoridad que se designe a la publicación del concurso…

Gozar de los derechos de ciudadano español.

Ser de inmejorable robustez y buena conformidad física, para lo cual sean reconocidos …

Ganar plaza en pública oposición. Materias que se expresan en los programas detallados.

Presentar ante la Junta de exámenes, certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía e Historia universal y particular de España.

Dibujo natural hasta cabezas y principios del topográfico.

Leer, traducir y escribir francés.

Aritmética; Álgebra; Geometría; Trigonometría.

Geometría descriptiva y Geometría analítica…

En cada concurso se detallan los programas

TÍTULO: REAL ORDEN DE 11 DE AGOSTO DE 1885

FUENTES:

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 144]

- Gaceta de Madrid Nº. 224 de 12 de agosto de 1885

TEXTO RELACIONADO:

Dispuesto por Real Decreto de 7 de agosto de 1885 la apertura del ingreso en la Escuela Naval y que se fije el número de aspirantes que en ella han de existir en 80, y teniendo en cuenta que en 1º de enero próximo quedará un número menor por corresponderle salir a Guardias Marinas a un número crecido, S. M. el Rey (Q.D.G) ha tenido a bien disponer:

Que se convoque un concurso para cubrir 12 plazas en la Escuela Naval.

Que los exámenes tengan lugar en esta Corte y empiecen el día 1º de diciembre próximo y versarán, por esta vez únicamente, sobre las materias del primer ejercicio que determinan los programas aprobados por Real Orden de 8 de agosto.

4.2.11. Año 1887

TÍTULO: REAL ORDEN DE 7 DE SEPTIEMBRE DE 1887

FUENTES:

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 144]
- Gaceta de Madrid nº 252 de 9 de septiembre de 1887

TEXTO RELACIONADO:

Convocando examen oposición para cubrir 6 plazas de ingreso en la Escuela Naval Flotante.

Los exámenes tendrán lugar en la Corte y comenzarán el 20 de octubre de 1887. La promoción que ingresa en esta convocatoria es la 31ª, que se presenta en la Flotante el 30-12-1877.

Se adjunta programa detallado.

4.2.12. Año 1889

TÍTULO: REAL ORDEN DE 31 DE ENERO DE 1889. REGLAMENTO PARA EL RÉGIMEN Y GOBIERNO DE LAS JUNTAS DE EXÁMENES DE OPOSICIÓN A INGRESO

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 158]

TEXTO RELACIONADO:

Exámenes de carácter público…

El Examen constará de dos partes en cada asignatura; la primera teórica y la segunda práctica…

Los Exámenes de oposición tendrán lugar en la Escuela Naval…

4.2.13. Año 1891

TÍTULO: REAL ORDEN QUE APRUEBA EL PROGRAMA REFORMADO PARA LOS EXÁMENES DE OPOSICIÓN Á INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE.

FUENTE: [MINISTERIO DE MARINA, 1897]

TEXTO RELACIONADO:

REAL ORDEN

Excmo. Sr.: De conformidad con el parecer emitido por ese Consejo Superior, y con lo propuesto por la Dirección de Establecimientos Científicos, S. M. el Rey (q. D. g.), y en su nombre la Reina Regente del Reino, se ha dignado aprobar el programa reformado para los exámenes de oposición á ingreso en la Escuela Naval Flotante.

De Real orden lo expreso á V. E. para su conocimiento y el de esa Corporación. Dios guarde á V. E. muchos añas. Madrid 28 de Enero de 1891. - JOSÉ MARÍA DE BERANGER. - Sr. Vicepresidente del Consejo Superior de la Marina.

Para el ingreso en la Escuela naval como aspirante de Marina, se necesita:

Primero. Dirigir solicitud escrita y firmada por el interesado al Sr. Ministro de Marina, expresando su domicilio y acompañando la partida de nacimiento debidamente legalizada, por la que conste haber cumplido la edad de trece años y que el día fijado para el ingreso no excederán de la de diez y ocho los hijos de paisanos, ó de diez y nueve los de militares.

Segundo. Hallarse en posesión de los derechos de ciudadano español.

Tercero. Ser de inmejorable robustez y buena con formación física, sin ningún género de imperfección corporal, para lo que serán reconocidos previamente por una Comisión de Médicos de la Armada, que se sujetará al cuadro especial de defectos físicos y enfermedades que constituyen causa de inutilidad.

Cuarto. Ganar la plaza en pública oposición, en la que probarán el conocimiento completo de las materias respectivas.

OBSERVACIONES:

Sale al comienzo de [MINISTERIO DE MARINA, 1897]

TÍTULO: REAL ORDEN DE 3 DE ENERO DE 1891

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 166]

TEXTO RELACIONADO:

Disponiendo que, en analogía con la Real Orden dictada en 3 de septiembre de 1889… En lo sucesivo los exámenes de oposición para el ingreso en la Escuela Naval, de Aspirantes de Marina, se verifiquen precisamente en Madrid.

Convocando catorce (14) plazas de Aspirantes de Marina, para el curso que ha de empezarse en la Escuela Naval Flotante el 1º de julio próximo (será la promoción 38ª). Los ejercicios tendrán efecto en esta Corte, dando principio el 15 de abril de 1891. Entre otros requisitos que se publican, no haber cumplido los dieciocho años.

TÍTULO: REAL ORDEN DE 2 DE JUNIO DE 1891

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 168]

TEXTO RELACIONADO:

Disponiendo que los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante sean anuales, y en la época que con la debida anticipación se determine.

Las convocatorias serán de 15 plazas por ahora.

La primera convocatoria tendrá lugar en el año venidero de 1892, para el mes de junio

4.2.14. Año 1894

TÍTULO: REAL ORDEN DE 3 DE OCTUBRE DE 1894.

FUENTE: [MINISTERIO DE MARINA, 1894a], [MINISTERIO DE MARINA, 1894b], [MINISTERIO DE MARINA, 1894c], [MINISTERIO DE MARINA, 1894d]

TEXTO RELACIONADO:

REAL ORDEN

Debiendo cubrirse catorce plazas de aspirantes de Marina para el curso que ha de empezarse en la Escuela naval flotantes el 1.º de Julio del año próximo, S. M. el REY (Q. D. G.), y en su nombre la REINA Regente del Reino, ha tenido á bien disponer:

1.º Las plazas se adjudicarán mediante oposición pública, cuyos ejercicios se verificarán en esta Corte, dando principio el 15 de abril de 1895.

2.º Las solicitudes para tomar parte en las oposiciones, escritas y firmadas por los interesados, se dirigirán al Sr. Ministro de Marina y se presentarán en la Subsecretaría á las horas de oficina, donde se admitirán hasta las cinco de la tarde del día 15 de Marzo.

3.º Los solicitantes deberán expresar su domicilio y acompañar la certificación del acta de su nacimiento debidamente legalizada, sin enmiendas ni raspaduras, que acredite que en 1.º de Julio de 1895 no habrán cumplido diez y ocho años los que sean hijos de paisano ni diez y nueve los de militar.

4.º Acreditarán ser ciudadanos españoles, tener buena conducta y la robustez y aptitud físicas necesarias, debiendo someterse á un reconocimiento facultativo que verificará una Comisión de Médicos de la Armada.

Y 5.º Las oposiciones se practicarán con sujeción estricta al programa detallado vigente.

De Real orden lo expreso á V. E. para su conocimiento y el de esa Corporación.

Dios guarde á V. E. muchos años. San Sebastián 3 de Octubre de 1894.

PASQUÍN

PROGRAMA DETALLADO DE LOS EXÁMENES PARA INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE

Los opositores presentarán ante la Junta de exámenes certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía é Historia universal y particular de España.

Se examinarán de las asignaturas siguientes:

Dibujo natural hasta cabezas, ó lineal y principios del topográfico. Esta materia no causará nota numérica; pero si el candidato no saca las copias de las muestras que se le presenten con el parecido y perfección que la Junta crea deber exigir, éste podrá disponer que se retire del concurso, previa la correspondiente votación.

Leer, traducir y escribir el francés.

Leer y traducir uno de los idiomas inglés ó alemán.

Aritmética, Serret; traducción de Monteverde.

Algebra, Briot; traducción de Sebastián y Portuondo.

Geometría, Rouché y Gomberousse; traducción de Portuondo.

Trigonometría, Montojo.

A estos autores podrán sustituir otros cualesquiera que traten las materias con la misma extensión.

Problemas y ejercicios, Terry.

PROGRAMA DE ARITMÉTICA

Primera papeleta. Definiciones. Adición de los números enteros. Sustracción de los números enteros.

Segunda. Multiplicación de los números enteros.

Tercera. División de los números enteros. Potencias.

Cuarta. Divisibilidad. Máximo común divisor.

Quinta. Mínimo común múltiplo. Números primos.

Sexta. Fracciones.

Séptima. Decimales.

