

REVISTA  
DE LA  
**ACADEMIA DE CIENCIAS**  
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES  
DE  
ZARAGOZA

SERIE 2<sup>a</sup>

TOMO XX



1965

## ÍNDICE

	Págs.
BARTOLOMÉ FRONTERA MARQUÉS. — <i>Propiedades de una función de valores enteros definida en el conjunto de las multiálgebras finitas.</i>	9
BALTASAR R.-SALINAS PALERO. — <i>Sobre la teoría de la medida y sus fundamentos</i> ... ... ... ... ... ... ...	89
RAFAEL RODRÍGUEZ VIDAL. — <i>Discurso de contestación al anterior</i> ...	117
FRANCISCO J. YNDURÁIN. — <i>Definición de Hamiltonianos y Renormalización en algunos modelos de Teoría Cuántica de Campos</i> ... ...	120
CARMEN CUEVAS REDRADO. — <i>Método aproximado de Sistemas Ópticos.</i>	153
DOMINGO GONZÁLEZ. — <i>Difusión térmica en mezclas multicolores</i> ...	203
M. <sup>a</sup> PILAR PUEBLA REMACHA. — <i>Reacciones de los óxidos de cromo, Molibdeno Wolframio (VI) con Cloruro de Acetilo</i> ... ... ...	253

## SEÑORES ACADEMICOS

### JUNTA DE GOBIERNO

- PRESIDENTE: Excmo. Sr. D. Francisco Pascual de Quinto.  
VICEPRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. Mariano Tomeo Lacrué.  
TESORERO: Ilmo. Sr. D. Celso Gutiérrez Losa.  
BIBLIOTECARIO: Ilmo. Sr. D. Juan Martín Sauras.  
SECRET. PERPETUO: Ilmo. Sr. D. Julián Bernal Nievas.  
VICESECRETARIO: Ilmo. Sr. D. Fernando Cámara Niño.

### ACADEMICOS NUMERARIOS

#### *Sección de Exactas*

- PRESIDENTE: Excmo. Sr. D. Teodoro Ríos Balaguer. (Medalla n.º 25). Independencia, 25.  
VICEPRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. José M.ª Iñiguez Almech. (Medalla n.º 19). Bolonia, 4.  
SECRETARIO: Ilmo. Sr. D. José Estevan Cirquian. (Medalla n.º 4). Ponzano, 16.  
ACADÉMICOS: Excmo. Sr. D. Santiago Amado Lóriga. (Medalla n.º 10). General Mayandía, 2.  
Ilmo. Sr. D. Rafael Rodríguez Vidal. (Medalla n.º 22). Fernando el Católico, 6.  
Ilmo. Sr. D. Baltasar Rodríguez Salinas. (Medalla número 1). Arzobispo Apaolaza, 20.  
Ilmo. Sr. D. Juan Sancho de San Román. (Electo). San Juan de la Cruz, 19.  
Ilmo. Sr. D. Antonio Plans y Sanz de Bremond. (Electo). Independcia, 32.  
Ilmo. Sr. D. Rafael Cid Palacios. (Electo). Corona de Aragón, 50.  
Ilmo. Sr. D. Alberto Viader Muñoz. (Electo). San Miguel, 10.

*Sección de Físico-Químicas*

- PRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. Vicente Gómez Aranda. (Medalla n.º 5). Independencia, 18.
- VICEPRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. Gonzalo González Salazar Gallart. (Medalla n.º 29). Capitán Portolés, 20.
- SECRETARIO: Ilmo. Sr. D. Juan Martín Sauras. (Medalla n.º 11). Calvo Sotelo, 25.
- ACADÉMICOS: Ilmo. Sr. D. Julián Bernal Nievias. (Medalla n.º 2). Plaza de Aragón, 10.  
Ilmo. Sr. D. Mariano Tomeo Lacrué. (Medalla n.º 8). General Mola, 45.  
Ilmo. Sr. D. Celso Gutiérrez Losa. (Medalla n.º 20). Blancas, 2.  
Excmo. Sr. D. Juan Cabrera Felipe. (Medalla n.º 23). Plaza Santa Engracia, 1.  
Ilmo. Sr. D. Justiniano Casas Peláez. (Medalla n.º 14). Calvo Sotelo, 11-D.  
Ilmo. Sr. D. Alberto Galindo Teixaire. (Electo). Paseo de Teruel, 19-21.

*Sección de Naturales*

- PRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. Pedro Ferrando Más. (Medalla n.º 12). General Mola, 9.
- VICEPRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. Agustín Alfaro Moreno. (Medalla n.º 27). Zumalacárregui, 10.
- SECRETARIO: Excmo. Sr. D. Ramón Esteruelas Rolando. (Medalla número 15). Independencia, 4.
- ACADÉMICOS: Ilmo. Sr. D. Jesús Sainz y Sainz-Pardo. (Medalla n.º 6). Moncasi, 12.  
Ilmo. Sr. D. Fernando Cámara Niño. (Medalla n.º 21). Almagro, 7.  
Excmo. Sr. D. Francisco Pascual de Quinto. (Medalla n.º 30). General Mola, 32.  
Ilmo. Sr. D. Angel Sánchez Franco. (Medalla n.º 9). Royo, 23.  
Ilmo. Sr. D. Cruz Rodríguez Muñoz. (Electo). Arzobispo Apaolaza, 20.  
Ilmo. Sr. D. Santiago Baselga Aladrén. (Electo). Alfonso I, 25.  
Ilmo. Sr. D. José M.ª Ruiz Tapiador Martínez. (Electo). Marina Moreno, 14.

## ACADEMICOS CORRESPONDIENTES NACIONALES

### *Sección de Exactas*

- Dr. D. Pedro Abellanas Cebollero. Ibáñez Martín, 1. Madrid.  
Dr. D. Roberto Araújo García. Peñuelas, 11. Madrid.  
Dr. D. José Javier Etayo Miqueo. Conde de Peñalver, 80. Madrid.  
Dr. D. Pedro Pi y Calleja. Aribau, 135. Barcelona.

### *Sección Físico-Químicas*

- Dr. D. Simón Benítez Padilla. Pérez Galdós, 9. Las Palmas.  
Dr. D. Julio Palacios Martínez. Serrano, 157. Madrid.  
Dr. D. Emilio Jimeno Gil. Marqués de Urquijo, 34. Madrid.  
Dr. D. José M.ª Albareda Herrera. Serrano, 119. Madrid.  
Dr. D. José M.ª González Barredo. Chicago. Estados Unidos.  
Dr. D. Mariano Velasco Durantez. Plaza de Núñez de Arce, 7. Barcelona.  
Dr. D. Juan Bautista Bastero Beguiristain. Pérez Galdós, 5. Bilbao.

### *Sección de Naturales*

- Dr. D. Rafael Ibarra Méndez. Plaza Alonso Martínez, 2. Madrid.  
Ing. Dí. D. José Cruz Lapazarán Beguiristain. Ferraz, 57. Madrid.  
Ing. Dr. D. Mariano Berdún Clavería. P. Huesca, 6. Huesca.  
Ing. Dr. D. Alfonso Osorio Rebellón. Princesa, 15. Madrid.  
Ing. Dr. D. José M.ª Ríos García. Hermosilla, 44. Madrid.

## ACADEMICOS CORRESPONDIENTES EXTRANJEROS

### *Sección de Exactas*

- Dr. Gastón Julia. Versalles. (Francia).

### *Sección Físico-Químicas*

- Dr. Charles Henry. París. (Francia).

### *Sección de Naturales*

- Dr. Eugenio Seguy. París. (Francia).  
Dr. Henry Gausson. Toulouse. (Francia).

# PROPIEDADES DE UNA FUNCION DE VALORES ENTEROS DEFINIDA EN EL CONJUNTO DE LAS MULTIALGEBRAS FINITAS.

por

BARTOLOMÉ FRONTERA MARQUÉS

## PROLOGO

Este trabajo ha sido posible gracias a la orientación que ha venido dando a mis estudios el Doctor D. ANTONIO PLANS SANZ DE BREMOND, catedrático de Geometría Analítica y de Topología de la Universidad de Zaragoza, y al estímulo constante que de él he recibido. El tema surgió a raíz de un ciclo de conferencias sobre Teoría de Retículos y Lógica Matemática, desarrollado en la Universidad de Zaragoza por el Dr. HANS HERMES, profesor numerario de la Universidad de Münster i. W. (Alemania) y Director del "Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung" de dicha Universidad de quien he recibido mucha sana crítica y ayuda positiva, primero por correspondencia y después personalmente en una serie de audiencias que me concedió en Münster en presencia de sus colaboradores Dr. RODDING y Dr. TITGEMEYER, quienes también contribuyeron con valiosas observaciones. La fundación JUAN MARCH hizo posible mi viaje y estancia en Münster al concederme una generosa ayuda para tal fin. Sea para todos mi sincero agradecimiento.

En toda la exposición se supondrán conocidos los principios básicos de la Teoría de Conjuntos y de Álgebra Moderna, en particular las teorías de Retículos, Grupos y Cuerpos. Los resultados ya conocidos que hayan de ser útiles en el desarrollo de esta Memoria serán expuestos como lemas, para cuya demostración remitiremos al lector a alguno de los tratados o trabajos a que hemos tenido acceso. En algunos casos citaremos los autores de los lemas (teoremas en el trabajo original) mientras que en otros el lema corresponderá a algún teorema ya clásico cuya demostración puede encontrarse en cualquier tratado general. Cuando esto ocurra las citas que demos no corresponderán necesariamente al autor del teorema.

Los números entre corchetes harán referencia a la nota bibliográfica. Los números entre paréntesis remitirán a notas explicativas que se expondrán fuera de texto al final del trabajo. Cada capítulo irá dividido en secciones, pero éstas irán numeradas de modo correlativo desde el principio. Por el contrario, las fórmulas a lo largo del texto irán señaladas mediante dos nú-

meros separados por un guión, el primero de los cuales indicará la sección en que se encuentra y el segundo el orden que ocupa la fórmula dentro de la misma. Finalmente, los lemas por una parte y los teoremas (originales del autor) por otra, irán enumerados de un modo correlativo con independencia de la sección en que se hallen incluidos.

Para algunos detalles de nomenclatura y de presentación he seguido valiosas sugerencias de D. RAFAEL RODRÍGUEZ VIDAL, Catedrático de Análisis y de Álgebra Moderna de esta Universidad de Zaragoza.

## INTRODUCCION

### 1

#### NATURALEZA Y PARTES DE QUE CONSTA ESTE TRABAJO

Es sabido que, cuando en un conjunto  $S$  se introducen operaciones o relaciones, el sistema de conjuntos cerrados respecto a las mismas constituye un retículo respecto a la inclusión ordinaria. Un tal retículo  $R$  es un  $\cap$  — subretículo completo del álgebra de Boole  $\mathcal{L}(S)^{(1)}$  de las partes de  $S$  en el sentido de que el ínfimo en  $R$  de cualquier familia  $\{F_\lambda\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) de conjuntos cerrados es igual a la intersección  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  de la misma familia en  $\mathcal{L}(S)$ . Adelantándonos a la definición más precisa que daremos en su lugar, decimos que una *multiálgebra*  $\mathfrak{M}$  es un conjunto  $S$  en el que se han introducido operaciones o relaciones. Cuando el conjunto  $S$  es finito se dice que  $\mathfrak{M}$  es una *multiálgebra finita* y en este caso el Retículo  $L(\mathfrak{M})$  de los subconjuntos de  $S$  cerrados respecto a todas las operaciones o relaciones que caracterizan a  $\mathfrak{M}$  es necesariamente finito puesto que  $\mathcal{L}(S)$  lo es. El Retículo  $L(\mathfrak{M})$  será llamado *Retículo de las submultiálgebras de  $\mathfrak{M}$* . A toda multiálgebra finita le corresponde pues un Retículo finito  $L(\mathfrak{M})$  de submultiálgebras.

Si  $x, y$  son elementos de un retículo  $R$ , se dice que el conjunto  $[x, y]$  formado por los elementos  $z$  de  $R$  tales que  $x \subseteq z \subseteq y$  es un intervalo de  $R$ . Los elementos  $x, y$  se dice que son los *extremos* del intervalo  $[x, y]$  ( $x$  es el extremo inferior e  $y$  el extremo superior). Un intervalo  $[x, y]$  es vacío si  $x \not\subseteq y$  ( $x$  no es inferior a  $y$ ), trivial si  $x = y$ , elemental si  $x$  es contiguo inferior de  $y$  (escribiremos en este caso  $x \setminus y$ ) y, en general, *finito* si es finito el número de elementos  $z$  tales que  $x \subseteq z \subseteq y$ . Los intervalos vacíos están caracterizados por carecer de elementos, los triviales por contener un único elemento que es a la vez extremo superior e inferior y los elementales por contener exactamente dos elementos, a saber, el extremo inferior  $x$  y el extremo superior  $y$ . Si un retículo  $R$  es finito, sus intervalos son todos vacíos o finitos. En particular  $R$  posee entonces un elemento mínimo  $c$  (elemento cero) y un elemento máximo  $u$  (elemento unidad y el intervalo  $[c, u]$  contiene todos los elementos de  $R$ .

A cada intervalo  $[x, y]$  de un retículo finito  $R$  vamos a asociar un entero no negativo  $d(x, y)$  poniendo:

$d(x, y) = 0$ , si el intervalo  $[x, y]$  es vacío o trivial.

$d(x, y) = n$ , si es  $x \subset y$  ( $x \subseteq y$  y  $x \neq y$ ) y  $n$  es el entero positivo mínimo para el cual existen elementos  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  de  $R$ , tales que  $a_0 = x$ ,  $a_n = y$ , y  $a_0 \setminus a_1 \setminus \dots \setminus a_{n-1} \setminus a_n$ .

Al entero  $d(x, y)$  lo llamaremos longitud mínima del intervalo  $[x, y]$ .

De este modo hemos definido una función  $d$  de valores enteros, en el conjunto de los intervalos de  $R$ , hecho lo cual vamos a definir en el mismo conjunto otra función (que, por las razones que oportunamente explicaremos, vamos a designar por  $(d \mu)$ ), poniendo:

$(d \mu)(x, y) = 0$ , si el intervalo  $[x, y]$  es vacío o trivial. Con esto ya está definida la función  $(d \mu)$  para todo intervalo de 0 o de 1 elemento. Supongamos que ya esté definido el valor de  $(d \mu)(x, z)$  siempre que  $[x, z]$  sea un intervalo de menos de  $n$  elementos. Si  $[x, y]$  tiene exactamente  $n$  elementos y  $z$  es un elemento de  $R$  tal que  $x \subseteq z \subset y$ , el intervalo  $[x, z]$  contiene a lo sumo  $n - 1$  elementos y se conoce por lo tanto el valor de  $(d \mu)(x, z)$ . Ponemos ahora por definición:

$$(d \mu)(x, y) = d(x, y) - \sum_{x \subseteq u \subset z} (d \mu)(x, z).$$

Puesto que, al ser  $R$  finito, es también finito todo intervalo no vacío de  $R$ , el proceso indicado permite obtener  $(d \mu)(x, y)$  cualesquiera que sean los elementos  $x$ ,  $y$  de  $R$ . En particular ponemos por definición:

$$(d \mu)(R) = (d \mu)(c, u),$$

siendo  $c$  el elemento cero y  $u$  el elemento unidad de  $R$ .

Cualquiera que sea el Retículo finito  $R$ , sabemos asociar de esta manera a  $R$  un entero  $(d \mu)(R)$ . Estamos ya en condiciones de asociar a cada Multiálgebra finita  $\mathfrak{M}$  el entero  $A(\mathfrak{M})$  poniendo:

$$A(\mathfrak{M}) = (d \mu)(L(\mathfrak{M}))$$

Queda así definida la función  $A$  en el conjunto de las multiálgebras finitas y nuestro propósito es estudiar los valores que toma esta función cuando se toman como argumentos las multiálgebras pertenecientes a ciertas clases conocidas o que oportunamente describiremos.

En las restantes secciones de la presente introducción nos dedicaremos a puntualizar algunas definiciones y recordar algunos resultados conocidos de la Teoría de Retículos. Se verá en qué manera los Retículos, los Grupos y los Cuerpos han de ser considerados como multiálgebras. Se demostrarán finalmente algunas propiedades de la función  $(d \mu)$  encontradas por el autor y que resultan útiles después para la determinación de los valores de la función  $A$ .

En los capítulos I y II, respectivamente, se estudiará la función  $A$  en los Grupos y en los Cuerpos finitos (Cuerpos de Galois).

En el capítulo III se expondrá el concepto de partición generalizada de tipo  $n$  de un conjunto  $S$ , introducido por HARTMANIS (véase [13], [14] y [15]). Modificando muy ligeramente la definición de dicho autor, definimos una partición de tipo  $n$  de un conjunto  $S$ , para cualquier entero no negativo  $n$  y cualquier conjunto  $S$ , como una familia  $\mathfrak{M}$  de subconjuntos de  $S$  (a cada uno de estos subconjuntos lo llamamos *bloque* de  $\mathfrak{M}$ ), tal que todo subconjunto  $T$  de  $S$  que tenga exactamente  $n$  elementos, está contenido en un bloque y sólo uno de  $\mathfrak{M}$ . (Esta definición, a diferencia de la de Hartmanis, es válida para  $n = 0$  y también, para cualquier  $n \geq 0$ , cuando el conjunto  $S$  tiene menos de  $n$  elementos).

A cada partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de un conjunto  $S$  le haremos corresponder dos multiálgebras distintas  $H(\mathfrak{M})$  y  $G(\mathfrak{M})$ , a la primera de las cuales la llamaremos *multiálgebra de Hartmanis* de tipo  $n$  correspondiente a  $\mathfrak{M}$  y a la segunda *hipergeometría* de tipo  $n$  correspondiente a  $\mathfrak{M}$ . Si el conjunto  $S$  es finito, tanto  $H(\mathfrak{M})$  como  $G(\mathfrak{M})$  serán multiálgebras finitas.

Los capítulos IV y V estarán dedicados al estudio de la función  $A$  en las multiálgebras de Hartmanis finitas y en las hipergeometrías finitas respectivamente. Veremos como todo espacio proyectivo finito es isomorfo a una cierta hipergeometría finita de tipo 2.

## 2

## OPERACIONES Y RELACIONES EN UN CONJUNTO

Sea  $S$  un conjunto no vacío y  $a_1, \dots, a_n$  elementos, no necesariamente distintos de  $S$ . Diremos que tales elementos, tomados en este mismo orden, constituyen una  $n$ -tuple de  $S$  que designaremos por  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . El conjunto de todas las  $n$ -tuples de  $S$  es lo que se llama *potencia cartesiana  $n$ -ésima* de  $S$  y se designa por  $S^n$ . *Operación  $n$ -aria* en  $S$  es toda aplicación de  $S^n$  en el conjunto  $\mathcal{P}(S)$  de las partes de  $S$ . Toda operación  $n$ -aria  $\omega$  hace corresponder pues a cada  $n$ -tuple  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  de  $S$ , un subconjunto de  $S$  que designaremos por  $\omega(a_1, \dots, a_n)$ .

Una operación  $n$ -aria  $\omega$  será llamada en este trabajo *univalente* si para cada  $n$ -tuple  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ,  $\omega(a_1, \dots, a_n)$  es un subconjunto de  $S$  que contiene a *lo sumo* un elemento y será llamada *uniforme* si para cada  $n$ -tuple  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ,  $\omega(a_1, \dots, a_n)$  contiene *un elemento de  $S$  y sólo uno*. Una operación  $n$ -aria uniforme en  $S$  puede ser considerada como una aplicación de  $S^n$  en  $S$  sin más que identificar cada conjunto  $\{x\}$  que contiene un solo elemento, con el correspondiente elemento  $x$ . Para nosotros una operación uniforme no será sino un caso particular de operación en el sentido de la definición que hemos dado, si bien, en el caso de ser  $\omega$  una operación  $n$ -aria uniforme que hace corresponder el conjunto  $\{x\}$  a la  $n$ -tuple  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , escribiremos para abreviar  $x = \omega(a_1, \dots, a_n)$  y diremos que  $x$  es el valor de  $\omega(a_1, \dots, a_n)$ . Lo mismo valdrá si  $\omega$  es una operación univalente (no necesariamente uniforme) y  $\omega(a_1, \dots, a_n)$  no es la parte vacía de  $S$ .

Si  $S$  es un conjunto no vacío, recibe el nombre de *relación  $n$ -aria* en  $S$  ( $n \geq 1$ ) todo subconjunto de la potencia cartesiana  $S^n$ . Las relaciones  $n$ -arias en  $S$  pueden ordenarse como en la teoría de conjuntos, constituyendo de este modo el álgebra de Boole  $\mathcal{P}(S^n)$ . En particular, para  $n = 1$ , se pueden identificar las 1-tuples  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \dots$ , con los elementos  $x, y, \dots$  de  $S$ , conviniendo en poner  $S^1 = S$  y  $\mathcal{P}(S^1) = \mathcal{P}(S)$ . Una *relación unaria* (1-aria) en  $S$  será por lo tanto para nosotros, ni más ni menos que un *subconjunto de  $S$* .

Lo mismo al definir la potencia cartesiana  $n$ -ésima de un conjunto  $S$  que al definir las operaciones  $n$ -arias y las relaciones  $n$ -arias en  $S$ , hemos supuesto que  $S$  era un conjunto no vacío y que era  $n \geq 1$ . Conviene suprimir estas restricciones y examinar los casos en que pueda ser  $S = \emptyset$

(conjunto vacío) ó  $n = 0$ . Para  $n = 0$  podremos hablar entonces de *operaciones y de relaciones nularias* ( $0$ -arias). Empecemos por considerar el caso en que sea  $S = \emptyset$  y  $n \geq 1$ . Al no contener  $S$  ningún elemento, no se podrá constituir ninguna  $n$ -tuple con elementos de  $S$  y por lo tanto  $S^n$  será el conjunto vacío (relación vacía). Convendremos pues en decir que, si es  $n \geq 1$  y  $S$  un conjunto vacío, no existe más relación  $n$ -aria en  $S$  que la *relación vacía*, caracterizada por ser un conjunto vacío de  $n$ -tuplas de  $S$ . Ahora bien, para  $n = 0$  y tanto si  $S$  es vacío como si no, convendremos en decir que existe una  $0$ -tuple y sólo una de  $S$ , que representaremos por  $\langle \emptyset \rangle$ . Al existir una  $0$ -tuple y sólo una, se podrán formar exactamente dos subconjuntos de  $0$ -tuplas, o lo que es lo mismo, dos relaciones nularias en  $S$ , a saber, la relación vacía y la que contiene el único elemento  $\langle \emptyset \rangle$ . Convendremos por lo tanto, en que, cualquiera que sea el conjunto  $S$ , existen siempre dos y solamente dos relaciones nularias en  $S$ , que son la relación vacía y la no vacía.

El admitir la existencia de la  $0$ -tuple  $\langle \emptyset \rangle$  de un conjunto  $S$ , cualquiera que sea  $S$ , tiene la ventaja de que con ello estamos en condiciones de definir operaciones nularias en  $S$ , de la misma manera que definíamos las operaciones  $n$ -arias para  $n \geq 1$ . En efecto, una operación nularia será ahora una aplicación de  $S^0$  en  $\mathcal{L}(S)$ . Si  $\omega$  es una operación nularia en  $S$ , puesto que en el dominio  $S^0$  existe, según hemos admitido, un elemento único  $\langle \emptyset \rangle$ ,  $\omega$  hará corresponder a  $\langle \emptyset \rangle$  un elemento único  $\omega(\emptyset)$  de  $\mathcal{L}(S)$ . Este elemento  $\omega(\emptyset)$  caracteriza totalmente a  $\omega$ , de modo que, identificando  $\omega(\emptyset)$  con  $\omega$ , convendremos en decir que una *operación nularia en un conjunto S es ni más ni menos que un subconjunto de S*. El conjunto de las operaciones nularias en  $S$  es pues lo mismo que  $\mathcal{L}(S)$ .

Las relaciones nularias carecen para nosotros de todo interés (si las hemos mencionado ha sido solamente con el fin de hacer completa la exposición), pero no así las operaciones nularias. En general (salvo mención expresa de lo contrario), siempre que hablamos de una relación  $\Theta$  definida en un conjunto  $S$ , supondremos que  $S$  es un conjunto no vacío y que  $\Theta$  es un subconjunto de  $S^n$  para cierto entero  $n \geq 1$ . Si hablamos de una operación  $\omega$  en  $S$ , supondremos igualmente que  $S$  es no vacío y que  $\omega$  es una aplicación de  $S^0$  en  $\mathcal{L}(S)$ , pero en este caso  $n$  podrá ser cualquier entero no negativo ( $n \geq 0$ ). Cuando hablamos de operaciones o de relaciones en un conjunto  $S$  supondremos pues siempre que  $S$  contiene por lo menos un elemento.

## 3

IDENTIFICACIÓN DE LOS CONCEPTOS DE OPERACIÓN  $n$ -ARIA  
Y DE RELACIÓN  $(n + 1)$ -ARIA EN UN CONJUNTO

A cada operación  $n$ -aria  $\omega$  en  $S$  ( $n \geq 0$ ), hagámosle corresponder la relación  $(n + 1)$ -aria  $\Theta\omega$  en  $S$  caracterizada por contener una  $(n + 1)$ -tuple  $\langle a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \rangle$  de la  $S$ , si y sólo si es  $a_{n+1} \in \omega(a_1, \dots, a_n)$ . Diremos que la relación  $\Theta\omega$  así definida, es la *gráfica* de la operación  $\omega$ . Es fácil comprobar que la correspondencia  $\omega \rightarrow \Theta\omega$  es una aplicación biunívoca y re-

PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN DE VALORES ENTEROS

versible del conjunto  $\Omega_n$  de las operaciones  $n$ -arias, sobre el conjunto  $R_{n+1}$ , de las relaciones  $(n + 1)$ -arias en  $S$  (siendo esto así podemos escribir  $\omega \leftrightarrow \Theta\omega$  en vez de  $\omega \rightarrow \Theta\omega$ ). La aplicación inversa de  $R_{n+1}$  sobre  $\Omega_n$  es la que hace corresponder a cada subconjunto  $\Theta$  de  $S^{n+1}$  (relación  $(n + 1)$ -aria), la aplicación  $\omega_\theta$  de  $S^n$  en  $\mathcal{L}(S)$  (operación  $n$ -aria) caracterizada por ser, para cada  $n$ -tupla  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  de  $S$

$$\omega_\theta(a_1, \dots, a_n) = \{x : \langle a_1, \dots, a_n, x \rangle \in \Theta\}$$

es decir, para cada  $n$ -tupla  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  de  $S$ ,  $\omega_\theta(a_1, \dots, a_n)$  es el subconjunto de  $S$  al que pertenece un elemento  $x$ , si y sólo si la  $(n + 1)$ -tupla  $\langle a_1, \dots, a_n, x \rangle$  pertenece a  $\Theta$ . La demostración de estos hechos es sumamente fácil y conocida, por lo que no nos entretenemos en ella.

Una operación  $n$ -aria  $\omega$  y una relación  $(n + 1)$ -aria  $\Theta$  en  $S$ , relacionadas una con otra mediante la correspondencia biúnica  $\omega \leftrightarrow \Theta\omega$  acabada de establecer, pueden ser identificadas, es decir, consideradas las dos como representantes de un mismo ente. La consideración de un tal ente en su aspecto de operación  $n$ -aria o en el de relación  $(n + 1)$ -aria será materia de elección en cada caso.

4

CONJUNTOS CERRADOS RESPECTO A UNA OPERACIÓN  $n$ -ARIA O RESPECTO  
A UNA RELACIÓN  $(n + 1)$ -ARIA

Dada una operación  $n$ -aria  $\omega$  en  $S$  y un subconjunto  $T$  de  $S$ , diremos que  $T$  es *cerrado respecto a*  $\omega$  si y sólo si, para cada  $n$ -tupla  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  de  $T$  se verifica que  $\omega(a_1, \dots, a_n)$  es un subconjunto de  $T$ . Si en vez de una operación  $n$ -aria consideramos una relación  $(n + 1)$ -aria  $\Theta$  en  $S$  ( $n \geq 0$ ), diremos que un subconjunto  $T$  de  $S$  es *cerrado respecto a*  $\Theta$  si y sólo si, siempre que pertenezcan a  $T$  los elementos (iguales o distintos)  $a_1, \dots, a_n$ , de  $S$ , pertenece también a  $T$  todo elemento  $x$  tal que  $\langle a_1, \dots, a_n, x \rangle$  es una  $(n + 1)$ -tupla de  $\Theta$ . Es fácil comprobar que estas dos definiciones son equivalentes entre sí cuando se identifica cada operación  $n$ -aria  $\omega$  con su gráfica correspondiente  $\Theta\omega$ .

5

MULTIÁLGEBRAS

Una vez puntuados los conceptos de “operación” y de “relación” en un conjunto, estamos en condiciones de dar la definición de “multiálgebra” (2). Llamaremos *multiálgebra* sobre un conjunto  $S$  a todo sistema  $\mathfrak{M} = \{S; F\}$  constituido por  $S$  y una familia  $F$  de operaciones en  $S$ . La familia  $F$  puede ser vacía o bien contener un número finito o infinito de operaciones. En todo caso se puede poner  $F = \{f_\lambda\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) y entonces se

supone que para cada elemento  $\lambda$  del conjunto  $\wedge$  de índices, existe un entero no negativo  $n(\lambda)$  tal que  $f_\lambda$  es una operación  $n(\lambda)$ -aria. Si  $\mathfrak{M} = \{S; F\}$  es una multiálgebra sobre  $S$ , diremos que  $S$  es el *conjunto base* y que  $F$  es la *familia* (de operaciones) *definidora* de  $\mathfrak{M}$ .

Es corriente dar el nombre de *álgebra* a toda multiálgebra  $\{S; F\}$  cuya familia definidora  $F$  está constituida exclusivamente por operaciones uniformes, considerada cada una de ellas como una aplicación de  $S^n$  en  $S$  para cierto entero  $n \geq 0$ . En este sentido serían álgebras los grupos (véase sección 13) y los retículos (véase sección 11), pero no lo serían por ejemplo los cuerpos (véase sección 14), puesto que en la familia definidora de un cuerpo entra una operación unaria (la formación del inverso) que no es uniforme (el elemento 0 carece de inverso), aunque sí univalente. Para los fines de nuestro trabajo no hace falta distinguir las álgebras (en el sentido antes indicado) de las que podríamos llamar *multiálgabras en sentido estricto* que serían aquellas en cuya familia definidora figurase por lo menos una operación no uniforme. Tanto unas como otras serán agrupadas bajo el apelativo común de *multiálgabras*.

Si el conjunto base  $S$  de una multiálgebra  $\mathfrak{M} = \{S; F\}$  es finito, se dice que  $\mathfrak{M}$  es una multiálgebra finita. *Orden* de una multiálgebra  $\mathfrak{M} = \{S; F\}$  es el número cardinal  $\bar{S}$ <sup>(3)</sup> de su conjunto base  $S$ . Si la familia definidora  $F$  de la multiálgebra  $\mathfrak{M} = \{S; F\}$  contiene un número finito  $k$  de operaciones y éstas son designadas por los símbolos  $f_1, \dots, f_k$ , se escribe  $\mathfrak{M} = \{S; f_1, \dots, f_k\}$ .

Las multiálgebras (más en particular, las multiálgebras finitas) constituirán el objeto de estudio principal en este trabajo. Para designar cada una de ellas nos valdremos unas veces de un símbolo (que será en general una mayúscula del alfabeto gótico) y otras de los símbolos correspondientes al conjunto base y a la familia definidora o elementos de ésta, unidos de una de las formas arriba indicadas. Por *elementos de una multiálgebra*  $\mathfrak{M}$  entenderemos los elementos del conjunto base de  $\mathfrak{M}$ .

## CLASES DE MULTIÁLGEBRAS

Si dos multiálgebras  $\mathfrak{M} = \{S; F\}$  y  $\mathfrak{M}' = \{S'; F'\}$  son tales que las familias definidoras  $F = \{f_\lambda\}$  ( $\lambda \in \wedge$ ) y  $F' = \{f'_\lambda\}$  ( $\lambda \in \wedge$ ) vienen descritas mediante el mismo conjunto  $\wedge$  de índices y para cada  $\lambda \in \wedge$ ,  $f_\lambda$  y  $f'_\lambda$  son ambas operaciones  $n(\lambda)$ -arias para cierto entero  $n(\lambda) \geq 0$ , se dice que  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}'$  son multiálgebras del *mismo tipo*. La familia  $\{n(\lambda)\}$  ( $\lambda \in \wedge$ ) de enteros no negativos, se dice que es el *tipo* común a las multiálgebras  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}'$ . Para cada  $\lambda \in \wedge$ , se dice entonces que  $f_\lambda$  y  $f'_\lambda$  son *operaciones homólogas*. Aquellas multiálgebras de un mismo tipo cuyas operaciones homólogas están ligadas por ciertas relaciones comunes, constituyen una *clase de multiálgebras*. Ejemplos de clases de multiálgebras son los *grupos*, los *cuerpos*, los *retículos*, etc..., que se definirán oportunamente.

## HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO

Si  $\mathfrak{M} = \{S; F\}$  y  $\mathfrak{M}' = \{S'; F'\}$  son multiálgebras del mismo tipo  $\{n(\lambda)\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ), siendo  $F = \{f_\lambda\}$ ,  $F' = \{f'_\lambda\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ), llamaremos *homomorfismo* de  $\mathfrak{M}$  en  $\mathfrak{M}'$  a toda aplicación  $\varphi$  de  $S$  en  $S'$ , tal que, para todo  $\lambda \in \Lambda$  y toda  $n(\lambda)$ -tupla  $\langle x_1, \dots, x_{n(\lambda)} \rangle$  de  $S$ , se satisfaga la condición

$$\varphi(f_\lambda(x_1, \dots, x_{n(\lambda)})) \subseteq f'_\lambda(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{n(\lambda)})),$$

Si en particular el homomorfismo  $\varphi$  de  $\mathfrak{M}$  en  $\mathfrak{M}'$  es una aplicación *biunívoca* de  $S$  sobre  $S'$  y para todo  $\lambda \in \Lambda$  y toda  $n(\lambda)$ -tupla  $\langle x_1, \dots, x_{n(\lambda)} \rangle$  de  $S$ , se cumple

$$\varphi(f_\lambda(x_1, \dots, x_{n(\lambda)})) = f'_\lambda(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{n(\lambda)})),$$

entonces  $\varphi$  recibe el nombre de *isomorfismo* de  $\mathfrak{M}$  sobre  $\mathfrak{M}'$ . Cuando tal aplicación existe, se dice que las multiálgebras  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}'$  son *isomorfas*. Para expresar que dos multiálgebras  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}'$  son isomorfas, se escribe  $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M}'$ .

El conjunto de las multiálgebras isomorfas a una multiálgebra determinada  $\mathfrak{M}$  constituye una clase de la cual  $\mathfrak{M}$  (y lo mismo cualquier otra multiálgebra  $\mathfrak{M}'$  isomorfa a  $\mathfrak{M}$ ) es un *representante*. Una tal clase recibe el nombre de *multiálgebra abstracta*. En realidad, toda propiedad de una multiálgebra  $\mathfrak{M}$  en cuanto tal, puede ser considerada como una propiedad de la multiálgebra abstracta de la cual  $\mathfrak{M}$  es representante. Solamente será preciso considerar distintas dos multiálgebras isomorfas cuando se quiera estudiar el retículo de submultiálgebras de una submultiálgebra determinada (véanse las secciones 8 y 12). Dos multiálgebras isomorfas  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}'$  diremos que tienen la *misma estructura* y por el contrario, si  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}'$  no son isomorfas, diremos que tienen estructuras diferentes. Cada multiálgebra abstracta estará por definición caracterizada por la estructura común a cada una de las multiálgebras representantes de la misma.

## MULTIÁLGEBRAS SUBORDINADAS Y SUBMULTIÁLGEBRAS

Dada una multiálgebra  $\mathfrak{M} = \{S; F\}$  y un subconjunto  $T$  de  $S$ , podemos constituir una nueva multiálgebra  $\{T; F^{(T)}\}$  tomando  $T$  como conjunto base y como familia definidora la  $F^{(T)}$  formada por las mismas operaciones de la familia  $F$  restringidas a  $T$ . Esto quiere decir que, si es  $F = \{f_\lambda\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ), entonces hacemos  $F^{(T)} = \{f_\lambda^{(T)}\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ), donde para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $f^{(T)}$  es la operación  $n(\lambda)$ -aria en  $T$  definida poniendo, para toda  $n(\lambda)$ -tupla  $\langle x_1, \dots, x_{n(\lambda)} \rangle$  de  $T$ :

$$f^{(T)}(x_1, \dots, x_{n(\lambda)}) = f_\lambda(x_1, \dots, x_{n(\lambda)}) \cap T.$$

Diremos entonces que  $\mathfrak{M}^{(T)} = \{T; F^{(T)}\}$  es la multiálgebra subordinada por  $\mathfrak{M} = \{S; F\}$  en el conjunto  $T$  o también que  $\mathfrak{M}^{(T)}$  es una multiálgebra subordinada de  $\mathfrak{M}$ . Un caso particular interesante es aquel en que el conjunto  $T$  es cerrado respecto a cada una de las operaciones  $f_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) de la familia  $F$ . Cuando esto ocurre se dice simplemente que  $T$  es *cerrado respecto a  $\mathfrak{M}$*  y la multiálgebra subordinada  $\mathfrak{M}^{(T)}$  recibe entonces el nombre de *submultiálgebra* de  $\mathfrak{M}$ .

## PRODUCTO DIRECTO DE MULTIÁLGEBRAS

Si  $\mathfrak{M}' = \{S'; F'\}$  y  $\mathfrak{M}'' = \{S''; F''\}$  son multiálgebras del mismo tipo  $\{n(\lambda)\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ), siendo  $F' = \{f'_\lambda\}$  y  $F'' = \{f''_\lambda\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ), se puede definir otra multiálgebra  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \times \mathfrak{M}'' = \{S; F\}$ , llamada producto directo de  $\mathfrak{M}'$  por  $\mathfrak{M}''$ , tomando como conjunto base  $S$  el producto cartesiano de  $S'$  por  $S''$  y como familia definidora  $F = f_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) aquella en que para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $f_\lambda$  es la operación  $n(\lambda)$ -aria en  $S = S' \times S''$  definida poniendo para cada  $n(\lambda)$ -tupleja  $\langle x_1, \dots, x_{n(\lambda)} \rangle$  de  $S$ , siendo  $x_i = \langle x'_i, x''_{i-n(\lambda)} \rangle$  ( $i = 1, \dots, n(\lambda)$ ):

$$f_\lambda(x_1, \dots, x_{n(\lambda)}) = f'_\lambda(x'_1, \dots, x'_{n(\lambda)}) \times f''_\lambda(x''_1, \dots, x''_{n(\lambda)}).$$

De modo análogo se definiría el producto directo  $\mathfrak{M}' \times \mathfrak{M}'' \times \dots \times \mathfrak{M}^{(k)}$  de cualquier número  $k$  de multiálgebras. El producto directo de multiálgebras posee la propiedad asociativa en el sentido de que, por ejemplo, las multiálgebras  $(\mathfrak{M}' \times \mathfrak{M}'') \times \mathfrak{M}'''$ ,  $\mathfrak{M}' \times (\mathfrak{M}'' \times \mathfrak{M}''')$  y  $\mathfrak{M}' \times \mathfrak{M}'' \times \mathfrak{M}'''$  son isomorfas dos a dos. También posee la propiedad conmutativa en el sentido de que las multiálgebras  $\mathfrak{M}' \times \mathfrak{M}''$  y  $\mathfrak{M}'' \times \mathfrak{M}'$  son necesariamente isomorfas.

## CONCEPTO DE "RELATIVO" Y SU EQUIVALENCIA CON EL DE "MULTIÁLGEBRA"

Algunos autores (véase por ejemplo HERMES [17], pág. 153) prefieren considerar relaciones en vez de operaciones y en consecuencia, en vez del concepto antes expuesto de "Multiálgebra" introducen en el de "Relativo". Un "relativo" es un sistema  $\{S; R\}$  constituido por un conjunto  $S$  y una familia  $R = \{r_\lambda\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) de relaciones en  $S$ , donde para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $r_\lambda$  es una relación  $(n(\lambda)+1)$ -aria para cierto entero  $n(\lambda) \geq 0$ . Se dirá también que  $\{S; R\}$  es un "relativo" sobre  $S$  y que  $S$  es el conjunto base del "relativo"  $\{S; R\}$ .

Al identificar, según hemos hecho en la sección 3, cada operación con una relación y viceversa, toda familia  $F = \{f_\lambda\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) de operaciones en un conjunto  $S$  quedará identificada con la familia  $R = \{r_\lambda\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) de relaciones en  $S$ , constituida por las gráficas de las operaciones de  $F$ , y viceversa, para cada familia  $R$  de relaciones en  $S$  existirá una familia  $F$  y una sola:

de operaciones en  $S$ , de tal manera que  $R$  esté constituida por las gráficas de las operaciones de  $F$ . Si  $F$  y  $R$  están relacionadas de este modo, los sistemas  $\{S; F\}$  y  $\{S; R\}$  serán considerados como representantes de un mismo ente, al que se podrá dar, indistintamente, el nombre de multiálgebra o de relativo. Usaremos de preferencia el primer nombre cuando, para la definición del sistema  $\{S; F\}$ , presentemos a  $F$  como una familia de operaciones y el segundo cuando la familia  $F$  sea representada por la correspondiente familia  $R$  de relaciones.

Los *isomorfismos entre relativos, relativos subordinados, subrelativos, y productos directos de relativos* se definen de tal manera, que las definiciones se reducen respectivamente a las de isomorfismo entre multiálgebras, multiálgebras subordinadas, submultiálgebras y productos directos de multiálgebras, al hacer la identificación.

Lo que se ha dicho en esta sección, quedará ilustrado en la siguiente cuando presentemos los *conjuntos ordenados* alternativamente como multiálgebras y como relativos.

## 11

## LOS CONJUNTOS ORDENADOS Y LOS RETÍCULOS COMO MULTIÁLGEBRAS

*Conjunto ordenado* (v. nota 4) es, como se sabe, todo sistema  $\{S; \subseteq\}$  formado por un conjunto  $S$  y una relación binaria  $\subseteq$  en  $S$  reflexiva ( $x \subseteq x$  para todo  $x \in S$ ), antisimétrica (si es  $x \subseteq y$  e  $y \subseteq x$ , entonces es  $x = y$ ) y transitiva ( $x \subseteq y$  e  $y \subseteq z$  implica  $x \subseteq z$ ). Un conjunto ordenado puede considerarse pues como un Relativo cuya familia definidora de relaciones contiene el único elemento  $\subseteq$  que es una relación binaria de las características ya señaladas. Toda relación binaria en  $S$  con tales características recibe el nombre de *ordenación* de  $S$ . Una ordenación  $\subseteq$  en  $S$  es una *ordenación total* si para dos elementos cualesquiera  $x, y$  de  $S$  es  $x \subseteq y$  o bien  $y \subseteq x$ . Un conjunto ordenado  $\{S; \subseteq\}$  en el que  $\subseteq$  es una ordenación total, se dice que es un conjunto *totalmente ordenado* o bien que es una cadena. Será en particular una *cadena finita* si el conjunto  $S$  es finito. Hasta aquí hemos considerado un Conjunto ordenado como un Relativo. Considerado como Multiálgebra, un Conjunto ordenado sería un sistema  $\{S; f\}$  donde  $S$  es un conjunto y  $f$  una operación unaria con las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} x &\in f(x) \quad \text{para todo } x \in S, \\ y &\in f(x) \quad y \quad z \in f(y) \Rightarrow z \in f(x) \\ y &\in f(x) \quad y \quad x \in f(y) \Rightarrow x = y, \end{aligned}$$

propiedades equivalentes a las que caracterizan una ordenación  $\subseteq$  en  $S$  cuando se pone

$$y \in f(x) \Leftrightarrow x \subseteq y.$$

La notación que hemos venido usando para designar un conjunto orde-

nado, será en general simplificada. Así, al decir por ejemplo que  $S$  es un Conjunto ordenado, supondremos implícitamente que  $S$  es un conjunto en el cual se ha definido cierta ordenación que se supondrá designada por  $\subseteq$  mientras no se especifique otra cosa. En particular, si decimos que  $S$  es una cadena, se supondrá que  $S$  es un conjunto ordenado y que además la ordenación  $\subseteq$  de  $S$  que se considera, es una ordenación total. Si  $S$  es una cadena fintia, se da, como es sabido, el nombre de *longitud* de  $S$  (escribiremos *long S*) al número de elementos de  $S$  disminuido en una unidad. Usaremos solamente la notación completa  $\{S; \subseteq\}$  cuando sea preciso tratar a la vez de conjuntos ordenados distintos y la claridad de la exposición requiera que quede bien destacada la distinción entre las ordenaciones respectivas de cada uno de ellos.

Si  $\{S; \subseteq\}$  es un conjunto ordenado, todo subconjunto  $T$  de  $S$  se considera automáticamente ordenado por la restricción a  $T$  de la ordenación  $\subseteq$  de  $S$ . Así por ejemplo, los intervalos  $[x, y]$  de que hemos tratado en la sección 1, se consideran siempre como conjuntos ordenados. Otro tipo de subconjuntos de un conjunto ordenado  $S$  son las *cadenas*. Un subconjunto  $C$  de  $S$  se dirá que es una *cadena* en  $S$ , cuando el conjunto ordenado  $\{C; \subseteq_C\}$  donde  $\subseteq_C$  es la restricción a  $C$ , de la ordenación  $\subseteq$  de  $S$ , es una cadena. Si una cadena  $C$  posee un elemento mínimo  $a$  y un elemento máximo  $b$  (véase nota 4), se dice que *une a con b* o bien que es una *cadena de a a b*. Una cadena  $C$  de  $a$  a  $b$  en un conjunto ordenado  $S$  se dice que es *maximal* cuando no existe en  $S$  ninguna cadena de  $a$  a  $b$  distinta de  $C$  que contenga todos los elementos de  $C$ . Dicho de otra manera, una cadena  $C$  de  $a$  a  $b$  es maximal si y sólo si, todo par de elementos de  $C$  contiguos en  $C$ , son también contiguos en  $S$ . Evidentemente, un intervalo trivial  $[x, x]$  es lo mismo que una cadena de longitud cero y un intervalo elemental  $[x, y]$  ( $x \neq y$ ) una cadena de longitud 1. En general, puede ocurrir que un intervalo  $[x, y]$  de un conjunto ordenado  $S$  sea una cadena en  $S$ , y en tal caso  $[x, y]$  será, como es obvio, una cadena maximal de  $x$  a  $y$ .

Como caso particular de producto directo de multiálgebras o de relativos, se puede definir como sigue el producto directo de dos conjuntos ordenados:

Si  $\{S_1; \subseteq_1\}$ ,  $\{S_2; \subseteq_2\}$  son dos conjuntos ordenados, recibe el nombre de producto directo de  $\{S_1; \subseteq_1\}$  por  $\{S_2; \subseteq_2\}$  el conjunto ordenado  $\{S; \subseteq\}$ , donde

$$S = S_1 \times S_2, \quad (\text{v. nota 5})$$

y la ordenación  $\subseteq$  de  $S$  es la definida poniendo para cada par

$$\langle x_1, x_2 \rangle, \langle y_1, y_2 \rangle \text{ de elementos de } S_1 \times S_2$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle \subseteq \langle y_1, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 \subseteq_1 y_1 \wedge x_2 \subseteq_2 y_2. \quad (\text{v. nota 6}).$$

Hemos visto antes cómo un conjunto ordenado puede ser considerado como una multiálgebra según la definición dada en la sección 3 y ahora vamos a ver lo mismo para un retículo.

Un retículo es, como se sabe, un sistema  $\{S; \cap, \cup\}$  constituido por un

conjunto  $S$  y dos operaciones binarias uniformes definidas en  $S$ , a saber, la intersección  $\cap$  y la unión  $\cup$ , cada una de las cuales posee las propiedades commutativa y asociativa, estando ligadas entre sí mediante dos leyes de absorción (para cada par  $x, y$  de elementos no necesariamente distintos de  $S$  es  $x \cap (x \cup y) = x$ ,  $x \cup (x \cap y) = x$ ). Todo retículo puede ser considerado pues como una multiálgebra cuya familia definidora está constituida por dos únicas operaciones  $\cap$  y  $\cup$  de las características citadas.

Al igual que hemos hecho para los conjuntos ordenados, simplificaremos la notación, y así cuando digamos que  $S$  es un retículo se sobreentenderá que  $S$  es un conjunto en el cual se suponen definidas dos operaciones  $\cap$  y  $\cup$  de tal manera que  $\{S; \cap, \cup\}$  es un Retículo. En este caso, todo subconjunto  $T$  de  $S$  cerrado a la vez respecto a las operaciones  $\cap$  y  $\cup$ , es el conjunto base de una multiálgebra  $\{T; \cap_T, \cup_T\}$  ( $\cap_T$  y  $\cup_T$  son las mismas operaciones  $\cap$  y  $\cup$  restringidas a  $T$ ) y se dice simplemente que  $T$  es un subretículo de  $S$ . Si el conjunto  $T$  es cerrado respecto a  $\cap$  podríamos decir que  $\{T; \cap_T, \cup_T\}$  es un  $\cap$ -subretículo (léase intersección-subretículo) de  $\{S; \cap, \cup\}$  pero diremos simplemente que  $T$  es un  $\cap$ -subretículo de  $S$ . Análogamente si  $T$  es cerrado respecto a  $\cup$  diremos que  $T$  es un  $\cup$ -subretículo (léase unión-subretículo) de  $S$ . Un subretículo de  $S$  es pues un subconjunto  $T$  de  $S$  que es a la vez  $\cap$ -subretículo y  $\cup$ -subretículo de  $S$ .

En la Teoría de Retículos, los retículos suelen ser identificados con aquellos conjuntos ordenados cuya ordenación  $\subseteq$  es tal que, respecto a ella, todo subconjunto finito  $T$  de  $S$  posee un supremo  $\sup(T)$  y un ínfimo  $\inf(T)$  (véase nota 4). Se demuestra en efecto que es posible establecer una coordinación entre los conjuntos ordenados de esta clase (a los que vamos a llamar *conjuntos ordenados en retículo*) y los retículos (v. nota 4). Sin entrar en la demostración recordemos solamente que, en esta coordinación, se corresponden mutuamente un Conjunto ordenado en retículo  $\{S; \subseteq\}$  y un Retículo  $\{R; \cap, \cup\}$  si y sólo si es  $S = R$  y para dos elementos cualesquiera  $x, y$  de  $S$  se satisfacen las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} x \subseteq y &\Leftrightarrow x \cap y = x \\ x \subseteq y &\Leftrightarrow x \cup y = y \\ x \cup y &= \sup\{x, y\} \\ x \cap y &= \inf\{x, y\}, \end{aligned}$$

donde  $\sup\{x, y\}$  e  $\inf\{x, y\}$  son el supremo y el ínfimo, respectivamente, del conjunto  $\{x, y\}$  respecto a la ordenación  $\subseteq$  de  $S$ ; (se demuestra que cualquiera de las anteriores condiciones implica las demás).

Debido a esta coordinación, se suele dar simplemente el nombre de retículo a todo conjunto ordenado en retículo y, viceversa, se suele considerar todo retículo como un conjunto ordenado en retículo. Hay que advertir sin embargo, que, aunque un conjunto ordenado en retículo  $\{S; \subseteq\}$  y un retículo  $\{S; \cap, \cup\}$  se correspondan en la coordinación de que hemos hablado, es preciso considerarlos como entes distintos en cuanto Multiálgebras. Un subconjunto  $T$  de  $S$  puede ser cerrado respecto a  $\subseteq$  y no serlo respecto a  $\cap$  y  $\cup$  tomadas en conjunto y viceversa. Esto puede observarse en el si-

guiente diagrama (v. nota 7), que representa a la vez un conjunto ordenado en retículo  $\{S; \subseteq\}$  y el correspondiente Retículo  $\{S; \cap, \cup\}$ ,

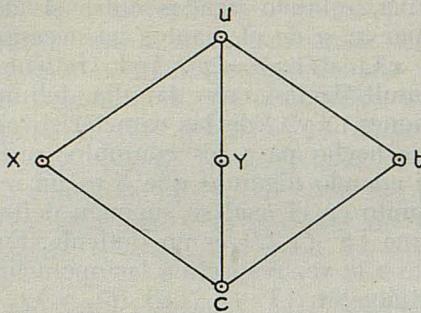


FIG. 1

siendo  $S$  el conjunto formado por los elementos  $c, x, y, z, u$ , donde la relación  $\subseteq$  es satisfecha por los pares  $\langle c, c \rangle$  (es  $c \subseteq c$ ),  $\langle c, x \rangle$ ,  $\langle c, y \rangle$ ,  $\langle c, z \rangle$ ,  $\langle x, x \rangle$ ,  $\langle x, u \rangle$ ,  $\langle y, y \rangle$ ,  $\langle y, u \rangle$ ,  $\langle z, z \rangle$ ,  $\langle z, u \rangle$ ,  $\langle u, u \rangle$  y las operaciones  $\cap$  y  $\cup$  están definidas respectivamente por las siguientes tablas:

$\cap$	$c$	$x$	$y$	$z$	$u$
$c$	$c$	$c$	$c$	$c$	$c$
$x$	$c$	$x$	$c$	$c$	$x$
$y$	$c$	$c$	$y$	$c$	$y$
$z$	$c$	$c$	$c$	$z$	$z$
$u$	$c$	$x$	$y$	$z$	$u$

$\cup$	$c$	$x$	$y$	$z$	$u$
$c$	$c$	$x$	$y$	$z$	$u$
$x$	$x$	$x$	$u$	$u$	$u$
$y$	$y$	$u$	$y$	$u$	$u$
$z$	$z$	$u$	$u$	$z$	$u$
$u$	$u$	$u$	$u$	$u$	$u$

El subconjunto  $\{x, y, u\}$  de  $S$  es cerrado respecto a  $\subseteq$ , pero no lo es a la vez respecto a  $\cap$  y  $\cup$  (contiene  $x, y$ , pero no  $x \cap y = c$ ). Por el contrario, el subconjunto  $\{c, y\}$  es cerrado respecto a  $\cap$  y  $\cup$ , pero no lo es respecto a  $\subseteq$  (contiene  $y$ , pero no contiene  $u$ , siendo así que  $y \subseteq u$ ). A pesar de esta salvedad, identificaremos también nosotros en adelante (mientras no se indique lo contrario) cada conjunto ordenado en retículo con su correspondiente retículo. Podemos hacer esto puesto que, no obstante el papel destacado que van a desempeñar los retículos dentro de esta memoria, no los vamos a estudiar en su aspecto de multiálgebras (como hacemos por ejemplo con los grupos y con los cuerpos, sino solamente en su aspecto de conjuntos ordenados en retículo).

Observemos que la identificación entre conjuntos ordenados en retículo y Retículos que, como hemos visto, no es compatible con la formación de subconjuntos cerrados o submultiálgebras, es sin embargo compatible con los conceptos de isomorfismo y de producto directo, en el sentido de que, por ejemplo si dos conjuntos ordenados  $\{S_1; \subseteq_1\}$ ,  $\{S_2; \subseteq_2\}$  son identificables respectivamente con los retículos  $\{S_1; \cap_1, \cup_1\}$ ,  $\{S_2; \cap_2, \cup_2\}$ ,  $\{S_1; \subseteq_1\}$

y  $\{S_2; \subseteq_2\}$  son isomorfos si y sólo si lo son  $\{S_1; \cap_1, \cup_1\}$  y  $\{S_2; \cap_2, \cup_2\}$  y por otra parte, si es

$$\begin{aligned}\{S; \subseteq\} &= \{S_1; \subseteq_1\} \times \{S_2; \subseteq_2\}, \\ \{S; \cap, \cup\} &= \{S_1; \cap_1, \cup_1\} \times \{S_2; \cap_2, \cup_2\},\end{aligned}$$

entonces el conjunto ordenado  $\{S; \subseteq\}$  es identificable con el retículo  $\{S; \cap, \cup\}$  si y sólo si son identificables  $\{S_1; \subseteq_1\}$  con  $\{S_1; \cap_1, \cup_1\}$  y  $\{S_2; \subseteq_2\}$  con  $\{S_2; \cap_2, \cup_2\}$ .

## 12

## RETÍCULOS DE SUBMULTIÁLGEBRAS

Es sabido que para toda multiálgebra  $\mathfrak{M} = \{S; F\}$ , el sistema de los subconjuntos de  $S$  cerrados respecto a  $\mathfrak{M}$ , es un  $\cap$ -subretículo completo del retículo  $\mathcal{P}(S)$  de las partes de  $S$  (la demostración de este hecho puede verse por ejemplo en HERMES [17], pág. 34, expuesta en términos de "relativos"). Un tal retículo será designado en lo sucesivo por  $L(\mathfrak{M})$ . Si identificamos cada subconjunto  $T$  de  $S$ , cerrado respecto a  $\mathfrak{M}$ , con la multiálgebra correspondiente  $\mathfrak{M}^{(T)}$  (sulmultiálgebra de  $\mathfrak{M}$ ), podremos decir que  $L(\mathfrak{M})$  es el *retículo de las submultiálgebras de  $\mathfrak{M}$* . Si  $\mathfrak{M}$  es una multiálgebra finita,  $L(\mathfrak{M})$  será también evidentemente finito. Según ha sido indicado ya en la Introducción, el presente trabajo se reduce en esencia al estudio, bajo cierto aspecto, de los retículos  $L(\mathfrak{M})$  para algunas clases de multiálgebras finitas  $\mathfrak{M}$ .

## 13

## LOS GRUPOS COMO MULTIÁLGEBRAS

Una multiálgebra  $\mathfrak{G} = \{G; F\}$  recibe el nombre de grupo, cuando la familia definidora  $F$  satisface las siguientes condiciones:

- a)  $F$  está constituida por tres operaciones uniformes,  $u$ ,  $i$ ,  $p$ , de las cuales la primera es nularia, la segunda unaria y la tercera binaria.
- b) La operación binaria  $p$  es asociativa (para cada terna  $\langle x, y, z \rangle$  de elementos de  $G$  se cumple:  $p(x, p(y, z)) = p(p(x, y), z)$ ).
- c) El elemento único de  $G$  que corresponde a la operación nularia  $u$  (elemento que designaremos con la misma letra  $u$ ) es un elemento neutro respecto a la operación binaria  $p$  (cuálquiera que sea el elemento  $x$  de  $G$ , se cumple:  $p(u, x) = p(x, u) = x$ ).
- d) Las tres operaciones  $u$ ,  $i$ ,  $p$ , están ligadas entre sí por la siguiente identidad:

$$p(x, i(x)) = p(i(x), x) = u,$$

donde  $x$  representa un elemento cualquiera de  $G$ .

Las cuatro condiciones que preceden caracterizan a los grupos. Los grupos cuyo conjunto base es finito, son los *grupos finitos*. Si la operación binaria  $p$  de un grupo  $G$  es conmutativa (si para cada par  $\langle x, y \rangle$  de elementos de  $G$ , es  $p(x, y) = p(y, x)$ ), el grupo  $G$  es *comutativo o abeliano*.

La definición que hemos dado de grupo no es sino una manera distinta de expresar la definición que se da corrientemente en los tratados sobre Teoría de Grupos. Según ella un grupo es un conjunto  $G$  en el que se ha definido una operación binaria uniforme asociativa (esto equivale a la existencia de la operación binaria  $p$  sujeta a la condición  $b$ ), respecto a la cual existe un elemento neutro (existencia de la operación nularia  $u$ , sujeta a la condición  $c$ ), y a cada elemento le corresponde un inverso (existencia de la operación unaria  $i$ , sujeta a la condición  $d$ ).

En un grupo cualquiera se suele escribir, como es sabido.  $x y$  en vez de  $p(x, y)$ ,  $x^{-1}$  en vez de  $i(x)$  y  $1$  en vez de  $u$ , pero si se trata de un grupo abeliano, es más corriente escribir  $x + y$  por  $p(x, y)$ ,  $-x$  por  $i(x)$  y  $0$  por  $u$ . En el primer caso (notación multiplicativa) la operación binaria del grupo recibe el nombre de producto ( $x y$  es el producto de  $x$  por  $y$ ) y en el segundo caso (notación aditiva), de suma ( $x + y$  es la suma de  $x$  con  $y$ ).

La definición corriente de subgrupo es equivalente a la de conjunto cerrado respecto a la multiálgebra. En efecto, decir que un conjunto  $H$  (subconjunto de  $G$ ) es cerrado respecto a la operación nularia  $u$ , equivale a decir que  $H$  contiene el elemento unidad  $u$ . Decir que  $H$  es cerrado respecto a la operación unaria  $i$  es lo mismo que decir que siempre que un elemento  $x$  pertenece a  $H$ , también el elemento inverso  $i(x)$  ( $x^{-1}$  al cambiar de notación) pertenece a  $H$  y, finalmente, decir que  $H$  es cerrado respecto a la operación binaria  $p$  equivale a decir que siempre que los elementos  $x, y$ , pertenecen a  $H$ , también pertenece a  $H$  el producto  $xy$ . Propiamente nosotros llamamos subgrupo a la submultiálgebra, pero para los fines de este trabajo no existe inconveniente en identificar el conjunto cerrado con la submultiálgebra, según ya hemos indicado al hablar de los retículos de submultiálgebras.

Acerca de retículos de subgrupos existe un monografía de SUZUKI [21] sobre la que nos apoyaremos para la demostración de algunos de nuestros teoremas.

El producto directo de grupos se define particularizando para éstos la definición de producto directo de multiálgebras. El producto directo de grupos abelianos recibe, en general, como es sabido, el nombre de *suma directa*, cuando se hace uso de la notación aditiva. En este trabajo sin embargo, seguiremos hablando, para no perder generalidad, de producto directo, aun cuando se trate de grupos abelianos en los que se da el nombre de suma a la operación binaria.

En lo sucesivo identificaremos un grupo  $\mathcal{G} = \{G; u, i, p\}$  con el conjunto base  $G$ . Así, al decir que  $G$  es un grupo, se sobreentenderá que  $G$  es un conjunto en el que se suponen definidas tres operaciones uniformes  $u, i, p$ , sujetas a las condiciones  $a), b), c), d)$ .

## LOS HEMICUERPOS Y LOS CUERPOS COMO MULTIÁLGEBRAS

Sea  $\{C; u, i, p\}$  un grupo abeliano sobre un conjunto  $C$ , ( $u, i, p$  son operaciones uniformes sujetas a las leyes  $a), b), c), d)$ , de la sección anterior, siendo  $p$  además conmutativa). Supongamos que el conjunto  $\{C - u\}$ , formado al excluir el elemento  $u$  del conjunto  $C$ , sea el conjunto base de otro grupo  $\{\{C - u\}; u', i', p'\}$ . Es fácil extender las operaciones  $u'$ ,  $i'$ ,  $p'$ , hasta convertirlas en operaciones en  $C$ : La operación nularia uniforme  $u'$ , o lo que es lo mismo, el elemento  $u'$  de  $\{C - u\}$ , puede ser considerado sin más como una operación nularia uniforme en  $C$ , puesto que  $u'$  pertenece a  $C$ . Para extender  $i'$  (operación unaria) a  $C$ , basta definir  $i'(u)$  y para ello diremos que  $i'(u) = \emptyset$  parte vacía de  $C$ ). Finalmente, para extender  $p'$  a  $C$  basta definir los productos  $p(x, y)$  cuando uno por lo menos de los elementos  $x, y$  es el elemento  $u$ , y para ello pondremos que para todo elemento  $z$  de  $C$  es

$$p(u, z) = p(z, u) = u.$$

Conviene observar que  $u'$  y  $p'$  siguen siendo operaciones uniformes después de su extensión a  $C$  en la forma indicada, pero no así  $i'$ , puesto que  $i'(u)$  ya no es un conjunto formado por un elemento y sólo uno, sino la parte vacía de  $C$ . Con las operaciones  $u', i', p'$  extendidas a  $C$  y con las  $u, i, p$ , definidas desde el primer momento en  $C$ , constituimos la multiálgebra  $\{C; u, i, p, u', i', p'\}$ . Una tal multiálgebra constituye, por definición, un *hemicuerpo*, si además de satisfacer  $u, i, p, u', i', p'$ , las leyes ya citadas, satisfacen también las dos siguientes:

$$\begin{aligned} p'(x, p(y, z)) &= p(p'(x, y), p'(x, z)), \\ p'(p(y, z), x) &= p(p'(y, x), p'(z, x)), \end{aligned}$$

siendo  $x, y, z$  elementos cualesquiera de  $C$ .

Un hemicuerpo en el que la operación  $p'$  sea conmutativa (las dos leyes últimas se reducen entonces a una sola) recibe el nombre de *cuerpo*.

Si  $\{C; u, i, p, u', i', p'\}$  es un cuerpo, los grupos  $\{C; u, i, p\}$  y  $\{C - u; u', i', p'\}$  reciben respectivamente los nombres de grupo aditivo y grupo multiplicativo del mismo. En vez de  $u, i(x), p(x, y), u', i'(x), p'(x, y)$ , (siendo  $x, y$  elementos cualesquiera de  $C$ ) se escribe respectivamente como es sabido,  $0$  (elemento cero),  $-x$ ,  $x + y$ ,  $1$  (elemento unidad),  $x^{-1}$ ,  $x y$ . Esta última notación será la que usaremos invariablemente en adelante, siempre que tratemos de un hemicuerpo o de un cuerpo. En el capítulo II trataremos de los cuerpos finitos, o lo que es lo mismo, de los hemicuerpos finitos, pues, como es sabido, todo hemicuerpo finito es un cuerpo.

Simplificaremos también aquí la notación y diremos simplemente que  $C$  es un cuerpo para significar que  $C$  es un conjunto en el que están definidas operaciones  $u, i, p, u', i', p'$ , tales que el sistema  $\{C; u, i, p, u', i', p'\}$  es un cuerpo.

## FUNCIONES DE INTERVALO EN UN CONJUNTO ORDENADO LOCALMENTE FINITO

Vamos a presentar algunos resultados de L. WEISNER, P. HALL y M. WARD, cuyo conocimiento hará más comprensible el significado de la función que queremos definir y estudiar en el conjunto de las multiálgebras finitas.

Ya hemos dicho lo que se entiende por intervalo de un conjunto ordenado  $S$ . Si todo intervalo no vacío de  $S$  es finito, diremos que  $S$  es un *conjunto ordenado localmente finito*. Un tal conjunto ordenado no es necesariamente finito (lo veremos más adelante con un ejemplo), pero si siendo  $S$  localmente finito posee elemento mínimo  $c$  y elemento máximo  $u$ , entonces  $S$  es finito puesto que se identifica con el intervalo  $[c, u]$ .

Consideremos el conjunto  $\mathcal{J}$  de todos los intervalos no vacíos de un conjunto ordenado localmente finito  $S$ . Toda función cuyo dominio sea  $\mathcal{J}$  o una parte de  $\mathcal{J}$  será denominada *función de intervalo en  $S$* . L. WEISNER [25] estudió las funciones de intervalo que toman sus valores en un hemicuerpo  $\Gamma$  (cualquiera, pero fijo) de característica cero. Vamos a resumir los resultados de dicho autor, restringiéndonos al caso en que se toma como hemicuerpo el cuerpo de los números racionales. Estos resultados son los siguientes (cuando se diga "función" entiéndase "función de intervalo en  $S$  con valores racionales"):

1.) A cada función  $f_s$  le corresponde una función y una sola  $g_s$  con la propiedad de que, para cada intervalo  $[u, v]$  de  $S$ , se cumple:

$$f_s(u, v) = \sum_{u \subseteq x \subseteq v} g_s(u, x) \quad 15-1$$

2.) Existe, para cada conjunto ordenado  $S$ , una función y sólo una, que designaremos por  $\mu_s$ , caracterizada por satisfacer, para todo intervalo  $[u, v]$ , las siguientes identidades:

$$\sum_{u \subseteq x \subseteq v} \mu_s(x, v) = 1, \text{ si } u = v \quad 15-2$$

$$\sum_{u \subseteq x \subseteq v} \mu_s(x, v) = 0, \text{ si } u \neq v \quad 15-3$$

La función  $\mu_s$  recibe el nombre de *función de Weisner-Möbius* del Conjunto ordenado  $S$ .

3.) Si dos funciones  $f_s$  y  $g_s$  están relacionadas por la identidad 15-1, se cumple entonces, cualquiera que sea el intervalo  $[u, v]$  de  $S$ :

$$g_s(u, v) = \sum_{u \subseteq x \subseteq v} f_s(u, x) \cdot \mu_s(x, v), \quad 15-4$$

siendo  $\mu_s$  la función de Weisner-Möbius del conjunto ordenado  $S$ .

La función  $\mu_s$  de Weisner-Möbius ha sido estudiada de un modo particular por el mismo WEISNER [25], por P. HALL [10], [11] y por S. DELSAR-

TE [3], en los casos en que el Conjunto ordenado  $S$  es un retículo de subgrupos de cierto tipo de grupos finitos, y ha sido aplicada con éxito a la resolución de distintos problemas de enumeración de la Teoría de Grupos. Una bibliografía completa de lo publicado hasta la fecha acerca de esta función, puede verse en un interesante trabajo de GIAN-CARLO ROTA [19].

M. WARD [24] resumió y amplió los resultados de Weisner, considerando el conjunto  $\mathcal{R}_s$  (v. nota 8) de todas las funciones de intervalo, en un conjunto ordenado localmente finito  $S$  (los valores de estas funciones son, en el trabajo de dicho autor, elementos de un hemicuerpo fijo  $\Gamma$  de característica cero, pero para simplificar supondremos siempre que  $\Gamma$  es el cuerpo de los números racionales) y reveló la estructura de anillo de dicho conjunto cuando se introducen en él una suma y un producto definidos como sigue:

La suma  $f_s + g_s$  de las funciones  $f_s$  y  $g_s$  es la función que, para cada intervalo  $[u, v]$  de  $S$  toma el valor

$$(f_s + g_s)(u, v) = f_s(u, v) + g_s(u, v). \quad 15-5$$

El producto  $f g$  de  $f$  por  $g$ , llamado por Ward *producto de Dirichlet*, es la función que, para cada intervalo  $[u, v]$  de  $S$  toma el valor

$$(f_s g_s)(u, v) = \sum_{u \subseteq x \subseteq v} f_s(u, x) g_s(x, v) \quad 15-6$$

Este anillo de funciones de intervalo en  $S$ , que designaremos también por  $\mathcal{R}_s$ , posee un elemento unidad que es la función  $\delta_s$ , caracterizada por ser:

$$\delta_s(u, v) = 1, \quad \text{si es } u = v, \quad 15-7$$

$$\delta_s(u, v) = 0, \quad \text{si es } u \neq v. \quad 15-8$$

Ward llamó *funciones propias* a aquellas funciones que en el anillo  $\mathcal{R}_s$  poseen elemento inverso,, es decir, una función  $f_s$  es llamada propia, si existe otra función  $f_s^{-1}$  tal que  $f_s f_s^{-1} = f_s^{-1} f_s = \delta_s$ . Demostró el mismo autor que una función  $f_s$  es propia, si y sólo si, para todo intervalo trivial  $[x, x]$  es  $f_s(x, x) \neq 0$ . La función  $\mu_s$  introducida por Weisner, no es sino la función inversa en  $\mathcal{R}_s$  de la función propia  $\zeta_s$  que toma el valor 1 para todo intervalo de  $S$ . En efecto, las igualdades 15-2 y 15-3 pueden ser resumidas en la forma

$$\sum_{u \subseteq x \subseteq v} \zeta_s(u, x) \cdot \mu_s(x, v) = \delta_s(u, v),$$

lo cual es lo mismo que poner

$$\zeta_s \cdot \mu_s = \delta_s \quad \text{o} \quad \mu_s = \zeta_s^{-1}$$

El resultado 3.<sup>o</sup> de Weisner, deriva de que la igualdad 15-1, satisfecha para todo intervalo  $[u, v]$  de  $S$ , equivale a poner  $f_s = g_s \zeta_s$ , y considerando esta última igualdad como una ecuación con la función  $g_s$  indeterminada, la existencia de la función  $\mu_s$ , inversa (única) de  $\zeta_s$ , hace ver que la función  $g_s = f_s \zeta_s$  es la única que satisface dicha ecuación. La igualdad 15-4 no es más que la igualdad  $g_s = f_s \mu_s$  aplicada a un intervalo cualquiera  $[u, v]$  de  $S$ .

## FUNCIONES REGULARES DE INTERVALO

Si un conjunto ordenado  $S$  posee un elemento mínimo  $c$  y un elemento máximo  $u$ , diremos que  $S$  es acotado.

Tengamos en cuenta que todo intervalo no vacío  $[a, b]$  de un conjunto ordenado localmente finito, es un conjunto ordenado finito que tiene la particularidad de ser acotado. Viceversa, todo conjunto ordenado finito y acotado  $S$ , puede considerarse idéntico al intervalo finito no vacío  $[c, u]$ , si  $c$  es el elemento mínimo y  $u$  el elemento máximo de  $S$ . Según esto podemos decir que "intervalo finito no vacío" y "Conjunto ordenado finito y acotado" son conceptos equivalentes y en consecuencia no los distinguiremos en lo sucesivo. Diremos simplemente "intervalo finito" para referirnos indistintamente, ya sea a un intervalo finito no vacío de cualquier conjunto ordenado o bien a un conjunto ordenado finito  $S$  con elemento mínimo y elemento máximo. Si consideramos a  $S$  como un intervalo, todo intervalo de  $S$  será llamado *subintervalo*. Toda función de intervalo  $f_s$  en un conjunto ordenado localmente finito  $S$ , puede por lo tanto ser considerada como una función que tiene por dominio un determinado sistema de intervalos (el sistema formado por los intervalos de  $S$ ). Si  $[a, b]$  y  $[c, d]$  son intervalos isomorfos, pero distintos, de  $S$  (se satisface por lo menos una de las desigualdades  $a \neq c$ ,  $b \neq d$ ), nada se opone, en principio, a que sea  $f_s(a, b) \neq f_s(c, d)$ , siendo  $f_s$  una función cualquiera de intervalo en  $S$ , ni tampoco es preciso que se sepa extender la función  $f_s$  a un dominio más amplio que el de los intervalos de  $S$ . Sin embargo, en los casos que presentan algún interés, lo que corrientemente se hace (lo que hemos hecho en el caso de las funciones  $\delta_s$  y  $\zeta_s$ ) es dar una ley  $f$  que hace corresponder a cada intervalo no vacío de un conjunto ordenado cualquiera, localmente finito  $S$ , un valor  $f(x, y)$  que depende únicamente de la estructura de  $[x, y]$  y no del conjunto ordenado  $S$ . Teniendo en cuenta la identidad entre intervalos finitos no vacíos y conjuntos ordenados finitos y acotados, podemos considerar a  $f$  como una función definida en el sistema de todos los intervalos finitos (cuálquiera que sea el conjunto ordenado a que pertenezcan), función que tiene la particularidad de atribuir siempre un mismo valor a intervalos isomorfos. A una función de este tipo la llamaremos *función regular de intervalo*. Una vez definida una función regular de intervalo, quedará automáticamente definida, para cada conjunto ordenado localmente finito  $S$ , la función  $f_s$  restricción de  $f$  al conjunto de los intervalos no vacíos de  $S$ . Así, las funciones  $\delta_s$  y  $\zeta_s$ , definidas anteriormente para un conjunto ordenado localmente finito cualquiera  $S$ , pueden ser consideradas como las restricciones, al conjunto de los intervalos de  $S$ , de las funciones regulares de intervalo  $\delta$  y  $\zeta$  definidas poniendo:

$$\delta(S) = 1, \text{ si } S \text{ es un intervalo trivial (con un solo elemento).}$$

$$\delta(S) = 0, \text{ si } S \text{ es un intervalo no trivial.}$$

$$\zeta(S) = 1, \text{ cualquiera que sea el intervalo (trivial o no) } S.$$

Dadas dos funciones regulares de intervalo  $f, g$ , es posible definir la suma  $f + g$  y el producto de Dirichlet  $fg$  análogamente a como se hace cuando se trata de funciones de intervalo  $f_s, g_s$ , en un conjunto ordenado localmente finito  $S$ . En efecto, si  $f$  y  $g$  son funciones regulares de intervalo se conocen los valores  $f(S)$  y  $g(S)$ , para cualquier intervalo  $S$ , así como también se conocen los valores  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  que toman  $f$  y  $g$  respectivamente, para un subintervalo cualquiera  $[x, y]$  de  $S$ . En consecuencia, se puede poner por definición:

$$(f + g)(S) = f(S) + g(S) \quad 16-1$$

$$(fg)(S) = \sum_{c \subseteq x \subseteq u} f(c, x) \cdot g(x, u) \quad 16-2$$

Las funciones  $f + g$  y  $fg$ , así definidas, son evidentemente funciones regulares de intervalo (toman valores iguales para intervalos isomorfos).

Los resultados de M. WARD se pueden interpretar diciendo que el sistema de las funciones regulares de intervalo constituye un anillo  $\mathcal{R}$  con un elemento unidad que es la función  $\delta$  (llamada también *función  $\delta$  de Dirac*). La función inversa de  $\zeta$  en este anillo (se demuestra que tal inversa existe y es única) es la función  $\mu$  de Weisner-Möbius, de cuya restricción  $\mu_s$  al conjunto de los intervalos de un conjunto ordenado localmente finito cualquiera  $S$  hemos tratado anteriormente.

Se demuestran fácilmente los siguientes lemas, que son consecuencias casi inmediatas de la definición de la función  $\mu$ :

*Lema 1.—Si  $[a, b]$  es un intervalo elemental, entonces es  $\mu(a, b) = -1$ .*

*Lema 2.—Si el intervalo  $[a, b]$  es una cadena de longitud mayor que 1, entonces es  $\mu(a, b) = 0$ .*

*Lema 2.—Si el intervalo  $[a, b]$  es una cadena de longitud mayor que 1, (finita o infinita) cuyos elementos son  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ , ( $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq \dots$ ) y  $f$  es una función regular de intervalo, los valores de la función  $f\mu$  para los intervalos de  $S$  (los cuales son todos evidentemente de la forma  $[a_i, a_j]$  con  $i \leq j$ ) vienen dados por*

$$(f\mu)(a_i, a_j) = f(a_i, a_j), \quad \text{si es } i = j,$$

$$(f\mu)(a_i, a_j) = f(a_i, a_j) - f(a_i, a_{j-1}), \quad \text{si es } i < j.$$

*Lema 4.—Si  $\psi_a$  es una función definida solamente para los intervalos de la forma  $[a, x]$ , siendo  $a$  un elemento fijo de un conjunto ordenado localmente finito  $S$ , y  $\varphi$  es una función regular de intervalo de tal manera que para todo intervalo de la forma  $[a, x]$  se verifica*

$$\sum_{a \subseteq z \subseteq x} \psi_a(a, z) = \varphi(a, x),$$

*entonces la función  $\psi_a$  es la restricción de la función  $\psi = \varphi\mu$  al conjunto de los intervalos de  $S$  de la forma  $[a, x]$ .*

## LONGITUD MÁXIMA Y LONGITUD MÍNIMA DE UN INTERVALO

Entre las funciones regulares de intervalo destacaremos las que vamos a llamar *longitud máxima* y *longitud mínima*.

Si  $S = [a, b]$  es un intervalo finito de extremos  $a$  y  $b$ , existirá siempre un número finito de cadenas maximales de  $a$  a  $b$ . Cada una de estas cadenas tiene una longitud que no es necesariamente la misma para todas ellas. El conjunto formado por las longitudes de todas las cadenas maximales de  $a$  a  $b$  es pues un conjunto finito de enteros no negativos que contiene un máximo y un mínimo. Esto nos permite asignar a cada intervalo finito  $S = [a, b]$  los enteros no negativos  $D(S) = D(a, b)$  y  $d(S) = d(a, b)$  de la siguiente manera:

$D(a, b)$  = valor máximo de las longitudes de las cadenas maximales de  $a$  a  $b$ .

$d(a, b)$  = valor mínimo de las longitudes de las cadenas maximales de  $a$  a  $b$ .

De estas definiciones se desprende que para todo intervalo trivial  $[x, x]$  es  $D(x, x) = d(x, x) = 0$ .

Puesto que  $S = [a, b]$  puede ser un intervalo finito cualquiera, quedan de este modo definidas las funciones regulares de intervalo  $D$  y  $d$ , a las que llamaremos respectivamente *longitud máxima* y *longitud mínima*.

Si un conjunto ordenado localmente finito  $T$  es tal que, para todo intervalo  $[a, b]$  de  $T$  todas las cadenas maximales de  $a$  a  $b$  tienen la misma longitud, se dice que  $T$  satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind. Las funciones  $D$  y  $d$  se reducen evidentemente a una función única, cuando se restringen al conjunto de los intervalos de un conjunto ordenado que satisfaga esta condición. La función  $D$  se conoce en la literatura matemática con el nombre de *Dimensión* (v. nota 9).

LAS FUNCIONES  $d\mu$ ,  $D\mu$ ,  $\mu d$ ,  $\mu D$  Y SUS PROPIEDADES

Una vez definidas las funciones  $D$ ,  $d$  y  $\mu$  y el producto de Dirichlet de dos funciones, tal como se indica en 16-2, quedan automáticamente definidos los productos  $D\mu$ ,  $d\mu$ ,  $\mu D$  y  $\mu d$ . En un trabajo anterior (v. [6]) demostrábamos que la función que aquí designamos por  $D\mu$  (en nuestro trabajo de referencia la designábamos por  $d\mu$ ) se anula para todo retículo (finito) reducible. Este resultado no es sino un caso particular del teorema que vamos a demostrar a continuación:

*Teorema 1.* — Si un intervalo finito  $S = [a, b]$  es reducible, entonces es

$$(D\mu)(S) = (\mu D)(S) = (d\mu)(S) = (\mu d)(S) = 0.$$

La demostración de este teorema se deriva de los dos lemas siguientes:

*Lema 5.* — Si el intervalo finito  $S = [c, u]$ , es producto directo de los intervalos  $S_1$  y  $S_2$ , de extremos  $c_1, u_1$  y  $c_2, u_2$  respectivamente, se verifica:

$$D(S) = D(S_1) + D(S_2), \quad 18-1$$

$$d(S) = d(S_1) + d(S_2), \quad 18-2$$

o, lo que es lo mismo:

$$D(c, u) = D(c_1, u_1) + D(c_2, u_2) \quad 18-1'$$

$$d(c, u) = d(c_1, u_1) + d(c_2, u_2) \quad 18-2'$$

La demostración es inmediata si se tiene en cuenta que si  $a = \langle a_1, a_2 \rangle$ ,  $b = \langle b_1, b_2 \rangle$  son dos elementos de  $S_1 \times S_2$ , es  $a \{ b$  si y sólo si es  $a_1 \{ b_1$ ,  $a_2 = b_2$  o bien  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 \} b_2$ . De aquí que las primeras componentes de los elementos de una cadena maximal  $C$  de  $c$  a  $u$  en  $S$ , constituyen una cadena maximal  $C_1$  de  $c_1$  a  $u_1$  en  $S_1$ , mientras las segundas componentes forman una cadena maximal  $C_2$  de  $c_2$  a  $u_2$ , siendo en todo caso

$$\text{long}(C) = \text{long}(C_1) + \text{long}(C_2) \quad 18-3$$

Si  $C$  es de longitud máxima entre todas las cadenas de  $c$  a  $u$ , entonces  $C_1$  y  $C_2$  son también de longitud máxima entre todas las cadenas de  $c_1$  a  $u_1$  y de  $c_2$  a  $u_2$  respectivamente. Por definición es entonces:  $\text{long}(C) = D(c, u)$ ,  $\text{long}(C_1) = D(c_1, u_1)$ ,  $\text{long}(C_2) = D(c_2, u_2)$ , de lo cual y de la 18-3 resulta 18-1'.

Del mismo modo obtendríamos 18-2' sin más que considerar cadenas máximas de longitud mínima de  $c$  a  $u$ , de  $c_1$  a  $u_1$  y de  $c_2$  a  $u_2$ .

*Lema 6.* — Para todo intervalo  $S = [a, b]$  que sea producto directo de los intervalos  $S_1 = [a_1, b_1]$ ,  $S_2 = [a_2, b_2]$ , se verifica

$$\mu(S) = \mu(S_1) \mu(S_2), \quad 18-4$$

o lo que es lo mismo

$$\mu(a, b) = \mu(a_1, b_1) \mu(a_2, b_2) \quad 18-4'$$

La demostración de este lema se hace por inducción. Se cumple en efecto si  $[a, b]$  es un intervalo de un elemento (trivial), (entonces es  $a = b$ ,  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ ,  $\mu(a, b) = \mu(a_1, b_1) = \mu(a_2, b_2) = I$ ), y es fácil ver que si se cumple para intervalos de menos de  $n$  elementos, se cumple también para los de  $n$  (v. nota 10).

Demostración del teorema 1:

Si el intervalo finito  $S = [c, u]$ , con elemento mínimo  $c$  y elemento máximo  $u$ , siendo  $c \neq u$ , es reducible, será por definición producto directo de los intervalos no triviales  $S_1$  y  $S_2$ , cada uno de los cuales poseerá elemento mínimo y elemento máximo. Designando por  $c_1, u_1$ , los elementos máximo y mínimo de  $S_1$  y por  $c_2, u_2$  los de  $S_2$ , al ser  $S_1, S_2$  no triviales, deberá ser  $c_1 \neq u_1$ ,  $c_2 \neq u_2$ . Según la definición de  $(d_\mu)(S)$  tendremos entonces, al aplicar los lemas 5 y 6:

$$\begin{aligned}
 (d\mu)(S) &= (d\mu)(c, u) = \sum_{c \subseteq x \subseteq u} d(c, x) \mu(x, u) = \\
 &= \sum_{\substack{c_1 \subseteq x_1 \subseteq u_1 \\ c_2 \subseteq x_2 \subseteq u_2}} [d(c_1, x_1) + d(c_2, x_2)] \mu(x_1, u_1) \mu(x_2, u_2) = \\
 &= \sum_{\substack{c_1 \subseteq x_1 \subseteq u_1 \\ c_2 \subseteq x_2 \subseteq u_2}} d(c_1, x_1) \mu(x_1, u_1) \mu(x_2, u_2) + \\
 &\quad + \sum_{\substack{c_1 \subseteq x_1 \subseteq u_1 \\ c_2 \subseteq x_2 \subseteq u_2}} d(c_2, x_2) \mu(x_1, u_1) \mu(x_2, u_2) = \\
 &= \sum_{c_1 \subseteq x_1 \subseteq u_1} d(c_1, x_1) \mu(x_1, u_1) \sum_{c_2 \subseteq x_2 \subseteq u_2} \mu(x_2, u_2) + \\
 &\quad + \sum_{c_2 \subseteq x_2 \subseteq u_2} d(c_2, x_2) \mu(x_2, u_2) \sum_{c_1 \subseteq x_1 \subseteq u_1} \mu(x_1, u_1).
 \end{aligned}$$

Recordando que, por ser  $c_1 \neq u_1$  y  $c_2 \neq u_2$  es, según la definición de  $\mu$ ,

$$\sum_{c_1 \subseteq x_1 \subseteq u_1} \mu(x_1, u_1) = 0,$$

$$\sum_{c_2 \subseteq x_2 \subseteq u_2} \mu(x_2, u_2) = 0,$$

se obtiene

$$(d\mu)(S) = 0, \quad \text{c. q. d.}$$

Del mismo modo demostraríamos que, con las mismas hipótesis acerca de  $S$ , es

$$(D\mu)(S) = 0, \quad (\mu D)(S) = 0, \quad (\mu D)(S) = 0.$$

A partir de ahora nos ocuparemos solamente de la función  $d\mu$ . Para cada teorema que demostremos relativo a esta función, se podría demostrar un teorema análogo para cada una de las funciones  $\mu D$ ,  $D\mu$  y  $\mu D$ , pero no insistiremos en ello por no ser interesante para nuestros fines.

El siguiente teorema hace referencia a la función  $d\mu$  en el caso en que el conjunto ordenado  $S$  a que se aplica sea un retículo finito. Tengamos presente que en todo conjunto ordenado, con elemento mínimo  $c$  y elemento máximo  $u$ , reciben el nombre de *átomos* los elementos contiguos de  $c$  y de *antiátomos* los contiguos de  $u$ .

*Teorema 2.* — *Si  $S$  es un retículo finito no trivial que satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind, entonces es*

$$(d\mu)(S) = (d\mu)(i, u)$$

siendo  $u$  el elemento máximo e  $i$  el ínfimo del conjunto de los antiátomos de  $S$ .

Para demostrar este teorema haremos uso de dos lemas.

*Lema 7.* — Si  $S$  es un retículo finito no trivial y llamamos  $i$  al ínfimo del conjunto de los antiátomos de  $S$ , entonces para todo  $x \in S$  tal que  $i \not\subseteq x$ , es  $\mu(x, u) = 0$ , siendo  $u$  el elemento máximo de  $S$ .

Demostración: Definamos una sucesión de funciones de intervalo  $Q_0, Q_1, \dots, Q_k, \dots$  de la siguiente manera:

$$Q_0(x, y) = \delta(x, y)$$

$Q_k(x, y) =$  número de conjuntos formados por  $k$  elementos contiguos inferiores de  $y$  cuyo ínfimo sea  $x$  ( $k \geq 1$ ).

WEISNER [25] demostró que para todo intervalo  $[x, y]$  de un retículo localmente finito  $S$ , se verifica:

$$\mu(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Q_k(x, y),$$

de modo que, en particular se tiene:

$$\mu(x, u) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Q_k(x, u) \quad 18-5$$

Supongamos ahora que  $x$  es tal que el ínfimo  $i$  de los antiátomos de  $S$  no es inferior a  $x$  ( $i \not\subseteq x$ ). Entonces  $x$  no puede ser ínfimo de ningún subconjunto de antiátomos, pues suponiendo que estos son  $a_1, \dots, a_n$ , siempre podemos disponer los índices de modo que si  $x$  es la intersección (ínfimo) de  $k$  antiátomos ( $1 \leq k \leq n$ ), sea precisamente  $x = a_1 \cap \dots \cap a_k$  y al ser  $i = a_1 \cap \dots \cap a_k \cap a_{k+1} \cap \dots \cap a_n$ , sería  $i = x \cap (a_{k+1} \cap \dots \cap a_n) \subseteq x$ , contrariamente a lo supuesto. De aquí se deduce que para todo  $k \geq 1$  es (bajo la hipótesis  $i \not\subseteq x$ ).

$$Q_k(x, u) = 0.$$

Por otra parte, por ser  $i \not\subseteq x$  e  $i \subseteq u$ , será  $x \neq u$ , y en consecuencia

$$Q_0(x, u) = \delta(x, u) = 0.$$

De todo ello se deduce que por 18-5

$$\mu(x, u) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x, u) = 0 \quad \text{c. q. d.}$$

*Lema 8.* — Si un retículo finito no trivial  $S = [c, u]$ , cuyos elementos mínimo y máximo se designan por  $c$  y  $u$  ( $c \neq u$ ), satisface a la condición de cadena de Jordán-Dedekind y  $i$  es el ínfimo del conjunto de antiátomos de  $S$ , entonces para todo  $x \in S$  tal que  $i \subseteq x \subseteq u$  es

$$d(c, x) = d(c, x) + d(i, x).$$

En efecto: Consideremos para todo  $x$  ( $i \subseteq x \subseteq u$ ) una cadena maximal  $C_1$  de  $c$  a  $i$  y una cadena maximal  $C_2$  de  $i$  a  $x$ . Juntando los elementos de

estas dos cadenas se obtiene una cadena maximal  $C$  de  $c$  a  $x$  y evidentemente es

$$\text{long} (C) = \text{long} (C_1) + \text{long} (C_2).$$

Ahora bien, al tener todas las cadenas maximales entre dos elementos determinados la misma longitud, será:

$$\text{long} (C) = d(c, x); \quad \text{long} (C_1) = d(c, i); \quad \text{long} (C_2) = d(i, x), \quad \text{de donde}$$

$$d(c, x) = d(c, i) + d(i, x), \quad \text{c. q. d.}$$

Demostración del teorema 2:

Según la definición de  $d\mu$  es

$$(d\mu)(S) = (d\mu)(c, u) = \sum_{c \subseteq x \subseteq u} d(c, x) \mu(x, u), \quad 18-6$$

$$(d\mu)(i, u) = \sum_{i \subseteq x \subseteq u} d(i, x) \mu(x, u) \quad 18-7$$

Al ser, según el lema 7,  $\mu(x, u) = 0$  para todo  $x$  tal que  $i \not\subseteq x$ , de 18-6 se deduce:

$$\begin{aligned} (d\mu)(S) &= \sum_{c \subseteq x \subseteq u} d(c, x) \mu(x, u) = \\ &= \sum_{i \subseteq x \subseteq u} (d(c, i) + d(i, x)) \mu(x, u) = \\ &= \sum_{i \subseteq x \subseteq u} d(c, i) \mu(x, u) + \sum_{i \subseteq x \subseteq u} d(i, x) \mu(x, u) = \\ &= d(c, i) \sum_{i \subseteq x \subseteq u} \mu(x, u) + \sum_{i \subseteq x \subseteq u} d(i, x) \mu(x, u) = \\ &= d(c, i) \delta(i, u) + (d\mu)(i, u) \end{aligned} \quad 18-8$$

El elemento  $i$  es intersección de un conjunto (no vacío por ser  $S$  no trivial) de elementos contiguos inferiores de  $u$  y por lo tanto es  $i \neq u$ , de donde se deduce que es  $\delta(i, u) = 0$ . Teniendo esto en cuenta en 18-8, resulta

$$(d\mu)(S) = (d\mu)(i, u), \quad \text{c. q. d.}$$

#### LA FUNCIÓN $d\mu$ EN LAS CADENAS

Todo conjunto totalmente ordenado localmente finito o cadena localmente finita satisface evidentemente la condición de cadena de Jordan-De-dekind y por lo tanto no hay lugar a distinguir entre longitud máxima o

dimensión y longitud mínima para los intervalos de  $S$ . Todo intervalo  $[u, v]$  de  $S$  es en este caso una cadena finita que podemos suponer de longitud  $n$  y designar sus elementos por  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ , siendo  $a_0 \{ a_1 \} \{ \dots \} a_{n-1} \{ a_n$ . Para todo  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ,  $n$  es evidentemente  $d(a_0, a_i) = D(a_0, a_i) = i$ . Aplicando el lema 3 a la función  $d$  obtenemos

$$\begin{aligned}(d\mu)(a_i, a_i) &= d(a_i, a_i) = 0 \\ (d\mu)(a_i, a_j) &= d(a_i, a_j) - d(a_i, a_{j-1}) = j - i - [(j - 1) - i] = \\ &= j - (j - 1) = 1, \text{ si es } i < j.\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado el lema siguiente:

**LEMA 9.** — *La función  $d\mu$  toma el valor 0 para todo intervalo trivial y el valor 1 para toda cadena no trivial.*

## 20

LA FUNCIÓN  $d\mu$  EN LOS RETÍCULOS DE DIVISORES DE UN NÚMERO

Consideremos el conjunto  $D_n$  de enteros positivos constituido por los divisores del entero positivo  $n$ . Ordenado este conjunto por la relación  $\subseteq$  definida poniendo, para dos divisores cualesquiera  $d_1, d_2$  de  $n$

$$d_1 \subseteq d_2 \Leftrightarrow d_1 \text{ divide a } d_2,$$

constituye como se sabe un retículo en el cual es

$$\begin{aligned}\sup(a, b) &= a \cup b = m.c.m.(a, b), \\ \inf(a, b) &= a \cap b = m.c.d.(a, b).\end{aligned}$$

Si es  $n = p^r$ , siendo  $p$  un número primo, entonces el retículo  $D_n$  es una

cadena de longitud  $r$ . Si es  $n = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i}$ ;  $r_i > 0$ ;  $i = 1, \dots, k$ ;  $k > 1$ , siendo  $p_1, \dots, p_k$  números primos distintos, el retículo  $D_n$  es un producto directo de  $k$  cadenas de longitudes  $r_1, \dots, r_k$  y por lo tanto reducible. Aplicando a los retículos de este tipo el lema 9 y el teorema 1, se tiene:

**TEOREMA 3.** — *Si  $D_n$  es el retículo de los divisores del número natural  $n$  ( $n > 0$ ), entonces es*

$$(d\mu)(D_n) = I,$$

*si  $n$  es una potencia de un número primo  $p$  y  $(d\mu)(D_n) = 0$  en los demás casos.*

## DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN A EN EL CONJUNTO DE LAS MULTIÁLGEBRAS FINITAS

Sabemos que todo retículo finito no vacío, en su calidad de conjunto ordenado especial, posee un máximo y un mínimo, es decir, es un intervalo. Sabemos también que para cada multiálgebra finita  $\mathfrak{M}$ , el retículo  $L(\mathfrak{M})$  de las submultiálgebras de  $\mathfrak{M}$ , es finito. Podemos pues hacer corresponder, como ya hemos indicado en la sección 1, a cada multiálgebra finita  $\mathfrak{M}$ , el entero

$$A(\mathfrak{M}) = (d_\mu)(L(\mathfrak{M})),$$

quedando así definida la función  $A$  en el conjunto de las multiálgebras finitas.

Antes de pasar adelante, vamos a enunciar como teoremas 1' y 2' las propiedades de la función  $A$  que se obtienen al aplicar los teoremas 1 y 2 respectivamente, al retículo  $L(\mathfrak{M})$  de las submultiálgebras de una multiálgebra finita  $\mathfrak{M}$ .

Diremos que una multiálgebra  $\mathfrak{M}$  es *L-reducible* cuando (y sólo cuando) el retículo  $L(\mathfrak{M})$  es reducible.

**TEOREMA 1'** — *Si  $\mathfrak{M}$  es una multiálgebra finita L-reducible, entonces es  $A(\mathfrak{M}) = 0$ .*

Si  $\mathfrak{M}$  es una multiálgebra finita y  $\mathfrak{M}'$  una submultiálgebra de  $\mathfrak{M}$  diremos que  $\mathfrak{M}'$  es una submultiálgebra *maximal* de  $\mathfrak{M}$  si el elemento de  $L(\mathfrak{M})$  representado por  $\mathfrak{M}'$  es un antiátomo. En teoría de grupos se da el nombre de subgrupo de Frattini de un grupo  $\mathcal{J}$  al subgrupo intersección de los subgrupos maximales de  $\mathcal{J}$ . Por analogía, vamos a llamar submultiálgebras de Frattini de una multiálgebra  $\mathfrak{M}$  a la multiálgebra intersección de todas las submultiálgebras maximales de  $\mathfrak{M}$ .

**TEOREMA 2'.** — *Si  $\mathfrak{M}$  es una multiálgebra finita tal que el retículo  $L(\mathfrak{M})$  satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind y  $\mathcal{J}$  es la submultiálgebra de Frattini de  $\mathfrak{M}$ , entonces es*

$$A(\mathfrak{M}) = (d_\mu)(\mathcal{J}, \mathfrak{M}),$$

siendo  $(d_\mu)(\mathcal{J}, \mathfrak{M})$  el valor que toma la función  $d_\mu$  para el intervalo  $[\mathcal{J}, \mathfrak{M}]$  de  $L(\mathfrak{M})$ .

## CAPÍTULO I

## LA FUNCION A EN LOS GRUPOS FINITOS

22

## BREVE MENCIÓN DE RESULTADOS CONOCIDOS

El retículo de las submultiálgebras de un grupo  $G$  es el retículo  $L(G)$ , cuya estructura determina, en el caso de ser  $G$  finito, el valor de  $\Lambda(G) = (d_{\mu})(L(G))$ .

Damos por sabidas, según ya hemos dicho en la sección 1, las nociones básicas de la Teoría de Grupos. Para facilitar la exposición resumimos, en forma de lemas, los resultados que nos han de ser más útiles para determinar los valores de la función  $A$ .

**LEMA 10.** — *El orden de todo subgrupo  $H$  de un grupo finito  $G$ , es divisor del orden de  $G$*  (teorema de Lagrange).

**LEMA 11.** — *Todo grupo abeliano finito  $G$ , cuyo orden, descompuesto en sus factores primos es,  $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ , es producto directo de grupos  $G_1, \dots, G_r$ , donde para cada  $i = 1, \dots, r$ ,  $G_i$  es dorden  $p_i^{e_i}$  y es producto directo de  $s$  grupos cíclicos ( $s \geq 1$ ) de órdenes  $p_i^{e_{i1}}, \dots, p_i^{e_{is}}$ , siendo  $e_{i1} + \dots + e_{is} = e_i$ . La demostración de este lema puede verse, por ejemplo, en M. HALL [9] (pág. 40, teorema 3.3.1)*

Tomando por base este último lema, se da el nombre de *elementalmente abeliano* a todo grupo abeliano que sea producto directo de grupos cíclicos de orden  $p$ , siendo  $p$  un número primo (corresponde al caso  $r = 1, s = e_1, e_{i1} = \dots = e_{is} = 1$ , según la notación usada en el enunciado del lema). Consideraremos también como elementalmente abeliano al grupo trivial.

De un modo general, los números naturales  $e_n$  reciben el nombre de *invariantes* del grupo finito  $G$ . Tales invariantes determinan por completo el grupo  $G$ , salvo isomorfismo.

Recordemos que todo elemento  $a$  de un grupo cualquiera  $G$  engendra un subgrupo  $\{a\}$  de  $G$  que, o bien es isomorfo al grupo aditivo de los números enteros, o bien es cíclico de orden finito. Se da el nombre de *orden* de un elemento  $a$  de un grupo  $G$  al orden del grupo  $\{a\}$ . El orden de un elemento  $a$  de un grupo finito  $G$  es, como se sabe, un número finito divisor del orden de  $G$ .

**LEMA 12.** — *El retículo  $L(G)$  de los subgrupos de un grupo  $G$  es producto directo de retículos  $L_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) si y sólo si  $G$  es producto directo de grupos  $G_\lambda$  tales que  $L(G_\lambda) \cong L_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) y el orden de cualquier elemento de  $G_\lambda$  (para todo  $\lambda \in \Lambda$ ) es un número finito primo con el orden de cualquier elemento de  $G_\mu$  ( $\lambda \neq \mu$ ). La demostración puede encontrarse en SUZUKI [21], pág. 5, teorema 4.*

**LEMA 13.** — *Si  $G$  es un grupo finito cíclico de orden  $n$ , el retículo  $L(G)$  es isomorfo al retículo  $D_n$  de los divisores de  $n$  (véase, por ejemplo, M. HALL [9], pág. 35, teorema 3.1.1.).*

**LEMA 14.** — *Si el grupo finito  $G$  es de orden  $n = p^m s$ , siendo  $p$  un número primo no divisor de  $s$ , entonces  $G$  contiene subgrupos de órdenes  $p^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y todo subgrupo de orden  $p^i$  es divisor normal de por lo menos un grupo de orden  $p^{i+1}$  (véase M. HALL [9], pág. 44, teorema 4.2.1).*

**LEMA 15.** — *El retículo  $L(G)$  de los subgrupos de un grupo  $G$  de orden  $p^r$  ( $p$  número primo,  $r \geq 1$ ) satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind (este lema es consecuencia inmediata del anterior).*

**LEMA 16.** — *El retículo  $L(G)$  de los subgrupos de un grupo abeliano  $G$  satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind.*

Esto deriva de que para un grupo cualquiera  $G$ , el conjunto de los subgrupos divisores normales de  $G$  constituye un retículo  $L_N(G)$  que es modular (v. nota 11) y es un  $\cap$ -subretículo de  $L(G)$  (véase, p. ej., HERMES [17], página 44). Si  $G$  es abeliano  $L_N(G)$  coincide con  $L(G)$  puesto que todo subgrupo de  $G$  es normal. Todo retículo modular satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind (véase también HERMES [17], pág. 73).

**LEMA 17.** — *Todo retículo  $L(G)$  de un grupo abeliano finito  $G$ , es dual de sí mismo, en el sentido de que existe una aplicación biunívoca reversible  $\varphi$  de  $L(G)$  sobre sí mismo tal que si  $H_1, H_2$  son subgrupos de  $G$  (elementos de  $L(G)$ ) es*

$$H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow \varphi(H_2) \subseteq \varphi(H_1)$$

(toda aplicación  $\varphi$  que reúna estas condiciones recibe el nombre de *automorfismo dual de  $L(G)$* ). En M. HALL [9], pág. 196, teorema 13.2.4 se demuestra el carácter dual de  $L(G)$  para una clase de grupos  $G$  que contiene los grupos abelianos finitos).

Un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  será llamado subgrupo *maximal* de  $G$  si y sólo si es  $H \neq G$  y no existe ningún subgrupo  $H_1$  tal que sea  $H \subset H_1 \subset G$  (recuérdese que, por ejemplo,  $H \subset H_1$  significa que es a la vez  $H \subseteq H_1$  y  $H \neq H_1$ ).

Dado un grupo  $G$ , si designamos por  $G_0$  el subgrupo de  $G$  que contiene el elemento neutro ( $G_0$  es el elemento mínimo de  $L(G)$ ), un subgrupo  $H$  de  $G$  será llamado subgrupo *minimal* de  $G$  si y sólo si es  $H \neq G_0$  y no existe ningún subgrupo  $H_1$  de  $G$  tal que  $G_0 \subset H_1 \subset H$ .

**LEMA 18.** — *Si para un grupo abeliano finito  $G$ , llamamos  $I$  al subgrupo intersección de todos los subgrupos maximales de  $G$  ( $I$  es, por definición,*

el subgrupo de Frattini de  $G$ ) y  $U$  al subgrupo unión de todos los subgrupos minimales de  $G$ , entonces los intervalos  $[G_0, U]$  y  $[I, G]$  de  $L(G)$  son isomorfos.

En efecto,  $[G_0, U]$  es lo mismo que el retículo  $L(U)$  de los subgrupos de  $U$ .  $U$ , como subgrupo de  $G$ , es también un grupo abeliano finito y por lo tanto existe un automorfismo dual  $\varphi_U$  de  $L(U)$ , lo mismo que existe un automorfismo dual  $\varphi_G$  de  $L(G)$ . La aplicación producto  $\varphi_G \varphi_U$  es, como fácilmente se comprueba, un isomorfismo del intervalo  $[G_0, U]$  sobre el intervalo  $[I, G]$ .

**LEMA 19.** — Si  $G$  es un grupo elementalmente abeliano de orden  $p^s$ , existen para cada entero  $h$  tal que  $0 \leq h \leq s$ , exactamente  $N_{s-h}$  subgrupos de  $G$  de orden  $p^h$ , siendo

$$N_{s-h} = 1, \text{ cualquiera que sea } s \geq 0,$$

$$N_{s-h} = \frac{(1-p^s)(1-p^{s-1}) \dots (1-p^{s-h+1}) \dots (1-p^{s-h})}{(1-p)(1-p^2) \dots (1-p^1) \dots (1-p^h)},$$

si es  $h \geq 1, s \geq h$ .

Se verifica siempre

$$N_{s-h} = N_{s-s+h}.$$

**LEMA 20.** — Todo subgrupo de un grupo elementalmente abeliano es elementalmente abeliano

La demostración de los dos lemas anteriores puede hallarse por ejemplo en ZASSENHAUS [28], pág. 142.

**LEMA 21.** — Si un grupo abeliano finito  $G$  de orden  $p^e$  ( $p$  número primo,  $e \geq 1$ ) es producto directo de  $s$  grupos cíclicos de órdenes  $p^{e_1}, \dots, p^{e_s}$ , ( $e_1 + \dots + e_s = e$ ) entonces el subgrupo  $U$ , unión de los grupos maximales de  $G$  es elementalmente abeliano de orden  $p^s$ . La estructura de  $U$  viene por lo tanto determinada por  $p$  y por el número  $s$  de invariantes, siendo independiente de los valores particulares  $e_1, \dots, e_s$  de éstos.

