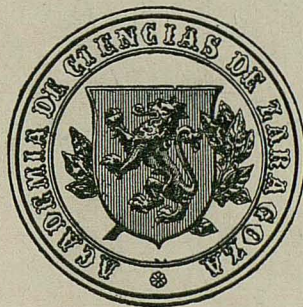


REVISTA  
DE LA  
**ACADEMIA DE CIENCIAS**  
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES  
DE  
ZARAGOZA

SERIE 2.<sup>a</sup>

TOMO XXI



1966



## INDICE

	<i>Págs.</i>
FERNANDO CÁMARA NIÑO. — <i>Ilmo. Sr. D. Pedro Ferrando Más...</i>	9
J. CASAS, J. R. DE F. MONEO y M. S. YZUEL. — <i>La calidad de la imagen fotográfica en relación con el estado aberrante ...</i>	15
J. CASAS, J. R. DE F. MONEO y R. GARCÍA CRISTÓBAL. — <i>Influencia de los órdenes superiores de las aberraciones esférica y esferocromática en la corrección de un sistema óptico ...</i>	85
F. JAVIER ECHARTE REULA. — <i>Medidas en espacios foliados y en espacios homogéneos. Aplicación a la geometría integral ...</i>	121
ANGEL SÁNCHEZ FRANCO. — <i>Estado actual de los estudios sobre la interferona ...</i>	163
JESÚS SÁINZ Y SÁINZ PARDO. — <i>Discurso de contestación al anterior.</i>	179
JUSTINIANO CASAS PELÁEZ. — <i>Formación y valoración de la imagen óptica ...</i>	195
JUAN CABRERA Y FELIPE. — <i>Discurso de contestación al anterior ...</i>	209
JUAN SANCHO DE SAN ROMÁN. — <i>Los jóvenes pre y postgraduados y la investigación matemática en España ...</i>	215
RAFAEL RODRÍGUEZ VIDAL. — <i>Discurso de contestación al anterior...</i>	233
ALBERTO VIADER MUÑOZ. — <i>La aportación de la ingeniería civil al acervo de la cultura española ...</i>	247
SANTIAGO AMADO LÓRIGA. — <i>Discurso de contestación al anterior ...</i>	271



## SEÑORES ACADEMICOS

### JUNTA DE GOBIERNO

- PRESIDENTE: Excmo. Sr. D. Francisco Pascual de Quinto.  
VICEPRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. Mariano Tomeo Lacrué.  
TESORERO: Ilmo. Sr. D. Celso Gutiérrez Losa.  
BIBLIOTECARIO: Ilmo. Sr. D. Juan Martín Sauras.  
SECRET. PERPETUO: Ilmo. Sr. D. Julián Bernal Nievas.  
VICESECRETARIO: Ilmo. Sr. D. Fernando Cámara Niño.

### ACADEMICOS NUMERARIOS

#### *Sección de Exactas*

- PRESIDENTE: Excmo. Sr. D. Teodoro Ríos Balaguer. (Medalla n.º 25).  
Independencia, 25.  
VICEPRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. José M.ª Iñiguez Almech. (Medalla n.º 19).  
Bolonia, 4.  
SECRETARIO: Ilmo. Sr. D. José Estevan Ciriquian. (Medalla n.º 4).  
Ponzano, 16.  
ACADÉMICOS: Excmo. Sr. D. Santiago Amado Lóriga. (Medalla n.º 10).  
General Mayandía, 2.  
Ilmo. Sr. D. Rafael Rodríguez Vidal. (Medalla n.º 22).  
Fernando el Católico, 6.  
Ilmo. Sr. D. Baltasar Rodríguez Salinas (Medalla número 1).  
Arzobispo Apaolaza, 20.  
Ilmo. Sr. D. Juan Sancho de San Román. (Electo). San Juan de la Cruz, 19.  
Ilmo. Sr. D. Antonio Plans y Sanz de Bremond. (Electo).  
Independencia, 32.  
Ilmo. Sr. D. Rafael Cid Palacios. (Electo). Corona de Aragón, 50.  
Ilmo. Sr. D. Alberto Viader Muñoz. (Electo). San Miguel, 10.



*Sección de Físico-Químicas*

- PRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. Vicente Gómez Aranda. (Medalla n.º 5). Independencia, 18.
- VICEPRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. Gonzalo González Salazar Gallart. (Medalla n.º 29). Capitán Portolés, 20.
- SECRETARIO: Ilmo. Sr. D. Juan Martín Sauras. (Medalla n.º 11). Calvo Sotelo, 25.
- ACADÉMICOS: Ilmo. Sr. D. Julián Bernal Nieves. (Medalla n.º 2). Plaza de Aragón, 10.  
Ilmo. Sr. D. Mariano Tomeo Lacrué. (Medalla n.º 8). General Mola, 45.  
Ilmo. Sr. D. Celso Gutiérrez Losa. (Medalla n.º 20). Blancas, 2.  
Excmo. Sr. D. Juan Cabrera Felipe. (Medalla n.º 23). Plaza Santa Engrecia, 1.  
Ilmo. Sr. D. Justiniano Casas Peláez. (Medalla n.º 14). Calvo Sotelo, 11-D.  
Ilmo. Sr. D. Alberto Galindo Teixeira. (Electo). Paseo de Teruel, 19-21.

*Sección de Naturales*

- PRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. Pedro Ferrando Más. (Medalla n.º 12). General Mola, 9.
- VICEPRESIDENTE: Ilmo. Sr. D. Agustín Alfaro Moreno. (Medalla n.º 27). Zumalacárregui, 10.
- SECRETARIO: Excmo. Sr. D. Ramón Esteruelas Rolando. (Medalla número 15). Independencia, 4.
- ACADÉMICOS: Ilmo. Sr. D. Jesús Sainz y Sainz Pardo. (Medalla n.º 6). Moncasi, 12.  
Ilmo. Sr. D. Fernando Cámara Niño. (Medalla n.º 21). Almagro, 7.  
Excmo. Sr. D. Francisco Pascual de Quinto. (Medalla número 30). General Mola, 32.  
Ilmo. Sr. D. Angel Sánchez Franco. (Medalla n.º 9). Royo, 23.  
Ilmo. Sr. D. Cruz Rodríguez Muñoz. (Electo). Arzobispo Apaolaza, 20.  
Ilmo. Sr. D. Santiago Baselga Aladrén. (Electo). Alfonso I, 25.  
Ilmo. Sr. D. José M.ª Ruiz Tapiador Martínez. (Electo). Marina Moreno, 14.



## ACADEMICOS CORRESPONDIENTES NACIONALES

### *Sección de Exactas*

- Dr. D. Pedro Abellanas Cebollero. Ibáñez Martín, 1. Madrid.  
Dr. D. Roberto Araújo García. Peñuelas, 11. Madrid.  
Dr. D. José Javier Etayo Miqueo. Conde de Peñalver, 80. Madrid.  
Dr. D. Pedro Pi y Calleja. Aribau, 135. Barcelona.

### *Sección Físico-Químicas*

- Dr. D. Simón Benítez Padilla. Pérez Galdós, 9. Las Palmas.  
Dr. D. Julio Palacios Martínez. Serrano, 157. Madrid.  
Dr. D. Emilio Gimeno Gil. Marqués de Urquijo, 34. Madrid.  
Dr. D. José M.<sup>a</sup> Albareda Herrera. Serrano, 119. Madrid.  
Dr. D. José M.<sup>a</sup> González Barredo. Chicago. Estados Unidos.  
Dr. D. Mariano Velasco Durantez. Plaza de Núñez de Arce, 7. Barcelona.  
Dr. D. Juan Bautista Bastero Beguiristain. Pérez Galdós, 5. Bilbao.

### *Sección de Naturales*

- Dr. D. Rafael Ibarra Méndez. Plaza Alonso Martínez, 2. Madrid.  
Ing. Dr. D. José Cruz Lapazarán Beguiristain. Ferraz, 57. Madrid.  
Ing. Dr. D. Mariano Berdún Clavería. P. Huesca, 6. Huesca.  
Ing. Dr. D. Alfonso Osorio Rebellón. Princesa, 15. Madrid.  
Ing. Dr. D. José M.<sup>a</sup> Ríos García. Hermosilla, 44. Madrid.

## ACADEMICOS CORRESPONDIENTES EXTRANJEROS

### *Sección de Exactas*

- Dr. Gastón Julia. Versailles. (Francia).

### *Sección Físico-Químicas*

- Dr. Charles Henry. París. (Francia).

### *Sección de Naturales*

- Dr. Eugenio Seguy. París. (Francia).  
Dr. Henry Gaussen. Toulouse. (Francia).





ILMO SR. D. PEDRO FERRANDO MÁS  
† 19 marzo 1966



## NECROLOGIA

ILMO. SR. D. PEDRO FERRANDO MAS

P O R

FERNANDO CÁMARA NIÑO

El 18 de marzo último falleció cristianamente D. Pedro Ferrando Más, académico fundador de esta Corporación y catedrático de la Facultad de Ciencias durante 46 años.

Ya tenía tradición de naturalista y vinculación al profesorado. El mismo consigna en una de sus publicaciones\*:

"Mi querido padre, D. Pedro Ferrando Plou, se inició en botánica con D. Florencio Ballarín, del que fue discípulo al cursar los estudios de Medicina y le sustituyó interinamene por haber sido nombrado Profesor auxiliar en los estudios preparatorios".

Efectivamente, nació el 25 de mayo de 1879 en Zaragoza, cuando su padre —médico y licenciado en ciencias— era auxiliar de Historia Natural en esta Universidad. Después pasó su primera etapa formativa, hasta terminar el bachillerato en Tarragona, pues su padre había ganado Cátedras y era titular de Historia Natural y secretario de aquel Instituto.

De su padre recibió la formación cristiana y científica. Sobre lo primero además de su vida de católico ferviente, hacemos constar que su hermana y una de sus hijas (fallecidas) fueron religiosas, y sobre lo segundo, que le guió personalmente hasta su fallecimiento, acaecido cuando D. Pedro estaba haciendo las oposiciones en que salió catedrático.

Hizo los estudios universitarios en Barcelona y Madrid y en esta última obtuvo el grado de Doctor en Ciencias naturales con Premio extraordinario. Fue pensionado para continuar y completar sus estudios de Cristalografía en París, y a su regreso dada su preparación, obtuvo en 1902 la cátedra de Mineralogía y Botánica de la Universidad de Salamanca.

Estuvo allí sólo un curso, pues se dio la circunstancia de quedar vacante la cátedra de Zaragoza y pudo venir por concurso a esta Universidad.

\* Los estudios botánicos en Aragón.



Este mismo año, contrajo matrimonio con D.<sup>a</sup> Pilar Subirat, constituyendo un hogar ejemplar, y dando una buena educación cristiana a sus doce hijos\*.

Desempeñó las cátedras de Mineralogía y Botánica y Cristalografía y tras el cambio de plan, la de Geología con nociones de geoquímica hasta su jubilación.

Además de estas cátedras, en 1931, obtuvo por concurso la de Biología de la Facultad de Veterinaria, que regentó también hasta su jubilación, el 25 de mayo de 1949.

Desde su llegada a Zaragoza formó parte de la Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales, otorgándole además la medalla de la Sociedad. En ésta, que luego pasó a titularse Sociedad Ibérica de Ciencias Naturales, tuvo distintos cargos por la renovación reglamentaria de las juntas y precisamente en el departamento de su cátedra se conservaba la biblioteca.

Fue uno de los miembros de la Comisión organizadora de esta Academia y por tanto numerario desde el día de la fundación (27-III-1916). De los más asiduos y colaboradores como puede verse en las actas y publicaciones. Desde 1933 hasta la nueva organización fue secretario y asimismo conservaba la biblioteca de la Academia en su departamento, y desde 1948 ha sido el presidente de la sección de Ciencias Naturales.

Fue también un colaborador asiduo de la Sociedad española de Historia Natural, desde el año 1905 en que fue nombrado Vicepresidente de la Sección de Zaragoza. Y finalmente, aunque desarrolló aquí la mayor parte de trabajo y la totalidad de sus publicaciones son referentes a la región aragonesa, estuvo relacionado con el ambiente científico asistiendo a reuniones y congresos.

En su aspecto humano, siempre condescendiente en su actuación y benévolo, contó con el afecto de todos. Tanto de sus alumnos, como de los compañeros de las corporaciones.

Ya que sería muy extenso nombrar a todos los de su época que le tuvieron un gran aprecio, destacaremos a los fundadores de la Sociedad aragonesa y de la Academia; entre ellos y por citar sólo tres nombres recordaremos al R. P. Longinos Navas, S. I., D. Antonio de Gregorio Rocasolano y D. José María Plans. También fue buen amigo y colaborador el Ingeniero de Minas D. Angel Gimeno Conchillos.

Su labor docente y de extensión universitaria queda reflejada en la reesña que publicamos, en la que puede verse como abarcó distintas especialidades en el campo de la Geología (cristalografía, mineralogía, petrografía y estratigrafía) y también trató de Botánica y del problema de la especie, sobre el cual era evolucionista ortodoxo.

\* Tengo que agradecer los datos que me han proporcionado para esta necrología, su Señora Viuda y sus hijos D. José Luis y D. Ignacio. Es una familia con la que me une una sincera amistad a través de D. Pedro de quien fui auxiliar en los siete últimos años de su vida académica.



Supo hermanar la función docente y la investigadora, hasta el extremo de que muchas veces no sea posible diferenciarlas. Así, en las excursiones con los alumnos, al mismo tiempo que enseñaba recogía observaciones de interés. Estas y otras excursiones resultaron trabajos y sirvieron para ir formando una colección regional. Su preocupación didáctica se manifiesta en la sencillez de sus explicaciones en el campo y en la cátedra y en sus conferencias y memorias.

El último Congreso de que formó parte fue con motivo del II Centenario de Cavanilles, en 1945, y por cierto en una de las excursiones del mismo, que fue en Aranjuez, tuvo un accidente prostático que hubo de atenderse con urgencia. Fue operado en Zaragoza y luego reanudó las clases, aunque naturalmente con la salud quebrantada.

Después de la jubilación todavía continuaba con sus trabajos y paseos recordando en el Parque los terrenos que había enseñado a tantos, hasta que ya octogenario perdió la vista y quedó en casa sin poder salir.

Tras de una larga enfermedad con padecimientos, el Señor le concedió un alivio en los últimos días de tal forma que rodeado de los suyos y con toda lucidez entregó dulcemente su alma contestando a las oraciones del sacerdote.

Descanse en paz.

#### RELACION DE TRABAJOS CIENTIFICOS DE D. PEDRO FERRANDO MAS

Un tratado elemental de Zoología en colaboración con D. Celso Arévalo y Carretero.  
Dos ediciones de un tratado de Geología en colaboración con D. Maximino San Miguel de la Cámara.

Un tratado de Mineralogía general y descriptiva.

#### TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN

Una Memoria sobre la *Ley de la derivación y las teorías sobre la constitución de los cristales*.

Otra Memoria titulada *Contribución al estudio de las aplicaciones de la proyección gnomónica en Cristalografía* (Memoria premiada en el Concurso de la Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales de 1904).

En el Boletín de la Sociedad Española de Historia Natural, publicó los trabajos siguientes:

1905. — "Descripción del cuarzo aurífero de Sallent de Gállego". "Estudios sobre la Serpeta" (*Mytilaspis flavescens*) que ataca al naranjo. Página 190.  
La Teruelita y sus formas de apariencia octaédrica. Pág. 241.
1906. — Rocas hipogénicas de la provincia de Zaragoza. Pág. 185.
1907. — En el núm. 2 de los "Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza" publicó un estudio sobre las *Teruelitas del Museo geológico de la Facultad de Ciencias*. En el tomo de "Homenaje a Linneo", publicado por la Sociedad Aragonesa de Ciencias, un artículo sobre *Linneo y el Método Natural*.



1908. — Tomó parte en el Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, que se celebró en Zaragoza durante el mes de octubre, publicado en la "Guía especial de Zaragoza para los congresistas", una *Reseña para el estudio de la Fauna y Flora de Aragón* y también en el tomo de Memorias de dicho Congreso publicó el resumen de su Conferencia sobre *La enseñanza de la Geología en España*.  
En el mismo año tomó parte en el 1.<sup>er</sup> Congreso de Naturalistas Españoles, presentando una memoria sobre la *Reforma de la enseñanza de la Historia Natural*.
1909. — "El turbal de Villanueva de Gállego" (Boletín de Sociedad Española de Historia Natural, pág. 79).
1912. — En el Boletín de la referida sociedad publicó tres artículos: *Siderosa cristalizada irisante de Matamoros (Bilbao)*.  
*Sobre el reptil fósil sauropterígido encontrado en Estada (Huesca)*, pág. 188.  
*Roca eruptiva de Fraga y Lignito de Mequinenza*, pág. 250.  
Nota bibliográfica sobre "Etude geologique des Pyrenées de l'Aragón", de M. Dalloni, pág. 188.
1913. — Intervino en el Congreso del Progreso de las Ciencias celebrado en Madrid (junio), leyendo una Memoria que fue publicada sobre: *Estudio microscópico de las rocas eruptivas de Zaragoza*.  
En el Boletín de la Sociedad Española de Historia Natural publicó: "Descripción de ejemplares notables de hematites parda pseudomórfica procedentes de Ojos Negros (Teruel)" y una nota bibliográfica sobre el libro del Prof. Dr. Ernest Sommerfeldt titulado: "Práctica de Mineralogía experimental desde el punto de vista del límite entre el dominio cristalográfico y químico".
1914. — Nota bibliográfica sobre el "Traité de technique mineralogique et petrographique de L. Duparc et A. Monnier".  
Fue pensionado por la Junta de ampliación de estudios para realizar estudios prácticos de Mineralogía microscópica en el Laboratorio de Luis Duparc de la Universidad de Ginebra. Los realizó durante los meses de julio y agosto en dicho laboratorio bajo la dirección del Dr. René Sabot.
1915. — Nota crítica, publicada en el Boletín de la Sociedad Española de Historia Natural sobre las "Publicaciones del Instituto de Ciencias de Barcelona", pág. 378.
1916. — Desde el 29 de febrero de dicho año, explicó un cursillo de 15 lecciones sobre "Caracterización óptica de las especies minerales".
1917. — Nota bibliográfica sobre "La sílice y los silicatos" de Le Chatelier (H). Boletín de Sociedad Española de Historia Natural.
1918. — Tres artículos publicados en dicho Boletín sobre:  
"Ventajas del goniómetro teodolítico",  
"Minerales de la Sierra de Algairén" y  
"Estratigrafía del Moncayo".
1920. — Nota programa de un cursillo sobre "Cristalografía litológica". (Tomo XX, página 176).
1921. — Un cursillo de extensión universitaria de once conferencias sobre "Cristalogenia litológica" desde el 15 de febrero hasta el 26 de abril inclusive.
1922. — Comunicación a la Sociedad Española de Historia Natural sobre un nuevo yacimiento oligocénico en la cuenca del Ebro. Boletín de dicha Sociedad, página 386.



1923. — Nota bibliográfica referente al estudio de Bugnon sobre la posición sistemática de las Euforbiáceas. (Boletín de la S. E. de H. N., pág. 109).
1925. — Artículos en el mismo Boletín sobre: "El yacimiento de Mamíferos miocenos de Nombrevilla" (pág. 253), "El Pleistoceno de los alrededores de Zaragoza" (pág. 437) y "Sobre el homenaje en Huesca a D. Lucas Mallada" (pág. 297).
1926. — "Mi intervención en el Congreso geológico internacinal de Madrid". Discurso de apertura del Curso 1926-1927 sobre dicho Congreso internacional. Referencias del Congreso geológico internacional de Madrid publicadas en la Revista científica "Ibérica".
1927. — Artículo sobre "Los pliegues cretácicos de Embid de Ariza". (Boletín de la Sociedad Española de Historia Natural, pág. 476).
1930. — Tres notas bibliográficas sobre las dos Memorias de D. Clemente Sáenz tituladas: "Extensión superficial de los yesos terciarios en la cuenca del Ebro" y "El pantano de las Torcas en el río Huerva". Estudio sobre los filones de Galeña de Bielsa y Parzan, por D. José Romero Ortiz de Villacian.

En este mismo año asistió en representación de la Facultad de Ciencias y de la Academia de Ciencias a la reunión de la Sociedad Geológica de Francia celebrada en París, julio de 1930, para celebrar el centenario de su fundación. Publicó en la Revista "Universidad" un artículo sobre dicha reunión y sobre los trabajos de Minerografía realizados en su laboratorio de Museo de Historia Natural de París bajo la dirección del Prof. Mr. Orcel.

En la misma revista "Universidad" ha publicado, además de numerosas notas bibliográficas, los artículos siguientes:

1924. — Tectónica del valle del Ebro.
1934. — "Consideraciones químico-físicas aplicables a la formación de las rocas".
1942. — Nociones de Geoquímica. Geoquímicos españoles.
1949. — Historia de la Geología relacionada con el desarrollo de la cristalografía.
1951. — Un gran biólogo aragonés, D. Félix de Azara (siendo ya catedrático jubilado). En la revista de esta Academia ha publicado:
1920. — "Fitografía experimental. Criterios de distinción entre especies elementales y variedades".
1924. — Nota sobre el yacimiento fosilífero de Nombrevilla (Zaragoza), T. IX.
1930. — "Geología de los Pirineos", T. XIV.
1933. — "Fisiografía del Oligoceno de la cuenca del Ebro", T. XVII.
1935. — "Nuevos yacimientos minerales del Pirineo aragonés". T. XVIII.  
"Excursiones botánico geológicas por el valle de Benasque".  
"Minerographie".
1936. — "La Geoquímica en España" y "Los estudios botánicos en Aragón". T. XX, último de la primera época de la Academia publicado en 1937.

En el volumen correspondiente al Curso sobre el subsuelo aragonés y en el de Conferencias sobre el Pirineo, tres conferencias. La 1.<sup>a</sup> en Belchite, sobre *Investigación de aguas subterráneas*; la 2.<sup>a</sup> en Cariñena, sobre *Filones y rocas eruptivas de la Sierra de Algairén* y la 3.<sup>a</sup> en Jaca, sobre *Orogenia de los Pirineos*. (1931. — Excursiones geológicas con el Dr. Fábrega).



## LA CALIDAD DE LA IMAGEN FOTOGRAFICA EN RELACION CON EL ESTADO ABERRANTE

P O R

J. CASAS, J. R. DE F. MONEO

y

M.<sup>a</sup> JOSEFA YZUEL GIMÉNEZ

### INTRODUCCIÓN

En un principio, el uso de los instrumentos ópticos estaba limitado al campo de las observaciones visuales, siendo la astronomía la ciencia que principalmente los utilizaba. En este tipo de observaciones, no era necesario que el instrumento cubriese un gran campo, sino que, siendo éste pequeño, la imagen en el eje fuese de buena calidad.

Dadas las exigencias de la ciencia astronómica, el único factor que se tenía en cuenta al hablar de la calidad de un instrumento era el poder separador en el eje.

De esta manera, era posible realizar sistemas corregidos de aberración esférica, en los que la difracción limitaba la posibilidades del instrumento. Las observaciones experimentales posteriores con sistemas ópticos ya fabricados coincidían con las predicciones teóricas basadas en la difracción, siempre que los instrumentos estuvieran bien corregidos.

Posteriormente se desarrollan nuevas ciencias que exigen a los instrumentos ópticos que cubran un campo determinado; en estas condiciones es de mayor dificultad proyectar un sistema perfectamente corregido. Los efectos de las aberraciones residuales en la distribución de luz en la imagen son generalmente superiores a los causados por la difracción y son los que determinan la forma irregular de la imagen de un foco puntual; el poder separador y la calidad de la imagen ya no están determinados únicamente por la difracción, sino que las aberraciones residuales juegan el papel más importante en la mayoría de los casos.

Se consideró al principio que al combinar los instrumentos ópticos con diversos receptores de energía: emulsiones fotográficas, fotocélulas o transmisores de información en forma de señales eléctricas, darían los mismos



resultados que si fuesen utilizados en observaciones visuales. Este fue un error que detuvo durante algún tiempo las investigaciones en este sentido. En realidad, cada uno de los receptores mencionados posee unas características propias que intervienen también en los resultados finales. De ahí que la influencia de las aberraciones residuales sobre la calidad de la imagen puede ser diferente si se trata de un instrumento destinado a uso visual o de un objetivo fotográfico.

Al estudiar experimentalmente la resolución de un sistema óptico se usan en general test formados por diversas series de barras oscuras sobre fondo blanco (test de Foucault), midiéndose el poder separador por el ángulo correspondiente a las barras más cercanas que estén resueltas en la imagen. Dado que se exige un mínimo contraste en la imagen para poder decir que las líneas están separadas, el valor del poder resolutivo dependerá del contraste entre las barras y el fondo en el test objeto. Por consiguiente, cuando vaya a juzgarse la calidad de un instrumento óptico por su poder separador, se realizarán las medidas usando el mismo tipo de receptor que vaya a utilizar el sistema y eligiendo los test de tal manera que sus características sean parecidas a las condiciones en que va a trabajar en la realidad. Así Howlett (1) expone un método para comprobar la calidad de objetivos destinados a la fotografía aérea y desarrolla todo su estudio basándose en el poder separador siguiendo estas observaciones y usando test de bajo contraste.

Como un instrumento óptico no termina en su última superficie, sino que junto con el receptor constituyen el sistema total, es lógico que a la vez que se ha considerado el poder separador de un sistema óptico se haya estudiado también la resolución del receptor y en el caso particular de los sistemas fotográficos, a la par que se han desarrollado teorías sobre el poder resolutivo del objetivo, se ha estudiado el de las emulsiones fotográficas independientemente. Entre los investigadores que han desarrollado este estudio figura Selwyn (2) cuyos trabajos han dado lugar a una teoría sobre el poder separador aplicable a sistemas ópticos visuales, a objetivos fotográficos y a materiales sensibles, viendo en estos últimos la dependencia entre la resolución y la granularidad de la emulsión.

La luz procedente de una fuente puntual al distribuirse sobre la imagen lo hace de una forma irregular constituyendo una mancha de luz concentrada y un halo de luz débil. La forma y tamaño de ambos depende de las aberraciones residuales. Esta distribución de energía en la imagen tiene una relación directa con el poder separador y con la calidad de la imagen de una escena. Así investiga R. E. Hopkins (3) en un trabajo experimental realizado para el centro del campo, la relación existente entre el diámetro del círculo en el que hay mayor concentración de luz, el poder separador y la calidad de la imagen.

Esa distribución desigual de la luz en la imagen de un foco puntual hace que al reproducir el sistema óptico un contorno neto de separación de dos campos de diferente intensidad, haya una falta de nitidez en la imagen; ésta se aprecia por un descenso más o menos rápido en la densidad al pa-



sar de un campo a otro. A la impresión de fidelidad en la reproducción de estos bordes es a lo que llamamos *nitidez*. Aparece por consiguiente la nitidez como un nuevo factor que tendrá gran importancia al juzgar la definición de una imagen fotográfica.

Entendemos por *definición* la impresión total de calidad que recibe el observador al mirar una fotografía, estando asociada con la claridad de detalles. Muchos autores (4) (5), han ideado diferentes formas de especificar qué es definición, usando en general para medirla métodos estadísticos.

Basándonos en investigaciones realizadas por diversos autores vemos que la nitidez, análogamente al poder separador, puede juzgarse cualitativa y cuantitativamente por medio de test adecuados.

Wolfe y Eisen (6) probaron inicialmente tres métodos psicométricos diferentes que les permitiese clasificar numéricamente el aspecto subjetivo de nitidez que recibe un observador al ver una fotografía, hallando buena concordancia en los resultados obtenidos con los tres métodos.

Relacionaron las medidas del aspecto de nitidez en reproducciones fotográficas de una escena y de un borde aislado de separación entre campos blanco y negro, usando diversos negativos. A los observadores se les pedía valorar las muestras en cuanto a su nitidez, aplicando uno cualquiera de los tres métodos comprobados. Los resultados obtenidos en las reproducciones del borde neto coincidían cualitativa y cuantitativamente con aquéllos de la escena.

Higgins y Jones (7) obtuvieron además una correlación entre la valoración psicométrica del aspecto subjetivo de nitidez y una cantidad objetiva físicamente medible que llamaron *acutancia*. Esta magnitud es  $\langle G_x^2 \rangle_m \cdot dS$ , donde  $\langle G_x^2 \rangle_m$  es el valor medio de los cuadrados de los gradientes de densidad  $\Delta D / \Delta x$  a través de un borde neto de separación de dos áreas, una clara y otra oscura, en la imagen ya revelada y  $dS$  es la diferencia de densidad entre estas áreas, ambas medidas con microdensitómetro.

En estas condiciones tenemos la posibilidad de dar cuantitativamente el valor de la nitidez de una reproducción fotográfica de una escena, midiendo la acutancia sobre la imagen de un test constituido por un borde neto aislado que sapara dos áreas, blanca y negra.

En este mismo trabajo comprobaron que el poder resolutivo no coincide con los juicios de nitidez y en algunos casos está en discordancia.

Posteriormente Higgins y Wolfe (8) obtuvieron una relación entre la definición, el poder resolutivo y la acutancia. Las investigaciones las realizaron para todo el campo que cubre el objetivo, hallando como valor de dichas magnitudes para cada posición del plano imagen el promedio de los resultados obtenidos en las distintas zonas del campo. Las conclusiones a que llegaron, fueron que ni la acutancia, ni el poder separador están perfectamente correlacionados con la definición si se consideran aisladamente, excepto cuando el poder separador excede el límite establecido por el ojo, en cuyo caso la acutancia es representativa de la definición. No obstante,



obtuvieron una función del poder separador  $PR$  (medido en líneas/mm) y de la acutancia  $A'$

$$f = A' (1 - e^{-0.007 PR^2})$$

que estaba perfectamente relacionada con la medida de la definición por métodos estadísticos.

Otro factor importante para tener en cuenta es la granularidad de la emulsión. Realizando diversas pruebas con diferentes negativos todas ellas en idénticas condiciones del objetivo, de la posición de la placa y de la iluminación del objeto, podemos percibir diferencia manifiesta en la calidad de la imagen de las distintas reproducciones. Las películas de grano fino nos proporcionan mucho mejor detalle, pero en general son demasiado contrastadas para la reproducción.

Hay estudios realizados (9), (10) y (11) en los que se dan métodos para medir la granularidad de las emulsiones y se halla la influencia que ésta tiene en el poder separador, en la nitidez y en la calidad de una reproducción fotográfica.

El tono de reproducción puede modificar la calidad de una fotografía. En condiciones de baja definición una reproducción algo sobreexpuesta puede resultar al observador de mejor calidad por ser mayor la densidad fotográfica. En otras condiciones puede suceder lo contrario.

No entramos en detalle de cómo intervienen estos dos factores últimos: granularidad de la emulsión y tono de reproducción, en la calidad de una imagen fotográfica puesto que en todo el desarrollo de nuestro trabajo no vamos a estudiar su influencia; en él, ambos factores permanecen constantes.

Como ya se ha dicho anteriormente, en la calidad de una fotografía no solamente influye el mayor o menor gradiente en las líneas sino también la diferencia de densidad entre las playas claras y oscuras. Así, muchos autores utilizan una magnitud que denominan contraste y que está asociada con la variación en la intensidad de luz correspondiente a las distintas playas de la fotografía.

Se mide por la relación

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad \text{o bien} \quad C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max}}$$

Debido a la pendiente más o menos acusada que presenta la densidad en la imagen de un borde neto, si el objeto consta de una playa oscura entre dos claras o viceversa, el contraste en su imagen dependerá del tamaño de las zonas observadas.

Por consiguiente, midiendo el contraste en la imagen de un test de Foucault se dispone de todos los valores de éste en función del paso de mira (distancia de una barra a la siguiente) o de la frecuencia (número de líneas por milímetro).



Así en muchas ocasiones es más interesante conocer la curva que relaciona el contraste con la frecuencia de mira que el valor del poder separador del sistema.

