

# **Ecuaciones Diferenciales Implícitas y Clasificación de sus Singularidades**



**Sergio Asensio Puyuelo**  
Trabajo de fin del grado de Matemáticas  
Universidad de Zaragoza



## **RESUMEN EN INGLÉS**

A well-known geometrical approach to study implicit differential equations

$$F(x, y, p) = 0 \quad p = \frac{dy}{dx}, \quad (1)$$

consists of the lift the multivalued direction field defined by equation (1) on the  $(x, y)$ -plane to a single-valued direction field  $\chi_F$  (wich is called the lifted field) on the surface  $\mathcal{F}$  given by the equation  $F(x, y, p) = 0$  in the  $(x, y, p)$ -space. In this work, the function  $F$  is always supposed to be  $\mathcal{C}^\infty$  and regular. The lifted field  $\chi_F$  is an intersection of the contact planes  $dy = p dx$  with the tangent planes to the surface  $\mathcal{F}$ , that is,  $\chi_F$  is defined by the vector field:

$$\dot{x}(t) = F_p, \quad \dot{y}(t) = pF_p, \quad \dot{p}(t) = G = -(F_x + pF_y), \quad (2)$$

whose integral curves are 1-graphs of integral curves (briefly, solutions) of equation (1). Conversely, solutions of (1) are  $\pi$ -projections of integrals curves of  $\chi_F$ , where  $\pi$  is the projection from the surface  $\mathcal{F}$  to the  $(x, y)$ -plano along the  $p$ -direction (called vertical).

For instance, this approach can be used for studying the local behaviour of solutions of (1) near so-called singular points- points of the surface  $\mathcal{F}$  where  $F_p = 0$ , that is, equation (1) cannot be locally resolved with respect to  $p$  by the implicit function theorem. Moreover, this method allows to get a stable list of local normal forms of equation (1). Recall that two implicit differential equations are called smoothly (topologically) equivalent if there exists a diffeomorphism (homeomorphism) of the  $(x, y)$ -plane that sends integral curves of the first equation to integral curves of the second one.

To describe the main results of this sort, we need to give some definitions. The locus of singular points of equation (1) is called the *criminant* or the *critical locus*  $\mathcal{K}$ , and it is given by the equalities  $F = 0$ ,  $F_p = 0$ . The projection  $\pi(\mathcal{K})$  on the  $(x, y)$ -plane is called the discriminant curve. The set  $\mathcal{L}$  is given by the equalities  $F = 0$ ,  $F_x + pF_y = 0$  and is called the inflection curve. A singular point  $T_0 = (x_0, y_0, p_0)$ , of equation (1) is called proper if  $F_x + pF_y \neq 0$ , that is, vector field (2) does not vanish at  $T_0$ ; otherwise,  $T_0$  is called improper.

Improper singular points belong to the intersection  $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ ; they are characterized by the condition that the surface  $\mathcal{F}$  is not regular or it is tangent to the contact plane. Without loss of generality further we always assume 0 to be the origin in the  $(x, y, p)$ -space (this can be obtained by an appropriate affine map of the  $(x, y)$ -plane).

One of the main objectives in singularity theory is to charactize the singularities of smooth functions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  that are stable under small perturbations of function  $f \rightarrow f_\epsilon$  (singularity does not disappear under  $f_\epsilon$  and it is of the same type ). We work with germs, i. e everything happens in sufficiently small neighborhoods of singular points This is equivalent to studying of generic singularities of mappings  $M^n \rightarrow N^m$ , where  $M^n$  and  $N^m$  are a real smooth  $n$ -manifold and an  $m$ -manifold respectively. It is natural to pose the problem to characterize for smooth functions  $f : M^n \rightarrow N^m$  called *normal forms*, given in the form of symple polynomial functions, and to determine conditions which imply that a given function is (locally) diffeomorphic to such a normal form.

In 1995 *H. Whitney* studied the case  $f : M^2 \rightarrow N^2$  and discovered that there exist exactly two stable singularities, the main idea is that given function:

$$z = f^1(x, y), \quad w = f^2(x, y), \quad f^1(0) = f^2(0) = 0 \quad (3)$$

in a neighborhood of the origin, with Jacobian:

$$\begin{pmatrix} f_x^1 & f_y^1 \\ f_x^2 & f_y^2 \end{pmatrix}$$

its singular points are defined by the condition  $|A_f| = 0$ , i.e,  $\text{rg } A_f = 0$  or  $\text{rg } A_f = 1$ . The set  $S_1 \equiv \{(x, y) : \text{rg } A_f(x, y) = 0\}$  in generic case it is empty, so we will study the singularities over  $S_2 \equiv \{(x, y) : \text{rg } A_f(x, y) = 1\}$ . Given  $x_0 \in S_1$ , the map (3) is locally diffeomorphic to the function:

$$z = F(x, y), \quad w = y, \quad F(0) = 0 \quad (4)$$

in a neighbourhood of  $x_0$  where  $F$  is a smooth function. Whitney characterized *fold* and *pleat* singularities in new coordinates as follow:

- **Fold Singularities** :  $F_x(0) = 0, F_{xx}(0) \neq 0$
- **Pleat Singularities** :  $F_x(0) = 0, F_{xx}(0) = 0, F_{xy}(0) \neq 0, F_{xxx}(0) \neq 0$

These singularities are called *fold* and *pleat*, respectively. Whitney also proved the called **Whitney Theorem**, it said that in neighborhoods of fold and pleat any map  $f : M^2 \rightarrow N^2$  is respectively diffeomorphic to the following normal forms:

- $z = x^2, w = y$
- $z = x^3 + xy, w = y$

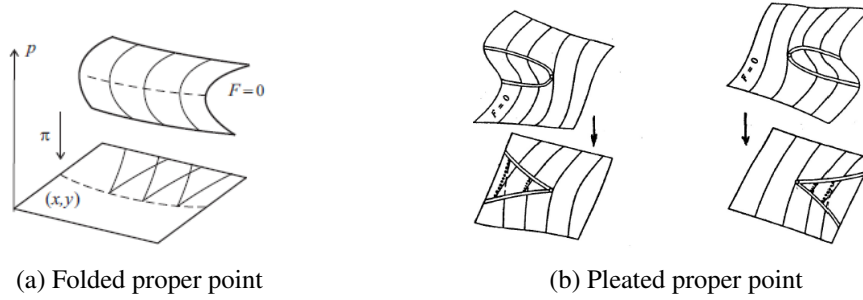


Figure 1

So, what is the relationship between *fold* and *pleat* singularities defined by Whitney and singularities of  $F(x, y, p)$ ?

As we are working with regular functions  $F$ , that means that for any singularity 0 of  $\mathcal{F}$  ( $F_p(0) = 0$ ) with  $F_x(0)$  and  $F_y(0)$ , at least one of them is not 0. If we supposed that  $F_x(0) \neq 0$ , by implicit function theorem we know that in a neighbourhood  $U_0 \subseteq \mathcal{F}$  of the origin we can express  $F(x, y, p) = 0$  as  $F(x(y, p), y, p) = 0$  with  $x : (y, p) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , being  $D$  a neighbourhood of  $(0, 0)$ . So considering the locally  $p$ -projection of  $\mathcal{F}$ , given by the function  $g(y, p) : D \subseteq M^2 \rightarrow N^2$   $g(y, p) = (x(y, p), y)$ , we can use Whitney theory over  $g$ , and making some calculations we can determinate *fold* and *pleat* stable singularities of  $F$ . If we use the same arguments with  $F_y(0) \neq 0$  in our calculus, as we are considering functions  $F \in \mathcal{C}^{(\infty)}$  crossed partial derivates coincide and we would get the same result.

- **A folded proper point.** ( $F_{pp}(0) \neq 0$  and  $G(0) \neq 0$ ). The lifted field  $\chi_F$  is defined, the critical locus  $\mathcal{K}$  is regular and not vertical at 0, and the projection  $\pi$  has a fold at all points of  $\mathcal{F}$ . In a neighbourhood of 0 each integral curve of  $\chi_F$  transversally intersects  $\mathcal{K}$ , and the corresponding solution of equation (1) has a cusp on the discriminant curve. Moreover, the whole family of solutions of (1) can be brought to the normal form  $p^2 = x$  by a  $\mathcal{C}^{(\infty)}$ -smooth diffeomorphism of the  $(x, y)$  - plane preserving the point 0. This corresponding normal form is named after italian mathematician Maria Cibrario (who established it in the analytic category).
- **A pleated proper point.** ( $\{F_{pp}(0) = 0, F_{ppp}(0) \neq 0\}$  and  $\{F_{xp}(0) \neq 0 \text{ or } F_{yp}(0) \neq 0\}$ ). The lifted field  $\chi_F$  is defined, the critical locus  $\mathcal{K}$  is regular and it has the vertical tangential direction at 0, the projection  $\pi$  has a pleat. There is no a visible classification for equation (1) in this case, so we will not study this kind of singularities in this work.
- **A folded improper point** ( $F_{pp}(0) \neq 0$  and  $G(0) = 0$ ) The critical locus  $\mathcal{K}$  is regular and not vertical at 0, the projection  $\pi$  has a fold at all points of  $\mathcal{K}$ , but the lifted field  $\chi_F$  is not defined at 0 (the surface  $\mathcal{F}$  is tangent to the contact plane). In this case, as 0 is a critical point of  $\chi_F$  we

can study the linearization of this field  $J_{\chi_F}(0)$  restricted to  $T_{\mathcal{F}}$  being  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  eigenvalues of  $J_{\chi_F}(0)$ . If  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ , have got non-null real part, by Hartman-Grobman theorem  $\chi_F$  and  $J_{\chi_F}(0)$  are topologically equivalent in a neighbourhood of 0. There exists a smooth diffeomorphism over a neighbourhood of folded improper points satisfying these conditions, that transform (1) into the normal form:  $(p + \alpha x)^2 = y$ , where the parameter  $\alpha$  satisfies  $\alpha < 0$ ,  $0 < \alpha < 1/8$ ,  $\alpha > 1/8$  if the point 0 is respectively a saddle, a node or a focus.

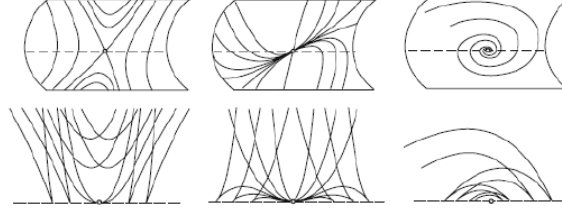


Figure 2: Folded improper point

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>vii</b>
<b>1 Teoremas de interés sobre la Teoría de Singularidades</b>	<b>1</b>
1.1 Multiplicidad de puntos críticos de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ . . . . .	1
1.2 Teorema de la División . . . . .	1
1.3 Teorema de la Función Implícita . . . . .	5
<b>2 Ecuaciones Diferenciales Implícitas y sus Singularidades</b>	<b>7</b>
2.1 Nociones básicas sobre las ecuaciones diferenciales . . . . .	7
2.2 Ecuaciones Diferenciales Implícitas: Proyección . . . . .	8
<b>3 Teoría de Whitney sobre Singularidades</b>	<b>13</b>
3.1 Teoría de Singularidades . . . . .	13
3.2 Teoría de Singularidades de Whitney . . . . .	14
<b>4 Ecuaciones Diferenciales Implícitas: Formas Normales y Diagrama de Fases</b>	<b>17</b>
4.1 Clasificación de Singularidades de una Ecuación Diferencial Implícita . . . . .	17
4.2 Forma normal de una Singularidad Propia (Fold) . . . . .	19
4.3 Forma normal de una Singularidad Impropia (Fold) . . . . .	22
<b>Bibliografía</b>	<b>25</b>





# Prólogo

En el estudio de ecuaciones diferenciales implícitas:

$$F(x, y, p) = 0 \quad p = \frac{dy}{dx} \quad (5)$$

existen dos casos altamente diferenciados.

