



## Grado en Economía 27408 - Matemáticas II

Guía docente para el curso 2012 - 2013

Curso: 1, Semestre: 2, Créditos: 6.0

---

### Información básica

---

#### Profesores

- Carmen Elvira Donazar celvira@unizar.es
- Eduardo José Casado Navarro eduardoj@unizar.es
- María Gloria Jarne Jarne gjarne@unizar.es
- Arturo Ramos Gutiérrez aramos@unizar.es

#### Recomendaciones para cursar esta asignatura

Es aconsejable que los estudiantes que vayan a cursar esta asignatura hayan adquirido todos los conocimientos necesarios para superar la asignatura Matemáticas I del primer cuatrimestre del primer curso. En cualquier caso, los estudiantes deben conocer el significado e implicaciones de la diferenciabilidad de una función y tener destreza en el cálculo de derivadas parciales de una función así como en la determinación del signo de una forma cuadrática. Además deben de poder realizar y seguir una secuencia lógica así como relacionar entre si distintos aspectos de las matemáticas ya conocidos.

#### Actividades y fechas clave de la asignatura

- Presentación de la asignatura en la primera sesión de clase
  - Asistencia y aprovechamiento continuado a las clases teóricas y prácticas.
  - Asistencia a las prácticas P6 (según calendario del grupo).
  - Realización, según calendario indicado el día de la presentación de la asignatura, de pruebas intermedias de evaluación.
  - Examen final según calendario de los Centros.
- 

### Inicio

---

#### Resultados de aprendizaje que definen la asignatura

**El estudiante, para superar esta asignatura, deberá demostrar los siguientes resultados...**

**1:** Ha adquirido destreza en el uso del lenguaje matemático, tanto en su comprensión como en su escritura.

**2:**

Identifica los elementos fundamentales de un problema de optimización: variables, función objetivo y restricciones.

- 3:** Plantea problemas de optimización estática sin restricciones y con restricciones de igualdad y de desigualdad.
- 4:** Resuelve gráficamente, en los casos en que sea posible, un problema de optimización.
- 5:** Valora si un programa matemático cumple las condiciones para ser resuelto mediante las técnicas estudiadas.
- 6:** Distingue entre puntos críticos y extremos u óptimos.
- 7:** Distingue entre óptimos locales y óptimos globales.
- 8:** Distingue entre condiciones necesarias y condiciones suficientes de optimalidad local.
- 9:** Calcula los puntos críticos resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido al plantear las condiciones de primer orden de optimalidad local, tanto en el caso sin restricciones como en el caso de restricciones de igualdad.
- 10:** Estudia los puntos críticos obtenidos utilizando las condiciones de segundo orden, tanto en el caso de problemas de optimización sin restricciones como en el caso de problemas con restricciones de igualdad.
- 11:** Aplica las condiciones que aseguran la globalidad de los óptimos.
- 12:** Interpreta el significado económico de los multiplicadores de Lagrange obtenidos en un problema de optimización con restricciones de igualdad.
- 13:** Evalúa si un programa matemático es lineal y lo resuelve gráficamente, si es posible, y por medio del algoritmo del simplex.
- 14:** Analiza la variación en la solución de un problema de optimización lineal ante una modificación en algún dato del problema sin necesidad de resolver un nuevo problema.
- 15:** Identifica un proceso dinámico en un fenómeno económico y lo representa si es posible mediante una ecuación diferencial ordinaria.
- 16:** Comprende el concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria y distingue entre solución general y solución particular.
- 17:** Distingue entre ecuación diferencial de primer orden y ecuación diferencial lineal de orden  $n$ .
- 18:** Distingue si una ecuación diferencial de primer orden es de variables separadas, homogénea, diferencial exacta o lineal y la resuelve utilizando el método adecuado.
- 19:** Distingue en una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, la ecuación homogénea asociada y calcula su solución general.
- 20:** Calcula una solución particular de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.
- 21:**

Calcula la solución general de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.

**22:** Calcula la solución de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden  $n$  con  $n$  condiciones iniciales.