En una de las publicaciones de la firma Zeiss (12) se explica cómo la óptica alemana se niega a dar cifras o índices referentes a la capacidad de resolución de los instrumentos, pues si bien el poder separador constituye una medida de calidad, no tiene en realidad la importancia que se le ha dado. El valor del poder separador representa únicamente un punto de la curva reproductora del contraste y para la elección de la mejor fotografía lo que interesa al observador es la reproducción de aquel sector de detalles que puede percibir el ojo en las condiciones en que está observando. Al variar éstas, por ejemplo, alejando la fotografía del observador ya no puede apreciar miras de frecuencia tan elevada y para la impresión de calidad de la fotografía no importa para nada que el instrumento óptico objetivo-emulsión haya separado más; siendo en cambio interesante al observador que en la zona en la que aprecia el detalle aparezca la imagen bien nítida y contrastada.

La teoría de la reproducción del contraste ha sido muy tratada en las publicaciones de los últimos años y se han ideado métodos para medirla, basados casi en su totalidad en el uso de microdensitómetros.

De todo lo anterior deducimos que si el poder separador de la reproducción fotográfica excede al del ojo en las condiciones en que la observa, serán la nitidez de líneas o acutancia o bien la curva de contraste las magnitudes que estarán directamente relacionadas con la calidad de la imagen.

Por otra parte, desde Diffieux (13) se viene utilizando la aplicación de la transformada de Fourier en la Óptica. Así, de un instrumento nos interesa conocer cómo es el factor de atenuación con que actúa sobre los distintos armónicos de diversas frecuencias del objeto, hallando así la llamada "Función de transmisión" propia del sistema óptico total.

En 1964 publica Higgins (14) un trabajo en el que estudia tres funciones esencialmente equivalentes. La "Función de dispersión" de punto que da al distribución de luz en la imagen de un foco puntual luminoso, medida experimentalmente con microdensitómetro. Análogamente se halla la "función de dispersión" de línea sobre la imagen de un foco lineal muy estrecho, e integrando ésta obtenemos la función de borde de separación de dos playas una blanca y otra totalmente negra. Obtiene además la "Función de modulación de transmisión" al reproducir por el sistema un test objeto en el que la luminancia de los elementos varía sinusoidalmente con la distancia. Esta función es la transformada de Fourier de la "función de dispersión" de línea y no contiene más información que ésta. Así se halla una curva *MT* que da los valores del factor de transmisión en función de la frecuencia espacial de las líneas.

Según las características que se le exijan a la imagen puede ser interesante el conocimiento de una u otra de estas funciones. Para el calculador de lentes le es más familiar la "función de dispersión" de punto ya que es más asimilable con el spot diagrama y la puede relacionar directamente con las aberraciones del sistema. Dicha función presenta no obstante la di-



ficultad de que para su medida experimental es necesario trabajar con pinceles de luz muy estrechos procedentes de un punto, siendo la imagen reducida con saltos bruscos de densidad, y puede conducir a errores en la medida. La *MTF* (función de modulación de transmisión) es mejor en cuanto a la medida experimental porque el test es mayor, pero aunque se han hecho algunos adelantos en este sentido (15) no es fácil correlacionar la curva *MT* con la calidad de la imagen siendo imposible interpretarla de momento en función de las aberraciones familiares al calculador. En (16) se han presentado algunas curvas *MT*, correspondientes a diversas aberraciones esféricas.

Ninguna de estas funciones es capaz de valorar de una manera general la calidad de un objetivo. No se ha llegado tampoco a hallar la calidad de un instrumento óptico independientemente del receptor; esto nos permitiría saber la bondad del sistema en las condiciones de trabajo si previamente conociésemos las propiedades del receptor que se fuera a utilizar. Todo ello es consecuencia de la falta de conocimiento de la distribución de intensidad en la imagen, cuando existen varias aberraciones y desconocimiento a la vez de las propiedades de los receptores.

Sólo en lo que al poder separador se refiere se ha hallado una relación (17) que va bien con la experiencia

$$\frac{1}{R} = \sum \left( \frac{1}{R_i} \right) \text{ o también } \frac{1}{R^2} = \sum \left( \frac{1}{R_i^2} \right)$$

donde *R* es el poder separador del sistema completo y *R<sub>i</sub>* el de cada uno de los elementos individuales.

No disponiendo de un criterio único para estudiar la calidad de un instrumento, se ha optado, en la mayoría de los casos, por seguir utilizando el poder separador como el criterio más adecuado y sencillo para valorar la calidad de los sistemas (18) y (19), ya que los métodos basados en éste engloban los efectos producidos por todas las características propias del instrumento y del receptor, dando una idea, aunque no precisa, sí bastante aproximada de la calidad de la imagen.

#### PROPÓSITO

En un estudio óptico completo de sistemas interesa no sólo conocer la calidad de la imagen en función de los factores microscópicos que la determinan: poder separador, nitidez, etc., sino también, dónde está la posición de definición óptima en dependencia de las aberraciones residuales del instrumento.

El proyectista, al calcular un sistema óptico se encuentra con la dificultad de reducir a cero todas las aberraciones y en muchos casos puede no interesar conseguir este objetivo por el incremento de precio y tiempo que puede suponer para el proyecto. En estas condiciones es para el



calculador de gran interés conocer las posiciones de los focos de mejor definición en relación con las aberraciones residuales, para así corregir las más perjudiciales y llevar a un plano las posiciones de mejor foco para todo el campo.

Hasta la fecha y en este laboratorio, se han realizado una serie de trabajos (20), (21) y (22) para llevar a cabo este estudio en lo referente a instrumentos de visión. Es ahora nuestro propósito abordar el tema para objetivos fotográficos.

Un estudio completo teórico de la influencia de las aberraciones y la difracción sobre la definición, empezaría por determinar la deformación que producen en la imagen de un foco puntual y por ahora no se ha llevado a cabo esta investigación en conjunto.

Por otra parte, haría falta tener un criterio puramente experimental que indicase, de todas las distribuciones que se pueden formar en los distintos planos imagen de la luz procedente de un foco puntual visto bajo un cierto ángulo de campo, cuál de ellas corresponde a la fotografía que elige el observador como mejor.

Ya se han realizado investigaciones en este sentido (como se ha dicho en la introducción) pero limitándose al centro del campo, es decir trabajando sólo con aberración esférica.

En este estudio nos proponemos determinar la influencia que tienen las aberraciones en la calidad de la imagen y cómo modifican éstas la posición de mejor definición, extendiendo el trabajo a todo el campo, viendo por separado las aberraciones y la calidad de la imagen para cada ángulo de campo y distintas posiciones de la placa.

En primer lugar estudiamos cómo los factores que determinan la calidad de la imagen dan referencia de ella. En toda la investigación hemos conservado el tono de reproducción y la granularidad usando la misma emulsión fotográfica y realizando el revelado para todos los negativos en idénticas condiciones. Así, solamente el poder separador y la nitidez son los que varían, influyendo en la definición.

Por otra parte relacionamos las posiciones de mejor foco, poder separador y nitidez con las aberraciones residuales del objetivo. Para ello deducimos experimentalmente, trabajando con muy pequeña abertura, las curvas de focales astigmáticas propias del sistema; estas curvas nos dan las posiciones de la sagital y tangencial para cada ángulo de campo, y siendo intrínsecas al sistema podemos relacionar con ellas las demás posiciones.

Al ir aumentando la abertura de un objetivo que posea coma residual, se va haciendo visible esta aberración por la modificación que sufre la imagen de cualquier fuente puntual alejada del eje. Obteniendo en estas condiciones las curvas correspondientes a la mejor imagen, poder separador y nitidez se comparan con las anteriores para ver la modificación que introduce la aberración de coma.

El estudio descrito hasta ahora se amplía reproduciendo en el laboratorio las diversas condiciones en que va a trabajar el sistema. Para ello se modifica controladamente la luminancia de los objetos y sus contrastes estudiando en cada caso la influencia de estos factores.



Finalmente, nos interesa comparar para todo el campo los resultados de calidad de la imagen con las distribuciones de la luz procedente de un punto luminoso, en cada plano imagen obtenidas experimentalmente sobre los negativos y teóricamente por medio de los spot diagramas para obtener un criterio que nos diga qué forma de distribución de la luz en la imagen puntual corresponde a la mejor fotografía.

### MONTAJE

Para realizar la parte experimental de este trabajo, y a fin de conseguir información completa sobre una misma placa para el estudio de la calidad de la imagen, se toma como objeto una pantalla plana en la que se han colocado los test correspondientes a las diversas magnitudes que se van a relacionar (fotografía 1).

La pantalla se ha construido pegando un cuadrado de 1 m. de lado de papel milimetrado sobre una luna de vidrio esmerilado, enmarcada en un ángulo de hierro para evitar deformaciones. Sobre el papel milimetrado se ha dibujado una cuadrícula perfectamente nítida de 5 mm.

En media diagonal del cuadrado se han perforado en el papel una serie de orificios de 0,5 mm. de diámetro igualmente espaciados que se iluminan por detrás con un tubo fluorescente amarillo alimentado con un transformador de alta tensión y constituyen los test para las aberraciones residuales del objetivo.

Como se puede observar en la fotografía 1, los test se han dispuesto en diversos radios de la pantalla con el fin de obtener sobre cada placa información para cada ángulo de campo de las aberraciones, de la nitidez, del poder separador medido en diversas direcciones y de la calidad de la imagen.

Los test de Foucault (fot. 2) de poder separador de gran contraste se colocan sobre la pantalla en dos series diferentes. En una de ellas se disponen de modo que las barras coinciden con las direcciones radial y transversal, mientras que en la otra forman  $45^\circ$  con éstas, con el fin de ver de esta forma la influencia del ángulo de las barras en la medida del poder separador y hallar la zona de buena resolución enjuiciada en los diferentes test. Además, hemos utilizado una serie de test de Foucault de menor contraste distribuidos en todo el campo para observar la influencia del contraste del objeto en el poder separador y ver si éste produce alguna variación de la zona de buena resolución.

Para las medidas de la acutancia se utilizan los cuatro lados del cuadrado mayor del test de la fotografía 2, que representan en el objeto cuatro contornos bien nítidos y separados entre campos de diferente densidad. El contraste entre el cuadrado y el fondo del test es idéntico al de las barras de poder separador. Se dispone al mismo tiempo de una larga línea nítida de separación entre dos campos blanco-negro de diferente contraste que el anterior, situada radialmente en la pantalla, con la que también



hemos realizado medidas de acutancia con el fin de observar la variación que experimenta ésta al modificar el contraste de los objetos y la posición de la línea de separación.

En cuanto a la calidad de la imagen, podría enjuiciarse la definición observando en la placa la cuadrícula de la pantalla; no obstante, hemos colocado sobre una semidiagonal una serie de fotografías, que nos conducirán al observar su imagen a una elección de la mejor definición más de acuerdo con la realidad, por poseer el objeto una gran diversidad de formas y contrastes.

Las escalas de grises situadas a diversos ángulos de campo nos sirven para controlar la exposición y revelado uniformes de las placas.

La pantalla se ilumina mediante un proyector con iluminación Köhler situado a 4 m. del centro. El proyector se sitúa ladeado con el fin de evitar brillos y la iluminación se iguala por medio de otro proyector secundario. La uniformidad en la iluminación se comprueba con un luxmetro y un ajuste más fino se hace sacando unas placas fotográficas una vez montado el aparato y comprobando sobre ellas la igualdad en la densidad para cada zona circular correspondiente a un mismo ángulo de campo.

Si se desea obtener diferentes valores de la iluminación se varía gradualmente el voltaje de la lámpara del proyector con un variac. Para que no varíe el color de la luz al disminuir la tensión, se sitúa delante del objetivo del proyector un filtro azul variable modificando la concentración de una disolución de sulfato de cobre en agua.

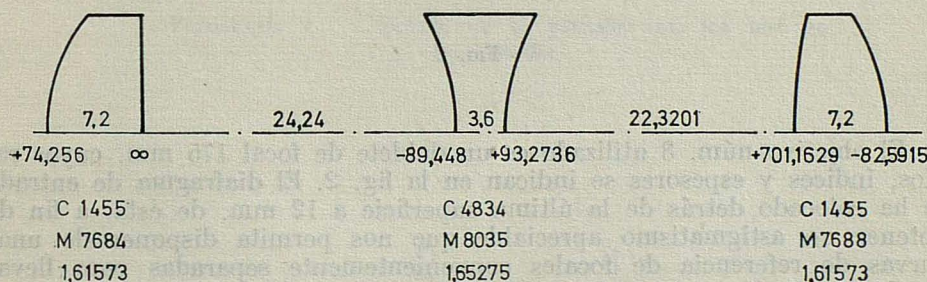


FIG. 1

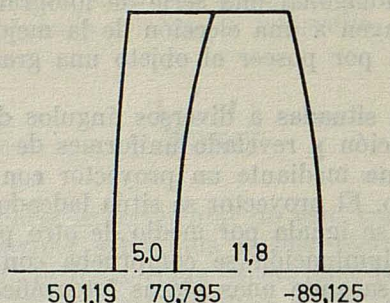
Mediante una célula fotoeléctrica colocada en las proximidades de la pantalla y un galvanómetro en serie se puede mantener fija la iluminación del objeto en todas las exposiciones de fotografías correspondientes a una misma serie, modificando la posición del variac si lo exigen las variaciones en el voltaje de la red.

A lo largo de todo este estudio experimental se han utilizado dos objetivos diferentes.

El objetivo número 1 de focal 240 mm., formado por tres lentes separadas, cuyos radios de curvatura, índices, espesores y distancias vienen indicados en la fig. 1. Con este objetivo hemos hecho primeramente un estudio completo situando el diafragma de entrada en el soporte adicional



detrás de la última lente a 5 mm. de ésta. Posteriormente hemos colocado el diafragma de entrada delante de la primera superficie a 3 mm., obteniendo de esta forma dos sistemas ópticos con aberraciones residuales completamente diferentes. Este segundo sistema constituye el objetivo núm. 2.



$$h_d = 1,614 \pm 0,001$$

$$h_c = 1,60914$$

$$h_F = 1,62566$$

$$\gamma = 37,2 \pm 0,8\%$$

$$h_d = 1,51925 \pm 0,001$$

$$h_c = 1,51659$$

$$h_F = 1,52527$$

$$\gamma = 59,8 \pm 0,8\%$$

FIG. 2

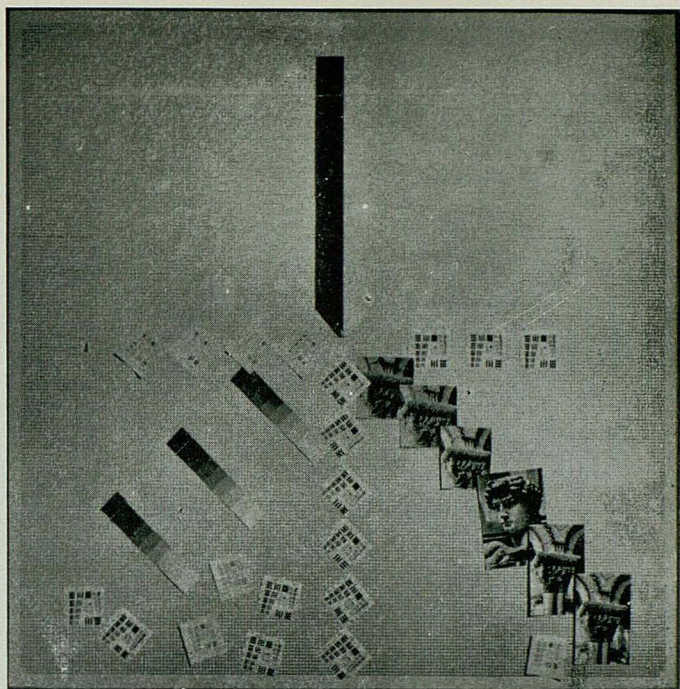
El objetivo núm. 3 utilizado es un doblete de focal 175 mm. cuyos radios, índices y espesores se indican en la fig. 2. El diafragma de entrada se ha colocado detrás de la última superficie a 12 mm. de ésta, a fin de obtener un astigmatismo apreciable que nos permita disponer de unas curvas de referencia de focales convenientemente separadas para llevar a cabo el estudio que nos interesa.

El objetivo se monta sobre un comparador en un soporte, con una serie de tornillos que le permiten los desplazamientos y giros necesarios para el centrado del sistema (fot. 3).

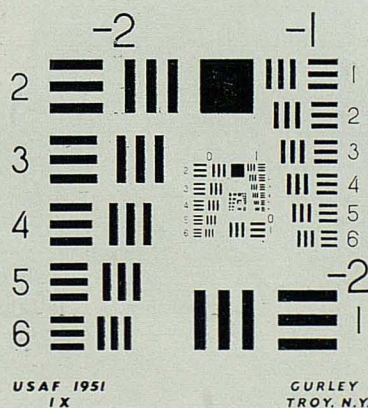
La placa se mantiene vertical adosada a un bastidor montado en la parte móvil del comparador, por medio de un sistema de vacío que funciona con una bomba rotatoria. Cuatro orificios de aspiración en el bastidor mantienen a la placa unida por las esquinas. Sobre la barra del comparador se miden los desplazamientos de la placa respecto del objetivo. El nonius del comparador tiene una precisión en el desplazamiento grueso de 0,05 mm. y el micrómetro 0,01 mm. (fot. 3).

La placa se apoya por la parte de la emulsión sobre los cuatro puntos en los que se efectúa el vacío para evitar los errores que introduciría la diferencia entre los espesores de unas placas a otras.



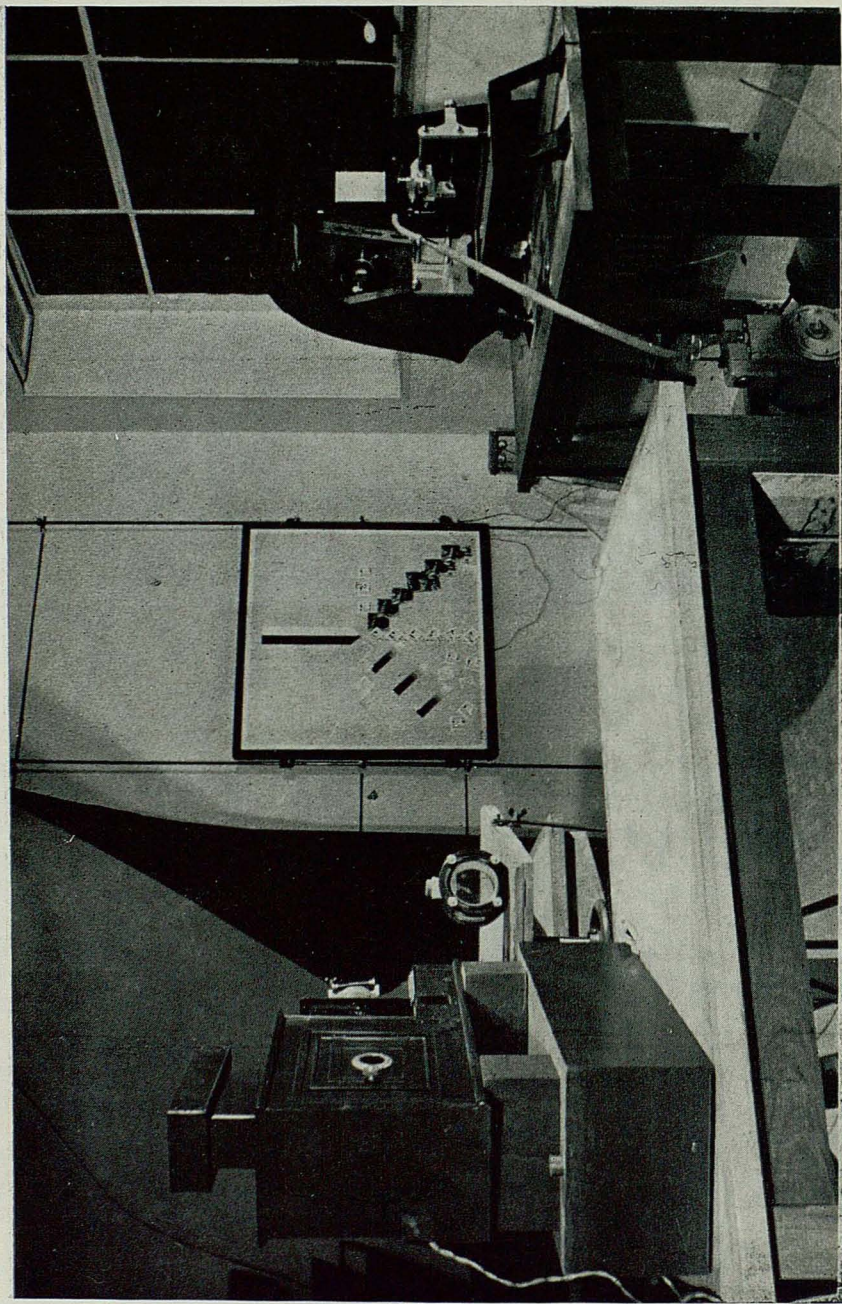


FOTOGRAFÍA 1. — Detalle de la pantalla con los test en estudio.



FOTOGRAFÍA 2. — Reproducción del test de Foucault con que se ha determinado el poder separador.





FOTOGRAFÍA 3. — Detalle de la instalación



Todos los dispositivos que mantienen a la placa poseen una mecánica tal que permite los movimientos relativos necesarios para su perfecto centrado con el objetivo.

El uso de placas de vidrio se debe a la necesidad de fotografiar la imagen en un plano exactamente, para comparar así los resultados obtenidos con los diversos test bajo un mismo ángulo de campo para cada posición del plano imagen.

Finalmente, el soporte de la placa tiene una parte metálica abatible sobre ella, que permite efectuar una exposición previa de las fuentes puntuales, cubriendo posteriormente la parte impresionada para realizar entonces la exposición del objeto total. De esta forma recibimos sobre una misma placa información completa de todas las imágenes de los test objetos para una posición relativa de ésta respecto del objetivo (fot. 4).

Los *ángulos de campo* que corresponden a los puntos luminosos que forman los test de aberraciones, medidos desde el centro de la primera superficie del objetivo, son los siguientes:

#### Objetivos núm. 2 y núm. 1

Distancia del objeto a la primera superficie:  $D = 241$  cm.

$\varphi_0 = 0^\circ 0'$	$\varphi_7 = 4^\circ 40'$	$\varphi_{14} = 9^\circ 20'$
$\varphi_1 = 0^\circ 40'$	$\varphi_8 = 5^\circ 20'$	$\varphi_{15} = 10^\circ 0'$
$\varphi_2 = 1^\circ 20'$	$\varphi_9 = 6^\circ 0'$	$\varphi_{16} = 10^\circ 40'$
$\varphi_3 = 2^\circ 0'$	$\varphi_{10} = 6^\circ 40'$	$\varphi_{17} = 11^\circ 15'$
$\varphi_4 = 2^\circ 40'$	$\varphi_{11} = 7^\circ 20'$	$\varphi_{18} = 11^\circ 55'$
$\varphi_5 = 3^\circ 20'$	$\varphi_{12} = 8^\circ 0'$	$\varphi_{19} = 12^\circ 35'$
$\varphi_6 = 4^\circ 0'$	$\varphi_{13} = 8^\circ 40'$	$\varphi_{20} = 13^\circ 15'$

#### Objetivo núm. 3

Distancia del objeto a la primera superficie:  $D = 246$  cm.

$\varphi_0 = 0^\circ 0'$	$\varphi_8 = 5^\circ 15'$	$\varphi_{17} = 11^\circ 5'$
$\varphi_2 = 1^\circ 20'$	$\varphi_{11} = 7^\circ 12'$	$\varphi_{20} = 12^\circ 57'$
$\varphi_5 = 3^\circ 17'$	$\varphi_{14} = 9^\circ 10'$	

#### ESTUDIO DE EMULSIONES FOTOGRAFICAS

Nos encontramos ante el problema de seleccionar una emulsión fotográfica de calidad colocada sobre placa de vidrio, que además de tener buen poder separador posea un valor de  $\gamma$  o factor de contraste adecuado. El poder separador debe ser suficientemente grande para que no ofusque la resolución dada por el objetivo y marcada por la imagen que a su través obtenemos de los test de Foucault colocados en la pantalla.



Este estudio se ha llevado a cabo midiendo la curva característica de varias emulsiones fotográficas, viendo cómo varía  $\gamma$  al revelarlas en diferentes tipos de revelador y también cómo varía el contraste al dar distintos tiempos de revelado o exponerlas con diferentes valores de iluminación o de tiempo de exposición.

Esta parte del trabajo se ha realizado en el Departamento de Fotografía del Instituto de Óptica "Daza de Valdés" del C. S. I. C.

Las emulsiones fotográficas utilizadas para este estudio han sido:

- 1.º Placas de vidrio Valca universal Ortocromática de 17° DIN.
- 2.º Placas de película rígida Kodak "Royal Ortho", emulsión de retrato idéntica a la de las placas de vidrio "Super Ortho Press" Kodak cuyas características son: contraste medio, granularidad media y poder separador medio comprendido entre 69 y 95 líneas/mm.
- 3.º Placas de vidrio Kodak Spectrum Analysis núm. 1 cuyas características son: alto contraste, granularidad fina y poder de resolución extremadamente alto, hasta 225 líneas/mm.

El estudio de la influencia del revelador se ha llevado a cabo con tres tipos bien diferenciados: uno de gran contraste *D-11*, otro normal *D-76* y un tercero suave *G-224*. El revelador *D-19* es el especialmente indicado para las placas Spectrum Analysis, también de alto contraste.

### Reveladores

#### Revelador D-11

Agua	750 cc.
Metol	1 gr.
Sulfito sódico	75 gr.
Hidroquinona	9 gr.
Carbonato sódico	25 gr.
Bromuro potásico	5 gr.
Agua hasta	1 litro

Relación  $\frac{\text{metol}}{\text{hidroquinona}}$  1:9

#### Revelador D-19

Agua	500 cc.
Metol	2,2 gr.
Sulfito de sodio anhidro	96 gr.
Hidroquinona	8,8 gr.
Carb. de sodio onhidro	48 gr.
Bromuro de potasio	5 gr.
Agua hasta	1 litro

Relación  $\frac{\text{metol}}{\text{hidroquinona}}$  1:4

En todo revelador la hidroquinona es el producto que da más contraste.

#### Revelador D-76

Agua	750 cc.
Metol	2 gr.
Sulfito sódico	100 gr.
Hidroquinona	5 gr.
Bórax	2 gr.
Agua hasta	1 litro

#### Revelador G-224

Agua	750 cc.
Metol	6 gr.
Sulfito sódico	90 gr.
Bórax	3 gr.
Sulfocianuro potásico	1 gr.
Bromuro potásico	0,5 gr.
Agua hasta	1 litro



### Método operatorio

*Exposición de las cuñas.* — Para obtener la curva característica de un material fotográfico, se expone una muestra del mismo a través de una cuña sensitométrica. Una vez revelada, se mide la densidad de la cuña obtenida y con estas medidas se dibuja la curva.

Las cuñas que se miden en el presente trabajo, se han expuesto a través de una cuña sensitométrica DIN, que consta de 30 escalones numerados de 0,1 a 3. Estos valores señalan directamente o son proporcionales al log Exposición.

Esta exposición se llevó a cabo en un sensitómetro que consiste en un cajón pintado interior y exteriormente de negro, que lleva una lámpara Philips PHOTOLITAN TIPO PF 208 E/21 130 V. 500 W. Mediante un reostato le ajustamos durante toda la exposición un voltaje de 110 V, teniendo para estas condiciones una temperatura de color de 2930°K. En la parte abierta del cajón lleva un diafragma con el que se logran distintas posiciones de apertura entre la cero y la siete.

Delante y normal a la apertura se encuentra un vástago, sobre el que se desplaza la cuña con la placa a exponer, colocada en contacto con ella. Se puede desplazar desde la posición cercana al diafragma hasta la distancia de 1 m.

Conviene siempre colocar la cuña suficientemente alejada para que la iluminación que llega a los diferentes escalones sea uniforme.

La lámpara va accionada con un reloj interruptor que permite controlar el tiempo de exposición.

*Medida.* — Una vez conseguida la cuña, y habiendo procedido a su revelado se mide la densidad de ésta en un densitómetro MACBETH, modelo Quanta Log. En él se lee directamente sobre la escala el valor de la densidad para cada escalón de la cuña.

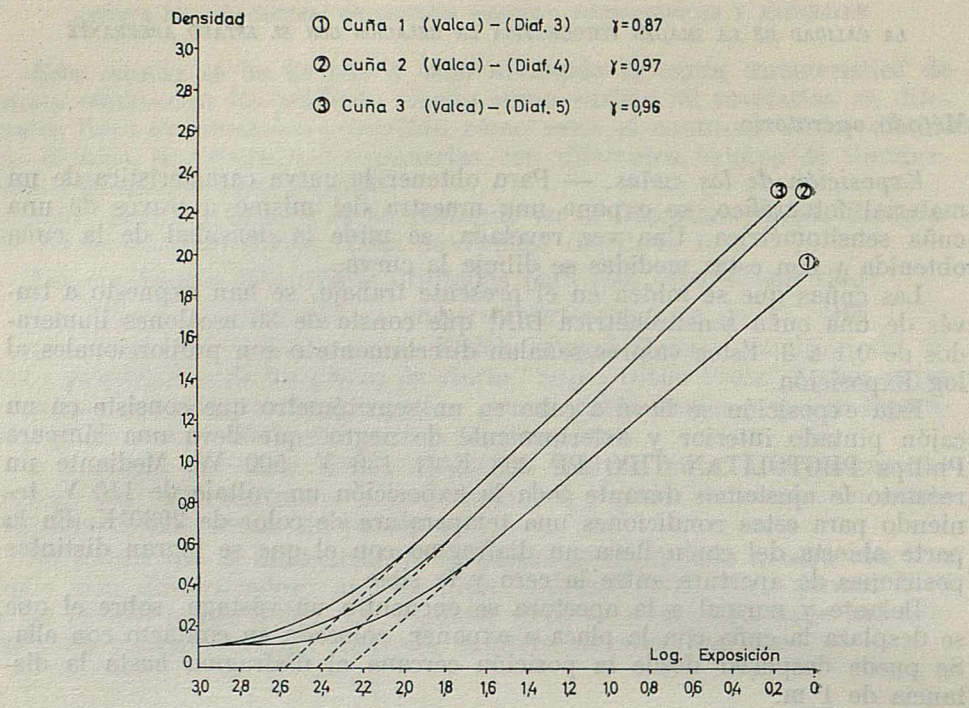
*Placas Valca 17° DIN. Ortocromáticas.* — Con objeto de obtener un valor de  $\gamma$  adecuado se realizan tres cuñas de esta emulsión en diferentes condiciones: la 1.ª con diafragma 3, la 2.ª con diafragma 4 y la 3.ª con diafragmas 5, todas con un tiempo de exposición 10 seg. en la posición 75, revelándolas en D-76 durante 10 minutos a 20°C con agitación constante.

En la gráfica 1 se representan las curvas características de estas cuñas, pudiendo apreciar que el valor de  $\gamma$  se halla comprendido entre 0,8 y 1, intervalo adecuado para el retrato. Se observa que crece el valor de  $\gamma$  al aumentar la iluminación pero permaneciendo en las tres cuñas dentro de unos límites correctos.