Es sabido en efecto que todo grupo cíclico de orden  $n$  ( $n > 0$ ) puede ser representado por el grupo aditivo de las clases de congruencia módulo  $n$ . Cada clase de congruencia puede representarse a su vez por el entero no negativo menor que  $n$  que contiene, de modo que en definitiva, el grupo cíclico de orden  $n$  puede considerarse constituido por el conjunto  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  de enteros no negativos poniendo, para cada par de enteros no negativos  $a, b$ , menores que  $n$

$$a \oplus b = c \Leftrightarrow a + b \equiv c \pmod{n} \wedge 0 \leq c < n$$

22-1

El elemento neutro del grupo es el número 0 y el elemento inverso de un número  $a$  ( $0 \leq a < n$ ) es  $n - a$ . Según lo que antecede, y según la definición de producto directo de grupos, el grupo  $G$  puede considerarse representado por el conjunto de todas las  $s$ -tuplas  $\langle a_1, \dots, a_i, \dots, a_s \rangle$  de enteros no negativos, donde para cada  $i = 1, \dots, s$  es  $0 \leq a_i < p^{e_i}$ , y por ope-

ración binaria se toma la definida poniendo, para dos cualesquiera de tales  $s$ -tuplas  $a = \langle a_1, \dots, a_i, \dots, a_s \rangle$ ,  $b = \langle b_1, \dots, b_i, \dots, b_s \rangle$

$$a \oplus b = \langle c_1, \dots, c_i, \dots, c_s \rangle$$

donde para cada  $i = 1, \dots, s$  es

$$c \equiv a_i + b_i \pmod{p^{e_i}} \quad 0 \leq c_i < p^{e_i}$$

Según el lema 14 existen subgrupos de  $G$  de orden  $p$  y según el lema 10 tales subgrupos son precisamente los subgrupos minimales de  $G$ . Si  $M$  es uno de estos subgrupos minimales y  $x$  es un elemento de  $M$ , el orden de  $x$ , necesariamente divisor del orden de  $M$ , ha de ser  $p$  ó 1, de modo que en todo caso ha de verificarse, si es  $x = \langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_s \rangle$ :

$$x \oplus x \oplus \dots (p \oplus x = \langle 0, \dots, 0, \dots, 0 \rangle,$$

o lo que es lo mismo

$$px_i \equiv 0 \pmod{p^{e_i}}, \quad i = 1, \dots, s \quad 22-2$$

Viceversa, si  $x$  satisface estas condiciones, o bien es el elemento neutro  $\langle 0, \dots, 0, \dots, 0 \rangle$  que pertenece a todo subgrupo, o bien engendra un subgrupo minimal  $\{x\}$  al que pertenece. De todo esto se deduce que un elemento  $x = \langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_s \rangle$  de  $G$  pertenece a un subgrupo minimal de  $G$  si y sólo si satisface la condición 22-2. El conjunto de todos estos elementos constituye un subgrupo, según fácilmente se comprueba, el cual no puede ser otro que el  $U$ .

Ahora bien, para que sea  $px_i \equiv 0 \pmod{p^{e_i}}$ , es preciso y basta que sea  $x_i \equiv p^{e_i-1}$  y si exigimos además que sea  $x_i < p^{e_i}$ , podremos poner  $x_i = y_i p^{e_i-1}$ , siendo  $y_i$  uno de los números  $0, 1, \dots, p - 1$ . El subgrupo  $U$  puede pues considerarse representado por el conjunto de las  $s$ -tuplas de la forma

$$\langle y_1 p^{e_1-1}, \dots, y_i p^{e_i-1}, \dots, y_s p^{e_s-1} \rangle$$

siendo  $y_1, \dots, y_s$  uno cualquiera de los números  $0, 1, \dots, p - 1$ .

La aplicación

$$\langle y_1 p^{e_1-1}, \dots, y_i p^{e_i-1}, \dots, y_s p^{e_s-1} \rangle \rightarrow \langle y_1, \dots, y_i, \dots, y_s \rangle$$

es, evidentemente, un isomorfismo de  $U$  sobre el producto directo de  $s$  grupos de orden  $p$ , lo cual equivale a decir que  $U$  es elementalmente abeliano de orden  $p^s$  c. q. d.

**LEMA 22.** — Si  $G$  es un grupo finito (abeliano o no) de orden  $p^e$  ( $p$  número primo,  $e \geq 1$ ) y  $H$  es un subgrupo cualquiera de  $G$ , de orden  $p^h$ , entonces el valor que toma la función  $\mu$  de Weisner-Möbius para el intervalo  $[H, G]$  de  $L(G)$  viene dado por:

$$\mu(H, G) = (-1)^{e-h} \cdot p^{(e-h)(e-h-1)/2},$$

si  $H$  es subgrupo normal de  $G$  y el grupo cociente  $G/H$  es elementalmente abeliano.

$$\mu(H, G) = 0 \text{ en los demás casos.}$$

La demostración puede hallarse en Weisner [26], pág. 487.

Si  $G$  es un grupo (abeliano o no) de orden  $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ , existen, según nos dice el lema 14, subgrupos de  $G$  de cada uno de los órdenes  $p_1^{e_1}, \dots, p_r^{e_r}$ . Cada uno de tales subgrupos recibe el nombre de *subgrupo de Sylow* de  $G$ .

**LEMA 23.** — Si un grupo  $G$  de orden  $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ , siendo  $r \geq 2$ , es isomorfo al producto directo de sus subgrupos de Sylow, entonces el retículo  $L(G)$  es reducible.

Basta ver en efecto que si se cumple esta condición, existe para cada  $i = 1, \dots, r$  un subgrupo de Sylow y sólo uno  $G_i$  de orden  $p_i^{e_i}$  (si existiesen  $k_i$  grupos de Sylow de orden  $p_i^{e_i}$  entonces el producto directo  $G$  sería de orden  $p_1^{e_1}k_1 \dots p_r^{k_r e_r}$ , de donde,  $k_1 = \dots = k_r = 1$ ). Entonces es  $G = G_1 \times \dots \times G_r$  y se cumplen las condiciones del lema 12, lo cual nos dice que  $G$  es reducible.

Si  $H$  es un subgrupo de un grupo  $G$ , recibe como es sabido el nombre de *normalizador*  $N_H$  de  $H$  el conjunto  $\{x: x \in G \wedge (h \in H \Rightarrow x^{-1}hx \in H)\}$ .

Se demuestra que el normalizador  $N_H$  de un grupo  $H$  es un grupo que contiene  $H$ , pudiendo ocurrir que sea  $H = N_H$  o que sea  $H \subset N_H$ .

Conviniendo en llamar *subgrupo propio* de un grupo  $G$  a todo subgrupo de  $G$  distinto de  $G$  podemos enunciar el siguiente lema:

**LEMA 24.** — Un grupo finito  $G$  es isomorfo al producto directo de sus subgrupos de Sylow si y sólo si todo subgrupo propio  $H$  de  $G$  está contenido en sentido estricto en su normalizador (es  $H \subset N_H$  para todo  $H \neq G$ ). Véase la demostración p. ej. en M. HALL [9], pág. 48.

## LA FUNCIÓN A EN LOS GRUPOS ABELIANOS FINITOS

Los lemas expuestos en la sección anterior nos permitirán determinar fácilmente el valor de  $A(G)$  en todos los casos en que  $G$  sea grupo abeliano-finito.

Si  $G$  es el grupo trivial,  $L(G)$  es el retículo trivial y según el lema 9 es  $A(G) = (dp)(L(G)) = 0$ . En adelante prescindiremos de este caso de modo que donde se diga “grupo abeliano” deberá entenderse “grupo abeliano-finito no trivial”.

**TEOREMA 4.** — Si el orden de un grupo abeliano  $G$  es, descompuesto en producto de factores primos,  $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ , entonces es  $A(G) = 0$  siempre que sea  $r > 1$ .

En efecto, si es  $r > 1$ ,  $G$  es, según el lema 11, producto directo de dos o más grupos  $G_1, \dots, G_r$ , siendo  $G_i$  de orden  $p_i^{e_i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Los grupos  $G_i$  satisfacen evidentemente las condiciones del lema 12, de donde

$$L(G) = L(G_1) \times \dots \times L(G_r)$$

lo cual quiere decir que  $L(G)$  es reducible, y al serlo resulta, según el teorema 1:

$$A(G) = (d\mu)(L(G)) = 0 \quad \text{c. q. d.}$$

**TEOREMA 5.** — Si el orden de un grupo abeliano finito  $G$ , es una potencia de un número primo  $p$ , entonces es

$$A(G) = 1, \text{ si } G \text{ es cíclico}$$

$A(G) = (1 - p)(1 - p^2) \dots (1 - p^{s-1})$ , si  $G$  es producto directo de  $s$  grupos cíclicos ( $s > 1$ ) de órdenes  $p^{e_1}, \dots, p^{e_s}$ .

Si  $G$  es cíclico de orden  $p^e$ , siendo  $p$  número primo y  $e \geq 1$ , entonces según el lema 13,  $L(G)$  es isomorfo al retículo de los divisores de  $p^e$ , el cual es evidentemente una cadena de longitud  $e$ . Según el lema 9 será pues

$$A(L(G)) = (d\mu)(L(G)) = 1$$

Si  $G$  es producto directo de  $s$  grupos cíclicos ( $s \geq 1$ ) de órdenes  $p^{e_1}, \dots, p^{e_s}$ , para determinar el valor de  $A(G)$  nos convendrá recordar primero el teorema 2' según el cual, para el retículo  $L(G)$ , que satisface la condición de cadena de Jordan Dedekind (lema 16), se cumple

$$d\mu(L(G)) = (d\mu)(I, G), \quad 23-1$$

siendo  $I$  el subgrupo de Frattini de  $G$ .

Después, por ser  $[I, G]$  isomorfo a  $[G_0, U]$ , siendo  $G_0$  el subgrupo trivial y  $U$  el subgrupo unión de todos los subgrupos minimales de  $U$  (lema 18), será

$$(d\mu)(I, G) = (d\mu)(G_0, U) \quad 23-2$$

Finalmente, de 23-1 y 23-2 se desprende, teniendo en cuenta que  $[G_0, U]$  es lo mismo que  $L(U)$  y por tanto  $(d\mu)(G_0, U) = (d\mu)(L(U))$

$$(d\mu)(L(G)) = (d\mu)(L(U)) \quad 23-3$$

siendo  $U$  isomorfo al producto directo de  $s$  grupos cíclicos de orden  $p$  (lema 21). Nos bastará en definitiva estudiar la estructura de  $L(U)$  y de cada uno de los intervalos de  $L(U)$  de la forma  $[G_0, H]$ , siendo  $G_0$  el subgrupo trivial y  $H$  un subgrupo cualquiera de  $U$ . Cada uno de los subgrupos  $H$  es, según el lema 20, elementalmente abeliano de orden  $p^h$  ( $0 \leq h \leq s$ ), siendo por lo tanto isomorfos todos los subgrupos  $H$  del mismo orden y en consecuencia isomorfos también los correspondientes intervalos  $[G_0, H]$ .

Consideremos la función  $\psi$  definida en el conjunto de los intervalos de  $L(U)$  de la forma  $[G_0, H]$  poniendo:

$$\psi(G_0, G_0) = 0.$$

$$\psi(G_0, H) = 1, \text{ si } H \text{ es un subgrupo de orden } p.$$

$$\psi(G_0, H) = (1 - p) \dots (1 - p^{h-1}), \text{ si } H \text{ es de orden } p^h \text{ con } h > 1$$

Según el lema 4, quedará demostrado que  $\psi$  es la restricción de  $d\mu$  al conjunto de los intervalos  $[G_0, H]$  si probamos que para todo subgrupo  $H$  de  $U$  se verifica

$$\sum_{G_0 \subseteq X \subseteq H} \psi(G_0, X) = d(G_0, H) \quad 23-4$$

Esto se demostrará por inducción según el orden de  $H$ .

En general, si  $H_i$  es de orden  $p^i$ , es  $d(G_0, H_i) = i$ , según se deduce haciendo uso de los lemas 14 y 15. Llaremos  $S_h$  a la suma

$$\sum_{G_0 \subseteq X \subseteq H} \psi(G_0, X)$$

cuando  $H$  es de orden  $p^h$ . Se obtiene  $S_0$  poniendo  $H = G_0$  en 23-4 y entonces evidentemente es

$$S_0 = \psi(G_0, G_0) = 0 = d(G_0, G_0)$$

Si  $X = H_1$  es un subgrupo de  $H$  de orden  $p$ , es, por definición

$$\psi(G_0, H_1) = 1 \quad 23-5$$

Si  $X = H_i$  es de orden  $p^i$ , entonces, también por definición, es

$$\psi(G_0, H_i) = (1 - p) \dots (1 - p^{i-1}) \quad 23-6$$

Si  $H$  es de orden  $p^1 = p$ , en la suma

$$\sum_{G_0 \subseteq X \subseteq H} \psi(G_0, X),$$

$X$  puede ser solamente  $G_0$  o  $H$  y se obtiene

$$S_1 = \psi(G_0, G_0) + \psi(G_0, H) = 0 + 1 = 1.$$

Como también es  $d(G_0, H) = 1$ , vemos que se cumple 23-4 también en este caso.

Veamos ahora qué forma toma  $S_h$  cuando es  $h > 1$ . Teniendo en cuenta que todo subgrupo de  $H$  distinto de  $G_0$  es de uno de los órdenes  $p^1 = p$ ,  $p^2, \dots, p^h$ , se verifica:

$$S_h = N_{h,0} \psi(G_0, G_0) + N_{h,1} \psi(G_0, H_1) + \dots \\ \dots + N_{h,h-1} \psi(G_0, H_{h-1}) + N_{h,h} \psi(G_0, H).$$

Recordando el lema 19 y haciendo uso de 23-5 y 23-6, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 S_h &= 0 + \frac{1-p^h}{1-p} \cdot 1 + \frac{(1-p^h)(1-p^{h-1})}{(1-p)(1-p^2)}(1-p) + \\
 &\quad + \frac{(1-p^h)(1-p^{h-1})(1-p^{h-2})}{(1-p)(1-p^2)(1-p^3)}(1-p)(1-p^2) + \dots \\
 \dots &+ \frac{(1-p^h)(1-p^{h-1}) \dots (1-p^2)}{(1-p)(1-p^2) \dots (1-p^{h-2})(1-p^{h-1})}(1-p) \dots (1-p^{h-2}) + \\
 &\quad + \frac{(1-p^h)(1-p^{h-1}) \dots (1-p^2)(1-p)}{(1-p)(1-p^2) \dots (1-p^{h-1})(1-p^h)}(1-p) \dots (1-p^{h-1}) = \\
 &\quad = \frac{1-p^h}{1-p} + \frac{(1-p^h)(1-p^{h-1})}{1-p^2} + \dots \\
 \dots &+ \frac{(1-p^h)(1-p^{h-1}) \dots (1-p^2)(1-p)}{1-p} \tag{23-7}
 \end{aligned}$$

La suma  $S_h$  consta de  $h$  sumandos no nulos y cuando  $h \geq 2$  éstos son como se indica en 23-7.

Si hacemos  $h = 2$  comprobamos en seguida que es  $S_2 = 2 = d(G_0, H_2)$ .

Supongamos finalmente que hasta cierto valor de  $h \geq 2$  se ha comprobado que  $S_h = h$ . Nuestro teorema quedará demostrado si logramos ver que es también  $S_{h+1} = h + 1$ . Puesto que por hipótesis es  $S_h = h$ , bastará demostrar que es  $S_{h+1} - S_h = 1$ . Ahora bien  $S_{h+1}$  consta de  $h + 1$  términos, el último de los cuales es

$$\frac{(1-p^{h+1}) \dots (1-p)}{1-p^{h+1}} = (1-p) \dots (1-p^h).$$

Al restar  $S_h$  de  $S_{h+1}$ , los  $h$  términos de  $S_h$  se pueden agrupar uno a uno ordenadamente con los  $h$  primeros términos de  $S_{h+1}$  resultando:

$$\begin{aligned}
 S_{h+1} - S_h &= \frac{1-p^{h+1}}{1-p} - \frac{1-p^h}{1-p} + \frac{(1-p^{h+1})(1-p^h)}{1-p^2} - \frac{(1-p^h)(1-p^{h-1})}{1-p^2} + \dots \\
 \dots &+ \frac{(1-p^{h+1})(1-p^h) \dots (1-p^2)}{1-p^h} - \frac{(1-p^h)(1-p^{h-1}) \dots (1-p^2)(1-p)}{1-p^h} + \\
 &\quad + (1-p) \dots (1-p^h) = \frac{p^h - p^{h+1}}{1-p} + \frac{(1-p^h)(p^{h-1} - p^{h+1})}{1-p^2} + \dots \\
 \dots &+ \frac{(1-p^h) \dots (1-p^2)(p - p^{h+1})}{1-p^h} + (1-p) \dots (1-p^h) = p^h + (1-p^h)p^{h-1} + \\
 &\quad + (1-p^h)(1-p^{h-1})p^{h-2} + \dots + (1-p^h) \dots (1-p^2)p + (1-p) \dots (1-p^h)
 \end{aligned}$$

Invirtiendo el orden de los términos tenemos:

$$S_{h+1} - S_h = (1-p) \dots (1-p^h) + p(1-p^2) \dots (1-p^h) + p^2(1-p^3) \dots \\ \dots (1-p^h) + \dots + p^{h-2}(1-p^{h-1})(1-p^h) + p^{h-1}(1-p^h) + p^h$$

Escruta de este modo la diferencia  $S_{h+1} - S_h$  pongamos:

$$I_0 = (1-p) \dots (1-p^h) \\ I_j = p^j(1-p^{j+1}) \dots (1-p^h) \quad (j = 1, \dots, h-1) \\ I_h = p^h,$$

con lo que resulta

$$S_{h+1} - S_h = \sum_{j=0}^{j=h} I_j$$

Al realizar el desarrollo de  $S_{h+1} - S_h$  dejando indicados los productos, los términos que se obtienen son, excepción hecha del término 1 procedente de  $I_0$ , de la forma

$$\pm p^{i_1} p^{i_2} \dots p^{i_s} \quad 23-8$$

siendo  $0 < s \leq h$  y  $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_s$ . Por otra parte, para cada conjunto de números naturales  $s, i_1, \dots, i_s$  que satisfagan estas últimas condiciones existen dos y solamente dos términos de la forma 23-8, uno obtenido de  $I_0$  y el otro de  $I_{i_1}$ . El obtenido de  $I_0$  es  $(-1)^s p^{i_1} p^{i_2} \dots p^{i_s}$ , mientras el obtenido de  $I_{i_1}$  es  $(-1)^{s-1} p^{i_1} p^{i_2} \dots p^{i_s}$ . Vemos así que todos los términos del desarrollo de  $S_{h+1} - S_h$  dependientes de  $p$  se anulan dos a dos, quedando finalmente

$$S_{h+1} - S_h = 1 \quad \text{c. q. d.}$$

Con esto hemos demostrado que la función  $\psi$  antes definida es efectivamente la función  $d\mu$  restringida al conjunto de los intervalos de la forma  $[G_0, H]$  de  $L(U)$ . Al aplicarla al intervalo  $[G_0, U] = L(U)$  obtenemos

$$(d\mu)(L(U)) = (1-p) \dots (1-p^{s-1}).$$

Finalmente, por ser según antes se ha dicho,  $(d\mu)(L(G)) = (d\mu)(L(U))$ , resulta

$$A(G) = (d\mu)(L(G)) = (1-p) \dots (1-p^{s-1}),$$

con lo que queda demostrado el teorema 5.

De los teoremas 4 y 5 se deduce

**COROLARIO.** — Para todo grupo abeliano  $G$  es  $A(G) \neq 0$  si y sólo si el orden de  $G$  es potencia de un número primo.

LA FUNCIÓN  $A$  EN LOS GRUPOS FINITOS (ABELIANOS O NO)

El conocimiento que se tiene de los grupos abelianos nos ha permitido obtener para éstos el valor  $A(G)$  en todos los casos que pueden presentarse. La enorme multiplicidad existente de grupos finitos no abelianos hace imposible dar una regla sistemática para obtener el valor de  $A(G)$  para un grupo finito  $G$ . Daremos, sin embargo, dos teoremas, válidos tanto si  $G$  es abeliano como si no lo es.

**TEOREMA 6.** — Si un grupo finito  $G$  es de orden  $p^e$  ( $p$  número primo,  $e > 0$ ) y para cada número natural  $h$ , igual o menor que  $e$ , llamamos  $n_h$  al número de subgrupos normales  $H_h$  de  $G$ , tales que el orden de  $H_h$  sea  $p^h$  y el grupo cociente  $G/H_h$  sea elementalmente abeliano, se verifica:

$$A(G) = \sum_{h=1}^e h n_h p^{(e-h)(e-h-1)/2}$$

Demostración: Por definición es

$$A(G) = (d\mu)(L(G)) = \sum_{G_0 \subseteq X \subseteq G} d(G_0, X) \mu(X, G),$$

siendo  $G_0$  el subgrupo trivial de  $G$ .

De los lemas 14 y 15 se deduce que es  $d(G_0, X) = h$  si y sólo si  $X$  es de orden  $p^h$ . Del lema 22 se deduce que  $\mu(X, G)$  es 0 si  $X$  no es subgrupo normal de  $G$  o bien siéndolo, el grupo cociente  $G/X$  no es elementalmente abeliano. Asociando en la suma

$$\sum_{G_0 \subseteq X \subseteq G} d(G_0, X) \mu(X, G)$$

aquellos términos  $d(G_0, X) \mu(X, G)$  para los cuales es  $d(G_0, X) = h$ , ( $h = 1, \dots, e$ ) se tiene, al aplicar el lema 22

$$A(G) = \sum_{h=1}^e h n_h p^{(e-h)(e-h-1)/2} \quad \text{c. q. d.}$$

**TEOREMA 7.** — Si el orden de un grupo finito  $G$  es divisible por dos números primos distintos y  $G$  es además tal que todo subgrupo propio  $H$  de  $G$  está contenido en sentido estricto en su normalizador  $N_H$  en  $G$ , entonces es  $A(G) = 0$ .

Demostración: Según el lema 24, el grupo  $G$  es isomorfo al producto directo de sus subgrupos de Sylow y según el lema 23,  $L(G)$  es reducible. El teorema 1, si se quiere el 1', nos dice entonces que es  $A(G) = 0$ .

## CAPITULO II

### LA FUNCION A EN LOS CUERPOS FINITOS

25

#### ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS CUERPOS FINITOS

Conviene recordar aquí algunas propiedades de los cuerpos finitos, cuya demostración puede encontrarse en cualquier tratado de Algebra Moderna (véase p. ej. VAN DER WAERDEN [23] o SEGRE [20]). Las que más interesa destacar son las siguientes:

- 1) Todo hemicuerpo finito es un cuerpo.
- 2) El orden de todo cuerpo finito es  $p^n$ , siendo  $p$  un número primo y  $n$  un entero positivo.
- 3) Para todo número primo  $p$  y todo entero positivo  $n$ , existe por lo menos un cuerpo con  $p^n$  elementos.
- 4) Dos cuerpos finitos con el mismo número de elementos son siempre isomorfos.
- 5) El grupo multiplicativo de todo cuerpo finito de orden  $p^n$  es un grupo cíclico de orden  $p^n - 1$ .
- 6) Para todo cuerpo  $C$  de orden  $p^n$  existe un subcuerpo y sólo uno de orden  $p^m$  si  $m$  es un divisor de  $n$  y todo subcuerpo de  $C$  es de orden  $p^m$  para cierto divisor  $m$  de  $n$ .
- 7) Si  $C_1$  y  $C_2$  son ambos subcuerpos de un cuerpo  $C$  de orden  $p^n$ , siendo los órdenes de  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente  $p^{d_1}$  y  $p^{d_2}$  ( $d_1$  y  $d_2$  tienen que ser según 6) divisores de  $n$ ), entonces  $C_1$  es subcuerpo de  $C_2$ , si y sólo si  $d_1$  es divisor de  $d_2$ .

Esta última propiedad podemos enunciarla como sigue:

LEMA 25. — *Para todo cuerpo finito de orden  $p^n$ , el retículo  $L(C)$  es isomorfo al retículo  $D_n$  de los divisores de  $n$ .*

DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN A.

Del lema 25 se desprende el siguiente teorema que determina totalmente el valor de la función  $A$  en todo cuerpo finito.

TEOREMA 8. — *Si  $C$  es un cuerpo finito de orden  $p^n$  ( $n > 0$ ), entonces es:*

$A(C) = 1$ , si es  $n = q^r$  ( $q$  número primo,  $r > 0$ ).

$A(C) = 0$ , en los demás casos.

En efecto, el lema 25 nos dice que es

$$L(C) \simeq D_n.$$

Según la definición de la función  $A$  es

$$A(C) = (d\mu)(L(C)) = (d\mu)(D_n).$$

Finalmente, el teorema 3 nos dice que  $(d\mu)(D_n)$  toma el valor de 1 o el valor 0 según que  $n$  sea o no potencia de un número primo.

## CAPITULO III

PARTICIONES GENERALIZADAS Y MULTIALGEBRAS DERIVADAS  
DE LAS MISMAS

27

DEFINICIÓN DE PARTICIÓN DE TIPO  $n$  DE UN CONJUNTO  $S$ 

JURIS HARTMANIS da la siguiente definición de *partición de tipo  $n$*  de un conjunto  $S$  (véase [16], pág. 23):

"*Partición de tipo  $n$*  ( $n \geq 1$ ) de un conjunto  $S$  con  $n$  o más elementos es un sistema de subconjuntos de  $S$  tal que  $n$  elementos distintos cualesquier de  $S$  están contenidos en uno y sólo uno de los subconjuntos, y cada subconjunto contiene por lo menos  $n$  elementos distintos".

Una partición de tipo 1 de  $S$  no es, según la definición que precede, más que una partición de  $S$  en el sentido ordinario (familia de partes disjuntas de  $S$  cuya unión es  $S$ ).

Definida una partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de  $S$  como sistema de subconjuntos de  $S$ , cada uno de estos subconjuntos recibe el nombre de *bloque* de  $\mathfrak{M}$ . Un bloque  $M$  de una partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de  $S$  será llamado *trivial* si el número de elementos distintos de  $M$  es exactamente  $n$  ( $\bar{M} = n$ ) y no trivial si es  $\bar{M} > n$ . (v. nota 3).

En el conjunto de las particiones de tipo  $n$  de  $S$  se define una ordenación  $\subseteq_p$  poniendo, para dos de ellas cualesquier  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$ :

$\mathfrak{M} \subseteq_p \mathfrak{N} \Leftrightarrow$  todo bloque de  $\mathfrak{M}$  está contenido en un bloque de  $\mathfrak{N}$  (véase nota 12).

Demuestra Hartmanis que, respecto a la ordenación así definida, las particiones de tipo  $n$  de  $S$  constituyen un retículo, al cual nosotros, lo mismo que él, designaremos por  $LP_n(S)$ . Siempre que entre dos particiones  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  de tipo  $n$  de  $S$  se cumpla la relación  $\mathfrak{M} \subseteq_p \mathfrak{N}$  diremos que  $\mathfrak{M}$  es más fina que  $\mathfrak{N}$  o bien que  $\mathfrak{N}$  es más basta que  $\mathfrak{M}$ . Si es  $\mathfrak{M} \subseteq_p \mathfrak{N}$  y  $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}$  escribiremos  $\mathfrak{M} \subset_p \mathfrak{N}$  y si es  $\mathfrak{M} \subseteq_p \mathfrak{N}$  y no existe ninguna partición  $\mathfrak{Q}$  de tipo  $n$  tal que  $\mathfrak{M} \subset_p \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}$  escribiremos  $\mathfrak{M} \{\}_p \mathfrak{N}$ .

Hasta aquí las particiones de tipo  $n$  se han definido solamente para  $n \geq 1$  de modo que  $LP_0(S)$  carece por el momento de sentido. Por otra parte, cualquiera que sea  $n \geq 1$ , si el conjunto  $S$  tiene menos de  $n$  elementos, el conjunto de las particiones de tipo  $n$  de  $S$  es vacío. Resulta conveniente sin embargo que, cualesquier que sean el entero  $n \geq 0$  y el conjunto  $S$ , el

símbolo  $LP_n(S)$  represente siempre un retículo no vacío. A este respecto dice Hartmanis textualmente (loc. cit.): "Para simplificar los enunciados de los teoremas convendremos en primer lugar en definir  $LP_n(S)$  como constituido por un elemento único si  $S$  contiene menos de  $n$  elementos; en segundo lugar  $LP_0(S)$  denotará el álgebra de Boole de todos los subconjuntos de  $S$ ". Estos dos convenios resultarán superfluos si introducimos un ligero cambio en la definición de partición de tipo  $n$  de la siguiente manera:

*Definición:* Sea  $S$  un conjunto cualquiera y  $\mathfrak{M}$  un sistema de partes de  $S$  que puede ser vacío. Cada una de las partes  $M$  será llamada *bloque* de  $\mathfrak{M}$ . Sea además  $n$  un entero no negativo cualquiera. El sistema  $\mathfrak{M}$  será llamado partición de tipo  $n$  de  $S$  si y sólo si satisface las condiciones siguientes:

$P_n$  — 1. Todo subconjunto  $Q$  de  $S$  que contenga exactamente  $n$  elementos está contenido en un bloque por lo menos de  $\mathfrak{M}$ .

$P_n$  — 2. Todo subconjunto  $Q$  de  $S$  que contenga exactamente  $n$  elementos está contenido en un bloque a lo sumo de  $\mathfrak{M}$ .

$P_n$  — 3. Todo bloque de  $\mathfrak{M}$  contiene por lo menos  $n$  elementos.

Esta es la definición de partición de tipo  $n$  que adoptamos a partir de ahora. Es inmediato ver que para  $n \geq 1$  y para  $\bar{S} > n$  es equivalente a la de Hartmanis y que en todo caso sigue teniendo sentido la ordenación  $\subseteq_p$  introducida por Hartmanis (el símbolo  $\subseteq_p$  no es de Hartmanis sino que lo utilizamos nosotros por conveniencias prácticas de nuestra exposición).

A las particiones de tipo  $n$  las llamaremos en general *particiones generalizadas*. Por "partición" de un conjunto  $S$  se entenderá, mientras no se especifique otra cosa, *partición de tipo  $n$  de  $S$*  para cierto entero no negativo  $n$ . Para denotar una partición  $\mathfrak{M}$  escribiremos  $\mathfrak{M} = \{M_\lambda\} (\lambda \in \Lambda)$ , quedando así denotados los bloques de  $\mathfrak{M}$  mediante un cierto conjunto  $\Lambda$  de índices. Si  $\mathfrak{M}$  tiene un número finito  $k$  de bloques y es  $k \geq 1$  (lo cual ocurrirá siempre que el conjunto  $S$  sea finito y  $\bar{S} \geq n$ ), escribiremos

$$\mathfrak{M} = \{M_1, \dots, M_k\}$$

De nuestra definición se desprenden los siguientes lemas, válidos para cualquier conjunto  $S$  y cualquier entero  $n \geq 0$ .

**LEMA 26.** — *Un sistema  $\mathfrak{M}$  de subconjuntos de  $S$  es una partición de tipo 0 de  $S$  si y sólo si  $\mathfrak{M}$  está constituido por un subconjunto y sólo por uno.*

*Demostración:* Si es  $\mathfrak{M} = \{M\}$ , siendo  $M$  un subconjunto cualquiera (vacío o no vacío, propio o impropio) de  $S$ , entonces  $\mathfrak{M}$  satisface  $P_0$  — 1,  $P_0$  — 2 y  $P_0$  — 3. En efecto:

$P_0$  — 1 se cumple puesto que la parte vacía  $\emptyset$  de  $S$  es el único subconjunto de  $S$  con 0 elementos y es  $\emptyset \subseteq M$  cualquiera que sea  $M$ .

$P_0$  — 2 se cumple puesto que  $\mathfrak{M}$  no contiene más que un bloque.

$P_0$  — 3 se cumple puesto que  $M$  contiene por lo menos 0 elementos.

Si por el contrario  $\mathcal{M}$  es una parte de  $\mathcal{L}(S)$  no constituida por un subconjunto de  $S$  pueden ocurrir dos casos, a saber: que  $\mathcal{M}$  sea la parte vacía de  $\mathcal{L}(S)$  o que  $\mathcal{M}$  esté constituido por más de un subconjunto de  $S$ . Si  $\mathcal{M}$  es la parte vacía de  $\mathcal{L}(S)$  deja de cumplirse la condición  $P_0 = 1$  (la parte vacía de  $S$  es un subconjunto formado por 0 elementos que no está contenido en ningún bloque de  $\mathcal{M}$ , puesto que en este caso  $\mathcal{M}$  carece de bloques). Si  $\mathcal{M}$  consta de dos o más bloques, deja de cumplirse evidentemente la condición  $P_0 = 2$ .

Consecuencia de este lema es que el retículo  $LP_0(S)$  es ni más ni menos que el álgebra de Boole  $\mathcal{L}(S)$  en concordancia con lo admitido por Hartmanis como convenio.

**LEMA 27.** — *Si un conjunto  $S$  tiene menos de  $n$  elementos ( $\bar{S} < n$ ) existe una y sólo una partición de tipo  $n$  de  $S$ , la cual está constituida por la parte vacía  $\emptyset_{P(S)}$  de  $\mathcal{L}(S)$ .*

Demostración: Si  $S$  tiene menos de  $n$  elementos, no existe ningún subconjunto  $Q$  de  $S$  con  $n$  elementos y por lo tanto  $\emptyset_{P(S)}$  (en fin de cuentas cualquier sistema de subconjuntos de  $S$ ) satisface trivialmente  $P_n = 1$  y  $P_n = 2$ .  $P_n = 3$  es también satisfecha por  $\emptyset_{P(S)}$  puesto que este sistema carece de bloques.

Cualquier sistema de subconjuntos de  $S$  distinto de  $\emptyset_{P(S)}$  deja de satisfacer  $P_n = 3$  porque un tal sistema ha de contener por lo menos un bloque, el cual no puede contener  $n$  o más elementos de  $S$  desde el momento en que  $S$  tiene menos de  $n$  elementos.

Según este lema, el convenio de Hartmanis de considerar que, en el caso de ser  $\bar{S} < n$ ,  $LP_n(S)$  es un retículo constituido por un elemento único, pasa a ser una consecuencia necesaria de nuestra definición.

**LEMA 28.** — *Si un conjunto  $S$  tiene  $n$  o más elementos, toda partición de tipo  $n$  de  $S$  contiene por lo menos un bloque.*

**LEMA 29.** — *Si un conjunto  $S$  tiene  $n$  o más elementos, la partición de tipo  $n$  de  $S$  más fina es la que tiene como bloques los subconjuntos de  $S$  formados por  $n$  elementos y la más basta es la que tiene como único bloque el mismo conjunto  $S$ . Las dos coinciden si y sólo si  $S$  tiene exactamente  $n$  elementos.*

**LEMA 30.** — *Si  $S$  es un conjunto con  $n$  o más elementos y  $\mathcal{M}$  es una partición de tipo  $n$  de  $S$ , entonces:*

*Todo subconjunto  $T$  de  $S$  con  $n$  o menos de  $n$  elementos está contenido por lo menos en un bloque de  $\mathcal{M}$ .*

*Todo subconjunto  $U$  de  $S$  con  $n$  o más elementos está contenido a lo sumo en un bloque de  $\mathcal{M}$ .*

La demostración de los lemas 28, 29 y 30 es inmediata a partir de los axiomas  $P_n = 1$ ,  $P_n = 2$  y  $P_n = 3$ . De los lemas 27 y 28 se desprende que para que la parte vacía de  $\mathcal{L}(S)$  constituya una partición de tipo  $n$  de  $S$  es necesario y suficiente que sea  $\bar{S} < n$ .

**LEMA 31.** — *Dos particiones  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  de tipo  $n$  son iguales si y sólo si lo son los sistemas  $\mathfrak{M}'$  y  $\mathfrak{N}'$  formados respectivamente por los bloques no triviales de  $\mathfrak{M}$  y por los bloques no triviales de  $\mathfrak{N}$ .*

Demostración: Si  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ , entonces evidentemente  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}'$ . Supongamos ahora que es  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}'$ , lo cual quiere decir que  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  coinciden en los bloques no triviales. Para demostrar que es  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$  bastará comprobar que  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  coinciden también en sus bloques triviales, pero esto es una consecuencia inmediata de las condiciones  $P_n - 1$  y  $P_n - 2$ . De ellas se desprende en efecto que un conjunto  $Q$  de  $n$  elementos es un bloque (trivial) de  $\mathfrak{M}$  (de  $\mathfrak{N}$ ) si y sólo si no está contenido en ninguno de los bloques de  $\mathfrak{M}$  (de  $\mathfrak{N}$ ).

**LEMA 32.** — *Si  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  son particiones de tipo  $n$  de un conjunto  $S$  y es  $\mathfrak{N} = \{N_\lambda\} (\lambda \in \Lambda)$ , entonces  $\mathfrak{M}$  es más fina que  $\mathfrak{N}$  ( $\mathfrak{M} \subseteq_p \mathfrak{N}$ ) si y sólo si es posible hacer una partición de los bloques de  $\mathfrak{M}$  en clases disjuntas  $\mathfrak{M}_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ , de tal manera que para cada  $\lambda \in \Lambda$  el bloque  $N_\lambda$  de  $\mathfrak{N}$  sea unión de todos los bloques de la clase  $\mathfrak{M}_\lambda$ .*

Lo dicho equivale a demostrar que si es  $\mathfrak{M} \subseteq_p \mathfrak{N}$  entonces:

- 1) Todo bloque de  $\mathfrak{M}$  está contenido en un bloque y sólo en uno de  $\mathfrak{N}$ .
- 2) Todo bloque de  $\mathfrak{N}$  es unión de bloques de  $\mathfrak{M}$ .

Lo primero es una consecuencia de la definición de  $\subseteq_p$  y del lema 30. Lo segundo equivale a demostrar que todo elemento  $a$  de un bloque  $N$  de  $\mathfrak{N}$  pertenece por lo menos a un bloque  $M$  de  $\mathfrak{M}$  totalmente incluido en  $N$ . Para ver que esto es así, basta considerar un conjunto  $T$  de  $n$  elementos formado por  $a$  y otros  $n - 1$  elementos cualesquiera de  $N$ .  $T$  está contenido, según  $P_n - 1$  en un bloque  $N'$  de  $\mathfrak{N}$ . Ahora bien,  $N'$  no puede ser distinto de  $N$ , pues si fuera  $M \subseteq N' \neq N$ , el conjunto  $T$  de  $n$  elementos, estaría contenido a la vez en  $N$  y en  $N'$ , contrariamente a lo que exige la condición  $P_n - 2$ .

Según este lema, si es  $\mathfrak{M} \subseteq_p \mathfrak{N}$  y  $\mathfrak{N} = \{N_\lambda\} (\lambda \in \Lambda)$ , se podrá poner:

$$\mathfrak{M} = \{M_{\lambda\mu}\}$$

donde  $\lambda$  recorre el conjunto  $\Lambda$  y para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\mu$  recorre un conjunto  $I_\lambda$  de índices que depende de  $\lambda$ . Para cada  $\lambda \in \Lambda$  es además  $N_\lambda = \bigcup_{\mu \in I_\lambda} M_{\lambda\mu}$ .

Aplicando este lema al caso de ser  $S$  un conjunto finito, se podrá poner, si es  $\mathfrak{M} \subseteq_p \mathfrak{N}$ :

$$\mathfrak{N} = \{N_1, \dots, N_s\}$$

$$\mathfrak{M} = \{M_{11}, \dots, M_{1r(1)}, \dots, M_{s1}, \dots, M_{sr(s)}\}$$

$$N_i = \bigcup_{j=1}^{r(i)} M_{ij}, (r(i) \geq 1, i = 1, \dots, s)$$

**LEMA 33.** — *Si  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  son particiones de tipo  $n$  de un conjunto finito  $S$  y es  $\mathfrak{M} \subseteq_p \mathfrak{N}$ , existe un bloque y sólo uno  $N$  de  $\mathfrak{N}$  que es unión de más de un bloque de  $\mathfrak{M}$  y el sistema de los bloques de  $\mathfrak{N}$  distintos de  $N$  coincide con el de los bloques de  $\mathfrak{M}$  no contenidos en  $N$ .*

En efecto: Al ser  $\mathfrak{M} \setminus_p \mathfrak{N}$  es  $\mathfrak{M} \subset_p \mathfrak{N}$  y podemos poner, según el lema anterior

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} &= \{N_1, \dots, N_s\} \\ \mathfrak{M} &= \{M_{11}, \dots, M_{1r(1)}, \dots, M_{s1}, \dots, M_{sr(s)}\} \\ N_i &= \bigcup_{j=1}^{r(i)} M_{ij}, (r(i) \geq 1, i = 1, \dots, s)\end{aligned}$$

Si para cada  $i = 1, \dots, s$  fuese  $r(i) = 1$ , sería evidentemente  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ . Si por el contrario fuese  $r(i) \geq 2$ ,  $r(j) \geq 2$  para dos índices distintos  $i, j$ , permutando de modo conveniente estos índices conseguiríamos que fuese precisamente  $r(1) \geq 2$ ,  $r(2) \geq 2$  y entonces sería

$$\mathfrak{M} = \{M_{11}, \dots, M_{1r(1)}, M_{21}, \dots, M_{2r(2)}, \dots, M_{s1}, \dots, M_{sr(s)}\}$$

La familia de subconjuntos de  $S$

$$\mathfrak{N}_1 = \{N_1, M_{21}, \dots, M_{2r(2)}, \dots, M_{s1}, \dots, M_{sr(s)}\}$$

sería, como fácilmente puede comprobarse, una partición de tipo  $n$  estrictamente comprendida entre  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  ( $\mathfrak{M} \subset_p \mathfrak{N}_1 \subset_p \mathfrak{N}$ ), con lo cual ya no sería  $\mathfrak{M} \setminus_p \mathfrak{N}$ . Para que sea  $\mathfrak{M} \setminus_p \mathfrak{N}$  es pues necesario (aunque no suficiente) que sea  $r(i) \geq 2$  para uno y sólo uno de los índices  $i = 1, \dots, s$ . Podemos suponer, cambiando si es preciso el orden de los bloques, que esto sea para  $i = 1$  y de este modo se tiene

$$\mathfrak{M} = \{M_{11}, \dots, M_{1r(1)}, N_2, \dots, N_s\}.$$

Como consecuencia de este lema, si es  $\mathfrak{M} \setminus_p \mathfrak{N}$  podemos poner, simplificando la notación.

$$\mathfrak{N} = \{N_1, \dots, N_s\} \quad (s \geq 1) \quad 27-1$$

$$\mathfrak{M} = \{M_1, \dots, M_k, N_2, \dots, N_s\} \quad (k \geq 2) \quad 27-2$$

$$N_1 = \bigcup_{j=1}^{j=k} M_j. \quad 27-3$$

LEMA 34. — Si  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  son particiones de tipo  $n$  de un conjunto finito  $S$  y es  $\mathfrak{M} \setminus_p \mathfrak{N}$  entonces es posible expresar  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  tal como se indica en 27-1 y 27-2 (véase el lema anterior), de manera que, además de satisfacerse 27-3, se cumpla

$$\overline{M_1 \cap M_2} = n - 1. \quad 27-4$$

$$\overline{(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i) \cap M_{i+1}} \geq n \quad (i = 2, \dots, k - 1) \quad 27-5$$

Veamos en efecto, como es posible ir eligiendo los bloques  $M_1, M_2, \dots, M_k$  de  $\mathfrak{M}$ , contenidos en un mismo bloque  $N_1$  de  $\mathfrak{N}$  (véase el lema anterior) de modo que se satisfagan las igualdades 27-3, 27-4 y 27-5. Empezaremos eligiendo uno cualquiera de tales bloques, al que designaremos por  $M_1$ . Por ser  $M_1 \subset N_1$ , deberá exirtir un elemento  $x$  de  $N_1$  que no pertenezca a  $M_1$ . Con  $n - 1$  elementos cualesquiera de  $M_1$  y con el elemento  $x$  construimos un conjunto  $T$  de  $n$  elementos que, por no estar contenido en  $M_1$ , deberá

estar contenido en otro bloque  $B$  de  $\mathfrak{N}$  (según  $P_n = 1$ ). El bloque  $B$  debe estar también contenido en  $N_1$ , pues de lo contrario, según el lema anterior,  $B$  coincidiría con uno de los bloques  $N_2, \dots, N_s$  de  $\mathfrak{N}$  distintos de  $N_1$  y tendríamos el absurdo de que  $T$ , contenido en  $N_1$  por construcción, estaría también contenido en otro bloque  $N_i$  ( $i \neq 1$ ) de  $\mathfrak{N}$  contra lo que exige la condición  $P_n = 2$ .  $B$  será pues un bloque de  $\mathfrak{N}$  distinto de  $M_1$  pero contenido también como éste en  $N_1$ , por lo cual podemos poner  $B = M_2$ . Con esto ya tenemos dos bloques  $M_1$  y  $M_2$  que satisfacen 27-4. Para ver que se pueden ir eligiendo sucesivamente los demás bloques,  $M_3, \dots, M_k$  de  $\mathfrak{N}$  contenidos en  $N_1$ , de tal manera que se satisfaga 27-5, basta evidentemente demostrar que si es  $\mathfrak{N} \setminus_p \mathfrak{N}$ , dados los bloques  $M_1, M_2, \dots, M_i$  de  $\mathfrak{N}$  ( $i \geq 2$ ), contenidos en un mismo bloque  $N_1$  de  $\mathfrak{N}$ , si todavía quedan más bloques en  $\mathfrak{N}$  contenidos en  $N_1$ , uno de ellos por lo menos, que podremos designar por  $M_{i+1}$  satisface 27-5. En efecto, lo contrario significaría que, designando en un orden cualquiera estos bloques por  $M_{i+1}, \dots, M_k$  podríamos formar una familia

$$M_1 = \{ \bigcup_{j=1}^i M_j, M_{i+1}, \dots, M_k, N_2, \dots, N_s \}$$

que sería una partición de tipo  $n$  distinta de  $\mathfrak{N}$  y de  $\mathfrak{N}$ , y tal que

$$\mathfrak{N} \subset_p \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}$$

contrariamente a la hipótesis de ser  $\mathfrak{N} \setminus_p \mathfrak{N}$ .

## 28

## RELACIONES DE EQUIVALENCIA GENERALIZADAS Y MULTIÁLGEBRAS DE HARTMANÍS

Es sabido que de una partición  $\mathfrak{N}$  de tipo 1 ("partición" en el sentido ordinario) de un conjunto  $S$  se deriva una relación binaria  $\Theta(\mathfrak{N})$  en  $S$  poniendo

$\langle a_1, a_2 \rangle \in \Theta(\mathfrak{N}) \Leftrightarrow a_1$  y  $a_2$  pertenecen a la misma clase de la partición  $\mathfrak{N}$ ,

y que designando por  $x, y, z$  elementos cualesquiera de  $S$ , la relación  $\Theta(\mathfrak{N})$  posee las propiedades

Reflexiva:  $\langle x, x \rangle \in \Theta(\mathfrak{N})$

Simétrica:  $\langle x, y \rangle \in \Theta(\mathfrak{N}) \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \Theta(\mathfrak{N})$

Transitiva:  $\langle x, y \rangle \in \Theta(\mathfrak{N}) \wedge \langle y, z \rangle \in \Theta(\mathfrak{N}) \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \Theta(\mathfrak{N})$

Las relaciones binarias en  $S$  que poseen estas tres propiedades son las llamadas relaciones de equivalencia en  $S$  y es también sabido que la aplicación  $\mathfrak{N} \rightarrow \Theta(\mathfrak{N})$  del conjunto de las particiones de  $S$  en el de las relaciones de equivalencia en  $S$  es biunívoca y reversible, de modo que los dos conjuntos son coordinables.

En un trabajo anterior ([8]) hemos dado una generalización para relaciones  $(n + 1)$ -arias ( $n \geq 0$ ) de las propiedades reflexivas, simétrica y trans-

sitiva, definiendo como sigue para una relación  $(n + 1)$ -aria  $\Theta$  las propiedades  $R_{n+1}$ ,  $S_{n+1}$  y  $T_{n+1}$  ( $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  designan elementos cualesquiera de  $S$ ).

$R_{n+1}$ :  $\langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle \in \Theta$  siempre que para dos índices distintos,  $i, j$  sea  $x_i = x_j$ .

$S_{n+1}$ :  $\langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle \in \Theta \Rightarrow \langle x_{\phi(1)}, \dots, x_{\phi(n)}, x_{\phi(n+1)} \rangle \in \Theta$  siendo  $\Phi$  una aplicación biunívoca y reversible cualquiera del conjunto de índices  $\langle 1, \dots, n, n + 1 \rangle$  sobre sí mismo.

$T_{n+1}$ :  $(\langle x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle \in \Theta \wedge \langle x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, x \rangle \in \Theta \wedge \wedge i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j (i, j = 2, \dots, n + 1)) \Rightarrow \langle x_1, \dots, x_n, x \rangle \in \Theta$ .

A las propiedades  $R_{n+1}$ ,  $S_{n+1}$ ,  $T_{n+1}$  les hemos dado respectivamente los nombres de propiedad *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*, y hemos convenido que una relación  $(n + 1)$ -aria  $\Theta$  en un conjunto  $S$  es o no reflexiva, simétrica o transitiva según que posea o no las propiedades designadas con estos mismos nombres.

A una relación  $(n + 1)$ -aria reflexiva, simétrica y transitiva la hemos llamado *relación  $(n + 1)$ -aria de equivalencia* y se ve en seguida que con esta definición resultan sinónimos los términos "relación 2-aria (binaria) de equivalencia" y "relación de equivalencia" (sin más). Hemos demostrado en el trabajo de referencia que la conocida coordinación que se establece entre las particiones (de tipo  $I$ ) de un conjunto  $S$  y las relaciones (binarias) de equivalencia en  $S$  no es sino el caso particular para  $n = 1$  de la coordinación que, para cualquier  $n \geq 0$ , se puede establecer entre el conjunto de las particiones de tipo  $n$  de  $S$  y el de las relaciones  $(n + 1)$ -arias de equivalencia en  $S$ . La aplicación biunívoca y reversible del conjunto de las particiones de tipo  $n$  de  $S$  sobre el conjunto de las relaciones  $(n + 1)$ -arias de equivalencia en  $S$  es la que a cada partición  $\mathcal{M}$  de tipo  $n$  hace corresponder la relación  $(n + 1)$ -aria  $\Theta(\mathcal{M})$  caracterizada por contener una  $(n + 1)$ -tupla  $\langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle$  de  $S$  si y sólo si  $\mathcal{M}$  satisface una de las dos condiciones siguientes:

- 1)  $\mathcal{M}$  es la parte vacía de  $\mathcal{P}(S)$ .
- 2)  $\mathcal{M}$  contiene un bloque  $M$ , al cual pertenece cada uno de los elementos  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ .

Vimos también que la aplicación  $\mathcal{M} \rightarrow \Theta(\mathcal{M})$  del conjunto de las particiones de tipo  $n$  de  $S$  sobre el de las relaciones  $(n + 1)$ -arias de equivalencia en  $S$  se traducía en un isomorfismo del retículo  $LP_n(S)$  sobre el  $\cap$ -subretículo de  $\mathcal{P}(S^{n+1})$  constituido por subconjuntos especiales de  $S^{n+1}$  que son las dichas relaciones de equivalencia. Tenemos interés en presentar este último retículo como un retículo de submultiálgebras de una cierta multiálgebra de conjunto base  $S^{n+1}$  y para ello introduciremos como sigue en  $S^{n+1}$  una operación nularia  $r_n$ , una operación unaria  $s_n$  y una operación binaria  $t_n$ :

Toda operación nularia en un conjunto  $C$  es, según se dijo en la introducción, un subconjunto de  $C$ . Consecuentemente con esto, definimos la operación nularia  $r_n$  en  $S^{n+1}$  como el subconjunto de  $S^{n+1}$  al cual pertenece una  $(n + 1)$ -tupla  $\langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle$  si y sólo si existen dos índices distintos  $i, j$  tales que  $x_i = x_j$ .

La operación unaria  $s_n$  hará corresponder a cada  $(n+1)$ -tupla  $\langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle$  de  $S$  el conjunto  $s_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  de  $(n+1)$ -tuplas definido poniendo:

$$s_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \{ \langle x_{\phi(1)}, \dots, x_{\phi(n)}, x_{\phi(n+1)} \rangle \}_{\phi \in \Phi}$$

siendo  $\Phi$  el conjunto de todas las permutaciones de los  $n+1$  índices  $1, \dots, n, n+1$ .

La operación binaria  $t_n$  es la operación univalente (no uniforme) definida poniendo, para todo par ordenado

$$\ll \langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle, \langle y_1, \dots, y_n, y_{n+1} \rangle \gg$$

de  $(n+1)$ -tuplas:

$$t_n(\langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle, \langle y_1, \dots, y_n, y_{n+1} \rangle) = \langle x_1, \dots, x_n, y_{n+1} \rangle,$$

si y sólo si los elementos  $x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  son distintos entre sí dos a dos y además, para  $i = 1, \dots, n$  es  $y_i = x_{i+1}$ ,

$$t_n(\langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle, \langle y_1, \dots, y_n, y_{n+1} \rangle) = \emptyset,$$

en todos los demás casos.

Comparando estas definiciones con las que hemos dado de relación  $(n+1)$ -aria reflexiva, simétrica y transitiva, se echa de ver en seguida que un determinado subconjunto  $U$  de  $S^{n+1}$  es una relación  $(n+1)$ -aria de equivalencia si y sólo si  $U$  es cerrado respecto a  $r_n, s_n$  y  $t_n$ .

Con esto vemos que el retículo de las relaciones  $(n+1)$ -arias de equivalencia es  $S$  puede ser considerado como retículo de las submultiálgebras de la multiálgebra  $\{S^{n+1}; r_n, s_n, t_n\}$ . Si en vez de relaciones  $(n+1)$ -arias de equivalencia en  $S$  consideramos particiones de tipo  $n$  de  $S$  podemos decir que el retículo  $LP_n(S)$  es isomorfo al retículo  $L(\{S^{n+1}; r_n, s_n, t_n\})$ .

En este isomorfismo se corresponden mutuamente una partición  $\mathcal{M}$  de tipo  $n$  de  $S$  y una multiálgebra  $\{\Theta(\mathcal{M}); r'_n, s'_n, t'_n\}$  donde  $\Theta(\mathcal{M})$  es la relación  $(n+1)$ -aria de equivalencia correspondiente a  $\mathcal{M}$  y  $r'_n, s'_n, t'_n$  son las restricciones a  $\Theta(\mathcal{M})$  de  $r_n, s_n$  y  $t_n$  respectivamente. Para cada una de las multiálgebras  $\{\Theta(\mathcal{M}); r'_n, s'_n, t'_n\}$  que así se forman proponemos el nombre de *multiálgebra de Hartmanis* de tipo  $n$  sobre  $S$ , en atención al autor a quien se debe la introducción de las particiones generalizadas. Daremos que  $\{\Theta(\mathcal{M}); r'_n, s'_n, t'_n\}$  es la multiálgebra de Hartmanis engendrada por  $\mathcal{M}$  y para abreviar pondremos por definición  $H(\mathcal{M}) = \{\Theta(\mathcal{M}); r'_n, s'_n, t'_n\}$ .

El retículo  $L(H(\mathcal{M}))$  de submultiálgebras de  $H(\mathcal{M})$  es isomorfo al intervalo de  $LP_n(S)$  constituido por las particiones de tipo  $n$  más finas que  $\mathcal{M}$ , según resulta del isomorfismo (ya demostrado en nuestro trabajo de referencia) de  $LP_n(S)$  con el retículo de las relaciones  $(n+1)$ -arias de equivalencia. A la partición de tipo  $n$  de  $S$  más fina basta  $\{S\}$  (véase el lema 29) le corresponde la multiálgebra de Hartmanis de tipo  $n$   $H(\{S\})$  que designaremos abreviadamente por  $H(S, n)$ . Evidentemente es

$$L(H(S, n)) \simeq LP_n(S).$$

## HIPERGEOMETRÍAS

En la sección anterior hemos descrito una manera de asociar a cada partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de un conjunto  $S$ , una multiálgebra  $H(\mathfrak{M})$  cuyo conjunto base era un determinado subconjunto  $\Theta(\mathfrak{M})$  de  $S^{n+1}$  y cuyo retículo  $L(H(\mathfrak{M}))$  de submultiálgebras era isomorfo a un subretículo de  $LP_n(S)$ . Ahora vamos a asociar a cada partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de  $S$  una multiálgebra  $G(\mathfrak{M}) = \{S; r(\mathfrak{M})\}$  cuyo conjunto base va a ser  $S$  y cuya familia definidora va a consistir en una única operación  $r(\mathfrak{M})$  que será la operación  $n$ -aria cuyos valores  $r(\mathfrak{M})(x_1, \dots, x_n)$  para las distintas  $n$ -tuplas  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  vendrán determinados como sigue, en función de los bloques de la partición  $\mathfrak{M}$ :

$$r(\mathfrak{M})(x_1, \dots, x_n) = \emptyset, \text{ si para dos índices distintos } i, j \\ (i, j = 1, \dots, n) \text{ es } x_i = x_j. \quad 29-1$$

$$r(\mathfrak{M})(x_1, \dots, x_n) = M, \text{ si los elementos } x_1, \dots, x_n \text{ son distintos entre sí} \\ \text{dos a dos y } M \text{ es el bloque de } \mathfrak{M} \text{ que los contiene} \quad 29-2$$

Respecto a esta última definición conviene hacer notar que si el conjunto  $S$  tiene menos de  $n$  elementos (según los lemas 27 y 28 la parte vacía de  $\mathcal{L}(S)$  es en este caso la única partición de tipo  $n$  de  $S$ ) todas las  $n$ -tuplas de  $S$  tienen necesariamente componentes repetidas y por lo tanto es  $r(\mathfrak{M})(x_1, \dots, x_n) = \emptyset$ , según 29-1. Recordemos por otra parte que toda partición  $\mathfrak{M}$  de tipo 0 de  $S$  consta de un bloque único que puede ser una parte cualquiera  $T$  de  $S$  ( $\mathfrak{M} = \{T\}$ ). En este caso, al ser  $n = 0$ , no existe más  $n$ -tupla que la parte vacía  $\emptyset$  de  $S$  y por 29-2 es  $r(\mathfrak{M})(\emptyset) = T$ .

Una vez así definiida la operación  $n$ -aria  $r(\mathfrak{M})$  designaremos con el nombre de *hipergeometría de tipo  $n$  sobre  $S$*  a la multiálgebra  $G(\mathfrak{M}) = \{S; r(\mathfrak{M})\}$  que de ella resulta y diremos que  $G(\mathfrak{M})$  es la *hipergeometría engendrada por la partición  $\mathfrak{M}$* . A toda hipergeometría  $G(\mathfrak{M})$ , como multiálgebra que es, le corresponde un retículo  $L(G(\mathfrak{M}))$  de submultiálgebras, cada una de las cuales va a recibir el nombre de *subespacio* de  $G(\mathfrak{M})$ . Un subespacio de  $G(\mathfrak{M})$  es por lo tanto una multiálgebra que tiene por conjunto base un subconjunto  $T$  de  $S$  cerrado respecto a  $r(\mathfrak{M})$  y como operación única de la familia definidora, la restricción a  $T$  de  $r(\mathfrak{M})$ . El nombre de *subespacio* se da también por extensión al mismo conjunto cerrado  $T$ . El retículo  $L(G(\mathfrak{M}))$  será llamado en adelante retículo de subespacios de la hipergeometría  $G(\mathfrak{M})$ .

Los retículos  $L(G(\mathfrak{M}))$  que acabamos de definir para una partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de un conjunto  $S$ , siendo  $n$  un entero no negativo cualquiera, vienen a constituir una generalización de los *retículos de subespacios lineales de una geometría*, estudiados por Hartmanis. Este autor denominó "geometrías" a las particiones  $\mathfrak{M}$  de tipo 2, dando entonces el nombre de "puntos" a los elementos de  $S$  y el de "rectas" a cada uno de los bloques.

de  $\mathfrak{M}$ . En su trabajo "Lattice theory of generalized partitions" [15] define los subespacios lineales de  $\mathfrak{M}$ , para cada "geometría"  $\mathfrak{M}$  sobre  $S$ , como aquellos subconjuntos  $T$  de  $S$  que, junto con cada dos puntos distintos  $x_1, x_2$ , contienen todos los puntos pertenecientes a la recta determinada por ellos. Si nos fijamos en la definición que hemos dado de la operación  $n$ -aria  $r(\mathfrak{M})$  correspondiente a una partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de  $S$  y la aplicamos al caso  $n = 2$ , vemos en seguida que lo que Hartmanis denomina "subespacio lineal", no es sino un conjunto cerrado respecto a  $r(\mathfrak{M})$  y en consecuencia, su "retículo de subespacios lineales" corresponde en el caso  $n = 2$  a lo que nosotros, a imitación suya, hemos denominado de un modo general y para cualquier  $n \geq 0$  "retículo de subespacios" (el adjetivo "lineales" lo aplicaremos solamente en el caso  $n = 2$ ).

Una hipergeometría  $\{S; r(\mathfrak{M})\}$  se dirá que es *finita* si el conjunto  $S$  es finito.

Dado un subconjunto cualquiera  $U$  de  $S$ , existe un subconjunto y sólo uno  $U_M$ , cerrado (respecto a  $r(\mathfrak{M})$ ) que contiene  $U$  y está contenido en todo otro subconjunto que tenga estas propiedades ( $U_M$  es la intersección de todos los subconjuntos cerrados que contienen  $U$ ). Siguiendo la costumbre general en estos casos, diremos que la submultiálgebra  $\{U_M; r(\mathfrak{M})\}$  (o bien, abreviadamente, el conjunto  $U_M$ ) es el subespacio de  $G(\mathfrak{M})$  engendrado por  $U$ .

## 30

DESCRIPCIÓN DE LAS MULTIÁLGEBRAS DE HARTMANIS  
Y DE LAS HIPERGEOMETRÍAS FINITAS

Según lo dicho en las dos secciones anteriores, tanto las multiálgebras de Hartmanis como las hipergeometrías de tipo  $n$  sobre un conjunto  $S$  están en correspondencia biunívoca con las particiones de tipo  $n$  de  $S$ , por lo cual bastará definir una partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de  $S$  para que quede automáticamente definida la multiálgebra de Hartmanis  $H(\mathfrak{M})$  y la hipergeometría  $G(\mathfrak{M})$ .

Supongamos a partir de ahora que  $S$  es un conjunto finito, con lo cual, si  $\mathfrak{M}$  es una partición de tipo  $n$  de  $S$ , son finitas tanto  $H(\mathfrak{M})$  como  $G(\mathfrak{M})$ . Se puede comprobar que si  $\mathfrak{M}$  es una partición de tipo  $n$  de un conjunto  $S$  y  $S'$  es un conjunto equipotente a  $S$ , cada aplicación biunívoca  $\varphi$  de  $S$  sobre  $S'$ , aplicada a los bloques de  $\mathfrak{M}$  convertirá a  $\mathfrak{M}$  en una partición  $\mathfrak{M}'$  de tipo  $n$  de  $S'$ . Dos particiones  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}'$  de tipo  $n$  relacionadas de esta forma se dirá que son *isomorfas* (en particular puede ser  $S = S'$ , siendo entonces  $\varphi$  una aplicación biunívoca de  $S$  sobre sí mismo). Es fácil comprobar que si  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}'$  son isomorfas en este sentido, las multiálgebras  $H(\mathfrak{M})$  y  $H(\mathfrak{M}')$  por una parte, así como las  $G(\mathfrak{M})$  y  $G(\mathfrak{M}')$  por otra, son asimismo isomorfas según la definición dada en la sección 7 de isomorfismo de multiálgebras. Para definir por lo tanto una multiálgebra de Hartmanis abstracta o una hipergeometría abstracta bastará definir la partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  que las engendra, prescindiendo tanto de la natura-

leza como del orden en que vienen dados los elementos del conjunto  $S$  que sirve de base. En el caso de ser  $S$  finito con  $m$  elementos, toda partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de  $S$  podrá ser representada asignando primeramente un símbolo a cada uno de los elementos de  $S$  y después expresando mediante estos símbolos los bloques que constituyen  $\mathfrak{M}$ . Pueden utilizarse para este fin por ejemplo los mismos símbolos  $1, 2, \dots$ , con que se designan los  $m$  primeros números naturales. Así una de las particiones posibles de tipo 2 de un conjunto de 7 elementos, es la representada por

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 3, 4\}, \\ & \{2, 5, 7\}, \{3, 6, 7\}, \{4, 5, 6\} \end{aligned} \quad 30-1$$

También puede ser representada una partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de un conjunto  $S$  con  $m$  elementos, mediante una matriz de ceros y unos con  $m$  columnas y tantas filas como bloques tenga  $\mathfrak{M}$ . Una vez ordenados de un modo cualquiera los bloques de  $\mathfrak{M}$ , si éstos son por ejemplo  $M_1, \dots, M_r$  y los elementos de  $S$  son  $1, 2, \dots, m$ , la partición  $\mathfrak{M}$ , será representada por la matriz en cuya fila  $i$  y columna  $j$  ( $i = 1, \dots, r$ ;  $j = 1, \dots, m$ ) figurará un 1 ó un 0 según que el elemento  $j$  figure o no en el bloque  $M_i$ . La partición de tipo 2 que hemos dado antes como ejemplo (30-1) vendrá representada por la siguiente matriz:

1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0

Una vez obtenida de la forma indicada una representación, mediante una matriz de  $r$  filas y  $m$  columnas, de una partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  con  $r$  bloques, de un conjunto de  $m$  elementos, cualquier matriz derivada de ésta por permutación de las filas nos representará la misma partición, puesto que permutar las filas equivale a permutar los índices de los bloques. Si permutamos las columnas obtendremos la representación de una partición  $\mathfrak{M}'$  del mismo conjunto distinta de  $\mathfrak{M}$  pero isomorfa a  $\mathfrak{M}$ .

#### LA FUNCIÓN A EN LAS MULTIÁLGEBRAS DE HARTMANIS FINITAS Y EN LAS HIPERGEOMETRÍAS FINITAS

Hemos visto en las secciones anteriores de qué manera toda partición de tipo  $n$  de un conjunto  $S$  determina una multiálgebra de Hartmanis  $H(\mathfrak{M})$  y una hipergeometría finita  $G(\mathfrak{M})$ , ambas de tipo  $n$ , sobre  $S$ . Si queremos

hallar los valores de la función  $A$  para  $H(\mathcal{M})$  y para  $G(\mathcal{M})$  deberemos estudiar la estructura de los retículos  $L(H(\mathcal{M}))$  y  $L(G(\mathcal{M}))$  respectivamente. Según la definición que se ha dado de la función  $A$  será:

$$\begin{aligned}A(H(\mathcal{M})) &= (d\mu)(L(H(\mathcal{M}))) \\A(G(\mathcal{M})) &= (d\mu)(L(G(\mathcal{M})))\end{aligned}$$

En los capítulos IV y V nos ocuparemos de la determinación de los valores  $A(H(\mathcal{M}))$  y  $A(G(\mathcal{M}))$  respectivamente, cuando se dan elementos suficientes para caracterizar la partición  $\mathcal{M}$  de la manera indicada en la sección 30. Nos será útil simplificar la notación poniendo

$$\begin{aligned}L_H(\mathcal{M}) &= L(H(\mathcal{M})) \\L_G(\mathcal{M}) &= L(G(\mathcal{M})) \\A_H(\mathcal{M}) &= A(H(\mathcal{M})) \\A_G(\mathcal{M}) &= A(G(\mathcal{M}))\end{aligned}$$

Al utilizar esta notación simplificada, dejaremos de poner énfasis sobre el hecho, ya suficientemente destacado a lo largo del presente capítulo, de que  $L_G(\mathcal{M})$  y  $L_H(\mathcal{M})$  son retículos de submultialgebras y de que  $A_H(\mathcal{M})$  y  $A_G(\mathcal{M})$  son los valores de la función  $A$  para las multialgebras  $H(\mathcal{M})$  y  $G(\mathcal{M})$  respectivamente. Consideraremos preferentemente  $A_H(\mathcal{M})$  y  $A_G(\mathcal{M})$ , como funciones enteras de  $\mathcal{M}$ , siendo  $\mathcal{M}$  una partición generalizada de un conjunto finito  $S$ .

## CAPÍTULO IV

LA FUNCION  $A$  EN LAS MULTIALGEBRAS DE HARTMANIS FINITAS

32

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS RETÍCULOS  $LP_n(S)$  DE PARTICIONES GENERALIZADAS

De acuerdo con lo dicho en los últimos párrafos de la sección 31, determinar el valor  $A_H(\mathcal{M}) = A(H(\mathcal{M}))$  que toma la función  $A$  para la multialgebra de Hartmanis  $H(\mathcal{M})$ , engendrada por la partición  $\mathcal{M}$  de tipo  $n$  de un conjunto finto  $S$ , equivale a determinar el valor de la función  $d_\mu$  para el intervalo inicial de  $LP_n(S)$  constituido por las particiones de tipo  $n$  más finas que  $\mathcal{M}$  (llamamos *intervalo inicial* de un retículo a todo intervalo que tiene por extremo inferior el elemento mínimo). Para ello enunciaremos algunos lemas y un teorema referentes a la estructura de este intervalo inicial, que designaremos por  $L_H(\mathcal{M})$ .  $L_H(\mathcal{M})$  es un retículo puesto que  $LP_n(S)$  lo es.  $L_H(\mathcal{M})$  y  $LP_n(S)$  coinciden si y sólo si  $\mathcal{M}$  es la partición de tipo  $n$  de  $S$  más basta o, lo que es lo mismo, si y sólo si  $\mathcal{M} = \{S\}$ .

**LEMA 35.** — Si la partición  $\mathcal{M}$  de tipo  $n$  de un conjunto finto  $S$  tiene los  $r$  bloques  $M_1, \dots, M_r$  ( $r \geq 1$ , es decir si es  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_r\}$ , entonces el retículo  $L_H(\mathcal{M})$  es isomorfo al producto directo

$$LP_n(M_1) \times LP_n(M_2) \times \dots \times LP_n(M_r).$$

Basta probar en efecto que si para cada  $M_i$  elegimos una partición  $\mathcal{M}_i$  de tipo  $n$  de  $M_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ), la familia de subconjuntos de  $S$  formada por los bloques que pertenecen por lo menos a una de las particiones  $\mathcal{M}_i$ , es una partición de tipo  $n$  más fina que  $\mathcal{M}$ , y que viceversa, los bloques de toda partición de tipo  $n$  de  $S$  más fina que  $\mathcal{M}$  se pueden distribuir de una manera y sólo de una en  $r$  clases  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r$ , de tal modo que  $\mathcal{M}_i$  es una partición de tipo  $n$  de  $M_i$ .

**LEMA 36.** — Si la partición  $\mathcal{M}$  de tipo  $n$  de un conjunto  $S$ , contiene más de un bloque no trivial, entonces el retículo  $L_H(\mathcal{M})$  es reducible.

Se trata de un corolario del lema anterior.

En efecto: Si por ejemplo el bloque  $M_i$  es no trivial, entonces el lema 29 (página 60) nos dice que el retículo  $LP_n(M_i)$  tiene más de un elemento.

En consecuencia, si existen por lo menos dos de tales bloques, el retículo  $L(H(\mathcal{M}))$  será reducible según el lema 35.

*Definición.* — Para toda partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de un conjunto finito  $S$ , llamaremos exceso de  $\mathfrak{M}$  al número entero  $E(\mathfrak{M})$  definido como sigue:

$E(\mathfrak{M}) = 0$  si  $\mathfrak{M}$  carece de bloques, o lo que es lo mismo, si el conjunto  $S$  tiene menos de  $n$  elementos (véanse lemas 27 y 28)

$$E(\mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^r (\bar{M}_i - n) = \sum_{i=1}^r \bar{M}_i - rn, \text{ si es } \\ \mathfrak{M} = \{M_1, \dots, M_r\} \quad (r \geq I) \quad 32-1$$

**LEMA 37.** — Si  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  son particiones de tipo  $n$  contiguas ( $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ ), entonces es

$$E(\mathfrak{N}) - E(\mathfrak{M}) \leq 1.$$

Demostración: Según el lema 34 podemos poner

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} &= \{N_1, \dots, N_s\} \quad (s \geq I) \\ \mathfrak{M} &= \{M_1, \dots, M_k, N_2, \dots, N_s\} \quad (k \geq 2) \\ N_i &= \bigcup_{i=1}^k M_i \\ \overline{M_1 \cap M_2} &= n - 1 \\ \overline{(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i) \cap M_{i+1}} &\geq n \end{aligned}$$

Sea  $x$  un elemento de  $M_2$  no perteneciente a  $M_1$ . Vamos a formar una sucesión  $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k$  de partes de  $\mathcal{P}(S)$  poniendo

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_0 &= \mathfrak{M} \\ \mathfrak{M}_1 &= \{M_1 \cup \{x\}, M_2, \dots, M_k, N_2, \dots, N_s\} \\ \mathfrak{M}_i &= \{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i, M_{i+1}, \dots, M_k, N_2, \dots, N_s\} \\ &\quad (1 < i < k) \\ \mathfrak{M}_k &= \mathfrak{N} \end{aligned}$$

De estas familias solamente son particiones de tipo  $n$   $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}_k = \mathfrak{N}$  puesto que las demás dejan de satisfacer  $P_n = 2$  al ser

$$\overline{(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i) \cap M_{i+1}} \geq n$$

Sin embargo seguiremos llamando bloques a cada una de las partes de  $S$  que constituyen una familia y por otra parte extenderemos a estas familias la definición que hemos dado antes de exceso, poniendo

$$\begin{aligned} E(\mathfrak{M}_0) &= \overline{M_1 \cup \{x\}} - n + \sum_{j=2}^k (\bar{M}_j - n) + \sum_{j=2}^s (\bar{N}_j - n) \\ E(\mathfrak{M}_i) &= \overline{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i} - n + \sum_{j=i+1}^k (\bar{M}_j - n) + \\ &+ \sum_{j=2}^s (\bar{N}_j - n) \quad (1 < i < k) \end{aligned}$$

Teniendo presente que para las particiones  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  es por definición

$$E(\mathfrak{M}_0) = E(\mathfrak{M}) = \sum_{j=1}^k (\bar{\bar{M}}_j - n) + \sum_{j=2}^s (\bar{\bar{N}}_j - n)$$

$$E(\mathfrak{M}_k) = E(\mathfrak{N}) = \sum_{j=1}^s (\bar{\bar{N}}_j - n)$$

se tendrá:

$$\begin{aligned} E(\mathfrak{M}_1) - E(\mathfrak{M}_0) &= \overline{M_1 \cup \{x\}} - n + \sum_{j=1}^k (\bar{\bar{M}}_j - n) + \\ &+ \sum_{j=2}^s (\bar{\bar{N}}_j - n) - \sum_{j=1}^k (\bar{\bar{M}}_j - n) - \sum_{j=2}^s (\bar{\bar{N}}_j - n) = \overline{M_1 \cup \{x\}} - \\ &- n - (\bar{\bar{M}}_1 - n) = \overline{M_1 \cup \{x\}} - \bar{\bar{M}}_1 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $x \notin M_1$ , resulta  $\overline{M_1 \cup \{x\}} = \bar{\bar{M}}_1 + 1$  de donde

$$E(\mathfrak{M}_1) - E(\mathfrak{M}_0) = 1$$

Para  $i = 2, \dots, k-1$  es

$$\begin{aligned} E(\mathfrak{M}_{i+1}) - E(\mathfrak{M}_i) &= \overline{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i \cup M_{i+1}} - n + \\ &+ \sum_{j=i+2}^k (\bar{\bar{M}}_j - n) + \sum_{j=2}^s (\bar{\bar{N}}_j - n) - \left( \overline{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i} - \right. \\ &\left. - n + \sum_{j=i+1}^k (\bar{\bar{M}}_j - n) + \sum_{j=2}^s (\bar{\bar{N}}_j - n) \right) = \overline{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i \cup M_{i+1}} - \\ &- \overline{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i} - (M_{i+1} - n) \end{aligned} \quad 32-2'$$

Recordemos ahora el hecho evidente de que para conjuntos finitos cualesquiera  $A$  y  $B$  es

$$\overline{A \cup B} = \bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}} - \overline{A \cap B}$$

Aplicando esto al caso de ser  $A = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i$ ,  $B = M_{i+1}$ ,  $A \cup B = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i \cup M_{i+1}$ , resulta:

$$\begin{aligned} \overline{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i \cup M_{i+1}} &= \overline{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i} + \bar{\bar{M}}_{i+1} - \\ &- \overline{(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i) \cap M_{i+1}}, \end{aligned}$$

de donde, sustituyendo en 32,2, tenemos

$$E(\mathfrak{M}_{i+1}) - E(\mathfrak{M}_i) = n - \overline{(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i) \cap M_{i+1}}$$

Si tenemos en cuenta que, por hipótesis es  $(\overline{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_i}) \cap M_{i+1} \geq n$ , resulta

$$E(\mathfrak{M}_{i+1}) - E(\mathfrak{M}_i) \leq 0.$$

De este modo se tiene en definitiva

$$\begin{aligned} E(\mathfrak{M}_1) - E(\mathfrak{M}_0) &= 1 \\ E(\mathfrak{M}_2) - E(\mathfrak{M}_1) &\leq 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ E(\mathfrak{M}_{k-1}) - E(\mathfrak{M}_{k-2}) &\leq 0 \\ E(\mathfrak{M}_k) - E(\mathfrak{M}_{k-1}) &\leq 0 \end{aligned}$$

y sumando miembro a miembro

$$E(\mathfrak{M}_k) - E(\mathfrak{M}_0) = E(\mathfrak{M}) - E(\mathfrak{M}_0) \leq 1, \quad \text{c.q.d.}$$

**TEOREMA 9.** — La longitud mínima de todo retículo  $L_d(\mathfrak{M})$  es

$$d(L_d(\mathfrak{M})) = E(\mathfrak{M}).$$

Demostración: Cuando  $\mathfrak{M}$  es vacía (carece de bloques) es, por definición  $E(\mathfrak{M}) = 0$ , y por otra parte  $L_d(\mathfrak{M})$  es el retículo trivial (lema 27). En consecuencia es  $d(L_d(\mathfrak{M})) = 0$ , cumpliéndose así el teorema.

Si es  $\mathfrak{M} = \{M_1, \dots, M_r\}$  ( $r \geq 1$ ) entonces, según el lema 32 es

$$L_d(\mathfrak{M}) = LP_n(M_1) \times \dots \times LP_n(M_r),$$

y según el lema 5 (pág. 31), generalizado para un producto directo de cualquier número finito de factores, se tiene

$$d(L_d(\mathfrak{M})) = \sum_{i=1}^r d(LP_n(M_i)), \quad 32-3$$

Una vez que demostramos que para toda partición de tipo  $n$  con un solo bloque  $M_i$  es  $d(LP_n(M_i)) = \bar{M}_i - n$ , de 32-3, obtendremos

$$d(L_d(\mathfrak{M})) = \sum_{i=1}^r d(LP_n(M_i)) = \sum_{i=1}^r (\bar{M}_i - n) = E(\mathfrak{M})$$

Bastará por lo tanto demostrar que para todo conjunto finito  $S$  con  $m$  elementos es  $d(LP_n(S)) = m - n$ . La demostración constará de dos partes, a saber:

1.º Existe una cadena maximal de longitud  $m - n$  de particiones de tipo  $n$  de  $S$  que une la partición más fina con la más basta.

2.º Toda cadena maximal de particiones es de longitud igual o mayor que  $m - n$ .

Para demostrar lo primero, téngase en cuenta que dado un subconjunto cualquiera  $M$  de  $S$  de  $n$  o más elementos, existe una partición de tipo  $n$  cuyos bloques son  $M$  y todos los subconjuntos de  $S$  no contenidos en  $M$  formados exactamente por  $n$  elementos. (Compruébese que un tal sistema de subconjuntos satisface las condiciones  $P_n = 1$ ,  $P_n = 2$  y  $P_n = 3$ ). Si tomamos el conjunto  $M = M_0$  de  $n$  elementos, podemos formar una cadena de conjuntos  $M_0 \setminus M_1 \setminus \dots \setminus M_{m-n-1} \setminus M_{m-n} = S$ , cada uno de ellos con un elemento más que el anterior. Si designamos por  $\mathfrak{M}_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) la partición de tipo  $n$  constituida por  $M_i$  y por los subconjuntos de  $n$  elementos no con-

tenidos en  $M_i$ , evidentemente  $\mathfrak{M}_o$  será la partición más fina,  $\mathfrak{M}_{m-n}$  la más basta y será además

$$\mathfrak{M}_o \{_p \mathfrak{M}_1 \{_p \dots \{_p \mathfrak{M}_{m-n-1} \{_p \mathfrak{M}_{m-n}$$

Estas particiones constituirán por lo tanto una cadena maximal de longitud  $m - n$ .

Para demostrar que toda cadena maximal de particiones de tipo  $n$  que una  $\mathfrak{M}_o$  con  $\{S\}$  es de longitud igual o mayor que  $m - n$  procedamos por reducción al absurdo suponiendo que existen particiones de tipo  $n$   $\mathfrak{M}_o, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_q$  tales que, como antes,  $\mathfrak{M}_o$  es el elemento mínimo de  $LP_n(S)$  y  $\mathfrak{M}_q$  el máximo, siendo además  $q < m - n$  y

$$\mathfrak{M}_o \{_p \mathfrak{M}_1 \{_p \dots \{_p \mathfrak{M}_q$$

Según el lema 37 tendríamos:

$$\begin{aligned} E(\mathfrak{M}_1) - E(\mathfrak{M}_o) &\leq I \\ E(\mathfrak{M}_2) - E(\mathfrak{M}_1) &\leq I \\ \dots \dots \dots \\ E(\mathfrak{M}_{q-1}) - E(\mathfrak{M}_{q-2}) &\leq I \\ E(\mathfrak{M}_q) - E(\mathfrak{M}_{q-1}) &\leq I, \end{aligned}$$

y sumando miembro a miembro

$$E(\mathfrak{M}_q) - E(\mathfrak{M}_o) \leq q \quad 32-4$$

Por otra parte al estar constituida  $\mathfrak{M}_q$  por el único bloque  $S$  de  $m$  elementos se verifica

$$E(\mathfrak{M}_q) = m - n,$$

y al tener exactamente  $n$  elementos cada uno de los bloques de  $\mathfrak{M}_o$  es

$$E(\mathfrak{M}_o) = 0.$$

Esto nos da

$$E(\mathfrak{M}_q) - E(\mathfrak{M}_o) = m - n,$$

en contradicción con 32-4 y con la hipótesis  $q < m - n$ .

#### DETERMINACIÓN DEL VALOR DE $A_H(\mathfrak{M})$ PARA UNA PARTICIÓN CUALQUIERA $\mathfrak{M}$ DE UN CONJUNTO FINITO $S$

Si  $\mathfrak{M}$  es la parte vacía de  $\mathcal{P}(S)$ , lo cual hemos visto que ocurre si y sólo si  $\mathfrak{M}$  es una partición de tipo  $n$  y  $S$  tiene menos de  $n$  elementos (lemas 27 y 28), entonces  $L_H(\mathfrak{M})$  es un retículo trivial y en consecuencia es  $A_H(\mathfrak{M}) = 0$  (lema 9).

Si  $\mathcal{M}$  no es la parte vacía de  $\mathcal{P}(S)$ , pero todos los bloques de  $\mathcal{M}$  son triviales entonces, según el lema 29,  $L_H(\mathcal{M})$  es también un retículo trivial y por lo tanto  $A_H(\mathcal{M}) = 0$ .

Si  $\mathcal{M}$  tiene dos o más bloques no triviales, hemos visto que  $L_H(\mathcal{M})$  es reducible (lema 36), por lo cual en este caso es también  $A_H(\mathcal{M}) = 0$ .

Queda por considerar el caso en que  $\mathcal{M}$  posee un bloque no trivial y sólo uno. Si es  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_k\}$  y  $M_1$  es el único bloque no trivial de  $\mathcal{M}$ , el lema 35 nos dice que el retículo  $L_H(\mathcal{M})$  es isoformo al producto directo

$$LP_n(M_1) \times \dots \times LP_n(M_k)$$

y por ser los retículos  $LP_n(M_i)$  triviales ( $i = 2, \dots, k$ ), será  $L_H(\mathcal{M}) \simeq LP_n(M_1)$  y en consecuencia

$$A_H(\mathcal{M}) = (d_{\mu})(LP_n(M_1))$$

$LP_n(M_1)$  queda determinado, salvo isomorfismo, dando el número  $\bar{M}_1 = m$  de elementos de  $M_1$ . Nuestro problema se reducirá a determinar el valor de la función  $d_{\mu}$  para un retículo  $LP_n(S)$  de particiones de tipo  $n$ , donde  $S$  es un conjunto de  $m$  elementos.

**TEOREMA 10.** — Si  $S$  es un conjunto de  $m$  elementos y es  $n < m$ , se verifica

$$(d_{\mu})(LP_n(S)) = (-1)^{m-n+1} \binom{m-2}{n-1} \quad 33-1$$

Para demostrar este teorema tomemos en consideración el retículo  $LP_n(S)$ . Los intervalos iniciales de  $LP_n(S)$  son, según hemos visto, los retículos  $L_H(\mathcal{M})$  cuyos elementos son las particiones de tipo  $n$  de  $S$  más finas que una determinada  $\mathcal{M}$ . Según el lema 4, si encontramos una función  $\psi$  de valores enteros definida para estos intervalos iniciales, de manera que la suma de los valores que toma para todos ellos es igual a la longitud mínima de  $LP_n(S)$ , entonces  $\psi$  no es sino la función  $d_{\mu}$  restringida al sistema de dichos intervalos. Sabemos ya que si  $\mathcal{M}$  tiene todos sus bloques triviales o bien dos o más de ellos son no triviales, es  $(d_{\mu})(L_H(\mathcal{M})) = 0$ . Identificando cada intervalo inicial  $L_H(\mathcal{M})$  de  $LP_n(S)$  con la partición  $\mathcal{M}$  que lo define, pondremos para abreviar  $\psi(\mathcal{M})$  en vez de  $\psi(L_H(\mathcal{M}))$  y definiremos la función  $\psi$  como sigue:

$\psi(\mathcal{M}) = 0$ , si  $\mathcal{M}$  carece de bloques no triviales o bien tiene dos o más de ellos.

$$\psi(\mathcal{M}) = (-1)^{k-n+1} \binom{k-2}{n-1}, \text{ si } \mathcal{M} \text{ tiene un sólo bloque no trivial y éste tiene exactamente } k \text{ elementos } (n \leq k \leq m) \quad 33-2$$

Habremos demostrado que  $\psi$  es la restricción de  $d_{\mu}$  si logramos ver que

$$\sum_{\mathcal{M} \in LP_n(S)} \psi(\mathcal{M}) = d(LP_n(S)) = m - n \text{ (véase teorema 9)}$$

Para computar la suma del primer miembro bastará tomar en consideración aquellas particiones  $\mathcal{M}$  cuyo número de bloques no triviales es exactamente uno, ya que para las demás es por definición  $\psi(\mathcal{M}) = 0$ . Para cada

conjunto  $M$  de  $k$  elementos de  $S$  ( $n < k \leq m$ ), hay una partición y sólo una  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  que tiene a  $M$  por único bloque no trivial. Puesto que hay  $\binom{m}{k}$  subconjuntos de este tipo y cada uno de ellos corresponde a una partición  $\mathfrak{M}$  para la cual es  $\psi(\mathfrak{M}) = (-1)^{k-n+1} \binom{k-2}{n-1}$ , será

$$\sum_{\mathfrak{M} \in LP_n(S)} \psi(\mathfrak{M}) = \sum_{k=n+1}^m (-1)^{k-n+1} \binom{m}{k} \binom{k-2}{n-1}$$

y todo se reducirá a demostrar que es

$$\sum_{k=n+1}^m (-1)^{k-n+1} \binom{m}{k} \binom{k-2}{n-1} = m - n \quad 33-3$$

Esto se cumple para cualquier  $n \geq 0$  si es  $m - n = 1$ , como se comprueba inmediatamente, pues entonces la suma del primer miembro de 33-3 se reduce a un término único que es  $\binom{n+1}{n+1} \binom{n-1}{n-1} = 1 = m - n$ . Una vez fijado  $n$ , supongamos que 33-3 se satisface para un cierto valor de  $m$  ( $m > n$ ). Se trata de demostrar que también se satisface la 33-3 al sustituir en ella  $m$  por  $m + 1$ , o sea

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} (-1)^{k-n+1} \binom{m+1}{k} \binom{k-2}{n-1} = m + 1 - n \quad 33-4$$

Esto equivale evidentemente a demostrar que es

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} (-1)^{k-n+1} \binom{m+1}{k} \binom{k-2}{n-1} - \sum_{k=n+1}^m (-1)^{k-n+1} \binom{m}{k} \binom{k-2}{n-1} = 1 \quad 33-5$$

Operando con el primer miembro de esta última igualdad se obtiene, teniendo presentes las propiedades de los números combinatorios:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{m+1} (-1)^{k-n+1} \binom{m+1}{k} \binom{k-2}{n-1} - \sum_{k=n+1}^m (-1)^{k-n+1} \binom{m}{k} \binom{k-2}{n-1} = \\ &= \sum_{k=n+1}^m (-1)^{k-n+1} \binom{k-2}{n-1} \left[ \binom{m+1}{k} - \binom{m}{k} \right] + (-1)^{m-n+2} \binom{m+1}{m+1} \binom{m-1}{n-1} = \\ &= \sum_{k=n+1}^m (-1)^{k-n+1} \binom{k-2}{n-1} \binom{m}{k-1} + (-1)^{m-n+2} \binom{m-1}{n-1} = \\ &= \sum_{k=n+1}^m (-1)^{k-n+1} \binom{m}{k-1} \binom{k-2}{n-1} + (-1)^{m-n+2} \binom{m}{m} \binom{m-1}{n-1} = \\ &= \sum_{k=n+1}^{m+1} (-1)^{k-n+1} \binom{m}{k-1} \binom{k-2}{n-1} = \sum_{s=0}^{m-n} (-1)^s \binom{m}{n+s} \binom{n+s-1}{n-1} \end{aligned}$$

(hemos corrido los índices poniendo  $k = n + 1 + s$ ).

La demostración de que esta última suma vale siempre 1 es como sigue (adaptamos a nuestras necesidades un método de demostración que hemos

visto utilizado en el libro de EUGEN NETTO "Lehrbuch der Combinatorik", Leipzig 1901, Verlag von B. G. TEUBNER, pág. 255):

Consideremos la identidad

$$\left(1 - \frac{I}{x}\right)^m (1-x)^{-n} = \frac{(-I)^m}{x^m} (1-x)^{m-n}$$

En el desarrollo del segundo miembro, el coeficiente del término  $x^{-n}$  es  $(-I)^n$  según puede comprobarse. En el desarrollo del primer miembro, el coeficiente del término  $x^{-n}$  se obtiene como suma entre  $s=0$  y  $s=m-n$  de los productos del coeficiente del término  $(1/x)^{n+s} = x^{-n-s}$  en el desarrollo del primer binomio, por el del término  $x^s$  en el desarrollo del segundo. Ahora bien, el término  $(1/x)^{n+s}$  en el desarrollo de  $(1-I/x)^m$  tiene por coeficiente  $(-I)^{n+s} \binom{m}{n+s}$  y el término  $x^s$  en el desarrollo de  $(1-x)^{-n}$  tiene por coeficiente

$$\begin{aligned} \frac{(-n)(-n-1) \dots (-n-s+1)}{s} (-I)^s &= \frac{n(n+1) \dots (n+s-1)}{s} = \\ &= \binom{n+s-1}{s} = \binom{n+s-1}{n-1} \end{aligned}$$

De aquí que podamos poner:

$$\sum_{s=0}^{m-n} (-I)^{n+s} \binom{m}{n+s} \binom{n+s-1}{n-1} = (-I)^n,$$

o bien, dividiendo por  $(-I)^n$

$$\sum_{s=0}^{m-n} (-I)^s \binom{m}{n+s} \binom{n+s-1}{n-1} = 1.$$

Con esto hemos demostrado 33-5 y con ello que la función definida como en 33-2 es la función  $d\psi$  restringida a los intervalos iniciales de  $LP_n(S)$ . El valor de  $\psi$  para el retículo  $LP_n(S)$  se obtendrá de 33-1 tomando como argumento la partición de tipo  $n$  de  $S$  más basta, que como sabemos es aquella que tiene como único bloque no trivial el mismo conjunto  $S$ . Al poner  $m$  en vez de  $k$  en 33-2 se obtiene 33-1, c. q. d.

*Corolario.* — Si  $\mathfrak{M}$  es una partición de tipo  $n$  de un conjunto finito  $S$  con un único bloque no trivial  $M$ , siendo  $\bar{M} = m$ , entonces es

$$A_H(\mathfrak{M}) = (-I)^{m-n+1} \binom{m-2}{n-1}$$

## CAPÍTULO V

LA FUNCION  $A$  EN LAS HIPERGEOMETRIAS FINITAS

34

## GENERALIDADES

Según hemos dicho en la sección 31, el valor de la función  $A$  para una hipergeometría finita  $G(\mathcal{M})$ , expresa una propiedad del retículo  $L_G(\mathcal{M})$  de subespacios de  $G(\mathcal{M})$ . Los retículos  $L_G(\mathcal{M})$  de subespacios han sido solamente estudiados, a nuestro conocimiento, en el caso de ser  $\mathcal{M}$  una partición de tipo 2, siendo de destacar a este respecto el hecho, demostrado por HARTMANIS [13], de que los retículos  $L_G(\mathcal{M})$  (siendo  $\mathcal{M}$  una partición de tipo 2 de un conjunto finito) sirven para representar cualquier retículo  $LP_n(S)$  de particiones de tipo  $n$  de un conjunto  $S$  finito. Esto quiere decir que, para todo retículo  $LP_n(S)$ , siendo  $S$  finito, existe un conjunto finito  $W$  y una partición  $\mathcal{M}$  de tipo 2 de  $W$  tal que  $LP_n(S)$  es isomorfo a  $L_G(\mathcal{M})$ . Se demuestra asimismo (loc. cit.) que todo retículo finito es isomorfo a un subretículo de un retículo de particiones de tipo 2 y, como consecuencia de lo anteriormente dicho, isomorfo también a un subretículo de un retículo de subespacios de una hipergeometría de tipo 2, que es lo mismo que decir, utilizando el lenguaje de Hartmanis, de un retículo de subespacios lineales de una geometría. Esto nos dice que el sistema de tales retículos es muy amplio, y más amplio aún es el sistema de los retículos de subespacios de hipergeometrías de tipo  $n$  sobre conjuntos finitos, si dejamos que  $n$  pueda ser un entero no negativo cualquiera. Esta enorme variedad de retículos  $L_G(\mathcal{M})$  hace que el problema de la determinación del entero  $A_G(\mathcal{M})$  deba resolverse en cada caso particular, determinando primeramente la estructura del retículo  $L_G(\mathcal{M})$  y después, sucesiva y ordenadamente, los valores de la función  $d_\mu$  para los intervalos iniciales de  $L_G(\mathcal{M})$  (empezando por los de menor número de elementos) hasta llegar a obtener  $A_G(\mathcal{M}) = (d_\mu)(L_G(\mathcal{M}))$ . Todo esto se consigue evidentemente mediante un proceso finito.

Los siguientes lemas nos dan a conocer la estructura del retículo  $L_G(\mathcal{M})$  en algunos casos particulares. No nos entretenemos en dar explícitamente las demostraciones, por tratarse de consecuencias inmediatas de las definiciones de la operación  $n$ -aria  $r(\mathcal{M})$  (véase sección 29), de conjunto cerrado respecto a una operación y de subespacio de una hipergeometría.

**LEMA 38.** — *Si  $S$  es un conjunto de  $n$  o de menos de  $n$  elementos, el retículo de subespacios de la única hipergeometría de tipo  $n$  sobre  $S$  que en tales casos existe, es isomorfo al álgebra de Boole  $\mathcal{L}(S)$ .*

LEMA 39. — *El retículo de subespacios de toda hipergeometría de tipo 0  $G(\mathfrak{M})$ , sobre un conjunto  $S$ , es isomorfo al álgebra de Boole  $\mathcal{P}(S - T)$ , donde  $T$  es el bloque único de la partición.*

LEMA 40. — *Para que una determinada parte  $T$ , de  $n$  o más elementos de un conjunto  $S$ , sea un subespacio de la hipergeometría  $G(\mathfrak{M})$  de tipo  $n$  sobre  $S$ , es condición necesaria que  $T$  sea unión de un conjunto no vacío de bloques de  $\mathfrak{M}$ .*

LEMA 41. — *Toda parte  $T$  de menos de  $n$  elementos de un conjunto  $S$  es un subespacio de cualquier hipergeometría de tipo  $n$  sobre  $S$ .*

De los lemas 40 y 41 se deduce que son subespacios de una hipergeometría cualquiera  $G(\mathfrak{M})$  de tipo  $n$  sobre un conjunto  $S$  de  $n$  o más elementos, por una parte todos los subconjuntos de  $S$  de menos de  $n$  elementos y por otra ciertas uniones no vacías de bloques de  $\mathfrak{M}$ . Es fácil comprobar que para las hipergeometrías de tipo 1 se cumple lo siguiente:

LEMA 42. — *El retículo de subespacios de una hipergeometría  $G(\mathfrak{M})$  de tipo 1 sobre un conjunto no vacío  $S$  está constituido exactamente por la parte vacía de  $S$  y por todas las uniones de bloques de  $\mathfrak{M}$ . En consecuencia si  $S$  es finito y tiene exactamente  $r$  bloques  $M_1, \dots, M_r$ , el retículo  $L_c(\mathfrak{M})$  es isomorfo al álgebra de Boole de las partes de un conjunto de  $r$  elementos.*

Para las hipergeometrías de tipo superior a 1 no toda unión de bloques es un subespacio. El siguiente lema es inmediato y no hace más que expresar de manera distinta la definición de subespacio.

LEMA 43. — *Para que una unión  $M_1 \cup \dots \cup M_i$  de bloques de una partición  $\mathfrak{M}$  de tipo  $n$  de un conjunto  $S$  sea un subespacio de la hipergeometría  $G(\mathfrak{M})$  es preciso y basta que, siempre que  $n$  elementos distintos  $a_1, \dots, a_n$  de  $S$  pertenezcan a la unión  $M_1 \cup \dots \cup M_i$ , el bloque  $M(a_1, \dots, a_n)$  determinado por estos elementos esté incluido en dicha unión.*

Del lema 38 se deduce que si es  $\overline{\overline{S}} < n$  o bien  $\overline{\overline{S}} = n$ , el retículo de subespacios de la única hipergeometría de tipo  $n$  que existe cuando se da uno de estos casos, es trivial, una cadena de dos elementos, o reducible, según que sea respectivamente  $\overline{\overline{S}} = 0$ ,  $\overline{\overline{S}} = 1$  ó  $\overline{\overline{S}} > 1$ . Teniendo en cuenta el lema 9 y el teorema 1 se obtiene en tales casos (llamando  $\mathfrak{M}$  a la partición única en cuestión),  $A_c(\mathfrak{M}) = 0$  si  $\overline{\overline{S}} = 0$  ó  $\overline{\overline{S}} > 1$  y  $A_c(\mathfrak{M}) = 1$  si  $\overline{\overline{S}} = 1$ . Del lema 39 se desprende asimismo que para una hipergeometría  $G(\mathfrak{M})$  de tipo 0 sobre un conjunto  $S$ , si  $T$  es la parte de  $S$  que define  $\mathfrak{M}$ , es  $A_c(\mathfrak{M}) = 0$  si  $\overline{\overline{S - T}} = 0$ , ó  $\overline{\overline{S - T}} > 1$  y  $A_c(\mathfrak{M}) = 1$  si  $\overline{\overline{S - T}} = 1$ . Finalmente, del lema 42 obtenemos que si la partición  $\mathfrak{M}$  de tipo 1 del conjunto  $S$  contiene  $r$  bloques, es  $A_c(\mathfrak{M}) = 0$  si  $r = 0$  ó  $r > 1$  y  $A_c(\mathfrak{M}) = 1$  si  $r = 1$ .

El siguiente lema nos da a conocer otro caso en que es  $L_c(\mathfrak{M})$  reducible y en consecuencia  $A_c(\mathfrak{M}) = 0$ .

TEOREMA 11. — *Si  $\mathfrak{M}$  es una partición de tipo  $n$  de un conjunto finito  $S$  ( $n > 0$ ,  $\overline{\overline{S}} > n$ ) y uno por lo menos,  $x$ , de los elementos de  $S$ , es tal que todo bloque de  $\mathfrak{M}$  que contiene  $x$  es trivial, entonces el retículo  $L_c(\mathfrak{M})$  es reducible.*

## Demostración:

Al ser  $\bar{S} > n$  toda partición de tipo  $n$  (por lo tanto también  $\mathcal{M}$ ) contiene por lo menos un bloque. Al ser  $n > 0$  el elemento  $x$  debe estar contenido en un bloque, el cual es por hipótesis trivial, luego  $\mathcal{M}$  contiene bloques triviales. Puede ocurrir que todos los bloques de  $\mathcal{M}$  sean triviales o bien que uno por lo menos de ellos sea no trivial. En el primer caso toda parte de  $S$  es evidentemente un subconjunto cerrado respecto a  $r(\mathcal{M})$ , es decir, un subespacio, lo cual quiere decir que es

$$L_g(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{P}(S),$$

y puesto que  $\bar{S} > n$  y  $n > 0$  implica  $\bar{S} \geq 2$ , resulta que  $\mathcal{P}$  y  $L_g(\mathcal{M})$  son retículos reducibles.

Consideremos ahora el caso en que  $\mathcal{M}$  contenga algún bloque no trivial (junto con otros triviales según hemos dicho). Los bloques de  $\mathcal{M}$  que no contienen el elemento  $x$  constituyen un sistema  $\mathcal{M}'$  que es una partición de tipo  $n$  de  $S - \{x\}$  como es fácil ver, pues  $n$  elementos distintos de  $S - \{x\}$  (al ser  $\bar{S} > n$  existen necesariamente tales elementos) están en un bloque y sólo uno  $M$  de  $\mathcal{M}$  que por no contener  $x$  (de lo contrario  $M$  sería no trivial y contendría  $x$ , contrariamente a lo supuesto) pertenece a  $\mathcal{M}'$ .

Los subespacios de  $G(\mathcal{M})$  (elementos de  $L_g(\mathcal{M})$ ) pueden ser clasificados según que contengan o no el elemento  $x$ . Si un subespacio  $T$  de  $G(\mathcal{M})$  no contiene el elemento  $x$ , entonces  $T$  es, como subconjunto de  $S - \{x\}$ , un elemento de  $L_g(\mathcal{M})$ . En tal caso el conjunto  $T \cup \{x\}$  es cerrado respecto a  $r(\mathcal{M})$  debido a que todo subconjunto de  $n$  elementos de  $T \cup \{x\}$  que contenga  $x$  determina un bloque trivial. Por otra parte a todo subespacio  $V$  de  $G(\mathcal{M})$  que contiene  $x$  le corresponde un conjunto  $V - \{x\}$  que no deja de ser cerrado respecto a  $r(\mathcal{M})$  (sigue siendo subespacio de  $G(\mathcal{M})$ ) pero que es además cerrado respecto a  $r(\mathcal{M})$ , es decir, subespacio de  $G(\mathcal{M})$ . Entre los subespacios de  $G(\mathcal{M})$  que contienen el elemento  $x$  y los que no lo contienen (los subespacios de  $G(\mathcal{M}')$ ) existe por lo tanto correspondencia biúnica, de tal modo que los elementos de  $L_g(\mathcal{M})$  están a su vez en correspondencia biúnica con el conjunto de todas las uniones de una de las formas  $T \cup \emptyset = T$  y  $T \cup \{x\}$ , siendo  $T$  un elemento cualquiera de  $L_g(\mathcal{M}')$ . Esto demuestra que  $L_g(\mathcal{M})$  es isomorfo al producto directo de  $L_g(\mathcal{M}')$  por la cadena de dos elementos representada por  $\emptyset$  y  $\{x\}$ . Como  $L_g(\mathcal{M}')$  no es trivial (contiene por lo menos  $\emptyset$  y  $S - \{x\}$  que son distintos al ser  $\bar{S} \geq 2$ ) resulta que  $L_g(\mathcal{M})$  es reducible, c.q.d.

## GEOMETRÍAS PROYECTIVAS

Nos hemos ocupado en la sección anterior de revelar algunas relaciones existentes entre una partición  $\mathcal{M}$  de tipo  $n$  de un conjunto finito  $S$  y el retículo  $L_g(\mathcal{M})$  de subespacios de la hipergeometría  $G(\mathcal{M})$ . Vamos a li-

mitarnos ahora al estudio de un tipo muy particular de hipergeometrías de tipo 2 que corresponden a lo que en la literatura matemática es concedido con el nombre de *Geometrías proyectivas*. Entre las definiciones de "Geometría" y en particular de "Geometría Proyectiva" dadas por diferentes autores existen pequeñas diferencias que muchas veces no afectan al contenido en el sentido de que entre las Geometrías o Geometrías Proyectivas definidas de una o de otra manera se puede establecer una correspondencia biunívoca. No consideramos valga la pena hacer una reseña comparativa de tales definiciones y por ello nos limitamos a dar las nuestras con un contenido idéntico en el fondo al de la mayoría de los autores, pero procurando adaptarlas en la forma a nuestra actual línea de trabajo (véase nota 13).

Para Hartmanis "Geometría" es sinónimo de "Partición de tipo 2". Nosotros preferimos llamar "Geometría" a toda multiálgebra  $\{S; r(\mathcal{M})\}$ , donde  $S$  es un conjunto,  $\mathcal{M}$  es una partición de tipo 2 de  $S$  y  $r(\mathcal{M})$  la operación binaria en  $S$  definida a partir de  $\mathcal{M}$  como en 29-1 y 29-2. Dicho de otro modo y teniendo en cuenta nuestra definición de "Hipergeometría de tipo  $n$ " (véase sección 29), llamaremos "Geometría" a toda hipergeometría de tipo 2. En toda geometría  $G(\mathcal{M}) = \{S; r(\mathcal{M})\}$  llamaremos *puntos* a los elementos de  $S$  y *rectas* a los bloques de  $\mathcal{M}$ .

*Definición.* — Una geometría  $\{S; r(\mathcal{M})\}$ , siendo  $S$  un conjunto cualquiera (incluso vacío), será llamada *geometría proyectiva* si y sólo si la partición  $\mathcal{M}$  de tipo 2 que la engendra cumple la siguiente condición: *PR*) Si un punto  $\gamma$  está en las rectas  $g$  y  $g'$  de tal manera que los puntos  $\alpha$  y  $\beta$  pertenecen a  $g$  y los puntos  $\alpha'$  y  $\beta'$  a  $g'$ , entonces existe por lo menos un punto  $\gamma'$  y rectas  $h$  y  $h'$  de tal manera que  $\alpha, \beta$  y  $\gamma'$  están sobre  $h$  y  $\alpha', \beta', \gamma'$  sobre  $h'$  (no suponemos que sean necesariamente distintos entre sí los puntos  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ , como tampoco las rectas  $g, g', h, h'$ ).

La condición *PR*) puede ser representada mediante el siguiente diagrama, en el que para mayor claridad suponemos que son distintos entre sí los puntos  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  y las rectas  $g, g', h, h'$ .

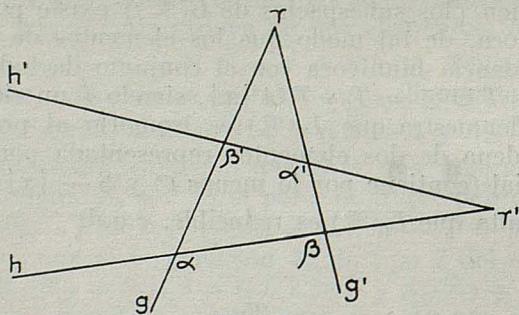


FIG. 2

Este diagrama debe considerarse solamente como una ayuda mnemotécnica y en ningún modo debe llevarnos a confundir los conceptos de "punto" y de "recta" en el sentido de nuestras definiciones, con los de punto y recta de un plano euclídeo.

Son geometrías proyectivas aquellas geometrías en que el conjunto  $S'$  es vacío o tiene un sólo elemento, así como aquellas en que la partición  $\mathfrak{M}$  es la partición más basta de tipo 2, constituida por el único bloque  $S$  ( $\overline{S} \geq 2$ ). En todos estos casos la condición  $PR$ ) carece en efecto de contenido y es por lo tanto satisfecha de modo trivial.

**LEMA 44.** — *El retículo de subespacios lineales de toda geometría proyectiva es modular y complementado.*

Salvando las diferencias de nomenclatura y de notación puede seguirse la demostración dada por HERMES [17] (teorema, 14,1, pág. 78).

**LEMA 45.** — *El retículo  $L_g(\mathfrak{M})$  de subespacios lineales de una geometría proyectiva  $G(\mathfrak{M})$  de dos o más puntos es irreducible si y sólo si todas las rectas de  $G(\mathfrak{M})$  tienen por lo menos tres elementos, dicho de otro modo, si y sólo si la partición  $\mathfrak{M}$  carece de bloques triviales.*

Omitimos la demostración por tratarse en realidad de un conocido teorema de la teoría de espacios lineales expresado en nuestra terminología. Este lema justifica que llamemos, como es costumbre, reducible o irreducible a una geometría proyectiva  $G(\mathfrak{M})$  según que tenga o no tenga rectas triviales.