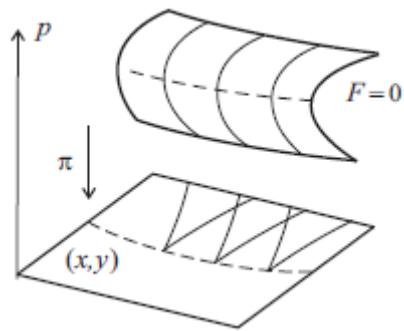
Si en  $F(x, y, p)$  podemos obtener una ecuación explícita global de la variable  $p$ :  $p = \varphi(x, y)$ , ésta nos define la pendiente de las curvas integrales que son solución de (5) en cada punto del plano y con ello podemos dibujar un diagrama de fases sobre el mismo, el cual nos aporta información sobre la forma que tienen las curvas integrales pese a haber casos en que no podamos integrar la ecuación diferencial y obtener la ecuación de las mismas. Sin embargo ¿Cómo actuamos si no podemos despejar  $p$  de forma explícita global?. La idea principal consiste en estudiar la ecuación diferencial (5) en el lenguaje de la superficie  $\mathcal{F} \equiv (x, y, p) \in \mathbb{R}^3 | F(x, y, p) = 0$  (en nuestro estudio siempre trataremos con funciones  $F(x, y, p) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$  regulares), para ello definimos el campo vectorial  $\chi_F$  sobre la misma delimitado por la intersección del plano de contacto  $dy - p dx = 0$  con el plano tangente  $F_x dx + F_y dy + F_p dp = 0$  a la superficie en cada punto de la misma, dicho campo viene dado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = F_p \quad \dot{y} = p F_p \quad \dot{p} = -(F_x + p F_y)$$

En los puntos donde  $F_p \neq 0$  (*puntos regulares*) el Teorema de la Función Implícita nos asegura que en un entorno de los mismos podemos despejar de forma explícita la variable  $p$  mediante una función  $p = f(x, y)$  con  $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}$  y por tanto aplicar localmente todos los teoremas que nos garantizan la existencia, unicidad y diferenciabilidad de las soluciones de (5). El interés de este trabajo recaerá sobre los puntos de la superficie que cumplan  $F_p = 0$  a los que denotaremos como *puntos singulares* y cuya  $p$ -proyección son los puntos críticos de (5) en el  $(x, y)$ -plano.

Uno de los objetivos principales en la teoría de singularidades consiste en caracterizar las singularidades de funciones continuamente diferenciables  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que son estables bajo pequeñas perturbaciones  $f_\varepsilon$  de la función, en el sentido de que éstas no desaparecen ni pierden sus propiedades locales bajo  $f_\varepsilon$ . Como nuestro estudio está centrado en entornos suficientemente pequeños de los puntos singulares, esto es equivalente a considerar las singularidades generales de funciones  $M^n \rightarrow N^m$ , donde  $M^n$  y  $N^m$  son variedades infinitamente diferenciables. Para cada singularidad estable de una función genérica  $f$  es natural tratar de determinar lo que denominamos forma normal (forma canónica) de la singularidad, es decir funciones  $n : M^n \rightarrow N^m$  dadas por expresiones polinómicas simples que son localmente equivalentes a  $f$ .

El matemático H. Whitney descubrió que para el caso de funciones  $f : M^2 \rightarrow N^2$  existen exactamente dos tipos de singularidades estables a las que llamó *singularidad fold* y *singularidad pleat*. Aquí es donde esta la clave de nuestro trabajo, haciendo uso del estudio de Whitney así como del teorema de la función implícita podemos considerar  $f : M^2 \rightarrow N^2$  como la  $p$ -proyección local de nuestra superficie  $\mathcal{F}$  sobre el  $(x, y)$ -plano y con ello determinar que condiciones caracterizan a las singularidades estables de  $\mathcal{F}$ . Una vez halladas, nos centraremos en la búsqueda de sus formas normales que nos ayudarán a estudiar y entender el comportamiento de las curvas integrales en un entorno de la singularidad en cuestión.



# Capítulo 1

## Teoremas de interés sobre la Teoría de Singularidades

El objetivo principal de éste capítulo será estudiar la forma de una función en un entorno de un punto crítico en función de la multiplicidad del mismo. Siempre trataremos con funciones de clase  $\mathcal{C}^{(\infty)}$ .

### 1.1 Multiplicidad de puntos críticos de funciones de clase $\mathcal{C}^{(\infty)}$

**Definición 1.1.1.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $\mathcal{C}^{(\infty)}$ , diremos que  $x^*$  es punto crítico de  $f$  si cumple que  $\frac{df}{dx}(x^*) = 0$ . Si existe un número natural  $\mu$  tal que:

$$\frac{df}{dx}(x^*) = 0, \dots, \frac{d^\mu f}{dx^\mu}(x^*) = 0, \quad \frac{d^{\mu+1}f}{dx^{\mu+1}}(x^*) \neq 0 \quad (1.1)$$

diremos que el punto crítico tiene multiplicidad  $\mu$  respecto de  $f$ . Si  $x^*$  no es punto crítico de  $f$ , pondremos  $\mu = 0$  y si  $x^*$  es punto crítico con multiplicidad infinita diremos  $\mu = \infty$ , sin embargo en nuestro estudio sólo trabajaremos con puntos críticos de multiplicidades finitas.

**Lema 1.1.2. Lema de Hadamard** En un entorno del origen, cualquier función  $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ , puede ser representada de la forma:

$$f(x) = f(0) + x_1 g_1(x) + \dots + x_p g_p(x), \quad x = (x_1, \dots, x_p) \quad (1.2)$$

con  $g_i(x) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

*Demostración.* Ver [12] □

Estos dos teoremas nos servirán más adelante para poder desarrollar ciertas funciones de manera que nos facilite el estudio del comportamiento de las curvas integrales en un entorno de los puntos singulares de una ecuación diferencial implícita  $F(x, y, p) = 0$ ,  $p = \frac{dy}{dx}$ .

### 1.2 Teorema de la División

Tomemos  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , función de clase  $\mathcal{C}^{(\infty)}$  y separemos los argumentos de  $F$  de manera que  $x \in \mathbb{R}$  tome el papel de variable principal, e  $y \in \mathbb{R}^p$  como variable paramétrica. Fijado  $y \in \mathbb{R}^p$ , podemos considerar la función  $g(x) = F(x, y)$ , y por tanto estudiar sus puntos críticos y la multiplicidad de los mismos, coincidiendo éstos con los de la función  $F$  respecto de la variable  $x$ .

**Definición 1.2.1.** Sea  $T_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , punto crítico respecto variable  $x$  de  $F$  ( $F_x(T_0) = g'(x_0) = 0$ ). Definiremos la multiplicidad de  $T_0$  en  $F$  respecto de la variable  $x$  como al  $\mu$  natural que cumpla:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(T_0) = 0, \dots, \frac{\partial^\mu F}{\partial x^\mu}(T_0) = 0, \quad \frac{\partial^{\mu+1} F}{\partial x^{\mu+1}}(T_0) \neq 0. \quad (1.3)$$

Por simplicidad, formularemos a continuación el **Teorema de la División** para el punto crítico  $x_0=0$ , respecto la variable  $x$ . El caso general puede obtenerse facilmente mediante el cambio de variable  $x \rightarrow x + x_0$

**Teorema 1.2.2 (Teorema de la División).** *En un entorno  $U_{T_0}$  del punto crítico  $T_0 = (0, y_0)$  de multiplicidad  $0 \leq \mu < \infty$ , la función  $F(x, y)$ , puede escribirse de la forma:*

$$F(x, y) = F(0, y_0) + \varphi(x, y) \left( x^{\mu+1} + \sum_{i=0}^{\mu} a_i(y) x^{\mu-i} \right). \quad (1.4)$$

con  $a_i(y), \varphi(x, y) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ ,  $\varphi(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in U_{T_0}$  y  $a_i(y_0) = 0$ .

*Demostración.* Ver [9]. □

**Lema 1.2.3.** *Sea la función  $F(x, y) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$  y  $x = \gamma(y) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$  la ecuación de una hipersuperficie tal que  $F(\gamma(y), y) = 0$ ,  $\forall y \in U_{T_0}$  siendo  $U_{T_0}$  entorno del punto  $T_0 = (x_0, y_0)$ . Entonces:*

$$F(x, y) = (x - \gamma(y))\varphi(x, y) \quad (1.5)$$

$\forall (x, y) \in \tilde{U}_{T_0} \subseteq U_{T_0}$  con  $\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ .

*Demostración.* Empecemos efectuando el cambio de variable  $x \rightarrow x - \gamma(y)$  que nos transforma el punto  $T_0 = (x_0, y_0)$  a  $\tilde{T}_0 = (0, y_0)$  y la hipersuperficie  $x = \gamma(y)$  en el hiperplano  $x = 0$ , con  $F(0, y) = 0 \forall y \in U_{\tilde{T}_0}$ , entorno de  $\tilde{T}_0$ . De manera que es suficiente probar el Lema para la curva regular  $\gamma(y) \equiv 0$  y deshacer el cambio de variable anterior, es decir basta probar que:

$$F(x, y) = x\varphi(x, y)$$

$\forall (x, y) \in U_{\tilde{T}_0}$  con  $\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ .

A continuación distinguiremos dos casos posibles:

- **Caso 1:**  $\tilde{T}_0 = (0, y_0)$  es punto crítico de  $F(x, y)$  respecto la variable  $x$  de multiplicidad  $0 \leq \mu < \infty$ . Por el **Teorema de la División 1.2.2**, se sigue que en un entorno  $U_{\tilde{T}_0}$ , la función  $F(x, y)$  puede ser expresada de la forma:

$$F(x, y) = F(0, y_0) + \psi(x, y) \left( x^{\mu+1} + \sum_{i=0}^{\mu} a_i(y) x^{\mu-i} \right)$$

con  $a_i(y), \psi(x, y) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ ,  $\psi(x, y) \neq 0$  y  $a_i(y_0) = 0$

Por hipótesis  $F(0, y_0) = 0$  de manera que la expresión anterior queda de la forma:

$$F(x, y) = \psi(x, y) \left( x^{\mu+1} + \sum_{i=0}^{\mu} a_i(y) x^{\mu-i} \right)$$

Evaluando a continuación  $F$  en  $(0, y)$  y sabiendo que  $\psi(0, y) \neq 0 \forall y \in U_{\tilde{T}_0}$ , deducimos que  $a_\mu(y) = 0$ , quedando entonces la ecuación anterior de la forma:

$$F(x, y) = \psi(x, y) \left( x^{\mu+1} + \sum_{i=0}^{\mu-1} a_i(y) x^{\mu-i} \right) = x\psi(x, y) \left( x^{\mu} + \sum_{i=0}^{\mu-1} a_i(y) x^{\mu-i-1} \right) = x\varphi(x, y);$$

siendo  $\varphi(x, y) = \psi(x, y) \left( x^{\mu} + \sum_{i=0}^{\mu-1} a_i(y) x^{\mu-i-1} \right) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ , por ser producto y suma de funciones  $\mathcal{C}^{(\infty)}$ .

- **Caso 2:**  $\tilde{T}_0 = (0, y_0)$  es punto crítico de  $F(x, y)$  respecto la variable  $x$ , con multiplicidad  $\mu$  infinita ( $\mu = \infty$ ). Tomemos la función  $G(x, y) = x + F(x, y)$  tal que:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(0, y_0) = 1 \neq 0$$

Luego la multiplicidad de  $G$  en  $(0, y_0)$  respecto la variable  $x$  es  $\mu = 0$ . Aplicando nuevamente el Teorema de la División sobre  $G(x, y)$ , deducimos que en un entorno  $U_{\tilde{T}_0}$ , la función  $G(x, y)$  puede ser expresada de la forma:

$$G(x, y) = x + F(x, y) = G(0, y_0) + \psi(x, y)(x + a_0(y))$$

con  $a_0(y), \psi(x, y) \in \mathcal{C}^\infty$ ,  $\psi(x, y) \neq 0$  y  $a_0(y_0) = 0$

Sabiendo que  $G(0, y_0) = 0$ , la expresión anterior queda de la forma:

$$G(x, y) = x + F(x, y) = \psi(x, y)(x + a_0(y))$$

Evalutando a continuación  $G$  en  $(0, y)$  y sabiendo que  $F(0, y) = 0$  y que  $\psi(0, y) \neq 0 \forall y \in U_{\tilde{T}_0}$ , deducimos que  $a_0(y) = 0$ , quedando entonces la ecuación anterior de la forma:

$$G(x, y) = x + F(x, y) = \psi(x, y)x$$

con  $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ . De esta manera obtenemos la función  $F(x, y) = x(\psi(x, y) - 1)$ .

□

**Proposición 1.2.4.** Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y entorno  $U$  de cualquier punto  $T_0 = (0, y_0)$ , cualquier función  $F(x, y) \in \mathcal{C}^\infty$ , puede ser escrita de la forma:

$$F(x, y) = f_0(y) + xf_1(y) + \dots + x^{n-1}f_{n-1}(y) + x^n f_n(x, y) \quad (1.6)$$

donde  $f_i \in \mathcal{C}^\infty$   $i = 0, \dots, n$ .