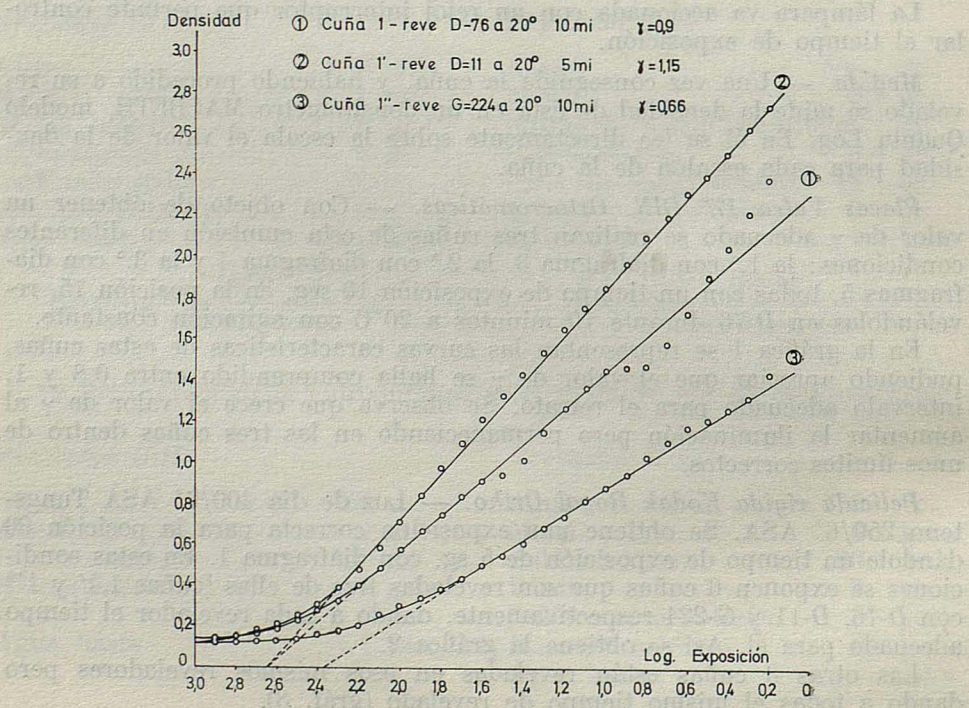
*Película rígida Kodak Royal Ortho.* — Luz de día 400/7° ASA Tungsteno 250/6° ASA. Se obtiene una exposición correcta para la posición 90 dándole un tiempo de exposición de 5 sg. con diafragma 1. En estas condiciones se exponen 6 cuñas que son reveladas tres de ellas (cuñas 1,1' y 1'') con D-76, D-11 y G-224 respectivamente, dando a cada revelador el tiempo adecuado para él. Así se obtiene la gráfica 2.

Las otras 3 cuñas están reveladas en esos mismos reveladores pero dando a todas el mismo tiempo de revelado (gráf. 3).



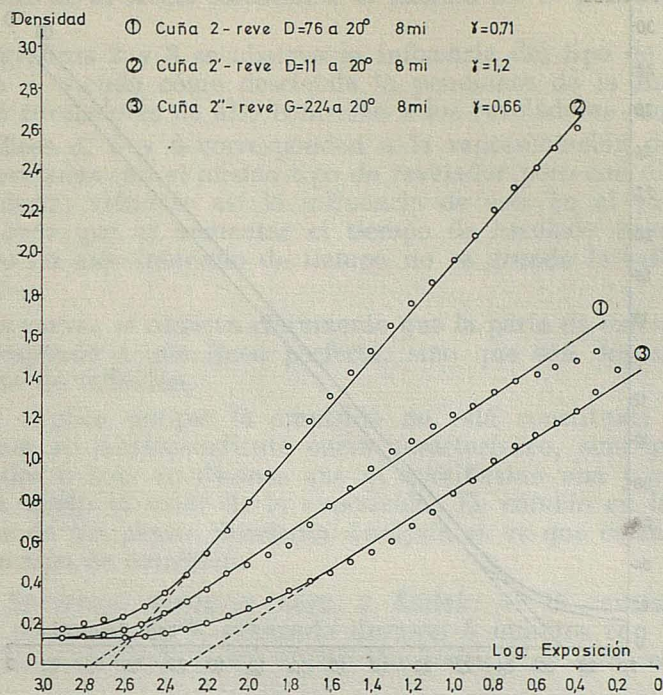


GRÁFICA 1

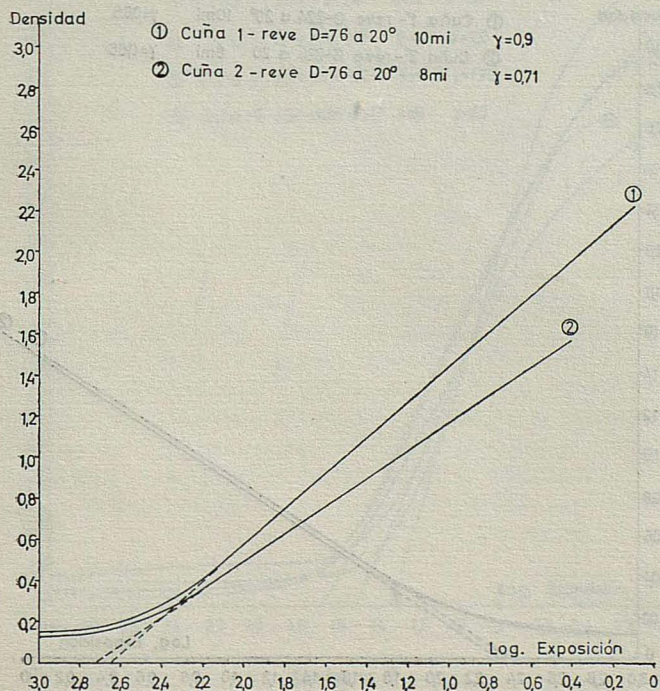


GRÁFICA 2



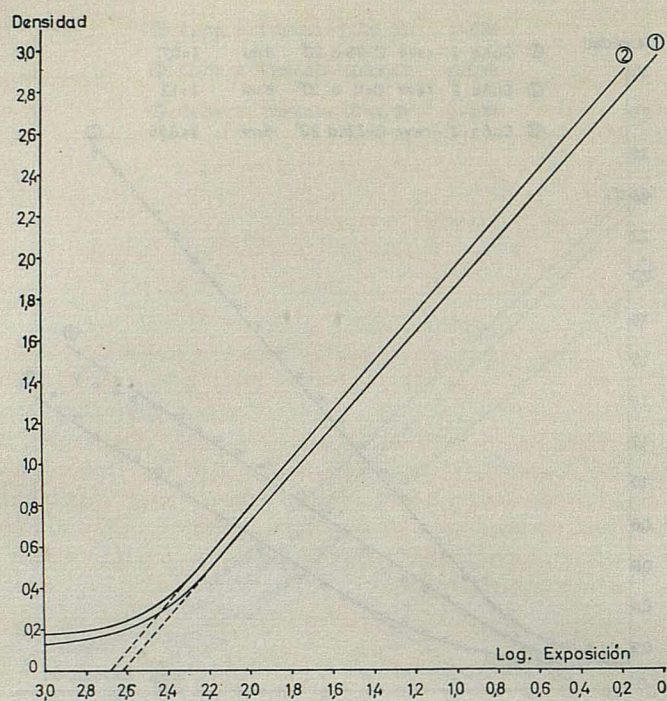


GRÁFICA 3

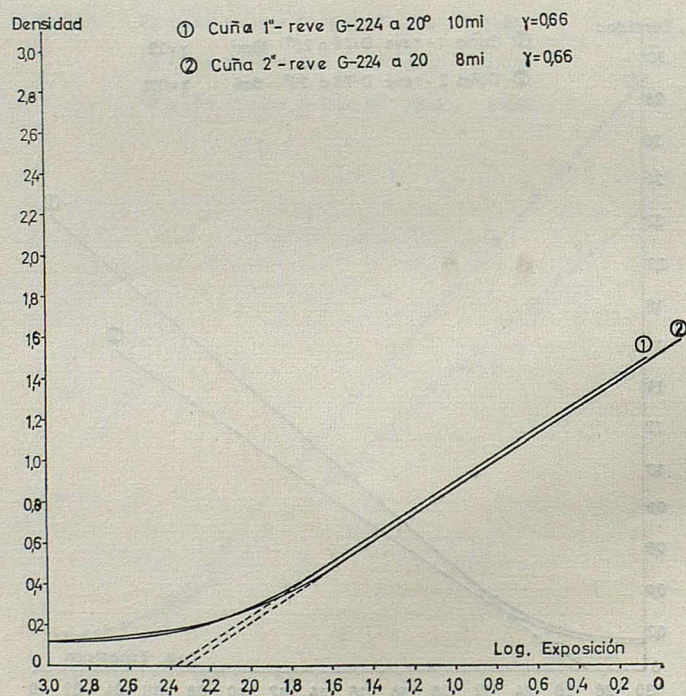


GRÁFICA 4





GRÁFICA 5



GRÁFICA 6



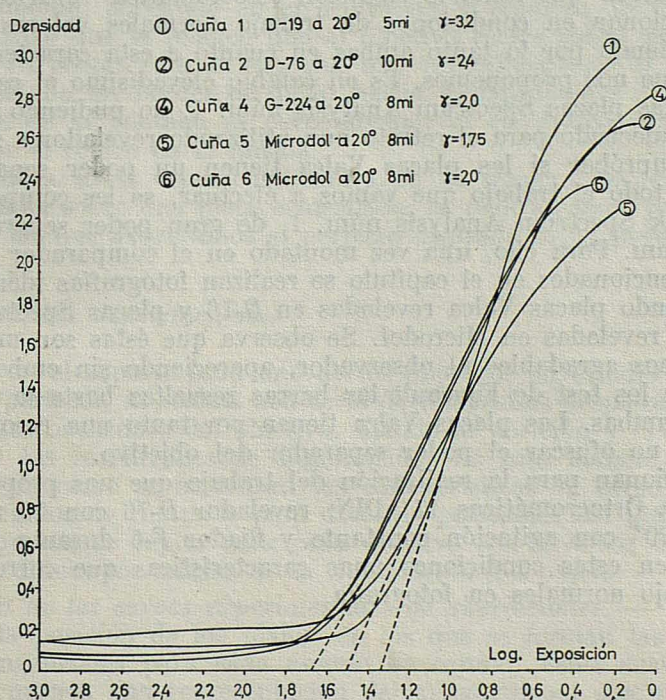
En las gráficas 2 y 3 se observa la influencia del tipo de revelador en el valor de  $\gamma$ , viendo cómo desciende la pendiente de la línea conforme pasamos de reveladores de alto contraste a los reveladores suaves.

Las gráficas 4, 5 y 6 corresponden a la representación de las parejas de cuñas reveladas con el mismo tipo de revelador pero con diferente tiempo de revelado; viéndose así la influencia de éste en el valor de  $\gamma$ . Se puede observar que al aumentar el tiempo de revelado aumenta el contraste; pero en este intervalo de tiempo no es grande la influencia en el valor de  $\gamma$ .

En estas curvas se observa claramente que la parte de exposición correcta no corresponde a una línea perfecta, sino que son dos curvas unidas en un punto de inflexión.

Esto se explica porque la emulsión no está constituida de una sola emulsión con su correspondiente curva característica, sino que está compuesta de dos o más emulsiones que se manifiestan una y otra predominantemente según el valor de la exposición. En cambio en las curvas características de las placas Spectrum Analysis se ve que están constituidas por un solo tipo de emulsión.

*Placas Spectrum Analysis, núm. 1 Kodak.* — El revelador indicado para estas placas es D-19, actuando durante 5 minutos con agitación rápida y se ha encontrado como exposición correcta en estas condiciones la



GRÁFICA 7



siguiente: 10 sg. posición 90 con diafragma 2; obteniendo así la cuña 1, representada en la gráf. 7, con un valor de  $\gamma$  elevadísimo.

Con objeto de rebajar este valor de  $\gamma$  y acercarlo a las condiciones que nos interesan, hemos probado a revelar la cuña en una disolución de 500 cc. de revelador D-19 con 500 cc. de agua; viendo que es despreciable en estas condiciones la influencia de la dilución del revelador en la curva característica.

La cuña 2, expuesta 10 sg. en la posición 75 con diafragma 2, se revela en D-76 10 minutos a 20°, obteniendo que el valor de  $\gamma$  desciende de 3,2 a 2,4.

Las otras dos cuñas: 4 y 5 se han expuesto 10 sg. con diafragma 4 y posición 90, obteniendo que con el revelador Microdol (ya preparado en cajas) disminuye  $\gamma$  hasta el valor 1,75 (ver gráf. 7).

Revelando con G-224 y con Microdol, se han hecho otras pruebas (cuña 6, p. ej.) para diferentes exposiciones próximas a la correcta, obteniendo valores de  $\gamma$  prácticamente iguales a los de las cuñas 4 y 5 elegidas para la gráfica.

#### *Conclusiones sobre la elección de material fotográfico*

Tras este estudio realizado con los tres tipos de materiales fotográficos podemos concluir que tanto la emulsión octocromática Valca como la Kodak proporcionan en condiciones de trabajo normales valores de  $\gamma$  adecuados, sirviendo por lo tanto ambas en cuanto a esta característica para el trabajo que nos proponemos. Es en cambio elevadísimo el contraste obtenido con las placas Spectrum Analysis núm. 1, no pudiendo aproximarlos al valor adecuado para el retrato aun utilizando reveladores suaves.

Para comprobar si las placas Valca tienen un poder separador adecuado para todo el trabajo que vamos a efectuar, se les compara con las placas Kodak Spectrum Analysis núm. 1, de gran poder separador, hasta 225 líneas/mm. Para ello, una vez montado en el comparador uno de los objetivos mencionados en el capítulo se realizan fotografías idénticas de la pantalla usando placas Valca reveladas en D-76 y placas Spectrum Analysis núm. 1, reveladas en Microdol. Se observa que éstas son más contrastadas y menos agradables al observador, apareciendo sin embargo en las imágenes de los test de Foucault las barras resueltas hasta la misma frecuencia en ambas. Las placas Valca tienen por tanto una resolución suficiente para no ofuscar el poder separador del objetivo.

Se seleccionan para la realización del trabajo que nos proponemos las placas Valca Ortocromáticas 17° DIN, revelador D-76 con 10 minutos de revelado a 20° con agitación constante y fijador F-5 durante 10 minutos por reunir en estas condiciones unas características que corresponden a las de trabajo normales en fotografía.



### MÉTODO EXPERIMENTAL

En primer lugar se procede al *centrado* perfecto del aparato; es decir, la pantalla y la placa deben estar perpendiculares al eje del objetivo y centradas con él, y la barra del comparador ha de ser paralela a dicho eje.

Para asegurarnos de que se cumplen todas estas condiciones exigimos las siguientes comparaciones:

a) La pantalla estará centrada con el eje óptico del objetivo si las zonas que están igualmente enfocadas sobre la placa son circunferencias centradas con la imagen del centro de la pantalla; la imagen del centro ha de tener aberración de esférica pura, con la mancha intensa bien centrada en el halo de luz.

b) La línea de los puntos luminosos está en un plano meridiano si la forma de sus imágenes es simétrica respecto a la diagonal que marcan. En el caso de astigmatismo (trabajando con diafragma muy pequeño) las focales tangenciales han de ser paralelas entre sí y las sagitales alineadas en la diagonal.

c) La imagen del punto luminoso central no se debe desplazar lateralmente cuando se desliza la placa paralelamente al eje. Un desplazamiento en estas condiciones indicaría que la barra del comparador no es paralela al eje óptico, o que el centro de la pantalla no está en el eje.

d) Finalmente, adosando en el centro de la pantalla un espejo plano circular se exige que la imagen que el objetivo forma sobre una placa esmerilada de su propia cara de entrada, una vez reflejada en el espejo, esté bien centrada con los bordes de dicho espejo. Comprobamos de esta forma que el plano de la pantalla es perpendicular al eje óptico y además que éste pasa por el centro de la misma.

Comprobadas todas estas condiciones en la observación visual de la imagen formada sobre una placa esmerilada, se realizan unas pruebas fotográficas con las que aseguramos el perfecto centrado de la instalación.

### *Series fotográficas experimentales*

Montado en el soporte cada uno de los objetivos en estudio y obtenido su centrado perfecto, se realiza una serie de fotografías desplazando la placa a diferentes posiciones del objetivo, fijando la posición y el tamaño del diafragma y las condiciones de iluminación. De esta manera obtenemos información de cómo se modifican las características en estudio para los diferentes ángulos de campo y para diversas posiciones del plano imagen.

Esta operación se repite para cada objetivo con diversos tamaños del diafragma y diferentes valores de la iluminación del objeto.

*Obtención de las curvas experimentales de aberraciones.* — Se trata de determinar la posición de los planos en los que se forman las focales sagitales y tangenciales para cada ángulo de campo. Estas curvas además de proporcionarnos una representación del astigmatismo nos sirven como sistema de referencia intrínseco al objetivo.

Con el fin de que las focales sean lo más puras posible, se realiza el



estudio para cada sistema fotográfico en la serie obtenida con un diafragma de 5 mm. de diámetro; así, el pincel de luz que atraviesa el sistema es muy fino y la forma de las imágenes de los puntos luminosos corresponden a aberración de astigmatismo puro, aunque el sistema no esté corregido de coma para mayores aberturas.

Se observan todos los negativos de la serie a través de un sistema microscópico comparador en el que se pueden medir tamaños de las imágenes de los focos puntuales. Comparando los correspondientes a un ángulo de campo determinado, en las diversas posiciones de la placa se hallan los lugares de las focales sagitales y tangenciales para todo el campo en que se trabaja. Para ángulos de campo pequeños es difícil observar las focales porque la deformación de la imagen es muy pequeña. Se extrapolan las curvas hasta el centro y se dibuja además la curva que marca las posiciones medias entre las focales.

En las series realizadas con diafragma grande también se lleva a cabo un estudio de la distribución de la luz en la mancha aberrante que cada objetivo da de las fuentes luminosas puntuales.

*Obtención de la zona de mejor imagen fotográfica.* — En la elección de la mejor imagen se observan las fotografías correspondientes a un mismo test escena para diferentes posiciones de la placa, eligiendo cada observador, en un total de cuatro observadores que siempre demostraron plena coincidencia en la elección, aquella que les parece mejor en cuanto a definición; entendiéndose, como ya se ha dicho, por definición el aspecto de calidad que recibe un observador al mirar una fotografía, estando asociada con la claridad del detalle.

No se pretende medir cuantitativamente la definición, sino obtener la zona de mejor calidad de la imagen para cada ángulo de campo y relacionarla con las aberraciones características del sistema.

Se elige como posición de la mejor imagen para un determinado ángulo de campo la correspondiente a la fotografía que mayor número de observadores dan como óptima.

Trabajando el sistema en determinadas condiciones, por ej., con pequeño diafragma, obtenemos una amplia zona en que la imagen es de buena calidad; en estos casos damos como mejor definición el punto medio de la zona.

Observaciones realizadas sobre la imagen de la cuadrícula conducen a idénticos resultados.

Se han comparado los resultados anteriores con la curva de buena imagen que resultaría al observar una serie, anotando para cada placa el ángulo de campo correspondiente a la circunferencia en que la pantalla queda mejor enfocada. Si el sistema tiene curvatura de campo esta medida puede conducirnos a error (gráf. 12), ya que la imagen para ángulos de campo menores, aún fuera de la posición óptima, es mejor que para los superiores, y queda la curva desplazada.

*Obtención de la zona de mejor poder separador.* — Medidas realizadas para cada ángulo de campo, sobre los test de Foucault, del valor de la mira de paso mínimo que ve el observador justamente separada, conducen a la curva de las posiciones de mejor poder separador.



En la tabla adjunta se indica la correspondencia que existe entre el número de la mira y el número de líneas/mm.

Equivalencia entre los números de las miras del test de Foucault y el número de líneas/mm. que les corresponden.

N.º de la mira	Líneas/mm.	N.º de la mira	Líneas/mm.
—2-1	1/4	0-1	1
—2-2	3/11	0-2	12/11
—2-3	3/10	0-3	6/5
—2-4	1/3	0-4	4/3
—2-5	3/8	0-5	3/2
—2-6	3/7	0-6	12/7
—1-1	1/2	1-1	2
—1-2	6/11	1-2	24/11
—1-3	3/5	1-3	12/5
—1-4	2/3	1-4	8/3
—1-5	3/4	1-5	3
—1-6	6/7	1-6	24/7

Al estudiar los test cuyas barras forman 45° con la dirección radial se observa que por simetría de la mancha aberrante los dos grupos de barras aparecen igualmente resueltos en la imagen. No sucede lo mismo en las observaciones realizadas sobre las fotografías de los test cuyas barras tienen dirección radial y transversal. En éstas no quedan igualmente separadas las líneas del test correspondiente a ambas direcciones, dependiendo de la forma de la mancha aberrante. En estos test se da como valor de poder separador la mira de paso mínimo que aparece simultáneamente resuelta en sus dos direcciones.

La observación de los test de poder separador tiene que realizarse en idénticas condiciones de ampliación e iluminación de los negativos que las utilizadas para la determinación de la mejor definición.

*Obtención de la zona de mejor nitidez de líneas.* — Según Higgins la nitidez está relacionada directamente con la acutancia ( $A$ ).

Midiendo la variación de densidad en la imagen de un borde neto de separación de dos playas blanca y negra, paseando la traza de un microdensitómetro normalmente a la línea, obtenemos una gráfica semejante a la de la figura 3. La acutancia de esta curva, siguiendo a Higgins y Jones (7) se define por el valor medio de los cuadrados del gradiente  $\langle G_x^2 \rangle_m$  medido para sucesivos y elementales  $\Delta x$ . En la parte superior e inferior de la curva densidad-distancia el gradiente se aproxima gradualmente a cero, tomando como valores extremos de la curva  $A$  y  $B$  aquellos a partir de los cuales  $G < 5$  unidades de densidad por mm.

Cuando la diferencia en la escala de densidades ( $dS$ ) entre  $A$  y  $B$  no es constante en todos los test, se define, acutancia  $A$  al valor  $\langle G_x^2 \rangle_m \cdot dS$  ya que también  $dS$  tiene influencia en la impresión de nitidez (7).

Para cada test que nos marca un ángulo de campo determinado se halla la acutancia en las diversas posiciones de la placa, midiendo en cada ima-



gen el valor sobre los cuatro lados del cuadrado, es decir sobre dos líneas en dirección radial y otras dos en dirección transversal. El cuadrado que nos sirve como test para la acutancia tiene sus lados suficientemente separados del resto que se pueden considerar como bordes aislados para la definición de nitidez. Como puede verse en la realización del trabajo las medidas de  $A$  sobre los cuatro lados del cuadrado da valores diferentes debido a la falta de simetría de la mancha aberrante. Tomaremos como valor de la acutancia para cada ángulo de campo y posición de la placa el obtenido al promediar los cuatro valores hallados en las curvas resultantes de pasar el microdensitómetro por todos los lados del cuadrado.

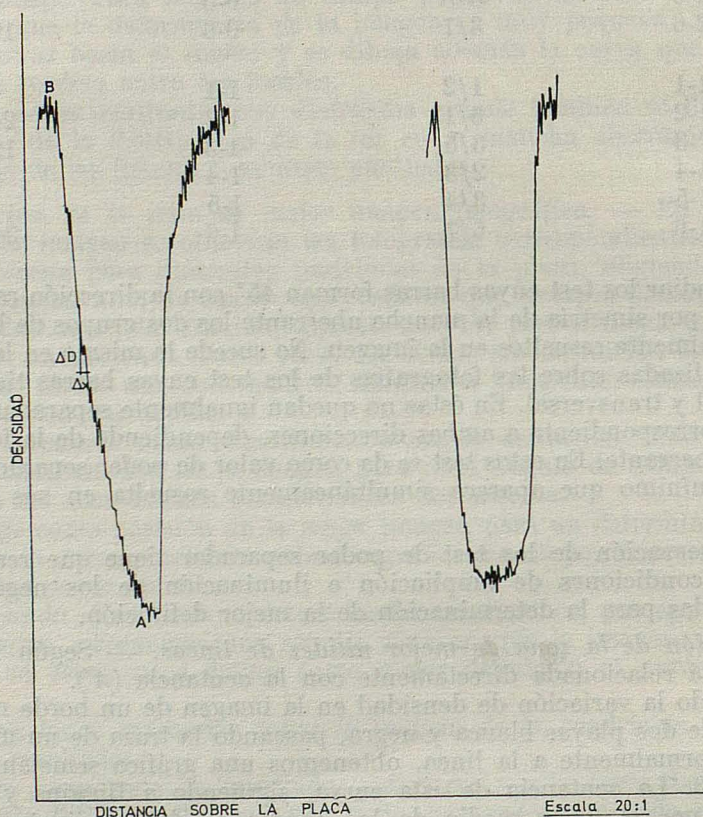


FIG. 3. — Detalle de las curvas de acutancia realizadas en los 4 lados del test correspondiente a la Serie III, objetivo núm. 1 con un ángulo de campo  $11^{\circ} 15'$  en la posición 108. Las 2 primeras curvas corresponden a los lados transversales y las segundas a los radiales.

Para la realización de esta parte del trabajo se ha utilizado un Microdensitómetro de Doble Haz Joyce, propiedad del Instituto de Química Física Rocasolano del C.S.I.C., en el Departamento de Electroquímica.



## GRÁFICAS Y RESULTADOS DE LAS SERIES EXPERIMENTALES

Damos a continuación un resumen de los resultados obtenidos en la observación y medida de todas las magnitudes sobre las series realizadas.

### *Serie 1*

Con el objetivo núm. 1 (ver capítulo de montaje) y un diafragma de entrada de 2,5 mm. de radio, correspondiendo al sistema una abertura de  $1/37,5$ . La iluminación de la pantalla es de 100 lúmenes/m<sup>2</sup>. El tiempo de exposición de las placas es 5 minutos 30 sg. para los focos puntuales y 1 minuto 10 sg. para la pantalla.

Estudiando esta serie se ha llegado a los siguientes resultados:

1.º Observamos que las imágenes de los focos puntuales fuera del eje tienen la forma de astigmatismo puro, como era de esperar ya que el sistema trabaja en estas condiciones con una abertura muy pequeña.

Midiendo para cada ángulo de campo los tamaños de las imágenes en las sucesivas placas de la serie se halla por un método experimental las posiciones de las focales sagital y tangencial, construyendo las curvas correspondientes de la gráfica 8. Se extrapolan estas curvas hasta el eje, eligiendo la posición de máxima concentración en la imagen del foco central.

Se han hallado también las posiciones medias entre las focales, que corresponden a lugares de mayor simetría en la imagen. Estas tres curvas intrínsecas al sistema nos sirven de referencia para todo el estudio que realicemos con ese mismo objetivo conservando la posición del diafragma de entrada.

2.º Al observar los test de fotografía se elige estadísticamente la mejor imagen entre las correspondientes a un mismo ángulo de campo para las distintas posiciones de la placa. Por ser pequeña la abertura, es amplia la zona en que la imagen está bien definida.

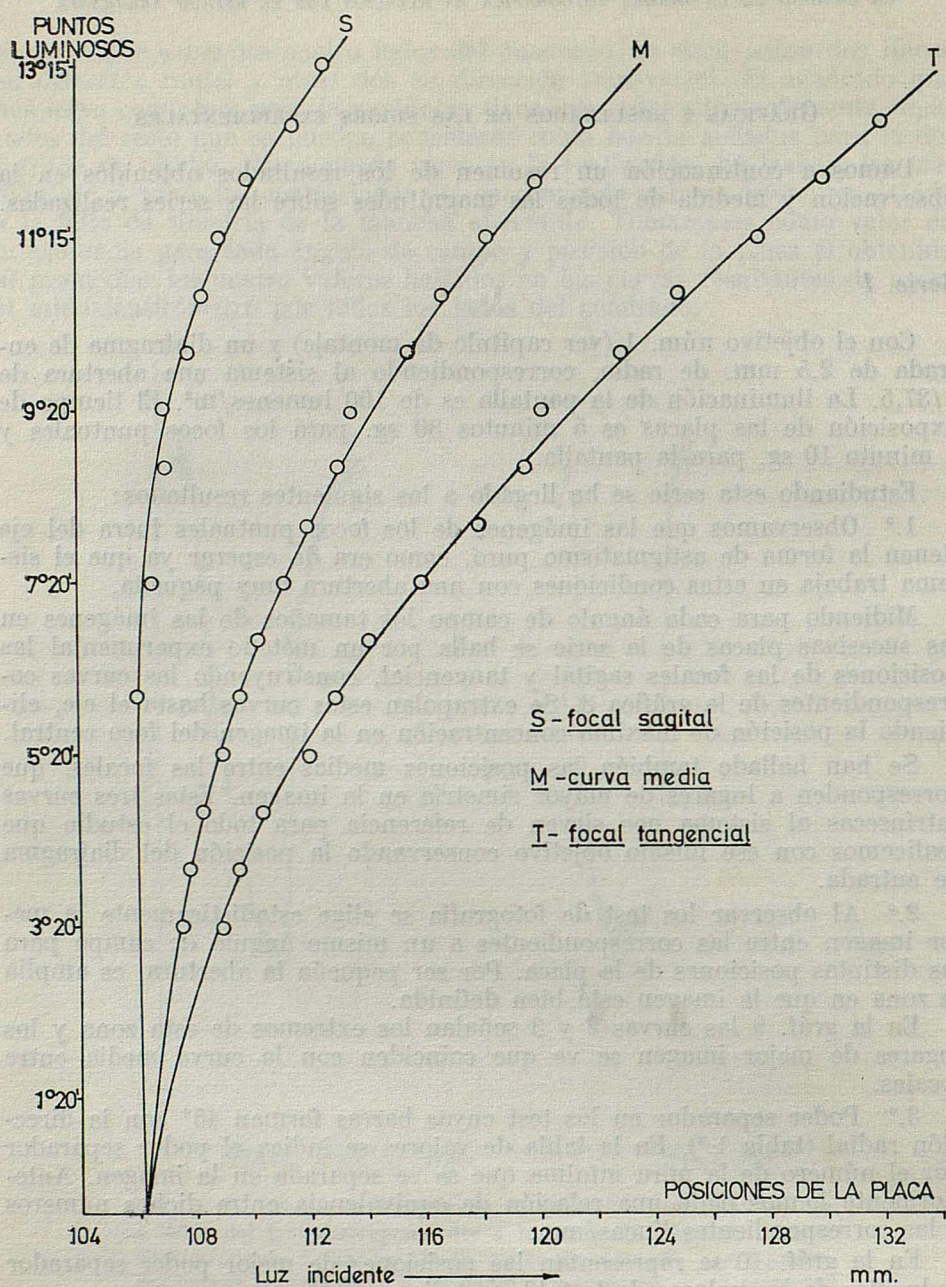
En la gráf. 9 las curvas 2 y 3 señalan los extremos de esta zona y los lugares de mejor imagen se ve que coinciden con la curva media entre focales.

3.º Poder separador en los test cuyas barras forman 45° con la dirección radial (tabla 1.ª). En la tabla de valores se indica el poder separador por el número de la mira mínima que se ve separada en la imagen. Anteriormente hemos dado una relación de equivalencia entre dichos números y las correspondientes líneas/mm.

En la gráf. 10 se representan las posiciones de mejor poder separador deducidas de los valores de la tabla anterior.

4.º Poder separador en los test de dirección radial y transversal (tabla 2.ª). En la tabla de valores correspondiente al poder separador medido en esta dirección, damos el número de la mira mínima que aparece resuelta en ambas direcciones, indicando a continuación y en la misma tabla la dirección en que aparecen las barras mejor resueltas y hasta qué valor.