Por ser modular el retículo  $L_g(\mathfrak{M})$  de subespacios lineales de una geometría proyectiva  $G(\mathfrak{M})$ , satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind (véase lema 16, págs. 42 y 43). Tiene por lo tanto sentido definir la dimensión de un elemento  $T$  de  $L_g(\mathfrak{M})$  (subespacio lineal) como la longitud de cualquier cadena maximal que una el elemento mínimo de  $L_g(\mathfrak{M})$  con  $T$ . Teniendo en cuenta que los elementos mínimo y máximo de  $L_g(\mathfrak{M})$  son respectivamente la parte vacía y el conjunto total  $S$ , la dimensión de  $L_g(\mathfrak{M})$  (a la que llamaremos también dimensión de la geometría  $G(\mathfrak{M})$ ) será la longitud de toda cadena maximal de subespacios que une la parte vacía con  $S$ . Se demuestra que la dimensión de un subespacio  $T$  coincide (según la definición que precede) con el número mínimo de elementos de  $S$  necesario para engendrar  $T$ . En los tratados de "Geometría Proyectiva" se da el nombre de dimensión de un subespacio lineal  $T$  a la dimensión de  $T$  según viene dada por la anterior definición, disminuida en una unidad. A esta dimensión la podríamos llamar *dimensión geométrica*, pero no haremos uso de ello.

**LEMA 46.** — *Todo subespacio lineal de una geometría proyectiva  $G(\mathfrak{M}) = \{S, r(\mathfrak{M})\}$  es una geometría proyectiva  $G(\mathfrak{M}') = \{S'; r(\mathfrak{M}')\}$ .*

El sistema de los bloques de  $\mathfrak{M}$  contenidos en el conjunto  $S'$  cerrado respecto a  $r(\mathfrak{M})$ , constituye en efecto una partición  $\mathfrak{M}'$  de tipo 2 de  $S'$  que satisface la condición  $PR$ ) según es fácil ver. En estos casos diremos que la geometría proyectiva  $G(\mathfrak{M}') = \{S'; r(\mathfrak{M}')\}$  está *inmersa* en la  $G(\mathfrak{M}) = \{S; r(\mathfrak{M})\}$ .

Las geometrías proyectivas de dimensiones 1 y 2 reciben respectivamente los nombres de *puntos* y de *rectas* tanto si se consideran independientes como si se consideran inmersas en geometrías proyectivas de dimensión superior.

## ESPACIOS VECTORIALES SOBRE UN CUERPO

Dado un cuerpo  $C$  y un entero positivo  $n$ , llamaremos “espacio vectorial  $V_c^n$  de dimensión  $n$  sobre  $C$ ” a la multiálgebra  $V_c^n = \{C^n; \oplus, \{u_c\}, (c \in C)\}$  cuyo conjunto base es la potencia  $C^n$  y cuya familia definidora está constituida por la operación binaria uniforme  $\oplus$  y por un conjunto  $\{u_c\}$  ( $c \in C$ ) de operaciones unarias (también uniformes) en correspondencia biúnivoca con los elementos de  $C$ . La operación binaria  $\oplus$  es la suma vectorial que hace corresponder a cada par  $\langle \alpha, \beta \rangle$  de  $n$ -tuplas de  $C$  ( $\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ,  $\beta = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ ) la  $n$ -tupla  $\alpha \oplus \beta = \langle a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n \rangle$ , siendo  $a_i + b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) la suma (en el cuerpo  $C$ ) de los elementos  $a_i$  y  $b_i$ . Para cada elemento  $c$  de  $C$ , la operación unaria uniforme  $u_c$  es la que hace corresponder a cada  $n$ -tupla  $\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , la  $n$ -tupla  $c\alpha = \langle ca_1, \dots, ca_n \rangle$  donde  $ca_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) denota el producto de  $c$  por  $a_i$  en  $C$ .

A toda submultiálgebra de  $V_c^n$  se le da el nombre de *subespacio lineal*. Antes habíamos dado el mismo nombre a las submultiálgebras de una geometría proyectiva  $G(\mathfrak{M}) = \{S; r(\mathfrak{M})\}$ . Esta coincidencia de nombres se justifica por el siguiente lema.

**LEMA 47.** — *Para toda geometría proyectiva irreducible  $G(\mathfrak{M})$  de dimensión  $n \geq 4$  (dimensión geométrica  $n \geq 3$ ) existe un cuerpo  $C$  tal que el retículo  $L_G(\mathfrak{M})$  de subespacios lineales de  $G(\mathfrak{M})$  es isomorfo al retículo  $LV_c^n$  de subespacios lineales de  $V_c^n$ .*

Fijémonos en que no se ha dicho que sean isomorfas como multiálgebras  $G(\mathfrak{M})$  y  $V_c^n$  sino que son isomorfos los respectivos retículos de submultiálgebras.

A partir de  $V_c^n$  se puede construir como es sabido el espacio proyectivo  $P_{n-1}(C)$  de dimensión  $n - 1$  sobre  $C$ , que es posible también presentar como multiálgebra. Los elementos del conjunto base serían, en efecto, las clases de equivalencia que se establecen en  $\{C^n - \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle\}$  al poner en una misma clase  $K(a_1, \dots, a_n)$  todas las  $n$ -tuplas de la forma  $\langle ca_1, \dots, ca_n \rangle$  y solamente éstas, siendo  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \neq \langle 0, \dots, 0 \rangle$  y  $c \neq 0$  (la  $n$ -tupla  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  se dice que es representante de la clase  $K(a_1, \dots, a_n)$ ). La familia de operaciones estará constituida ahora por una operación única binaria que es la que a cada dos clases  $K(a_1, \dots, a_n)$ ,  $K(b_1, \dots, b_n)$  hace corresponder el conjunto de todas las clases representadas por un elemento de la forma  $\langle c' a_1 + c'' b_1, \dots, c' a_n + c'' b_n \rangle$  siendo  $c'$  y  $c''$  elementos de  $C$  con la condición de que no sea simultáneamente  $c' = 0$ ,  $c'' = 0$ . Se ve inmediatamente que el retículo de submultiálgebras del espacio proyectivo así definido es isomorfo a  $LV_c^n$  y el lema 47 es consecuencia del teorema que dice que para toda geometría proyectiva  $G(\mathfrak{M})$  de dimensión  $n \geq 4$  existe un cuerpo  $C$  tal que  $G(\mathfrak{M})$  es isomorfo al espacio proyectivo  $P_{n-1}(C)$  (véase por ejemplo SEGREL [20], pág. 171).

## LA FUNCIÓN A EN LAS GEOMETRÍAS PROYECTIVAS FINITAS

La estructura de los retículos de subespacios lineales de una geometría proyectiva es perfectamente conocida, lo cual permite la determinación del valor que toma la función  $A$  en cada caso. En primer lugar, habida cuenta del teorema 1 y de la definición de geometría proyectiva reducible podemos poner:

**LEMA 48.** — *Si  $G(\mathcal{M})$  es una geometría proyectiva finita, reducible, entonces es*

$$A_G(\mathcal{M}) = 0.$$

Queda por considerar el caso de las geometrías proyectivas finitas irreducibles y para determinar el valor de  $A_G(\mathcal{M})$  cuando  $G(\mathcal{M})$  es una de tales geometrías nos hace falta conocer, cualesquiera que sean los enteros  $n$ ,  $h$  ( $h \leq n$ ) el número  $\varphi(n, h)$  de subespacios lineales de dimensión  $h$  contenidos en una geometría proyectiva o subespacio lineal de dimensión  $n$ . Para esto nos vale el siguiente lema.

**LEMA 49.** — *El número  $\varphi(n, h)$  de subespacios lineales de dimensión  $h$  contenidos en un subespacio lineal de dimensión  $n$  de una geometría proyectiva finita irreducible  $G(\mathcal{M})$  (no olvidemos que toda geometría proyectiva puede ser considerada como subespacio lineal de sí misma) se obtiene mediante las siguientes fórmulas*

$$\varphi(n, n) = \varphi(n, 0) = 1, \text{ cualquiera que sea } n.$$

*Si es  $n > 1$ ,  $h > 0$  (debe ser siempre, evidentemente  $n \geq h$ ) existe un entero  $q \geq 2$ , dependiente de la geometría  $G(\mathcal{M})$  en cuestión, de tal manera que*

$$\varphi(n, h) = \frac{\prod_{i=0}^{h-1} (q^{n-i} - 1)}{\prod_{i=1}^h (q^i - 1)} \quad 37-1$$

Para la demostración de este lema deben considerarse por separado los casos  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n > 3$ . Para los dos primeros la validez de las fórmulas dadas es evidente ya que en cualquier geometría los subespacios de dimensión 1 son los puntos y el de dimensión 0 es la parte vacía.

Cualquier conjunto  $S$  de dos o más elementos puede considerarse como constitutivo de una geometría proyectiva de dimensión 2, es decir como recta (no necesariamente inmersa en una geometría proyectiva de dimensión superior). Una tal geometría proyectiva es reducible si  $\bar{S} = 2$  (lema 45). Si es  $\bar{S} > 2$  podemos poner  $\bar{S} = q + 1$ , siendo  $q \geq 2$ . Puesto que los subespacios de dimensión 1 son los puntos, esto está de acuerdo con la fórmula 37-1 al hacer  $n = 2$ ,  $h = 1$ . Con esto queda demostrado el lema en el caso  $n = 2$ .

Para el caso  $n = 3$ , puede verse la demostración en M. Hall [9], pág. 348 (lo que nosotros llamamos geometría proyectiva de dimensión 3 es designado por este autor por "plano proyectivo"). Finalmente para el caso  $n > 3$  puede encontrarse la demostración en SEGREL [20], pág. 257. En este caso el entero  $q$  es el orden de un cuerpo de Galois y por lo tanto de la forma  $p^s$ , siendo  $p$  un número primo y  $s \geq 1$  (véase nota 13).

El conjunto vacío, considerado como geometría proyectiva de dimensión 0, tiene como retículo de subespacios el retículo trivial y en consecuencia la función  $A$  toma para ella el valor 0.

El punto, considerado como geometría proyectiva, tiene como retículo de subespacios la cadena de dos elementos constituida por el mismo punto y por la parte vacía. El valor que toma la función  $A$  es entonces 1 según el lema 9.

En los demás casos se tiene

**TEOREMA 12.** — *Para toda geometría proyectiva finita irreducible  $G(\mathfrak{M}) = \{S; r(\mathfrak{M})\}$  de dimensión  $n$  ( $n > 1$ ) se verifica*

$$A_g(\mathfrak{M}) = (1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^{n-1}), \quad 37-2$$

donde  $q + 1$  es el número de puntos contenidos en una recta cualquiera de  $G(\mathfrak{M})$ .

La demostración de este teorema se reduce a un proceso de cálculo algebraico análogo al desarrollado para la demostración del teorema 5 (página 42). Se trata en definitiva de encontrar una función  $\psi$  que haga corresponder a cada subespacio lineal  $T$  de  $G(\mathfrak{M})$  un número entero  $\psi(T)$  de tal manera que la suma de todos los valores de  $\psi(T)$  al variar  $T$  en  $L_g(\mathfrak{M})$  sea igual a  $n$ . Decimos que si cada recta de  $G(\mathfrak{M})$  tiene  $q + 1$  puntos (así tiene que ser para un cierto  $q \geq 2$ , según el lema 49 aplicando al caso particular  $n = 2, h = 1$ ) entonces la función  $\psi$  que llena el requisito antedicho y que por tanto coincide con la restricción de  $d_\mu$  (véase lema 4) es la que toma el valor 1 para los puntos y que para cada subespacio lineal  $T$  de dimensión  $t$  ( $t > 1$ ) toma el valor

$$\psi(T) = (1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^{t-1})$$

Si como antes llamamos  $\varphi(n, t)$  al número de subespacios lineales de dimensión  $t$  contenidos en  $G(\mathfrak{M})$  (recuérdese que  $G(\mathfrak{M})$  es de dimensión  $n$ ) se tratará de demostrar que es

$$\sum_{\dim T=t} \varphi(n, t) \psi(T) = \varphi(n, 1) \cdot 1 + \sum_{t=2}^n \varphi(n, t) (1 - q) \dots (1 - q^{t-1}) = n,$$

o bien

$$\begin{aligned} & \frac{1 - q^n}{1 - q} + \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1})}{(1 - q)(1 - q^2)} \cdot (1 - q) + \dots \\ & + \frac{(1 - q^n) \dots (1 - q)}{(1 - q) \dots (1 - q^n)} \cdot (1 - q) \dots (1 - q)^{n-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - q^n}{1 - q} + \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1})}{1 - q^2} + \dots \\
 &\dots + \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \dots (1 - q)}{1 - q^n} = n
 \end{aligned}$$

El proceso de inducción que lleva a demostrar que esta última igualdad constituye una identidad puede verse en las páginas 44 y siguientes, por lo que consideramos innecesario repetirlo.

Recordemos que, según el teorema 1, para todo retículo finito reducible  $R$  es  $(d\mu)(R) = 0$ . Pueden encontrarse retículos finitos irreducibles no triviales  $R$  para los cuales es también  $(d\mu)(R) = 0$  (véase [6]). La condición  $(d\mu)(R) = 0$  es pues necesaria, pero no suficiente, en general, para que  $R$  sea reducible. Podemos establecer sin embargo el siguiente teorema.

**TEOREMA 13.** — *Para que un retículo finito, no trivial, modular y complementado  $V$  sea reducible, es condición necesaria y suficiente que sea  $(d\mu)(V) = 0$ .*

Según el teorema 1, bastará demostrar que la condición es suficiente. La demostración se basa en que para todo retículo finito, modular y complementado  $V$ , existe una geometría proyectiva finita  $G(V)$  tal que el retículo  $LG(V)$  de subespacios lineales de  $G(V)$  es isomorfo a  $V$  (aplíquese lo expuesto por HERMES [17], pág. 81 y ss. al caso de ver  $V$  un retículo finito). Si  $V$  fuese no trivial e irreducible, entonces la geometría proyectiva  $G(V)$  sería irreducible y de dimensión mayor que 0, con lo que el valor de  $A(G(V)) = (d\mu)(LG(V)) = (d\mu)(V)$  sería igual a 1 o bien vendría dado por 37-2 con  $q \geqq 2$ , según lo demostrado en esta misma sección. En todo caso sería  $(d\mu)(V) \neq 0$ , lo cual nos dice que si  $V$  es no trivial y es  $(d\mu)(V) = 0$ , tiene que ser  $V$  reducible, c. q. d.

## B I B L I O G R A F I A

- [1] BIRKHOFF, G.: *Lattice theory*. Am. Math. Soc. Coll. Vol. XXV (1960).
- [2] ———: *Lattice theory*. Am. Math. Soc. 1963 (copia mimeográfica).
- [3] DELSARTE, S.: *Fonctions de Möbius sur les groupes abéliens finis*. Ann. of Math. II, Ser. 49, 600-609 (1948).
- [4] DUBREUIL, P.: *Algébre*. T. I. Gauthiers-Villars, París (1954).
- [5] DUBREUIL-JACOTIN, M. L., LESIEUR, L. y CROISOT, R.: *Leçons sur la théorie des structures algébraïques ordonnées et des treillis géométriques*. Cah. scient. Gauthiers Villars, París (1953).
- [6] FRONTERA MARQUÉS, B.: *Una función numérica en los retículos finitos que se anula para los retículos reducibles*. Publ. de la Ac. de Ciencias Exactas, Físicas y Matemáticas de Zaragoza, Ser. 2, XVI, fasc. 7, 27-35 (1961).
- [7] ———: *Funciones de Euler en las estructuras finitas*. Rev. Mat. Hisp. Am. 4 Ser. XXIII, 203-241 (1963).
- [8] ———: *Generalización del concepto de relación de equivalencia*. (A publicar en las Actas de la V R. A. M. E.), Valencia (1964).
- [9] HALL, M.: *The Theory of groups*. The Macmillan Company, New York (1959).
- [10] HALL, P.: *A contribución to the theory of groups of prime power order*. Proc. London Math. Soc. II Ser. 36, 39-95 (1932).
- [11] ———: *The Eulerian functions of a group*. Quart. J. Math. Oxford Ser., 134-151 (1936).
- [12] HANANI, HAIM: *On some tactical configurations*. Canad. J. of Math. XV, 4, 702-722 (1963).
- [13] HARTMANIS, J.: *Two embedding theorems for finite lattices*. Proc. Am. Math. Soc. 7, 571-577 (1956).
- [14] ———: *A note on the lattice of geometries*. Proc. Am. Math. Soc. 8, 560-562 (1957).
- [15] ———: *Lattice theory of generalized partitions*. Canad. J. of Math. 11, 97-106 (1959).
- [16] ———: *Generalized partitions and lattice embedding theorems*. Proc. of Symp. in pure Math. Vol. II, Latt. Theory, Am. Math. Soc. 22-30 (1961).
- [17] HERMES, H.: *Einführung in die Verbandstheorie*. Springer Verlag. Die Grundl. der math. Wiss., Band LXXIII (1955).
- [18] PICKERT, G.: *Projektive Ebenen*. Die Grundl. der Math. Wiss. Band LXXX (1955).
- [19] ROTA, G. C.: *On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions*. Zeitsch. für Wahrscheinlichkeitstheorie, 2, 4, 340-368 (1964).
- [20] SEGRE, B.: *Lectures on modern geometry*. Ed. Cremonese, Roma (1961).
- [21] SUZUKI, M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Springer Verlag (1956).
- [22] SZASZ, G.: *Einführung in die Verbandstheorie*. Akademiai Kiadó. Budapest (1962).
- [23] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Moderne Algebra I*. Die Grundl. der math. Wiss. Band XXXIII Springer Verlag (1950).
- [24] WARD, M.: *The algebra of lattice functions*. Duke Math. J. 5, 357-371 (1939).
- [25] WEISNER, L.: *Abstract theory of inversion of finite series*. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 474-484 (1935).
- [26] ———: *Some properties of prime power groups*. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 485-492 (1935).
- [27] WHITNEY, H.: *A logical expansion in mathematics*. Bull. Am. Math. Soc. 38, 572-579 (1932).
- [28] ZASSENHAUS, H. J.: *The theory of groups*. Second. ed., Chelsea Publ. Comp. (1958).

## NOTAS

## Nota 1 (pág. 11)

Recibe el nombre de *álgebra de Boole* todo retículo distributivo y complementado (véase sección 11 y nota 11). Si  $S$  es un conjunto cualquiera designamos por  $\mathcal{L}(S)$  el sistema de las partes de  $S$ , pero también hablamos a veces del álgebra de Boole  $\mathcal{L}(S)$  en cuyo caso nos referimos abreviadamente al retículo  $\{\mathcal{L}(S); \cup, \cap\}$  constituido por el conjunto  $\mathcal{L}(S)$  y las conocidas operaciones llamadas "unión" ( $\cup$ ) e "intersección" ( $\cap$ ) definidas en el mismo como se hace en Teoría de Conjuntos. Un tal retículo es como se sabe un álgebra de Boole. Todos los retículos que consideramos en este trabajo serán  $\cap$ -subretículos de una determinada álgebra de Boole  $\mathcal{L}(S)$  (véase nota 4). Si un retículo  $\{R; \cup, \cap\}$  es un álgebra de Boole, no ocurre sin embargo necesariamente que este retículo sea isomorfo a un álgebra de Boole  $\mathcal{L}(S)$  de las partes de un conjunto  $S$ . Para que esto ocurra es preciso y basta que  $\{R; \cup, \cap\}$  sea además completo (véase nota 4) y atómico (véase nota 11).

## Nota 2

*Algebra Universal* (pág. 15)

En las secciones 1 a 12 de la Introducción he expuesto en forma original conceptos que corresponden a la teoría conocida con el nombre de *Algebra Universal* (v. G. BIRKHOFF [2] pp. 139 y ss. y H. HERMES [17], páginas 151 y ss.). Esta teoría tuvo su origen en un trabajo de BIRKHOFF, al que no he tenido acceso (On the structure of abstract algebras. Proc. Cambridge phil. Soc. Tomo 29 (1933), 441-464; citado en HERMES [17], página 159). El uso del término "multiálgebra" para designar un sistema  $\{S; F\}$  constituido por un conjunto  $S$  y una familia  $F = (f_\lambda) (\lambda \in \Lambda)$  de aplicaciones de  $S^n$  en  $\mathcal{L}(S)$  me fue sugerido por el mismo Birkhoff a consulta mía. Posteriormente lo he visto utilizado en este mismo sentido por G. GRATZER (A representation theorem for multialgebras, Archiv der Mathematik, Vd. XIII, Fasc. 6, 452-456). Este autor llama multi-operaciones a las aplicaciones de  $S^n$  en  $\mathcal{L}(S)$  (nosotros las hemos llamado operaciones) y reserva el nombre de operaciones a las aplicaciones de  $S^n$  en  $S$ .

## Nota 3 (pág. 16)

La idea de designar por  $\overline{\overline{S}}$  el número cardinal de un conjunto  $S$  se debe a CANTOR (véase S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, 1959, página 9).

## Nota 4 (págs. 19 y 20)

*Conjuntos ordenados y retículos. Terminología y notación*

En la sección 11 exponemos los conceptos de conjunto ordenado y de retículo y hacemos ver cómo tanto uno como otro caben dentro del concepto más general de multiálgebra. Aquí vamos a completar lo allí expuesto puntuizando brevemente la terminología y notación utilizadas.

Sea  $\{C; \subseteq\}$  un conjunto ordenado (véase sección 11). Si  $x, y$  son elementos de  $C$  tales que el par ordenado  $\langle x, y \rangle$  pertenezca a  $\subseteq$ , escribimos  $x \subseteq y$  y expresamos este hecho diciendo que  $x$  es anterior a  $y$  o bien que es  $x$  inferior a  $y$ . Si, siendo  $x \subseteq y$  es además  $x \neq y$  escribimos  $x \subset y$  y decimos que  $x$  es estrictamente anterior (o inferior) a  $y$ . Si es  $x \subset y$  y no existe ningún elemento  $z$  de  $S$  tal que  $x \subset z \subset y$ , escribimos  $x \{ y$  y decimos que  $x$  es contiguo inferior de  $y$ , que  $x$  es cubierto por  $y$ , que  $y$  es contiguo superior de  $x$  o que  $y$  cubre  $x$ . Decimos que los elementos  $x, y$  son contiguos si se satisface una de las condiciones  $x \{ y$  o  $y \{ x$ .

Si  $a$  es un elemento de  $S$  y  $M$  una parte de  $S$  decimos que  $a$  es un minorante o una cota inferior de  $M$  si para todo elemento  $x$  de  $M$  es  $a \subseteq x$  y que  $a$  es un mayorante o cota superior de  $M$  si para todo  $x$  de  $M$  es  $x \subseteq a$ . Debido a la propiedad antisimétrica, puede existir a lo sumo un minorante de  $M$  perteneciente a  $M$ , y si tal elemento existe se le da el nombre de mínimo de  $M$  (se escribe  $\min M$ ). Del mismo modo se define el máximo de  $M$  ( $\max M$ ) como un mayorante de  $M$  perteneciente a  $M$ .

Si el conjunto de los minorantes de  $M$  posee un máximo, éste recibe el nombre de ínfimo de  $M$  ( $\inf M$ ) y si el conjunto de los mayorantes de  $M$  posee un mínimo, éste recibe el nombre de supremo de  $M$  ( $\sup M$ ). Evidentemente, si  $\min M$  y  $\max M$  existen, son iguales respectivamente a  $\inf M$  y  $\sup M$ , pero pueden existir  $\inf M$  y  $\sup M$  sin que existan  $\min M$  y  $\max M$ . En particular es interesante el caso en que el mismo conjunto  $S$  como subconjunto (impropio) de sí mismo, posea un máximo o un mínimo. Si posee un mínimo  $c$  y existen contiguos superiores de  $c$ , éstos reciben el nombre de átomos. Del mismo modo, si  $S$  posee un máximo  $u$  y existen contiguos inferiores de  $u$ , éstos reciben el nombre de antiátomos.

Un conjunto ordenado  $\{C; \subseteq\}$  con la propiedad de que cada uno de sus subconjuntos no vacíos y finitos posee un supremo y un ínfimo recibe como es sabido el nombre de retículo.

Si  $\{C; \subseteq\}$  es un retículo (decimos también en este caso que  $C$  es un retículo respecto a la ordenación  $\subseteq$ ), consideremos para cada 2-tupla o par ordenado de elementos de  $C$ , el conjunto de uno o de dos elementos  $\{\langle x, y \rangle\}$ , definido poniendo.

$$\begin{aligned} \{\langle x, y \rangle\} &= \{x, y\}, \text{ si } x \neq y \\ \{\langle x, y \rangle\} &= \{x\}, \quad \text{si } x = y \end{aligned}$$

Se definen en  $C$  las operaciones  $\cup$  y  $\cap$ , llamadas respectivamente unión e intersección, poniendo para elementos cualesquiera  $x$ ,  $y$  de  $C$ :

$$\begin{aligned}x \cup y &= \sup \{<x, y>\}, \\x \cap y &= \inf \{<x, y>\}.\end{aligned}$$

Estas operaciones son, como consecuencia inmediata de su misma definición, conmutativas, asociativas, idempotentes (para todo  $x \in C$  es  $x \cup x = x \cap x = x$ ) y satisfacen dos leyes de absorción ( $x \cup (x \cap y) = x$ ;  $x \cap (x \cup y) = x$ , cualesquiera que sean los elementos  $x$ ,  $y$  de  $C$ ). Mediante ellas se puede expresar el supremo y el ínfimo de cualquier subconjunto finito no vacío  $M$  de  $C$ , ya que si es  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es evidentemente  $\sup M = \sup \{x_1, \sup \{x_2, \dots, x_n\}\} = x_1 \cup \sup \{x_2, \dots, x_n\} = x_1 \cup (x_2 \cup \sup \{x_3, \dots, x_n\}) = \dots = x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n$  (la propiedad asociativa de la operación  $\cup$  permite omitir los paréntesis). Del mismo modo se puede escribir  $\inf M = x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_n$ . En analogía con los signos  $\Sigma$  y  $\prod$  utilizados respectivamente para sumas y productos múltiples, se introducen los signos  $\cup$  y  $\cap$ , por medio de los cuales las anteriores expresiones para  $\inf M$  y  $\sup M$  se sustituyen respectivamente por  $\bigcup_{i=1}^n x_i$  y  $\bigcap_{i=1}^n x_i$ .

Si bien en un retículo  $\{C; \subseteq\}$  existen siempre por definición  $\sup M$  e  $\inf M$  para cualquier subconjunto finito no vacío  $M$  de  $C$ , esto no ocurre necesariamente si  $M$  es vacío o infinito. Los retículos para los cuales los elementos  $\sup M$  e  $\inf M$  existen cualquiera que sea  $M$  (subconjunto del conjunto base  $C$ ) son llamados *retículos completos*. En los retículos completos las expresiones  $\sup M$ ,  $\inf M$ , se puedan sustituir respectivamente por  $\cup M$ ,  $\cap M$ , o bien, si el conjunto  $M = \{x_\lambda\}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) se considera descrito mediante el conjunto  $\Lambda$  de índices, por  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} x$ ,  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} x$ .

Puede ocurrir que, siendo  $C$  un retículo respecto a cierta ordenación  $\subseteq$  de  $C$  y  $T$  un subconjunto de  $C$ ,  $T$  sea también un retículo respecto a la restricción  $\subseteq_T$  de  $\subseteq$  a  $T$ . Si esto ocurre y es  $M$  un subconjunto finito, no vacío, de  $T$ , existirán el supremo y el ínfimo de  $M$  respecto a  $\subseteq_T$ , a los que designaremos respectivamente por  $\cup_T M$  y  $\cap_T M$ , para distinguirlos de  $\cup M$  y  $\cap M$ . Si ahora ocurre que siempre que  $M$  (subconjunto de  $T$ ) sea finito y no vacío es  $\cup_T M = \cup M$ , se dice que  $T$  es un  $\cup$ -subretículo de  $C$ . Si con estas mismas condiciones, es siempre  $\cap_T M = \cap M$ , se dice que  $M$  es un  $\cap$ -subretículo de  $C$ . Si  $T$  es a la vez  $\cup$ - y  $\cap$ -subretículo de  $C$ , se dice simplemente que  $T$  es un subretículo de  $C$ . Si  $\cup_T M$  existe siempre, y se cumple además la propiedad  $\cup_T M = \cup M$ , cualquiera que sea el subconjunto  $M$  de  $T$ , se dice que  $T$  es un  $\cup$ -subretículo completo de  $C$ . De modo análogo se define un  $\cap$ -subretículo completo de  $C$ .

Un retículo puede también considerarse como sistema  $\{C; \cup, \cap\}$  constituido por un conjunto  $C$  y dos operaciones binarias uniformes  $\cup$ ,  $\cap$  conmutativas y asociativas, definidas en  $C$ , que posean una respecto a otra las dos propiedades de absorción formuladas más arriba (véase también sección 11,

pág. 20). Dadas las operaciones  $\cup$ ,  $\cap$ , con estas propiedades, se define en efecto, de la manera indicada en la página 21, una relación binaria  $\subseteq$  que se demuestra es una ordenación de  $C$  respecto a la cual el supremo (resp. ínfimo) de un par de elementos  $x$ ,  $y$  de  $C$ , iguales o distintos, es igual a  $x \cup y$  (resp.  $x \cap y$ ).

El ejemplo más importante de retículo completo lo constituyen las álgebras de Boole  $\mathcal{P}(S)$  de las partes de un conjunto  $S$  (véase nota 1). La ordenación  $\subseteq$  de  $\mathcal{P}(S)$ , respecto a la cual  $\mathcal{P}(S)$  es un retículo (más precisamente un álgebra de Boole), es en este caso la conocida inclusión de la teoría de conjuntos ( $A \subseteq B \Leftrightarrow$  todo elemento de  $A$  pertenece a  $B$ ) y se demuestra fácilmente que respecto a esta ordenación, cualquiera que sea la familia  $\mathfrak{M}$  de partes de  $S$ , sup.  $\mathfrak{M}$  y inf.  $\mathfrak{M}$  existen siempre, siendo respectivamente iguales a la unión y a la intersección según la teoría de conjuntos, de las partes de  $S$  pertenecientes a  $\mathfrak{M}$ .

## Nota 5 (pág. 20)

Utilizamos el símbolo  $S_1 \times S_2$  para designar el producto cartesiano de  $S_1$  por  $S_2$ .

## Nota 6 (pág. 20)

Recordamos aquí brevemente el significado de los símbolos utilizados más frecuentemente en lógica matemática y teoría de conjuntos.

La expresión  $\{\alpha : P(\alpha)\}$  (siendo  $P(\alpha)$  una función proposicional que contiene la variable  $\alpha$  y que se convierte en una proposición cuando  $\alpha$  se sustituye por un objeto perteneciente a cierta clase) denota el conjunto formado por todos aquellos objetos  $\alpha$  para los cuales  $P(\alpha)$  es una proposición verdadera.

El símbolo  $\in$  se usa como es sabido en expresiones del tipo  $x \in C$  para indicar que el elemento designado por  $x$  pertenece al conjunto designado por  $C$ .

El símbolo  $\exists$  es el llamado operador existencial, cuya forma de uso damos por conocida.

El símbolo  $\exists$  es el que en términos vulgares se usa en el sentido de “tal que”.

El símbolo  $\wedge$  es el que se usa en el sentido de “y”. Se usa entre dos proposiciones  $P$ ,  $Q$  para formar otra proposición  $P \wedge Q$  que se define como la proposición que es verdadera si y sólo si  $P$  y  $Q$  son ambas proposiciones verdaderas.

El símbolo  $\vee$  es el que se usa en el sentido de “o”. Se intercala entre los símbolos  $P$  y  $Q$  de dos proposiciones para denotar la nueva proposición  $P \vee Q$  que por definición es verdadera si por lo menos una de las proposiciones  $P$ ,  $Q$  es verdadera.

## Nota 7 (pág. 22)

*Diagramas de conjuntos ordenados finitos*

Todo conjunto ordenado finito  $\{C; \subseteq\}$  puede ser representado fácilmente, como se sabe, mediante un diagrama compuesto por puntos o pequeños círculos unidos por rectas ascendentes. Los círculos se corresponden biunívocamente con los elementos de  $C$ . Si  $a, b$  son dos elementos de  $C$  y  $a$  es contiguo inferior de  $b$  ( $a \subset b$ ), entonces el círculo representativo de  $a$  está por debajo del representativo de  $b$ , estando  $a$  unido directamente con  $b$  mediante una recta ascendente no necesariamente vertical. Puede verse como ejemplo el retículo de cinco elementos representado en la página ...

## Nota 8 (pág. 27)

Nótese que el conjunto  $\mathcal{R}_s$  (la notación es nuestra, no de Ward) de funciones de intervalo depende del conjunto ordenado  $S$ . Si hacemos que  $S$  sea la cadena de enteros no negativos  $0, 1, \dots, n$ , entonces  $S$  sería el conjunto de las funciones  $f$  que hacen corresponder un número (digamos por ejemplo real)  $f(a, b)$  a cada par de enteros no negativos  $a, b$  tales que  $a \leq b$ .

Cada función  $f$  daría lugar a infinitas sucesiones  $f_a(x) = f(a, x)$  ( $a = 0, 1, \dots$ ;  $x = a, a + 1, \dots$ ) de números reales. Las funciones  $f$  que más pueden interesar son aquellas en que el valor  $f(a, x)$  depende solamente de la diferencia  $x - a$  que es lo mismo que decir del número de elementos  $z$  tales que  $a < z \leq x$ . Este número define totalmente la estructura del intervalo  $[a, x]$  de  $S$ . De manera análoga si  $S$  es ahora un conjunto ordenado localmente finito cualquiera, entre todas las funciones de intervalo en  $S$  (elementos de  $\mathcal{R}_s$ ), las que más interesan son aquellas  $f$  en las que el valor  $f(a, x)$  ( $a \subseteq x$ ) depende solamente de la estructura de  $[a, x]$  y no de los elementos particulares  $a, x$  de  $S$ . Estas funciones  $f$  son las funciones regulares de intervalo, de que se trata en la sección 16.

## Nota 9 (pág. 30)

*Longitud máxima, longitud mínima y dimensión*

Las definiciones de dimensión que se dan en los tratados sobre teoría de retículos son distintas en su formulación según los autores pero son siempre equivalentes cuando se aplican a un mismo tipo de conjunto ordenado. Para BIRKHOFF [1] (pág. 11), la dimensión o longitud  $d(x)$  de un elemento  $x$  de un conjunto ordenado  $P$  es la longitud máxima  $d$  de las cadenas  $x_0 \subset x_1 \subset \dots \subset x_d = x$  en  $P$  que tienen a  $x$  por elemento máximo, siempre que  $d$  sea finito. La dimensión  $d(P)$  del conjunto ordenado  $P$  es para el mismo autor el máximo de  $d(x)$  cuando  $x$  recorre  $P$ . DUBREIL-JACOTIN [4] (pág. 10) da el nombre de *altura* de un elemento  $x$  a lo mismo que

Birkhoff llama dimensión de  $x$ . En estas definiciones no se exige que el conjunto ordenado en cuestión posea elemento mínimo. El concepto de dimensión dado por DUBREIL-JACOTIN (loc. cit., pág. 252) es solamente aplicable a retículos y dentro de éstos a los que él denomina "geométricos" que son retículos con elementos mínimo y máximo y con la propiedad de que para todo átomo  $A$  y todo elemento  $B$  se verifica que el elemento  $A \cup B$  cubre  $B$  siempre que no sea  $A \subseteq B$ .

Las cadenas de longitud máxima cuya longitud sirve para definir la dimensión de un elemento  $x$  de un conjunto ordenado  $P$  o bien la dimensión del mismo conjunto ordenado  $P$  son al mismo tiempo, como es obvio, cadenas maximales en el sentido de que si por ejemplo  $C$  sirve para definir la dimensión de  $P$  no existe ninguna cadena en  $P$  que contenga todos los elementos de  $C$  y además otros.

Si en vez de considerar cadenas maximales de longitud máxima consideramos cadenas maximales de longitud mínima obtenemos los conceptos por nosotros introducidos de *longitud mínima de un elemento  $x$  de un conjunto ordenado localmente finito con elemento mínimo* (mínimo de las longitudes de las cadenas maximales que unen el elemento mínimo  $c$  con  $x$ ) y el de *longitud mínima de un conjunto ordenado finito* (mínimo de las longitudes de las cadenas maximales en  $P$  que unen el elemento mínimo  $c$  con el elemento máximo  $u$ ). Teniendo en cuenta que un intervalo  $[x, y]$  de un conjunto ordenado es un conjunto ordenado, se obtienen los conceptos de dimensión o longitud máxima  $D(x, y)$  y de longitud mínima  $d(x, y)$  de un intervalo  $[x, y]$ , según explicamos en la página 30.

## Nota 10 (pág. 31)

Este lema es enunciado explícitamente por G. C. ROTA [19] (proposición 5, pág. 345).

## Nota 11 (pág. 38)

*Clases de retículos*

Recordemos brevemente los conceptos de retículo distributivo, retículo complementado, retículo modular y retículo atómico, así como las propiedades más conocidas y fundamentales de tales retículos.

Un retículo  $\{R; \cup, \cap\}$  es distributivo cuando para cualesquiera elementos  $x, y, z$  de  $R$  se satisfacen las dos leyes distributivas:

$$D_{\cup} : x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

$$D_{\cap} : x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

Se demuestra que es suficiente que se satisfaga  $D_{\cup}$  para que también se satisfaga  $D_{\cap}$  y viceversa.

En un retículo  $\{R; \cup, \cap\}$  (digamos en adelante un retículo  $R$ ) con elemento mínimo  $c$  y elemento máximo  $u$  recibe el nombre de *complemento* de  $x$  (elemento de  $R$ ) todo elemento  $y$  de  $R$  que satisfaga las dos igualdades

$$\begin{aligned}x \cup y &= u \\x \cap y &= c\end{aligned}$$

El retículo  $\{R; \cup, \cap\}$  se dice que es complementado si todo elemento  $x$  de  $R$  posee por lo menos un complemento. Se demuestra que si un retículo  $\{R; \cup, \cap\}$  es distributivo y además complementado (álgebra de Boole), todo elemento  $x$  de  $R$  tiene un sólo complemento.

Un retículo  $\{R; \cup, \cap\}$  es modular si para cualesquiera elementos  $x, y, z$  de  $R$  que satisfacen la condición  $x \subseteq z$  se cumple

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z$$

Los retículos que son a la vez modulares y complementados son de extraordinaria importancia en el estudio de la Geometría Proyectiva.

Un retículo  $\{R; \cup, \cap\}$  es atómico si para todo elemento  $x$  de  $R$  existe por lo menos un átomo  $a$  de  $R$  tal que  $a \subseteq x$ .

Los retículos que son a la vez distributivos, complementados, atómicos y completos coinciden, salvo isomorfismo, con las álgebras de Boole  $\mathcal{L}(S)$  según hemos indicado ya en la nota 1.

#### Nota 12 (pág. 49)

En todo el trabajo hemos usado los símbolos  $\subseteq, \cup, \cap$  para denotar respectivamente la ordenación, la unión y la intersección en un retículo cualquiera. Estos mismos símbolos son los que se usan para denotar la inclusión, la unión y la intersección conjuntista. No podrá surgir confusión mientras no se empleen en un mismo contexto los mismos signos con distinto significado, pero podría presentarse la ambigüedad por ejemplo al considerar el retículo  $LP_n(S)$  de particiones generalizadas de tipo  $n$  de un conjunto  $S$ , ya que los elementos de un tal retículo son a la vez elementos de  $\mathcal{L}(\mathcal{P}(S))$  y la ordenación, así como las operaciones de unión e intersección en  $LP_n(S)$  son evidentemente distintas de la inclusión, unión e intersección conjuntistas en  $\mathcal{L}(\mathcal{P}(S))$ . De ahí la razón de haber introducido los símbolos  $\subseteq_p, \cup_p$  y  $\cap_p$  en  $LP_n(S)$ , así como el  $\{\}_p$  usado en la expresión  $\mathfrak{M} \{\}_p \mathfrak{N}$  para denotar que la partición  $\mathfrak{M}$  es contigua inferior de la  $\mathfrak{N}$ .

#### Nota 13 (pág. 72)

#### *Diversas definiciones de geometría proyectiva y conceptos equivalentes*

HERMES [17] (pág. 76) define una geometría proyectiva  $G$  como dada por dos conjuntos sin elementos comunes y una relación en que puede estar un elemento del primer conjunto respecto a uno del segundo. Los elementos

del primer conjunto son llamados *puntos* y los del segundo *rectas*. El conjunto de todos los puntos recibe el nombre de espacio proyectivo  $R(G)$ . Si un punto  $x$  se halla respecto a una recta  $g$  en la relación que sirve para definir la geometría proyectiva  $G$  se dice que  $x$  *está sobre*  $g$  o que  $g$  *pasa por*  $x$ . Dos rectas  $g$  y  $h$  se dice que *se cortan* si existe un punto  $\alpha$  que está a la vez sobre  $g$  y sobre  $h$ . Tres puntos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  se dice que *están alineados* si existe una recta  $g$  tal que  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  están sobre  $g$ . Se escribe abreviadamente  $\alpha \beta \gamma$  para indicar que los tres puntos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  están alineados. El sistema  $G$  formado por el conjunto de puntos, el conjunto de "rectas" y la relación entre puntos y rectas de que tratamos es por definición una geometría proyectiva cuando esta última relación satisface las condiciones:

- ( $P_1$ ) Dos puntos distintos están siempre sobre una recta y sólo una.
- ( $P_2$ ) Si los puntos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  (no necesariamente distintos) son tales que se verifica  $\alpha \beta' \gamma$  y  $\beta \alpha' \gamma$ , entonces existe un punto  $\gamma'$  para el cual se cumple  $\beta' \alpha' \gamma'$  y  $\alpha \beta \gamma'$ .

( $P_3$ ) Toda recta  $g$  pasa por dos puntos distintos por lo menos.

Es fácil pasar de una geometría proyectiva según la definición que antecede, a una geometría proyectiva como multiálgebra tal como la hemos definido nosotros (pág. 72) y viceversa. Por ejemplo si  $G$  es una geometría proyectiva en el sentido de Hermes y  $R(G)$  es el conjunto de sus puntos (primer conjunto), ponemos  $S = R(G)$ . Para construir la partición  $\mathfrak{M}$  de tipo 2 de  $S$ , hacemos corresponder a una recta  $g$  (elemento del segundo conjunto) el conjunto  $\{g\}$  de los puntos que están sobre  $g$ . La familia de partes de  $S = R(G)$  constituida por todos los conjuntos  $\{g\}$  es efectivamente una partición de tipo 2 de  $S$  ( $P_1$ ) es lo mismo que  $P_2 - 1$  y  $P_2 - 2$  tomadas conjuntamente y ( $P_3$ ) es lo mismo que  $P_2 - 3$ ). Construido  $\mathfrak{M}$  se construye la operación binaria  $r(\mathfrak{M})$  como se indica en la sección 29 (pág. 57).

Finalmente la propiedad  $P(R)$  que exigimos nosotros para decir que la hipergeometría de tipo 2  $\{S; r(\mathfrak{M})\}$  es una geometría proyectiva, es una copia de la propiedad ( $P_2$ ) de Hermes.

Para Hermes un subespacio lineal de una geometría proyectiva  $G$  es todo subconjunto  $x$  del conjunto de puntos  $R(G)$  con la propiedad de que si  $\alpha$ ,  $\beta$  son puntos distintos y  $\gamma$  es un punto cualquiera que está sobre la recta (única según ( $P_1$ )) determinada por  $\alpha$  y  $\beta$ , entonces  $\gamma$  pertenece a  $x$ . El conjunto de los subespacios lineales constituye un retículo respecto a la inclusión en  $\mathcal{P}(R(G))$ . Un tal retículo corresponde a nuestro retículo de submultiálgebras.

También se puede definir una geometría proyectiva a partir del correspondiente retículo de subespacios lineales tal como lo hace el mismo Hermes (loc. cit. pp. 81 y ss.). Este autor establece una correspondencia biunívoca y reversible entre las geometrías proyectivas y los retículos V completos, atómicos, modulares y complementados que satisfacen la condición de ser

$$x \cap \cup \{y_\rho\} = \cup (x \cap y_\rho)$$

si  $\{y_\rho\}$  es un subconjunto de  $V$  dirigido hacia arriba (si para dos elementos cualesquier  $y_{\rho_1}$ ,  $y_{\rho_2}$  de  $\{y\}$ , existe por lo menos un elemento  $y_{\rho_3}$  del mismo conjunto tal que  $y_{\rho_1} \subseteq y_{\rho_3}$ ,  $y_{\rho_2} \subseteq y_{\rho_3}$ ).

DUBREIL-JACOTIN [5] se sirve también de los retículos para definir una geometría proyectiva. Para este autor una geometría proyectiva es un retículo  $T$  que satisface las siguientes condiciones o postulados (seguimos la línea trazada por el autor, pero libremente y resumiendo su exposición).

Postulado I.  $T$  pose elementos máximo y mínimo.

Postulado II. Si  $P$  es un átomo de  $T$  (véase nota 4) y  $A, B$  elementos cualesquiera de  $T$  tales que  $B \subseteq A$ , se verifica:

$$A \cap (B \cup P) = B \cup (A \cap P)$$

Postulado III. Todo elemento  $A$  de  $T$  distinto del elemento mínimo  $O$ , es una unión de un número finito de átomos.

Postulado II'. Si  $H$  es un hiperátomo (contiguo inferior del elemento máximo) de  $T$  y  $B, A$  elementos cualesquiera de  $T$  que satisfacen la relación  $B \subseteq A$ , se verifica

$$A \cap (B \cup H) = B \cup (A \cap H).$$

Se puede establecer una correspondencia biunívoca y reversible entre las geometrías proyectivas definidas de esta manera y las que hemos definido nosotros como multiálgebras, haciendo corresponder a cada una de estas últimas  $\{S; r(\mathcal{M})\}$  el correspondiente retículo  $L(\{S; r(\mathcal{M})\})$  que se comprueba satisface los postulados I, II, III y II'. Viceversa dado un retículo  $T$  que satisface estos postulados, constituimos el conjunto  $S$  formado por los átomos de  $T$  y la familia de partes de  $S$  cuyos elementos son los conjuntos de átomos cubiertos por un mismo elemento de  $T$ . Se comprueba que una tal familia  $\mathcal{M}$  satisface las condiciones  $P_2 - 1, P_2 - 2, P_2 - 3$  y  $PR$ . Con  $S$  y  $\mathcal{M}$  se forma la operación binaria  $r(\mathcal{M})$  y se obtiene la multiálgebra  $\{S; r(\mathcal{M})\}$  que es una geometría proyectiva según nuestra definición.

La definición que da B. SEGRE [20] (pág. 141) de *espacio gráfico* es también de tipo reticular. Para este autor un *espacio gráfico de dimensión n* ( $n$  entero no negativo) es un conjunto cualquiera  $S$  de elementos abstractos llamados puntos y una familia de subconjuntos de  $S$  llamados subespacios de  $S$ , cada uno de ellos asociado a un entero menor que  $n$  que es su dimensión, y cumpliéndose las siguientes condiciones:

I. Para todo  $h = 0, 1, \dots, n - 1$  existen ciertos subespacios  $S_h$  de  $S$ , de dimensión  $h$  de tal manera que los subespacios  $S_0$  son los conjuntos formados por un elemento único de  $S$ . Además de estos subespacios es conveniente considerar el mismo conjunto  $S$  y la parte vacía como subespacio  $S_n$  y  $S_{-1}$  de dimensiones  $n$  y  $-1$  respectivamente. Los subespacios  $S_1, S_2$  y  $S_{n-1}$  suelen ser llamados respectivamente *rectas*, *planos* e *hiperplanos* de  $S = S_n$ .

II. Si  $S_h, S_k$  son respectivamente subespacios de dimensiones  $h$  y  $k$  y es  $S_h \subseteq S_k$ , entonces  $h \leq k$ , siendo  $h = k$  solamente cuando es  $S_h = S_k$ .

III. El conjunto de los puntos comunes a dos subespacios cualesquiera  $S_h, S_k$  de  $S$  es un subespacio  $S_r$  (que puede ser la parte vacía de dimensión  $r = -1$ ) llamado intersección de  $S_h$  y  $S_k$ . De aquí se sigue la existencia de un subespacio  $S_s$  y sólo uno de dimensión mínima, llamado unión de  $S_h$  y

$S_k$ , que es la intersección de todos los subespacios que contienen a la vez  $S_h$  y  $S_k$  (entre estos está siempre  $S = S_n$ ).

IV. Utilizando la notación de III, se cumple  $h + k = r + s$ .

A un *espacio gráfico*  $S$  definido de esta manera se le puede hacer corresponder la geometría proyectiva  $\{S; r(\mathcal{M})\}$  según nuestra definición tomando como familia  $\mathcal{M}$  de partes de  $S$  la constituida por los subespacios de dimensión 2, ya que al hacer esto es posible comprobar que las condiciones I, II, III y IV de  $S$  implican para  $\mathcal{M}$  las condiciones  $P_2 - 1$ ,  $P_2 - 2$ ,  $P_2 - 3$  y  $PR$ ). Se puede demostrar que esta correspondencia de espacios gráficos a geometrías proyectivas (en nuestro sentido) es biunívoca y reversible y que tiene por inversa la que hace corresponder a cada geometría proyectiva  $\{S; r(\mathcal{M})\}$  el sistema de los subconjuntos de  $S$  cerrados respecto a  $r(\mathcal{M})$ . Este sistema es como se sabe un retículo y entonces se toma como dimensión  $h$  de cada elemento (pongamos  $S_h$ ) de este retículo la longitud de la cadena que une  $S_{-1}$  son  $S_h$  disminuida en una unidad.

Si llamamos dimensión de una geometría proyectiva (según nuestra definición) a la longitud mínima del correspondiente retículo de subespacios lineales, se suelen llamar *planos proyectivos* a las geometrías proyectivas de dimensión 3 (dimensión geométrica 2). Algunos autores (v. p. ej. G. PIC-KERT [18] reservan el nombre de "plano proyectivo" para lo que en nuestro lenguaje llamaríamos geometría proyectiva irreducible de dimensión 3.

## SOBRE LA TEORIA DE LA MEDIDA Y SUS FUNDAMENTOS:

### DISCURSO DE INGRESO EN LA ACADEMIA

leído por el Académico electo

ILMO. SR. D. BALTASAR R.-SALINAS PALERO

en el acto solemne de su recepción  
celebrado el día 2 de mayo de 1965

*Excelentísimos e Ilustrísimos Señores.*

*Señores Académicos,*

*Señoras y señores:*

En un acto tan importante para mí como éste, me es difícil expresar exactamente los sentimientos que me embargan hacia tan ilustre Corporación, que se ha dignado a invitarme a formar parte de ella. El momento más grato de todos es reconocer y agradecer profundamente el gran honor que se me ha hecho con esta elección, en la que se manifiesta la amistad que me une con todos sus miembros; porque no cabe duda de que una de las cosas más agradables y humanas es contar con un número crecido de buenos amigos. Tanto honor obliga a mucho, tanto que no puedo saber yo mismo si podré ser útil para los altos fines que tiene esta ilustre Academia de Ciencias.

Solamente puedo asegurar, reiterando mi gratitud, que intentaré corresponder a él y a las esperanzas que han puesto en mí, poniendo todo mi entusiasmo en las tareas que me sean encomendadas como miembro de ella. No he de negar que me siento abrumado por la responsabilidad que he contraído con mi aceptación, pero también he de manifestar que siento un gran alivio pensando que siempre podré contar con la ayuda y dirección de los miembros tan valiosos con que cuenta la Academia de Ciencias de Zaragoza.

Satisfacción y preocupación son los sentimientos que me han animado desde que me enteré que vengo a ocupar aquí la vacante que dejaron D. Zoel GARCÍA DE GALDEANO Y YANGUAS y D. Pedro ABELLANAS CEBOLLERO. El primero de ellos íntimamente unido a la Academia desde sus comienzos, pues fue uno de los seis miembros fundadores que formaron parte de la Comisión preparatoria de su Organización y Reglamento cuya constitución se llevó a cabo en 1914 a propuesta del entonces Catedrático de Análisis Matemático D. José RIUS Y CASAS. Como es conocido por muchos, si no es por todos, el profesor GARCÍA DE GALDEANO desempeñó un papel fundamen-

tal en la Matemática española de su tiempo, incluso hoy todavía perdura su influencia a través de los 3000 volúmenes que, aproximadamente, cedió a su muerte a la Facultad de Ciencias de Zaragoza y que fue el germe de la actual biblioteca en su Sección de Matemáticas.

D. Zoel, hombre de ciencia comunicativa, ansioso de enseñar a los demás todos cuantos conocimientos iba adquiriendo, no paró en su afán de propagar por España, mediante la pluma y la palabra, primero todas las ciencias en las que como pionero veía la base de la prosperidad nacional, y después en las Matemáticas en las que como ciencia pura por excelencia veía un índice seguro de la cultura y bienestar general. Por todo ello bien justo es que se tribute homenaje a quien su discípulo REY PASTOR llamaba tan certeramente "Apóstol de la Matemática moderna en España".

Volviendo los ojos atrás, recordemos que este ilustre profesor y académico, que nació en Pamplona el 5 de julio de 1846, era nieto del historiador navarro D. José Yanguas y Miranda e hijo de un brillante oficial de nuestro ejército, muerto en acción de guerra por los insurrectos de Santo Domingo. Su espíritu inquieto, ávido de saber, le hizo no desmayar y vencer en las dificultades económicas consiguientes, estudiando sucesivamente las carreras de Perito Agrimensor, Maestro Superior, Licenciado en Filosofía y Letras y, finalmente, la de Ciencias Exactas. Desde 1871 que se graduó en esta licenciatura, al establecerse en 1870 en nuestra Universidad una Facultad Libre de Ciencias, las Matemáticas serían el principal objeto de toda su vida profesional. Después de ejercer su actividad como Catedrático de los Institutos de Ciudad Real, Almería y Toledo durante los años 1881 al 1889, es nombrado para la Cátedra de Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias de Zaragoza que desempeñó hasta 1896, salvo una breve interrupción en el curso 1892-1893 por la conocida supresión accidental de la Facultad de Ciencias. En 1896, D. Zoel se hizo cargo de la Cátedra de Análisis Infinitesimal hasta su jubilación el 20 de septiembre de 1918. Ni aún después de esta fecha D. Zoel dio por terminada su actividad científica, continuando con sus publicaciones y en la Presidencia de la Real Sociedad Matemática Española de la que también fue uno de sus fundadores, y la Facultad de Ciencias se honró en contarle como Catedrático honorario hasta su fallecimiento en 1924. No creo sea momento oportuno de reproducir aquí la lista de las numerosas publicaciones de D. Zoel, más aún cuando el Prof. RODRÍGUEZ-VIDAL se ha ocupado recientemente de ello. Sin embargo debo recordar que también a D. Zoel se debe la publicación de la primera revista española de Matemáticas que se llamó "El Progreso Matemático" y se publicó durante los años 1892-95 y 1899-900. Finalmente, como homenaje a tan destacada figura de la Matemática española el Seminario Matemático de Zaragoza, dependiente del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, se denomina desde hace dos años Seminario Matemático "García de Galdeano".

D. Pedro ABELLANAS, último de mis predecesores en el sillón de esta Academia, nació el 20 de noviembre de 1914 en Zaragoza. Influido seguramente por su padre, constructor de obras, estudió la carrera de Arquitectura que no terminó porque su vocación le llamaba hacia las Matemáticas. Siguiendo esta llamada estudió en esta Facultad de Ciencias con los pro-

#### SOBRE LA TEORIA DE LA MEDIDA Y SUS FUNDAMENTOS

fesores SILVÁN, PINEDA, RIUS Y CASAS, MARCOS y AMAT. En 1940 ganó por oposición la Cátedra de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Media de Mérida y estudió en Leipzig, durante los meses de mayo a septiembre, bajo la dirección del famoso Profesor VAN DER WAERDEN. En 1942 ganó por oposición la Cátedra de Geometría Analítica de nuestra Universidad, dejando la de Madrid en donde era profesor encargado y a donde regresó en 1948 al ganar nuevamente por oposición la Cátedra de Geometría Proyectiva.

Poco podemos decir más sobre el Prof. ABELLANAS que no sea conocido de todos los presentes, pero debemos destacar su gran entusiasmo por la Matemática y, en especial, por el Algebra, manifestado en sus numerosas publicaciones, tanto de investigación como de carácter didáctico, así como también en los éxitos conseguidos en su labor docente.

En la actualidad el Prof. ABELLANAS es el Director del "Instituto Jorge Juan" de Matemáticas del C. S. I. C. y es uno de los mayores impulsores de las Reuniones Anuales de Matemáticos Españoles, que esperamos contribuyan a propagar el entusiasmo por la Matemática en España.

Es el momento ahora que pase a desarrollar el tema elegido para cumplir con la obligación reglamentaria.

Su elección no ha sido fácil, porque en mí luchaban dos tendencias difícilmente reconciliables. Por una parte quería exponer un tema de carácter general y por otra deseaba que mi ingreso en esta Academia de Ciencias fuese acompañado por alguna contribución mía a la Matemática, que aunque no fuese importante, manifestara mi cariño y deseo de trabajar por esta Corporación. Al final me he decidido por la última tendencia, eligiendo un tema, como es el de la medida, que creo ha tenido y tiene un interés fundamental en la Matemática; procurando que en lo posible su exposición sea también de interés para todo mi heterogéneo auditorio. No creo sea fácil lograrlo, por ello comienzo pidiendo perdón por todo lo pesada que pueda resultar mi disertación:

#### SOBRE LA TEORIA DE LA MEDIDA Y SUS FUNDAMENTOS

Mi interés por la teoría de la medida, se despertó hace ya bastantes años con una publicación en donde me interesaba de los tres problemas siguientes: *Construcción de medidas, Prolongación de medidas y Determinación de las relaciones existentes entre medida y topología*. Estos son desde luego, a mi parecer, tres de los problemas más importantes de la Teoría de la medida como podremos comprobar a través de la historia.

#### LA TEORIA DE LA MEDIDA EN LOS GRIEGOS

Alboreaba la Matemática como Ciencia, cuando en las nociones de longitud, área y volumen de los griegos se fundamentaba ya la Teoría de la medida en su invarianza respecto del grupo de movimientos. En los *Elementos* de EUCLIDES (300 a. de C.), que como se sabe es la obra clásica que más influencia ha tenido en el desarrollo de la Matemática, los libros V y VI contienen los conocimientos más importantes de la época sobre la teoría

de las magnitudes. El libro V es una teoría general de las proporciones, independiente de la naturaleza de las cantidades, mientras que en el libro VI las cantidades proporcionales son geométricas. El libro V contiene una de las más bellas aportaciones de los griegos, la definición de igualdad y desigualdad de razones atribuida a EUDOXIO, en donde implícitamente está ya el concepto de número real, al no hacerse ninguna distinción entre la censurabilidad e incommensurabilidad de las cantidades proporcionales. Como es bien conocido el descubrimiento de los irracionales y de las cantidades incommensurables fue debido a PITÁGORAS y a su escuela, y es famosa porque significó su descrédito y ruina al estar en contradicción con sus concepciones filosóficas.

También entre las definiciones del libro V incluye EUCLIDES el enunciado: *Se dice que dos cantidades tienen razón entre sí cuando una de ellas puede multiplicarse de manera que supere a la otra.* Esta definición es un nuevo postulado como lo reconoció ARQUÍMEDES y ahí está la explicación del nombre por el que habitualmente se le conoce.

En el libro XII de los *Elementos*, dedicado a la geometría del espacio, incluye EUCLIDES cuatro teoremas que exigen para su demostración el *método de exhaución*, que en definitiva son los siguientes:

1. Dos círculos están entre sí como los cuadros construidos sobre sus respectivos diámetros.
2. Una pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma de igual base y altura.
3. Un cono es equivalente a la tercera parte de un cilindro de igual base y altura.
4. Dos esferas están entre sí como los cubos construidos sobre sus respectivos diámetros.

Pero en los *Elementos* no se encuentra ningún intento de rectificar la circunferencia o arcos de circunferencia, como tampoco para cuadrar el círculo, ni para hallar las extensiones superficiales, totales o parciales, de las figuras limitadas por los cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera. Relativo a esto solamente se dan las cuatro proposiciones anteriores, faltando toda comparación entre los poliedros y los cuerpos redondos.

Para comprender bien las ideas de EUCLIDES sobre los conceptos de longitud, área y volumen creemos muy conveniente recordar las *Nociones comunes de los Elementos*:

1. *Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.*
2. *Si a cosas iguales se agregan cosas iguales los totales son iguales.*
3. *Si de cosas iguales se sustraen cosas iguales, los restos son iguales.*
4. *Si a cosas desiguales se agregan cosas iguales los resultados son desiguales.*
5. *Las cosas dobles de una misma cosa son iguales entre sí.*
6. *Las mitades de una misma cosa son iguales entre sí.*

7. *Las cosas que se pueden superponer una a la otra son iguales entre sí.*

8. *El todo es mayor que la parte.*

Está bien claro que la palabra "igual", que de algún modo viene definida por estas propiedades, se refiere a la "magnitud" de las figuras geométricas. Más tarde volveremos a hablar de estas importantes Nociones comunes cuando tratemos de nuestra teoría de la cantidad.

ARQUÍMEDES (287-212), la figura máxima de la geometría griega y una de las mentes mejores dotadas de la Matemática y de la Ciencia de todos los tiempos, cubre gran parte de las lagunas dejadas por los *Elementos* de EUCLIDES. En el libro *De la esfera y del cilindro* ARQUÍMEDES halla las áreas y volúmenes de los principales cuerpos redondos. Posiblemente, el principal motivo que se grabara sobre su tumba una esfera con su cilindro circunscrito, se debe a la atracción que sintió hacia su descubrimiento de que tanto las áreas como los volúmenes de ambos están en la misma proporción, que es la razón simple 2:3. En su escrito que se conoce con el nombre *Del método relativo a los teoremas mecánicos*, abreviadamente, el *Método*, se hallan también dos interesantes cubaturas por procedimientos mecánicos.

Otros dos libros de ARQUÍMEDES, dedicados a la geometría plana, se refieren a cuadraturas, una exacta y otra aproximada. En *Cuadratura de la parábola* se encuentra una doble demostración de la equivalencia de un segmento de parábola con un triángulo, una "mecánica" mediante las propiedades de la palanca y de los centros de gravedad y otra exclusivamente geométrica, pero en ambas, ARQUÍMEDES emplea esencialmente el proceso de paso al límite. Finalmente, en el escrito *De la medida del círculo*, ARQUÍMEDES prueba no sólo la equivalencia entre el problema de la cuadratura del círculo y el de la rectificación de la circunferencia, sino también da una solución aproximada de esos problemas.

Se podrían citar otras contribuciones de los geómetras griegos a la teoría de la medida, pero solamente recordaremos por su afinidad con el método mecánico de ARQUÍMEDES el teorema de PAPPUS (300 a. C.) referente a la determinación mediante el centro de gravedad de las áreas y volúmenes de los cuerpos engendrados por rotación, proposición que es conocida por el nombre de teorema de GULDIN (1577-1645) por haberla redescubierto este matemático suizo.

Mucho nos hemos extendido hablando de las aportaciones de los griegos a la teoría de la medida, pero en parte queda justificado por los siglos que habían de transcurrir hasta encontrar nuevas aportaciones importantes. Por otro lado, estas consideraciones nos van a ser útiles para comprender mejor los problemas que se irán planteando y resolviendo en las siguientes épocas.

## EL SIGLO XVII

Con el siglo XVI se cierra el período que va desde la decadencia griega a las grandes creaciones de la Matemática del siglo XVII.

Antes de tratar de lo que significaron estas nuevas ideas para la teoría de la medida, acaso merezca mencionarse el cálculo del sugestivo número  $\pi$  con 35 decimales, llevada a cabo por Ludolf VAN CEULEN (1540-1610), y la primera expresión del mismo en producto infinito lograda por Francois VIETE (1540-1603), más comúnmente conocido por VIETA, que indudablemente fue el más grande de los matemáticos de su tiempo por sus importantes contribuciones al Algebra.

La influencia de las ideas que llevaron a la creación de la Geometría analítica por René DESCARTES (1596-1650), se hizo sentir en toda la Matemática y en especial en la teoría de la medida. Efectivamente, dichas ideas junto con la definición rigurosa del número real daría lugar a la construcción de los espacios  $E_n = R^n$  sobre los que se fundamentaría esencialmente la teoría de la medida hasta los principios de este siglo. Aunque estos espacios se llamarían euclídeos por ser aplicables a ellos, para  $n \leq 3$ , los descubrimientos de los geométricos griegos, desde un punto de vista moderno no se podría sostener el isomorfismo de las geometrías correspondientes, a no ser que se diese por bueno el hecho de completar los axiomas de la geometría "euclídea" con un cierto número de nociones "primitivas" para los griegos. Pero ésto es una cosa ya habitual en la Matemática, puesto que todo cambio que ha afectado a los conceptos primitivos y a los axiomas ha tenido una influencia tal, que desde el punto de vista del rigor, es difícil afirmar que hayan dado lugar a la misma Matemática.

Otra de las creaciones del siglo XVII, el Cálculo infinitesimal, habría de tener capital importancia para el cálculo de áreas, volúmenes, rectificación de curvas, momentos de inercia... En nuestra concepción actual, la idea de *paso al límite* en combinación con las operaciones algebráicas es en donde reside la esencia del cálculo infinitesimal o cálculo sublime, como también se le llamaba antiguamente.

En todas las etapas de la evolución de la Matemática se encuentran, por lo menos en germen, los métodos del cálculo infinitesimal. Estos métodos aparecen en las críticas de los eleatas y en algunas argumentaciones de los sofistas y adquieren categoría y rigor científico en la teoría de las proporciones y en el método de exhaución de EUDOXIO. Este método permitió a ARQUÍMEDES deducir rigurosamente resultados que hoy se obtienen con el cálculo diferencial e integral, por lo que se puede considerar a ARQUÍMEDES como el precursor en la antigüedad de los métodos infinitesimales. La exhaución de Eudoxio es desde luego un método de demostración irreprochable, si se admiten ciertos postulados, pero tiene su punto débil en que es preciso conocer previamente el resultado a demostrar y, por tanto, en este sentido, no es propiamente un método de investigación, en contraste con los métodos nuevos del cálculo infinitesimal.

Es indudable, que la lectura de las obras de ARQUÍMEDES por los mate-

máticos del Renacimiento y modernos, que le tienen a la vez como modelo y fuente de inspiración, tuvo gran influencia en los nuevos métodos. En la actualidad con el descubrimiento, en 1906, de *El Método de ARQUÍMEDES* no queda ninguna duda de que la idea de integral la poseía ya el maravilloso matemático siracusano, pero esta obra quedó perdida para los precursores, fundadores y sistematizadores del cálculo infinitesimal.

Veamos el vacilante y lento proceso que condujo al concepto de integral. Inspirado en las obras de ARQUÍMEDES, Luca VALERIO (1552-1628) escribe un tratado sobre los centros de gravedad que contiene en germen las ideas que luego desarrollará CAVALIERI. También, influenciado por ARQUÍMEDES, Johannes KEPLER (1571-1630) escribe su *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615) en donde utiliza consideraciones infinitesimales. Las cuadraturas y cubaturas dadas por ARQUÍMEDES, mediante el método de exhaución, son calculadas por KEPLER recurriendo directamente a expresiones de carácter infinitesimal, admitiendo como si las figuras estuvieran compuestas de infinitas figuras infinitamente pequeñas de áreas o volúmenes conocidos. Así, supone la esfera descompuesta en pequeños conos de vértice en el centro y de base una pequeña porción de superficie esférica, de esa manera la esfera es equivalente a un cono de altura el radio y de base igual al área de la superficie esférica. Por consideraciones análogas, KEPLER logra dar, aunque no siempre correctamente, el volumen de más de 90 cuerpos de rotación, que llamó casi siempre con nombres derivados de frutas y que se propuso obtener con objeto de calcular la capacidad de los toneles para vino, entonces en uso. En la segunda parte de este tratado, KEPLER, al afirmar que los toneles austriacos eran los más convenientes, hace la observación, ya indicada por Nicola de ORESME (1313-1382), y que no había escapado a los astrónomos babilonios, de que la variación de una función es particularmente lenta en el entorno de un máximo o un mínimo, propiedad equivalente a la anulación de la derivada, y que con la generalidad lograda en la actualidad, conviene destacar que sólo es válida cuando el máximo o mínimo es alcanzado en un punto interior al dominio de la función.

Concepciones semejantes a las de KEPLER se hallan en Bonaventura CAVALIERI (1598-1647) miembro del grupo de amigos y discípulos de GALILEO. CAVALIERI es autor de un método de integración basado en los "indivisibles" que ocupa un lugar intermedio entre las rigurosas concepciones de ARQUÍMEDES, basadas en el método de exhaución, y los nuevos métodos infinitesimales que surgirán en la segunda mitad del siglo. Sin definir el término, CAVALIERI adopta los indivisibles de la filosofía escolástica, en donde los puntos son los indivisibles de las líneas, las líneas lo son de las figuras planas... Realmente, CAVALIERI no utiliza ninguna definición de los indivisibles, pues para él, no son más que una manera de hablar para referirse a los elementos de dos figuras que él compara, y que mediante una cierta técnica algebraica le permite calcular áreas y volúmenes de ellas, proceso estrechamente ligado al cálculo de una integral múltiple mediante integrales simples.

La falta de rigor de CAVALIERI está suplida por los resultados; el hecho es que el lenguaje de los indivisibles se mantuvo casi medio siglo.

El método lo expone CAVALIERI en *Geometria indivisibilis continuorum nova quadam ratione promota* de 1635, en la nueva edición modificada de 1653 y en *Exercitationes geometrica sex* de 1647. En la primera de estas obras se encuentra ya su famoso principio:

*Si dos áreas planas tienen la propiedad, de que toda paralela a una dirección dada las corta según segmentos cuyas longitudes están en una razón constante, entonces dichas áreas están en la misma razón.* Un principio análogo se da para los volúmenes de dos cuerpos cortados por planos paralelos a un plano fijo cuando las áreas están en una razón constante.

Los principios de CAVALIERI le llevan a reconocer que la mayoría de los problemas resueltos por ARQUÍMEDES se reducen a las cuadraturas de las tres primeras potencias de la variable que, por inducción, mediante un ingenioso método de recurrencia, generaliza para las potencias de exponente natural, lo cual le permite resolver además de los problemas de los antiguos otros resueltos o propuestos por KEPLER, así como también algunos nuevos.

Así, aparece una forma de clasificar estos problemas según el grado de dificultad, real o aparente, que presentan las cuadraturas a que ellos conducen.

También del círculo científico de GALILEO se preocuparon de estos problemas de cálculo, Evangelista TORRICELLI (1608-1647) y Vincenzo VIVIANI (1622-1703). TORRICELLI en su *Opera Geométrica* de 1644 halla diversas cuadraturas y cubaturas, entre estas últimas el volumen del sólido engendrado por rotación de un arco de hipérbola equilátera alrededor de una asymptota, haciendo notar que cuando el arco es infinito, el volumen del sólido es finito e igual al de un cilindro, que tiene por base el círculo descrito por la rotación del origen, y por altura la distancia de ese punto a la otra asymptota. Son también de interés otras investigaciones de TORRICELLI sobre las curvas exponencial, logarítmica y espiral logarítmica que quedaron inéditas hasta este siglo.

Otro matemático de la época Giles Personne de ROBERVAL (1602-1675) se ocupó en calcular áreas y volúmenes, así como rectificaciones de curvas y determinaciones de centros de gravedad, utilizando una concepción semejante a los indivisibles, aunque algo más próxima a los de los "infinitamente pequeños". Concretamente este método, fue empleado por ROBERVAL para calcular el área limitada por la curva que GALILEO llamó cicloide y del sólido engendrado por rotación de la misma.

Ahora puede parecer inverosímil, pero es cierto que el estudio de una simple curva como la cicloide dio un gran impulso al desarrollo del cálculo infinitesimal con las polémicas, desafíos y controversias que motivó y en las que intervinieron los matemáticos más notables de la época. Entre los problemas de rectificación más famosos, figura precisamente el de la cicloide, resuelto por el arquitecto de la catedral de San Pablo Christopher WREN (1632-1723) en 1658. Algunos años antes, entre 1640 y 1645, TORRI-

CELLI y ROBERVAL habían logrado rectificar los arcos de la espiral logarítmica mediante métodos cinemáticos.

Con concepciones semejantes a las de ROBERVAL, Blaise PASCAL (1622-1662) estudió numerosas propiedades de la cicloide, por él llamada "roulette", propiedades que constituyeron el tema de uno de los tantos desafíos sobre la cicloide.

Pierre FERMAT (1601-1666), uno de los más grandes matemáticos del siglo XVII, fue el que adelantándose a CAVALIERI, logró la integración de las potencias enteras de exponente  $n \neq -1$ , en la forma conocida, por medio de una fórmula para las sumas de las potencias de los  $m$  primeros enteros positivos, siguiendo así un método semejante al que empleó ARQUÍMEDES para la cuadratura de la espiral. El resultado fue generalizado por el mismo FERMAT para exponente racional.

Algunas rectificaciones de curvas, fueron también obtenidas por este genial matemático, reduciendo el problema al de las cuadraturas, con lo que quedaba establecida la analogía algebraica de ambos problemas.

Mientras con estas cuestiones, y otras, como la determinación de máximos y mínimos y de las tangentes a una curva, en las que destacó también FERMAT, se iba preparando la creación de los algoritmos del cálculo diferencial e integral; otros algoritmos infinitos, las series, productos infinitos, etc., hacen su aparición por obra principalmente de Jhon WALLIS (1616-1703), James GREGORY (1638-1675), Nicolau MERCATOR (1620-1687) y William BROUNCKER (1620-1684).

WALLIS, en su *Arithmetica infinitorum* (1655), siguiendo un método mezcla de inducción e interpolación y sin conocer los resultados de FERMAT, entonces no publicados, obtiene que la integral de  $x^m$  en el intervalo  $(0,1)$  es  $1/(m+1)$  cualquiera que sea  $m$ , racional o irracional. Es curioso destacar que este resultado, aunque incorrecto para  $m < -1$  coincide para estos valores de  $m$  con la parte finita de la misma integral. Pero lo más interesante y original de WALLIS, se halla en la extensión que hizo de su regla para toda suma o serie de potencias, y en sus importantes consideraciones sobre la integral euleriana,  $\int_0^1 (1-x^{1/m})^n dx$ , que le permitieron expresar  $4/\pi$  como producto infinito. Aparte de todo esto, hay un hecho histórico que hace memorable la *Arithmetica infinitorum* y es que en esta obra aparece el símbolo  $\infty$ .

Una consecuencia importante del método de cuadratura de WALLIS, fue el descubrimiento de la serie logarítmica, y con ella, una solución de la cuadratura del segmento de hipérbola equilátera. MERCATOR es quien resuelve este problema de cuadratura, con la feliz idea de escribir la ecuación de la hipérbola en la forma  $y = 1/(1+x)$ , que podía desarrollarse en serie de potencias y, por tanto, aplicarse el método de WALLIS.

Antes que MERCATOR, Gregoire de SAINT VINCENT (1584-1667) en su *Opus Geometricum Quadraturae* (1647), había hecho notar que si  $s = s(a, b)$  es el área del segmento hiperbólico limitado por la hipérbola  $xy = c$  y las rectas  $y = 0$ ,  $x = a (> 0)$  y  $x = b (> 0)$ , a valores en progresión geométrica de  $b/a$  les correspondían valores en progresión aritmética de  $s$ . Tam-

bien un poco antes, GREGORY en 1667, había dado una regla para calcular las áreas de los segmentos hiperbólicos por medio de logaritmos decimales.

Calculadas las cuadraturas de los segmentos de las paráolas  $y = x^n$  y las de los segmentos circulares hiperbólicos, los métodos de integración por partes y por cambios de variables, iniciados por PASCAL, FERMAT, GREGORY y BARROW, permiten resolver un gran número de estos problemas por reducción a las cuadraturas elementales. Entre ellos es notable la integración de  $\sec x$  por GREGORY en 1668.

Isaac BARROW (1630-1677) a quien acabamos de citar, es una figura de singular importancia en la Matemática, porque además de los métodos que ideó para calcular áreas y trazar tangentes a curvas, que son esencialmente los problemas claves de los cálculos integral y diferencial, respectivamente, no puede haber duda alguna de la gran influencia que ejerció en la obra de su discípulo predilecto: NEWTON.

Las contribuciones de todos estos matemáticos preparan y allanan el camino, para que por obra de NEWTON y de LEIBNIZ, surja el cálculo infinitesimal como rama propia y autónoma de la Matemática.

Hemos visto ya que todos ellos habían resuelto numerosos problemas sobre diversas cuestiones infinitesimales, pero fuera de algunos vislumbres, a los precursores de NEWTON y LEIBNIZ, les faltó una noción clara de límite, que mostrase la unificación de sus métodos, los cuales carecían del rigor de las demostraciones de los geómetras griegos. En parte, esta etapa empírica de la evolución del análisis infinitesimal, queda superada por NEWTON y LEIBNIZ, los cuales volviendo un poco la espalda al pasado buscan principalmente la justificación de los nuevos métodos, no en las demostraciones, sino en la fecundidad y coherencia de los resultados.

Es preciso llegar hasta el siglo XIX, para que el análisis infinitesimal alcance un alto grado de rigor, e incluso entrar bastante en el XX para que los tres conceptos habituales de límite queden totalmente unificados. El rigor se ha logrado, pero a costa de dar un carácter potencial a los infinitésimos, en contraposición al carácter actual que se les dio en un principio, que era irreconciliable con el rigor matemático. Sin embargo, la coherencia lograda por los matemáticos del siglo XVII, hace pensar que si se considera en lugar de esos infinitésimos otras nociones rigurosas, se puede volver a dar un carácter actual al análisis infinitesimal, de manera que su aspecto formal sea el mismo. Efectivamente, como veremos, la teoría de la integración en espacios topológicos, puede desarrollarse dentro de esa aspiración con un carácter actual-potencial, mediante el concepto de *germen de medida*.

#### EL SIGLO XVII: NEWTON Y LEIBNIZ

La contribución más original e importante de Isaac NEWTON (1642-1727) al cálculo infinitesimal, es su "método de fluxiones" que aunque fue publicado por primera vez en 1736 con el nombre de *Methodus fluxionum et series infinitarum* había sido escrito en 1671. Sus "fluentes" son las fun-

ciones del tiempo y sus "fluxiones" son las derivadas respecto del mismo, que no es más que un parámetro universal en una forma ya imaginada por BARROW. El carácter general del método es destacado por el propio NEWTON, en una carta de 1672, al decir que puede aplicarse "no sólo al trazado de tangentes a cualquier curva, sea geométrica o mecánica..., sino también para resolver cualquier clase de problemas sobre curvaturas, áreas, longitudes, centros de gravedad, etc. ...", agregando que "ha entrelazado ese método, con aquel otro método que consiste en trabajar con las ecuaciones, reduciéndolas a series infinitas". Así las series, y entre ellas, la del binomio, aparecen en las obras de NEWTON como recurso para resolver ecuaciones y efectuar cuadraturas. También con el mismo objeto en su *Methodus differentialis* (1712), aparece la llamada *fórmula de interpolación* de NEWTON, que constituye el punto de partida de la teoría de las diferencias finitas.

En *De Analysi per aequationes...*, las cuadraturas de las potencias se realizan de acuerdo con la regla general dada por FERMAT y WALLIS, pero lo original y nuevo, es su descubrimiento sobre el carácter inverso del problema de la tangente y el de la cuadratura, quedando así desatado el nudo gordiano del nuevo análisis.

En NEWTON aparece la idea de límite funcional, aunque en forma un poco oscura, cuando con objeto de resolver las objeciones que se le hicieron, por su anulación de los incrementos, en la determinación de fluxiones, en su *Tractatus de quadratura curvarum* (1706), hace "evanescer los incrementos de las variables" para obtener "la razón de los incrementos evanescentes".

Mientras en Inglaterra, NEWTON lograba dar unidad y autonomía al cálculo infinitesimal, en el continente por obra de Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716), tal unidad y autonomía se acentuaban. Si la obra de NEWTON, fue la de un filósofo natural, impulsado por sus inquietudes sobre la Mecánica, la de LEIBNIZ fue la de un filósofo y la de un algebrista. Su preocupación por la claridad de los conceptos y por el aspecto formal de la Matemática, le permitieron crear el simbolismo adecuado para los nuevos algoritmos.

LEIBNIZ, independientemente de NEWTON, reconoce el carácter inverso del problema de la tangente y el de la cuadratura, a donde llegó por consideraciones sobre el "triángulo característico", que dice haber tomado de PASCAL y que ya había sido considerado por BARROW.

La primera publicación de LEIBNIZ sobre el Cálculo diferencial es de 1684 en las *Actas Eruditorum* de Leipzig, aunque desde 1676 estaba ya en posesión de las reglas y fórmulas más simples de él. En este mismo escrito utiliza LEIBNIZ la notación  $dx$  para la diferencial, de manera semejante que NEWTON había utilizado la notación  $\dot{x}$  para la fluxión. Dos años después, en 1686, aparecen las primeras publicaciones de LEIBNIZ relativas al Cálculo integral, utilizando ya el signo integral. Antes había empleado con el mismo objeto la abreviatura "Omn".

La forma distinta de concebir la Matemática NEWTON y LEIBNIZ, se ve

claramente en su correspondencia. Así cuando NEWTON, más analista que algebrista, anuncia en 1676 que sabe resolver todas las ecuaciones diferenciales, por desarrollo de la solución en serie de potencias, LEIBNIZ responde que lo que se trata es por el contrario de obtener la solución en términos finitos, siempre que ello se pueda lograr. La idea de LEIBNIZ es pues bien clara, es lograr la algebrización del análisis infinitesimal mediante un cálculo operacional adecuado. Así, coincidiendo con Joham BERNOULLI (1667-1748), efectúa entre 1702 y 1703 la integración de las funciones racionales, por descomposición en fracciones simples, aunque de una manera formal, sin tener en cuenta la circunstancia que acompaña a la presencia de raíces complejas del denominador. Estas consideraciones podían dar una idea un poco falsa, si no agregamos que tanto NEWTON como LEIBNIZ, intercambiando estos puntos de vista, se preocuparon e hicieron contribuciones en los campos opuestos.

En las vidas de NEWTON y LEIBNIZ existe también otro punto de contacto, pues una influencia parecida a la de BARROW sobre NEWTON es la ejercida por HUYGENS sobre LEIBNIZ. Christian HUYGENS (1629-1695), aunque era principalmente un físico, también era un matemático, como lo prueban sus importantes contribuciones al Análisis infinitesimal. Así que LEIBNIZ encontró un excelente maestro y guía en HUYGENS para manifestar su vocación matemática.

En la orientación algebraica del nuevo análisis, emprendida por LEIBNIZ, sobresaldrán después matemáticos tan famosos como Adrien Marie LEGENDRE (1752-1833), Niels Henrik ABEL (1802-1829) y Carl Gustav Jacob JACOBI (1804-1851) en la integración de funciones algebraicas. En nuestro siglo, esta orientación ha dado lugar a la creación del Algebra diferencial, que tiene por principal finalidad el estudio algebraico de las ecuaciones diferenciales, pero en ello no entramos porque nos apartaríamos demasiado de nuestro tema.

### EL SIGLO XIX

Volviendo a la evolución histórica del concepto de integral en el punto donde lo hemos dejado, la etapa sin duda más importante que aparece, es la iniciada por Agustin-Louis CAUCHY (1789-1857). CAUCHY define la integral, analíticamente, como límite de una suma y no como operación inversa de la derivación, lo cual representa un retorno a la noción de integral de la antigüedad y primera parte del siglo xvii. Así la integral definida, que durante mucho tiempo quedó en un lugar secundario, con CAUCHY vuelve a desempeñar un papel primordial.

Para asegurar la existencia de la integral, CAUCHY se limita a las funciones continuas, quedando de este modo relacionada por primera vez tal existencia con la continuidad, propiedad ésta que había sido considerada por Bernard BOLZANO (1781-1848), adelantándose a CAUCHY y a los demás analistas del siglo xvii. La demostración de CAUCHY naturalmente no es correcta, pues su método exigía aplicar el teorema de la continuidad uniforme establecido por Heinrich Eduard HEINE (1821-1881) en 1872.

En cuanto a la notación de integral definida, la adoptada por CAUCHY es la usual  $\int_a^b f(x) dx$  que representa una notable simplificación sobre la  $\int f(x) dx \left[ \begin{matrix} x = b \\ x = a \end{matrix} \right]$  empleada por EULER.

El concepto de integral de CAUCHY, fue generalizado primeramente por Peter Gustav LEJEUNNE DIRICHLET (1805-1859) para las funciones cuyos puntos de discontinuidad forman un conjunto con un número finito de puntos de acumulación, utilizando para ello un artificio empleado ya por CAUCHY cuando los puntos de discontinuidad de la función son aislados. Para demostrar la existencia de funciones no integrables, DIRICHLET define su célebre función, igual a 1 para  $x$  racional y a 0 para  $x$  irracional, la cual está de acuerdo con su concepto general de función.

Una "pequeña modificación" en el concepto de integral de CAUCHY, permitió a Georg Friedrich Bernhard RIEMANN (1826-1866) hacer sentir también la influencia de su genio matemático en la teoría de la integración, superando las integrales de Cauchy y de Dirichlet, así como también la que se obtiene por reiteración transfinita del proceso de CAUCHY-DIRICHLET para las funciones acotadas. La idea de RIEMANN es determinar cuando las "sumas de Riemann" de una función acotada  $f$ , en un intervalo finito  $[a, b]$ , convergen a un número real cuando la máxima longitud de los intervalos de la subdivisión tiende a cero. El problema es resuelto por RIEMANN bajo dos formas diferentes, una de las cuales viene expresada por la condición de que para cada par de números  $\omega > 0$  y  $\varepsilon > 0$ , haya una subdivisión de  $[a, b]$ , tal que sea  $< \varepsilon$  la suma de las longitudes de los intervalos de la misma en donde la oscilación de  $f$  supere a  $\omega$ . De esta condición resulta inmediatamente que la función de Dirichlet tampoco es integrable Riemann, pero el primer ejemplo de función no integrable Riemann cuyo conjunto de puntos de discontinuidad sea no denso o raro fue dado por Henry John STEPHEN (1826-1883) en 1875. Este ejemplo tiene gran interés, porque deshace completamente la creencia de que toda función, cuyo conjunto de puntos de discontinuidad sea no denso, es integrable Riemann o Dirichlet, error en que según parece estuvo el mismo DIRICHLET.

En 1875 es cuando también aparece la memoria de Jean Gaston DARBOUX (1842-1917) sobre las funciones discontinuas, en donde hace sus importantes contribuciones a la teoría de la integral. En ella, además de lograr la primera demostración correcta, basada en el teorema de Heine, de la integrabilidad de una función continua en un intervalo  $[a, b]$ , DARBOUX precisa algunas cuestiones relativas a la integral de Riemann y da una condición de integrabilidad Riemann, mediante sus integrales superior e inferior.

Otra condición de integrabilidad Riemann, es la formulada por Paul D. G. du Bois REYMOND (1831-1889), que representa un paso intermedio entre la dada por RIEMANN y la que dará después LEBESGUE mediante su teoría de la medida.

Hemos llegado por fin a la época de la gran creación contoriana de la teoría de conjuntos. El número real ha sido definido mediante las cortadu-

ras por Julius Wilhelm Richard DEDEKIND (1831-1916) y mediante las sucesiones de Cauchy por Charles MERAY (1835-1915) y Georg CANTOR (1845-1918), el mismo año 1872 que se publica la definición utilizada por WEIERSTRASS en sus lecciones de Berlín. Los matemáticos pueden disponer entonces de conceptos suficientemente claros y rigurosos de conjunto, función y número real, fundamentales para desarrollar de una manera general la teoría de la medida.

En este ambiente, surgen aproximadamente hacia 1884 los primeros intentos para definir la medida de una forma amplia por obra de STOLZ, HARNACK y CANTOR. Los dos primeros toman como medida de cada parte acotada  $A$  de la recta real  $R$ , el extremo inferior de los números reales que se obtienen sumando las longitudes de un número finito de intervalos cuya reunión cubre a  $A$ , mientras que CANTOR, define como medida de cada conjunto acotado  $A$  de  $R^n$ , el extremo inferior del "volumen" del conjunto  $V(\rho)$  de los puntos cuya distancia a  $A$  es  $\leq \rho (> 0)$ . CANTOR reduce así la definición de medida de cualquier conjunto acotado  $A$  de  $R^n$  a la definición de "volumen" de los conjuntos cerrados  $V(\rho)$  que no precisa, limitándose sólo a indicar que se puede calcular por una integral múltiple.

Estas definiciones, en esencia equivalentes, presentan la dificultad de que la reunión de dos conjuntos disjuntos  $A$  y  $B$ , como los conjuntos de los puntos racionales e irracionales de un intervalo  $[a, b]$ , puede tener una medida menor que la suma de las medidas de  $A$  y  $B$ . Para evitar este inconveniente, Giuseppe PEANO (1858-1932) y Camille JORDAN (1838-1922) introducen algunos años después junto a la "medida" de Cantor  $\mu^*(A)$  de un conjunto acotado  $A$ , contenido en un intervalo  $I$ , su "medida interior"  $\mu_*(A) = \mu^*(I) - \mu^*(I - A)$ , que no depende de  $I$ , y llaman "medibles" a los conjuntos para los cuales estos dos números son iguales. De esta manera, con la restricción de limitarse a los conjuntos medibles en el sentido de PEANO-JORDAN, se ha logrado una cosa tan natural como que la medida de la reunión de dos conjuntos disjuntos  $A$  y  $B$  sea igual a la suma de las medidas de  $A$  y  $B$ .

A conclusiones semejantes a las de PEANO y JORDAN, podía haber llegado fácilmente RIEMANN si, considerando funciones análogas a la de DIRICHLET, hubiera definido la medida de un conjunto  $A$ , contenido en un intervalo finito  $[a, b]$ , mediante la integral  $\int_a^b \varphi_A(x) dx$  de la función característica  $\varphi_A$  de  $A$  ( $\varphi_A(x) = 1$  para  $x \in A$ ,  $\varphi_A(x) = 0$  para  $x \notin A$ ) bajo la restricción de que  $\varphi_A$  fuese integrable en el sentido por él adoptado.

Conviene agregar, que el concepto de medida de PEANO-JORDAN equivale, para el plano  $R^2$ , al proceso natural de tomar como medida de un conjunto acotado  $A$  de  $R^2$ , el número real que resulta haciendo tender  $\epsilon$  a 0 en la suma de las áreas de los cuadrados de un  $\epsilon$  — reticulado, que tienen algún punto común con  $A$ , con tal que la diferencia entre esa suma y la suma de las áreas de los cuadrados del mismo reticulado, contenidos en  $A$ , tienda a 0 con  $\epsilon$ .

A la vista de consideraciones semejantes más intuitivas y más al alcan-

ce de cualquier hombre, se destaca que la principal contribución de PEANO y JORDAN, se debe a que en lugar de tomar la medida como una cosa hecha y dada, dentro del espíritu de la Matemática definen la medida con precisión de modo que cumplan las condiciones deseables.

Tanto la medida de PEANO-JORDAN como la integral de RIEMANN presentaban dificultades que hacían conveniente extender los conceptos de medida e integral. Efectivamente, ni el conjunto de los puntos racionales de un intervalo  $[a, b]$  era medible según PEANO-JORDAN, ni la función de Dirichlet era integrable Riemann. Aunque estas dificultades no fueran las que llevaran, directamente, el nacimiento de la nueva teoría de la medida, que surge en el último decenio del siglo, lo cierto es que en la nueva teoría dichas dificultades quedaran eliminadas, si no completamente, por lo menos en los casos sencillos.

### FINALES DEL SIGLO XIX Y SIGLO XX

No creemos que se haya dado mucho el caso de que un profesor destacado haya logrado tener cuatro discípulos de primera categoría. Esto es el caso de JORDAN y sus discípulos BOREL, BAIRE, LEBESGUE y FRÉCHET, de los que iremos sucesivamente viendo sus contribuciones relacionadas con la teoría de la medida e integración.

Emile BOREL (1871-1919) es el que tiene el mérito de iniciar la nueva teoría de la medida, impulsado por el estudio de ciertas series de funciones racionales. El punto de partida de BOREL es la definición de medida de un abierto acotado  $G$  en  $R$ . Con este objeto, en lugar de utilizar cubrimientos finitos de  $G$ , formados por intervalos, como se procedía antes, BOREL propone tomar como medida de  $G$  la suma de la serie de las longitudes de los intervalos componentes, basándose en un resultado conocido desde CANTOR, según el cual todo abierto  $G$  en  $R$  es reunión numerable de intervalos abiertos y disjuntos. El concepto de medida lo extiende BOREL a la clase de los conjuntos por él llamados "medibles" y después llamados por otros "borelianos", que se pueden obtener a partir de los abiertos por iteración indefinida de las operaciones de *reunión numerable* y *diferencia de conjuntos*. La propiedad fundamental, completamente nueva, de la medida de Borel es la *aditividad completa*: La medida de la reunión de una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos es igual a la suma de las medidas de estos conjuntos.

Creemos importante destacar que en la teoría de la medida de Borel, tiene un papel fundamental el conocido teorema de Heine-Borel, demostrado por BOREL en su tesis, según el cual, todo conjunto cerrado y acotado de la recta real es numerablemente compacto en el sentido actualmente adoptado. Otra propiedad utilizada por BOREL, que ha pasado casi desapercibida, no obstante su importancia, es: Para cada número  $\epsilon > 0$  existe una serie de números positivos cuya suma es no superior a  $\epsilon$ .

Estas ideas de BOREL inauguran una nueva era en el análisis, pues además de servir de base para la generalización del concepto de integral, lle-

vada a cabo por LEBESGUE en los primeros años de este siglo, son el punto de partida, junto con los trabajos de BAIRE, de una serie de investigaciones sobre la clasificación de los conjuntos y de las funciones, desde un punto de vista puramente topológico.

René BAIRE (1874-1932), procediendo de manera semejante que BOREL, para definir los conjuntos boreelianos, define las llamadas *funciones de BAIRE*, como aquellas funciones que se pueden obtener a partir de las funciones continuas, por iteración indefinida de la operación de límite de sucesiones funcionales, sirviéndose del mismo proceso para clasificar dichas funciones. Otros conceptos importantes que se deben también a BAIRE, son el de *semicontinuidad* y el de *conjunto de primera categoría*, éste último introducido para la caracterización de las funciones que son límite de una sucesión de funciones continuas.

Estas investigaciones de naturaleza topológica de BOREL y BAIRE, en unión de una famosa memoria de LEBESGUE de 1905 sobre las “*funciones representables analíticamente*”, en donde quedaron identificadas éstas con las funciones de Baire y con los medibles B (o de Borel), y del descubrimiento hecho por M. SOUSLIN en 1917 de que la imagen continua de un boreiano puede no serlo, fueron el origen de la *teoría de conjuntos analíticos* tan íntimamente ligada a N. LUSIN y a un grupo de matemáticos polacos entre los que figura W. SIERPINSKI.

El nombre de Henry LEBESGUE (1875-1941) estará siempre unido a la teoría de la medida y de la integración. Efectivamente, LEBESGUE, en su transcendental tesis doctoral *Intégrale, longuer, aire* (1902) completa las ideas de Borel, modificando ligeramente el método de PEANO-JORDAN, mediante la utilización de cubrimientos numerables de intervalos o de abiertos, así define la “medida exterior” de un conjunto acotado  $A \subset R$ , como el extremo inferior de la medida de los abiertos que contienen a  $A$ , y después la “medida interior” de  $A$ , si  $I$  es un intervalo que contiene a  $A$ , como la diferencia de las medidas exteriores de  $I$  y de  $I - A$ . Un conjunto  $A$  es medible según LEBESGUE, si estas medidas son iguales; entonces resulta que la clase de los conjuntos medibles (L), o según LEBESGUE, es más amplia que la formada por los medibles (B) y tal que para cada conjunto medible (L), existen dos conjuntos  $B_1$  y  $B_2$  medibles (B), con igual medida, que le limitan por dentro y por fuera:  $B_1 \subset A \subset B_2$ . Esta definición se extiende inmediatamente a los espacios  $R^n$ , así la antigua concepción de integral definida  $\int_a^b f(x)$  de una función acotada  $f \geq 0$ , como área del conjunto limitado por la curva  $y = f(x)$  y las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ , da una generalización inmediata, de la integral de Riemann para todas las funciones para las cuales dicho conjunto es medible (L).

Pero el genial analista, guiado por su símil del comerciante ordenado, sigue también otro método para definir la integral de una función acotada  $f$ , que consiste en subdividir el intervalo que tiene por extremos los de la función dada, mediante un número finito de puntos  $y_i$ , y considerar los conjunto  $E_i$ , de los puntos que satisfacen  $y_{i-1} \leq f(x) < y_i$ , para formar las sumas  $S = \sum \bar{y}_i \mu(E_i)$ , donde  $\bar{y}_i$  es cualquier número comprendido entre

$y_{i-1}$  e  $y_i$  y  $\mu(E_i)$  es la medida de  $E_i$ , en el supuesto de que todos estos conjuntos sean medibles, es decir, que  $f$  sea medible. Nos hemos referido a funciones no acotadas, pero LEBESGUE define también la integral para funciones no acotadas, utilizando con este fin series en lugar de sumas finitas.

Otros conceptos de integral equivalentes al de LEBESGUE se deben a W. H. YOUNG (1910), F. RIESZ, LA VALLÉE POUSSIN, REY PASTOR, TONELLI, etcétera.

Conviene destacar que la originalidad de LEBESGUE, no reside tanto en la idea de generalizar el concepto de integral, como en el descubrimiento del teorema fundamental de paso al límite, válido para la integral (L), que no es más que una consecuencia de la aditividad completa de la medida.

Aunque no es nuestro propósito detenernos a describir aquí las innumerables aplicaciones que encuentra la teoría de la integral de Lebesgue en todo el Análisis, nos parece obligatorio recordar los grandes progresos que se han logrado con ella en los conceptos de longitud de curvas y área de superficies curvas, en las series de Fourier y en los espacios de Hilbert junto con la definición de los espacios  $L^p$ .

Por su extraordinario interés, dedicaremos más atención al problema de hallar la relación entre los conceptos de integral indefinida y primitiva, en el que también LEBESGUE hizo importantes contribuciones. Este problema se plantea ya con la integral de Riemann, puesto que es fácil dar ejemplos de funciones integrables Riemann con la propiedad de que su integral indefinida carezca de derivada en algunos puntos. Recíprocamente, según demostró VOLTERRA en 1881, una función continua puede tener derivada acotada en un intervalo  $I$ , pero no ser integrable Riemann. Estos resultados se pueden precisar más, cuando se trata de la integral de Lebesgue. En efecto, si  $F$  es la integral indefinida de una función  $f$ , integrable (L) en  $I = [a, b]$ , se tiene  $F'(x) = f(x)$  en casi todo  $I$  según probó LEBESGUE. Análogamente, si  $F$  es derivable en  $I$  y su derivada  $F' = f$  es acotada,  $f$  es integrable y se puede aplicar la regla de Barrow. En el caso en que  $f$  no sea acotada el problema es más complejo, pero LEBESGUE lo abordó también caracterizando las funciones continuas  $F$  para las cuales existe  $F'$  en casi todo  $I$  y es integrable. De manera semejante a como se logró esto mediante el concepto de variación acotada, las integrales indefinidas fueron también caracterizadas por LEBESGUE por la propiedad de ser absolutamente continuas.

La existencia de funciones con derivada no integrable (L) ha conducido a una nueva generalización, llamada *totalización* y debida a DENJOY, del concepto de integral indefinida, que consiste en una reiteración transfinita de ciertas operaciones, logrando así que el concepto de integral indefinida comprenda al de primitiva. Para restablecer la equivalencia que había entre estos conceptos cuando las funciones eran continuas, DENJOY y KHINTCHINE han introducido el concepto de *derivada aproximativa*.

En todos estos procesos el cálculo de la primitiva se efectúa recurriendo a la integral indefinida, pero PERRON, en 1914, invirtió el método, utilizando la primitiva para obtener la integral indefinida. Como toda función se

puede acotar entre otras dos, llamadas *mayorante y menorante de La Valée-Poussin*, que sean derivadas inferior y superior, en el sentido de DINI, de sendas funciones nulas en el origen, cuando éstas tengan el mismo valor en  $x$ , se adopta la función resultante como integral (P), o mejor primitiva (P), de la función dada. Esta integral de PERRON resulta así idéntica a la integral de Lebesgue para funciones acotadas, pero existen funciones integrables (P) que no lo son (L). Finalmente, HAKE y ALEXANDROFF, RIDDER y BURKILL, mediante sendas generalizaciones de la integral (P), han logrado la equivalencia de ésta con las integrales restringida y generalizada de DENJOY.

En 1894, T. STIELTJES en su transcendental memoria *Récherches sur les fractions continues*, considera por vez primera integrales del tipo  $\int_a^b f(x) dg(x)$ , en donde  $f$  es una función continua y  $g$  es no decreciente. De

esta forma, el concepto de "distribución de una masa", familiar desde hace bastante tiempo en la Física, se introduce también en la Matemática. Sin embargo, han de pasar algunos años hasta que este concepto vuelva a atraer la atención. Es con motivo de resolver un problema propuesto por HADAMARD, años antes, cuando F. RIESZ demuestra en 1909 que las funcionales lineales continuas sobre el espacio de las funciones reales continuas en  $[a, b]$ , dotado de la topología uniforme, se pueden expresar por una integral de Stieltjes:  $f \rightarrow \int_a^b f d\varphi$ . Estas ideas encuentran acogida en J. RADON quien en 1913, combinando las ideas de RIESZ y LEBESGUE, define la llamada *integral de Lebesgue-Stieltjes* a partir de una función completamente aditiva de conjunto. Esta memoria de RADON y la marcada orientación hacia lo abstracto de comienzos de este siglo, señalan el tránsito a la teoría de la integración sobre espacios abstractos. Es M. FRÉCHET quien observa que todos los resultados de este trabajo, pueden extenderse al caso en el que la función completamente aditiva de conjunto esté definida para ciertas partes de un conjunto abstracto  $E$ , en lugar de estarlo para las partes medibles de  $R^n$ .

La clase de los conjuntos medibles (L) de  $R$ , aunque más amplia que la clase de los conjuntos de Borel, no coincide con la formada por todas las partes de  $R$ , como se conoce desde 1905 por obra de G. VITALI. No obstante, según probó S. BANACH en 1923, existe una medida finitamente aditiva (o extensión) sobre  $R$  o  $R^2$  que coincide con la medida de Lebesgue para todo conjunto medible y que además es invariante por cualquier congruencia o movimiento. Pero tampoco esto es posible para  $R^n$ , si  $n \geq 3$ , según demostró antes HAUSDORFF en 1913 mediante una notable descomposición de la superficie esférica en cuatro partes, tres de ellas congruentes entre sí y la otra numerable. Más sorprendente que este resultado es la llamada *paradoja de Banach-Tarski* (1924) según la cual, dos esferas de  $R^n$  radios distintos se pueden descomponer para  $n \geq 3$ , en un número finito de partes respectivamente congruentes. Desde un punto de vista puramente abstracto, tal descomposición no debe considerarse como una paradoja sino

semejante a lo que ocurre con la correspondencia  $n \leftrightarrow 2n$  entre los números naturales y sus duplos, independientemente de que se aplique o no el axioma de la elección. Sin embargo, la paradoja surge de manera manifiesta en el momento que se identifican las partes del espacio  $R^3$  con las del “espacio intuitivo real” y, por ejemplo, esas dos esferas con el Sol y un guisante.

En nuestra opinión, solamente las importantes aplicaciones que ha encontrado la teoría de la integración de BOREL y LEBESGUE en toda la Matemática y, en particular, en los espacios funcionales, pueden explicarse que no se haya prestado la atención debida a los citados resultados de BANACH, HAUSDORFF y TARSKI. Efectivamente, la importancia que tienen éstos, es sin duda grande, tanto en los fundamentos de la teoría de la medida, como en la contribución que suponen en el viejo problema de asignar una medida a “toda parte” del plano y del espacio, de modo que sea invariante respecto del grupo de movimientos y que queden conservadas las áreas y volúmenes de las “figuras elementales”.

### INVESTIGACIONES PROPIAS

Desde hace unos tres años nuestras investigaciones se han dirigido hacia estas cuestiones, tratando primero de dar condiciones suficientes para que para toda medida finitamente aditiva (en abreviatura: f. ad.) o extensión  $\mu$ , definida sobre un anillo  $\mathcal{S}$  de partes de un conjunto  $E$  e invariante por un grupo  $G$  de permutaciones de  $E$ , exista una extensión  $\mu$ , definida sobre la clase  $\mathcal{T}$  de las partes de los conjuntos pertenecientes a  $\mathcal{S}$ , tal que sea una prolongación de  $\mu$  y también invariante por el grupo  $G$ . Estas propiedades justifican que llamemos a esta extensión  $\mu$  una prolongación ultracompleta de  $\mu$  invariante por  $G$ .

El problema a que nos acabamos de referir, fue el que dio origen, primero a un trabajo en el que dimos una generalización para A-módulos del *teorema de Hahn-Banach* y después a otro donde, desde un nuevo punto de vista, hicimos un estudio general del problema abstracto de la extensión que trata, dado un grupo  $G$  de permutaciones de un conjunto y una extensión  $\mu$  ( $\neq 0$ ), definida sobre un anillo de partes de  $E$  y relativamente invariante por  $G$ , de averiguar si existe una prolongación ultracompleta  $\mu$  de  $\mu$  relativamente invariante por  $G$ . Aunque no podemos entrar mucho en detalles sobre el papel que desempeña la estructura del grupo  $G$  en este problema, vamos a exponer algunas de las aplicaciones concretas de los resultados a que llegamos en estos trabajos:

- 1) Para el plano euclídeo, se puede mejorar el teorema de Banach afirmando que existe una prolongación ultracompleta de la medida de Lebesgue, relativamente invariante por el grupo de las semejanzas.
- 2) En el plano no euclídeo (hiperbólico o elíptico) no existe ninguna prolongación ultracompleta del área de las figuras elementales que sea invariante por el grupo de los movimientos.

3) Cualquiera que sea la extensión ultracompleta  $\mu$  sobre una superficie esférica  $E$  con  $\mu(E) = 1$ , para cada  $\epsilon > 0$  existe un conjunto  $S \subset E$  y una rotación  $\alpha$ , cuyo eje pasa por el centro de  $E$ , con la propiedad de que  $\mu(S) < \epsilon$  y  $\mu(\alpha S) > 1 - \epsilon$ .

El primero de estos resultados se obtiene inmediatamente del citado teorema de Banach aplicando el siguiente teorema de carácter general: Sea  $\mu$  una extensión, definida sobre  $\mathcal{S}$ , relativamente invariante por el grupo  $G$  de permutaciones de  $E$ , y  $k$  el correspondiente multiplicador, es decir,  $\mu(\alpha S) = k(\alpha) \mu(S)$  para cada  $\alpha \in G$  y  $S \in \mathcal{S}$ . Entonces, si existe una prolongación ultracompleta  $\mu_1$  de  $\mu$  invariante por el grupo  $G_1 = k^{-1}(1) = \{\alpha | \alpha \in G, k(\alpha) = 1\}$ , se puede asegurar que existe también una prolongación ultracompleta  $\bar{\mu}$  de  $\mu$  relativamente invariante por  $G$ .

Respecto al resultado expuesto en segundo lugar, conviene agregar que lo hemos probado directamente, mediante un método general que hemos ideado, sin recurrir a ninguna descomposición de dos conjuntos en un número finito de partes respectivamente congruentes, lo cual, por otra parte, en particular, en el caso del plano hiperbólico nos parece difícil conseguir siguiendo el camino de BANACH-TARSKI.

No obstante, esta cuestión fue la que nos indujo por primera vez a la conjectura de que dos círculos cualesquiera del plano hiperbólico, se podían descomponer en un número finito de partes respectivamente congruentes. Esto lo hemos logrado probar en nuestros últimos trabajos, todavía no publicados, en donde simultáneamente ponemos de manifiesto, la íntima relación que hay entre el problema de la extensión o de la medida y la descomposición de dos conjuntos en un número finito de partes respectivamente congruentes, relación en cierto modo latente desde la antigüedad y sobre todo después de los trabajos de BANACH, HAUSDORFF, TARSKI y continuadores.

Finalmente, el tercero de los resultados anteriores, que se puede considerar como una nueva "paradoja", semejante a la de Banach-Tarski, tiene el interés de contener en germen una de las ideas originales más importantes de nuestro trabajo sobre el problema de la extensión.

