**Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas**

**Especialidad de Matemáticas**

# Trabajo Fin de Máster

# Introducción a la Integral Definida: una propuesta didáctica para 2º de Bachillerato


Autora: Noemí Otal Jáuregui

Director: Alberto Arnal Bailera


Junio de 2015

# ÍNDICE

# INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

La propuesta de enseñanza del objeto matemático del presente documento, la integral definida en el segundo curso de Bachillerato científico-tecnológico, se enmarca como Trabajo Fin de Máster del Máster de Profesorado de Secundaria de la Universidad de Zaragoza.

La realización del practicum II y III del citado máster en un periodo lectivo correspondiente a la primera mitad de la tercera evaluación de Bachillerato iba a propiciar, dada la secuenciación habitual de los contenidos del segundo curso del Bachillerato científico-tecnológico, la observación directa en el aula de parte del proceso de enseñanza-aprendizaje del tópico elegido, uno de los fundamentales del bloque de Análisis Matemático.

Esto último, unido al conocimiento de diversas investigaciones realizadas acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la integral definida preuniversitaria, que desvelan los obstáculos didácticos derivados de las propuestas habituales que se llevan a cabo en los centros y que siguen la mayoría de libros de texto, justifica la elección del citado objeto matemático para su estudio y elaboración de la propuesta didáctica en el presente trabajo.

La asistencia al centro fue posterior al comienzo de la impartición de los contenidos referentes a la parte de integración del currículo; se decidió proponer a los alumnos, como trabajo voluntario y a modo experimental, la realización de los dos problemas que justifican la razón de ser del tópico en nuestra propuesta, y una versión de uno de los problemas de la prueba escrita. En el anexo I se presenta un breve análisis de los trabajos presentados por los alumnos.

# A. DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO

El objeto matemático de esta propuesta didáctica para el trabajo fin de máster es la introducción a la integral definida desde su concepto geométrico, intuitivo e histórico y razón de ser: el cálculo de áreas.

Se tratará este objeto matemático en el marco de la asignatura de Matemáticas II dentro de los contenidos del bloque de conocimientos de Análisis Matemático del segundo curso del Bachillerato científico-tecnológico, tal y como indica la ORDEN de 1 de julio de 2008 del Departamento de Educación, Cultura y Deporte (nº 105, 17/07/2008, págs. 14078-14081) por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón (se incluyen los contenidos que fija la LOE en el Anexo II del presente trabajo). Cabe comentar, con respecto a la nueva ley LOMCE, que no son significativos los cambios en cuanto a los contenidos de esta unidad didáctica. El cambio más destacable con respecto a la antigua ley son los estándares de aprendizaje evaluables de la LOMCE; los que pueden ser relativos al aprendizaje de la integral definida se incluyen en el Anexo III.

La praxeología que pretende enseñar esta propuesta, que será descrita en el punto E, aunque no lo haga en el orden secuencial de presentación de sus elementos, coincide en uno de ellos con la propuesta habitual que se presenta desde los libros de texto: las técnicas de cálculo de áreas mediante la integral definida. En grandes rasgos, lo que diferenciará esta presentación praxeológica a la presentada habitualmente será lo siguiente:

Por un lado, la inversión en la secuenciación típica de los contenidos; se introducirá el objeto matemático de integral definida desde el cálculo de áreas sin una unidad didáctica previa sobre técnicas de cálculo de primitivas o antiderivadas. Y, por otro lado, el hecho de que la perspectiva que se dará de cada técnica o conocimiento irá ligada en todo momento a un campo de problemas que manifieste su razón de ser y justificada con la tecnología asociada pertinente. Es decir, se explicitarán las técnicas resolviendo los campos de problemas.

# B. ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO EN LA ACTUALIDAD

Este apartado se dedica a hacer un recorrido acerca de la situación de la integral definida en el ámbito escolar de hoy en día, desde la justificación habitual en la introducción del concepto hasta la secuencia praxeológica usual, incidiendo, en última instancia, en los efectos produce en el aprendizaje.

## B.1. Justificación habitual de la introducción escolar

Según se observa en la mayor parte de editoriales de libros de texto que se siguen en los centros de enseñanza de Bachillerato, como lo son Anaya (Colera y Oliveira, 2009) y Santillana (Escoredo, Gómez, Lorenzo, Machín, Pérez, del Río y Sánchez, 2009), la enseñanza tradicional de la integral definida en la escuela basa su proceso de enseñanza y aprendizaje en el siguiente orden didáctico:

En primer lugar, se estudian y practican las técnicas algebraicas para el cálculo de primitivas en una primera unidad didáctica dedicada al cálculo de primitivas.

En segundo lugar, se institucionaliza el objeto matemático en una segunda unidad didáctica consecutiva a la anterior siguiendo, en la mayor parte de los casos, el siguiente orden expositivo por parte del profesor: tras definir el área sobre una curva y las sumas superior e inferior de Riemann, se presentan el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de Barrow.

Lo que tratan de valorar, a nivel general, es si el alumnado comprende el significado de la integral definida y la relaciona con el cálculo de primitivas. Con este criterio se desea averiguar si los alumnos son capaces de aplicar el cálculo de primitivas de funciones sencillas al cálculo de áreas.

Cabe destacar la propuesta de la editorial Mc Graw Hill (Rodríguez y Soler, 2003) como editorial que opta por incluir en su programación una unidad didáctica denominada *La integral*, previa a la unidad didáctica *Cálculo de primitivas*. Se inicia hablando del área de la función sobre el eje OX justificando su relación con la derivada mediante un ejemplo, para después tratar la función primitiva, la integral definida y sus propiedades e institucionalizar las funciones integrables, el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de Barrow, y finalizar proporcionando, junto a su tecnología asociada, las técnica para el cálculo de áreas y volúmenes de revolución.

Y como curiosidad el comentar que, uno de los libros de texto consultados enmarcado en el Curso de Orientación Universitaria (COU) de la antigua Ley General de Educación, de la editorial Vicens-Vives (Álvarez, Garrido y Ruiz, 1989) apostó en su momento por una propuesta que también invierte el orden habitual actual de las unidades referentes a la integral: en primer lugar, presenta una unidad didáctica dedicada a la integral definida para después continuar con una segunda unidad referente al cálculo de primitivas.

Podemos concluir que en general, salvo algún ejemplo fuera de lo común como el de las editoriales anteriormente citadas, la introducción del objeto matemático integral definida no se justifica ante el alumno como la respuesta a un problema, sino que se presenta como una técnica de aplicación del cálculo de primitivas.

## B.2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías

La praxeología que habitualmente presentan los libros de texto en referencia al tema de la integral definida no comienza con un campo de problemas contextualizado que manifieste su razón de ser. Se presentan las técnicas, en ocasiones las tecnologías que las justifican y, por último, propuestas de, en mayor parte, ejercicios para la práctica de las técnicas.

En primer lugar se exponen algunos conceptos cuyo recuerdo se hace necesario de forma previa, como la suma de progresiones aritméticas y geométricas, el cálculo de los puntos de intersección entre dos gráficas o el valor absoluto de una función.

Comienzan las unidades didácticas referentes al objeto matemático estudiando el cálculo del área de una función bajo una curva, introduciendo para ello en algunos casos los conceptos de suma inferior y suma superior de Riemann, y definiendo la integral definida. Tras exponer sus propiedades, algunas de ellas justificadas analítica o gráficamente, se proponen ejercicios para ejercitarlas.

Una segunda parte enuncia y demuestra en algunos casos los teoremas del valor medio integral, la regla de Barrow y el teorema fundamental del cálculo integral, y propone en última instancia ejercicios de aplicación.

Culminan con la exposición de técnicas para el cálculo de áreas de recintos planos, volúmenes de cuerpos de revolución y longitudes de arco y una colección de ejercicios y problemas que se resuelven con las técnicas anteriormente impartidas.

Esta secuencia praxeológica habitual, que el currículo apoya (la LOE, en sus criterios de evaluación dice: "[…] se trata de valorar si el alumnado comprende el significado de la integral definida y la relaciona con el cálculo de primitivas. Con este criterio se desea averiguar si los alumnos son capaces de aplicar el cálculo de primitivas de funciones sencillas al cálculo de áreas […]") propicia la futura aparición de obstáculos didácticos.

## B.3. Efectos de la enseñanza habitual en el aprendizaje

El alumno aprende a derivar para después ser conocedor de las aplicaciones de las derivadas y utilizarlas para la resolución de problemas (lo que suele denominarse interpretación geométrica de la derivada); no le es extraño entonces la presentación de la integral indefinida como la antiderivada, para, tras la práctica de su cálculo, entender que la razón de ser del nuevo objeto matemático a estudiar, la integral definida, es la aplicación del cálculo de primitivas, en lugar del cálculo de áreas.

Por un lado, el estudiante entiende la nueva unidad didáctica presentada desde una secuencia que le es familiar y cómoda: le parece tanto ordenada: la integral, como operación inversa a la derivada, se estudia tras ella, como lógica, puesto que a lo largo de todo el recorrido académico se suelen relacionar objetos matemáticos consecutivos que se exponen como inversos el uno del otro (por ejemplo, las potencias y las raíces, la función exponencial y la logarítmica...etc.). Este método expositivo tan habitual en matemáticas tiene una doble lectura que puede llevar al alumnado a obstáculos epistemológicos con posibles consecuencias graves: la ventaja de conocer una relación que liga dos conceptos, aunque sea importante, se contrapone con el peligro de asociar en todo momento objetos matemáticos "inversos los unos de los otros"; esto puede crearles una concepción errónea que les impida el estudio independiente de tópicos matemáticos cuyo aprendizaje “implica necesariamente un rechazo parcial de las formas previas de conocimiento, lo que no es fácil para los estudiantes” (Artigue, 2003).

El tipo de aprendizaje conductivo de exposición de técnicas y posterior aplicación de las mismas para la resolución de problemas, frente al aprendizaje constructivo que expondremos en nuestra propuesta, hace invisible a los estudiantes la verdadera justificación del objeto integral definida: el cálculo de áreas. La concepción del alumno en cuanto a este nuevo objeto de saber constituye un obstáculo didáctico, en cuanto a que es producido por la propia enseñanza.

Muchas investigaciones han hecho eco de las dificultades, errores generalizados y, en general, obstáculos que la trasposición institucional de este objeto matemático ha producido en los estudiantes. En particular, estudios que manifiestan el predominio del pensamiento algebraico y algorítmico sobre el gráfico y conceptual. Citaremos algunas de ellas a modo de una pequeña panorámica a nivel elemental en la enseñanza habitual escolar.

Aldana (2011) comenta en sus investigaciones las dificultades que los estudiantes presentan, y que manifiestan mediante la utilización mecánica, algorítmica y memorística del concepto de integral definida y la falta de conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico. El autor resume los problemas derivados de este tipo de aprendizaje del concepto de integral definida:

> “Generalmente los estudiantes identifican “Integral” con “primitiva”. La integral para ellos no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco un aspecto geométrico. Es por tanto, un proceso puramente algebraico, más o menos complicado, de modo que un estudiante puede conocer diversas técnicas de integración e incluso saberlas aplicar, y al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlas al cálculo de un área o ignorar por completo qué son las sumas de Riemann. La primera imagen que evocan muchos estudiantes sobre Integral es la de hallar una función de la que se conoce la derivada”.

Los estudiantes generalmente también relacionan la integral definida con la regla de Barrow, incluso cuando esta no puede aplicarse. Es el caso citado por Llorens y Santonja (1997) de los resultados encontrados por Mundy (1984), donde un porcentaje alto de estudiantes que habían superado el primer año de Cálculo en sus estudios universitarios no supo responder a la pregunta: ¿Por qué $\int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = [-x^{-1}]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$, es incorrecto? Esto pone en evidencia que el estudiante no sólo desconoce las condiciones para poder aplicar la regla de Barrow, sino que además muestra una desconexión entre la definición de integral definida y la imagen particular que tiene de este concepto matemático.

Otro problema derivado de las concepciones erróneas de los alumnos es, según Milevicich (2008), la falta de asociación entre la integral definida y el análisis de convergencia, que se pone de manifiesto cuando, al estudiar las integrales impropias, a la mayor parte de los estudiantes le sorprende que una integral pueda ser divergente.

Muchos estudiantes no distinguen entre la integral definida como área o como cálculo algebraico, porque no establecen una conexión entre la representación gráfica y la representación algebraica de una función y no son capaces de calcular el área bajo una curva a partir de su gráfica. Utilizan entonces el contexto algebraico formal en lugar del geométrico, y solo reconocen el área como integral definida cuando se enfrentan a un ejercicio o problema donde el propio enunciado lo clarifica, lo que supone un obstáculo didáctico generalizado.

Azcárate, Casadevall, Casellas y Bosch (1996) se remiten a Orton (1980), cuya investigación revela un alto nivel en la manipulación de los programas algebraicos para el cálculo de primitivas, pero carencias en la conceptualización de los procesos de límite asociados al concepto de integral: “muy pocos alumnos fueron capaces de expresar correctamente que el valor exacto del área bajo una parte de una parábola se podía obtener como el límite de las sumas de franjas rectangulares […] muchos estudiantes demuestran saber lo que tienen que hacer, pero cuando se les pregunta acerca de su método no saben realmente por qué lo hacen de esta manera”.

# C. CONOCIMIENTOS PREVIOS

## C.1. Relacionados con la enseñanza anterior

Para que los alumnos puedan afrontar con éxito el aprendizaje de la integral definida es necesario que tengan adquiridos los siguientes conocimientos previos:

- ✓ Conocer las técnicas de cálculo de área de las principales superficies planas.
- ✓ Conocer las propiedades de las funciones reales de variable real.
- ✓ Conocer el concepto de límite de una función y continuidad, y las técnicas de cálculo de límites de funciones elementales.
- ✓ Conocer el concepto de sucesión, límite y convergencia de una sucesión.
- ✓ Conocer el concepto de derivada de una función en un punto y algunas técnicas de derivación de funciones elementales.

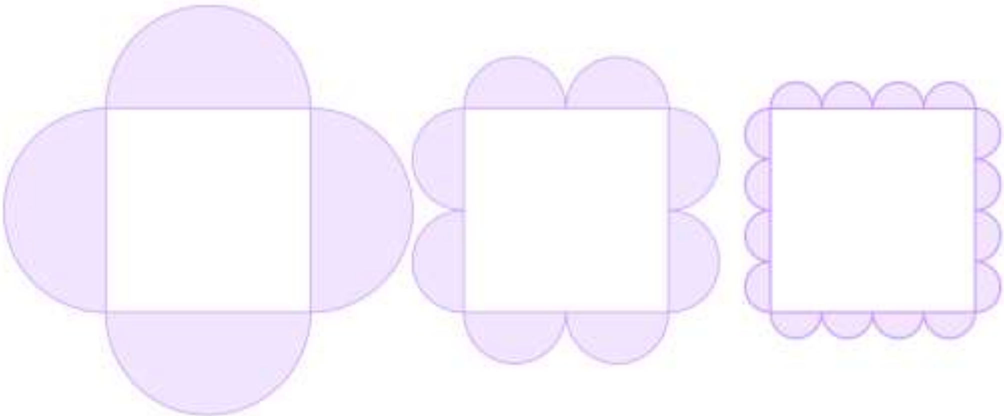
La enseñanza anterior al nivel de 2º de Bachillerato ha propiciado que el alumno tenga adquiridos la mayor parte de dichos conocimientos previos. De hecho, en el currículo del mismo curso, las unidades previas a la integral definida, unidad didáctica con la que culmina el bloque de contenidos de análisis matemático, se dedican al estudio de funciones, límites de funciones, continuidad y derivabilidad.

Los alumnos han estudiado en todos los cursos de la ESO el cálculo de áreas de figuras planas. El objeto matemático sucesiones se estudia en el bloque de contenidos de Álgebra del tercer curso de la ESO; los contenidos incluyen análisis de sucesiones numéricas, progresiones aritméticas y geométricas, sucesiones recurrentes y las progresiones como sucesiones recurrentes (BOA, orden de 9 de mayo de 2007), por lo que serán escasos los conocimientos adquiridos acerca de este tópico.

Se dará por supuesto que los alumnos poseen los conocimientos suficientes referentes a las unidades didácticas estudiadas con inmediata anterioridad a la integración (propiedades, límites, continuidad y derivabilidad de funciones reales de variable real). En el caso del cálculo de áreas de figuras planas, puesto que es un contenido perteneciente a un nivel muy inferior, no se considera necesaria la práctica con las técnicas, y nos limitaremos a recordarles siempre que sea necesario las fórmulas para su cálculo. Trataremos de reforzar entonces los conocimientos acerca de sucesiones mediante la realización de la siguiente prueba inicial diagnóstica:

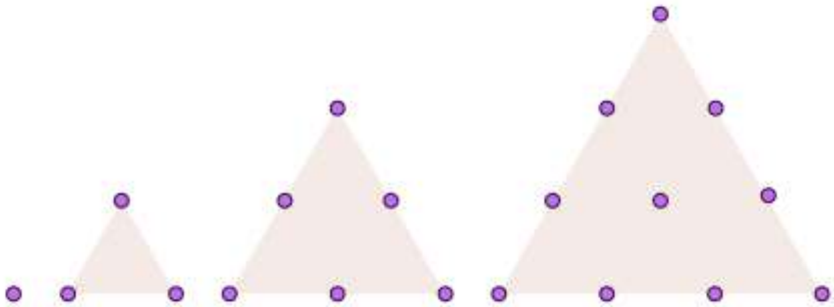
## C.2. PRUEBA INICIAL DIAGNÓSTICA

*1) Observa las siguientes figuras:*



*Vamos bordeando un cuadrado con semicircunferencias y observamos que aparecen dos sucesiones: la suma de las áreas de los semicírculos sombreados en color y la suma de los perímetros de las semicircunferencias. Da el término general de dichas sucesiones y estudia su monotonía y su convergencia.*

*2) La cantidad de puntos en estas figuras determina los llamados números triangulares:*



*a) Calcula sus primeros términos, y su término general.*

*b) ¿Qué triángulo contiene 231 puntos? [Ayuda:* $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$*]*

*c) ¿Es una sucesión convergente o divergente? Demuéstralo.*

Será realizada por los alumnos, que se agruparán por parejas, en la primera mitad de la primera sesión de la secuencia didáctica. Nos proporcionará una información que utilizaremos para solventar, en la segunda mitad de dicha sesión, las posibles concepciones erróneas y practicar técnicas asociadas al estudio de sucesiones, que el currículo deja un par de cursos atrás y probablemente será necesario recordar.

El objetivo también será evitar que, cuando les presentemos el nuevo objeto matemático a modo de problemas que justifiquen su razón de ser, no se distraigan de la cuestión que les atañe. Las soluciones de la prueba inicial diagnóstica se presentan en el Anexo IV del trabajo.

Solventaremos entonces, en la segunda parte de esta sesión dedicada a la evaluación inicial de los contenidos de sucesiones, todas las carencias que se observen en cuanto a los conocimientos necesarios para el estudio de la integral definida, como pueden ser los conceptos de sucesión, límite de una sucesión, suma de los infinitos términos o convergencia y divergencia de una sucesión.

# D. RAZÓN DE SER DE LA INTEGRAL DEFINIDA

## D.1. Razón de ser histórica

El origen histórico de lo que hoy conocemos como cálculo integral surge a partir del problema geométrico del cálculo de áreas de superficies planas, luego la razón de ser que tendremos en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático coincide con la razón de ser histórica que le dio origen.

Destacaremos a continuación algunas de las observaciones más relevantes acerca de la génesis del concepto, cuya razón de ser histórica es, paradójicamente, mucho más antigua que la del concepto de derivada.

Al concepto de área le precede la comparación de áreas; el papiro Rhind, copiado por Ahmes aproximadamente en 1650 a.C., pone en evidencia un comienzo de teoría de congruencia (ver anexo V).

Eudoxo de Cnido (408-355aC), discípulo de Platón y considerado padre de la Astronomía, dio la clave para la comparación de figuras curvilíneas y rectilíneas: inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea y multiplicar el número de caras o lados indefinidamente permitía la aproximación al área de la figura rectilínea.

El cálculo de área de un segmento parabólico condujo a Arquímedes (287 a.C.) al desarrollo del que se denominó como método exhaustivo, consistente en aproximar sucesivamente por exceso y por defecto la superficie cuya área se desea determinar mediante regiones rectangulares.

Antes del siglo XVIII encontramos numerosos ejemplos de cálculos de áreas bajo curvas realizados con independencia del trazado de tangentes, que puede entenderse como el primer concepto de integral definida. Galileo y Newton estudiaron los sistemas de transformación de variables en el estado inicial con valores en cualquier otro instante: significó el paso de la estática a la dinámica, uno de los descubrimientos más significativos de la evolución de la matemática como justificación de los fenómenos físicos.

