

## Grado en Matemáticas 27016 - Cálculo de probabilidades

Guía docente para el curso 2012 - 2013

Curso: 3, Semestre: 1, Créditos: 6.0

---

### Información básica

---

#### Profesores

- **Jesús María Abaurrea León** abaurrea@unizar.es

- **Gerardo Sanz Saiz** gerardo@unizar.es

#### Recomendaciones para cursar esta asignatura

El estudio y trabajo continuado desde el principio de curso son esenciales para no perder el ritmo de la materia y poder, finalmente, superar la asignatura.

Es recomendable la realización de las actividades propuestas, especialmente la resolución de problemas. Una de las dificultades de la asignatura se presenta en la construcción del modelo adecuado para resolver los problemas con la ayuda de las herramientas que se proponen en clase, por lo que es recomendable que el alumno invierta tiempo suficiente para resolver problemas por sí mismo.

Es importante que el alumno adquiera los conocimientos suficientes en esta asignatura para poder afrontar con garantía las siguientes asignaturas del Módulo "Probabilidad y Estadística" que forman parte del título de Graduado en Matemáticas.

Se recomienda haber superado la asignatura "Introducción a la probabilidad y la estadística".

Se recomienda haber superado esta asignatura antes de matricularse en las asignaturas "Teoría de la Probabilidad", "Estadística Matemática" y "Técnicas de Regresión".

#### Actividades y fechas clave de la asignatura

Clases de contenidos y de problemas (4 horas por semana en total), según el horario publicado por el centro.

Además del examen final global, en la fecha determinada por el centro, el estudiante podrá realizar dos pruebas intermedias a lo largo del cuatrimestre, en fechas a fijar con los alumnos, correspondientes a las siguientes partes de la asignatura:

- Variables aleatorias unidimensionales y vectores aleatorios.
- Convergencias estocásticas y Leyes de Grandes Números.

Además, los alumnos deberán realizar, al menos, una presentación oral, por lo que es muy recomendable que el alumno realice los ejercicios propuestos. Dependiendo del desarrollo del curso, esas presentaciones podrán ser en clase o en seminarios específicos.

# Inicio

---

## Resultados de aprendizaje que definen la asignatura

### El estudiante, para superar esta asignatura, deberá demostrar los siguientes resultados...

- 1:** Distinguir fenómenos deterministas y fenómenos aleatorios. Comprender el modelo que utiliza la Estadística para el estudio de fenómenos aleatorios: el Espacio de Probabilidad.
- 2:** Construir el Espacio de Probabilidad adecuado para el estudio de un fenómeno aleatorio. Calcular probabilidades. Conocer e interpretar los conceptos de dependencia e independencia estocástica. Calcular probabilidades en ambas situaciones.
- 3:** Saber definir y comprender el significado de las variables aleatorias discretas y continuas, unidimensionales y multidimensionales y las funciones que las caracterizan, así como comprender su utilidad para calcular probabilidades. Conocer y saber calcular las características principales de una distribución.
- 4:** Conocer, manejar y utilizar los conceptos de convergencia de sucesiones de variables aleatorias y leyes de los grandes números.
- 5:** Conocer, y ser capaz de usar el concepto de función característica. Conocer los principales Teoremas Centrales de límite, comprender su significado y utilizarlos adecuadamente.

## Introducción

### Breve presentación de la asignatura

La asignatura "Cálculo de Probabilidades" forma parte del bloque de formación básica del grado de Matemáticas. Está incluida en el módulo "Probabilidad y Estadística" y está concebida como una continuación de la asignatura obligatoria de segundo curso "Introducción a la Probabilidad y la Estadística". En esta asignatura se completa el estudio de las variables aleatorias iniciado en el curso anterior, y se estudian las convergencias estocásticas, leyes de grandes números, función característica y teorema central de límite..

Se da mucha importancia al aspecto práctico a través de la resolución de problemas.

---

## Contexto y competencias

---

### Sentido, contexto, relevancia y objetivos generales de la asignatura

#### La asignatura y sus resultados previstos responden a los siguientes planteamientos y objetivos:

Es una asignatura obligatoria dentro del Grado de Matemáticas. Uno de los principales objetivos es que los conocimientos teóricos y las técnicas adquiridas sirvan como base para asignaturas del módulo "Probabilidad y Estadística" de cursos posteriores, así como para proporcionar al alumno una visión de conceptos fundamentales del cálculo de probabilidades, así como sus aplicaciones prácticas.

#### Contexto y sentido de la asignatura en la titulación

---

Es una asignatura del módulo "Probabilidad y Estadística" dedicada esencialmente al estudio del uso de variables aleatorias

en ambientes de incertidumbre.

Para su correcto desarrollo se requieren conocimientos básicos de Álgebra Lineal, Análisis Matemático.

Se recomienda haber superado la asignatura "Introducción a la probabilidad y la estadística".