Veamos ahora las últimas investigaciones que hemos realizado con motivo de este discurso, sobre las que conviene añadir que han sido grandemente impulsadas por la revisión histórica que nos sentimos obligados a hacer. Estas investigaciones las podemos clasificar en tres apartados:

- 1) Investigaciones sobre una nueva fundamentación de la teoría de la medida.
- 2) Investigaciones sobre las medidas topológicas, esto es, sobre aquellas medidas de un espacio topológico  $E$  que están íntimamente unidas a la estructura de  $E$ .
- 3) Investigaciones sobre la teoría de series divergentes de las que no trataremos porque, aunque han sido motivadas por la revisión histórica que hemos hecho, se salen del tema elegido.

Hasta ahora no se ha conseguido dar un concepto de cantidad, lo suficiente

cientemente preciso y general, para poderlo manejar con el rigor que se requiere en la Matemática, puesto que a lo más, lo que se hace es identificarlo con el concepto de número real.

Sean  $\mathcal{A}$  un retículo de partes de un conjunto  $E$  y  $\rho$  una relación de equivalencia en  $\mathcal{A}$  tales que:

a) Cualquiera que sea la familia finita  $\{A_i | i \in I\}$  de conjuntos  $A_i \in \mathcal{A}$ , existe otra  $\{A'_i | i \in I\}$  de conjuntos  $A'_i \in \mathcal{A}$  y disjuntos de modo que  $A_i \rho A'_i$  para todo  $i \in I$  y  $\bigcup A'_i$  sea disjunto con  $\bigcup A_i$ .

b) Si las sumas  $\sum_i A_i$  y  $\sum_i A'_i$  ( $i \in I$ ) están definidas, es decir, si los conjuntos  $A_i$  ( $\in \mathcal{A}$ ) son disjuntos y también los  $A'_i$  ( $\in \mathcal{A}$ ), y si además  $A_i \rho A'_i$  para todo  $i \in I$  se tiene

$$\sum_i A_i \rho \sum_i A'_i$$

Entonces, definimos como cantidad  $a$  de  $A$ , respecto de  $\rho$ , a la clase  $[A]$  de los conjuntos  $A' \in \mathcal{A}$  que están en la relación  $\rho$  con  $A$ .

Si  $a$  y  $b$  son dos cantidades respecto de  $\rho$  se pueden encontrar, en virtud de a), dos conjuntos  $A$  y  $B$  de manera que

$$a = [A], \quad b = [B] \quad y \quad A \cap B = \emptyset$$

En este caso, como según b)  $[A + B]$  es independiente de los conjuntos  $A$  y  $B$  elegidos, se puede definir

$$a + b = [A + B].$$

De forma semejante se define directamente la suma  $\sum_i a_i$  de un número finito de cantidades.

El conjunto  $S$  de estas cantidades con la suma así definida es un semigrupo conmutativo, con elemento neutro  $0 = [\emptyset]$  en donde, en general no es válida la ley de simplificación o cancelativa. En este semigrupo se puede definir, de manera natural, la desigualdad escribiendo  $a \leq b$  cuando existe una cantidad  $c$  tal que  $a + c = b$ . Entonces, esta ordenación tiene las propiedades siguientes:

- 1)  $a \leq a$ .
- 2) Si  $a \leq b$  y  $b \leq c$  es  $a \leq c$ .
- 3) Si  $a_i \leq b_i$  para todo  $i \in I$  se verifica  $\sum_i a_i \leq \sum_i b_i$ .

Un ejemplo sencillo, en donde se cumplen las condiciones a) y b), se obtiene cuando  $\mathcal{A}$  es la clase de las partes acotadas de  $R^n$  y  $\rho$  es la relación de equivalencia definida poniendo  $A \rho B$  cuando  $A$  y  $B$  son dos partes acotadas de  $R^n$  descomponibles en un número finito de partes respectivamente congruentes.

Sin embargo, en otros casos aparece la dificultad de que  $\mathcal{A}$  y  $\rho$  no cumplen las condiciones a) y b). Un ejemplo de ello se tiene cuando  $\mathcal{A}$  es la clase de las partes de una superficie esférica  $E$  y  $\rho$  es la relación de equiva-

lencia definida escribiendo  $A \rho B$  cuando  $A$  y  $B$  son congruentes. Entonces, se plantea el problema de eliminar estas dificultades.

Si se cumple la condición *a)* pero no la *b)*, la cuestión es trivial pues basta considerar en lugar de  $\rho$  la relación  $\rho'$  definida poniendo  $A \rho' B$  cuando  $A$  y  $B$  son descomponibles en un número finito de partes  $A_i$  y  $B_i$  ( $i \in I$ ) respectivamente  $\rho$ -equivalentes. La dificultad es más seria cuando no se cumple la condición *a)*, pero también se puede eliminar construyendo un retículo  $\mathcal{A}^*$  que contenga a  $\mathcal{A}$  y una relación de equivalencia  $\rho^*$  en  $\mathcal{A}^*$  de modo que su restricción en  $\mathcal{A}$  sea la relación  $\rho'$  antes construida. De manera más explícita procedemos así:

Para cada entero  $n \geq 0$  sean  $\mathcal{A}_n$  el retículo de las partes  $A_n = A \times \{n\}$  del conjunto  $E_n = E \times \{n\}$ ,  $E^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$  y  $\sigma_n$  el isomorfismo  $A_n = A \times \{n\} \rightarrow A$  de  $\mathcal{A}_n$  en  $\mathcal{A}$ . Entonces, si  $\mathcal{A}^*$  es el retículo formado por las uniones  $\bigcup A_i$  de un número finito de conjuntos  $A_i \subset E_i$  y  $\rho_0^*$  es la mínima relación de equivalencia que contiene a las relaciones  $\sigma_m^{-1} \circ \sigma_n$  resulta que  $\mathcal{A}^*$  y  $\rho_0^*$  cumplen *a)* de donde, por lo tanto, si se procede como antes se obtiene una relación  $\rho^*$  tal que  $\mathcal{A}^*$  y  $\rho^*$  cumplen *a)* y *b)*, así como también las demás condiciones si se identifican  $\mathcal{A}_0$  y  $\rho_0$  con  $\mathcal{A}$  y  $\rho$ .

Este proceso se puede ilustrar en el caso antes considerado de la superficie esférica  $E$  tomando:

- 1)  $E^*$  igual a la unión de las superficies esféricas  $E_n \subset R^3$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) de radio  $r$  igual al de  $E$  y de centro  $(na, 0, 0)$  con  $a > 2r$ .
- 2)  $\mathcal{A}^*$  igual a la clase de las partes de  $E^*$  contenidas en la unión de un número finito de superficies  $E_n$ .

3)  $\rho^*$  la mínima relación de equivalencia que contiene a las relaciones  $\sigma^m \circ \rho_0 \circ \sigma^n$  en donde  $m$  y  $n$  son enteros cualesquiera,  $\sigma$  la traslación  $x' = x + a$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$  y  $\rho_0$  es la relación de equivalencia en  $\mathcal{A}^*$  definida poniendo  $A \rho_0 B$  cuando  $A - E_0 = B - E_0$  y  $A \cap E_0$  y  $B \cap E_0$  son descomponibles en un número finito de partes respectivamente congruentes.

La razón de que desde nuestro punto de vista, hayan sido eliminadas las dificultades que surgen cuando  $\mathcal{A}$  y  $\rho$  no cumplen las condiciones *a)* y *b)*, se debe a que toda extensión sobre  $\mathcal{A}$  invariante por  $\rho$  se puede prolongar en otra  $\mu^*$  sobre  $\mathcal{A}^* \supset \mathcal{A}$  que es invariante por  $\rho^* \supset \rho$ .

Supongamos ahora, igualmente que antes, que  $\mathcal{A}$  y  $\rho$  cumplen *a)* y *b)*. Entonces, si  $\mu$  es una extensión sobre  $\mathcal{A}$  invariante por  $\rho$ , poniendo  $\mu(a) = \mu(A)$  cuando sea  $a = [A]$ , queda definida una nueva función  $\mu$  sobre el semigrupo  $S$  de las cantidades que satisfacen las condiciones:

- 1)  $\mu$  es una función real definida sobre  $S$  con valores finitos o infinitos.
- 2)  $\mu(\sum_i a_i) = \sum_i \mu(a_i)$ .
- 3) Si  $a \leq b$  es  $\mu(a) \leq \mu(b)$ .

Además  $E_0$  es un conjunto perteneciente a  $\mathcal{A}$  tal que  $\mu(E_0) = 1$  se tiene:

- 4)  $\mu(e) = 1$  para una determinada cantidad  $e (= [E_0])$  llamada *unidad de medida* (*f. ad.*) o *unidad de extensión*.

Recíprocamente, si  $\mu$  es una función sobre  $S$  que cumple las condiciones precedentes, la función de conjunto  $\mu$ , definida poniendo  $\mu(A) = \mu(a)$  cuando  $[A] = a$ , es una extensión invariante por  $\varphi$  que satisface  $\mu(E_0) = 1$  si  $[E_0] = e$ .

Se puede comprender ahora la importancia que puede tener el siguiente:

**TEOREMA DE LA UNIDAD DE MEDIDA.** — Una condición necesaria y suficiente para que una cantidad  $e \in S$  sea una unidad de medida para alguna medida finitamente aditiva (o extensión)  $\mu$  sobre  $S$  es que, cualesquiera que sean los enteros  $m$  y  $n$ , de  $me \leq ne$  se siga  $m \leq n$ .

En el caso que  $\mathcal{A}$  sea un anillo de partes de un conjunto  $E$  que cumpla la condición  $a$ ) y  $\varphi$  sea la relación de equivalencia definida en  $\mathcal{A}$  por la descomposición finita en partes respectivamente congruentes respecto de un grupo  $G$  de permutaciones de  $E$ , este teorema se traduce en el siguiente:

**COROLARIO.** — Para que  $e = [E_0]$  sea una unidad de medida para alguna medida f. ad.  $\mu$  sobre  $S$ , es necesario y suficiente que siempre que  $\{E_i\}_{i=1}^m$ , y  $\{E'_i\}_{i=1}^n$ , sean dos familias finitas de conjuntos disjuntos, pertenecientes a  $\mathcal{A}$ , y  $\varphi$ -equivalentes a  $E_0$ , tales que  $\bigcup_1^m E_i$  sea  $\varphi$ -equivalente a una parte de  $\bigcup_1^n E'_i$ , resulte  $m \leq n$ .<sup>1</sup>

Aplicando este corolario no es difícil probar, por ejemplo, que dos círculos cualesquiera del plano no euclídeo son descomponibles en un número finito de partes respectivamente congruentes.

Vamos a comprobar ahora estas concepciones con las de los geométricos griegos dentro de lo posible, ya que el semigrupo de las cantidades manejado por los griegos es isomorfo al formado por los números reales positivos, mientras que en nuestra teoría de la cantidad, dos cantidades  $a$  y  $b$  pueden no ser comparables, es decir, que no se verifiquen ninguna de las desigualdades  $a \leq b$  y  $b \leq a$ . Igualmente, puede ocurrir que de  $a \leq b$  y  $b \leq a$  no se siga necesariamente  $a = b$ .

Comparando las Nociones comunes de los Elementos de Euclides se ve, aunque de una manera no muy clara por la poca precisión con la que están formuladas:

1. Que en las nociones 1) y 7) está implícita la condición de que sea  $\mu(A) = \mu(B)$  cuando  $A \varphi B$ .

2. Que en la Noción 2) se exige implícitamente la compatibilidad de la igualdad o de la relación de equivalencia respecto de la suma de conjuntos, es decir, la condición b). Sin embargo en ella no se dice nada respecto de que si a un conjunto, se puede sumar otro equivalente a uno dado. Esto solamente parece que se exige en la noción 5) para el caso en que este último conjunto coincide con el primero.

3. La noción 3) no se cumple en general en nuestra teoría de la cantidad, puesto que en ésta, puede ocurrir eventualmente que  $A \supset B$  y  $\mu(A) < \mu(B)$ . No obstante, en el caso que  $A \supset B$  y  $A - B \in \mathcal{A}$  se verifica  $\mu(A) \geq \mu(B)$ .

4. La noción 4) no se cumple tampoco, en general, en nuestra teoría pues puede ocurrir que  $a + c = b + c$  y sin embargo  $a \neq b$ , por no valer, en general, la simplificación en  $S$ .

El postulado de Arquímedes no es válido siempre en todo semigrupo  $S$  de cantidades, pues, incluso puede suceder que  $n a \leq b$  para todo entero  $n > 0$  y existir una medida  $\mu$  tal que  $\mu(a) > 0$ .

Es interesante hacer notar que para establecer los dos teoremas anteriores hemos seguido en algunas partes de ambas demostraciones un camino parecido al de Eudoxio, cuando en el caso que  $n b \leq m a$ , exige que  $n \mu(b) \leq m \mu(a)$ , con la diferencia que por no valer en nuestro caso la simplificación en  $S$  tenemos que considerar también desigualdades del tipo  $n b + m' a \leq m a + n' b$  con  $m < m'$  y exigir entonces que  $(n - n') \mu(b) \leq (m - m') \mu(a)$  a menos que  $\mu(b) = +\infty$ .

Hasta ahora solamente hemos considerado sumas de cantidades en número finito, pero la teoría se puede generalizar para sumas numerables e incluso para sumas  $\sum a_i$  de una familia de cantidades en número menor que un cierto cardinal transfinito.

Ahora bien, con objeto de no recurrir al concepto de número cardinal, hemos dado un paso más exigiendo sólo que la clase  $\mathcal{J}$  de los conjuntos indiciales cumplan las propiedades imprescindibles para desarrollar la teoría, las cuales son:

1. Si  $I \in \mathcal{J}$ ,  $I$  es no vacío.
2. Existe un  $I \in \mathcal{J}$  que contiene más de un elemento.
3. Si  $I \in \mathcal{J}$  y  $J$  es una parte no vacía de  $I$ ,  $J \in \mathcal{J}$ .
4. Si  $I \in \mathcal{J}$  y  $J_i \in \mathcal{J}$  para todo  $i \in I$ , se sigue que  $\bigcup \{J_i | i \in I\} \in \mathcal{J}$ .
5. Si  $I$  y  $J$  están en  $\mathcal{J}$ ,  $I \times J \in \mathcal{J}$ .

Esto lo hemos hecho con varios motivos, entre ellos el de eliminar todo círculo vicioso cuando al tomar por  $\rho$  la relación de equivalencia en la clase  $\mathcal{A}$  de las partes de un conjunto  $E$ , se obtienen en particular como cantidades respecto de  $\rho$  los números cardinales de las partes de  $E$ . Entonces, ningún número cardinal transfinito  $a \in S$  se puede tomar como unidad de medida por ser  $a + a = a$ . En resumen, el concepto de cantidad comprende al de número cardinal de CANTOR.

La teoría de la medida se desarrolla en la actualidad desde dos puntos de vista, definiendo la medida como función real de conjunto o bien como funcional sobre un espacio  $F$  de funciones definidas en un mismo conjunto  $E$ . Pues bien, desde nuestro punto de vista, ambas concepciones quedan unificadas, porque para la primera basta tomar como relación de equivalencia  $\rho$  la identidad y para la segunda basta identificar cada función no negativa  $f$  de  $F$  con la cantidad asociada a un conjunto  $A$  de  $E \times R$ , de forma que la recta paralela al eje  $R$  trazada por cada punto  $(x, 0)$  de  $E \times R$  corte a  $A$  en un conjunto lineal de medida  $f(x)$ , aplicando así, de cierto modo, el principio de Cavalieri. Por esto último se prevee el interés que ha de tener el estudio de los semigrupos reticulados de cantidades.

Independientemente, de las investigaciones sobre la medida, ya citadas, hemos realizado otras sobre los conceptos de medida y topología. El problema que nos planteamos, era buscar las condiciones que debían ligar la noción de medida sobre un espacio topológico  $E$  con la estructura de éste, para poder hablar con propiedad de medidas topológicas.

En general, una medida exterior de Borel sobre  $E$ , es decir, una medida exterior  $\mu^*$  tal que los conjuntos de Borel sean  $\mu^*$ -medibles, no merece que se la llame medida topológica, pues dicha propiedad no implica que la medida de la unión de una familia cualquiera de abiertos disjuntos sea igual a la suma de las medidas. No obstante, el punto de partida de estas investigaciones, tuvieron lugar principalmente por una cuestión al parecer intranscendente, motivada por la observación de que si la teoría de la medida sobre espacios topológicos se restringe a los espacios localmente compactos no se podría llamar, por lo menos de manera natural, medida a la restricción de una medida de Radon sobre una parte cualquiera de  $E$ . La cosa es más profunda, pues hemos visto que no conviene limitarse a considerar sólo medidas de Radon sobre un espacio topológico localmente compacto, en contra de la opinión de BOURBAKI quien sostiene, de cierto modo, que estas medidas son las más generales que se pueden lograr. Una idea feliz nos ha ayudado en nuestro propósito, que consiste en la introducción del concepto de conjunto  $\mu^*$ -compacto. Un conjunto  $A$  de un espacio topológico  $E$  se dice  $\mu^*$ -compacto cuando para cada  $\varepsilon > 0$ , y para todo cubrimiento abierto  $\mathcal{G}_0$  de  $E$ , se puede extraer un número finito de abiertos  $G_k \in \mathcal{G}_0$  de forma que  $\mu^*(A - \bigcup_1^n G_k) < \varepsilon$ . Ahora podemos ya definir las *medidas topológicas* sobre un espacio regular  $E$ , como aquellas medidas que satisfacen las condiciones:

1.  $\mu^*$  es una medida exterior de Borel localmente finita.
2. Todo abierto de medida finita es  $\mu^*$ -compacto.
3. Si  $G$  es un abierto de medida infinita, para todo entero  $n$  existe un abierto  $G_n \subset G$  tal que  $n \leq \mu^*(G_n) < \infty$ .
4. Si  $\mu^*(X) < \infty$  existe un abierto  $G \supset X$  de medida finita y un conjunto de Borel  $B \supset X$  tal que  $\mu^*(B) = \mu^*(X)$ .

En otra parte demostraremos que estas medidas pueden llamarse, topológicas, debido a que en ellas están estrechamente relacionadas las estructuras de medida y topología. Así, por ejemplo, si  $\{G_i | i \in I\}$  es una familia cualquiera, no necesariamente numerable, de abiertos, filtrante por la relación  $\subset$ , resulta  $\mu(\bigcup_i G_i) = \sup_i \mu(G_i)$ .

Es curioso hacer notar que esta propiedad no es válida para conjuntos  $G_i$  cualesquiera porque toda suma  $\sum_i \varepsilon_i < \infty$  de números reales  $\varepsilon_i \geq 0$  implica  $\varepsilon_i = 0$  salvo para un conjunto contable de índices.

También como consecuencia de las propiedades exigidas para una medida topológica, resulta que la condición necesaria y suficiente para que un conjunto  $X \subset E$  sea  $\mu^*$ -compacto es que sea de medida exterior finita. Por tanto, para el caso particular de la medida exterior  $\mu^*$  de Lebesgue en

$R^n$  se tiene que la clase de los conjuntos  $\mu^*$ -compactos es mucho más amplia que la formada por los compactos.

Si  $E$  no es unión numerable de conjuntos de medida exterior finita, conviene definir una nueva medida  $\bar{\mu}^*$  llamada *medida exterior esencial*, por  $\bar{\mu}^*(X) = \sup. \{ \mu^*(X \cap G) | G \in \mathcal{G}_0 \}$  siendo  $\mathcal{G}_0$  la clase de los abiertos de medida  $\mu^*(G) < \infty$ .

Toda medida exterior esencial  $\bar{\mu}^*$  queda caracterizada por las propiedades.

1.  $\bar{\mu}^*$  es una medida exterior de Borel localmente finita.
2. Todo conjunto  $X$  de medida exterior  $\bar{\mu}^*(X) < \infty$  es  $\mu^*$ -compacto.
3. Si  $\bar{\mu}^*(X) = \infty$ , para cada entero  $n$  existe un conjunto  $X_n \subset X$  tal que  $n \leq \bar{\mu}^*(X_n) < \infty$ .
4. Si  $X$  está contenido en un abierto  $G$  de medida  $\bar{\mu}^*(G) < \infty$ , existe un conjunto de Borel  $B \supset X$  tal que  $\bar{\mu}^*(B) = \bar{\mu}^*(X)$ .

De estas propiedades se deduce que la medida exterior  $\mu^*$  definida por  $\mu^*(X) = \inf. \{ \mu^*(G) | X \subset G \in \mathcal{G} \}$ , siendo  $\mathcal{G}$  la clase de los abiertos, es una medida exterior topológica tal que su medida exterior esencial es, precisamente,  $\bar{\mu}^*$ .

En el caso que  $E$  sea unión numerable de conjuntos  $X_n$  de medida exterior  $\mu^*(X_n)$  finita, ambas medidas  $\mu^*$  y  $\bar{\mu}^*$  son iguales.

Aunque nosotros hemos desarrollado todo esto considerando las medidas como funciones reales de conjunto, siguiendo un camino semejante a CARATHÉODORY y HALMOS, se puede desarrollar también la teoría de la medida en espacios topológicos definiendo una medida como funcional sobre el espacio de las funciones, no negativas, semi-continuas inferiormente; pero el proceso seguido corrientemente definiendo una medida como funcional sobre un espacio de funciones continuas no es válido, dentro de la generalidad que exigimos, puesto que existen espacios topológicos regulares tales que toda función real continua es una constante. Naturalmente, también cabe la posibilidad de desarrollar la teoría de la medida en espacios topológicos mediante el concepto de cantidad.

Para algunas aplicaciones de la teoría de la medida, especialmente para el Cálculo de Probabilidades, interesa hacer notar que para ciertas funciones aditivas  $\varphi$  de conjunto, definidas en un anillo  $\mathcal{S}$  de partes de un conjunto  $E$ , se puede dotar a  $E$  de una topología  $\mathcal{G}$  de manera que  $\mathcal{S}$  sea una base del espacio topológico  $E = (E, \mathcal{G})$  y exista una y sólo una medida exterior topológica  $\mu^* = \mu_\varphi^*$  sobre  $E$  que sea una prolongación de  $\varphi$ . Efectivamente, para ello basta que además de  $\cup \mathcal{S} = E$  se verifiquen:

1.  $0 \leq \varphi(S) < \infty$  para todo  $S \in \mathcal{S}$ .
2.  $\varphi(S_1 \cup S_2) = \varphi(S_1) + \varphi(S_2)$  para cada par  $(S_1, S_2)$  de conjuntos disjuntos pertenecientes a  $\mathcal{S}$ .

3. Para todo cubrimiento  $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$  de cada conjunto  $S \in \mathcal{S}$  y para cada  $\varepsilon > 0$  existe un número finito de conjuntos  $S_i \in \mathcal{S}_0$  que satisfacen  $\varphi(S - \bigcup_1^m S_i) < \varepsilon$ .

Finalmente, estas investigaciones sobre la medida en espacios topológicos, junto con el hecho de que la integral  $\int_A f d\mu$  sobre un abierto  $A$ , cuando  $\mu$  es una medida topológica, depende sólo de  $f$  y de la restricción de  $\mu$  en un entorno  $V_x$  de cada  $x \in A$ , nos ha llevado a interpretar  $d\mu(x)$  como el *germen* de medida definido por  $\mu$  en  $x$ . Es claro que así nos situamos en un punto de vista muy próximo, pero riguroso, al de los primeros tiempos del Cálculo infinitesimal.

### MEDIDA DE HAAR

Aunque no nos parece muy oportuno hablar aquí de la integración de funciones con valores en un espacio vectorial, nos creemos obligados a mencionar los trabajos de BOCHNER, GELFAND, DUNFORD y PETTIS sobre tal cuestión. Más importancia tiene dentro del tema de este discurso, la medida e integración en grupos topológicos en donde A. HAAR en 1933 dio un paso decisivo al probar la existencia de medidas invariantes para los grupos localmente compactos con base numerable de abiertos.

Como consecuencia de este resultado J. VON NEUMANN resolvió, para los grupos compactos, el famoso 5.<sup>o</sup> problema de Hilbert sobre la caracterización de los grupos de Lie por propiedades puramente topológicas. La unicidad de la medida de Haar fue probada primeramente por VON NEUMANN en 1934 y 1936 y por A. WEIL en 1940, quien, simultáneamente, además de extender el mencionado resultado de HAAR a los grupos localmente compactos generales, obtuvo la condición de existencia de una medida relativamente invariantes sobre un espacio homogéneo, localmente compacto, y demostró en fin que la existencia de una medida, con ciertas propiedades, sobre un grupo topológico implica *ipso facto* que el grupo es localmente precompacto. No obstante, la importancia de estas conclusiones y de otras últimamente logradas con el concepto de medidas casi invariantes, creemos que todavía se podrán obtener algunos resultados de interés sobre la teoría general de la medida de Haar, estudiando las medidas topológicas invariantes por una relación de equivalencia en un espacio regular.

Nos hemos referido a las medidas localmente finitas, pero también sería interesante estudiar las medidas no localmente finitas invariantes por un grupo o una relación de equivalencia, lo cual comprendería tanto el área de las superficies curvas como las llamadas medidas de Hausdorff.

HE DICHO.

## DISCURSO DE CONTESTACION AL ANTERIOR

por el Académico

ILMO. SR. D. RAFAEL RODRÍGUEZ VIDAL

*Excelentísimos e Ilustrísimos señores,*

*Señoras y señores:*

Con verdadera satisfacción intentaré cumplir la honrosa tarea que me ha confiado la Academia de Ciencias de Zaragoza, en cuyo nombre debo dar la bienvenida al nuevo Académico D. Baltasar RODRÍGUEZ-SALINAS PALERO y contestar al brillante discurso que acaba de leernos.

La tradición ha impuesto unas normas estrictas e invariables para esta tarea; normas acertadas, tanto como obligatorias, que yo acepto gustoso y que hoy me parecen bien fáciles de cumplir. Según ellas debe hacerse primero un relato de la vida científica del recipiendario; y ésta en el caso presente es tan densa, que mi única dificultad será resumirla. A esto debe seguir un comentario a la bella lección que hemos oído y en verdad, que por el tema fundamental que aborda, la riqueza de ideas y la profunda habilidad de la exposición, tal vez sería oportuno sustituir el comentario por un recuerdo del clásico decir: "Esto, Inés, ello se alaba, no es menester alaballo".

Nació el Profesor RODRÍGUEZ-SALINAS en Alcalá de Henares, el año 1925. En el Instituto de Enseñanza Media de aquella localidad cursó sus estudios de bachillerato, y es justo señalar que su catedrático de Matemáticas, D. Leoncio GONZÁLEZ CALZADA, descubrió inmediatamente las excepcionales condiciones de su discípulo, tanto que fue el primero en aconsejarle la orientación a la Universidad, y presentarle a los profesores de la de Madrid, a quienes el estudiante de bachillerato sorprendía con consultas y comentarios críticos relativos, por ejemplo, a los textos de Análisis Matemático de Picard, Goursat y análogos, o con la resolución de problemas propuestos en conferencias universitarias.

Los estudios de Licenciatura y Doctorado los cursó en la Universidad de Madrid, huelga añadir que con las máximas calificaciones, y en los años 1948 y 1952 mereció los respectivos grados de Licenciado y Doctor en Ciencias Matemáticas. Entonces comienza su vida profesional, aunque la lista de sus publicaciones, como veremos, había comenzado antes, durante la etapa estudiantil. Inmediatamente después, en 1953, ingresa en

el Cuerpo de Ingenieros Geógrafos y al año siguiente consigue, por oposición, la cátedra de Análisis Matemático en esta Universidad de Zaragoza. Aquí, por fortuna para nosotros, viene desarrollando desde entonces una intensa actividad docente e investigadora. Para ocuparse totalmente en su quehacer universitario, en 1955 solicitó la excedencia como Ingeniero Geógrafo, en cuyo Cuerpo tiene el título de Doctor Ingeniero.

Pero conviene retroceder un poco en el tiempo, para exponer un resumen sistemático de la vida científica de nuestro ilustre compañero (contada en lo anterior a grandes rasgos), seguida del rico sumario de sus publicaciones.

#### 1. TÍTULOS PROFESIONALES

Licenciado en Ciencias, Sección de Matemáticas: 13-XII-1949. Hizo constar su suficiencia en la Universidad de Madrid: 28-VI-1948.

Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas: 25-II-1954. Hizo constar su suficiencia en la Universidad de Madrid: 31-I-1952.

Catedrático de Universidad: 4-V-1954.

Ingeniero Geógrafo: 1953. Ingresó por concurso en el turno de "Licenciados en Ciencias Matemáticas o Físicas".

Doctor Ingeniero Geógrafo: 19-VI-1954.

#### 2. BECAS Y PENSIONES

Becario de la Fundación del Conde de Cartagena: 1946-47 y 47-48.

Becario del Instituto Jorge Juan: 1949-52.

Becario "José Miguel Guitarte", del S. E. U.: 1950- 1951 y 1952.

Becario "Matías Montero": 1953.

Beca de Intercambio Cultural con Italia durante marzo-agosto de 1951.

Pensionado por la Comisaría de Protección Escolar y Asistencia Social para trabajar en Italia durante tres meses, en el verano de 1959.

Fomento de la Investigación en la Universidad en el Plan Nacional de Desarrollo. Contrato suscrito el 21-XII-1963.

#### 3. PREMIOS Y HONORES

Premio de Matemáticas, concedido por el Sr. Ministro de E. N., en la Primera Exposición de Trabajos Prácticos de los Institutos Nacionales de Enseñanza Media: 21-VIII-1943.

Accésit al Premio Nacional Fin de Carrera: 21-XI-1948.

"Víctor de Bronce" del S. E. U.: 21-XI-1948.

Premio Extraordinario de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas.

Premio Extraordinario del Doctorado en Ciencias Matemáticas.

Premio "Alfonso el Sabio", de 1952, por el trabajo: "Sobre las funciones convexas y sus aplicaciones a la determinación del comportamiento asintótico de las transformadas de Laplace y de Laplace-Stieltjes".

Académico electo de la de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza: 20-II-1957.

Consejero Adjunto del Patronato "Alfonso el Sabio", del Consejo Superior de Investigaciones Científicas: 1959.

DISCURSO DE CONTESTACION

4. CENTROS CIENTÍFICOS DONDE HA LABORADO (excepto la Universidad)

En la "Fundación del Conde de Cartagena", con el Académico Exemo. Sr. D. José Alvarez Ude. (Real Academia de Ciencias. Madrid.)

En el Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, con el Profesor Dr. D. Ricardo San Juan. (Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid.)

En el Instituto Matemático "Ulisse Dini" de Florencia, con el Profesor Dr. Giovanni Sansone.

Seminario Matemático "García de Galdeano", de Zaragoza. Profesor Agregado, desde 1955.

Ingeniero Geógrafo. En activo: 1953-55.

5. CURSOS DE LICENCIATURA QUE HA DESARROLLADO EN LA F. DE C. DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Análisis Matemático 4.<sup>º</sup> (Titular).

Análisis Matemático 5.<sup>º</sup> (Titular).

Cálculo de Probabilidades y Estadística Matemática: 1954-64.

Topología: 1954-55.

Física Matemática: 1955-58.

Matemáticas aplicadas a la Física 1.<sup>º</sup>: 1960-62.

Matemáticas aplicadas a la Física 2.<sup>º</sup>: 1958-59 y 1962-64.

Matemáticas Generales (Selectivo): 1959-60.

6. CURSOS DE DOCTORADO

Funciones algebraicas y sus integrales: 1954-55.

Análisis Funcional: 1955-57.

Grupos de Lie: 1957-58.

Teoría de las Distribuciones: 1958-59.

Análisis General: 1959-60.

Análisis Funcional: 1960-63.

Teoría de la medida: 1963-64.

Teoría de los Haces: 1964-65.

7. SOCIEDADES CIENTÍFICAS A LAS QUE PERTENECE

Real Sociedad Matemática Española. Desde 1942.

Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Desde 1958.

Unione Matematica Italiana. Desde 1959.

Es recensionista del "Zentralblatt für Mathematik".

8. CONGRESOS, ASAMBLEAS Y REUNIONES CIENTÍFICAS EN QUE HA PARTICIPADO

a) Congresos Luso-Españoles para el Progreso de las Ciencias:

XXIV. Madrid, noviembre, 1958. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones con los números 24, 31, 33, 34 y 35.

XXV. Sevilla, noviembre, 1960. Presentó varias comunicaciones que figuran entre los números 29, 32, 39 y 40, y otras que dieron origen a las publicaciones 25 y 41.

XXVI. Oporto, junio, 1962. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones con los números 43 y 44, y un resumen de la publicación 42.

VI. Congresso Nazionale dell'Unione Matematica Italiana. Nápoles, septiembre, 1959. Presentó una comunicación que figura como publicación número 26. Representante de la Real Sociedad Matemática Española.

REVISTA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICO-QUÍMICAS Y NATURALES

International Congress of Mathematicians. Estocolmo, 1962. Presentó la comunicación: "On the area problem".

b) Reuniones Anuales de Matemáticos Españoles:

II. Zaragoza, octubre, 1961. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones con los números 36, 37 y 38.

III. Barcelona, noviembre, 1962. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones con los números 46 y 47, y otra que dio origen a la número 48.

IV. Salamanca, diciembre de 1963. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones con los números 49 y 50.

V. Valencia, octubre de 1964. Presentó varias comunicaciones que figuran entre las publicaciones (en prensa), números 51 a 54.

c) Reuniones de Aproximación Filosófico-Científica.

Se han venido desarrollando estas reuniones patrocinadas por la Institución "Fernando el Católico" (C. S. I. C.) en la Diputación Provincial de Zaragoza, a partir de 1957.

d) I Asamblea de Catedráticos de Facultades de Ciencias. Zaragoza, octubre, 1962.

e) Ha sido invitado a dar una Conferencia en el próximo Congreso de Matemáticos de Expresión latina, en Namur (Bélgica).

9. CONFERENCIAS Y PUBLICACIONES DE FIN DIDÁCTICO

"Espacios funcionales". Segunda Reunión de Aproximación Filosófica-Científica: "El Espacio". Institución "Fernando el Católico" (C. S. I. C.) Zaragoza, 1959 (Publicada).

"Números transfinitos". Cuarta Reunión de Aproximación Filosófica-Científica: "La Cantidad". Institución "Fernando el Católico" (C. S. I. C.) Zaragoza, 1963 (Publicada).

"Los Espacios  $L^p$ ". En el Seminario Matemático de Zaragoza, 1963.

"La Teoría de las Distribuciones". En el Seminario Matemático de Zaragoza, 1963.

"Los símbolos  $x^y$  y  $\log_x y$ ". En el Seminario Matemático de Zaragoza, 1964.

Traducción de varios artículos de la Encyclopedia of Science and Technology McGraw-Hill.

10. PUBLICACIONES

1. "Determinante que da  $f(x+y)$  en función de  $f(x)$  y de  $f(y)$ ". Rev. Euclides. Año II (1942), 159-162.

2. "Resto de la división en que el dividendo es  $f(x)$  y el divisor  $(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_h)^{n_h}$ ". Rev. Euclides. Año II (1942), 194-195.

3. "Resolución de la ecuación funcional".

$$F(x) = \pm \frac{F[x + 2F(x)F'(x)(1 + F'(x)^2)]}{1 + 2F'(x)^2}$$

Rev. Euclides. Año II (1942), 349-351.

4. "Una demostración sobre la integral de Dirichlet". Rev. Euclides. Año II (1942). página 425.

5. "Sobre un caso particular de la ecuación lineal  $y' + \alpha y = \beta$ ". Rev. Euclides. Año III (1943), pág. 90.

6. "Modo de sumar algunas expresiones". Rev. Euclides. Año III (1943), 343-348.

7. "La inversión en el orden de la derivación". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 42 (1948), 37-70.

DISCURSO DE CONTESTACION

8. "Sobre la teoría de la medida". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 42 (1948), 465-491.
9. "Sobre una función meromorfa y sus aplicaciones a la suma de series". Rev. Gaceta Mat., vol. 3 (1951), 6-17.
10. "Sobre la determinación de una función analítica conocida su parte real". Rev. Gaceta Mat., vol. 4 (1952), 44-46.
11. "Sobre el comportamiento asintótico de la aplicación reiterada de una sucesión de funciones". Rev. Gaceta Mat., vol. 4 (1952), 81-90.
12. "Sobre la región de los valores de una función lisa". Rev. Mat. Hisp.-Amer., volumen 12 (1952), 223-228.
13. "Sobre una generalización de las fórmulas de Taylor, Darboux y Euler-Mac Lurin". Rev. Mat. Hisp.-Amer., vol. 12 (1952), 281-289.
14. "Sobre varias formas de proceder en la determinación de períodos de las mareas y predicción de las mismas en un cierto lugar". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, volumen 46 (1952), 17 págs.
15. "Transformadas de Laplace de algunas funciones integrales". Rev. Garceta Mat., volumen 5 (1953), 157-158.
16. "Sobre ciertos desarrollos asintóticos de integrales de Laplace curvilíneas". Revista Mat. Hisp.-Amer., vol. 13 (1953), 120-127.
17. "Exposición de algunos teoremas conocidos y otros nuevos sobre convergencia ordinaria y uniforme de la integral de Fourier". En colaboración con Ricardo SAN JUAN. Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 47 (1953), 495-510.
18. "Complemento a un teorema de Ahlfors-Heins sobre funciones subarmónicas". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 9 (1954), Fasc. 2.º, 119-125.
19. "Funciones con momentos nulos". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 49 (1955), 331-368.
20. "Los problemas de unicidad en la teoría de series asintóticas. Expresión de funciones semi-analíticas mediante los algoritmos de Borel y Stieltjes". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 50 (1956), 191-227.
21. "Sobre la ecuación diferencial".

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[ \frac{a_0 + a_1 \cos 2x}{b_0 + b_1 \cos 2x} - \frac{m(m-1)}{\cos^2 x} - \frac{n(n-1)}{\sin^2 x} \right] y = 0.$$

Tesis Doctoral. Rev. Mat. Hisp.-Amer., vol. 15 (1955), 31-47, 121-135, 182-208; vol. 16 (1956), 49-71, 122-150, 229-263. Memorias de Mat. del Instituto Jorge Juan, número 18, 145 págs. (Contiene seis apéndices.)

22. "Moments de fonctions analytiques et problème de Watson". J. de Math. Pures et Appl., vol. 9 (1956), 359-382.
23. "Ceros de las funciones de una clase no cuasi-analítica en  $R^n$ . Prolongación no cuasi-analítica". Collectanea Math., vol. 9 (1957), 65-77.
24. "Una desigualdad entre las cotas de las derivadas de una función analítica en un ángulo". Rev. Las Ciencias, de Madrid, año XXIII (1958), 533-539.
25. "Disugualanze tra limiti e coefficienti dello sviluppo asintotico di una funzione in un angolo". Ann. di Mat. Pura ed Appl., vol. 48 (1959), 147-159.
26. "Sulla stabilità delle soluzioni per l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti periodici". Rend. Circolo Mat. di Palermo, vol. 8 (1959), 206-224.
27. "Aproximación uniforme de una función continua por un conjunto convexo de funciones continuas". Coller. Math., vol. 11 (1959), 175-202.
28. "Equivalenza di classi di funzioni con sviluppo asintotico in un angolo. Funzioni caratteristiche". Boll. Unione Mat. Italiana, vol. 14 (1959), 525-531.
29. "Sobre la estabilidad de la ecuación funcional  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 14 (1959), Fasc. 1.º, 5-7.
30. "Variación de las raíces características de una ecuación diferencial de segundo-

- orden con coeficientes periódicos". Ann. di Mat. Pura ed Appl., vol. 52 (1960), 107-161.
31. "Solución de un problema de Bang de la teoría de clases cuasi-analíticas". Rev. Las Ciencias, de Madrid, año XXV (1960), 257-261.
32. "Sobre el cambio de variable en las integrales múltiples". Collec. Math., vol. 12 (1960), 139-153.
33. "Una fórmula asintótica para algunas transformadas de Laplace", Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 54 (1960), 177-187.
34. "Un desarrollo asintótico de ciertas transformadas de Laplace". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 54 (1960), 167-176.
35. "Funciones que verifican en cada punto de un intervalo a una ecuación diferencial variable con el punto". Rev. R. Acad. de Ciencias de Madrid, vol. 54 (1960), 301-311.
36. "Estabilidad y ceros de las soluciones de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes periódicos". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 15 (1960), Fasc. 2.<sup>o</sup>, 5-9.
37. "Solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 16 (1961), Fasc. 1.<sup>o</sup>, 47-51.
38. "Existencia de puntos de Weierstrass de funciones reales. Máximos y mínimos en espacios casi numerablemente compactos". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 16 (1961), Fasc. 2.<sup>o</sup>, 5-10.
39. "Conjunto de valores de un coeficiente diferencial". Collec. Math., vol. 13 (1961), 3-13.
40. "Crecimiento de una función analítica en un ángulo". Collec. Math., vol. 13 (1961), 197-217.
41. "Existencia de máximo de funciones reales continuas en espacios casi numerablemente compactos. Ann. di Mat. Pura ed Appl., vol. 56 (1961), 375-413.
42. "Generalización sobre módulos del teorema de Hahn-Benach y sus aplicaciones" Collec. Math., vol. 14 (1962), 105-151.
43. "Sobre el último teorema de Fermat y la ecuación".

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^n u}{\partial z^n}$$

Rev. Fac. de Ciencias de Lisboa, vol. 9 (1962), 35-44.

44. "Una generalización de los teoremas de von Staudt y Darboux". Rev. Fac. de Ciencias de Lisboa, vol. 9 (1962), 77-86.
45. "Clases de funciones analíticas. Clases semi-analíticas y cuasi-analíticas". Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, vol. 17 (1962), Fasc. 1.<sup>o</sup>, 5-75. Publicaciones del Seminario Mat. "García de Galdeano", número 6, Zaragoza, 1962.
46. "Crecimiento de una función analítica en una banda de anchura no constante". Collect. Math., vol. 15 (1963), 5-22. Actas de la III Reunión Anual de Mat. Españoles.
47. "Una clase de grupoídes: tribus. Inmersión en una tribu". Collectanea Math., volumen 15 (1963), 153-167. Actas de la III Reunión Anual de Mat. Españoles.
48. "El problema de la extensión". Ann. di Mat. Pura ed Appl., vol. 64 (1964), 133-189.

PUBLICACIONES EN CURSO:

49. "Sobre la prolongación de funcionales lineales". Actas de la IV Reunión de Mat. Españoles. Collect. Math.
50. "El método de iteración en la teoría de puntos fijos". Actas de la IV Reunión de Mat. Españoles. Rev. Mat. Hisp.-Amer.
51. "Sobre la ecuación funcional  $f(x+y) = f(x)f(y)$  y las funciones  $a^x$  y  $\log_a x$ ". Actas de la V Reunión Anual de Matemáticos Españoles. Rev. Mat. Hisp.-Amer.
52. "Construcción de medidas de Borel sobre los espacios regulares". Actas de la V Reunión Anual de Matemáticos Españoles.

DISCURSO DE CONTESTACION

53. "La cantidad en la Teoría de la Medida". Actas de la V Reunión Anual de Matemáticos Españoles.

54. "Sobre los cuerpos no conmutativos de rango cuatro respecto de su centro". (En colaboración con D. José GARAY DE PABLO.) Actas de la V Reunión Anual de Matemáticos Españoles.

La recensión de todos estos trabajos va quedando escrita paulatinamente en las páginas del "Mathematical Reviews" y del "Zentralblatt für Mathematik" y no es posible ni resumirla aquí. Varios de ellos se citan en tratados tan importantes como son, por ejemplo, el de G. DOETSCH: "*Handbuch der Laplace-Transformation*" y el de G. AUMANN: "*Reelle Funktionen*" (ambas de la Springer-Verlag-Berlín).

Nos parece oportuno hacer observar que los trabajos iniciales de esta relación fueron publicados mientras el autor era estudiante. Realmente, la historia de la ciencia nos muestra, que la creación intelectual en los grandes matemáticos, aunque no de tan extremada precocidad como la de algunos grandes músicos, sí es mucho más juvenil de lo que ordinariamente se cree. No puedo resistir la tentación de exponer, al margen de esto, mi discutible opinión personal, de que es muy culpable de la languidez de la vida científica patria, en el concierto internacional, la circunstancia de que nuestros planes de estudios y funestos exámenes diversos impiden a nuestra juventud una actividad intelectual original hasta una edad demasiado avanzada. Desde su primera juventud, un alumno normal debería poder cultivar algunas ideas por cuenta propia, mientras que las reglamentaciones dichas, altamente coactivas, hacen que esto sólo sea posible para las mentes de calidad excepcional, como ha sido sin ninguna duda, el caso del señor R.-SALINAS.

Se observará también, que varios de estos trabajos fueron publicados en la Revista de nuestra Academia de Ciencias, lo que naturalmente, trae consigo que al recibir esta Corporación al autor, la acogida sea más realmente afectiva.

Una tercera observación es que ninguno de estos trabajos sea de los llamados de exposición, ni tan siquiera de síntesis. Se trata en todos ellos de temas de investigación pura y en ningún caso elementales (salvo los primeros, de la época escolar). El Prof. R.-SALINAS parece incapaz de acercarse a ningún tema en una forma trivial, y la lección que acaba de desarrollar lo confirma, aunque en esta ocasión, muy acertadamente, haya hecho ciertas concesiones al concepto de lo que los no matemáticos llaman amenidad. Y prescindo de otras observaciones espontáneas, porque esta última acaba de llevarnos al comentario de la lección inaugural, con el que pobre pero reglamentariamente debe concluir nuestra intervención.

\* \* \*

Una frase que la genial concertista Wanda LANDOWSKA gustaba de repetir dice: "No se sabe nunca bien toda la música que hay en un minué". Era fácil la paráfrasis y preguntarnos: "¿Quién sabrá verdaderamente cuánta Matemática hay en una "regla de tres"?" Y por cierto, que si en esta refle-

xión mencionábamos la regla de tres por ser segura parcela del saber común que desde la más primaria enseñanza se juzga dominado, no es menos cierto que para el caso que nos ocupa resulta su alusión especialmente oportuna.

La "regla de tres" es el fruto que todos alcanzamos de la teoría de la proporcionalidad; su manifestación evidente; la base de cualquier práctica usual de medida. En la entraña de la regla de tres, sin embargo, está la ecuación funcional de la proporcionalidad,  $f(Cx) = Cf(x)$ , de todos conocida, al menos en su apariencia formal; y si no todos sí muchos, conocen la íntima relación de ella con la ecuación funcional  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Pero en esta relación todos los matemáticos (ya no todas las gentes) saben bien que hay bastante tema de estudio; tanto, que hasta el fondo de la cuestión no todos han sabido llegar. Ahora, bastará ver los trabajos dedicados a este tema por nuestro nuevo compañero, para admitir sin dificultad que entre los pocos que sepan casi todo lo que hay que saber sobre la regla de tres está el Prof. RODRÍGUEZ SALINAS. Además, como se ve en lo que nos ha dicho, la aserción  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  no es sino el principio del asunto. Pues aunque la generalización al caso  $f(\sum_{i \in I}^n x_i)$  no trae nada esencialmente distinto, aparece finalmente la condición de aditividad infinita,  $f(\sum_{i \in I} x_i) = \sum_{i \in I} f(x_i)$  que nos lleva a las primeras dificultades.

Simultáneamente a las mayores exigencias de las condiciones planteadas en el problema de la medida (o, por mejor decir, indisolublemente unidas con estas exigencias) está el creciente grado de generalidad y de abstracción de las entidades a las que se aplica. Esas  $x$  se parecen cada vez menos a los puntos y otras entidades de la geometría euclídea.

No intentaré repetir la síntesis de la cuestión, que el Prof. R.-SALINAS ha hecho inmejorablemente.

Es claro que sólo en una etapa de ingenuidad pre-científica pueden admitirse como satisfactorias, esto es, claras por sí mismas, las expresiones que aseguran, por ejemplo, que la línea es la figura que sólo tiene una dimensión; que la medida de una línea es su longitud; que la superficie es el límite de un cuerpo y el área es la medida de una superficie; con otras muchas de este tipo escolar. Sin embargo, el examen crítico de estas nociones no aportó ningún resultado cualitativo importante hasta el siglo pasado.

Consideremos primero el caso de una línea. Una especulación sistemática debe comenzar por preguntarse qué cosa es una línea o curva, y luego será el momento de preguntarse qué es longitud de la curva. Pero ocurre, que ya la respuesta a la primera pregunta trae consigo novedades y sorpresas, que hacen más difícil contestar a la segunda, como vamos a ver.

Para ganar en simplicidad, consideremos el caso de una curva plana. Intuitivamente aparece como un conjunto de puntos que se dirían obtenidos de un hilo flexible y elástico, deformándolo convenientemente. Esto se traduce de modo más técnico en decir que "curva" es un conjunto de puntos en correspondencia con los puntos de un segmento. Pero también

es preciso meditar qué condiciones debe reunir esta correspondencia para que la "curva" así definida sea una entidad siquiera parecida a la que ordinariamente se entiende por curva. Eso mismo, dicho analíticamente, equivale a representar la "curva" paramétricamente mediante un par de ecuaciones de la forma

$$x = \alpha(t) \quad y = \beta(t) \quad a \leq t \leq b$$

y a preguntarnos cómo han de ser estas funciones  $\alpha, \beta$  para que la condición antedicha de parecido intuitivo sea satisfecha. Es oportuno notar que esas fórmulas tienen también una interpretación física evidente interpretando el parámetro  $t$  como el tiempo y, en ese caso, la "curva" como "trayectoria" de una partícula: las ecuaciones paramétricas dan su posición en el instante  $t$ .

Pues bien, si no se exigen especiales condiciones a esta correspondencia, que es decir a estas funciones, el aspecto del conjunto de puntos que resulta puede ser completamente distinto de una curva intuitiva. Un notable ejemplo lo presentó PEANO en 1890 al publicar su ejemplo de "curva" que llenan todo un cuadrado, en un artículo breve, de muy pocas y muy claras páginas, que es de los que más rápida sensación produjeron en el mundo matemático, por su elegante novedad.

Antes de esto había obtenido JORDÁN un notable resultado. Si las funciones  $\alpha, \beta$  son uno a uno y continuas, la curva se llama un arco simple o arco de Jordán. Si además es  $\alpha(a) = \alpha(b), \beta(a) = \beta(b)$ , la curva se llama curva cerrada de Jordán. Esta curva cerrada ya tiene con las curvas intuitivas una semejanza muy importante, y es ésta: dividir al plano en dos regiones de modo que no se puede ir de una a otra sin atravesar esa línea. Pero todavía esta curva puede ser más singular de lo que se espera: puede no tener tangente en ningún punto y puede también, y esto es lo importante aquí, no ser rectificable, es decir, no tener longitud.

Esta es, en efecto, la pregunta que nos interesa ahora: ¿qué es longitud de una curva? Los matemáticos supieron desde siempre que este concepto no es primitivo y podríamos decir que desde el nacimiento del cálculo integral, y más todavía después de CAUCHY, los matemáticos plantearon con rigor el paso al límite que implica la definición de longitud, y también el método para calcularla. Sin embargo, en los siglos XVII y XVIII, aplicaron el método a curvas definidas por funciones "buenas" (KLEIN), es decir, que no daban origen a las curvas patológicas, post-intuitivas, cuya existencia no se sospechaba antes de WEIERSTRASS y JORDÁN.

Por lo que hace a las superficies, los problemas anteriores aparecen, naturalmente, agravados. Pero ahora queremos aludir sólo a otra paradoja elemental, que aparece sin salir de las superficies más regulares y ordinarias, como la superficie de un cilindro por ejemplo. El área, en efecto, no puede definirse como límite de las de superficies poliedrinas inscritas cuyas caras tienden a cero en todas las dimensiones. Esto lo puso de relieve SCHWARZ; esta dificultad se vence con una definición adecuada, que el cálculo integral enseña, y esa definición permite calcular el área para una

superficie; al menos si es lo bastante regular, sin que nos ocupemos de precisar más las condiciones que ésto exige.

Por lo que hace al cálculo de volúmenes, podemos mencionar una nueva dificultad, puesta de relieve por HILBERT y PASCH. En efecto, así como en las esquinas de un paralelogramo no podemos adaptar un cuadrado por pequeño que éste sea, pero esto no implica dificultad grave para definir el área porque podemos fácilmente recortarlo y convertir ese paralelogramo en un rectángulo, o de un modo general: dos polígonos cualesquiera de igual área son equidescomponibles, en cambio en las figuras del espacio no ocurre tal cosa. La no equidescomponibilidad de un cubo y de un tetraedro regular, por ejemplo, trae nuevas dificultades a la construcción rigurosa de la teoría de los volúmenes; y esto es ya tan al principio de la Geometría métrica del espacio que está reflejada en simples textos elementales escritos con rigor y preocupación: el de HADAMARD, por ejemplo.

Pero las dificultades que hasta aquí hemos mencionado para establecer el concepto y la medida de longitud, área y volumen, no salen de un plano elemental, por cuanto afectan verdaderamente a conjuntos y figuras formadas por puntos que no difieren demasiado de los puntos y figuras ordinarias de la geometría euclídea... sean ellos lo que fueren.

No abandonemos todavía el "punto" ordinario que ha manejado la Matemática clásica. Un nuevo aumento de generalidad se consigue cuando se manejan conjuntos de puntos distribuidos, no en líneas, superficies o volúmenes más o menos regulares o "patológicos", sino formando conjuntos de otros tipos, como pueden ser, para empezar, los conjuntos de puntos con coordenadas racionales (sea esto en la recta, el plano o el espacio). Conjuntos que, y esto es curioso, no son sólo creados por el gusto arbitrario de los matemáticos, sino que aparecen impuestos a éstos por el mismo desarrollo natural de las teorías del Análisis matemático. Para estos conjuntos de puntos ¿puede definirse algo parecido a la medida de las líneas, superficies o volúmenes ordinarios?

En primer lugar, esta nueva medida, si se consigue, debe ser tal, que cuando el conjunto de puntos coincida con un segmento, superficie o volumen en el sentido clásico, su medida se identifique con la longitud, área o volumen ordinarios. Sin esta condición de permanencia la pretendida generalización no sería más que un juego sin sentido. Además, la pretendida medida debe reunir las naturales condiciones de aditividad y satisfacer a las exigencias complementarias que se impongan.

Pues bien, el problema fue resuelto bastante satisfactoriamente durante el medio siglo que se centra hacia el año 1900. Para no repetir una doctrina e historia que el precedente discurso resume perfectamente, baste una referencia a los nombres de PEANO, JORDÁN, CANTOR, BOREL y LEBESGUE, que representan bastante expresivamente el desarrollo de esta etapa clásica de la teoría de medida de conjuntos.

En resumen ¿de qué entidades podemos decir que tienen una extensión, una medida del contenido? La verdadera calidad y trascendencia de la pregunta se aprecia al dejar este espacio concreto, casi físico, de la matemá-

DISCURSO DE CONTESTACION

tica clásica, y situarnos en el punto de vista abstracto y general a que la conferencia del profesor R.-SALINAS acaba de llevarnos. No deja de ser paródjico, y sea esta la última paradoja de que se habla hoy, que el problema de la medida no haya podido ser planteado en toda su profundidad hasta el momento en que la matemática puede pensar en no considerarse más la "ciencia de la cantidad" que dice la definición escolástica.

Efectivamente, el proceso de abstracción y generalidad, que según muchos es la esencia de la Matemática, ha llevado de modo inevitable a la creación de los espacios abstractos. El concepto de espacio abstracto es el de un conjunto con una estructura que generalice la noción de espacio físico, pero ¿cuál es la nota intuitiva de este espacio físico que se ha considerado necesario trasladar a la estructura nueva para que ésta no sea una pura entelequia? ¿Es acaso la noción de distancia? De ninguna manera. Lo que los matemáticos han exigido a *su creación* es bien leve: que permita una generalización de la noción de continuidad. En ese mismo momento pasó la Topología a desempeñar un primer papel en toda la estructuración de la Matemática actual. (He vacilado un poco en si sería mejor decir "estructuración actual de la Matemática" o estructuración de la Matemática actual; y esto es por no saber ya del todo si la Matemática "es" algo más que su propia estructuración. Pero sería inoportuno prolongar estas observaciones marginales). Llevados así, de un modo natural, a matematizar un espacio topológico abstracto, cuánto nos falta por saber sobre las ideas de medida, extensión y contenido es lo que nos acaba de descubrir el nuevo Académico en su valioso trabajo.

La Academia de Ciencias de Zaragoza, que se da cuenta perfecta de la importancia de las ideas que el Sr. RODRÍGUEZ-SALINAS ha aportado ya en este campo de la investigación, y de la trascendencia que pueden llegar a tener sus futuras investigaciones en el mismo, se honrará grandemente si puede ofrecerle una atmósfera intelectual apta para favorecer la elaboración de tan prometedora obra.

HE DICHO.

**DEFINICION DE HAMILTONIANOS Y RENORMALIZACION  
EN ALGUNOS MODELOS DE TEORIA CUANTICA  
DE CAMPOS**

**T R A B A J O P R E S E N T A D O**

**P O R**

**D. F R A N C I S C O J. Y N D U R Á I N**

**PARA ASPIRAR AL GRADO DE DOCTOR  
EN CIENCIAS FISICAS**

Zaragoza, Junio de 1964.

*Summary*

The problem of definition and spectral properties of field-theoretical Hamiltonians is analysed. Far the last, the question is posed wether renormalisation suffices to ensure consistency of the theory for multiparticle sectors. In this context, some typical perturbations are analysed, and it is shown that, under rather mild conditions, and in the absence of pair-creation terms, total Hamiltonians exist as hypermaximal (i. e., observable) operators; the perturbations are also proved to be regular and, in some cases, even continuous. That these favorable conditions are not yet sufficient to ensure the correct spectral properties is made apparent through an analysis of some field-theoretical models, for which we exhibit multiparticle scattering states without asymptotically free behaviour (the continuous parts of the spectra of the free and perturbed Hamiltonians do not coincide).

## *Introducción*

El llamado Programa de Renormalización ha alcanzado gran éxito en la Electrodinámica Cuántica; sus métodos, aunque formales, dan resultados en magnífico acuerdo con la experiencia. Queda, sin embargo, abierta la cuestión de cómo definir, de una manera matemáticamente rigurosa y físicamente no ambigua, objetos tales como los hamiltonianos, operadores de ondas o la matriz  $S$ ; y una situación análoga se nos presenta en la teoría de las interacciones fuertes: de hecho, estas dificultades son características de la formulación presente de la teoría de campos. Se ha conjeturado, sin embargo, que, reexpresando la teoría en términos de estados monoparticulares "físicos", las dificultades mencionadas desaparecerían: es decir, se supone que si por métodos de momento inespecificados conseguimos hacer la teoría consistente para los estados con una partícula, este "arreglo" basta para obtener resultados positivos en todos los casos: esta es, en términos generales, la filosofía del "Programa de Renormalización". Es bien sabido, de todas formas, que ningún modelo realista de teoría de campos ha encontrado solución explícita; y, en el caso de interacciones fuertes, ni siquiera podemos esperar que los desarrollos en serie converjan, dada la magnitud de la constante de acoplamiento ( $\geq 1$ ). Esto hace deseable la utilización de modelos "sencillos" que, aunque irreales, sean solubles y nos den, por tanto, indicación de lo correcto de la teoría.

El primer problema que se nos presenta en teoría de campos es la definición del hamiltoniano. Como generador del semigrupo (grupo, si la inversión temporal tiene sentido) de evolución en el tiempo, el hamiltoniano debe existir como un operador hipermaximal. Es dudoso, sin embargo, que pueda expresarse en términos de operadores de creación y destrucción en la manera usual: de hecho, a veces se ha conjeturado imposible. En el presente trabajo se analiza este problema bajo ciertas restricciones en la interacción, demostrando que hamiltonianos con las propiedades requeridas pueden definirse para una clase bastante amplia de perturbaciones. El segundo problema que nos aparece es el de comprobar si la renormalización arregla realmente las cosas; esto es, si las interacciones de muchas partículas pueden describirse correctamente, una vez que lo sean las de una partícula (autointeracciones). Tal como hemos dicho más arriba, tenemos que reducirnos a modelos solubles; en el presente trabajo se analizan algunos de los más importantes de dichos modelos.

Formulemos el problema de una manera precisa: Sea dada una situación física —p. ej.; un problema de dispersión— en la cual los sistemas (campos) que aparecen puedan considerarse como asintóticamente libres. Según esto, se ha de verificar que, tanto en el pasado como en el futuro remotos, ( $t = -\infty$ ;  $t = +\infty$ ), la dinámica del sistema está gobernada por un cierto hamiltoniano libre,  $H_o$ . Al pasar el tiempo, las partículas se acercan lo suficiente para interaccionar entre ellas: esto lo expresamos diciendo que en el instante presente ( $t = 0$ ), la dinámica viene determinada por otro hamiltoniano total,  $H = H_o + H_I$ , donde  $H_I$  describe la interacción. Esto nos permite determinar las condiciones que deben de cumplir  $H$ ,  $H_o$ , para describir la situación de una manera físicamente aceptable. En efecto: escribamos el operador evolución temporal como  $U(t) = e^{itH} e^{-itH_o}$ . Entonces el desplazamiento del pasado remoto (futuro remoto) al presente, viene por la transformación  $U_- \equiv \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t)$  ( $U_+ \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t)$ ); los  $U$  son los llamados operadores o matrices de ondas de Moller; en términos de éstos, la matriz  $S$  es  $S = U_+^* U_-$ . El hecho de que  $U_-$  ( $U_+$ ) efectúa el desplazamiento del pasado (futuro) remoto al presente claramente implica  $HU_+ = U_+ H_o$ ,  $HU_-^* = U_-^* H_o$ . Puesto que los únicos estados de  $H$  que no son asintóticamente libres son los ligados  $U_+^* U_+ = 1 - \Lambda$ , donde  $\Lambda$  es el proyector sobre los estados ligados de  $H$ : esto es, los  $U_+$  son isometrías.

Sin embargo lo de más arriba, que es cierto en primera cuantificación, no lo es en la teoría bicuantificada: en este caso, la aparición en  $H_I$  de términos de autointeracción hace que las partículas se rodeen de nubes de cuantos virtuales (se “vistan”), con lo que su masa cambia una cierta cantidad (a veces infinita). El reajuste de masas en  $H_o$  de manera a obtener  $H_R$ , donde las masas tienen ya sus valores “vestidos” (que son los que observamos experimentalmente) es la llamada renormalización de masas. Entonces, en vez de  $HU_+ = U_+ H_o$ , debemos esperar que se verifique  $HU_+ = U_+ H_R$  ( $1 - 3$ ); ver también (23). Por otra parte, el hecho de trabajar en teoría de campos (i. e. bicuantificada) añade algo también a la igualdad  $U_+^* U_+ = 1 - \Lambda$ : no puede haber estados ligados de energía inferior a la del continuo correspondiente (esto es la expresión del hecho bien conocido de que en teoría de campos no hay estados ligados sino resonancias). Esto es equivalente a exigir que no exista continuo a la izquierda de la región de dispersión. Demostración: supongamos por ejemplo que existiera un estado ligado de las partículas  $A$  y  $B$  de energía menor que la de la suma de sus masas. Entonces, el conjunto formado por el estado ligado y una partícula  $A$  muy lejos de él, tendría, al variar la velocidad de la partícula  $A$  de  $0$  en adelante, un espectro continuo de energías. Este continuo de  $H$  tendría la propiedad (físicamente absurda) de contener estados sin límite asintótico libre.

Resumiendo, las condiciones que deben de cumplir  $H$ ,  $H_R$  (dejando aparte invariancias bajo simetrías, que no tienen influencia en nuestro análisis) son:

$$\begin{aligned} H &\leq H^*, [H] = H^*, [\mathcal{D}_H] = \mathcal{H} \\ H_R &\leq H^*; [H_R] = H_R^*; [\mathcal{D}_{H_R}] = \mathcal{H} \end{aligned} \tag{I. i}$$

donde  $A^*$  es el operador adjunto de  $A$ ,  $[A]$  la clausura de  $A$ ,  $\mathcal{D}_A$  es el dominio de definición de  $A$  y  $[\mathcal{D}_A]$  su clausura.  $\mathcal{H}$  es el espacio de Hilbert de los estados físicos —i. e., normalizables— y el símbolo  $A \leq A^*$  significa que  $A^*$  prolonga a  $A$ . La segunda condición es la existencia de  $U$  con las condiciones requeridas. Es fácil ver que la condición necesaria para que esto se verifique es:

$$\sigma_c(H) = \sigma_c(H_R) \quad (\text{I. ii})$$

donde  $\sigma_c(A)$  denota la parte continua del espectro de  $A$ , multiplicidades incluidas. Escribiremos (I. ii) también como  $H \sim H_R$ .

Discusión: (I. i) simplemente expresa que  $H$ ,  $H_R$  representan observables (la energía), y, por tanto, son operadores hipermaximales (esto es, esencialmente autoadjuntos); ver (24). En cuanto a (I. ii) indica que todos los estados del continuo de  $H$  son “físicos”, y, por tanto, podemos conectar  $H$ ,  $H_R$  por medio de los  $U$ . Claramente, para estudiar (I. ii), un análisis de cerca de  $\sigma_c(H)$  es necesario.

### 1. Existencia e hipermaximalidad de Hamiltonianos.

Sean dados los campos fermiónicos (resp: bosónicos)  $A'$ ,  $A' = 1, \dots, A$  (resp:  $B'$ ,  $B' = 1, \dots, B$ ) y sean  $M_{A'}(\mu_{B'})$  sus masas,  $W_{A'}(\mathbf{p})$  ( $\omega_{B'}(\mathbf{k})$ ) sus energías. La única restricción que impondremos en las funciones  $W(\mathbf{p})$ ,  $\omega(\mathbf{k})$  es la de ser convexas (1); decimos que  $f(x)$  es convexa si  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ . Es claro que además  $M_{A'} = W_{B'}(0) \geq 0$ ,  $\mu_{B'} = \omega_{B'}(0) \geq 0$ . Olvidándonos de variables discretas, que no influyen en nuestro análisis, el hamiltoniano libre para el sistema considerado será:

$$H_0 = \sum_{A'=1}^A \int \psi_{A'}^*(\mathbf{p}_{A'}) \psi_{A'}(\mathbf{p}_{A'}) W_{A'}(\mathbf{p}_{A'}) d\mathbf{p}_{A'} + \\ + \sum_{B'=1}^B \int \varphi_{B'}^*(\mathbf{k}_{B'}) \varphi_{B'}(\mathbf{k}_{B'}) \omega_{B'}(\mathbf{k}_{B'}) d\mathbf{k}_{B'} \quad (1.1)$$

donde  $\psi_{A'}^*(\mathbf{p}_{A'})$  crea su fermión  $A'$  de momento  $\mathbf{p}_{A'}$  y  $\psi_{A'}(\mathbf{p}_{A'})$  lo destruye (y lo análogo  $\varphi_{B'}^*(\mathbf{k}_{B'})$ ,  $\varphi_{B'}(\mathbf{k}_{B'})$  para los bosones). Las reglas de conmutación son las usuales,

$$[\psi_{A'}(\mathbf{p}), \psi_{A'}^*(\mathbf{q})]_+ = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\ [\varphi_{B'}(\mathbf{k}), \varphi_{B'}^*(\mathbf{l})] = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{l}) \quad (1.2)$$

el resto de los conmutadores y/o anticomutadores anulándose. De hecho,  $\psi$ ,  $\psi^*$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi^*$ , ... deben ser considerados como distribuciones operador valoradas dando la representación irreducible y con vacío,  $|0\rangle$ , de (1.2) en un espacio de Hilbert separable,  $\mathcal{H}$ ; y es en este sentido como las manejaremos ((14), (26)). Consideraremos ahora perturbaciones de destrucción-

DEFINICION DE HAMILTONIANOS

creación,  $V$ , definidas a través de un núcleo,  $v$  (en símbolos  $V \simeq v$ ) como sigue:

$$V \equiv \int v(p_{(a)}, k_{(\beta)}; p'_{(a)}, k'_{(b)}) (\psi^*(p))_a (\varphi^*(k))_\beta : \\ \cdot (\psi(p'))_a (\varphi(k'))_b d\mathbf{p}_{(a)} dk_{(\beta)} d\mathbf{p}'_{(a)} dk'_{(b)}, \quad (1.3)$$

donde

$$\mathbf{p}_{(a)} \equiv \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_a\}, \quad d\mathbf{p}_{(a)} \equiv d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_a, \\ (\psi^*(p))_a \equiv \psi_1^*(\mathbf{p}_1) \dots \psi_a^*(\mathbf{p}_a),$$

y lo análogo para el resto. Gracias a (1.2) podemos considerar a  $v$  como una función simétrica en  $k$ 's y antisimétrica en  $p$ 's. Consideremos también la perturbación  $V' \simeq v(p'_{(a)}; k'_{(\beta)}; p_{(a)}; k_{(b)})^*$ , el asterisco denotando complejo conjugado. Notemos que  $V'$  es formalmente adjunta de  $V$ . Sea ahora  $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}$  definido por la amplitud  $\Phi$  (en símbolos,  $|\Phi\rangle \simeq \Phi$ ) como sigue:

$$|\Phi\rangle \equiv \int d\mathbf{q}_{(i)} d\mathbf{l}_{(j)} \Phi(\mathbf{q}_{(i)}, \mathbf{l}_{(j)}) (\psi^*(\mathbf{q}))_i (\varphi^*(\mathbf{l}))_j,$$

$\Phi$  siendo antisimétrica en  $\mathbf{q}$ 's y simétrica en  $\mathbf{k}$ 's. Operando formalmente en  $|\Phi\rangle$  con  $V, V'$  obtenemos:

$$V |\Phi\rangle = |\Psi\rangle \simeq \Psi(p_{(a)}; k_{(\beta)}, \mathbf{q}_{(i-a)}, \mathbf{l}_{(j-b)}) = \\ = \varepsilon N \int v(p_{(a)}, k_{(\beta)}; \mathbf{q}_{i-a+1}, \dots, \mathbf{q}_i \mathbf{l}_{j-b+1}, \dots, \mathbf{l}_j) \\ \Phi(\mathbf{q}_{(i)}, \mathbf{l}_{(j)}) d\mathbf{q}_{i-a+1} \dots d\mathbf{q}_i d\mathbf{l}_{j-b+1} \dots d\mathbf{l}_j \quad (1.5) \\ V' |\Phi\rangle = |\Psi'\rangle \simeq \Psi'(p_{(a)}, k_{(b)}; \mathbf{q}_{(i-a)}, \mathbf{l}_{(j-\beta)}) = \\ = \varepsilon' N' \int v^*(\mathbf{q}_{i-a+1}, \dots, \mathbf{q}_i \mathbf{l}_{j-\beta+1}, \dots, \mathbf{l}_j; p_{(a)}, k_{(b)}) \\ \Phi(\mathbf{q}_{(i)}, \mathbf{l}_{(j)}) d\mathbf{q}_{i-a+1} \dots d\mathbf{q}_i d\mathbf{l}_{j-\beta+1} \dots d\mathbf{l}_j$$

donde  $\varepsilon, \varepsilon'$  son proyectores que aseguran que  $\Psi, \Psi'$  tienen las propiedades de simetría debidas, y  $N, N'$  son números (que no dependen de la forma funcional de  $\Phi$ ) y de la forma

$$O\left(i^{\frac{a+a}{2}}\right) O\left(j^{\frac{\beta+b}{2}}\right).$$

Denotemos por  $C$  al conjunto de vectores de la forma

$$|\chi\rangle = \int d\mathbf{q}_{(i)} d\mathbf{l}_{(j)} \chi(\mathbf{q}_{(i)}, \mathbf{l}_{(j)}) (\psi^*(\mathbf{q}))_i (\varphi^*(\mathbf{l}))_j$$

las  $\chi$  siendo funciones continuas de soporte compacto, y sea  $\mathcal{C}$  la variedad lineal expandida por  $C$ . Entonces (ver, p. ej., (14), (25), (26))  $[\mathcal{C}] = \mathcal{H}$ ; si definimos  $H_o$  sobre  $C$  y, por prolongación lineal, sobre  $\mathcal{C}$ , se convierte en un operador hipermaximal.

Consideremos, por otra parte, la siguientes posibles propiedades de  $v$  (deberá notarse el parecido de c. 1-3 con las condiciones de (15); las nuestras son una restricción de aquellas de manera a obtener resultados adecuados a nuestros propósitos):

c. 1.—  $\|v\|_{p(a), k(\beta)} < +\infty$ ,  $v$  localmente de cuadrado integrable.

c. 1'.—  $\|v\|_{p'(a), k'(b)} < +\infty$ ,  $v$  localmente de cuadrado integrable.

c. 2.—  $\|v\| < +\infty$ .

$$\begin{aligned} (\|f(x, y, \dots, z; u, v, \dots, t)\|_{x, y, \dots, z} &\equiv + \sqrt{\int |f|^2 dx dy \dots dz} = \\ &= (\|f\|_{x, y, \dots, z})(u, v, \dots, t); \|f\| \equiv + \|f(x, y, \dots, z; u, v, \dots, t)\|_{x, y, \dots, z; u, v, \dots, t}. \end{aligned}$$

En el caso de que la interacción sea invarianta bajo traslaciones en el espacio, esto es, que conserve el momento total, podemos separar una función  $\delta$  fuera de  $v$ , escribiendo  $v(\mathbf{p}_{(a)}, \mathbf{k}_{(\beta)}; \mathbf{p}'_{(a)}, \mathbf{k}'_{(b)}) = \delta(\sum_{a'=1}^a \mathbf{p}_{a'} + \sum_{\beta'=1}^{\beta} \mathbf{k}_{\beta'}, - \sum_{a'=1}^a \mathbf{p}'_{a'} - \sum_{\beta'=1}^{\beta} \mathbf{k}'_{\beta'}) v_{\text{red}}$  y llevar a cabo una de las integraciones en (1.3), de manera que  $v_{\text{red}}$  sólo depende de  $\alpha + \beta + a + b - 1$  variables.

c. 3.—  $(\alpha + \beta)(a + b) \neq 0$ ;  $|v_{\text{red}}| \leq v_o$  con  $v_o$  dependiendo sólo en  $\alpha + \beta + a + b - 2$  variables y  $\|v_o\| < +\infty$ .

Nota: es muy posible que c. 3 pueda sustituirse por la siguiente condición menos restrictiva:  $v_{\text{red}}$  sea de cuadrado integrable respecto a todas las variables excepto una (p. ej., sea esta  $\mathbf{p}_a$ ), y  $\|v_{\text{red}}\|_{p(a-1), k(\beta), p'(a), k'(b)}$  creciente no más rápidamente que  $W_a(\mathbf{p}_a)$ . Aunque los ejemplos que conocemos apoyan dicha suposición, no hemos podido encontrar una prueba general; según esto, trabajaremos siempre con c. 3. (ver, sin embargo, (31))

Dadas c. 1-3. se tiene lo siguiente:

Lema 1.1.— Si c. 1 es válida,  $V$  está definida sobre  $\mathcal{C}$ ; análogamente con c. 1' y  $V'$ .

Lema 1.2.— Si c. 2 es válida,  $V$ ,  $V'$ , están definidas sobre  $\mathcal{C}$  y, siendo formalmente adjuntas, son cerrables (14). Además,

$$\|\Psi\| \leq N \|v\| \cdot \|\Phi\|, \quad \|\Psi'\| \leq N' \|v\| \cdot \|\Phi\|.$$

Lema 1.3.— Si  $V$ ,  $V'$  conservan el momento y c. 3 se verifica, ambas están definidas sobre  $\mathcal{C}$  y, además,

$$\|\Psi\| \leq N \|v_o\| \cdot \|\Phi\|, \quad \|\Psi'\| \leq N' \|v\| \cdot \|\Phi\|.$$

Demostración: Lema 1.1 es trivial. Demostremos los otros dos: para probar el Lema 1.2, basta tener en cuenta que, gracias al teorema de Fubini, (25),  $\Phi$  es de cuadrado integrable en  $q_{i-a+1}, \dots, q_i, l_{j-b+1}, \dots, l_j$  para casi todo valor de las demás variables. Aplicando la desigualdad de Schwartz a (1.5),

$$\|\Psi\|^2 \leq N^2 \left\{ \int |v|^2 d\mathbf{q}_{i-a+1} \dots d\mathbf{q}_i dl_{j-b+1} \dots dl_j \right\} \left\{ \int |\Phi|^2 d\mathbf{q}_{i-a+1} \dots d\mathbf{q}_i dl_{j-b+1} \dots dl_j \right\}$$

Integrando,  $\|\Psi\|^2 \leq N^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \|\Phi\|^2$ , Q. E. D. (La demostración vale con cambios obvios para  $\Psi'$ ,  $V$ ).

En cuanto al Lema 1.3, demostremos, p. ej.,  $\|\Psi\| \leq N \|v_o\| \cdot \|\Phi\|$ :

$$\begin{aligned} |\Psi(p_{(a)}, k_{(\beta)}; q_{(i-a)}, l_{(j-b)})|^2 &\leq N^2 \left| \int v_{\text{red}}(p_{(a)}, k_{(\beta)}; q_{i-a+1} \dots q_i, l_{j-b+1} \dots l_j) \right. \\ &\quad \cdot \Phi(q_{(i)}; l_{(j-1)}; \sum_1^a p_a + \sum_1^\beta k_{\beta'} + \sum_{i-a+1}^i (-q_i) - l_{j-b+1} - \dots - l_j) \\ &\quad \left. d\mathbf{q}_{i-a+1} \dots d\mathbf{q}_i dl_{j-b+1} \dots dl_{j-1} \right|^2 \leq N^2 \left\{ \int |v_{\text{red}}|^2 d\mathbf{q}_{i-a+1} \dots d\mathbf{q}_i dl_{j-b+1} \dots dl_{j-1} \right\} \\ &\quad \left\{ \int |\Phi|^2 d\mathbf{q}_{i-a+1} \dots d\mathbf{q}_i dl_{j-b+1} \dots dl_{j-1} \right\} \leq \\ &\leq N^2 \left\{ \int |v_o(p_{(a-1)}, k_{(\beta)}; q_{i-a+1} \dots q_i, l_{j-b+1} \dots l_{j-1})|^2 d\mathbf{q}_{i-a+1} \dots d\mathbf{q}_i dl_{j-b+1} \dots dl_j \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \int |\Phi|^2 d\mathbf{q}_{i-a+1} \dots d\mathbf{q}_i dl_{j-b+1} \dots dl_{j-1} \right\}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la desigualdad de Schwarz (lo que se puede hacer gracias a los teoremas de Fubini (25)) para obtener la primera mayoración, y c. 3 (suponiendo, para fijar ideas, que  $|v_{\text{red}}(p_{(a)}, \dots)| \leq v_o(p_{(a-1)}, \dots)$ ) para la segunda mayoración. Integrando,

$$\begin{aligned} \|\Psi\|^2 &\leq N^2 \int d\mathbf{p}_{(a-1)} d\mathbf{q}_{(\beta)} \left\{ \int |v_o(p_{(a-1)}, k_{(\beta)}; q_{i-a+1} \dots q_i, l_{j-b+1} \dots l_{j-1})|^2 \cdot \right. \\ &\quad \cdot d\mathbf{q}_{i-a+1} \dots d\mathbf{q}_i dl_{j-b+1} \dots dl_{j-1} \left. \right\} \left\{ \int d\mathbf{p}_a |\Phi(q_{(i)}, l_{(j-1)}, \sum_1^a p_a + \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^\beta k_{\beta'} q_{i-a+1} \dots) |^2 \cdot d\mathbf{q}_{(i)} dl_{(j+1)} \right\} = \|v_o\|^2 \|\Phi\|^2 N^2. \end{aligned}$$

El último paso lo hemos podido hacer gracias a que los teoremas de Fubini nos permiten escribir

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{p}_{(a)} |\Phi(q_{(i)}, l_{(j-1)}, \sum_1^a p_a + \sum_1^\beta k_{\beta'} - q_{i-a+1} - \dots - q_i - l_{j-b+1} - \dots - l_{j-1})|^2 = \\ = \int d\mathbf{x} |\Phi(q_{(i)}, l_{(j-1)}, \mathbf{x})|^2 \end{aligned}$$

para casi todo  $\{\mathbf{q}_{(i)}, \mathbf{l}_{(j-1)}\}$ , con lo que

$$\int d\mathbf{p}_{(a)} |\Phi(\mathbf{q}_{(i)}, \mathbf{l}_{(j-1)}, \sum_1^a \mathbf{p}_{a'} + \dots - \dots)|^2 d\mathbf{q}_{(i)} dl_{(j-1)} = \|\Phi\|^2.$$

Una perturbación,  $H_I \equiv V + V'$  se dice regular si existen  $a_o, b_o$  (independientes de  $|\Phi\rangle$ ) tales que  $\|H_I|\Phi\rangle\| \leq a_o \|\Phi\| + b_o \|H_o|\Phi\rangle\|$ , para todo  $|\Phi\rangle \in \mathcal{C}$  (9); claramente, basta probar la desigualdad para  $|\Phi\rangle \in \mathcal{C}$ . Denotemos por  $v_{ef}$  a  $v$  ó  $v_s$ , según estemos en c. 2 ó c. 3; y escribamos  $\lambda \equiv \|v_{ef}\|$ ;  $\lambda$  es proporcional a la "constante de acoplamiento". Se tiene,

**Teorema 1.** — Si los resultados del Lema 1.1 son ciertos y  $v$  es real,  $H = H_o + H_I$  es extendible a un operador hipermaximal.

**Teorema 2.** — Si el Lema 1.2 ó el Lema 1.3 es cierto; si  $H_I$  conserva  $N_F \equiv \sum_{A'=1}^4 N_{A'}$  ( $N_F$  denotando al operador "número de partículas  $F'$ "), esto es, el número de fermiones es constante en el tiempo; si  $\min_{B'} \{\mu_{B'}\} > 0$ ; y si  $H_I$  es a lo más bilineal en operadores bosónicos, entonces  $H_I$  es regular, y si  $\lambda$  es suficientemente pequeño la perturbación es analítica. Si, además  $H_I$  es a lo más lineal (en vez de bilineal) en los operadores bosónicos, la perturbación es analítica para todo valor de  $\lambda$ . Los mismos resultados valen si sustituimos en lo de arriba bosones por fermiones y viceversa. Remarquemos, finalmente, que el teorema ha de entenderse válido sobre cada sector correspondiente a un número fijo de las partículas (fermiones o bosones) conservadas. En cualquier caso, debido a un conocido teorema sobre perturbaciones regulares,  $H \equiv H_o + H_I$  es hipermaximal.

Demostración: El Teorema 1 es consecuencia directa del Lema 1.1. y de un conocido teorema de von Neumann (10) sobre operadores simétricos reales. En cuanto al Teorema 2, descompongamos  $\mathcal{H}$  como  $\bigoplus_{F'=1}^4 \mathcal{H}_{F'}$  (el símbolo  $\oplus$  significa "suma directa de subespacios"), con  $N_F = F'$  sobre  $\mathcal{H}_{F'}$  (hemos tomado el caso  $[N_F, H] = 0$ ; el  $[N_B, H] = 0$  es totalmente análogo). En cada  $\mathcal{H}_{F'}$ , tomemos  $|\Phi_{B'}\rangle \simeq \Phi_B(\mathbf{p}_{(F')}, \mathbf{k}_{(B)})$  arbitrario; ( $|\Phi_{B'}\rangle \in C \cap \mathcal{H}_{F'}$ ); según Lema 1.2 ó 1.3 y utilizando la notación  $\varkappa \equiv \sup \{(N + N')^2 / B^2\}$ , que es  $\varkappa < +\infty$  gracias a las propiedades de  $N, N'$ ,

$$\|H_I|\Phi_B\rangle\|^2 \leq (N + N')^2 \|v_{ef}\|^2 \|\Phi_B\|^2 \leq B^2 \varkappa^2 \|v_{ef}\|^2 \|\Phi_B\|^2.$$

Ahora bien,

$$\|H_o|\Phi_B\rangle\|^2 \leq \min_{B'} \{\mu_{B'}^2\} B^2 \|\Phi_B\|^2,$$

luego

$$\|H_I|\Phi_B\rangle\|^2 \leq \varkappa \|v_{ef}\|^2 \|H_o|\Phi_B\rangle\|^2 / \min_{B'} \{\mu_{B'}^2\},$$

con lo que la demostración de la primera parte del Teorema está terminada. La demostración de la segunda parte ( $H_I$  lineal en operadores bosónicos) es análoga a la hecha.

Nota: las condiciones de los Teoremas 1.2 parecen difíciles de mejorar; de hecho, A. Galindo (6) ha demostrado construyendo explícitamente contraejemplos, que condiciones ligeramente más generales que c. 1-3 incluyen perturbaciones "patológicas".

## 2. Aplicación a algunos tipos concretos de interacciones

Los resultados del § precedente nos dan un método muy potente para el estudio de Hamiltonianos en teoría de campos. En efecto, si por algún método eliminamos la creación de pares, la mayor parte de las interacciones (con "cut-off") caen dentro del Teorema 2. Investiguemos efectivamente algunos modelos concretos. En todo lo que sigue  $a, \varphi, \dots$  denotarán operadores bósónicos;  $\psi, N, V, \chi, \dots$  id. fermiónicos;  $\omega_k = \sqrt{p^2 + k^2}$  y, finalmente,  $g$  representa  $v_{\text{red}} \cdot \psi_p, \varphi_p, \dots$  representan  $\psi(\mathbf{p}), \varphi(\mathbf{p}), \dots$

2.i.

$$H_o = \int d\mathbf{p} W_p^o \psi_p^* \psi_p + \int d\mathbf{k} \omega_k a_k^* a_k$$

$$H_I = \lambda \int d\mathbf{p} d\mathbf{k} g(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \psi_{p+k}^* \psi_p \{ a_k^* + a_{-k} \}$$

(el campo escalar). Aquí  $[N_\psi, H] = 0$ , luego si  $g$  cumple c.3,  $H$  cae dentro del Teorema 2, segunda parte.

2. ii.

$$H_o = \int d\mathbf{p} W_p^o V_p^* V_p + \int d\mathbf{q} \Omega_q N_q^* N_q + \int d\mathbf{k} \omega_k a_k^* a_k \quad (2.2)$$

$$H_I = \lambda \int d\mathbf{p} d\mathbf{k} g(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \{ V_p^* N_{p-k} a_k + h. c. \}$$

(el modelo de T. D. Lee); h. c. significa "hermítico conjugado" de lo que precede. Si  $\|g_{ef}\| < +\infty$  obtenemos un resultado más fuerte: debido a la conservación no sólo de  $Q \equiv N_v + N_a$ , sino también de  $R \equiv N_v + N_a$ , se sigue que  $H_I$  no sólo es regular, sino continua; la demostración es análoga a la del Teorema 2, y el resultado también ha de entenderse sobre cada sector con un valor fijo de  $Q$  y  $R$ .

El mismo resultado es válido si  $\|v\| < +\infty$  en el caso

$$H_I = \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k} v(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}) \{ V_p^* N_q a_k + h. c. \}$$

2. iii.

$$H_o = \sum_{v=1}^{n_o} \int d\mathbf{p} W_v^o(\mathbf{p}) \psi_v^*(\mathbf{p}) \psi_v(\mathbf{p}) + \int d\mathbf{k} \omega_k a_k^* a_k \quad (2.3)$$

$$H_I = \sum_{v=1}^{n_o} \lambda_v \int d\mathbf{p} d\mathbf{k} g_v(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \{ \psi_v^*(\mathbf{p}) \psi_{v+1}(\mathbf{p}-\mathbf{k}) a_k + h. c. \}$$

(el modelo de Ruijgrok-Van Hove). Aquí las sumas han de entenderse en el sentido del álgebra de los enteros módulo  $n_o$ . También aquí  $\sum_{v=1}^{n_o} N_{vv} = \text{const.}$ , y el Teorema 2 vale si  $\|g_{v\text{ef}}\| < +\infty$ .

## 2. iv.

$$\begin{aligned} H_o &= \int d\mathbf{x} : \psi^*(\mathbf{x}) \{ \alpha \mathbf{p} + \beta M^o \} \psi(\mathbf{x}) : + \\ &\quad \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} : \Pi(\mathbf{x})^2 + (\nabla \varphi(\mathbf{x}))^2 + \mu^2 \varphi(\mathbf{x})^2 : \\ H_I &= \lambda \int d\mathbf{x}_{(3)} g [\psi^* \tau \gamma_5, \psi] \varphi + \\ &\quad + \int \{ \lambda_1 g_1 \psi_{\text{protón}}^* \gamma_5 \psi_{\text{protón}} + \lambda_2 g_2 \psi_{\text{neutrón}}^* \gamma_5 \psi_{\text{neutrón}} \} \varphi_3(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

(modelo de Chew-Low. Las notaciones son las usuales; ver p. ej. el libro de Schweber (2). Las frecuencias tomadas al definir  $\psi$ ,  $\psi^*$  en  $H_I$  lo son de manera a evitar creación de pares. Entonces,  $N_F = \text{constante}$ , y el Teorema 2 se verifica si las transformadas de Fourier de las  $g$ 's cumplen c. 2, 3. La teoría sólo requiere invariancia  $CP$ : si pedimos además invariancia de isospín, será  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

## 3. — Espectro de energías de algunos modelos simples

Queremos ahora pasar al estudio efectivo de los espectros de  $H$ ,  $H_R$ . Esto es, queremos investigar si (I. ii) se verifica. Haremos el estudio detallado de los modelos 3. i, 3. ii y algunos comentarios sobre los 3. iii, iv. Remarquemos que es gracias a los resultados de los §§ 1,2 que nuestro trabajo tiene sentido: el que los Hamiltonianos sean hipermaximales sobre  $\mathcal{C}$  nos permite llevar a cabo el estudio de  $\sigma(H)$ ,  $\sigma(H_R)$  con toda tranquilidad y rigor. Para entender lo que esto significa, citemos lo siguiente: el espectro de un operador no hipermaximal (aunque formalmente sea autoadjunto) tiene la propiedad, absurda para un Hamiltoniano desde el punto de vista físico, de llenar toda la recta real (11).

Antes de entrar en el estudio detallado de los modelos en cuestión debemos decir unas palabras sobre el significado de los núcleos  $g(\mathbf{p}, \mathbf{k})(v_{\text{red}})$ , reduciéndonos por comodidad al caso de una variable,  $g(\mathbf{k})$ . Sabemos que la manera usual de escribir interacciones relativísticamente aceptables es por medio de acoplamientos locales. Si  $\hat{f}(\mathbf{x})$  es la transformada de Fourier de  $f(\mathbf{k}) \equiv C g(\mathbf{k}) \sqrt{\omega_k}$  (el símbolo  $\wedge$  denotará siempre transformación de Fourier, que también escribiremos a veces como  $\mathcal{F}$ :  $\hat{f} = \mathcal{F} f$ ), entonces  $\hat{f}(\mathbf{x})$  mide la región sobre lo que la interacción tiene lugar. En un acoplamiento local,  $\hat{f}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ , i. e.,  $g(\mathbf{k}) = C / \sqrt{\omega_k}$ , y nuestros resultados pierden su sentido. En este caso, sin embargo, es fácil ver que el desplazamiento

to del espectro es infinito, y  $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_{H_r} = |_0\rangle$  ( $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_{H_o} = 0$ , si admitimos creación de pares) (Van Hove, (23); ver también (2), (16)). Podemos evitar esta patología, en un cierto sentido al menos, dejando fijos a  $H_R$  y  $H$ , y variando  $H_o$  de manera a compensar el límite  $\hat{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \delta(\mathbf{x})$ . Se supone, en este caso, que las relaciones que son ciertas para  $f(\mathbf{x})$  finito queden válidas en el límite. Aparte de los difíciles problemas de principio que esto plantea (cf. la discusión de la observabilidad de la masa "desnuda" por ej. en (2)), hay ejemplos explícitos bien conocidos que prueban que la suposición no siempre es correcta; las patologías que aparecen en el modelo de Lee cuando  $g \rightarrow \frac{C}{\sqrt{\omega_k}}$  han sido extensivamente discutidas (ver, por ej. (12), (19-22)). Como nuestra tarea no concierne a estos problemas, consideraremos que siempre  $\|g(\mathbf{k})\| < +\infty$ . Alternativamente, podemos justificar esta elección suponiendo que las partículas no son simples, sino que están vestidas por interacciones diferentes a la considerada; estando, pues, rodeadas de una nube de cuantos virtuales descrita (fenomenológicamente) por  $\hat{f}(\mathbf{x})$ . Esto implica que  $\|\hat{f}(\mathbf{x})\| < +\infty$ , con lo que llenan nuestros requerimientos.

Para terminar, notemos que la invariancia de  $H$  frente a rotaciones en el espacio requiere  $g(\mathbf{k}) = g(|\mathbf{k}|)$  y que la invariancia de  $H$  frente a la inversión temporal, implica que  $g$  es real. Estas dos últimas condiciones, que supondremos por sencillez verificándose, no son esenciales para nuestro análisis, y nuestros resultados pueden fácilmente arreglarse en el caso de que fallaran.

### 3. i.

Consideremos tres versiones del modelo del campo escalar. La primera, caracterizada por los hamiltonianos

$$H_o = M_o \psi^* \psi + \int d\mathbf{k} \omega_k a_k^* a_k, \quad H_I = \lambda \psi^* \psi \int d\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \{a_k + a_k^*\}$$

(nucleones fijos) ha sido completamente resuelta y referimos a la literatura (16). Llamamos la atención sobre el hecho de que, debido a ser  $\psi^2 = \psi^{*2} = 0$  y  $[\psi, \psi^*] = 1$ ,  $N_\psi$  es un proyector: no más de un nucleón puede estar presente.

La segunda versión corresponde a los Hamiltonianos (2.1), con  $N_\psi = \int d\mathbf{p} \psi_p^* \psi_p$ ,  $W_p^o \equiv M_o$ ,  $g(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = g(\mathbf{k})$ . Las masas desnudas y vestidas de los "mesones" (partículas a) coinciden, mientras que se tiene  $M_a = M_o - \lambda^2 \int d\mathbf{k} |g(\mathbf{k})|^2$  para los nucleones. Como  $[N_\psi, H] = 0$ , la descomposición

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n, \quad N_\psi = n \text{ sobre } \mathcal{H}_n \quad (3.1)$$

es invariante bajo  $H$ ,  $H_R$ . Demostremos que aunque  $H \sim H_R$  sobre  $\mathcal{H}_o$  y  $\mathcal{H}_1$ , no es  $H \sim H_R$  en general. Para ello definamos (Greenberg & Schwever, ver (2)).

$$\begin{aligned} \chi_p^* &\equiv U \psi_p^* U^{-1}, \quad a_k^d \equiv U a_k^* U^{-1}, \dots \\ U &\equiv \exp. \left\{ - \int d\mathbf{p} d\mathbf{k} \frac{\lambda g(\mathbf{k})}{\omega_k} \psi_p^* \psi_{p+k} \{ a_k^* - a_{-k}^* \} \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Expresando  $H$  en términos de los  $a^d$ ,  $\chi$ ,

$$\begin{aligned} H = M_R \int d\mathbf{p} \chi_p^* \chi_p + \int d\mathbf{k} \omega_k a_k^* a_k + \\ + \lambda^2 \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k} \frac{|g(\mathbf{k})|^2}{\omega_k} \chi_{p+k}^* \chi_b^* \chi_p \chi_{q+k}. \end{aligned}$$

En esta representación los campos  $a^d$ ,  $\chi$  están totalmente desacoplados, y hemos reducido el problema a estudiar (I.ii) para

$$H' \equiv H'_R + H'_I = M_R \int d\mathbf{p} \chi_p^* \chi_p + \lambda^2 \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k} \frac{|g(\mathbf{k})|^2}{\omega_k} \chi_{p+k}^* \chi_q^* \chi_p \chi_{q+k}.$$

Claramente,  $H' \sim H'_R$  sobre  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_1$ . Sin embargo,  $H' \sim H'_R$  falla en general.

Demostración: sea  $|\Phi\rangle \simeq \Phi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ ,  $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_2$ . En vez de considerar  $H' |\Phi\rangle$ , transformamos por Fourier, y consideremos  $\mathcal{F} H' \mathcal{F}^{-1} |\Phi\rangle$ ; esto, en términos de amplitudes se reduce a  $\mathcal{F} |\hat{\Phi}\rangle \simeq \hat{\Phi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ,  $\mathcal{F} H_x \mathcal{F}^{-1} = H_x = M_R - \lambda^2 \hat{G}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ , con  $\hat{G}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{|g(\mathbf{k})|^2}{\omega_k}$ . Pero el espectro de un operador que, como  $H_x$ , se reduce a multiplicar por una función, es el recorrido de dicha función. Como el recorrido de  $M_R - \lambda^2 \hat{G}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$  es un segmento, y como  $\sigma(H_x) = \sigma(H')$ , obtenemos  $\sigma_c(H') \neq \sigma_c(H'_R)$  en  $\mathcal{H}_2$ . Esta situación, muy conocida por los matemáticos (cf Weyl y von Neuman, citado en (25)), es, creemos, encontrada aquí por primera vez en teoría de campos: bajo la acción de una perturbación, sin importar lo pequeña que sea  $\lambda$ , un punto infinitamente degenerado se convierte en un segmento.

En la tercera versión, los Hamiltonianos son los (3.1),  $W_p^o$  inespecificada por el momento. Análogamente a la versión anterior, nos basta estudiar  $H'_R = \int W_p \chi_p^* \chi_p d\mathbf{p}$ ,  $H' = H'_R + \lambda^2 \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\mathbf{k} \frac{g \cdot g^*}{\omega_k} \chi_{p+k}^* \chi_q^* \chi_p \chi_{q+k}$ , con cambios de notación obvios. Es digno de notar lo siguiente: tanto en esta versión como en la anterior, la transformación  $U: H_I \rightarrow U H_I U^{-1}$  separa  $H_I$  en dos partes. Insertando la primera en  $H_o$ , obtenemos  $H'_R$ , y nos quedamos con  $H'_I \equiv H' - H'_R$  que, utilizando argumentos similares a los de 2. ii es fácil probar que es continua incluso para acoplamientos locales. En este caso, pues, el procedimiento de paso al límite  $g(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \rightarrow C / \sqrt{W_p W_{p+k} \omega_k}$  descrito al principio del presente  $\#$ , puede llevarse a cabo.

También en esta versión es  $H' \sim H'_R$  sobre  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_1$ ; es fácil probar, sin embargo, que  $H' \sim H'_R$  falla si  $\lambda$  es suficientemente grande.

Demostración: la ecuación de autovalores  $H' |\Phi\rangle = E |\Phi\rangle$  se reduce a la  $\lambda^2 \int \{ |g(\mathbf{p}, \mathbf{k})|^2 \Phi(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) / \omega_k(E - W_{\mathbf{p}_1} - W_{\mathbf{p}_2}) \} d\mathbf{k} = \Phi(\mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2)$ , cuyo operador integral es esencialmente del tipo simetrizable y de Hilbert-Schmidt. (30). Como su norma tiende hacia 0 cuando  $E \rightarrow -\infty$  y hacia  $+\infty$  cuando  $\lambda^2 \rightarrow +\infty$ , resulta sin más (25) que  $(H - E) |\Phi\rangle = 0$  tiene soluciones normalizables para, al menos, un  $E < 2 M_R$ . Estas soluciones representan estados ligados, en  $\mathcal{H}_2$ , de energía inferior al continuo, Q.E.D.

Aunque no sea  $H_R \sim H$ , parece probable que al menos se dé el resultado más restringido siguiente:  $\sigma_c(H_R) \subset \sigma_c(H)$ . Esto puede interpretarse como reflejo de que estamos trabajando esencialmente con potenciales, y por tanto, no estamos en auténtica teoría de campos. Si, para ser consecuentes, tomamos para  $W_p = \sqrt{(M_R^2 + \mathbf{p}^2)}$  la aproximación no relativista,  $W_p = M_R + \mathbf{p}^2/2M_R$ , el resultado mencionado más arriba puede probarse sin más que aplicar, con cambios triviales, el método de Kuroda (3).

### 3. ii.

Mucha atención se ha prestado al modelo de T. Lee (T. D. Lee, (18)), debido a ser a la vez "simple" y presentar aspectos propios de teorías más complicadas (ver Conclusiones). También aquí consideraremos tres versiones.

Las características comunes a las tres versiones son las siguientes: la descomposición

$$\mathcal{H} \equiv \bigoplus_{r, q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{r, q}, \quad R = r \text{ en } \mathcal{H}_{r, q}, \quad Q = q \text{ en } \mathcal{H}_{r, q}$$

es invariante por  $H_R$ ,  $H$ . El modelo describe la interacción de dos nucleones,  $N$  y  $V$ , con un mesón,  $\theta$ , de forma que la reacción  $V \leftrightarrow N + \theta$  es permitida, mientras  $N \leftrightarrow V + \theta$  está prohibida. Posibles interpretaciones de la teoría son identificar  $V \leftrightarrow p^\pm$ ,  $N \leftrightarrow n$ ,  $\theta \leftrightarrow \pi^\pm$  ó  $\bar{V} \leftrightarrow N_\uparrow$ ,  $N \leftrightarrow N_\downarrow$ ,  $\theta \leftrightarrow \pi^0$  ( $l(\pi^0) = +1$ );  $N_\uparrow$  representa un nuleón con espín  $\uparrow, \downarrow$ . Esto no da una idea de las limitaciones del modelo: despreciamos la existencia de la partícula  $\bar{\theta}$  que haría la reacción  $V + \bar{\theta} \leftrightarrow N$  posible.

Se tiene  $|O^d\rangle = |O^b\rangle$ ,  $|\theta^d\rangle = |\theta^b\rangle$ ,  $|N^d\rangle = |N^b\rangle$ , i. e.,  $\mu^d = \mu^b \equiv \mu$ ,  $m_N^d = m_N^b \equiv m_N$ , pero  $|V^d\rangle \neq |V^b\rangle$ , y

$$W_p^o = W_p + \int d\mathbf{k} |g(\mathbf{p}, \mathbf{k})|^2 / \{ \Omega_{p-k} + \omega_k - W_p \},$$

que en el caso

$$W_p \equiv M, \quad \Omega_q \equiv m \quad \text{da} \quad M = M_o - \int d\mathbf{k} \frac{|g(\mathbf{k})|^2}{m + \omega_k - M}$$

(Los superíndices  $d, b$  se refieren, respectivamente, a objetos renormalizados ("dressed"), no-renormalizados ("bare")).

La condición de estabilidad, que asegura que la partícula  $V$  no se desintegra espontáneamente es  $M < m + \mu$ ; siempre supondremos este caso. Discusiones de la estabilidad de la partícula  $V$  pueden verse en (2), (12).

I) Aparte de estos aspectos comunes, la primera versión presenta las siguientes particularidades: debido a las tres reglas de conmutación, sólo los sectores con  $Q \leq 2$  contienen vectores no triviales. En estos subespacios es fácil comprobar que  $H_I$  se anula sobre  $\mathcal{H}_{r,2}$ ; evidentemente, esto ya implica el fallo de  $H \sim H_R$ , ya que  $M_o \neq M_R$ . Esto puede, sin embargo, arreglarse si, en vez de los Hamiltonianos arriba descritos, consideramos los

$$\begin{aligned} H' &= H_R + H'_I \\ H'_I &\equiv \{H_I + H_o - H_R\} \Lambda. \end{aligned}$$

$\Lambda$  es el proyector sobre los subespacios con  $Q \neq 2$ . Si  $h_i(\mathbf{k}_{(n)})$  es una base ortonormal cualquiera de  $L^2(R^{3n})$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda = 1 - \sum_{n,n'=0}^{\infty} \sum_{i,i'=1}^{\infty} \int d\mathbf{k}_{(n)} d\mathbf{k}'_{(n')} h_i(\mathbf{k}_{(n)}) h_{i'}(\mathbf{k}'_{(n')}) \cdot \\ \cdot N^* V^* (a_{k'}^*) |0\rangle \langle 0| (a_{k'})_{n'} VN. \end{aligned}$$

Nos basta, pues, con estudiar los sectores  $Q = 1$  ( $Q = 0$  es trivial). Estos son análogos en las tres versiones y los estudiaremos más tarde simultáneamente.

II) La segunda versión (Kallén y Pauli, (21)) está caracterizada por los Hamiltonianos (2.2) con  $W_p^o \equiv M_o$ ,  $\Omega_q \equiv m$ . Puede verse por comprobación directa que la magnitud de  $m$  no influye en los resultados; según esto, simplificaremos el álgebra escribiendo  $m = 0$ . Si ahora definimos las funciones  $h(x)$ ,  $\gamma(x)$  como sigue,

$$h(x) \equiv x - M_o - P.P. \int d\mathbf{k} \frac{|g(\mathbf{k})|^2}{x - \omega_k}, \quad \gamma(x) \equiv h(x + M)$$

es fácil comprobar que  $h(M) = \gamma(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = \pm \infty$ .

Pasemos a la discusión de  $\sigma(H)$ ; comencemos por los sectores  $Q = 1$  y tomemos por sencillez el caso  $R = 2$ , los casos  $R > 2$  siendo completamente análogos (en la discusión de los espectros haremos uso, sin noticia explícita, de la condición de Weyl (25)).

Un vector arbitrario,  $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{2,1}$  se puede escribir ( $|\Phi\rangle \simeq \{\varphi, \psi\}$ ),

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle = & \left\{ \int d\mathbf{K} d\mathbf{k}' \varphi_K(\mathbf{k}') V_{K-k'}^* a_{k'}^* + \right. \\ & \left. + \int d\mathbf{K} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' \psi_K(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') N_{K-k'-k''}^* a_{k'}^* a_{k''}^* \right\} |0\rangle \end{aligned}$$

Sea  $E$  real. Si definimos  $|\Xi\rangle \equiv (H - E)|\Phi\rangle$  obtenemos para  $|\Xi\rangle \simeq \{\xi, \eta\}$  las ecuaciones

$$\xi_K(\mathbf{k}') = (M_o + \omega_k - E) \varphi_K(\mathbf{k}') + 2\lambda \int d\mathbf{k}'' g(\mathbf{k}'') \psi_K(\mathbf{k}', \mathbf{k}''),$$

DEFINICION DE HAMILTONIANOS

$$\eta_K(k', k'') = (\omega_{k'} + \omega_{k''} - E) \psi_K(k', k'') + \\ + \frac{1}{2} \lambda \{ g(k) \varphi_K(k'') + g(k'') \varphi_K(k) \}. \quad (3.5b)$$

Distingamos tres casos:

- A)  $M + \mu \leq E < 2\mu$ ;
- B)  $E > 2\mu$ ;
- C)  $E < M + \mu$ .
- A)  $E \in \sigma_c(H)$ .

Demostración: tomemos

$$\psi_K(k', k'') = \frac{\lambda}{2} \frac{g(k) \varphi_K(k) + g(k'') \varphi_K(k'')}{E - \omega_{k'} - \omega_{k''}} \quad (3.6)$$

con lo que  $\eta \equiv 0$ . Insertermos en (3.5a) Busquemos soluciones de paridad negativa,  $\mathcal{P} \varphi_K(k) \equiv \varphi_K(-k) = -\varphi_K(k)$ ; (3.5) se reduce a  $\gamma(M + \omega_k - E) \varphi_K(k) = -\xi_K(k)$ , y basta tomar las  $\varphi_K(k)$  tales que su soporte tienda a concentrarse en el punto  $|k| = \sqrt{(E - M)^2 - \mu^2}$ .

B) Aquí además de la solución de A) existe otra: consiste en tomar  $\varphi_K \equiv 0$ ,  $\mathcal{P}_k \psi_K(k, l) = -\psi_K(k, l)$ , y el soporte de  $\psi_K(k, l)$  tendiendo a concentrarse en la curva  $\Gamma$ :  $\omega|_k| + \omega|_l| = E$ .

Aunque en la literatura se supone la ecuación de autovalores  $H|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle$  no soluble explícitamente (cf. Kallén y Pauli, (21)) nosotros hemos encontrado distribuciones representando ondas estacionarias de paridad negativa que la resuelven. Denotando por  $r$  a  $|\mathbf{r}|$ , por  $\Theta$ , a sus variables angulares y por  $\mathcal{J}(\mathcal{E})$  cualquier función impar (par) de  $r$ , las soluciones son (suprimiendo el subíndice  $K$ ) :

$$\varphi(k) = \delta(k - \sqrt{(E - M)^2 - \mu^2}) \mathcal{J}(\Theta_k), \text{ en el caso A}$$

y en el B) la misma y la

$$\psi(k', k'') = \delta(\{k', k''\} \in \Gamma) \cdot \mathcal{J}(\Theta_{k'}) \mathcal{J}(\Theta_{k''}).$$

Podemos considerar a la primera como representando  $|V\theta\rangle^d$ , y la última como  $|N\theta\rangle^d$ .