**23:** Identifica los elementos fundamentales en un problema de carácter económico, formaliza si es posible dicho fenómeno en un problema matemático, resuelve dicho problema matemático con el método o herramienta más adecuada e interpreta el resultado en el contexto económico original.

**24:** Es capaz de relacionar los distintos temas tratados en la asignatura.

## Introducción

### Breve presentación de la asignatura

Matemáticas II es una asignatura de formación básica de 6 créditos ECTS que se imparte en el segundo cuatrimestre del primer curso y que es la continuación de Matemáticas I impartida en el primer cuatrimestre del mismo curso, en cuyos conceptos se fundamenta.

La asignatura Matemáticas II está dividida en dos bloques claramente diferenciados: Programación Matemática y Análisis Dinámico, que dan respuesta a dos puntos de vista de la realidad económica diferentes. Tras el primero el estudiante sabrá plantear y resolver un amplio abanico de problemas de optimización clásica: lineales o no lineales, sin restricciones o con restricciones de igualdad. En el caso de programas de optimización en los que tanto la función objetivo como las restricciones son lineales se utiliza como técnica de resolución el método del simplex. Puede utilizarse este tema para conectar la enseñanza tradicional de resolución con el uso de programas informáticos, que simplifican el proceso de cálculo y sitúan al estudiante en la práctica profesional.

En el segundo bloque, análisis dinámico, se trata de resolver ecuaciones diferenciales y analizar su solución. Su inclusión en el programa es necesaria porque en el análisis económico es habitual que los procesos económicos sean no estáticos, como por ejemplo: crecimiento económico óptimo, gestión óptima de recursos renovables y no renovables, inversión óptima a largo plazo, etc.

---

## Contexto y competencias

---

### Sentido, contexto, relevancia y objetivos generales de la asignatura

**La asignatura y sus resultados previstos responden a los siguientes planteamientos y objetivos:**

Los objetivos de carácter general de la enseñanza de las matemáticas en este grado pueden englobarse en dos:

1. Formación matemática del estudiante.
2. Capacitación del estudiante para la utilización de las matemáticas en los problemas que se le planteen en su futura profesión.

La asignatura supone un paso más en dichos objetivos ya abordados, por otra parte, en las Matemáticas I. La importancia de la formación matemática no radica sólo en los nuevos conceptos que proporciona sino en la adquisición de un enfoque riguroso, preciso, así como la capacidad de abstracción y el método científico que caracterizan a la Matemática. En cuanto al segundo objetivo, se introduce al estudiante en técnicas de modelización desde el punto de vista del análisis matemático a través de dos vías diferentes: optimización clásica por un lado y análisis dinámico por otro.

### Contexto y sentido de la asignatura en la titulación

Dado que las asignaturas de matemáticas deben de ser un instrumento y apoyo de otras que son el núcleo distintivo de su

formación, tales como Microeconomía, Macroeconomía, Econometría, etc., se continua en la línea de trabajo ya abordada en Matemáticas I de acercar las matemáticas a los problemas de naturaleza económica, lo que sin duda ayudará a una mejor comprensión de las matemáticas y, en consecuencia, a una mayor capacidad para su aplicación.

Al finalizar estas asignaturas los estudiantes habrán trabajado para conseguir uno de los fines más importantes de la teoría matemática: construir modelos que describan el mundo real. En particular, la Matemática puede ayudar a diseñar modelos económicos que expliquen mejor la realidad económica. El futuro graduado será capaz de utilizar el lenguaje en el que se expresa la ciencia, reconociendo el papel que las matemáticas juegan en el desarrollo de su pensamiento, al mejorar su razonamiento lógico, precisión, rigor, abstracción y capacidad para valorar resultados. Por ello, las asignaturas de carácter matemático son herramientas imprescindibles que permiten investigar, describir, comprender y reflexionar sobre la realidad económica.