*Demostración.* Tomemos  $f_0(y) = F(0, y)$  y  $g(x, y) = F(x, y) - f_0(y)$ , entonces la función  $g(x, y)$  se anula en el hiperplano  $x = 0$  y por el **Lema 1.2.3**, tenemos que  $g(x, y) = x\phi(x, y)$ , con  $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ . De manera que obtenemos  $F(x, y) = f_0(y) + x\phi(x, y)$  (Caso  $n = 1$ ). Supongamos cierto para el caso  $n-1$ , entonces:

$$F(x, y) = f_0(y) + xf_1(y) + \dots + x^{n-1}f_{n-1}(x, y)$$

con  $f_i \in \mathcal{C}^\infty$   $i = 0, \dots, n-1$ . Tomemos  $h(x, y) = f_{n-1}(x, y) - f_{n-1}(0, y)$ , que se anula en el hiperplano  $x = 0$ , aplicando nuevamente el **Lema 1.2.3** tenemos que  $h(x, y) = x\phi(x, y)$ , con  $\phi \in \mathcal{C}^\infty$  y quedando la ecuación anterior de la forma:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f_0(y) + xf_1(y) + \dots + x^{n-1}f_{n-1}(x, y) = f_0(y) + xf_1(y) + \dots + x^{n-1}(x\phi(x, y) + f_{n-1}(0, y)) \\ &= f_0(y) + xf_1(y) + \dots + x^{n-1}f_{n-1}(0, y) + x^n\phi(x, y). \end{aligned}$$

□

**Lema 1.2.5.** Sea la función  $F(x, y) \in \mathcal{C}^\infty$  y  $U_{T_0}$  entorno del punto  $T_0 = (x_0, y_0)$  con  $F_x(\gamma(y), y) = 0 \forall y \in U_{T_0}$ . Entonces:

$$F(x, y) = f_0(y) + (x - \gamma(y))^2 \phi(x, y), \quad (1.7)$$

$\forall (x, y) \in U_{T_0}$  con  $\phi(x, y), f_0(y) \in \mathcal{C}^\infty$ .

*Demostración.* Empecemos efectuando el cambio de variable  $x \rightarrow x - \gamma(y)$  que nos transforma el punto  $T_0 = (x_0, y_0)$  a  $\tilde{T}_0 = (0, y_0)$  y la hipersuperficie  $x = \gamma(y)$  en el hiperplano  $x = 0$ , con  $F_x(0, y) = 0 \forall y \in U_{\tilde{T}_0}$ , entorno de  $\tilde{T}_0$ . De manera que es suficiente probar el Lema para la hipersuperficie  $\gamma(y) = 0$  y deshacer el cambio de variable anterior, es decir basta probar que:

$$F(x, y) = x^2 \varphi(x, y) + f_0(y).$$

Por la **Proposición 1.2.4**  $\forall y \in U_{\tilde{T}_0}$ ,  $F(x, y)$  puede ser escrita de la forma:

$$F(x, y) = f_0(y) + x f_1(y) + x^2 f_2(x, y).$$

Como  $F_x(0, y) = f_1(y) = 0$ , entonces  $F(x, y) = f_0(y) + x^2 f_2(x, y) \forall y \in U_{\tilde{T}_0}$  y tenemos la fórmula buscada.  $\square$

**Lema 1.2.6.** *Cualquier función  $f(x, y_1, \dots, y_m) : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f \in \mathbb{R}^{(\infty)}$  puede ser escrita en un entorno del origen de la forma:*

$$f(x, y) = f_1(x^2, y) + x f_2(x^2, y), \quad y = (y_1, \dots, y_m), \quad (1.8)$$

donde  $f_1$  y  $f_2 \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ .

*Demostración.* Estudiaremos la demostración para funciones  $f(x, y) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ . Comenzaremos estudiando el caso  $m = 0$  y más tarde observaremos que cambios deberemos de hacer para el caso  $m > 0$ .

Empezaremos descomponiendo la función  $f$  como la suma de sus partes par e impar:  $f(x) = f_{par}(x) + f_{impar}(x)$ , con:

$$f_{par}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_{impar}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

con  $f_{par}(x), f_{impar}(x) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ .

Empleando el **Lema de Hadamard 1.1.2** podemos desarrollar  $f_{impar}(x) = f_{impar}(0) + x g(x) = x g(x)$ , con  $g(x) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ , función par (por ser  $x$  impar). De manera que para completar nuestra demostración es suficiente con establecer la representación en un entorno del origen:

$$g(x) = f_1(x^2)$$

para cualquier función  $g(x) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ , par.

De acuerdo con el Análisis de Fourier, la serie de Fourier para una función  $g(x) \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ , **par**, viene dada por la **Serie de Fourier de cosenos**:

$$g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx, \quad \text{donde } c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx. \quad (1.9)$$

Sabemos por el desarrollo en serie de Fourier que dicha serie converge uniformemente y absolutamente a  $f(x) \forall x \in [-\pi, \pi]$ . Usando el desarrollo de Taylor en el origen de la función  $\cos(nx)$ , la expresión (1.9) quedaría de la forma:

$$g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (nx)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^{2n}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Dicha serie nos ofrece la representación  $g(x) = f_1(x^2)$  requerida, donde  $f_1$  está bien definida en el intervalo  $[-\pi^2, \pi^2]$  como una serie absolutamente y uniformemente convergente.

$$f_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \xi^n, \quad -\pi^2 \leq x \leq \pi^2. \quad (1.10)$$

Para finalizar la demostración señalaremos los cambios que deberemos hacer para el caso  $m > 0$ . Empezaremos separando los argumentos de la función  $f(x, y_1, \dots, y_m)$ , con  $x$  jugando el papel de *variable principal* e  $y = (y_1, \dots, y_m)$  el de *variable paramétrica*. Descompondremos la función  $f$  como la suma de sus partes par e impar respecto la variable  $x$ :

$$f_{par}(x, y) = \frac{f(x, y) + f(-x, y)}{2}, \quad f_{impar}(x, y) = \frac{f(x, y) - f(-x, y)}{2},$$

La representación  $f_{impar}(x, y) = xg(x, y)$  en un entorno de  $x = 0$ , se puede deducir facilmente de la **Proposicion 1.2.4**, de manera que tomando  $n = 1$ , tenemos la expresión:

$$f_{impar}(x, y) = f_0(y) + xg(x, y). \quad (1.11)$$

con  $g(x, y) \in \mathcal{C}^\infty$ , función par respecto la variable  $x$ . Por ser  $f_0(y) = f_{impar}(0, y) = \frac{f(0, y) - f(0, y)}{2} = 0$   $\forall y \in \mathbb{R}^m$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$f_{impar}(x, y) = xg(x, y).$$

El resto de la demostración consiste en probar:

$$g(x, y) = f_1(x^2, y).$$

para cualquier función  $g(x, y) \in \mathcal{C}^\infty$ , par respecto  $x$ . Usando los mismos razonamientos que en el caso  $m = 0$ , y aproximando en este caso  $g(x, y)$  por su Serie de Fourier Múltiple se puede demostrar la propiedad anterior y con ello el Lema.  $\square$

### 1.3 Teorema de la Función Implícita

**Teorema 1.3.1. Teorema Función Implícita .** Sean  $n, m \in \mathbb{N}$  y nsea  $f$  una aplicación de clase  $\mathcal{C}^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) de un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$  en  $\mathbb{R}^m$ . Dado  $(x_0, y_0) \in \Omega$  para el que  $f(x_0, y_0) = 0$  y  $\det J_y f(x_0, y_0) \neq 0$ , existen abiertos  $U$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $V$  en  $\mathbb{R}^m$ , conteniendo respectivamente a  $x_0, y_0$ , de manera que:

$$U \times V \subseteq \Omega$$

y  $\forall x \in U$  existe un único  $y \in V$  tal que  $f(x, y) = 0$ . Queda así definida una función  $\varphi : U \rightarrow V$  que cumple:

- $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U$ .
- $\varphi \in \mathcal{C}^p$  en  $U$ .

en consecuencia,  $J_\varphi(x) = -J_y f(x, \varphi(x))^{-1} \cdot J_x f(x, \varphi(x))$  para cada  $x \in U$ .

*Demostración.* La demostración puede ser vista en el Apéndice 2 de [5].  $\square$





## Capítulo 2

# Ecuaciones Diferenciales Implícitas y sus Singularidades

En este capítulo, estudiaremos las ecuaciones diferenciales implícitas desde el punto de vista geométrico. El paso principal consistirá en leer la ecuación diferencial implícita:  $F(x, y, p) = 0$ , con  $p = \frac{dy}{dx}$  en el lenguaje de la superficie generada por  $F$  determinando las ecuaciones del campo vectorial  $\chi_F$  tangente a la misma delimitado por la intersección del plano de contacto  $dy - p dx = 0$  con el plano tangente  $F_x dx + F_y dy + F_p dp = 0$  en cada punto de ésta. El objetivo de esta nueva perspectiva de la ecuación diferencial consiste en identificar y hacer distinción entre *singularidad propia* y *singularidad impropia* para posteriormente hacer el estudio individualizado de cada una de ellas a través de la Teoría de Singularidades.

### 2.1 Nociones básicas sobre las ecuaciones diferenciales

**Definición 2.1.1. Ecuación diferencial ordinaria** Definiremos como *Ecuación diferencial ordinaria (EDO)* a la relación funcional:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

de una variable independiente  $x$  (a veces  $x$ ) y de una variable dependiente  $y = y(x)$  y de las derivadas  $y^{(p)}$ ,  $p = 1, \dots, n$ . Se llama **orden** de una ecuación diferencial ordinaria al máximo orden de derivación que interviene en ella. Una ecuación diferencial se dice *explícita* si la derivada de mayor orden aparece despejada en la ecuación e *implícita* en caso contrario. Las nociones que se acaban de introducir se extienden del modo natural al ámbito de los **sistemas de ecuaciones diferenciales (SEDO)**, es decir, sistemas de ecuaciones de la forma:

$$F(x, y_1, y_1', \dots, y_2, y_2', \dots, y_n, y_n', \dots) \begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_2, y_2', \dots, y_n, y_n', \dots) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', \dots, y_2, y_2', \dots, y_n, y_n', \dots) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \dots, y_2, y_2', \dots, y_n, y_n', \dots) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$
$$t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n, F : D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{n+1}$$

en los que se entiende que las función  $F$  está definida sobre un número finito de variables e  $y_1, y_2, \dots, y_n$  representan a las funciones definidas sobre la variable  $x$ .

**Definición 2.1.2. Solución de una ecuación diferencial.** Decimos que una función  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervalo derivable hasta orden  $n$  en  $I$ , es una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales

ordinarias (2.2) si verifica:

$$\begin{aligned} & \left( x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x) \right) \in D, \forall x \in I \\ & y \\ & F \left( x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x) \right) = 0, \forall x \in I. \end{aligned}$$

## 2.2 Ecuaciones Diferenciales Implícitas: Proyección

Sea:

$$F(x, y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}, \quad F \in \mathcal{C}^{(\infty)} \quad (2.3)$$

una ecuación diferencial implícita de primer orden donde no podamos obtener una forma **explícita global**  $p = \frac{dy}{dx} = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  para la derivada. A través del Análisis Matemático, sabemos que si existiera dicha ecuación explícita, está nos aportaría información sobre la pendiente de las rectas tangentes a las curvas integrales solución de la ecuación (2.3) en cada punto del  $(x, y)$ -plano, y con ello podríamos construir el diagrama de fases de dicha ecuación diferencial y "hacernos una idea" de la forma que tienen dichas curvas integrales pese a no conocer su ecuación explícita  $y = y(x)$ . Pero como no es ese el caso ¿qué forma tienen las curvas integrales solución de la ecuación (2.3)?

Para responder a esa pregunta deberemos pensar de forma **local**, es decir deberemos estudiar sobre qué puntos del plano  $(x, y)$  si podemos obtener una ecuación explícita para la derivada  $p = \frac{dy}{dx}$  en un entorno de los mismos y cómo actuar en los puntos en los que esto no sea posible. Estas cuestiones serán el núcleo principal de nuestro trabajo.

**Definición 2.2.1.** Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $F \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ . Definimos  $\mathcal{F} \equiv \{ (x, y, p) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, p) = 0 \}$ .

**Definición 2.2.2.** Dada  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $I \subseteq \mathbb{R}$ , defino  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma(x) = (x, y(x), y'(x))$  con  $\bar{\gamma} \equiv \text{Im}(\gamma(x))$ . Es claro que si  $y(x)$  es solución de (2.3) entonces  $\bar{\gamma} \subseteq \mathcal{F}$ .

**Ejemplo 2.2.3.** Sea la ecuación diferencial implícita:  $F(x, y, p) = p + y - \sin(x) = 0$ . La ecuación del haz de curvas sobre el  $(x, y)$ -plano solución de  $F$  es:  $y(x) = (e^{-x}c + \frac{1}{2}(-\cos(x) + \sin(x))), x, c \in \mathbb{R}$ , mientras que la ecuación paramétrica del haz de curvas sobre  $\mathcal{F}$  solución de  $F$  viene dada por:  $\gamma(x) = (x, e^{-x}c + \frac{1}{2}(-\cos(x) + \sin(x)), -e^{-x}c + \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))), x, c \in \mathbb{R}$ .