Se recomienda haber superado esta asignatura antes de matricularse en las asignaturas "Teoría de la Probabilidad", "Estadística Matemática" y "Técnicas de Regresión".

### **Al superar la asignatura, el estudiante será más competente para...**

- 1:** Reconocer situaciones reales en las que aparecen las distribuciones probabilísticas más usuales.
- 2:** Entender el concepto de independencia y el de condicionamiento.
- 3:** Reconocer situaciones reales que puedan modelarse con ayuda de la probabilidad y construir los modelos probabilísticos adecuados para ello.
- 4:** Calcular probabilidades en ambientes de incertidumbre.
- 4:** Comprender y utilizar el lenguaje y método estadísticos.
- 5:** Adquirir nuevos conocimientos y técnicas probabilísticas y estadísticas de forma autónoma y dentro de los estudios del Grado en Matemáticas.
- 6:** Entender y saber aplicar las leyes de los grandes números y el teorema central del límite.
- 7:** Comprender y utilizar el lenguaje y método del Cálculo de Probabilidades. Conocer demostraciones rigurosas de los teoremas básicos de Probabilidad y Estadística.

### **Importancia de los resultados de aprendizaje que se obtienen en la asignatura:**

Proporcionan una formación de carácter básico dentro del Grado para poder afrontar con éxito las asignaturas del módulo "Probabilidad y Estadística" y al mismo tiempo una visión suficientemente amplia que permita al alumno continuar ampliando sus conocimientos en el campo de la Estadística y Probabilidad.

---

## **Evaluación**

---

### **Actividades de evaluación**

#### **El estudiante deberá demostrar que ha alcanzado los resultados de aprendizaje previstos mediante las siguientes actividades de evaluación**

- 1:** Se realizarán dos pruebas intermedias con los contenidos siguientes:
  - Prueba intermedia 1 (P1): Escrita sobre los contenidos de los Bloques 1 y 2. Esta prueba se calificará sobre 1.25 puntos.
  - Prueba intermedia 2 (P2): Escrita sobre los contenidos de los Bloques 3. Esta prueba se calificará sobre 1.25 puntos.

Presentaciones en clase (P3): Los alumnos deberán realizar presentaciones orales sobre alguna actividad o ejercicio. Esta prueba se calificará sobre 0.5 puntos.

Además, hay un examen final, calificado sobre 10 puntos, en la primera convocatoria para todos los matriculados.

Los alumnos que hayan realizado las pruebas intermedias obtendrán como calificación la derivada de la siguiente expresión:

Máximo (Nota examen final; (nota P1 + nota P2+nota P3) + 0.7 x Nota examen final)

En el resto de las convocatorias habrá un examen de toda la asignatura sobre 10 puntos.

---

## Actividades y recursos

---

### Presentación metodológica general

**El proceso de aprendizaje que se ha diseñado para esta asignatura se basa en lo siguiente:**

**Clases de teoría:** Siguiendo principalmente el modelo de lección magistral participativa, utilizando el apoyo de medios audiovisuales y recursos informáticos cuando sea conveniente, y procurando también cierta interacción con los estudiantes.

**Clases de resolución de problemas:** Se trabajará en la resolución de ejercicios, problemas y prácticas de ordenador en clase. Se propondrán también problemas y ejercicios. Los alumnos tendrán que realizar su parte un trabajo personal para la resolución de los problemas propuestos y la redacción de soluciones.

Dependiendo de las disponibilidades, se realizarán algunos seminarios tutelados de teoría/problemas: En estos seminarios los estudiantes expondrán su trabajo, y plantearán las dudas y dificultades con las que se han encontrado.

**Tutorías.** Habrá un horario de tutorías personales con el profesor.

**Trabajo personal.** El estudio individual le permitirá asentar los conceptos explicados en las clases, así como aprender y aplicar adecuadamente las técnicas explicadas. Deberá manejar otra bibliografía distinta de la propuesta por el profesor, además de los apuntes de clase. También deberá dedicar una parte importante de su tiempo a la resolución de los ejercicios propuestos.

La asignatura aparece en el Moodle de la Universidad de Zaragoza. Así, el alumno puede obtener, información sobre la asignatura, apuntes, otra bibliografía, material complementario, hojas de problemas, etc.

### Actividades de aprendizaje programadas (Se incluye programa)

**El programa que se ofrece al estudiante para ayudarle a lograr los resultados previstos comprende las siguientes actividades...**

**1:** El programa que se ofrece al estudiante para ayudarle a lograr los resultados previstos comprende **Clases de teoría y problemas, tutorías y seminarios sobre los siguientes tópicos:**

**Bloque 0. Revisión de conceptos de probabilidad y variables aleatorias discretas y sus propiedades (1 semana)**

**Bloque 1 Variables y vectores aleatorios continuos. (4 semanas)**

Tema 1. Variables aleatorias continuas unidimensionales.