Octava. Evaluación aproximada de las magnitudes y de los números.

Novena. Operaciones abreviadas.

Décima. Raiz cuadrada.

Undécima. Raices cuadradas aproximadas.

Duodécima. Raiz cúbica.

Décimatercia. Números aproximados.

Décirnacuarta. Error relativo de un producto ó de un cociente.

Décimaquinta. Sistema legal de pesas y medidas y monetario. Medida del tiempo y de la circunferencia; números sexagesimales.

Décimasexta. Razones y proporciones.

Décimaséptima. Magnitudes que varían en relación directa ó inversa.

Décimaoctava. Cuestiones de Aritmética mercantil.

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

PRIMERA PARTE

Primera papeleta. Simbolismo algebraico. Operaciones algebraicas.

Segunda. Multiplicación algebraica. División algebraica.

Tercera. Casos particulares de la división. Fracciones algebraicas.

Cuarta. Ecuaciones.

Quinta. Cantidades negativas. Casos particulares en la ecuaciones de primer grado.

Sexta. Desigualdades é inecuaciones. Ecuaciones generales de primer grado. Simetría de las ecuaciones.

Séptima. Sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. Generalidades sobre los sistemas de ecuaciones de primer grado.

Octava. Ecuaciones de segando grado.

Novena. Ecuaciones de segundo grado.

Décima. Ecuaciones bicuadradas. Progresiones aritméticas.

Undécima. Progresiones geométricas.

Duodécima. Logaritmos.

Décimatercia. Tablas de logaritmos.

SEGUNDA PARTE

Décimacuarta. Números inconmensurables. Cantidades radicales. Exponentes fraccionarios. Exponentes inconmensurables. Exponentes negativos.

Décimaquinta. Binomio de Newton.

Décimasexta. Potencias de los polinomios. Raíces de los polinomios.

Décimaséptima. Generalización de la fórmula del binomio. Determinantes.

Décimaoctava. Propiedades de las determinantes.

Décimanona. Aplicación de las determinantes á la resolución de ecuaciones.

Vigésima. Series. Series de términos positivos.

Vigésimaprimera. Serie de términos positivos y negativos. Del número e.

Vigésimasegunda. Estudios de las funciones exponenciales. Logaritmos.

Vigésimatercia. Logaritmos. Resolución de ecuaciones exponenciales.

Vigésimacuarta. Cantidades imaginarias.

Vigésimaquinta. Funciones derivadas.

Vigésimasexta. Funciones derivadas.

PROGRAMA DE GEOMETRÍA

GEOMETRÍA PLANA

Primera papeleta. Definiciones. Ángulo. Triángulo.

Segunda. Perpendiculares y oblicuas. Paralelas.

Tercera. Polígonos. Paralelogramo.

Cuarta. Arcos y cuerdas. Tangente al círculo. Posiciones mutuas de dos circunferencias.

Quinta. Medida de ángulos.

Sexta. Construcción de ángulos y de triángulos. Trazado de paralelas y de perpendiculares. Problemas sobre las tangentes.

Séptima. Lineas proporcionales.

Octava. Semejanza de polígonos.

Novena. Relaciones entre las diferentes partes de un triángulo. Problemas de líneas proporcionales.

Décima. Problemas de líneas proporcionales.

Undécima. Polígonos regulares. Problemas sobre los polígonos regulares.

Duodécima. Problemas sobre polígonos regulares. Medida de la circunferencia.

Décimatercia. Medida de las áreas de los polígonos. Comparación de áreas.

Décimacuarta. Area del polígono regular y del círculo. Problemas sobre áreas.

Décimaquinta. Problemas sobre áreas.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Primera papeleta. Primeras nociones sobre el plano. Rectas y planos paralelos.

Segunda. Rectas y planos perpendiculares.

Tercera. Angulos diedros. Planos perpendiculares.

Cuarta. Angulos poliedros.

Quinta. Poliedros.

Sexta. Poliedros.

Séptima. Poliedros.

Octava. Figuras simétricas.

Novena. Poliedros semejantes. Poliedros regulares.

Décima. Cilindro de revolución. Cono de revolución.

Undécima. Esfera.

Duodécima. Triángulos esféricos.

Décimatercia. Areas en la superficie esférica.

Décimacuarta. Volumen de la esfera.

Décimaquinta. Generalidades sobre las superficies.

PROGRAMA DE TRIGONOMETRÍA (aparecen entre comillas los títulos que hemos considerado, al no aparecer en el texto)

Primera papeleta. “Definiciones”.

Segunda. “Funciones trigonométricas”.

Tercera. “Seno y coseno de la suma y diferencia”

Cuarta. “Seno, coseno y tangente de la suma de varios ángulos”.

Quinta. “Tablas de Shrön”

Sexta. “Cálculo logarítmico por medio de las funciones trigonométricas”.

Séptima. “Triángulos rectilíneos.”

Octava. “Triángulos oblicuángulos.”

Novena. “Triángulos esféricos.”

Décima. "Triángulos esféricos rectángulos."

Undécima. "Triángulos esféricos oblicuángulos."

Duodécima. "Resolución de Triángulos esféricos oblicuángulos."

Decimatercia. "Resolución de Triángulos esféricos oblicuángulos."

Décimacuarta. Area del triángulo esférico.

OBSERVACIONES:

No detallamos las papeletas al ser mucho texto. Prácticamente igual (salvo pocas diferencias tipográficas) que el programa de 1897.

Está publicado en cuatro partes, un total de nueve hojas.

Núm. 252 Sábado 20 de Octubre Año de 1894

BOLETIN OFICIAL

DE LA PROVINCIA DE MADRID

ADVERTENCIA OFICIAL

Se publica todos los días excepto los domingos

PRECIOS DE SUSCRIPCIÓN

ADVERTENCIA EDITORIAL

PARTE OFICIAL

Presidencia del Consejo de Ministros

SS. MM. el Rey y la Reina Regente (Q. D. G.) y Augusta Real Familia continúan en esta Corte sin novedad en su importante salud.

MINISTERIO DE MARINA

Real orden

...

PASQUÍN

PROGRAMA DETALLADO DE LOS EXÁMENES PARA INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE

Los opositores presentarán ante la Junta de exámenes certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía é Historia universal y particular de España.

Se examinarán de las asignaturas siguientes:

Dibujo natural hasta cabezas, ó lineal y principios del topográfico. ...

Leer, traducir y escribir el francés.

Leer y traducir uno de los idiomas inglés ó alemán.

Aritmética, Sorret; traducción de Montaverde.

Algebra, Briot; traducción de Sebastián y Portanelo.

Geometría, Rouché y Comberousse; traducción de Portanelo.

Trigonometría, Mendoja.

A estos autores podrán sustituir otros cualesquiera que traten las materias con la misma extensión.

Problemas y ejercicios, Terry.

PROGRAMA DE ARITMÉTICA

Primera papeleta

...

Segunda

...

Tercera

...

Cuarta

...

Quinta

...

Portada del Boletín Oficial de la provincia de Madrid del 20-10-94

4.2.15. Año 1895

TÍTULO: Desconocido

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 176]

TEXTO RELACIONADO:

Los opositores presentarán ante la Junta de exámenes, Certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía e Historia Universal y particular de España.

Se examinarán de: Dibujo natural hasta cabezas, ó lineal y principios de topográfico.

Leer, traducir y escribir francés; leer y traducir uno de los dos idiomas inglés o alemán**; Aritmética; Álgebra; Geometría; Trigonometría**.

TÍTULO: REAL ORDEN DE 13 DE NOVIEMBRE DE 1895

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 176]

TEXTO RELACIONADO:

El 13 de noviembre de 1895 se promulgó la Real Orden determinando las condiciones de lugar y tiempo en que han de verificarse los exámenes de ingreso en la Escuela Naval, y las condiciones de los tribunales que han de juzgar aquellos.

TÍTULO: REAL ORDEN DE 16 DE NOVIEMBRE DE 1895

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 176]

TEXTO RELACIONADO:

La Real Orden de 16 de noviembre de 1.895 aprobaba el nuevo Reglamento para el ingreso, régimen, dirección y gobierno de la Escuela Naval Flotante.

Las convocatorias serían semestrales, se celebrarían en la Corte y comenzarían los días 15 de mayo y 15 de noviembre de cada año.

4.2.16. Año 1896

TÍTULO: REAL ORDEN DE 13 DE NOVIEMBE DE 1895

FUENTES:

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 178]
- Colección legislativa de la Armada, pág. 280. 13-11-1895

TEXTO RELACIONADO:

… ha tenido a bien disponer que el día 15 de mayo de 1.896 tengan lugar en esta corte, los exámenes de oposición para el ingreso en la Escuela Naval flotante, siendo 19 el número de plazas que se han de cubrir.