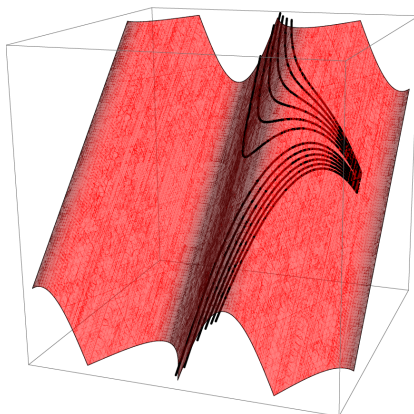


Figura 2.1

- En color rojo representamos  $\mathcal{F}$ .
- En color negro representamos el haz de curvas paramétricas sobre  $\mathcal{F}$  cuya ecuación es solución de  $F$ .

**Definición 2.2.4.** Definimos como plano de contacto  $\pi_c(x, y, p)$  al plano de ecuación:  $dy - p dx = 0$   $\forall (x, y, p) \in \mathbb{R}^3$ .

**Observación 2.2.5.** La ecuación paramétrica de  $\pi_c$  en cada punto  $(x_0, y_0, p_0)$  viene dada por:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 + p_0 \lambda \\ p = p_0 + \mu \end{cases}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ cuya proyección sobre el } (x, y)\text{-plano es el conjunto de rectas de ecuación paramétrica: } \begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 + p_0 \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ cuyo vector direccional es } (1, p_0).$$

**Proposición 2.2.6.** Dada  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $I \subseteq \mathbb{R}$  entonces el plano de contacto es tangente en todo punto de  $\tilde{\gamma}$ .

*Demostración.* Dada  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $I \subseteq \mathbb{R}$ , tomemos  $\tilde{\gamma}$  curva de ecuación paramétrica:  $\gamma(x) = (x, y(x), y'(x))$ . Fijemos  $T_0 = (x_0, \gamma(x_0), \gamma'(x_0)) = (x_0, y_0, p_0) \in \tilde{\gamma}$ . Dado  $\pi_c(T_0) \equiv p(x - x_0) - (y - y_0) = 0$ , tenemos que el vector tangente de  $\tilde{\gamma}$  sobre  $T_0$ :  $\vec{T}_0 = (1, \gamma'(x_0), \gamma''(x_0)) = (1, p_0, \gamma''(x_0))$ , es ortogonal al vector normal de  $\pi_c(T_0)$ :  $\vec{n}_0 = (p_0, -1, 0)$ :  $\vec{n}_0 \cdot \vec{T}_0 = 0$  y con ello concluye la demostración.  $\square$

Sabemos por geometría que la posición relativa de dos planos en  $\mathbb{R}^3$  es que sean secantes o coincidentes, de manera que para cada punto de la curva  $\tilde{\gamma}$ , tenemos dos posibilidades:

1.  $\dim(\pi_t \cap \pi_c) = 1$ .
2.  $\dim(\pi_t \cap \pi_c) = 2$ .

En el segundo caso, es equivalente a decir que los vectores normales de ambos planos son linealmente dependientes en  $T_0 \in \tilde{\gamma}$  y por tanto su producto vectorial es nulo, es decir:

$$n_t \times n_c = (F_x, F_y, F_p) \times (p, -1, 0) = (F_p, pF_p, -F_x - pF_y) = \vec{0}. \quad (2.4)$$

De manera que tenemos la relación:

$$\begin{cases} F_p = 0 \\ F_x + pF_y = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

En el resto de puntos de la superficie  $\mathcal{F}$ , que no satisfacen la ecuación (2.5), la intersección del plano tangente  $\pi_t$  y plano de contacto  $\pi_c$ , es una recta (Caso 1).

**Definición 2.2.7.** Llamaremos como **campo superficial**, al campo de rectas sobre  $\mathcal{F}$ , generado por la intersección del plano tangente  $\pi_t$  y plano de contacto  $\pi_c$  en los puntos de la superficie  $\mathcal{F}$ , que no satisfacen la ecuación (2.5).

La relación entre la ecuación (2.3) y el campo superficial es obvia: las curvas  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{F}$  son las curvas integrales del campo superficial. Inversamente, las curvas integrales solución de la ecuación (2.3) en el  $(x, y)$ -plano, son la proyección de las curvas integrales del campo superficial sobre el  $(x, y)$ -plano a lo largo del eje  $p$ .

Para poder analizar las curvas integrales del campo superficial es conveniente hallar el sistema de ecuaciones diferenciales sobre  $\mathcal{F}$  que lo define. Sea una curva en el  $(x, y, p)$ -espacio de ecuación paramétrica  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $r(t) = (x(t), y(t), p(t))$ , si para cada  $t \in [a, b]$ , identificamos el vector tangente de la curva anterior  $r'(t)$  como el vector direccional de la recta tangente a  $\mathcal{F}$  formada por la intersección de  $\pi_t(r(t)) \cap \pi_c(r(t))$ , entonces  $Im(r) \in J^1$  y su ecuación vendrá dada por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}(t) = F_p, \quad \dot{y}(t) = pF_p, \quad \dot{p}(t) = -(F_x + pF_y) \quad (2.6)$$

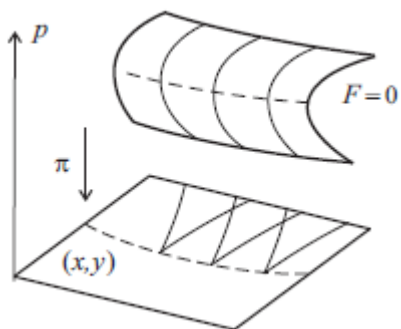


Figura 2.2

**Definición 2.2.8.** Definiremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{K} \equiv \{(x, y, p) \in \mathcal{F} \mid F_p(x, y, p) = 0\}.$$

$$\mathcal{L} \equiv \{(x, y, p) \in \mathcal{F} \mid F_x(x, y, p) + pF_y(x, y, p) = 0\}.$$

que llamaremos **criminante** y **curva de inflexión de la ecuación (2.3)**.

**Definición 2.2.9.** Un punto  $T_0 = (x_0, y_0, p_0)$  de  $\mathcal{F}$  será denominado **punto singular** de la ecuación diferencial implícita (2.3) si  $F_p(T_0) = 0$ . En caso contrario, lo denominaremos como **punto regular**. Usando las notaciones previas, podemos decir que  $T_0$  es singular si  $T_0 \in \mathcal{K}$  y  $T_0$  es regular si  $T_0 \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{K}$ .

**Definición 2.2.10.** Llamaremos **singularidades propias** ( $P_s$ ) a los puntos  $T_0 \in \mathcal{F}$  tales que  $T_0 \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ .

**Definición 2.2.11.** Llamaremos **singularidades impropias** ( $I_s$ ) a los puntos  $T_0 \in \mathcal{F}$  que satisfacen la ecuación (2.5). Es claro ver que  $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = I_s$ .

**Observación 2.2.12.** Observamos como el campo superficial está bien definido en todos los puntos de la superficie  $\mathcal{F}$  y éste es nulo en las singularidades impropias ( $I_s$ ) que son los puntos críticos de la ecuación (2.6) en donde el plano tangente  $\pi_t|_{I_s}$  y de contacto  $\pi_c|_{I_s}$  coinciden.

**Definición 2.2.13.** Llamaremos **discriminante** de la ecuación diferencial (2.3) a la  $p$ -proyección  $Im(\pi_p|_{\mathcal{K}}) \equiv \mathcal{D}_r$  del criminante sobre el plano  $(x - y)$ .

**Observación 2.2.14.** Es claro como el discriminante conforma el conjunto de valores críticos de la ecuación (2.3) sobre el  $(x, y)$ -plano.

**Ejemplo 2.2.15.** En este ejemplo, determinaremos la superficie  $\mathcal{F}$ , las curvas integrales del campo superficial, su proyección sobre el  $(x - y)$ -plano así como el criminante y discriminante de las siguientes ecuaciones diferenciales implícitas:

a)  $F(x, y, p) = p^2 - 1 = 0$

Ecuaciones diferenciales campo superficial:

$$x'(t) = 2p \quad y'(t) = 2p^2 \quad p'(t) = 0$$

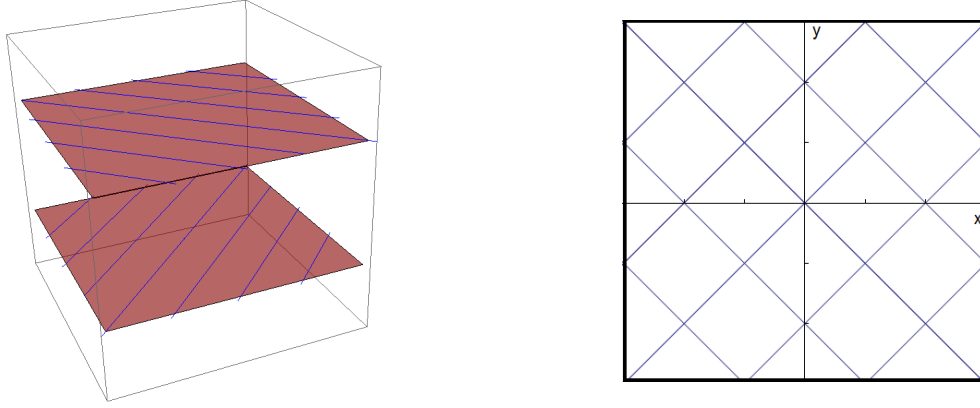
Curvas integrales campo superficial:

El conjunto de curvas integrales que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales anterior vienen dadas por las ecuaciones paramétricas:  $\gamma(t) := (2c_1t + c_2, 2c_1^2t + c_3, c_1)$ ,  $c_1, c_2, c_3, \text{ctes}, t \in \mathbb{R}$ . Evaluandolas en  $F$  obtenemos:  $F(\gamma(t)) = c_1^2 - 1 = 0 \Rightarrow c_1 = |1|$ . De manera que  $Im(\gamma) = Im(\gamma_1) \cup Im(\gamma_2)$ ,

con:  $\gamma_1(t) := \{[2t + c_2, 2t + c_3, 1], c_2, c_3 \rightarrow \text{ctes}, t \in \mathbb{R}\}$  y  $\gamma_2(t) := \{[-2t + c_2, 2t + c_3, -1], c_2, c_3 \rightarrow \text{ctes}, t \in \mathbb{R}\}$ .

Criminante y Discriminante:

$\mathcal{K} \equiv \{(x, y, p) \in \mathcal{F} \mid F_p(x, y, p) = 0\}$ . Como  $F_p = 2p = 0 \Rightarrow p = 0$ , y como  $F(x, y, 0) = -1 \neq 0 \Rightarrow$  el criminante es el conjunto vacío y por tanto el discriminante también.



En el primer dibujo representamos de color rojo la superficie  $\mathcal{F}$ , y en azul las curvas integrales solución del campo vectorial y en el segundo representamos de color azul la proyección de las mismas sobre el  $(x, y)$ -plano.

**b)**  $F(x, y, p) = p^2 + x = 0$

Ecuaciones diferenciales campo superficial:

$$x'(t) = 2p \quad y'(t) = 2p^2 \quad p'(t) = 1$$

Curvas integrales campo superficial:

El conjunto de curvas integrales que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales anterior vienen dadas por las ecuaciones paramétricas:  $\gamma(t) := (-t^2 + 2c_1t + c_2, \frac{2}{3}t^3 + 2c_1^2t - 2t^2c_1 + c_3, -t + c_1)$ ,  $c_1, c_2, c_3, \text{ctes}, t \in \mathbb{R}$ . Evaluandolas en  $F$  obtenemos:

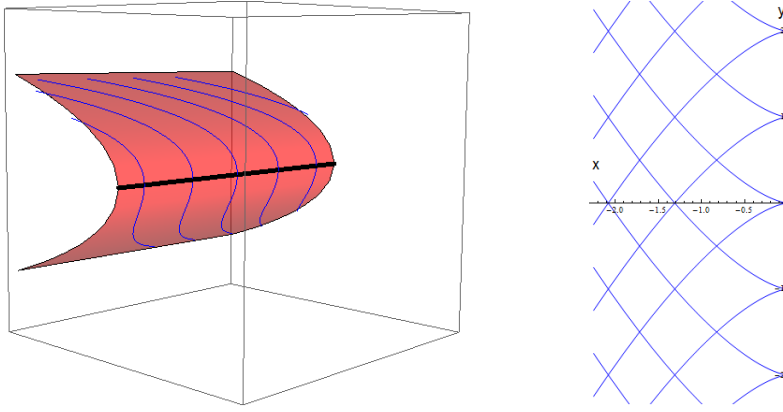
$$F(\gamma(t)) = c_1^2 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1^2 \Rightarrow \gamma(t) := (-t^2 + 2c_1t - c_1^2\frac{2}{3}t^3 + 2c_1^2t - 2t^2c_1 + c_3, -t + c_1), \quad c_1, c_3, \text{ctes}.$$

Criminante y Discriminante:

$\mathcal{K} \equiv \{(x, y, p) \in \mathcal{F} \mid F_p(x, y, p) = 0\}$ . Sea  $(x, y, p) \in \mathcal{K}$ , entonces debemos de encontrar los puntos de  $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$  t. q  $F(x, y, p) = 0$  y  $F_p(x, y, p) = 0$ . Como  $F_p(x, y, p) = 2p = 0$ , entonces  $p = 0$  y  $F(x, y, 0) = x = 0 \Rightarrow \mathcal{K} := \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \equiv \text{Eje } y \text{ en } \mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{D}_r := \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \equiv \text{Eje } y \text{ en plano } (x, y)$ .