C) Tomemos  $\psi$  dada por (3.6), y sustituymos en (3.5a); calculemos  $\langle \Phi | H - E | \Phi \rangle$ , después de sustituir  $M_o$  por su valor:

$$\begin{aligned} \langle \Phi | H - E | \Phi \rangle = & \int dK dk dl \varphi_K(k) \left\{ (M + \omega_k - E) (1 + \right. \\ & \left. + \lambda^2 \frac{|g(l)|^2 \varphi_K(k)}{(m + \omega_l - M)(m + \omega_k + \omega_l - E)} \right) - \frac{\lambda^2 g(k) g(l) \varphi_K(l)}{m + \omega_k + \omega_l - E} \right\} \end{aligned}$$

Tomemos  $\varphi_K(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}) \cdot \varphi'_K(\mathbf{k})$ ; obtenemos

$$\begin{aligned} <\Phi | H - E | \Phi> &= \int d\mathbf{K} dk dl g(\mathbf{k}) \varphi'_K(\mathbf{k}) \cdot \left\{ (M + \omega_k - E) g(\mathbf{k}) \varphi'_K(\mathbf{k}) + \right. \\ &+ \lambda^2 \left( (M + \omega_k - E) \frac{\varphi_K(\mathbf{k})}{(m + \omega_l - M)(m + \omega_k + \omega_l - E)} - \frac{\varphi_K(l)}{m + \omega_k + \omega_l - E} \right) g(\mathbf{k}) |g(l)|^2 \left. \right\} \end{aligned}$$

y basta tomar  $\varphi'_K(\mathbf{k}) = \varphi^o(K) \cdot \frac{1}{M + \omega_k - E}$  para que, debido a la condición de estabilidad, el coeficiente de  $\lambda^2$  sea negativo para algún  $E_o < M + \mu$ . Tomando ahora  $\lambda^2$  suficientemente grande,  $<\Phi | H - E_o | \Phi> < 0$ ; esto es, (I.ii) falla si  $\lambda^2$  es suficientemente grande.

Podemos interpretar lo que ocurre como debido a la aparición de un estado ligado  $V - \theta$ . Por otra parte, se puede demostrar que ningún punto a la izquierda de  $M + \mu$  pertenece a  $\sigma_c(H)$ , si  $\lambda^2$  es suficientemente pequeño. La demostración es un caso particular de la versión tercera, y no la haremos aquí.

Sectores  $Q \geq 2$ ,  $R = 1$ . Nos restringiremos al caso  $Q = 2$  ya que, como antes, los  $Q > 2$  son completamente análogos. Sea  $|\Xi> \equiv (H - E | \Phi>)$ ,  $|\Xi> \simeq \{\xi, \eta\}$ ;  $|\Phi> \in \mathcal{H}_{2,1}$ , con

$$|\Phi> = \int d\mathbf{q}' d\mathbf{K} \varphi_K(\mathbf{q}') V_{K-q'}^* N_{q'}^* + \int d\mathbf{q}' d\mathbf{q}'' d\mathbf{K} \psi_K(\mathbf{q}'; \mathbf{q}'') a_{K-q'-q''}^* N_{q'}^* N_{q''}^* \} |0>,$$

con lo que obtenemos para  $\xi, \eta$ ,

$$\begin{aligned} \xi_K(\mathbf{q}') &= (M_o - E) \varphi_K(\mathbf{q}') + 2 \int dk g(\mathbf{K} - \mathbf{q}' - \mathbf{k}) \psi_K(\mathbf{k}; \mathbf{q}') \quad (3.8a) \\ \eta_K(\mathbf{q}'; \mathbf{q}'') &= (\omega_{K-q'-q''} - E) \psi_K(\mathbf{q}'; \mathbf{q}'') - \\ &- \frac{1}{2} \{ g(\mathbf{K} - \mathbf{q}' - \mathbf{q}'') (\varphi_K(\mathbf{q}') - \varphi_K(\mathbf{q}'')) \} \end{aligned}$$

Distinguimos dos casos: A)  $E \geq \mu$ ; B)  $E < \mu$ .

A) No parece difícil mostrar una serie de Weyl; de todas formas no lo haremos ya que B) basta para resolver la cuestión de la validez de (I.ii) de manera negativa.

B) Tomemos

$$\psi_K(\mathbf{q}'; \mathbf{q}'') = g(\mathbf{K} - \mathbf{q}' - \mathbf{q}'') \{ \varphi_K(\mathbf{q}') - \varphi_K(\mathbf{q}'') \} / 2 \{ \omega_{K-q'-q''} - E \},$$

e insertemos en (3.8a). Con esto,  $\eta_K(\mathbf{q}'; \mathbf{q}'') \equiv 0$  y basta buscar  $\varphi$  resolviendo asintóticamente la ecuación

$$-h(E) \varphi_K(\mathbf{q}) + \int dk \frac{|g(\mathbf{K} - \mathbf{q} - \mathbf{k})|^2}{\omega_{K-q-k} - E} \varphi_K(\mathbf{k}) = 0. \quad (3.9)$$

Transformado Fourier, esto es, pasando a

$$\hat{\varphi}_K(\mathbf{x}) \equiv \int d\mathbf{q} \varphi_K(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{q}} \{ \mathbf{q} - \mathbf{K}/2 \} \equiv \mathcal{F}_K \varphi_K(\mathbf{q}),$$

y recordando las propiedades del producto de convolución, (13), (3.9) se convierte en

$$h(E) \hat{\varphi}_K(\mathbf{r}) + \lambda(r, E) \hat{\varphi}_K(-\mathbf{r}) = 0 \quad (3.9F)$$

$$\text{con } \lambda(r, E) \equiv -\frac{4\pi}{r} \int_0^{+\infty} \frac{k |g(k)|^2}{E - \omega_k} \sin(kr) dk.$$

Gracias a las propiedades de la transformación de Fourier (13),  $\lambda(r, E)$  es continua para todo  $r$  y para todo  $E$ ,  $E < \mu$ . Se tiene:

$$\text{Lema 3.1. } |\lambda(0, E)| = \left| -4\pi \int_0^{+\infty} \frac{k^2 dk}{E - \omega_k} \right| > 0; \lambda(\pm\infty, E) = 0.$$

$$\text{Lema 3.2. } |h(M)| = 0; |h(E)| \rightarrow +\infty \text{ si } E \rightarrow -\infty.$$

$$\text{Lema 3.3. Existe } \varepsilon \text{ tal que } \varepsilon < M \text{ y } |\lambda(0, E)| \geq |h(E)|, \text{ si } E > \varepsilon; \lim_{E \rightarrow -\infty} \{ \sup_r |\lambda(r, E)| \} = 0.$$

$$\text{Lema 3.4 Existe } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \text{ tal que } \sup_r |\lambda(r, E)| < |h(E)|, \text{ si } E < \varepsilon_0.$$

Demostración: los Lemas 3.1,2 son inmediatos si consideramos la forma de las funciones  $h(E)$  y  $\lambda(r, E)$ . Los Lemas 3.3,4 son consecuencia directa de los anteriores.

Lema 3.5. La curva  $y_2(r) \equiv |\lambda(r, E)|$  y la recta  $y_1(r) \equiv |h(E)|$  no se cortan si  $E < \varepsilon_0$ . Por otra parte, para todo  $\varepsilon \leq E < \mu$  existe al menos un  $r_E$  tal que  $|\lambda(r_E, E)| = |h(E)|$ . (Si, en particular,  $g(\mathbf{k})$  viene dada por un "cut-off", esto es, es de soporte compacto,  $\lambda$  es analítica respecto de  $r$  y, por tanto, el número de  $r_E$ 's, para  $E$  fijo, es numerable (13), (25)).

Demostración: la primera parte es consecuencia directa de los Lemas 3.3,4. En cuanto a la segunda, basta observar que  $y_1(r)$ ,  $y_2(r)$  son funciones continuas de  $r$  en toda la recta real, y que  $y_1(0) \leq y_2(0)$  mientras  $y_1(\infty) > y_2(\infty)$ .

El análisis de (3.9 F) es ahora inmediato. Para  $\varepsilon \leq E < \mu$  tenemos  $\hat{\varphi}_K(\mathbf{r}) = \varphi'_K(r)$ ,  $\mathcal{S}$  siendo par o impar según el signo de  $h(E)/|\lambda(r_E, E)|$  sea  $\pm 1$ ; basta ahora hacer que el soporte de  $\varphi'_K(r)$  tienda a concentrarse en el punto  $r = r_E$  para probar que  $E \in \sigma_c(H)$ . La distribución correspondiente es  $\varphi_K(r) = \delta(r - r_E) \mathcal{S}(\Theta_r)$  (cf. Weinberg, (22)). Podríamos utilizar argumentos similares para probar que ningún punto de  $\sigma(H)$  está a la izquierda de  $\varepsilon_0$ ; esto no es, sin embargo, necesario, ya que de la continuidad de  $H_I$  se sigue que  $\sigma(H)$  está acotado inferiormente en  $\mathcal{H}_{2,1}$ .

¿Cuál es el significado de estos resultados? evidentemente, no se verifica  $H \sim H_R$ , y el modelo falla: no es posible dar una interpretación coherente a los estados de dispersión asociados al segmento  $[\varepsilon, m+M]$  de  $\sigma_c(H)$ . Podemos, sin embargo, expresar lo que sucede de la manera siguiente:  $H_I$  remue-

ve, del nivel de energía  $m+M$  de  $H_R$ , la degeneración (infinita) debida a que  $|\mathbf{P}_v - \mathbf{P}_n| \equiv |\mathbf{t}| = t$ , el "momentum transfer", commuta con  $H_R$  (pero no con  $H_I$ ). Que esto es así puede verse utilizando una versión simplificada del modelo, en la que el momento sólo toma un número infinito de valores. Así como en la versión "realista" el punto infinitamente degenerado  $m+M$  se convertía en un segmento, en la versión simplificada dicho punto (ahora de multiplicidad finita) da un conjunto finito de puntos distintos de  $\sigma(H)$ , correspondiendo cada uno a un valor distinto del "momentum transfer",  $t$ .

III) Sólo la renormalización (trivial) de la partícula  $V$  ha sido estudiada en el caso de que  $W, Q$  no sean constantes. Nosotros hemos realizado un estudio de los sectores  $Q \geq 2, R = 1$  y de los  $R \geq 2, Q = 1$ . Aunque no hemos logrado dar una prueba general, hemos logrado probar que en una gran cantidad de casos aparecen estados ligados de energía inferior a la del continuo, y, por tanto no se verifica  $H \sim H_R$ . El problema puede atacarse de dos maneras (consideraremos el sector  $Q = 1, R = 2$  ya que los otros son completamente análogos) ( $E < M + \mu$ ):

A) Las ecuaciones análogas a las (3.5) son, en este caso,

$$\begin{aligned} \xi_K(\mathbf{k}') &= \{W_{K-k'}^o + \omega_{k'} - E\} \varphi(\mathbf{k}') + 2\lambda \int d\mathbf{q} g(\mathbf{K}-\mathbf{k}'; \mathbf{q}) \psi_K(\mathbf{q}, \mathbf{k}') \\ \eta_K(\mathbf{k}'; \mathbf{k}'') &= \{\Omega_{K-k'-k''} + \omega_{k'} + \omega_{k''} - E\} \psi_K(\mathbf{k}'; \mathbf{k}'') + \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda \{g(\mathbf{K}-\mathbf{k}'; \mathbf{k}'') \varphi_K(\mathbf{k}') - g(\mathbf{K}-\mathbf{k}''; \mathbf{k}') \varphi_K(\mathbf{k}'')\} \end{aligned}$$

que es fácil reducir a la

$$\lambda^2 \int \frac{g(\mathbf{k}; \mathbf{r}) g(\mathbf{r}; \mathbf{k})}{\Omega_{k+r} + \omega_k + \omega_r - E} \cdot \frac{1}{f_E^\lambda(\mathbf{k})} \cdot \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{k}) \quad (3.10)$$

después de sustituir  $W^o$  en función de  $W$ , escribir  $\varphi_K(\mathbf{k}) = \varphi(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{K})$  (lo que está justificado ya que la interacción conserva el momento total), y poniendo

$$\psi_K(\mathbf{k}'; \mathbf{k}'') = -\frac{1}{2} \frac{g(\mathbf{K}-\mathbf{k}'; \mathbf{k}'') \varphi_K(\mathbf{k}') - g(\mathbf{K}-\mathbf{k}''; \mathbf{k}') \varphi_K(\mathbf{k}'')}{\Omega_{K-k'-k''} + \omega_{k'} + \omega_{k''} - E}.$$

por definición,

$$f_E^\lambda(\mathbf{k}) \equiv (\omega_k + W_k - E) \left\{ 1 + \lambda^2 \int dy \frac{|g(\mathbf{k}; \mathbf{y})|^2}{(\Omega_{k+y} + \omega_y - W_k) \Omega_{k+y} + \omega_k + \omega_y - E} \right\}$$

El operador de (3.10) es del tipo Hilbert-Schmidt simetrizable. (30). De la teoría general, se desprende que (3.10) tendrá solución si para algún  $E$ , la norma de dicho operador es  $\leq 1$ .

B) Consideraremos  $\langle \Phi | H - E | \Phi \rangle$ ,  $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{1,2}$ .

El ser  $H \sim H_R$  no se verifica si existe  $|\Phi\rangle$ ,  $E$  con  $\langle \Phi | H - E | \Phi \rangle \leq 0$ .

Cálculos standard nos dan,

$$\begin{aligned} <\Phi | H - E | \Phi> = & \int |\varphi(\mathbf{k})|^2 (W_k + \omega_k - E) d\mathbf{k} + \\ & + \lambda^2 \int d\mathbf{k} dl \varphi(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}; l) \frac{1}{(\Omega_{k+l} + \omega_k + \omega_l - E)(\Omega_{k+l} + \omega_l - W_k)} \cdot \\ & \cdot \{g(\mathbf{k}; l) \varphi(\mathbf{k})(W_k + \omega_k - E) - g(l; \mathbf{k}) \varphi(l)(\Omega_{k+l} + \omega_l - W_k)\}, \quad \varphi, \psi \text{ como en A}. \end{aligned}$$

Por lo que respecta a B), claramente se cumple si el soporte de  $g$  no se extiende muy lejos del conjunto en el que  $\Omega_{k+l} + \omega_l - W_k \geq W_k + \omega_k - E$  (que, debido a la condición de estabilidad, contiene al origen), o si  $m \gg M, \mu$ ; y  $\lambda \gg 0$ . En cuanto a A), cálculos hechos prueban que se verifican para un gran número de  $g$ 's con soporte muy extendido, y de  $m$ 's pequeñas (si  $\lambda \gg 0$ ). Esto parece indicar que, en general,  $H \sim H_R$  si  $\lambda$  es suficientemente grande.

#### IV La versión en que

$$H_I = \int dp dq dk g(p, q, k) \{ V_p^* N_q a_k + h. c. \}, \quad \|g\| < +\infty,$$

ha sido considerada por Y. Kato y Mugibayashi (8). Esta versión es completamente irreal; por ejemplo, no se conserva el momento total, ni existe renormalización de masas. Los resultados obtenidos por Y. Kato y Mugibayashi pueden probablemente generalizarse con facilidad: (29) si  $\lambda$  es suficientemente pequeño,  $H \sim H_R$  (incidentalmente,  $H_R = H_o$ ). No trataremos esta versión, debido a las razones apuntadas más arriba.

Es probable que, al considerar sectores con  $Q, R \rightarrow \infty$ , el espectro continuo de  $H$  se desplace indefinidamente hacia la izquierda. No discutiremos esto, (ver (31), (33)) ya que tenemos todo lo que nos hacía falta para nuestros propósitos. Para terminar, mencionemos lo siguiente: se ha supuesto que el modelo T. D. Lee tendría sentido introduciendo una métrica indefinida y una constante de acoplamiento imaginaria. Es fácil demostrar (Heisenberg, (19)) que esto marcha bien para la versión I) modificada. No es así para la II), ni, con grandes probabilidades, tampoco para la III).

#### 3. iii & iv.

La imposibilidad de dar soluciones explícitas para estados otros que los monoparticulares en el modelo de Ruijgrok-Van Hove (27) hace prácticamente imposible encontrar resultados exactos para  $\sigma(H)$ ; lo mismo puede decirse de la teoría de Chew-Low-Wick, donde ni aún los estados monoparticulares son solubles exactamente. Nos contentaremos, pues, con hacer algunos comentarios; suponemos  $\lambda_o \gg 0$ .

El Hamiltoniano de Ruijgrok-Van-Hove se puede escribir como  $H(\lambda) = H^{(o)} + \lambda H'_I$ , donde  $H^{(o)}$  describe dos campos escalares desacoplados y  $H'_I$  es regular para todo  $\lambda$ .  $\lambda$  varía entre 0 y  $\lambda_o \equiv \max_v \lambda_v$ ;  $\lambda_o$  correspondiendo al modelo de Lee (cf. Ruijgrok, (27)). el hecho de que  $H(\lambda)$  sea

análítica con respecto a  $\lambda$  parece indicar lo siguiente: en las versiones con nucleones (campos  $\psi$ ) no fijos,  $H \sim H_R$ , no se verifica.

Esto es rigurosamente cierto si  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \lambda_0 \gg 0$ , y es de esperar que lo sea en general. En el caso de nucleones fijos,  $H(0) \sim H_R$ , pero  $H(\lambda_0) \sim \sim H_R$  no se verifica. Es probable que,  $H(\lambda) \sim H_R$  si, y sólo si,  $\lambda = 0$ . Si aceptamos esto, la gran semejanza del modelo de Chew et al. con el de Ruijgrok-Van-Hove hace plausible suponer que en este último  $H \sim H_R$  sólo se verifique en el caso de ser  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Quizá fuera esta una forma de explicar teóricamente la observada invariancia de isospín de las alteraciones nucleares (recordar 2. iv). De todas formas, deberá quedar claro que esta conclusión queda, de momento, dentro del terreno de la pura especulación.

### Conclusiones

Históricamente, los primeros intentos de estudiar (I, i, ii) se remontan a von Neumann, Jauch, Zinnes, Kuroda, etc. ((3-5), (24)) en primera cuantificación, y a Friedrichs, Greenberg y Schweber etc. (1), (14), (16) en teoría de campos. Estudios explícitos de los espectros de ciertos  $H$ ,  $H_R$  han sido hechos por Kallén, Pauli, Weinberg, J. Schwartz, Van Hove, Ruijgrok, Friedrichs, Galindo, Y. Kato, Mugibayashi, etc. ((1), (14-16), (6-8), (19) (Heisenberg), (20-22), (27)). (I.ii) ha sido tratada en la mayor parte de los artículos mencionados, mientras que otros están interesados en el límite de acoplamientos putuales y/o como definir los operadores vestidos. El modelo del campo escalar ha sido bastante estudiado debido a que origina un potencial de tipo Yukawa, pero esta es, que sepamos, la primera vez que se estudian sectores no triviales. El modelo de Lee ha sido, gracias a su comparativa sencillez y a sus grandes analogías con la Electrodinámica Cuántica, ampliamente utilizado para discutir cuestiones de esta última, y de teoría de campos en general (Bogoliubov, (28); ver también (19-21), (12), (32)). Aparte de los resultados (no rigurosos) de (22) y de algunos desarrollos aproximados de Kallén y Pauli (que no llegaron a dar soluciones exactas a los estados de colisiones  $V - \theta$ ), nuestros resultados son los únicos que conocemos para sectores esencialmente multiparticulares. Finalmente, los únicos resultados accesibles hasta la fecha sobre estudio riguroso de definición de Hamiltonianos y de regularidad de perturbaciones son los dados en (7), (8) y referencias allí citadas; que sepamos, nunca se había encontrado, con generalidad y rigor, condiciones para regularidad de perturbaciones en el caso en que en los núcleos,  $v$ , aparece la  $\delta$  de conservación de momento total. La aplicación a los tipos de interacción del # 2 no se había hecho nunca; p. ej., la condición de (7), (8) falla cuando  $H_I$  conserva el momento; y aun en el caso de ser válida (como, p. ej., en el discutido al final de 2.ii) sólo nos asegura que  $H_I$  es regular mientras que nosotros probamos que es continua. Sumarizando, podemos expresar nuestros resultados como sigue: si descartamos difíciles problemas que aparecen cuando es posible la creación de pares (o bien utilizando modelos, o absorbiendo

la creación de pares en la renormalización del vacío, o limitándonos a modelos realistas a bajas energías —i.e., debajo del umbral de producción de pares), entonces:

1.º Se dan una serie de condiciones suficientes para que los Hamiltonianos totales estén bien definidos como operadores hipermaximales; se demuestra que si  $H$ , verifica ciertos requisitos razonables, las perturbaciones son regulares e incluso en una gran mayoría de casos, analíticas para todo valor de la constante de acoplamiento.

2.º Se aplica lo hecho antes a algunos modelos de teoría de campos, demostrando que los Hamiltonianos son operadores hipermaximales analíticos para todo valor de la constante de acoplamiento; probando que en el modelo de Lee  $H_L$  es incluso acotada.

3.º En el estudio de los espectros de los Hamiltonianos (2.i.2), podemos demostrar que la teoría tropieza con inconsistencias cuando permitimos que interaccionen dos o más partículas. Concretamente, mostramos que los espectros continuos de  $H$ ,  $H_R$  (en los modelos 2.i.ii) no coinciden (si  $\lambda$  es suficientemente grande).

4.º Finalmente, se hacen algunos comentarios sobre los modelos de Ruijgrok-Van Hove y la teoría de Chew-Low-Wick, en vista de los resultados obtenidos más arriba, y se especula sobre posibles implicaciones de nuestra investigación, y posibles direcciones en que podría ser prolongada.

La significación de 1.º, 2.º, 3.º, 4.º no necesitan más comentarios. La de 3.º no está completamente clara, desde un punto de vista de teorías "auténticas". Naturalmente, siempre podemos suponer que las inconsistencias de los modelos se debieran a sus aspectos irrealistas, y que, en una teoría "verdadera" esto no ocurriera así. Es claro, sin embargo, que nuestros hallazgos hacen esto muy dudoso y, en cualquier caso, muestran que se debe de tener cuidado al escribir interacciones; llamando la atención sobre la probabilidad de que se pierdan propiedades esenciales de la teoría si ésta se sobresimplifica (previniendo contra extrapolaciones ingarantizables); poniendo de relieve, finalmente, el carácter altamente interrelacionado de aspectos aparentemente diferentes de la teoría de campos cuánticos.

### Agradecimientos

*Quiero expresar mi agradecimiento al Prof. Dr. ALBERTO GALINDO, director de esta tesis, cuya decisiva ayuda, a través de discusiones, críticas y estímulo constante, ha sido decisiva en la realización de este trabajo; así como a los Profesores y Doctores L. VAN HOVE, P. REITO y J. GOÑI UNZUÉ por interesantes discusiones, y al Dr. G CRISTÓBAL y grupo calculador de la IBM de la Facultad de Ciencias de Zaragoza, que realizó los cálculos citados en el final del 3. ii, III.*

Parte de este trabajo se realizó en la Facultad de Ciencias de Zaragoza, y parte en el CERN, Ginebra. Es un placer expresar nuestro reconocimiento a los Profesores Doctores J. CASAS y L. VAN HOVE, directores respectivamente de la Sección de Óptica de la Facultad y de la División Teórica del CERN por su amable acogida en ambos centros; especialmente al primero, por su constante estímulo y ayuda. Finalmente, debemos dar las gracias a la Comisaría de Protección Escolar, PIO, por su ayuda económica.

#### B I B L I O G R A F I A

(Para referencias más completas, véase (2), (25); las últimas tres referencias han sido añadidas durante la corrección de pruebas)

1. K. FRIEDRICH, *Lectures on Renormalisation & Spectral transformations*, New York University, 1960.
2. S. SCHWEBER, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Row & Peterson, 1961.
3. S. KURODA, Nuovo Cimento, vol. XII, n.º 5, 431, (1959).
4. J. JAUCH, Helv. Phys. Acta, **31**, 127, 661 (1958).
5. J. JAUCH & ZINNES, Nuovo Cimento, **11**, 553 (1959).
6. J. SCHWARTZ N. Y. U. Research Report, 1960.
7. T. KATO, Progr. Theor. Phys., **4**, 514 (1961).
8. Y. KATO & N. MUGIBAYASHI, Progr. Theor. Phys., vol. 30, n.º 1, 103 (1963).
9. Ver 7.
10. J. VON NEUMANN, Math. Ann., **102**, 49 (1929).  
A. GALINDO, Comm. Pure & Appl. Math., **15**, (1962).
11. M. STONE, *Linear Transformations in Hilbert Space*, New York, 1932.
12. FERRETTI, Nuovo Cimento, **5**, 393 (1959).
13. S. BOCHNER & CHANDRASEKHARAN, *Fourier Transforms*, Princeton, 1949.
14. K. FRIEDRICH, *Mathematical Aspects of Quantum Field Theory*, Interscience, 1953.  
GARDING & WIGHTMAN, Proc. Nat. Acad. USA, **40**, 613 (1954).
15. A. GALINDO, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 48, n.º 7, 1128 (1962).
16. K. FRIEDRICH & GALINDO, Comm. Pure & Appl. Math., vol. XV, n.º 4 (1962).
17. R. HAAG & LUZZATTO, Nuovo Cimento, ser. 10, vol. 13, 415 (1959).
18. T. LEE, Phys. Rev., **95**, 1329 (1954).
19. W. HEISENBERG, Nucl. Phys., **4**, 532 (1957).  
W. HEISENBERG, *Einführung in die Theorie der Elementarteilchen*, München, 1961.
20. L. VAN HOVE, Physica **21**, 901 (1955); ib., **22**, 343 (1956); ib., **23**, 441 (1957).
21. KALLÉN & PAULI, Kgl. Dansk. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd., **30** (1955).
22. G. SCARFONE, Nuovo Cimento, **23**, 891 (1962); ib., **24**, 408 (1962).  
S. WEINBERG, Phys. Rev., **102**, 285 (1956).
23. L. VAN HOVE, Bull. Acad. Roy. Belgique, **37**, 1055 (1951); Physica, **18**, 145 (1952).
24. J. VON NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, 1932.

DEFINICION DE HAMILTONIANOS

25. ACHIESER & GLASMANN, *Theorie der Linearer Operatoren im Hilbert-Raum*, Akademie Verlag, 1960.
- N. DUNFORD & J. SCHWARTZ, *Linear Operators*, vols. I, II, Interscience, 1958, 1964.
26. J. COOK, Trans. Amer. Math. Soc., **74**, 222 (1953).
- GEL FAND & SCHILOW, *Verallgemeinerte Funktionen*, vols. I, II, VEB, Deutsche Ver. der Wissen., 1958. 1962.
27. T. RUIJGROK & VAN HOVE, *Physica*, **22**, 884 (1956).  
T. RUIJGROK, *Physica*, **24**, 185 (1958); *ib.*, **24**, 205 (1958); *ib.*, **25**, 337 (1959).
28. BOGORIUBOV, Ber. Akad., Wiss. UdSSR, **105**, 685 (1955).
29. P. REJTO, Comm. Pure & Pppl. Math., **16**, (1963) y comunicación personal.
30. A. C. ZAANEN, *Linear Operators*, Groningen, 1958.
31. A. GALINDO & F. J. INDURÁIN, próximo a aparecer en Comm. Pure & Appl. Math.
32. F. J. INDURÁIN, XII Reunión Bienal de la R. S. E. de Fís.-Quím. en Salamanca.
33. F. J. INDURÁIN, XII Reunión Bienal de la R. S. E. de Fís.-Quím. en Salamanca.

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

P O R

J. CASAS, J. RAMÓN DE F. MONEO y CARMEN CUEVAS

### PROPOSITO

Para efectuar el cálculo de un sistema óptico se comienza por realizar un anteproyecto con fórmulas paraxiales, y con él, conociendo los vidrios de que se dispone y las condiciones de focal, campo, abertura, etc. que se deseen, se hace una primera determinación de los radios y espesores que se deberán dar a las lentes. Lógicamente en estas condiciones el sistema presentará, en general, unas aberraciones fuera de tolerancia.

El proceso de corrección comprenderá lo primero unas fórmulas que permitan conocer estas aberraciones, y lo segundo un método para irlas reduciendo hasta el límite deseado, para lo cual necesitamos saber cómo influye en ellas cada uno de los parámetros del sistema (radios, espesores, índices).

El cálculo exacto de las aberraciones mediante marchas trigonométricas aunque posible y relativamente fácil para efectuarlo aisladamente, no es en absoluto práctico cuando se trata de ver la influencia de los parámetros del sistema, por el enorme número de operaciones que supondría.

En estas condiciones se hace preciso recurrir a métodos aproximados, entre los que son de interés los desarrollos del tercer orden porque conducen a fórmulas de mucha mayor sencillez.

El estudio de las aberraciones de tercer orden fue iniciado por Seidel en la época en que los instrumentos trabajaban con pequeños campos y aberturas. Actualmente en la literatura no se reconoce valor práctico a estos desarrollos fuera de la fase del anteproyecto, por considerar que el error que introducen es excesivo para los instrumentos con grandes aberturas y campos.

Nosotros, sin embargo, creemos que mediante fórmulas de tercer orden es posible llevar un sistema con elevadas exigencias hasta su casi total corrección, siendo entonces suficientes los retoques de afino.

En un trabajo anterior (1) se estudió la relación existente entre las aberraciones y las sumas de Seidel del tercer orden para oculares de cuatro lentes tipo 2-2, de abertura relativa 1 : 4 y 21° de semicampo, encontrando que dicha relación era una función lineal en ese tipo de sistemas siempre que los ángulos de incidencia no excediesen los 30°.

Para poder predecir las aberraciones a partir de las sumas de Seidel necesitamos conocer los coeficientes de esta función lineal.

La teoría del tercer orden los calcula teóricamente (2) obteniendo unas expresiones que dependen de las características del sistema y sus condicio-

nes de funcionamiento. Multiplicando cada una de las sumas de Seidel por su correspondiente coeficiente así calculado se obtienen las aberraciones.

Estos coeficientes son:

$$\text{Para la aberración esférica } \frac{1}{2 n'_k \sigma'^2_k}$$

$$\text{Para el coma } \frac{1}{2 n'_k \sigma'_k}$$

$$\text{Para el astigmatismo } \frac{1}{n'_k \sigma'^2_k}$$

$$\text{Para la curvatura de imagen } \frac{1}{2 n'_k \sigma'^2_k}$$

$$\text{Para la distorsión } \frac{1}{2 n'_k \sigma'_k}$$

Siendo  $n'_k$  el índice de refracción del último medio y  $\sigma'_k$  el ángulo con el eje del rayo de abertura.

Estas expresiones son válidas para cualquier sistema siempre que la abertura, el ángulo de campo y los ángulos y alturas de incidencia en las superficies sean pequeños frente al radio de éstas.

Tenemos aquí un proceso de normalización mediante el cual podemos calcular las aberraciones de cualquier sistema si conocemos las sumas de Seidel, lo que puede hacerse utilizando únicamente fórmulas paraxiales. Sin embargo la utilidad práctica de este método queda muy limitada porque la mayor parte de los sistemas no cumplen las condiciones anteriores.

Nosotros con este trabajo nos proponemos:

1.º) Dar generalidad a las conclusiones del trabajo mencionado (1) repitiendo el estudio con sistemas de muy diversos tipos como un objetivo fotográfico Tessar, un objetivo de proyección Taylor, cuatripletas y dobles todos ellos para diferentes aberturas y campos.

2.º) Estudiar la validez de los coeficientes de normalización que dan las aberraciones en función de las sumas de Seidel cuando los ángulos y las alturas de incidencia van aumentando, con el fin de dar criterios prácticos que indiquen cuales de estos parámetros tienen mayor influencia y que valores máximos pueden tomar para que las sumas puedan seguir dando las aberraciones de un sistema, cualesquiera que sean su forma y condiciones de funcionamiento.

3.º) Estudiar el comportamiento de estos coeficientes por encima de los límites mencionados.

4.º) Aplicar los resultados obtenidos a un método práctico de efectuar la corrección de un sistema óptico.

METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

*Sistemas ópticos estudiados*

Este trabajo se ha llevado a cabo con los sistemas cuyas características damos a continuación, donde hemos representado por  $d$  la distancia entre dos superficies contiguas,  $r_p$  el radio de la pupila,  $\sigma_v$  el ángulo de campo,  $d_p$  la distancia de la primera superficie a la pupila,  $\varepsilon_a$  la incidencia máxima en las superficies del rayo de apertura,  $\varepsilon_c$  la incidencia máxima en las superficies del rayo de campo, y  $\sigma'_k$  el ángulo de apertura, y  $\Delta S$  la curvatura sagital.

Las sumas de Seidel las hemos dado multiplicadas por  $10^3$ .

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
1)	620,1	15	1,727	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 40,2$ Esf = -1,3
	110,1	30	1,623	$d_p = -80$	$S_2 = 32,6$ Coma = 0,3
—	110,1	0,2	1	$\varepsilon_a = 10^\circ$	$S_3 = -38,4$ Ast = -3,2
	157,3	30	1,623	$\varepsilon_c = 36^\circ$	$S_4 = 153$ $\Delta S = -2,8$
—	205,9	15	1,727	$\sigma'_k = 0,125$ $\sigma_v = 15^\circ$	$S_5 = 629,6$ Dist = -5,7 %
—	751,7			$\varepsilon_c = 27^\circ$	Coma = 0,31
				$\sigma_v = 8^\circ$	$S_2 = 21,81$ Coma = 0,14
				$\varepsilon_c = 11^\circ$	
2)	729,5	15	1,727	$r_p = 12,5$	$S_1 = 28,3$ Esf = -0,89
	129,5	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_2 = 9,1$ Coma = -0,04
—	129,5	0,2	1	$d_p = -80$	$S_3 = -65,5$ Ast = -4,9
	129,5	30	1,623	$\varepsilon_a = 9^\circ$	$S_4 = 154$ $\Delta S = -2,44$
—	129,5	15	1,727	$\varepsilon_c = 34^\circ$	$S_5 = 712,9$ Dist = 6,5 %
—	553,2			$\sigma'_k = 0,125$ $\sigma_v = 15^\circ$	Coma = 0,99
				$\varepsilon_c = 25,5$	

REVISTA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>		<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
3)	620,1 110,1 — 110,1 157,3 — 205,9 — 751,7	15 30 0,2 30 15	1,727 1,623 1 1,623 1,727 1,727	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -80$ $\varepsilon_a = 10^\circ$ $\varepsilon_c = 36^\circ$ $\sigma_k' = 0,125$ $\sigma_v = 15^\circ$ $\varepsilon_c = 29^\circ$	$S_1 = 40,2$ $S_2 = 32,6$ $S_3 = -38,4$ $S_4 = 153$ $S_5 = 629,6$  $S_2 = 22,75$	Esf = —1,3 Coma = 0,3 Ast = —3,2 $\Delta S = -3,2$ Dist = —5,7 %  Coma = —0,78
4)	620,1 110,1 — 110,1 127,28 — 157,31 4.870,8	15 30 0,2 30 15	1,727 1,623 1 1,623 1,727 1,727	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -80$ $\varepsilon_a = 10^\circ$ $\varepsilon_c = 36^\circ$ $\sigma_k' = 0,125$	$S_1 = 34,93$ $S_2 = 18,18$ $S_3 = -58,79$ $S_4 = 150,1$ $S_5 = 657,5$	Esf = —1,14 Coma = 0,12 Ast = —4,9 $\Delta S = -2,74$ Dist = 5,8 %
5)	620,1 110,1 — 131,9 157,31 — 157,31 — 310,45	15 30 0,2 30 15	1,727 1,623 1 1,623 1,727 1,727	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -80$ $\varepsilon_a = 9^\circ$ $\varepsilon_c = 36^\circ$ $\sigma_k' = 0,125$	$S_1 = 33,1$ $S_2 = 22,4$ $S_3 = -45,9$ $S_4 = 156,8$ $S_5 = 688,8$	Esf = —1,06 Coma = 0,20 Ast = —2,6 $\Delta S = -2,99$ Dist = 6,4 %

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
6)	321,2				
	15	1,727	$r_p = 12,5$		
	110,1	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	
—	110,1	0,2	1	$d_p = -80$	$S_3 = -17,8$ $Ast = -1,1$
	157,3	30	1,623	$\epsilon_c = 30^\circ$	$S_4 = 168,56$ $\Delta S = -3,07$
—	157,3	15	1,727	$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 709,6$ $Dist = -6,5 \%$
	307,8				
7)	620,1				
	15	1,727	$r_p = 12,5$		
	110,1	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 25,8$ $Esf = -0,99$
—	130	0,2	1	$d_p = -87,3$	$S_2 = 11,9$ $Coma = -0,002$
	157,3	30	1,623	$\epsilon_a = 9^\circ$	$S_3 = -65,5$ $Ast = -6,5$
—	157,3	15	1,727	$\epsilon_c = 40^\circ$	$S_4 = 141,7$ $\Delta S = -2,34$
	— 638,1			$\sigma_k' = 0,114$	$S_5 = 612,5$ $Dist = -5,4 \%$
				$\sigma_v = 15^\circ$	$S_2 = 8,3$ $Coma = -0,07$
				$\epsilon_c = 30^\circ$	
8)	620,1				
	15	1,727	$r_p = 12,5$		
	110,1	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_2 = 30,04$ $Coma = 0,25$
—	130	0,2	1	$d_p = -87,3$	$S_3 = -36,5$ $Ast = -2,9$
	157,3	30	1,623	$\epsilon_c = 40^\circ$	$S_4 = 156,63$ $\Delta S = -3,487$
—	157,3	15	1,727	$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 662,4$ $Dist = -6,27 \%$
	— 322,3				

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
9)	620,1	15	1,727	$r_p = 12,5$	
	110,1	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	
—	130	0,2	1	$d_p = -87,3$	$S_2 = 22,9$ Coma = 0,15
	157,3	30	1,623	$\varepsilon_c = 40^\circ$	$S_5 = 628,5$ Dist = -5,9 %
—	157,3	15	1,727	$\sigma_k' = 0,125$	
—	387				
10)	620,1	15	1,727	$r_p = 12,5$	
	110,1	30	1,623	$d_p = -87,3$	$S_1 = 29,6$ Esf = -1,03
—	130	0,2	1	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_2 = 20,4$ Coma = 0,12
	157,3	30	1,623	$\varepsilon_a = 9^\circ$	$S_3 = -53,1$ Ast = -4,7
—	157,3	15	1,727	$\varepsilon_c = 28^\circ$	$S_4 = 149,6$ ΔS = -2,87
—	420			$\sigma_k' = 0,120$	$S_5 = 642,1$ Dist = -5,7 %
11)	129,5	30	1,623	$r_p = 12,5$	
—	129,5	15	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 47,3$ Esf = -1,52
—	729,5	0,2	1	$d_p = -80$	$S_2 = 120,1$ Coma = 4,26
	729,5	15	1,727	$\varepsilon_c = 42^\circ$	$S_3 = 344,3$ Ast = -20
	129,5	30	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	$S_4 = 175,8$ ΔS = -16,41
—	93,74			$\sigma_v = 15^\circ$	$S_5 = 1936,4$ Dist = -21,8 %
				$\varepsilon_c = 25^\circ$	Coma = -1,63

METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
12) — 1.000			$r_p = 12,5$	
— 129,5	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	
140	15	1,727	$d_p = -87,3$	$S_2 = 18,2$ Coma = 0,24
180,28	0,2	1	$\epsilon_c = 27^\circ$	$S_3 = -23,3$ Ast = -1,4
155,33	15	1,727	$\sigma_k' = 0,105$	$S_4 = 120,4$ $\Delta S = -3,79$
— 482	30	1,623	$\sigma_v = 15^\circ$	$S_5 = 731,1$ Dist = 7,1 %
			$\epsilon_c = 18^\circ$	$S_2 = 12,73$ Coma = 0,19
			$\sigma_v = 8^\circ$	$S_2 = 6,68$ Coma = 0,098
			$\epsilon_c = 10^\circ$	
13) — 926,4			$r_p = 12,5$	
— 73,4	28,3	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 39,04$ Esf = -0,99
— 113,3	8,5	1,727	$d_p = -74$	$S_2 = 22,1$ Coma = 0,25
138,9	0,6	1	$\epsilon_a = 10^\circ$	$S_3 = -42,7$ Ast = -2,8
74,1	8,5	1,727	$\epsilon_c = 39^\circ$	$S_4 = 149,8$ $\Delta S = -3,098$
— 324,2	28,3	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 729,6$ Dist = -6,35 %
			$\sigma_v = 15^\circ$	$S_2 = 15,42$ Coma = -0,19
			$\epsilon_c = 21^\circ$	
14) 620			$r_p = 12,5$	
— 60	28,3	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 27,6$ Esf = -0,87
— 132,3	8,5	1,727	$d_p = -76$	$S_2 = 4,6$ Coma = 0,1
146	0,6	1	$\epsilon_a = 11^\circ$	
74,1	8,5	1,727	$\epsilon_c = 37^\circ$	
— 288,9	28,3	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	

REVISTA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
15)	1.000			$r_p = 12,5$	
		28,3	1,623		
—	73,5			$\sigma_v = 21^\circ$	
—	120		8,5 1,727	$d_p = -76$	$S_2 = 17,6$ Coma = 0,2
			0,6 1		
146				$\epsilon_c = 38^\circ$	
74,1			8,5 1,727	$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 678,2$ Dist = -6,2 %
—	423,1		28,3 1,623		
				$\sigma_v = 15^\circ$	$S_2 = 11,98$ Coma = -0,15
				$\epsilon_c = 21^\circ$	
16)	620			$r_p = 12,5$	
		28,3	1,623		
—	73			$\sigma_v = 21^\circ$	
—	140		8,5 1,727	$d_p = -71,9$	$S_2 = 10,8$ Coma = 0,5
			0,6 1		
146				$\epsilon_c = 51^\circ$	
56			8,5 1,727	$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 590,1$ Dist = -4,1 %
—	232,4		28,3 1,623		
17)	620			$r_p = 12,5$	
		28,3	1,623		
—	73			$\sigma_v = 21^\circ$	
—	140		8,5 1,727	$d_p = -76$	$S_2 = 11,6$ Coma = 0,83
			0,6 1		
146				$\epsilon_c = 51^\circ$	
56			8,5 1,727	$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 599,7$ Dist = -3,8 %
—	224,4		34 1,623		

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
18)	620	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 73	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	
	— 140	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 12,98$ Coma = —0,03
	146	8,5	1,727	$\varepsilon_c = 48^\circ$	$S_3 = -50,9$ Ast = —4,97
	64	34	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	$S_4 = 160,3$ $\Delta S = -1,14$
	— 248,4				$S_5 = 695,4$ Dist = —5,9 %
19)	620	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 73	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 30,3$ Esf = —0,97
	— 140	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 12,9$ Coma = 0,35
	146	8,5	1,727	$\varepsilon_a = 9^\circ$	$S_3 = -44,1$ Ast = —2,9
	70	34	1,623	$\varepsilon_c = 39^\circ$	$S_4 = 159,2$ $\Delta S = -6,86$
	— 256,6			$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 738,8$ Dist = —6,1
20)	620	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 60	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 27,5$ Esf = —0,87
	— 132,3	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 4,3$ Coma = —0,06
	146	8,5	1,727	$\varepsilon_a = 11^\circ$	$S_3 = -60,8$ Ast = —4,28
	74,1	28,3	1,623	$\varepsilon_c = 40^\circ$	$S_4 = 158,6$ $\Delta S = -2,71$
	— 288,9			$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 717,9$ Dist = —6,6 %
				$\sigma_v = 15^\circ$	$S_2 = 2,98$ Coma = —0,009
				$\varepsilon_c = 22^\circ$	

REVISTA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones:</i>
21)	620	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 60	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 34,1$ Esf = —1,1
	— 120	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 16,05$ Coma = 0,12
	170	8,5	1,727	$\varepsilon_a = 10^\circ$	$S_3 = -49,5$ Ast = —3,14
	85	28,3	1,623	$\varepsilon_c = 28^\circ$	$S_4 = 157,7$ $\Delta S = -3,15$
	— 294,5			$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 677,3$ Dist = —6,3
22)	400	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 80	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 28,1$ Esf = —0,91
	— 200	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 19,5$ Coma = 0,55
	150	8,5	1,727	$\varepsilon_a = 10^\circ$	$S_3 = 13,8$ Ast = 1,95
	100	28,3	1,623	$\varepsilon_c = 29^\circ$	$S_4 = 159,6$ $\Delta S = 5,59$
	— 202,4			$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 1011,8$ Dist = 9,7 %
				$\sigma_v = 8^\circ$	$S_2 = 7,13$ Coma = 0,098
				$\varepsilon_c = 10^\circ$	
23)	600	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 80	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 25,7$ Esf = 0,83
	— 150	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 3,5$ Coma = 0,12
	150	8,5	1,727	$\varepsilon_a = 9^\circ$	
	300	28,3	1,623	$\varepsilon_c = 27^\circ$	
	— 462,9			$\sigma_k' = 0,125$	

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
24)	600	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 80	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	
	— 150	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 1,8$ Coma = 0,1
	150	8,5	1,727	$\epsilon_c = 27^\circ$	
	500	28,3	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	
	— 527				
25)	600	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 80	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 23,6$ Esf = — 0,74
	— 150	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = -1,15$ Coma = 0,05
	140	8,5	1,727	$\epsilon_a = 9^\circ$	$S_3 = -39,7$ Ast = — 2,05
	300	28,3	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	$S_4 = 148$ $\Delta S = -4,4$
	— 678,8				$S_5 = 885,5$ Dist = — 8,4 %
				$\sigma_v = 15^\circ$	$S_2 = -0,81$ Coma = — 0,016
				$\epsilon_c = 19^\circ$	
26)	600	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 80	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 28,97$ Esf = — 0,9
	— 150	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 10,4$ Coma = 0,31
	140	8,5	1,727	$\epsilon_a = 9^\circ$	
	80	28,3	1,623	$\epsilon_c = 35^\circ$	
	— 306,2			$\sigma_k' = 0,125$	

REVISTA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
27)	600	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 80	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 24,4$ Esf = —0,82
	— 150	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 1,0$ Coma = 0,09
	140	8,5	1,727	$\varepsilon_a = 9^\circ$	
	200	28,3	1,623	$\varepsilon_c = 29^\circ$	
	— 554			$\sigma_k' = 0,125$	
28)	700	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 70	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = -43$ Ast = —2,1
	— 130	0,6	1	$d_p = -76$	$S_4 = -50,24$ $\Delta S = -3,13$
	170	8,5	1,727	$\varepsilon_c = 23^\circ$	$S_5 = 762,2$ Dist = —7,55 %
	300	28,3	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	
	— 418,3				
29)	700	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 65	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 43,5$ Esf = —1,4
	— 110	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 31,6$ Coma = 0,36
	180	8,5	1,727	$\varepsilon_a = 11^\circ$	$S_3 = -39,6$ Ast = —3,0
	70	28,3	1,623	$\varepsilon_c = 41^\circ$	$S_4 = 157,5$ $\Delta S = -3,43$
	— 311,8			$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 595,9$ Dist = —5,3 %
				$\sigma_v = 15^\circ$	$S_2 = 22,07$ Coma = —0,26
				$\varepsilon_c = 22^\circ$	
				$\sigma_v = 8^\circ$	$S_2 = 11,57$ Coma = —0,14
				$\varepsilon_c = 12^\circ$	

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
30)	700	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 65	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_2 = 28,4$ Coma = 0,35
	— 110	0,6	1	$d_p = -76$	$S_3 = -30,4$ Ast = —1,47
	180	8,5	1,727	$\epsilon_c = 29^\circ$	$S_4 = 153,9$ $\Delta S = -3,74$
	100	28,3	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 680,6$ Dist = —6,54 %
	— 420,5				
31)	700	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 65	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_2 = 30,8$ Coma = 0,33
	— 110	0,6	1	$d_p = -76$	$S_3 = -33,5$ Ast = —1,9
	180	8,5	1,727	$\epsilon_c = 34,5^\circ$	$S_4 = 156$ $\Delta S = -3,66$
	80	28,3	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 640,8$ Dist = —6 %
	— 349,2				
32)	700	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 70	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = -42,6$ Ast = —1,76
	— 130	0,6	1	$d_p = -76$	$S_4 = 151,67$ $\Delta S = -3,74$
	170	8,5	1,727	$\epsilon_c = 23^\circ$	
	200	28,3	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	
	— 368,5				
33)	700	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 70	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = -44,6$ Ast = —1,9
	— 130	0,6	1	$d_p = -76$	$S_4 = 158,81$ $\Delta S = -3,33$
	170	8,5	1,727	$\epsilon_c = 23^\circ$	
	250	28,3	1,623	$\sigma_k' = 0,125$	
	— 396,8				

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
34)	700 — 70 — 130 170 500 — 469,6	28,3 8,5 0,6 8,5 28,3	1,623 1,727 1 1,727 1,623	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -76$ $\varepsilon_c = 23^\circ$ $\sigma_k' = 0,125$	$S_3 = -48,5$ $S_4 = 149,07$ $\Delta S = -3,05$
35)	700 — 90 — 110 180 70 — 419,2	28,3 8,5 0,6 8,5 28,3	1,623 1,727 1 1,727 1,623	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -76$ $\varepsilon_c = 34^\circ$ $\sigma_k' = 0,125$	$S_3 = -19,4$ $Ast = -0,87$
36)	700 — 90 — 110 300 70 — 183,9	28,3 8,5 0,6 8,5 28,3	1,623 1,727 1 1,727 1,623	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -76$ $\varepsilon_c = 36^\circ$ $\sigma_k' = 0,125$	$S_3 = 28,7$ $Ast = 2,5$
37)	700 — 90 — 110 215 70 — 273,1	28,3 8,5 0,6 8,5 28,3	1,623 1,727 1 1,727 1,623	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -76$ $\varepsilon_c = 34^\circ$ $\sigma_k' = 0,125$	$S_3 = -5,0$ $Ast = 0,18$

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
38)	595,7	14,4	1,623	$r_p = 12,5$	
	105,8	28,8	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 37,2$ Esf = -1,2
	— 124,9	0,6	1	$d_p = -72$	$S_2 = 15,2$ Coma = 0,06
	146	8,5	1,623	$\varepsilon_a = 9^\circ$	$S_3 = -68,1$ Ast = -5,5
	74,1	28,3	1,727	$\varepsilon_c = 32^\circ$	$S_4 = 156,7$ $\Delta S = -2,37$
	— 386			$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 545,1$ Dist = -5,2 %
				$\sigma_v = 15^\circ$	$S_2 = 10,58$ Coma = -0,20
				$\varepsilon_c = 21^\circ$	
39)	595,7	14,4	1,623	$r_p = 12,5$	
	105,8	28,8	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 37,5$ Esf = -1,2
	— 124,9	0,6	1	$d_p = -72$	$S_2 = 17,6$ Coma = 0,14
	160	8,5	1,623	$\varepsilon_a = 9^\circ$	$S_3 = -55,7$ Ast = -3,2
	110,23	28,3	1,727	$\varepsilon_c = 30^\circ$	$S_4 = 154,6$ $\Delta S = -3,47$
	— 387,05			$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 595,6$ Dist = -5,9 %
40)	1000	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	
	— 73,4	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 31,4$ Esf = -1,0
	— 120	0,6	1	$d_p = -76$	$S_2 = 9,39$ Coma = -0,06
	165	28,8	1,623	$\varepsilon_a = 11^\circ$	$S_3 = -67,32$ Ast = -5,11
	— 85	14,4	1,727	$\varepsilon_c = 26^\circ$	$S_4 = 157,1$ $\Delta S = -2,39$
	— 271,6			$\sigma_k' = 0,125$	$S_5 = 656,2$ Dist = -5,95 %
				$\sigma_v = 15^\circ$	$S_2 = 6,55$ Coma = -0,035
				$\varepsilon_c = 18^\circ$	

<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
41) 729,5			$r_p = 12,5$	
	15	1,727	$S_1 = 17,6$	$Esf = -2,32$
129,5			$\sigma_v = 21^\circ$	
	30	1,623	$S_2 = 10,9$	$Coma = 0,175$
— 129,5			$d_p = -80$	
			$S_4 = 74,9$	$\Delta S = -8,07$
			$\varepsilon_a = 9^\circ$	
			$\varepsilon_c = 28^\circ$	
			$\sigma_k' = 0,062$	$S_5 = 462$
			$\sigma_v = 15^\circ$	$Dist = -4,35 \%$
			$\varepsilon_c = 19^\circ$	$S_2 = 6,11$
				$Coma = 0,129$
				$S_3 = -2,9$
				$Ast = -1,10$
				$S_4 = 36,49$
				$\Delta S = -4,09$
				$S_5 = 157,13$
				$Dist = -2,21$
42) 620,1			$r_p = 12,5$	
	15	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 28,49$
110,1				$Esf = -2,73$
	30	1,623	$d_p = -80$	$S_2 = 29,02$
— 110,1				$Coma = 0,433$
			$\varepsilon_a = 10^\circ$	$S_3 = 18,33$
			$\varepsilon_c = 31^\circ$	$Ast = 0,586$
			$\sigma_k' = 0,073$	$S_4 = 88,1$
			$\sigma_v = 15^\circ$	$\Delta S = -8,73$
			$d_p = -76$	$S_5 = 516,9$
			$\varepsilon_c = 20^\circ$	$Dist = -4,75 \%$
				$S_3 = 5,62$
				$Ast = 0,57$
				$S_4 = 42,93$
				$\Delta S = -4,31$
				$S_5 = 175,8$
				$Dist = -2,41 \%$
43) 620,1			$r_p = 12,5$	
	15	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 16,92$
110,1				$Esf = 2,2$
	30	1,623	$d_p = -87,3$	$S_2 = 12,08$
— 130				$Coma = 0,02$
			$\varepsilon_a = 9^\circ$	$S_3 = -7,57$
			$\varepsilon_c = 33^\circ$	$Ast = -7,66$
			$\sigma_k' = 0,062$	$S_4 = 75,83$
			$\sigma_v = 15^\circ$	$\Delta S = -7,04$
			$d_p = -76$	$S_2 = 4,33$
			$\varepsilon_c = 22^\circ$	$Coma = 0,059$
				$S_3 = -6,78$
				$Ast = -2,48$
				$S_4 = 36,94$
				$\Delta S = -3,57$

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
44)	129,5	30	1,623	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$	$S_1 = 2,86$ Esf = -0,33
	— 129,5	15	1,727	$d_p = -80$	$S_2 = 7,76$ Coma = 0,198
	— 729,5			$\epsilon_a = 7^\circ$	$S_3 = 122,44$ Ast = 23,33
				$\epsilon_c = 35^\circ$	$S_4 = 74,89$ $\Delta S = 21,7$
				$\sigma_k' = 0,062$	$S_5 = 1072,13$ Dist = -11,54 %.
45)	— 926,4	28,3	1,623	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$	$S_2 = 9,55$ Coma = 0,25
	— 73,4	8,5	1,727	$d_p = -74$	$S_3 = -3,31$ Ast = -0,75
	— 113,3			$\epsilon_c = 19^\circ$	$S_4 = 64,3$ $\Delta S = -27,18$
				$\sigma_k' = 0,055$	
46)	— 1000	30	1,623	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = 4,22$ Ast = 2,16
	— 129,5	15	1,727	$d_p = -87,3$	$S_4 = 434,12$ Dist = -4,76 %.
	— 140			$\epsilon_c = 19^\circ$	
				$\sigma_k' = 0,048$	
47)	700	28,3	1,623	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = -1,92$ Ast = -0,737
	— 70	8,5	1,727	$d_p = -76$	$S_4 = 74,95$ $\Delta S = -8,38$
	— 130			$\epsilon_c = 23^\circ$	
				$\sigma_k' = 0,062$	

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>		<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
48)	700	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	$S_1 = 23,3$	$Esf = -2,19$
	— 65	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_2 = 15,86$	$Coma = 0,29$
	— 110			$d_p = -76$	$S_3 = 13,51$	$Ast = 2,32$
				$\varepsilon_a = 11^\circ$	$S_4 = 87,57$	$\Delta S = -8,56$
				$\varepsilon_c = 23^\circ$	$S_5 = 575,66$	$Dist = 5,67 \%$
				$\sigma_k' = 0,073$	$S_2 = 11,07$	$Coma = 0,22$
				$\sigma_v = 15^\circ$	$S_3 = 6,58$	$Ast = 1,19$
				$\varepsilon_c = 16^\circ$	$S_4 = 42,66$	$\Delta S = -4,39$
					$S_5 = 195,79$	$Dist = -2,83 \%$
				$\sigma_v = 10^\circ$	$S_5 = 55,79$	$Dist = -1,2 \%$
49)	400	28,3	1,623	$r_p = 12,5$	$S_2 = -10,12$	$Coma = -0,30$
	— 80	8,5	1,727	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = 11,18$	$Ast = 3,23$
	— 200			$d_p = -76$	$S_4 = 59,85$	$\Delta S = -13,05$
				$\varepsilon_c = 25^\circ$	$S_5 = 544,62$	$Dist = -5,4 \%$
				$\sigma_k' = 0,048$		
50)	321,2	15	1,727	$r_p = 12,5$	$S_3 = 54,18$	$Ast = 6,38$
	110,1	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_4 = 102,64$	$\Delta S = -10,10$
	— 110,1			$d_p = -80$		
				$\varepsilon_c = 30^\circ$		
				$\sigma_k' = 0,084$		
51)	620,1	15	1,727	$r_p = 12,5$	$S_3 = -13,67$	$Ast = -8,10$
	110,1	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_4 = 74,85$	$\Delta S = -6,54$
	— 131,9			$d_p = -80$	$S_5 = 430,79$	$Dist = -3,88 \%$
				$\varepsilon_c = 28^\circ$		
				$\sigma_k' = 0,061$		

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>	
52)	595,7 105,8 — 124,9	14,4 28,8	1,623 1,727	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -72$ $\varepsilon_c = 30^\circ$ $\sigma_k' = 0,064$	$S_3 = -14,89$ $S_4 = 78,93$ $S_5 = 384,6$	Ast = —6,96 $\Delta S = 6,26$ Dist = —3,95
53)	600 — 80 — 150	28,3 8,5	1,623 1,727	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -76$ $\varepsilon_a = 9^\circ$ $\varepsilon_c = 24^\circ$ $\sigma_k' = 0,057$ $\sigma_v = 15^\circ$	$S_1 = 8,58$ $S_2 = -3,45$ $S_3 = 2,52$ $S_4 = 68,64$ $S_5 = 530,81$ $S_2 = 2,2$ $S_3 = 1,23$ $S_5 = 180,54$	Esf = —1,34 Coma = —0,085 Ast = 0,57 $\Delta S = 11,18$ Dist = —5,25 % Coma = —0,185 Ast = 0,362 Dist = —2,84 %
54)	620 150 — 140	15 30	1,727 1,623	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -87,3$ $\varepsilon_c = 27^\circ$ $\sigma_k' = 0,061$	$S_3 = 5,4$ $S_4 = 73,04$ $S_5 = 515,66$	Ast = 0,52 $\Delta S = -9,5$ Dist = —4,97 %
55)	620 150 — 130	15 30	1,727 1,623	$r_p = 12,5$ $\sigma_v = 21^\circ$ $d_p = -87,3$ $\varepsilon_c = 27^\circ$ $\sigma_k' = 0,065$	$S_3 = 15,4$ $S_4 = 77,9$ $S_5 = 545$	Ast = 2,88 $\Delta S = -10,01$ Dist = —5,27 %

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>		<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
56)	620	15	1,727	$r_p = 12,5$	$S_3 = -0,75$	$Ast = -1,37$
	150	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_4 = 68,83$	$\Delta S = -9,24$
	— 150			$d_p = -87,3$	$S_5 = 494,6$	$Dist = -4,76 \%$
				$\varepsilon_c = 27^\circ$		
				$\sigma_k' = 0,057$		
57)	620	15	1,727	$r_p = 12,5$	$S_3 = 6,69$	$Ast = -0,316$
	130	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_4 = 77,02$	$\Delta S = -9,12$
	— 130			$d_p = 87,3$	$S_5 = 506,99$	$Dist = -4,74 \%$
				$\varepsilon_c = 29^\circ$		
				$\sigma_k' = 0,063$		
58)	620	15	1,727	$r_p = 12,5$	$S_3 = -7,57$	$Ast = -7,66$
	110	30	1,623	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_4 = 75,83$	$\Delta S = -15,01$
	— 130			$d_p = -87,3$	$S_5 = 445,9$	$Dist = -3,92 \%$
				$\varepsilon_c = 33^\circ$		
				$\sigma_k' = 0,062$		
59)	70	4	1,654	$r_p = 14,3$	$S_1 = 93,7$	$Esf = -0,143$
	— 500	4	1	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_2 = -307,44$	$Coma = -0,07$
	— 70	1,8	1,617	$d_p = 9,59$	$S_3 = 131,76$	$Ast = 6,65$
	40	5,8	1	$\varepsilon_a = 31,4^\circ$	$S_4 = 122,58$	$\Delta S = -5,7$
	150	2	1,524	$\varepsilon_c = 27^\circ$	$S_5 = 278,4$	$Dist = 2,48 \%$
	41	5	1,622	$\sigma_k' = 0,137$		
	— 41					

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
60)	70	4      1,654	$r_p = 14,3$	
	— 500	4      1	$\sigma_v = 21^\circ$	
	— 70	1,8      1,617	$d_p = 9,59$	$S_1 = -231,97$ Esf = 22,34
	40	5,8      1	$\epsilon_a = 31,4^\circ$	$S_2 = -182,16$ Coma = — 0,065
	150	2      1,524	$\epsilon_c = 27^\circ$	
	41	5      1,622	$\sigma_k' = 0,097$	
	— 50			
61)	70	4      1,654	$r_p = 14,3$	
	— 500	4      1	$\sigma_v = 21^\circ$	
	— 70	1,8      1,619	$d_p = 9,59$	$S_1 = 1355$ Esf = — 15,89
	40	5,8      1	$\epsilon_a = 44,2^\circ$	$S_2 = -0,66$ Coma = — 0,075
	150	2      1,524	$\epsilon_c = 27^\circ$	
	41	5      1,622	$\sigma_k' = 0,219$	
	— 30			
62)	70	4      1,654	$r_p = 14,3$	
	— 500	4      1	$\sigma_v = 21^\circ$	
	— 70	1,8      1,617	$d_p = 9,59$	$S_1 = 57,76$ Esf = 1,41
	40	5,8      1	$\epsilon_a = 31,4^\circ$	
	150	2      1,524	$\sigma_k' = 0,134$	
	45	5      1,622		
	— 41			

## REVISTA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
63)	70	4	1,654	$r_p = 14,3$	
	— 500	4	1	$\sigma_v = 21^\circ$	
	— 70	1,8	1,617	$d_p = 9,59$	$S_1 = 142,32$
	40	5,8	1	$\epsilon_a = 31,4^\circ$	$Esf = -2,08$
	150	2	1,524	$\sigma_k' = 0,141$	
	37	5	1,622		
	— 41				
64)	32	4	1,654	$r_p = 14,3$	$S_1 = 84,34$
	— 500	4	1	$\sigma_v = 21^\circ$	$Esf = 0,88$
	— 52	1,8	1,574	$d_p = 9,59$	$S_2 = 175,6$
	40	5,8	1	$\epsilon_a = 34,2^\circ$	$Coma = -0,05$
	— 115	2	1,524	$\epsilon_c = 31^\circ$	$S_3 = -13,4$
	58,2	5	1,622	$\sigma_k' = 0,152$	$Ast = 0,42$
	— 41				$S_4 = 122,5$
					$\Delta S = -2,16$
					$S_5 = -83,29$
					$Dist = -0,81 \%$
65)	26,7	5	1,537	$r_p = 5$	
	— 184,8	9	1	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = -9,77$
	— 36,8	1,5	1,624	$d_p = 16$	$Ast = 11,06$
	22,3	14,9	1	$\epsilon_c = 37,7^\circ$	$S_5 = 50,85$
	122,1	5	1,493	$\sigma_k' = 0,050$	$Dist = -2,42 \%$
	— 26,9				

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>		<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
66)	26,7	5	1,537	$r_p = 5$		
	— 184,8	9	1	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = -8,02$	$Ast = 7,79$
	— 36,8	1,5	1,624	$d_p = 16$	$S_5 = 59,23$	$Dist = -1,77 \%$
	25	14,9	1	$\epsilon_c = 37,4^\circ$		
	122,1	5	1,493	$\sigma_k' = 0,057$		
	— 26,9					
67)	26,7	5	1,537	$r_p = 5$		
	— 184,8	9	1	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = -6,1$	$Ast = 6,07$
	— 36,8	1,5	1,624	$d_p = 16$	$S_5 = 66,55$	$Dist = -1,23 \%$
	28	14,9	1	$\epsilon_c = 37,2^\circ$		
	122,1	5	1,493	$\sigma_k' = 0,063$		
	— 26,9					
68)	26,7	5	1,537	$r_p = 5$		
	— 184,8	9	1	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = 3,62$	$Ast = 10,99$
	— 36,8	1,5	1,624	$d_p = 16$	$S_5 = 87,72$	$Dist = -4,2 \%$
	22,3	14,9	1	$\epsilon_c = 37,8^\circ$		
	122,1	5	1,493	$\sigma_k' = 0,069$		
	— 22					
69)	26,7	5	1,537	$r_p = 5$		
	— 184,8	9	1	$\sigma_v = 21^\circ$	$S_3 = -5,9$	$Ast = 10,54$
	— 36,8	1,5	1,624	$d_p = 16$	$S_5 = 64,9$	$Dist = -3,05 \%$
	22,3	14,9	1	$\epsilon_c = 37,8^\circ$		
	122,1	5	1,493	$\sigma_k' = 0,058$		
	— 24,5					

REVISTA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES

<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
70)	32		$r_p = 2$	
	4	1,654	$d_p = 9,59$	
— 500	4	1	$\epsilon_a = 4^\circ$	$S_1 = 0,059 \quad Esf = -0,054$
— 47,3	1,8	1,574	$\sigma_k' = 0,022$	
36,4	5,8	1		
— 104,5	2	1,524		
58,2	5	1,622		
— 34,5			$r_p = 4 \quad S_1 = 0,955 \quad Esf = -0,227$	
			$\epsilon_a = 9^\circ$	
			$\sigma_k' = 0,045$	
			$r_p = 6 \quad S_1 = 4,83 \quad Esf = -0,479$	
			$\epsilon_a = 13^\circ$	
			$\sigma_k' = 0,067$	
			$r_p = 8 \quad S_1 = 15,2 \quad Esf = -0,72$	
			$\epsilon_a = 18^\circ$	
			$\sigma_k' = 0,089$	
			$r_p = 10 \quad S_1 = 37,38 \quad Esf = -0,89$	
			$\epsilon_a = 22^\circ$	
			$\sigma_k' = 0,112$	
			$r_p = 12 \quad S_1 = 77,21 \quad Esf = -0,696$	
			$\epsilon_a = 27^\circ$	
			$\sigma_k' = 0,134$	

## METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

	<i>Radios</i>	<i>d</i>	<i>Indices</i>	<i>Sumas de Seidel</i>	<i>Aberraciones</i>
71)	34,4	3	1,627	$r_p = 2$	
— 292,2	9,3	1		$d_p = 16$	
— 38,9	1,5	1,672		$S_1 = 0,04$	$Esf = -0,05$
37,3	10,1	1		$\epsilon_a = 4,5^\circ$	
500	3	1,627		$\sigma_k' = 0,022$	
— 30,9					

$$r_p = 4 \quad S_1 = 0,658 \quad Esf = -0,156$$

$$\epsilon_a = 9^\circ$$

$$\sigma_k' = 0,045$$

$$r_p = 6 \quad S_1 = 3,304 \quad Esf = -0,318$$

$$\epsilon_a = 14^\circ$$

$$\sigma_k' = 0,067$$

$$r_p = 8 \quad S_1 = 10,59 \quad Esf = -0,497$$

$$\epsilon_a = 18^\circ$$

$$\sigma_k' = 0,090$$

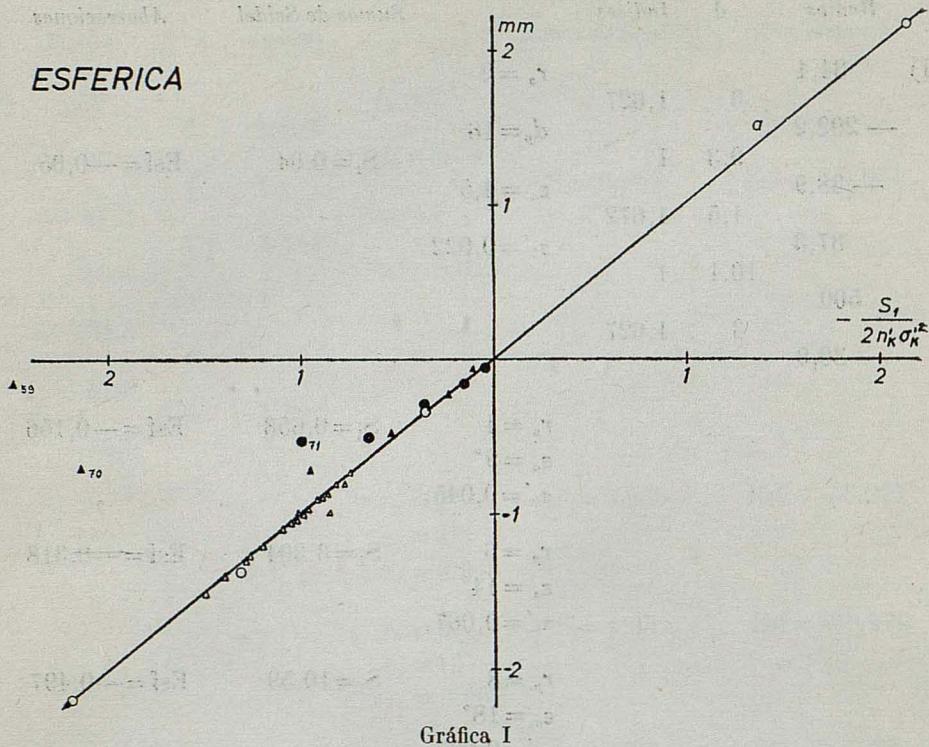
$$r_p = 10 \quad S_1 = 25,89 \quad Esf = -0,532$$

$$\epsilon_a = 23^\circ$$

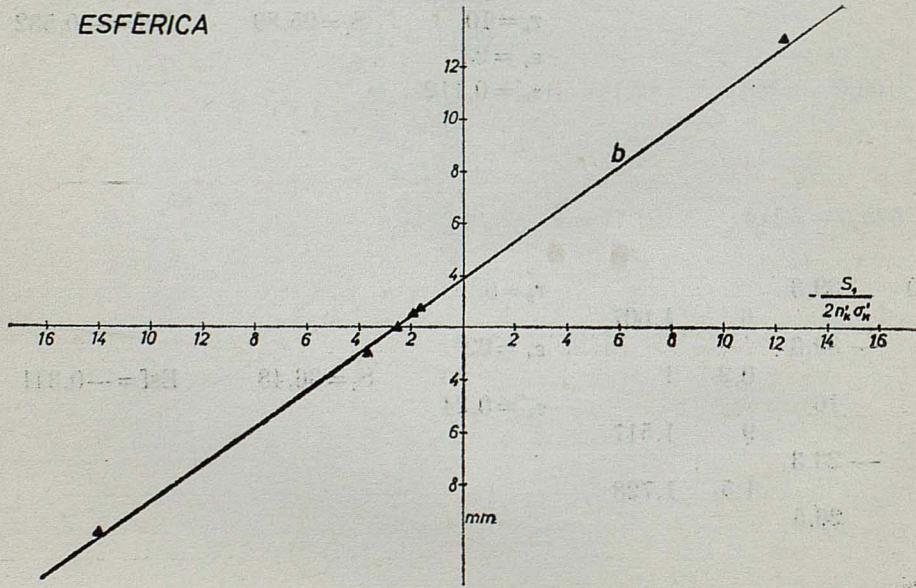
$$\sigma_k' = 0,112$$

72)	39,3	6	1,607	$r_p = 6$	
— 39,3	0,2	1		$\epsilon_a = 22^\circ$	
16	9	1,517		$\sigma_k' = 0,24$	$S_1 = 36,48$
— 23,3	1,5	1,728			$Esf = -0,341$
26,5					

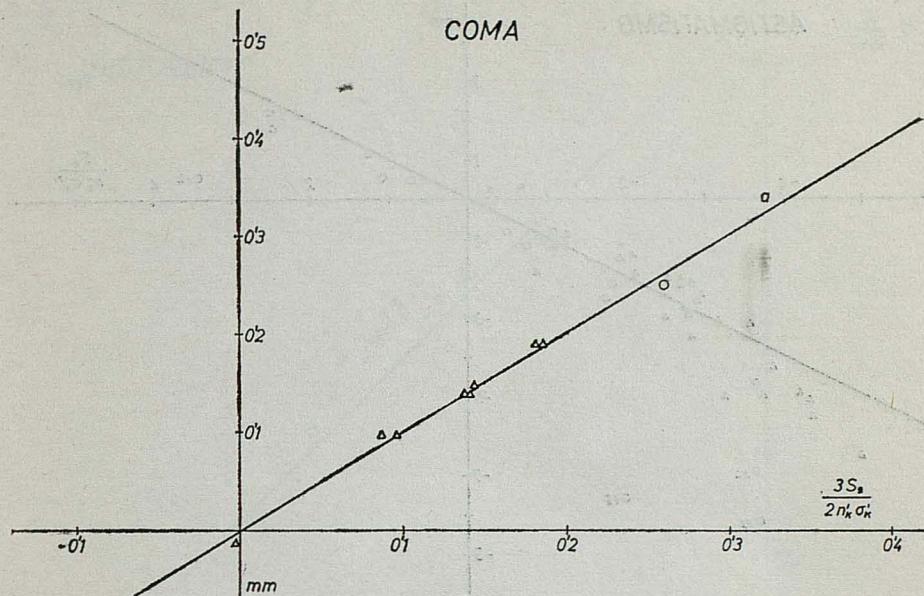
**ESFERICA**



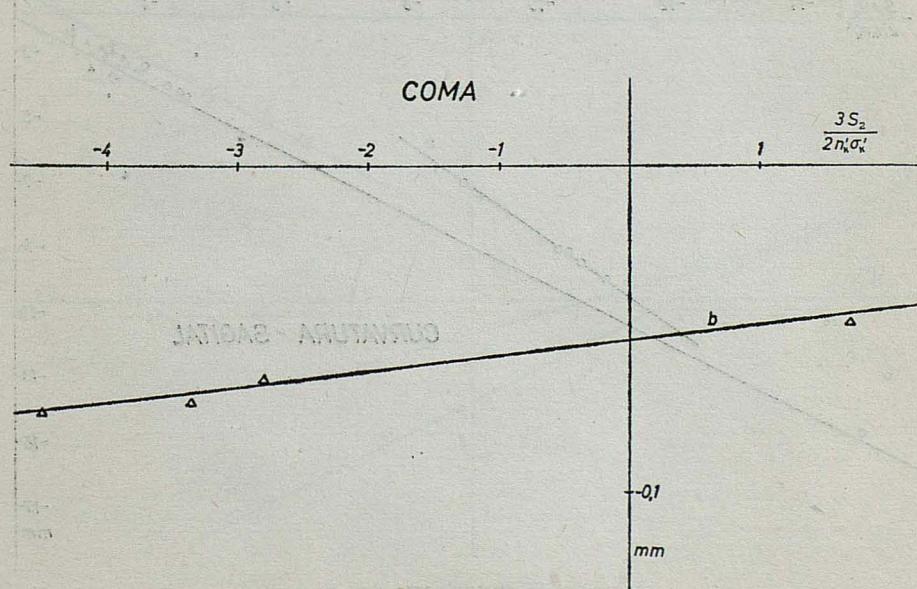
**ESFERICA**



MÉTODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS ÓPTICOS

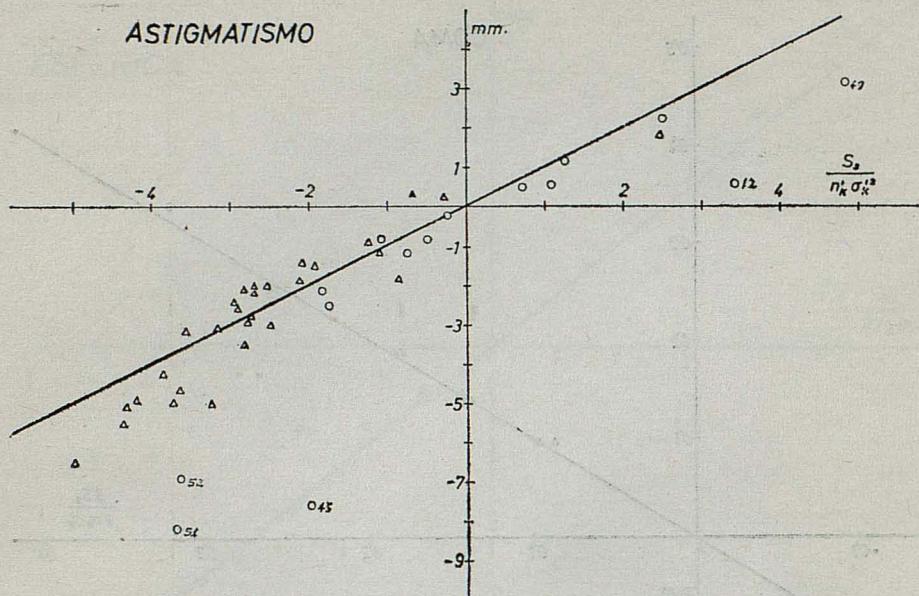


Gráfica III

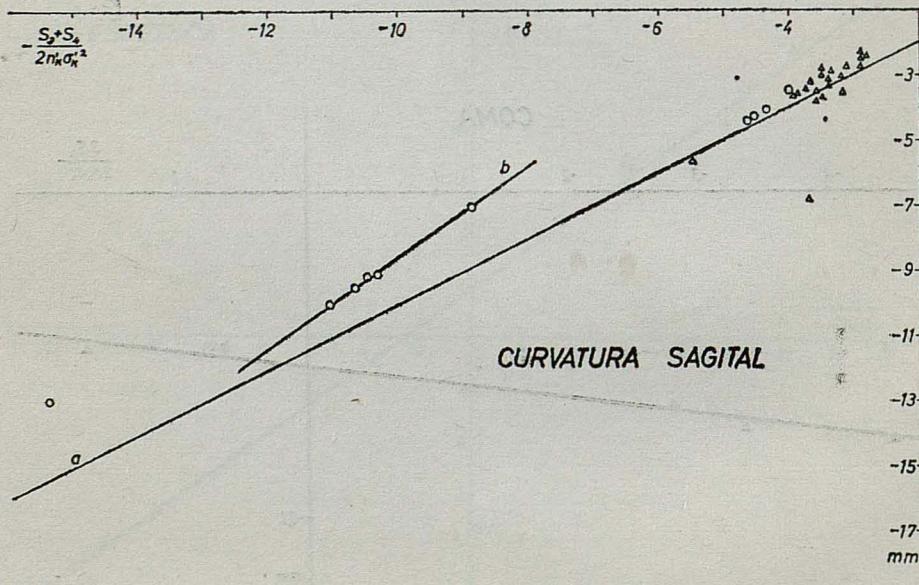


Gráfica IV

ASTIGMATISMO



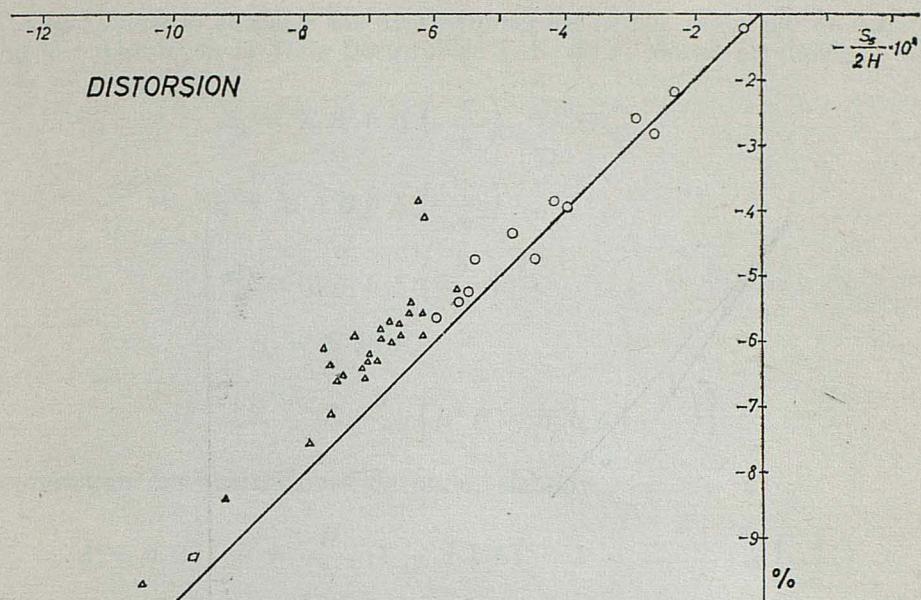
Gráfica V



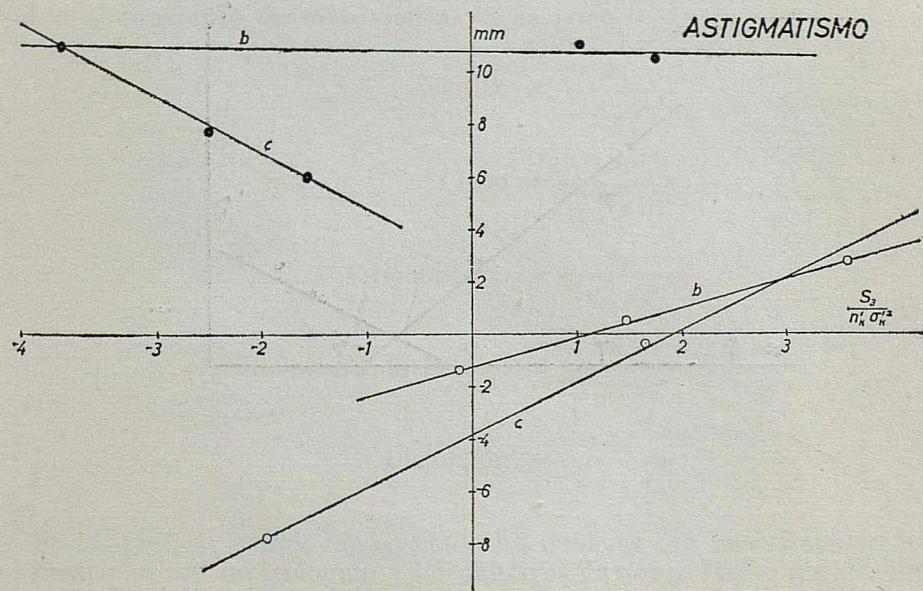
CURVATURA SAGITAL

Gráfica VI

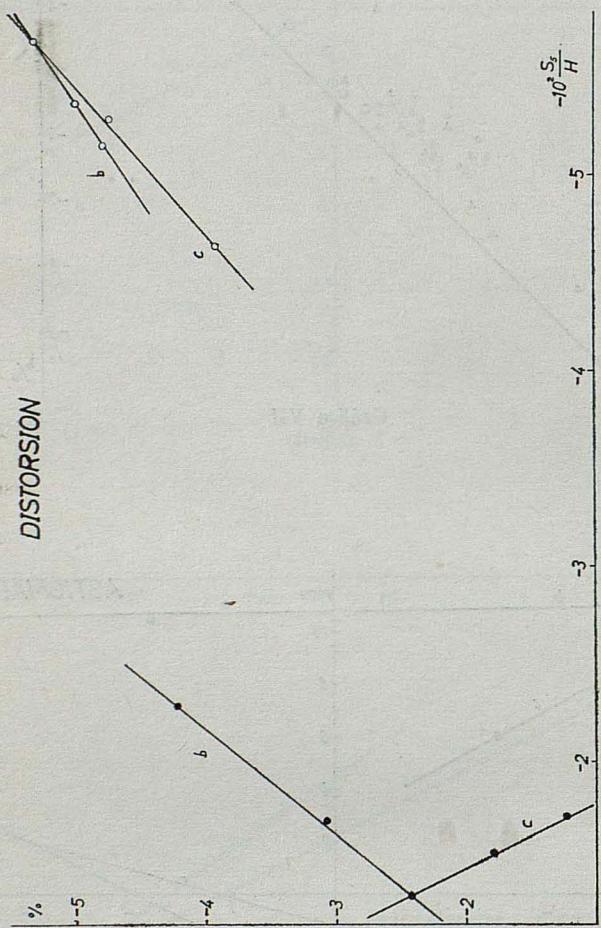
METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS



Gráfica VII



Gráfica VIII



Gráfica IX

Las sumas de Seidel y las aberraciones las hemos calculado de acuerdo con lo expuesto en la Tesis Doctoral de J. R. de F. Moneo (1) donde:

$$S_1 = \sum A^2 h \Delta \left( \frac{\sigma}{n} \right)$$

$$S_2 = \sum A B h \Delta \left( \frac{\sigma}{n} \right)$$

$$S_3 = \sum B^2 h \Delta \left( \frac{\sigma}{n} \right)$$

$$S_4 = \sum H^2 P$$

$$S_5 = \sum \frac{B}{A} \left[ H^2 P + B^2 h \Delta \left( \frac{\sigma}{n} \right) \right]$$

representan las aberraciones de onda, siendo:

$$A = n \varepsilon \quad B = \frac{H}{h} (1 + A h E) \quad P = -\frac{1}{r} \Delta \left( \frac{1}{n} \right)$$

En estas ecuaciones  $n$  es el índice de refracción de cada medio,  $\varepsilon$  el ángulo de incidencia del rayo en el dioptrio,  $h$  la altura sobre el eje del punto de incidencia,  $H$  el invariante de Helmholtz:  $n$  y  $\sigma$ ,  $E$  el espesor reducido de Seidel,  $r$  el radio de curvatura del dioptrio, y  $\sigma$  el ángulo del rayo con el eje.

Las aberraciones de rayo vienen dadas por:

$$\text{Esferica} = \frac{S_1}{2 n'_k \sigma'^2}$$

$$\text{Coma} = \frac{S_2}{2 n'_k \sigma'_k}$$

$$\text{Astigmatismo} = \frac{S_3}{n'_k \sigma'^2}$$

$$\text{Curvatura de Petzval} = \frac{S_4}{2 n'_k \sigma'^2}$$

$$\text{Distorsión} = \frac{S_5}{2 n'_k \sigma'_k}$$

En las gráficas hemos representado los dobletes con una circunferencia, los cuatriples con un triángulo y los objetivos Taylor y Tessar por un círculo y un triángulo negros.

## ESTUDIO DE LA ABERRACION ESFERICA.

Al hacer la representación gráfica de la aberración esférica en función de la expresión

$$-\frac{S_1}{2 n'_k \sigma'^2} \quad [I]$$

se observa que todos aquellos sistemas cuya incidencia máxima es menor de  $20^\circ$  determinan una recta que pasa por el origen de coordenadas (gráfica 1, recta a), y esto sucede independientemente de los valores que tomen los demás parámetros.

Para sistemas tales como el Taylor y el Tessar cuya esférica posee órdenes superiores al tercero, no podemos sobrepassar este límite de  $20^\circ$  si queremos que la [I] represente su esférica. Así los sistemas 59, 75 y 80 cuyas incidencias máximas son de  $31,4^\circ$ ,  $27^\circ$  y  $23^\circ$  respectivamente se apartan considerablemente de la recta a. Para otros sistemas donde estos términos son despreciables frente al tercero, la máxima incidencia puede llegar hasta algo más de  $30^\circ$ .

Hemos podido comprobar, pues, que el ángulo de incidencia en las superficies es el parámetro que condiciona la validez o invalidez de la suma

$$-\frac{S_1}{2 n'_k \sigma'^2} \text{ para representar la esférica del sistema.}$$

Una propiedad importante que parece deducirse para los sistemas que trabajan con incidencias mayores de las indicadas es que las coordenadas:  $-S_1/2 n'_k \sigma'^2$  y esférica, de sistemas que son modificaciones de uno dado están representadas sobre una recta (gráfica 2, recta b) que es más exacta cuando la abertura y la focal de todos ellos es la misma. Esta afirmación es objeto de un trabajo posterior (3).

Esta recta, como puede apreciarse en la gráfica, no pasa por el origen de coordenadas y teniendo en cuenta que tanto la esférica como expresión [I] se anulan para ángulo de campo cero, deducimos que los sistemas que no tengan más que aberración esférica del tercer orden vendrán representados sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas, mientras que aquellos que tienen órdenes superiores al tercero anularán su aberración para otro valor distinto del de abscisa cero, pudiéndose sospechar que la ordenada en el origen nos da la contribución a la esférica de los términos de órdenes superiores al tercero.

Para corregir un sistema de esférica será por tanto necesario que la suma tome el valor correspondiente a esférica cero, dado por la gráfica.

## ESTUDIO DEL COMA

Paa hacer el estudio de esta aberración hemos tomado como medida de la misma la dada por el coma tangencial, que es aproximadamente igual a:

$$C = \frac{h_i + h_s}{2} - h_p$$

donde  $h_s$ ,  $h_i$  y  $h_p$  son las alturas de las intersecciones de los tres rayos que van del punto de objeto a los bordes superior, inferior y al centro de la pupila con el plano imagen paraxial, ya que si logramos corregir esta aberración, con mayor motivo quedará corregido el coma sagital que es una tercera parte del tangencial.

Al aplicarle al coma la normalización dada por Hopkins (2) debemos multiplicar la expresión

$$\frac{S_2}{2 n'_k \sigma'^2_k} \quad [II]$$

por un factor 3 ya que la [II] está deducida para el coma sagital. De esta manera ya nos es válida con nuestra definición de coma.

Aquí, como en la esférica, la validez de la suma [II] viene condicionada por el mismo parámetro  $\varepsilon_i$ , pero con la diferencia de que en el coma este valor máximo es más preciso. Así podemos observar (gráfica 3) que todos aquellos sistemas cuyas incidencias máximas no exceden de  $20^\circ$  están representados en la recta  $a$  y solamente algunos con incidencias mayores a éstas vienen a estar situados en esta recta.

Como un sistema en general trabaja con incidencias mayores que estos límites, podríamos pensar que la expresión [II] no nos es de ninguna utilidad.

Sin embargo esto no es así, pues hemos podido comprobar la linealidad que existe entre esta suma y la aberración que representa, para sistemas con iguales características (gráfica 4, recta  $b$ ). Por lo tanto, dado un sistema y hallada su suma y aberración correspondiente, no tenemos más que modificar uno de sus radios para tener otra pareja de valores y con estos dos puntos definida la recta sobre la que se ha de mover el sistema. Esta no pasa por el origen de coordenadas y el valor que debe tomar la [II] para que la aberración se anule es la abscisa del punto de corte de la recta con el eje X.

### ESTUDIO DEL ASTIGMATISMO, CURVATURA Y DISTORSION

Estas tres aberraciones las hemos tratado simultáneamente por comportarse respecto a sus sumas correspondientes de una manera análoga.

En el astigmatismo su suma

$$\frac{S_3}{n'_k \sigma'^2_k} \quad [III]$$

responde de la aberración hasta que las incidencias no sobrepasan los  $20^\circ$ . Hasta los  $30^\circ$  la discordancia entre el valor verdadero de la aberración y su suma correspondiente es algo inferior al milímetro y para valores superiores a éste el valor de la expresión [III] no nos da ninguna información del estado aberrante del sistema (gráfica 5).

Algunos sistemas, en general dobletes (gráfica 5, puntos 42, 43, 49, 51, 52) no poseen esta flexibilidad de tener un astigmatismo muy aproximadamente igual al valor de su suma, para incidencias hasta de  $30^\circ$ .

La explicación que damos a este hecho es, que la diferencia existente entre el valor de la suma y la aberración correspondiente para cada superficie tenga en todas ellas un mismo signo y por tanto el resultado final difiere considerablemente de lo previsto.

En realidad, cuando un sistema tiene varias superficies lógicamente en todas ellas esta difedencia no tendrá el mismo signo, compensándose unas con otras y dando un resultado más de acuerdo con lo que hemos dicho anteriormente.

Esto mismo sucede con las otras dos aberraciones.

En la curvatura de imagen hemos tenido en cuenta lo dicho de ella en la Tesis Doctoral de Félix Merino (4).

Según este estudio, nosotros debemos trabajar con la curvatura sagital por tener los instrumentos utilizados aberturas superiores a  $f:5$ . Representándola en función de su suma correspondiente.

$$\frac{S_3 + S_4}{2 n'_k \sigma'^2_k}$$

nos encontramos con la misma respuesta que en el astigmatismo (gráfica 6).

Los puntos que están situados sobre la recta  $a$  son todos aquellos que tienen incidencias hasta  $20^\circ$ ; de  $20^\circ$  a  $30^\circ$  hay una discrepancia entre el valor teórico y el verdadero, del orden de un milímetro y para valores de  $\epsilon$  superiores a  $30^\circ$  el valor de la suma ya no nos da ninguna información.

En la distorsión, Hopkins (2) deduce para valor de la suma la expresión

$$\frac{S_5}{2 n'_k \sigma'_k} \quad [IV]$$

pero como él la define como diferencia de alturas y nosotros como relación de alturas en tanto por ciento, tendremos que dividir la [IV] por  $y'_k$ . pero  $n'_k \sigma'_k y'_k$  es el invariante de Hemholtz, luego la [IV] se nos convierte en  $\frac{S_5}{2 H}$ .

Análogamente a lo sucedido con las otras dos sumas, todos los sistemas cuyas incidencias son menores de  $20^\circ$  están representados en la recta  $a$  (gráfica 7). Cuando las incidencias máximas ascienden hasta  $30^\circ$  los sistemas se separan de la línea  $a$  viniendo afectadas sus distorsiones por un error del orden del 0,5 %, y para incidencias algo mayores que éstas la dispersión no excede en mucho de un 1 %.

En esta aberración y en el astigmatismo sucede que un sistema cuyas incidencias tienen un valor tal que su estado aberrante no viene dado por su suma correspondiente existe una relación lineal, dentro de este sistema, entre las aberraciones y sus sumas correspondientes para las modificaciones de un radio, variando esta recta al variar el radio (rectas  $b$  y  $c$  de las gráficas 8 y 9). En la curvatura tenemos una sola recta para las modificaciones de cualquier radio (gráfica 6, recta  $b$ ).

RELACIONES QUE LIGAN LAS SUMAS DEL TERCER ORDEN  
CON LOS PARAMETROS DE UN SISTEMA

Al estudiar la dependencia existente entre las aberraciones geométricas y las sumas del tercer orden hemos visto que éstas nos representan a las aberraciones cuando las incidencias en las superficies no sobrepasan los  $20^\circ$  y para la mayoría de los sistemas sigue esto teniendo validez hasta los  $30^\circ$ . También hemos visto lo que sucede cuando sobre pasamos este límite y cómo podemos seguir relacionándolas linealmente aun cuando las sumas no nos den directamente el estado aberrante.

Siendo así que tenemos a cada una de las aberraciones ligadas linealmente con sus sumas correspondientes, nos es de suma utilidad conocer cómo varían éstas con los parámetros del sistema.

Estudiando estas expresiones se ve que son funciones de los índices, de los espesores y de las curvaturas de las superficies.

Existe por tanto una función  $f$  tal que

$$S_i = f \left( \frac{1}{r_1}, \dots, \frac{1}{r_n}, n_1, \dots, n_n, d_1, \dots, d_n \right) \quad [V]$$

que desarrollada en serie de Taylor y tomando solamente el primer término nos da:

$$\begin{aligned} \Delta S_i = & \frac{\Delta S_i}{\Delta \frac{1}{r_1}} \Delta \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{\Delta S_i}{\Delta \frac{1}{r_n}} \Delta \frac{1}{r_n} + \frac{\Delta S_i}{\Delta n_1} \Delta n_1 + \dots + \frac{\Delta S_i}{\Delta n_n} \Delta n_n + \\ & + \frac{\Delta S_i}{\Delta d_1} \Delta d_1 + \dots + \frac{\Delta S_i}{\Delta d_n} \Delta d_n \end{aligned} \quad [VI]$$

Para variaciones muy pequeñas de las curvaturas, índices y espesores, la variación de la suma puede considerarse como una función lineal de ellos.

Como los sistemas que consideramos en el presente trabajo son todos muy compactos, podemos en principio prescindir de la influencia de los espesores.

Los coeficientes, cocientes de incrementos

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta \frac{1}{r_n}}$$

se pueden determinar hallando las derivadas de las sumas con respecto a las curvaturas, o bien, de una manera más sencilla, modificando uno a uno los radios del sistema y viendo qué incrementos sufren las sumas para cada una de esas variaciones.

Cuanto más pequeño sea el incremento que le demos a la variable más se aproximarán la expresión [VI] a ser la diferencial de la [V].

En cuanto a las derivadas de las  $S_i$  con respecto a  $n_i$ , Hopkins (2) hace un cálculo aproximado y da para las  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  las expresiones siguientes:

$$\delta S_1 = \sum_1^k A^2 h \Delta \left( \frac{\sigma}{n} \frac{\delta n}{n} \right)$$

$$\delta S_2 = \sum_1^k A B h \Delta \left( \frac{\sigma}{n} \frac{\delta n}{n} \right)$$

$$\delta S_3 = \sum_1^k B^2 h \Delta \left( \frac{\sigma}{n} \frac{\delta n}{n} \right)$$

Nosotros, siguiendo un proceso de cálculo aproximado análogo al efectuado para deducir estas expresiones hemos obtenido  $\delta S_4$  y  $\delta S_5$ .

$$\delta S_4 = \sum_1^k -H^2 \frac{1}{r} \Delta \left( \frac{\delta n}{n^2} \right)$$

$$\delta S_5 = \sum_1^k \frac{B}{A} \left[ B^2 h \Delta \left( \frac{\sigma}{n} \frac{\delta n}{n} \right) - H^2 \frac{1}{r} \Delta \left( -\frac{\delta n}{n^2} \right) \right]$$

Por otra parte siendo:

$$\Delta \left( \frac{\sigma \delta n}{n^2} \right) = \frac{\sigma' \delta n'}{n'^3} - \frac{\sigma \delta n}{n^2}$$

podemos deducir la variación de  $S_i$  con respecto a cada uno de los índices, es decir:

$$\delta S_1 = A^2_{i-1} h_{i-1} \frac{\sigma'_{i-1} \delta n'_{i-1}}{n'^2_{i-1}} - A^2_i h_i \frac{\sigma_i \delta n_i}{n^2_i}$$

de donde

$$\frac{\delta S_1}{\delta n_i} = (A^2_{i-1} h_{i-1} - A^2_i h_i) \frac{\sigma'_{i-1}}{n'^2_i}$$

Análogamente, para las demás sumas tendremos:

$$\frac{\delta S_2}{\delta n_i} = (A_{i-1} B_{i-1} h_{i-1} - A_i B_i h_i) \frac{\sigma'_{i-1}}{n'^2_i}$$

$$\frac{\delta S_3}{\delta n_i} = (B^2_{i-1} h_{i-1} - B^2_i h_i) \frac{\sigma'_{i-1}}{n'^2_i}$$

$$\delta S_4 = H^2 \frac{1}{r_{i-1}} \frac{\delta n'_{i-1}}{n'^2_{i-1}} - H^2 \frac{1}{r_i} \frac{\delta n_i}{n^2_i}$$

METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

$$\begin{aligned}\delta S_4 &= H^2 \left( \frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \right) \frac{\delta n_i}{n_i^2} \\ \frac{\delta S_4}{\delta n_i} &= H^2 \left( \frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \right) \frac{1}{n_i^2} \\ \delta S_5 &= \frac{B_{i-1}}{A_{i-1}} \left( B_{i-1}^2 h_{i-1} \frac{\sigma'_{i-1} \delta n'_{i-1}}{n'^2_{i-1}} + H^2 \frac{1}{r_{i-1}} \frac{\delta n'_{i-1}}{n'^2_{i-1}} \right) + \\ &\quad \frac{B_i}{A_i} \left( -B_i^2 h_i \frac{\sigma_i \delta n_i}{n_i^2} - H^2 \frac{1}{r_i} \frac{\delta n_i}{n_i^2} \right) \\ \delta S_5 &= \left[ \left( \frac{B_{i-1}^3}{A_{i-1}} h_{i-1} - \frac{B_i^3}{A_i} h_i \right) \frac{\sigma_i \delta n_i}{n_i^2} + H^2 \left( \frac{B_{i-1}}{A_{i-1} r_{i-1}} - \frac{B_i}{A_i r_i} \right) \frac{\delta n_i}{n_i^2} \right] \\ \frac{\delta S_5}{\delta n_i} &= \left[ \left( \frac{B_{i-1}^3}{A_{i-1}} h_{i-1} - \frac{B_i^3}{A_i} h_i \right) \sigma_i + H^2 \left( \frac{B_{i-1}}{A_{i-1} r_{i-1}} - \frac{B_i}{A_i r_i} \right) \right] \frac{1}{n_i^2}.\end{aligned}$$

Una vez conocida la manera de hallar

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta \frac{1}{r_n}} \quad \frac{\Delta S_i}{\Delta n_n}$$

ya tenemos relacionadas las variaciones que queremos que sufran las sumas con las que deben sufrir las curvaturas e índices del sistema.

Esta relación podremos considerarla como una función lineal siempre que los incrementos que les demos a las variables sean muy pequeños.

METODO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS Y APLICACION  
PRACTICA DEL MISMO

La ecuación

$$\Delta S_i = \frac{\Delta S_i}{\Delta \frac{1}{r_1}} \Delta \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{\Delta S_i}{\Delta \frac{1}{r_n}} \Delta \frac{1}{r_n} + \frac{\Delta S_i}{\Delta n_1} \Delta n_1 + \dots + \frac{\Delta S_i}{\Delta n_n} \Delta n_n$$

aplicada a las cinco sumas de un sistema óptico nos da la clave para llevarlo a su casi total corrección.

En efecto. De esta manera tenemos formado un sistema de ecuaciones en el cual los  $\Delta S_i$  que figuran en el primer miembro son los incrementos que deberán tomar las sumas para que sus aberraciones correspondientes se anulen.

Los  $\Delta \frac{1}{r_i}$  y  $\Delta n_i$  que figuran en el segundo miembro multiplicando a los coeficientes

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta \frac{1}{r_i}} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta S_i}{\Delta n_i}$$

son los incrementos que deben tomar las curvaturas e índices para que el sistema de ecuaciones se verifique.

Si al resolver el sistema de ecuaciones, las soluciones que nos da para los incrementos de curvatura e índices exceden de ciertos límites, fuera de los cuales deja de cumplirse esta aproximación no podemos exigirle al sistema de ecuaciones que en una sola etapa de trabajo nos corrija todas las aberraciones. En tal caso habremos de tomar como solución una fracción de ella con lo cual el sistema no queda corregido, pero sí rebajadas sus aberraciones en esta fracción de su valor.

Al objeto de poder estudiar la validez práctica de esta aproximación, hemos aplicado estos métodos de cálculo a la corrección de un objetivo fotográfico Tessar de abertura f/3,5 focal 100 mm y ángulo de campo 50°.

Los datos de partida se han tomado de Chretien (5) modificando ligeramente los radios y espesores y totalmente los vidrios.

Estos son :

Radios	<i>d</i>	Vidrios	Indices	Dispersiones
29				
	4	LAK 7	1,654	58,26
$\infty$	4			
— 59	1,8	F 3	1,617	36,72
26	5,8			
150	2	K 5	1,525	59,47
27	5	F 12	1,622	36,19
— 41				

El diafragma está colocado a 3 mm y 2,8 mm de la segunda y tercera lente respectivamente.

Antes de formar el sistema de ecuaciones hemos reducido mediante una exploración paraxial las incidencias máximas a 30° y lo hemos dejado en focal 100 mm.

Para ello se ha efectuado una marcha paraxial a altura 14,3 que ha dado una focal de 75 mm. Esta focal la hemos alargado reduciendo la potencia de la primera lente a la mitad de su valor, con lo cual reducimos simultáneamente la incidencia fuerte de la primera superficie. Para facilidad

de los cálculos será sustituido previamente el valor infinito de la segunda superficie por un valor finito, lo suficientemente grande, — 250 mm, para que la superficie siga siendo prácticamente plana. En la segunda lente también hemos reducido su convergencia para rebajar las incidencias en las dos superficies.

Con estas modificaciones los cuatro primeros radios han pasado a tomar los valores

$$r_1 = 70 \quad r_2 = -500 \quad r_3 = -70 \quad r_4 = 40$$

Repetiendo la marcha paraxial con estos nuevos datos se ha obtenido una focal corta, 92,7 mm, y ángulos de incidencia grandes en las dos últimas superficies. Todo esto se ha corregido dándole al penúltimo radio el valor 41 mm, con lo que la focal ha pasado a ser de 104,2 mm.

Al calcularle a este sistema sus aberraciones y sumas correspondientes ha dado los valores siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Esférica} &= -0,1427 \\ \text{Coma} &= -0,0720 \\ \text{Astigmatismo} &= 6,6557 \\ \text{Curvatura Sagital} &= -5,6977 \\ \text{Distorsión} &= 2,48 \% \end{aligned}$$

y los valores de las sumas del tercer orden normalizadas son:

$$-\frac{S_1}{2 n'_k \sigma'^2_k} = -2,4916$$

$$\frac{S_2}{2 n'_k \sigma'_k} = -1,1208$$

$$\frac{S_3}{n'_k \sigma'^2_k} = 7,0050$$

$$\frac{S_3 + S_4}{2 n'_k \sigma'^2_k} = -6,7608$$

$$50 \frac{S_5}{H} = 2,5358$$

El astigmatismo, curvatura y distorsión se corresponden con las sumas

$$\frac{S_3}{n'_k \sigma'^2_k}, \quad \frac{S_3 + S_4}{2 n'_k \sigma'^2_k}, \quad 50 \frac{S_5}{H}$$

respectivamente.

La esférica y el coma no vienen dadas por

$$-\frac{S_1}{2 n'_k \sigma'^2_k} \quad \frac{3 S_2}{2 n'_k \sigma'_k}$$

pero sí existe una correspondencia lineal con estas sumas, como puede verse en las gráficas 2 y 4 en las cuales la esférica se anula para un valor de su suma igual a -2,7 y el coma para el valor de su suma igual a 3 aproximadamente.

Una vez conocidos los valores de estas sumas y las gráficas que las representan en función de las aberraciones, fácilmente se ve qué incrementos deben tomar para que el sistema quede corregido. Estos son:

$$\Delta \left( \frac{S_1}{2 n'_k \sigma'^2_k} \right) = -0,046$$

$$\Delta \left( \frac{S_2}{2 n'_k \sigma'_k} \right) = 4$$

$$\Delta \left( \frac{S_3}{n'_k \sigma'^3_k} \right) = -7$$

$$\Delta \left( -\frac{S_3 + S_4}{2 n'_k \sigma'^2_k} \right) = 6$$

$$\Delta \left( 50 \frac{S_5}{H} \right) = -2,5$$

Para calcular los incrementos de curvatura hemos dado a los radios variaciones algo menores de un 10 % de su valor mientras las aberraciones han sido grandes frente a sus tolerancias rebajándose a un 5 % cuando éstas se aproximan a este valor límite.

Basándose en estos criterios generales hemos hallado los incrementos de curvatura tomando como incremento de sus radios la parte entera que queda de dividir su valor por diez.

$$\Delta \left( \frac{1}{r_1} \right) = -0,0009524$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_2} \right) = 0,0001132$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_3} \right) = 0,0009524$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_4} \right) = -0,0017442$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_5} \right) = -0,0004939$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_6} \right) = -0,0016629$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_7} \right) = 0,0016629$$

TABLA I

	$\Delta \left( -\frac{S_1}{2\sigma_k'^2} \right)$	$\Delta \left( \frac{S_2}{2\sigma_k'^2} \right)$	$\Delta \left( \frac{S_3}{2\sigma_k'^2} \right)$	$\Delta \left( -\frac{S_3+S}{2\sigma_k'^2} \right)$	$50 \frac{S_5}{H}$
	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$
$i = 1$	-1863,9359	71,0521	-1180,7598	619,1577	-635,6925
$i = 2$	780,7923	-27,0009	195,6078	-126,2668	109,5442
$i = 3$	-1227,6368	-24,6108	-244,9685	136,6771	-38,2339
$i = 4$	-4405,4132	118,4136	-491,6792	225,0952	1334,7568
$i = 5$	-841,1488	69,9188	-97,0316	103,6748	57,5940
$i = 6$	-410,5950	26,0547	35,5763	15,2624	-14,7633
$i = 7$	2482,9167	17,0446	997,9617	-631,5825	-87,7951

Los términos correspondientes a los índices son:

	$\Delta \text{ Esf}$ $\Delta n_i$	$\Delta \text{ Coma}$ $\Delta n_i$	$\Delta \text{ Astg}$ $\Delta n_i$	$\Delta \text{ C. Sag}$ $\Delta n_i$	$\Delta \text{ Dist}$ $\Delta n_i$
$n_i = 2$	-0,1134	0,4395	-1,5394	4,765	1,916
$n_i = 4$	0,3915	0,273	0,211	-12,034	-0,133
$n_i = 6$	-4,813	0,762	1,688	-6,11	-0,892
$n_i = 7$	1,4398	0,962	-2,681	14,843	0,582

En el valor de la expresión  $\delta S_5 / \delta n_i$  se ha prescindido del primer sumando por ser muy inferior al segundo.