Es asimismo su soberana voluntad que a partir de la próxima convocatoria, sean estas semestrales, en la corte, empezando el 15 de mayo y 15 de noviembre, sin que puedan prolongarse más allá del 1º de junio y de diciembre.

Haber cumplido la edad de 13 años y que el día fijado para el ingreso no excederá de la de 18 los hijos de los paisanos ó de 19 los de militares.

Los opositores presentarán ante la Junta de exámenes certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía e Historia universal particular de España.

Se examinarán: Dibujo natural hasta cabezas, ó lineal y principios de topográfico.

Leer, traducir y escribir francés. Leer y traducir uno de los idiomas inglés o alemán; **Aritmética; Álgebra; Geometría; Trigonometría**.

TÍTULO: Desconocido

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 180]

TEXTO RELACIONADO:

Para el ingreso en la Escuela Naval como Aspirante de Marina, se necesita,…entre otros:

Ganar la plaza en pública oposición.

Haber cumplido la edad de 13 años y no haber cumplido 18 años los hijos de paisano ó de 19 los hijos de militares el día 1º de enero de 1.897.

Los opositores presentarán ante la Junta de exámenes cerificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía e Historia universal y particular de España. Se examinarán de: **Aritmética**; Idiomas y Dibujo; **Álgebra**; **Trigonometría** y **Geometría**.

4.2.17. Año 1897

TÍTULO: PROGRAMA DETALLADO DE LOS EXÁMENES PARA INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE

FUENTE: [MINISTERIO DE MARINA, 1897]

TEXTO RELACIONADO:

Para el ingreso en la Escuela naval como aspirante de Marina, se necesita:

Primero. Dirigir solicitud escrita y firmada por el interesado al Sr. Ministro de Marina, expresando su domicilio y acompañando la partida de nacimiento debidamente legalizada, por la que conste haber cumplido la edad de trece años y que el día fijado para el ingreso no excederán de la de diez y ocho los hijos de paisanos, ó de diez y nueve los de militares.

Segundo. Hallarse en posesión de los derechos de ciudadano español.

Tercero. Ser de inmejorable robustez y buena con formación física, sin ningún género de imperfección corporal, para lo que serán reconocidos previamente por una Comisión de Médicos de la Armada, que se sujetará al cuadro especial de defectos físicos y enfermedades que constituyen causa de inutilidad.

Cuarto. Ganar la plaza en pública oposición, en la que probarán el conocimiento completo de las materias respectivas.

PROGRAMA DETALLADO DE LOS EXÁMENES PARA INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL FLOTANTE

Los opositores presentarán ante la Junta de exámenes certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía é Historia universal y particular de España.

Se examinarán de las asignaturas siguientes:

Dibujo natural hasta cabezas, ó lineal y principios del topográfico. Esta materia no causará nota numérica; pero si el candidato no saca las copias de las "muestras que se le presenten con el parecido y perfección que la Junta crea deber exigir ésta podrá disponer que se retire del concurso, previa la correspondiente votación.

Leer, traducir y escribir el francés.

Leer y traducir uno de los idiomas inglés ó alemán.

Aritmética, Serret; traducción de Monteverde.

Algebra, Briot; traducción de Sebastián y Portuondo.

Geometría, Rouché y Comberousse; traducción de Portuondo.

Trigonometría, Montojo.

Á estos autores podrán sustituir otros cualesquiera que traten las materias con la misma extensión.

Problemas y ejercicios, Terry.

PROGRAMA DE ARITMÉTICA

Primera papeleta. Definiciones. Adición de los números enteros. Sustracción de los números enteros.

Segunda. Multiplicación de los números enteros.

Tercera. División de los números enteros. Potencias.

Cuarta. Divisibilidad. Máximo común divisor.

Quinta. Mínimo común múltiplo. Números primos.

Sexta. Fracciones.

Séptima. Decimales.

Octava. Evaluación aproximada de las magnitudes y de los números.

Novena. Operaciones abreviadas.

Décima. Raiz cuadrada.

Undécima. Raices cuadradas aproximadas.

Duodécima. Raiz cúbica.

Décimatercia. Números aproximados.

Décirnacuarta. Error relativo de un producto ó de un cociente.

Décimaquinta. Sistema legal de pesas y medidas y monetario. Medida del tiempo y de la circunferencia; números sexagesimales.

Décimasexta. Razones y proporciones.

Décimaséptima. Magnitudes que varían en relación directa ó inversa.

Décimaoctava. Cuestiones de Aritmética mercantil.

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

PRIMERA PARTE

Primera papeleta. Simbolismo algebraico. Operaciones algebraicas.

Segunda. Multiplicación algebraica. División algebraica.

Tercera. Casos particulares de la división. Fracciones algebraicas.

Cuarta. Ecuaciones.

Quinta. Cantidades negativas. Casos particulares en la ecuaciones de primer grado.

Sexta. Desigualdades é inecuaciones. Ecuaciones generales de primer grado. Simetría de las ecuaciones.

Séptima. Sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. Generalidades sobre los sistemas de ecuaciones de primer grado.

Octava. Ecuaciones de segando grado.

Novena. Ecuaciones de segundo grado.

Décima. Ecuaciones bicuadradas. Progresiones aritméticas.

Undécima. Progresiones geométricas.

Duodécima. Logaritmos.

Décimatercia. Tablas de logaritmos.

SEGUNDA PARTE

Décimacuarta. Números inconmensurables. Cantidades radicales. Exponentes fraccionarios. Exponentes inconmensurables. Exponentes negativos.

Décimaquinta. Binomio de Newton.

Décimasexta. Potencias de los polinomios. Raíces de los polinomios.

Décimaséptima. Generalización de la fórmula del binomio. Determinantes.

Décimaoctava. Propiedades de las determinantes.

Décimanona. Aplicación de las determinantes á la resolución de ecuaciones.

Vigésima. Series. Series de términos positivos.

Vigésimaprimera. Serie de términos positivos y negativos. Del número e.

Vigésimasegunda. Estudios de las funciones exponenciales. Logaritmos.

Vigésimatercia. Logaritmos. Resolución de ecuaciones exponenciales.

Vigésimacuarta. Cantidades imaginarias.

Vigésimaquinta. Funciones derivadas.

Vigésimasexta. Funciones derivadas.

PROGRAMA DE GEOMETRÍA

GEOMETRÍA PLANA

Primera papeleta. Definiciones. Ángulo. Triángulo.

Segunda. Perpendiculares y oblicuas. Paralelas.

Tercera. Polígonos. Paralelogramo.

Cuarta. Arcos y cuerdas. Tangente al círculo. Posiciones mutuas de dos circunferencias.

Quinta. Medida de ángulos.

Sexta. Construcción de ángulos y de triángulos. Trazado de paralelas y de perpendiculares. Problemas sobre las tangentes.

Séptima. Líneas proporcionales.

Octava. Semejanza de polígonos.

Novena. Relaciones entre las diferentes partes de un triángulo. Problemas de líneas proporcionales.

Décima. Problemas de líneas proporcionales.

Undécima. Polígonos regulares. Problemas sobre los polígonos regulares.

Duodécima. Problemas sobre polígonos regulares. Medida de la circunferencia.

Décimatercia. Medida de las áreas de los polígonos. Comparación de áreas.

Décimacuarta. Areas del polígono regular y del círculo. Problemas sobre áreas.

Décimaquinta. Problemas sobre áreas.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Primera papeleta. Primeras nociones sobre el plano. Rectas y planos paralelos.

Segunda. Rectas y planos perpendiculares.

Tercera. Ángulos diedros. Planos perpendiculares.

Cuarta. Ángulos poliedros.

Quinta. Poliedros.

Sexta. Poliedros.

Séptima. Poliedros.

Octava. Figuras simétricas.

Novena. Poliedros semejantes. Poliedros regulares.

Décima. Cilindro de revolución. Cono de revolución.

Undécima. Esfera.

Duodécima. Triángulos esféricos.

Décimatercia. Areas en la superficie esférica.

Décimacuarta. Volumen de la esfera.

Décimaquinta. Generalidades sobre las superficies.

PROGRAMA DE TRIGONOMETRÍA (aparecen entre comillas los títulos que hemos considerado al no aparecer en el texto)

Primera papeleta. "Definiciones".

Segunda. "Funciones trigonométricas".

Tercera. "Seno y coseno de la suma y diferencia"

Cuarta. "Seno, coseno y tangente de la suma de varios ángulos".

Quinta. "Tablas de Schrön" [SCHRÖN, 1880]

Sexta. "Cálculo logarítmico por medio de las funciones trigonométricas".

Séptima. Triángulos rectilíneos.

Octava. Triángulos oblicuángulos.

Novena. Triángulos esféricos.

Décima. Triángulos esféricos rectángulos.

Undécima. Triángulos esféricos oblicuángulos.

Duodécima. Triángulos esféricos oblicuángulos.