En el primer dibujo representamos de color rojo la superficie  $\mathcal{F}$ , de color negro el criminante y de color azul las curvas integrales solución del campo vectorial y en el segundo representamos de color azul la proyección de las mismas sobre el  $(x, y)$ -plano y de color rojo el discriminante.

El estudio del diagrama de fases de una ecuación diferencial ordinaria  $p = r(x, y)$  con  $r \in \mathcal{C}^\infty$  en todo punto  $(x_0, y_0)$  es muy sencillo: la familia de curvas integrales es localmente equivalente a una familia de líneas rectas. Por ejemplo, en una vecindad de cualquier punto  $(x_0, y_0)$ , la ecuación



$p = r(x, y)$  puede ser llevada a la forma  $p = 0$  con ayuda de un cambio de variable en el  $(x - y)$ -plano. Esta afirmación se sostiene gracias al **Teorema del Flujo Tubular**, sin embargo ¿qué ocurre si tomamos un **punto singular**  $T_0 \in \mathcal{K}$  sobre  $\mathcal{F}$  de la ecuación (2.3)? ¿qué podemos decir de las curvas integrales en un entorno de los mismos? ¿y de las curvas integrales en un entorno de los puntos del discriminante?. Para contestar a estas preguntas haremos el estudio distinguiendo los casos de singularidades propias e impropias:  $T_0 \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$  y  $T_0 \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ .

## Capítulo 3

# Teoría de Whitney sobre Singularidades

Uno de los objetivos importantes de la Teoría de Singularidades consiste en clasificar las singularidades  $x_0$  de funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty$ , que son estables bajo pequeñas perturbaciones de  $f$  ( $f_\varepsilon$ ), así como encontrar aquellas funciones  $f$  a las que denominaremos como **formas normales** que cumplen la propiedad de que cualquier perturbación de dicha función,  $f_\varepsilon$ , es localmente equivalente a la propia función  $f$  en un entorno de la singularidad en cuestión  $x_0$ . Todo nuestro estudio se reduce a un problema local sobre la singularidad  $x_0$  que tratemos, de manera que podremos aproximar nuestra función  $f$  por su desarrollo de Taylor en un entorno de  $x_0$  y con ello observar qué términos de la expansión nos garantizan el cambio de coordenadas mencionado anteriormente.

### 3.1 Teoría de Singularidades

**Definición 3.1.1.** Dadas dos funciones  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  diremos que son localmente equivalentes en un punto  $p_0 \in \mathbb{R}^n$ , si existe un cambio de coordenadas  $\phi \in \mathcal{C}^\infty$  en un entorno de  $p_0$  tal que  $f \circ \phi = g$  salvo multiplicación por funciones que no se anulan en ningún punto.

**Definición 3.1.2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0$  punto crítico con multiplicidad  $\mu = 1$  ( $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ ), entonces llamaremos a  $x_0$  es **singularidad fold** de  $f$ .

**Proposición 3.1.3.** Sea una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0$  singularidad fold de  $f$ , entonces  $f(x)$  es localmente equivalente a la **forma normal**  $n(x) = x^2$ , en un entorno de  $x_0$ .

*Demostración.* Comenzaremos efectuando un cambio de variable  $x \rightarrow x - x_0$  que traslade la singularidad al origen, ( $f'(0) = 0, f''(0) \neq 0$ ). Por el lema de Hadamard 1.2.4, podemos descomponer  $f$  de la forma:

$$f(x) = f(0) + xg(x), \quad \text{con } g \in \mathcal{C}^\infty. \quad (3.1)$$

Aplicando nuevamente el lema sobre  $g$  tenemos:

$$f(x) = f(0) + x(g(0) + xh(x)) = f(0) + xg(0) + x^2h(x), \quad \text{con } h \in \mathcal{C}^\infty. \quad (3.2)$$

Derivando respecto a  $x$  y sustituyendo en el 0, deducimos que  $f'(0) = g(0) = 0$  obteniendo  $f(x) = f(0) + x^2h(x)$ . Hacemos el cambio de variable  $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{h(x)}}z$ , si  $g < 0$  hacemos el cambio  $z \rightarrow -z$ , de esta manera obtenemos:  $f(z) = f(0) + z^2 \rightarrow n(z) = f(z) - f(0) = z^2$ . □

Uno de los aspectos más importantes de la Teoría de Singularidades es la estabilidad de las mismas, por ejemplo en el caso de funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , las únicas singularidades estables son las **singularidades fold** en el sentido de que si tenemos cualquier función  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  que posea otro tipo de singularidad  $x_0$  que no sea fold, podemos hacer que ésta desaparezca o transformarla en una singularidad **fold** a través de una pequeña perturbación de la función  $f \rightarrow f_\varepsilon$ .  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

**Ejemplo 3.1.4.** Consideremos la función  $x^3$ , que posee una singularidad en  $x_0 = 0$  que no es de tipo fold puesto que  $f''(0) = 0$ . Tomemos ahora  $f_\varepsilon = x^3 - \varepsilon x$ , dicha función posee dos singularidades:  $s_0 = +\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$  y  $s_1 = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ , con  $f''_\varepsilon(s_0), f''_\varepsilon(s_1) \neq 0$ , siendo pues  $s_0$  y  $s_1$  singularidades fold respecto  $f_\varepsilon$ .

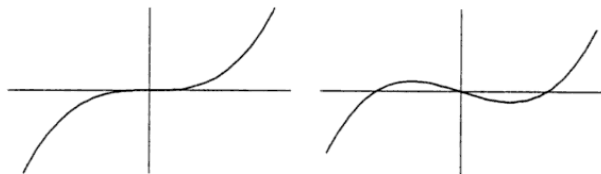


Figura 3.1: Funciones  $f(x) = x^3$  y  $f_\varepsilon = x^3 - \varepsilon x$ . Se puede apreciar la aparición de dos singularidades fold en  $f_\varepsilon$ .

## 3.2 Teoría de Singularidades de Whitney

En esta parte del capítulo estudiaremos las singularidades genéricas de funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sin embargo todos nuestros resultados son perfectamente aplicables para funciones  $f : M^2 \rightarrow N^2$ , restringiéndonos a entornos suficientemente pequeños de la singularidad a estudiar y siendo  $M^2$  y  $N^2$  2-variedades de clase  $\mathcal{C}^{(\infty)}$ .

**Definición 3.2.1.** Dada  $f : M^2 \rightarrow N^2$  con matriz Jacobiana  $A_f := \begin{pmatrix} f_x^1 & f_y^1 \\ f_x^2 & f_y^2 \end{pmatrix}$  llamaremos puntos singulares de  $f$  a los puntos de  $M^2$  que cumplan la condición  $|A_f| = 0$

Con este nuevo tipo de funciones cabe plantearse las siguientes preguntas: ¿Qué singularidades son estables? ¿Cuáles son las ecuaciones de las formas normales? ¿Qué condiciones debe cumplir una función para ser localmente equivalente a una ecuación en forma normal?

En 1955 Whitney estudio el caso de funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y descubrió que existen dos tipos de singularidades estables a las que denominó como **fold** y **pleat** y caracterizó de la siguiente manera: Sea  $f : M^2 \rightarrow N^2$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ , dada por las funciones

$$z = f^1(x, y), \quad w = f^2(x, y), \quad f^1(0) = f^2(0) = 0 \quad (3.3)$$

un entorno del origen. La matriz Jacobiana de  $f$  es:

$$A_f := \begin{pmatrix} f_x^1 & f_y^1 \\ f_x^2 & f_y^2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Los puntos singulares de  $f$  vienen dados por la condición  $|A_f| = 0$ , entonces  $\text{rg } A_f = 0$  ó  $\text{rg } A_f = 1$ . El conjunto  $S_1 \equiv \{(x, y) : \text{rg } A_f(x, y) = 0\}$ , en el caso genérico es el conjunto vacío, de manera que estudiaremos las singularidades pertenecientes a  $S_2 \equiv \{(x, y) : \text{rg } A_f(x, y) = 1\}$ , que son a fin de cuentas las que nos interesan para el próximo capítulo.

**Proposición 3.2.2.** Sea  $f : M^2 \rightarrow N^2$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}$  como en (3.3) y suponer que el conjunto de puntos singulares de  $f$  viene dado por  $S_2 \equiv \{(x, y) : \text{rg } A_f(x, y) = 1\}$ , entonces dado  $p_0 \in S_2$   $f$  es localmente equivalente en  $p_0$  a la función:

$$z = F(x, y), \quad w = y, \quad F(0) = 0 \quad (3.5)$$



*Demostración.* Haremos la demostración para el caso de funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , y ésta será igual de válida para funciones entre 2-variedades en entornos suficientemente pequeños de la singularidad. Sea  $p_0 = (x_0, y_0) \in S_2$  entonces  $\text{rg } A_f(x_0, y_0) = 1$  y existe un elemento de  $A_f(x_0, y_0)$  distinto de 0. Consideremos las aplicaciones:

$$\begin{aligned}\pi_x : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) &\rightarrow \pi_x(x, y) = x \\ \pi_y : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) &\rightarrow \pi_y(x, y) = y\end{aligned}$$

y la función:

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightarrow h(x, y) = (\pi_y, \pi_x \circ f) = (y, f^1(x, y))$$

Tenemos pues que

$$J_h(p_0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_x^1(x_0, y_0) & f_y^1(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad \text{con, } |J_h(p_0)| = -f_x^1(x_0, y_0) \neq 0$$

Por el teorema de la función inversa  $h$ , es un difeomorfismo en un entorno  $U$  de  $p_0$ . Llamemos  $\tilde{h} = (h|_U)^{-1}$ , y sea  $W = \tilde{h}^{-1}(U)$  y consideremos  $(z, w) \in \mathbb{R}^2$ . Llamemos  $(x, y) = \tilde{h}(z, w) = (\tilde{h}^1(z, w), \tilde{h}^2(z, w)) \in U$  o lo que es lo mismo  $h(x, y) = (z, w) = (y, f^1(x, y)) = (\tilde{h}^2(z, w), f^1(\tilde{h}^1(z, w), \tilde{h}^2(z, w)))$ . De manera que tenemos la identificación:  $\begin{cases} z \rightarrow \tilde{h}^2(z, w) \\ w \rightarrow f^1(\tilde{h}^1(z, w), z) \end{cases}$  Si componemos  $f \circ h = (f^1(\tilde{h}^1(z, w), z), f^2(\tilde{h}^1(z, w), z)) = (w, G(z, w))$  con  $G(z, w) = f^2(\tilde{h}^1(z, w), z)$  y con esto concluimos la demostración. En el caso en el que sea otro menor de  $A_f(x_0, y_0)$  distinto de 0, bastará con redefinir la función  $h$  según convenga.  $\square$

Los puntos singulares de la función (3.3) vienen dados por:

$$|A(f)| := \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow F_x(x, y) = 0$$

Whitney demostró que dentro de éste conjunto de singularidades, sólomente las singularidades fold y pleat eran estables, cada una de ellas quedaban determinadas por las siguientes condiciones:

- **Singularidad Fold** :  $F_x(0) = 0, F_{xx}(0) \neq 0$
- **Singularidad Pleat** :  $F_x(0) = 0, F_{xx}(0) = 0, F_{xy}(0) \neq 0, F_{xxx}(0) \neq 0$

Whitney también demostró que el conjunto de funciones que poseen singularidades fold o pleat es **denso** en  $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$  en la llamada *Topología de Whitney* que definiremos a continuación.

**Definición 3.2.3.** Sea  $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  el espacio vectorial formado por el conjunto de funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  continuamente diferenciables con  $f = (f_1, \dots, f_p)$ . Para cada  $m = 0, 1, \dots, \infty$ , la  $C^m$ -**topología de Whitney** sobre  $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ , es la que tiene por subbase, los abiertos:

$$B(\varepsilon) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{(\infty)} : \max \left| \frac{\partial^q f_i}{\partial^{q_1} x_1 \dots \partial^{q_n} x_n} \right| < \varepsilon \right\}$$

$\forall \varepsilon > 0$ . Con  $q = q_1 + \dots + q_n$ , el máximo es tomado para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , todo  $i \in 1, \dots, p$  y todas las derivadas parciales de orden  $q \leq m$ .