Dado el estado aberrante del sistema, se comprende que la modificación de los índices vaya encaminada a corregir el astigmatismo y la curvatura, lo cual sólo es posible en este sistema incrementando negativamente el índice de la segunda lente, ya que los otros índices no pueden sufrir la modificación en el sentido que exige el sistema.

Un valor que nos ha parecido apropiado para este incremento es  $\Delta n_4 = -0,04$ .

La solución completa del sistema no se ha hecho resolviéndolo teóricamente sino dando a los incrementos de curvatura valores que favorecen la anulación de las sumas y por otra parte no introduzcan incidencias grandes en las superficies.

Estos son:

$$\begin{aligned} r_1 &= 35 & r_2 &= -500 & r_3 &= -67 & r_4 &= 35 \\ r_5 &= -150 & r_6 &= 83 & r_7 &= -43 \end{aligned}$$

Con estos nuevos radios y la modificación del índice tenemos para valor de las sumas:

$$-\frac{S_1}{2 n'_k \sigma'^2_k} = -2,367$$

$$\frac{S_2}{2 n'_k \sigma'^2_k} = -0,147$$

$$\frac{S_3}{n'_k \sigma'^2_k} = 1,469$$

$$-\frac{S_3 + S_4}{2 n'_k \sigma'^2_k} = -3,654$$

$$50 \frac{S_5}{H} = -0,577$$

Volviendo a formar otra vez el sistema de ecuaciones a partir de estos resultados como datos, hemos obtenido los coeficientes dados en la tabla II tomado como incrementos de curvatura los siguientes:

$$\Delta \left( \frac{1}{r_1} \right) = -0,0022557$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_3} \right) = 0,0012267$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_4} \right) = -0,0022557$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_5} \right) = 0,0006060$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_6} \right) = -0,0010591$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_7} \right) = 0,0019793$$

TABLA II

	$\Delta \left( -\frac{S_1}{2 \sigma'^2_k} \right)$	$\Delta \left( \frac{S_2}{2 \sigma'_k} \right)$	$\Delta \left( \frac{S_3}{\sigma'^2_k} \right)$	$\Delta \left( -\frac{S_3 + S_4}{2 \sigma'^2_k} \right)$	$\Delta \left( 50 \frac{S_5}{H} \right)$
	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$
$i = 1$	-1551,9737	102,9842	17,9763	3,6502	-162,6754
$i = 3$	-1452,4973	-77,2257	680,1083	-370,9791	-75,7292
$i = 4$	708,7741	-52,0707	-171,5073	113,2301	42,5990
$i = 5$	-228,5592	-33,6068	376,0929	-212,3584	45,9267
$i = 6$	-104,5959	2,0752	111,1509	-37,9724	12,1928
$i = 7$	1416,2522	84,9581	-136,1415	74,6323	-103,8630

En la resolución de este sistema hemos seguido un criterio análogo al anterior, es decir, el valor de los nuevos radios se ha dado sin necesidad de resolver el sistema, teniendo en cuenta únicamente los valores de las sumas que queremos anular y el valor de los coeficientes de las incógnitas.

Cuanto menor sea el número de los radios modificados y el valor de esta modificación, tanto más podremos asegurar el resultado previsto.

Nosotros hemos dejado sin modificar los radios de la primera lente ya que la influencia que ejercen respecto al astigmatismo y curvatura es pequeña comparada con la de los demás radios.

Los coeficientes de la segunda superficie no se han calculado pues no queremos modificar su primitivo valor que la hace prácticamente plana.

Las soluciones que tomamos nos dan para valores de los nuevos radios:

$$r_3 = -52 \quad r_4 = 44 \quad r_5 = -115 \quad r_6 = 64 \quad r_7 = -41$$

Las sumas que se corresponden con estos radios son:

$$-\frac{S_1}{2 n'_k \sigma'^3_k} = -1,319$$

$$\frac{S_2}{2 n'_k \sigma'_k} = 0,517$$

$$\frac{S_3}{n'_k \sigma'^2_k} = -0,667$$

$$-\frac{S_3 + S_4}{2 n'_k \sigma'^2_k} = -2,529$$

$$50 \frac{S_5}{H} = -0,431$$

Como estas sumas son todavía grandes, hemos vuelto a formar otro sistema con los siguientes incrementos de curvatura

$$\Delta \left( \frac{1}{r_1} \right) = -0,0007937 \quad \Delta \left( \frac{1}{r_3} \right) = 0,0007122$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_4} \right) = -0,0009881 \quad \Delta \left( \frac{1}{r_5} \right) = 0,0002923$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_6} \right) = -0,0004735 \quad \Delta \left( \frac{1}{r_7} \right) = 0,0005807$$

que nos da la tabla III.

TABLA III

	$\Delta \left( -\frac{S_1}{2 \sigma'_k^2} \right)$	$\Delta \left( \frac{S_2}{2 \sigma'_k} \right)$	$\Delta \left( \frac{S_3}{\sigma'_k^2} \right)$	$\Delta \left( -\frac{S_3 + S_4}{2 \sigma'_k^2} \right)$	$\Delta \left( 50 \frac{S_5}{H} \right)$
	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_5} \right)$
$i = 1$	-679,1410	42,3019	307,1572	-21,0922	-14,4576
$i = 3$	-1456,5411	-217,0143	845,1151	-443,5702	-77,8818
$i = 4$	555,0438	-13,4690	-369,6732	206,8597	44,1396
$i = 5$	-324,0722	-66,1769	482,0318	-253,5145	44,6397
$i = 6$	-137,2663	-1,8437	133,7981	-49,4479	12,2232
$i = 7$	1360,5450	113,8088	-272,2803	110,6833	-99,5431

Los incrementos de curvatura que hemos tomado como solución de este sistema nos dan los siguientes valores para los nuevos radios

$$r_1 = 32 \quad r_4 = 40 \quad r_6 = 58,2$$

Las sumas que se corresponden con esta solución son

$$-\frac{S_1}{2 n'_k \sigma'_k^2} = -1,828$$

$$\frac{S_2}{2 n'_k \sigma'_k} = 0,578$$

$$\frac{S_3}{n'_k \sigma'_k^2} = -0,581$$

$$-\frac{S_3 + S_4}{2 n'_k \sigma'_k^2} = 2,365$$

$$50 \frac{S_5}{H} = -0,759$$

Para reducir todavía más estos valores, hemos vuelto a formar otro sistema de ecuaciones con los datos de la tabla IV calculados con los siguientes incrementos de curvatura.

$$\Delta \left( \frac{1}{r_1} \right) = 0,000947$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_3} \right) = 0,0010489$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_4} \right) = -0,0011905$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_5} \right) = 0,0003623$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_6} \right) = -0,0006532$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r_7} \right) = 0,0011344$$

TABLA IV

	$\Delta \left( -\frac{S_1}{2 \sigma'_k^2} \right)$	$\Delta \left( \frac{S_2}{2 \sigma'_k} \right)$	$\Delta \left( \frac{S_3}{\sigma'_k^2} \right)$	$\Delta \left( -\frac{S_3 + S_4}{2 \sigma'_k^2} \right)$	$\Delta \left( 50 \frac{S_5}{H} \right)$
	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( \frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( -\frac{1}{r_i} \right)$	$\Delta \left( -\frac{1}{r_i} \right)$
$i = 1$	-643,8169	35,5649	272,6348	-99,4422	-167,6463
$i = 3$	1235,6329	-112,0855	712,8884	-375,6765	-77,5225
$i = 4$	413,1385	-11,9755	-312,2675	177,8440	43,4157
$i = 5$	230,8589	-63,8476	391,0800	-210,6517	48,4223
$i = 6$	-105,4005	-1,9772	114,5707	-43,1937	13,3144
$i = 7$	1105,4246	106,9637	-210,1033	93,3991	-104,3864

Dado que la corrección simultánea de astigmatismo y curvatura es prácticamente imposible, hemos optado por corregir la curvatura ya que el astigmatismo se refiere solamente a un pincel infinitesimal del rayo principal y la corrección de la curvatura es esencial en un objetivo fotográfico.

Prescindiendo de la aberración esférica hemos intentado corregir la curvatura haciendo que el resto de las aberraciones no alteren su valor. Esto nos ha llevado a modificar los radios  $r_3$ ,  $r_4$  y  $r_5$  que han pasado a valer

$$r_3 = -47,3$$

$$r_4 = 36,4$$

$$r_5 = -104,5$$

Con estos nuevos radios hemos hallado la suma correspondiente a la esférica que nos da

$$-\frac{S_1}{2 n'_k \sigma'^2_k} = 5,2993$$

extraordinariamente grande y que corregimos con el último radio.

Los radios finales son, pues,

$$\begin{aligned} r_1 &= 32 & r_2 &= -500 & r_3 &= -47,3 & r_4 &= 36,4 \\ r_5 &= 104,5 & r_6 &= 58,2 & r_7 &= -34,5 \end{aligned}$$

Con estos valores las sumas valen

$$\begin{aligned} -\frac{S_1}{2 n'_k \sigma'^2_k} &= -2,9791 \\ -\frac{S_2}{2 n'_k \sigma'_k} &= 0,4547 \\ -\frac{S_3}{n'_k \sigma'^2_k} &= -2,321 \\ -\frac{S_3 + S_4}{2 n'_k \sigma'^2_k} &= -1,258 \\ 50 - \frac{S_5}{H} &= 0,096 \end{aligned}$$

Las marchas de comprobación nos dan

$$\begin{aligned} \text{Esférica} &= 0,451 \\ \text{Coma} &= -0,033 \\ \text{Astigmatismo} &= -2,273 \\ \text{Curvatura sagital} &= -0,742 \\ \text{Distorsión} &= -0,215\% \end{aligned}$$

Mediante un compromiso entre los radios  $r_4$  y  $r_7$  se pueden disminuir todavía más estos valores.

Como puede verse, mediante sucesivas etapas de trabajo, y con marchas paraxiales, se ha logrado ir reduciendo poco a poco todas las aberraciones, lo cual nos afirma en nuestro propósito.

### CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos con nuestro trabajo, obtenemos las siguientes conclusiones:

1.<sup>a</sup> Nuestro primer propósito de dar generalidad a los resultados del trabajo indicado (1) se ha logrado plenamente ya que hemos utilizado sistemas de muy diversos tipos y con distintas condiciones de trabajo, como se indica en la página 5 y en todas las aberraciones se ha encontrado una relación lineal entre la aberración calculada trigonométricamente y la correspondiente suma de Seidel del tercer orden.

2.<sup>a</sup> Se ha estudiado el factor de normalización

$$\frac{1}{2 n'_k \sigma'_k^2}$$

que propone H. H. Hopkins para la suma  $S_1$  de Seidel encontrando que mediante él puede obtenerse la aberración esférica de cualquier sistema, si se conoce la suma  $S_1$ , y esto para todas las aberturas que no excedan de cierto límite. El parámetro que determina este límite es el ángulo de incidencia del rayo que pasa por el borde de la pupila, sin que intervengan de manera apreciable los radios de curvatura, alturas de incidencia, ni los ángulos del rayo con el eje.

3.<sup>a</sup> Se ha estudiado el valor máximo que puede tener el ángulo de incidencia en los diferentes sistemas, de modo que siga cumpliéndose con suficiente exactitud la fórmula normalizada de la aberración esférica, encontrando que en sistemas como el Tessar y Taylor en los que, según la literatura, existen órdenes elevados en la aberración esférica, este valor máximo se encuentra en los  $20^\circ$ . En los restantes sistemas estudiados pueden aumentarse las incidencias hasta  $30^\circ$ .

4.<sup>a</sup> Para valores del ángulo de incidencia comprendidos entre  $20^\circ$  y  $30^\circ$  en los sistemas en que no se cumple la fórmula mencionada se ha encontrado sin embargo que existe una relación lineal entre la aberración esférica y la suma  $S_1$  del tercer orden. Esta recta ya no es válida con carácter general, sino que depende del formato del sistema y de sus condiciones de trabajo.

Determinada esta recta mediante dos puntos para los que se calculan la aberración y la suma  $S_1$ , basta ir modificando los radios de curvatura de las superficies hasta obtener el valor de  $S_1$  al que según la recta corresponde esférica cero. El sistema queda entonces prácticamente corregido.

5.<sup>a</sup> En el coma se ha encontrado un comportamiento análogo a la aberración esférica. Multiplicando la suma  $S_2$  de Seidel por el factor

$$\frac{3}{n'_k \sigma'_k}$$

puede obtenerse el coma para cualquier sistema y diferentes condiciones de campo y abertura siempre que los ángulos de incidencia no sobrepasen de cierto límite. Al igual que en la esférica el ángulo de incidencia es el parámetro que tiene influencia decisiva, sin que influyan apreciablemente los demás (ángulo de campo, alturas, radios, etc.). El valor máximo de dicho parámetro se ha encontrado ser para el coma de  $20^\circ$  en todos los sistemas estudiados.

6.<sup>a</sup> Para ángulos de incidencia comprendidos entre  $20^\circ$  y  $30^\circ$  el coma no viene dado directamente por una fórmula válida universalmente para todo sistema; pero, como en la aberración esférica, para cada forma de sistema y condiciones de trabajo se obtiene, al variar los radios de curvatura, una relación lineal entre el coma y la suma  $S_2$ .

7.<sup>a</sup> En el astigmatismo, curvatura de imagen y distorsión se obtienen las aberraciones para cualquier sistema multiplicando las sumas  $S_3$ ,  $S_3 + S_4$  y  $S_5$  respectivamente por los factores

$$\frac{1}{n'_k \sigma'^4_k} \quad \frac{1}{2 n'_k \sigma'^2_k} \quad \frac{1}{2 H}$$

Estas fórmulas son válidas mientras los ángulos de incidencia no exceden de  $20^\circ$ .

8.<sup>a</sup> Por encima de este valor, a diferencia de la esférica y el coma, no se ha encontrado una relación lineal entre la aberración y su correspondiente suma de Seidel, a menos que se varíe únicamente un radio de curvatura.

9.<sup>a</sup> Para corregir un sistema proponemos el siguiente método:

a) Partiendo del anteproyecto realizado, de modo que las incidencias no excedan de  $30^\circ$ , se calculan las aberraciones y las sumas del tercer orden, y se multiplican éstas por sus respectivos factores de normalización. Si en el astigmatismo, curvatura y distorsión no se obtiene de esta forma un valor suficientemente parecido a la aberración ya calculada, deben reducirse las incidencias, ya que el límite de  $30^\circ$  no es un valor rigurosamente exacto.

b) Seguidamente se calculan la aberración esférica y el coma. Si las sumas  $S_1$  y  $S_2$  multiplicadas por sus correspondientes factores no nos dan el valor de la aberración, se modifican los radios de curvatura, con lo que obtenemos un nuevo valor de las sumas y de las aberraciones, y por lo tanto dos puntos que nos determinan las rectas antes mencionadas.

c) Conocidos ya los valores que han de tener las sumas para que el sistema quede corregido formamos el cuadro de valores de las derivadas de cada suma respecto a cada uno de los parámetros del sistema cuya variación sea admisible en la práctica. La forma práctica de obtener estas derivadas es mediante un cociente de incrementos. El incremento del parámetro que se varía en cada caso se puede tomar igual al 10 % de su valor cuando estamos lejos de la corrección, debiendo reducirse al 5 % en etapas posteriores.

d) El sistema de ecuaciones incrementales así formado no interesa resolverlo matemáticamente, pues de ordinario conduce a incrementos tan grandes de las variables que quedan fuera de valores admisibles. Como norma práctica se deben modificar solamente tres o cuatro parámetros eligiéndolos de tal manera, según los valores de las derivadas que el valor de las sumas de Seidel se aproxime al correspondiente a una aberración nula.

Repetiendo este procedimiento en varias etapas se llega hasta reducir las aberraciones por debajo del límite de tolerancia.

Si el número de parámetros variables es reducido, no será posible en general corregir simultáneamente todas las aberraciones; en este caso deben elegirse las que en cada caso tengan mayor importancia, renunciando a llevar las otras a cero.

METODO APROXIMADO DE CORRECCION DE SISTEMAS OPTICOS

Mediante este procedimiento hemos llevado al sistema hasta su casi total corrección únicamente con fórmulas paraxiales; bastarían ahora los retoques de afino donde, por ser ya muy pequeñas las variaciones de los parámetros, la linealidad es completa.

B I B L I O G R A F I A

- [1] J. CASAS, J. R. DE F. MONEO y J. LÁCASTA : Rev. Acad. Ciencias. Zaragoza (1961).
- [2] HOPKINS, H. H. : *Wave Theory of Aberrations*. Oxford University Press, 1959.
- [3] J. CASAS, J. R. DE F. MONEO, R. GARCÍA CRISTÓBAL : Presentado en la IX Reunión Bienal de Física y Química.
- [4] J. CASAS, F. MERINO y S. VALDÉS : An. Real Soc. F. y Q. 57 (a).
- [5] H. CHRETIEN : *Calcul des Combinaisons Optiques*. París, 1959.

## DIFUSION TERMICA EN LAS MEZCLAS MULTICOMPONENTES

P O R

J. M. SAVIRÓN y D. GONZÁLEZ

### ESTADO DE LA CUESTION

En el empleo de las columnas de Clusius-Dickel para la separación o enriquecimiento de uno de los isótopos de una mezcla multicomponente se presentan dos problemas fundamentales: De una parte, el diseño de columnas con factores de separación y condiciones de trabajo preestablecidas; de otra, el conocimiento de las distribuciones de los diversos componentes isotópicos a lo largo de la instalación diseñada.

En los referente al primedo de los aspectos citados, es evidente que el procedimiento que se utiliza para la previsión del comportamiento de una instalación, debe ser consecuencia de las teorías que describen el fenómeno. Varios han sido los autores que han dado tratamientos teóricos de diversos aspectos, del problema. Bardeen<sup>26</sup>, Debye<sup>27</sup> y Majumdar<sup>28</sup> han estudiado la aproximación al equilibrio. Jensen<sup>21</sup> y R. C. Jones<sup>20</sup> han esbozado descripciones más completas de las particularidades del mismo.

El primer análisis completo del comportamiento y operación de las columnas de difusión térmica, está contenido en el trabajo fundamental de Jones y Furry<sup>1</sup>. En él se tratan, junto con las características físicas del fenómeno, los problemas del diseño de grandes instalaciones de separación y se analizan detenidamente los tipos de operación usados en la práctica, con consideraciones relativas a la eficiencia de los mismos.

Un análisis de este tipo, encaminado solamente al diseño de grandes instalaciones de separación, ha sido realizado por Cohen<sup>29</sup> como extensión al fenómeno de difusión térmica de una formulación general válida para todos los procesos de separación<sup>30</sup>.

Los tratamientos dados parten de un modelo molecular sencillo para describir el comportamiento del gas en la columna. Jones y Furry supusieron una interacción maxwelliana para las moléculas del gas. Posteriormente sus tratamientos han sido ampliados a otros casos del modelo potencial<sup>3, 4, 5, 6</sup> y al modelo de Lennard-Jones (12-6)<sup>7</sup>.

En general, se han hallado siempre grandes discrepancias entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales. Hoy se acepta, generalmente, que el simple auxilio de la teoría es insuficiente para la predicción de la operación de la columna<sup>17</sup>, al menos dentro de un considerable margen de error<sup>16</sup>, aunque algunos aspectos de aquélla den una excelente coincidencia cualitativa con la experiencia.

Respecto a la segunda parte de los dos aspectos citados, referente al conocimiento de las distribuciones de masas en una mezcla multicomponente a lo largo de la instalación de separación, fue Clusius<sup>31</sup> quien, a partir de una sencilla teoría fenomenológica, obtuvo los primeros resultados que interpretaban las distribuciones isotópicas en una columna de separación. En principio, sus resultados eran aplicables únicamente a instalaciones en las cuales uno de los extremos estaba unido a un gran reservorio, que aseguraba en aquel punto la constancia de las concentraciones. Otro dispositivo experimental que utilizaba exclusivamente una columna de separación cerrada por ambos extremos, fue tratado, sobre las mismas bases teóricas, por Schumacher<sup>32</sup>. El estudio está extendido solamente al caso de una mezcla ternaria y da resultados concluyentes en la separación del isótopo medio. Este análisis fue posteriormente utilizado con éxito, en la fase previa de enriquecimiento para la separación del isótopo escaso  $^{21}\text{Ne}$ <sup>32</sup>.

Posteriormente<sup>33</sup>, se ha dado un método para el tratamiento de mezclas isotópicas multicomponentes, en los dos tipos de instalaciones citadas anteriormente. La formulación matemática del problema es compleja y requiere un método de cálculo numérico para la obtención de resultados. No existen, hasta el momento comprobaciones experimentales del mismo, ni se han estudiado las posibilidades del método para el enriquecimiento o separación de los isótopos intermedios en una mezcla multicomponente.

### NUESTRO PROPOSITO

Refiriéndose al primero de los aspectos citados antes, nos proponemos estudiar experimentalmente en este trabajo alguna de las particularidades de la teoría, especialmente, las relacionadas con las variaciones de la separación máxima y de la presión óptima de separación con la temperatura. El estudio de estas magnitudes está orientado a obtener de la teoría la máxima información posible, con el fin de diseñar y predecir las operaciones de las instalaciones de separación.

En la segunda parte de esta memoria se estudiará el comportamiento de las mezclas múltiples, en instalaciones de separación, dedicando especial atención al problema del enriquecimiento de isótopos de masa intermedia existentes en la mezcla isotópica. En especial, estamos interesados en la separación del  $^{84}\text{Kr}$ .

## I) ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL COMPORTAMIENTO PREDicho POR LA TEORIA PARA COLUMNAS DE CLUSIUS-DICKEL

### I-a) Introducción

En una mezcla binaria la expresión del transporte hacia la parte superior del tubo, de una de las dos especies moleculares presentes en la mezcla, viene dada por<sup>1</sup>:

$$\tau_1 = H \gamma_1 (1 - \gamma_1) - (K_c + K_d) \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \quad (101)$$

en que

$$H = H^0 h' \quad K_c = K_c^0 k_c' \quad K_d = K_d^0 k_d' \quad (102)$$

y

$$\begin{aligned} H^0 &= \frac{2 \pi}{6!} \left( \frac{\alpha \rho^3 g}{\eta} \right)_1 r_1^4 \\ K_c^0 &= \frac{2 \pi}{9!} \left( \frac{\rho^3 g^2}{\eta^2 D_{12}^{-1}} \right)_1 r_1^8 \\ K_d^0 &= 2 \pi (\rho D_{12})_1 r_1^2 \end{aligned} \quad (103)$$

donde  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $T_1$  y  $T_2$  son los radios y temperaturas de las paredes fría y caliente respectivamente,  $\gamma_1$  es la fracción molar del componente 1 y  $z$  la coordenada según el eje de la columna. Las magnitudes  $h'$ ,  $k_c'$  y  $k_d'$  o "factores de forma", dependen exclusivamente de las dimensiones gométricas de la columna y de la razón entre las temperaturas de la pared fría y caliente. Esta dependencia es diferente según sea el modelo molecular que describa el comportamiento del gas en la columna. Los referidos factores de forma son correcciones multiplicativas a los coeficientes de transporte  $H^0$ ,  $K_c^0$  y  $K_d^0$ , correspondientes al caso plano ideal de Furry y Jones<sup>2</sup>, y tienen en cuenta la cilindricidad de la columna.

La ecuación (101) describe las particularidades del fenómeno, presión óptima, tiempo de equilibrio, etc., para algunas de ellas, de manera cualitativamente correcta.

La relación entre los coeficientes de transporte, longitud de la columna y el factor máximo de separación entre las dos especies moleculares, puede deducirse sencillamente de la expresión (101) por integración a lo largo de la columna, suponiendo previamente la condición de transporte estacionario,  $\tau_1 = 0$ . Se obtiene:

$$\ln Q_{12} = - \frac{HL}{K_c + K_d} \quad (104)$$

en que, como de ordinario,  $Q_{12}$  viene definido por:

$$Q_{12} = \frac{(\gamma_1/\gamma_2)_A}{(\gamma_1/\gamma_2)_B} \quad (105)$$

donde los subíndices  $A$  y  $B$  indican que las concentraciones están medidas en los extremos superior e inferior de la columna.

De la simple inspección de las (103), puede verse inmediatamente que los coeficientes de transporte dependen de la presión según expresiones que resultan ser:

$$H = H' p^2 \quad K_c = K'_c p^4 \quad K_d = K'_d p^0 \quad (106)$$

con lo cual la dependencia del factor de separación con la presión toma la forma

$$\ln Q_{12} = \frac{ap^3}{b + p^4} \quad (107)$$

con

$$a = \frac{HL}{K_c} p^2 \quad b = \frac{K_d}{K_c} p^4 \quad (108)$$

De (107) se obtienen, sencillamente, las condiciones para la obtención de la presión óptima y el factor máximo de separación que le corresponde. En función de los coeficientes de transporte son:

$$p_{MAX} = b^{1/4} = \left( \frac{K_d}{K_c} \right)^{1/4} p \quad (109a)$$

$$\ln \bar{Q}_{MAX} = \frac{a}{2b^{1/2}} = \frac{HL}{2(K_d K_c)^{1/2}} \quad (109b)$$

La sustitución de las expresiones (102) y (103) en las (109a) y (109b) permiten la obtención de las expresiones que utilizaremos en la práctica:

$$p_{MAX}^2 = \frac{72\sqrt{70}}{g} \cdot \frac{1}{n_1^3} \cdot \left( \frac{\eta D_{12}}{\rho} p^2 \right)_1 \sqrt{\frac{k'_d}{k'_c}} \quad (110a)$$

$$\ln \bar{Q}_{N_{MAX}} = \frac{\sqrt{91}}{2 \cdot 6!} \cdot \frac{\alpha_0 L}{r_1} \cdot \frac{h'}{\sqrt{k'_c k'_d}} \quad (110b)$$

Puede observarse que las dos magnitudes anteriores pueden obtenerse directamente a partir de un conocimiento experimental o teórico de los coeficientes de viscosidad,  $\eta$ , difusión ordinaria,  $D_{12}$ , densidad del gas,  $\rho$ , y de la constante  $\alpha_0$  de difusión térmica. Los subíndices 1 en los paréntesis indican que las magnitudes que se hallan en su interior deben evaluarse a la temperatura de la pared fría.

Los factores de forma, que como habíamos indicado dependen de las relaciones  $r_1/r_2$ ,  $T_2/T_1$  y del modelo molecular empleado para la descripción del gas, se calculan teóricamente.

El modelo de interacción potencial  $F = kr^{-v}$  es particularmente apropiado para el cálculo de los factores de forma. Estos han sido calculados<sup>2, 3, 4, 5, 6</sup> en los casos límites  $n = 1$ ,  $n = 0,5$  y para algunos índices de viscosidad intermedios.

También existen tabulaciones de las citadas magnitudes para el modelo Lennard-Jones (12-6)<sup>7</sup>.

### I-b) Montaje experimental

La columna utilizada, construida en nuestros laboratorios, es de hilo caliente, siendo sus características:

Longitud de la columna	... ... ... ...	3.000 mm.
Diámetro del tubo interior	... ... ...	98 mm.
Diámetro del hilo	... ... ...	0.4 mm.
Hilo empleado	... ... ...	Nicrothal
Vidrio Pyrex		

El hilo se mantiene a la temperatura de trabajo mediante caldeo con corriente eléctrica estabilizada en alterna, rectificada y filtrada.

La temperatura del hilo se calcula por su dilatación<sup>8</sup>, a partir de la expresión:

$$L = L_{20} (1 + 14'06 \times 10^{-6}\theta + 3'944 \times 10^{-9}\theta^2) \quad (111)$$

El tubo interior, la pared fría, se mantiene a una temperatura de 292°K, refrigerando con agua filtrada en circuito cerrado.

El resto de detalles de construcción puede apreciarse en la Fig. 1.

La instalación completa lleva un sistema convencional de alto vacío, con lo que se consigue trabajar en óptimas condiciones de pureza de gases.

El manejo del gas se realiza mediante nitrógeno líquido, CO<sub>2</sub> sólido y carbón activo. Un esquema de la instalación se muestra en la Fig. 2.

El gas utilizado, kripton natural, es de pureza espectroscópica, suministrado por "L'Air Liquide". Su composición isotópica es:

<sup>78</sup> Kr	<sup>80</sup> Kr	<sup>82</sup> Kr	<sup>83</sup> Kr	<sup>84</sup> Kr	<sup>86</sup> Kr
0,35	2,27	11,56	11,55	56,90	17,37

### I-c) Método de trabajo

En la determinación experimental de la presión y factor de separación máximos, para las diferentes temperaturas del hilo, hemos procedido de la siguiente manera:

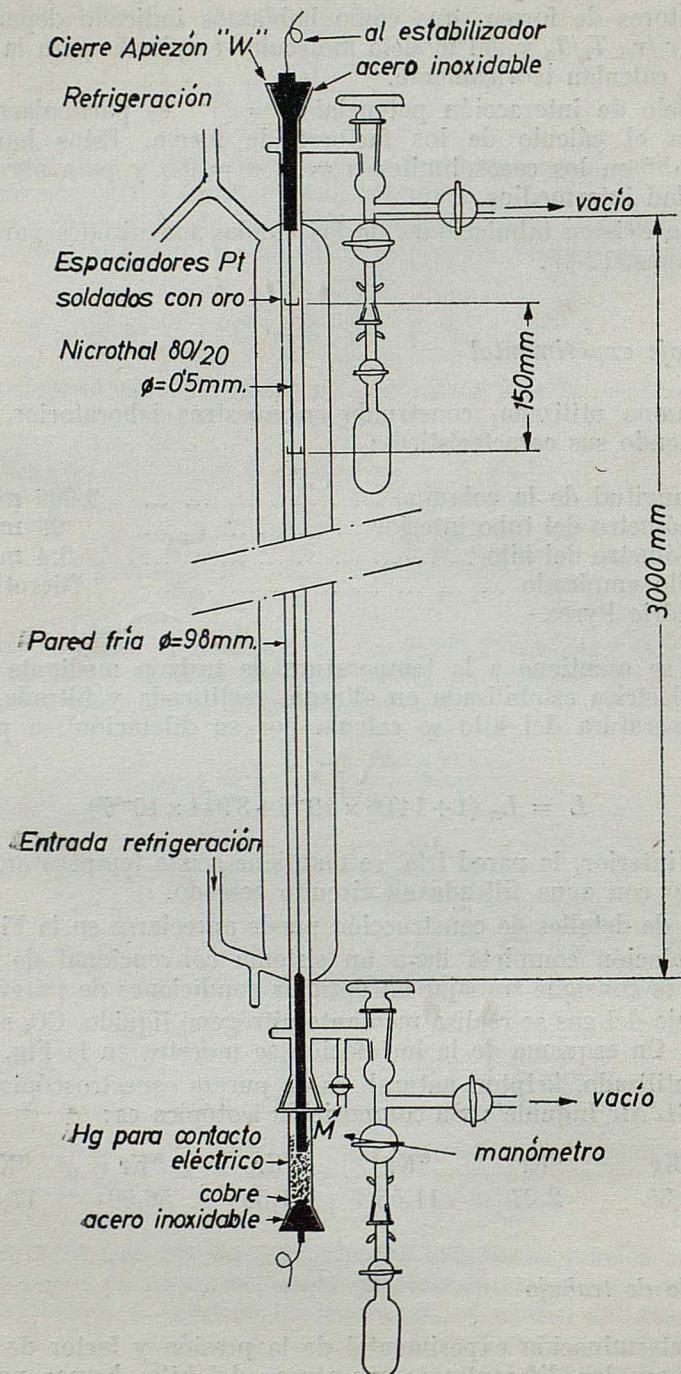


FIG. 1

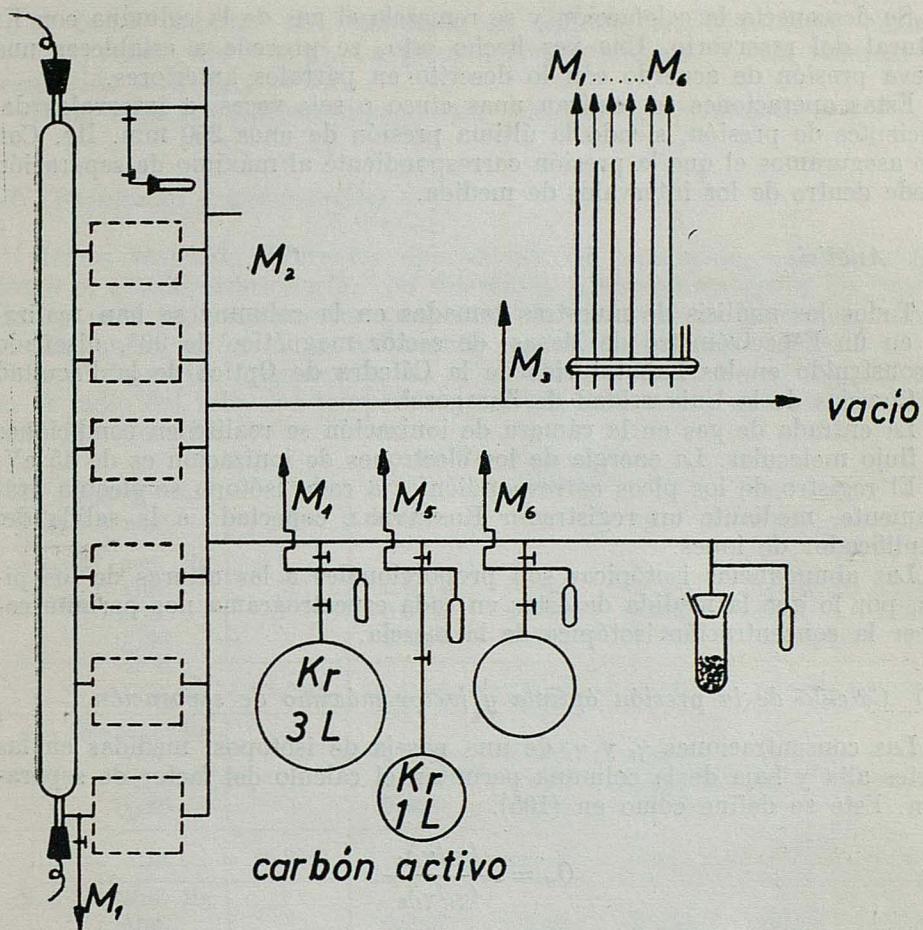


FIG. 2. — Esquema de la instalación, de alto vacío, que hemos empleado en todas las operaciones que se han realizado en este trabajo.

Los rectángulos señalados por líneas punteadas indican las tomas de muestras que se han utilizado en la parte II, apartado II-b).

Se llena la columna con Kr natural, conectándose a continuación la calefacción y la refrigeración. Se ajusta aquélla hasta que se alcance la temperatura de trabajo. Hecho esto, se procura establecer una presión de 600 mm. Hg, aproximadamente, en caliente, superior a la prevista para el máximo de separación. Transcurridos quince minutos se cierra la llave del manómetro y se deja la columna en operación durante veinticuatro horas. El tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario es de dieciséis horas y dejamos un margen de seguridad de ocho horas. Al cabo de este tiempo se sacan muestras de los extremos superior e inferior de la columna. Ambas extracciones se realizan simultáneamente.

Se desconecta la calefacción y se remezcla el gas de la columna con Kr natural del reservorio. Una vez hecho esto, se procede a establecer una nueva presión de acuerdo con lo descrito en párrafos anteriores.

Estas operaciones se realizan unas cinco o seis veces, a intervalos decrecientes de presión, siendo la última presión de unos 200 mm. Hg. Con ello aseguramos el que la presión correspondiente al máximo de separación quede dentro de los intervalos de medida.

#### I-d) Análisis

Todos los análisis de muestras tomadas en la columna se han realizado en un Espectrómetro de Masas, de sector magnético de 90°, diseñado y construido en los Laboratorios de la Cátedra de Óptica de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza<sup>9</sup>.

La entrada de gas en la cámara de ionización se realiza en condiciones de flujo molecular. La energía de los electrones de ionización es de 45 eV.

El registro de los picos correspondientes a cada isótopo se efectúa gráficamente, mediante un registrador HONEYWELL conectado a la salida del amplificador de iones.

Las abundancias isotópicas son proporcionales a las alturas de los picos, por lo que la medida de éstos en cada espectrograma nos permite conocer la concentración isotópica de la mezcla.

#### I-e) Cálculo de la presión óptima y factor máximo de separación

Las concentraciones  $\gamma_i$  y  $\gamma_j$  de una pareja de isótopos, medidas en las partes alta y baja de la columna permiten el cálculo del factor de separación. Este se define como en (105).

$$Q_{ij} = \frac{(\gamma_i/\gamma_j)_A}{(\gamma_i/\gamma_j)_B}$$

Según (203)  $\ln \bar{Q}_N$ , definido según:

$$\ln \bar{Q}_N = \frac{m_i + m_j}{m_i - m_j} \ln \bar{Q}_{ij}$$

es constante para cualquier  $i, j$  ( $i \neq j$ ). Esta constancia nos permite juzgar la bondad del análisis espectrométrico y de la muestra, pues su violación indica la existencia de errores producidos por inestabilidad en los equipos o cualquier anormalidad surgida durante el proceso de separación. En especial, hemos observado una falta de constancia en el  $\ln \bar{Q}_N$ , cuando, por alguna causa, había entrado aire en la columna de separación.

Se han rechazado todas las muestras en las que los  $\ln \bar{Q}_N$ , para cada pareja de isótopos, han discrepado entre sí en más de un 1 %.

Si representamos  $p^2/\ln \bar{Q}_N$  en ordenadas y  $p^4$  (atm.<sup>4</sup>) en abcisas (107), es una recta para cada temperatura del hilo. Los valores de  $a$  y  $b$  se calculan ajustando la recta por mínimos cuadrados.

DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

El factor máximo de separación se obtiene, analíticamente, cuando  $b = p^4$ , resultando (109 b). La presión correspondiente a este máximo de separación será  $p_{MAX} = b^{1/4}$ .

Para todas las temperaturas hemos calculado los errores de  $a$  y  $b$ .

**I-f) Resultados experimentales**

Hemos realizado diferentes operaciones de separación siempre alcanzando el estado estacionario, con diferentes temperaturas (para un mismo hilo) y para cada temperatura una serie de muestras en un amplio rango de presiones, según el procedimiento operatorio indicado en I-c).

A continuación exponemos los resultados experimentales, especificando el radio del hilo, las temperaturas y las presiones a que se han realizado las muestras.

TABLA I

$T_2 = 600^\circ \text{ K}$	$r_2 = 0.20 \text{ mm.}$	${}^{78}\text{Kr}$	${}^{80}\text{Kr}$	${}^{82}\text{Kr}$	${}^{83}\text{Kr}$	${}^{84}\text{Kr}$	${}^{86}\text{Kr}$
$p = 427 \text{ mm. Hg}$			0.0314	0.1360	0.1250	0.5629	0.1447
Alto			0.0180	0.1037	0.1099	0.5747	0.1938
Bajo			2.3397	1.7571	1.5230	1.3115	
$Q_i/86$							
$\ln \bar{Q}_N = 23.4848$			$p^2 \text{ (atm)} / \ln \bar{Q}_N = 0.0137$		$p^4 \text{ (atm)} = 0.099$		
$p = 356 \text{ mm. Hg}$			0.0327	0.1387	0.1260	0.5624	0.1402
Alto			0.0177	0.1030	0.1098	0.5744	0.1950
Bajo			2.5699	1.8735	1.5958	1.3619	
$Q_i/86$							
$\ln \bar{Q}_N = 26.2669$			$p^2 \text{ (atm)} / \ln \bar{Q}_N = 0.0084$		$p^4 \text{ (atm)} = 0.048$		
$p = 342 \text{ mm. Hg}$			0.0327	0.1392	0.1259	0.5626	0.1396
Alto			0.0172	0.1022	0.1084	0.5747	0.1975
Bajo			2.6883	1.9262	1.6423	1.3847	
$Q_i/86$							
$\ln \bar{Q}_N = 27.6264$			$p^2 \text{ (atm)} / \ln \bar{Q}_N = 0.0073$		$p^4 \text{ (atm)} = 0.041$		
$p = 321 \text{ mm. Hg}$			0.0311	0.1362	0.1245	0.5642	0.1441
Alto			0.0164	0.0991	0.1082	0.5743	0.2021
Bajo			2.6635	1.9271	1.6140	1.3779	
$Q_i/86$							
$\ln \bar{Q}_N = 27.2173$			$p^2 \text{ (atm)} / \ln \bar{Q}_N = 0.0065$		$p^4 \text{ (atm)} = 0.032$		
$p = 200 \text{ mm. Hg}$			0.0285	0.1292	0.1207	0.5697	0.1519
Alto			0.0180	0.1035	0.1078	0.5773	0.1934
Bajo			2.0139	1.5880	1.4245	1.2557	
$Q_i/86$							
$\ln \bar{Q}_N = 19.5197$			$p^2 \text{ (atm)} / \ln \bar{Q}_N = 0.0036$		$p^4 \text{ (atm)} = 0.005$		

$$a = 10.2732 \pm 0.78$$

$$b = 0.0335 \pm 0.007$$

$$\ln \bar{Q}_{N\max} = 28.0777$$

$$p_{\max} = 0.428$$

TABLA II

$T_2 = 700$ K	$^{78}\text{Kr}$	$^{80}\text{Kr}$	$^{82}\text{Kr}$	$^{83}\text{Kr}$	$^{84}\text{Kr}$	$^{86}\text{Kr}$
$r_2 = 0.20$ mm.						
$p = 431$ mm. Hg						
Alto		0.0346	0.1435	0.1276	0.5602	0.1340
Bajo		0.0156	0.0973	0.1068	0.5734	0.2069
$Q_i/86$		3.4308	2.2775	1.8467	1.5090	
$\ln \bar{Q}_N = 34.5513$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0092$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.103$	
$p = 400$ mm. Hg						
Alto		0.0357	0.1452	0.1281	0.5591	0.1318
Bajo		0.0148	0.0952	0.1058	0.5745	0.2097
$Q_i/86$		3.8359	2.4274	1.9258	1.5485	
$\ln \bar{Q}_N = 37.1318$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0075$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.077$	
$p = 360$ mm. Hg						
Alto		0.0365	0.1469	0.1285	0.5596	0.1285
Bajo		0.0144	0.0941	0.1049	0.5753	0.2114
$Q_i/86$		4.1750	2.5676	2.0154	1.6003	
$\ln \bar{Q}_N = 39.6476$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0056$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.050$	
$p = 314$ mm. Hg						
Alto		0.0373	0.1478	0.1289	0.5587	0.1272
Bajo		0.0142	0.0936	0.1044	0.5745	0.2134
$Q_i/86$		4.3946	2.6511	2.0716	1.6316	
$\ln \bar{Q}_N = 41.1365$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0041$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.029$	
$p = 200$ mm. Hg						
Alto		0.0357	0.1497	0.1267	0.5559	0.1319
Bajo		0.0181	0.1048	0.1102	0.5737	0.1931
$Q_i/86$		2.8955	2.0915	1.6836	1.4192	
$\ln \bar{Q}_N = 29.8780$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0023$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.005$	
$a = 14.3119 \pm 0.14$		$b = 0.0293 \pm 0.009$			$\ln \bar{Q}_{N\max} = 41.8247$	
					$p_{\max} = 0.414$	

TABLA III

$T_2 = 800^\circ \text{ K}$	${}^{78}\text{Kr}$	${}^{80}\text{Kr}$	${}^{82}\text{Kr}$	${}^{83}\text{Kr}$	${}^{84}\text{Kr}$	${}^{86}\text{Kr}$
$r_2 = 0.20 \text{ mm.}$						
$p = 450 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0374	0.1486	0.1299	0.5575	0.1265	
Bajo	0.01339	0.0921	0.1040	0.5761	0.2138	
$Q_i/86$	4.5561	2.7268	2.1107	1.6359		
$\ln \bar{Q}_N = 42.0021$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0084$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.122$	
$p = 429 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0378	0.1502	0.1303	0.5572	0.1244	
Bajo	0.0134	0.0905	0.1030	0.5773	0.2158	
$Q_i/86$	4.8805	2.8799	2.1939	1.6743		
$\ln \bar{Q}_N = 44.0891$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0073$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.102$	
$p = 357 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0410	0.1561	0.1322	0.5537	0.1169	
Bajo	0.0126	0.0889	0.1027	0.5775	0.2182	
$Q_i/86$	6.0773	3.2735	2.4020	1.7891		
$\ln \bar{Q}_N = 49.6351$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0045$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.049$	
$p = 312 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0418	0.1577	0.1327	0.5523	0.1155	
Bajo	0.0126	0.0899	0.1026	0.5744	0.2204	
$Q_i/86$	6.3174	3.3461	2.4650	1.8341		
$\ln \bar{Q}_N = 51.0263$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0033$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.028$	
$p = 204 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0393	0.1499	0.1302	0.5558	0.1258	
Bajo	0.0168	0.1016	0.1097	0.5735	0.1983	
$Q_i/86$	3.6000	2.3248	1.8715	1.5281		
$\ln \bar{Q}_N = 35.5555$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0020$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.005$	
$a = 18.4074 \pm 0.14$		$b = 0.3214 \pm 0.008$			$\ln \bar{Q}_{N\max} = 51.3373$	
					$p_{\max} = 0.423$	

TABLA IV

$T_2 = 900^\circ \text{ K}$	$^{78}\text{Kr}$	$^{80}\text{Kr}$	$^{82}\text{Kr}$	$^{83}\text{Kr}$	$^{84}\text{Kr}$	$^{86}\text{Kr}$
$r_2 = 0.20 \text{ mm.}$						
$p = 445 \text{ mm. Hg}$		0.0402	0.1550	0.1332	0.5535	0.1180
Alto		0.0118	0.0863	0.1017	0.5736	0.2265
Bajo		6.5154	3.4448	2.5122	1.8511	
$Q_i/86$						
$\ln \bar{Q}_N = 52.0085$						
			$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0065$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.118$
$p = 384 \text{ mm. Hg}$		0.0437	0.1614	0.1349	0.5487	0.1112
Alto		0.0109	0.0835	0.0999	0.4753	0.2304
Bajo		8.2867	4.0048	2.7994	1.9764	
$Q_i/86$						
$\ln \bar{Q}_N = 58.1702$						
			$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0044$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.065$
$p = 329 \text{ mm. Hg}$		0.0447	0.1629	0.1352	0.5481	0.1091
Alto		0.0190	0.0834	0.0999	0.5747	0.2311
Bajo		8.6717	4.1391	2.8703	2.0207	
$Q_i/86$						
$\ln \bar{Q}_N = 59.6538$						
			$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0031$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.035$
$p = 270 \text{ mm. Hg}$		0.0431	0.1615	0.1355	0.5488	0.1110
Alto		0.0115	0.0868	0.1020	0.5708	0.2288
Bajo		7.7313	3.8361	2.7390	1.9822	
$Q_i/86$						
$\ln \bar{Q}_N = 56.9927$						
			$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0022$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.016$
$p = 198 \text{ mm. Hg}$		0.0392	0.1521	0.1309	0.5547	0.1231
Alto		0.0161	0.0995	0.1081	0.5743	
Bajo		4.0009	2.5061	1.9854	1.5840	
$Q_i/86$						
$\ln \bar{Q}_N = 38.6694$						
			$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0017$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.005$
$a = 23.2798 \pm 0.36$		$b = 0.3609 \pm 0.014$	$\ln \bar{Q}_{N\max} = 61.2668$	$p_{\max} = 0.436$		

## DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

TABLA V

$T_2 = 1020^\circ \text{ K}$		$^{80}\text{Kr}$	$^{82}\text{Kr}$	$^{83}\text{Kr}$	$^{84}\text{Kr}$	$^{86}\text{Kr}$
$r_2 = 0.20 \text{ mm.}$						
$p = 396 \text{ mm. Hg}$						
Alto		0.0470	0.1686	0.1367	0.5467	0.1010
Bajo		0.0094	0.0784	0.0968	0.5734	0.2420
$Q_i/86$		11.9428	5.1399	3.3718		
$\ln \bar{Q}_N = 68.9398$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0039$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.521$	
$p = 378 \text{ mm. Hg}$						
Alto		0.0474	0.1696	0.1379	0.5455	0.0995
Bajo		0.0092	0.0769	0.0960	0.5785	0.2394
$Q_i/86$		12.3608	5.2869	3.4354	2.2622	
$\ln \bar{Q}_N = 69.6038$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0036$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.061$	
$p = 307 \text{ mm. Hg}$						
Alto			0.1691	0.1376	0.5463	0.0996
Bajo			0.0779	0.0974	0.5791	0.2322
$Q_i/86$			5.0655	3.2955	2.2003	
$\ln \bar{Q}_N = 67.5523$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0024$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.027$	
$p = 267 \text{ mm. Hg}$						
Alto			0.1594	0.1339	0.5517	0.1129
Bajo			0.0789	0.0958	0.5724	0.2430
$Q_i/86$			4.3472	3.0084	2.0751	
$\ln \bar{Q}_N = 61.7840$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0020$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.015$	
$p = 136 \text{ mm. Hg}$						
Alto		0.0325	0.1387	0.1248	0.5605	0.1434
Bajo		0.0195	0.1091	0.1106	0.5722	0.1887
$Q_i/86$		2.2007	1.6735	1.4855	1.2889	
$\ln \bar{Q}_N = 21.8327$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0015$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.001$	
$a = 29.8108 \pm 0.03$		$b = 0.446 \pm 0.000$		$\ln \bar{Q}_{N\max} = 70.5314$	$p_{\max} = 0.459$	

Todos estos resultados se hallan representados en las Figs. 4 y 5.

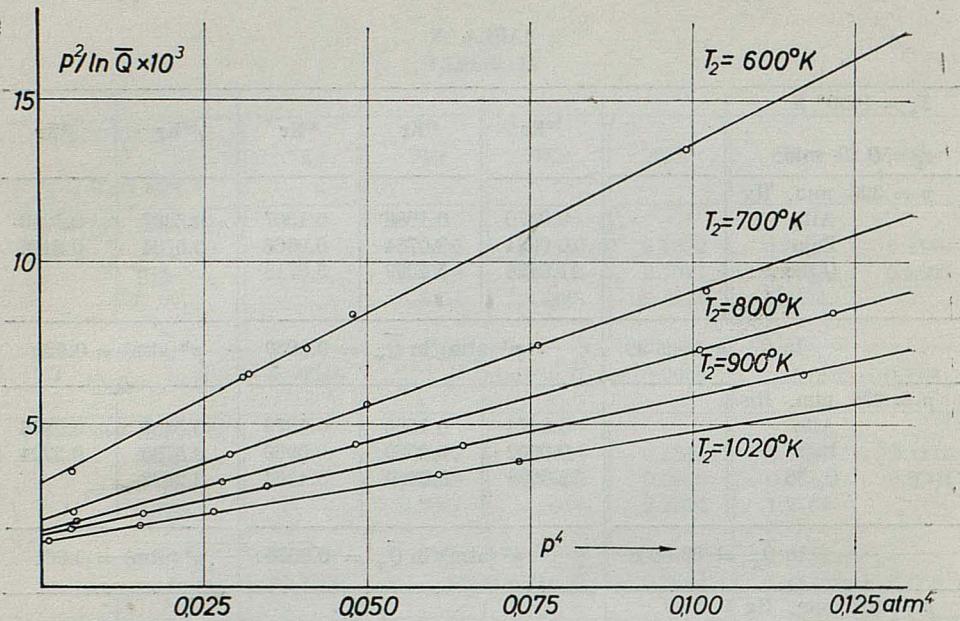


FIG. 4

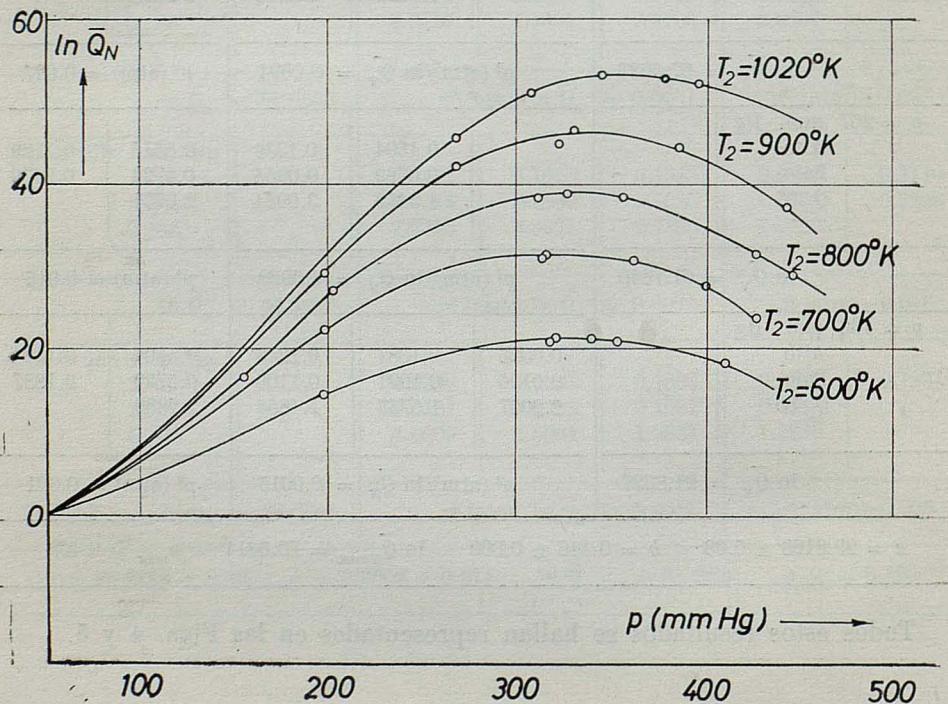


FIG. 5  
— 216 —

## I-g) Comparación con la teoría

Hemos calculado teóricamente las expresiones

$$h'/(k_c' k_d')^{1/2} \quad (k_d'/k_c')^{1/2} \quad (112)$$

responsables de la presión óptima y factor máximo de separación, según (110), para los modelos de Lennard-Jones (12-6) y para diversos índices de viscosidad en el modelo potencial. Estas expresiones se encuentran representadas en función de la temperatura,  $T_2$ , del hilo caliente, para la relación  $r_1/r_2 = 24.5$  y para  $T_1 = 292^\circ\text{K}$ . Los resultados aparecen en las figuras 6 y 7.

Las mismas expresiones se han calculado a partir de los datos experimentales, usando las (110) con los coeficientes de transporte del gas dados en la Tabla VI:

TABLA VI.

$\eta \times 10^7$ poises	$D_{12} \times 10^2$ cm <sup>2</sup> /sg	$\eta \times 10^5$ gr/cm <sup>3</sup>	$10^2 \alpha_0$
2461	9.310	347.3	23.0

Todos estos valores se hallan calculados a 1 atm.

En el cálculo de las temperaturas reducidas  $T_1^* = kT_1/\epsilon$ , hemos usado los parámetros<sup>10</sup>:

$$\epsilon/k = 162^\circ\text{K} \quad \sigma = 3.734 \text{ \AA}$$

La imprecisión en el conocimiento de  $\alpha_0$  para el Kr, nos ha llevado a utilizar un dato teórico, obtenido con los parámetros anteriores y utilizando el método de Hirschfelder<sup>11</sup> y la aproximación de Kihara<sup>12</sup>.

## I-h) Discusión de los resultados

Por simple inspección de las Figs. 6 y 7 puede verse la consistencia entre las predicciones teóricas, basadas en el modelo de Lennard-Jones (12-6)<sup>7</sup> y en el modelo de interacción potencial, para la predicción de la presión óptima de separación.

Por el contrario, no existe tal consistencia entre las predicciones de ambas teorías para el caso del máximo factor de separación. Esto era de esperar, ya que las dos teorías parten de una dependencia del factor de difusión térmica,  $\alpha_0$ , con la temperatura, distinta en ambos casos.

No obstante, puede evitarse tal dificultad, en el caso del modelo de interacción potencial, eligiendo un valor de  $\alpha_0$  no en la pared fría, sino su valor promedio entre las temperaturas de la pared fría y caliente.

Análogamente, puede observarse una excelente coincidencia entre los valores experimentales de la presión óptima de separación y los predichos teóricamente, usando para el índice de viscosidad del modelo de interacción-potencial el valor  $n = 0.703$ , como puede verse en la Fig. 8.

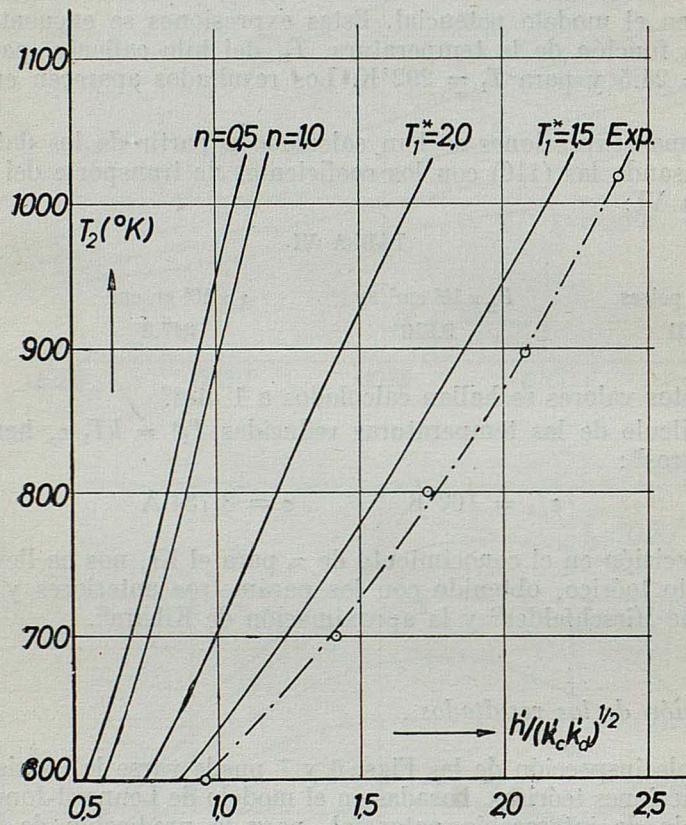


FIG. 6

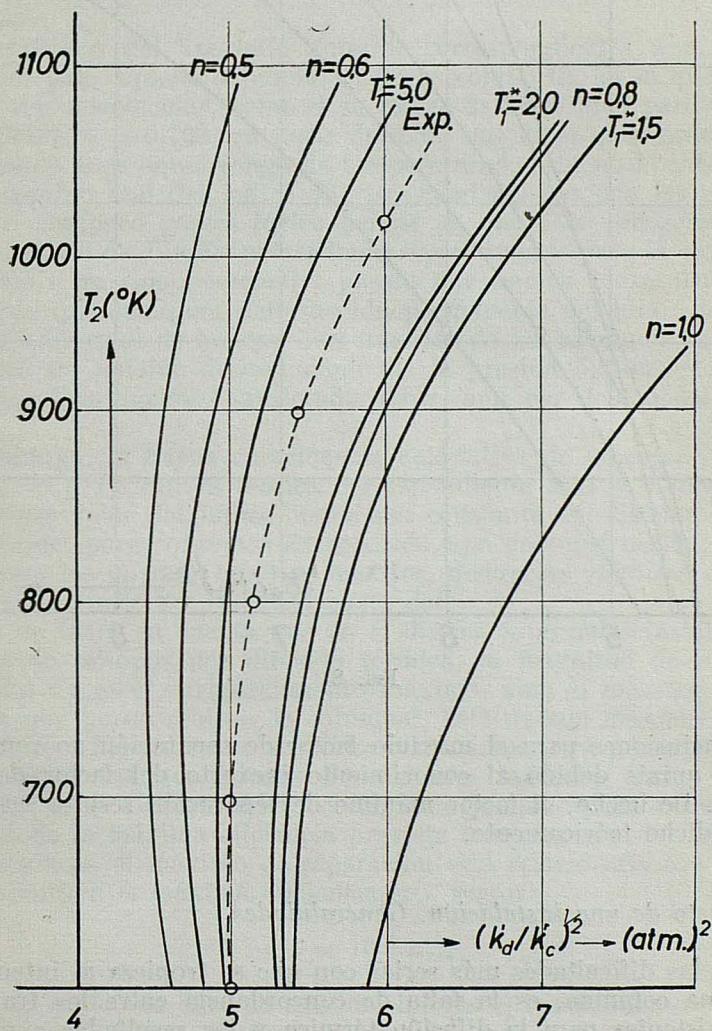


FIG. 7

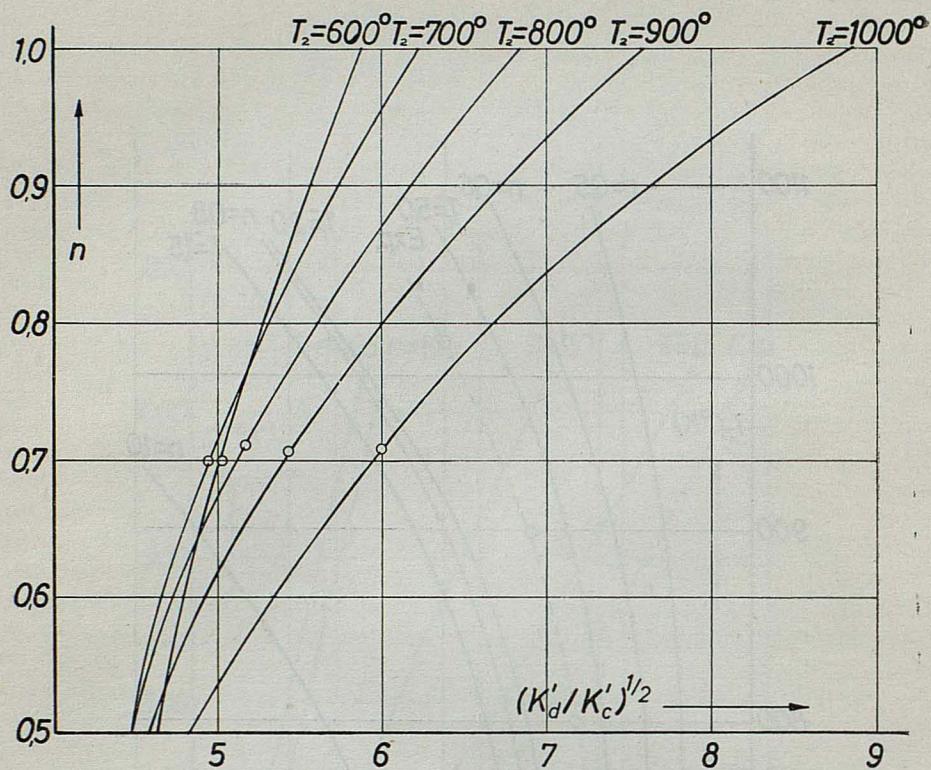


FIG. 8

Las conclusiones para el máximo factor de separación no son tan concluyentes, quizás debido al conocimiento inexacto del factor de difusión térmica<sup>13, 14</sup>. De hecho, el factor máximo de separación resulta ser más alto que el predicho teóricamente.

#### I-i) Proyecto de una instalación. Generalidades

Una de las dificultades más serias con que se tropieza al intentar el diseño de una columna, es la falta de concordancia entre los tratamientos teóricos existentes para la difusión térmica y los resultados experimentales. En principio, resulta difícil predecir, "a priori", el comportamiento experimental de una columna, al menos dentro de un tolerable margen de error.

No obstante, el método que permite realizar el diseño, debe ser una consecuencia de las teorías que describan el funcionamiento de las citadas columnas. Todas las concordancias cualitativas teoría-experiencia descritas en el apartado anterior son aceptables, aunque el acuerdo cuantitativo sea, desde luego, muy pobre. El simple procedimiento de partir de los datos de

construcción, con datos teóricos y valores medidos o calculados del factor de difusión térmica, hemos indicado ya que no permite el diseño de una instalación<sup>15, 16, 17</sup>; no obstante, aunque esto ocurra en el aspecto cuantitativo, no creemos que la teoría se halle desprovista de utilidad: Sus predicciones pueden ser muy útiles en el diseño, acompañadas de ciertos datos experimentales.

Los resultados del apartado anterior correspondientes a  $p_{max}$  parecen indicar que, para aquella columna, el Kr se comporta, en lo que se refiere a la interacción molecular, como si su índice de viscosidad para un modelo potencial fuera  $n = 0.703$ , en lugar de 0.88, que es el que verdaderamente le corresponde para aquel rango de temperatura<sup>18</sup>. Esto no lo interpretamos como un cambio real del índice de viscosidad del gas con las condiciones de trabajo. Tampoco parece lógico pensar en que debe escogerse un valor de  $n$ , en el rango de  $T_2$  a  $T_1$ , promediado especialmente para la experiencia<sup>19</sup>. Esta hipótesis ha sido desechada, puesto que hemos comprobado experimentalmente que cualquier deformación permanente del hilo o bien un calentamiento anormal de los espacios muertos de los extremos de la columna, produce un notable decrecimiento de la presión óptima, y por consiguiente una disminución considerable de  $n$ , aún por debajo del valor mínimo 0.5.

Sin embargo, la buena coincidencia cualitativa de la curva experimental de  $p_{max} = f(T_2)$  con la teórica correspondiente a  $n = 0.703$ , nos hace pensar en ese valor del índice como una constante del sistema de trabajo y suponer que, para columnas de parecido tipo de construcción, con aproximadamente los mismos espacios muertos, distancias idénticas entre espaciadores, etc., puede ser utilizado como dato.

Hemos de tener en cuenta que en el diseño de grandes instalaciones de separación de isótopos por difusión térmica, la magnitud de importancia fundamental no es el enriquecimiento máximo, sino el máximo trabajo de separación que pueda realizar la columna<sup>1</sup>. Este trabajo máximo es proporcional a  $H^2/(K_c + K_d)$  y alcanza sus valores máximos para presiones tan altas como permitan las condiciones de régimen laminar. Para valores de  $K_c = 10 K_d$ , sigue manteniéndose el régimen laminar y entonces se alcanza el 90 % de la máxima eficiencia prevista teóricamente.

La presión en el máximo de separación está relacionada con la presión correspondiente a la máxima eficiencia,  $p_{ef}$ , según:

$$p_{ef} = 10^{1/4} p_{max}$$

Es por lo tanto, un dato de máximo interés el conocimiento de la  $p_{ef}$  de trabajo en la columna a diseñar.

Debe tenerse en cuenta que, en general conviene no utilizar en instalaciones de vidrio presiones que exceden a la atmosférica.

#### I-j) Proyecto de la columna

Para el proyecto de una columna de separación de isótopos de Kr debe tenerse en cuenta que, dadas las masas relativamente altas de los mismos,

son de esperar valores bajos del factor de difusión térmica y por lo tanto será necesario utilizar temperaturas tan altas como el hilo permita. La temperatura  $T_1$  de la pared fría, correspondiente al agua de refrigeración, es dato fijado por las condiciones de nuestra instalación de reciclado.

En el diseño de la columna se decidió el empleo de hilo de aleación Pt — Ir (80 % — 20 %) con lo que hemos fijado en 1200°K la temperatura del hilo caliente y  $2r_2 = 0.4 \text{ mm}^*$ .

Con estos datos hemos representado la expresión:

$$p_{\max}^2 = C \frac{1}{r_1^3} \left( \frac{k_d'}{k_c'} \right)^{1/2} \quad (113)$$

$$C = \frac{70 \sqrt{72}}{g} \left[ \frac{\eta D_{12}}{\rho} p^2 \right]_1$$

para diferentes  $n$  y  $p_{\max}$  en función de  $r_1$ , como se expone en la Fig. 9. Con los valores de las constantes de transporte para el Kr dadas en la Tabla VI resulta un valor de  $C = 0.414 \times 10^{-2}$ .

Como valor de  $p_{\max}$  hemos elegido 500 mm. Hg, que nos da una  $p_{ef}$  de aproximadamente 700 mm. Hg, suficientemente alta, pero sin exceder a la presión atmosférica. Por tanto, sólo queda por determinar un valor de  $r_1$  que satisfaga a (113).

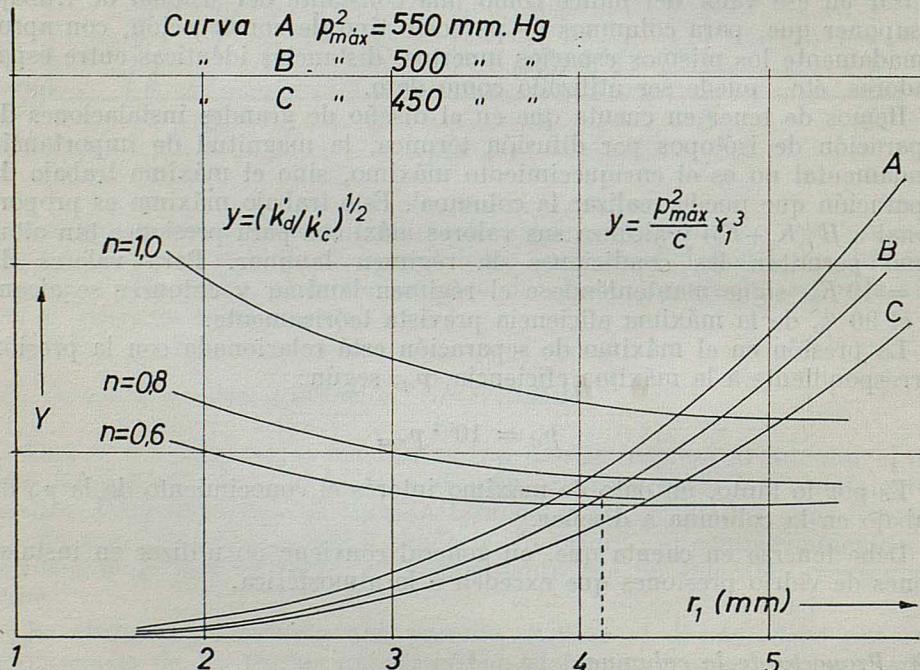


FIG. 9

\* Para el cálculo de la temperatura del hilo por su dilatación véase el apartado II-b).

DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

Mediante un sencillo procedimiento gráfico obtenemos para  $r_1 = 4.1$  mm.  
Una longitud de 2.80 m. completa las características de la columna que  
especificamos, en conjunto, a continuación:

$$L = 2.80 \text{ m.} \quad r_1 = 4.1 \text{ mm.} \quad r_2 = 0.2 \text{ mm.} \quad T_1 = 292^\circ\text{K} \quad T_2 = 1200^\circ\text{K}$$

I-k) *Comprobación experimental*

Construida la columna, según el proyecto anterior, y utilizando análogos métodos experimentales de análisis de isótopos y de cálculo de las presiones óptimas y factores máximos de separación, a los indicados en los apartados I-c, d, e), se puso en funcionamiento a las temperaturas de 1000° y 1100°K.

Los resultados experimentales obtenidos fueron:

TABLA VII

$T_2 = 1000^\circ\text{K}$ $r_2 = 0.20 \text{ mm.}$	$^{78}\text{Kr}$	$^{80}\text{Kr}$	$^{82}\text{Kr}$	$^{83}\text{Kr}$	$^{84}\text{Kr}$	$^{86}\text{Kr}$
$p = 545 \text{ mm. Mg.}$						
Alto	0.0083	0.0457	0.1690	0.1375	0.5417	0.0978
Bajo	0.0005	0.0077	0.0725	0.0930	0.5749	0.2514
$Q_i/86$	41.579	15.279	5.9883	3.7966	2.4202	
$\ln \bar{Q}_N = 75.4602$		$p^2 \text{ (atm)} / \ln \bar{Q}_N = 0.0068$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.263$	
$p = 433 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0093	0.0463	0.1711	0.1390	0.5418	0.0925
Bajo	0.0012	0.0075	0.0722	0.0938	0.5762	0.2491
$Q_i/86$	21.370	16.642	6.3895	3.9940	2.5334	
$\ln \bar{Q}_N = 75.0974$		$p^2 \text{ (atm)} / \ln \bar{Q}_N = 0.0041$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.105$	
$p = 333 \text{ mm. Hg}$						
Bajo	0.0097	0.0482	0.1753	0.1403	0.5361	0.0904
Bajo	0.0014	0.0106	0.0857	0.1028	0.5846	0.2148
$Q_i/86$	16.067	10.794	4.8559	3.2414	2.1784	
$\ln \bar{Q}_N = 64.3078$		$p^2 \text{ (atm)} / \ln \bar{Q}_N = 0.0029$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.037$	
$p = 309 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0094	0.0460	0.1711	0.1389	0.5412	0.0934
Bajo	0.0016	0.0117	0.0899	0.1054	0.5854	0.2060
$Q_i/86$	12.766	8.6954	4.1945	2.9079	2.0387	
$\ln \bar{Q}_N = 58.5886$		$p^2 \text{ (atm)} / \ln \bar{Q}_N = 0.0027$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.027$	
$a = 57.6053 \pm 0.12$		$b = 0.1304 \pm 0.001$			$\ln \bar{Q}_{max} = 79.7622$	
					$p_{max} = 0.601$	

TABLA VIII

$T_2 = 1100^\circ\text{K}$	$r_2 = 0.20 \text{ mm.}$	$^{78}\text{Kr}$	$^{80}\text{Kr}$	$^{82}\text{Kr}$	$^{83}\text{Kr}$	$^{84}\text{Kr}$	$^{86}\text{Kr}$
$p = 560 \text{ mm. Hg}$							
Bajo	0.0112	0.0480	0.1729	0.1391	0.5371	0.0917	
Alto	0.0015	0.0064	0.0656	0.0890	0.5704	0.2670	
$Q_i/86$	21.600	21.943	7.6689	4.5488	2.7418		
$\ln \bar{Q}_N = 81.0136$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0063$				$p^4 \text{ (atm)} = 0.295$	
$p = 512 \text{ mm. Hg}$							
Alto	0.0117	0.0503	0.1780	0.1411	0.5321	0.0867	
Bajo	0.0023	0.0063	0.0660	0.0892	0.5727	0.2633	
$Q_i/86$	13.829	24.238	8.1720	4.7942	2.8156		
$\ln \bar{Q}_N = 81.3131$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0052$				$p^4 \text{ (atm)} = 0.206$	
$p = 432 \text{ mm. Hg}$							
Alto	0.0111	0.0529	0.1836	0.1426	0.5275	0.0821	
Bajo	0.0012	0.0072	0.0721	0.0945	0.5777	0.2473	
$Q_i/86$	27.596	22.071	7.6759	4.5470	2.7498		
$\ln \bar{Q}_N = 65.4064$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0038$				$p^4 \text{ (atm)} = 0.104$	
$p = 335 \text{ mm. Hg}$							
Alto	0.0113	0.0508	0.1788	0.1410	0.5312	0.0868	
Alto	0.0021	0.0107	0.0869	0.1037	0.5817	0.2149	
$Q_i/86$	13.149	11.741	5.0939	3.3653	2.2607		
$\ln \bar{Q}_N = 65.4046$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0028$				$p^4 \text{ (atm)} = 0.038$	
$a = 72.8143 \pm 0.68$		$b = 0.1679 \pm 0.003$		$\ln \bar{Q}_{Nmax} = 88.8588$		$p_{max} = 0.640$	

A continuación expresamos los valores de  $p_{max}$  y  $\ln Q_{Nmax}$ , en una tabla comparativa, para la columna del apartado I-b), que llamaremos (A) y la proyectada (B):

TABLA IX

$T^\circ\text{K}$	1000		1100		1200	
	$p_{max}$	$\ln Q_{Nmax}$	$p_{max}$	$\ln Q_{Nmax}$	$p_{max}$	$\ln Q_{Nmax}$
Col (A)	349	70.5314	370	77.31424	388	80.5821
Col (B)	459	79.7622	488	88.8588	525	94.9401
PROYECTO					500	

Los valores correspondientes a  $1200^\circ\text{K}$  son extrapolados, ya que no pudieron realizarse las operaciones a esta temperatura, pues el hilo sufrió un calentamiento anormal y quedó deformado.

No obstante, puede observarse que el valor de  $p_{max}$  correspondiente a  $1100^\circ\text{K}$  es lo suficientemente alto, para pensar que a  $1200^\circ\text{K}$  la concordancia sería excelente, lo cual da validez al método seguido en el proyecto de una columna. Además, el factor de separación aumentó, para la temperatura de  $1100^\circ\text{K}$ , en un 20 %.

DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

Los valores experimentales correspondientes a las Tablas VII y VIII se hallan representados en las Figs. 10 y 11.

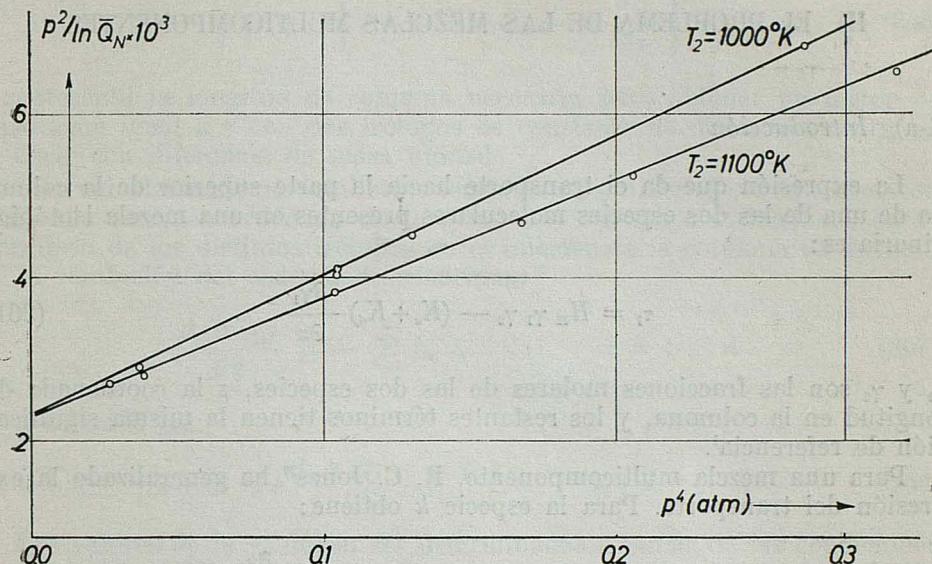


FIG. 10

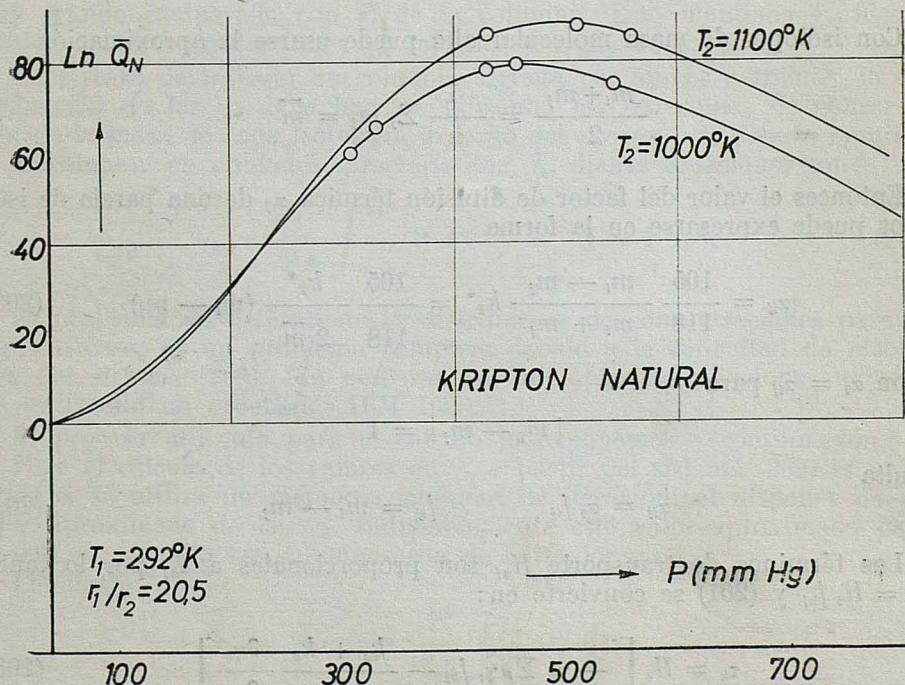


FIG. 11

## II) EL PROBLEMA DE LAS MEZCLAS MULTICOMPONENTES

## II-a) Introducción

La expresión que da el transporte hacia la parte superior de la columna de una de las dos especies moleculares presentes en una mezcla isotópica binaria es:

$$\tau_1 = H_{12} \gamma_1 \gamma_2 - (K_c + K_d) \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \quad (201)$$

$\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son las fracciones molares de las dos especies,  $z$  la coordenada de longitud en la columna, y los restantes términos tienen la misma significación de referencia<sup>1</sup>.

Para una mezcla multicomponente, R. C. Jones<sup>20</sup> ha generalizado la expresión del transporte. Para la especie  $k$  obtiene:

$$\tau_k = -\gamma_k \sum_j \gamma_j H_{kj} - (K_c + K_d) \frac{\partial \gamma_k}{\partial z} \quad (202)$$

Con isótopos de masa molecular alta puede usarse la aproximación

$$\frac{m_i + m_j}{2} = \frac{1}{n} \sum_j m_j = \bar{m}$$

Entonces el valor del factor de difusión térmica  $\alpha_{ij}$  de una pareja de isótopos puede expresarse en la forma

$$\alpha_{ij} = \frac{105}{118} \frac{m_i - m_j}{m_i + m_j} k_T^* = \frac{105}{118} \frac{k_T^*}{2 \bar{m}} (m_i - m_j) \quad (203)$$

y con  $\alpha_0 = \alpha_{ij}$  para

$$|m_i - m_j| = 1$$

resulta

$$\alpha_{ij} = \alpha_0 f_{ij} \quad f_{ij} = m_i - m_j \quad (204)$$

Los términos de transporte  $H_{kj}$  son proporcionales a  $\alpha_{kj}$  por lo tanto  $H_{kj} = H_0 f_{kj}$  y (201) se convierte en:

$$\tau_k = H_0 \left[ -\gamma_k \sum_j \gamma_j f_{kj} - \frac{k_c + k_d}{H_0} \frac{\partial \gamma_k}{\partial z} \right] \quad (205)$$

que con la notación de Jensen<sup>21</sup>, se reduce a:

$$\tau_k = \left[ -\gamma_k \sum_j \gamma_j f_{kj} - l_0 \frac{\partial \gamma_k}{\partial z} \right] \quad (206)$$

$l_0$  representa la longitud de columna necesaria para obtener un factor de separación igual a  $e$  con dos isótopos de constante de difusión térmica  $\alpha_0$ , es decir con diferencia de masa unidad.

Una vez alcanzado el equilibrio, todos los  $\tau_k$  son cero; introduciendo en (206) una nueva coordenada de longitud  $\xi = z / l_0$  las distribuciones en el equilibrio de los distintos isótopos en el interior de la columna se deducen de la resolución del sistema de ecuaciones<sup>22</sup>

$$\frac{d(\ln \gamma_i)}{d\xi} = - \sum_{k=1}^n f_{ik} \gamma_k \quad i = 1 \dots n \quad (207)$$

cuya solución es:

$$\gamma_i(\xi) = \gamma_{i0} e^{-\int_{-\infty}^{\xi} f_{ki} \xi' d\xi'} / \sum_{j=1}^n \gamma_{j0} e^{-\int_{-\infty}^{\xi} f_{kj} \xi' d\xi'} \quad i, j = 1 \dots n \quad (208)$$

Los valores de la  $\gamma_{i0}$  deben ser determinados a partir de las condiciones iniciales del problema. En uno de los casos más utilizados en la práctica se inserta en el punto  $\xi = 0$  de la instalación un reservorio de volumen muy grande comparado con el de la columna. Esto mantiene  $\gamma_{i0}$  fijas e iguales a las concentraciones  $\gamma_{ia}$  iniciales del gas de partida.

En el caso de trabajar en columna cerrada por ambos extremos, la determinación de las  $\gamma_{i0}$  debe hacerse utilizando las ecuaciones de conservación de la masa de cada isótopo a lo largo del proceso. Si  $Z$  es la longitud de la columna en unidades características,  $l_0$ , dichas ecuaciones son:

$$\gamma_{ia} = \frac{1}{2z} \int_{-z}^{+z} \gamma_i(\xi) d\xi \quad i = 1 \dots n \quad (209)$$

El problema de determinar la distribución de concentraciones para el segundo caso, es un problema complejo debido a la dificultad de resolución del sistema (209). Sin embargo se han obtenido soluciones numéricas utilizando un ordenador IBM 1620.

El proceso utilizado para el cálculo lo exponemos a continuación.

Para el cálculo de los valores de  $\gamma_{i0}$  a partir del sistema (209) es necesario, si se utiliza un método cualquiera de iteración, el disponer de un valor aproximado de las  $\gamma_{i0}$ . Indudablemente este valor aproximado para  $\gamma_{i0}$  será  $\gamma_{ia}$ , cuando las columnas son de corta longitud.

Llamando

$$g_i(\gamma_{i0} \dots \gamma_{no}) = \frac{1}{2z} \int_{-z}^{+z} \gamma_i(\xi) d\xi \quad (210)$$

el proceso de iteración se realiza utilizando como nuevos valores de  $\gamma_{i0}$

los deducidos de los antiguos con la expresión de  $\Delta \gamma_{io}$  obtenida a partir de:

$$\Delta g_i = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial \gamma_{jo}} \Delta \gamma_{jo} \quad (211)$$

siendo

$$\Delta g_i = g_i (\gamma_{i0} \dots \gamma_{no}) - \gamma_{ia}$$

El sistema de ecuaciones (211) puede simplificarse suponiendo nulas todas las  $\partial g_i / \partial \gamma_{jo}$  para  $i \neq j$ . Puede justificarse esto fácilmente por el hecho de que  $\gamma_{io}$  aparece en el numerador de la  $g_i$  exclusivamente y, por lo tanto, su influencia es, comparativamente, mucho mayor que la del resto de las  $\gamma_{jo}$ .

La aproximación inicial  $\gamma_{ia} \approx \gamma_{io}$  para las iteraciones y las consideraciones sobre los valores relativos de las  $\partial g_i / \partial \gamma_{jo}$  hechas antes, han permitido obtener desarrollos de iteración rápidamente convergentes, aun para longitudes de columna bastante grandes.

El organigrama del proceso de cálculo se muestra en la Fig. 12. El programa tiene la posibilidad de escribir las distribuciones de isótopos correspondientes al proceso experimental que usa un gran reservorio en cualquier punto de la columna.

### II-b) Comprobación experimental

Con el fin de comprobar experimentalmente la teoría anterior construimos otra columna de separación de hilo caliente, que nos permitió obtener muestras de diferentes puntos de la misma. Un esquema se muestra en la Fig. 13.

Para ello, se colocaron siete llaves para toma de muestras, regularmente espaciadas a lo largo de la columna.

Las características de la columna son:

Longitud de la columna ..... 3.000 mm.

Diámetro del tubo interior ..... 98 mm.

Vidrio Pyrex

Hemos empleado dos hilos:

Nicrothal .....  $r_2 = 0.25$  mm.

Pt — Ir (80 % — 20 %) .....  $r_2 = 0.20$  mm.

Para el caso del hilo de Pt — Ir (80 % — 20 %) la temperatura se ha calculado por dilatación según<sup>13</sup>:

$$L_\theta = L_0 (1 + 0.05 8198\theta + 0.08 1418\theta^2)$$

Las operaciones con hilo de Nicrothal las designaremos por A y las realizadas con Pt — Ir las designaremos por B.

Las calefacciones, refrigeración, manejo de gases, análisis, etc., se han realizado conforme indicamos en la Parte I.

DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

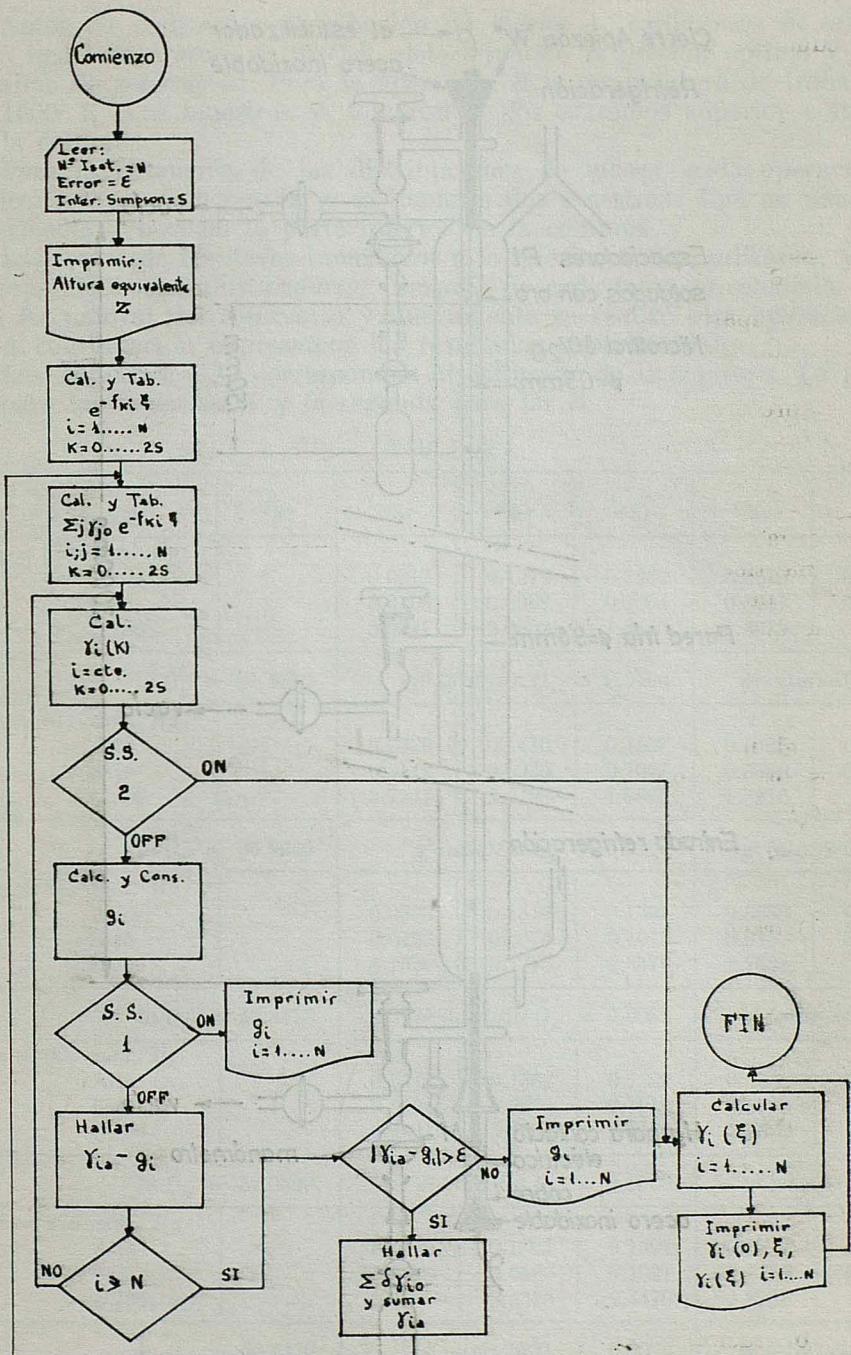


FIG. 12

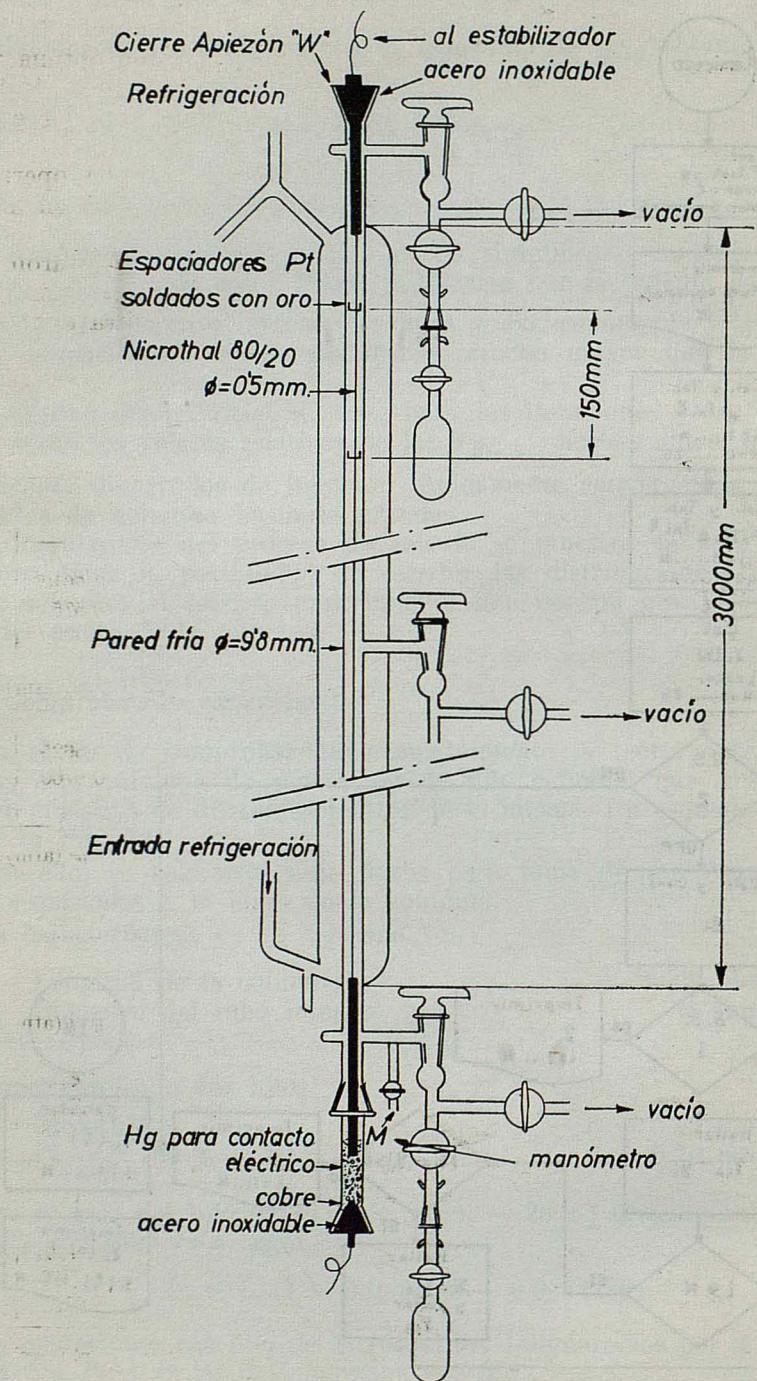


FIG. 13

Antes de realizar la distribución de masas A, calibrámos la columna para una temperatura de 900° K, determinando la presión óptima y factor máximo de separación. Para la operación B la temperatura de trabajo fue de 1000° K. Las muestras se tomaron de los extremos superior e inferior de la columna.

Para la obtención de las distribuciones de masas, cada operación se realizó a la presión óptima y se tomaron dos muestras: Una en una toma intermedia y otra en la parte inferior de la columna.

Las tomas de las llaves inmediatas a la inferior no se realizaron, ya que la separación era muy pequeña. Después de cada toma se remezcló el gas con Kr natural del reservorio y nuevamente se realizó otra operación.

A continuación expresamos los resultados experimentales.

Las Tablas X y XI corresponden al calibrado de la columna. La primera para las muestras A y la segunda para las B.

TABLA X

$T_2 = 900^\circ \text{ K}$	$r_2 = 0.25 \text{ mm.}$	$p = 568 \text{ mm. Hg}$	$Q_i/86$	$\ln \bar{Q}_N = 29.5716$	$78\text{Kr}$	$^{70}\text{Kr}$	$^{82}\text{Kr}$	$^{83}\text{Kr}$	$^{84}\text{Kr}$	$^{86}\text{Kr}$
Alto						0.0317	0.1372	0.1252	0.5619	0.1439
Bajo						0.0150	0.0968	0.1064	0.5757	0.2061
						3.0347	2.0302	1.6840	1.3979	
$\ln \bar{Q}_N = 35.9240$				$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0196$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.312$			
$p = 511 \text{ mm. Hg}$						0.0339	0.1410	0.1267	0.5625	0.1359
Alto						0.0142	0.0935	0.1047	0.5760	0.2117
Bajo						3.7241	2.3498	1.8865	1.5216	
$\ln \bar{Q}_N = 40.4113$				$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0126$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.204$			
$p = 388 \text{ mm. Hg}$						0.0393	0.1519	0.1307	0.5558	0.1222
Alto						0.0125	0.0874	0.1013	0.0753	0.2235
Bajo						5.7539	3.1775	2.3576	1.7664	
$\ln \bar{Q}_N = 52.0329$				$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0054$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.067$			
$p = 303 \text{ mm. Hg}$						0.0417	0.1562	0.1322	0.5536	0.1162
Alto						0.0124	0.0876	0.1012	0.5748	0.2240
Bajo						6.4841	3.4362	2.5172	1.8560	
$\ln \bar{Q}_N = 50.5476$				$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0030$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.025$			
$p = 275 \text{ mm. Hg}$						0.0419	0.1563	0.1322	0.5527	0.1169
Alto						0.0128	0.0886	0.1021	0.5756	0.2210
Bajo						6.1986	3.3379	2.4470	1.8155	

TABLA XI

$T_2 = 1000^\circ \text{ K}$	$^{78}\text{Kr}$	$^{80}\text{Kr}$	$^{82}\text{Kr}$	$^{83}\text{Kr}$	$^{84}\text{Kr}$	$^{86}\text{Kr}$
$r_2 = 0.20 \text{ mm.}$						
$p = 505 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0089	0.0257	0.1434	0.1264	5.5581	0.1275
Bajo	0.0026	0.0159	0.0990	0.1082	0.5705	0.2039
$Q_i/86$	5.5881	3.4958	2.3153	1.8674	1.5642	
$\ln \bar{Q}_N = 35.8295$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0117$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.196$	
$p = 437 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0087	0.0401	0.1532	0.1308	0.5472	0.1200
Bajo	0.0019	0.0144	0.0952	0.1055	0.5714	0.2116
$Q_i/86$	8.0952	4.9193	2.8375	2.1871	1.6894	
$\ln \bar{Q}_N = 43.8818$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0074$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.109$	
$p = 324 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0110	0.0461	0.1647	0.1344	0.5388	0.1049
Bajo	0.0032	0.0131	0.0913	0.1032	0.5754	0.2138
$Q_i/86$	7.0852	7.1768	3.6777	2.6572	1.9092	
$\ln \bar{Q}_N = 51.8769$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0033$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.033$	
$p = 201 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0089	0.0405	0.1526	0.1304	0.5460	0.1215
Bajo	0.0025	0.0158	0.0970	0.1060	0.5721	0.2065
$Q_i/86$	5.9274	4.3700	2.6754	2.0904	1.6229	
$\ln \bar{Q}_N = 40.2632$		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0017$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.005$	
$a = 17.4364 \quad 0.42 \quad b = 0.0205 \pm 0.005 \quad \ln \bar{Q}_{N_{\max}} = 60.8319 \quad p_{\max} = 0.378$						

Con estos datos hemos calculado las alturas equivalentes, resultando:

Para el hilo de Nicrothal ... ... ... ... ...  $2Z = 0.155$

Para el hilo de  $Pt - Ir$  ... ... ... ... ...  $2Z = 0.165$

Los resultados experimentales de las distribuciones de muestras fueron:

## DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

TABLA XII

$T_2 = 900^\circ \text{ K}$	$^{78}\text{Kr}$	$^{80}\text{Kr}$	$^{82}\text{Kr}$	$^{83}\text{Kr}$	$^{84}\text{Kr}$	$^{86}\text{Kr}$
$r_2 = 0.25 \text{ mm.}$						
$p = 303 \text{ mm. Hg}$						
Alto	0.0415	0.1562	0.1308	0.5554	0.1222	
Bajo	0.0122	0.0936	0.1047	0.5761	0.2116	
$Q_i/86$	6.4843	3.4361	2.5172	1.8558		
$\ln \bar{Q}_N = 52.0329$						
		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0030$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.025$	
$p = 303 \text{ mm. Hg}$						
1. <sup>a</sup> toma	0.0331	0.1414	0.1286	0.5625	0.1343	
Bajo	0.0121	0.0934	0.1045	0.5765	0.2119	
$Q_i/86$	5.5729	3.1215	2.3420	1.7445		
$\ln \bar{Q}_N = 47.6496$						
		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0034$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.025$	
$p = 303 \text{ mm. Hg}$						
2. <sup>a</sup> toma	0.0276	0.1296	0.1229	0.5713	0.1486	
Bajo	0.01227	0.0931	0.1051	0.5760	0.2113	
$Q_i/86$	4.3510	2.5688	2.0076	1.5949		
$\ln \bar{Q}_N = 39.8917$						
		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0040$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.025$	
$p = 303 \text{ mm. Hg}$						
3. <sup>a</sup> toma	0.0224	0.1174	0.1174	0.5762	0.1665	
Bajo	0.0128	0.0930	0.1041	0.5768	0.2120	
$Q_i/86$	3.0828	2.0726	1.7105	1.4306		
$\ln \bar{Q}_N = 30.6087$						
		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0052$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.025$	

TABLA XIII

$r_2 = 0.20$ mm.	$^{78}\text{Kr}$	$^{80}\text{Kr}$	$^{82}\text{Kr}$	$^{83}\text{Kr}$	$^{84}\text{Kr}$	$^{86}\text{Kr}$
$T_2 = 1000^\circ \text{ K}$						
$p = 287$ mm. Hg						
Alto	0.0095	0.0449	0.1617	0.1335	0.5426	0.1078
Bajo	0.0013	0.0126	0.0891	0.1025	0.5753	0.2192
$Q_i/86$	1.5048	7.2529	3.6919	2.6487	1.9180	
$\ln \bar{Q}_N = 55.0979$						
		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0030$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.021$	
$p = 287$ mm. Hg						
1. <sup>a</sup> toma	0.0068	0.0371	0.1502	0.1303	0.5554	0.1201
Bajo	0.0011	0.0120	0.0894	0.1029	0.5760	0.2189
$Q_i/86$	1.2279	5.4004	3.0301	2.2946	1.7446	
$\ln \bar{Q}_N = 47.7445$						
		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0035$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.021$	
$p = 287$ mm. Hg						
2. <sup>a</sup> toma	0.0059	0.0292	0.1347	0.1251	0.5650	0.1401
Bajo	0.0014	0.0125	0.0899	0.1033	0.5758	0.2179
$Q_i/86$	3.7582	3.5595	2.3114	1.8725	1.5168	
$\ln \bar{Q}_N = 33.6406$						
		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0047$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.021$	
$p = 287$ mm. Hg						
3. <sup>a</sup> toma	0.0047	0.0240	0.1226	0.1198	0.5709	0.1580
Bajo	0.0012	0.0121	0.0890	0.1030	0.5759	
$Q_i/86$	2.4404	2.6171	1.8899	1.5994	1.3661	0.2188
$\ln \bar{Q}_N = 24.9229$						
		$p^2 \text{ (atm)}/\ln \bar{Q}_N = 0.0063$			$p^4 \text{ (atm)} = 0.021$	

A continuación exponemos en Tablas comparativas los resultados experimentales y los valores teóricos de las distribuciones de masas, correspondientes a cada isótopo e indicando las coordenadas de las tomas de muestras, en un sistema de referencia con el origen en el punto medio de la columna. Los intervalos de Simpson que hemos utilizado son seis.

## DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

TABLA XIV

<sup>80</sup> Kr Coord.	— 1.00	— 0.66	— 0.33	0.00	0.33	0.66	1.00
V. Teo.	0.0119	0.0147	0.0181	0.0222	0.0271	0.0329	0.0398
V. Exp.	0.0124			0.0224	0.0276	0.0331	0.0415
<sup>82</sup> Kr							
V. Teo.	0.0842	0.0939	0.1043	0.1154	0.1270	0.1393	0.1520
V. Exp.	0.0936			0.1174	0.1296	0.1414	0.1562
V. Teo.	0.0994	0.1052	0.1110	0.1166	0.1219	0.1269	0.1315
V. Exp.	0.1047			0.1174	0.1229	0.1286	0.1308
<sup>84</sup> Kr							
V. Teo.	0.5705	0.5739	0.5748	0.5734	0.5694	0.5631	0.5543
V. Exp.	0.5761			0.5762	0.5713	0.5625	0.5554
<sup>86</sup> Kr							
V. Teo.	0.2339	0.2122	0.1917	0.1725	0.1545	0.1378	0.1223
V. Exp.	0.2116			0.1615	0.1486	0.1343	0.1222

TABLA XV

<sup>78</sup> Kr Coord.	— 1.00	— 0.66	— 0.33	0.00	0.33	0.66	1.00
V. Teo.	0.0011	0.0016	0.0022	0.0030	0.0041	0.0057	0.0078
V. Exp.	0.0013			0.0047	0.0059	0.0068	0.0095
<sup>80</sup> Kr							
V. Teo.	0.0110	0.0138	0.0172	0.0214	0.0264	0.0325	0.0396
V. Exp.	0.0126			0.0240	0.0292	0.0371	0.0449
<sup>82</sup> Kr							
V. Teo.	0.0821	0.0923	0.1031	0.1147	0.1269	0.1397	0.1529
V. Exp.	0.0891			0.1226	0.1347	0.1502	0.1617
<sup>83</sup> Kr							
V. Teo.	0.0979	0.1041	0.1102	0.1160	0.1215	0.1266	0.1312
V. Exp.	0.1025			0.1198	0.1251	0.1303	0.1335
<sup>84</sup> Kr							
V. Teo.	0.5708	0.5745	0.5754	0.5735	0.5687	0.5609	0.5502
V. Exp.	0.5753			0.5709	0.5650	0.5554	0.5426
<sup>86</sup> Kr							
V. Teo.	0.2369	0.2137	0.1918	0.1713	0.1522	0.1346	0.1183
V. Exp.	0.2192			0.1580	0.1401	0.1207	0.1078

Los resultados de las Tablas X, XI, XII, XIII, XIV y XV se hallan representados en las Figs. 14, 15, 16 y 17.