Por otra parte, Pierre Fermat (1601-1665) estudió las curvas geométricas desde la siguiente pregunta: "¿cómo se puede obtener la cuadratura de diferentes familias de curvas?" Dicho de otra manera, se preguntó como calcular el área bajo una curva. Así, calculó el área bajo una curva en un intervalo empleando un procedimiento de troceado del mismo en forma de progresión geométrica.

A partir de la obra de Euler (1707-1783) aparecen las funciones como objeto matemático de estudio en lugar de las curvas, lo que, en palabras de Turégano (1998), "permitió la gradual aritmetización del análisis y su consecuente separación de la geometría". Desde ese momento, y hasta principios del siglo XIX, el problema de la integración era el de determinar una función primitiva F(x) que tuviera como derivada f(x); así pues, el cálculo integral fue entendido entonces como el inverso del diferencial.

El cambio conceptual de aceptación de la definición de función real de variable real como correspondencia entre números reales se produce en el siglo XIX e, inevitablemente, surge el concepto de integral. Cauchy y Riemann exponen su definición como "límite de una suma" en un contexto de fundamentación teórica, de la que prescinden para el estudio de sus aplicaciones.

La razón de ser del estudio de Cauchy Riemann no es la definición de área. Es Peano, en 1887, el que da la primera definición formal de área retomando la idea de Eudoxo y el método de exhaución. Después, Lebesgue, a comienzos del siglo XX, haciendo uso de las indicaciones de Borel sobre la definición de medida de Peano-Jordan y dando al método intuitivo de Cauchy la fundamentación lógica necesaria, expuso su teoría de la medida, base de la actual teoría de integración.

También justifican en su texto la lógica de la introducción de la integral definida que propondremos en nuestra propuesta Azcárate et ál. (1996), por su analogía con su razón de ser histórica: "Se puede considerar que el cálculo integral se inicia cuando comienza a utilizarse el método de exhaución que permitió a Arquímedes llegar a calcular el área bajo la gráfica de la función $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = b$." Todavía van más allá en su propuesta de introducción de la integral definida: "cuando se ha hecho un descubrimiento antes que otro, es de sentido común considerarlo más sencillo; el método de exhaución que le permitió a Arquímedes hallar integrales definidas precedió en más de 2000 años a los métodos de derivación"; sugiriendo la idea de estudiar la integración de forma previa a la derivación.

## D.2. Razón de ser en nuestra propuesta

Siguiendo la idea de Azcárate et ál. (1996), nuestra propuesta se basa en introducir el concepto de integral definida de forma independiente al concepto de derivada para evitar que los alumnos adquieran una concepción obstáculo de la integral como la antiderivada y así, al estudiar el teorema fundamental del cálculo integral, que antes de institucionalizarlo haremos surgir en el campo de problemas, lo consideren como "una relación inesperada y útil entre las estructuras matemáticas de derivación e integración, aparentemente independientes" (Azcárate et ál.,1996).

Introduciremos la integral definida en el ámbito escolar como la continuación de la idea de área, ya conocida por los alumnos desde los primeros años de educación secundaria, y extenderemos la medida de áreas de figuras conocidas a figuras curvilíneas representables con gráficas de una función en un intervalo, momento en el que surgirá el concepto de suma de Riemann, luego de integral.

## D.3. Problemas que constituyen la razón de ser

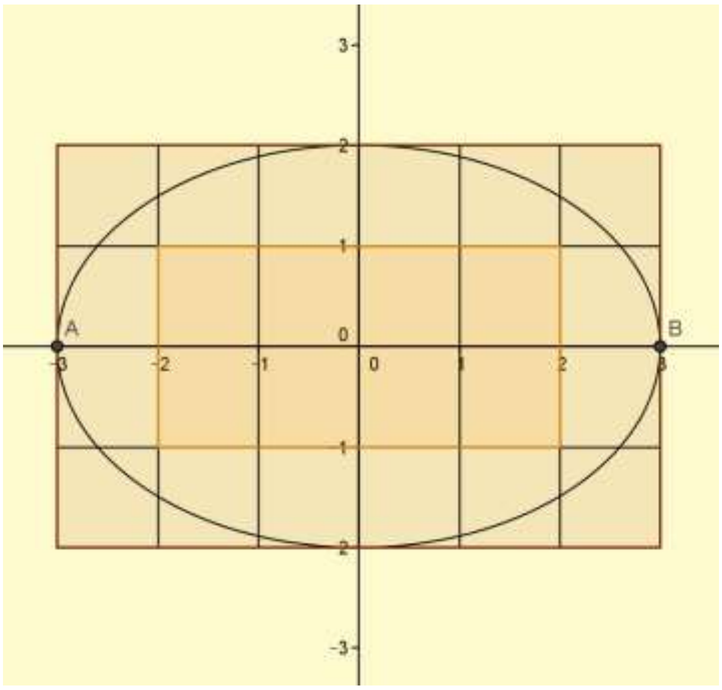
Separaremos nuestra propuesta en dos partes diferenciadas de bloques de problemas que manifestarán la razón de ser de la integral definida vista desde dos perspectivas diferentes, pero relacionadas: el cálculo de áreas y su relación con la derivada. Así, los problemas constituyentes de la razón de ser del objeto matemático a enseñar serán dos.

Con el primer problema introduciremos al alumno en el cálculo aproximado de áreas a través del método exhaustivo de Arquímedes y Eudoxo, haciendo un guiño a la génesis histórica inicial del objeto y pretendiendo la aparición del concepto de límite de una sucesión.

**PROBLEMA RS1**:

*Nuestro objetivo es el cálculo del área de una alfombra, que hemos representado centrada en unos ejes cartesianos tal y como se ve en la figura.*

*a) Calcula una cota superior y una cota inferior de su área interior (es decir, aproxima por exceso y por defecto el área interior de la figura, ayudándote con la cuadrícula).*




*b) ¿Podrías calcular una aproximación mejor de dicha área? ¿Cómo?*

*c) ¿Sería posible llegar a obtener de forma exacta el área interior de la figura, o de cualquier otra figura cerrada? ¿De qué forma?*

*d) Se trata de una elipse de ecuación* $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ *. Calcula su área exacta.*

*(Ayuda: Área de la elipse=* $\pi ab$ *;* $a$ *y* $b$ *son los semiejes mayor y menor de la elipse; en este caso,* $a = 3$ *y* $b = 2$*).*

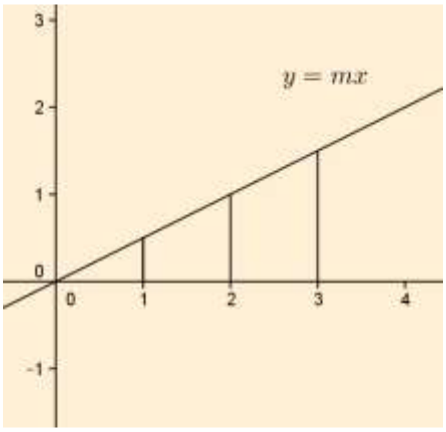
*e) Calcula ahora el error cometido en las aproximaciones anteriores.*

*¿Qué observas?*

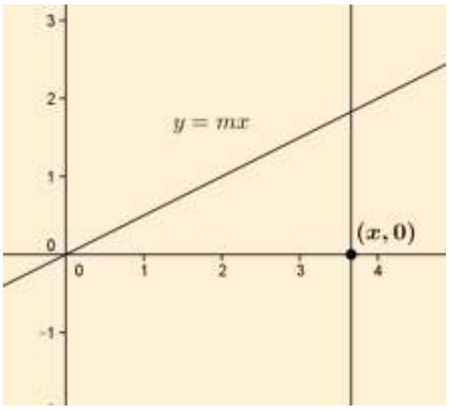
En el segundo problema introductorio, que se realizará en el comienzo del segundo campo de problemas; es decir, de forma previa a los contenidos referentes al teorema fundamental del cálculo y a la regla de Barrow, pretendemos que el alumno sea capaz de relacionar una función con su primitiva, mediante el cálculo de áreas. En esta ocasión aparecerá de forma espontánea el teorema fundamental del cálculo integral: es decir, la idea intuitiva de la relación directa entre el nuevo objeto de estudio con otro tópico matemático conocido para el alumno: la derivada.

**PROBLEMA RS2:**

*a) Calcula el área que interior de cada uno de los tres triángulos, formados entre la gráfica de la función* $y = mx$*, el eje* $OX$*, y las rectas* $x = 1, x = 2$ *y* $x = 3$*:*




*b) Calcula ahora la expresión del área interior al triángulo formado entre la gráfica de la función* $f(x) = mx$ *, el eje* $OX$ *y una recta cualquiera perpendicular al eje* $OX$*, que podemos suponer pasa por el punto* $(x, 0)$*.*




*c) ¿Observas alguna relación entre la expresión del área calculada en el apartado anterior y la de la función* $f(x) = mx$ *?*

## D.4. Metodología en su implementación en el aula

La metodología a seguir en su implementación en el aula será la de proponer a los alumnos los problemas que constituyen la razón de ser para que los realicen durante la clase en parejas, y puedan ser comentados por todos durante la misma.

El problema PRS1 será el previo al primer campo de problemas: el cálculo de áreas, y el PRS2 se realizará justo antes del comienzo del segundo campo de problemas: la conexión entre integral y derivada.

Les ayudaremos en el estudio y búsqueda de soluciones de ambos problemas, proporcionándoles pautas para que los desarrollen de la forma prevista, pero procuraremos en todo momento que la aparición de los conceptos fundamentales que justifican la introducción de la integral definida sea, en la medida de lo posible, fruto de su descubrimiento.

Ambos problemas se encuentran resueltos en el Anexo VI.

# E. PRAXEOLOGÍA Y SU SECUENCIACIÓN: CAMPOS DE PROBLEMAS, TÉCNICAS Y TECNOLOGÍAS

Los campos de problemas que se presentan a continuación se corresponden con las perspectivas de la integral definida para el cálculo de áreas y la relación entre la integración y la derivación; dichos campos de problemas tratarán de forma semitrasversal ambas perspectivas, incluyendo en muchas ocasiones las tecnologías subyacentes, y serán el cuerpo principal de la praxeología de la propuesta, a modo de justificación de las técnicas sustentadas con las tecnologías pertinentes en cada momento de institucionalización de resultados.

La no transversalidad completa se justifica con la conveniencia del orden en la introducción de los contenidos en dos bloques: primero, el adaptado al concepto de integral definida desde el cálculo de áreas (definición de suma de Riemann, integral definida y propiedades de la misma) y segundo, el que relaciona la integración con la derivación (teorema fundamental del cálculo integral y regla de Barrow). La finalidad es que el alumno adquiera un aprendizaje constructivo multidisciplinario, matemáticamente hablando. Es decir, que sea capaz de asumir el objeto matemático de forma no separada desde las perspectivas aritmética, geométrica y algebraica.

El recorrido por los distintos tipos de funciones servirá de guía en el primer campo de problemas, y los ejercicios que se van a presentar tendrán como objetivos el de justificar la tecnología de algunas técnicas menos conceptuales, como las propiedades de la integral definida, y el de practicar las técnicas presentadas anteriormente; en el caso de alguna actividad propuesta de mayor dificultad, la finalidad será la de motivar al alumno e iniciarle, de alguna manera, en la abstracción y el rigor matemático correspondiente a un nivel superior.

Las soluciones de los problemas propuestos más representativos se encuentran en el anexo VII del presente trabajo, y el esquema de la secuencia didáctica completa a modo de cronograma con los contenidos, técnicas y actividades trabajadas en cada sesión, en el apartado G.

## E.1.PRIMER CAMPO DE PROBLEMAS:CÁLCULO DE ÁREAS

El comienzo del primer campo de problemas se dedicará a la observación de la relación entre el cálculo de áreas y el de magnitudes determinadas previo a la aparición de la idea de área como límite de sumas infinitas superiores/inferiores de áreas de rectángulos (ya implícita en los problemas de razón de ser iniciales), que ocurrirá en el momento en el que los estudiantes no dispongan de los conocimientos geométricos suficientes para el cálculo de áreas.

Trabajaremos en primer lugar con las funciones constantes, lineales y afines, con el objetivo principal de relacionar magnitudes con áreas de figuras geométricas, cuyo cálculo es conocido.

### Problema CP1.1. FUNCIÓN CONSTANTE

*Un móvil circula a una velocidad constante de 4 $km/h$.*

a) *Calcula la distancia que recorre en 8 horas.*
b) *Representa la gráfica de la función velocidad $v(t)$.*
c) *Halla el área limitada entre la gráfica de la función $v(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 8$. ¿Qué es lo que observas con respecto a la relación entre el área calculada y el resultado del apartado a)?*
d) *Supón ahora que pasadas 3 horas el móvil aumenta su velocidad a 11 $km/h$ durante las 5 horas siguientes. Representa la gráfica de la función y calcula, de dos formas, su desplazamiento.*
e) *¿Cuál es el espacio recorrido por el móvil en el intervalo $[2,4]$? Calcúlalo de dos formas diferentes, observando los resultados obtenidos anteriormente.*
f) *¿Qué representa el área bajo la función $v(t)$ de la figura del apartado b)? ¿En qué unidades de medida se expresa?*
g) *Calcula el desplazamiento del móvil en un tiempo t.*

### Problema CP1.2. FUNCIÓN CONSTANTE

*Un grifo abierto suministra agua de forma constante a una razón de 12 litros por minuto.*

*a) ¿Qué volumen de agua podemos llenar, si mantenemos el grifo abierto un cuarto de hora?*

*b) Representa la gráfica de la función volumen $V(t) = 12$*

*c) Obtén ahora el volumen de agua que sale por el grifo cuando lo mantenemos abierto un cuarto de hora, calculando el área correspondiente.*

Estos dos primeros problemas tienen la finalidad de proporcionar al alumno una primera toma de contacto con la relación entre el área bajo la gráfica de una función, que representa una magnitud derivada, y su magnitud fundamental: velocidad y distancia recorrida en el caso del problema CP1.1 y volumen en función de tiempo y volumen en el caso del problema CP1.2.

Así pues convendremos con ellos en institucionalizar esta **técnica**, cuya **tecnología** está implícita en el procedimiento geométrico que se ha llevado a cabo:

El área bajo la gráfica de una función constante $\mathbf{f(x) = k}$ en un intervalo $[a, b]$, $\mathbf{A = k\,(b - a)}$, proporciona la magnitud fundamental de la magnitud derivada representada por la función $f(x)$ ,entre los valores $x = a$ y $x = b$**.**

Continuaremos el recorrido a lo largo de los siguientes tipos de funciones, con las funciones lineales y afines.

En el siguiente problema en particular trabajaremos con una función lineal, cuya expresión será necesario obtener a partir de una función constante.

## Problema CP1.3. FUNCIÓN LINEAL

*Se lanza una piedra verticalmente desde una torre cuya altura desconocemos, pero disponemos de un cronómetro que nos permite conocer el tiempo que tarda en llegar al suelo: 6 segundos. Convendremos en aproximar la aceleración de la gravedad a* $a = 10\, m/s^2$.

*a) Representa una gráfica que represente la aceleración en función del tiempo. ¿Qué representa el área bajo la gráfica?*

*b) Representa una gráfica que represente la velocidad en función del tiempo.*

*c) Calcula la altura de la torre.*

*d) ¿Qué magnitud representa el área encerrada por la función* $v(t)$ *en el intervalo [0,6] en este problema?*

Para el desarrollo del problema supondremos que los alumnos conocen las fórmulas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. En caso contrario, les animaremos a que se enfrenten al apartado c) recordando la técnica aprendida en los problemas anteriores, y tengan el recurso de calcular el área del triángulo correspondiente.

Convendremos de nuevo con los alumnos la misma **técnica** que institucionalizamos tras los problemas CP1.1 y CP1.2 para las funciones constantes, esta vez para las funciones lineales, y de nuevo justificada con su **tecnología** geométrica en la resolución del problema CP1.3:

El área del triángulo formado bajo la gráfica de una función lineal $\mathbf{f(x) = mx}$ en un intervalo $[a, b]$, $\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{(b-a)\cdot|mb-ma|}}{\mathbf{2}}$, proporciona la magnitud fundamental de la magnitud derivada representada por la función $f(x)$ , entre los valores $x = a$ y $x = b$**.**

### Problema CP1.4. FUNCIÓN AFÍN

*Para la limpieza de una piscina de 18.5* $m^3$ *de capacidad, el sistema de vaciado expulsa un caudal de agua de* $f(t) = 3t + 5\ m^3/h$.

*a) Representa la gráfica del caudal en función del tiempo.*

*b) ¿Qué magnitud representa el área encerrada por la función en el intervalo* $[0, 4{,}5]$*?*

*c) ¿Qué volumen de agua se ha expulsado entre la primera y la tercera horas después de haber activado el sistema de vaciado?*

La intención de este problema anterior es que adquieran la técnica para convenir el cálculo de la magnitud que representa el área del trapecio por debajo de la gráfica de una función afín. No obstante, procuraremos el no mecanicismo del procedimiento seguido en la resolución de los anteriores problemas:

Tal y como recomienda Hernandez C. (2007) en su *Propuesta didáctica para identificar cuándo la integral definida es aplicable para resolver un problema*, "es recomendable que se presenten a los estudiantes tanto problemas que puedan ser modelados mediante una integral definida, como otros que no puedan serlo porque incumplan alguna de las propiedades necesarias y suficientes. Para que una persona pueda analizar si en un problema se cumplen o no cada una de las propiedades que componen la caracterización anterior, es necesario que comprenda el contexto del problema desde el punto de vista extramatemático". Así pues, antes de convenir la correspondiente institucionalización, propondremos el siguiente problema:

### Problema CP1.5 FUNCIÓN AFÍN

*En una fila hay 10 personas ordenadas de acuerdo a sus estaturas de menor a mayor. Cada persona es 2 centímetros más alta que la anterior. Las estaturas en centímetros de estas personas se pueden expresar mediante la función* $f(x) = 164 + 2x$*, donde* $x$ *representa el orden en la fila de cada persona (la primera persona mide* $164$ *cm.)*

*a) Representa la función* $f(x)$

*b) ¿Cuál es la suma de las estaturas de las 10 personas?*

*c) ¿Qué sentido tiene, en el contexto del problema, el área bajo la gráfica de la función, entre los valores* $x = 0$ *y* $x = 10$*?*

Quedará de manifiesto en la resolución de este problema el tipo de relación que ha de guardar la función y la magnitud que representa su área bajo un intervalo. En este caso, los alumnos habrán de llegar a la conclusión de que el área del trapecio formado por la función $f(x)$, el eje x y dos valores de $x$, que representa el orden en la fila de cada persona, no representa a ninguna magnitud significativa en el contexto del problema.

Ahora sí, procederemos a la institucionalización de la **técnica** aprendida, que de nuevo se ha sustentado en una **tecnología** geométrica:

El área del trapecio de bases $f(a) = \mathrm{ma} + \mathrm{n}$, $f(b) = \mathrm{mb} + \mathrm{n}$ y altura $h = b - a$ formado bajo la gráfica de una función afín $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{mx} + \boldsymbol{n}$ en un intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$:

$\mathbf{A} = \frac{(\boldsymbol{ma}+\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{mb}+\boldsymbol{n})}{\mathbf{2}} \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$, proporciona la magnitud fundamental de la magnitud derivada representada por la función $\mathrm{f(x)}$ , entre los valores $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ y $\mathrm{x} = \mathrm{b}$**.**

La forma de exposición convenida de las técnicas expuestas hasta este momento será más comentada que presentada como una fórmula, con el fin de obtener nuestro propósito: que se percaten de que la procedencia de la mayoría de las técnicas están sustentadas a través de una tecnología; en este caso, de tipo geométrico.

Los conocimientos geométricos de los alumnos no serán suficientes para abordar la siguiente actividad así que, recordando el procedimiento seguido en el problema de razón de ser RS1, procederemos a calcular una aproximación del área buscada.

### Problema CP1.6. FUNCIÓN CUADRÁTICA

*Un transbordador espacial tarda 9 minutos en pasar de $0km/min$ a alcanzar una velocidad orbital aproximada de $648km/min$, siendo en ese trayecto la velocidad en $km/min$ dada por la función $f(t) = 8t^2$. ¿Sabríamos calcular qué espacio habrá recorrido el transbordador en los 4 primeros minutos?*

Tras abrir un debate acerca de la magnitud que queremos calcular, y concluir que se trata del área bajo la gráfica de la función $f(t) = 8t^2$ entre $t = 0$ y $t = 4$; teniendo en cuenta que ya no disponemos de recursos geométricos para el cálculo de dicha área, propondremos enfrentarnos al problema calculando una aproximación de la misma:

*a) Representa la gráfica de la función* $f(t) = 8t^2$.