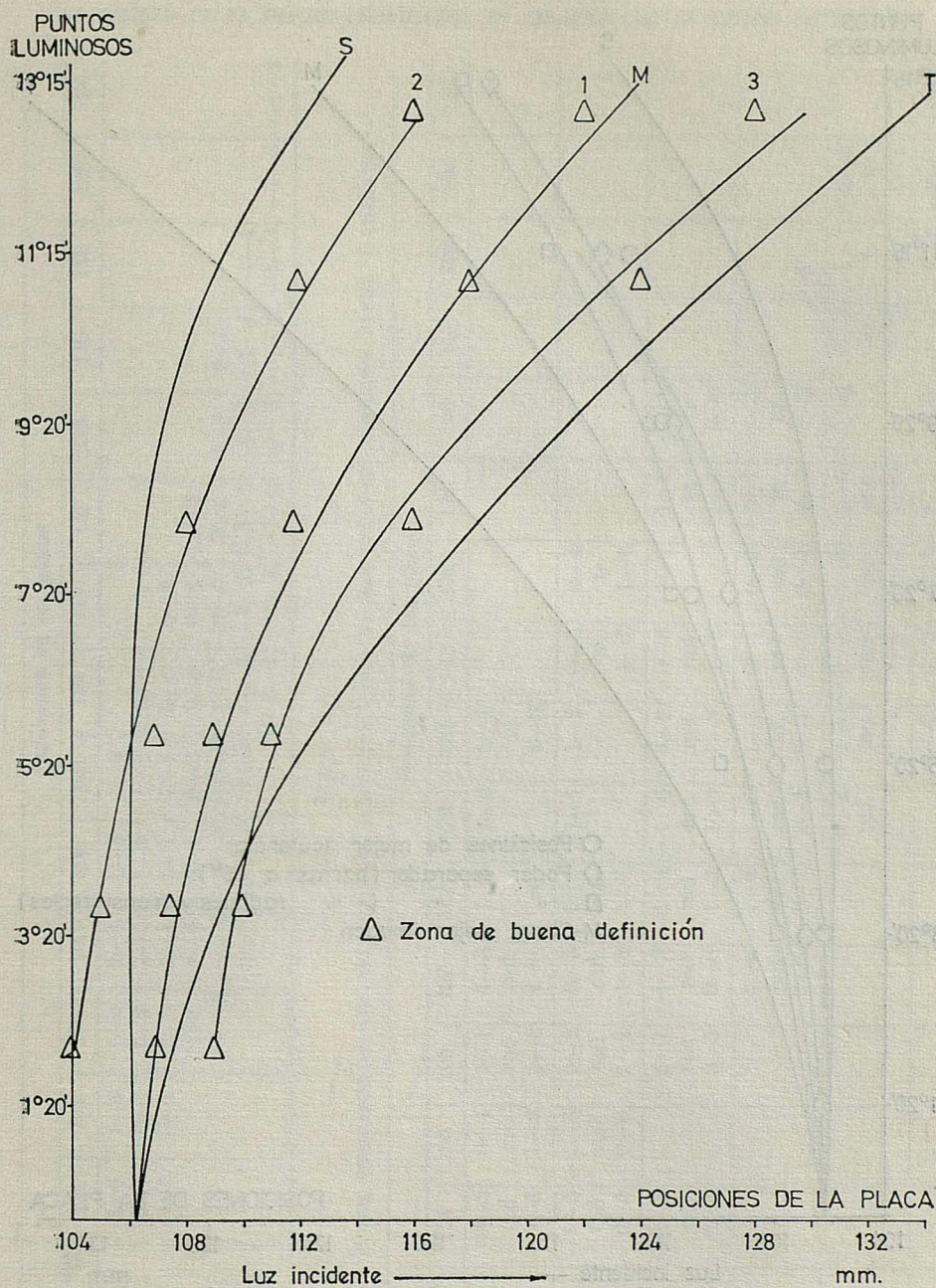
Serie 1

Objetivo 1

Abertura 1 / 37,5

GRÁFICA 8





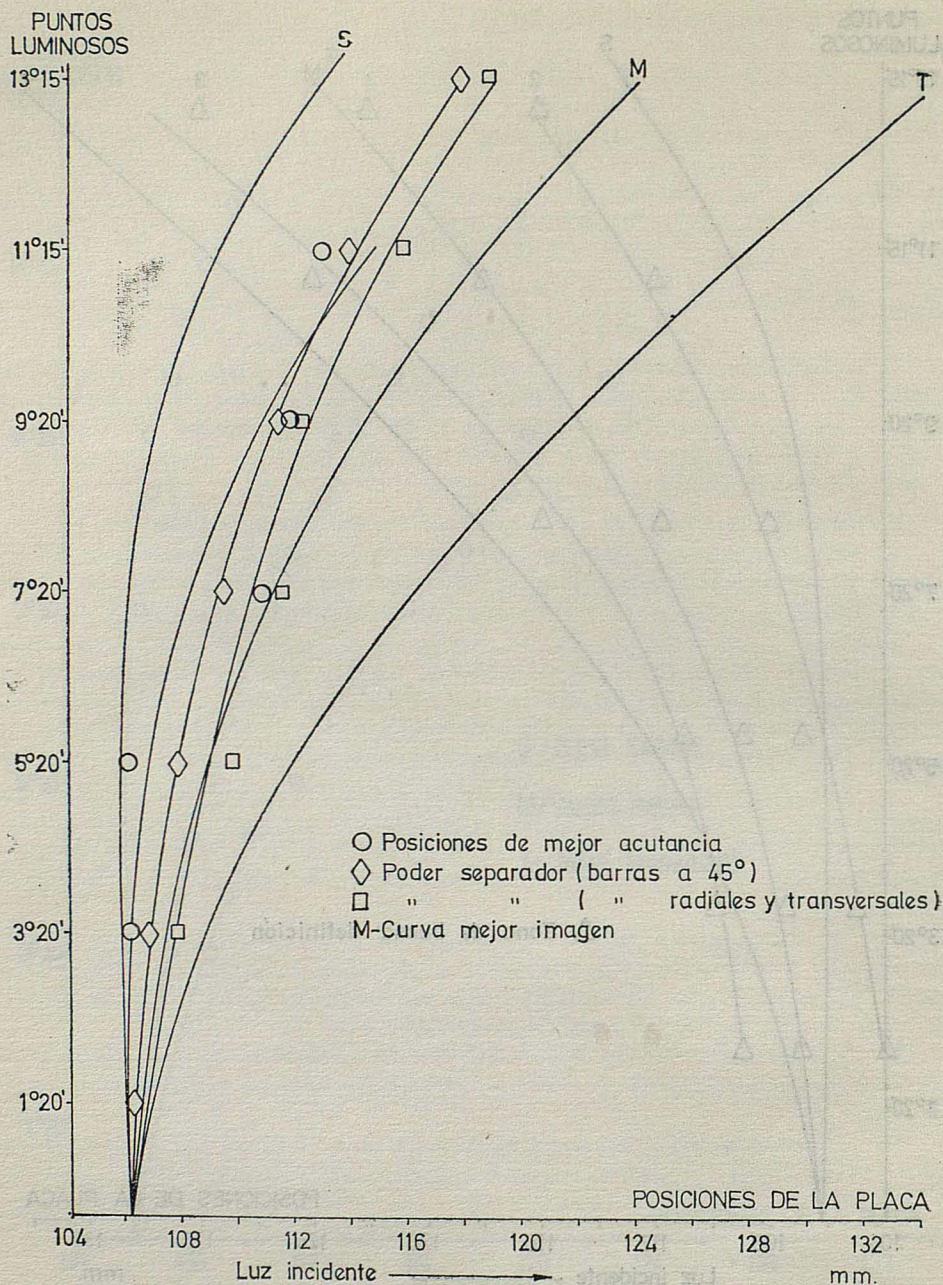
Serie 1

Objetivo 1

Abertura 1/37,5

GRÁFICA 9





Serie I      Objetivo 1      Abertura 1/37,5

GRÁFICA 10



TABLA 1.<sup>a</sup>

SERIE I. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO

ang. campo	Posiciones de las placas													
	104	105	106	107	108	109	110	111	112	114	116	118	120	124
1° 20'	1-1	1-2	1-4	1-4	1-3	0-6								
3° 20'	0-6	1-1	1-2	1-3	1-2	1-1	0-6							
5° 20'	0-3	0-4	0-6	1-1	1-1	1-1	0-6	0-5						
7° 20'			0-1	0-3	0-4	0-5	0-5	0-4	0-3					
9° 20'			-1-3	-1-4	-1-5	-1-6	0-2	0-2	0-2	0-2	0-1			
11° 15'				-1-1	-1-1	-1-2	-1-2	-1-3	-1-4	-1-5	-1-4	-1-4		
13° 15'							-1-1	-1-1	-1-2	-1-2	-1-3	-1-3	-1-3	-1-2

TABLA 2.<sup>a</sup>

SERIE I. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS ESTÁN EN DIRECCIÓN RADIAL Y TRANSVERSAL

ang. campo	Posiciones de las placas														
	104	105	106	107	108	109	110	111	112	114	116	118	120	124	128
3° 20'	0-3	0-4	1-1	1-3	1-4	1-2	1-1								
	rad	rad	rad	rad			tr								
	0-5	1-2	1-4	1-4			1-3								
5° 20'	-1-5	-1-6	0-2	0-3	0-6	1-1	1-2	0-6	0-4						
	rad	rad	rad	rad	rad			tr	tr						
	0-5	0-6	1-2	1-3	1-4			1-2	1-1						
7° 20'	-2-6		-1-1	-1-3	-1-4	-1-6	0-2	0-5	0-6	-1-6	-1-5				
	rad		rad	rad	rad	rad	rad	rad		tr	tr				
	0-1		0-5	0-6	1-1	1-3	1-3	1-2		1-1	0-6				
9° 20'				-1-3	-1-4	-1-4	-1-5	0-1	0-2	0-1	-1-3				
				rad	rad	rad	rad	rad	rad	tr	tr				
				0-6	1-2	1-2	1-1	0-6	0-5	0-4	0-5				
11° 15'						-2-4	-2-5	-2-5	-1-2	-1-4	-1-6	-1-3	-1-1	-2-4	
						rad	rad	rad	rad	rad		tr	tr	tr	
						0-6	0-6	0-6	0-5	0-3		0-2	0-3	0-4	
13° 15'							-2-3	-2-3	-2-3	-2-4	-1-1	-1-2	-1-2	-2-5	-2-2
							rad	rad	rad	rad	rad	rad	tr	tr	tr
							0-3	0-4	0-4	0-2	0-1	-1-5	-1-3	-1-6	-1-6



En la gráf. 10 se representan las posiciones de mejor poder separador medido en estos test.

5.<sup>a</sup> Las medidas de la acutancia obtenidas al promediar los valores hallados sobre los cuatro lados de los test conducen a los resultados expuestos en la tabla 3.<sup>a</sup>.

TABLA 3.<sup>a</sup>  
SERIE I. — VALORES DE LA ACUTANCIA

ang. campo	Posiciones de las placas				
	105	106	107	108	109
3° 20'	28795	31024	27670		24777
5° 20'	25500	25770	24962		21807
7° 20'			21680		23268
9° 20'				28656	
11° 15'		19912		25638	

ang. campo	Posiciones de las placas				
	110	111	112	114	116
3° 20'		25366			
5° 20'		20463	18297		
7° 20'		29229	25095	21571	19167
9° 20'	25382		24919	27410	20742
11° 15'	17625		27410	28656	21900

ang. campo	Posiciones de las placas				
	118	120	124	128	132
7° 20'	18707	12390			
9° 20'	23963	12917	8714		
11° 15'	21730	17109	12497	7921	3039

Observación. — La nitidez en la zona sagital es mayor que en la tangencial.

## Serie II

También realizada con el objetivo núm. 1 pero con un tamaño de diafragma de entrada de 5 mm. de radio, correspondiendo una abertura de 1/18,75. La iluminación de la pantalla es de 100 lúmenes/m<sup>2</sup> y el tiempo de exposición 100 sg. para los focos puntuales y 14 sg. para el objeto extenso.

Al estudiar esta serie se han seguido los mismos criterios de medida descritos en la serie I. Se obtienen los siguientes resultados:

1.° Observando las imágenes de los focos puntuales se nota que, para esta abertura la aberración que tiene el sistema ya no es astigmatismo



puro, sino que el coma modifica en parte la forma de dichas imágenes, principalmente para los ángulos superiores. Midiendo la posición de las focales en esta serie en que todavía no es marcada la influencia del coma, se observa casi completa coincidencia entre las curvas que resultan y las de focales intrínsecas al sistema, obtenidas en la serie I. En la gráfica 11 se representa sobre las curvas intrínsecas las posiciones de focales según la serie II, viendo que la coincidencia es casi perfecta.

2.° Los resultados de elegir la mejor fotografía entre las correspondientes a un mismo ángulo de campo para diversas posiciones de la placa conducen a la curva 1 de la gráfica 11.

Sobre las placas de esta serie se ha ampliado el estudio de la definición hallando para cada posición del plano imagen la zona que se ve mejor enfocada, señalando los extremos de ésta por las curvas 2 y 3 en la gráf. 12. Estas observaciones se han hecho sobre la cuadrícula de la pantalla, manifestándose además que son diferentes los resultados a los que se llega, si se tiene en cuenta para su determinación las líneas de la cuadrícula en los lugares en que están en dirección radial y transversal o formando 45° con ellas. Nos hemos fijado únicamente en estas últimas ya que así el astigmatismo tiene una intervención conjunta en su deformación sagital y tangencial. No obstante, vemos que no hay coincidencia entre esta curva y la que se obtiene al elegir la mejor imagen entre las correspondientes a un ángulo de campo (curva 1, gráf. 12), como se ha dicho anteriormente, ya que la imagen en el borde aun cuando está mejor definida es peor que para ángulos de campo menores, por las aberraciones residuales del objetivo en estudio.

Como nuestro propósito es relacionar la mejor imagen con los demás factores para un mismo ángulo de campo, viendo que en algunas circunstancias no hay coincidencia, realizamos en lo sucesivo el estudio de la calidad de la imagen fotográfica eligiendo entre aquéllas correspondientes a un mismo ángulo de campo.

3.° Poder separador en los test a 45° con el radio. (Tabla 4.<sup>a</sup>).

TABLA 4.<sup>a</sup>

SERIE II. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO

ang. campo	Posiciones de las placas								
	102	104	106	108	109	110	111	112	113
1° 20'	—1—2	0—2	1—5	0—5	0—1	—1—4	—1—2		
3° 20'	—1—4	0—3	1—2	1—1	0—4	0—2	—1—4	—1—2	
5° 20'	—1—3	0—1	0—4	0—5	0—4	0—2	—1—6	—1—4	—1—2
7° 20'	—1—2	—1—4	0—1	0—2	0—2	—1—6	—1—5	—1—5	—1—3
9° 20'	—1—1	—1—2	—1—3	—1—4	—1—4	—1—5	—1—4	—1—3	—1—2
11° 15'		—2—6	—2—6	—1—2	—1—2	—1—3	—1—2	—1—2	—1—1
13° 15'					—1—1		—1—1		—2—6

4.° Poder separador en los test cuyas barras coinciden con la dirección radial y transversal. (Tabla 5.<sup>a</sup>).

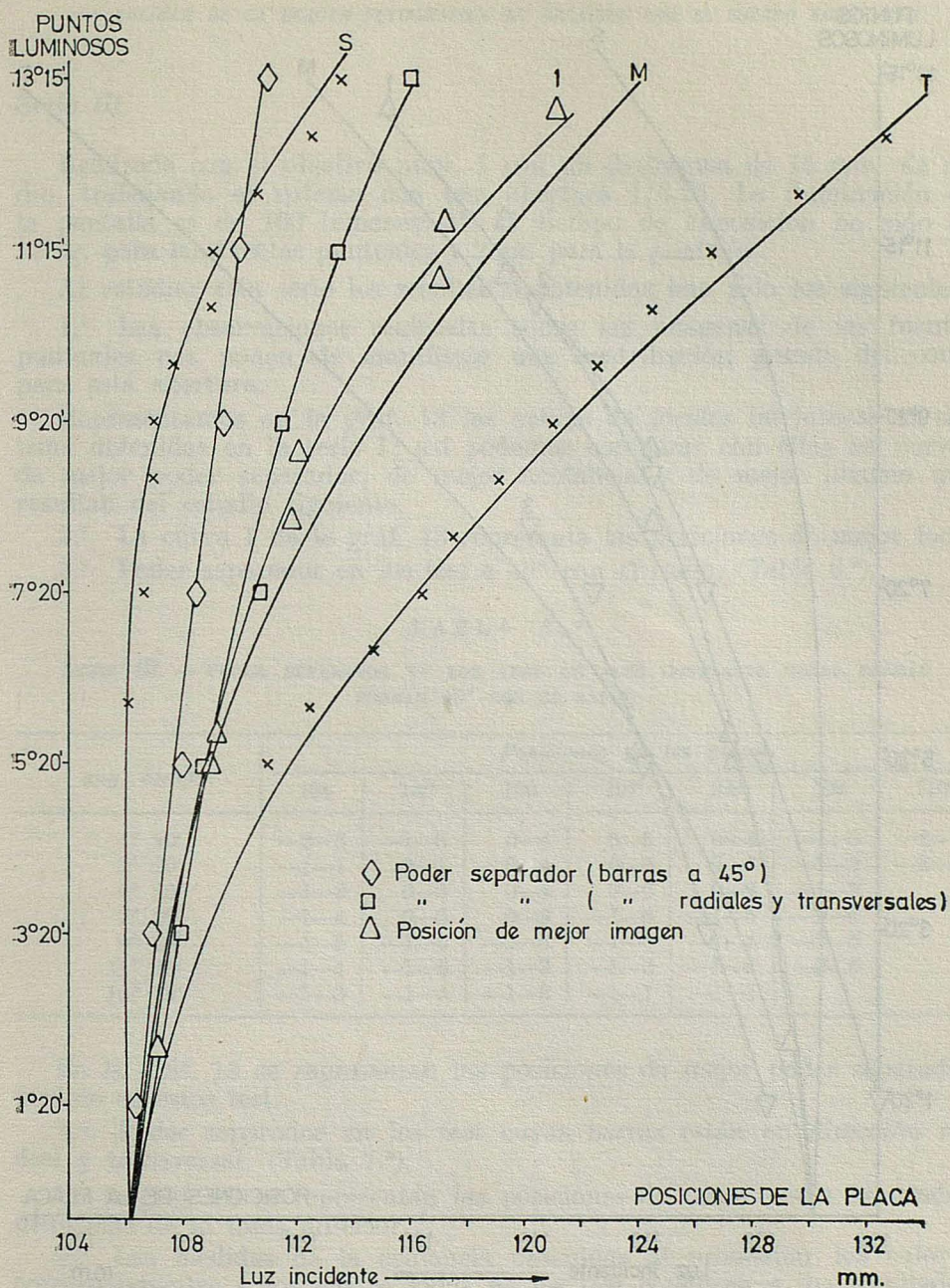


TABLA 5.<sup>a</sup>

SERIE II. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS ESTÁN EN DIRECCIÓN RADIAL Y TRANSVERSAL

ang. campo	Posiciones de las placas												
	102	104	106	108	109	110	111	112	113	114	115	117	119
3° 20'	—2—6 tr —1—1	—1—6	0—4 rad 1—2	1—3	0—3 tr 1—3	—1—6 tr 0—5	—1—3 tr 0—1	—1—1 tr —1—6					
5° 20'	—2—5 tr —2—6	—1—3	0—1 rad 0—5	0—4 rad 1—3	0—6	0—2 tr 1—1	—1—5 tr 0—6	—1—3 tr 0—4	—2—6 tr 0—2				
7° 20'	—2—4	—2—6	—1—2 rad 0—1	—1—3 rad 0—6	—1—3 rad 0—6	0—1 rad 0—6	0—2	—1—6 tr 0—4	—1—3 tr 0—5				
9° 20'	—2—2	—2—3 rad —1—2	—2—4 rad —1—6	—2—5 rad 0—4	—1—3 rad 0—4	—1—3 rad 0—3	—1—4 rad —1—6	—1—5 tr —1—6	—1—1 tr 0—1	—2—6 tr 0—1			
11° 15'		—2—1 rad —2—4	—2—2 rad —1—3	—2—3 rad 0—1	—2—3 rad 0—1	—2—4 rad 0—2	—2—4 rad 0—1	—1—1 rad —1—5	—1—2 rad —1—4	—1—2	—2—6 tr —1—4		
13° 15'					—2—1 rad 0—1		—2—2 rad 0—1		—2—2 rad —1—4		—2—2 rad —1—1	—2—3 tr —1—2	—2—1 tr —2—5





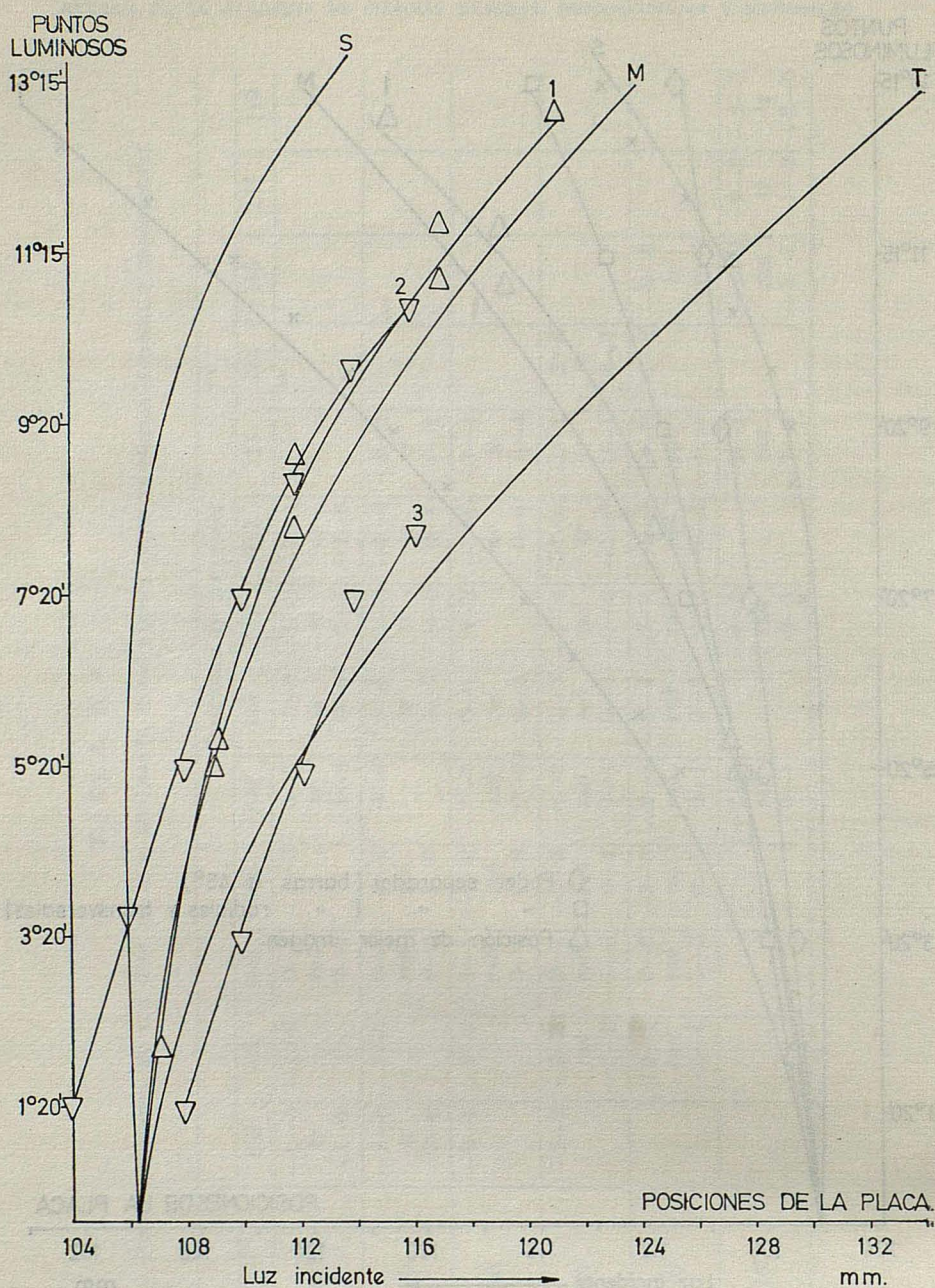
Serie II

Objetivo 1

Abertura 1 / 18,75

GRÁFICA 11





Serie II

Objetivo 1

Abertura 1 / 18,75

GRÁFICA 12



*Serie III*

Realizada con el objetivo núm. 1 con un diafragma de 15 mm. de radio, trabajando el sistema con una abertura  $1/6,25$ . La iluminación de la pantalla es de 100 lúmenes/m<sup>2</sup>. El tiempo de exposición ha sido de 12 sg. para las fuentes puntuales y 2 sg. para la pantalla.

Al estudiar esta serie los resultados obtenidos han sido los siguientes:

1.° Las observaciones realizadas sobre las imágenes de las fuentes puntuales nos ponen de manifiesto una contribución grande del coma para esta abertura.

Representamos en la gráf. 13 las curvas de focales intrínsecas al sistema obtenidas en la serie I; así podemos comparar con ellas las curvas de mejor poder separador, de mejor acutancia y de mejor imagen que resultan del estudio siguiente.

2.° La curva 1 de la gráf. 13 representa las posiciones de mejor foco.

3.° Poder separador en los test a 45° con el radio. (Tabla 6.<sup>a</sup>).

TABLA 6.<sup>a</sup>

SERIE III. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO.

ang. campo	Posiciones de las placas						
	104	105	106	107	108	109	110
1° 20'	-2-5	-1-3	0-4	0-5	0-4	-1-3	-2-6
3° 20'	-1-1	0-1	0-4	0-3	0-3	-1-3	-2-6
5° 20'	-1-3	0-3	0-4	0-2	0-2	-1-2	
7° 20'	-1-4	0-3	0-3	-1-6	-1-5	-1-1	
9° 20'	-1-5	-1-6	-1-5	-1-5	-1-4	-2-5	
11° 15'	-1-4	-1-6	-1-3	-1-3	-1-3	-2-5	
13° 15'	-1-3	-1-4	-1-3	-1-1	-1-1		

En la gráf. 13 se representan las posiciones de mejor poder separador medido en estos test.

4.° Poder separador en los test cuyas barras están en dirección radial y transversal. (Tabla 7.<sup>a</sup>).

En la gráf. 13 se representan las posiciones de mejor poder separador deducidas de la tabla anterior.

5.° Las medidas de la ecutancia obtenidas al promediar los valores correspondientes a los cuatro lados de los test conducen a los resultados representados en la siguiente tabla. (Tabla 8.<sup>a</sup>).

Se representan en la gráf. 13 las posiciones correspondientes a la mejor acutancia o nitidez de líneas.



TABLA 7.<sup>a</sup>

SERIE III. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS ESTÁN EN DIRECCIÓN RADIAL Y TRANSVERSAL

ang. campo	Posiciones de las placas					
	104	105	106	107	108	109
3° 20'	—2—4	—1—3	0—4	0—2	—1—4	—1—3
	tr	tr		rad	tr	tr
	—1—4	0—2		0—5	—1—6	—1—6
5° 20'	—2—4	—1—3	0—2	0—1	—1—4	—1—3
	tr	tr	rad	rad	rad	
	—1—5	0—2	0—5	0—4	—1—6	
7° 20'	—2—4	—1—3	—1—5	—1—5	—1—3	
	tr	tr	rad	rad	rad	
	—1—3	—1—4	0—3	0—5	—1—6	
9° 20'	—1—4	—1—4	—1—6	—1—5	—1—4	—1—3
		rad	rad	rad	rad	rad
		0—3	0—3	—1—6	—1—6	—1—6
11° 15'	—1—3	—1—3	—1—3	—1—4	—1—4	—1—3
	rad	rad	rad	rad	rad	rad
	—1—5	0—2	0—2	—1—6	0—2	—1—6
13° 15'	—2—3	—2—6	—2—5	—1—2	—1—3	—1—2
	rad	rad	rad	rad	rad	rad
	—1—4	0—2	—1—6	—1—5	—1—6	—1—6

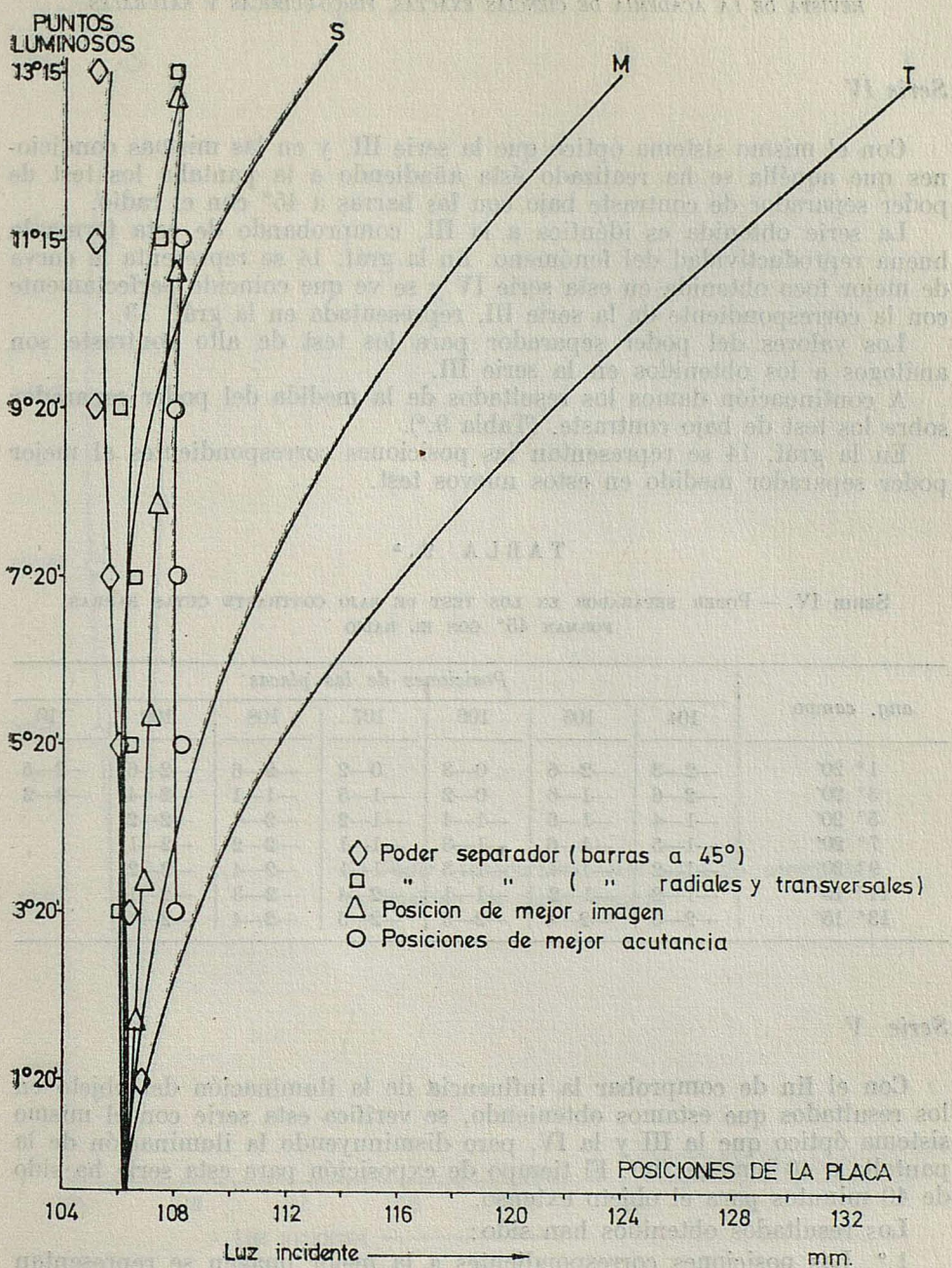
TABLA 8.<sup>a</sup>

SERIE III. — VALORES DE LA ACUTANCIA

ang. campo	Posiciones de las placas									
	104	105	106	107	108	109	110	111	112	114
3° 20'	3518	2224	7093	10189	21152	13814	5002			
5° 20'	2809	2176	4126	4473	7588	8263	3871	1860		
7° 20'	1218	1127	1885	2283	6242	4685	2496	1755		
9° 20'	937	1443	2821	3066	5135		2811		1836	1162
(*)	945	811	1405	1289	5320		950			
11° 15'	622	1434	2148	2218	3643		3225		1857	959

(\*) En estos datos se han sustituido las barras radiales por otras de menor contraste y se observa que no influye éste en la posición del plano de mejor acutancia.





Serie III

Objetivo 1

Abertura 1/6,25

GRÁFICA 13



*Serie IV*

Con el mismo sistema óptico que la serie III, y en las mismas condiciones que aquélla se ha realizado ésta añadiendo a la pantalla los test de poder separador de contraste bajo con las barras a  $45^\circ$  con el radio.