**Proposición 3.2.4.** Dada una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}$  y  $s_0 = (x_0, y_0)$  singularidad fold de  $f$ , entonces existen unas coordenadas locales en un entorno de  $s_0$  que transforma la función  $f$  a la forma normal:

$$z = x^2, \quad w = y \tag{3.6}$$

*Demostración.* Comenzaremos efectuando un cambio de coordenadas  $\begin{cases} x \rightarrow x - x_0 \\ y \rightarrow y - y_0 \end{cases}$  que traslade  $s_0$  al origen. Como,  $F_x(0,0) = 0$  y  $F_{xx}(0,0) \neq 0$  por el **Teorema de la Función Implícita 1.3.1** existe un intervalo  $I$  centrado en el punto 0 y una única función  $\varphi : y \in I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow x = \varphi(y) \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(0) = 0$ , que verifica que  $F_x(\varphi(y), y) = 0$  para todo  $y \in I$ .

Haciendo el cambio de variable  $x \rightarrow x - \varphi(y)$ , trasladamos los puntos de la curva  $\varphi(y)$  al eje  $x = 0$ , de manera que en las nuevas coordenadas la función  $F_x$  se anula en el eje  $x = 0$ . Obsérvese también como en este cambio se mantienen las propiedades:  $F_x(0 - \varphi(0), 0) = F_x(0, 0) = 0$  y  $F_{xx}(0 - \varphi(0), 0) = F_{xx}(0, 0) \neq 0$ .

Aplicando el **Lemma 1.2.5**, en un entorno del origen tenemos la representación:

$$F(x, y) = F_0(y) + x^2 \psi(x, y), \quad \text{con } F_0(y) = F(0, y). \quad (3.7)$$

siendo  $\psi(x, y) \in \mathcal{C}^\infty$ . La condición  $F_{xx}(0) \neq 0$  llevada a (3.7) implica  $\psi(0) \neq 0$ . Asumamos que  $\psi(0) > 0$ , en caso contrario el cambio  $z \rightarrow -z$  cambia el signo de  $\psi$ .

Consideremos a continuación el cambio de variable  $x \rightarrow x\sqrt{\psi(x, y)}$  con el que obtenemos  $F(x, y) = F_0(y) + x^2$ , la función tiene entonces la forma:

$$z = F_0(y) + x^2, \quad w = y.$$

Finalmente usando el cambio de variable  $z \rightarrow z - F_0(y)$ , tenemos la fórmula:

$$z = x^2, \quad w = y.$$

□

**Proposición 3.2.5.** *Dada una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty$  y  $s_0 = (x_0, y_0)$  singularidad pleat de  $f$ , entonces en un entorno de  $s_0$  existen unas coordenadas locales que transforma la función  $f$  a la forma normal:*

$$z = x^3 + xy, \quad w = y. \quad (3.8)$$

*Demostración.* Ver pagina 29 de [2].

□

Son las singularidades de funciones planares estudiadas por Whitney, las que nos interesan en nuestro estudio, sin embargo como dato histórico señalaremos que fue R. Thom quien relanzó la teoría de singularidades determinando las 7 singularidades estables y densas de funciones  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  y proponiendo un amplio rango de aplicaciones de su estudio. A medida que aumentamos las dimensiones, también aumenta el número de singularidades estables.

## Capítulo 4

# Ecuaciones Diferenciales Implícitas: Formas Normales y Diagrama de Fases

En este capítulo haremos uso de la teoría de Whitney estudiada en el capítulo anterior para poder hallar las condiciones que nos aseguran que una singularidad de  $\mathcal{F}$  es estable y determinaremos también sus formas normales (en el caso en el que se pueda) para poder entender el comportamiento de las curvas integrales en un entorno de estas singularidades en cuestión.

### 4.1 Clasificación de Singularidades de una Ecuación Diferencial Implícita

En el capítulo anterior vimos la definición de Singularidades Pleat y Singularidades Fold para funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $\mathcal{C}^\infty$ -diferenciables, sin embargo ¿qué condiciones debe cumplir la singularidad  $T_0 \in \mathcal{K}$  para clasificarla como *fold* o *pleat*?

Para poder contestar a esta pregunta, comenzaremos efectuando un cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x \rightarrow x - x_0 \\ y \rightarrow y - y_0 - p_0(x - x_0) \end{cases}$$

que traslade  $T_0$  al origen. Sea  $F(x, y, p)$  ecuación diferencial de la forma (2.3) y  $T_0 \in \mathcal{K}$  punto singular. Al efectuar nuestro estudio sobre superficies  $\mathcal{F}$  regulares, entonces  $\nabla F = (F_x(x, y, p), F_y(x, y, p), F_p(x, y, p)) \neq 0 \forall (x, y, p) \in \mathcal{F}$  siendo  $\nabla F$ , el vector normal en cada punto de  $\mathcal{F}$ . Sea  $T_0 = (x_0, y_0, p_0) = (0, 0, 0) \in \mathcal{K}$  con  $F_p(T_0) = 0$  como  $\nabla F(T_0) \neq 0$ , lo cual significa que dados  $F_x(T_0)$  y  $F_y(T_0)$ , al menos uno de los dos debe ser distinto de 0.

1.  $F_x(T_0) \neq 0$
2.  $F_y(T_0) \neq 0$

Si  $F_x(T_0) \neq 0$  (Caso 1) por el **Teorema 1.3.1** sabemos que existe un disco  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , centrado en el punto  $(y_0, p_0)$  y una única función  $x : (y, p) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow x(y, p) \in \mathbb{R}$  con derivadas parciales continuas en  $D$  tal que  $x_0 = x(y_0, p_0)$  y  $x = x(y, p)$  es solución de la ecuación  $F(x, y, p) = 0$ , es decir, que se verifica que  $F(x(y, p), y, p) = 0$  para todo  $(y, p) \in D$ . Además, las derivadas parciales de la función  $x$  vienen dadas por:

$$x_y(y, p) = -\frac{F_y(x(y, p), y, p)}{F_x(x(y, p), y, p)} \text{ y } x_p(y, p) = -\frac{F_p(x(y, p), y, p)}{F_x(x(y, p), y, p)} \text{ para cada } (y, p) \in D. \quad (4.1)$$

Tomemos a continuación la función  $g(y, p) : D \subseteq M^2 \rightarrow N^2$ , con  $g(y, p) = (x(y, p), y)$ . Retomando la sección (3. 2) del capítulo anterior y sabiendo que  $g(y_0, p_0) = g(0, 0) = (x(y_0, p_0), y_0) = (0, 0)$ , deducimos que las singularidades fold y pleat de  $g$  vienen definidas por los siguientes conjuntos:

- Singularidades Fold  $\equiv \{(y, p) \in D | x_p(y, p) = 0, x_{pp}(y, p) \neq 0\}$
- Singularidades Pleat  $\equiv \{(y, p) \in D | x_p(y, p) = 0, x_{pp}(y, p) = 0, x_{ppp}(y, p) \neq 0, x_{py}(y, p) \neq 0\}$

**Proposición 4.1.1.** *Dada una singularidad  $(y_0, p_0) \in M^2$  de  $g$  se cumple:*

*p1)  $(y_0, p_0)$  es una singularidad fold respecto la función  $g \Leftrightarrow F_{pp}(T_0) \neq 0$ .*

*p2)  $(y_0, p_0)$  es una singularidad pleat respecto la función  $g \Leftrightarrow (F_{pp}(T_0) = 0, F_{ppp}(T_0) \neq 0)$  y  $(F_{xp}(T_0) \neq 0 \text{ ó } F_{yp}(T_0) \neq 0)$*

*Demostración.* De la ecuación (4.1) obtenemos las igualdades:

$$a) \quad x_p(y, p) \cdot F_x(x(y, p), y, p) = -F_p(x(y, p), y, p)$$

$$b) \quad x_y(y, p) \cdot F_x(x(y, p), y, p) = -F_y(x(y, p), y, p)$$

Derivando respecto a  $p$  en a) y aplicando la regla de la cadena tenemos que:  $x_p \cdot (F_{xx} \cdot x_p + F_{xp}) + F_x \cdot x_{pp} = -F_{px} \cdot x_p - F_{pp}$ . Evaluando la ecuación anterior en  $(y_0, p_0)$  y teniendo en cuenta que  $x_p(y_0, p_0) = -\frac{F_p(T_0)}{F_x(T_0)} = 0$ , obtenemos la ecuación:

$$F_x(T_0) \cdot x_{pp}(y_0, p_0) = -F_{pp}(T_0) \quad (4.2)$$

Como  $F_x(T_0) \neq 0$  por hipótesis, deducimos que:  $x_{pp}(y_0, p_0) = 0 \Leftrightarrow F_{pp}(T_0) = 0$  y con ello demostramos **p1)**.

$$\frac{\partial^n x}{\partial p^n}(y_0, p_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^n F}{\partial p^n}(T_0) = 0. \quad (4.3)$$

Derivando respecto a  $y$  en a), tenemos que:  $x_{py} \cdot F_x + x_p \cdot (F_{xx} \cdot x_y + F_{xy}) = -F_{px} \cdot x_y - F_{py}$

Evaluando la ecuación anterior en  $(y_0, p_0)$  obtenemos la ecuación:

$$x_{py}(y_0, p_0) \cdot F_x(T_0) = -(F_{px}(T_0) \cdot x_y(y_0, p_0) + F_{py}(T_0)) \quad (4.4)$$

Tomemos  $(y_0, p_0)$  singularidad pleat respecto la función  $g \Rightarrow x_{py}(y_0, p_0) \neq 0$  y como por hipótesis  $F_x(T_0) \neq 0$ , tenemos que  $x_{py}(y_0, p_0) \cdot F_x(T_0) \neq 0$ . A continuación distinguiremos 3 casos:

$$c_1) \quad F_{yp}(T_0) = 0$$

$$c_2) \quad F_{px}(T_0) = 0$$

$$c_3) \quad F_{yp}(T_0) \neq 0 \text{ ó } F_{px}(T_0) \neq 0$$

Llevando el caso  $c_1)$  a (4.4), deducimos que  $x_{py}(y_0, p_0) \cdot F_x(T_0) = -F_{px}(T_0) \cdot x_y(y_0, p_0)$ , como  $x_{py}(y_0, p_0) \cdot F_x(T_0) \neq 0 \Rightarrow F_{px}(T_0) \neq 0$ .

Llevando el caso  $c_2)$  a (4.4), deducimos que  $x_{py}(y_0, p_0) \cdot F_x(T_0) = -F_{py}(T_0)$ , como  $x_{py}(y_0, p_0) \cdot F_x(T_0) \neq 0 \Rightarrow F_{py}(T_0) \neq 0$ .

Observamos como tanto el caso  $c_1)$  como el  $c_2)$ , nos conducen al caso  $c_3)$  que junto con (4.3) demostramos **p2)**. □

**Observación 4.1.2.** *La proposición anterior es igual de válida si consideramos el Caso 2) ya que al tratar con funciones  $F \in \mathcal{C}^{(\infty)}$  las derivadas parciales cruzadas de  $F$  son intercambiables y al intercambiar los papeles de las variables  $x$  e  $y$  obtendríamos las mismas equivalencias anteriores.*

Teniendo en cuenta la **Proposición 4.1.1** y lo visto en el **Capítulo 2**, clasificaremos los puntos singulares de una ecuación diferencial implícita (2.3) de la siguiente manera:

- $\{T_0 \in \mathcal{F} \mid F_{pp}(T_0) \neq 0 \text{ y } G(T_0) \neq 0\} \equiv \text{Singularidades propias (Fold)}.$
- $\{T_0 \in \mathcal{F} \mid F_{pp}(T_0) \neq 0 \text{ y } G(T_0) = 0\} \equiv \text{Singularidades impropias (Fold)}.$
- $\{T_0 \in \mathcal{F} \mid \text{condicion (4,3) y } G(T_0) \neq 0\} \equiv \text{Singularidades Pleat}.$

con  $G(x, y, p) = F_x(x, y, p) + p \cdot F_y(x, y, p)$

## 4.2 Forma normal de una Singularidad Propia (Fold)

**Teorema 4.2.1. Teorema de Cibrario-Tricomi.** En una vecindad  $U_{T_0}$  de una singularidad propia  $T_0 = (x_0, y_0, p_0) \in \mathcal{F}$ , ( $F_{pp}(T_0) \neq 0, F_x(T_0) + p_0 F_y(T_0) \neq 0$ ), la ecuación diferencial:

$$F(x, y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}, \quad F \in \mathcal{C}^{(\infty)} \quad (4.5)$$

es localmente equivalente en  $T_0$  a:

$$p^2 = x \quad (4.6)$$

*Demostración.* Todos los resultados que demos en este teorema tendrán carácter local sobre un entorno del origen. Recordemos que el sistema de ecuaciones diferenciales que conformaban el campo vectorial  $\chi_F$  era:

$$\dot{x}(t) = F_p, \quad \dot{y}(t) = pF_p, \quad \dot{p}(t) = -(F_x + pF_y). \quad (4.7)$$

Comenzaremos efectuando un cambio de coordenadas  $\begin{cases} x \rightarrow x - x_0 \\ y \rightarrow y - y_0 - p_0(x - x_0) \end{cases}$  que traslade  $T_0$  al origen. ¿Es el campo vectorial  $\chi_F$  (4.7) transversal en todo punto de  $U_0 \cap \mathcal{K}$ , siendo  $U_0$  entorno del origen? El campo  $\chi_F$  sobre el origen es:  $\chi_F(0) = (0, 0, F_x(0)) \neq (0, 0, 0)$ , ya que  $F_x(T_0) + p_0 F_y(T_0) = F_x(0) \neq 0$  por ser  $T_0$  singularidad propia, como  $F \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^3)$  (en particular  $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ ), luego existe un entorno  $U_0 \subset \mathcal{F}$  del origen tal que  $F_x + pF_y \neq 0 \forall (x, y, p) \in U_0$  y en particular  $\forall (x, y, p) \in U_0 \cap \mathcal{K}$ , de manera que  $\chi_F|_{U_0 \cap \mathcal{K}}$  no se anula.