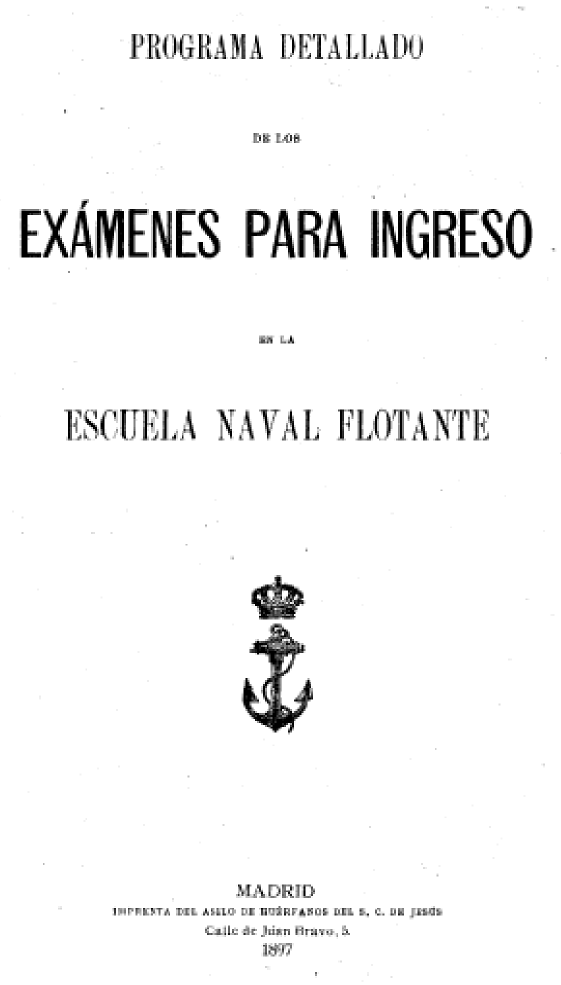
Décimatercia. Triángulos esféricos oblicuángulos.

Décimacuarta. Área del triángulo esférico.

OBSERVACIONES:

No detallamos las papeletas al ser mucho texto. Prácticamente igual (salvo pocas diferencias tipográficas) que el programa de 1894.

El libro consta de veintiseis hojas.


PROGRAMA DETALLADO

DE LOS

EXÁMENES PARA INGRESO

EN LA

ESCUELA NAVAL FLOTANTE

MADRID

IMPRENTA DEL ASILO DE HUÉRFANOS DEL S. C. DE JESÚS

Calle de Juan Bravo, 5.

1897

Portada del Programa

TÍTULO: Desconocido

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 182]

TEXTO RELACIONADO:

Para el ingreso en la Escuela Naval, como Aspirante de Marina, se necesitarán,… entre otros requisitos:

“Ganar la plaza en pública oposición. Haber cumplido la edad de 13 años y no haber cumplido 18 años los hijos de paisano ó de 19 los hijos de militares el día 1º de julio de 1.897.“Los opositores presentarán ante la Junta de exámenes certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía e Historia universal y particular de España. Se examinarán de **Aritmética**; Idiomas y Dibujo; **Álgebra**; **Trigonometría** y **Geometría**."

4.2.18. Año 1898

TÍTULO: REAL ORDEN DE 10 DE ENERO DE 1898

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 186]
- Colección legislativa de la Armada, pág. 8. 10-01-1898

TEXTO RELACIONADO:

Con el fin de cubrir 14 plazas de Aspirantes de Marina para el curso que ha de empezar en la Escuela Naval el 1º de julio de 1.898. S. M. el Rey, y en su nombre la Reina Regente del reino ha tenido a bien dictar las siguientes disposiciones…:

Las plazas se adjudicarán mediante oposición pública.

Las oposiciones tendrán lugar en la planta baja del Ministerio de Marina, empezando en la tarde del día 3 de mayo de 1.898.

Haber cumplido la edad de 13 años sin exceder la de 18 los hijos de paisano y 19 los de militares, el día 1º de julio del año 1.898.

Certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía e Historia universal y particular de España. Se examinarán de dibujo natural hasta cabezas, ó lineal y principios de topográfico.

Leer, traducir y escribir el francés ó el inglés. **Aritmética**; **Álgebra**; **Geometría**; y **Trigonometría**…

4.2.19. Año 1899

TÍTULO: REAL ORDEN DE 28 DE JULIO DE 1898

FUENTE:

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 188]
- Colección Legislativa de la Armada, pág. 105. 27-07-1898

TEXTO RELACIONADO:

Con el fin de cubrir 16 plazas de Aspirantes de Marina para el curso que ha de empezar en la Escuela Naval en Enero de 1.899.- S. M. el Rey y en su nombre la Reina Regente del reino, ha tenido a bien dictar las siguientes disposiciones...

Las plazas se adjudicarán mediante oposición pública.

Las oposiciones tendrán lugar en la planta baja del Ministerio de Marina, empezando en la tarde del día 2 de noviembre de 1.898.

Haber cumplido la edad de 13 años, sin exceder de los 18 los hijos de paisano y 19 los de militares, el día 1º de enero de 1.899.

Requisitos académicos y programas, igual al anterior.

TÍTULO: REAL ORDEN DE 30 DE ENERO DE 1899

FUENTE:

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 190]
- Colección Legislativa de la Armada, pág. 14. 30-01-1899

TEXTO RELACIONADO:

Con el fin de cubrir 12 plazas de Aspirantes de Marina para el curso que ha de empezar en la Escuela Naval en 1º de julio de 1899. – S. M. el Rey y en su nombre la Reina Regente del reino, ha tenido a bien dictar las siguientes disposiciones…

Las plazas se adjudicarán mediante pública oposición, verificándose los ejercicios en esta corte, con sujeción al programa vigente.

Las oposiciones tendrán lugar en la planta baja del Ministerio de Marina, y comenzarán después del reconocimiento facultativo que tendrá lugar a las doce del día 1º de mayo de 1.899.

Certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía, Historia Universal y particular de España.

Se examinarán de: Dibujo natural hasta cabezas, ó lineal y principios de topográfico; Leer, traducir y escribir francés ó el inglés; **Aritmética**; **Álgebra**; **Geometría** y **Trigonometría**.

Se adjunta el programa detallado para estos exámenes.

TÍTULO: Desconocido

FUENTE: [JONES, 1899, pp. 682-683]

TEXTO RELACIONADO:

Para el ingreso en la Escuela Naval como Aspirante de Marina, se necesita:

1.º Dirigir solicitud escrita y firmada por el interesado al Sr. Ministro de Marina, expresando su domicilio y acompañando la partida de nacimiento debidamente legalizada, por la que conste haber cumplido, la edad de trece años y que el día fijado para el ingreso, no excederán de la de diez y ocho los hijos de paisanos ó de diez y nueve los de militares.

2.º Hallarse en posesión de los derechos de ciudadano español.

3.º Ser de inmejorable robustez, y buena complexión física, sin ningún género de imperfección corporal, para lo que serán reconocidos previamente por una comisión de médicos de la Armada, que se sujetará al cuadro especial de defectos físicos y enfermedades que constituyen causa de inutilidad.

4.º Ganar la plaza en pública oposición, en la que probarán el conocimiento completo de las materias respectivas.

Con referencia á los exámenes para ingreso en dicha Escuela Naval Flotante, los opositores presentarán ante la Junta de exámenes certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía é Historia Universal y particular de España.

Se examinarán de las asignaturas siguientes: Dibujo natural hasta cabezas, ó lineal y principios del topográfico. Esta materia no causará nota numérica, pero si el candidato no saca las copias de las muestras que se le presenten con el parecido y la perfección que la Junta crea deber exigir, ésta podrá disponer que se retire del concurso, previa la correspondiente votación.

Leer, traducir y escribir el francés.

Leer y traducir uno de los idiomas inglés ó alemán.

Aritmética.

Álgebra.

Geometría.

Trigonometría

Problemas y ejercicios.

TÍTULO: Desconocido

FUENTE: [BURT, 1899, p. 145]

TEXTO RELACIONADO:

El ingreso en la Escuela Naval Española es libre para todos los españoles desde la edad de trece hasta diez y ocho años, concediendo un año más á los hijos de oficiales, ya hayan servido éstos en el Ejército ó la Marina.

Al ser admitido en lista el joven es examinado por los médicos, y este examen es muy riguroso. Aunque un aspirante puede presentarse á los trece años, apenas lo hace en tan tierna edad, pues las exigencias son bastantes. Hay dos exámenes de ingreso al año: uno en Mayo y el otro en Noviembre. En primer lugar, todos los candidatos se examinan de dibujo natural ó topografía.

No se da ninguna nota especial para esta parte del examen, pero todos los que desean ser admitidos en las oposiciones á ingreso deben satisfacer al Tribunal en esa parte del examen, y para conseguirlo han de demostrar las necesarias aptitudes.