La serie obtenida es idéntica a la III, comprobando de esta forma la buena reproductividad del fenómeno. En la gráf. 14 se representa la curva de mejor foco obtenida en esta serie IV y se ve que coincide perfectamente con la correspondiente de la serie III, representada en la gráf. 13.

Los valores del poder separador para los test de alto contraste son análogos a los obtenidos en la serie III.

A continuación damos los resultados de la medida del poder separador sobre los test de bajo contraste. (Tabla 9.<sup>a</sup>).

En la gráf. 14 se representan las posiciones correspondientes al mejor poder separador medido en estos nuevos test.

TABLA 9.<sup>a</sup>

SERIE IV. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE BAJO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN  $45^\circ$  CON EL RADIO

ang. campo	Posiciones de las placas						
	104	105	106	107	108	109	110
1° 20'	-2-3	-2-6	0-3	0-2	-2-6	-2-6	-2-5
3° 20'	-2-6	-1-6	0-2	-1-5	-1-1	-2-4	-2-2
5° 20'	-1-4	-1-6	-1-4	-1-2	-2-4	-2-2	
7° 20'	-1-5	-1-6	-1-3	-1-1	-2-2	-2-1	
9° 20'	-1-2	-1-4	-1-3	-1-1	-2-4	-2-2	
11° 15'	-1-2	-1-2	-1-1	-2-4	-2-3	-2-1	
13° 15'	-2-3	-2-4	-2-5	-2-5	-2-4	-2-4	

*Serie V*

Con el fin de comprobar la influencia de la iluminación del objeto en los resultados que estamos obteniendo, se verifica esta serie con el mismo sistema óptico que la III y la IV, pero disminuyendo la iluminación de la pantalla a 40 lúmenes/m<sup>2</sup>. El tiempo de exposición para esta serie ha sido de 40 minutos para el objeto extenso.

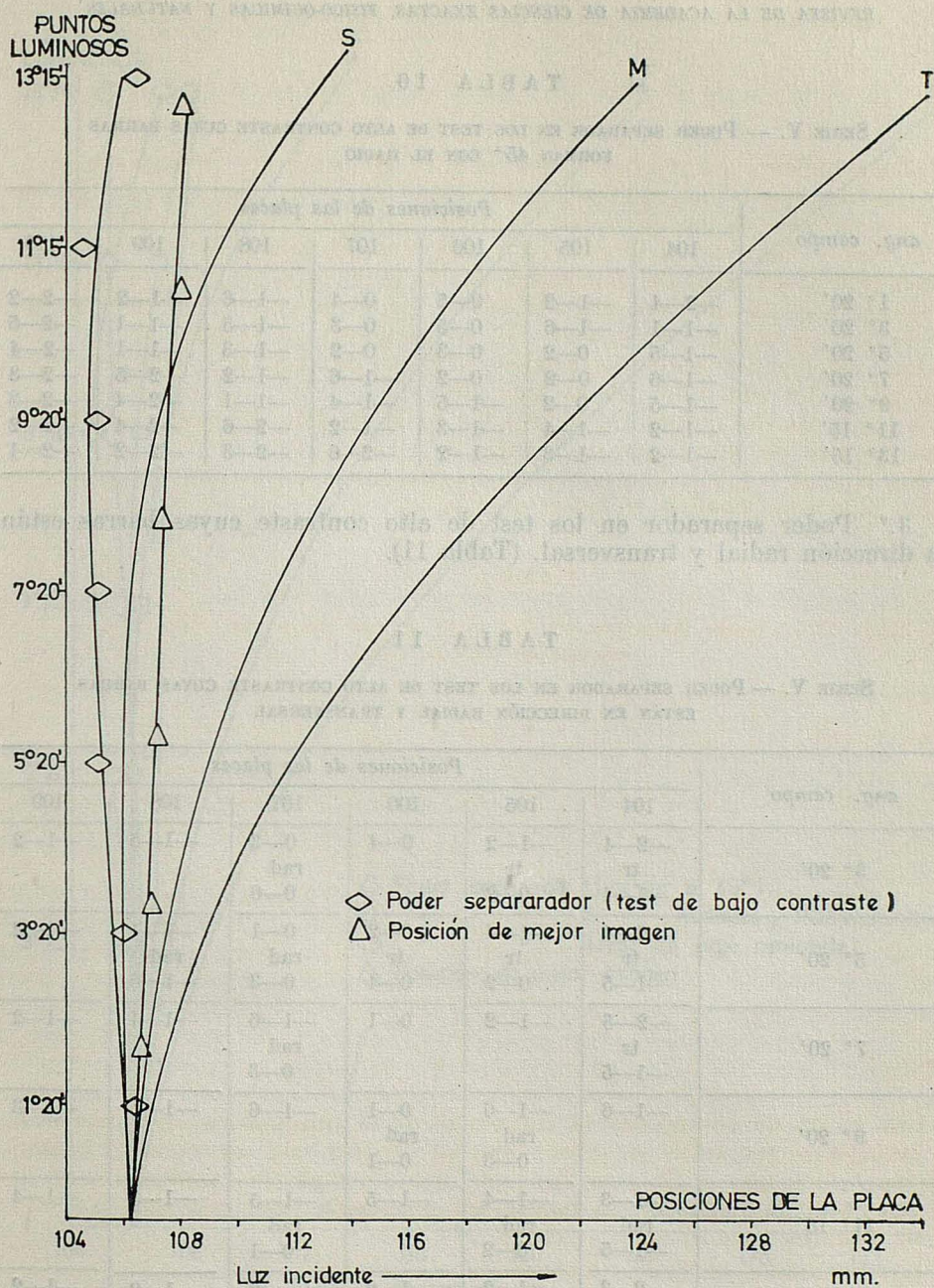
Los resultados obtenidos han sido:

1.° Las posiciones correspondientes a la mejor imagen se representan en la curva 1 de la gráfica 15.

2.° Poder separador medido en los test de alto contraste cuyas barras están a  $45^\circ$  con el radio. (Tabla 10).

En la gráfica 15 se representan las posiciones correspondientes al valor óptimo del poder separador para cada ángulo de campo.





Serie IV

Objetivo 1

Abertura 1/6,25

GRÁFICA 14



TABLA 10

SERIE V. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO

ang. campo	Posiciones de las placas						
	104	105	106	107	108	109	110
1° 20'	-2-4	-1-2	0-5	0-4	-1-6	-1-2	-2-2
3° 20'	-1-1	-1-6	0-5	0-3	-1-5	-1-1	-2-5
5° 20'	-1-5	0-2	0-3	0-2	-1-3	-1-1	-2-4
7° 20'	-1-6	0-2	0-2	-1-6	-1-2	-2-5	-2-3
9° 20'	-1-5	0-2	-1-5	-1-4	-1-1	-2-4	-2-3
11° 15'	-1-2	-1-4	-1-3	-1-2	-2-6	-2-4	-2-2
13° 15'	-1-2	-1-3	-1-2	-2-6	-2-3	-2-2	-2-1

3.° Poder separador en los test de alto contraste cuyas barras están en dirección radial y transversal. (Tabla 11).

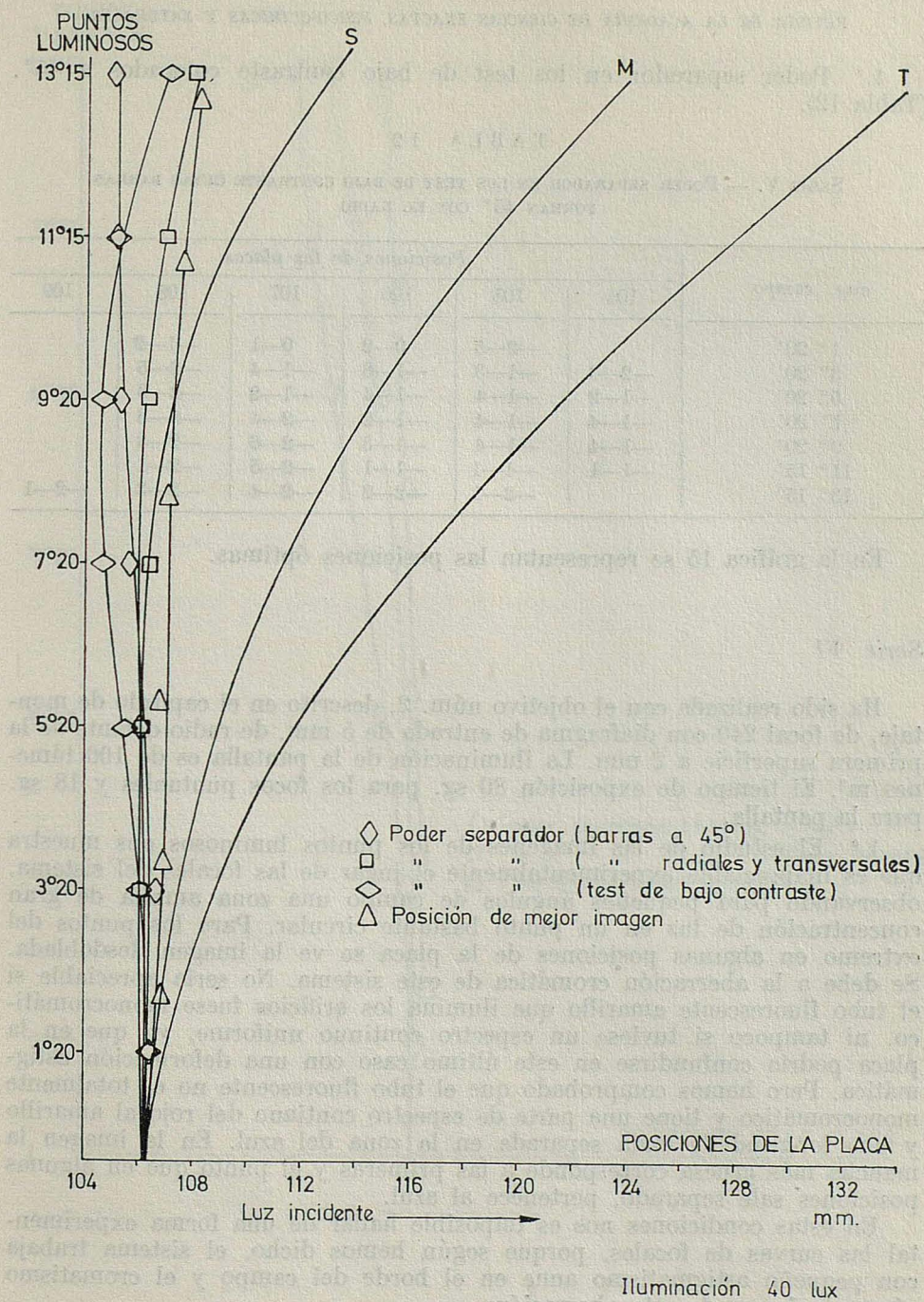
TABLA 11

SERIE V. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS ESTÁN EN DIRECCIÓN RADIAL Y TRANSVERSAL

ang. campo	Posiciones de las placas					
	104	105	106	107	108	109
3° 20'	-2-4	-1-2	0-4	0-3	-1-5	-1-2
	tr	tr		rad		
	-1-4	0-2		0-6		
5° 20'	-2-4	-1-4	0-2	0-1	-1-4	-1-2
	tr	tr	tr	rad	rad	
	-1-5	0-2	0-4	0-3	-1-6	
7° 20'	-2-5	-1-2	0-1	-1-6	-1-4	-1-2
	tr			rad		
	-1-5			0-3		
9° 20'	-1-6	-1-6	0-1	-1-6	-1-5	-1-3
		rad	rad			
		0-3	0-1			
11° 15'	-1-3	-1-4	-1-5	-1-5	-1-5	-1-4
	rad	rad		rad		
	-1-5	0-2		0-1		
13° 15'	-2-3	-1-2	-1-2	-1-2	-1-2	-1-2
	rad	rad	rad	rad		
	-1-5	0-2	-1-6	-1-6		

En la gráfica 15 se representan las posiciones de mejor poder separador en estos test.





Serie V

Objetivo 1

Abertura 1/6,25

GRÁFICA 15



4.° Poder separador en los test de bajo contraste colocados a 45°. (Tabla 12).

TABLA 12

SERIE V. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE BAJO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO

ang. campo	Posiciones de las placas					
	104	105	106	107	108	109
1° 20'		-2-5	0-2	0-1	-1-2	
3° 20'	-2-3	-1-3	-1-6	-1-4	-2-5	
5° 20'	-1-2	-1-4	-1-4	-1-2	-2-3	
7° 20'	-1-4	-1-4	-1-2	-2-4	-2-3	
9° 20'	-1-4	-1-4	-1-3	-2-6	-2-3	
11° 15'	-1-1	-1-1	-1-1	-2-5	-2-1	
13° 15'		-2-1	-2-2	-2-4	-2-3	-2-1

En la gráfica 15 se representan las posiciones óptimas.

#### Serie VI

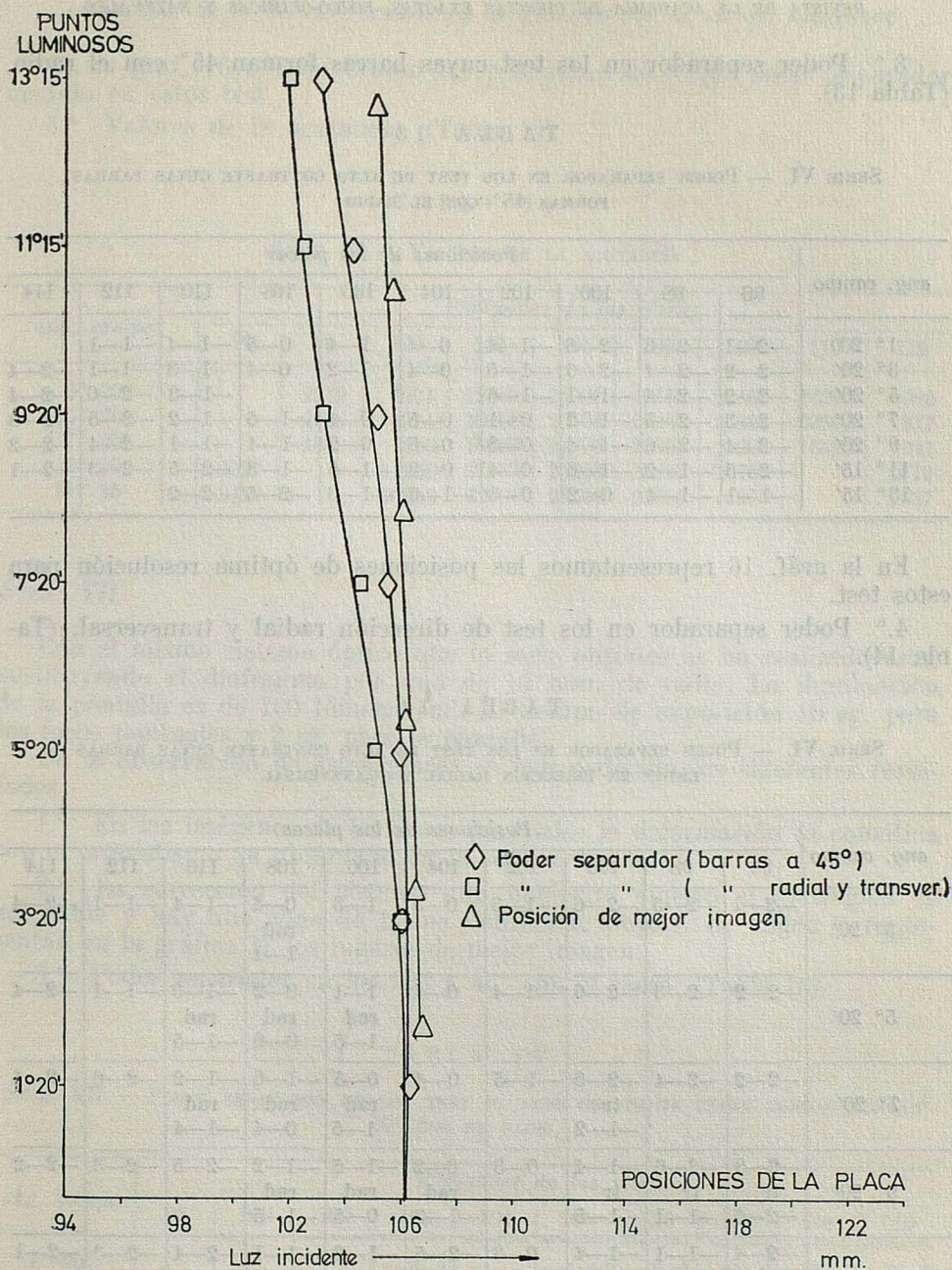
Ha sido realizada con el objetivo núm. 2, descrito en el capítulo de montaje, de focal 240 con diafragma de entrada de 5 mm. de radio delante de la primera superficie a 2 mm. La iluminación de la pantalla es de 100 lúmenes/m<sup>2</sup>. El tiempo de exposición 80 sg. para los focos puntuales y 18 sg. para la pantalla.

1.° El estudio de las imágenes de los puntos luminosos nos muestra que es inapreciable experimentalmente el lugar de las focales del sistema, observando para pequeños ángulos de campo una zona amplia de gran concentración de luz en un punto bastante circular. Para los puntos del extremo en algunas posiciones de la placa se ve la imagen desdoblada. Se debe a la aberración cromática de este sistema. No sería apreciable si el tubo fluorescente amarillo que ilumina los orificios fuese monocromático, ni tampoco si tuviese un espectro continuo uniforme, ya que en la placa podría confundirse en este último caso con una deformación astigmática. Pero hemos comprobado que el tubo fluorescente no es totalmente monocromático y tiene una parte de espectro continuo del rojo al amarillo y una longitud de onda separada en la zona del azul. En la imagen la mancha más gruesa corresponde a las primeras y el punto que en algunas posiciones sale separado, pertenece al azul.

En estas condiciones nos es imposible hallar de una forma experimental las curvas de focales, porque según hemos dicho, el sistema trabaja con pequeño astigmatismo aune en el borde del campo y el cromatismo ofusca la forma de esta aberración.

2.° En la gráf. 16 se representan las posiciones correspondientes a la mejor imagen. La zona de buena definición es amplia por la corrección propia del sistema; se toman para la gráfica los lugares de óptima calidad.





Serie VII

Objetivo 2

Abertura 1/7,75

GRÁFICA 16



3.º Poder separador en los test cuyas barras forman 45° con el radio. (Tabla 13).

TABLA 13

SERIE VI. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO

ang. campo	Posiciones de las placas									
	96	98	100	102	104	106	108	110	112	114
1° 20'	-2-1	-2-3	-2-6	-1-4	0-4	1-4	0-5	-1-4	-1-1	
3° 20'	-2-2	-2-4	-2-6	-1-5	0-4	1-2	0-4	-1-3	-1-1	-2-4
5° 20'	-2-2	-2-4	-1-1	-1-6				-1-3	-2-6	-2-4
7° 20'	-2-3	-2-5	-1-2	0-1	0-5	0-4	-1-6	-1-2	-2-5	-2-3
9° 20'	-2-4	-2-6	-1-4	0-3	0-5	0-2	-1-4	-1-1	-2-4	-2-2
11° 15'	-2-5	-1-2	-1-6	0-4	0-3	-1-6	-1-3	-2-5	-2-3	-2-1
13° 15'	-1-1	-1-4	0-2	0-3	-1-6	-1-3	-2-5	-2-2		

En la gráf. 16 representamos las posiciones de óptima resolución para estos test.

4.º Poder separador en los test de dirección radial y transversal. (Tabla 14).

TABLA 14

SERIE VI. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS ESTÁN EN DIRECCIÓN RADIAL Y TRANSVERSAL

ang. campo	Posiciones de las placas									
	96	98	100	102	104	106	108	110	112	114
3° 20'	-2-1	-2-3	-2-6	-1-3	0-3	1-3	0-4 rad 1-1	-1-4	-1-1	-2-4
5° 20'	-2-2	-2-3	-2-6	-1-4	0-4	1-1 rad 1-5	0-2 rad 0-6	-1-3 rad -1-5	-1-1	-2-4
7° 20'	-2-2	-2-4	-2-6 tr -1-2	-1-5	0-4	0-5 rad 1-5	-1-6 rad 0-4	-1-2 rad -1-4	-2-6	-2-4
9° 20'	-2-3 tr -2-5	-2-6 tr -1-1	-1-4 tr -1-5	0-3	0-2 rad -1-3	-1-5 rad 0-5	-1-2 rad -1-5	-2-5	-2-3	-2-2
11° 15'	-2-4 tr -2-6	-1-1 tr -1-4	-1-4 tr 0-1	0-3 rad 0-6	-2-5 rad 1-3	-1-3 rad 0-3	-1-1 rad -1-4	-2-4 rad -2-5	-2-3	-2-1
13° 15'	-2-6 tr -1-2	-1-3 tr -1-5	0-2	-1-6 rad 1-2	-1-4 rad 0-5	-1-1 rad -1-6	-2-4 rad -1-2	-2-3	-2-1	



En la gráf. 16 se representan las posiciones de mejor poder separador medido en estos test.

5.° Valores de la acutancia. (Tabla 15).

TABLA 15

SERIE VI. — VALORES DE LA ACUTANCIA

ang. campo	Posiciones de las placas								
	96	98	100	102	104	106	108	110	112
3° 20'		2719	6674	12461	25048	42552	25453	24296	6960
5° 20'		2925	6914	16688	25785	26355	31823	22548	7817
7° 20'		2806	7030	16688	29976	29353	29232	16420	7031
9° 20'	3027		12058	27893	25603	25820	16786		2719
11° 15'	3410		20640	22907	22626	21098	8910		1937

## Serie VII

Con el mismo sistema óptico que la serie anterior se ha realizado ésta, sustituyendo el diafragma por uno de 15 mm. de radio. La iluminación de la pantalla es de 100 lúmenes/m<sup>2</sup>. El tiempo de exposición 10 sg. para los focos puntuales y 2 sg. para la pantalla.

De la observación de estas placas se han deducido los siguientes resultados:

1.° En las imágenes de los focos puntuales la deformación es comática con el cromatismo ya observado en la serie anterior.

2.° La corrección del sistema aún habiendo abierto el diafragma es aceptable y hay una zona de buena definición amplia. Se eligen y representan en la gráfica 17 los lugares de mejor imagen.

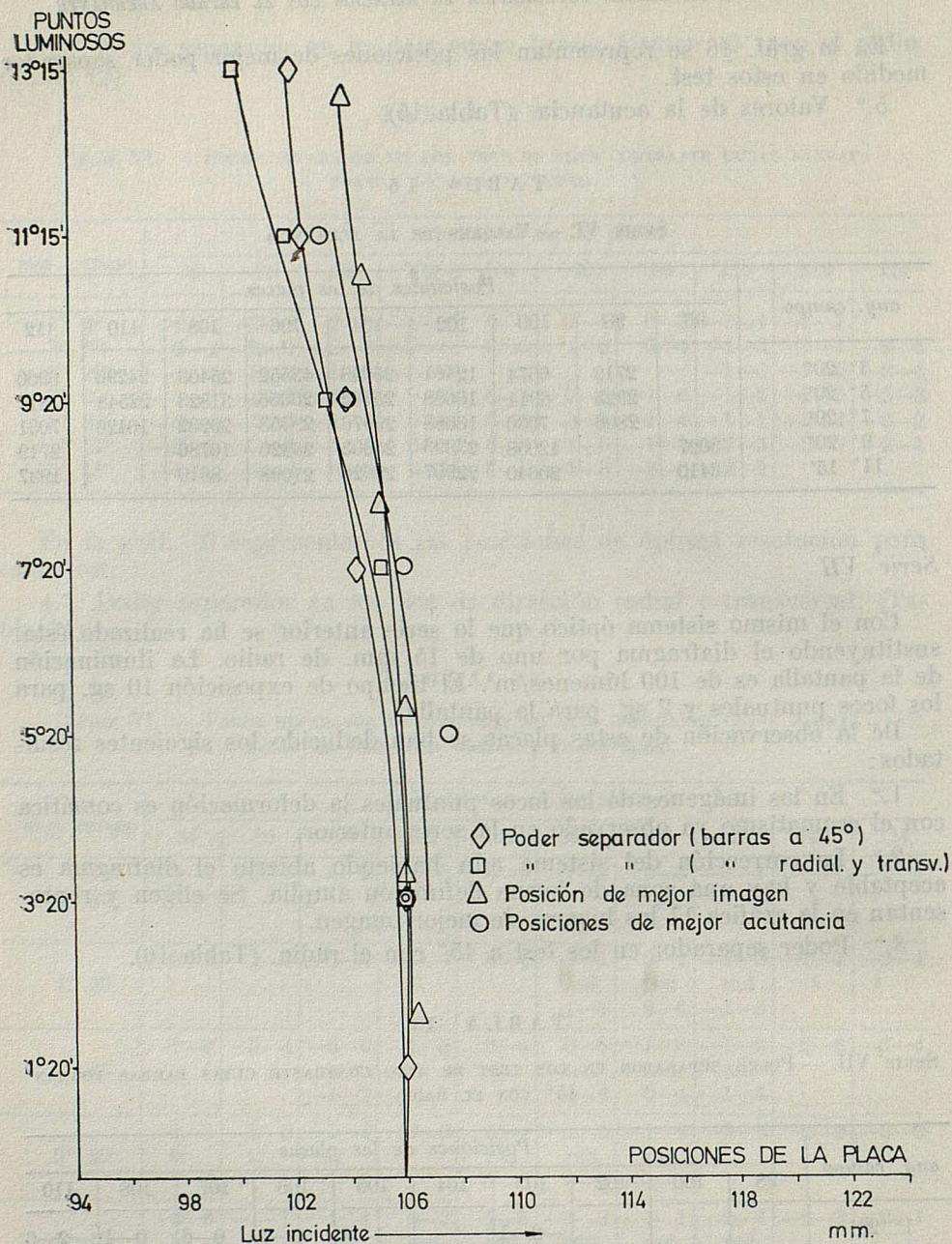
3.° Poder separador en los test a 45° con el radio. (Tabla 16).

TABLA 16

SERIE VII. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO

ang. campo	Posiciones de las placas									
	98	100	102	103	104	105	106	107	108	110
1° 20'				-2-1		-1-4	1-2	0-6	0-1	-2-6
3° 20'			-2-1	-2-5	-1-1	0-2	0-6	0-5	0-2	-1-1
5° 20'		-2-1	-2-4	-1-1	-1-5	0-3	0-4	0-2	0-1	-1-1
7° 20'		-2-2	-2-6	-1-4	-1-6	0-2	0-2	-1-5	-1-5	-1-2
9° 20'		-2-4	-1-2	-1-5	-1-6	0-1	0-1	-1-5	-1-4	-1-2
11° 15'	-2-1	-2-5	-1-4	-1-5	-1-5	-1-5	-1-5	-1-3	-1-3	-1-1
13° 15'	-2-3	-1-3	-1-6	-1-6	-1-5	-1-5	-1-3	-1-2	-1-1	





Serie VI

Objetivo 2

Abertura 1/23,5

GRÁFICA 17



4.° Poder separador en los test de dirección radial y transversal (Tabla 17).

TABLA 17

SERIE VII. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS ESTÁN EN DIRECCIÓN RADIAL Y TRANSVERSAL

ang. campo	Posiciones de las placas									
	98	100	102	103	104	105	106	107	108	110
3° 20'			tr	tr	-2-3	-1-6	0-5	0-3	-1-5	-2-3
			-2-3	-2-5	-1-5	0-4	1-1	0-6	0-3	-1-6
5° 20'			tr	tr	-2-4	0-2	-1-6	-1-6	-1-6	-2-3
			-2-6	-1-4	0-1		0-6	0-4		-1-6
7° 20'		tr	tr	tr	-1-5	-1-5	-1-4	-1-4	-1-4	-2-2
		-2-3	-1-5	0-1	0-2	0-5	0-6	0-2		tr
9° 20'	tr	tr	tr	rad	rad	rad	rad	rad	-2-3	
	-2-6	-1-1	-1-6	0-3	0-4	0-2	-1-6			
11° 15'			-1-4	-1-4	-1-3	-1-1	-1-2	-1-3	-2-2	
	tr	tr	rad	rad	rad	rad	rad	rad	tr	
13° 15'	-2-6	-1-3	0-1	0-5	0-6	-1-6	-1-6	-1-6	-1-2	
		-2-1	-1-4	-1-2	-1-1	-1-1	-1-2	-2-4	-2-1	
	tr	tr	rad	rad	rad	rad	rad	tr	tr	tr
	-2-6	-1-2	0-4	0-4	-1-6	0-1	-1-6	-1-4	-1-1	-2-6

### Serie VIII

Previamente montado y centrado en el aparato fotográfico experimental el objetivo núm. 3 descrito en el capítulo del montaje, se realiza esta serie colocando un diafragma de 2,5 mm. de radio, 12 mm. detrás de la última superficie. La iluminación de la pantalla es de 120 lúmenes/m<sup>2</sup>. El tiempo de exposición 2,5 minutos para los focos puntuales y 35 sg. para la pantalla.

1.° Las imágenes de los focos puntuales ponen de manifiesto que este sistema óptico con el diafragma en la posición mencionada posee un fuerte astigmatismo para el borde.

Se realiza un estudio experimental midiendo el tamaño de las imágenes, como se indicó en la serie I y obtenemos (gráfica 18) las curvas *S*, *T* y *M* correspondientes a las posiciones de las focales sagitales, tangenciales y lugares medios entre éstas para los diversos ángulos de campo.

Estas curvas son las que tomaremos como intrínsecas al sistema mencionado para relacionar con ellas las demás magnitudes.