*b) Subdivide el intervalo* $[0, 4]$ *en 4 subintervalos de longitud 1, y calcula el valor de la función en cada uno de los extremos de cada subintervalo (que serán los valores máximo y mínimo de cada subintervalo, dado que la función* $f(t) = 8t^2$ *es creciente).*

*c) Dibuja dos tipos de rectángulos para cada uno de los subintervalos; los que tienen por base la amplitud de cada subintervalo y por altura el mínimo y el máximo de la función en el subintervalo. (convendremos en llamarlos rectángulos inferiores y rectángulos superiores).*

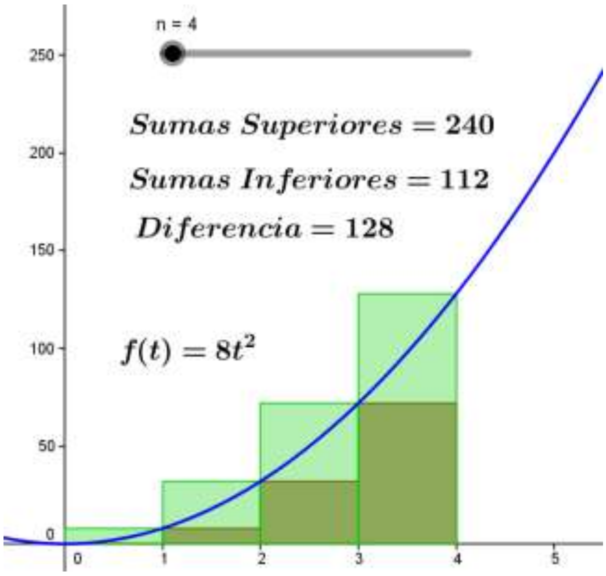
*d) Calcula la suma de las áreas de los rectángulos superiores y la suma de las áreas de los rectángulos inferiores (que podremos llamar, para economizar notación,* $S_{sup}$ *y* $S_{inf}$*, respectivamente).*

e) *El área bajo la gráfica de la función en el intervalo* $[0, 4]$ *será un número comprendido entre ambas sumas. Calcula dicha aproximación.*

Continuaremos realizando aproximaciones al resultado usando el software dinámico Geogebra.

## Práctica con Geogebra

Proporcionaremos un guion a los alumnos que les sirva de guía para la construcción de su propio applet (ver Anexo IX) que les permita la representación del problema:




*f) Considera ahora 4, 8, 16, 32, 48, 64 y 80 subdivisiones; rellena la siguiente tabla y analiza los resultados.*

| $n$ | $S_{sup}$ | $S_{inf}$ | $S_{sup} - S_{inf}$ |
|---|---|---|---|
| *4* | | | |
| *8* | | | |
| *16* | | | |
| *32* | | | |
| *48* | | | |
| *64* | | | |
| *80* | | | |

*g) Considera una subdivisión en $4n$ subintervalos de longitud $h = \frac{1}{n}$ y calcula el área de los rectángulos superiores e inferiores en función de $n$.*

*[Ayuda: $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ]*

*h) Toma límites cuando $n \to +\infty$ y comprueba que las sumas superiores e inferiores convergen al mismo valor, como hemos comprobado con el software Geogebra, el área bajo la curva:*

Tras estos apartados, previo convenio con los alumnos, podemos adelantar la siguiente **técnica** que se ha justificado en el desarrollo de los apartados del problema:

$$\lim_{n\to+\infty} S_{inf}(n) = \lim_{n\to+\infty} S_{sup}(n) = \text{Área bajo la gráfica de una función positiva}$$

Continuamos trabajando con el software Geogebra:

*i) Introduce ahora con el teclado orden: Integral[v(t), x(A), x(B)]. Queda coloreada el área a calcular bajo la función y entre los puntos elegidos. Como podemos apreciar, el valor de esta área, que nos aporta Geogebra, coincide con el calculado en el apartado anterior.*

*j) Calcula el área bajo la función $f(t) = 8t^2$ entre otros puntos distintos: puedes ayudarte rellenando la siguiente tabla; intenta hallar al final que relaciona el valor del área con los puntos A y B de coordenadas $(a, 0)$ y $(b, 0)$; $a < b$.*

| A $(a, 0)$ | B $(b, 0)$ | Área |
|---|---|---|
| 0 | 5 | |
| 0 | 6 | |
| 0 | 3 | |
| 1 | 5 | |
| 2 | 5 | |
| 2 | 4 | |
| a | b | |

Ayudaremos a los alumnos para que lleguen a la expresión general del área bajo la gráfica de la función $f(t)$ en un intervalo $[a, b]$, momento en el cual les incitaremos al siguiente debate: la definición anterior está clara, pero ¿es sencillo el cálculo del área usando esta definición? ¿Y si la expresión de la función dificulta el cálculo de los límites pertinentes? Seguiremos practicando la **técnica** de cálculo de áreas mediante límites de sumas superiores e inferiores de particiones.

## Problema CP1.7. FUNCIÓN EXPONENCIAL

*Un tipo de bacterias se reproduce siguiendo un crecimiento exponencial de $f(t)$ =16$e^{2t}$, donde $f(t)$ indica el número de bacterias que existe transcurrido un tiempo $t$ (horas). Si la población inicial es de 3000 bacterias, ¿sabrías calcular cuantas bacterias habrá cuando hayan transcurrido 5h?*

*a) Representa la función $f(t)$ =16$e^{2t}$ en una gráfica.*

*b) Subdivide el intervalo [0,5] en 5 subintervalos de longitud 1 y calcula el valor de la función $f(t)$ =16$e^{2t}$ en el punto medio de cada subintervalo.*

*c) Dibuja los rectángulos que tienen como base la amplitud de cada subintervalo y por altura el valor de la función en el punto medio de cada subintervalo.*

*d) Calcula la suma de las áreas de los rectángulos medios.*

*e) Subdivide ahora el intervalo [0, 5] en 10 subintervalos de longitud $\frac{1}{2}$ y vuelve a realizar los apartados c) y d).*

*f) Halla la expresión de la suma de rectángulos medios si subdividimos el intervalo [0,5] en 5n subintervalos de longitud 1/n.*

*[Ayuda: la suma de los infinitos términos de una sucesión geométrica de primer término $a_0$ y razón $r$ es $\frac{r^{a_0}}{1-r}$ ]*

*g) Halla el límite cuando $n \to +\infty$ de la suma hallada en el apartado anterior. Interpreta el valor obtenido atendiendo al contexto del problema.*

Podemos usar de nuevo junto a los alumnos el geogebra para comprobar como el resultado coincide con el valor obtenido con el software. Así, propiciaremos que sean capaces de concluir, igual que en el ejercicio anterior, que el número de aumento de bacterias en un intervalo de tiempo $[a, b]$, es decir, el área bajo la gráfica de la función $f(t)$ =16$e^{2t}$ en ese intervalo.

Continuaremos el mismo problema, con la intención de que surjan otras necesidades, como el cálculo del área entre dos funciones:

*Unos científicos descubren un método para contraatacar a la plaga de bacterias, consiguiendo de manera eficaz su decrecimiento, que viene dado por la función* $g(t) = 8e^{2t}$*, que indica el número de bacterias eliminadas en* $t$ *horas.*
*Si hubiesen puesto en marcha el método de exterminación en el momento en el que estimamos que comienza la existencia de la población de bacterias (es decir, cuando* $t = 0$*), ¿sabrías calcular el número de bacterias que habrá pasadas* 3 *horas?*

Esta vez dejaremos un tiempo para que los alumnos piensen como abordar el problema, esperando que construyan su propio esquema metodológico a seguir, que pudiera ser el siguiente:

*a) Representamos las funciones* $f(t) = 16e^{2t}$ $g(t) = 8e^{2t}$ *en una misma gráfica.*

*b) Nos planteamos qué representa el área entre las gráficas de ambas funciones, el eje* $OX$ *y las rectas* $t = 0$ *y* $t = 3$*, en el contexto del problema.*

*c) Pensamos un procedimiento a seguir para la resolución del problema.*

Mediante la construcción del método, que esta vez será por parte de los alumnos y con ayuda pero sin indicaciones del profesor, se habrá justificado una de las **técnicas** que formalizaremos más delante acerca de la linealidad de la integral o área entre las gráficas de dos funciones positivas, y dos valores de abscisas.

La ventaja de este tipo de introducción es que podemos plantearles a los alumnos cuestiones matemáticas ligadas al concepto, aunque no sean acerca de contenidos pertinentes del curso, como es el caso de la integral impropia. Abriremos un pequeño debate en clase en torno a la pregunta:

*¿Creéis que los científicos triunfarán con su método de reducción de la población?*

Continuaremos institucionalizando los nuevos conceptos y formalizando las **técnicas**, que han sido justificadas con sus **tecnologías**, tanto geométricas como analíticas, que han aparecido:

Sea una función $\mathbf{f(x)}$ **continua y no negativa en un intervalo** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

**Procedimiento para calcular el área por debajo de la gráfica de $\mathbf{f(x)}$, el eje horizontal OX y las rectas verticales $\mathbf{x = a}$ y $\mathbf{x = b}$**:

→ Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual amplitud $h = \frac{b-a}{n}$ : $[x_{i-1}, x_i]$ con $i = 1, \dots, n$. Queda el intervalo sbdividido: $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$

→ En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tomamos un punto $c_i$ y calculamos la suma de las áreas de los rectángulos de base h y altura $f(c_i)$.

Se llama **Suma de Riemann:** $\boldsymbol{S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \frac{b-a}{n}}$

Si tomamos los valores máximo y mínimo de f(x) en cada subintervalo, $M_i$ y $m_i$, la suma de las áreas de los rectángulos de base h y alturas $M_i$ y $m_i$ son las denominadas Suma **superior y Suma inferior de Riemann**, respectivamente:

$$\mathbf{S_{sup}(n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{b-a}{n}} \quad \text{y} \quad \mathbf{S_{inf}(n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{b-a}{n}}$$

❖ **El área A será el límite, cuando $\mathbf{n \to \infty}$, de cualquiera de las sumas de Riemann:**

$$\mathbf{A = \lim_{n\to+\infty} S(n) = \lim_{n\to+\infty} S_{sup}(n) = \lim_{n\to+\infty} S_{inf}(n)}$$

❖ La llamaremos **Integral definida de la función $\mathbf{f(x)}$ positiva en el intervalo** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, y se denotará como $\int_a^b \mathbf{f(x)\, dx}$ ; f(x) se llamará **integrando**, [a, b] **intervalo de integración**, y sus extremos a y b **límites superior e inferior de integración**.

(El símbolo $\int$ hace referencia a la suma, y dx a la longitud infinitesimal de los subintervalos).

❖ Se dirá que la función $\mathbf{f(x)}$ **es integrable en el intervalo**$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ si uno de los límites anteriores existe y es un valor real.

Una vez institucionalizado el procedimiento a seguir para el cálculo de áreas por debajo de gráficas de funciones positivas en intervalos y las definiciones pertinentes, veamos qué ocurre cuando se dan otro tipo de casos.

Serán los alumnos quienes razonarán, incentivados y ayudados por el profesor, algunas de las propiedades de la integral definida cuya institucionalización se formalizará más adelante. Podrán comprobar la generalización de funciones positivas a otros tipos de circunstancias partiendo de las definiciones anteriores y aplicando propiedades ya conocidas de funciones, como la simetría, la periodicidad o el cálculo de áreas o de funciones no positivas en un intervalo. Así, a la vez que vayan descubriendo nuevas técnicas, consolidarán la tecnología que subyace en ellas. Les iremos proponiendo cuatro ejercicios que saquen a la luz estas técnicas con su tecnología geométrica implícita, para después incitarles a demostrar cada una de las propiedades de forma analítica durante su institucionalización.

### Ejercicio CP1.8.

*Calcular el área encerrada entre la función $f(x) = 2 - x$, el eje $OX$ y las rectas $x = 2$ y $x = 5$*

Tras dibujar la gráfica de la función, y observar que no es positiva en el intervalo $[2, 5]$, los alumnos llegarán a la conclusión de que es equivalente calcular el área por debajo de la función $-\mathrm{f(x)}$, no negativa en el intervalo $[2, 5]$. En este caso, el problema es mínimo, pues se trata de un triángulo cuya área conocemos; pero en el caso de otro tipo de funciones nos será de bastante utilidad esta nueva técnica que ha surgido en el desarrollo del ejercicio.

### Ejercicio CP1.9.

*a) ¿Sabrías decir, usando Geogebra, cuál es la integral entre la función $f(x) = senx$, el eje $OX$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$?*

*b) ¿Qué relación habría entre el área encerrada entre la función, el eje $OX$ y el intervalo $[0, 2\pi]$ y el área encerrada entre la función, el eje $OX$ y el intervalo $[0, \pi]$?*

*c) ¿Y si las rectas son $x = -3\pi$ y $x = 3\pi$, cuál será el área encerrada? ¿Qué puedes concluir de estos resultados?*

La finalidad de este ejercicio es que los alumnos se percaten de la facilidad de la extensión del concepto de integral definida de funciones positivas, en este caso, usando las propiedades de simetría impar y la periodicidad de la función seno.

**Ejercicio CP1.10.**

*De una función $f(x)$ continua, tenemos los siguientes datos:*

*a) Es simétrica par.*

*b) $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[0,7]$.*

*c) El valor de su integral en el intervalo $[0,7]$ es $12$.*

*¿Sabrías calcular el área encerrada entre la gráfica de la función, el eje $OX$ y las rectas $x = -7$ y $x = 7$?*

Este ejercicio manifestará de nuevo la propiedad en el cálculo de áreas o integrales para funciones pares en dominios simétricos. Hemos de observar que los alumnos se han ido familiarizando con el término integral, que ha aparecido durante la práctica con Geogebra. Ya identifican el área encerrada por una función positiva, el eje OX y un intervalo $[a,b]$ como la integral de la función en dicho intervalo.

En el transcurso del siguiente problema propuesto surgirá otra de las técnicas asociadas a la linealidad de la integral o área:

**Problema CP1.11**

Usain Bolt conserva el record del mundo de los $100m$. de atletismo. Esta prueba considera la velocidad del viento en el momento de la carrera para evaluar el resultado de cada corredor. El atleta, durante un entrenamiento sin viento, lleva una velocidad de 4,5 $m/s$. Hoy el viento va en su contra a una velocidad de 0,6 $m/s$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que estas velocidades son constantes a lo largo de todo el recorrido.

a) El entrenador quiere saber la distancia que ha recorrido en 5 segundos; ¿sabrías modelizar matemáticamente el problema, para saber los metros que ha recorrido el plusmarquista en esos 5 segundos?

b) ¿Y si el viento hubiese ido a su favor?

En el transcurso del pro propuesto surgirá otra de las técnicas asociadas a la linealidad de la integral o área

Ahora sí, nos dispondremos a formalizar junto a los alumnos las propiedades de la integral definida, y a desarrollar sus tecnologías asociadas, tanto geométricas como algebraicas.

## PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

- **Si $\mathbf{f(x) \geq 0}$ en $\mathbf{[a,b]}$, $\int_a^b \mathbf{f(x)dx \geq 0}$ es el área encerrada entre la curva $\mathbf{f(x)}$, las rectas $\mathbf{x = a, x = b}$ y el eje OX.**
- **Si $\mathbf{f(x) \leq 0}$ en $\mathbf{[a,b]}$, $-\int_a^b \mathbf{f(x)dx \geq 0}$ es el área encerrada entre la curva $\mathbf{f(x)}$, las rectas $\mathbf{x = a, x = b}$ y el eje OX.**

Si $f(x) \leq 0$ en $[a,b]$, $-f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, luego el área encerrada será:

$$\sum_{i=1}^{n}(-f(c_i))\ \frac{b-a}{n} = -\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ \frac{b-a}{n} = -\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- $\int_b^a \mathbf{f(x)dx} = -\int_a^b \mathbf{f(x)dx}, \forall \mathbf{a,b} \in \mathbb{R}$

La tecnología asociada tiene sentido analítico:

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_{sup}(n) \frac{a-b}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i = -\lim_{n\to+\infty} S_{sup}(n) \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i = -\int_a^b f(x)dx$$

- $\int_a^a \mathbf{f(x)dx = 0}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}$

La interpretación geométrica que podemos dar a su justificación es obvia: el área de un segmento es 0:

$$\int_a^a f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S(n) \frac{a-a}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i = 0$$

### ❖ $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \forall a,b \in \mathbb{R}$

La justificación geométrica quedó patente en el problema CP1.11. Analíticamente:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \lim_{n\to+\infty} S_{f+g}(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f+g)(c_i) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i) + \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\right)$$

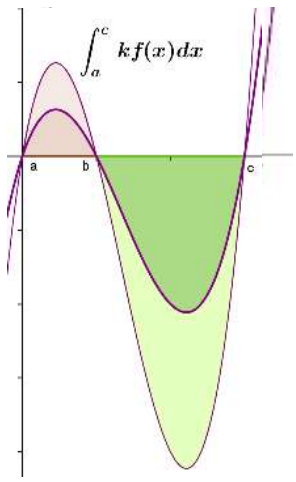
$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

### ❖ $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \forall k \in \mathbb{R}$

También quedó justificado geométricamente el desarrollo del problema CP1.7; Analíticamente:

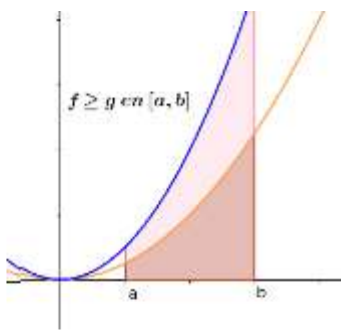
$$\int_a^b k\,f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S(n)\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} k\,f(c_i)$$

$$= k\lim_{n\to+\infty} S(n)\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i = k\int_a^b f(x)dx$$




### ❖ Si $f(x) \geq g(x) \geq 0$ en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \geq 0$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_f(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \geq \lim_{n\to+\infty} S_g(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(c_i) = \int_a^b f(x)dx$$



❖ **Si** $\mathbf{c \in (a, b), \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$

Esta propiedad se llama de aditividad de los extremos de integración; su tecnología geométrica se justifica por la propiedad de aditividad de las áreas, y la analítica es la que sigue:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \frac{b-c+c-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \frac{c-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) + \frac{b-c}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$
$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Practicaremos las técnicas aprendidas acerca del cálculo de áreas con el límite de la suma de Riemann con la realización de las siguientes actividades:

### Problema CP1.12. Tarea de entrega

*Hallar el área de la región bordeada por las gráficas de* $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x = -1$ *y* $x = 2$.

Usaremos el software de Geogebra para calcular el área, y dejaremos propuesto para trabajar en casa el cálculo del área de forma manual mediante el límite de las sumas de Riemann, para que los alumnos entreguen el ejercicio resuelto completo al profesor.

# E.2. SEGUNDO CAMPO DE PROBLEMAS: CONEXIÓN ENTRE INTEGRAL Y DERIVADA

Hasta ahora hemos dado el peso suficiente al cálculo del área o integral definida a través de las sumas superiores e inferiores de Riemann desde un ámbito geométrico y aritmético. Es el momento de incidir en la relación entre integral y derivada, planteando a los alumnos el **segundo problema de razón de ser PRS2**, que manifiesta dicha relación y sirve como punto de arranque al segundo campo de problemas.

Comenzaremos con el abordaje del problema CP1.3 resuelto en el primer campo de problemas, y enfocado desde otra perspectiva:

### Problema CP2.1

*Se lanza una piedra verticalmente desde una torre cuya altura desconocemos, pero disponemos de un cronómetro que nos permite conocer el tiempo que tarda en llegar al suelo: 6 segundos. Convendremos en aproximar la aceleración de la gravedad a* $a = 10\,m/s^2$.

*a) Representa la gráfica de la velocidad en función del tiempo* $v(t)$.

*b) Calcula la integral definida* $\int_0^6 v(t)dt$.

*c) Calcula el espacio recorrido por la piedra cuando han transcurrido 1, 2, 3, 4, 5 segundos. Dibuja los valores sobre la gráfica y trata de hallar la función del espacio recorrido en función del tiempo.*

*d) Calcula la integral definida* $\int_0^t v(t)dt$. *¿Qué representan este valor y la variable* $t$, *en el contexto del problema? Identifica de nuevo la relación entre el valor de la integral calculada y el de la función en* $t$, $v(t)$.