El resto del examen consiste en las asignaturas siguientes: el francés, idioma principal para los aspirantes de Marina española, el cual tienen que leer y traducir y también traducir del español al francés. Han de examinarse también de otro idioma, que debe ser el inglés ó el alemán, y en la gran mayoría de los casos es el primero, siendo no solamente más fácil, sino también más útil.

Hay en verdad pocos puertos donde no se entiende el español, francés ó el inglés, y por ello esos tres idiomas pueden considerarse como los más útiles para un oficial de Marina de cualquier nacionalidad. Además de los idiomas, examinan á los aspirantes españoles en **aritmética**, **álgebra**, **geometría**, **trigonometría plana y esférica**. Siendo el examen por oposición, se necesita para el ingreso conseguir como mínimum de 55 á 60 por 100 de puntos favorables.

4.2.20. Año 1900

TÍTULO: REAL ORDEN DE 18 DE AGOSTO DE 1899

FUENTES:

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 192]
- Colección Legislativa de la Armada, pág. 159. 18-08-1899

TEXTO RELACIONADO:

Con el fin de cubrir 8 plazas de Aspirantes de Marina para el curso que ha de empezar en la Escuela Naval en 1º de enero de 1.900, S. M. el Rey y en su nombre la Reina Regente del reino, ha tenido a bien dictar las siguientes disposiciones:

Las plazas se adjudicarán mediante pública oposición, verificándose los ejercicios en esta corte con sujeción al programa vigente:

Las oposiciones tendrán lugar en la planta baja del Ministerio de Marina y comenzarán inmediatamente después del reconocimiento facultativo, que tendrá lugar a las ocho de la mañana del día 2 de noviembre de 1.899.

Haber cumplido la edad de 12 años los hijos de militares y 13 los de paisano, sin exceder de 18 y medio los primeros y 17 y medio los segundos, el día 1º de enero de 1.900.

Certificados de los Institutos de haber aprobado las asignaturas de Geografía, Historia universal y particular de España.

Se examinarán de: Dibujo natural hasta cabezas, ó lineal y principios de topográfico.

Leer, traducir y escribir el francés ó el inglés.

Aritmética; Álgebra; Geometría; Trigonometría.

Se adjunta el programa detallado para estos exámenes.

TÍTULO: REAL ORDEN DE 14 DE ABRIL DE 1900

FUENTES:

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 194]
- BOLETÍN OFICIAL Nº 44 de 19.IV.1.900

TEXTO RELACIONADO:

En virtud de lo dispuesto en el Real Decreto de 23 de febrero de1.900 (21 de febrero rectificando algún párrafo) y con objeto de cubrir 20 plazas de aspirantes de Marina para el curso que ha de empezar en la Escuela Naval flotante el 1º de septiembre de 1.900; el Rey y en su nombre … ha tenido a bien …

Las oposiciones tendrán lugar en la planta baja del Ministerio de Marina y comenzarán al siguiente día del reconocimiento facultativo y sorteo que tendrán lugar el día 15 de junio de 1.900.

No haber cumplido 16 años de edad, precisamente el día 15 de junio de 1.900, los hijos de paisano y 17 los hijos de militar, exceptuando los…

Requisitos para los exámenes: los anteriores.

TÍTULO: REAL ORDEN DE 9 DE MAYO DE 1900

FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 194]

TEXTO RELACIONADO:

Los exámenes de ingreso de mil novecientos se llevarán a cabo con arreglo a lo que dispone el real Decreto de Veintiuno de febrero, Real Orden de Dieciséis de marzo y Real Orden de convocatoria de catorce de abril.

TÍTULO: EL INGRESO EN LA ESCUELA NAVAL

FUENTE: [ANÓNIMO, 1900]

TEXTO RELACIONADO:

Además de los decretos dejando en suspenso las convocatorias parea el ingreso en la Escuela de Infantería de Marina y Academia de Administración Naval, S. M. la Reina ha firmado otro disponiendo que la próxima convocatoria para ingreso en la Escuela Naval se verifique el día 15 de Junio próximo, y para poder tomar parte en ella será requisito indispensable no haber cumplido diez y siete años los hijos de militares y diez y seis lo de paisanos.

Para la convocatoria del 15 de Junio de 1901 podrán tomar parte los que no hayan cumplido quince años el día 15 de junio del año correspondiente, dispensándose á los hijos de militares un exceso á esa edad que no pase de seis meses.
Se examinarán en pública oposición de Francés, Dibujo, **Aritmética, Álgebra y Geometría**, con arreglo á los programas y con la extensión de los tratados de Salinas y Benítez la **Aritmética** y **Álgebra**, y de Ortega la **Geometría**.
Oportunamente se publicarán la próxima convocatoria y demás condiciones que deberá efectuarse.

4.2.21. Año 1901

TÍTULO: REAL ORDEN DE 28 DE MARZO DE 1901
FUENTE: [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 194]
TEXTO RELACIONADO:
Se suspende temporalmente la convocatoria para los exámenes de ingreso en la Escuela Naval, que con arreglo al Real Decreto de nueve de mayo de 1900, deberán dar principio en el día quince de junio de cada año.

4.2.22. Año 1902

TÍTULO: REAL DECRETO DE 15 DE OCTUBRE DE 1902
FUENTES:
- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 196]
- BOLETÍN OFICIAL nº 113 de 18 de octubre de1.902

TEXTO RELACIONADO:
Se sacan a oposición diez plazas de Aspirantes de Marina. Las oposiciones tendrán lugar en la planta baja del Ministerio de Marina y comenzarán inmediatamente después del reconocimiento facultativo, que tendrá lugar el día 27 de diciembre de 1.902, a las ocho de la mañana.
No haber cumplido la edad de dieciséis años, los hijos de paisano, y diecisiete, los hijos de militar, antes del día 15 de junio de 1.902.
Acreditar que se tiene aprobada la primera enseñanza en un Instituto.

Los ejercicios se verificarán en el Ministerio y versarán sobre: Geografía; Historia Universal e Historia de España, pueden sustituirse por certificados expedidos por un Instituto de segunda enseñanza…

Podrán tomar parte en estas oposiciones todos los jóvenes a quienes se les concedió autorización por Real Orden para presentarse en la primera convocatoria que se anunciara, aunque estuvieran excedidos de la edad reglamentaria, en vista de los perjuicios que demostraron se les seguían por haber suspendido las convocatorias sin previo anuncio.

A los que tengan esta concesión y no se presenten y también a los que lo hagan y no obtengan plaza, se les reserva el derecho para la convocatoria siguiente ordinaria del mes de junio de 1.903.

4.2.23. Año 1903

TÍTULO: REAL DECRETO DE 11 DE MARZO DE 1903 y REAL ORDEN DE 31 DE JULIO DE 1903

FUENTES:

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 198]
- BOLETÍN OFICIAL nº 29 de 12 de marzo de 1903
- BOLETÍN OFICIAL nº 89 de 11 de agosto de 1903

TEXTO RELACIONADO:

Se sacan a oposición 24 plazas de aspirantes de Marina.

Las oposiciones tendrán lugar en el local que previamente se designe en el Ministerio de Marina, y comenzarán inmediatamente después del reconocimiento facultativo que tendrá lugar el día 15 de junio de 1.903 a las ocho de la mañana.

No haber cumplido la edad de 16 años los hijos de paisano y 17 los hijos de militar antes del día 15 de junio de 1.903.

Acreditar que se tiene aprobada la primera enseñanza en un Instituto.

Los exámenes de Geografía, Historia Universal e Historia de España pueden sustituirse por certificados expedidos por un Instituto de segunda enseñanza, por una Academia militar, colegio de Trujillo… o de un tribunal de examen para ingreso en cualquier carrera de Marina.

La Real Orden de 31 de julio amplía las plazas para ingreso…

4.2.24. Año 1905

TÍTULO: REAL DECRETO DE 22 DE FEBRERO DE 1905

FUENTES:

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 196]
- BOLETÍN OFICIAL nº 23 de 25 de febrero de 1.905

TEXTO RELACIONADO:

Se sacan a oposición 10 plazas de Aspirantes de Marina. Los exámenes se verificarán en el Ministerio de Marina en el local que previamente se designe y comenzarán el día 2 de junio de 1.905.

No haber cumplido los 17 años el día 1º de junio de 1.905.

Acreditar que se tiene aprobada la primera enseñanza.

Los exámenes de Geografía; Historia Universal y de España pueden sustituirse por certificados expedidos por un Instituto de segunda enseñanza, por una Academia Militar, Colegio de Trujillo …. O de un Tribunal de examen para ingreso en cualquier carrera de Marina.

4.2.25. Año 1906

TÍTULO: REAL DECRETO DE 7 DE FEBRERO DE 1906

FUENTES:

- [BLANCO & FERNÁNDEZ, 2008, p. 202]
- BOLETÍN OFICIAL nº 19 de 15 de febrero de1.906

TEXTO RELACIONADO:

Se sacan a oposición 10 plazas de Aspirantes de Marina.