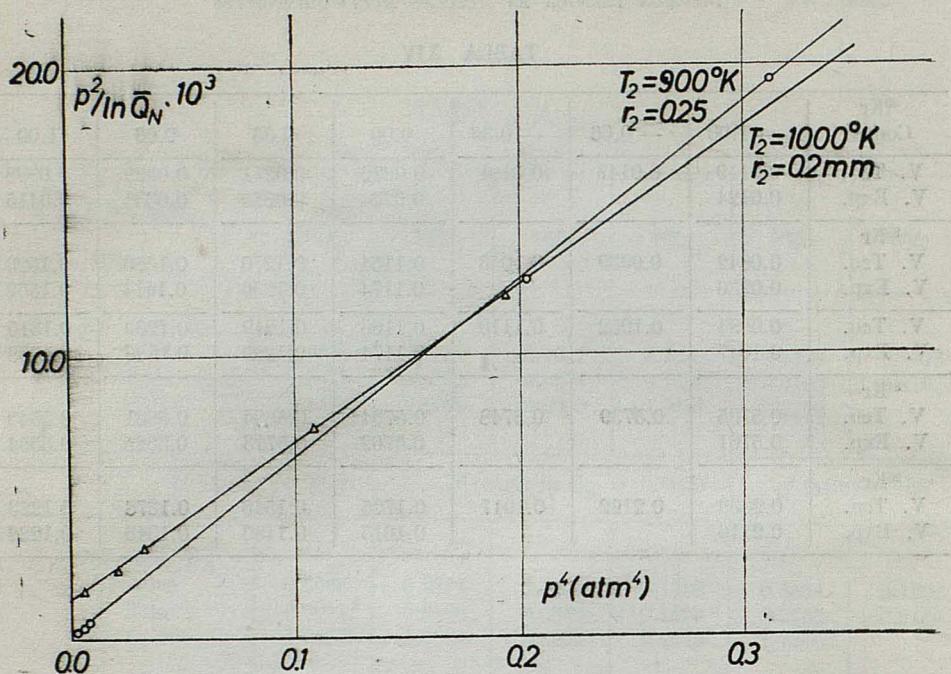


FIG. 14

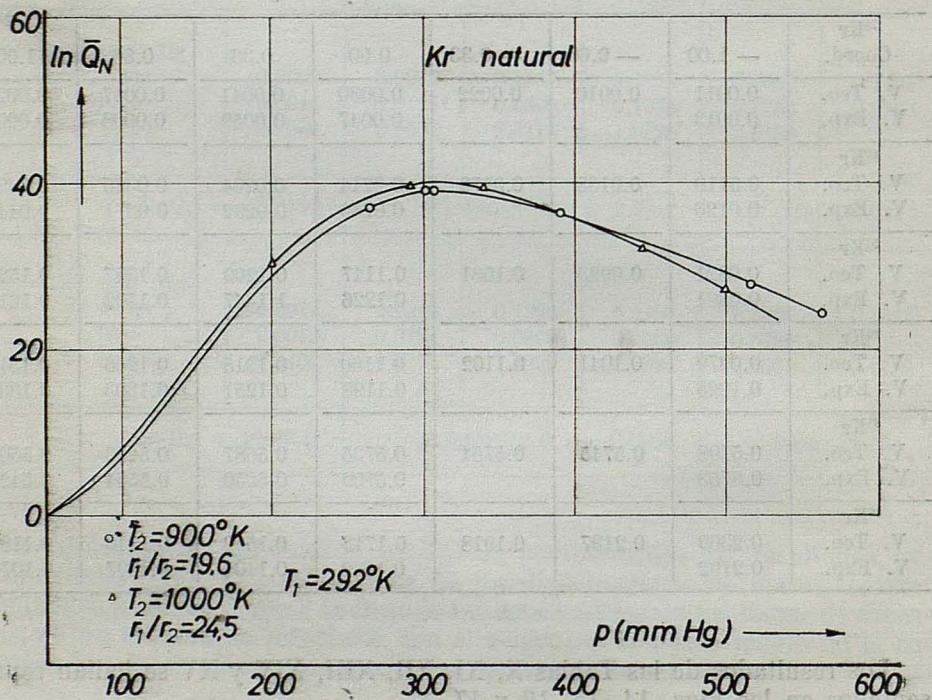


FIG. 15  
— 236 —

DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

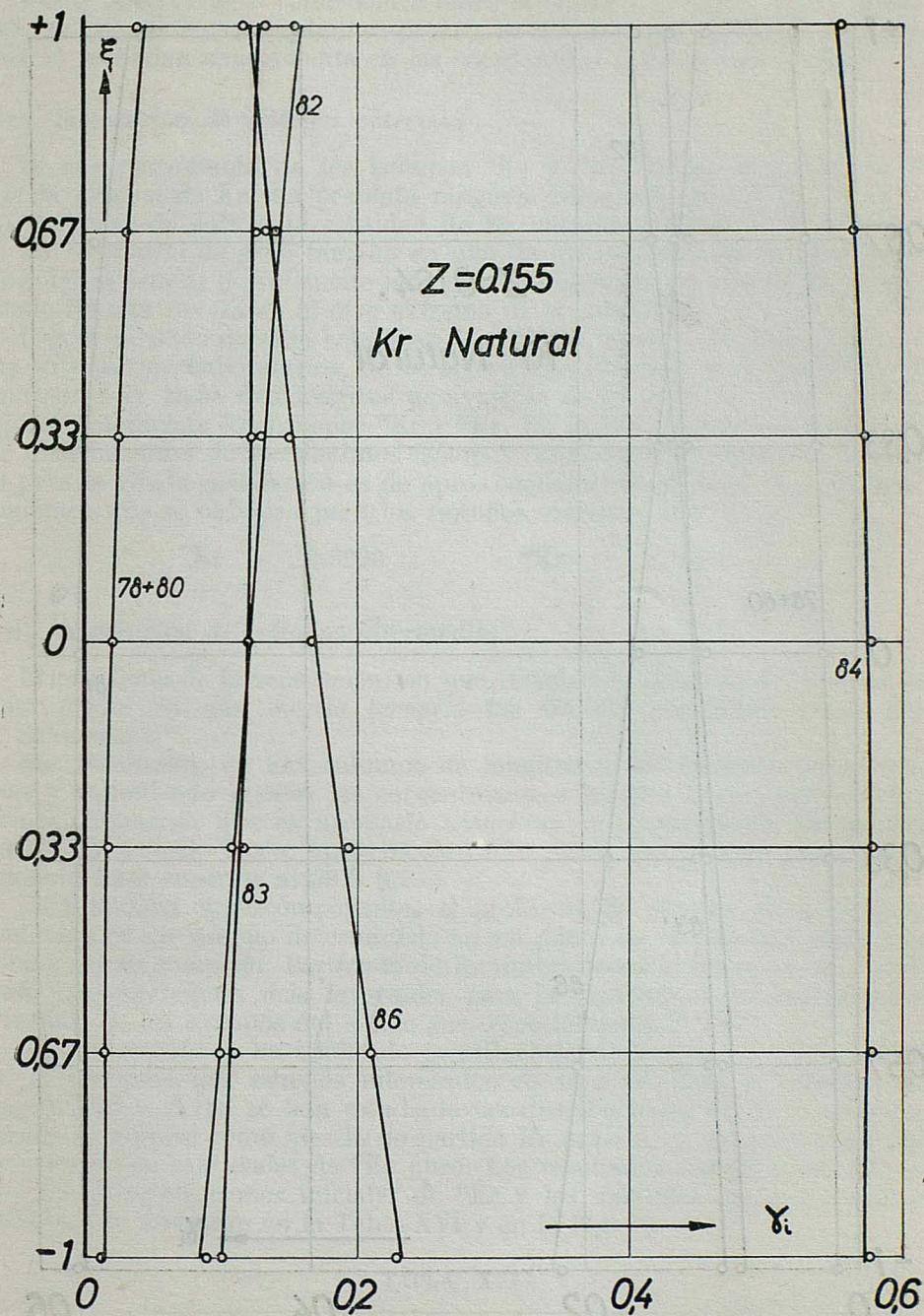


FIG. 16

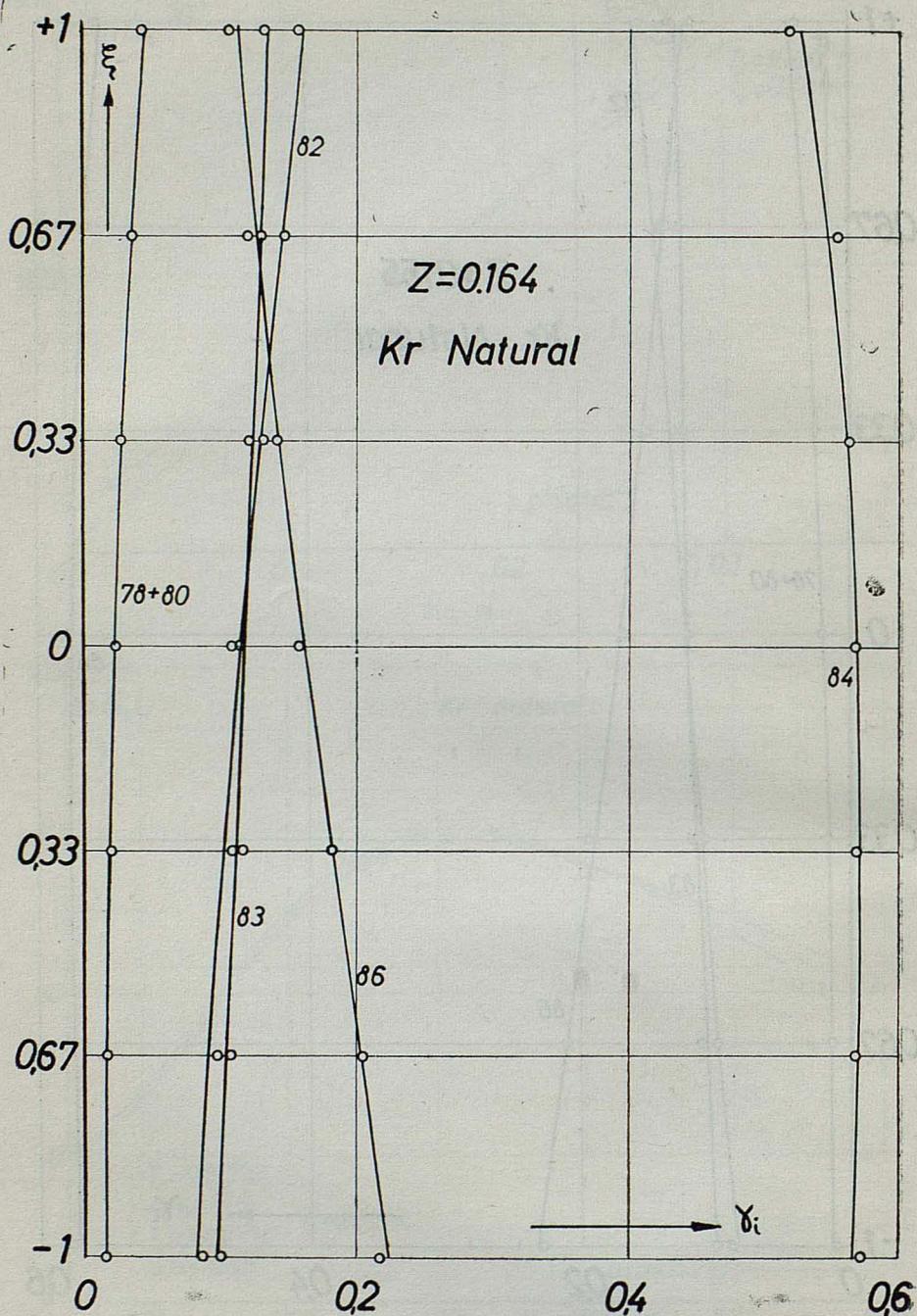


FIG. 17

Puede observarse la coincidencia entre la teoría y la experiencia. Discrepancias que aparecen en algunos puntos, se deben a que las tomas de muestras no se hallan exactamente en las coordenadas geométricas teóricas.

### II-c) Separación de isótopos extremos

El enriquecimiento de los isótopos  $^{78}\text{Kr}$  y  $^{86}\text{Kr}$ , masas extremas en la mezcla natural de Kr, no presenta ninguna dificultad, puesto que es posible disponer de suficiente cantidad de Kr natural y entonces la inserción de un reservorio de gran tamaño en uno de los extremos de la instalación permite, si ésta es de suficiente longitud, la obtención de uno de los dos en estado de alta pureza en el otro extremo de la columna.

Una instalación de siete columnas de difusión térmica, en serie, construidas en nuestros Laboratorios, de características idénticas a la tratada en el apartado I-k), tiene una longitud equivalente de  $2Z = 3.736$  y es capaz de separar totalmente los isótopos  $^{78}\text{Kr}$  y  $^{86}\text{Kr}$ . En la Fig. 18 pueden observarse las distribuciones de los distintos isótopos. El tiempo de equilibrio estimado para la citada instalación es de aproximadamente 20 días<sup>24</sup>. Los enriquecimientos que se obtienen para los isótopos extremos son :

$$^{78}\text{Kr} \quad 0.9990 \quad ^{86}\text{Kr} \quad 0.9998$$

### II-d) Separación de isótopos intermedios

El problema de la separación, en una instalación cerrada, del isótopo de masa media en una mezcla ternaria fue tratado por primera vez por E. Schumacher<sup>25</sup>.

Sus resultados, en una columna de longitud total<sup>10</sup> unidades características y suponiendo iguales las concentraciones iniciales de los isótopos extremos, muestran que es necesario aumentar la concentración inicial del isótopo intermedio hasta, aproximadamente, 92 % para lograr un enriquecimiento final superior al 99.9 %.

Para mezclas multicomponentes el problema de obtener altos enriquecimientos de un isótopo determinado en un punto de la columna es de tratamiento más complejo. Partiendo de Kr natural estudiaremos en este parágrafo las condiciones más favorables para la separación, en instalaciones cerradas, de los isótopos del citado gas, especialmente el  $^{84}\text{Kr}$ .

Primeramente, se ha analizado la influencia de la concentración inicial del componente que estamos interesados en separar. Para la columna de longitud  $2Z = 3.736$  se han estudiado las distribuciones de Kr resultantes cuando se emplea como mezcla de partida Kr natural, y, sucesivamente, se van añadiendo cantidades de  $^{84}\text{Kr}$  puro. Los resultados comparativos de las diversas concentraciones iniciales de  $^{84}\text{Kr}$  y los máximos enriquecimientos obtenidos se muestran en la Tabla XVI y en la Fig. 19.

TABLA XVI

C. Ini.	0.5690	0.6551	0.7838	0.8273	0.8706	0.9134	0.9568
C. Máx.	0.7912	0.8513	0.9219	0.9411	0.9583	0.9737	0.9876

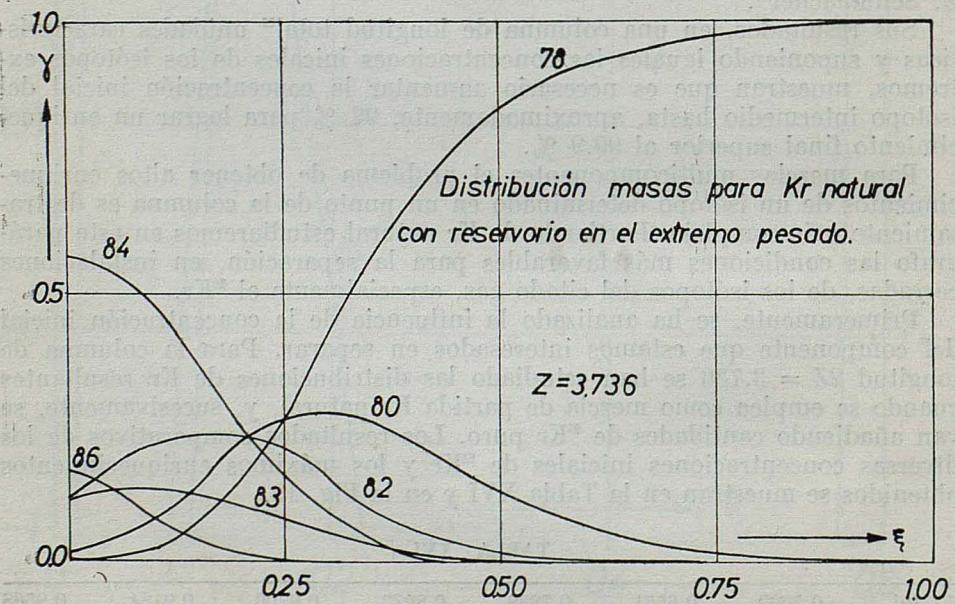
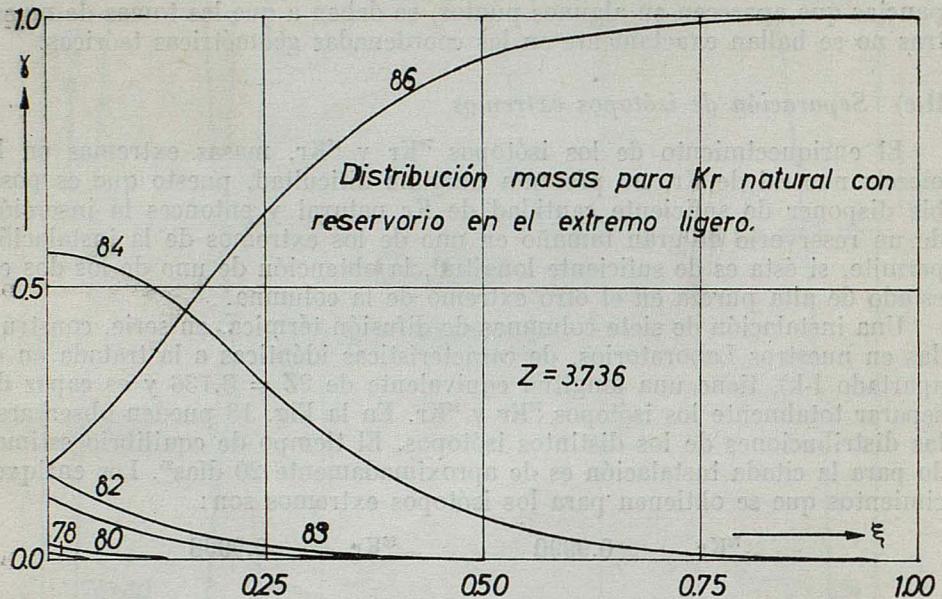


FIG. 18

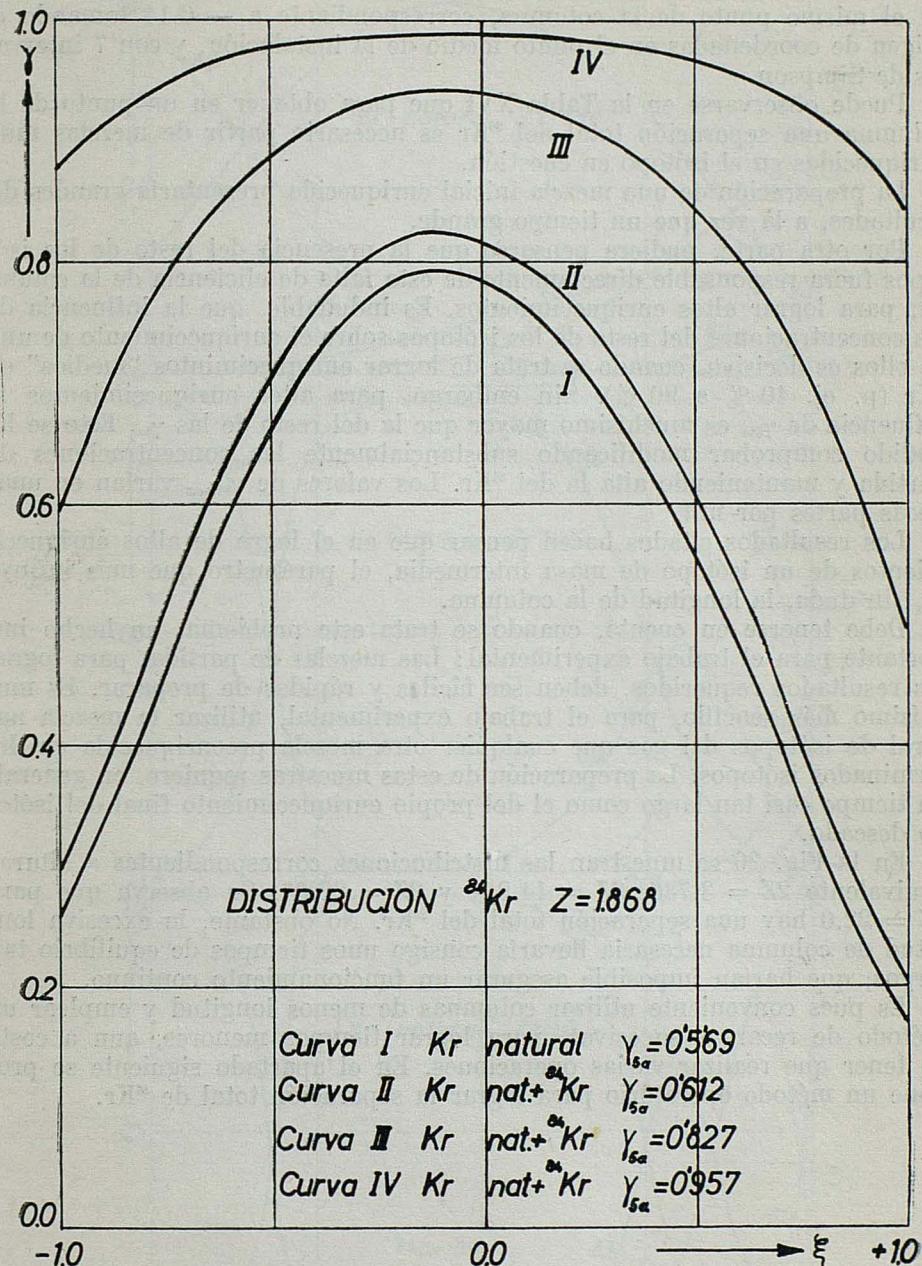


FIG. 19. — Distribución de concentraciones de  $^{84}\text{Kr}$  en una columna de  $Z = 1.868$  para diversas concentraciones de partida. Las concentraciones iniciales de los restantes isótopos mantienen entre sí las mismas relaciones que en el Kr natural.

Hemos observado que todas las concentraciones máximas se obtienen en el mismo punto de la columna, correspondiente a — 0.14 tomando el origen de coordenadas en el punto medio de la instalación, y con 7 intervalos de Simpson.

Puede observarse en la Tabla XVI que para obtener en un punto de la columna una separación total del  $^{84}\text{Kr}$  es necesario partir de mezclas muy enriquecidas en el isótopo en cuestión.

La preparación de una mezcla inicial enriquecida presentaría grandes dificultades, a la vez que un tiempo grande.

Por otra parte, pudiera pensarse que la presencia del resto de los isótopos fuera responsable directamente de esta falta de eficiencia de la columna, para lograr altos enriquecimientos. Es indudable, que la influencia de las concentraciones del resto de los isótopos sobre el enriquecimiento de uno de ellos es decisiva, cuando se trata de lograr enriquecimientos "medios" en  $^{84}\text{Kr}$  (p. ej. 40 % a 90 %). Sin embargo, para altos enriquecimientos la influencia de  $\gamma_{84a}$  es muchísimo mayor que la del resto de las  $\gamma_{ia}$ . Esto se ha podido comprobar modificando substancialmente las concentraciones de partida y manteniendo alta la del  $^{84}\text{Kr}$ . Los valores de  $\gamma_{84max}$  varían en unas pocas partes por mil.

Los resultados citados hacen pensar que en el logro de altos enriquecimientos de un isótopo de masa intermedia, el parámetro que más influye es, sin duda, la longitud de la columna.

Debe tenerse en cuenta, cuando se trata este problema, un hecho importante para el trabajo experimental: Las mezclas de partida, para lograr los resultados requeridos, deben ser fáciles y rápidas de preparar. Es muchísimo más sencillo, para el trabajo experimental, utilizar la mezcla natural de isótopos del gas que cualquier otra mezcla preenriquecida en determinados isótopos. La preparación de estas muestras requiere, en general, un tiempo casi tan largo como el del propio enriquecimiento final del isótopo deseado.

En la Fig. 20 se muestran las distribuciones correspondientes a alturas equivalentes  $2Z = 3.736$ ,  $2Z = 14.944$  y  $2Z = 22.0^*$ . Se observa que para  $2Z = 22.0$  hay una separación total del  $^{84}\text{Kr}$ . No obstante, la excesiva longitud de columna necesaria llevaría consigo unos tiempos de equilibrio tan largos, que harían imposible asegurar un funcionamiento continuo.

Es pues conveniente utilizar columnas de menos longitud y emplear un método de recargas sucesivas, para lograr tiempos menores, aun a costa de tener que realizar varias operaciones. En el apartado siguiente se propone un método operatorio para lograr la separación total de  $^{84}\text{Kr}$ .

\* Para el tipo de columnas como la proyectada equivaldrían a 126 m.

DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

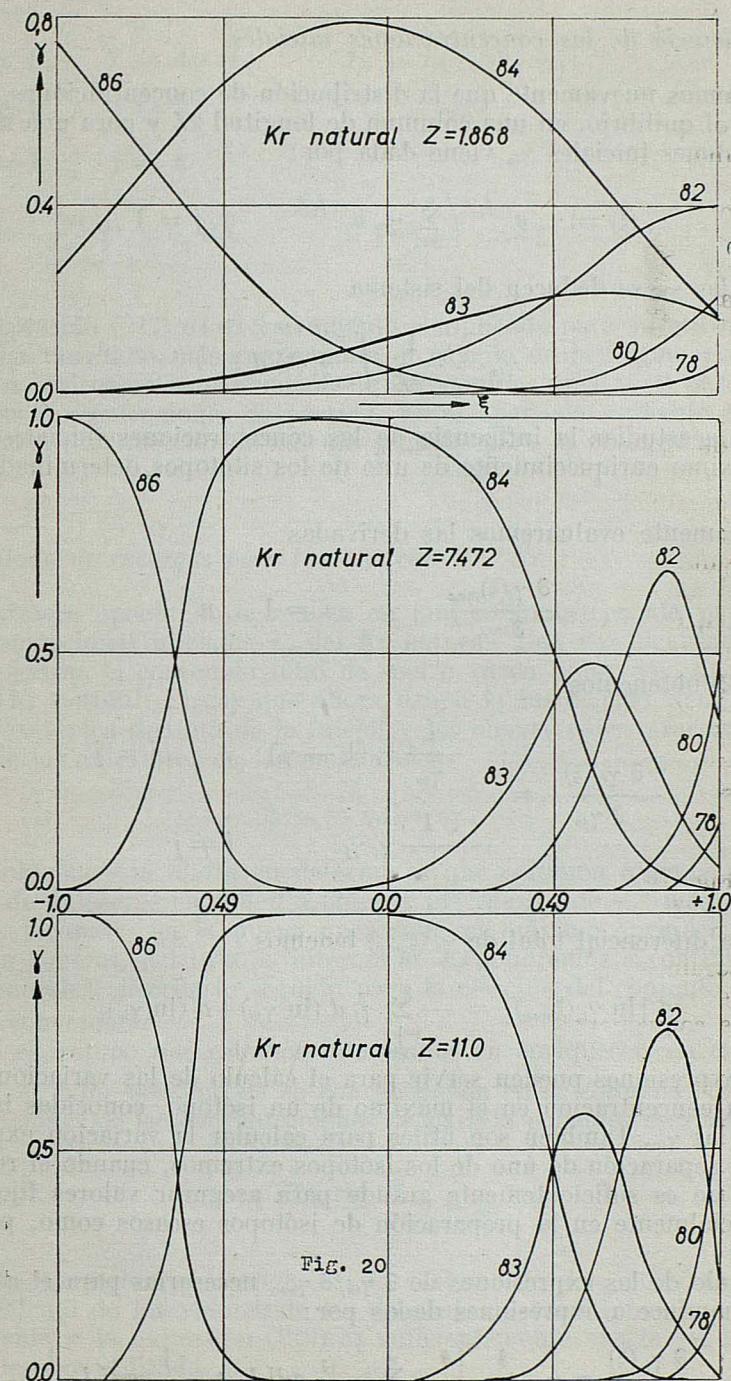


FIG. 20  
— 243 —

II-e) *Influencia de las concentraciones iniciales*

Recordemos nuevamente que la distribución de concentraciones, una vez alcanzado el equilibrio, en una columna de longitud  $2Z$  y para una mezcla de concentraciones iniciales  $\gamma_{ia}$  viene dada por:

$$\gamma_i(\xi) = \gamma_{io} e^{-f_{ki}\xi} / \sum_{j=1}^n \gamma_{jo} e^{-f_{kj}\xi} \quad i, j = 1 \dots n \quad (212)$$

en donde las  $\gamma_{io}$  se deducen del sistema

$$\gamma_{ia} = \frac{1}{2Z} \int_{-Z}^{+Z} \gamma_i(\xi) d\xi$$

Vamos a estudiar la influencia de las concentraciones iniciales,  $\gamma_{ia}$ , sobre el máximo enriquecimiento de uno de los isotópos determinado de antemano.

Primeramente evaluaremos las derivadas

$$\frac{\partial \gamma_i(\xi)_{max}}{\partial \gamma_{ia}} \quad i = 1 \dots n \quad (214)$$

De (212) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_i(\xi)}{\partial \gamma_{io}} &= -\frac{1}{\gamma_{io}} \gamma_i(1 - \gamma_i) & i = j \\ &= -\frac{1}{\gamma_{jo}} \gamma_i \gamma_j & i \neq j \end{aligned} \quad (215)$$

Para la diferencial total de  $\gamma_i(\xi_{max})$  tenemos

$$d[\ln \gamma_i(\xi_{max})] = -\sum_{j=1}^n \gamma_j d(\ln \gamma_{jo}) + d(\ln \gamma_{io}) \quad (216)$$

Estas expresiones pueden servir para el cálculo de las variaciones sufridas por la concentración en el máximo de un isótopo, conocidas las variaciones de las  $\gamma_{io}$ . También son útiles para calcular la variación experimentada en la separación de uno de los isótopos extremos, cuando el reservorio empleado no es suficientemente grande para asegurar valores fijos de las  $\gamma_i$ , y especialmente en la preparación de isótopos escasos como, por ejemplo,  $^{85}\text{Kr}$ .

El cálculo de las expresiones de  $\partial \gamma_{io} / \partial \gamma_{ka}$ , necesarias para el cálculo de las (214) conduce a expresiones dadas por:

$$\frac{\partial \gamma_i(\xi)}{\partial \gamma_{ia}} = \gamma_i \frac{1}{\gamma} \left| -\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{\gamma_{jo}} adj I_{jk} + \frac{1}{\gamma_{io}} adj I_{ik} \right| \quad (217)$$

en las que

$$\begin{aligned}
 I_{jk} &= I_{kj} & Y = \det(I_{jk}) & I_{jk} = I_{jk} - \delta_{jk} \gamma_{ka} \\
 &= 0 & j \neq k & \\
 \partial_{jk} &= 1 & j = k & \\
 I_{jk} &= \frac{1}{2Z} \int_{-z}^{+z} \gamma_i \gamma_k d\xi & i, j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{218}$$

La expresión (217) es excesivamente complicada para su utilización analítica y ha resultado más conveniente el cálculo de la misma por métodos numéricos, así como la evaluación de los cambios en  $d\gamma_i(\xi)$  para variaciones en las concentraciones de partida. En el apartado siguiente exponemos detenidamente el método de cálculo seguido para la obtención de  $^{84}\text{Kr}$  enriquecido.

#### II-f) Método de recargas para la obtención de $^{84}\text{Kr}$

La primera operación se realiza en una columna cerrada partiendo de las concentraciones iniciales  $\gamma_{ia}$  del Kr natural. Una vez alcanzado el equilibrio se extrae el contenido total de una o varias columnas, que se recargan con Kr natural. El gas que ahora ocupa la instalación tiene una composición isotópica distinta de la inicial y las nuevas concentraciones  $\gamma_{ia}^*$  diferirán de las anteriores en las magnitudes

$$\Delta \gamma_{ia} = \gamma_{ia}^* - \gamma_{ia}$$

El problema está ahora en determinar qué columna o grupo de columnas han de extraerse en orden a obtener los valores de  $\gamma_{ia}^*$  más convenientes, para alcanzar, en la nueva operación, el máximo enriquecimiento de  $^{84}\text{Kr}$  o, en general, del isótopo interesado. Expondremos a continuación, en líneas generales, el criterio seguido para la elección del conjunto de columnas más conveniente.

Sea  $i$  el isótopo que estamos interesados en enriquecer, en este caso el  $^{84}\text{Kr}$ , y  $\bar{\gamma}_i$  el valor máximo de su concentración en la columna. Para pequeñas variaciones de las concentraciones de partida podemos escribir:

$$\Delta \bar{\gamma}_i = \sum_j \frac{\partial \bar{\gamma}_i}{\partial \gamma_{ja}} \Delta \gamma_{ja} \tag{219}$$

En dos operaciones sucesivas, si los valores de  $d\gamma_{ja}$  no son muy grandes, el cálculo de los valores de las derivadas parciales puede hacerse numéricamente y la expresión (219) es suficientemente exacta en la práctica para poder ser utilizada.

La extracción y posterior recarga de un determinado grupo de colum-

nas, produce una nueva serie de concentraciones iniciales para la operación siguiente. Sean estas concentraciones

$$\gamma_{1a}^{*G}, \gamma_{2a}^{*G}, \dots, \gamma_{na}^{*G}$$

donde el superíndice denota el grupo de columnas extraído.

El cálculo de (219) con los incrementos permite seleccionar con qué grupo,  $G$ , de columnas se obtiene el valor máximo de  $\Delta \gamma_i$ .

El cálculo de las  $\partial \gamma_i / \partial \gamma_{ia}$ , realizado numéricamente en un ordenador IBM 1620, utiliza incrementos del orden del 1 % sobre los valores de las  $\gamma_{ia}$ . Ocurre a veces que los valores de las  $\Delta \gamma_{ia}$  obtenidos en dos operaciones consecutivas, superan con mucho el orden de validez de las derivadas; esto sucede cuando  $\gamma_{84\max} \leq 0.9$ , es decir, en las primeras operaciones y no ocurre cuando  $\gamma_{84} \geq 0.9$ . Afortunadamente, comprobaciones directas hechas sobre las distribuciones, muestran tan grandes diferencias en el enriquecimiento de  $^{84}\text{Kr}$ , cuando se escoge un grupo cualquiera de columnas y cuando se escoge el grupo seleccionado por la máquina, que hacen el programa suficientemente seguro para el propósito al que está destinado.

Finalmente, después de cada recarga se obtienen los datos de las nuevas concentraciones  $\gamma_{ia}^*$  y el ordenador queda en disposición automática para efectuar una nueva operación. El organigrama de cálculo puede verse en la Fig. 21.

La aplicación del cálculo expuesto al caso de una de nuestras instalaciones compuestas de siete columnas en serie, de diseño idéntico a la del apartado I-k), conduce a los resultados que figuran en la Tabla XVII. Para ello hemos numerado las columnas, a partir del extremo pesado, del 1 al 7. Hemos utilizado siete intervalos de Simpson. En dicha Tabla figuran una serie de operaciones para  $2Z = 3.736$ , realizadas rellenando las columnas indicadas con Kr natural.

TABLA XVII

N.º Col. Extr.	C. Ini. $^{84}\text{Kr}$	C. Máx. $^{84}\text{Kr}$	Coord. del Máx.
	0.5690	0.7913	— 0.14
7,1,6	0.6489	0.9396	0.00
1,7,6	0.6822	0.8617	0.00
1,7,2	0.6982	0.8700	— 0.14
7,1,6	0.7103	0.8764	— 0.14
7,1,6	0.7134	0.8798	0.00
1,7,6	0.7125	0.8804	0.00
1,7,2	0.7112	0.8786	— 0.14

Se compara inmediatamente, para esta longitud de columna, la poca eficacia del método empleado, en lo referente al logro de altos enriquecimientos en  $^{84}\text{Kr}$ . La causa más importante de este resultado, es evidentemente la corta longitud de la instalación.

Debe decirse que el hecho de cambiar las proporciones iniciales, bien en la mezcla inicial o en la recarga, conduciría a un posible aumento en el va-

DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

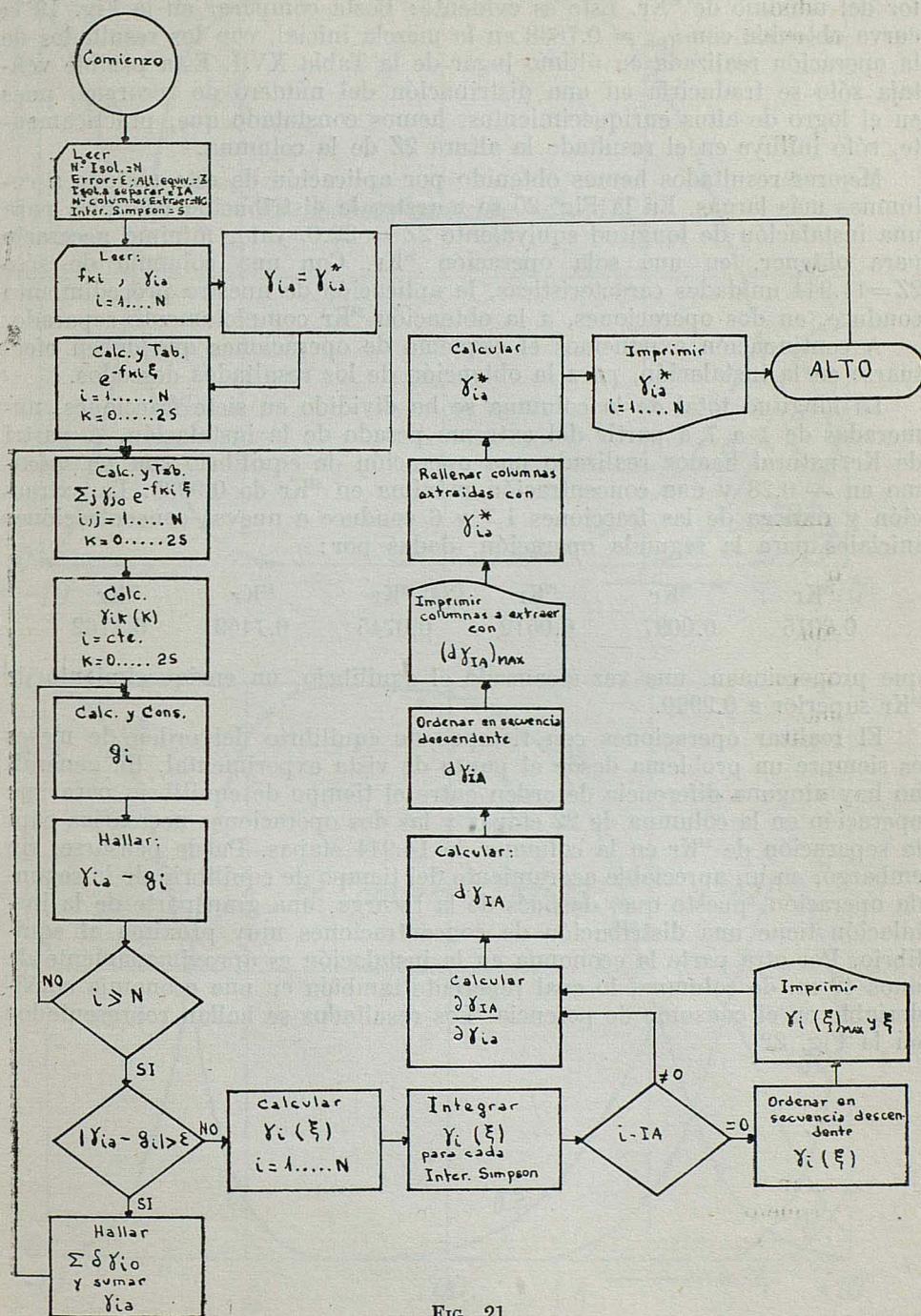


FIG. 21

lor del máximo de  $^{84}\text{Kr}$ . Esto es evidente: Basta comparar en la Fig. 19 la curva obtenida con  $\gamma_{84a} = 0.7838$  en la mezcla inicial, con los resultados de la operación realizada en último lugar de la Tabla XVII. Esta posible ventaja sólo se traduciría en una distribución del número de recargas, pues en el logro de altos enriquecimientos, hemos constatado que, prácticamente, sólo influye en el resultado la altura  $2Z$  de la columna.

Mejores resultados hemos obtenido por aplicación de este método a columnas más largas. En la Fig. 20 se muestra la distribución isotópica para una instalación de longitud equivalente  $2Z = 22.0$ , valor mínimo necesario para obtener, en una sola operación  $^{84}\text{Kr}$ . Con una columna de sólo  $2Z = 14.944$  unidades características, la aplicación de nuestro procedimiento conduce, en dos operaciones, a la obtención  $^{84}\text{Kr}$  completamente separado.

A continuación exponemos el esquema de operaciones que deben efectuarse en la instalación, para la obtención de los resultados deseados.

La longitud total de la columna se ha dividido en siete fracciones, numeradas de 1 a 7 a partir del extremo pesado de la instalación. A partir de Kr natural hemos realizado una operación de equilibrio con un máximo en — 0.28 y una concentración máxima en  $^{84}\text{Kr}$  de 0.9935. La extracción y recarga de las fracciones 1, 7 y 6 conduce a nuevas concentraciones iniciales para la segunda operación, dadas por:

$^{78}\text{Kr}$	$^{80}\text{Kr}$	$^{82}\text{Kr}$	$^{83}\text{Kr}$	$^{84}\text{Kr}$	$^{86}\text{Kr}$
0.0015	0.0097	0.0512	0.0745	0.7469	0.1162

que proporcionan, una vez alcanzado el equilibrio, un enriquecimiento de  $^{84}\text{Kr}$  superior a 0.9990.

El realizar operaciones con tiempos de equilibrio del orden de meses es siempre un problema desde el punto de vista experimental. En general, no hay ninguna diferencia de orden entre el tiempo de equilibrio para una operación en la columna de 22 etapas y las dos operaciones necesarias para la separación de  $^{84}\text{Kr}$  en la columna de 14.944 etapas. Puede pensarse, sin embargo, en un apreciable acortamiento del tiempo de equilibrio de la segunda operación, puesto que, después de la recarga, una gran parte de la instalación tiene una distribución de concentraciones muy próxima al equilibrio. Por otra parte la economía en la instalación es aproximadamente de unos 42 m. de columna, lo cual repercute también en una economía considerable en el consumo de potencia. Los resultados se hallan representados en la Fig. 22.

DIFUSION TERMICA EN MEZCLAS MULTICOMPONENTES

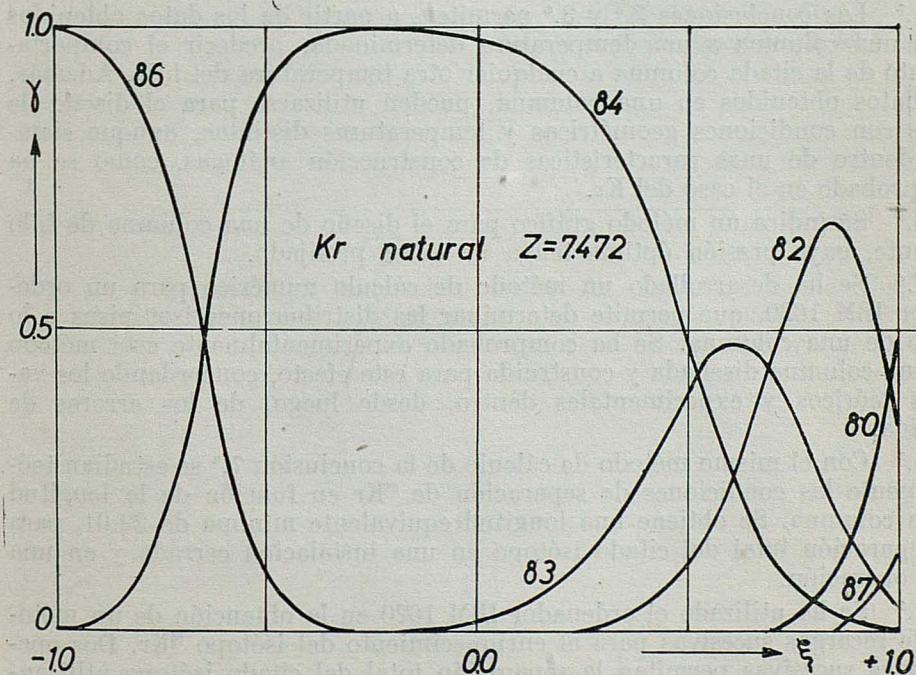
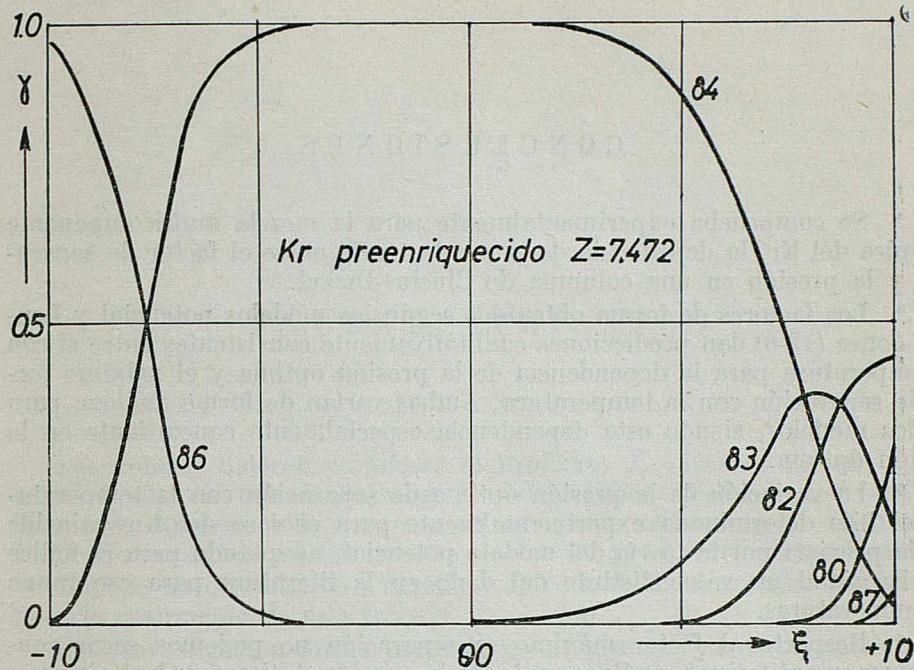


FIG. 22

## CONCLUSIONES

1.<sup>a</sup> Se comprueba experimentalmente para la mezcla multicomponente isotópica del Kr, la dependencia dada por la teoría entre el factor de separación y la presión en una columna de Clusius-Dickel.

2.<sup>a</sup> Los factores de forma obtenidos según los modelos potencial y Lennard-Jones (12-6) dan predicciones cualitativamente consistentes entre sí con la temperatura para la dependencia de la presión óptima y el máximo factor de separación con la temperatura. Ambas varían de forma análoga para los dos modelos, siendo esta dependencia especialmente concordante en la presión óptima.

3.<sup>a</sup> La variación de la presión óptima de separación con la temperatura del hilo determinada experimentalmente para el caso del Kr, coincide con la prevista por la teoría del modelo potencial, adoptando para el índice de viscosidad un valor distinto del dado en la literatura para ese rango de temperaturas.

4.<sup>a</sup> Respecto al factor máximo se separación no podemos sacar conclusiones cuantitativas, análogas a la de la presión óptima, dada la inexactitud con que se conoce el factor de difusión térmica.

5.<sup>a</sup> Las conclusiones 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup> permiten, a partir de los datos obtenidos para una columna a una temperatura determinada, predecir el comportamiento de la citada columna a cualquier otra temperatura del hilo. Además, los datos obtenidos en una columna, pueden utilizarse para el diseño de otras con condiciones geométricas y temperaturas distintas, aunque siempre dentro de unas características de construcción análogas, como se ha comprobado en el caso del Kr.

6.<sup>a</sup> Se indica un método gráfico para el diseño de una columna de hilo caliente, cuya presión óptima tenga un valor prefijado.

7.<sup>a</sup> Se ha desarrollado un método de cálculo numérico para un ordenador IBM 1620, que permite determinar las distribuciones isotópicas a lo largo de una columna. Se ha comprobado experimentalmente este método en una columna diseñada y construida para este efecto, concordando los valores teóricos y experimentales dentro, desde luego, de los errores de medida.

8.<sup>a</sup> Con el mismo método de cálculo de la conclusión 7.<sup>a</sup> se estudian teóricamente las condiciones de separación de  $^{84}\text{Kr}$  en función de la longitud de la columna. Se obtiene una longitud equivalente mínima de 22.01<sub>0</sub> para la separación total del citado isótopo en una instalación cerrada y en una sola operación.

9.<sup>a</sup> Se ha utilizado el ordenador IBM 1620 en la obtención de un método de recargas sucesivas para el enriquecimiento del isótopo  $^{84}\text{Kr}$ . Dos operaciones sucesivas permiten la separación total del citado isótopo utilizando sólo una longitud de columna de 14.941<sub>0</sub>.

### A G R A D E C I M I E N T O S

Los autores quieren agradecer al Prof. Dr. J. Casas su interés y constante ayuda en este trabajo. A los Drs. Gómez Beltrán, Quintanilla y Moneo su colaboración y consejos y acertadas críticas. A H. Montolar y F. Cortés su ayuda en los montajes eléctrico y en vidrio respectivamente.

Uno de nosotros (D. G.) agradece al P. I. O. la concesión de una Beca para la realización de este trabajo.

Esta investigación forma parte de un programa de trabajo parcialmente subvencionado por la J. E. N.

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA  
Sección de Física Experimental del C. S. I. C.

## B I B L I O G R A F I A

- 1 R. C. JONES y W. A. FURRY: Rev. Mod. Phys. 18, 151 (1946).
- 2 W. A. FURRY y R. C. JONES: Phys. Rev. 69, 459 (1946).
- 3 M. L. CURTIS, V. WURSTNER y G. R. GROVE: *Mound Laboratory*. Rept. MLM-1104.
- 4 S. RAMAN y S. C. SAXENA: J. Chem. Phys. 36, 3345 (1962).
- 5 J. CASAS y J. M. SAVIRÓN: An. Rev. Cien. Zaragoza, 26, 117 (1961).
- 6 R. C. SVIRASTAVA, Proc. Phys. Soc. (London) A68, 294 (1955).
- 7 B. B. McINTER y M. J. REISFELD: J. Chem. Phys. 33, 570 (1960).
- 8 Nicrothal Aktiebolaget Kanthal, Hallstahammar, Shweden.
- 9 J. CASAS, J. GOÑI, J. LACASTA y J. R. DE F. MONEO: Inf. Lab. E. M. 001 (1958).
- 10 D. G. CLIFTON: J. Chem. Phys. 38, 1123 (1963).
- 11 J. O. HIRCHSFELDER, C. F. CURTIS y R. B. BIRD: *Molecular Theory of Gases and Liquids* (J. Wiley and Sons, Inc., N. Y. 1954).
- 12 T. KIHARA: *Imperfect Gases*. Originalmente publicado en Japón (Asakusa Bookstore, Tokyo (1949) y traducido al inglés por The United States Offices of Air Research, Wright Patterson Air Force Base.
- 13 E. A. MASON: J. Chem. Phys. 32, 1833 (1960).
- 14 T. I. MORAN y W. W. WATSON: Phys. Rev. 109, 1184 (1958).
- 15 T. I. MORAN y W. W. WATSON: Phys. Rev. 111, 380 (1958).
- 16 E. VON HALLE: Unión Carbide Nuclear Co., Rept. K-1469.
- 17 S. C. SAXENA y S. RAMAN: Rev. Mod. Phys. 34, 252 (1962).
- 18 Véase referencia 10.
- 19 R. SIMÓN: Phys. Rev. 69, 596 (1946).
- 20 R. C. JONES: Phys. Rev. 58, 11 (1940); 59, 1019 (1941).
- 21 H. JENSEN: Angew. Chem. 37, 405 (1941).
- 22 K. CLUSIUS y E. VARDE: Helv. Chim. Act. XLV, 273 (1962).
- 23 L. HOLBORN y A. DAY: Ann. Phys., Lepr. 2, 505 (1900); 22, 1 (1907).
- 24 Comunicación privada de J. MADARIAGA.
- 25 E. SCHUMACHER: Helv. Chim. Act. XXXVI, 949 (1953).
- 26 J. BARDEEN: Phys. Rev. 57, 35 (1940); Phys. Rev. 58, 94 (1940).
- 27 P. DEHYE: Ann. d. Physik, 36, 284 (1939).
- 28 S. D. MAJUMDAR: Phys. Rev. 81, 844 (1951).
- 29 K. COHEN: *The Theory of Isotope Separation*. Mc. Graw Hill N. Y. (1951).
- 30 H. LONDON: *Separation of Isotopes*. George Newnes Ltd. (London).
- 31 K. CLUSIUS y E. SCHUMACHER: Helv. Chim. 36, 961 (1953).
- 32 K. CLUSIUS, E. SCHUMACHER, M. HUBER, M. HURZELER, J. Chem. Phys. 24, 167 (1956).
- 33 K. CLUSIUS y E. BARDE, Helv. Chim. XLV, 2274 (1962).

# REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

P O R

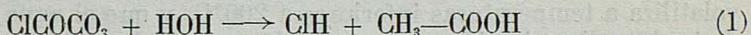
M.<sup>a</sup> PILAR PUEBLA REMACHA

## I. — INTRODUCCION

Uno de los campos de trabajo que han contribuido con su expansión al general resurgimiento de la Química Inorgánica en el presente siglo ha sido el estudio de los disolventes no acuosos. La investigación de los procesos químicos que tienen lugar en disolventes distintos del agua ha cobrado importancia creciente y, en la actualidad está siendo el objeto de trabajo en número de laboratorios cada vez mayor.

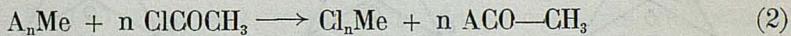
En el caso concreto del cloruro de acetilo, el estudio de sus reacciones con un cierto número de sales inorgánicas (1, 2, 3, 4, 5) ha revelado que en el caso general de una sal hidratada se producen probablemente dos procesos:

De un lado, el cloruro de acetilo reacciona con el agua de cristalización de las sales hidratadas y sufre solvolisis según:



Como el ClH es muy poco soluble en cloruro de acetilo (sobre todo a la temperatura de reflujo) se desprende como gas, mientras el ácido acético simultáneamente formado permanece en disolución.

De otra parte, tiene lugar un intercambio entre el anión de las sales y el cloruro de acetilo, de manera que según el esquema general:

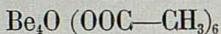


en reacciones suaves y realizables con sencillez y sin grandes exigencias experimentales se producen halogenuros metálicos anhidros o, a veces, solvatados con  $\text{CH}_3\text{—COOH}$  (si la sal de partida es hidratada) por lo que estos procesos tienen importancia preparativa en muchos casos.

Las reacciones de cloruro de acetilo con óxidos han sido poco estudiadas hasta ahora. A Chretien y G. Oechsel dan cuenta en una breve nota (6) de que los óxidos:  $\text{MnO}_2$ ,  $\text{V}_2\text{O}_5$  y  $\text{UO}_3$  se obtienen el cloruro verde de Mn (IV) y cloruros de vanadilo y uranito respectivamente. Además, el calentamiento de  $\text{As}_2\text{O}_3$  o  $\text{As}_2\text{O}_5$  con cloruro de acetilo (7) conduce a un curioso compuesto  $\text{CH}_2(\text{AsCl}_2)_2$ .

Mencionaremos también que el intento de preparar cloruro de berilio anhídrico por calentamiento de óxido de berilio anhídrico con cloruro de acetilo a temperatura de  $200^\circ\text{--}700^\circ\text{C}$  no dio resultados "debido a descomposición

de cloruro de acetilo (8). De acuerdo con los conocimientos adquiridos posteriormente sobre el comportamiento de los compuestos de berilio (3) esta descomposición debe atribuirse a que el producto de reacción no es cloruro, sino acetato básico de berilio".



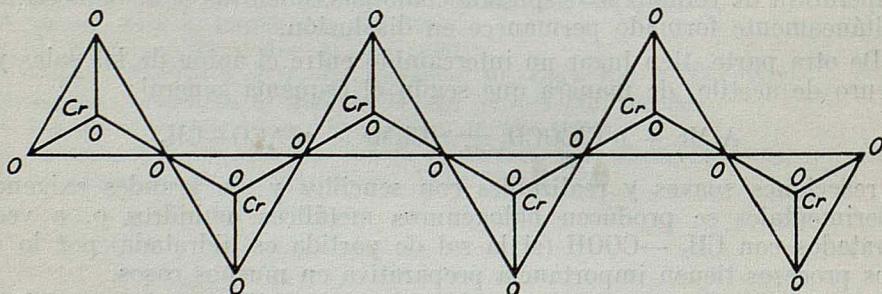
Al comenzar el presente trabajo nos propusimos investigar las reacciones que pudieran tener lugar entre el cloruro de acetilo y los trióxidos de Cr, Mo y W y en lo que sigue damos cuenta de los resultados obtenidos.

## II. — DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

### A. LA REACCIÓN DE TRIÓXIDO DE CROMO CON CLORURO DE ACETILO

La formación de  $\text{CrO}_3$  por condensación de iones  $\text{CrO}_4^=$  a través de la formación de policromatos  $\text{Cr}_n\text{O}_{3n+1}$  conforme se va disminuyendo el pH; la insolubilidad del óxido en  $\text{SO}_4\text{H}_2$  y el color rojo del producto, mucho más intenso que el de los cromatos y dicromatos, permiten ya reconocer que el  $(\text{CrO}_3)_x$  es un alto polímero.

Desde este punto de vista habría que esperar que el  $\text{CrO}_3$  fuese insoluble en cloruro de acetilo y hasta poco reactivo. Sin embargo, teniendo en cuenta que los enlaces no deben de ser muy fuertes pues el producto funde y se volatiliza a temperaturas inferiores a  $200^\circ\text{C}$ , y que el agua provoca su inmediata despolimerización, es permisible suponer la viabilidad de una reacción entre  $\text{CrO}_3$  y  $\text{ClCOCH}_3$  incluso en condiciones suaves.



Ulterior apoyo de este punto de vista procede de considerar la estructura cristalina. El  $(\text{CrO}_3)_x$  está constituido por cadenas infinitas de tetraedros  $\text{CrO}_4$  (9) cada uno de los cuales comparte dos vértices con sus vecinos. Los enlaces Cr—O parecen tener todos la misma longitud (1,79 Å). Las cadenas se unen entre sí solamente por débiles fuerzas de Van der Waals, lo que explica la fácil ruptura de la red cristalina.

### 1. Ensayos preliminares

Si se añade cloruro de acetilo a tróxido de cromo, operando a temperatura ambiente, tiene lugar una reacción exotérmica y violenta al final de la cual aparece un sólido de color verde, mojado por un líquido rojo. El proceso es tan rápido que no es posible apreciar cómo se verifica la transformación.

Si con objeto de disminuir la velocidad y violencia de la reacción, de modo que sea factible una observación de su transcurso, se añade el CrO<sub>3</sub> poco a poco y en pequeñas porciones sobre cloruro de acetilo enfriado a -12°C, se observa que el sólido rojo se disuelve rápidamente formando una disolución de color rojo intenso. Si se deja calentar la disolución hasta la temperatura ambiente y se mantiene así durante 24 horas se observa una lenta variación de color hasta un tono rojo-verdoso.

Al destilar el cloruro de acetilo en exceso, calentando en baño de agua, se obtiene un destilado rojo y queda como residuo un sólido verde-rojizo.

Si se analiza el líquido recién destilado se demuestra que contiene solamente Cr<sup>+6</sup> pero, si se le deja estar a temperatura ambiente la concentración de Cr<sup>+6</sup> va disminuyendo, a la vez que aparece Cr<sup>+3</sup> en cantidad creciente (véase ensayo I, Exp. 6). El residuo sólido contiene Cr<sup>+6</sup> y Cr<sup>+3</sup>.

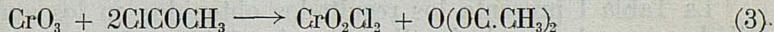
Si la disolución preparada a baja temperatura se deja estar en un desecador de NaOH (para ir eliminando el cloruro de acetilo sin tener que destilar), una muestra del concentrado rojo-oscuro tomada al cabo de dos días revela también la presencia de Cr<sup>+6</sup> y Cr<sup>+3</sup> (exp. 2).

Se intentó precipitar en frío algún sólido de la disolución preparada por adición de éter, tetracloruro de carbono, acetona y benceno anhídrido, sin resultado positivo (Exp. 3).

Cuando la mezcla de reacción se mantiene a temperaturas más bajas de -60°C (Exp. 4) e incluso de -30°C (Exp. 5) se produce una disolución más lenta del CrO<sub>3</sub>, que se mantiene inalterado cuando menos por lo que respecta a la reducción a Cr<sup>+3</sup>, que no se produce.

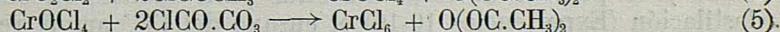
Resumiendo estas observaciones se puede decir que la reacción entre (CrO<sub>3</sub>)<sub>x</sub> y ClCOCH<sub>3</sub>, que produce violentamente a temperatura ambiente, se puede frenar si se mezclan los reactivos a temperatura baja y se dejan calentar después. En la mezcla de reacción se produce un proceso redox con reducción del Cr<sup>+6</sup> a Cr<sup>+3</sup>, proceso cuya velocidad es pequeña a bajas temperaturas y apreciable a temperatura ambiente.

Como hipótesis de trabajo, proponemos que la reacción de CrO<sub>3</sub> con ClCOCH<sub>3</sub> pueda representarse primariamente por el proceso (3)



reacción fuertemente exotérmica que conduce a la formación de cloruro de cromilo y anhídrido acético. Sin embargo, esta reacción no es proceso final y, si la temperatura no es suficientemente baja, se desarrollan otras reacciones que van ligadas a procesos redox, con reducción del Cr<sup>+6</sup> a Cr<sup>+3</sup>.

Podría imaginarse una continuación de la reacción (3) con ulterior sustitución de cada O por dos átomos de Cl según (4), (5),



Los compuestos  $\text{CrOCl}_4$  y  $\text{CrCl}_6$  no han sido preparados hasta ahora y la presencia de  $\text{Cr}^{+3}$  entre los productos de reacción permite reconocer que se acopla un proceso de reducción del propio  $\text{CrO}_3$  o de algunos de los productos  $\text{CrO}_2\text{Cl}_2$ ,  $\text{CrOCl}_4$  o  $\text{CrCl}_6$  si es que estos últimos llegan a formarse.

El proceso fuertemente exotérmico parece ser la transformación de  $\text{CrO}_3$  en  $\text{CrO}_2\text{Cl}_2$ , pues cuando se prepara por separado cloruro de cromilo y se disuelve en cloruro de acetilo, el comportamiento de esta solución es análogo a la del  $\text{CrO}_3$  preparada en frío y dejada calentar, es decir, se produce una reducción a velocidad que depende de la temperatura. Si se destila pasa un líquido rojo que luego se va reduciendo (Exp. 6).

Como no parecía posible obtener más información sobre la base de ensayos preliminares, pues el proceso de reacción entre  $\text{CrO}_3$  y cloruro de acetilo parece bastante complejo, procedimos a realizar los ensayos que se describen a continuación.

## 2. Estudios cuantitativos sobre los productos líquidos de la reacción

En todos los ensayos el modo de operar fue el siguiente: la disolución de  $\text{CrO}_3$  en cloruro de acetilo se realizó siempre a temperatura baja (mezcla frigorífica de hielo y sal) para impedir la reacción violenta que tiene lugar si se opera a temperatura ambiente. Las mezclas de reacción se mantuvieron durante tiempos variables a temperaturas ambiente o inferiores después de lo cual se destiló a presión reducida o presión normal, obteniéndose siempre un destilado rojo y un residuo sólido-verde-rojizo (Ensayo II, experiencias 7-16, pág. 56).

Los líquidos destilados se sometieron a análisis, para lo cual se hidrolizaron vertiendo una muestra de destilado sobre una disolución de  $\text{NaOH}$  valorada. Se operó de esta manera por sospechar que en medio ácido se producía reducción del  $\text{Cr}^{+6}$ , por haber presente materia orgánica, mientras esto queda excluido en medio alcalino por el descenso del potencial de oxidación del sistema  $\text{CrO}_4^{2-}/\text{Cr}^{+3}$ . (En medio  $\text{SO}_4\text{H}_2$  2M:  $E^\circ = + 1,10$ , en medio  $\text{NaOH}$  1M,  $E^\circ = - 0,12$  voltos.) (10).

Al hidrolizar en medio alcalino, el  $\text{Cr}^{+3}$  presente en las muestras precipita inmediatamente en forma de  $\text{Cr}(\text{OH})_3$  que se filtra, lava, calcina y pesa como  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ . El líquido filtrado y los de lavado se pasan a un matraz aforado donde se toman muestras para las determinaciones del  $\text{Cr}^{+6}$  por iodometría y del  $\text{Cl}^-$  como  $\text{ClAg}$ . El  $\text{H}^+$  producido en la hidrolisis se obtuvo valorando en una muestra el exceso de  $\text{NaOH}$  que no se había neutralizado.

La Tabla I presenta los resultados obtenidos en los análisis de los destilados procedentes de las Experiencias 7-16.

En todos los casos el líquido destilado, de color rojo, contiene un compuesto de  $\text{Cr}^{+6}$  y, en algunos casos, se obtienen cantidades sustanciales de  $\text{Cr}^{+3}$ . Sin embargo pudo comprobarse que el destilado original no contiene  $\text{Cr}^{+3}$ , sino que éste se forma después, si se deja pasar algún tiempo antes de tomar la muestra y se mantiene el líquido a temperatura ambiente y a la luz. Por el contrario, si se enfriá con hielo y sal el matraz colector del destilado y se procede a tomar muestras para análisis en cuanto termina la destilación (Experiencias 10-16) el ensayo del  $\text{Cr}^{+3}$  arroja resultados negati-

TABLA I  
Reacción de  $CrO_3$  con  $ClCO.CH_3$ . Composición del destilado rojo

Exp.	Condiciones de trabajo				Tiempo	Observaciones	Análisis del destilado			
	grs. de $CrO_3$	ml. $ClCO.CH_3$	Temp.				$Cr^{+6}$ m. moles	$Cr^{+3}$ m. moles	$Cl^-$ m. moles	$H^+$ m. moles
7	3	10	5°C		5 días	Destilar a 760 mm.	0,596	0,867	7,827	19,607
8	3	10	ambiente		1 día	" "	1,519	0,566	8,379	20,756
9	3	10	ambiente		1 hora	" "	2,155	0,103	11,707	27,694
10	2	10	ambiente		1 hora	" "	0,435	negativo	9,540	24,794
11	2	10	hielo y sal		1/2 hora	" "	0,325	negativo	11,620	23,794
12	3	10	hielo y sal		1/2 hora	Destilar a p. r.	1,172	negativo	12,125	28,429
13	3	10	hielo y sal		1/2 hora	" "	1,665	negativo	11,393	25,673
14	3	10	hielo y sal		1/2 hora	" "	0,743	negativo	2,210	6,162
15	3	10	ambiente		3 horas	" "	1,761	negativo	11,520	24,533
16	2,4	20	hielo y sal		1 hora	" "	1,151	negativo	13,255	26,382

vos o el Cr<sup>+3</sup> existe sólo en pequeña cantidad. En cuanto no se adoptan tales precauciones el destilado contiene cantidades sustanciales de Cr<sup>+3</sup> formado a expensas de una reducción ulterior del Cr<sup>+6</sup> en un proceso que, a temperatura ambiente, transcurre con velocidad apreciable.

Resulta pues, que en la reacción entre CrO<sub>3</sub> y cloruro de acetilo se forma un producto soluble en cloruro de acetilo, a cuyas disoluciones confiere color rojo y que destila en parte conjuntamente con el disolvente o es arrastrado por él, tanto si la destilación se hace a presión reducida como a presión normal. Este compuesto contiene Cr<sup>+6</sup> y es capaz de reaccionar ulteriormente con cloruro de acetilo reduciéndose a un compuesto de Cr<sup>+3</sup>.

Dadas las condiciones del problema, es difícil poder afirmar con seguridad cuál puede ser el compuesto de Cr<sup>+6</sup> contenido en el destilado. De acuerdo con las reacciones (3), (4) y (5) puede tomarse en consideración CrO<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub>, CrOCl<sub>4</sub> y CrCl<sub>6</sub> pero por el hecho de que estos dos últimos son desconocidos y que no nos ha sido posible detectar su existencia, aceptamos que el compuesto arrastrado por el cloruro de acetilo al destilar el exceso de éste es el CrO<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub> que, por lo demás, se comporta en igual forma frente al ClCOCH<sub>3</sub> como se deduce de la experiencia 6.

De cualquier modo, a partir de los resultados analíticos y aceptando que todo el Cr<sup>+6</sup> se encuentra en forma de cloruro de cromilo, que el Cl<sup>-</sup> determinado procede de aquél y del cloruro de acetilo en exceso y que la acidez proviene de la hidrolisis de todos estos productos y del anhídrido acético procedentes de (3) se llega a los cálculos resumidos en la Tabla II, en los que se ve que la suma de peso de CrO<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub>, ClCO.CH<sub>3</sub> y (CH<sub>3</sub>—CO)<sub>2</sub>O iguala al peso de muestra tomada dentro de  $\pm 3\%$ , error no excesivo, si se tiene en cuenta las dificultades inherentes a los análisis y a las características especiales del cloruro de acetilo, sobre todo su fácil hidrolisis que dificulta extraordinariamente la toma de muestras.

TABLA II  
*Composición del destilado*

Exp.	Peso muestra gramos	(a) % peso como Cl <sub>2</sub> O <sub>2</sub> Cr	(b) % peso como ClCOCH <sub>3</sub>	(c) % peso como (CH <sub>3</sub> —CO) <sub>2</sub> O	a + b + c
10	1,1108	6,07	61,26	26,23	93,53
11	0,9456	5,32	91,02	3,04	99,38
12	1,1528	15,74	66,57	18,49	100,82
13	1,0994	23,46	57,57	18,39	104,42
14	0,2654	43,37	21,40	33,46	98,23
15	0,9558	28,54	65,68	7,96	102,18
16	1,0376	17,18	82,85	nulo	100,03

Como valor medio de (a) + (b) + (c) para todos los casos resulta  $100,34 \pm 3$ , ó sea dentro de un error del 3 % lo que, dada la dificultad de toma de muestra, es un resultado aceptable.

### 3. El residuo sólido de la reacción

Los resultados obtenidos en el estudio de los sólidos verde-rojizos que quedan como residuo al destilar el exceso de cloruro de acetilo se describen en el Ensayo III, Exp. 17-21 y se resumen en la Tabla III. Solamente se ha determinado el contenido de  $\text{Cr}^{+6}$  y  $\text{Cr}^{+3}$  de los sólidos. Su relación (última columna de la Tabla III) es un índice de la amplitud del proceso de reducción.

Si se opera a baja temperatura (Exp. 17-20) también se produce reducción pero hay que pensar que ésta tiene lugar sobre todo durante el transcurso de la destilación. La relación  $\text{Cr}^{+3}/\text{Cr}^{+6}$  aumenta también por el arrastre del cloruro de cromilo al destilar el exceso de disolvente.

Se plantea la cuestión de si el  $\text{Cr}^{+6}$  presente en el sólido no procederá sencillamente de su impregnación con cloruro de cromilo. Las experiencias 20 y 21, en las que el sólido se lavó con  $\text{CCl}_4$  anhidro (en la Exp. 21 muy a fondo) conforman esta suposición al aumentar el valor de la relación discutida hasta 250 en la Exp. 21.

Además, la experiencia 21, en la que la reacción se conduce a temperatura ambiente, revela que la reducción ha progresado mucho en estas condiciones de trabajo.

De lo dicho se deduce que si queremos obtener un producto sólido de reacción unitario es preciso forzar las condiciones de trabajo, en lugar de moderarlas enfriando la mezcla de reacción y reduciendo el tiempo de contacto. Esto nos obligará a operar en caliente y a prolongar el tiempo de tratamiento hasta que la reducción del  $\text{Cr}^{+6}$  a  $\text{Cr}^{+3}$  sea completa.

### 4. La reacción entre $\text{CrO}_3$ y $\text{ClCO} \cdot \text{CH}_3$ en caliente

Cuando después de preparar en frío la disolución de  $\text{CrO}_3$  en  $\text{ClCO} \cdot \text{CH}_3$  con objeto de eliminar el calor de reacción debido al proceso (3) se deja calentar a temperatura ambiente y se hierve a reflujo, la reacción progresa hasta la reducción de todo el  $\text{Cr}^{+6}$  al grado de valencia (III). Esto se

pone de relieve porque si, después de calentar a reflujo por lo menos  $1\frac{1}{2}$  a 2 horas, se destila el exceso de cloruro de acetilo queda un sólido verde, que después de lavar con  $\text{CCl}_4$  o éter anhidro y secar en corriente de aire seco o en desecador de vacío sobre  $\text{SO}_4\text{H}_2$  se transforma en un sólido verde pulverulento y de aspecto homogéneo, que sólo contiene cromo en grado de valencia (III). Como el sólido de la exp. 21 contenía solamente 0,4 % en peso de  $\text{Cr}^{+6}$ , se han incluido en la Tabla IV los resultados correspondientes a esta Exp. 21.

Como procede del Ensayo IV [Exp. 21-25] resumido en la Tabla IV, el sólido contiene también Cl, C y H. Estos dos últimos elementos en forma de grupos acetato o de anhídrido acético.

La última columna de la Tabla IV da las relaciones atómicas Cr: Cl: C cuyos valores revelan que la composición del producto varía de una experiencia a otra, lo que parecen indicar que se trata de una mezcla de dos o más sustancias. Con los resultados analíticos, se pueden adjudicar a los

TABLA III

Relación  $Cr^{+3}/Cr^{+6}$  de los residuos sólidos de destilación

Exp.	m. moles de $Cr^{+3}$	m. moles de $Cr^{+6}$	gr. $CrO_3$	Condiciones ml. $ClCOCH_3$	Tiempo de reacción	Observaciones	$Cr^{+3}/Cr^{+6}$
17	2,385	0,476	3	10	½ hora temperat. baja	Destilar a p. r. con trompa de agua	4
18	3,326	0,564	3	10	" "	Destilar a p. r.	6
19	3,694	0,308	3	10	3 horas temperat. baja	Destilar a p. r.	12
20	2,131	0,0738	2,4	20	1 hora temperat. baja	Destilar a p. r. Lavar con $Cl_4C$	27
21	5,592	0,0166	24	200	1 ½ horas temperat. baja	Destilar a p. r. Lavar con $Cl_4C$	250

TABLA IV

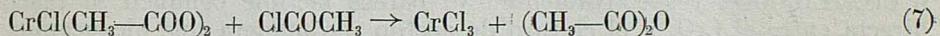
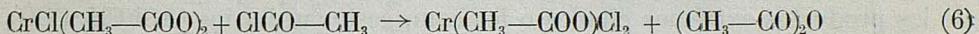
Exp.	$Cr^{+3}$ moles por 100 grs.	$Cl^-$ moles por 100 grs.	C moles por 100 grs.	gr. $CrO_3$	Condiciones de trabajo			Relaciones $Cr^{+3}:Cl:C$
					ml. $ClCOCH_3$	Temper.	Tiempo	
21	0,410	0,415	2,13	24	200	ambiente	1 ½ h.	Destilar a p. r. Lavar con $Cl_4C$ $Cr^{+3}Cl_{1,01}C_{5,18}$
22	0,410	0,439	2,11	2	20	reflujo	3 h.	" " $Cr^{+3}Cl_{1,06}C_{5,16}$
23	0,421	0,468	2,08	2	10	"	2 h.	" " $Cr^{+3}Cl_{1,11}C_{5,06}$
24	0,409	0,559	2,12	5	40	"	1 ½ h.	Precipitar con éter y lavar $Cr^{+3}Cl_{1,36}C_{5,18}$
25	0,429	0,493	1,94	25	240	"	1 ½ h.	Destilar a p. r. Lavar con éter $Cr^{+3}Cl_{1,15}C_{4,51}$

sólidos obtenidos en las Experiencias 21 y 22 las siguientes fórmulas reseñadas en la Tabla V.

TABLA V

Experiencia	Fórmula del compuesto
21	$\text{Cr}^{+3} \text{Cl}_{1.01} (\text{CH}_3\text{—COO})_{1.99} \cdot 0.3 (\text{CH}_3\text{—CO})_2\text{O}$
22	$\text{Cr}^{+3} \text{Cl}_{1.06} (\text{CH}_3\text{—COO})_{1.94} \cdot 0.32 (\text{CH}_3\text{—CO})_2\text{O}$

Sin embargo, los resultados de las Exp. 23, 24 y 25 obligan a admitir que debe existir otro compuesto mezclado, es decir, que la reacción entre  $\text{CrO}_3$  y cloruro de acetilo no termina con la formación del compuesto de  $\text{Cr}^{+3}$ ,  $\text{ClCr}(\text{CH}_3\text{—COO})_2$  sino que, en ciertas condiciones continúa produciéndose una sustitución de los aniones acetato por cloruro, según una reacción de cambio como :



Observando las ecuaciones (6) y (7) podemos suponer que la obtención de  $\text{CrCl}(\text{CH}_3\text{—COO})_2$ ,  $\text{CrCl}_2(\text{CH}_3\text{—COO})$  y  $\text{Cl}_3\text{Cr}$  y por tanto la composición del sólido final depende de las concentraciones de anhidrido acético y cloruro de acetilo.

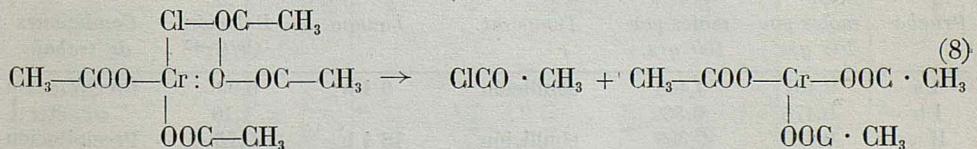
El producto obtenido es, en todos los casos, un sólido verde muy soluble en los ácidos nítrico y clorhídrico concentrado, dando disoluciones de color verde.

En ácido sulfúrico concentrado se disuelve formando espumas y al calentar esta disolución el soluto se carboniza.

Es algo soluble en ácido acético glacial, con coloración verde clara.

Es insoluble en éter, tetracloruro de carbono y cloroformo.

Si se calienta el sólido en un matracito sumergido en ácido sulfúrico hasta la temperatura final de  $230^\circ\text{C}$ , el producto se descompone y se elimina parte del Cl que contiene, puesto que al final del tratamiento la relación  $\text{Cl}/\text{Cr}^{+3}$  es menor que 1 (Exp. 26). En el proceso debe intervenir el  $(\text{CH}_3\text{—CO})_2\text{O}$  coordinado que contiene el producto de partida, produciéndose la pérdida de Cl a través de la eliminación de  $\text{ClCOCH}_2$ , según el esquema :



Hemos dicho que el sólido verde se disuelve muy bien en ClH concentrado. Si se prepara una disolución saturada y se refrigerá a temperatura inferior a  $0^\circ\text{C}$  (Exp. 27) al cabo de dos días se separan cristales verde claro, cuyos análisis arroja una relación  $\text{Cl/Cr} = 3:1$ . Aceptando que el porcen-

tajo indeterminado corresponda a agua de cristalización los cristales obtenidos son  $\text{Cl}_3\text{Cr} \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , lo que significa que en las disoluciones acuosas de ácidos concentrados se produce una descomposición del producto con desplazamiento de los grupos acetato que son sustituidos por los aniones del ácido mineral, más fuerte.

### 5. Desplazamientos de los equilibrios de reacción

Hemos visto en el párrafo precedente que la reacción entre  $\text{CrO}_3$  y cloruro de acetilo, cuando se conduce de manera que se obtenga la reducción a  $\text{Cr}^{+3}$  de todo el cromo presente, lleva a la formación de productos que, de manera general, podemos formular como:



En principio puede imaginarse que  $x$  es capaz de alcanzar cualquier valor comprendido entre 0 y 3. En el primer caso, tendremos el triacetato de cromo y en el segundo el tricloruro de cromo; para los valores intermedios enteros  $x = 1$ ,  $x = 2$ , tendríamos o bien mezclas en proporciones definidas de los productos extremos citados o los compuestos unitarios  $\text{CrCl}(\text{CH}_3 \cdot \text{COO})_2$  ó  $\text{CrCl}_2(\text{CH}_3 \cdot \text{COO})$ , respectivamente. No parece factible conducir la reacción directa entre el  $\text{CrO}_3$  y el cloruro de acetilo, de manera que alcancemos un producto final de composición determinada.

Efectivamente, la siguiente Tabla VI que recoge los resultados del Ensayo V (Exp. 28), demuestra que cuando se hace reaccionar  $\text{CrO}_3$  y  $\text{ClCOCH}_3$  o, respectivamente, con  $\text{ClCO} \cdot \text{CH}_3$  que contiene doble volumen de anhídrido acético se obtienen productos que, en el segundo caso contienen mayor sustitución creciente conforme aumenta el tiempo de tratamiento. Ciertamente que en estas condiciones, no puede esperarse la preparación en estado de pureza de uno ni otro extremo de la serie, pero los resultados obtenidos revelan que parece más asequible llegar a obtener el extremo correspondiente al  $\text{Cr}(\text{CH}_3 \cdot \text{COO})_3$ .

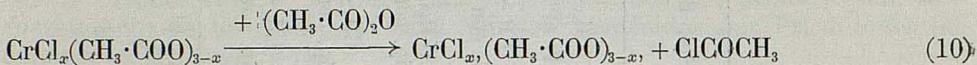
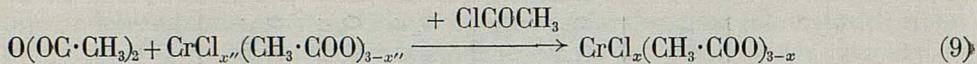
Una consideración de los equilibrios:

TABLA VI

Pruebas a)				Pruebas b)		
5 grs. de $\text{CrO}_3$		EXPERIENCIA 28		5 gr. de $\text{CrO}_3$	40 ml. $\text{ClCOCH}_3$	
Prueba	$\text{Cr}^{+3}$ moles por 100 grs.	$\text{Cl}^-$ moles por 100 grs.	Temperat.	Tiempo	Relación $\text{Cl}/\text{Cr}^{+3}$	Condiciones de trabajo
I a	0,461	0,458	ebullición	6 $\frac{1}{2}$ h.	0,99	Precipitación
I b	0,478	0,569	"	"	1,19	con éter
II a	0,410	0,309	ebullición	16 $\frac{1}{2}$ h.	0,75	Precipitación
II b	0,389	0,612	"	"	1,60	con éter
III a	0,421	0,159	ebullición	56 $\frac{1}{2}$ h.	0,38	Precipitación
III b	0,398	0,630	"	"	1,60	con éter
IV a	0,398	0,080	ebullición	100 h.	0,20	Precipitación
IV b	0,396	0,719	"	"	1,82	con éter

TABLA VII

Exp.	$Cr^{+3}$ moles por 100 grs.	$Cl^-$ moles por 100 grs.	C moles por 100 grs.	Temp.	Tiem- po	Relaciones atómicas	Condiciones de trabajo: Sol. Ex. 25
29	0,451	0,161	—	reflujo	1 h.	$Cl/Cr^{+3}=0,36$	2 gr. sólido Exp.+10 ml. $(CH_3-CO)_2O$ +20 ml. $CH_3-COOH$ Precip. con éter.
30	0,444	0,094	—	"	2 h.	$Cl/Cr^{+3}=0,215$	2 gr. sólido Exp.+10 ml. $(CH_3-CO)_2O$ +20 ml. $CH_3-COOH$ Precip. con éter.
31	0,440	trazas	2,39	"	12 h.	$C/Cr^{+3}=5,43$	2 gr. sólido Exp.+10 ml. $(CH_3-CO)_2O$ +20 ml. $CH_3-COOH$ Precip. con éter.
32	0,438	"	2,47	"	80 h.	$C/Cr^{+3}=5,66$	2 gr. sólido Exp.+10 ml. $(CH_3-CO)_2O$ +20 ml. $CH_3-COOH$ Precip. con éter.
33	0,437	negativo	2,62	"	194 h.	$C/Cr^{+3}=5,99$	2 gr. sólido Exp.+10 ml. $(CH_3-CO)_2O$ +20 ml. $CH_3-COOH$ Precip. con éter.



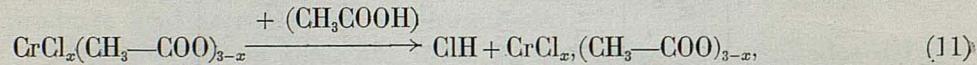
(donde  $x' < x$  y  $x'' > x$ )

permite planear ensayos conducentes a obtener información sobre el proceso de desplazamiento y las posibilidades de preparar los miembros extremos de la serie  $\text{CrCl}_x(\text{CH}_3\text{COO})_{3-x}$ .

A continuación discutimos los resultados obtenidos en el ensayo VI a (Exp. 29-33), y en el ensayo VI b (Exp. 34-36).

#### 6. Tratamiento del sólido verde con ácido y anhídrido acético

Los resultados de estos tratamientos (Ensayo VI a) se recogen en la Tabla VII. Realmente, en lugar de provocar el desplazamiento del cloro con anhídrido acético y a través del desprendimiento de cloruro de etilo, hemos operado con  $(\text{CH}_3\cdot\text{CO})_2\text{O} + \text{CH}_3\cdot\text{COOH}$ , con lo que la reacción de desplazamiento será ahora:



y quedará facilitada por la mayor volatilidad del ClH que se desprenderá al calentar a reflujo, favoreciendo el desplazamiento del equilibrio (11) hacia la derecha de acuerdo con estas previsiones, la Tabla VII demuestra que, en nuestras condiciones de trabajo, conforme aumenta el tiempo de calentamiento va progresando la sustitución del cloro y en la Exp. 33, después de casi 200 horas se logra su total eliminación.

La Tabla VIII da el análisis del producto obtenido en esta experiencia 33, y se ve que los porcentajes de Cr y C coinciden bien con los calculados para el,

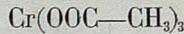


TABLA VIII

Sustancia	% de carbono	% de cromo
Sólido verde obtenido Exp. 38	31,42	22,70
$\text{Cr}(\text{CH}_3\text{—COO})_3$	31,40	22,70

#### 7. Tratamiento del sólido verde con cloruro de acetilo

Los resultados de estos tratamientos (Ensayo VI b) se recogen en la Tabla IX (Exp. 34-36), y Tabla X (Exp. 35 y 36).

El sólido verde (0,493 moles de Cl por 100 grs.) no se disuelve totalmente en cloruro de acetilo, por ello después de los períodos de tratamiento a reflujo con cloruro de acetilo se filtraron las mezclas de reacción.

En los sólidos separados de dichas filtraciones se realizaron los análisis de Cr y Cl y los resultados obtenidos en las experiencias 34, 35 y 36 se resumen en la Tabla IX y puede observarse que el contenido de Cl aumenta con el tratamiento. La relación Cl/Cr se hace mayor que la del sólido de partida, pero no puede apreciarse una influencia sistemática entre la duración del tratamiento en caliente y el aumento en dicha relación. Deben ser otros factores los que determinen la amplitud de la sustitución de los aniones acetato por cloro, en general, aquellos que regulen a las concentraciones de cloruro de acetilo y anhídrido acético, que son las que determinan el desplazamiento del equilibrio (11). Como la cantidad de anhídrido acético no puede eliminarse de la mezcla de reacción, el equilibrio no se desplazará nunca a la formación del tridoruro de cromo.

También obtuvimos en las experiencias 34 y 35 dos sólidos verdes por precipitación del filtrado con éter.

Se determinaron el contenido de Cl y Cr (Tabla X) y aumenta el contenido de cloro y, por tanto, la relación Cl/Cr se incrementa, no coincidiendo exactamente con la de los sólidos correspondientes separados por filtración.

#### B. LA REACCIÓN DE TRIÓXIDO DE MOLIBDENO CON CLORURO DE ACETILO

La formación de trióxido de molibdeno  $\text{MoO}_3$  por precipitación, al acidular las disoluciones acuosas de molibdeno solubles, es un proceso que presenta analogías con la formación de trióxido de cromo y que permite suponer que la insolubilidad del trióxido es consecuencia de un proceso de condensación en disolución; que lleva, en definitiva, a la precipitación de un alto polímero.

Mientras que, como hemos visto, la estructura del  $(\text{CrO}_3)_x$  está constituida por cadenas de tetraedros que se mantienen juntos por la operación de débiles fuerzas de Van der Waals, el trióxido de molibdeno  $\text{MoO}_3$  tiene una estructura en capas, constituida por octaedros  $\text{MoO}_6$ , cada uno de los cuales comparte dos aristas con sus vecinos (11) y además dos vértices con octaedros situados por encima y por debajo del plano ecuatorial. Por lo tanto, en cada octaedro  $\text{MoO}_6$ , tres átomos de oxígeno pertenecen simultáneamente a tres octaedros, dos quedan compartidos por dos octaedros y el sexto pertenece a un solo octaedro.

De este modo, a cada átomo central de Mo le corresponden:

$$(3 \cdot 1/3) + (2 \cdot 1/2) + 1 = 3 \text{ átomos de oxígeno.}$$

En esta estructura tenemos enlaces preferentemente covalentes como responsables de las uniones, que ocasionan una mayor estabilidad del  $\text{MoO}_3$  en comparación con el  $\text{CrO}_3$ . Así, el  $\text{MnO}_3$  funde a  $795^\circ\text{C}$  ( $\text{CrO}_3$  a  $197^\circ\text{C}$ ) y es insoluble en agua, aunque se disuelve en disoluciones acuosas de hidróxidos alcalinos.

Como consecuencia de lo anterior parece lógico esperar que al reacción del  $\text{MoO}_3$  con  $\text{ClCOCH}_3$  tenga lugar con mayor dificultad que en el caso del  $\text{CrO}_3$ .

TABLA IX

Exp.	$Cr^{+3}$ moles por 100 grs.	$Cl^-$ moles por 100 grs.	Temperatura	Tiempo	Relaciones atómicas	Condiciones de trabajo
34	0,431	0,539	ebullición	25 h.	1,26	Mezclar 2 gr. Exp. 25 con 20 ml. $ClCOCH_3$ Filtrar y lavar el precip. con éter.
35	0,434	0,735	"	58 h.	1,69	Mezclar 2 gr. Exp. 25 con 20 ml. $ClCOCH_3$ Filtrar y lavar el precip. con éter.
36	0,431	0,873	"	100 h.	1,56	Mezclar 2 gr. Exp. 25 con 20 ml. $ClCOCH_3$ Filtrar y lavar el precip. con éter.

TABLA X

Exp.	$Cr^{+3}$ moles por 100 grs.	$Cl^-$ moles por 100 grs.	Temp.	Tiempo	Relaciones atómicas	Condición de trabajo
35	0,435	0,775	ebullición	50 h.	1,78	Mezcla 2 gr. Exp. y 20 del $ClCOCH_3$ . Filtrar y precip. con éter.
36	0,426	0,697	"	100 h.	1,63	2 gr. Exp. 25 más ml. de $ClCOCH_3$ . Filtrar y precipitar con éter.

Sin embargo, como de la descripción de la estructura cristalina del  $\text{MoO}_3$  se deduce que en el octaedro  $\text{MoO}_6$  hay un átomo de oxígeno que sólo pertenece a un octaedro, se ofrece aquí un ángulo de ataque para cualquier reactivo que puede hacer factible una reacción sin necesidad de que tenga lugar una despolimerización previa. Por éste, puede esperarse que en lugar de la disolución, seguida de reacción, que ocurre con el trióxido de cromo, se observe aquí un ataque del  $\text{ClCO}_3$  al  $\text{MoO}_3$  en fase heterogénea al que eventualmente puede seguir la disolución del compuesto formado y el ulterior ataque a los fragmentos de bajo peso molecular (y, por ello solubles) en una segunda fase de reacción homogénea.

### 1. Ensayos preliminares

#### Ensayo VII

Si se añade  $\text{MoO}_3$  a cloruro de acetilo a *temperatura ambiente* se produce un ataque al sólido que da lugar a la aparición de una solución roja oscura que tiene un sólido en suspensión (Exp. 37). Separado el líquido por filtración y lavado el precipitado con éter, se obtiene un sólido verde que contiene Mo y Cl. Por la pequeñísima cantidad producida en todas las experiencias, y porque además, contiene cantidades variables de  $\text{MoO}_3$  que no ha reaccionado no ha podido determinarse su naturaleza, aunque parece que puede tratarse de pentacloruro de molibdeno  $\text{MoCl}_5$ .

El líquido rojo calentado a reflujo adquiere, a la media hora aproximadamente, una coloración verde que prolongando el calentamiento pasa a pardo oscura. Esto puede ser indicio de que la reacción del  $\text{MoO}_3$  con cloruro de acetilo se produce en tres fases.

1.<sup>a</sup> Disolución a través de reacción del  $\text{MoO}_3$  en cloruro de acetilo, dando una disolución roja.

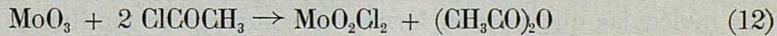
2.<sup>a</sup> Transformación de la disolución roja en verde.

3.<sup>a</sup> Transformación de la disolución verde en pardo oscuro.

Estas tres fases pudieran responder a distintos grados de valencia del molibdeno, por las que tiene que pasar antes de reducirlas a la valencia más estable en las condiciones de reacción.

En apoyo de esta suposición hemos observado los siguientes hechos:

1.<sup>o</sup> Que la solución roja al añadirla a tetracloruro de carbono a temperatura ambiente produce un precipitado amarillo, poco estable al aire, que se disuelve en sosa y que contiene Cl y Mo. Este precipitado (por su solubilidad en sosa dando una disolución incolora) debe ser un compuesto de molibdeno exavalente formado probablemente por la siguiente reacción:



2.<sup>o</sup> Que si la disolución, cuando adquiere color verde, se vierte sobre tetracloruro de carbono se produce un precipitado verde poco estable que no se disuelve totalmente en NaOH, apareciendo un precipitado semejante al hidróxido férrico.

3.<sup>o</sup> Hemos dicho que al continuar el calentamiento, la disolución pasa a color pardo. Si entonces la vertemos sobre tetracloruro de carbonos quedan unas masas pegajosas pardas que resulta difícil separar de las paredes del matraz de reacción.

4.<sup>o</sup> Si el calentamiento se prolonga y se añaden nuevas cantidades de cloruro de acetilo, para que siempre se encuentre la mezcla de reacción en exceso de este reactivo, van apareciendo precipitados pardos en la disolución.

Calentando 50 horas y eliminando el exceso de cloruro de acetilo por destilación, dichos precipitados y el líquido sobrenadante producen sólidos sueltos de color marrón y aparentemente homogéneos al lavarlos con éter.

Véase descripción más detallada en Ensayo VII (Exp. 37).

Como no parecía factible obtener más información sobre la base de ensayos meramente cualitativos procedimos a realizar ensayos cuantitativos de las tres fases señaladas de reacción, sometiendo a análisis cada una de ellas, tanto si precipita con tetracloruro de carbono, como con éter.

## 2. *El producto final de la reacción de MoO<sub>3</sub> y cloruro de acetilo*

A la vista de la evolución que va sufriendo el sistema reaccionante, como se deduce de las observaciones cualitativas que acabamos de reseñar, decidimos comenzar nuestro estudio de la reacción entre MoO<sub>3</sub> y ClCOCH<sub>3</sub> por los productos que se forman finalmente, cuando se prolonga el tiempo de reacción a la temperatura de reflujo del ClCOCH<sub>3</sub>.

Los resultados obtenidos en los análisis de los sólidos marrones, separados del líquido de reacción mediante precipitación con éter anhidro, se describen en el Ensayo VIII (Exp. 38-43), Tabla XI.

El producto sólido, marrón, de grano fino, obtenido en todos los casos no es soluble en NaOH pero se disuelve en NaOH que contiene H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, después de un tratamiento prolongado en caliente. Pudo comprobarse que dicho sólido contiene Mn, C y Cl y de su insolubilidad en álcali se deduce que el grado de valencia del Mo es inferior a Mo<sup>+6</sup>.

En la Tabla XI se resumen los resultados analíticos que permiten calcular la relación atómica Cl/Mo. Salvo en la experiencia 38 en que el tiempo de reacción fue muy corto, los valores de Cl/Mo se aproximan o coinciden exactamente con la razón 4. El producto no es, sin embargo el Cl<sub>4</sub>Mo que se describe en la literatura (12) como un polvo pardo pues nuestro preparado contiene además cantidades sustanciales de carbono e hidrógeno.

La Tabla XII contiene los resultados de las determinaciones de carbono, y en su última columna los valores de la relación atómica C/Mo.

Dadas las condiciones en que se produce la reacción y en las que se lleva la separación del sólido marrón (por precipitación en éter), las únicas moléculas que pueden formar el complejo de molibdeno son el anhídrido acético que se produce en la reacción (12) y el éter, que como hemos dicho, es el agente precipitante.

Teniendo en cuenta los % de C, Cl y Mo obtenidos en los análisis de las experiencias 38-43 (Tablas XI y XII) podemos deducir que el carbono no puede encontrarse como anhídrido acético, pues la cantidad de éste que

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

corresponde al contenido de carbono de las experiencias citadas da con los % de Cl y Mo una suma muy superior a cien, como se indica expresamente en la Tabla XIII.

TABLA XI

Exp.	Mo moles por 100 grs.	Cl moles por 100 grs.	Temp.	Tiempo	Relación Cl/Mo	Condiciones de trabajo
38	0,2165	0,558	reflujo	1 h.	2,48	3 gr. $\text{MoO}_3 + 25 \text{ ml. ClCOCH}_3$ Destilar baño arena, lavar con éter.
39	0,1945	0,718	"	8 h.	3,64	3 gr. $\text{MoO}_3 + 25 \text{ ml. cloruro de acetilo.}$ Precipitar con éter
40	0,1845	0,752	"	30 h.	4,07	4 gr. $\text{MoO}_3 + 50 \text{ ml. cloruro de acetilo.}$ Precipitar con éter
41	0,1909	0,757		20 h.	4,00	3 gr. $\text{MoO}_3 + 20 \text{ ml. cloruro de acetilo.}$ Precipitar con éter
42	0,1807	0,719	50-70°C reflujo	50 h. 50 h.	3,96	3 gr. $\text{MoO}_3 + 20 \text{ ml. cloruro de acetilo.}$ Precipitar con éter
43	0,1868	0,743	50-70°C reflujo	50 h. 50 h.	3,99	4 gr. $\text{MoO}_3 + 25 \text{ ml. cloruro de acetilo.}$ Precipitar con éter

TABLA XII

Exp.	% Mo	% Cl	% C	C moles por 100 grs.	Mo moles por 100 grs.	Relación: C/Mo
39	18,67	25,45	34,06	2,838	0,1945	14,60
40	17,75	26,65	32,31	2,693	0,1849	14,56
41	18,34	26,81	34,58	2,882	0,1909	15,10
42	17,35	25,48	36,74	3,061	0,1807	17,10
43	17,93	26,33	35,83	2,986	0,1868	16,05

En cambio suponiendo que el carbono se encuentra en forma de éter, la suma de los % se aproxima mucho más al cien por cien y si no se mantiene exactos puede ser debido a la forma como se obtiene el complejo. El compuesto de molibdeno se forma en presencia de anhídrido acético producido en la propia reacción (12) y debe competir con el éter para aportar las moléculas que se coordinan con el  $\text{MoCl}_4$ . Puesto que además, siempre se ha observado precipitado en la mezcla final de reacción, éste debe absorber anhídrido acético y su sustitución por éter debe hacerse en fase sólida y por tanto lentamente. Por ello, sólo en la experiencia 43 en que el tratamiento con éter fue prolongadísimo la sustitución debió ser total.

En esta experiencia 43 la relación C/Mo es igual a 16, las moléculas coordinadas de éter son cuatro, y se forma un complejo de molibdeno tetra-valente con índice de coordinación 8 de acuerdo con las propiedades de este elemento (13) y el sólido obtenido responde a la fórmula:



Comparando los % de los análisis de la experiencia 43 y los calculados para el compuesto (13) observamos que aquellos, tanto por cientos coinciden con los teóricos.

En vista de la discusión anterior sobre la presencia de  $(\text{CH}_3 - \text{CO})_2\text{O}$  o de  $(\text{CH}_3 \cdot \text{CH}_2)_2\text{O}$  coordinados al átomo central de Mo, tiene interés comparar los

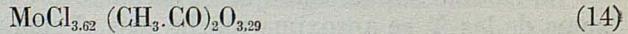
TABLA XIII

Exp.	$\% (\text{CH}_3 - \text{CO})_2\text{O}$		$\% \text{ Mo}$	$\% (\text{CH}_3 - \text{CH}_2)_2\text{O}$		$\% \text{ total con la su-}$		$\% \text{ total con la su-}$	$\text{Error}$ %
	(a)	(b)		(b)	posición (a)	Error %	posición (b)		
39	74,76	19,54	23,29	54,24	117,59	17,57	97,07	-2,93	
40	72,37	25,45	18,67	52,50	116,49	16,48	96,62	-3,38	
41	68,67	26,65	17,75	29,81	113,07	13,07	94,21	-5,79	
42	78,05	25,48	17,35	56,64	120,88	20,88	99,44	-0,54	
43	76,14	26,33	17,93	55,24	120,40	20,40	99,50	-0,50	

TABLA XIV

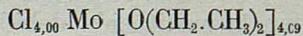
Compuesto	% Cl	% Cl	% C
Experiencia 43	17,93	26,38	35,83
$\text{MoCl}_4 \cdot 4(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$	17,98	26,56	35,90

productos obtenidos al emplear éter como agente precipitante, con los que resultan cuando precipitamos con un disolvente sin átomos dadores, como el  $\text{CCl}_4$  anhidro. En este caso, se obtienen sólidos mal definidos, cuyos análisis responden a la fórmula bruta (exp. 44).



como consecuencia de que el  $\text{CCl}_4$  (a diferencia del éter) tiene también acción precipitante sobre productos intermedios que contamina el sólido preparado.

En las mismas condiciones preparativas (Experiencia 43) la precipitación con éter anhidro conduce a un producto de fórmula:



### 3. El producto de la primera fase de reacción

Hemos dicho que al disolver el  $\text{MoO}_3$  en cloruro de acetilo, se produce una coloración roja, en presencia siempre de una pequeña cantidad de precipitado. Filtrada la mezcla de reacción y separado el sólido en suspensión se obtiene al añadir la solución a tetracloruro de carbono, un precipitado amarillo que adquiere al filtrar y lavar una coloración verde.

En la Tabla XV se resumen los resultados obtenidos en los análisis de cloro y molibdeno de los sólidos obtenidos en el Ensayo IX (Experiencias 45-50) encaminadas a estudiar la naturaleza del compuesto que produce la coloración roja en las mezclas de reacción  $\text{MoO}_3$  y cloruro de acetilo. Todas las experiencias se realizaron a temperatura ambiente y produciendo la separación del precipitado amarillo con la máxima rapidez para que no se produjesen transformaciones. De estos análisis deducimos la relación  $\text{Cl/Mo}$  y observamos que en todas las experiencias se mantiene aproximadamente igual a 2. Por otra parte como estos sólidos amarillos se disuelven totalmente en sosa, podemos suponer que el molibdeno se encuentra en forma exavalente.

En la literatura científica (14) existe un compuesto de Mo(VI), el  $\text{Cl}_2\text{O}_2\text{Mo}$  descrito como un sólido amarillo y en el que naturalmente la relación  $\text{Cl/Mo} = 2$ . Podríamos suponer en principio que se tratase de este compuesto, pero comparando los moles por 100 grs. de Cl y Mo teóricos, con los obtenidos en las experiencias (Tabla XV) puede observarse la no coincidencia. Por otra parte determinada la concentración de iones hidrógeno, ésta es superior a la producida por el contenido de Cl y Mo. Todo ello nos indica la existencia de otros elementos en la sustancia obtenida.

Dada la facilidad del molibdeno para formar complejos podríamos suponer que estuviese en esta forma en los sólidos amarillos obtenidos. Se conoce un complejo de fórmula  $\text{Cl}_2\text{O}_2\text{Mo.H}_3\text{O}$  (15). Podría tratarse de un complejo de este tipo con otra clase de molécula de coordinación.

El oxidocloruro de molibdeno se puede producir según la reacción antes señalada (14) y entonces la mezcla de reacción contiene además de cloruro de acetilo y oxidocloruro de molibdeno (VI), anhídrido acético y éste puede ser el compuesto coordinado al Mo (VI).

Con este supuesto, el exceso de acidez señalado anteriormente debe provenir de las moléculas de anhídrido acético coordinadas. Calculamos los moles por 100 grs. que suponen este exceso y a partir de ellos la relación:  $\text{Mo}/(\text{CH.CO})_2\text{O}$  (Tabla XV) observado que se halla muy próxima a la unidad.

Por tanto el compuesto separado de la disolución roja parece ser el  $\text{Cl}_2\text{O}_2\text{Mo} \cdot (\text{CH}_3\text{CO})_2\text{O}$ .

La relación Cl/Mo en algunos casos se aproxima tan sólo a la relación 2, bien pudiera ser debido a que se formen trazas de compuestos más clorados, o que al llevar a cabo la precipitación con tetracloruro de carbono no se produce la eliminación total del cloruro de acetilo que empapa al precipitado.

La relación  $(\text{CH.CO})_2\text{O}/\text{Mo}$  (Tabla XVI) también es superior a 1, aunque se mantenga cerca de este valor, puede ser por el mismo motivo que hemos señalado en el exceso de Cl.

TABLA XV

Exp.	Mo moles por 100 grs.	Cl moles por 100 grs.	Relación Cl/Mo	Mezcla de reacción		Condiciones de reacción
	MoO <sub>3</sub>	ClCOCH <sub>3</sub>				
45	0,300	0,632	2,10	3 gr.	25 ml.	12 horas temperatura ambiente. Eliminación del ClCOCH <sub>3</sub> por evap. en desecador de NaOH
46	0,290	0,584	2,02	3 gr.	15 ml.	12 horas temperatura ambiente. Filtrar Precipitar con Cl <sub>4</sub> C
47	0,319	0,684	2,11	3 gr.	15 ml.	12 horas temperatura ambiente. Filtrar Precipitar con Cl <sub>4</sub> C
48	0,296	0,631	2,12	3 gr.	15 ml.	12 horas temperatura ambiente. Filtrar Precipitar con Cl <sub>4</sub> C
49	0,306	0,636	2,07	3 gr.	15 ml.	12 horas temperatura ambiente.
	0,502	1,004	2,00	3 gr.	15 ml.	Filtrar. Precipitar con Cl <sub>4</sub> C Compuesto teórico Cl <sub>2</sub> O <sub>2</sub> MO

## REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

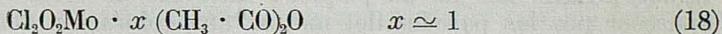
TABLA XVI

Exp.	$H^+$ moles por 100 grs.	$(CH_3-CO)_2O$ moles por 100 grs.	Mo moles por 100 grs.	Relación $(CH_3CO)_2O/Mo$
46	1,923	0,380	0,290	1,31
47	2,159	0,430	0,319	1,25
48	1,398	0,338	0,296	1,12
49	1,932	0,349	0,306	1,11

A partir de los análisis calculamos los % de los elementos que entran en al composición de los sólidos amarillos. El resumen de dichos cálculos está reseñado en la Tabla XVII. En ella también figuran las sumas totales de los % de todas las experiencias, y también el contenido de oxígeno correspondiente al compuesto  $Cl_2O_2Mo$  que suponemos es el producto intermedio de reacción.

La suma total se mantiene en casi todas las experiencias inferior al 100 por 100. Esto es debido a que por la fácil descomposición del precipitado no se prolongó el tiempo de secado y lavado, y aparecían al disolver las muestras para el análisis pequeñísimas gotas de  $Cl_4C$  que se eliminaban al calentar.

Dentro de los errores operatorios, debidos a la baja estabilidad del producto que nos impide eliminar por completo el  $CCl_4$  empleado para precipitarlo, podemos determinar que el compuesto obtenido en la primera fase de reacción es el *dioxidocloruro de molibdeno VI*, que al separarlo de la disolución de cloruro de acetilo precipita con  $x$  moléculas de  $(CH_3-CO)_2O$ , aproximándose el valor  $x$  a la unidad. Es decir el sólido separado tiene esta composición :



#### 1. Los productos de la fase intermedia de reacción

Hemos dicho que al disolver el  $MoO_3$  en cloruro de acetilo se produce una coloración roja. Al calentar esta disolución roja cambia de color y al cabo de un tiempo (20 minutos) la disolución presenta un color verde. Al añadir dicha solución a tetracloruro de carbono se produce un precipitado verde que aún en desecador de  $SO_4H_2$  o cal sodada se descompone rapidísimamente, obteniéndose una masa de color azul.

En la Tabla XVIII se resumen los resultados obtenidos en el Ensayo X (exp. 50-53) en el que se pretende deducir la naturaleza del precipitado verde que se produce en  $Cl_4C$  cuando la mezcla de reacción presenta dicho color. En ella figuran los análisis de cloro y molibdeno de las tres experiencias, en las que se varían los tiempos de reacción y la relación de reactivos intentando conseguir un compuesto puro.

Como se observa en la Tabla XVIII de los resultados analíticos se deducen unas relaciones  $Cl/Mo$  superiores a 2, pero alejadas también de 3. Esto

nos hace suponer que es una mezcla de sustancias las separadas en las condiciones señaladas.