*e) ¿Sabrías calcular la altura que recorre la piedra entre los segundos 1 y 2? ¿Y relacionar ese cálculo con dos integrales?*

*Continuaremos el ejercicio usando el software geogebra.*

*f) Define la función $v(t)$ y su integral $V(t)$ con el comando apropiado de álgebra en el intervalo $[0,6]$ (el programa nos da el dato del valor de la integral, es decir, del área, en dicho intervalo.*

*g) ¿Qué relación existe entre los valores que toma $V(t)$ con el área por debajo de la función $v(t)$?*

*h) ¿Qué relación existe entre las expresiones algebraicas de la función $v(t)$y $V(t)$?*

Tanto en el desarrollo del segundo problema de razón de ser PRS2 como en el de este problema, en las conclusiones que ayudaremos a que saquen los propios alumnos saldrán a la luz el teorema fundamental del cálculo integral y de la regla de Barrow.

Institucionalizaremos ahora la definición de función área o integral, el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de Barrow para asegurar la concepción adecuada por parte los alumnos de la estrecha relación entre integral y derivada:

❖ Sea $\mathbf{f(x)}$ **una función integrable en un intervalo** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$**.**

Para cualquier valor x entre a y b, $a \leq x \leq b$, f es integrable en $[a,x]$ y, por tanto, podemos **asociar a cada valor de x el valor la integral de f en** $[\mathbf{a},\mathbf{x}]$, obteniéndose así la llamada **función integral:**

$$\mathbf{F(x)} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}$$

❖ **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL**

Si f es continua en un intervalo $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ , la función integral

$$\mathbf{F(x)} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}\,(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx};\boldsymbol{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$$

es derivable en $(a,b)$ y su derivada es f(x): $\mathbf{F'(x)} = \mathbf{f(x)}$

Se dirá que $\boldsymbol{F(x)}$ **es una primitiva de** $\boldsymbol{f(x)}$**.**

❖ **REGLA DE BARROW**

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ tal que $\mathbf{F'(x) = f(x)}$.

Es decir, $\mathbf{F(x)}$ **primitiva de** $\mathbf{f(x)}$. Entonces:

$$\int_{a}^{b} \mathbf{f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Los alumnos razonarán la consecuencia de estos últimos resultados: el cálculo del área bajo la gráfica de una función continua se simplifica a la búsqueda de una primitiva de la función. Así, se ha reducido el problema geométrico mediante sumas de Riemann, cuyos cálculos en ocasiones pueden ser engorrosos, a un problema analítico más liviano. Les advertiremos que en contenidos posteriores aprenderán técnicas más complejas para calcular primitivas y entonces, en muchos casos, el problema también se habrá convertido en algebraico. Procedemos a presentarles algunas técnicas sencillas de derivación, que seguro les son familiares:

Veamos algunos casos de primitivas que conocemos pensando en el proceso analítico inverso: las derivadas.

| Primitiva | $F(x)$ | $x$ | $kx$ | $\frac{x^2}{2}$ | $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ | $e^x$ | $lnx$ | $-senx$ | $cosx$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| función | $f(x) = F'(x)$ | 1 | $k$ | $x$ | $x^k$ | $e^x$ | $\frac{1}{x}$ | $cosx$ | $senx$ |

Y acabaremos la secuencia didáctica con la realización de ejercicios y problemas para la práctica de las técnicas y conocimientos adquiridos:

### Problema CP2.2

*La función que mide el caudal de un río en función de los meses del año viene dada por:* $f(x) = 3 + 2\cos\frac{\pi x}{6}$ *donde f(x) está dado en miles de hectólitros por mes, y x en meses.*

*a) ¿Qué cantidad de agua pasa por el río en un año?*

*b) Dibuja la región correspondiente a la cantidad de agua que lleva el río.*

### Problema CP2.3

*Una moto cuando arranca lleva un movimiento uniformemente acelerado, en el que la aceleración es de 2 m/s 2*

*a) Calcula la velocidad al cabo de 30 segundos.*

*b) Calcula el espacio que habrá recorrido en esos 30 segundos.*

### Problema CP2.4

*Una fábrica produce chips para ordenadores. La función de ingreso marginal viene dada por:* $i(x) = 3 + \frac{2}{x+1}$, *donde x es el número de chips vendidos e i(x) viene dado en euros. Si vende 10000 unidades, ¿cuáles son los ingresos obtenidos?*

### Ejercicio CP2.5

*Calcula el área dela región plana limitada por la gráfica de* $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, *el eje de abscisas y las rectas* $x = 0$ *y* $x = 3$.

### Problema CP2.6

*Dos hermanos heredan una parcela, que han de repartirse. La parcela es la región plana limitada por la recta* $y = 3 - 2x$ *y la parábola* $y = 2x - x^2$. *Calcula el área de la parcela que recibe cada uno, y una posible partición geométrica de la misma.*

### Problema CP2.7

*Si f es una función continua en [a, b], ¿puede ser* $\int_a^b f(x)dx = 0$*? Razona la respuesta con un ejemplo.*

### Problema CP2.8

*Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta y = a. Halla el valor de a*

### Ejercicio CP2.9

*Si una función continua es positiva en un intervalo, ¿puedes razonar algo acerca de la monotonía de su función primitiva?*

### Ejercicio CP2.10

*Calcula la derivada de la función dada por F(x)=$\int_0^{x^2} cost\, dt$de dos formas distintas*

*a) Obteniendo de forma explícita F(x) y, después, derivando.*

*b) Aplicando el teorema fundamental del cálculo.*

### Ejercicio CP2.11

*Sin resolver la integral, indica dónde hay máximo o mínimo relativo en la función:*

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)dt$$

# F. METODOLOGÍA Y RECURSOS

La metodología estará sustentada, tal y como se manifiesta en la secuencia didáctica, en la resolución de problemas hacia un proceso de aprendizaje constructivo en contraposición de la enseñanza conductiva tradicional.

La dinámica general del aula será la siguiente: el profesor planteará un problema contextualizado, solicitando la resolución a los alumnos y permitiéndoles el trabajo en común en cuanto a la realización de comentarios, intercambio de impresiones o propuestas. A partir de ese momento, la labor del docente será la de orientar, proporcionar ayuda o proponer caminos alternativos promoviendo así el pensamiento divergente, y haciendo surgir los conceptos y técnicas que se institucionalizarán a posteriori.

Con respecto a las técnicas, todas ellas se han justificado analíticamente y geométricamente salvo las últimas: el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de Barrow han sido sustentadas desde la geometría de los problemas previos. Esta decisión se ha tomado con la idea de aportar más peso a los campos de problemas en la temporalización de las actividades en el aula.

Las consideraciones en cuanto a los ejercicios y problemas planificados para cada sesión serán las siguientes: el profesor tendrá un plan alternativo a seguir en el caso de que el trabajo en el aula se ralentice. Las actividades propuestas para la práctica de las técnicas, podrán proponerse como trabajo individual fuera del aula.

Con respecto a los recursos, además de los habituales en un aula de matemáticas de este nivel (papel, bolígrafos de colores, lápices, regla, calculadora, portátiles, proyector, etc.), el especial que utilizaremos durante las sesiones es el software geogebra de geometría dinámica, cuya característica principal es el trabajo desde la geometría, el álgebra y el cálculo, perfecta para la ideología de la propuesta sobre el tratamiento de la integral definida.

## G. CRONOGRAMA DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

| SESIÓN | CONTENIDOS | ACTIVIDADES |
|---|---|---|
| 1 | Evaluación inicial<br>Repaso sucesiones | Prueba inicial diagnóstica |
| 2 | CP1 Razón de ser de la integral definida: el cálculo de áreas | Problema RS1 |
| 3 | CP1 Cálculo de áreas: procedimientos geométricos | Problemas CP1.1, CP1.2, CP1.3 y CP1.4 |
| 4 | CP1 Cálculo de áreas: sumas infinitas de rectángulos | Problema CP1.5<br>Problema CP1.6 (apartados a, b, c, d, e) |
| 5 | CP1 Cálculo de áreas: sumas infinitas de rectángulos | Problema CP1.6 (apartados f, g, h, i, j)<br>Práctica con geogebra<br>Problema CP1.7 (1ª parte) |
| 6 | CP1 Cálculo de áreas: sumas infinitas de rectángulos<br>Institucionalización técnicas: cálculo de áreas con sumas de Riemann, definiciones de integral definida y función integrable | Problema CP1.7 (2ª parte) |
| 7 | Práctica de las técnicas | Ejercicios CP1.8, CP1.9, CP1.10<br>Problema CP1.11 |
| 8 | CP1 Institucionalización técnicas: propiedades de la integral definida | Problema CP1.12 (Tarea de entrega) |
| 9 | CP2 Razón de ser de la conexión entre integral y derivada | Problema RS2<br>Problema CP2.1 |
| 10 | Institucionalización técnicas: definición función integral, teorema fundamental del cálculo integral y regla de Barrow | Problemas CP2.2, CP2.3, CP2.4 |
| 11 | Práctica de las técnicas | Ejercicio CP2.5<br>Problema CP2.6, CP2.7, CP2.8<br>Ejercicio CP2.9, CP2.10, CP2.11 |
| 12 | Evaluación (prueba escrita) | Prueba de evaluación del aprendizaje |

# H. EVALUACIÓN

## H.1.PRUEBA DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

**1.**

*a) Razona si las siguientes cuestiones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.*

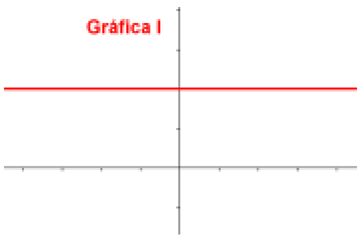
i. *Si una función f continua no corta al eje OX, cualquier primitiva de ella no puede tener máximos ni mínimos.*

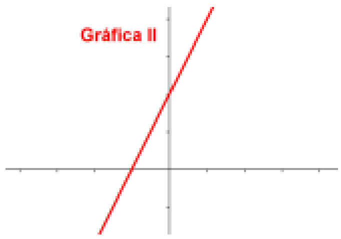
ii. *Sea $f(x)$ una función continua en [-2,2] tal que $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$.*

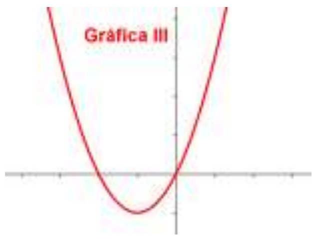
*Entonces, $g(x) = |\, f(x)\, |$ es integrable en [-2, 2] y además $\int_{-2}^{2} g(x) = 0$.*

iii. *Dada la función F(x) = $\int_{1}^{x^2} \ln t \, dt \,;\; x > 1$. Entonces, F'(e)=5 e*

*b) La gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable f, a su función derivada f' y a una primitiva F de f. Identifica cada gráfica con su función, justificando la respuesta.*




**2.** *Tal y como pretendió Arquímedes en el siglo III a.C., vamos a calcular el área del segmento parabólico. Es decir, a calcular el área bajo la función $y = x^2$ entre los puntos de coordenadas $x = 0$ y $x = 1$.*

*a) Calcula el área en cuestión usando la suma superior de Riemann.*

*Ayuda:* $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

*b) A partir del resultado anterior, calcula:* $\int_{-1}^{1} 5x^2 dx;$ $\quad \int_{0}^{1} (-3x^2 + 2)dx$

**3.**

*a) Sabiendo que un móvil lleva una velocidad de* $v(t) = 2t + 1\, cm/s$, *calcula y compara las distancias que recorre entre* $t = 0$ *y* $t = 2$ *y entre* $t = 2$ *y* $t = 3$.

*b) Calcula el valor del área encerrada entre las gráficas:* $y = -x^2 + 3x$ *e* $y = 2x - 2$

*c) La velocidad de llenado de una vasija mediante un grifo de agua* es $\mathrm{v(t)} = 2\mathrm{t} - \mathrm{t}^2$ *litros/hora. Si se llena en 2 horas, calcula su capacidad.*

## H.2. ASPECTOS DEL CONOCIMIENTO A EVALUAR

En este apartado se detallarán los aspectos del conocimiento de los alumnos que se pretende evaluar con cada pregunta de la prueba escrita; a saber: campos de problemas, técnicas y tecnologías, tareas principales (conceptuales o procedimentales), auxiliares específicas y auxiliares generales, así como los estándares de aprendizaje de la LOMCE que se podrían relacionar con cada pregunta, que se citan en el Anexo III del presente trabajo.

Cabe destacar en cuanto a las técnicas asociadas a muchas de las preguntas, que tienen implícitas las tecnologías que las justifican. Pese a ello, y, para que quede constancia de esa circunstancia, se detallan por separado técnicas y tecnologías asociadas a dichas técnicas (aunque pueda parecer repetitivo); una de las finalidades de la propuesta de ha sido la de justificar todas las técnicas posibles. Los campos de problemas, a lo largo de los cuales se desarrolla la secuencia didáctica, son dos: el primer campo de problemas: “Cálculo de áreas” y el segundo campo de problemas: “Conexión entre integral y derivada”.

## H.2.1. Pregunta 1.a.i)

CAMPO DE PROBLEMAS: la pregunta es un ejercicio relacionado con el concepto de primitiva de una función, perteneciente al segundo campo de problemas.

TÉCNICAS:

- ❖ Concepto de primitiva de una función.
- ❖ Condición necesaria de extremo relativo de una función.

TAREA PRINCIPAL CONCEPTUAL:

→ Conocimiento del concepto de primitiva de la función $f(x)$

TAREA AUXILIAR ESPECÍFICA:

→ Aplicación de la condición necesaria de extremo relativo de una función.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE: Est.MA.1.1.1., Est.MA.1.2.1., , Est.MA.1.10.3., Est.MA.1.11.1., Est.MA.3.1.1. y Est.MA.3.1.2.

## H.2.2. Pregunta 1.a.ii)

CAMPOS DE PROBLEMAS: la pregunta hace alusión a las propiedades de la integral definida; así pues, se puede decir que hace referencia al primer y segundo campo de problemas.

TÉCNICAS:

- ❖ Interpretación del resultado nulo de una integral definida de una función no nula.
- ❖ Cálculo de la función valor absoluto de una función.
- ❖ Interpretación geométrica de una función positiva en un intervalo y de la relación con su integral en dicho intervalo.
- ❖ Búsqueda de contraejemplos.
- ❖ Regla de Barrow.

TECNOLOGÍAS:

- ❖ Razonamiento de la interpretación de la nulidad del resultado de una integral definida de una función no nula en un intervalo simétrico.

- ❖ Interpretación geométrica de la función valor absoluto de una función.
- ❖ Relación entre la apariencia geométrica de una función positiva en un intervalo con su área; es decir, con su integral definida en dicho intervalo.
- ❖ Búsqueda de contraejemplos.

<u>TAREAS PRINCIPALES CONCEPTUALES</u>:

- → Interpretar correctamente el resultado nulo de una integral definida de una función en un intervalo determinado.
- → Interpretar geométricamente la función valor absoluto de una función en un intervalo.
- → Concluir el tipo de resultado de la integral definida de una función positiva en su intervalo de integración.
- → Búsqueda de un contraejemplo.

<u>TAREAS AUXILIARES GENERALES</u>:

- → Cálculo de integrales definidas.
- → Simplificación de expresiones algebraicas.
- → Cálculo aritmético.
- → Representaciones gráficas de funciones.

<u>ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE</u>: Est.MA.1.1.1., Est.MA.1.2.1., y Est.MA.3.1.1.

## H.2.3. Pregunta 1.a.iii)

<u>CAMPOS DE PROBLEMAS</u>: la pregunta se refiere al teorema fundamental del cálculo integral, luego al segundo campo de problemas.

<u>TÉCNICAS</u>:

- ❖ Teorema fundamental del cálculo integral.

<u>TAREA PRINCIPAL CONCEPTUAL</u>:

- → Razonamiento de la verificación de hipótesis del teorema fundamental del cálculo integral.

<u>TAREA PRINCIPAL PROCEDIMENTAL</u>:

- → Correcta aplicación de la tesis del teorema fundamental del cálculo integral.

TAREAS AUXILIARES GENERALES:

→ Cálculo de derivadas.

→ Simplificación de expresiones logarítmicas-exponenciales.

→ Cálculo aritmético.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE: Est.MA.1.1.1., Est.MA.1.2.1., y Est.MA.3.1.2.

## H.2.4. Pregunta 1.b)

CAMPO DE PROBLEMAS: está referida a la interpretación de gráficas de una función, de su primitiva y de su derivada; está asociada al segundo campo de problemas.

TÉCNICAS:

❖ Distinción del tipo de función (constante, afín o cuadrática) según su gráfica.

❖ Relación entre un tipo de función y el tipo de sus funciones derivada y primitiva.

TECNOLOGÍAS:

❖ Relación entre la gráfica de una función y el tipo de función (constante, afín o cuadrática).

❖ Relación entre un tipo de función y el tipo de sus funciones derivada y primitiva.

TAREA PRINCIPAL CONCEPTUAL:

→ Relacionar un tipo de función con el tipo de sus funciones derivada y primitiva.

TAREA AUXILIAR ESPECÍFICA:

→ Distinguir el tipo de función (contante, afín o cuadrática) según su gráfica.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE: Est.MA.1.1.1., Est.MA.1.2.1, Est.MA.3.1.1.y Est.MA.3.1.2.

## H.2.5. Pregunta 2.a)

CAMPO DE PROBLEMAS: primer campo de problemas.

TÉCNICA:

- ❖ Cálculo del área de una función bajo el eje OX en un intervalo, mediante el límite de la suma superior de Riemann.

TECNOLOGÍA:

- ❖ Justificación geométrica y/o aritmética del cálculo del área de una función bajo el eje OX en un intervalo, mediante el límite de la suma superior de Riemann.

TAREA PRINCIPAL PROCEDIMENTAL:

- → Cálculo del área de una función bajo el eje OX en un intervalo, mediante el límite de la suma superior de Riemann.

TAREA AUXILIAR ESPECÍFICA:

- → Cálculos algebraicos relativos a la técnica del cálculo de área mediante el límite de la suma superior de Riemann, como el del valor de la función en el extremo derecho de cada subintervalo, o el tratamiento del sumatorio.

TAREAS AUXILIARES GENERALES:

- → Correcta interpretación y uso de la ayuda del enunciado.
- → Cálculo del límite de la suma superior de Riemann.
- → Simplificaciones de otras expresiones algebraicas.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE: Est.MA.1.1.1., Est.MA.1.2.1., Est.MA.3.1.2. y Est.MA.3.4.1.

## H.2.6. Pregunta 2.b)

CAMPOS DE PROBLEMAS: al igual que la pregunta 1.a.i), por la alusión a las propiedades de la integral definida, podemos decir que hace referencia a los dos campos de problemas.

TÉCNICAS:

- ❖ Relación entre área e integral.
- ❖ Propiedades de linealidad de la integral definida.
- ❖ Propiedad de la integral definida de una función par en un intervalo simétrico.

TECNOLOGÍA:

- ❖ Justificación geométrica o algebraica de la simplificación del cálculo de la integral definida de una función par en un intervalo simétrico.

TAREAS PRINCIPALES PROCEDIMENTALES:

- → Aplicación de las propiedades de linealidad de la integral definida.
- → Aplicación de la propiedad de simplificación de la integral definida de una función par en un intervalo simétrico.

TAREA AUXILIAR ESPECÍFICA:

- → Cálculo de integrales definidas.

TAREAS AUXILIARES GENERALES:

- → Simplificación de expresiones algebraicas.
- → Cálculo aritmético.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE: Est.MA.1.1.1., Est.MA.1.2.1., , Est.MA.3.1.1. y Est.MA.3.3.1.

## H.2.7. Pregunta 3.a)

CAMPOS DE PROBLEMAS: por las dos formas diferentes de afrontar el problema: algebraicamente, mediante el cálculo de dos integrales definidas, o geométricamente, mediante el cálculo de las áreas de trapecios, diremos que hace referencia a los dos campos de problemas.

TÉCNICAS:

- ❖ Relación entre una función que representa una magnitud derivada con la magnitud que representa su integral definida en un intervalo.
- ❖ Relación entre una función que representa una magnitud derivada con la magnitud que representa el área bajo dicha función, entre ciertos valores de las abscisas.

TAREAS PRINCIPALES CONCEPTUALES:

- → Relacionar una función que representa una magnitud derivada con la magnitud que representa su integral definida en un intervalo.

→ Relacionar una función que representa una magnitud derivada con la magnitud que representa el área bajo dicha función, entre ciertos valores de las abscisas.

TAREAS AUXILIARES GENERALES:

→ Cálculo de una integral definida.

→ Cálculo del área de un trapecio.

→ Simplificación de expresiones algebraicas.

→ Cálculo aritmético.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE: Est.MA.3.1.1. Est.MA.3.3.1. y Est.MA.3.4.1.