## **Al superar la asignatura, el estudiante será más competente para...**

### **1:**

Desarrollar las siguientes competencias específicas:

E5-Identificar situaciones de optimización de recursos y costes

E16-Derivar de los datos información económica relevante

E17-Utilizar el razonamiento deductivo en conjunción con modelos para explicar los fenómenos económicos

E18-Representar formalmente los procesos de decisión económica

Desarrollar las siguientes competencias genéricas:

G1-Capacidad de análisis y síntesis

G6-Dominio de las herramientas informáticas y el lenguaje matemático

Más concretamente, cuando el estudiante supere la asignatura estará capacitado para:

**1.** Leer manuales de ésta y otras materias, ya que habrá tenido oportunidad de familiarizarse con la terminología básica de la asignatura, es decir, habrá adquirido el lenguaje apropiado para las matemáticas empresariales y el resto de disciplinas de corte analítico. Conocerá los conceptos, operaciones, teoremas y proposiciones básicas, y habrá desarrollado destreza en su uso. Tendrá hábitos de razonamiento deductivo. Habrá comenzado a desarrollar las capacidades de abstracción, generalización, análisis y síntesis.

**2.** Enfrentarse por sí solo a nuevas situaciones que le surgirán en su actividad profesional, ya que al haber trabajado en la asignatura en “la resolución de problemas concretos”, habrá adquirido confianza en la aplicación de sus conocimientos matemáticos. Será capaz de buscar modelos matemáticos apropiados a los problemas derivados de la economía. Una vez planteado un cierto problema económico, el estudiante será capaz de formularlo en términos matemáticos, si su resolución así lo requiere, y resolverlo con los conocimientos matemáticos adquiridos. Finalmente, interpretará y analizará las soluciones obtenidas en términos del área de donde partiera el planteamiento.

**3.** Asimilar nuevas herramientas o ideas matemáticas que no hayan sido explicadas en los estudios de grado de manera explícita.

**4.** Aplicar, cuando lo necesite, procedimientos de cálculo en los que se utilice el ordenador para resolver problemas que requieran una gran complejidad de cálculo.

**5.** Trabajar en equipo, ya que habrá aprendido a cooperar con sus compañeros, compartir sus experiencias y llegar a conclusiones conjuntas.

**6.** Presentar y exponer trabajos, ya que habrá mejorado sus habilidades de comunicación. En la actualidad estas capacidades tienen cada vez más importancia en la vida profesional. Las habilidades de comunicación se extienden a la expresión escrita y a la expresión oral. No sólo es importante el contenido sino también la forma de presentación, con lo cual la formación también debería abarcar el aprendizaje de técnicas de presentación y exposición en público.

7. Seguir formándose mediante el autoaprendizaje (consultando libros, revistas especializadas, web,...) algo que será fundamental en el desarrollo de su vida laboral.

## **Importancia de los resultados de aprendizaje que se obtienen en la asignatura:**

Posibilitan la comprensión de conceptos y modelos teóricos que se estudian en otras disciplinas afines con las que el estudiante se va a encontrar a lo largo del grado. El papel de las matemáticas con esta finalidad es muy importante ya que facilita el análisis y la discusión de los modelos y conceptos analizados. En este sentido podemos añadir que las técnicas de Optimización permiten fundamentar los dos paradigmas básicos de la microeconomía; a saber, la teoría del consumo y la teoría de la producción. Los conceptos de convexidad para conjuntos y de concavidad/convexidad para funciones, que se interpretan en términos de la diversidad en el consumo y de la ley de productividad marginal decreciente, respectivamente, tienen importantes aplicaciones. Las herramientas que proporciona la Programación Lineal son muy útiles en problemas de planificación de la producción y permiten realizar sencillos ejercicios de estática comparativa. Por otra parte, el análisis de procesos dinámicos en tiempo continuo, básicos, por ejemplo, en modelos de crecimiento económico, requiere de otras técnicas bien distintas. En este sentido, la teoría de ecuaciones diferenciales proporciona el instrumental necesario para el estudio de conceptos clave como el de trayectoria temporal, evolución del sistema, estabilidad,...etc.

---

## **Evaluación**

### **Actividades de evaluación**

**El estudiante deberá demostrar que ha alcanzado los resultados de aprendizaje previstos mediante las siguientes actividades de evaluación**

**1:**

En la primera convocatoria de la asignatura Matemáticas II se ofrecerá la posibilidad de evaluar la asignatura de forma continua.