Las plazas se adjudicarán mediante pública oposición, los exámenes se verificarán en el Ministerio de Marina en el local que previamente se designe y comenzarán con el reconocimiento el día 31 de mayo de 1.906, para que puedan comenzar los exámenes el día 1º de junio del mismo año. La realidad es que los exámenes comenzaron el día 15 de junio.

No haber cumplido los 17 años el día 1º de junio de 1.906.

Acreditar que se tiene aprobada la primera enseñanza. Los exámenes de Geografía, Historia Universal y de España, pueden sustituirse por certificados expedidos por un Instituto de segunda enseñanza, por una Academia Militar; Colegio de Trujillo…… o de un Tribunal de examen para ingreso en cualquier carrera de Marina.

Se examinarán de: Dibujo natural hasta cabezas; Francés; **Aritmética; Álgebra; Geometría y Trigonometría**.

4.3. Cuadro resumen de materias y autores recomendados para los examenes de ingreso

AÑO	*MATERIAS Y AUTORES RECOMENDADOS*
1869	***Aritmética.*** *Con la extensión de los tratados de D. Juan Cortázar. Última edición.* ***Álgebra.*** *Con la extensión de los tratados de D. Juan Cortázar. Última edición.* ***Geometría.*** *Con la extensión de los tratados de D. Juan Cortázar. Última edición.* ***Trigonometría rectilínea y esférica.*** *Con la extensión de los tratados de D. Juan Cortázar. Última edición.* ***Construcciones geométricas de las expresiones algebraicas****. Con la extensión de los tratados de D. Juan Cortázar. Última edición.* ***Complemento del Álgebra y de la Geometría.*** *Con la extensión de la obra de J. Meunier Joanet.- Primera edición.* ***Geometría analítica de dos y tres dimensiones.*** *Con la extensión de la obra de J. Meunier Joanet.- Primera edición.* ***Elementos de cálculo diferencial e integral.*** *Con la extensión de la obra de J. Meunier Joanet.- Primera edición.* ***Principios de Geometría descriptiva****. Con la extensión de los capítulos I y II de la obra de D. José Bielsa.- Segunda edición*
1872	**Aritmética** **Algebra** **Geometría** **Trigonometrías** **Geometría descriptiva**
1879	**Aritmética.** Por el autor que hayan estudiado, con la extensión, cuando menos, de Cortázar **Algebra.** Por el autor que hayan estudiado, con la extensión, cuando menos, de Cortázar, con el aumento de las papeletas 23 y 24 de Terry y problemas de Álgebra del mismo autor. **Geometría**. Por el autor que hayan estudiado, con la extensión, cuando menos, de Cortázar. **Complemento de Geometría** de Cortázar. **Trigonometría rectilínea y esférica**. Con la extensión de Cortázar.

	Geometría descriptiva. Con la extensión de la obra del Teniente de navío D. Joaquín Ibáñez, por ahora. **Geometría analítica.** Morni? (puede se Merás)
1882	**Aritmética.** Por cualquier autor, con la extensión cuando menos del clásico tratado de Cortázar y el aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de Antonio Terry y Rivas, y los *Problemas del Cálculo Aritmético* del mismo. **Algebra.** Por cualquier autor, con la extensión cuando menos del clásico tratado de Cortázar y el aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de Antonio Terry y Rivas. *Complemento de Algebra* de Antonio Terry y Rivas. **Geometría.** Por cualquier autor, con la extensión cuando menos del clásico tratado de Cortázar y el aumento de las papeletas 23 y 24 de la obra de D. Antonio Terry y Rivas, y los *Problemas del Cálculo Aritmético* del mismo. *Ejercicios de Geometría* de D. Antonio Terry y Rivas. Segundo **Trigonometría rectilínea y esférica.** Con la extensión de Cortázar, siendo las de Schrön las tablas Numéricas mandadas observar. **Geometría descriptiva.** Por la *Teoría de rectas y planos* de Joaquín Ibáñez. **Geometría analítica.** Por las L*ecciones* de Merás y Uría
1885	**Aritmética.** Serret, traducción de Monteverde. **Álgebra.** Briot, traducción de Sebastian y Portuondo. **Geometría elemental.** Rouché y Comberouse, traducción, Portuondo. **Trigonometría.** D. Saturnino Montojo. SEGUNDO EJERCICIO. **Geometría descriptiva.** García Villar. **Geometría analítica.** Merás (adicionada). [Sobre Geometría de tres dimensiones, por Salmón, de la que se hará una traducción para el uso de la Escuela.]
1894	**Aritmética.** Serret; traducción de Monteverde. **Algebra.** Briot; traducción de Sebastián y Portuondo. **Geometría.** Rouché y Gomberousse; traducción de Portuondo. **Trigonometría-** Montojo. A estos autores podrán sustituir otros cualesquiera que traten las materias con la misma extensión. **Problemas y ejercicios**, Terry.

1895	**Aritmética** **Álgebra** **Geometría** **Trigonometría**
1896	**Aritmética** **Álgebra** **Geometría** **Trigonometría**
1897	**Aritmética.** Serret; traducción de Monteverde. **Algebra.** Briot; traducción de Sebastián y Portuondo. **Geometría.** Rouché y Gomberousse; traducción de Portuondo. **Trigonometría-** Montojo. **Problemas y ejercicios**, Terry.
1898	**Aritmética** **Álgebra** **Geometría** **Trigonometría**
1899	**Aritmética** **Álgebra** **Geometría** **Trigonometría Plana y Esférica** **Problemas y ejercicios**
1900	**Aritmética.** Con arreglo a los programas y con la extensión de los tratados de Salinas y Benítez. **Álgebra.** Con arreglo a los programas y con la extensión de los tratados de Salinas y Benítez. **Geometría.** Con arreglo a los programas y con la extensión del tratado de Ortega.
1906	**Aritmética** **Álgebra** **Geometría** **Trigonometría**

4.4. Autores recomendados por materias para los examenes de ingreso

	1869	*1879*	*1882*	*1885*	*1894*	*1897*	**1898**	*1900*
Aritmética	*Cortázar*	*Cortázar*	*Cortázar +Terry y Rivas*	Serret	Serret	Serret		Salinas y Benítez
Álgebra	*Cortázar*	*Cortázar +Terry y Rivas*	*Cortázar +Terry y Rivas*	Briot + Peral?	Briot	Briot	Montaner?	Salinas y Benítez
Geometría	*Cortázar*	*Cortázar*	*Cortázar +Terry y Rivas*	Rouché y Comberouse	Rouché y Comberouse	Rouché y Comberouse		Ortega
Trigonometría	*Cortázar*	*Cortázar*	*Cortázar + Schrön*	Montojo	Montojo	Montojo		
Geometría Analítica	*Meunier-Joanet*	Morni? (puede ser Merás y Uría)	Merás y Uría	Merás y Uría + Salmón				
Geometría Descriptiva	*Bielsa*	Ibáñez	Ibáñez	García Villar				
Problemas y ejercicios					*Terry y Rivas*	*Terry y Rivas*		
Complemento de Geometría	*Meunier-Joanet*	*Cortázar*						
Construcciones	*Cortázar*							

geométricas de las expresiones algebraicas								
Elementos de cálculo diferencial e integral	*Meunier-Joanet*							
Complemento del Álgebra	*Meunier-Joanet*							