### H.2.8. Pregunta 3.b)

CAMPO DE PROBLEMAS: segundo campo de problemas.

TÉCNICAS:

❖ Representación de gráficas de funciones afines y cuadráticas.

❖ Cálculo de puntos de corte entre funciones.

❖ Concepto de la integral definida para el cálculo de áreas encerradas entre las gráficas de funciones.

❖ Cálculo de integrales definidas.

TECNOLOGÍAS:

❖ Representación de gráficas de funciones afines y cuadráticas.

❖ Cálculo de puntos de corte entre funciones.

TAREAS PRINCIPALES CONCEPTUALES:

→ Concepto de la integral definida de cada una de las funciones.

→ Interpretación de la integral de la resta de dos funciones.

TAREA PRINCIPAL PROCEDIMENTAL:

→ Delimitación del área que pide el enunciado.

TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS:

→ Cálculo de integrales definidas.

→ Representaciones gráficas de una función afín y de una función cuadrática.

TAREAS AUXILIARES GENERALES:

- → Resolución de ecuaciones.
- → Simplificación de expresiones algebraicas.
- → Cálculo aritmético.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE: Est.MA.1.1.1., Est.MA.1.2.1Est.MA.3.1.1. Est.MA.3.3.1. y Est.MA.3.4.1.

## H.2.9. Pregunta 3.c)

CAMPO DE PROBLEMAS: segundo campo de problemas

TÉCNICA:

- ❖ Relación entre una función que representa una magnitud derivada con la magnitud que representa su integral definida en un intervalo.

TECNOLOGÍA:

- ❖ Relacionar una función que representa una magnitud derivada con la magnitud que representa su integral definida en un intervalo.

TAREA PRINCIPAL CONCEPTUAL:

- → Relacionar una función que representa una magnitud derivada con la magnitud que representa su integral definida en un intervalo.

TAREAS AUXILIARES GENERALES:

- → Cálculo de una integral definida.
- → Simplificación de expresiones algebraicas.
- → Cálculo aritmético.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE: Est.MA.1.1.1., Est.MA.1.2.1., Est.MA.3.1.1. Est.MA.3.3.1. y Est.MA.3.4.1.

## H.3. RESPUESTAS CORRECTAS

**1. a. i)** VERDADERO

Podemos razonar la veracidad de la siguiente forma:

Sea $F(x)$ primitiva de una función continua $f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

La condición necesaria para que $f(x)$ tenga un máximo o mínimo relativo en un punto $x_0$ es que su derivada se anule en dicho punto, es decir, $F'(x_0) = f(x_0) = 0$

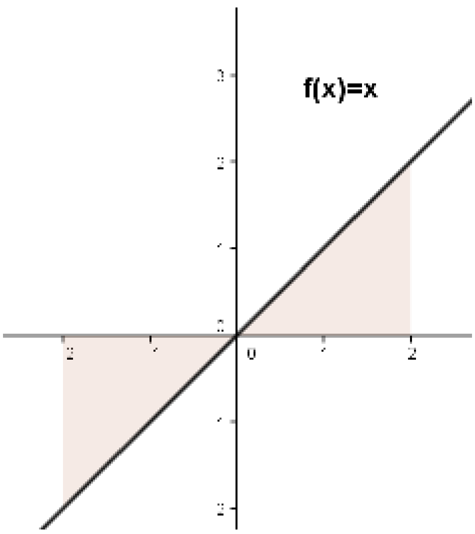
Y esto es imposible, pues la función f no corta al eje OX.

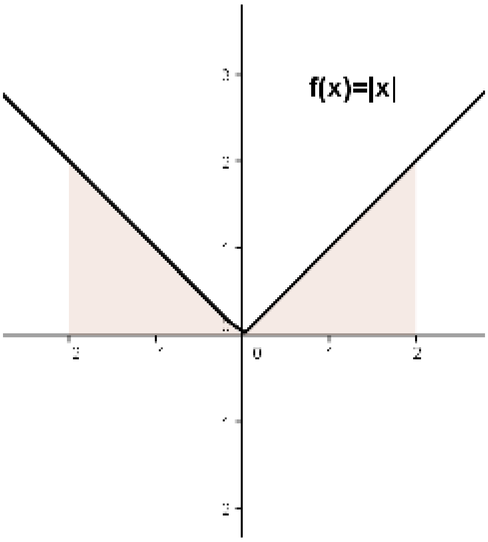
**1. a. ii)** FALSO

Si una función tiene integral nula en un intervalo donde es continua, dicha función tomará valores positivos y negativos en dicho intervalo, y esto no implica que la integral de su función valor absoluto se anule en dicho intervalo. La función valor absoluto de una función no nula es, por definición, positiva. Luego su integral definida no puede anularse

Esta justificación sería suficiente, pero una forma sencilla es demostrarlo es a través de un contraejemplo utilizando una función impar, cuya integral, como se puede apreciar tanto algebraicamente como geométricamente, se anula en un intervalo simétrico.

Sea $f(x) = x$; $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$ Sin embargo, $\int_{-2}^{2} g(x)dx = \int_{-2}^{2} |\,x\,|\,dx = \int_{-2}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = -\frac{-4}{2} + \frac{4}{2} = 4 \neq 0$



**1. a. iii)** FALSO

La función $f(t) = \ln t$ es continua y derivable $\forall t > 0$, luego verifica las hipótesis del teorema fundamental del cálculo integral, que nos permite calcular la derivada de F(x) de la siguiente forma, una vez separada la integral en la suma de dos integrales:

$F'(x) = 2x\ln x^2$; $F'(e) = 2e \ln e^2 = 4e \neq 5e$

**1. b)** Podemos razonar de una forma similar al siguiente razonamiento:

Partiendo de la gráfica II, observamos que se trata de una función lineal (afín) con pendiente positiva, por lo que la función derivada tiene que ser una función constante (la pendiente de la función afín). Por otro lado, la primitiva de la función afín tiene que ser una función cuadrática, cuya gráfica corresponde a la parábola.

Así pues, concluimos que la gráfica II es la de la función, la gráfica I es la de su derivada y la gráfica III la de su primitiva.

**2. a)** Sea el intervalo $[a, b] = [0, 1]$, $M_i = x_i^2 = (\frac{i}{n})^2 = f(x_i)$ es el valor de la función en el extremo derecho de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, \ldots, n$

La longitud de cada subintervalo es de $\frac{1}{n}$

$S_{sup}(n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} (\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6})$

Así, el área buscada es $A = \lim_{n \to +\infty} S_{sup}(n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} (\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}) = \frac{1}{3}$

**2. b)** En el apartado anterior hemos obtenido que $A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

Utilizando las propiedades de linealidad de la integral definida, y la simetría de la función ($f(x) = x^2$ es una función simétrica par):

$\int_{-1}^{1} 5x^2 dx = 5\int_{-1}^{1} x^2 dx = 10 \int_0^1 x^2 dx = \frac{10}{3}$

$\int_0^1 (-3x^2 + 2)dx = -3\int_0^1 x^2 dx + 2\int_0^1 dx = \frac{-3}{3} + 2(1-0) = 1$

**3. a)**

Podemos enfrentarnos al problema de dos formas distintas:

El espacio recorrido está representado por el área bajo la función positiva $v(t) = 2t + 1$; así, podemos hacer el cálculo a partir de integrales definidas:

Distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 2$:

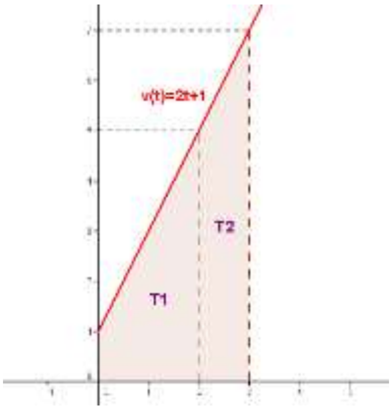
$$d_1 = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (2t+1)dt = [t^2 + t]_0^2 = 6\text{m}.$$

Distancia recorrida entre $t = 2$ y $t = 3$:

$$d_2 = \int_2^3 v(t)dt = \int_2^3 (2t+1)dt = [t^2 + t]_2^3 = 12 - 6 = 6\text{m}.$$

O también podremos representar la función $v(t) = 2t + 1$, afín y positiva, y calcular geométricamente las áreas de los trapecios correspondientes:

$A_{T_1} = \frac{(1+5)2}{2} = 6$ $\qquad$ $A_{T_2} = \frac{(5+7)1}{2} = 6$




El móvil recorre la misma distancia entre $t = 0$ y $t = 2$ que entre $t = 2$ y $t = 3$.

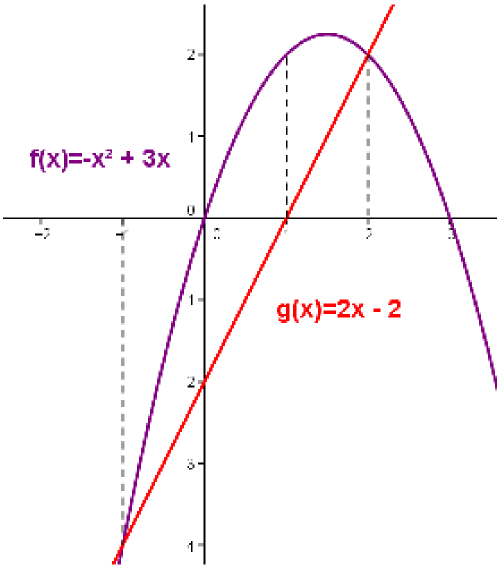
**3. b)** En primer lugar, representamos las gráficas de las funciones:

- $y = -x^2 + 3x$: parábola de vértice $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$, cóncava, que pasa por $(0,0)$ y $(3,0)$

- $y = 2x - 2$ recta por $(1,0)$ y $(0,-2)$

Puntos de corte entre ambas funciones: $-x^2 + 3x = 2x - 2;\ \ x^2 - x - 2 = 0;$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ $\quad (2,2)$ y $(-1,-4)$




$$A = -\int_{-1}^{0} \big(g(x) - f(x)\big)dx - \int_{0}^{1} g(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} \big(f(x) - g(x)\big)dx =$$

$$\int_{-1}^{2} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$$-\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}\ u^2 \text{ es el área buscada.}$$

**3. c)** El área por debajo de la función $v(t) = 2t - t^2$ entre los puntos $t = 0$ y $t = 2$ nos proporciona la capacidad, en litros, de la vasija. Calculamos la integral definida correspondiente para obtener dicha área:

$$\int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (2t - t^2)dt = \left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\ l.$$

## H.4. CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

Los que se van a emplear en la calificación de la prueba seguirán el Modelo de tercios de penalización de errores de la propuesta de Gairín J.M., Muñoz J.M & Oller A.M. (2013), luego las penalizaciones en los errores de cada tarea estarán intrínsecamente ligados a los tipos de tareas asociados a cada pregunta de la prueba, y que se han definido con detalle en el apartado 3 del presente trabajo.

A nivel general, y siguiendo la propuesta citada de calificación con el Modelo de tercios, tendremos en cuenta para la elaboración e interpretación de la guía de corrección, las siguientes consideraciones del mismo:

El conjunto de todos los errores cometidos en la realización de realizar tareas auxiliares generales no se penalizará con un valor superior a 1/3 de la puntuación total asignada a la pregunta, y la calificación continuará (considerándose como correctos dichos errores). Los errores que se cometan en las tareas auxiliares específicas podrán penalizarse con un máximo de 2/3 de la calificación total asignada a la pregunta, contabilizándose en este límite los errores de la totalidad de las tareas auxiliares (tanto las específicas, como las generales) y continuando la corrección. Se podrán penalizar hasta con el 100% de la puntuación de la pregunta los errores en las tareas principales (tanto conceptuales como procedimentales), pudiendo ocasionar la finalización de la corrección.

## H.5. GUÍA DE CORRECCIÓN

Realizaremos, para cada pregunta de la prueba, una tabla que relaciona la penalización en los tipos de errores de cada pregunta en función del tipo de tareas asociadas a los mismos. Para economizar la notación, llamaremos TPC, TPP, TAE y TAG a las tareas principales conceptuales y procedimentales, a las auxiliares específicas y a las auxiliares generales, respectivamente.

| **Pregunta 1.a.i) 0.75 puntos** | **Penalización** | **Finaliza la corrección** |
|---|---|---|
| **TPC:** conocimiento del concepto de primitiva de la función $f(x)$ | **100%** | **SÍ** |
| **TAE:** aplicación de la condición necesaria de extremo relativo de una función. | $\leq \mathbf{1/3}$ | **NO** |

| **Pregunta 1.a.ii) 0.75 puntos** | **Penalización** | **Finaliza la corrección** |
|---|---|---|
| **TPC:** interpretar correctamente el resultado nulo de una integral definida de una función en un intervalo determinado. | $\leq \mathbf{1/3}$ | **NO** |
| **TPC:** Interpretar geométricamente la función valor absoluto de una función en un intervalo. | $\leq \mathbf{1/3}$ | **NO** |
| **TPC:** Concluir el tipo de resultado de la integral definida de una función positiva en su intervalo de integración. | $\leq \mathbf{1/3}$ | **NO** |
| **TPC:** Búsqueda de un contraejemplo. | $\leq \mathbf{2/3}$ | **NO** |
| **TAG:** Cálculo de integrales definidas. | $\leq \mathbf{1/3}$ | **NO** |
| **TAG:** Simplificación de expresiones algebraicas. | $\leq \mathbf{1/6}$ | **NO** |
| **TAG:** Cálculo aritmético. | $\leq \mathbf{1/6}$ | **NO** |
| **TAG:** Representaciones gráficas de funciones. | $\leq \mathbf{1/6}$ | **NO** |

| **Pregunta 1.a.iii) 0.75 puntos** | **Penalización** | **Finaliza la corrección** |
|---|---|---|
| **TPP:** Razonamiento de la verificación de hipótesis del teorema fundamental del cálculo integral. | $\leq \mathbf{1/3}$ | **NO** |
| **TPP:** Correcta aplicación de la tesis del teorema fundamental del cálculo integral. | $\leq \mathbf{100\%}$ | **SÍ** |
| **TAG:** Cálculo de derivadas. | $\leq \mathbf{1/3}$ | **NO** |
| **TAG:** Simplificación de expresiones logarítmicas-exponenciales. | $\leq \mathbf{1/6}$ | **NO** |
| **TAG:** Cálculo aritmético. | $\leq \mathbf{1/6}$ | **NO** |

| **Pregunta 1.b) 0.75 puntos** | **Penalización** | **Finaliza la corrección** |
|---|---|---|
| **TPC:** Relacionar un tipo de función con el tipo de sus funciones derivada y primitiva. | $\leq \mathbf{2/3}$ | **NO** |
| **TAE:** Distinguir el tipo de función (contante, afín o cuadrática) según su gráfica. | $\leq \mathbf{2/3}$ | **NO** |

| **Pregunta 2.a) 2 puntos** | **Penalización** | **Finaliza la corrección** |
|---|---|---|
| **TPP:** Cálculo del área de una función bajo el eje OX en un intervalo, mediante el límite de la suma superior de Riemann. | $\mathbf{100\%}$ | **SÍ** |
| **TAE:** Cálculos algebraicos relativos al cálculo de la suma superior de Riemann, como el del valor de la función en el extremo derecho de cada subintervalo, o el tratamiento del sumatorio. | $\leq \mathbf{2/3}$ | **NO** |

| | | |
|---|---|---|
| **TAG:** Correcta interpretación y uso de la ayuda en la pregunta. | $\leq 1/3$ | **NO** |
| **TAG:** Cálculo del límite de la suma superior de Riemann. | $\leq 1/3$ | **NO** |
| **TAG:** Simplificación de expresiones algebraicas. | $\leq 1/6$ | **NO** |

| **Pregunta 2.b) 1.5 punto (0.75+0.75)** | **Penalización** | **Finaliza la corrección** |
|---|---|---|
| **TPP:** Aplicación de las propiedades de linealidad de la integral definida. | $100\%$ | **SÍ (2ª integral)** |
| **TPP:** Aplicación de la propiedad de simplificación de la integral definida de una función par en un intervalo simétrico. | $100\%$ | **SÍ (1ª integral)** |
| **TAE:** Cálculo de integrales definidas. | $\leq 2/3$ | **NO** |
| **TAG:** Simplificación de expresiones algebraicas. | $\leq 1/3$ | **NO** |
| **TAG:** Cálculo aritmético. | $\leq 1/6$ | **NO** |

| **Pregunta 3.a) 1 punto** | **Penalización** | **Finaliza la corrección** |
|---|---|---|
| **TPC:** Relacionar una función que representa una magnitud derivada con la magnitud que representa su integral definida en un intervalo. | $100\%$ | **SÍ (1ª forma de resolución)** |
| **TPC:** Relacionar una función que representa una magnitud derivada con la magnitud que representa el área bajo dicha función, entre ciertos valores de las abscisas. | $100\%$ | **SÍ (2ª forma de resolución)** |
| **TAG:** Cálculo de una integral definida. | $\leq 2/3$ | **NO** |
| **TAG:** Cálculo del área de un trapecio. | $\leq 1/3$ | |
| **TAG:** Simplificación de expresiones algebraicas. | $\leq 1/3$ | **NO** |
| **TAG:** Cálculo aritmético. | $\leq 1/6$ | **NO** |

| **Pregunta 3.b) 1.5 puntos** | **Penalización** | **Finaliza la corrección** |
|---|---|---|
| **TPC:** Concepto de la integral definida de cada una de las funciones. | $100\%$ | **SÍ** |
| **TPC:** Interpretación de la integral de la resta de dos funciones. | $\leq 2/3$ | **NO** |
| **TPP:** Delimitación del área que pide el enunciado. | $\leq 2/3$ | **NO** |
| **TAE:** Cálculo de integrales definidas. | $\leq 2/3$ | **NO** |
| **TAE:** Representaciones gráficas de una función afín y de una función cuadrática. | $\leq 2/3$ | **NO** |
| **TAG:** Resolución de ecuaciones. | $\leq 1/3$ | **NO** |

| | | |
|---|---|---|
| **TAG:** Simplificación de expresiones algebraicas. | $\leq \mathbf{1/3}$ | **NO** |
| **TAG:** Cálculo aritmético. | $\leq \mathbf{1/6}$ | **NO** |

| **Pregunta 3.c)    1 puntos** | **Penalización** | **Finaliza la corrección** |
|---|---|---|
| **TPC:** Relacionar una función que representa una magnitud derivada con la magnitud que representa su integral definida en un intervalo. | $\mathbf{100}\%$ | **SÍ** |
| **TAG:** Cálculo de una integral definida. | $\leq \mathbf{2/3}$ | **NO** |
| **TAG:** Simplificación de expresiones algebraicas. | $\leq \mathbf{1/3}$ | **NO** |
| **TAG:** Cálculo aritmético. | $\leq \mathbf{1/6}$ | **NO** |

# I. BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA


Aragón. Orden de 1 de Julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón. BOA, 17 de julio de 2008, núm. 105, págs. 14078-14081.

Aragón. Orden de 9 de mayo de 2007, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. BOA, 1 de junio de 2007, núm. 65, p.8992.

Aragón. ORDEN de 15 de mayo de 2015, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. BOA, 29 de mayo de 2015, núm. 101, pp.18539-18548.

Aldana E. (2011). *Comprensión del concepto de Integral Definida en el marco de la teoría "APOE"* Tesis doctoral. Salamanca.

Aldana E. y González T. (2011). *Desarrollo del esquema conceptual del concepto de Integral Definida en el marco teórico "APOE": Un estudio de caso*. 12º Encuentro colombiano de matemática educativa, pp. 152-161.

Álvarez F., Garrido L.M. y Ruiz A. (1989). *Matemáticas FACTOR-COU*. Editorial Vicens-Vives, S.A.

Álvarez F., García C. y Garrido L.M. (1991). *Matemáticas FACTOR-3*. Editorial Vicens-Vives, S.A.

Aranda C. y Callejo M.L. (2011). *Aproximación al concepto de función primitiva: un experimento de enseñanza con applet de geometría dinámica*.I.E.S. Número 3 La vila Joiosa & Universidad de Alicante.

Artigue, M. (2003). *¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2.

Azcárete C., Casadevall M., Casellas E. y Bosch D. *Cálculo Diferencial e Integral* Educación Matemática en Secundaria (1996). Editorial Síntesis, S.A.

Cid E. y Muñoz J.M. (s.f.) *La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) Un marco teórico para la didáctica de las matemáticas*. Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

Colera J, Oliveira M. J., García R. y Santaella E. (2008). *Matemáticas I Bachillerato científico tecnológico*. Editorial Anaya.

Colera J. y Oliveira M. J. (2009). *Matemáticas II aplicadas a las Ciencias Sociales. Bachillerato*. Editorial Anaya.