El sistema de evaluación continua constará de dos pruebas escritas realizadas en periodo lectivo y en horario de clase.

La primera prueba se valorará con 5 puntos y se realizará la semana del 15 al 21 de abril de 2013. A la segunda prueba se le otorgará una puntuación de 5 puntos y se realizará la última semana lectiva del cuatrimestre.

Para superar la asignatura por evaluación continua habrá que realizar con carácter **obligatorio** ambas pruebas y obtener en cada una al menos un 25% de la nota de la prueba.

La calificación obtenida por el estudiante en evaluación continua será la suma de las calificaciones obtenidas en las dos pruebas.

Las materias superadas en las pruebas parciales de evaluación continua no serán tenidas en cuenta en cursos académicos sucesivos, aunque los estudiantes se matriculen nuevamente en la misma asignatura y se acojan a modalidad de evaluación continua.

El estudiante que no opte por la evaluación continua o que no supere la asignatura por este procedimiento o que quisiera mejorar su calificación, tendrá derecho a presentarse a la prueba global que se realizará en la fecha establecida en el calendario académico. En cualquier caso, prevalecerá la mejor de las calificaciones obtenidas.

La segunda convocatoria de evaluación, a la que tendrán derecho todos los estudiantes que no hayan superado la asignatura en la primera convocatoria, se llevará a cabo mediante una prueba global realizada en el periodo establecido al efecto en el calendario académico.

Las pruebas globales consistirán en un examen escrito evaluado sobre 10 puntos.

Todas las pruebas evaluarán una buena parte de los resultados de aprendizaje propuestos y se ajustarán al tipo de enseñanza impartida.

---

## Actividades y recursos

---

### Presentación metodológica general

#### El proceso de aprendizaje que se ha diseñado para esta asignatura se basa en lo siguiente:

Con esta asignatura se persigue que el estudiante desarrolle la capacidad analítica, el rigor y la intuición en el uso de los conceptos y resultados matemáticos y los sepa aplicar al análisis de problemas de índole económico. Es por esto que la formación del estudiante debe ir orientada en la dirección de dotarle de unos sólidos conocimientos matemáticos e inculcarle una sistemática en el razonamiento que posteriormente le permita encarar con éxito la solución de un amplio abanico de problemas en el contexto económico. En este sentido, los contenidos de la asignatura se desarrollarán en:

**Clases teóricas**, en las que se combinará la clase magistral para exponer los conceptos y resultados de los contenidos de la asignatura con la resolución participativa de ejercicios, en los que se aplicará de forma inmediata los aspectos teóricos explicados para ayudar a los estudiantes a asimilarlos. Estas clases serán presenciales y se impartirán a todo el grupo.

Cuantificación temporal: 1,6 créditos ECTS (40 horas).

**Clases prácticas**, en las que los estudiantes irán resolviendo, con la ayuda del profesor, ejercicios más completos y problemas de carácter económico en los que se apliquen los resultados matemáticos vistos.

Estos ejercicios estarán en las hojas de problemas de la asignatura que se podrán encontrar en la página web y en su caso en la plataforma que indique el profesor. Se anunciará con antelación cuáles se van a resolver en cada clase práctica para que el estudiante los pueda preparar. Estas clases serán presenciales y se impartirán a la mitad del grupo.

Cuantificación temporal: 0,8 créditos ECTS (20 horas).

**Seminarios** (prácticas tipo P6), en los que se podrán realizar diversas actividades: seguimiento del desarrollo de un trabajo que se habrá propuesto a un grupo de estudiantes y defensa del mismo; tutorías colectivas de determinados temas; desarrollo de problemas de carácter económico en cuya resolución se utilicen herramientas matemáticas explicadas en la asignatura... Estos seminarios podrían dedicarse además a la ampliación de conocimientos mostrando a los estudiantes que estén interesados otras herramientas matemáticas que permitan resolver problemas más generales. Se pone así de manifiesto que tanto la Ciencia Matemática como la Ciencia Económica son ciencias vivas y por tanto con muchos aspectos para estudiar.