TABLA 18

SERIE VIII. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO

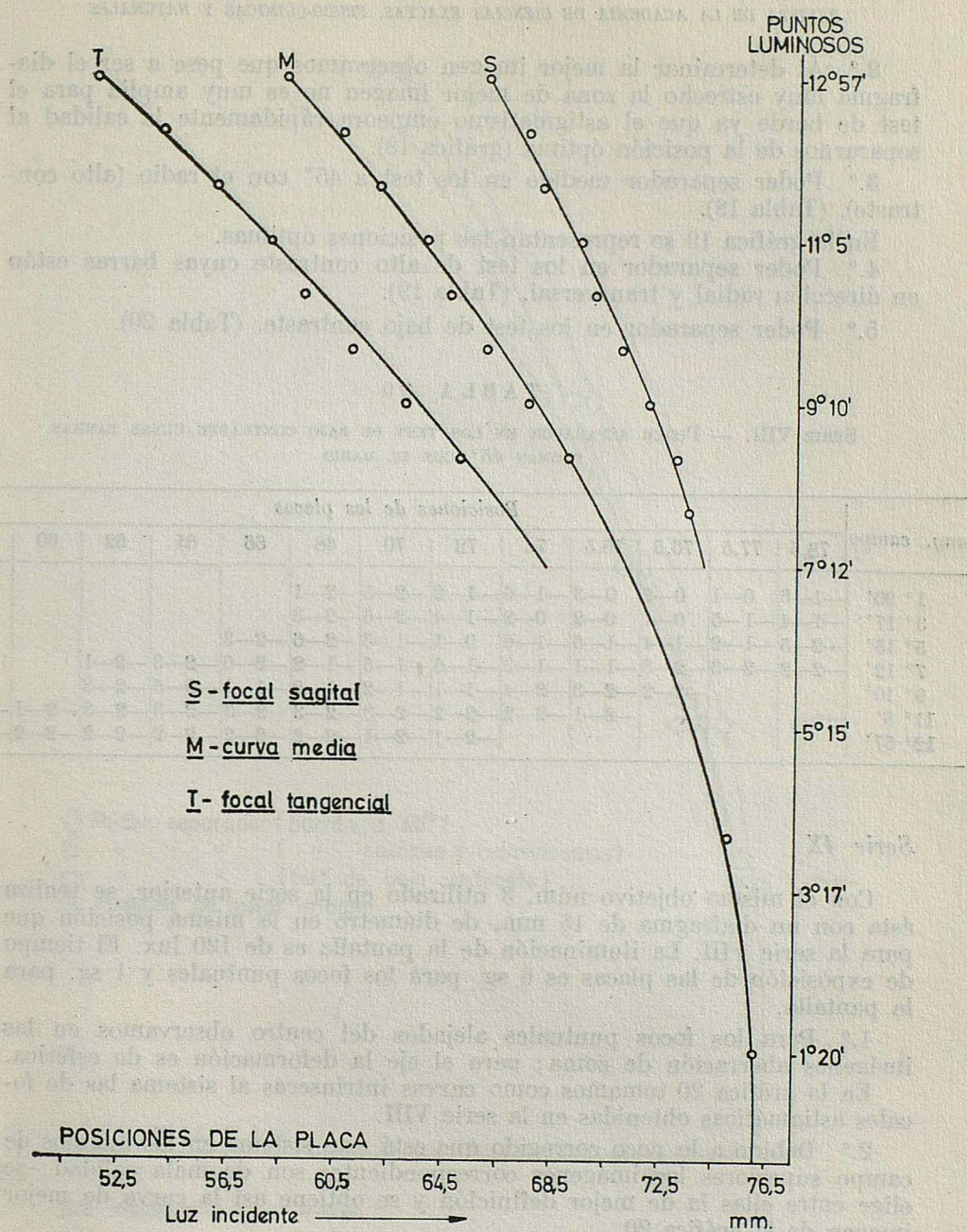
ang. campo	Posiciones de las placas													
	78,5	77,5	76,5	75,5	74	72	70	68	66	64	62	60	58	54
1° 20'	0—4	0—4	0—5	0—5	0—2	—1—5	—2—6	—2—4						
3° 17'	—1—6	0—3	0—5	0—4	0—3	—1—6	—1—2	—2—5						
5° 15'	—1—4	—1—5	0—2	0—3	0—3	0—2	—1—5	—1—1	—2—4	—2—3	—2—1			
7° 12'		—1—4	—1—4	—1—4	—1—5	0—2	0—1	—1—5	—1—2	—2—5	—2—2			
9° 10'		—2—6	—1—2	—1—2	—1—3	—1—4	—1—4	—1—4	—1—3	—1—1	—2—5			
11° 5'					—2—6	—1—1	—1—1	—1—2	—1—2	—1—1	—2—6	—2—5	—2—3	
12° 57'						—2—3	—2—3	—2—4	—2—4	—2—5	—2—5	—2—3	—2—3	—2—2

TABLA 19

SERIE VIII. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS ESTÁN EN DIRECCIÓN RADIAL Y TRANSVERSAL

ang. campo	Posiciones de las placas													
	78,5	77,5	76,5	75,5	74	72	70	68	66	64	62	60	58	54
3° 17'	—1—6	0—2	0—5	0—5	0—4	—1—6	—1—3	—2—5						
	rad	rad	rad	rad										
	0—3	0—6	0—6	1—1										
5° 15'	—1—1	—1—3	—1—5	0—1	0—4	0—2	—1—4	—2—5	—2—3					
	rad	rad	rad	rad	rad	tr	tr	tr						
	0—1	0—3	0—4	0—5	0—6	0—4	0—2	—1—5						
7° 12'	—2—4	—2—6	—1—1	—1—1	—1—3	—1—6	0—1	—1—3	—2—5	—2—2				
	rad	rad	rad	rad	rad	rad	tr	tr	tr	tr				
	—1—2	—1—4	—1—6	0—3	0—5	0—5	0—3	0—3	—1—6	—1—3				
9° 10'		—2—2	—2—3	—2—3	—1—1	—1—2	—1—4	—1—6	—1—2	—2—5	—2—2			
		rad	rad	rad	rad	rad	rad	rad	tr	tr	tr			
		—1—1	—1—2	—1—3	—1—6	0—2	0—3	0—1	0—1	0—2	0—1			
11° 5'					—2—2	—2—2	—2—4	—1—1	—1—2	—1—2	—2—6	—2—2	—2—1	
					rad	rad	rad	rad	rad	tr	tr	tr	tr	
					—1—2	—1—3	—1—6	0—1	—1—5	—1—3	—1—4	—1—5	0—1	
12° 57'							—2—2	—2—2	—2—3	—2—4	—1—1	—2—6	—2—4	—2—1
							rad	rad	rad	rad	rad	tr	tr	tr
							—2—6	—1—5	—1—6	—1—6	—1—4	—1—2	—1—3	—1—4





Serie VIII

Objetivo 3

Abertura 1/32,75



2.° Al determinar la mejor imagen observamos que pese a ser el diafragma muy estrecho la zona de mejor imagen no es muy amplia para el test de borde ya que el astigmatismo empeora rápidamente la calidad al separarnos de la posición óptima (gráfica 19).

3.° Poder separador medido en los test a 45° con el radio (alto contraste). (Tabla 18).

En la gráfica 19 se representan las posiciones óptimas.

4.° Poder separador en los test de alto contraste cuyas barras están en dirección radial y transversal. (Tabla 19).

5.° Poder separador en los test de bajo contraste. (Tabla 20).

TABLA 20

SERIE VIII. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE BAJO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO

ang. campo	Posiciones de las placas												
	78,5	77,5	76,5	75,5	74	72	70	68	66	64	62	60	58
1° 20'	—1—6	0—1	0—2	0—3	—1—6	—1—2	—2—5	—2—1					
3° 17'	—1—4	—1—5	0—1	0—2	0—2	—1—4	—2—6	—2—3					
5° 15'	—2—5	—1—2	—1—4	—1—5	—1—6	0—1	—1—3	—2—6	—2—3				
7° 12'	—2—2	—2—3	—2—3	—1—1	—1—3	—1—5	—1—5	—1—2	—2—6	—2—3	—2—1		
9° 10'			—2—2	—2—3	—2—4	—1—1	—1—2	—1—2	—1—1	—2—5	—2—3		
11° 5'				—2—1	—2—2	—2—2	—2—3	—2—3	—2—3	—2—3	—2—3	—2—1	—2—1
12° 57'						—2—1	—2—1	—2—2	—2—2	—2—2	—2—2	—2—2	—2—2

### Serie IX

Con el mismo objetivo núm. 3 utilizado en la serie anterior, se realiza ésta con un diafragma de 15 mm. de diámetro en la misma posición que para la serie VIII. La iluminación de la pantalla es de 120 lux. El tiempo de exposición de las placas es 6 sg. para los focos puntuales y 1 sg. para la pantalla.

1.° Para los focos puntuales alejados del centro observamos en las imágenes aberración de coma; para el eje la deformación es de esférica.

En la gráfica 20 tomamos como curvas intrínsecas al sistema las de focales astigmáticas obtenidas en la serie VIII.

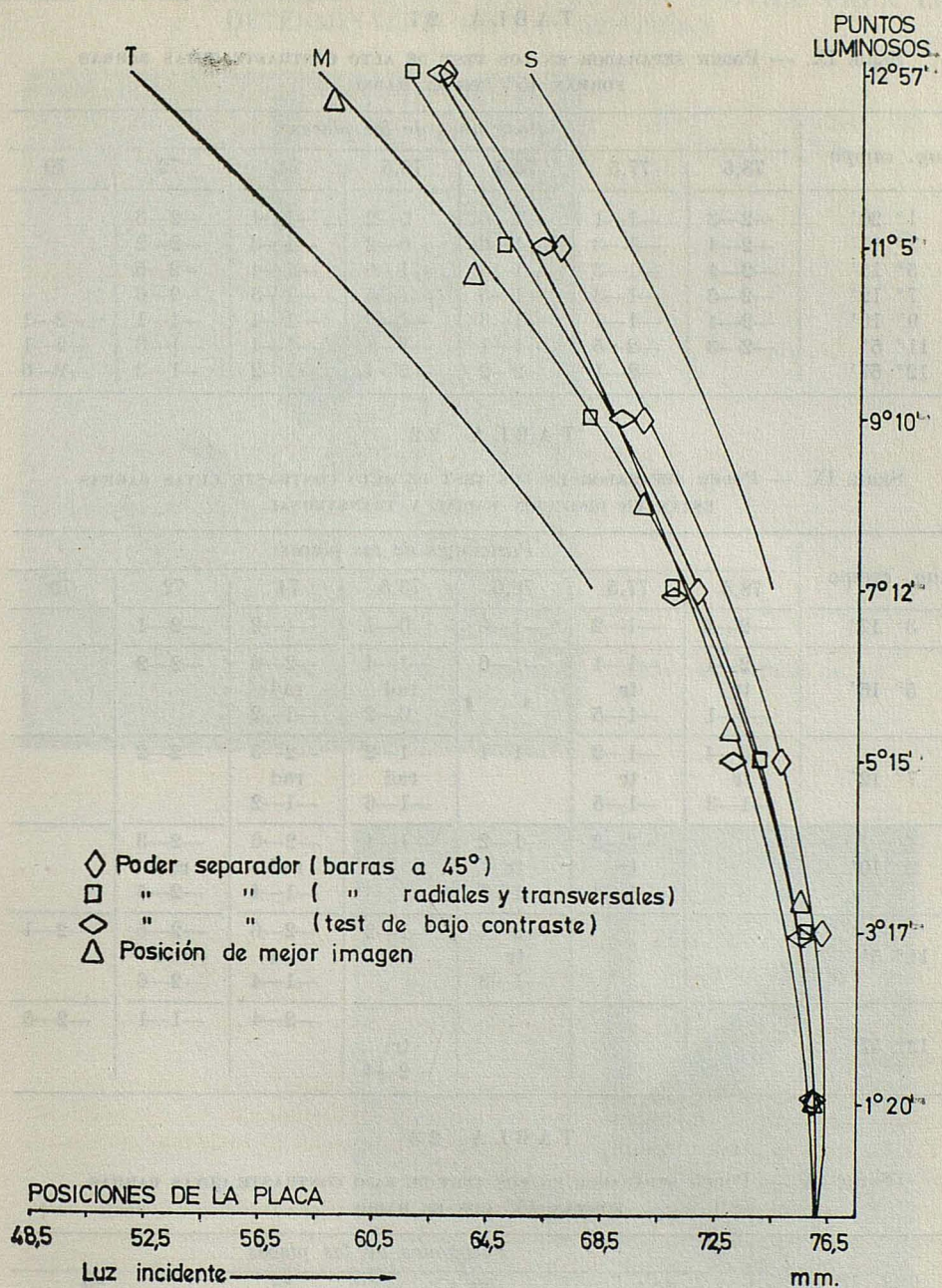
2.° Debido a lo poco corregido que está este sistema en los ángulos de campo superiores las imágenes correspondientes son de mala calidad; se elige entre ellas la de mejor definición y se obtiene así la curva de mejor imagen de la gráfica 20.

3.° Poder separador medido en los test de alto contraste a 45° con el radio. (Tabla 21).

4.° Poder separador en los test de alto contraste en dirección radial y transversal. (Tabla 22).

5.° Poder separador en los test de bajo contraste. (Tabla 23).





Serie VIII

Objetivo 3

Abertura 1 / 32,75.

GRÁFICA 19



TABLA 21

SERIE IX. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO

ang. campo	Posiciones de las placas						
	78,5	77,5	76,5	75,5	74	72	70
1° 20'	-2-3	-1-1	-1-6	0-2	-1-4	-2-3	
3° 17'	-2-4	-1-3	-1-6	0-2	-1-3	-2-2	
5° 15'	-2-4	-1-3	-1-5	-1-6	-1-4	-2-5	
7° 12'	-2-5	-1-3	-1-5	-1-5	-1-5	-2-6	
9° 10'	-2-4	-1-1	-1-3	-1-4	-1-4	-1-1	-2-1
11° 5'	-2-3	-2-5	-1-1	-1-4	-1-4	-1-3	-2-1
12° 57'		-2-1	-2-2	-2-4	-1-2	-1-3	-2-6

TABLA 22

SERIE IX. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE ALTO CONTRASTE CUYAS BARRAS ESTÁN EN DIRECCIÓN RADIAL Y TRANSVERSAL

ang. campo	Posiciones de las placas						
	78,5	77,5	76,5	75,5	74	72	70
3° 17'	-2-4	-1-2	-1-6	0-1	-1-2	-2-1	
5° 15'	-2-4	-1-1	-1-6	-1-4	-2-6	-2-2	
	tr -1-1	tr -1-5		rad 0-2	rad -1-2		
7° 12'	-2-4	-1-2	-1-4	-1-2	-2-5	-2-2	
	tr -1-3	tr -1-5		rad -1-6	rad -1-2		
9° 10'		-2-2	-1-2	-1-4	-2-6	-2-3	
		tr -1-3	tr -1-4		rad -1-4	rad -2-5	
11° 5'			-2-4	-1-2	-2-6	-2-5	-2-1
			tr -1-3		rad -1-4	rad -2-6	
12° 57'				tr -2-4	-2-4	-1-1	-2-5

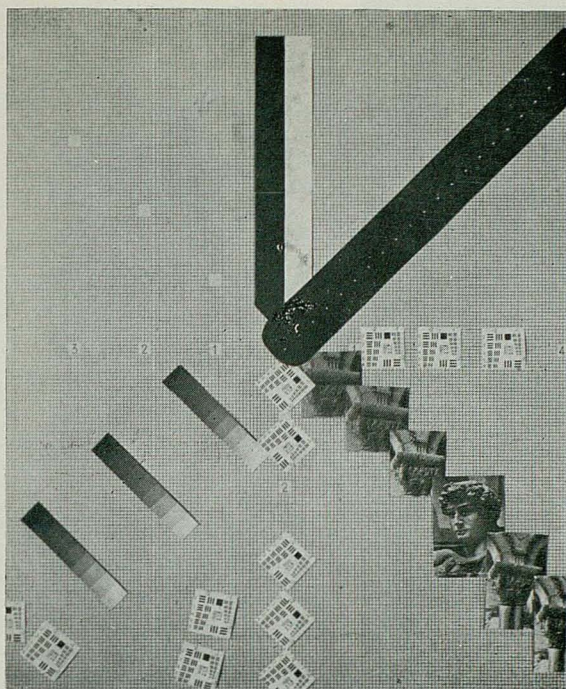
TABLA 23

SERIE IX. — PODER SEPARADOR EN LOS TEST DE BAJO CONTRASTE CUYAS BARRAS FORMAN 45° CON EL RADIO

ang. campo	Posiciones de las placas			
	76,5	75,5	74	72
1° 20'	-2-5	-1-4	-2-6	-2-1
3° 17'	-2-5	-1-4	-2-6	-2-1
5° 15'	-2-4	-1-3	-2-6	-2-2
7° 12'	-2-4	-1-2	-2-6	-2-4
9° 10'	-2-2	-2-6	-2-6	-2-3
11° 5'	-2-1	-2-3	-2-5	-2-4
12° 57'	-2-1	-2-3	-2-4	-2-3

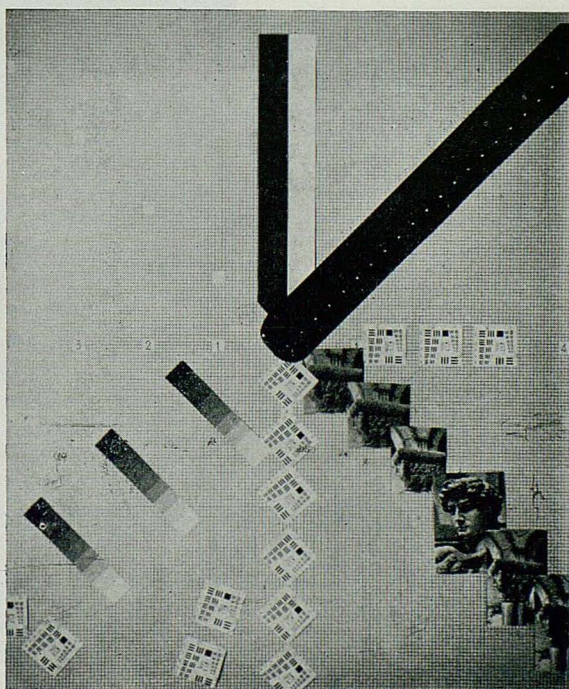


REPRODUCCIONES DE ALGUNAS DE LAS PLACAS PERTENECIENTES  
A LAS SERIES EXPERIMENTALES, QUE NOS HAN SERVIDO PARA LA  
DETERMINACION DE LAS GRAFICAS



SERIE I. — Objetivo núm. I.  
Abertura 1/37,5.

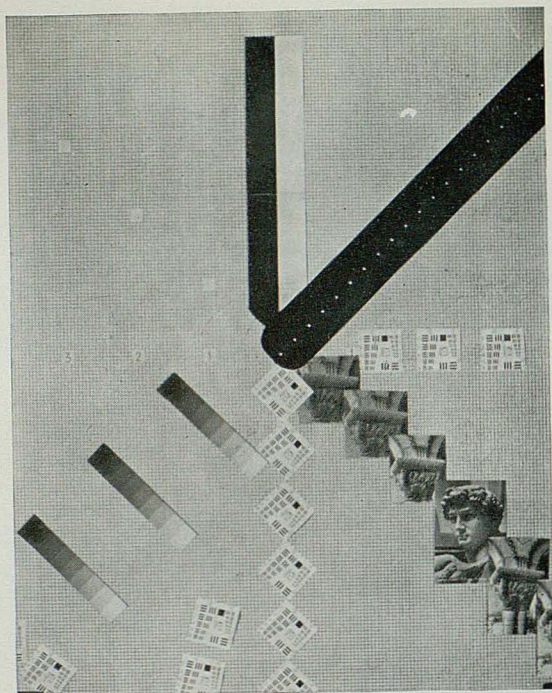
For. 4. — Posición 107



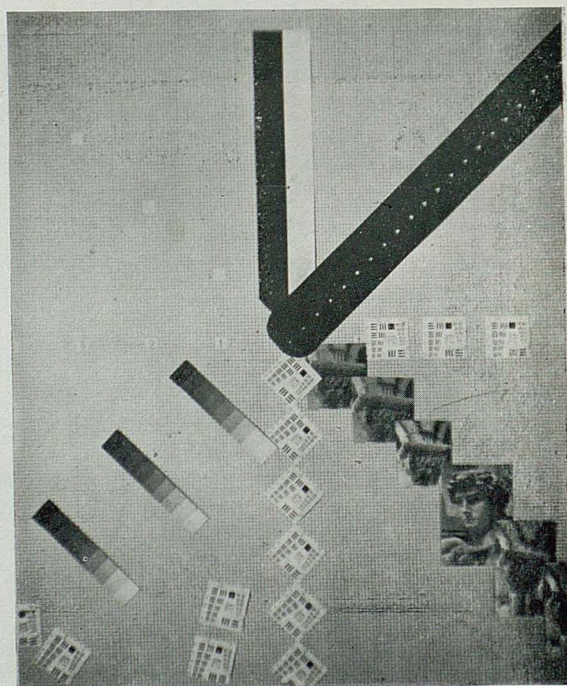
For. 5. — Posición 112



SERIE I. — Objetivo núm. 1. Abertura 1/37,5



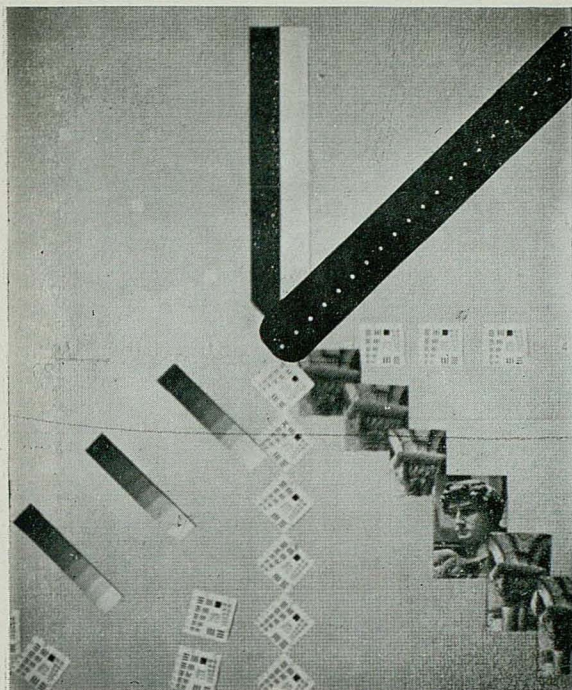
FOT. 6. — Posición 120



FOT. 7. — Posición 132

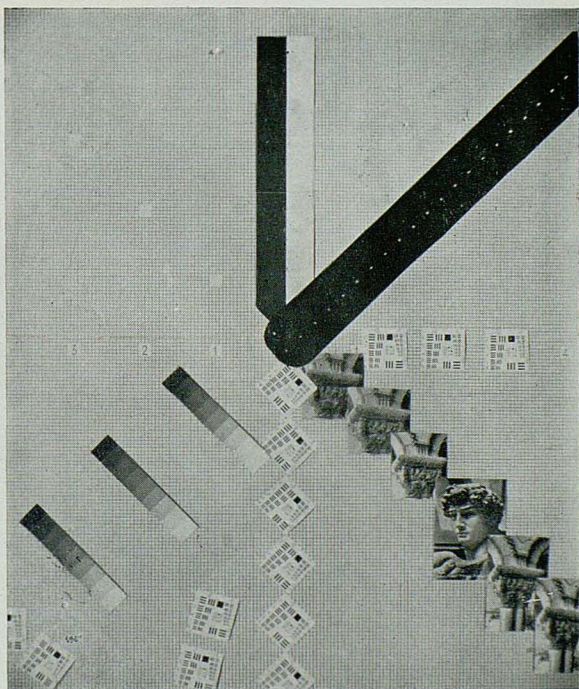


SERIE III. — Objetivo núm. 1. Abertura 1/6,25



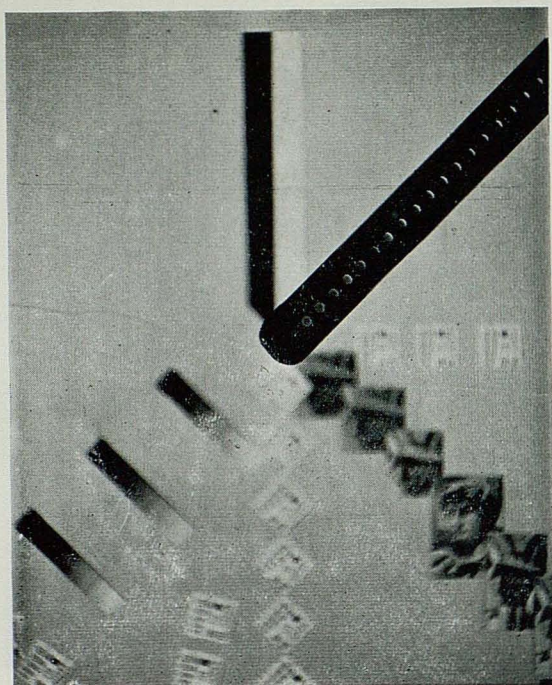
FOT. 8. — Posición 107

FOT. 9. — Posición 112

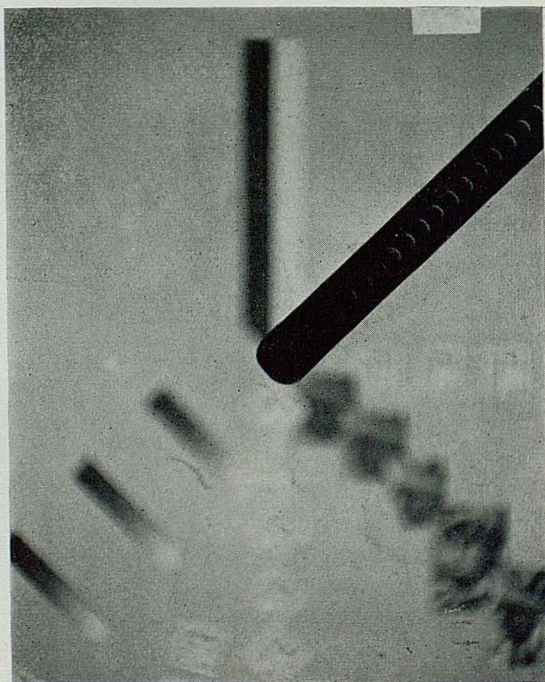




SERIE III. — Objetivo núm. 1. Abertura 1/6,25



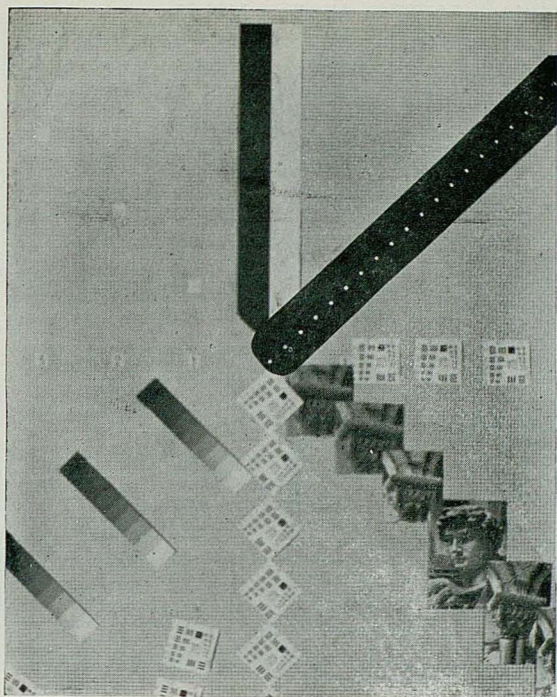
FOT. 10. — Posición 120



FOT. 11. — Posición 130

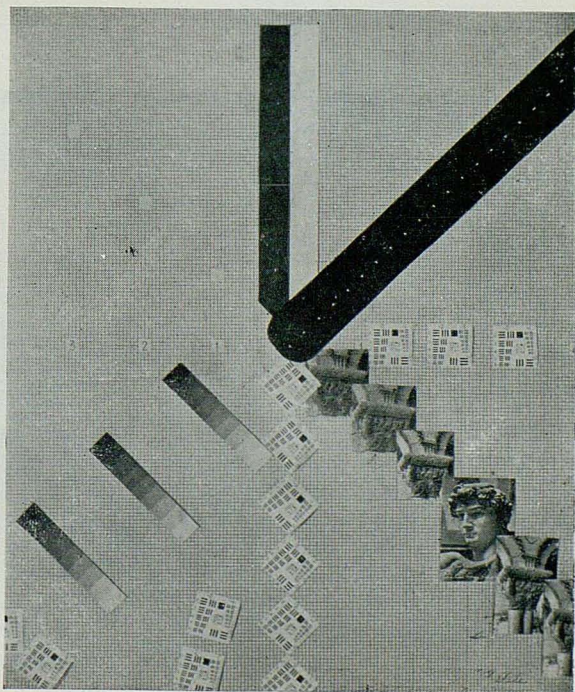


SERIE VI. — Objetivo núm. 2. Abertura, 1/23,5



For. 12. — Posición 106

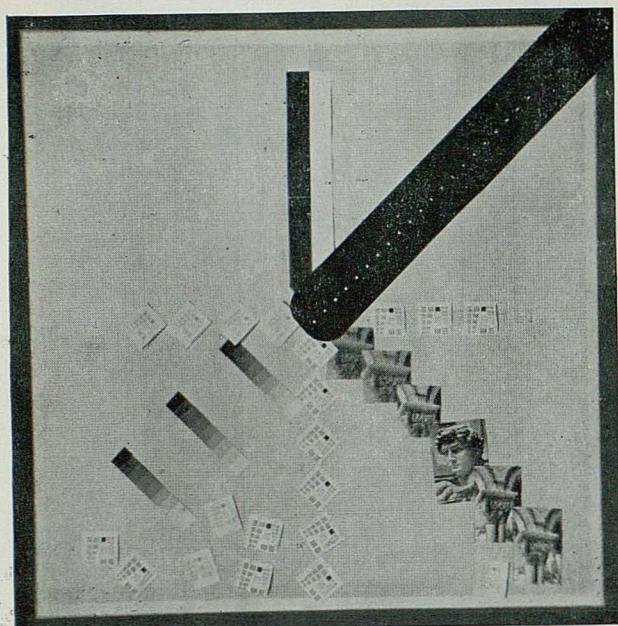
SERIE VII. — Objetivo núm. 2. Abertura 1/7,75