Contreras A., Ordóñez L. y Wilhelmi M. (2010). *Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato*. Universidad de Jaén y Universidad pública de Navarra. Enseñanza de las Ciencias, 28(3), pp. 367–384.

De la Fuente, C. (2010). Arquímedes de Siracusa. La deslumbrante sabiduría y la cautivadora humanidad de un genio. Revista Suma. Junio de 2010, nº 64, pp. 63-70.

Escoredo A., Gómez M.D., Lorenzo J., Machín P., Pérez C., Del Río, J. y Sánchez D. (2009). *Matemáticas II 2º Bachillerato*. Editorial Santillana Educación, S.L.

Escudero M. (1997). *Fermat y Arquímedes en la clase de integrales*. Revista Suma, Febrero de 1997, nº 24, pp. 77-79.

Gairín J.M., Muñoz J.M & Oller A.M. (2013). *Anomalías en los procesos de identificación de errores en las pruebas escritas de matemáticas de las P.A.U*. Revista Campo Abierto, 32(2), pp. 27-50.

Gairín J.M., Muñoz J.M & Oller A.M. (2012). *Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas.* Investigación en Educación Matemática XVI. Jaén: SEIEM, pp. 261-274.

Gil F., Rico L. & Fernández A. (2002). *Concepciones y creencias del profesorado de matemáticas sobre la evaluación.* Revista de Investigación Educativa, 20, pp. 47-75.

Gil J., Rivera M y Vázquez C. (1989) *Matemática COU*. Serie Educación Santillana Departamento de Investigaciones Educativas Santillana, S.A. de Ediciones.

González A.S. (2006). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje* Tesis doctoral. Tenerife.

Helvia Plataforma educativa (s.f.). La integral definida. Aplicaciones. Córdoba: IES Averroes: <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/11005275/helvia/sitio/upload/Tema_13_Integral_definida.pdf>. [Consulta: 6 de Junio de 2015]

Hernández Camacho R. (2007) *Propuesta didáctica para identificar cuándo la integral definida es aplicable para resolver un problema* Revista electrónica Actualidades Investigativas en Educación. Volumen 7, Número 2. Universidad de Costa Rica.

Huitrado J.L. & Climent N. (2013). Conocimiento del profesor en la interpretación de errores de los alumnos en álgebra. PNA, 8(2), pp. 75-86.

Llorens J.L. y Santoja F.J. (1997). *Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de Integral*. Divulgaciones Matemáticas v.5, nº. ½, pp. 61-76.

López F. y Thode R. *Las matemáticas en el antiguo Egipto. El papiro Rhind.*

< http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papirorhind.htm> [Consulta: 3 de Mayo de 2015]

Mengual E., Gorgorió N. & Albarracín L. (2013). *Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de matemáticas.* Investigación en Educación Matemática XVII. Bilbao: SEIEM, pp. 367-381.

Milevicich L. (2008). *Las ideas previas sobre el cálculo integral en los alumnos de primer año de la universidad*. Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco, Buenos Aires (Argentina). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C., nº21, pp. 329-338.

Rodríguez R. y Soler J. (2003). *Matemáticas 2 Bachiller*. Editorial Mc Graw Hill.

SM. *Problemas resueltos de la Editorial SM. Sucesiones. Límites de sucesiones*. <http://platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm.html> [Consulta: 24 de abril de 2015].

Turégano P. (1998). *Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Castilla-La Mancha. Enseñanza de las Ciencias, 16(2) pp. 233-249.

Turégano P. (2007). *Imágenes del concepto de integral definida*. Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete, nº22 pp. 17-57.

Vizmanos J.R., Hernández J. y Alcaide F. (2009) Matemáticas 2 Bachillerato. Ediciones SM.

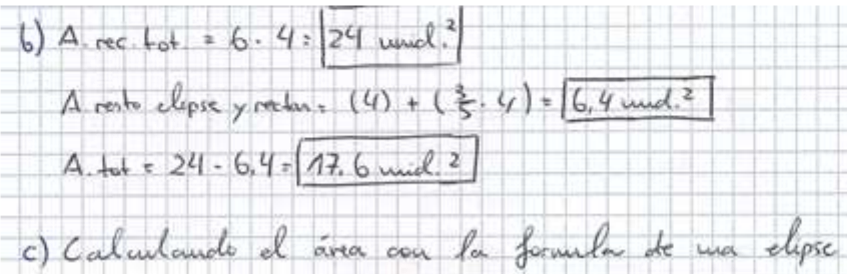
# ANEXOS

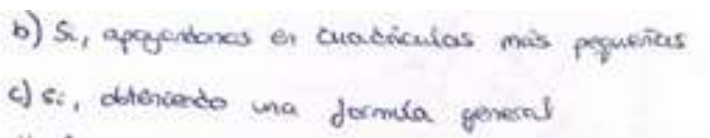
# ANEXO I: EJERCICIOS DE LOS ALUMNOS

En primer lugar vemos necesario hablar del contexto del grupo al que les propusimos estos ejercicios: es un 2º de Bachillerato de horario nocturno. El nivel general es muy bajo, y las malas calificaciones recién obtenidas en el examen de la unidad de integral definida han sido pésimas. La propuesta que se siguió en el aula fue la tradicional: el estudio de la integral definida tras la unidad didáctica de integral indefinida.

Apoyada por mi tutora del practicum II y III del instituto, les propusimos esta tarea para que la realizasen, a nivel individual y voluntario, durante las vacaciones de Semana Santa. Solamente la entrega de los ejercicios resueltos iba a suponerles un punto adicional en la calificación del siguiente examen de recuperación de esta unidad; pese a ello, de un grupo de casi treinta alumnos (de los que asisten a clase en torno a un 20%), solo tres entregaron el trabajo propuesto.

El primer problema que se les planteó fue el problema de razón de ser PRS1. Se les da una figura para que aproximen su área utilizando cuadrículas; razonan el método de aproximación, trazando cuadrículas cada vez más pequeñas, pero cuando se les pregunta como calcularían el área exacta, responden que usando la fórmula del área de la elipse, de forma previa al apartado que pide el cálculo del área exacta usando dicha fórmula:


b) A rec. tot = $6 \cdot 4 = \boxed{24 \text{ und.}^2}$
A resto elipse y rectan. = $(4) + (\frac{3}{5} \cdot 4) = \boxed{6,4 \text{ und.}^2}$
A tot = $24 - 6,4 = \boxed{17,6 \text{ und.}^2}$
c) Calculando el área con la formula de una elipse


b) Si, apoyandonos en cuadrículas más pequeñas
c) Si, obteniendo una formula general

El problema de razón de ser PRS2 fue el siguiente que se les propuso. Sorprende la respuesta al primer apartado de un alumno, que calcula el área de los triángulos usando integrales definidas (resultado factible, pero la intencionalidad del ejercicio era que calculasen las áreas de forma geométrica).

a) $y = m \cdot x \qquad m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \left| \begin{array}{l} (x_0, y_0) \to (0,0) \\ (x, y) \to (2,1) \end{array} \right.$

$m = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{1}{2} x \longrightarrow x = 0 \ y \ x = 1$

a1) $\int_0^1 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} u^2$

a2) $\int_0^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{4}{4} - 0 = 1 u^2$

a3) $\int_0^3 \frac{1}{2} x \, dx = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{4} - 0 = \frac{9}{4} u^2$

En el último apartado del ejercicio, en el que se pregunta la relación entre la expresión del área calculada en el apartado anterior y la de la función f(x) = mx, con la intención de observar analíticamente la conexión con la derivación, un alumno no responde de la forma esperada:

c) $A = \frac{mx^2}{2}$ en la expresión del área, está la de la recta $y = mx$.

Coinciden en 'mx'

Por último se les propuso la pregunta 2.a) de la prueba final de conocimientos de la propuesta, con algunos apartados adicionales: calcular el área del segmento parabólico mediante sumas superiores e inferiores de Riemann; en las respuestas quedaron presentes errores derivados de la falta de comprensión de los conceptos:

Iremos consiguiendo una aproximación más exacta.
Aproximaremos cada vez con menor error las alturas.
Si, consiguiésemos n rectangulos, siendo n un número cada vez mayor.
Sería posible obtener el valor exacto en la grafica A, si nos basaremos
en que la $S = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{3^3}$ y en la grafica B, sería
$S = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{4^3}$.

Y tampoco supieron utilizar la ayuda que se les ofreció para calcular el límite, en la que cabe destacar la respuesta de un alumno:

En el apartado A (valores mínimos) $S_n = \dfrac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}$ ; siendo n el nº de divisiones.

En el apartado B (valores máximos) $S_n = \dfrac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$ ; siendo n el nº de divisiones

---

Una última pregunta adicional, en la que se les preguntaba el resultado esperado con el cálculo de la integral definida pertinente, una de las respuestas fue la siguiente:

$$\int_0^x x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$$

Se espera el área exacta del segmento parabólico.

---

Que plasma la idea de función integral, es decir, de área del segmento parabólico en un intervalo $[0, x]$, pero no el cálculo de la integral en el intervalo $[0, 1]$, que es lo que se pedía en el enunciado.

Las conclusiones que podemos sacar de lo observado son las siguientes:

En primer lugar, es importante decir que este experimento es fundamentalmente evaluador para nosotros; nos da indicaciones de los posibles cambios a mejorar en los enunciados de los ejercicios. Por ejemplo, *"¿Cómo calcularías el área exacta?"* en el primer problema hizo que los alumnos se fijasen en la fórmula de la elipse, a pesar de que apareciese en un apartado posterior.

Y en segundo lugar, el análisis de las respuestas de los alumnos plasma la falta de comprensión de los objetos matemáticos aprendidos acerca de la integral definida en forma de errores de concepto y de obstáculos didácticos de todo tipo. Esto corrobora que la idea de nuestra propuesta alternativa, la introducción de la integral definida mediante el cálculo de áreas y previa al cálculo de primitivas, debería de experimentarse con la esperanza de que los alumnos asimilasen y razonasen los conceptos, para la obtención de mejores resultados de aprendizaje.

# ANEXO II. CONTENIDOS EN EL CURRÍCULO DE LA LOE

Con respecto a la nueva ley LOMCE, no hay diferencias en cuanto a los contenidos del currículo referentes a la integral con respecto a la ley actual. Se citan a continuación los contenidos en la LOE:

- El problema del área: aproximación intuitiva a la integral.
- Definición de integral definida de una función continua.
- La función área.
- Noción de primitiva.
- El teorema fundamental del cálculo integral.
- La regla de Barrow.
- Cálculo de integrales indefinidas inmediatas, por cambio de variable, por partes o racionales sencillas.
- Integrales definidas.
- Cálculo de áreas de regiones planas.

# ANEXO III. ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES LOMCE

En cuanto a la parte de evaluación del currículum LOMCE, se incluye un cambio significativo con respecto a la LOE: los estándares de aprendizaje evaluables. Se citan a continuación, separados según los bloques de conocimientos en los que aparecen, los presentes, luego evaluables, a lo largo del aprendizaje de la integral definida:

**Primer bloque:** ***Procesos, métodos y actitudes en matemáticas***

**Est.MA.1.1.1.** Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.

**Est.MA.1.2.1.** Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).

**Est.MA.1.2.2.** Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.

**Est.MA.1.2.3.** Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.

**Est.MA.1.2.4.** Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas.

**Est.MA.1.2.5.** Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas.

Est.MA.1.3.1. Utiliza diferentes métodos de demostración en función del contexto matemático.

**Est.MA.1.3.2.** Reflexiona sobre el proceso de demostración (estructura, método, lenguaje y símbolos, pasos clave, etc.).

**Est.MA.1.4.1**. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.

**Est.MA.1.4.2.** Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.

**Est.MA.1.4.3.** Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema, situación a resolver o propiedad o teorema a demostrar, tanto en la búsqueda de resultados como para la mejora de la eficacia en la comunicación de las ideas matemáticas.

**Est.MA.1.5.1.** Conoce la estructura del proceso de elaboración de una investigación matemática: problema de investigación, estado de la cuestión, objetivos, hipótesis, metodología, resultados, conclusiones, etc.

**Est.MA.1.5.2.** Planifica adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado.

**Est.MA.1.5.3.** Profundiza en la resolución de algunos problemas, planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc.

**Est.MA.1.6.1.** Generaliza y demuestra propiedades de contextos matemáticos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.

**Est.MA.1.6.2.** Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; tecnologías y matemáticas, ciencias experimentales y matemáticas, economía y matemáticas, etc.) y entre contextos matemáticos (numéricos y geométricos, geométricos y funcionales, geométricos y probabilísticos, discretos y continuos, finitos e infinitos, etc.).

**Est.MA.1.7.1.** Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación.

**Est.MA.1.7.2.** Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación.

**Est.MA.1.7.3.** Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.

**Est.MA.1.7.4.** Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema de investigación.

**Est.MA.1.7.5.** Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación.

**Est.MA.1.7.6.** Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos. Así mismo, plantea posibles continuaciones de la investigación; analiza los puntos fuertes y débiles del proceso y hace explícitas sus impresiones personales sobre la experiencia.

**Est.MA.1.8.1.** Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.

**Est.MA.1.8.2.** Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios.

**Est.MA.1.8.3.** Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.

**Est.MA.1.8.4**. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

**Est.MA.1.8.5.** Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.

**Est.MA 1.9.1.** Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc.

**Est.MA.1.10.1.** Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad para la aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, autocrítica constante, etc.

**Est.MA.1.10.2.** Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación

**Est.MA.1.10.3.** Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas; revisar de forma crítica los resultados encontrados; etc.

**Est.MA.1.11.1.** Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia por su sencillez y utilidad.

**Est.MA.1.12.1.** Reflexiona sobre los procesos desarrollados, tomando conciencia de sus estructuras; valorando la potencia, sencillez y belleza de los métodos e ideas utilizados; aprendiendo de ello para situaciones futuras; etc.

**Est.MA.1.13.1.** Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.

**Est.MA.1.13.2.** Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.

**Est.MA.1.13.3.** Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

**Est.MA.1.13.4.** Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.

**Est.MA.1.14.1.** Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.

**Est.MA.1.14.2.** Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.

**Est.MA.1.14.3.** Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

**Segundo bloque: *Números y álgebra***

**Est.MA.2.1.1.** Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos adecuados.

**Tercer bloque: *Análisis***

**Est.MA.3.1.1.** Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.

**Est.MA.3.1.2.** Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

**Est.MA.3.2.1.** Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites.

**Est.MA.3.3.1**. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

**Est.MA.3.4.1.** Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

**Est.MA.3.4.2.** Utiliza los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de áreas de recintos limitados por funciones conocidas.

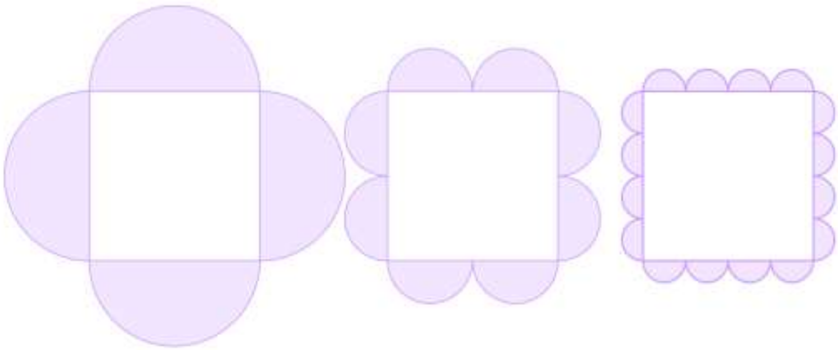
**Cuarto bloque: *Geometría***

**Est.MA.4.3.4.** Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría relativas a objetos como la esfera.

# ANEXO IV: SOLUCIONES DE LA PRUEBA INICIAL DIAGNÓSTICA

**Problema 1**

Llamemos L al lado del cuadrado, $a_n$ a la sucesión suma de las áreas de los semicírculos y $b_n$ a la sucesión suma de los perímetros de las semicircunferencias.



Los primeros términos de ambas sucesiones son:

$$a_1 = 4\frac{1}{2}\pi(\frac{L}{2})^2 = \frac{\pi L^2}{2}\,, \quad b_1 = 4\frac{1}{2}2\pi\frac{L}{2} = 2\pi L$$

Calculamos un par de términos más, hasta que demos con el término general:

$$a_2 = 8\frac{1}{2}\pi(\frac{L}{4})^2 = \frac{\pi L^2}{4}\,, \quad b_2 = 8\frac{1}{2}2\pi\frac{L}{4} = 2\pi L$$

$$a_3 = 16\frac{1}{2}\pi(\frac{L}{8})^2 = \frac{\pi L^2}{8}\,, \quad b_2 = 8\frac{1}{2}2\pi\frac{L}{8} = 2\pi L$$

...

$$a_n = 2^{n+1}\frac{1}{2}\pi(\frac{L}{2^n})^2 = \frac{\pi L^2}{2^n}\,, \quad b_n = 2^{n+1}\frac{1}{2}2\pi\frac{L}{2^n} = 2\pi L$$

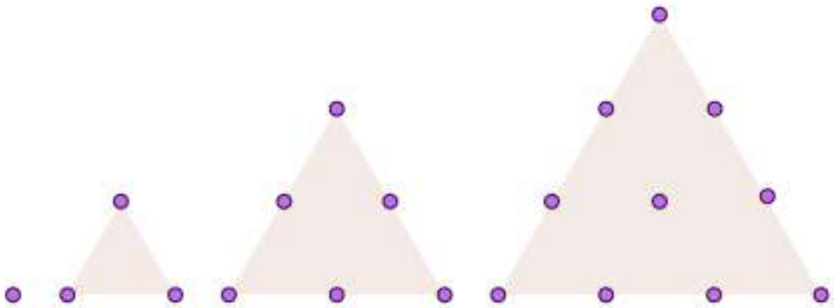
La sucesión $a_n$ es monótona estrictamente decreciente y acotada inferiormente, luego convergente. Su límite es:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi L^2}{2^n} = 0$$

La sucesión $b_n$ es constante y converge a:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 2\pi L = 2\pi L$$

**Problema 2**



a) Los primeros términos y el término general de la sucesión $a_n$ que representa a los números triangulares son:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 6,\ a_4 = 10,\ a_5 = 15, \qquad \dots,\ a_n = a_{n-1} + n$$

b) La sucesión es recurrente; intentemos expresarla de forma no recurrente, fijándonos en la relación entre sus términos: si sumamos los puntos de cada triángulo desde el vértice superior hasta la base, recorriendo cada altura, observamos fácilmente otra forma de obtener los primeros términos y el término general de la sucesión:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1+2,\ a_3 = 1+2+3, \dots, a_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Así, podemos calcular el término de la sucesión que contiene 231 puntos:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} = 231;\ n^2 + n - 462 = 0; n = \frac{1 \pm \sqrt{1+1848}}{2} = \frac{1 \pm 43}{2} = \begin{cases} 22 \\ -21 \end{cases}$$

El triángulo que contiene 231 puntos es el que ocupa el lugar 22 de la sucesión: $a_{22}$

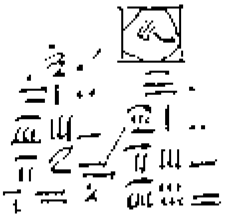
c)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

Luego la sucesión de los números triangulares es divergente.

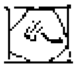
# ANEXO V: EL PAPIRO RHIND

Su contenido fue publicado por Richard J. Gillins en “Mathematics in the Time of the Pharaohs”, dentro del cual hace referencia a la comparación de áreas en los problemas 48 y 50, que representan el primer intento de una geometría basada en la utilización de figuras sencillas cuyo área se conoce, para obtener el área de figuras más complicadas. Por otra parte puede ser la fuente del cálculo del área del círculo con un valor de $\pi$ = 3.1605.



La resolución es la siguiente

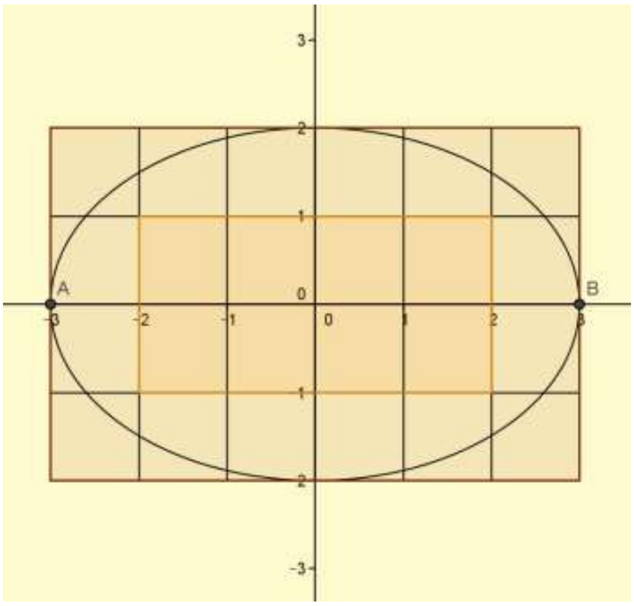
El escriba considera un diámetro igual a 9 y calcula el área del círculo como la de un cuadrado de lado 8 (como hace en el problema 50). Obtiene así un valor de 64 setat.