Cuantificación temporal: 0,6 créditos ECTS (el profesor dispondrá de 15 horas para esta actividad).

**Actividades no presenciales**, 3 créditos ECTS (75 horas)

### Actividades de aprendizaje programadas (Se incluye programa)

**El programa que se ofrece al estudiante para ayudarle a lograr los resultados previstos comprende las siguientes actividades...**

- 1:** En las clases teóricas y prácticas se desarrollarán los contenidos detallados en el programa que se detalla a continuación. El orden en la impartición de los contenidos podrá experimentar alguna variación que será indicada por el profesor en la presentación de la asignatura.

### Planificación y calendario

#### Calendario de sesiones presenciales y presentación de trabajos

El día de la presentación de la asignatura se expondrá, en cada grupo, el calendario detallado de la asignatura según las características del curso académico.

# Bibliografía

## Básica:

- **Alegre, P. y otros:** Matemáticas Empresariales. Colección plan nuevo. Ed. AC, 1995 (Bloques I y II)
- **Alegre, P. y otros:** Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales. Vol. 1 y 2. Ed. AC, 1991 (Bloques I y II)
- **Balbás, A. y Gil, J.A.:** Programación Matemática. Ed. AC, 1987 (Bloque I)
- **Balbás, A., Gil, J.A. y Gutiérrez, S.:** Análisis Matemático para la Economía II. Cálculo Integral y Sistemas Dinámicos. Ed. AC, 1988 (Bloque II)
- **Barbolla, R., Cerdá, E. y Sanz, P.:** Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía. Ed. Prentice, 2001 (Bloque I)
- **Blanco, S., García, P. y Pozo, E.:** Matemáticas Empresariales I (enfoque teórico-práctico), Vol. 2, Cálculo diferencial. Ed. AC, 2004 (Bloque I)
- **Caballero, R. y otros:** Matemáticas Aplicadas a la Economía y a la Empresa. 308 ejercicios resueltos y comentados. Ed. Pirámide, 1ª edición, 1993 (Bloques I y II)
- **Heras, A. y otros:** Programación Matemática y Modelos Económicos: un enfoque teórico-práctico. Ed. AC, 1990 (Bloque I)
- **Pérez-Grasa, I., Minguillón, E. y Jarne, G.:** Matemáticas para la Economía. Programación Matemática y Sistemas Dinámicos. Ed. McGraw-Hill, 2001 (Bloques I y II)

## Complementaria:

- **Chiang Alpha, C.:** Métodos Fundamentales de Economía Matemática, Vol. 1. Ed. McGraw-Hill, 3ª edición., 1994 (Bloques I y II)
- **Sydsaeter, K., Hammond, P.:** Matemáticas para el Análisis Económico. Ed. Prentice Hall, 1996 (Bloques I y II)
- **Luenberger, D.:** Introducción a la programación lineal y no lineal. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1989 (Bloque I)
- **Pardo-Llorente, L.:** Programación lineal continua. Aplicaciones prácticas a la Empresa. Ed. Díaz Santos, 1987 (Bloque I)
- **Mocholi, M. y Sala, R.:** Programación Lineal. Ejercicios y Aplicaciones. Ed. Tébar Flores, 1997 (Bloque I)
- **Ayres, F.:** Ecuaciones Diferenciales. Ed. McGraw-Hill, Serie Schaum, 1969 (Bloque II)

# Programa

## BLOQUE I. PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

### Tema 1: Programas matemáticos

- 1.1. Formulación general de un programa matemático. Clasificación.
- 1.2. Definiciones y propiedades. Teorema de Weierstrass.
- 1.3. Introducción a la convexidad.
  - 1.3.1. Conjuntos convexos. Definición y propiedades.
  - 1.3.2. Funciones convexas y cóncavas. Definiciones y propiedades.
  - 1.3.3. Programas convexos.
- 1.4. Resolución gráfica.

### Tema 2: Programación sin restricciones

- 2.1. Formulación del problema.
- 2.2. Óptimos locales.
  - 2.2.1. Condiciones de primer orden para la existencia de óptimo local.
  - 2.2.2. Condiciones de segundo orden para la existencia de óptimo local.
- 2.3. Óptimos globales. Programas convexos.