Definición de variable aleatoria continua. Funciones de distribución y densidad. Momentos y funciones generatrices de probabilidad y momentos. Modelos de variables aleatorias unidimensionales: uniforme, exponencial, gamma, beta y normal. Otros tipos de variables aleatorias (mixtas): función de distribución y momentos.

Tema 2. Vectores aleatorios continuos.

Definición de vectores aleatorios bidimensionales y multidimensionales. Funciones de distribución conjunta, condicionales y marginales. Momentos. Transformaciones de variables aleatorias. Modelos más usuales: multinomial y normal bivalente. Sumas de variables aleatorias independientes: convolución de densidades.

### **Bloque 2. El problema de la medida y la probabilidad. (2 semanas)**

Tema 3. El problema de la medida.

El problema de la medida. Conjuntos no medibles. Sucesos y tribus. Espacios de Probabilidad. Propiedades de la probabilidad. Construcción de probabilidades. Teorema de extensión.

Tema 4. Variables aleatorias: probabilidad imagen y función de distribución. Tribus engendradas por variables aleatorias. Esperanza de una variable aleatoria. Teoremas de continuidad y desigualdades. Producto de dos espacios de probabilidad. Independencia de sucesos y de variables aleatorias. Desigualdades de Markov y Chebyshev. Límite de sucesos. Continuidad de la probabilidad. Lemas de Borel-Cantelli. Incorrelación.

### **Bloque 3. Convergencias estocásticas y Leyes de Grandes Números. (5.5 semanas)**

Tema 6.- Convergencia de sucesiones de variables aleatorias. Convergencia en probabilidad, convergencia casi segura (c.s.), convergencia en  $L_p$ .

Tema 7.- Convergencia en distribución. Relación entre los distintos tipos de convergencia. Teorema de Slutsky

Tema 8.- Leyes débiles de grandes números. Bosquejo histórico. Leyes débiles de grandes números.

Tema 9.- Leyes fuertes de los grandes números. Desigualdad de Kolmogorov. Convergencia de series de variables aleatorias independientes. Ley fuerte de los grandes números de Kolmogorov. Aplicaciones estadísticas en el muestreo aleatorio simple y aplicaciones analíticas.

### **Bloque 4. Función característica y Teorema central de límite. (2.5 semanas)**

Tema 10.- Función característica. Derivación y momentos. Teoremas de unicidad, inversión y continuidad. Aplicación al caso de sumas de variables aleatorias independientes.

Tema 11.- Teoremas del límite central: De Moivre-Laplace, Lévy, Liapunov y Lindeberg-Feller.

Aplicaciones estadísticas: construcción de intervalos de confianza asintóticos.

**2:**

#### Bibliografía

Billingsley, P. (1995). Probability and Measure. 3rd. Edition. Wiley, New York.

Cuadras, C. M. (1985). *Problemas de Probabilidad y Estadística. Vol.1 : Probabilidades*. PPU, Barcelona.

Grimmett, G. and Stirzaker, D. (2004). Probability and Random Processes. Oxford University Press.

Grimmett, G.; Stirzaker, David (2001) One Thousand Exercises in Probability. Oxford University Press.

Lasala, P. (1996) Problemas resueltos de cálculo de probabilidades. Prensas Universitarias de Zaragoza.

Rosenthal, J.S. (2006). A first look at Rigorous Probability Theory (2<sup>nd</sup> Edition). World Scientific.

Velez Ibarrola, Ricardo (1995). *Cálculo de Probabilidades*. UNED.

Velez Ibarrola, Ricardo (2004). *Cálculo de Probabilidades 2*. Ediciones Académicas S.A.

## **Planificación y calendario**

### **Calendario de sesiones presenciales y presentación de trabajos**

Todas las actividades presenciales se imparten según horario establecido por el centro, publicado con anterioridad a la fecha de comienzo del curso

## Referencias bibliográficas de la bibliografía recomendada

- Grimmett, Geoffrey. One thousand exercises in probability / Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker . - 1st ed., reprinted Oxford : Oxford University Press, 2003
- Lasala, Pilar. Problemas resueltos de cálculo de probabilidades / Pilar Lasal Calleja Zaragoza : Prensas Universitarias de Zaragoza, 1996
- Rohatgi, Vijay K.. An introduction to probability theory and mathematical statistics / V.K. Rohatgi New York [etc.] : John Wiley & Sons, cop. 1976
- Vélez Ibarrola, Ricardo. Cálculo de Probabilidades 2 / Ricardo Vélez Ibarrola . - [1ª ed.] Madrid : Ediciones Académicas, 2004
- Vélez Ibarrola, Ricardo. Cálculo de probabilidades I / Ricardo Vélez Ibarrola, Víctor Hernández Morales . - [1a.ed.] Madrid : UNED, 1995