Según se ve en la figura del problema, en el cuadrado de 9 jet de lado  se dividen los lados en tres partes iguales formando luego un octógono. Ahmes elimina los triángulos formados en los vértices del cuadrado.

El área del octógono es $A = 92 - 4\,\frac{3\times 3}{2} = 63$. Quizá Ahmes pensó que el área del círculo circunscrito era algo mayor que la del octógono representado.

# ANEXO VI: SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DE RAZÓN DE SER

## PROBLEMA RS1:

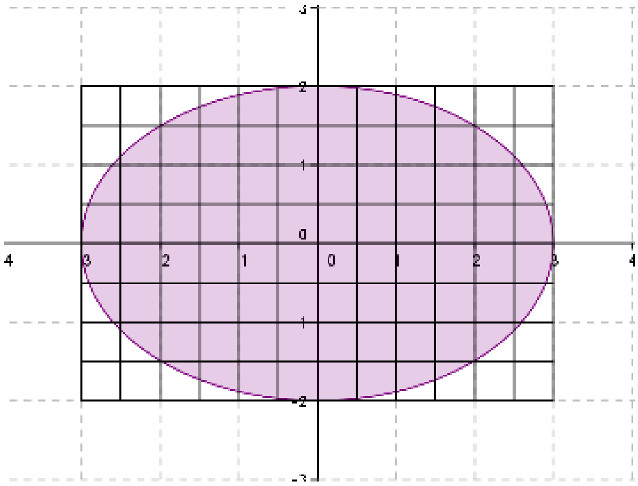


a) Tal y como indica el enunciado, usamos la cuadrícula para aproximar, por exceso y por defecto, el área de la alfombra:

Cota superior del área: $4 \cdot 6 = 24\ u^2$

Cota inferior del área: $2 \cdot 4 = \ 8u^2$

b) Podemos calcular mejores aproximaciones del área haciendo subdivisiones cada vez más pequeñas de la cuadrícula:



Hemos subdividido la cuadrícula de forma que ahora el área de cada cuadrado es de $\frac{1}{4}u^2$. Simplificamos el problema calculando el área interior de la parte de la figura que está en el primer cuadrante. Así simplificaremos el recuento:

Cota superior del área: $4 \cdot 22 \cdot \frac{1}{4} = 22\ u^2$

Cota inferior del área: $4 \cdot 14 \cdot \frac{1}{4} = \ 14\ u^2$

c) Se puede observar que habrá menos diferencia entre las cotas mayor y menor cuantas más subdivisiones consideremos. Así, considerando un número infinito de subdivisiones; es decir, llevando a infinito el número $n$ de subdivisiones, podríamos llegar a calcular el área exacta.

Usando el mismo procedimiento podremos obtener el área de cualquier otra figura cerrada.

d) Área exacta de la figura: $A = \pi ab = \pi \cdot 3 \cdot 2 = 6\pi \cong 18{,}84$

e) Error cometido en la primera aproximación:

Por exceso: $|6\pi - 24| \cong 5{,}16$

Por defecto: $|6\pi - 8| \cong 10{,}84$

Error cometido en la segunda aproximación:

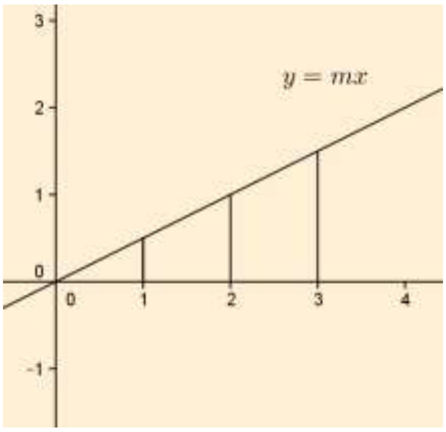
Por exceso: $|6\pi - 22| \cong 3{,}16$

Por defecto: $|6\pi - 14| \cong 4{,}84$

Se observa numéricamente lo geométricamente habíamos visto: cuantas más subdivisiones hagamos de la cuadrícula para aproximar el área interior de la figura, menor será el error cometido.

## PROBLEMA RS2:

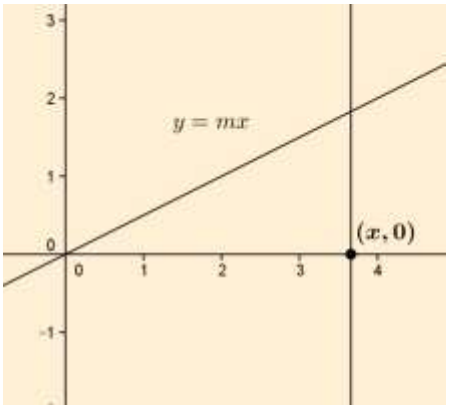
a)




Calculamos el área interior de cada uno de los tres triángulos, formados por:

- La gráfica de la función $y = mx$ , el eje $OX$, y la recta $x = 1$: $T_1 = \frac{1 \cdot m}{2}$
- La gráfica de la función $y = mx$ , el eje $OX$, y la recta $x = 2$: $T_2 = \frac{2 \cdot 2m}{2} = 2m$
- La gráfica de la función $y = mx$ , el eje $OX$, y la recta $x = 3$: $T_3 = \frac{3 \cdot 3m}{2} = \frac{9m}{2}$

b)




Área interior del triángulo formado entre la gráfica de la función $f(x) = mx$ , el eje $OX$ y una recta cualquiera perpendicular al eje $OX$, que pasa por el punto $(x, 0)$:

$$T(x) = \frac{x \cdot mx}{2} = \frac{mx^2}{2}$$

c) Relación entre la expresión del área calculada en el apartado anterior y la de la función $f(x) = mx$: si derivamos la expresión del área, obtenemos la expresión de la función:

$$T'(x) = mx = f(x)$$

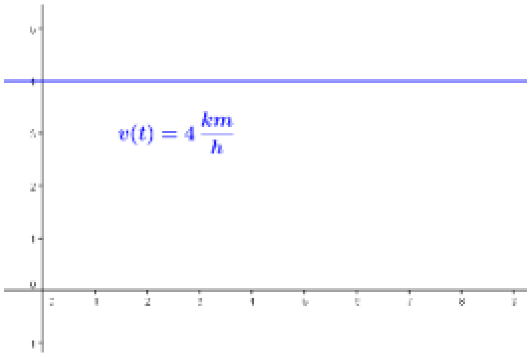
## ANEXO VII: RESOLUCIONES DE ALGUNOS PROBLEMAS

### Problema CP1.1. FUNCIÓN CONSTANTE

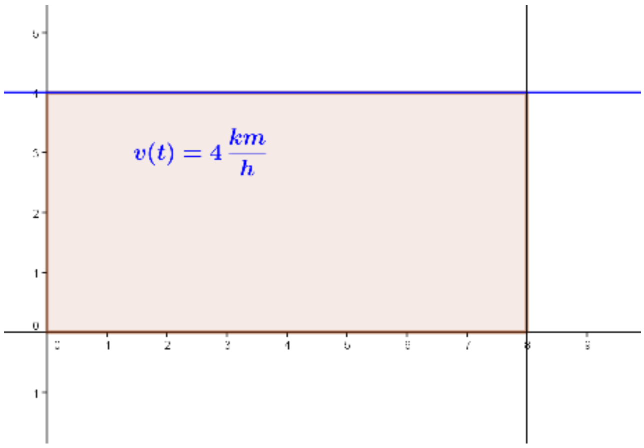
Un móvil circula a una velocidad constante de 4 $\mathrm{km/h}$.

a) Distancia que recorre en 8 horas: $8h \cdot 4\frac{km}{h} = 32km$

b) Gráfica de la función velocidad $v(t)$:

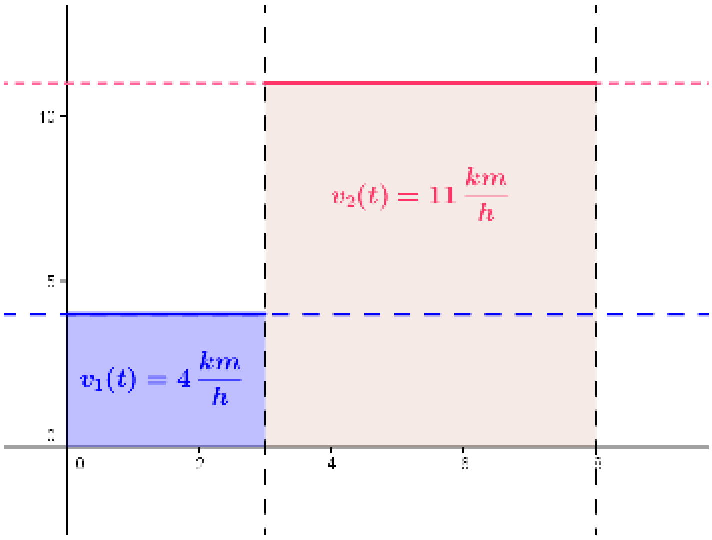



c) Área limitada entre la gráfica de la función $v(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 8$: $8 \cdot 4 = 32u^2$




El área calculada coincide con la distancia que el móvil recorre en $8h$., calculada en el apartado a).

d) Pasadas 3 horas el móvil aumenta su velocidad a 11 km/h durante las 5 horas siguientes;




Calculamos, de dos formas diferentes, su desplazamiento:

- Primera forma: $s = s_1 + s_2 = 3h \cdot 4\frac{km}{h} + 5h \cdot 11\frac{km}{h} = 67km.$
- Segunda forma: fijándonos en el apartado anterior, procederemos a sumar las áreas de los dos rectángulos coloreados:
  $a = a_1 + a_2 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 11 = 67u^2$, que interpretamos como $67km$.

e) Calculamos el espacio recorrido por el móvil en el intervalo [2,4], también de dos formas diferentes:

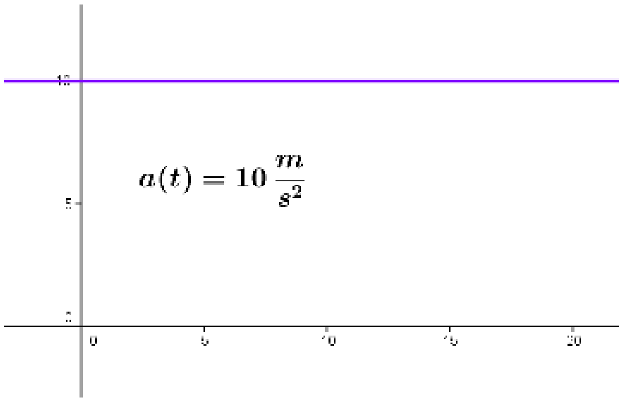
- Primera forma: $s = s_1 + s_2 = 1h \cdot 4\frac{km}{h} + 1h \cdot 11\frac{km}{h} = 15km.$
- Segunda forma:
  $a = a_1 + a_2 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 11 = 15u^2$, que interpretamos como $15km$.

f) El área bajo la función $v(t)$ de la figura, en un intervalo $[t_1, t_2]$ representa el espacio recorrido por el móvil en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$.

g) El desplazamiento del móvil en un tiempo $t$ en la función inicial será el área del rectángulo de altura 4 y base $t$.

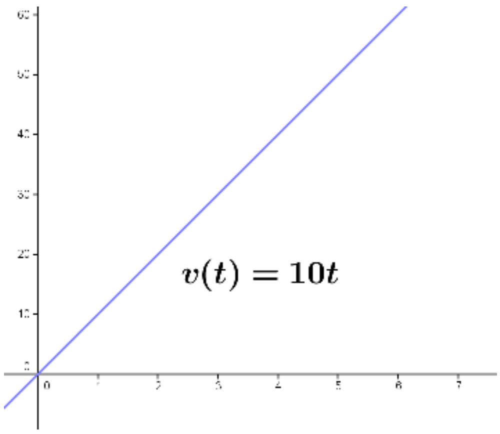
## Problema CP1.3. FUNCIÓN LINEAL

a) Representamos la gráfica aceleración-tiempo; $a = 10\, m/s^2$




El área bajo la gráfica representa la velocidad que la piedra lleva en un instante de tiempo t.

b) $v(t) = v_0 + at = 10t$; representamos la gráfica de la velocidad en función del tiempo t:

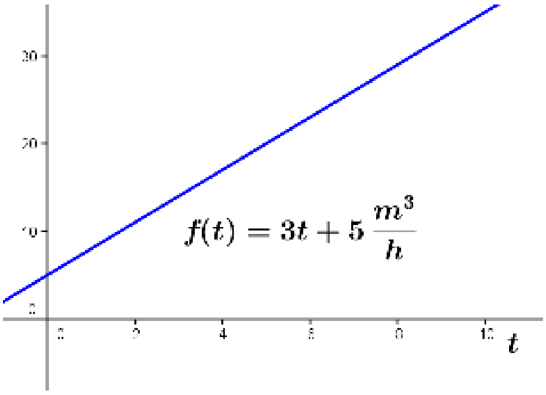



c) $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 6^2 = 180m.$

d) El área encerrada por la función $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ en el intervalo $[0,6]$, que es el área del triángulo de base 6 y altura $\mathrm{v}(\mathrm{t}) = 10 \cdot 6 = 60$, $A = \frac{6 \cdot 60}{2} = 180\ u^2$, representa la distancia que la piedra ha recorrido en 6 segundos.

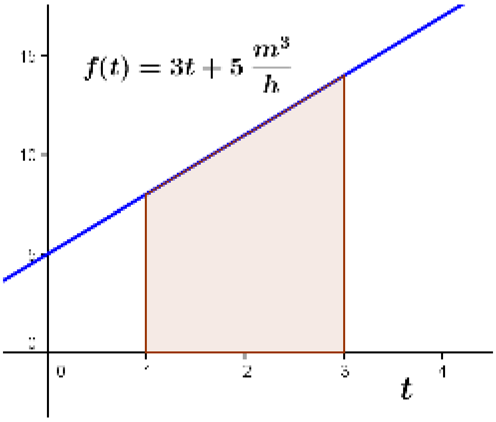
### Problema CP1.4. FUNCIÓN AFÍN

a) Gráfica del caudal $f(t) = 3t + 5 \; m^3/h$ en función del tiempo:




b) El área encerrada por la función en el intervalo $[0, 4{,}5]$ representa el volumen de agua de la piscina que ha sido expulsada en $4{,}5 \; h$.

c) Para calcular el volumen de agua que se ha expulsado entre la primera y la tercera horas después de haber activado el sistema de vaciado, representamos el área bajo la gráfica de la función, en el intervalo $[1, 3]$:



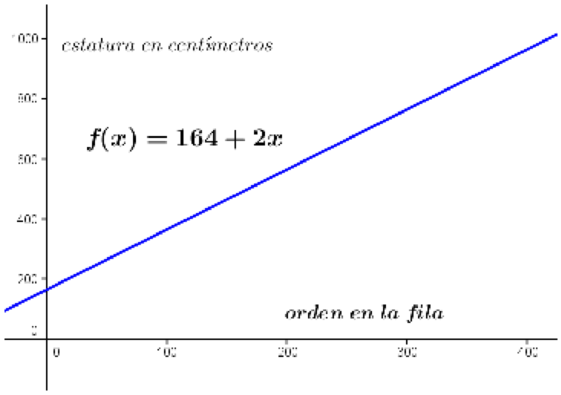

Calculamos el área del trapecio:

$$A = \frac{B \cdot b}{2} h = \frac{f(3) \cdot f(1)}{2} 2 = 14 \cdot 8 = 112u^2$$

Así, el volumen de agua expulsado entre la primera y la tercera hora después de haber activado el sistema de vaciado ha sido de $112m^3$

## Problema CP1.5 FUNCIÓN AFÍN

a) Representamos la función  de las estaturas en centímetros de las 10 personas: $f(x) = 164 + 2x$




b) Calculamos la suma de las estaturas de las 10 personas, que ocupan los lugares $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ y \ 9$ de la fila:

$$(164 + 2 \cdot 0)(164 + 2 \cdot 1) + (164 + 2 \cdot 2) + \cdots + (164 + 2 \cdot 9)$$
$$= 164 \cdot 10 + 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 1730 \ cm.$$

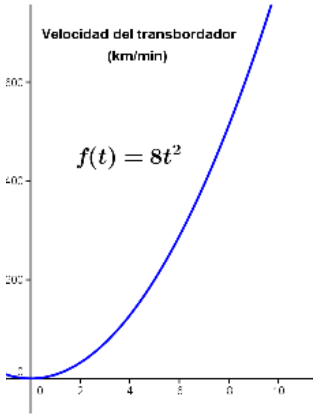
c) El área bajo la gráfica de la función, entre los valores $x = 0$ y $x = 10$ es el área del trapecio de bases $f(0)$ y $f(9)$ y altura9:

$$A = \frac{164(164 + 18)}{2} 9 = 14924 \ u^2$$

Este dato no tiene sentido en el contexto del problema. En primer lugar, la variable independiente no es continua, y, en segundo lugar, la función no representa a una magnitud derivada.

## Problema CP1.6. FUNCIÓN CUADRÁTICA

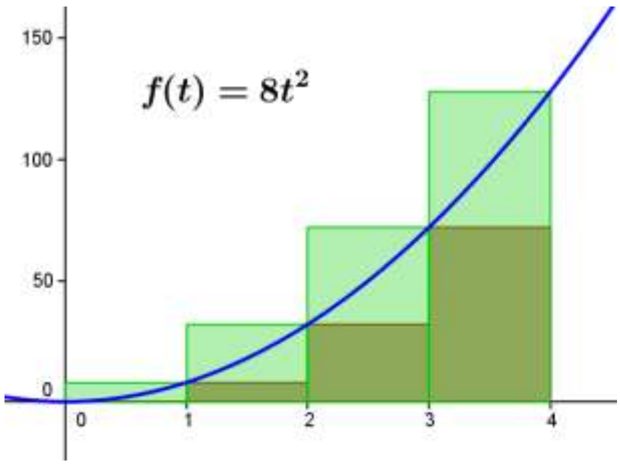
a) Gráfica de la función $\boldsymbol{f(t) = 8t^2}$:




b) Subdividimos el intervalo [0, 4] en 4 subintervalos de longitud 1, y calculamos el valor de la función en cada uno de los extremos de cada subintervalo.

$$\boldsymbol{f(0) = 0;\;\; f(1) = 8;\;\; f(2) = 32;\;\; f(3) = 72;\;\; f(4) = 128}$$

c) Dibujamos dos tipos de rectángulos para cada uno de los subintervalos; los que tienen por base la amplitud de cada subintervalo y por altura el mínimo y el máximo de la función en el subintervalo. Los llamaremos rectángulos superiores y rectángulos inferiores.




d) Suma de las áreas de los rectángulos superiores:

$$\boldsymbol{S_{sup} = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 72 + 1 \cdot 128 = 240}$$

Suma de las áreas de los rectángulos inferiores:

$$\boldsymbol{S_{sup} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 72 = 112}$$

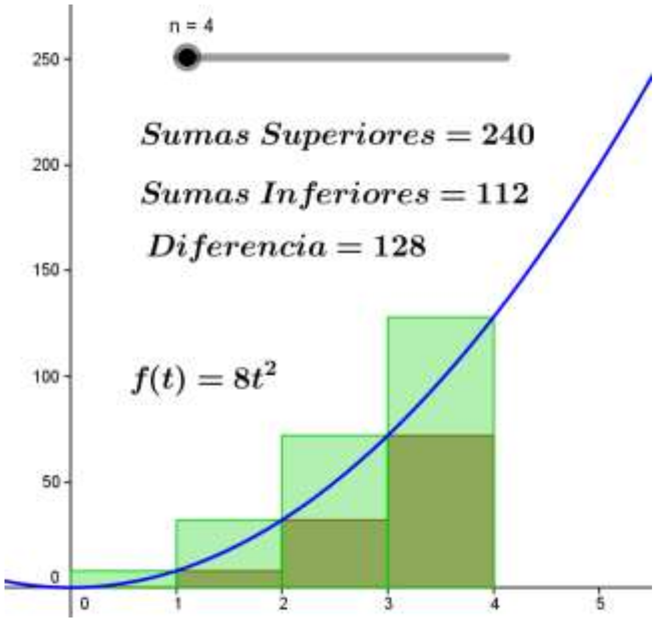
e) Una aproximación al área bajo la gráfica de esa función será un número comprendido entre ambas sumas; por ejemplo, la media de ambas:

$$\frac{\mathbf{240+112}}{\mathbf{2}} = \mathbf{176}$$

---

### Práctica con Geogebra

Siguiendo las instrucciones del guion para la construcción de un applet con Geogebra, obtenemos la siguiente gráfica:




f) Consideramos ahora 5, 10, 20, 40, 60, 80 y 100 subdivisiones, y rellenamos la siguiente tabla resumen de resultados:

---

| n | $S_{sup}$ | $S_{inf}$ | $S_{sup} - S_{inf}$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 240 | 112 | 128 |
| 8 | 140 | 204 | 64 |
| 16 | 155 | 187 | 32 |
| 32 | 162,5 | 178,5 | 16 |
| 48 | 165,37 | 176,04 | 10,67 |
| 64 | 166,69 | 174,69 | 8 |
| 80 | 167,48 | 173,88 | 6,4 |

---

g) Consideramos una subdivisión en $4n$ subintervalos de longitud $h = \frac{1}{n}$ y calculamos:

El área de los rectángulos superiores e inferiores, en función de n:

Considerando los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots 4n$

$$A_{sup}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4n} f(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4n} 8{x_i}^2 = \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{4n} (\frac{i}{n})^2 = \frac{8}{n^3}\frac{4n(4n+1)(8n+1)}{6}$$

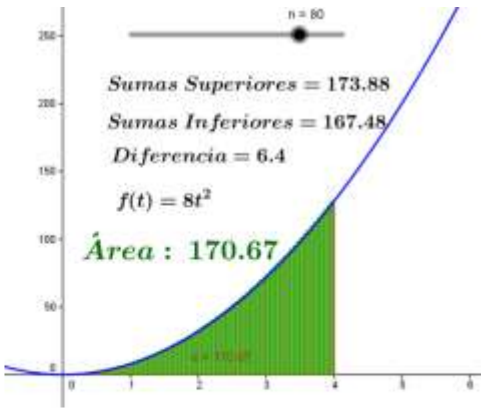
$$A_{inf}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4n} f(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4n} 8{x_{i-1}}^2 = \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{4n-1} (\frac{i}{n})^2 = \frac{8}{n^3}\frac{(4n-1)4n(8n-1)}{6}$$

h)

$$\lim_{n\to\infty} A_{sup}(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}\frac{4n(4n+1)(8n+1)}{6} = \frac{512}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_{inf}(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}\frac{(4n-1)4n(8n-1)}{6} = \frac{512}{3}$$

i) Usando el comando Integral de Geogebra observamos que obtenemos el área, que coincide con el apartado anterior.