### **Tema 3: Programación con restricciones de igualdad.**

- 3.1. Formulación del problema.
- 3.2. Óptimos locales.
  - 3.2.1. Condiciones de primer orden para la existencia de óptimo local.
  - 3.2.2. Condiciones de segundo orden para la existencia de óptimo local.
- 3.3. Óptimos globales: Programas convexos y Teorema de Weierstrass.
- 3.4. Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange.

### **Tema 4: Programación lineal.**

- 4.1. Formulación del problema.
- 4.2. Soluciones de un programa lineal. Soluciones factibles básicas.
- 4.3. Algoritmo simplex.
- 4.4. Dualidad.
- 4.5. Análisis post-óptimo.

## **BLOQUE II. ANÁLISIS DINÁMICO**

### **Tema 5: Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias.**

- 5.1. Introducción al análisis dinámico.
- 5.2. Concepto de ecuación diferencial, solución y tipos de soluciones.
- 5.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:
  - 5.3.1. Ecuaciones en variables separadas.
  - 5.3.2. Ecuaciones homogéneas.
  - 5.3.3. Ecuaciones diferenciales exactas.
  - 5.3.4. Ecuaciones lineales de primer orden.
- 5.4. Ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$  con coeficientes constantes:
  - 5.4.1. Definiciones básicas y teoremas fundamentales.
  - 5.4.2. Solución general de la ecuación completa.

## **Referencias bibliográficas de la bibliografía recomendada**

- Barbolla, Rosa. Optimización : programación matemática y aplicaciones a la economía / Rosa Barbolla, Emilio Cerdá, Paloma Sanz . 1ª ed., 1ª imp. Madrid : Garceta, 2011 [Bloque I]
- Blanco García, Susana. Matemáticas empresariales I : enfoque teórico-práctico. Vol. 2, Cálculo diferencial / Susana Blanco García, Pilar García Pineda, Eva del Pozo García . - [1ª ed.] Madrid : Editorial AC, [2004]
- Calderón Montero, Susana : Matemáticas para la economía y la empresa / Susana Calderón Montero, María Lourdes Rey Borrego ; Colaboradores Teodoro P. Galache Laza, Francisco Ruiz de la Rúa Madrid : Pirámide, 2012
- Chiang, Alpha C.. Métodos fundamentales de economía matemática / Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright ; traducción, Francisco Sánchez Frago, Raúl Arrijo Juárez ; revisión técnica, Andrés González Nucamendi, Filadelfo León Cázares . 4ª ed. México [etc.] : McGraw-Hill, cop. 2006
- Ejercicios resueltos de matemáticas empresariales / P. Alegre... [et al.] . - 1ª ed., 3ª reimp. Madrid : AC, 2005
- Matemáticas aplicadas a la economía y a la empresa : 380 ejercicios resueltos y comentados / Rafael E. Caballero Fernández...[et. al.] Madrid : Pirámide, D. L. 1993



- Matemáticas empresariales / Alegre ... [et al.] . Madrid : AC, D.L. 1995
- Mocholi Arce, Manuel. Programación lineal : ejercicios y aplicaciones / M. Mocholi Arce, R. Sala Garrido . Madrid : Tebar Flores, D.L. 1984
- Pérez Grasa, Isabel. Matemáticas para la economía : programación matemática y sistemas dinámicos / Isabel Pérez-Grasa, Esperanza Minguillón Constante, Gloria Jarne Jarne . Madrid [etc] : McGraw-Hill, cop. 2001
- Programación matemática y modelos económicos : un enfoque teórico-práctico / Antonio Heras Martínez... [et.al.] . Madrid : AC, D. L. 1990
- Sydsaeter, Knut. Matemáticas para el análisis económico / Knut Sydsaeter, Peter Hammond ; traducción, Manuel Jesús Soto Prieto, José Luis Vicente Córdoba ; revisión técnica, Emilio Cerdá Tena , Xavier Martínez Guiralt . Última reimp. Madrid [etc.] : Prentice Hall, 2008