Los puntos del discriminante, vienen dados por el sistema de ecuaciones:  $G(x, y, p) \begin{cases} F = 0 \\ F_p = 0 \end{cases}$ , donde  $J_G = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_p \\ F_{px} & F_{py} & F_{pp} \end{pmatrix}$ , si evaluamos  $G$  en 0, tenemos  $J_G(0) = \begin{pmatrix} F_x(0) & F_y(0) & 0 \\ F_{px}(0) & F_{py}(0) & F_{pp}(0) \end{pmatrix}$ , donde  $F_{pp}(0) \neq 0$ , como  $|J_{G_{x,p}}| = F_{pp}(0) \cdot F_x(0) \neq 0$  por el **Teorema de la función Implícita** en un entorno del origen, podemos despejar de forma explícita la variable  $(x, p) = h(y)$ , y evaluandola en  $p = 0$  tenemos  $x = h(y)$ , ecuación explícita local del discriminante. Definiremos a continuación los siguientes cambios de coordenadas sobre el  $(x, y)$ -plano:

- $\varphi_a(x, y) = (x - h(y), y) = (x_a, y_a)$ ,  $\varphi_a(x, y) = (0, y_a) \quad \forall (x, y) \in \pi(\mathcal{K})$

Con este cambio de coordenadas trasladamos el discriminante al eje de ordenadas.

- $\varphi_b(x_a, y_a) = (x_a, y_a - x_a \tan(\alpha(y_a))) = (x_b, y_b)$ , con este nuevo cambio conseguimos que los vectores del campo vectorial de (2.3) sobre los puntos del discriminante sean paralelos al eje de abscisas. Comprobemoslo:

Primero demostramos que los puntos del discriminante permanecen invariantes por  $\varphi_b$ :  $\varphi_b(0, y_a) = (0, y_a) \quad \forall (0, y_a) \in \pi(\mathcal{K})$ . A continuación hallamos la ecuación de la pendiente  $p_b$  de la ecuación diferencial implícita (4.5) en las nuevas coordenadas  $(x_b, y_b)$ :

$$p_b = \frac{dy_b}{dx_b} = \frac{d(y_a - x_a \tan(\alpha(y_a)))}{dx_a} = \frac{dy_a}{dx_a} - \tan(\alpha(y_a)) - x_a \frac{dy_a}{dx_a} \alpha'(y_a) \sec^2(\alpha(y_a)), \text{ y observa-}$$

mos que  $p_b(0, y_0) = \frac{dy_a}{dx_a}(0, y_0) - \tan(\alpha(y_0)) = \tan(\alpha(y_0)) - \tan(\alpha(y_0)) = 0$  probando así que  $p_b|_{\mathcal{D}_r} = 0$ .

¿Qué forma tiene el criminante en las nuevas coordenadas  $(x_b, y_b)$ ? Teniendo en cuenta la **Observación 2.2.5** sabemos que los vectores direccionales de las rectas obtenidas mediante la  $p$ -proyección del plano de contacto de cada punto de la superficie  $\mathcal{F}$  son  $(1, p_b)$ , y el conjunto de los mismos definen el campo vectorial de 4.5 en el  $(x_b, y_b)$ -plano. Hemos probado que dicho campo vectorial restringido a los puntos del discriminante tiene pendiente nula, luego particularizando lo mencionado anteriormente en los planos de contacto de los puntos del criminante deducimos facilmente que  $(1, p_b) = (1, 0) \Rightarrow p_b = 0$ , y con ello demostramos que en las nuevas coordenadas  $(x_b, y_b)$  el criminante y discriminante coinciden localmente. En lo que sigue de demostración, renombraremos las variables  $(x_b, y_b) \equiv (x, y)$ .

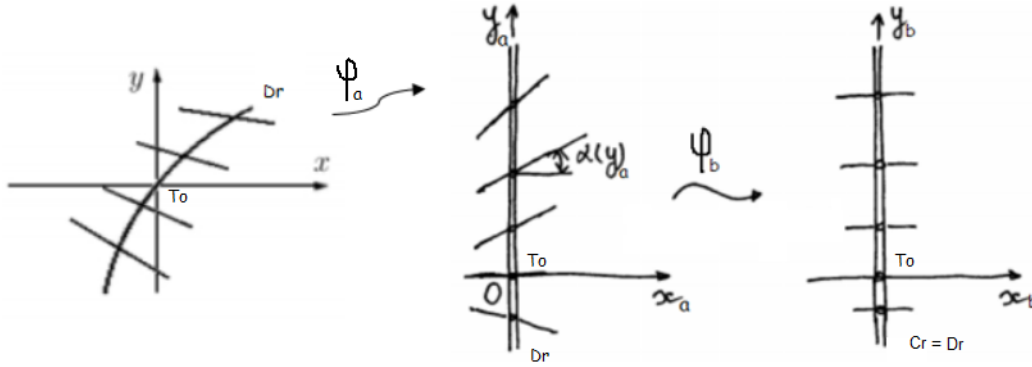


Figura 4.1

Por el **Teorema División 1.2.2** sabemos que en un entorno del punto crítico  $T_0 = (0, 0, 0)$  respecto a la variable  $p$  ( $F_p(T_0) = 0$ ),  $F(x, y, p)$  se puede desarrollar como:

$$F(x, y, p) = F(0, 0, 0) + \varphi(x, y, p)[p^2 + pa(x, y) + b(x, y)] = 0. \quad (4.8)$$

con  $a(x, y), b(x, y), \varphi(x, y, p) \in C^\infty$ ,  $\varphi(x, y, p) \neq 0$ ,  $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$ .

Como  $\varphi(x, y, p) \neq 0$ , tenemos:  $F(x, y, p) = p^2 + pa(x, y) + b(x, y) = 0 \forall (x, y, p) \in \mathcal{F}$ . Evaluando  $F$  y en  $F_p$  en los puntos del criminante  $\mathcal{K}$  en los obtenemos las siguientes propiedades:

- i)  $F|_{\mathcal{K}} = F(0, y, 0) = b(0, y) = 0$ .
- ii)  $F_p = 2p + a(x, y)$ ,  
 $F_p|_{\mathcal{K}} = F_p(0, y, 0) = a(0, y) = 0$ .

Por i) e ii) y tomando  $x = \gamma(y) = 0$ , podemos aplicar el **Lema 1.2.3** a las funciones  $a(x, y), b(x, y)$ , de manera que en un nuevo entorno del origen intersectado con el plano  $(x, y)$  éstas se pueden expresar como:

$$\begin{cases} a(x, y) = x\alpha(x, y) \\ b(x, y) = x\beta(x, y) \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in C^\infty. \quad (4.9)$$

De esta manera podemos encontrar un nuevo entorno del origen donde podemos expresar  $F$  de la forma:

$$F(x, y, p) = p^2 + px\alpha(x, y) + x\beta(x, y) = 0. \quad (4.10)$$

Sustituyendo  $\alpha(x, y) \rightarrow \frac{-\alpha(x, y)}{2} \in \mathcal{C}^\infty$ , podemos reescribir (4.10) de la forma:

$$F(x, y, p) = p^2 - 2px\alpha(x, y) + x\beta(x, y) = 0. \quad (4.11)$$

con  $G(x, y, p) = F_x(x, y, p) + p \cdot F_y(x, y, p) = 2p(\alpha_x(x, y)x + \alpha(x, y)) + \beta(x, y) + x\beta_x(x, y) + p(2px\alpha_y(x, y) + x\beta_y(x, y))$ , y  $G(T_0) = G(0, 0, 0) = \beta(0, 0) \neq 0$  por ser  $T_0$  singularidad propia.

Sin pérdida de generalidad, supongamos  $\beta(0) < 0$ , en caso contrario, hacemos el cambio  $x \rightarrow -x$ . Determinemos a continuación las raíces de  $p$  de la ecuación (4.10):

$$p(x,y) = x\alpha \pm \sqrt{x(x\alpha^2 - \beta)} = x\alpha \pm \sqrt{x}\Gamma, \quad \text{con } \Gamma(x,y) = x\alpha^2 - \beta \quad (4.12)$$

Nótese como la intersección de la superficie  $\mathcal{F}$  con el entorno del origen a estudiar, viene dada por la unión de las imágenes de las dos ecuaciones explícitas de  $p(x,y)$ .

Por ser  $\beta(0) < 0$ , deducimos que  $\Gamma(0,0) = -\beta(0,0) > 0$  y por ser  $\Gamma$  continua en el origen, entonces existe un entorno del mismo donde  $\Gamma(x,y) > 0$ . Obsérvese que sobre dicho entorno las raíces de (4.12) satisfacen:  $p(x,y) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \geq 0$ , que son a fin de cuentas las que nos interesa estudiar ya que nuestro trabajo está centrado sobre el cuerpo de los reales, por esta razón en lo que sigue de demostración restringiremos el entorno mencionado anteriormente exclusivamente al semiplano positivo  $x \geq 0$ .

A continuación efectuaremos sobre dicho entorno el cambio:  $x = \varepsilon^2$ , bien definido por ser  $x \geq 0$  (semiplano donde están ubicadas las raíces reales de  $p$ ). El cambio anterior nos da la siguiente parametrización de la superficie:

$$\begin{cases} x = \varepsilon^2 \\ y = y \\ p = (\varepsilon^2\alpha + \varepsilon\sqrt{\Gamma}) \end{cases}$$

Donde  $p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varepsilon^2} = \frac{\frac{dy}{d\varepsilon}}{\frac{d\varepsilon^2}{d\varepsilon}} = \frac{\tilde{p}}{2\varepsilon}$  siendo  $\tilde{p}$  la pendiente en las nuevas coordenadas. Es claro como en las nuevas coordenadas el discriminante es invariante y el campo vectorial restringido al mismo es paralelo al eje de abscisas. Obsérvese como la variable  $\varepsilon$  toma valores tanto positivos como negativos, razón por la cual sustituimos  $\pm$  por  $+$  en (4.12) en las nuevas coordenadas.

$$\tilde{p} = \frac{dy}{d\varepsilon} = \tilde{p} = 2\varepsilon \left( \varepsilon^2\alpha(\varepsilon^2, y) + \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2\alpha(\varepsilon^2, y) - \beta(\varepsilon^2, y)} \right) = \varepsilon^2\omega(\varepsilon^2, y) \quad (4.13)$$

donde  $\omega(\varepsilon^2, y) = 2[\varepsilon\alpha(\varepsilon^2, y) + \sqrt{\Gamma(\varepsilon^2, y)}]$  con  $\omega(0,0) = 2\sqrt{\Gamma(0,0)} = 2\sqrt{-\beta(0,0)} \neq 0$ , por ser  $\beta(0,0) < 0$ ,  $\omega \in C^\infty$ .