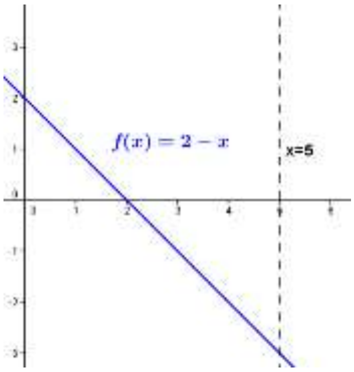



j) Calculemos el área entre otros puntos:

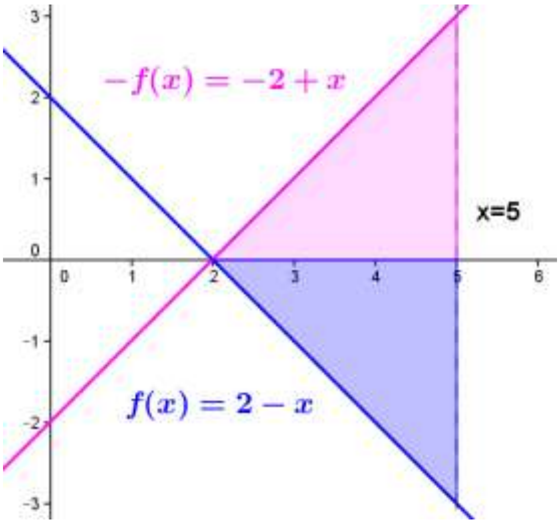
| A $(a, 0)$ | B $(b, 0)$ | Área |
|---|---|---|
| 0 | 5 | 333,3 |
| 0 | 6 | 576 |
| 0 | 3 | 72 |
| 1 | 5 | 330,67 |
| 2 | 5 | 312 |
| 2 | 4 | 149,33 |
| a | b | $\frac{8}{3}(b^3 - a^3)$ |

### Ejercicio CP1.8.

Calculamos el área encerrada entre la función $f(x) = 2 - x$, el eje OX y las rectas $x = 2$ $y\ x = 5$:




Observamos que será equivalente a calcular el área encerrada entre la función opuesta $-f(x) = -2 + x$, el eje OX y las rectas $x = 2\ y\ x = 5$:

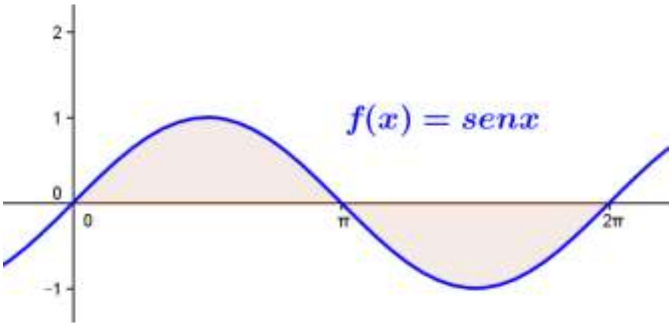



Se trata del área del triángulo de base $b = 3$ y altura $h = -2 + 5 = 3$:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{9}{2}$$

## Ejercicio CP1.9.

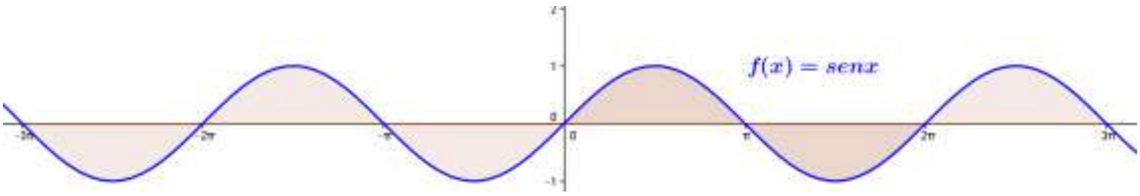
a) Buscamos la integral encerrada entre la función $f(x) = senx$ , el eje $OX$ y las rectas $x = 0$ $y$ $x = 2\pi$:




Usando el comando integral del software Geogebra, observamos que el valor de la integral es 0;

b) Observamos geométricamente que el área encerrada entre la función, el eje OX y el intervalo $[0,2\pi]$ será el doble que el área encerrada entre la función, el eje OX y el intervalo $[0, \pi]$.

c)




Si las rectas son $\mathbf{x = -3\pi}$ y $\mathbf{x = 3\pi}$ el área encerrada también será 0.

Podemos concluir que el hecho de que una función tenga algún tipo de simetría, par ($\boldsymbol{f(x) = f(-x)}$) o impar ($\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$), o de periodicidad $\boldsymbol{f(x + T) = f(x)}$, en el intervalo donde estemos calculando su área o integral, será decisivo a la hora de reducir los cálculos.

## Ejercicio CP1.10.

Sabemos que una función f(x) continua,

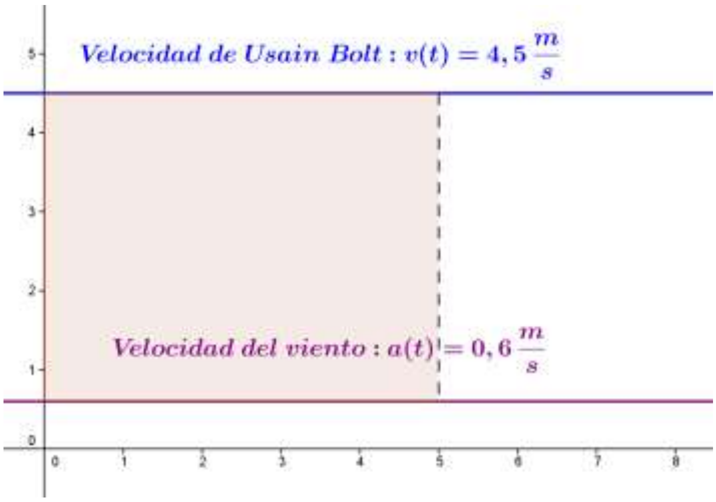
a) Es simétrica par.
b) $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[0, 7]$.
c) El valor de su integral en el intervalo $[0, 7]$ es $12$.

Como la función es simétrica par, o lo que es equivalente, su gráfica es simétrica respecto del eje $OY$, el área encerrada entre la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -7$ y $x = 7$ será dos veces el área encerrada entre la función, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 7$, que coincide con el valor de su integral en el intervalo $[0, 7]$.

Concluimos entonces que el área buscada será $24$.

## Problema CP1.11

**a)** Dibujamos las función velocidad del atleta, $v(t) = 4{,}5\ m\ /\ s$ , y velocidad del aire, $a(t) = 0{,}6\ \ m\ /\ s$ ,en el intervalo de tiempo $[0, 5]$:




El efecto que produce el viento en el atleta es el de disminuir su velocidad; así, habremos de restar ambas funciones para calcular el espacio recorrido, es decir, habremos de calcular el área del rectángulo de base $b = 5$ y altura $h = 4{,}5 - 0{,}6$:

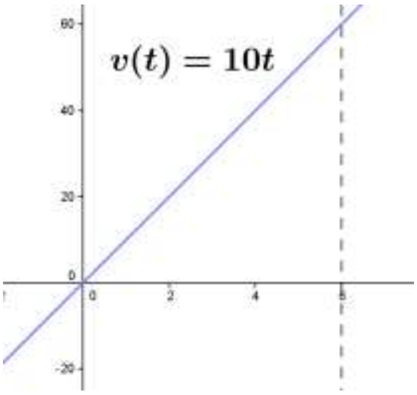
$A = 5 \cdot (4{,}5 - 0{,}6) = 5 \cdot 3{,}9 = 19{,}5\ m.$

Si el viento fuese a su favor, produciría un aumento en la velocidad del atleta; entonces, habríamos de sumar las funciones velocidad para calcular el área.

$A = 5 \cdot (4{,}5 + 0{,}6) = 5 \cdot 5{,}1 = 25{,}5\ m.$

### Problema CP2.1

a) Representamos la gráfica de la velocidad en función del tiempo $v(t) = 10\,m/s$

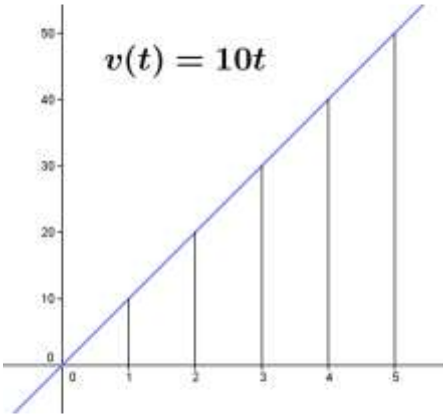



b) La integral definida $\int_0^6 \mathbf{v(t)dt}$ es el área encerrada bajo la gráfica de la función $\mathbf{v(t)} = \mathbf{10\ m/s}$, el eje $\boldsymbol{OX}$ y las rectas $\boldsymbol{x = 0}$ y $\boldsymbol{x = 6}$, es decir, el área del triángulo de base $\boldsymbol{b = 6}$ y altura $\boldsymbol{h = 60}$:$\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{6 \cdot 60}}{\mathbf{2}} = \mathbf{180}$m.

c) Calculamos las áreas de los correspondientes triángulos para obtener el espacio que ha recorrido la piedra cuando han transcurrido 1, 2, 3, 4 y 5 segundos:

$$\boldsymbol{A_1 = \frac{1 \cdot 10}{2} = 5m.;\ A_2 = \frac{2 \cdot 20}{2} = 20m.;\ A_3 = \frac{3 \cdot 30}{2} = 45m.}$$

$$\boldsymbol{A_4 = \frac{4 \cdot 40}{2} = 80m.;\ A_5 = \frac{5 \cdot 50}{2} = 125m.}$$



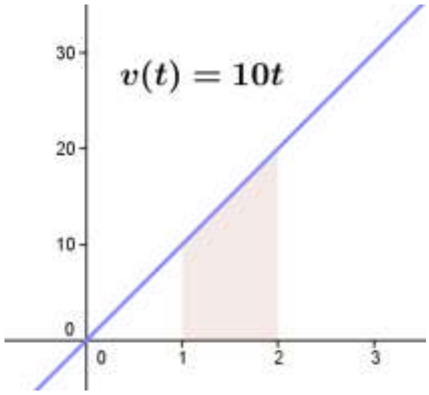

Observando los resultados obtenidos en el apartado anterior, podemos concluir que la función que representa el espacio recorrido en función del tiempo es:

$$\boldsymbol{e(t) = 5t^2}$$

d) $\int_0^t \boldsymbol{v(t)}\, \boldsymbol{dt} = \boldsymbol{5x^2}$; representa, en el contexto del problema, el espacio en metros recorrido por la piedra durante la caída en un tiempo de t segundos; $\boldsymbol{t \leq 6}$

e) La altura que recorre la piedra entre los segundos 1 y 2 será el área del trapecio de bases $\boldsymbol{10\ y\ 20}$ y altura 1:

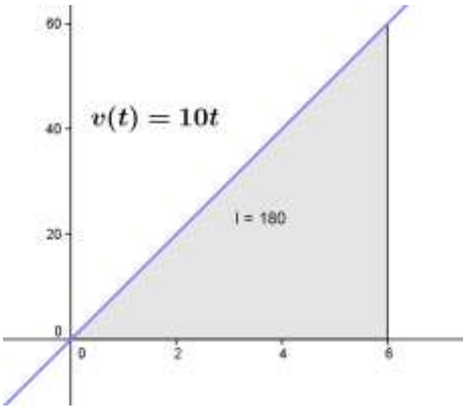
$$\boldsymbol{A = \frac{(10+20)}{2} \cdot 1 = 15m.}$$




Será equivalente al cálculo de dos integrales:

$$\boldsymbol{A = \int_0^2 v(t)dt - \int_0^1 v(t)dt = 5 \cdot 2^2 - 5 \cdot 1^2 = 15m.}$$

f)




$$\boldsymbol{V(t) = \int_0^t v(t)dt}$$

g) $\boldsymbol{V(t)}$ toma los valores del área por debajo de la función v(t).

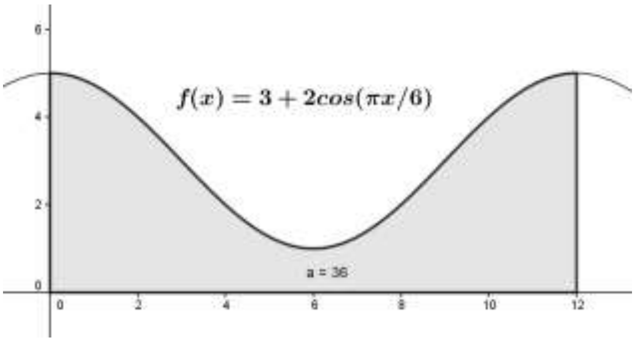
h) $\boldsymbol{v(t)}$ es la derivada de $\boldsymbol{V(t)}$.

## Problema CP2.2

$\boldsymbol{f(x) = 3 + 2\cos\frac{\pi x}{6}}$; calculamos la cantidad de agua que pasa por el río en un año mediante el cálculo de la integral definida:

$$\int_0^{12}\left(3 + 2\cos\frac{\pi x}{6}\right)dx = 3\int_0^{12}dx + 2\cdot\frac{6}{\pi}\int_0^{12}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi x}{6}\,dx =$$

$$3\cdot x\Big|_0^{12} + \frac{12}{\pi}\,sen\frac{\pi x}{6}\Big|_0^{12} = 36\ miles\ de\ hectólitros\ por\ mes$$




---

## Problema CP2.6

Representamos las funciones $f(x) = 3 - 2x$ y $g(x) = 2x - x^2$

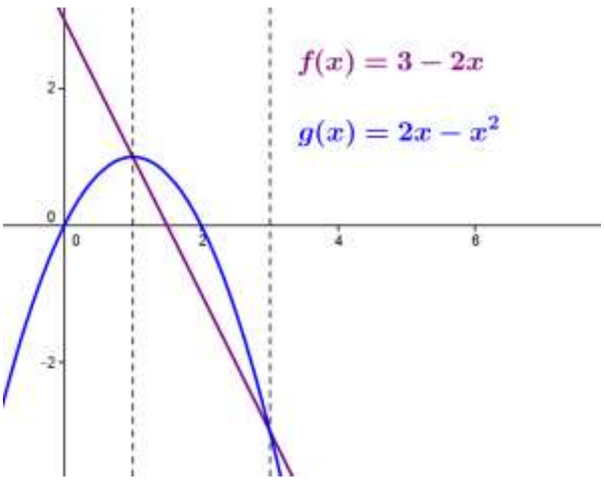
Calculamos en primer lugar sus puntos de corte:

$$3 - 2x = 2x - x^2;\ x^2 - 4x + 3 = 0; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases}3\\1\end{cases}$$

Los puntos de corte son $(3,-3) y\ (1,1)$

$f(x) = 3 - 2x$ es la recta que pasa por ambos puntos de corte, y por el $(\frac{3}{2},0)$

$g(x) = 2x - x^2$ es una parábola cóncava de vértice $(1,1)$, y corta a $OX$ en los puntos: $(0,0) y\ (2,0)$



El área de la parcela será la siguiente:

$\int_1^{3/2}(g(x)-f(x))dx+\int_{3/2}^{2}g(x)-\int_{3/2}^{2}f(x)-\int_2^3(f(x)-g(x)=\int_1^2(-x^2+4x-3)dx-\int_2^3(x^2-4x+3)dx=(-\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}-3x)|_1^2-(\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+3x)|_2^3=-\frac{7}{3}+6-3-\frac{19}{3}+10-3=-\frac{26}{3}+10=\frac{4}{3}u^2$

## Ejercicio CP2.11

La función $f(t)=t^2-1$ es continua y derivable $\forall x\in[0,+\infty)]$, luego aplicando el teorema fundamental de cálculo integral:

$$F(x)=\int_0^x(t^2-1)dt;\ F'(x)=f(x)=x^2-1;$$

Calculamos los extremos relativos de la función; condición necesaria:

$$F'(x)=f(x)=x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$$

Observando el signo de la función derivada,

$$F'(x)<0,\forall x\in[0,1)$$

$$F'(x)>0,\forall x\in(1,+\infty)$$

Así, concluimos que $F(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=1$

# ANEXO VIII: CONSTRUCCIÓN DE UN APPLET DE GEOGEBRA

- Abrimos un documento Geogebra en el que estén habilitados los ejes de coordenadas. Introduce con el teclado la función $f(x)$ para que el software la represente.
- Introducimos dos puntos que el programa denotará A y B, y sitúalos en el eje de abscisas, $x = a$ y $x = b$. Nuestro objetivo es hallar el área bajo la gráfica de la función $f(x)$ entre los puntos $x = a$ y $x = b$.
- Creamos un deslizador, introduciendo un rango de variación desde 1 a 100, con un salto y una anchura determinados.
- Situamos el deslizador a la derecha de la gráfica de la función, y lo renombramos con la letra n.
- Introducimos con el teclado la orden: $SumaInferior[v(t), x(A), x(B), n]$ El software dibujará los rectángulos inferiores de amplitud la longitud del intervalo dividido por n, y guardará en una variable el valor numérico de las sumas inferiores que representan las sumas de las áreas de dichos rectángulos.
- Introducimos con el teclado la orden: $SumaSuperior[f(x), x(A), x(B), n]$; esta vez, el software dibujará los rectángulos superiores de amplitud la longitud del intervalo dividido por n, y guardará en una variable el valor numérico de las sumas superiores que representan las sumas de las áreas de dichos rectángulos.
- Si introducimos con el teclado la orden $SumaSuperior[f(x), x(A), x(B), n] - SumaInferior[f(x), x(A), x(B), n]$ se guardará en una variable el valor numérico de la diferencia entre las sumas superiores y las sumas inferiores. Será útil renombrar dicha variable y llamarla diferencia.
- Si activamos la vista algebraica del menú, visualizaremos de forma cómoda las variables que han sido generadas, y podremos cambiar sus propiedades.
- Si ahora introducimos la orden $Integral[v(t), x(A), x(B)]$, geogebra coloreará el recinto determinado bajo la curva de la función $f(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ determinadas por los puntos A y B.