4.5. Programas detallados de los exámenes de ingreso en la Escuela Naval Flotante, papeletas sobre Álgebra

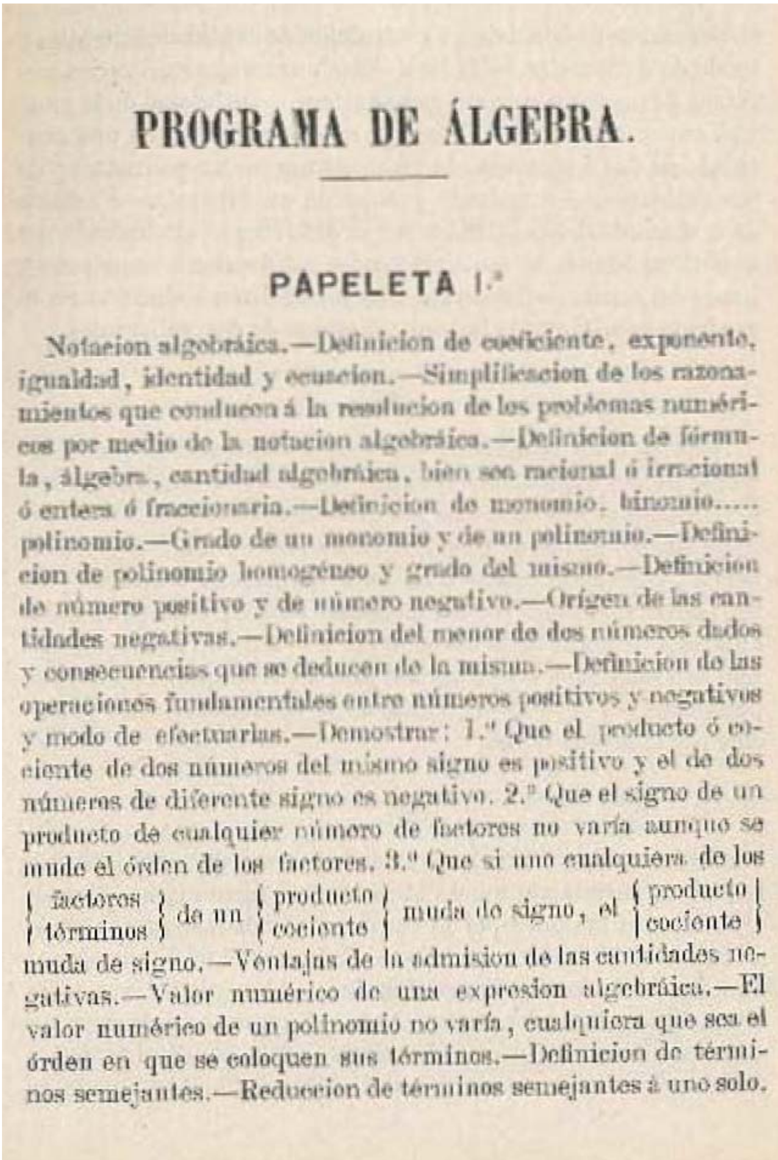
4.5.1. Año 1879

FUENTE: [MINISTERIO DE MARINA, 1879]

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

Las papeletas no tienen títulos y son bastante extensas.

OBSERVACIONES: Consta de veinticuatro papeletas y es más reducido que los demás, no apareciendo Series ni Derivadas; la copia examinada no tiene suficiente nitidez.



PROGRAMA DE ÁLGEBRA.

PAPELETA 1.ª

Notacion algebráica.—Definicion de coeficiente, exponente, igualdad, identidad y ecuacion.—Simplificacion de los razonamientos que conducen á la resolucion de los problemas numéricos por medio de la notacion algebráica.—Definicion de fórmula, álgebra, cantidad algebráica, bien sea racional ó irracional ó entera ó fraccionaria.—Definicion de monomio, binomio..... polinomio.—Grado de un monomio y de un polinomio.—Definicion de polinomio homogéneo y grado del mismo.—Definicion de número positivo y de número negativo.—Orígen de las cantidades negativas.—Definicion del menor de dos números dados y consecuencias que se deducen de la misma.—Definicion de las operaciones fundamentales entre números positivos y negativos y modo de efectuarlas.—Demostrar: 1.º Que el producto ó cociente de dos números del mismo signo es positivo y el de dos números de diferente signo es negativo. 2.º Que el signo de un producto de cualquier número de factores no varía aunque se mude el órden de los factores. 3.º Que si uno cualquiera de los $\left\{\begin{matrix}\text{factores}\\ \text{términos}\end{matrix}\right\}$ de un $\left\{\begin{matrix}\text{producto}\\ \text{cociente}\end{matrix}\right\}$ muda de signo, el $\left\{\begin{matrix}\text{producto}\\ \text{cociente}\end{matrix}\right\}$ muda de signo.—Ventajas de la admision de las cantidades negativas.—Valor numérico de una expresion algebráica.—El valor numérico de un polinomio no varía, cualquiera que sea el órden en que se coloquen sus términos.—Definicion de términos semejantes.—Reduccion de términos semejantes á uno solo.

Primera papeleta del programa de Álgebra de 1879

4.5.2. Año 1885

FUENTE: [MINISTERIO DE MARINA, 1885]

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

1.ª Papeleta.-Objeto del Álgebra.-Notación algebráica y su utilidad para facilitar el planteo y resolucion de los problemas.-Definiciones.-Suma, resta y multiplicacion de las cantidades algebraicas.

2.ª Division de las cantidades algebráicas.-Caso de la division del polinomio $Ax^m + bx^{m-1} ... + K$ por el binomio

x-a. Fracciones algebráicas y sus operaciones.

3.ª Ecuaciones de primer grado.-Resolucion de una ecuacion de primer grado con una incógnita; de dos con dos, de tres con tres, y en general, de n ecuaciones con n incógnitas.

4.ª Cantidades negativas.-Casos de imposibilidad e indeterminación en las ecuaciones de primer grado.-Explicacion de los símbolos ∞ y $\frac{0}{0}$. Desigualdades e inecuaciones.

5.ª Fórmulas generales para la resolucion de dos ecuaciones con dos incógnitas, y de tres con tres.-Discusion de esas fórmulas.-Sistemas de ecuaciones en que el número de éstas sea mayor ó menor que el de las incógnitas.

6.ª Ecuaciones de segundo grado.-Su resolucion bajo la forma general ó preparada.-Raices iguales é imaginarias.- Relaciones entre los coeficientes y las raices.-Casos en que los coeficientes c ó a de la ecuacion de segundo grado son muy pequeños.

7.ª Trinomio de segundo grado.-Su descomposicion en factores de primero .-Variacion de su valor cuando x varía. -Cambio de signos del trinomio.-Ecuaciones bicuadradas.- Fórmulas para resolverlas y su discusion.-Trasformacion de expresiones de la forma $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

8.ª Progresiones aritméticas y geométricas.-Teoremas y problemas sobre ambas clases de progresiones.-Analogía entre las fórmulas relativas a una y otra clase de progresiones.

9.ª Logaritmos.-Definiciones y propiedades de los logaritmos.- Logaritmos vulgares.-Tablas de Schrön.-Su disposicion y uso.-Diversas clases de características.-Reglas para resolver los problemas numéricos por medio de los logaritmos, empleando las características aumentadas.-Error que corresponde al resultado de un cálculo llevado á cabo por medio de los logaritmos, procedente del que afecta á éstos en las tablas. (Prólogo de las tablas de Schrön).

10.- Números inconmensurables.-Sus operaciones.--Cálculo de las cantidades radicales.-Exponentes negativos, fraccionarios é inconmensurables.-Operaciones con las cantidades afectadas de estas tres clases de exponentes.

11. Coordinaciones, permutaciones y combinaciones.- Fórmula del binomio.

12. Método de los coeficientes indeterminados.-Potencias y raices de los polinomios.- Generalizacion de la fórmula del binomio.

13. Principios de la teoría de determinantes.-Resolucion de un sistema de ecuaciones de primer grado.

14. Séries, sus propiedades elementales.-Teoremas sobre las series que tienen todos sus términos positivos.

15. Séries cuyos términos tienen signos diferente.-Séries de términos alternativamente positivos y negativos. -Del número e.-Límite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cuando m aumenta indefinidamente.

16. Estudio de la funcion exponencial.-Logaritmos, sus propiedades.-Cambio de base.- Logaritmos neperianos y logaritmos vulgares.-Resolucion de ecuaciones exponenciales.- Interés compuesto y anualidades.

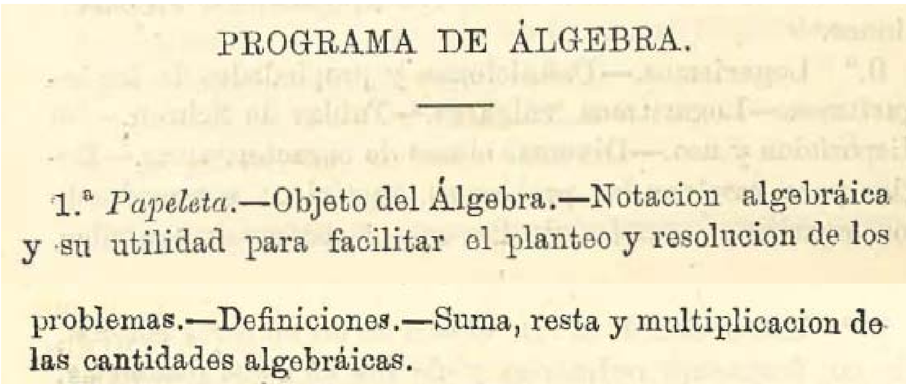
17. Cantidades imaginarias.- Su representacion geométrica.- Cálculo de las cantidades imaginarias.

18. Derivadas.-Derivadas de una suma y de una funcion entera. Desarrollo de una funcion entera en potencias de un incremento dado á x.-Derivada de un producto.-Estudio de la variacion de las funciones.-Derivada de una funcion de varias variables.-Teorema sobre las funciones homogéneas.-Derivadas de las funciones implícitas.

NOTA.-Las teorías de Álgebra que comprende el presente programa, podrán ser explicadas, siguiendo la obra, cuyo título es Algebra de Briot, traducida y completada por los señores Sebastian y Portuondo, ó por otra que las exponga con igual ó mayor extensión.