Por ser  $\omega$  continua en el origen y  $\omega(0,0) \neq 0$ , entonces existe un entorno sobre el mismo con  $\omega(\varepsilon^2, y) \neq 0$ . A continuación determinaremos la forma que tienen las curvas integrales sobre dicho entorno determinando el orden de tangencia con la horizontal.

$$a) \quad y_\varepsilon = \varepsilon^2\omega(\varepsilon^2, y), \quad y_\varepsilon(0, y) = 0.$$

$$b) \quad y_{\varepsilon\varepsilon} = 2\varepsilon\omega(\varepsilon^2, y) + 2\varepsilon^3\omega_{\varepsilon^2}(\varepsilon^2, y), \quad y_{\varepsilon\varepsilon}(0, y) = 0.$$

$$c) \quad y_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} = 2[\omega(\varepsilon^2, y) + 2\varepsilon^2\omega_{\varepsilon^2}(\varepsilon^2, y)] + 2[3\varepsilon^2\omega_{\varepsilon^2}(\varepsilon^2, y) + 2\varepsilon^4\omega_{\varepsilon^2\varepsilon^2}(\varepsilon^2, y)] \\ y_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(0, y) = 2\omega(0, y) \neq 0.$$

$$\text{Consideremos ahora el PVI: } \begin{cases} y'(x) = x^2\omega(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con  $\omega(0,0) \neq 0$  y sea  $y(x) = \psi(x, 0, y_0)$  una solución cualquiera.

- Por a), b) y c) sabemos que  $\psi(x, 0, y_0)$  tiene un punto crítico de orden 3 para  $x = 0$  con  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0, y_0) = x^2\omega(x, \psi(x, 0, y_0))$ , entonces por el Teorema de la División 1.2.2  $\psi$  puede ser desarrollada de la forma:  $\psi(x, 0, y_0) = \psi(0, 0, y_0) + x^3\phi(x, y_0) = y_0 + x^3\phi(x, y_0)$  con  $\phi(x, y_0) \neq 0 \forall x$ .
- El teorema de unicidad de ecuaciones diferenciales nos asegura que:  $\psi(x, 0, \psi(0, x, y_0)) = \psi(x, 0, y(x)) = y_0 \forall x$ .
- Consideremos la función  $I(x, y) = y - x^3\phi(x, y_0) = y - x^3\phi(x, \psi(x, 0, y))$  ésta es una constante de movimiento ya que evaluando  $I(x, y)$  en  $\psi(x, 0, y_0)$  solución cualquiera del PVI tenemos que  $I(x, \psi(x, 0, y_0)) = \psi(x, 0, y_0) - x^3\phi(x, y_0) = y_0 \forall x$ .

$$I(\varepsilon, y) = y - \varepsilon^3 f(\varepsilon, y) = k, \quad f(0, 0) \neq 0, f \in C^\infty, \quad \forall y(\varepsilon) \text{ solución de (4.13)}. \quad (4.14)$$

Aplicando el **Lema 1.2.6** sobre  $I(\varepsilon, y)$  podemos expresar  $f(\varepsilon, y)$  de la forma  $f(\varepsilon, y) = f_1(\varepsilon^2, y) + \varepsilon f_2(\varepsilon^2, y)$ , transformándose  $I(\varepsilon, y)$  en:

$$I(\varepsilon, y) = y - \varepsilon^3 f_1(\varepsilon^2, y) - \varepsilon^4 f_2(\varepsilon^2, y) = k. \quad (4.15)$$

con  $f_1(0, 0) = (f - \varepsilon f_2)(0, 0) = f(0, 0) \neq 0, f_1, f_2 \in C^\infty$ . Definimos a continuación el cambio de variable:  $\psi(\varepsilon, y) = (\varepsilon f_1^{1/3}(\varepsilon^2, y), y - \varepsilon^4 f_2(\varepsilon^2, y)) \equiv (\Xi, Y)$ , de manera que:  $I = Y - \Xi^3$ , y también el cambio de variable:  $\phi(\Xi, Y) = (\Xi^2, Y) \equiv (X, Y) = (\varepsilon^2 f_1^{2/3}(\varepsilon^2, y), y - \varepsilon^4 f_2(\varepsilon^2, y))$ . Desahaciendo el cambio  $\varepsilon^2 = x$ , tenemos que:  $(X, Y) = (x f_1^{2/3}(x, y), y - x^2 f_2(x, y))$ , transformándose la ecuación  $Y - \Xi^3 = k$  en  $Y = k \pm X^{3/2}$ , correspondiente a la familia de curvas integrales de la ecuación (4.5) sobre el  $(x, y)$ -plano en un entorno del origen y cuya imagen está contenida en el semiplano positivo  $x \geq 0$ . Para finalizar la demostración, basta con hacer el cambio  $X \rightarrow (\frac{2}{3})^{2/3} X$ , (contracción variable  $X$ ), transformándose la ecuación de las curvas integrales en:  $Y = k \pm \frac{2}{3} X^{3/2}$ , siendo éstas solución de la ecuación diferencial implícita  $P^2 = X$ .  $\square$

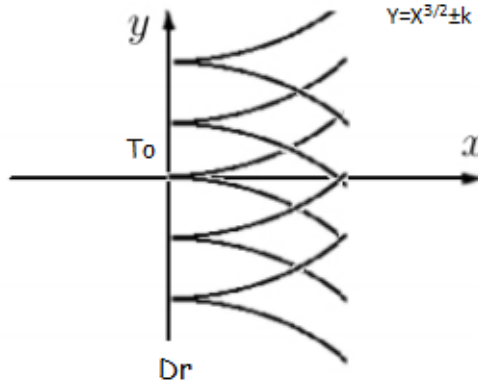


Figura 4.2

### 4.3 Forma normal de una Singularidad Impropia (Fold)

Usualmente, el primer paso en el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales es realizar una linealización en torno a un punto de equilibrio y analizar el comportamiento del modelo lineal. Entonces el siguiente teorema establece condiciones bajo las cuales es posible extraer conclusiones sobre la forma que tienen las curvas integrales en un entorno del punto de equilibrio del sistema no lineal a través del análisis de del modelo linealizado en torno a dicho punto de equilibrio.

**Definición 4.3.1.** Sea un Sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$X' = F(X) \quad (4.16)$$

con  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  función de clase  $\mathcal{C}^1$  en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Diremos que  $X_0$  es **punto crítico** de  $F(X)$  si  $F(X_0) = 0$ .

**Definición 4.3.2.** Dado un Sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$X' = F(X) \quad (4.17)$$



con  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  función de clase  $\mathcal{C}^1$  en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$  y  $X_0$  punto crítico de  $F(X)$ , entonces llamaremos  $X_0$  como **punto hiperbólico** si todos los valores propios de  $J_F(X_0)$  tienen parte real no nula, siendo  $J_F(X_0)$ , la matriz jacobiana de  $F$  en  $X_0$ .

**Teorema 4.3.3. Teorema de Hartman-Grobman** Sea  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo de clase  $\mathcal{C}^1$ , y sea  $X_0$  un punto hiperbólico de  $F$ . Entonces existen  $V, U$  entornos abiertos de  $X_0$  y de 0 respectivamente tales que los campos  $F|_V$  y  $J_F(X_0)|_U$  son topologicamente conjugados.

*Demostración.* Ver página 119 de [11]. □

Consideremos el campo vectorial  $\chi_F$  sobre el  $(x, y, p)$ -espacio definido por el Sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}(t) = F_p, \quad \dot{y}(t) = pF_p, \quad \dot{p}(t) = -(F_x + pF_y) = G. \quad (4.18)$$

Tomemos  $T_0 \in \mathcal{F}$ , singularidad impropia, ( $F_{pp}(T_0) \neq 0$  y  $G(T_0) = 0$ ), y estudiemos que forma tiene  $\chi_F$  en un entorno de la misma. Aplicando el diferencial a ambos lados de la ecuación anterior tenemos que:

$\nabla(\chi_F \cdot \nabla F) = J_{\chi_F} \cdot \nabla F + \chi_F \cdot J_{\nabla F} = 0$ , teniendo en cuenta que  $\chi_F(T_0) = 0$  obtenemos que  $J_{\chi_F}(T_0) \cdot \nabla F = 0 \quad \forall (x, y, p) \in \mathcal{F}$  luego el vector normal de la superficie pertenece al núcleo de la aplicación lineal  $J_{\chi_F}(T_0)$  y su valor propio asociado es 0, por tanto en el sistema de ecuaciones diferenciales lineal  $X' = J_{\chi_F}(T_0)X$  restringido a  $T_F$ , la forma de las curvas integrales en torno al origen dependerán de los otros dos valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , que en el caso de tener ambos parte real no nula podemos aplicar el **Teorema de Hartman-Grobman** (4.3.3), de manera que el campo vectorial  $\chi_F(x, y, p)$  en un entorno de  $T_0$  es topologicamente conjugado al de la aplicación lineal  $J_{\chi_F}(T_0)X$  restringida a  $T_F$ , espacio vectorial tangente en  $T_0$ . Las posibilidades serían las siguientes:

- **Nodo estable**  $\rightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .
- **Punto silla**  $\rightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > 0$ .
- **Nodo estelar**  $\rightarrow \lambda$  doble,  $A$  diagonal (estable si  $\lambda < 0$ , inestable si  $\lambda > 0$ ).
- **Nodo inestable**  $\rightarrow \lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .
- **Nodo tangencial**  $\rightarrow \lambda$  doble,  $A$  no diagonal (estable si  $\lambda < 0$ , inestable si  $\lambda > 0$ ).
- **Foco**  $\rightarrow \lambda_1, \lambda_2$  complejos conjugados  $\lambda = p \pm qi$  (estable si  $p < 0$ , inestable si  $p > 0$ ).

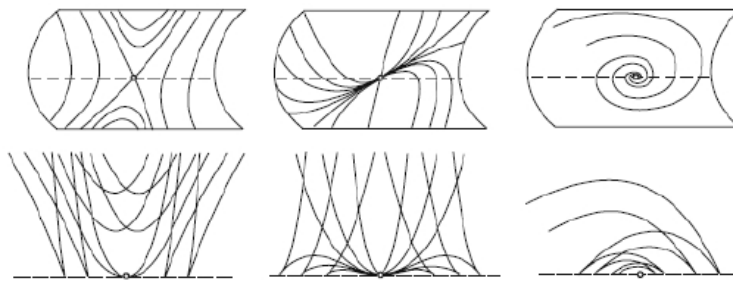


Figura 4.3: Ejemplo de punto silla, nodo y foco

**Proposición 4.3.4.** En un entorno de una singularidad impropia  $T_0$  de una Ecuación Diferencial Implícita  $F(x, y, p) = 0$  (2. 6), existe un cambio de coordenadas local que transforma  $F$  en:

$$y = (p + x\alpha)^2 \quad \text{donde } \alpha < 0 \text{ o } 0 < \alpha < 1/8 \text{ o } \alpha > 1/8 \quad (4.19)$$

donde cada uno de estos tres intervalos para el parámetro  $\alpha$ , corresponden a tres tipos de singularidades definidas por  $\chi_F$ : punto silla, nodo, foco.

*Demostración.* Ver [7]. □

Con esta última proposición, hemos demostrado que la función  $F$  de una ecuación diferencial (2.3) es localmente equivalente en un entorno de una singularidad *impropia fold*  $T_0$ , a una de las tres formas canónicas de 4.3.4, definidas sobre tres intervalos distintos para el parámetro  $\alpha$  que corresponden al caso en el que  $T_0$  es punto silla, nodo o foco.

# Bibliografía

- [1] A.A.Davydov. Normal forms and applications of first order implicit odes. Disponible en <http://gct.math.nsc.ru/wordpress/wp-content/uploads/2013/10/LecturesNotesNovosibirsk2013a.pdf>.
- [2] A.O.Remizov. A brief introduction to singularity theory. Trieste, 2010.
- [3] V. I. Arnol'd. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, volume 250 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988. Translated from the Russian by Joseph Szücs [József M. Szűcs].
- [4] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps. Volume 1*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2012. Classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous based on a previous translation by Mark Reynolds, Reprint of the 1985 edition.
- [5] V. Autores. Apuntes unizar de análisis matemático II.
- [6] R. A. Chertovskih and A. O. Remizov. On pleated singular points of first-order implicit differential equations. *J. Dyn. Control Syst.*, 20(2):197–206, 2014.
- [7] A. A. Davydov. The normal form of a differential equation, that is not solved with respect to the derivative, in the neighborhood of its singular point. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 19(2):1–10, 96, 1985.
- [8] A. A. Davydov, G. Ishikawa, S. Izumiya, and W.-Z. Sun. Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane. *Jpn. J. Math.*, 3(1):93–119, 2008.
- [9] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Stable mappings and their singularities*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14.
- [10] M. Matzeu and A. Vignoli, editors. *Topological nonlinear analysis. II*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 27. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. Degree, singularity and variations, Papers from the 2nd Topological Analysis Workshop on Degree, Singularity and Variations: Developments of the Last 25 Years held in Frascati, June 1995.
- [11] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [12] V. Zorich. *Mathematical analysis of problems in the natural sciences*. Springer, Heidelberg, 2011. Translated from the 2008 Russian original by Gerald Gould.

[1–12]