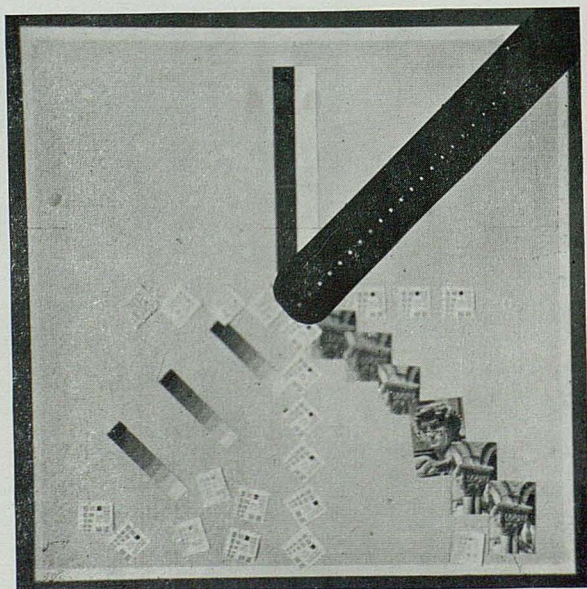
For. 13. — Posición 106



SERIE VIII. — Objetivo núm. 3. — Abertura 1/32,75



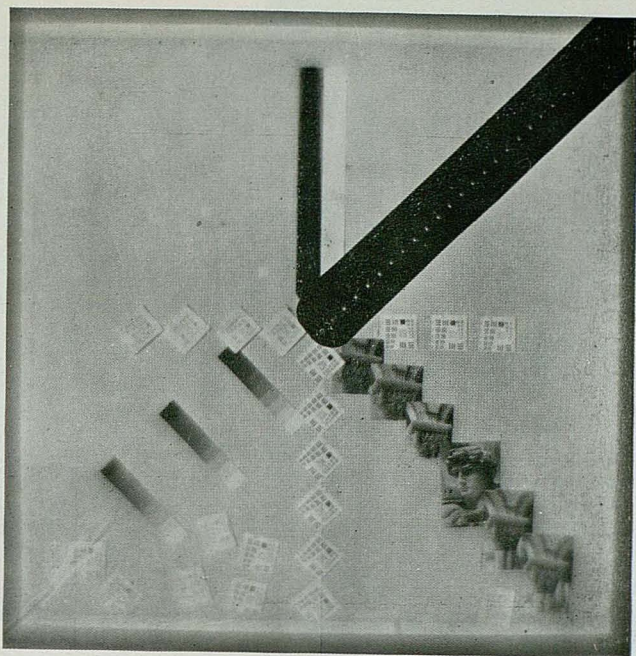
FOT. 14. — Posición 75,5



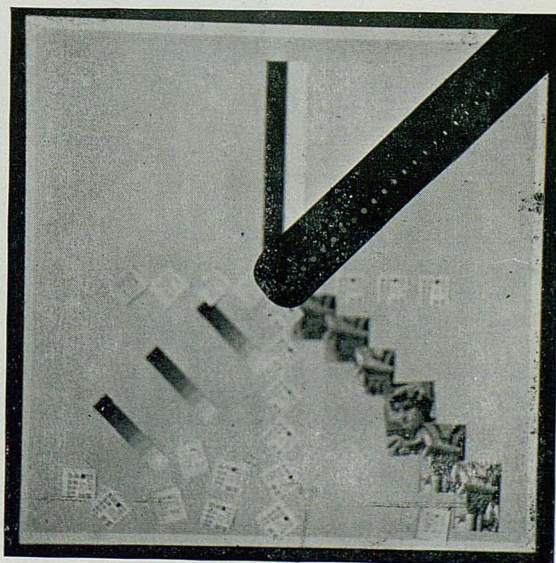
FOT. 15. — Posición 66



SERIE VIII. — Objetivo núm. 3. Abertura, 1/32,75



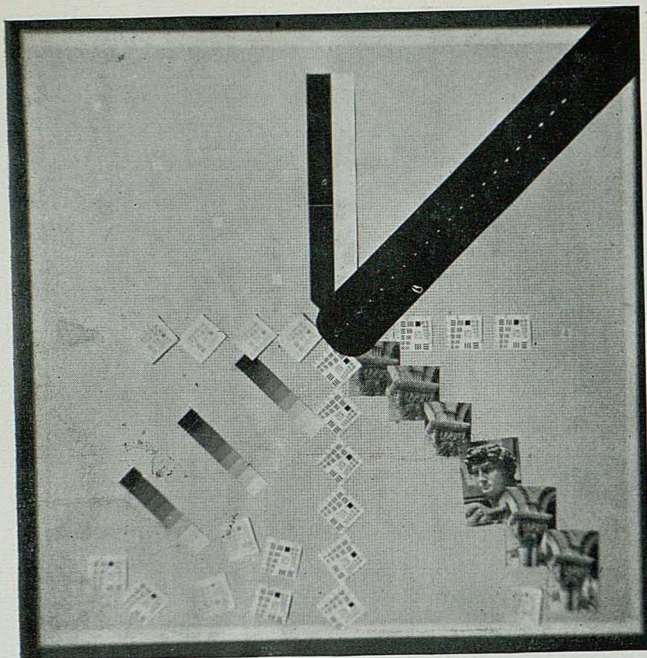
For. 16. — Posición 58



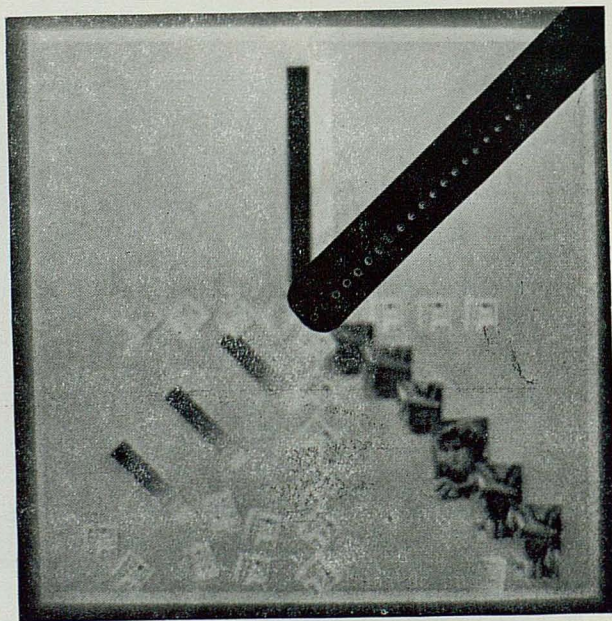
For. 17. — Posición 50



SERIE IX. — Objetivo núm. 3. Abertura, 1/5,5



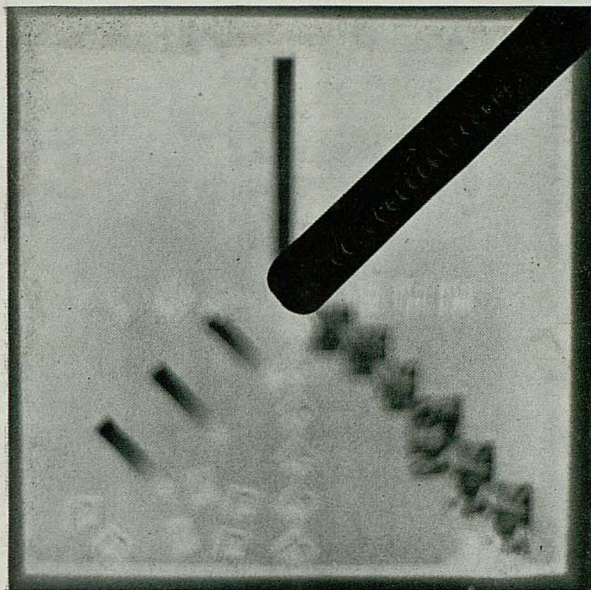
FOT. 18.—Posición 75,5



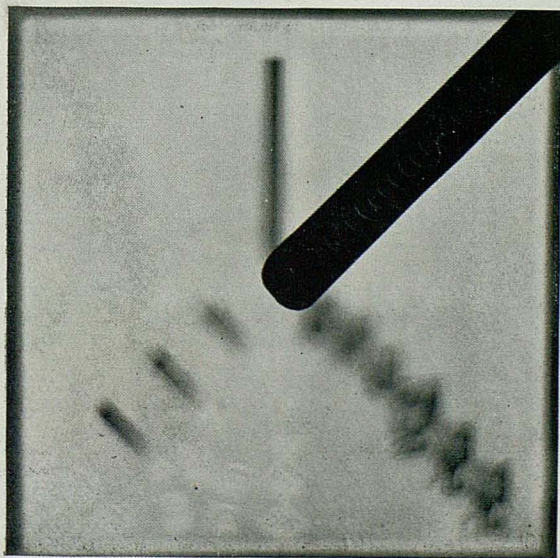
FOT. 19. — Posición 66



SERIE IX. — Objetivo núm. 3. Abertura, 1/5,5

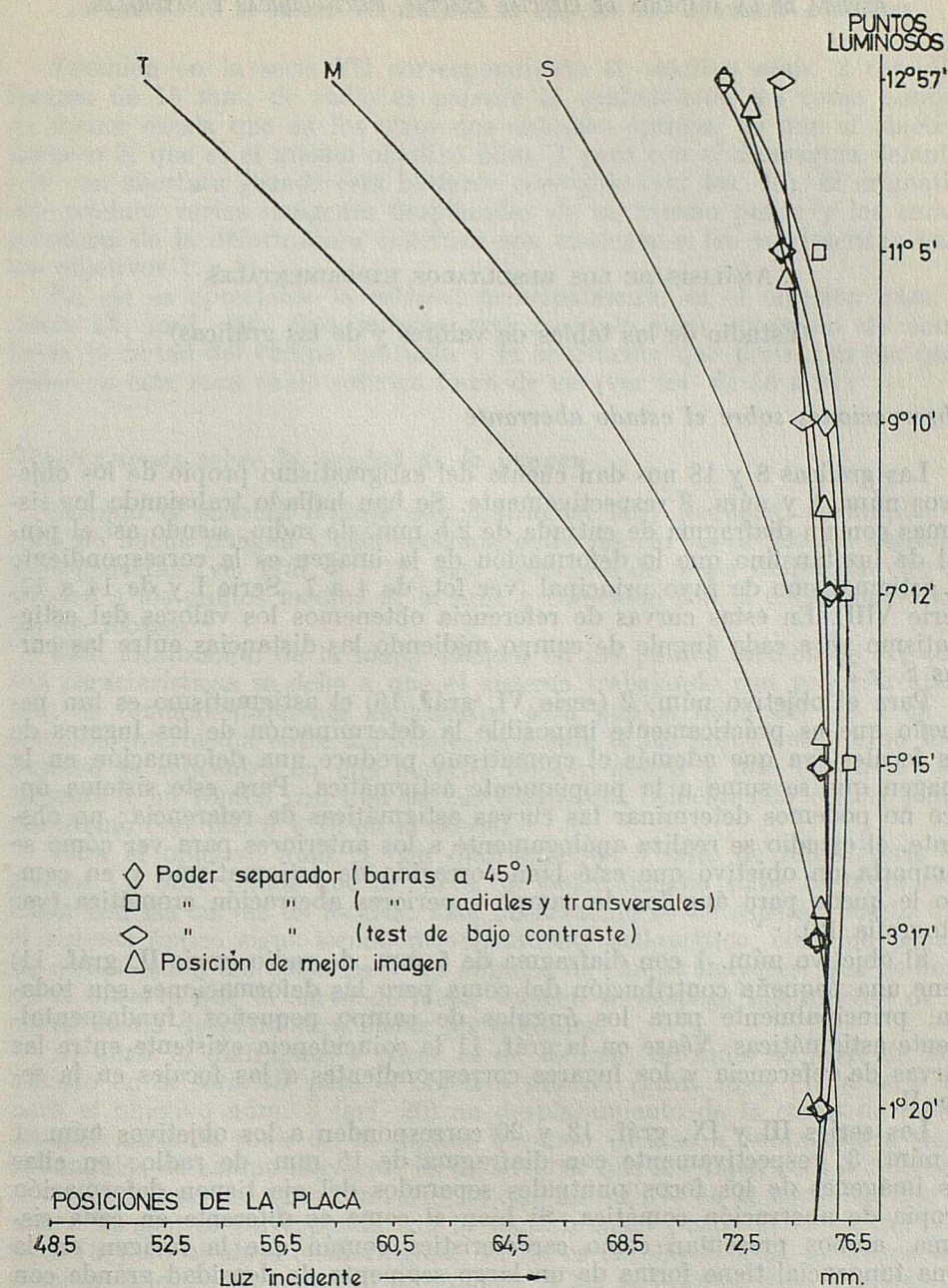


For. 20. — Posición 58



For. 21. — Posición 50





Serie IX

Objetivo 3

Abertura 1 / 5,5

GRÁFICA 20



## ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

(Estudio de las tablas de valores y de las gráficas)

*Observaciones sobre el estado aberrante*

Las gráficas 8 y 18 nos dan cuenta del astigmatismo propio de los objetivos núm. 1 y núm. 3 respectivamente. Se han hallado trabajando los sistemas con un diafragma de entrada de 2,5 mm. de radio, siendo así el pincel de luz tan fino que la deformación de la imagen es la correspondiente al astigmatismo de rayo principal (ver fot. de 4 a 7, Serie I y de 14 a 17, Serie VIII). En estas curvas de referencia obtenemos los valores del astigmatismo para cada ángulo de campo midiendo las distancias entre las curvas S y T.

Para el objetivo núm. 2 (serie VI, gráf. 16) el astigmatismo es tan pequeño que es prácticamente imposible la determinación de los lugares de las focales, ya que además el cromatismo produce una deformación en la imagen que se suma a la propiamente astigmática. Para este sistema óptico no podemos determinar las curvas astigmáticas de referencia; no obstante, el estudio se realiza análogamente a los anteriores para ver cómo se comporta un objetivo que esté bien corregido de astigmatismo y en cambio le quede para ángulos de campo superiores aberración cromática (ver fotografía 12).

El objetivo núm. 1 con diafragma de 5 mm. de radio (serie II, gráf. 11) tiene una pequeña contribución del coma pero las deformaciones son todavía, principalmente para los ángulos de campo pequeños, fundamentalmente astigmáticas. Véase en la gráf. 11 la coincidencia existente entre las curvas de referencia y los lugares correspondientes a las focales en la serie II.

Las series III y IX, gráf. 13 y 20 corresponden a los objetivos núm. 1 y núm. 3, respectivamente con diafragma de 15 mm. de radio; en ellas las imágenes de los focos puntuales separados del eje tienen deformación propia de aberración comática. Si bien el coma es diferente en cada sistema, ambos presentan como característica común que la imagen en la zona tangencial tiene forma de un largo segmento de densidad grande con un halo de luz, para la zona media toda la luz se halla concentrada en una mancha asimétrica de densidad más o menos igual, y en la zona sagital parte de la luz se halla concentrada en un círculo muy pequeño, prácticamente puntual y de forma bastante simétrica, teniendo una prolongación de luz muy difusa que constituye la cola del coma (ver fot. de 8 a 11, serie III y de 18 a 21, serie IX).



También en la serie VII correspondiente al objetivo núm. 2 con diafragma de 15 mm. de radio es patente la contribución del coma aunque en menor escala que en los otros dos sistemas ópticos, ya que el objetivo número 2, que es el mismo objetivo núm. 1 pero con el diafragma delante, aún con abertura grande está bastante corregido (ver fot. 13). El cromatismo produce varias imágenes desplazadas de un mismo punto y las características de la deformación comática son análogas a las ya descritas para los objetivos 1 y 3.

En eje es apreciable la esférica principalmente en el objetivo núm. 3 (serie IX, gráf. 20). Este sistema está bastante bien corregido de coma hasta la mitad del campo utilizado y la aberración que presentan las imágenes en esta zona es de esférica fuera de eje (ver fot. de 18 a 21).

### *Observaciones sobre la calidad de la imagen*

Cuando el sistema trabaja con diafragma muy pequeño, es amplia la zona de buena imagen y está centrada entre las curvas de focales sagitales y tangenciales (ver gráf. 9 y 19). Las posiciones de mejor definición corresponden a los puntos medios de la zona y coinciden con la curva media entre las focales.

Esta localización de la mejor imagen en los puntos medios de las curvas características se debe a que el sistema trabajando con pequeña abertura es fundamentalmente astigmático para puntos fuera del eje y en la posición intermedia entre las focales es donde la luz procedente de un foco puntual se concentra en una mancha imagen menor y más simétrica; semejante a un rombo con una de sus diagonales coincidiendo con el plano meridiano (ver fot. 6 y 16 en el borde).

Para el objetivo núm. 1 con diafragma de 5 mm. de radio (serie II, gráfica 11) observamos que la curva de mejor imagen sigue bastante centrada con las curvas de focales. Esta observación es de esperar puesto que el sistema óptico sigue siendo principalmente astigmático, con una pequeña contribución del coma para los ángulos de campo mayores, que es donde se observa que la curva de mejor imagen se despega ligeramente de la curva media desplazándose hacia las sagitales.

Al abrir el diafragma y pasar al de 15 mm. de radio se pone de manifiesto en la serie III para el objetivo núm. 1 (gráf. 13) y en la serie IX para el objetivo núm. 3 (grf. 20) un desplazamiento de la curva de mejor imagen hacia la zona de la sagital llegando incluso a sobrepasarla para los ángulos de campo mayores. Es de advertir que los objetivos 1 y 3 tienen el astigmatismo de signo contrario, lo que no influye en el hecho de que la mejor imagen se corresponda con la sagital, como puede verse en las gráficas 13 y 20 al abrir el diafragma. Ya no es amplia la zona de buena definición, pues se ha reducido únicamente a las posiciones representadas en las gráficas y para los test del borde la calidad de la imagen es deficiente, como puede observarse en las fot. 8 y 9, serie III y 18 y 19, serie IX.

Trabajando con gran abertura las imágenes de los focos puntuales presentan gran deformación debido al coma del instrumento. Como ya se ha descrito anteriormente, estas imágenes tienen en la zona de buena definición una deformación que corresponde a una imagen simétrica y reducida



donde se concentra parte de la luz y el resto se distribuye constituyendo un halo de poca intensidad.

También en el eje la posición de la mejor imagen corresponde a una distribución en que parte de la luz se concentra en un punto y el resto se distribuye en un halo suave que rodea a la imagen central.

La calidad de la imagen empeora rápidamente al alejarnos de la sagital y aproximarnos a la curva media, llegando incluso a hacerse inapreciable la forma de las figuras de los test en las proximidades de la focal tangencial (ver fot. 11, serie III y fot. 21, serie IX).

Como puede deducirse de todo lo dicho anteriormente, para instrumentos afectados de coma es mejor la calidad de la imagen cuando la luz procedente de un punto se halla concentrada en parte en una imagen muy reducida y simétrica, con tal que el resto esté dispersa en una zona grande de poca intensidad, que cuando la luz se distribuye uniformemente en un área menor (ver fot. 8 y 18 para los test del borde).

Todas estas observaciones se comprueban análogamente en el estudio del objetivo núm. 2 (series VI y VII, gráf. 16 y 17), pues si bien este sistema está más corregido que los anteriores, la posición de la mejor imagen corresponde también a distribuciones de luz análogas a las descritas anteriormente (ver fot. 12 y 13).

Comparando las gráficas 16 y 17 se ve que el desplazamiento sufrido por la curva de mejor imagen al abrir el diafragma ha sido del orden de 1 mm. para el borde y en el sentido de la luz incidente. Aunque para este sistema óptico no hemos podido hallar las curvas de referencia, sí podemos hacer constar que el astigmatismo en el borde del campo es del orden de 2 mm., estando la sagital más separada del objetivo que la tangencial. Por tanto este estudio confirma también el hecho de que la mejor imagen se desplaza hacia la sagital al intervenir el coma, aunque haya cromatismo.

La serie IV realizada en las mismas condiciones que la serie III nos lleva a la conclusión de que el fenómeno es totalmente reproducible; obsérvese la coincidencia de las curvas de mejor imagen (gráf. 14 y 13) halladas en una y otra serie.

De la comparación de la serie III, gráf. 13 y de la serie V, gráf. 15, las dos con el mismo sistema óptico pero la primera con una iluminación de 100 lux y la segunda de 40 lux, vemos total coincidencia entre las curvas de mejor imagen y deducimos que es invariable la posición de óptima definición para diferentes iluminaciones del objeto, puesto que si bien hemos rebajado la iluminación, hemos aumentado el tiempo de exposición para que la fotografía resulte agradable al observador.

Así, para todo el estudio realizado con los demás objetivos, hemos hecho las pruebas con una única iluminación del objeto.

#### *Observaciones sobre el poder separador*

Como ya se ha indicado anteriormente en la descripción del procedimiento llevado a cabo para medir las diversas magnitudes en estudio, para el poder separador las observaciones se realizan sobre test de Foucault colocados en dos series que cubren todo el campo, una con las barras en direcciones radial y transversal y otra cuyas barras forman  $45^\circ$  con el radio.



El criterio seguido para juzgar el poder separador en los test cuyas barras estén en dirección radial y transversal, ha sido considerar la mira mínima que aparece resuelta en ambas direcciones, advirtiendo en todas las tablas de valores aquella dirección en la que se separa mejor y hasta qué valor. Higgins (4) utiliza como valor del poder separador la media geométrica entre el número de líneas/mm. separadas en dirección radial y el correspondiente en dirección transversal.

Hemos aplicado este criterio en nuestro estudio y las curvas de mejor poder separador medido por él tienen menos continuidad en algunos casos que la obtenida por el criterio primeramente mencionado.

Para objetivos núm. 1 y núm. 2, es grande la dispersión de valores pero en el objetivo núm. 3 coincide la posición de mejor poder separador al hallarla por el criterio de Higgins con la obtenida, teniendo en cuenta el valor de la mira mínima en que quedan resueltas las barras.

Siendo que el criterio de la media geométrica no añade nueva información y en algunos casos es discordante, hemos representado en las gráficas únicamente las posiciones de mejor poder resolutivo al considerar que la mira esté separada a la vez en ambas direcciones.

Al observar las tablas y las gráficas y comparar la resolución con las demás magnitudes, vemos en primer lugar que en general las posiciones de mejor poder separador no coinciden exactamente con las de mejor definición.

Con pequeña abertura, series I, II y VIII (ver tablas correspondientes), vemos que a la zona comprendida entre las focales corresponde buen poder separador. Hasta la mitad del campo hay buena coincidencia entre las posiciones de mejor poder separador y las de mejor imagen, separándose más las curvas correspondientes para ángulos de campo superiores en los cuales la curva de mejor poder separador medido en los test cuyas barras tienen dirección radial y transversal, permanece más próxima a la de mejor imagen. En las gráf. 14, 19 y 20 y en las tablas correspondientes comprobamos que el trabajar con test de contraste inferior, no nos conduce a una mejor coincidencia entre el poder separador y la calidad de la imagen, ya que vemos que para los ángulos de campo mayores no se desplaza la curva de poder separador obtenido en test de contraste bajo de la correspondiente a contraste alto. Quizá esto se daba a que el contraste no se ha rebajado suficientemente.

En la zona comprendida entre la curva de mejor poder separador y la curva de sagitales, están mejor separadas las barras radiales que las transversales (ver tablas 2 y 19), como era de esperar a la vista de la forma alargada en dirección radial que tienen en esa zona las imágenes de un foco puntual. Ocurre lo contrario al desplazarse hacia las tangenciales.

En la serie VI, objetivo núm. 2, con diafragma de 5 mm. de radio se observa en las tablas correspondientes que las barras transversales están mejor separadas en las posiciones más próximas al objetivo que las radiales, comprobando así que las focales sagitales se forman para este objetivo por detrás de las tangenciales en el sentido de la luz incidente.

Al abrir el diafragma, las curvas de poder separador (gráf. 11, 13 y 20) se desplazan hacia las sagitales, permaneciendo al mismo lado de la mejor imagen que cuando la abertura era pequeña. Para el objetivo núm. 3,



con diafragma de 15 mm. (gráf. 20), las curvas de poder separador coinciden con las de mejor imagen.

En estas series de abertura grande hay también una zona de buen poder separador a los dos lados de las curvas representadas en las gráficas, pero éste decrece rápidamente conforme nos desplazamos hacia las curvas medias y tangenciales.

En cuanto a los resultados del poder separador, presentan una anomalía al ser observados sobre las fotografías de los test cuyas barras están en dirección radial y transversal; así, en la serie III (tabla 7) para ángulos de campo hasta  $7^\circ$  las barras tangenciales están mejor resueltas por delante de la posición del óptimo poder separador, al contrario de lo que sucedía en las series I y II; para ángulos superiores a  $7^\circ$  las barras radiales están mejor resueltas que las transversales en toda la zona próxima a la posición del mejor poder separador. En la serie VII, con objetivo núm. 2, para todo el campo se ven mejor separadas las barras transversales en la zona anterior a la mejor resolución, en ésta son las radiales las más separadas y pasada dicha zona las transversales vuelven a estar mejor resueltas. En la serie IX, con el objetivo núm. 3, las barras transversales aparecen mejor separadas para posiciones más alejadas del objetivo que las de óptima resolución, siendo las radiales las que aparecen mejor separadas por delante de la curva. También al contrario de lo que sucedía con abertura pequeña para la serie VIII.

Las imágenes puntuales nos aclaran estas anomalías. Como ya hemos dicho, el coma produce una deformación asimétrica en la mancha imagen, dando lugar a una zona irregular de luz concentrada y un halo más o menos débil que prolonga la imagen. Esta intervención del coma hace que la máxima simetría y concentración de luz coincida con la zona próxima a la sagital. Por consiguiente, tanto la mejor imagen como el poder separador se desplazan hacia esas posiciones al existir aberración de coma. La anomalía que se observa en los resultados del poder separador dependiendo de la dirección que tengan las barras del test, se debe a esta deformación en la distribución de la luz causada por el coma, ya que si bien por el astigmatismo correspondería, en la zona anterior a la sagital, a cada objeto puntual una mancha elíptica alargada en la dirección radial, al intervenir el coma se pierde esta simetría y la figura correspondiente a la máxima concentración, en aquellas posiciones en que las barras transversales quedan mejor resueltas que las radiales, tiene la dimensión transversal mayor que la radial.

Si bien en este estudio hemos comprobado que el valor del poder separador no da cuenta exacta de la calidad de la imagen, sí podemos decir que el observador encuentra siempre la mejor definición en la zona en que el valor del poder separador es bastante bueno.

#### *Observaciones sobre los valores de la acutancia*

Se han determinado los valores de la acutancia, que como ya hemos indicado se corresponden con la nitidez de líneas de una fotografía. Este estudio se ha llevado a cabo solamente con tres de las series realizadas, hallando en el microdensitómetro las curvas de densidad-distancia para



cada lado del cuadrado del test, repitiendo la operación para los diferentes test que corresponden a distintos ángulos de campo y para todas las posiciones de la placa. Sobre dichas curvas se han medido los gradientes y de allí la acutancia como hemos indicado anteriormente. En las tablas se representan los resultados finales, simplificados para cada serie.

Se comprueba (ver gráf. 10, 13 y 16) que el máximo valor de la acutancia no corresponde siempre exactamente a la posición de la mejor imagen, pero sí podemos apreciar que en general la zona de buena definición tiene buena nitidez o acutancia.

En la serie I (gráf. 10, tabla 3) la zona de valores altos de la acutancia se halla entre las curvas de focales, desplazada hacia las sagitales y para los ángulos de campo mayores no es elevado el valor de la acutancia en las posiciones de mejor definición.

Para la serie VI (tabla 15, gráf. 16), también con pequeña abertura, se observa coincidencia de los lugares de mejor acutancia con la zona donde está el mejor poder separador y la mejor imagen.

En la serie III (tabla 8, gráf. 13), con diafragma de 15 mm., la curva de mejor nitidez se desplaza totalmente hacia la zona de las sagitales y coincide con las posiciones de mejor imagen, principalmente para los test extremos.

No obstante, podemos observar en las tablas de valores de acutancia que hay bastante dispersión en los resultados, no siendo continua la curva que resultaría de dibujar las posiciones óptimas.

Se debe a que la acutancia, lo mismo que la impresión de nitidez no es tan crítica como para ser mucho mejor en el sitio en que el valor es más alto, pudiendo introducirse en la medida todos los errores correspondientes al cálculo de pendientes. Es más informativo considerar para cada ángulo de campo como zona de buena acutancia aquella en que los valores de ésta son mayores y muy próximos entre sí, correspondiendo a muy pequeñas variaciones en la impresión de nitidez.

Así, podemos observar que la zona de buena acutancia está donde la imagen es de buena calidad y el poder separador elevado, desplazándose hacia la sagital cuando crece la abertura.

Sin embargo, y a la vista de las gráficas y las tablas de valores no podemos decir que la acutancia sea un criterio exacto para la calidad de la imagen. En ésta intervienen el poder separador y la nitidez conjuntamente.

También hemos probado otros criterios para la determinación de la posición de óptima acutancia, al igual que se ha hecho en el estudio del poder separador. El criterio de tomar como posición óptima de la acutancia para cada ángulo de campo, aquel plano imagen en que la acutancia medida en cada uno de los cuatro lados del cuadrado, tiene como valor inferior uno superior al de las correspondientes posiciones próximas, nos conduce a una curva con mayores desajustes y discontinuidad que la obtenida al seguir el criterio anterior. Tampoco es informativo tomar el valor medio de la acutancia en los lados radiales del cuadrado y el correspondiente valor medio de los tangenciales, haciendo que aun el menor de ellos sea superior al de las posiciones próximas. Con este criterio no se llega tampoco a un mejor ajuste de la curva de acutancia con la de mejor imagen, viendo que el más informativo es el criterio de Higgins, anteriormente



mencionado y que es el que se ha utilizado en este trabajo, dando para cada posición del plano imagen y cada ángulo de campo el valor promedio de la acutancia medida en los cuatro lados del test, estando este valor relacionado con la impresión de nitidez.

## DIAGRAMAS DE PUNTO Y FUNCIÓN DE CALIDAD

### *Diagramas de puntos*

Pretendemos en esta parte del trabajo realizar en primer lugar un estudio de la concordancia existente entre las imágenes de los focos puntuales en las placas experimentales y los diagramas de puntos correspondientes. Estos diagramas no son sino los impactos que en cada plano imagen da una serie de rayos procedentes de un mismo punto objeto, que atraviesan la pupila útil repartidos uniformemente en ella. Para obtener estos diagramas nos hemos valido de un programa de cálculo realizado para un calculador electrónico IBM 1620. El manejo de este programa exige el conocimiento de los radios de curvatura, espesores, índices, tamaños de las lentes y de los diafragmas del sistema óptico.

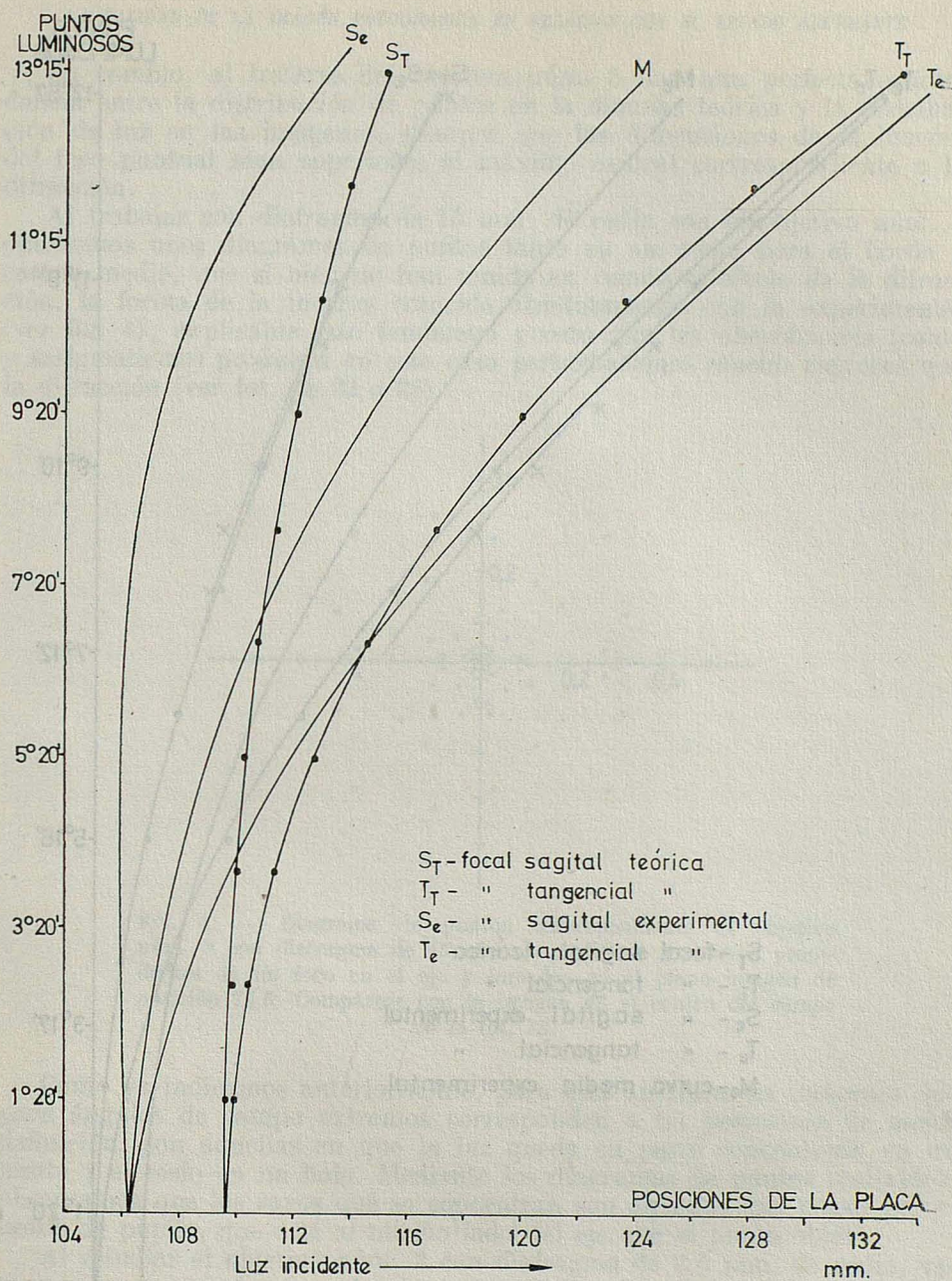
Por otra parte se trata de hallar una función matemática que esté relacionada con la calidad de la imagen.

Mediante los proyectos de los sistemas ópticos utilizados en este trabajo, hemos obtenido las posiciones teóricas de las focales sagitales y tangenciales para los diversos ángulos de campo. Representando sobre una gráfica dichas posiciones halladas teórica y experimentalmente por separado, vemos que no coinciden si se trata del objetivo núm. 1 (gráf. 21), pero en cambio hay buena concordancia en las correspondientes al objetivo núm. 3 (gráf. 22). Las desviaciones que aparecen en este último para la zona próxima al eje son debidas a la contribución de la difracción y a la existencia de aberración esférica en la observación experimental, puesto que si bien se realiza ésta cerrando la abertura, el tamaño de la pupila es siempre finito. De aquí que la imagen de menor tamaño en eje, aún con pequeña abertura, no coincide exactamente con el foco paraxial.

En cada objetivo se realiza un estudio teórico en el que para cada tamaño de diafragma y cada ángulo de campo obtenemos, en todos los planos imágenes en los que se han realizado fotografías experimentales, los diagramas de puntos correspondientes.