La parte práctica de esta asignatura versará sobre aplicaciones de las teorías que se exigen

OBSERVACIONES: las papeletas no tienen títulos.



PROGRAMA DE ÁLGEBRA.

1.ª *Papeleta.*—Objeto del Álgebra.—Notacion algebráica y su utilidad para facilitar el planteo y resolucion de los problemas.—Definiciones.—Suma, resta y multiplicacion de las cantidades algebráicas.

Primera papeleta del programa de Álgebra de 1885

FUENTE: [SALINAS & BENÍTEZ Y PARODI, 1898a]

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

PRIMERA PARTE

ÁLGEBRA ELEMENTAL

Algoritmo algébrico.

I.- Operaciones elementales.

Nociones fundamentales.- Cantidades algébricas.

Adición, substracción, multiplicación y división de las cantidades enteras.

Polinomios en general.

Monomio y polinomio.

Adición, substracción, multiplicación y división.

Fracciones algébricas y su cálculo.

Polinomios enteros y homogéneos.

Funciones lineales.

Multiplicación y propiedades de los polinomios enteros.

División de monomios y de polinomios.

División de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$.

Observaciones sobre la división.-Método de los coeficientes indeterminados.

II.- Potencias y raíces

Cálculo de los radicales.

Multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces.

Cálculo de radicales que no tengan e1 mismo índice.

Potencia del binomio $(x+a)^m$.

Potencias y raíces de los polinomios enteros.

III.- Progresiones.

Progresiones aritméticas y geométricas.

Progresiones geométricas decrecientes.

IV.- Logaritmos

Definición de los logaritmos por las progresiones.

Sus propiedades.

Disposición y uso de las tablas vulgares.

Exposición completa del cálculo logarítmico.-Aplicaciones al interés compuesto y á las anualidades.

Regla de cálculo.

Aplicación del algoritmo algébrico á la resolución de las ecuaciones.

I.- Ecuaciones de primer grado.

Ecuaciones con una incógnita.

Ecuaciones con varias incógnitas.

Eliminación por substitución, por adición, por comparación y por multiplicadores.

Discusión y resolución de dos ecuaciones con dos incógnitas.- Interpretación de las soluciones.

Aplicaciones de esta teoría.

Resolución, en números enteros, de las ecuaciones indeterminadas haciendo uso de las fracciones continuas.

II.- Ecuaciones de segundo grado,

Resolucion de la ecuación con una sola incógnita.

Discusión de las raíces.

Discusión del trinomio $ax^2 + bx + c$.

Caso en que el coeficiente a es muy pequeño.

SEGUNDA PARTE

ÁLGEBRA SUPERIOR

Funciones generales.

I.-Algoritmo.

Continuidad de las funciones.

De la función simple algébrica.

Exponentes fraccionarios, inconmensurables, negativos y nulos.

De la función exponencial.

Logaritmos por la inversa de la exponencial.

Módulo de un sistema de logaritmos.

Imaginarias.

Módulo y argumento.-Operaciones elementales.

Radicales algébricos y su cálculo.

Funciones de variables imaginarias.

Series.

Convergencia.-Teoremas y reglas.-Desarrollo.

Limites en las series $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $(1+x)^m$, e^x.

Demostrar que para ciertos valores dados á la variable de un polinomio entero, éste conserva el signo de su primer término.

II- Análisis combinatorio

Sucesiones é inversiones.

Coordinaciones, permutaciones y combinaciones.

Fórmula del binomio. - Suma de las potencias semejantes de los términos de una progresión aritmética. - Suma de las pilas de balas.-Determinantes. - Sus propiedades.

Aplicación de las determinantes á resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Operaciones con las determinantes.

III.-Resolución de las ecuaciones.

Derivadas.

Derivadas de una suma, de un producto, de un cociente, de una potencia y de una raíz.

Derivadas de las funciones de funciones y de las funciones implícitas.

Teorema de Taylor.-Su extensión al caso de varias variables.

Ecuaciones numéricas.

Transformación de las ecuaciones; la propuesta en otra de raíces iguales y de signos contrarios; la propuesta en otra cuyas raíces sean inversas.

Hacer desaparecer un término de una ecuación.

Resolución de una ecuación.

Supresión de las raíces iguales.

Limites de las raíces.

Determinación de las enteras.

Separación de las restantes.

Cálculo aproximado de las raíces separadas.

Eliminación.

Método dialítico de Sylvester.

Condición para que una ecuación tenga una raíz múltiple.-Discriminantes.

Método rápido de eliminación.

OBSERVACIONES: La edición de la obra es de 1939 y no se puede deducir con seguridad que el programa sea de 1885, pues no aparece explícitamente; se ha deducido al considerar que en la portada del libro podemos encontrar: "*ELEGIDA DE TEXTO en el concurso celebrado el 28 de Febrero de 1885 por la Dirección general de Instrucción Militar*"

4.5.3. Año 1894

FUENTE: [MINISTERIO DE MARINA, 1894a], [MINISTERIO DE MARINA, 1894b], [MINISTERIO DE MARINA, 1894c], [MINISTERIO DE MARINA, 1894d]

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

PRIMERA PARTE

Primera papeleta. Simbolismo algebraico.

Segunda. Multiplicación algebraica. División algebraica.

Tercera. Casos particulares de la división. Fracciones algebraicas.

Cuarta. Ecuaciones.

Quinta. Cantidades negativas.

Sexta. Desigualdades é inecuaciones. Ecuaciones generales de primer grado. Simetría de las ecuaciones.

Séptima. Sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. Generalidades sobre los sistemas de ecuaciones de primer grado.

Octava. Ecuaciones de segundo grado.

Novena. Ecuaciones de segundo grado.

Décima. Ecuaciones bicuadradas. Progresiones aritméticas.

Undécima. Progresiones geométricas.

Duodécima. Logaritmos.

Décimatercia. Tablas de logaritmos.

SEGUNDA PARTE

Décimacuarta. Números inconmensurables. Cantidades radicales. Exponentes fraccionarios. Exponentes inconmensurables. Exponentes negativos.

Décimaquinta. Binomio de Newton.

Décimasexta. Potencias de los polinomios. Raíces de los polinomios.

Décimaséptima. Generalización de la fórmula del binomio. Determinantes.

Décimaoctava. Propiedades de las determinantes.

Décimanona. Aplicación de las determinantes á la resolución de ecuaciones.

Vigésima. Series. Series de términos positivos.

Vigésimaprimera. Serie de términos positivos y negativos. Del número e.

Vigésimasegunda. Estudios de las funciones exponenciales. Logaritmos.

Vigésimatercia. Logaritmos. Resolución de ecuaciones exponenciales.

Vigésimacuarta. Cantidades imaginarias.

Vigésimaquinta. Funciones derivadas.

Vigésimasexta. Funciones derivadas.

OBSERVACIONES: Es prácticamente idéntico al de 1897 de [MINISTERIO DE MARINA, 1897]. Sólo se exponen los puntos principales, estando mucho más detallado en el texto original.

PROGRAMA DE ALGEBRA

PRIMERA PARTE

Primera papeleta

Simbolismo algebraico.—Letras y signos.—Su utilidad para facilitar la resolución de los problemas sobre cantidades.—Planteo de los problemas.—Uso de las letras como medio de generalización.—Fórmulas.—Objeto del Algebra.—Expresiones algebraicas.—Su significación.—Expresiones algebraicas enteras, fraccionarias ó irracionales.—Grado de monomios y polinomios enteros con relación á una ó á varias letras.— Polinomios homogéneros.—Significación de un polinomio.—Términos semejantes.—Ordenación.

Operaciones algebraicas.—Suma y resta de las expresiones algebraicas.

Operaciones algebraicas.—Suma y resta de las expresiones algebraicas.

Primera papeleta del programa de Álgebra de 1894

4.5.4. Año 1897

FUENTE: [MINISTERIO DE MARINA, 1897]

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

Es prácticamente idéntico al de 1894 de [MINISTERIO DE MARINA, 1894a], [MINISTERIO DE MARINA, 1894b], [MINISTERIO DE MARINA, 1894c] & [MINISTERIO DE MARINA, 1894d].

PROGRAMA DE ÁLGEBRA

PRIMERA PARTE

Primera papeleta.

Simbolismo algebraico.—Letras y signos.—Su utilidad para facilitar la resolución de los problemas sobre cantidades.—Planteo de los problemas.—Uso de las letras como medio de generalización.—Fórmulas.—Objeto del Álgebra.—Expresiones algebraicas.—Su significación.—Expresiones algebraicas enteras, fraccionarias é irracionales.—Grado de monomios y polinomios enteros con relación á una ó á varias letras.—Polinomios homogéneos.—Significación de un polinomio.—Términos semejantes.—Ordenación.

Operaciones algebraicas.—Suma y resta de las expresiones algebraicas.

Primera papeleta del programa de Álgebra de 1897