TABLA XVII

Exp.	% Cl	% Mo	% $(CH_3-CO)_2O$	$\frac{\% O_2 \text{ del}}{Cl_2O_2Mo}$	% total	Composición del sólido
46	20,72	27,82	38,86	9,3	96,69	$MoO_2Cl_{2,02}(CH_3-CO)_2O_{1,31}$
47	24,25	30,61	42,62	10,20	107,45	$MoO_2Cl_{2,11}(CH_3-CO)_2O_{1,25}$
48	22,38	28,34	34,51	9,44	94,77	$MoO_2Cl_{2,12}(CH_3-CO)_2O_{1,13}$
49	22,56	29,34	35,61	9,78	97,29	$MoO_2Cl_{2,07}(CH_3-CO)_2O_{1,11}$
Media	22,28	28,81	38,22	9,68	99,40	$MoO_2Cl_{2,09}(CH_3-CO)_2O_{1,18}$

TABLA XVIII

Exp.	Cl		Mo		Condiciones de trabajo				
	moles por 100 grs.	moles por 100 grs.	Relación Cl/Mo	gr. MoO <sub>3</sub>	ml. CICOCH <sub>3</sub>	Temp.		Separación	Tiempo del compuesto
50	0,680	0,295	2,31	3	20	ebullición	15 m.	Precipitación con Cl <sub>4</sub> C	
51	0,782	0,311	2,50	2	20	"	20 m.	Precipitación con Cl <sub>4</sub> C	
52	0,537	0,214	2,52	3	15	"	20 m.	Precipitación con Cl <sub>4</sub> C	

La marcha de la reacción en esta fase es como vamos a describir a continuación. Al cabo de un pequeño intervalo de calentamiento, comienza a aparecer por las paredes del matraz una coloración verde. Prolongando la ebullición, llega un momento que rápidamente se convierte en una masa de color pardo no muy oscura y con el tiempo se intensifica la coloración.

Por ello, intentamos determinar la evolución de dicha reacción, para conseguir dilucidar qué compuesto de Mo es el que comunica el color verde a la mezcla de reacción.

Para ello, realizamos el Ensayo XI. Calentamos la mezcla de reacción durante un intervalo de tiempo y tomamos muestras de dicha mezcla: antes que presentase el color netamente verde (Exp. 53), en el momento de tomarlo (exp. 54) y al adquirir la coloración parda (Exp. 55-56). Los resultados obtenidos de los análisis de Cl y Mo de los sólidos separados figuran en la Tabla XIX. En ninguna de las precipitaciones obtuvimos una relación Cl/Mo de valor entero y, por tanto, un compuesto definido. En las experiencias 55-56 al intentar la precipitación del sólido con un disolvente Cl<sub>4</sub>C o éter anhidros, se producen unas masas pegajosas, que no es posible separarlas del matraz de precipitación aún con tratamientos prolongados con dichos disolventes.

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

TABLA XIX

Prueba: 40 ml. de  $\text{ClCOCH}_3$  + 10 grs. de  $\text{MoO}_5$

Exp.	Cl moles por 100 grs.	Mo moles por 100 grs.	Relación Cl/Mo	Temp.	Tiempo	Condiciones de trabajo
53	0,545	0,236	2,3	ebullición	10 m.	Tomar 10 ml. y pre- cipitar con $\text{Cl}_4\text{C}$ para separar el compe.
54	0,571	0,238	2,4	"	15 m.	" "
55	—	—	Se producen ma- sas que no pue- den separarse del matraz	"	20 m.	Tomar 10 ml., preci- pitar con $\text{Cl}_4\text{C}$ y tra- tar prolongadamente.
56	—	—	"	"	20 m.	" "

### C. LA REACCIÓN DE TRIÓXIDO DE WOLFRAMIO CON CLORURO DE ACETILO

El trióxido de wolframio se forma por precipitación al acidular las disoluciones acuosas de wolframatos solubles, en un proceso que presenta analogías con la formación de los trióxidos de cromo y molibdeno y que también permite suponer que la insolubilidad del trióxido de wolframio es consecuencia de un proceso de condensación.

Mientras que, como hemos visto, la estructura de los  $(\text{CrO}_3)_x$  y  $(\text{MoO}_3)_x$  son redes moleculares, constituidas por cadenas de tetraedros en el primer compuesto y una estructura en capas constituida por octaedros  $\text{MoO}_6$  en el segundo, el trióxido de wolframio es una red iónica tipo  $\text{ReO}_3$  (16), (17), (18), lo que determina una mayor estabilidad en comparación con los trióxidos de Cr y molibdeno.

Ha quedado determinado a lo largo de las experiencias del apartado B, que el  $\text{MoO}_3$  reacciona con más dificultad que el  $\text{CrO}_3$ . Lógicamente el  $\text{WO}_3$  debe presentar aún mayor dificultad, puesto que para disolverse es necesario que se destruya la red iónica, y por tanto, tenga lugar un ataque en fase heterogénea en vez de una despolimerización o sustitución como sucede en los anteriores casos.

#### 1. Ensayos preliminares

##### Ensayo XII

Si se añade  $\text{WO}_3$  a cloruro de acetilo a temperatura ambiente se produce un ataque al sólido que da lugar a la aparición de una solución amarilla, que intensifica su color muy lentamente y queda siempre una gran cantidad de sólido en suspensión. Aún prolongado el tratamiento un intervalo de tiempo grande, la cantidad de precipitado presente en la mezcla de reacción no varía en proporción apreciable.

Si calentamos a ebullición la mezcla de reacción  $WO_3$  y cloruro de acetilo, aparece una solución roja que se intensifica con el tiempo de calentamiento. El color se hace oscuro, pero aún prolongando este tratamiento hasta 150 horas existe sólido en suspensión de la disolución roja.

Como no parecía factible obtener más información sobre la base de ensayos meramente cualitativos procedimos a realizar ensayos cuantitativos en las dos condiciones de trabajo señaladas. A temperatura ambiente y a la temperatura del reflujo de la solución.

## 2. Reacción del $WO_3$ y cloruro de acetilo a temperatura ambiente

Si mantenemos en agitación durante 30 días la mezcla  $WO_3$ -cloruro de acetilo a temperatura ambiente, se obtiene una disolución roja en presencia de abundante cantidad de sólido en suspensión.

Si se filtra la disolución, aparece un sólido verde y un filtrado de color rojo.

Del filtrado rojo no pudo separarse ningún sólido por precipitación con éter, tetracloruro de carbono, etc. El sólido verde dio positivo los análisis de C, Cl y W.

En la Tabla XX se resumen los resultados analíticos obtenidos del sólido verde. (Ensayo XIII, Exp. 58).

Observando estas relaciones, que no responden a ninguna fórmula definida, y teniendo en cuenta el alto contenido en wolframio, Tabla XXI, sólo podemos asegurar que la mayor parte del sólido es  $WO_3$  sin reaccionar, puesto que además no existen en él aniones en cantidad como para neutralizar las valencias del wolframio.

TABLA XX

## EXPERIENCIA 58

Producto	Productos de reacción $WO_3$ -CICOCH <sub>3</sub> a temperatura ambiente			Relaciones atómicas
	W moles por 100 grs.	C moles por 100 grs.	C moles por 100 grs.	
Sólidos en suspensión	0,402	0,088	0,087	$WCl_{0.2}C_{0.2}$

TABLA XXI

Sólido	% de wolframio
Sólido verde	73,92
$WO_3$	79,3

La experiencia 58 muestra que la velocidad de reacción a temperatura ambiente es pequeña y que en esas condiciones tampoco es posible obtener productos intermedios puros. Por ello, se realizaron otros ensayos en los que la temperatura de reacción, es la ebullición de la solución.

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

3. Reacción del  $WO_3$  y cloruro de acetilo a temperatura de reflujo

En la Tabla XXII se resumen los resultados obtenidos en el Ensayo XIV (Experiencias 59-60), en el que la mezcla de reacción  $WO_3$  + cloruro de acetilo se calienta a intervalos de tiempo variables. Al finalizar el calentamiento se añade toda la masa de reacción a éter separándose unos sólidos grisáceos cuyos contenidos en W, Cl y C figuran en dicha Tabla.

Las dos experiencias nos señalan por las relaciones atómicas Cl/W que el Cl debe neutralizar a una valencia del W, pero no se obtienen sólidos puros. Pudiera ser debido a que no se realizó la separación del sólido existente en suspensión en la mezcla de reacción, y que es éste el que impurifica al producto formado.

TABLA XXII

Exp.	<i>W</i>	<i>Cl</i>	<i>C</i>	<i>Relaciones atómicas</i>
	moles por 100 grs.	moles por 100 grs.	moles por 100 grs.	
59	0,280	0,200	1,110	$W Cl_{0,71} C_{3,9}$
60	0,265	0,321	1,736	$W Cl_{1,2} C_{6,55}$

En el Ensayo XV (Exp. 61 y 62) después de largos períodos de calentamiento se filtró la mezcla de reacción y se separaron unos sólidos de color marrón.

En la Tabla XXIII se recogen los resultados analíticos del sólido marrón separado por filtración en la experiencia 61.

Sus relaciones atómicas no responden a las de una fórmula definida, y suponiendo que el W esté en estado de oxidación 4 ó 5 la cantidad de carbono y cloruro no es suficiente para neutralizar las valencias del W. Como por otra parte no ha sido posible separar un compuesto de W intermedio estos resultados parecen indicarnos que en el sólido marrón hay una gran proporción de  $WO_3$  sin reaccionar.

TABLA XXIII

Exp.	<i>W</i>	<i>Cl</i>	<i>C</i>	<i>Temp.</i>	<i>Tiempo</i>	<i>Relaciones atómicas</i>
	moles por 100 grs.	moles por 100 grs.	moles por 100 grs.			
67	0,337	0,091	0,837	reflujo	80 h.	$W Cl_{0,29} C_{2,48}$

Los líquidos filtrados en las experiencias 61 y 62 se añadieron a éter anhidro y se produjeron precipitaciones de unos sólidos pardo-grisáceos, que después de lavar repetidas veces con éter, muy prolongadamente en la experiencia 62, realizamos su análisis cuyos resultados se resumen en la Tabla XXIV.

TABLA XXIV

Exp.	W		Cl		C		Relaciones atómicas	Temp.	Condiciones de reacción			Separación del compuesto formado
	moles por 100 grs.	100 grs.	moles por 100 grs.	100 grs.	moles por 100 grs.	100 grs.			Tiempo	MoO <sub>3</sub>	ClCOCH <sub>3</sub>	
61	0,214	0,276	1,877	W Cl <sub>1,24</sub> C <sub>8,7</sub>	ebullición	80 h.	3 gr.	20	Renovar ClCOCH <sub>3</sub> . Filtrar la mezcla y precipitar y lavar con éter.			
62	0,221	0,217	1,830	W Cl <sub>0,98</sub> C <sub>8,2</sub>	ebullición	140 h.	3 gr.	50	Renovar ClCOCH <sub>3</sub> . Filtrar la mezcla y precipitar y lavar con éter.			

Los contenidos del Cl, W y C de los sólidos pardo-grisáceos nos indican, que la relación Cl/W se mantiene aproximadamente = 1 y C/W = 8. Y si se supone que el C está en forma de acetato, la relación acetato/W se approxima a 4 y su composición es la señalada en la Tabla XXV.

TABLA XXV

Experiencia	Composición
61	W Cl <sub>1,24</sub> (CH <sub>3</sub> —COO) <sub>4</sub>
62	W Cl <sub>0,98</sub> (CH <sub>3</sub> —COO) <sub>4</sub>

Los % de W, Cl y C en la experiencia 62, en que se realizó un prolongado lavado con éter anhidro, coinciden dentro de los errores de trabajo con los del compuesto teórico WCl (CH<sub>3</sub>—COO)<sub>4</sub> (Tabla XXVI).

TABLA XXVI

Exp.	% W	% Cl	% C
62	40,6	7,48	21,08
WCl (CH <sub>3</sub> —COO) <sub>4</sub>	40,4	7,08	21,72

Estos pequeños errores pudieran ser debido a impurificaciones del compuesto principal con compuestos en que el W tuviera más valencias sustituidas de cloro por acetato.

### III. PARTE EXPERIMENTAL

#### 1. DISPOSITIVOS DE TRABAJO

En los ensayos descritos en esta memoria utilizamos los aparatos que se describen a continuación.

Para realizar la mezcla de reacción y mantenerla con agitación a temperatura ambiente o a reflujo se empleó un aparato que consta de un matraz de 100 c. c. de capacidad con cuello provisto de un esmerilado normalizado, que ajusta perfectamente con un refrigerante de Liebig colocado verticalmente para favorecer el reflujo, y por el que circula agua fría. El matracito se sumergió en un vaso con mezcla de hielo y sal, agua fría o agua caliente, según que la reacción se tuviese que realizar, a temperatura baja, a temperatura ambiente o reflujo de cloruro de acetilo. En la parte superior se conectó un tubo U con cloruro de calcio para dar salida a los gases de reacción e impedir la entrada de humedad en el aparato. También introducimos en el matraz un agitador magnético para realizar la agitación cuando fuese necesaria.

La precipitación de los compuestos formados en las distintas experiencias se realizó con un dispositivo que consta de matraz con tapón esmerilado unido por una alargadera en comunicación a un tren de desecación a un embudo separador que ajusta perfectamente con el matraz. Al embudo separador se une un tubo en U con cloruro de calcio.

Para la filtración, lavado y secado se utilizó un aparato que consta de un tubo cilíndrico grueso, provisto en su parte inferior de una placa filtrante de vidrio sinterizado (porosidad G-3) así como de cuello esmerilado y un tubo lateral con su correspondiente cuello esmerilado. Estos dispositivos están diseñados y descritos en el trabajo que indicamos con el núm. (2) en la bibliografía. Al primero se acopla un tren de desecación constituido por  $P_2O_5$ ,  $SO_4H_2$  y  $Cl_2Ca$ , que permite operar con garantía de que la filtración se realiza en atmósfera seca. Al cuello (2.) se acopla otra pieza que consta de un tubo en forma de Y con una llave y los extremos provistos de conos esmerilados. A estos dos últimos se acoplan unos matracitos con el líquido de lavado y la llave regula el paso de éste.

La destilación a presión reducida se realizó con trompa de agua, conectada al tubo de salida del aparato por intermedio de un tren de desecación. Todos los cierres y empalmes se realizaron con esmerilados.

## DESCRIPCION DETALLADA DE LAS EXPERIENCIAS

### A. REACCIÓN DEL TRIÓXIDO DE CROMO Y CLORURO DE ACETILO

#### ENSAYO I. — *Experiencias preliminares*

##### EXPERIENCIA 1.<sup>a</sup>

Se lleva a cabo la reacción del modo siguiente: En un matracito bien seco se colocan 2 grs. de  $\text{CrO}_3$  y un núcleo de hierro recubierto de vidrio para la agitación magnética. Hecho esto, lo más rápidamente posible para evitar contacto con aire húmedo, se acopla al matraz un refrigerante, y se añade cloruro de acetilo por la parte superior del refrigerante. Al realizar esta operación se produce una reacción violenta, apareciendo un sólido verde mojado por un líquido rojo.

Para que la reacción no se lleve a cabo tan violentamente operamos de modo inverso. Añadimos lentamente los 2 grs. de  $\text{CrO}_3$  sobre los 10 ml. de cloruro de acetilo contenidos en un matracito introducido en un baño frío ( $-12^\circ\text{C}$ ) y con agitación magnética. Después de cada adición acoplábamos al refrigerante una pieza en U de cloruro de calcio.

El cloruro de acetilo fue adquiriendo color rojo al disolverse el  $\text{CrO}_3$ , intensificándose el color conforme se produce disolución. Cuando ésta fue total, separamos el matraz del baño frío y mantuvimos la mezcla de reacción un día a temperatura ambiente. El color rojo transparente va pasando lentamente a un color rojo sucio.

Destilamos el cloruro de acetilo en exceso y obtuvimos un líquido rojo y un sólido verde rojizo.

Realizamos análisis cualitativos del destilado y residuo de destilación:

El destilado dio positivo el  $\text{Cr}^{+6}$  y el residuo dio positivo el  $\text{Cr}^{+6}$  y  $\text{Cr}^{+3}$ . Observamos también que en el destilado la cantidad de  $\text{Cr}^{+3}$  que, en principio es prácticamente nula, aumenta con la consiguiente disminución de  $\text{Cr}^{+6}$  al dejar estar el destilado a la luz y temperatura ambiente.

Así, si tomamos una muestra de destilado en el momento de su obtención: 3 ml. contienen 1,723 m. e. q. de  $\text{Cr}^{+6}$ .

A las 24 horas 3 ml. contienen 1,083 m. e. q. de  $\text{Cr}^{+6}$ .

Corresponde una disminución del 37,1 %.

En todas las experiencias siguientes realizamos la mezcla de  $\text{CrO}_3$  y cloruro de acetilo según la técnica descrita en esta experiencia.

##### EXPERIENCIA 2.<sup>a</sup>

Añadimos a 2 ml. de cloruro de acetilo, 1 gr. de óxido crómico. La disolución formada la dejamos en desecador de NaOH para la eliminación de cloruro de acetilo en exceso. Al cabo de dos días el concentrado rojo-oscuro dio positivo el  $\text{Cr}^{+3}$  y el  $\text{Cr}^{+6}$ .

EXPERIENCIA 3.<sup>a</sup>

Mezclamos 2 gr. de  $\text{CrO}_3$  y 10 ml. de cloruro de acetilo. Intentamos separar, por precipitación con algún disolvente, los compuestos de cromo formados en la reacción. Para ello, añadimos pequeñas porciones de líquido rojo sobre 5 ml. de éter, tetracloruro de carbono, acetona y benceno anhidros. Con el  $\text{Cl}_4\text{C}$  se produce una solución roja, en los demás casos se lleva a cabo una modificación del color rojo pero no se produce separación ni precipitación de ningún compuesto.

El líquido rojo restante, lo mantuvimos dentro de un desecador de sosa a  $1^\circ\text{C}$ , produciéndose también la reducción del  $\text{Cr}^{+6}$ , ya que nos dio positivo el  $\text{Cr}^{+3}$ .

EXPERIENCIA 4.<sup>a</sup>

*La reacción  $\text{CrO}_3$  y  $\text{ClCOCH}_3$  a  $-60^\circ\text{C}$*

A 10 ml. de cloruro de acetilo enfriados a  $-60^\circ\text{C}$  en baño de nieve carbónica y acetona le añadimos 0,5 gr. de  $\text{CrO}_3$ , agitamos y mantuvimos la mezcla a esa temperatura una hora, volviendo a agitar de vez en cuando.

Como no se producía una disolución a velocidad apreciable, aumentamos la temperatura del baño hasta  $-30^\circ\text{C}$ , manteniendo esta temperatura durante toda la experiencia.

A la media hora tomamos una muestra de 0,5 ml. de la disolución roja. Analizamos el  $\text{Cr}^{+3}$  dando resultado negativo.

Muestra tomada a la hora. —  $\text{Cr}^{+3}$  negativo.

Muestra tomada a las dos horas. —  $\text{Cr}^{+3}$  negativo.

EXPERIENCIA 5.<sup>a</sup>

*La reacción del trióxido de cromo y el cloruro de acetilo a  $-30^\circ\text{C}$ .*

Realizamos esta experiencia con 10 ml. de cloruro de acetilo, enfriados a  $-30^\circ\text{C}$  y 0,5 gr. de  $\text{CrO}_3$ .

Muestra tomada a la hora. —  $\text{Cr}^{+3}$  negativo.

Muestra tomada a las dos horas. —  $\text{Cr}^{+3}$  negativo.

Muestra tomada a las cuatro horas. —  $\text{Cr}^{+3}$  negativo.

Muestra tomada a las seis horas. —  $\text{Cr}^{+3}$  negativo.

Muestra tomada a las diez horas. —  $\text{Cr}^{+3}$  negativo.

Durante toda la experiencia la temperatura se mantuvo a  $-30^\circ\text{C}$ .

EXPERIENCIA 6.<sup>a</sup>

*La reacción del  $\text{Cl}_2\text{O}_2\text{Cr}$  con cloruro de acetilo*

Obtuvimos el  $\text{Cl}_2\text{O}_2\text{Cr}$  a partir de  $\text{NaCl}$  y  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ , añadiendo  $\text{H}_2\text{SO}_4$  fumante.

Mezclamos 10 ml. de cloruro de cromilo y 20 ml. de cloruro de acetilo obteniendo una disolución roja transparente. No se produce una reacción violenta.

Después de mantener la mezcla de reacción una hora a temperatura baja, destilamos a presión reducido y obtuvimos un destilado rojo y un residuo verde-rojizo.

El receptor del destilado lo mantuvimos en baño de hielo y sal. Contiene cromo exavalente y el análisis del  $\text{Cr}^{+3}$  fue negativo.

En el residuo existía  $\text{Cr}^{+3}$  y  $\text{Cr}^{+6}$ .

## ENSAYO II. — *Estudios cuantitativos sobre los productos líquidos de reacción*

### EXPERIENCIA 7.<sup>a</sup>

Mezclamos 3 grs. de  $\text{CrO}_3$  con 10 ml. de cloruro de acetilo en las condiciones señaladas en la experiencia 1.<sup>a</sup>, para controlar la velocidad de reacción.

Tiempo de reacción 5 días. Temperatura 5°C. Destilación de la mezcla de reacción a presión normal, obteniendo un destilado rojo y un residuo verde-rojizo.

Realizamos el análisis cuantitativo del destilado mediante la siguiente técnica: Pesada una muestra, se adiciona a un volumen conocido de NaOH de normalidad conocida. El cromo exavalente se disolverá formando ión  $\text{CrO}_4^{=}$ , el  $\text{Cr}^{+3}$  precipitará como  $\text{Cr}(\text{OH})_3$ , el  $\text{ClCOCH}_3$  se hidrolizará a  $\text{CH}_3 \cdot \text{COO}^-$  y  $\text{Cl}^-$  y el  $(\text{CH}_3 - \text{CO})_2\text{O}$  (que pueda arrastrar el cloruro de acetilo) a  $\text{CH}_3 - \text{COO}^-$ . Por otra parte el Cl que presumiblemente acompaña al  $\text{Cr}^{+6}$  quedará como  $\text{Cl}^-$ . El líquido resultante de esta hidrólisis se filtra a fin de separar y determinar al  $\text{Cr}(\text{OH})_3$  que después de someterlo a una calcinación se pesa como  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ . Llevar el filtrado a un volumen conocido en matraz aforado del que se toman muestras para las determinaciones de  $\text{Cr}^{+6}$ ,  $\text{Cl}^-$  y  $\text{H}^+$ . Se determina el  $\text{Cr}^{+6}$  por iodometría, el  $\text{Cl}^-$  por gravimetría como  $\text{ClAg}$  y el  $\text{H}^+$  valorando la NaOH no consumida en la hidrólisis de la muestra con ClH.

*Análisis del destilado rojo:* 0,9074 grs. de muestra se disuelven en 25 ml. de NaOH 0,8733 N. Se filtran y el líquido filtrado se diluyeron a 250 ml. de agua destilada en matraz aforado.

$\text{Cr}^{+3}$ : Precipitaron en toda la muestra 65,9 mg. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  equivalente a 0,867 m. moles de  $\text{Cr}^{+3}$ .

$\text{Cr}^{+6}$ :	25 ml. — 1,74 ml. $\text{S}_2\text{O}_3\text{Na}_2$ 0,1016 N
	25 ml. — 1,78 ml. $\text{S}_2\text{O}_3\text{Na}_2$ 0,1016 N
	Media 1,76 ml. = 0,596 m. moles de $\text{Cr}^{+6}$
$\text{Cl}^-$ :	25 ml. — 112,3 mg. de $\text{ClAg}$
	25 ml. — 112,0 mg. de $\text{ClAg}$
	Media 112,15 mg. = 7,827 m. moles
$\text{H}^+$ :	25 ml. — 2,15 ml. de ClH 0,1040 N
	25 ml. — 2,13 ml. de ClH 0,1040 N
	Media 2,14 = 19,607 m. moles de $\text{H}^+$ .

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

EXPERIENCIA 8.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción 1 día. Temperatura ambiente. Cantidades de reactivos: 3 grs. y 10 ml. de ClCOCH<sub>3</sub>. Destilación a presión de 760 mm. y recogiendo el destilado en un receptor enfriado con hielo y sal. Tomamos la muestra para el análisis con la mayor rapidez y mantuvimos las máximas precauciones en la disolución para que no se produzca la reducción del Cr<sup>+6</sup>.

*Análisis del destilado rojo:* 0,8060 grs. se disuelven en 25 ml. de NaOH 0,9511 N. Se filtra la disolución y el filtrado se diluye a 250 ml. con agua destilada.

Cr<sup>+3</sup>: Toda la muestra. Precipitaron 43,0 mg. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> equivalente a 0,566 m. moles de Cr<sup>+3</sup>.

Cr<sup>+6</sup>: 25 ml. — 5,10 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0894 N  
25 ml. — 5,10 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0894 N  
Media 5,10 = 1,519 m. moles de Cr<sup>+6</sup>.  
Cl<sup>-</sup>: 25 ml. — 120,0 mg. de ClAg  
25 ml. — 121,0 mg. de ClAg  
Media 120,5 = 8,379 m. moles de Cl<sup>-</sup>.  
H<sup>+</sup>: 25 ml. — 2,7 ml. de ClH 0,1119 N  
25 ml. — 2,7 ml. de ClH 0,1119 N  
Media 2,7 ml = 20,756 m. moles de H<sup>+</sup>.

EXPERIENCIA 9.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: 1 hora. Temperatura ambiente. Cantidad de reactivos: 3 grs. de CrO<sub>3</sub> y 10 ml. de cloruro de acetilo. Destilación a presión normal. Recoger el destilado en mezcla frigorífica de hielo y sal.

*Análisis del destilado rojo:* 1,2150 grs. se disolvieron en 30 ml. de NaOH 0,9511 N. Se filtró la disolución, diluyendo el filtrado a 500 ml. con agua destilada.

Cr<sup>+3</sup>: Toda la muestra. — 8,0 mg. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> equivalente a 0,103 m. moles de Cr<sup>+3</sup>.

Cr<sup>+6</sup>: 25 ml. — 3,65 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,892 N  
25 ml. — 3,60 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,892 N  
Media 3,63 = 2,155 m. moles de Cr<sup>+6</sup>.  
Cl<sup>-</sup>: 25 ml. — 84,1 mg. de ClAg  
25 ml. — 83,7 mg. de ClAg  
Media 83,9 ml. = 11,707 m. moles de Cl<sup>-</sup>.  
H<sup>+</sup>: 50 ml. — 0,75 ml. de ClH 0,1014 N  
50 ml. — 0,75 ml. de ClH 0,1014 N  
Media 0,75 ml. = 27,77 m. moles de H<sup>+</sup>.

La cantidad de cromo exavalente reducido es 5,5 % del cromo total.

EXPERIENCIA 10.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: 1 hora. — Temperatura ambiente. Cantidad de reactivos: 2 grs. de CrO<sub>3</sub> y 10 ml. de cloruro de acetilo. Destilación a presión normal. Recoger el destilado refrigerando el colector con mezcla de hielo y sal.

*Análisis del destilado rojo.* — 1110,8 mgs. se disolvieron en 30 ml. de NaOH 0,8733 N. No se produjo ninguna precipitación de cromo trivalente. Diluimos la disolución a 250 ml. con agua destilada.

Cr<sup>+6</sup>: 20 ml. — 1,05 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,1014 N  
20 ml. — 1,02 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,1014 N  
Media 1,03 ml. = 0,435 m. moles de Cr<sup>+6</sup>.

Cl<sup>-</sup>: 20 ml. — 109,2 mgs. de ClAg  
20 ml. — 109,6 mgs. de ClAg  
Media 109,4 mg. equivalente a 9,540 m. moles de Cl<sup>-</sup>.

H<sup>+</sup>: 20 ml. — 1,15 ml. de ClH 0,1014 N  
20 ml. — 1,12 ml. de ClH 0,1014 N  
Media 1,13 = 24,794 m. moles de H<sup>+</sup>.

EXPERIENCIA 11.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: media hora. Temperatura: ambiente. Cantidad de reactivos: 2 grs. de CrO<sub>3</sub> y 10 ml. cloruro de acetilo. Destilación a presión normal, recogiendo el destilado enfriando con hielo y sal.

*Análisis del destilado rojo.* — 0,9456 mgs. se disolvieron en 30 ml. de NaOH 0,8733 N. Se diluyó la disolución a 250 ml. con agua destilada.

Cr<sup>+6</sup>: 20 ml. — 0,80 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,1014 N  
20 ml. — 0,75 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,1014 N  
Media 0,77 ml. a 0,325 m. moles de Cr<sup>+6</sup>.

Cl<sup>-</sup>: 20 ml. — 133,2 mg. de ClAg  
20 ml. — 133,2 mg. ds ClAg  
Media 133,2 mgs. = 11,62 m. moles de Cl<sup>-</sup>.

H<sup>+</sup>: 20 ml. — 1,85 ml. de ClH 0,1040 N  
20 ml. — 1,90 ml. de ClH 0,1040 N  
Media 1,87 ml. = 23,794 m. moles de H<sup>+</sup>.

EXPERIENCIA 12.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción media hora. Temperatura: mezcla de hielo y sal. Destilación a presión reducida, recogiendo el destilado refrigerando el colector con mezcla de hielo y sal.

*Análisis del destilado rojo.* — 1,1528 grs. se disolvieron en 30 ml. de NaOH 0,9511 N. y el líquido obtenido lo diluimos a 500 ml. con agua destilada.

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

Cr<sup>-6</sup>: 25 ml. — 1,95 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0892 N  
25 ml. — 2,00 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0892 N  
Media 1,975 ml. = 1,172 m. moles de Cr<sup>+6</sup>.  
Cl<sup>-</sup>: 25 ml. — 86,8 mgs. de ClAg  
25 ml. — 87,0 mgs. de ClAg  
Media 86,9 mgs. = 12,125 m. moles de Cl<sup>-</sup>.  
H<sup>+</sup>: 25 ml. — 0,50 ml. de ClH 0,1040 N  
25 ml. — 0,50 ml. de ClH 0,1040 N  
Media 0,5 ml. = 28,43 m. moles de H<sup>+</sup>.

EXPERIENCIA 13.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: media hora. Temperatura: mezcla de hielo y sal. Destilar a continuación a presión reducida, recogiendo el destilado en un colector refrigerado con hielo y sal.

Análisis del destilado rojo. — 1,0994 grs. se disolvieron en 30 ml. de NaOH 0,9511 N y se diluyó la disolución a 100 ml. con agua destilada.

Cr<sup>+6</sup>: 10 ml. — 5,6 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0892 N  
10 ml. — 5,6 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0892 N  
Media 5,6 ml. = 1,665 equivalentes de Cr<sup>+6</sup>.  
Cl<sup>-</sup>: 10 ml. — 163,0 mg. de ClAg  
10 ml. — 163,5 mg. de ClAg  
Media 163,3 mg. de ClAg = 11,393 m. moles de Cl<sup>-</sup>.  
H<sup>+</sup>: 10 ml. — 2,75 ml. de ClH 0,1040 N  
10 ml. — 2,75 ml. de ClH 0,1040 N  
Media 2,75 = 25,673 m. moles de H<sup>+</sup>.

EXPERIENCIA 14.<sup>a</sup>

Temperatura: mezcla frigorífica de hielo y sal. Tiempo de reacción: media hora. Cantidad de reactivos: 3 grs. de CrO<sub>3</sub> y 10 ml. de cloruro de acetilo. Destilación a presión reducida y al colector del destilado en mezcla de hielo y sal.

Análisis del destilado rojo. — 0,2654 grs. se disolvieron en 25 ml. de NaOH 0,8476 N. Diluimos la solución a 100 ml. con agua destilada.

Cr<sup>+6</sup>: 10 ml. — 2,5 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0892 N  
10 ml. — 2,5 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0892 N  
Media 2,5 ml. = 0,743 m. moles de Cr<sup>+6</sup>.  
C<sup>-</sup>: 10 ml. — 31,5 mgs. de ClAg  
10 ml. — 31,7 mgs. de ClAg  
Media 31,6 mgs. = 2,210 m. moles de Cl<sup>-</sup>.  
H<sup>+</sup>: 5 ml. — 7,25 ml. de ClH 0,1040 N  
5 ml. — 7,20 ml. de ClH 0,1040 N  
Media 7,22 ml. = 6,162 m. moles de H<sup>+</sup>.

EXPERIENCIA 15.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: tres horas. Temperatura: ambiente. Cantidad de reactivos: 3 grs. de CrO<sub>3</sub> y 10 ml. de cloruro de acetilo. Destilar a presión reducida, recogiendo el destilado en un colector refrigerado con hielo y sal.

*Análisis del destilado rojo.* — 0,9558 grs. se disolvieron en 26 ml. de NaOH 0,9511 N. Diluimos a 250 ml. con agua destilada.

Cr<sup>+6</sup>: 25 ml. — 4,00 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,1321 N  
25 ml. — 4,00 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,1321 N  
Media 4,00 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,1321 N = 1,761 m. moles de Cr<sup>+6</sup>.  
Cl<sup>-</sup>: 25 ml. — 165,0 mgs. de ClAg  
25 ml. — 165,2 mgs. de ClAg  
Media 165,1 mgs. de ClAg = 11,520 m. moles de Cl<sup>-</sup>.  
H<sup>+</sup>: 25 ml. — 0,18 ml. de ClH 0,1040 N  
25 ml. — 0,20 ml. de ClH 0,1040 N  
Media 0,188 ml. = 23,533 m. moles de H<sup>+</sup>.

EXPERIENCIA 16.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: una hora. Temperatura de reacción: hielo y sal. Cantidad de reactivos: 2,4 grs. de CrO<sub>3</sub> y 20 ml. de cloruro de acetilo. Destilar a presión reducida y recoger el destilado con el colector enfriado con hielo y sal.

*Análisis del destilado rojo.* — 1,0376 grs. se disolvieron en 35 ml. de NaOH 0,8870 N y diluimos a 250 ml. con agua destilada.

Cr<sup>+6</sup>: 20 ml. — 2,76 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0998 N  
20 ml. — 2,78 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0998 N  
Media 2,77 = 1,151 m. moles de Cr<sup>+6</sup>.  
Cl<sup>-</sup>: 20 ml. — 151,8 mgs. de ClAg  
20 ml. — 152,2 mgs. de ClAg  
Media 152,0 mgs. = 13,255 m. moles de Cl<sup>-</sup>.  
H<sup>+</sup>: 20 ml. — 3,85 ml. de ClH 0,0969 N  
20 ml. — 3,85 ml. de ClH 0,0969 N  
Media 3,85 ml. = 26,382 m. moles de H<sup>+</sup>.

ENSAYO III

EXPERIENCIA 17.<sup>a</sup>

Tiempos de reacción: media hora. Temperatura: mezcla de hielo y sal. Cantidad de reactivos: 3 gr. de CrO<sub>3</sub> y 10 ml. de cloruro de acetilo. Destilar a presión reducida. El recinto se desecó en desecador de cal sodada. Obtuvimos un sólido verde.

*Análisis del residuo verde.* — Se llevó a cabo con la siguiente técnica. La muestra se disolvió en una disolución diluida de nítrico y el Cr<sup>+3</sup> se

determinó precipitándolo con amoníaco, separando el hidróxido crómico formado, y determinando el Cr<sup>+6</sup> en el líquido filtrado. Del mismo modo se realizaron los análisis en las experiencias siguientes.

0,8962 grs. se disolvieron en nítrico diluido, se produjo la precipitación con amoníaco diluido y se filtró el hidróxido crómico formado y se diluyó el filtrado con agua destilada a 500 ml.

Cr<sup>+3</sup>: En toda la muestra. — 181,3 mgs. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 2,385 m. moles.

Cr<sup>+6</sup>: 25 ml. — 0,80 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0892 N

25 ml. — 0,80 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0892 N

Media 0,80 ml. = 0,476 m. moles.

#### EXPERIENCIA 18.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: media hora. Temperatura: la de la mezcla de hielo y sal. Cantidades de reactivos: 3 grs. de CrO<sub>3</sub> y 10 ml. de cloruro de acetilo. Destilar a presión reducida y el residuo se dejó en desecador de cal sodada hasta peso constante.

*Análisis del residuo verde.* — 0,7544 se disolvieron en nítrico diluido y se separó el cromo con amoníaco diluido. Se separó el hidróxido crómico por filtración y se diluyó el filtrado a 500 ml. con agua destilada.

Cr<sup>+3</sup>: En toda la muestra: 252,8 mg. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> equivalente a 3,326 m. moles.

Cr<sup>+6</sup>: 25 ml. — 0,93 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0892 N

25 ml. — 0,97 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,0892 N

Media 0,95 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> = 0,564 m. moles de Cr<sup>+6</sup>.

#### EXPERIENCIA 19.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: tres horas. Temperatura de reacción: la de la mezcla de hielo y sal. Cantidades de reactivos: 3 grs. de CrO<sub>3</sub> y 10 ml. de cloruro de acetilo. Se destiló a presión reducida el exceso de cloruro de acetilo y se mantuvo el sólido obtenido en desecador de sosa hasta peso constante.

*Análisis del sólido verde.* — 1,1700 grs. se disolvieron en nítrico diluido y se precipitó el Cr. con amoníaco, se filtró el hidróxido crómico y se diluyó el filtrado a 500 ml. con agua destilada.

Cr<sup>+3</sup>: En toda la muestra precipitaron 280,8 mg. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> equivalente a 3,694 m. moles de Cr<sup>+3</sup>.

Cr<sup>+6</sup>: 50 ml. — 0,70 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,1322 N

50 ml. — 0,70 ml. de S<sub>2</sub>O<sub>3</sub>Na<sub>2</sub> 0,1322 N

Media 0,70 ml. = 0,308 m. moles de Cr<sup>+6</sup>.

#### EXPERIENCIA 20.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: una hora. Temperatura: mezcla de hielo y sal. Se destiló a presión reducida para eliminar el exceso de cloruro de acetilo.

y se lavó el residuo con tetracloruro de carbono anhidro varias veces. Se secó el sólido obtenido en corriente de aire seco. Cantidad de reactivos 2,4 grs. de  $\text{CrO}_3$  y 20 ml. de cloruro de acetilo.

*Análisis del sólido verde.* — 0,5914 grs. se disolvieron en una disolución diluida de nítrico y se precipitó el cromo con amoníaco. Se filtró el hidróxido crómico formado y el filtrado se diluyó a 250 ml. con agua destilada.

$\text{Cr}^{+3}$ : En toda la muestra. — 162,0 mg. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  equivalente a 2,131 m. moles de  $\text{Cr}^{+3}$ .

$\text{Cr}^{+6}$ : 40 ml. — 0,40 ml. de  $\text{S}_2\text{O}_3\text{Na}_2$  0,0998 N  
40 ml. — 0,36 ml. de  $\text{S}_2\text{O}_3\text{Na}_2$  0,0998 N  
Media 0,38 ml. = 0,0789 m. moles de  $\text{Cr}^{+6}$ .

#### ENSAYO IV

##### EXPERIENCIA 21.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: una hora y media. Temperatura ambiente. Cantidad de reactivos 24 grs. de  $\text{CrO}_3$  y 200 ml. de cloruro de acetilo. Se destiló el exceso de cloruro de acetilo y el residuo de reacción se lavó repetidas veces con  $\text{Cl}_4\text{C}$  anhidro. El sólido verde obtenido se secó en corriente de aire seco.

*Análisis del sólido verde.* — 1,3630 grs. se disolvieron en agua con unas gotas de nítrico y se precipitó el cromo (III) con amoníaco diluido. Se filtró el hidróxido crómico formado y se diluyó el filtrado a 250 ml. con agua destilada.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 425,0 mgs. de  $\text{Cr}_2\text{O}$ , equivalente a 5,592 m. moles de  $\text{Cr}^{+3}$  = 0,410 moles por 100 grs. de muestra.

$\text{Cr}^{+6}$ : 50 ml. — 0,1 ml. de  $\text{S}_2\text{O}_3\text{Na}_2$   
50 ml. — 0,1 ml. de  $\text{S}_2\text{O}_3\text{Na}_2$   
Media 0,1 ml. = 0,0166 m. moles de  $\text{Cr}^{+6}$ .

$\text{Cl}^-$ : 25 ml. — 81,3 mgs. de  $\text{ClAg}$   
25 ml. — 80,9 mgs. de  $\text{ClAg}$   
Media 81,1 mgs. = 5,660 m. moles de  $\text{Cl}^-$  = 0,415 moles por 100 grs. de muestra.

C: 25,68 %  
25,77 %  
25,30 %

Media 25,58 % de C = 2,13 moles por 100 grs. de muestra.

##### EXPERIENCIA 22.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: tres horas. Temperatura: la de ebullición de la mezcla. Cantidad de reactivos: 2 grs. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  y 10 ml. de cloruro de acetilo. Se eliminó el exceso de cloruro de acetilo por destilación a pre-

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

sión reducida. El residuo se lavó varias veces con  $\text{Cl}_4\text{C}$  y se secó con una corriente de aire seco.

*Análisis del sólido verde.* — 0,6169 grs. se disolvieron en una solución de nítrico muy diluida y se precipitó el Cr (III) con amoníaco. Se separó por filtración el hidróxido crómico formado y el filtrado se diluyó a 250 ml. con agua destilada.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 192,4 mgs. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 0,410 moles de  $\text{Cr}^{+3}$  por 100 grs. de muestra.

$\text{Cl}^-$ : 50 ml. — 77,8 mgs. de  $\text{ClAg}$

50 ml. — 77,2 mgs. de  $\text{ClAg}$

Media 77,5 mgs. = 0,439 moles por 100 grs. de muestra.

C: 25,38 %

25,26 %

Media 25,64 % de carbono = 2,11 moles de C por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 23.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: dos horas. Temperatura de reacción: la de refluxo de la mezcla. Cantidades de reactivos: 2 grs. de  $\text{CrO}_3$  y 10 ml. de cloruro de acetilo. Se destiló el exceso de cloruro de acetilo a presión reducida. Se dejó en desecador de sosa para eliminar la mayor parte de acético. Se lavó el sólido verde obtenido con tetracloruro de carbono seco.

*Análisis del sólido verde.* — 0,3139 mgs. se disolvieron en agua con unas gotas de nítrico y se precipitó el Cr (III) con amoníaco diluido. Se filtró y el filtrado se diluyó a 250 ml. con agua destilada.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 100,5 mgs. = 0,421 moles por 100 grs. de muestra.

$\text{Cl}^-$ : 40 ml. — 33,7 mgs. de  $\text{ClAg}$

40 ml. — 33,8 mgs. de  $\text{ClAg}$

Media 33,75 mgs. = 0,468 moles por 100 grs. de muestra. —

C: 25,02 %

24,96 %

Media 24,96 % = 2,08 moles por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 24.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: hora y media. Temperatura de reacción: la de ebullición de la mezcla. Cantidades de reactivos: 5 grs. de  $\text{CrO}_3$  y 40 ml. de cloruro de acetilo. Se destiló el exceso de cloruro de acetilo a presión reducida y se lavó el residuo con éter seco.

*Análisis del sólido verde.* —  $\text{Cr}^{+3}$  0,3199 grs. se disolvieron en agua y se precipitó el cromo trivalente con una disolución diluida de amoníaco.

En toda la muestra. — 99,5 mgs. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 0,409 moles de  $\text{Cr}^{+3}$  por 100 gramos de muestra.

$\text{Cl}^-$ : 0,1468 grs. se disolvieron en ácido nítrico diluido y precipitaron en toda la muestra 117,4 mgs. de  $\text{ClAg}$  = 0,559 moles por 100 grs. de muestra.

Cr: 25,40  
25,48

Media 25,40 % = 2,12 moles de C por 100 grs. de muestra.

#### EXPERIENCIA 25.<sup>a</sup>

Tiempo de reacción: hora y media. Temperatura de reflujo. Cantidad de reactivos: 5 grs. de  $\text{CrO}_3$  y 40 ml. de cloruro de acetilo. Se calentó hasta que el reflujo fue incoloro y se destiló el exceso de cloruro de acetilo a presión reducida. Se lavó con éter el sólido obtenido.

*Análisis del sólido verde.* — 0,2864 grs. se disolvieron en agua y se precipitó el hidróxido crómico con amoníaco diluido.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra 93,4 mgs. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 0,429 moles por 100 grs. de muestra.

$\text{Cl}^-$ . Toda la muestra. 201,7 mgs. de  $\text{ClAg}$  = 0,493 moles por 100 grs. de muestra.

#### EXPERIENCIA 26.<sup>a</sup>

2 grs. del residuo verde de la experiencia 25 se calentaron en baño de sulfúrico hasta 230°C y se recogieron los vapores desprendidos en un colector, produciéndose una pequeña cantidad de destilado incoloro.

*Análisis del residuo sólido.* — 0,5093 mg. se disolvieron en 25 ml. de NaOH 0,9888 N. La solución apareció amarillo-dorada. Filtramos para separar el hidróxido crómico formado y el filtrado lo diluimos a 250 ml. con agua destilada.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 183,9 mg. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 2,42 m. moles de  $\text{Cr}^{+3}$ .

$\text{Cl}^-$ : 25 ml. — 21,3 mg. de  $\text{ClAg}$ .

25 ml. — 21,5 mg. de  $\text{ClAg}$ .

Media 21,4 = 1,493 m. moles de  $\text{Cl}^-$ .

#### EXPERIENCIA 27

2 grs. del sólido verde obtenido en la experiencia 25 lo disolvimos en ClH concentrado y se eliminó por calentamiento parte del disolvente para obtener una disolución saturada. Se dejó 2 días la solución a temperatura inferior a 0°C y se separaron unos cristales verdes, muy sueltos que realizamos su análisis.

*Análisis del sólido verde.* — 0,1113 grs. se disolvieron en agua y precipitamos el hidróxido crómico con disolución diluida de amoníaco.

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 32,1 mg. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 0,379 moles por 100 grs. de muestra.

$\text{Cl}^-$ : Toda la muestra. — 175,3 mg. = a 1,099 moles por 100 grs. de muestra.

ENSAYO V

EXPERIENCIA 28

Pruebas (a): Se mezclaron 5 grs. de  $\text{CrO}_3$  con 20 ml. de cloruro de acetilo y 40 ml. de anhídrido acético. Ia). — Se calentó la mezcla 6 1/2 horas a reflujo.

Pruebas (b): Se mezclaron 5 grs. de  $\text{CrO}_3$  con 40 ml. de cloruro de acetilo. Se calentó a reflujo a 6 1/2 horas.

Tomamos muestras de las pruebas a) y b) y las precipitamos, separadamente, con éter. Filtramos y lavamos con éter anhidro. Mantuvimos en desecador de sulfúrico, hasta peso constante.

*Análisis del sólido verde obtenidos en la prueba Ia).* — 0,2130 grs. se disolvieron en agua y precipitamos el hidróxido crómico con disolución diluida de amóniaco.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 213,0 mg. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 0,461 moles por 100 grs. de muestra.

$\text{Cl}^-$ : Toda la muestra. — 139,8 mg. de  $\text{ClAg}$  = 0,458 moles por 100 grs. de muestra.

*Análisis del sólido verde obtenido en la prueba Ib).* — 0,5023 grs. se disolvieron en agua y precipitamos el  $\text{Cr}^{+3}$  con disolución diluida de amóniaco.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 182,4 mg. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  mg. = 0,478 moles por 100 grs.

$\text{Cl}^-$ : Toda la muestra. — 409,3 mgs. = 0,569 moles por 100 grs. de muestra.

Las pruebas (a) y (b) continuamos calentándolas a ebullición durante 10 horas. La prueba (a) en baño de sulfúrico, puesto que al eliminarse el cloruro de acetilo el baño de agua no alcanzaba el punto de ebullición de la mezcla.

Al cabo del tiempo señalado, llevamos a cabo la toma de dos muestras, separando los compuestos de cromo trivalente formados por precipitación en éter y lavado posterior con dicho disolvente.

*Análisis del sólido obtenido en la prueba a). Sólido IIa.* — 0,2723 gr. se disolvieron en agua y precipitamos el  $\text{Cr}^{+3}$  con disolución diluida en amóniaco.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 84,9 mg de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 0,410 moles por 100 grs. de muestra.

$\text{Cl}^-$ : Toda la muestra. — 120,7 mg de  $\text{ClAg}$  = 0,309 moles por 100 grs. de muestra.

*Análisis del sólido obtenido en la prueba b. Sólido IIb.* — 0,2513 grs. se disolvieron en agua y precipitamos el Cr<sup>+3</sup> con amoníaco diluido.

Cr<sup>+3</sup>: Toda la muestra. — 73,0 mg. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,389 moles por 100 grs. de muestra.

Cl<sup>-</sup>: Toda la muestra. — 220,3 mgs. = 0,612 moles por 100 grs. de muestra.

Las pruebas (a) y (b) continuamos calentándolas durante 40 horas a reflujo. Transcurrido este tiempo tomamos muestras de las dos pruebas, y precipitamos los compuestos de cromo formados por adición a éter anhidro. Lavados los sólidos verdes obtenidos con éter y dejados secar efectuamos su análisis.

*Análisis del sólido verde obtenido en la prueba a). Sólido IIIa.* — 0,2781 gramos se disolvieron en agua y precipitamos el Cr<sup>+3</sup> con disolución diluida de amoníaco.

Cr<sup>+3</sup>: Toda la muestra. — 89,0 mg. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,421 moles de Cr por 100 grs. de muestra.

Cl<sup>-</sup>: Toda la muestra. — 63,5 mgs. de ClAg = 0,159 moles por 100 grs. de muestra.

*Análisis del sólido verde obtenido de la prueba (b). Sólido IIIb.* — 0,3815 mgs. se disolvieron en agua y precipitamos el Cr<sup>+3</sup> con disolución diluida de amoníaco.

Cr<sup>+3</sup>: Toda la muestra. — 117,1 mgs. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,398 moles por 100 grs. de muestra.

Cl<sup>-</sup>: Toda la muestra. — 344,3 mg. de ClAg = 0,630 moles por 100 grs. de muestra.

Las pruebas (a) y (b) continuamos calentándolas durante 50 horas a reflujo. En la prueba (b) fue cambiando el color a pardo cloro.

Tomamos muestras de las dos pruebas y separamos las sustancias formadas por precipitación con éter. De la prueba (a) obtuvimos un sólido verde y de la (b) otro pardo verdoso. Los dos los lavamos repetidas veces con éter y dejamos secar en desecador de sulfúrico.

*Análisis del sólido obtenido en la prueba a). Sólido IVa.* — 0,1288 grs. se disolvieron en agua y precipitamos el Cr<sup>+3</sup> con disolución diluida de amoníaco.

Cr<sup>+3</sup>: Toda la muestra. — 39,0 mg. = 0,398 moles por 100 grs. de muestra.

Cl<sup>-</sup>: Toda la muestra. — 15,6 mgs. = 0,084 moles por 100 grs. de muestra.

*Análisis del sólido obtenido en la prueba b). Sólido IVb.* — 0,1589 grs. se disolvieron en agua y precipitamos el Cr<sup>+3</sup> con disolución diluida de amoníaco.

Cr<sup>+3</sup>: Toda la muestra. — 47,7 mgs. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,396 moles por 100 grs. de muestra.

Cl<sup>-</sup>: Toda la muestra. — 163,4 mgs. = 0,719 moles por 100 grs. de muestra.

ENSAYO VIA

EXPERIENCIA 29

Se mezclaron 2 grs. del sólido obtenido en la experiencia 25 con 10 ml. anhídrido acético y 20 ml. de ácido acético y calentamos a reflujo (con baño de arena) durante 1 hora. Se añadió la mezcla de reacción a éter y precipitó un sólido verde, que se filtró y lavó con éter. Se dejó el sólido verde en desecador de sulfúrico hasta peso constante.

*Análisis del sólido verde.* — 0,6611 grs. se disolvieron en agua y añadimos una disolución diluida de amoníaco. Filtramos el  $\text{Cr}(\text{OH})_3$  formado y diluimos a 250 ml. con agua destilada.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 225,7 mg. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 0,451 moles por 100 gr. de muestra.

$\text{Cl}^-$ : 50 ml. — 30,4 mg. de ClAg.

50 ml. — 30,6 mg. de ClAg.

Media 30,5 ml. = 0,161 moles por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 30

Se mezclaron 2 grs. del sólido obtenido en la experiencia 25 con 10 ml. de anhídrido acético y 20 ml. de ácido acético y calentamos a reflujo 2 horas. Se separaron de la mezcla de reacción, los compuestos formados por precipitación con éter anhidro. Se filtró y lavó con éter. Se obtuvo un sólido verde que se mantuvo en desecador de  $\text{SO}_4\text{H}_2$  hasta peso constante.

*Análisis del sólido verde.* — 0,7434 mgs. se disolvieron en agua y se precipitó el Cr con disolución diluida de amoníaco. Se filtró y el filtrado se diluyó a 250 ml.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 251,0 mg. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 0,444 moles por 100 gr. de muestra.

$\text{Cl}^-$ : 50 ml. — 20,1 mg. de ClAg.

50 ml. — 20,2 mg. de ClAg.

Media 20,15 mg. = 0,094 moles por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 31

Se mezclaron 2 grs. de sólido obtenido en la experiencia 25 con 10 ml. de anhídrido acético y 20 ml. de ácido acético y se calentó a reflujo durante 12 horas. Finalmente se añadió la mezcla de reacción a éter y precipitó un sólido verde. Se filtró y lavó con éter el sólido verde obtenido.

*Análisis del sólido verde.* — 0,4479 mgs. se disolvieron en agua y se precipitó el Cr con amoníaco diluido. Se filtró el hidróxido crómico formado y se diluyó el filtrado a 250 ml.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 150,5 de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 0,442 moles por 100 grs. de muestra.

$\text{Cl}^-$ : Trazas.

C: 28,63 %.

28,71 %.

Media 28,67 % = 2,39 moles por 100 grs. de muestra.

### EXPERIENCIA 32

Se mezclaron 2 grs. del sólido obtenido en la experiencia 21 con 10 ml. de anhídrido acético y 20 ml. de ácido acético. Se calentó a reflujo 80 horas y se añadió la mezcla de reacción a éter. Precipitó un sólido verde que se filtró y lavó con éter.

*Análisis del sólido verde.* — 0,5299 grs. se disolvieron en agua y se precipitó el Cr con amoníaco diluido. Se filtró el hidróxido crómico formado y se diluyó el filtrado a 250 ml.

$\text{Cr}^{+3}$ : Toda la muestra. — 177,2 mgs. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 0,440 moles por 100 grs. de muestra.

$\text{Cl}^-$ : Trazas.

C: 29,36 %.

29,50 %.

29,90 %.

Media 29,59 % = 2,47 moles por 100 grs. de muestra.

### EXPERIENCIA 33

Se mezclaron 2 grs. del sólido obtenido en la experiencia 25 con 10 ml. de anhídrido acético y 20 ml. de ácido acético. Se calentaron a reflujo 194 horas y añadimos la mezcla de reacción a éter para separar los compuestos formados. Precipitó un sólido verde que se lavó con éter y se secó en desecador de sulfúrico.

*Análisis del sólido verde.* —  $\text{Cr}^{+3}$ : 0,2243 gr. se disolvieron en ácido nítrico diluido y precipitamos el Cr con una disolución de amoníaco diluida. 75,0 mg. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 22,87 % de  $\text{Cr}^{+3}$ .

0,2398 grs. se disolvieron en ácido nítrico diluido, precipitamos el Cr con una disolución de amoníaco diluida. — 79,1 mg. de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  = 22,62 %.

Media 22,75 % = 0,437 moles por 100 grs. de muestra.

C: 31,02.

31,54 %.

31,72 %.

Media 31,42 % de C = 2,62 moles por 100 grs. de muestra.

$\text{Cl}$ : negativo.

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

ENSAYO VIIb

EXPERIENCIA 34

Tiempo de reacción 25 horas. Temperatura de reacción: reflujo. Sustancias reactivas 2 grs. del sólido obtenido en la experiencia 25 y 20 ml. de cloruro de acetilo. Cada 5 ó 6 horas se añadieron 10 ml. de cloruro de acetilo para mantener siempre el mismo exceso de reactivo. La solución fue tomando color violeta y siempre hubo sólido verde en suspensión. Se filtró la mezcla de reacción y el filtrado se añadió a éter, pero no se produjo ninguna precipitación. Quedó en el filtro un sólido verde.

Análisis del sólido verde. — Cr<sup>+3</sup>: 0,3602 grs. de muestra. — 118,0 mgs. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

0,4010 de muestra. — 131,0 mgs. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,430 moles por 100 grs. de muestra.

Media 0,431 moles por 100 grs. de muestra.

Cl<sup>-</sup>: 0,1707 grs. de muestra. — 135,0 mgs. de ClAg = 0,539 moles de Cl<sup>-</sup>.

0,2040 grs. de muestra. — 158,5 mgs. = 0,538 moles por 100 grs.

Media 0,539 moles de Cl por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 35

Se mezclaron 2 grs. del sólido obtenido en la experiencia 25 con 20 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 50 horas. Temperatura de reacción: reflujo. Cada 5 ó 6 horas añadimos 10 ml. de cloruro de acetilo para que siempre estuviese este reactivo en exceso. Siempre hubo sólido en suspensión y se obtuvo un sólido verde sucio y del filtrado por precipitación con éter se separó un sólido pardo.

Análisis del sólido verde. — Cr<sup>+3</sup>: 0,2996 mgs. de muestra. — 98,8 mgs. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,434 moles de Cr por 100 grs. de muestra.

Cl<sup>-</sup>: 126,8 mgs. de muestra. — 133,6 mgs. de ClAg = 0,735 moles de Cl por 100 grs. de muestra.

Análisis del sólido pardo. — Cr<sup>+3</sup>: 0,3680 grs. de muestra. — 121,5 mgs. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,435 moles de Cr por 100 grs. de muestra.

220,8 mgs. de muestra. — 72,9 mgs. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,436 moles por 100 grs. de muestra.

Media: 0,435 moles de Cl<sup>-</sup> por 100 grs. de muestra.

Cl<sup>-</sup>: 164,2 mgs. de muestra: 182,4 mgs. de ClAg = 0,775 moles por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 36

Se mezclaron 2 grs. del sólido obtenido en la experiencia 25 con 20 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 100 horas. — Temperatura de

reacción: reflujo. Cada 5 ó 6 horas se añadieron 10 ml. de cloruro de acetilo para que siempre estuviese en exceso. Siempre se mantuvo una cantidad de sólido en suspensión.

Se filtró la mezcla de reacción y se obtuvo un sólido pardo verdoso y del filtrado obtuvimos otro sólido pardo por precipitación con éter. Ambos sólidos los lavaron repetidas veces con éter anhidro.

*Análisis del sólido pardo verdoso.* — Cr<sup>+3</sup>: 114,5 mg. de muestra. — 37,6 mgs. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,431 moles por 100 grs. de muestra.

Cl<sup>-</sup>: 94,3 mgs. de muestra. — 90,0 mg. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,673 moles de Cr<sup>+3</sup> por 100 grs. de muestra.

*Análisis del sólido pardo.* — Cr<sup>+3</sup>: 174,4 mg. de muestra. — 56,5 mg. de Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 0,426 moles de Cr<sup>+3</sup> por 100 grs. de muestra.

Cl<sup>-</sup>: 136,7 mg. de muestra. — 136,5 mg. de ClAg = 0,697 moles de Cl<sup>-</sup> por 100 grs. de muestra.

## B. REACCIÓN DEL TRIÓXIDO DE MOLIBDENO Y CLORURO DE ACETILO

### ENSAYO VII. — *Ensayos preliminares*

#### EXPERIENCIA 37

Se preparó MoO<sub>3</sub> a partir de MoO<sub>4</sub>(NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>. Se disolvieron 20 grs. de molibdato amónico en agua, se calentó a ebullición la mezcla y se añadió nítrico concentrado hirviendo. El MoO<sub>4</sub>H<sub>2</sub> precipitado lo filtramos, lo lavamos con agua y mantuvimos un día en estufa a 125°C.

Mezclamos 2 grs. de MoO<sub>3</sub> y 30 ml. de cloruro de acetilo. Apareció en seguida una coloración rojiza, que se intensificaba con el tiempo. A las 14 horas la solución de cloruro de acetilo, mantenida a temperatura ambiente, presentaba un color rojo fuerte, quedando en suspensión un precipitado que no podemos precisar si es MoO<sub>3</sub> que queda sin disolver o algún producto de reacción insoluble puesto que la solución en ningún momento se presentó transparente.

Filtramos la solución y quedó un precipitado amarillento, en pequeña cantidad y un filtrado rojo. Lavamos el sólido con éter anhidro y obtuvimos una sustancia sólida de color verde claro.

Realizamos el análisis cualitativo del precipitado resultando positivo el Cl y Mo. No pudimos realizar el análisis cuantitativo por no disponer cantidad suficiente de muestra.

Tomamos muestras del filtrado rojo y las añadimos cada una de ellas a un disolvente diferente:

Con tetracloruro de carbono se produce un precipitado amarillo.

Con benceno cambia el color, pero no se produce precipitado.

Con éter, no se produce precipitado.

El resto del filtrado se calentó a reflujo durante media hora y adquirió una coloración verde. Se prosiguió el calentamiento y cambió a pardo-oscuro. Tomamos una muestra cuando la mezcla de reacción presentaba color verde y se añadió a tetracloruro de carbono, produciéndose un precipitado verde, que al disolverlo en NaOH se produce la precipitación de un sólido semejante al hidróxido férrico.

Tomando otra muestra cuando la solución pasa a tener un color pardo se produce un precipitado pardo muy pegajoso. Calentamos hasta 50 horas y al añadir toda la muestra a tetracloruro de carbono o éter se obtiene un sólido marrón muy suelto y aparentemente homogéneo. Dicho sólido da positivos los análisis de C, Cl y Mo.

### ENSAYO VIII

#### EXPERIENCIA 38

Mezclamos 3 grs. de  $\text{MoO}_3$  y 25 ml. de cloruro de acetilo. Mantuvimos la mezcla 6 horas a temperatura ambiente y con agitación. Filtramos y separamos un sólido verde y un filtrado rojo.

El filtrado rojo lo calentamos una hora produciéndose los siguientes cambios de color: rojo-verde, pardo rojizo. Destilamos el exceso de cloruro de acetilo calentando en baño de arena, para separar también el anhídrido acético que pudiera formarse en la reacción. Obtuvimos un residuo marrón, que lo separamos del matraz de destilación con éter. Filtramos y lavamos varias veces con este disolvente.

Con el sólido marrón de aspecto homogéneo se realizaron las siguientes pruebas:

Una pequeña cantidad de sólido marrón se añadió a 5 ml. de ClH concentrado. Al calentar a ebullición el ClH adquiere una coloración roja-amarillenta, pero no se disuelve totalmente.

Si se añade otra pequeña porción a 5 ml. de  $\text{NO}_3\text{H}$  concentrado y se calienta a ebullición también adquiere el nítrico una coloración roja pero tampoco se disuelve totalmente.

$\text{CH}_3\text{—COOH}$  glacial + una pequeña porción de sólido marrón, se produce por ebullición de la mezcla, una disolución marrón, pero tampoco llega a disolverse totalmente todo el sólido.

$\text{NaOH}$  concentrada + sólido marrón. — No se produce la disolución total, obteniéndose un líquido marrón rojizo, no transparente.

$\text{NaOH}$  concentrada +  $\text{H}_2\text{O}_2$  + sólido marrón. — Se produce la disolución completa del sólido marrón si se calienta prolongadamente. Por todo ello, se ideó la siguiente técnica de trabajo para llevar a cabo la disolución del sólido marrón y su análisis.

Disolver una muestra pesada en  $\text{NaOH}$  aproximadamente 1N y añadir  $\text{H}_2\text{O}_2$  hasta disolución total, calentando en baño de agua para que se lleve a cabo la oxidación y la eliminación del exceso de agua oxigenada. Diluir

la disolución rojo-amarillenta en matraz aforado a volumen determinado. De esta disolución tomar muestras para la determinación de cloro y molibdeno.

Determinar el cloro en forma de ClAg (19 y 20) añadiendo un exceso de  $\text{NO}_3\text{H}$  concentrado a la porción tomada para el análisis de cloruros, añadiendo después lentamente y con agitación mecánica  $\text{NO}_3\text{Ag}$  para evitar la coprecipitación del molibdeno exavalente. Filtrar por decantación y tratar el precipitado con  $\text{NO}_3\text{H}$  concentrado en caliente para disolver el posible Mo (VI) precipitado y que no se produzca la disolución de ClAg. Repetir la operación de lavado 3 ó 4 veces hasta que el líquido no quede amarillento. Finalmente, lavar con agua.

El Mo valorarlo por el procedimiento del reductor Jones, según la técnica que describimos a continuación: (21).

Una cantidad medida de la solución calentarla a sequedad. Añadir 8 cm.<sup>3</sup> de  $\text{SO}_4\text{H}_2$  concentrado y 5 cm.<sup>3</sup> de  $\text{NO}_3\text{H}$  concentrado con el fin de eliminar la materia orgánica y tener la seguridad de que todo el molibdeno está en forma de molibdeno exavalente. Calentar a ebullición hasta humos de  $\text{SO}_2$ , enfriar y añadir  $\text{MnO}_4\text{K}$  al 2,5 % hasta coloración rosa, volviendo a evaporar hasta humos de  $\text{SO}_2$ . Una vez fría la disolución, diluir con sulfúrico al 2,5 % a 100 ml. y pasar la disolución por el reductor Jones. El Mo exavalente se reduce a trivalente y su disolución reducida se recoge en 30 ml. de solución de alumbre férreo al 10 % con 4 ml. de  $\text{PO}_4\text{H}_3$ . El hierro férreo reducido a ferroso se valora con una solución de permanganato de normalidad conocida.

El reductor Jones empleado en la valoración, lo preparamos introduciendo en un tubo de vidrio de longitud 50 cm. y 2 cm. de diámetro granalla Zn. El tubo va provisto de una terminación en forma de embudo con placa filtrante. El embudo va provisto de una llave para regular la marcha de la reacción de reducción. La abertura superior va unida a un embudo separador para añadir la solución del molibdeno a reducir, gota a gota. En la parte superior del tubo lleva una salida lateral con llave para la comunicación con la atmósfera.

La granalla de Zn se amalgama con una solución de  $(\text{NO}_3)_2\text{Hg}$  al 10 % en nítrico al 5 %. Después la amalgama se lava con sulfúrico al 2,5 % dos o tres veces y finalmente con agua.

Los análisis de carbono e hidrógeno los realizamos por vía seca.

*Análisis del sólido marrón.* — 1,0897 gr. se disolvieron en 30 ml. de NaOH 1N y 1 ml. de  $\text{H}_2\text{O}_2$ . Diluimos la solución a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 25 ml. — 92,4 mg. de ClAg = 19,78 % = 0,558 moles de Cl por 100 grs. de muestra.

Mo: 20 ml. — 5 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1133 N = a 20,79 % de Mo = 0,2165 moles de Mo por 100 grs. de muestra.

## EXPERIENCIA 39

Cantidades de reactivos: 3 grs. de  $\text{MoO}_3$  y 25 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 8 horas. Temperatura de reacción: la de ebullición de la mezcla. Se produjeron variaciones de color rojo-verde y finalmente, marrón-rojizo. El aspecto de la masa de reacción al final del calentamiento fue: un precipitado marrón rojizo que sobrenada en un líquido pardo.

Sin filtrar, añadimos esta mezcla en atmósfera de  $\text{CO}_2$  (para evitar la oxidación de los compuestos de molibdeno formados de grado de valencia inferior a VI) a éter anhidro. Todo el sólido quedaba adherido a las paredes del matraz y fuimos separándolo por lavados sucesivos con éter anhidro y añadiéndolo a la masa total del filtro. Se separó del filtro un sólido marrón que se añadió a una nueva cantidad de éter anhidro manteniéndolo en él 1/2 hora con agitación macánica. Se filtró la suspensión éter, también en atmósfera de  $\text{CO}_2$  y fuera del contacto de la humedad como realizamos todas las operaciones en todas las experiencias. Se obtuvo un sólido marrón que se lavó 4 veces con éter y se secó con aire seco. El sólido separado del filtro es un compuesto marrón de grano fino.

Dejamos el sólido marrón 2 días en desecador de sulfúrico y realizamos su análisis.

*Análisis del sólido marrón.* — Cl: 0,2088 grs. de sólido marrón se disolvieron y se diluyeron a 250 ml. — 100 ml. de esta solución 85,9 mg. de  $\text{ClAg}$  = 25,38 %.

0,4677 grs. se disolvieron y se diluyeron a 250 ml. — 100 ml. de esta disolución. — 190,4 mg. de  $\text{ClAg}$  = 25,18 % de Cl.

0,4549 grs. se disolvieron y se diluyeron a 250 ml. — 100 ml. de esta disolución. — 189,9 mg. de  $\text{ClAg}$  = 25,8 % de Cl.

Media: 25,45 % de Cl = 0,718 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: 0,2288 grs. de muestra. — 11,4 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$ , 0,1219 N = 19,42 % de Mo.

0,2254 grs. de muestra. — 11,4 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1219 N = 19,68 % de Mo.

0,2648 grs. de muestra. — 11,6 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1219 N = 17,03 % de Mo.

Medida 18,67 % = 0,1945 moles de molibdeno por 100 grs. de muestra.

C — 33,98 %.

34,12 %.

Media 34,05 % = 2,838 moles de C por 100 grs. de muestra.

## EXPERIENCIA 40

Cantidades de reactivos: 4 grs. de  $\text{MoO}_3$  y 50 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 30 horas. Temperatura ambiente. Se filtró la mezcla de reacción y el filtrado se calentó a refluo durante 30 horas, obteniéndose una solución parda con un sólido marrón en suspensión. Se añadió la mezcla a éter anhidro, se filtró y se lavó el sólido repetidas veces con éter anhidro.

*Análisis del sólido marrón.* — Cl: 0,1804 grs. de muestra 194,0 mgs. de ClAg = 26,60 %.

0,2134 grs. de muestra. — 230,0 mgs. de ClAg = 26,65 %.

Media 26,63 % de Cl = 0,752 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: 0,3422 grs. — 17,30 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1097 N = 17,70 % de molibdeno.

0,3876 grs. — 19,55 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1097 N = 17,78 % de molibdeno.

Media: 17,75 % de Mo = 0,1849 moles por 100 grs. de muestra.

C: 32,08 %.

32,55 %.

Media 32,31 % = 2,693 moles por 100 grs. de muestra.

#### EXPERIENCIA 41

Cantidades de reactivos: 3 grs. de MoO<sub>3</sub> y 20 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 1 día. Temperatura: ambiente. Se filtró la mezcla de reacción y el filtrado se calentó 20 horas a reflujo. Se separó todo el compuesto de molibdeno formado con éter y, lavando con este disolvente repetidas veces, el sólido marrón obtenido.

*Análisis del sólido marrón.* — Cl: 0,2764 grs. de muestra. — 300,0 mg. de ClAg = 26,82 % de Cl.

Cl: 0,3425 grs. de muestra. — 371,8 mg. de ClAg = 26,81 %.

Media 26,82 % = 0,7566 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: 0,3714 grs. de muestra. — 22,75 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,0936 N = 18,34 % de Mo.

0,3398 grs. de muestra. — 20,8 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,0936 N = 18,33 % de Mo.

Media 18,335 = 0,1909 moles por 100 grs. de muestra.

C: 34,54 %.

34,62 %.

Media 34,58 % de C = 2,882 moles por 100 grs. de muestra.

#### EXPERIENCIA 42

Cantidades de reactivos 3 grs. de MoO<sub>3</sub> y 20 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 2 horas. Temperatura ambiente. Se filtró la mezcla y el filtrado rojo se calentó a reflujo 50 horas, y a temperatura entre 50 y 70°C durante otras 50 horas. De vez en cuando se añadió 10 ml. de cloruro de acetilo.

Se precipitó el producto formado con éter y se lavó con este disolvente varias veces. Se obtuvo un sólido marrón que dejamos secar en desecador de sulfúrico.

*Análisis del sólido marrón.* — Cl: 0,4370 grs. de muestra. — 447,9 mg. de ClAg = 25,36 % de Cl.

0,3688 grs. de muestra. — 378,6 mg. de ClAg = 25,40 % de Cl.

0,3270 grs. de muestra. — 341,4 mg. de ClAg = 25,7 % de Cl.

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

Media 25,48 % de Cl equivalente a 0,7187 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: 0,4992 grs. de muestra. — 24,25 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1097 N = 17,5 % de Mo.

0,6682 grs. de muestra. — 33,4 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1097 N = 17,50 %.

0,5230 grs. de muestra. — 25,7 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  = 0,1097 N = 17,20 % de Mo.

Media 17,35 % de Mo = 0,1807 moles por 100 grs. de muestra.

C: 36,69 %.

36,54 %.

36,91 %.

36,74 %.

Media 36,74 = 3,061 moles de C por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 43

Cantidades de reactivos 4 grs. de  $\text{MoO}_3$  y 25 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 2 horas a temperatura ambiente, filtrar y el filtrado calentarlo 50 horas a reflujo, añadiendo de vez en cuando 10 ml. de cloruro de acetilo.

La mezcla de reacción resultante se añadió a éter anhidro lentamente y con agitación continua. Se dejó agitando la mezcla durante 12 horas y se separó el éter por decantación. Volvimos a añadir el sólido a 200 ml. de éter anhidro y continuamos la agitación durante 12 horas. Filtramos y el precipitado obtenido lo volvimos a añadir a 100 ml. de éter anhidro y lo mantuvimos en agitación 2 horas. Volvimos a separar el éter por filtración y repetimos la operación 3 veces. Todo ello lo realizamos con el fin de conseguir la eliminación total del anhídrido acético que acompaña al compuesto obtenido y conseguir un sólido marrón puro.

Análisis del sólido marrón. — Cl: 0,3262 grs. de muestra. — 347,2 mg. de  $\text{ClAg}$  = 26,25 % de Cl.

0,3904 grs. de muestra. — 414,3 mg. de  $\text{ClAg}$  = 26,25 % de Cl.

0,2234 grs. de muestra. — 237,0 mg. de  $\text{ClAg}$  = 26,19 % de Cl.

Media 26,33 % de Cl = 0,7427 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: 0,5162 grs. de muestra. — 26,25 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1097 N = 17,85 % de Mo.

0,3000 grs. de muestra. — 15,55 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1097 N = 18,19 %.

0,4098 grs. de muestra. — 20,75 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1097 N = 17,77 % de Mo.

Media 17,93 % = 0,1868 moles de molibdeno por 100 grs. de muestra.

C: 36,14 %.

35,68 %.

35,66 %.

Media: 35,83 % de C = 2,986 moles de molibdeno por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 44

Cantidades de reactivos: 3 grs. de  $\text{MoO}_3$  y 25 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de recación: 20 horas. Temperatura: la de ebullición de la mezcla.

Se añadió la mitad de la mezcla de reacción a tetracloruro de carbono anhidro, muy lentamente y con agitación mecánica. Se mantuvo la mezcla agitando durante un día porque se formaban masas pegajosas difíciles de separar del matraz. Filtramos, y lavamos repetidas veces con tetracloruro de carbono y dejamos secar en corriente de aire seco. Se obtuvo un sólido marrón, sólido (a).

El resto de la mezcla de reacción se añadió a éter anhidro en las mismas condiciones que las requeridas para el  $\text{Cl}_4\text{C}$ . Se obtuvo otro sólido marrón, sólido (b).

*Análisis del sólido marrón (a).* — 0,5792 grs. de muestra se disolvieron y diluyeron a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 50 ml. — 103,2 mg. de  $\text{ClAg}$ .

50 ml. — 103,4 mg. de  $\text{ClAg}$ .

Media 103,3 mg. = 21,99 % de Cl = 0,620 moles de cloro por 100 grs. de muestra.

Mo: 50 ml. — 5,32 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1123 N.

50 ml. — 5,30 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1123 N.

Media 5,30 ml. = 16,41 % de Mo = 0,171 moles de molibdeno por 100 grs. de muestra.

C: 27,12 %.

26,82 %.

26,76 %.

Media 26,9 % de carbono = 2,246 de C por 100 grs. de muestra = 0,562 moles de anhídrido acético por 100 grs. de muestra.

*Análisis del sólido marrón (b).* — 0,7738 grs. se disolvieron y diluyeron a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 50 ml. — 157,7 mg. de  $\text{ClAg}$ .

50 ml. — 156,2 mg. de  $\text{ClAg}$ .

Media 156,9 mg. = 25,1 % Cl = 0,708 moles de Cl por 100 grs. de muestra.

Mo: 50 ml. — 7,3 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1122 N.

50 ml. — 7,4 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1122 N.

Media 7,35 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,1122 N = 16,94 % de molibdeno = 0,176 moles de Mo por 100 grs. de muestra.

C: 34,06 %.

34,04 %.

34,26 %.

Media 34,12 % de carbono = 2,843 moles de C por 100 grs. de muestra = 0,719 moles de anhídrido acético por 100 grs. de muestra.

3. El producto de la primera fase de reacción

ENSAYO IX

EXPERIENCIA 45

Cantidades de reactivos: 3 grs. de  $\text{MoO}_3$  y 25 ml. de cloruro de acetilo. Tiempos de reacción: 12 horas. Temperatura de reacción: ambiente. Se filtró y el líquido rojo obtenido se mantuvo en desecador de sosa. Se eliminó el exceso de cloruro de acetilo y el color rojo cambió a verde y al abrir el desecador pasa rápidamente a azul, por lo menos superficialmente.

Sin llegar a secar totalmente el sólido contenido, realizamos su análisis.

*Análisis del sólido verde.* — 1,6274 grs. se disolvieron en 40 ml. de NaOH, 1N. Se produjo una pequeña cantidad de un precipitado rojizo, pero la mayor parte del sólido se disolvió en la sosa. La pequeña cantidad de sólido precipitado se disolvió con unas gotas de  $\text{H}_2\text{O}_2$  y la solución se diluyó a 250 ml. con agua destilada. El análisis lo realizamos siguiendo una técnica semejante a la del ensayo VIII.

Cl: 20 ml. — 117,8 mg. de ClAg.

20 ml. — 118,3 mg. de ClAg.

Media 118,0 mg. de ClAg = 22,42 % de Cl = 0,632 moles de Cl por 100 grs. de muestra.

Mo: 40 ml. — 24,3 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,0968 N.

40 ml. — 24,2 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,0968 N.

Media 24,25 ml. de  $\text{MnO}_4\text{K}$  0,0968 N = 28,80 % = 0,300 moles por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 46

Cantidades de reactivos: 4 grs. de  $\text{MoO}_3$  y 25 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 12 horas. Temperatura de reacción: ambiente. Se filtró la mezcla de reacción y el filtrado rojo lo añadimos a tetracloruro de carbono, produciéndose un precipitado amarillento. Se separó dicho precipitado por filtración, intercalando en el filtro un tren de desecación:  $\text{P}_2\text{O}_5$ ,  $\text{SO}_4\text{H}_2$  y  $\text{Cl}_2\text{Ca}$ . Lavamos tres veces con tetracloruro de carbono con unas gotas de cloruro de acetilo. Sometimos al precipitado a una corriente de aire seco, durante un intervalo de tiempo y lo separamos rápidamente de la placa de filtración. Aún cuando todas estas operaciones se realizaron con la máxima rapidez se produce una alteración superficial de la muestra y el sólido tomó un color verdoso.

*Análisis del precipitado verde-amarillo.* — 0,2830 grs. de muestra se disolvieron en 10 ml. de NaOH 1,0246 N. Se disolvió totalmente la muestra, aunque la solución tomó una ligera coloración azul que desapareció al calentar. Debido a este hecho, es posible realizar en esta clase de precipitados la determinación de la  $\text{H}^+$  que se producen al disolver la muestra. Por ello,

además de las determinaciones de Cl y Mo que se realizarán según la técnica empleada en las experiencias anteriores, tomaremos muestras de la solución para determinar la H<sup>+</sup>, por medio de una volumetría de neutralización, valorando la cantidad de soda no gastada en la muestra con ClH de normalidad conocida.

La solución que obtuvimos en NaOH se diluyó a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 50 ml. — 47,6 mg. de ClAg.

50 ml. — 47,2 mg. de ClAg.

Media 47,4 mg. de ClAg = 20,72 % de Cl = 0,584 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: 50 ml. — 5,1 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,0968 N.

50 ml. — 5,15 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,0968 N.

Media 5,13 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,0968 N = 27,82 % de Mo = 0,290 moles por 100 grs. de muestra.

H<sup>+</sup>: 10ml. — 7,3 ml. de ClH 0,08247 N.

10 ml. — 7,3 ml. de ClH 0,08247 N.

Media 7,3 ml. de ClH 0,08247 N = 5,441 miliequivalentes de H<sup>+</sup> = 1,923 moles por 100 grs. de muestra y descontando los H<sup>+</sup> que producen el Cl y Mo, quedan 0,380 moles por 100 grs. de muestra correspondientes al único anión posible en el sólido obtenido —el anión acetato— = 38,85 % de acetato.

#### EXPERIENCIA 47

Cantidades de reactivos: 3 grs. de MoO<sub>3</sub> y 15 ml. de cloruro de acetilo.

Tiempo de reacción: 12 horas con agitación continua. Temperatura de reacción ambiente. Precipitamos el compuesto formado con tetracloruro de carbono, siguiendo la técnica descrita en la experiencia anterior. Obtuvimos también un sólido verde-amarillento de aspecto homogéneo.

*Análisis del sólido verde-amarillento.* — 0,6062 grs. de muestra se disolvieron en 40 ml. de NaOH 1,0246 N. Apareció una ligera coloración azul, que desapareció al calentar. Se diluyó la solución transparente a 250 ml. con agua destilada

Cl: 50 ml. — 118,9 mg. de ClAg.

50 ml. — 118,7 mg. de ClAg.

Media 118,8 mg. de ClAg = 24,25 % = 0,684 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: 50 ml. — 12,00 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,0965 N.

50 ml. — 12,03 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,0965 N.

Media 12,02 ml. de MnO<sub>4</sub>K = 30,61 % = 0,319 moles por 100 grs. de muestra.

H<sup>+</sup>: 10 ml. — 13,52 ml. de ClH 0,8247 N.

10 ml. — 13,53 ml. de ClH 0,8247 N.

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

Media 13,52 ml. de ClH = 13,088 miliequivalentes de H<sup>+</sup> = 2,159 moles por 100 grs. de muestra, lo que corresponde 42,43 moles de anhídrido acético por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 48

Cantidades de reactivos: 3 grs. de MoO<sub>3</sub> y 15 ml. de cloruro de acetilo. Temperatura de reacción: ambiente. Tiempo de reacción: 12 horas con agitación mecánica continua. Se produjo la separación del compuesto formado en la reacción con tetracloruro de carbono siguiendo la técnica descrita en la experiencia 46. Se obtuvo también un sólido verde-amarillento.

*Análisis del precipitado verde-amarillento.* — 0,5022 grs. se disolvieron en 25 ml. de NaOH 1,0246 N y se diluyó la solución a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 50 ml. — 86,8 mg. de ClAg.

50 ml. — 86,9 mg. de ClAg.

Media 86,8 mg. de ClAg = 22,38 % de cloro = 0,631 moles por 100 grs. de agua.

Mo: 50 ml. — 7,25 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1227 N.

50 ml. — 7,25 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1227 N.

Media 7,25 ml. de MnO<sub>4</sub>K = 28,34 % = 0,296 moles por 100 grs. de muestra.

H<sup>+</sup>: 10 ml. — 7,70 ml. de ClH 0,08247 N.

10 ml. — 7,25 ml. de ClH 0,08247 N.

Media 7,80 ml. de ClH 0,08247 N = 9,533 miliequivalentes de H<sup>+</sup> = 1,898 moles por 100 grs. de muestra, lo que corresponde 0,338 moles de anhídrido acético por 100 grs. de muestra = 34,51 % de anhídrido acético.

EXPERIENCIA 49

Cantidades de reactivos: 3 grs. de MoO<sub>3</sub> y 15 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 12 horas con agitación mecánica continua. Temperatura de reacción ambiente. Separación del compuesto formado en la reacción con tetracloruro de carbono según la técnica descrita en la experiencia 46. Obtuimos un sólido verde-amarillento.

*Análisis del sólido verde-amarillento.* — 1,0776 grs. de muestra se disolvieron en 50 ml. de NaOH 1,0246 N y diluimos la solución a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 25 ml. — 98,0 mg. de ClAg.

25 ml. — 98,6 mg. de ClAg.

Media 98,3 mg. de ClAg = 22,56 % de Cl = 0,636 moles de Cl por 100 grs. de muestra.

Mo: 25 ml. — 8,05 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1227 N.

25 ml. — 8,05 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1227 N.

Media 8,05 ml. de  $MnO_4K$  0,1227 N = 29,34 % de Mo = 0,306 moles por 100 grs. de muestra.

$H^+$ : 10 ml. — 14,75 ml. de ClH 0,08247 N.

10 ml. — 14,72 ml. de ClH 0,08247 N.

Media 14,73 ml. = 20,819 miliequivalentes de  $H^+$  = 1,932 moles de  $H^+$  por 100 grs. de muestra, de los que corresponden 0,349 moles de anhídrido acético por 100 grs. de muestra = 35,61 % de anhídrido acético.

#### ENSAYO X

##### EXPERIENCIA 50

Cantidades de reactivos: 3 grs. de  $MoO_3$  y 20 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 3 horas temperatura ambiente, filtrar y 1/2 hora a reflujo, hasta la transformación del líquido en color verde.

Tomamos dos muestras de este líquido y las añadimos respectivamente a tetracloruro de carbono y éter. Solamente se produjo una separación de un sólido en el primer caso, por ello todo el resto de líquido le añadimos a  $Cl_4C$  lentamente y con agitación mecánica, manteniendo la agitación posteriormente 10 minutos.

Filtramos y lavamos el precipitado con  $Cl_4C$ . Solamente al llevar a cabo el cambio de matraces con el líquido de lavado se producía una modificación del sólido obtenido, por lo menos superficialmente. Dejamos la sustancia obtenida en desecador de sosa y realizamos su análisis.

*Análisis del sólido verde.* — 1,350 grs. se disolvieron en  $NaOH$  1 N. Apareció un precipitado rojizo que se disolvió en  $H_2O_2$ . Diluimos la solución a 200 ml. con agua destilada.

$Cl^-$ : 25 ml. — 164,6 mg. de  $ClAg$ .

25 ml. — 164,2 mg. de  $ClAg$ .

Media 164,4 mg. de  $ClAg$  = 24,10 % de Cl = 0,680 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: 25 ml. — 11,10 ml. de  $MnO_4K$  0,1350 N.

25 ml. — 11,15 ml. de  $MnO_4K$  0,1350 N.

Media 11,12 ml. = 28,82 % = 0,295 moles de Mo por 100 grs. de muestra.

##### EXPERIENCIA 51

Cantidades de reactivos: 2 grs. de  $MoO_3$  y 20 ml. de cloruro de acetilo. Se mantuvo la mezcla con agitación 3 horas a temperatura ambiente. Se filtró y el filtrado rojo se calentó a ebullición durante 20 minutos hasta que presentó un color netamente verde. Se precipitó el compuesto formado con tetracloruro de carbono, se filtró y el precipitado se lavó con  $Cl_4C$ . Sin secar efectuamos su análisis.

*Análisis del precipitado verde.* — 0,3296 grs. se disolvieron en 10 ml. de  $NaOH$  1 N. Aparecía unas trazas de tetracloruro de carbono que eliminamos por ebullición. Se produjo un precipitado pardo que se disolvió añadiendo unas gotas de  $H_2O_2$ .

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

Cl<sup>-</sup>: Toda la muestra. — 369,2 mg. de ClAg = 27,21 % = 0,781 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: Una muestra de 505,8 mg. se disolvió en NaOH 1 N y H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>. En toda la muestra se gastaron 50,5 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,0986 N = 29,90 % de Mo = 0,311 moles por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 52

Cantidades de reactivos 3 grs. de MoO<sub>3</sub> y 15 ml. de cloruro de acetilo. Después de obtener la solución roja transparente, se calentó a ebullición: 25 minutos. Se separó la sustancia formada por precipitación con tetracloruro de carbono.

Análisis del sólido verde. — 0,7350 grs. de muestra se disolvió en NaOH 1 N y unas gotas de agua oxigenada. Quedaron unas pequeñas gotas de tetracloruro de carbono que se eliminaron por calentamiento. La disolución se diluyó a 200 ml. con agua destilada.

Cl<sup>-</sup>: 40 ml. — 90,4 mg. de ClAg.

40 ml. — 90,5 mg. de ClAg.

Media 90,5 mg. = 19,04 % = 0,537 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: 25 ml. — 5,6 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1350 N.

25 ml. — 5,6 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1350 N.

Media 5,6 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1350 N = 20,5 % de Mo = 0,214 moles por 100 grs. de muestra.

ENSAYO XI

EXPERIENCIA 53

Cantidades de reactivos: 10 grs. de MoO<sub>3</sub> y 40 ml. de cloruro de acetilo. Agitamos la mezcla 6 horas a temperatura ambiente y filtramos, separándose un filtrado rojo.

10 ml. de este filtrado y se calentó a ebullición 10 minutos, la mezcla no presentaba una coloración netamente verde. Se separaron las sustancias formadas con tetracloruro de carbono y por filtración se obtuvo un sólido verde.

Análisis del precipitado verde. — 0,7476 grs. se disolvieron en NaOH 1 N y unas gotas de H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>. Se diluyó la solución a 250 ml. con agua destilada.

Cl<sup>-</sup>: 25 ml. — 58,2 mg. de ClAg.

25 ml. — 58,6 mg. de ClAg.

Media 58,4 mg. = 19,33 % de Cl = 0,545 moles por 100 grs. de muestra.

Mo: 25 ml. — 3,90 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1350 N.

25 ml. — 3,95 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1350 N.

Media 9,93 ml. = 22,65 % = 0,236 moles por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 54

10 ml. de filtrado rojo obtenido en la experiencia anterior se calienta 15 minutos, momento en que presenta una coloración netamente verde. Se separan las sustancias formadas con tetracloruro de carbono, y el sólido verde obtenido se lava repetidas veces con dicho disolvente.

*Análisis del sólido verde.* — 1,2210 grs. de muestra se disolvieron en NaOH 1 N y unas gotas de H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>. La disolución se diluyó a 250 ml. con agua destilada.

Cl<sup>-</sup>: 25 ml. — 92,0 mg. de ClAg.

25 ml. — 91,6 mg. de ClAg.

Media 91,8 mg. = 20,24 % de molibdeno = 0,571 moles de Mo por 100 grs. de muestra.

Mo: 25 ml. — 6,40 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1350 N.

25 ml. — 6,45 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1350 N.

Media 6,43 ml. de MnO<sub>4</sub>K 0,1350 N = 22,85 % de Mo = 0,238 moles por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 55

10 ml. del filtrado rojo de la experiencia 53 se calentaron a ebullición 20 minutos, hasta que su coloración fue parda. Se añadió la masa de reacción a tetracloruro de carbono y se formaron unas masas muy pegajosas que no se pudieron separar del matraz aún con un tratamiento muy prolongado con tetracloruro de carbono.

EXPERIENCIA 56

10 ml. de la solución roja de la experiencia 53 se calentaron a ebullición durante 20 minutos, intervalo suficiente para que la masa de reacción presentase coloración parda. Se añadieron a 50 ml. de éter anhidro y se produjeron unas masas pegajosas pardas que no se pudieron separar del matraz aún con tratamiento prolongadísimo con éter.

C. REACCIÓN DEL TRIÓXIDO DE WOLFRAMIO Y CLORURO DE ACETILO

ENSAYO XII

EXPERIENCIA 57

Preparamos WO<sub>3</sub> dejando gotear lentamente una disolución saturada de WO<sub>4</sub>Na<sub>2</sub> sobre un volumen 2-3 veces mayor de ClH concentrado hirviiente. Después se mantuvo la mezcla una hora en baño de agua, se dejó sedimentar el precipitado y se filtró por placa porosa. El sólido se lavó con una solución de NO<sub>3</sub>NH<sub>4</sub> al 5 % hasta la eliminación total de cloruros. Se desecó a 120°C.

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

Se mezclaron 1,5 grs. del  $\text{WO}_3$  obtenido con 20 ml. de cloruro de acetilo y se mantuvo la mezcla en reposo durante 12 horas. El cloruro de acetilo tomó una coloración amarilla, pero la mayor parte del  $\text{WO}_3$  permanecía sin atacar.

Se mantiene con agitación la mezcla durante 3 días el líquido va adquiriendo una coloración cada vez más intensa, hasta obtenerse una solución roja, pero prácticamente permanece la misma cantidad de sólido en suspensión.

Se calienta a ebullición la mezcla de reacción y la coloración roja se intensifica, pero en todo momento sigue permaneciendo una cantidad de sólido en suspensión aún cuando se prolongó el calentamiento hasta 150 horas.

*Reacción del  $\text{WO}_3$  y cloruro de acetilo a temperatura ambiente*

ENSAYO XIII

EXPERIENCIA 58

Cantidades de reactivos: 2 grs. de  $\text{WO}_3$  y 20 ml. de cloruro de acetilo. Temperatura de reacción: ambiente. Tiempo de reacción: 30 días, de ellos 150 horas con agitación mecánica. Siempre permaneció una cantidad considerable de sólido en suspensión.

Se filtró la solución y separamos un sólido verde y un filtrado rojo. El sólido verde lo lavamos con éter y del líquido rojo no se separó ningún precipitado por tratamiento con diferentes disolventes.

El sólido verde es soluble en solución de NaOH 1 N. Realizado el análisis cualitativo dan positivos el W, Cl y C.

Por todo ello ideamos la siguiente técnica de trabajo, para disolver y realizar sus análisis:

*Disolución de la muestra.* Se realiza con una disolución de NaOH aproximadamente 1 N, de concentración conocida.

*Determinación de cloruros*<sup>22</sup>. A un volumen medido de la solución, se le añade peróxido de hidrógeno, para oxidar el wolframio a wolframio exavalente. Se precipita el ácido wolfrámico con nítrico concentrado en frío, se filtra para separarlo y se añade 1 ml. de ácido fosfórico para que se forme un complejo con el ácido wolfrámico no precipitado y no impurifique al ClAg cuando se produzca su precipitación con el nitrato de plata.

Para comprobar esta técnica de trabajo realizamos las siguientes determinaciones.

1.<sup>a</sup> *determinación*

Se disolvieron 157,6 mg. de  $\text{WO}_3$  en NaOH 1 N y añadimos 20 ml. de ClH 0,0825 N (1,650 m. e. q. de  $\text{Cl}^-$ ) y 1 ml. de  $\text{H}_2\text{O}_2$ . Calentamos en baño de agua hasta eliminación del exceso de peróxido de hidrógeno. Enfriamos y añadimos 10 ml. de  $\text{NO}_3\text{H}$  concentrado en frío. Dejamos en reposo 12 horas. Filtramos el precipitado amarillo de  $\text{WO}_4\text{H}_2$  y al filtrado le añadimos 1 ml. de  $\text{PbO}_2$  y precipitamos el Cl, como ClAg, produciéndose 237,8 mg.

### 2.<sup>a</sup> determinación

Se disolvieron 186,0 mg. de  $\text{WO}_3$  en NaOH 1 N y le añadimos 20 ml. de ClH 0,0825 N. Determinamos los cloruros con la misma técnica y obtuvimos un precipitado de ClAg de 237,8 mg.

Media de las dos determinaciones: 237,7 mg. de ClAg equivalente a 1,658 miliequivalentes de cloruro. El contenido de las pruebas es 1,650 miliequivalentes, el error del análisis es + 0,5 %, por ello ésta fue la técnica que seguimos en la determinación del cloro en los compuestos de wolframio obtenidos en las diferentes experiencias.

### Determinación de wolframio

Se llevó a cabo su determinación por el método de la cinconina, que consiste en añadir a la muestra disuelta en NaOH, 50 ml. de ClH concentrado y 15 ml. de  $\text{NO}_3\text{H}$  (1:1). Digerir la muestra a 100°C hasta que el wolframio tome color amarillo. Diluir a 150 ml. y añadir 5 ml. de solución de cinconina (25 grs. de cinconina en 1000 ml. de ClH 1:1) y pulpa de papel. Tratarlo a 90-95°C durante treinta minutos agitando de vez en cuando. Decantar la solución clara a través de un filtro sin cenizas que contiene un poco de pulpa de papel. Lavar el precipitado con solución de cinconina (25 ml. diluidos a 1000 ml), trasladar el precipitado al papel y volver a lavar el papel y precipitados con solución de cinconina. Los residuos que quedan en el vaso disolverlos con amoníaco. Evaporar a sequedad y añadir 2 ó 3 ml. de ClH (1:9) y 0,5 ml. de solución de cinconina. Calentar a ebullición, digerir unos minutos y filtrar sobre el mismo filtro. Trasladar el filtro a un crisol y calentar entre 750-850°C. El wolframio se pesa como  $\text{WO}_3$ .

### Determinación de acidez

Se valora el exceso de NaOH de la disolución con ClH de normalidad conocida, determinando el punto final potenciométricamente con un pH metro beckman con un electrodo de vidrio y otro de calomelanos.

### Determinación de carbono

#### Por vía seca.

*Análisis del sólido verde.* Sólido 58. — 0,3925 grs. se disolvieron en 10 ml. de NaOH 0,9762 N y la disolución se diluyó a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 40 ml. — 9,9 mg. de ClAg.

40 ml. — 10,1 mg. de ClAg.

Media 10,0 mg. de ClAg = 3,15 % de Cl = 0,088 moles por 100 grs. de muestra.

W: 40 ml. — 54,9 mg. de  $\text{WO}_3$ .

40 ml. — 54,3 mg. de  $\text{WO}_3$ .

Media 54,6 mg. = 69,85 % de wolframio = 0,402 moles por 100 grs. de muestra.

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

H<sup>+</sup>: 25 ml. de solución — 12,2 ml. de ClH 0,04139 N.

25 ml. de solución — 12,25 ml. de ClH 0,04139 N.

Media 12,2 ml. de ClH 0,04139 N = 4,712 miliequivalentes de H<sup>+</sup> = 1,2 moles por 100 grs. de muestra.

C: 0,61 %.

1,08 %.

Media 0,84 % de carbono = 0,088 moles de carbono por 100 grs. de muestra.

*Reacción del WO<sub>3</sub> y cloruro de acetilo a temperatura de refluxo*

ENsayo XIV

EXPERIENCIA 59

Cantidades de reactivos 3 grs. de WO<sub>3</sub> y 20 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción 60 horas. Temperatura de reacción: refluxo. Se añadió la mezcla de reacción a éter. Se filtró y se lavó el precipitado con éter anhidro. Se dejó en desecador de sulfúrico hasta peso constante.

*Análisis del sólido pardo-grisáceo.* — 1,2058 grs. se disolvieron en 25 ml. de NaOH 1 N y se diluyó la solución a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 40 ml. — 56,4 mg. de ClAg = 7,23 % de Cl.

40 ml. — 67,9 mg. de ClAg = 6,97 % de Cl.

Media 9,098 % de Cl = 0,200 moles de Cl por 100 grs. de muestra.

W: 40 ml. — 130,2 mg. de WO<sub>3</sub>.

40 ml. — 128,0 mg. de WO<sub>3</sub>.

Media 129,0 mg. de WO<sub>3</sub> = 53,64 % de wolframio = 0,280 moles por 100 grs. de muestra.

C: 13,20 %.

13,44 %.

Media 13,32 de carbono = 1,110 moles de carbono por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 60

Cantidades de reactivos: 2 grs. de WO<sub>3</sub> y 25 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción 80 horas. Temperatura de reacción: refluxo de la mezcla. Se añadió de vez en cuando 10 ml. de cloruro de acetilo.

Se añadió la mezcla de reacción, que contenía un precipitado en suspensión a éter anhidro. Se filtró y lavó el sólido separado repetidas veces con dicho disolvente. Se obtuvo un sólido pardo-grisáceo.

*Análisis del sólido pardo-grisáceo.* — 0,2648 grs. de muestra se disolvieron en 40 ml. de NaOH 1 N y se diluyó la disolución a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 50 ml. — 24,5 mg. de ClAg.

50 ml. — 24,8 mg. de ClAg

REACCIONES DE LOS OXIDOS DE CROMO, MOLIBDENO WOLFRAMIO (VI) CON CLORURO DE ACETILO

Media 24,6 mg. = 11,4 % de Cl = 0,321 moles de Cl por 100 grs. de muestra.

W: 50 ml. — 32,0 mg. de  $\text{WO}_3$ .

50 ml. — 33,0 mg. de  $\text{WO}_3$ .

Media 32,5 mg. de ClAg = 48,8 % de W = 0,321 moles de wolframio por 100 grs. de muestra.

C: 20,96 %.

20,71 %.

Media 20,84 % = 1,736 moles por 100 grs. de muestra.

EXPERIENCIA 61

Cantidades de reactivos: 3,5 grs. de  $\text{WO}_3$  y 25 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción: 90 horas. Temperatura de reacción: reflujo de la mezcla. Se añadió de vez en cuando 10 ml. de cloruro de acetilo.

Se filtró la mezcla de reacción y se separó un sólido marrón y un filtrado rojo-vinoso.

El filtrado rojo vinoso se añadió a 500 ml. de éter anhidro y precipitó un sólido gris, que se separó por filtración y se lavó con éter, dejándolo en desecador de sulfúrico hasta peso constante.

*Análisis del sólido marrón.* — 0,3862 mg. de muestra se disolvieron en 10 ml. de NaOH 1 N y la disolución se diluyó a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 50 ml. — 8,4 mg. de ClAg.

50 ml. — 9,2 mg. de ClAg.

Media 8,6 mg. = 0,091 moles de cloro por 100 grs. de muestra.

W: 50 ml. — 52,4 mg. de  $\text{WO}_3$ .

50 ml. — 52,7 mg. de  $\text{WO}_3$ .

Media 52,6 mg. = 58,97 % de wolframio = 0,337 moles por 100 grs. de muestra.

C: 10,12 %.

9,79 %.

Media 9,95 % = 0,63 moles por 100 grs. de muestra.

*Análisis del sólido gris.* — 0,4740 grs. se disolvieron en 50 ml. de NaOH 1 N y la disolución se diluyó a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 40 ml. — 30,0 mg. de ClAg.

40 ml. — 30,8 mg. de ClAg.

Media 30,4 mg. = 9,79 % = 0,276 moles por 100 grs. de muestra.

W: 40 ml. — 37,6 mg. de  $\text{WO}_3$ .

40 ml. — 37,8 mg. de  $\text{WO}_3$ .

Media 37,7 mg. = 39,88 % de wolframio = 0,214 moles por 100 grs. de muestra.

C: 22,48 %.

22,58 %.

Media 22,54 % = 1,877 moles por 100 grs. de muestra.

## EXPERIENCIA 62

Cantidades de reactivos: 3 grs. de  $\text{WO}_3$  y 50 ml. de cloruro de acetilo. Tiempo de reacción 150 horas. Temperatura de reacción: la de reflujo de la mezcla. Se añadió de vez en cuando 10 ml. de cloruro de acetilo.

Se filtró la mezcla de reacción y del filtrado rojo-vinoso obtenido se precipitó la sustancia disuelta por precipitación con éter anhidro. Se separó el precipitado por filtración y se lavó el sólido obtenido con el mismo disolvente. El lavado se realizó muy prolongadamente tanto en tiempo de tratamiento con éter como en las veces que se realizó dicha operación.

*Análisis del sólido gris.* — 0,3551 grs. de muestra se disolvieron en 10 ml. de  $\text{NaOH}$  1 N y la disolución se diluyó a 250 ml. con agua destilada.

Cl: 40 ml. — 18,0 mgs. de  $\text{ClAg}$ .

40 ml. — 19,0 mgs. de  $\text{ClAg}$ .

Media 18,5 mgs. de  $\text{ClAg}$  = 0,217 moles por 100 grs. de muestra

W: 40 ml. — 29,2 mg. de  $\text{WO}_3$ .

40 ml. — 29,0 mg. de  $\text{WO}_3$ .

Media 29,1 mg. = 40,62 % de wolframio = 0,221 moles por 100 grs. de muestra.

C: 21,61 %.

21,83 %.

Media 21,72 % 1,810 moles por 100 grs. de muestra.

El sólido grisáceo obtenido presentó las siguientes propiedades:

a) Se disuelve completamente en  $\text{NaOH}$  1 N en frío, produciéndose una solución roja.

b) Tratando esta solución con  $\text{CH}_3\text{NO}_2$  en frío, se produce un precipitado rojizo semejante al hidróxido férrico.

c) Si se trata la disolución roja en  $\text{NaOH}$  con un oxidante, el color pasa a amarillo.

d) Con nítrico en caliente se produce un precipitado amarillo.

## IV. — CONCLUSIONES

1.º Los trióxidos de Cr, Mo y W reaccionan con cloruro de acetilo, con velocidad que decrece conforme aumenta el peso atómico del metal.

2.º El  $\text{CrO}_3$  es soluble en cloruro de acetilo y la reacción que conduce primariamente a cloruro de cromilo y anhídrido acético es fuertemente exotérmica.

3.º Si después de la reacción primaria anterior se calienta a reflujo durante una hora, el producto final de la reacción es un sólido verde cuyo componente principal es monoclорodiacetato de cromo (III)  $\text{Cl}(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{Cr}$ , aunque lo que se obtiene no es un producto unitario, sino una mezcla.

4.º La composición promedio de la mezcla obtenida, se puede hacer variar trabajando con mezclas de cloruro de acetilo y anhídrido acético; cuanto más cloruro de acetilo en el reactivo de ataque, tanto más cloro

contienen los productos finales, cuanto más anhídrido acético, tanto más acetato.

5.<sup>o</sup> El sólido verde cuyo componente principal es  $\text{Cl}(\text{CH}_3\text{—COO})_2\text{Cr}$ , reacciona lentamente con una mezcla de anhídrido y ácido acético para dar  $(\text{CH}_3\text{—COO})_2\text{Cr}$ , sólido de color verde claro.

6.<sup>o</sup> El  $\text{MoO}_3$  reacciona con cloruro de acetilo para dar una disolución roja de la que se puede separar por adición de  $\text{CCl}_4$  un compuesto de Mo (VI) que responde a la fórmula  $\text{Cl}_2\text{O}_2\text{Mo} \cdot 1 \text{ O}(\text{OC} \cdot \text{CH}_3)_2$ .

7.<sup>o</sup> Si se calienta la disolución roja se produce una reducción del Mo (VI) y al cabo de unas 20-30 horas se tiene una disolución parda de la que se puede precipitar el compuesto  $\text{Cl}_4\text{Mo} \cdot 4 \text{ O}(\text{CH}_2 \cdot \text{CH}_3)_2$ , por adición de éter.

8.<sup>o</sup> Por tratamiento prolongado en caliente de  $\text{WO}_3$  con  $\text{ClCOCH}_3$  se produce en pequeña medida una reacción que lleva a la formación del compuesto  $\text{WCl}(\text{OOC} \cdot \text{CH}_3)_4$ .

## V. — BIBLIOGRAFIA

### B I B L I O G R A F I A

- [1] G. W. WATT, Ph. S. GENTILE y E. P. HELVESTON: J. Am. Chem. Soc. 77, 2752 (1955).
- [2] R. USÓN y E. GONZÁLEZ: Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, XII, 9 (1957. Tesis de E. González).
- [3] R. USÓN y A. VITALLER: Rev. Fac. Ciencias Oviedo, núms. 1-2, 1961. Tesis de A. Vitaller.
- [4] R. CH. PAUL, D. SINGH y S. S. SHANU: J. Chem. Soc. (London), 315, 1959.
- [5] R. USÓN y V. RIERA: Tesis doctoral de V. Riera, junio 1964. Pendiente de publicación.
- [6] A. CHRETIEN y G. OECHSEL: Comt. Rend. 206, 254 (1938).
- [7] F. POPP: Chem. Ber., 82, 152 (1949).
- [8] J. BOSSON: Comt. Rend., 218, 720 (1944).
- [9] A. BYSTRÖM y K. WILHELM: Acta Chem. Scand., 4, 1131 (1950).
- [10] Handbook of Chem. and Phys. Ed. 43, 1961-62, pág. 1.743. Chem. Rubber. Publish. Corp.
- [11] G. ANDERSSON y A. MAGNELI: Acta Chim. Scand., 4, 793 (1950).
- [12] N. V. SIDGWICK: *Los elementos químicos y sus compuestos*. Trad. E. Jimeno y V. Iranzo, 181. Tomo II (1956).
- [13] Ibd. en pág. 198, por ejemplo.
- [14] D. M. KILLEFER and A. LUIZ: *Molybdenum Compounds*. 62 (1952).
- [15] N. V. SIDGWICK: *Los elementos químicos y sus compuestos*. Trad. E. Jimeno y V. Iranzo, 181. Tomo II (1956).
- [16] G. ANDERSON: Acta Chem. Scand. 1953, 7, 154.
- [17] W. L. KEHL et al.: J. Appl. Phys. 23, 212 (1952).
- [18] C. ROSEN et al.: Acta Cryst. 9, 475 (1956).
- [19] O. HÖNIGSCHMID and G. WITTMANN: Zeits. fur Anorg. und allg. Chemie. 65, 229 (1936).
- [20] W. KLEMM y H. STEINBERG: 193, 227 (136).
- [21] *Climax Methods of Analysis*. Pág. 15.
- [22] W. BILTZ und C. FENDIUS: Z. Anorg. und Allg. Chem. 172, 387 (1928).
- [23] I. M. KOLTHOFF y E. B. SANDELL: *Química Analítica Cuantitativa*. 844. Trad 3.<sup>a</sup> ed.