Al comparar estos diagramas con las imágenes experimentales obtenidas de un foco puntual sobre las placas, observamos que para el objetivo número 1 hay una pequeña discordancia análoga a la ya mencionada al tratar de las posiciones de las focales sagitales y tangenciales obtenidas teórica y experimentalmente. Todo esto nos lleva a pensar que el proyecto de este objetivo no es el que corresponde exactamente al sistema óptico con que hemos trabajado experimentalmente, pudiendo ser que al realizarlo se hayan modificado en parte los datos dados por el proyectista, modificación que causa las perturbaciones mencionadas.

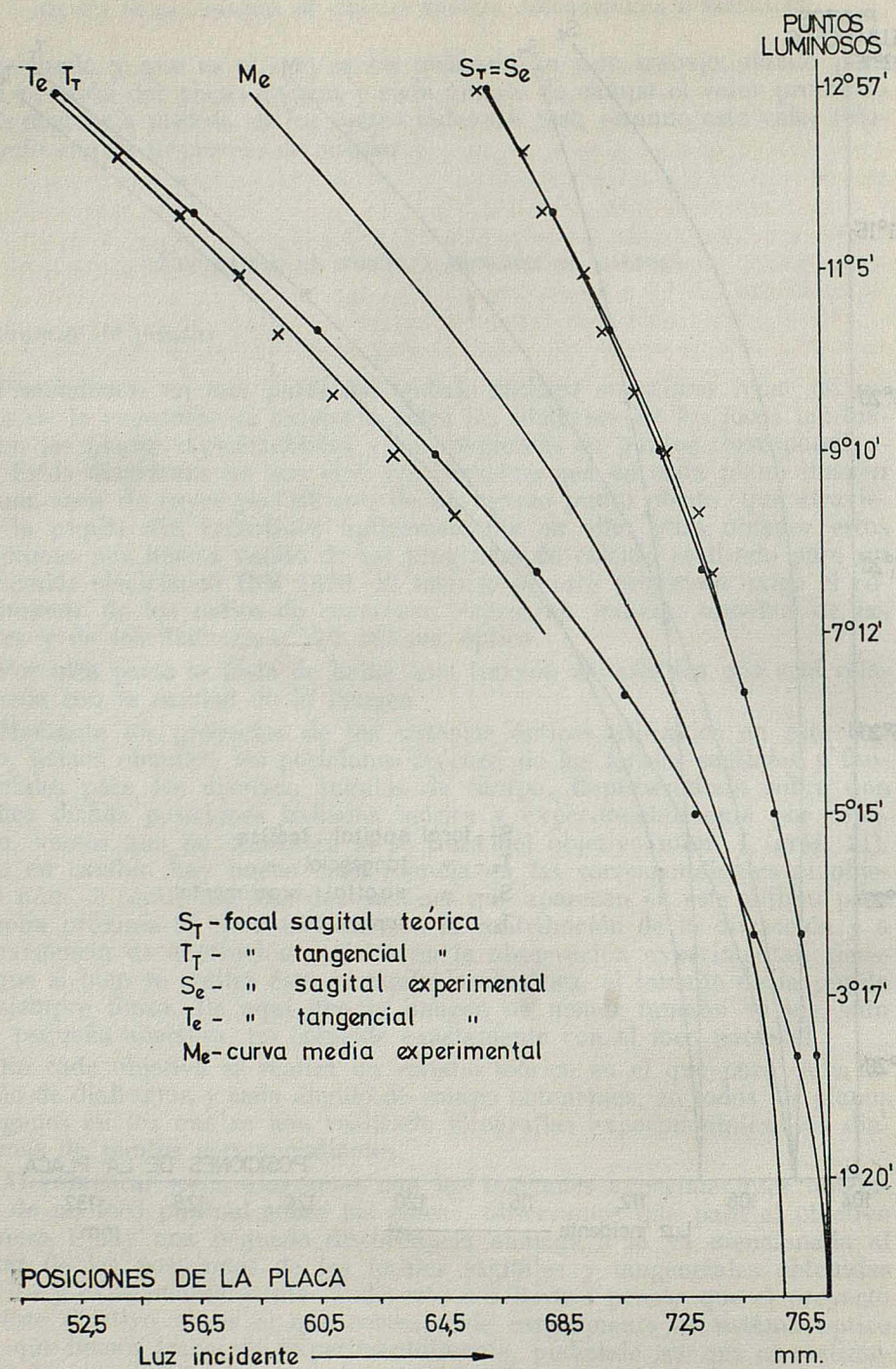




Objetivo 1

GRÁFICA 21





Objetivo 3

GRÁFICA 22



En cambio, al tratarse del objetivo núm. 3 hay una perfecta concordancia entre la distribución de puntos en la mancha teórica y la distribución de luz en las imágenes, siempre que las dimensiones de la imagen del foco puntual sean superiores al máximo central correspondiente a la difracción.

Al trabajar con diafragma de 15 mm. de radio con el objetivo núm. 3 obtenemos unos diagramas de puntos tanto en eje como para el borde y campo medio, que si bien no han tenido en cuenta el efecto de la difracción, la forma de la imagen coincide absolutamente con la experimental (ver fig. 4); explicable este fenómeno puesto que las aberraciones (coma y astigmatismo) producen en este caso perturbaciones mucho mayores que la difracción (ver fot. de 22 a 28).

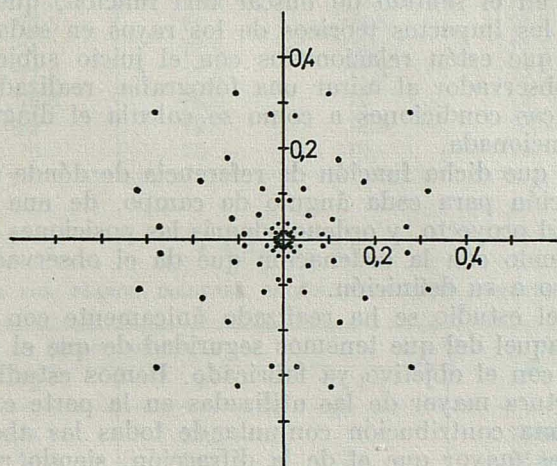


FIG. 4. — Diagrama de puntos correspondiente al objetivo núm. 3 con diafragma de 15 mm. Impactos de los rayos procedentes de un foco en el eje y tomados en el plano imagen de posición 75,5. Compárese con la imagen en el centro del campo de la fot. 18.

Como ya indicamos anteriormente, para esta abertura las imágenes que para ángulos de campo extremos corresponden a las posiciones de mejor definición, son aquellas en que la luz queda en parte concentrada en un punto y el resto en un halo. Mediante los diagramas de puntos realizados, observamos que los rayos que se concentran son aquellos que pasan por el borde de pupila, que está al mismo lado del eje que el punto objeto.

Al estudiar el objetivo núm. 3 con diafragma de 2,5 mm. de radio, vemos buena concordancia entre la forma de los diagramas de puntos y las imágenes experimentales, si se trata del campo extremo. En ellas las dimensiones son todavía superiores al tamaño del máximo de difracción correspondiente a esta abertura; la deformación sagital coincide perfectamente con aquella posición elegida sobre las placas y análogamente sucede con la tangencial. En el punto medio entre ambas focales la forma del diagrama de puntos es romboidal pero menos estrellada que en las placas,



fenómeno éste debido al efecto de la difracción (23) que se suma a las aberraciones.

Al comparar las imágenes teóricas y experimentales en eje, para esta abertura, el tamaño de los diagramas es del orden de la difracción y obtenemos, debido a su influencia, cierta discordancia en cuanto a sus dimensiones.

### *Función de calidad*

Tras haber comprobado la relación existente entre las imágenes puntuales sobre las placas y los diagramas de puntos, queremos proseguir nuestro estudio en el sentido de buscar una función, que aplicada a las coordenadas de los impactos teóricos de los rayos en cada plano imagen, nos dé valores que estén relacionados con el juicio subjetivo de calidad que recibe un observador al mirar una fotografía, realizada experimentalmente en idénticas condiciones a como se calcula el diagrama de puntos y la función mencionada.

Pretendemos que dicha función dé referencia de dónde se halla la zona de mejor definición para cada ángulo de campo, de una manera teórica calculada sobre el proyecto, y ordene además las posiciones de mejor a peor calidad coincidiendo con la ordenación que da el observador de las fotografías en cuanto a su definición.

Esta parte del estudio se ha realizado únicamente con el objetivo número 3 por ser aquel del que tenemos seguridad de que el proyecto coincide exactamente con el objetivo ya fabricado. Hemos estudiado dicho objetivo con la abertura mayor de las utilizadas en la parte experimental, ya que así existe una contribución conjunta de todas las aberraciones, y el efecto de éstas es mayor que el de la difracción, siendo representativo el estudio geométrico del fenómeno.

En primer lugar se ordenan en cuanto a su definición las fotografías correspondientes al test de borde (ángulo  $12^{\circ}57'$ ) para las distintas posiciones de la placa. Varios observadores realizan esta comparación llegando independientemente a los resultados expuestos en la Tabla 24 en las cuatro primeras columnas.

TABLA 24

ORDENACIÓN DE LOS PLANOS IMÁGENES SEGÚN SU CALIDAD, ÁNGULO DE CAMPO  $12^{\circ}57'$   
(CAMPO EXTREMO)

Observadores				F	Valores de F
1.º	2.º	3.º	4.º		
72	74	74	72	74	13,51
74	72	72	74	72	12,17
75,5	75,5	75,5	75,5	75,5	9,55
70	70	70	70	70	8,74
76,5	68	76,5	76,5	76,5	6,61
68	76,5	68	68	68	6,0



De forma análoga se clasifican las fotografías correspondientes al test de campo medio (ángulo  $6^{\circ}30'$ ) y aquellas del centro, obteniendo los resultados expuestos en las Tablas 25 y 26, respectivamente.

TABLA 25

ORDENACIÓN DE LOS PLANOS IMÁGENES SEGÚN SU CALIDAD, ÁNGULO DE CAMPO  $6^{\circ}30'$   
(CAMPO MEDIO)

Observadores				F	Valores de F
1.º	2.º	3.º	4.º		
75,5	75,5	75,5	75,5	75,5	29,14
76,5	76,5	74	76,5	76,5	27,76
74	74	76,5	74	77,5	19,51
77,5	77,5	77,5	77,5	74	19,45
72	78,5	78,5	72	72	12,72
78,5	72	72	78,5	78,5	12,59
70	70	70	70	70	9,88

TABLA 26

ORDENACIÓN DE LOS PLANOS IMÁGENES SEGÚN SU CALIDAD, ÁNGULO DE CAMPO  $0^{\circ}$

Observadores				F	Valores de F
1.º	2.º	3.º	4.º		
75,5	74	75,5	75,5	75,5	41,83
74	75,5	74	74	76,5	32,24
76,5	76,5	76,5	76,5	74	31,17
72	77,5	72	72	72	22,15
77,5	72	77,5	77,5	77,5	21,13
70	78,5	70	70	78,5	12,18
78,5	70	78,5	78,5	70	2,69

*Explicación.* — Los números de las 5 primeras columnas representan posiciones del plano imagen. En las 4 primeras figuran numeradas de arriba a abajo, tal y como han sido ordenadas en cuanto a su definición de mejor a peor las fotografías correspondientes por cuatro observadores distintos. En la columna 5.ª se escribe la ordenación de los planos imágenes, de acuerdo con los valores que toma  $F$  en los diagramas de puntos correspondientes, y en la columna 6.ª figuran los valores de  $F$  pertenecientes a esos mismos diagramas. La función  $F$  utilizada es la descrita en [2].

En las tablas mencionadas se observa buena coincidencia en la ordenación llevada a cabo por cada observador, y si bien en algunos casos hay alguna perturbación en el orden de los planos imágenes, es porque en ellos la definición es muy parecida.

Hemos visto en la parte experimental de este trabajo que si el sistema óptico tiene coma y aberración esférica, el observador elige la posición



de mejor definición donde la imagen de un foco puntual corresponde a una mancha pequeña de gran concentración y un halo de densidad débil que le rodea. Nos interesa en primer lugar, hallar en cada diagrama la posición de mayor concentración de puntos que equivale en la imagen al centro de la pequeña mancha densa, lugar representativo en la imagen del objeto puntual. Como los diagramas de puntos tienen simetría respecto al eje Y, contenido en el plano meridiano, hay que buscar alrededor de qué punto de dicho eje se concentra la luz.

Una forma lógica de encontrar la posición de mayor concentración en cada diagrama sería hallar el punto del eje Y del plano imagen alrededor del cual se encuentra un número de impactos máximo dentro de un círculo de radio dado. Para determinado valor del radio, se explora el diagrama, obteniendo el punto del eje Y que nos marca el centro de concentración. Variando el radio del círculo de exploración llegamos en algunos diagramas a resultados distintos.

Hemos tomado como valor adecuado del radio del círculo el correspondiente al tamaño de la mancha de máxima concentración en la imágenes de las posiciones de buena definición. Con este tamaño de círculo se exploran todos los diagramas correspondientes al mismo ángulo de campo. Para imágenes en las que la luz está repartida con bastante uniformidad (ver fotografía 20 en el borde del campo) y dada la discontinuidad que lleva consigo siempre un diagrama de puntos, obtenemos como centro de concentración en algunos casos el vértice de la imagen, no siendo este punto representativo de la posición en que se forme la imagen del punto objeto. Por eso, aún cuando el programa sea correcto no nos es válido para nuestro propósito.

De todos los criterios utilizados para la determinación del centro de concentración de luz en un diagrama de puntos, el más concordante con los resultados experimentales ha sido hallar con la misma función matemática la posición del centro de la mancha brillante y la calidad de la imagen. Obvio es decir que si el diagrama de puntos tiene simetría central, caso de imágenes en el eje, se toma el origen de coordenadas como centro de concentración de luz.

Basándonos en la forma de la imagen de un foco puntual en las posiciones en que el observador elige la mejor definición, deducimos que la función de calidad tiene que ser de una forma tal que conceda gran importancia a aquellos puntos o impactos próximos al de máxima concentración. De aquí, que podría servir como función de calidad una expresión del tipo

$$F = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i^n} \quad [1]$$

de donde  $n$  es un número entero cualquiera,  $N$  el número de impactos con que se trabaja, y  $R_i$  la distancia del impacto  $P_i$  al punto que se toma como origen.

En cada diagrama de puntos se halla el valor de la función tomando como origen un punto cualquiera del eje Y, repitiendo la operación a intervalos arbitrarios y constantes en dicho eje, al comparar los valores correspondientes a tomar como orígenes todos los puntos del eje Y elegidos:



en el interior de la imagen, se toma como centro de concentración aquel punto alrededor del cual se hace máxima la función y el valor de ésta, marca la calidad del diagrama de puntos correspondiente.

Dado que una función matemática del tipo (1) puede conducirnos a error para distribuciones de impactos que tengan alguno de ellos aislado muy próximo al eje Y, ya que para esa coordenada de Y la función se haría máxima, pudiendo no corresponder dicho punto al centro de concentración, ni ser ese diagrama el perteneciente a la posición de calidad óptima. Nosotros para evitar dichos errores prescindimos de las distancias de los puntos al eje, que sean inferiores a una cota  $A$  previamente establecida. Podíamos haber prescindido de los puntos que cumplan  $R_i < A$ , sin embargo esto no es correcto puesto que ellos contribuyen también a una mayor concentración de luz en la mancha imagen. Sin embargo nos ha sido útil tomar para todos los puntos en que  $R_i < A$ ,  $R_i = A$ .

El sentido físico de esta cota  $A$  radica en el hecho de que una vez fijado un tamaño del punto brillante, dado por un círculo de radio  $A$ , les asignamos a todos los puntos que caen dentro de ese radio el mismo valor  $A$  y así, todos intervienen con el mismo peso en la suma que constituye la función de calidad. Todos los impactos que caen en el interior de ese círculo contribuyen a una mayor intensidad del punto brillante, pero la definición de la imagen es combinación del tamaño del punto brillante y de la intensidad de éste. Pretendemos con un valor de  $A$  determinado hacer válida una función del tipo [1] para indicar la calidad de todos los diagramas de puntos.

Se ha llevado a cabo el estudio de la elección de esta función de calidad mediante programas de cálculo realizados para IBM 1620. En principio hemos trabajado con exponentes  $n = 1, 2, 3$ ; para mayores valores de  $n$  la función [1] es tal que los sumandos disminuyen tan rápidamente al aumentar  $R_i$  que da un peso insignificante a la mayor parte de los puntos del diagrama. Estas tres funciones se aplican reiterativamente a todos los diagramas de puntos correspondientes a cada ángulo de campo en estudio. Repetimos esta operación para distintos valores de la cota  $A$ .

De los resultados obtenidos observamos que con cada una de las funciones y para cada valor de  $A$ , la ordenación de los planos imágenes en cuanto a calidad es diferente pudiendo decir que  $\sum_i \frac{1}{R_i^2}$  con  $A = 0,03$  mm.

es la función que mejor concuerda con los datos experimentales, tanto en la determinación del centro de concentración para cada diagrama de puntos, como en la ordenación respecto a la calidad de éstos. Para que esta función sea homogénea e independiente del número de impactos se normaliza de la siguiente manera

$$F = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{A^2}{R_i^2} \quad [2]$$

donde  $N$  es el número de impactos con que se trabaja.

Las Tablas 24, 25 y 26 representan la ordenación de los planos imágenes de acuerdo con la función de calidad para el campo extremo, medio campo y eje respectivamente (5.ª columna); al lado figuran los valores de es-



ta función en cada uno de ellos. Vemos que esta ordenación según la calidad marcada por la función matemática antes mencionada está de buen acuerdo con aquella realizada por los observadores. Las pequeñas alteraciones en el orden de algunos planos imágenes consecutivos en la ordenación en cuanto a su calidad, tanto en la observación visual como en la determinación teórica, son debidas a la gran semejanza en la definición de la imagen en ellos, siendo apreciable que los valores que toma la función de calidad [2] en los diagramas correspondientes son del mismo orden.

En las fotografías de 22 a 28 se observa en diversas posiciones y para cada ángulo de campo, el diagrama de puntos teórico y la imagen experimental de un foco puntual, realizada en idénticas condiciones, viendo la coincidencia existente entre ambos. A la par se han ampliado las fotografías de los test realizadas también en idénticas condiciones que los diagramas, para así poner de manifiesto la calidad de la fotografía que corresponde a cada uno de ellos, haciendo figurar al pie, en cada caso, el valor de la función de calidad [2] correspondiente.

Al hablar de la elección de la función de calidad, hemos mencionado la intervención que tiene en ella el valor de la cota  $A$ . Entre los valores utilizados en nuestro estudio figuran aquellos deducidos de las condiciones de trabajo con que se ha llevado a cabo la parte experimental. Así, el primero estudiado es el correspondiente al tamaño del máximo central de difracción del objetivo con el diafragma de 15 mm., siendo en este caso  $A = 0,006$  mm. La función [2] con este tamaño para la cota no nos condujo a resultados que estuvieran de acuerdo con la calidad de la imagen juzgada por los observadores. Si tomamos el valor de  $A$  correspondiente al poder separador del instrumento con que se observan las fotografías de los test,  $A = 0,015$  mm., los resultados obtenidos tampoco están de acuerdo con la ordenación prevista.

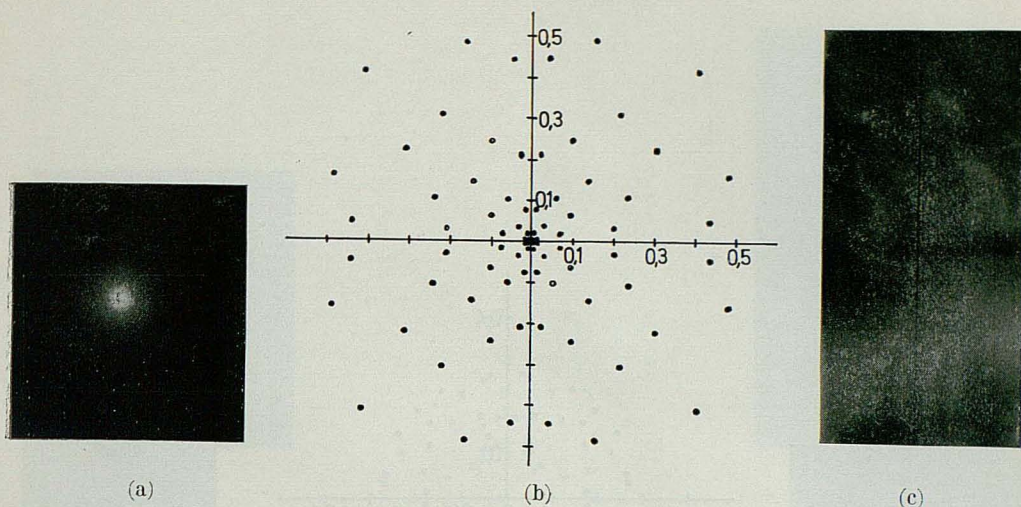
Si bien ninguna de las razones anteriores nos conducen a valores de  $A$  adecuados para que la función  $F$  de la forma 2 nos marque la calidad, ya hemos dicho que el valor  $A = 0,03$  mm. lleva a resultados que están de acuerdo con el juicio de definición que recibe el observador, y posteriormente hemos podido razonar la causa del valor de  $A$  mencionado.

Una vez determinada una función matemática que está bien relacionada con la calidad de la imagen [2], surge el pensar que puede no ser la única que dé un criterio adecuado de ordenación. Ya que la distribución de luz en la imagen de un foco puntual en las posiciones de buena definición, existiendo coma y aberración esférica, corresponde siempre a un punto brillante y un halo de luz débil, al pasar esta imagen por un microdensitómetro, la curva densidad-distancia tiene un máximo muy pronunciado y si el foco está en eje la imagen es simétrica, y el máximo coincide con el origen de coordenadas. Por lo tanto para aquellas distribuciones de luz correspondientes a posiciones de buena definición, la curva densidad-distancia tiene buena correspondencia con una función exponencial en forma de campana del tipo.

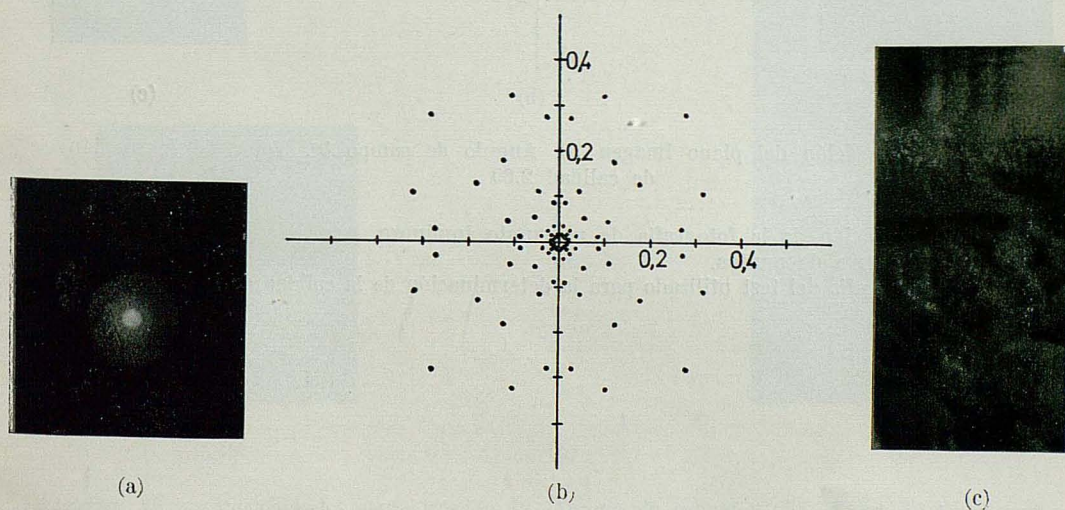
$$F = \frac{C}{e^{(R/A)^2}} \quad [3]$$

$C$  representa el valor de la función en el centro de concentración  $R = 0$  y





For. 22. — Posición del plano imagen 77,5. Angulo de campo 0°. Valor de la función de calidad 21,13



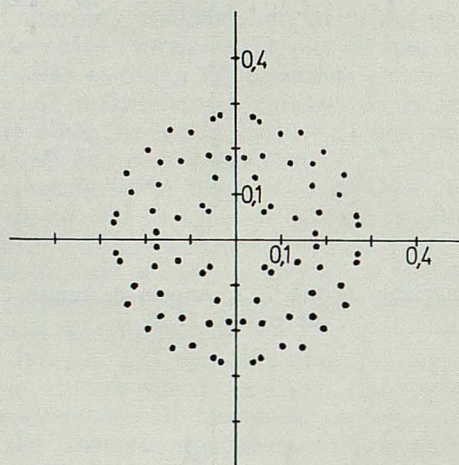
For. 23. — Posición del plano imagen 75,5. Angulo de campo 0°. Valor de la función de calidad 41,83

- (a) Ampliación de la fotografía de un punto luminoso.
- (b) Diagrama de puntos.
- (c) Fotografía del test utilizado para la determinación de la calidad de la imagen.

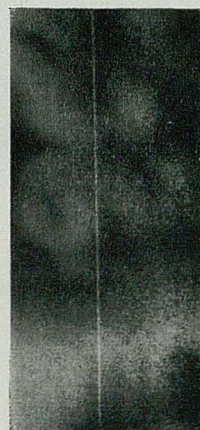




(a)



(b)

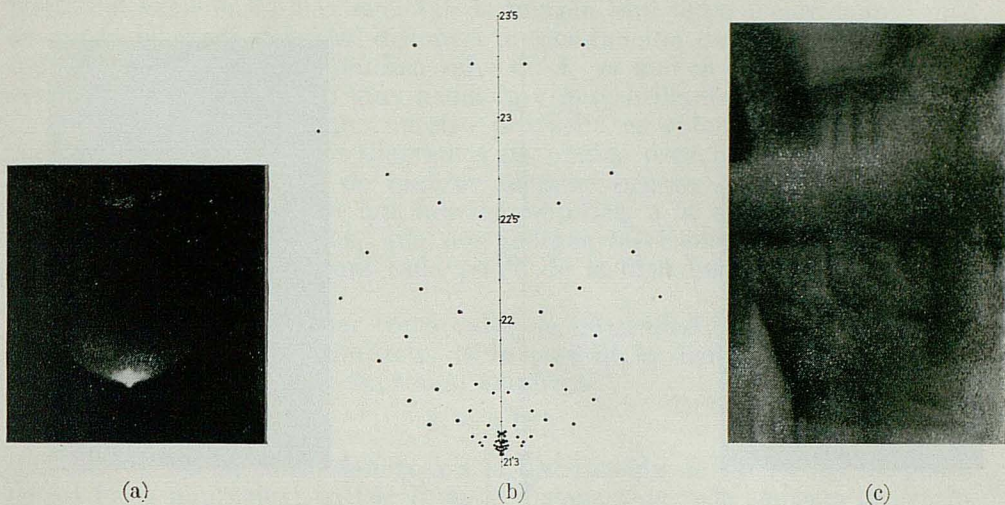


(c)

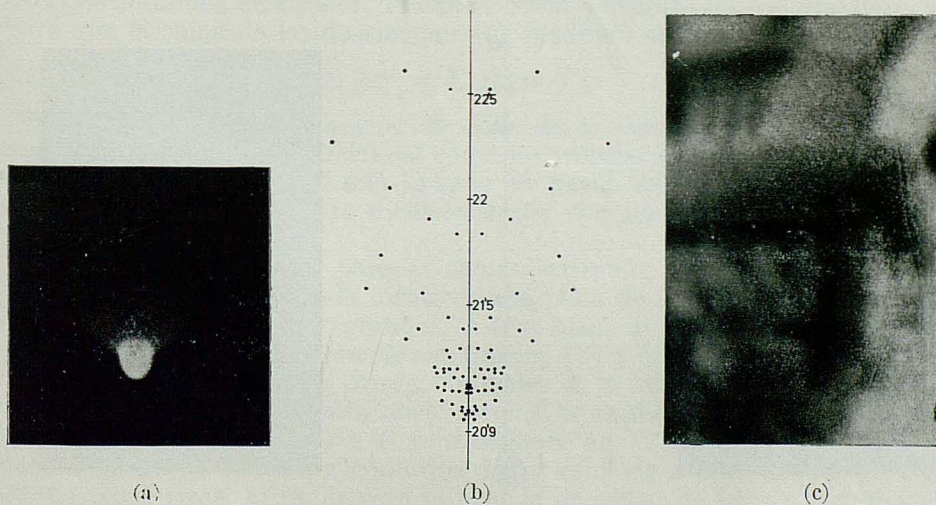
For. 24. — Posición del plano imagen 70. Angulo de campo 0°. Valor de la función de calidad 2,69

- (a) Ampliación de la fotografía de un punto luminoso.
- (b) Diagrama de puntos.
- (c) Fotografía del test utilizado para la determinación de la calidad de la imagen.





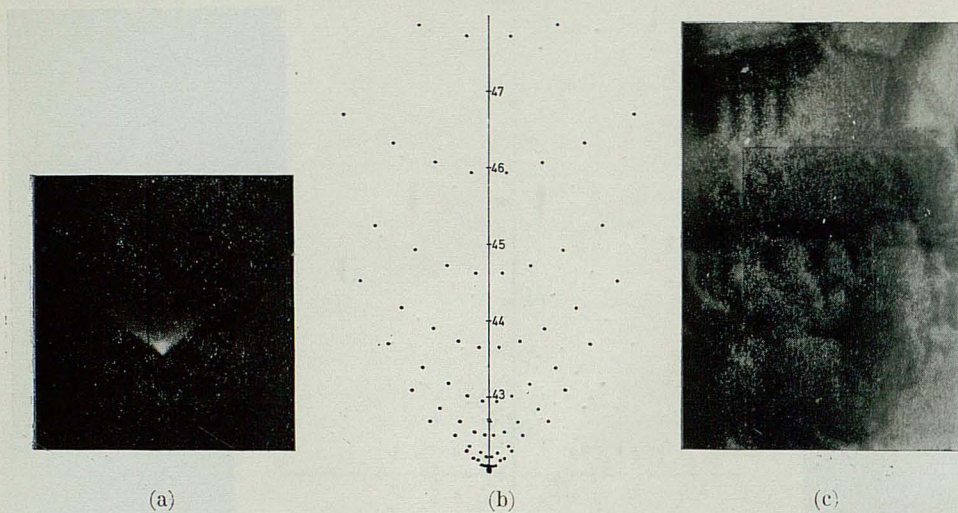
For. 25. — Posición del plano imagen 75,5. Angulo de campo  $6^{\circ}30'$ . Valor de la función de calidad 29,14



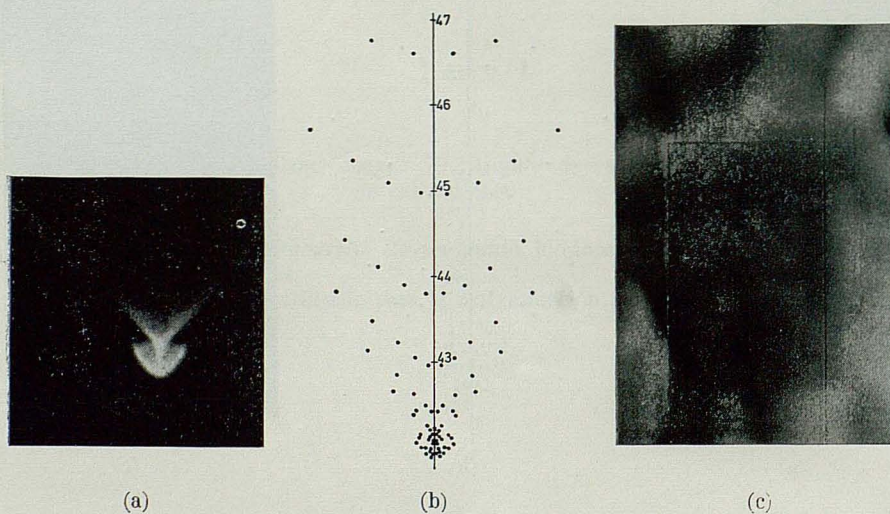
For. 26. — Posición del plano imagen 72. Angulo de campo  $6^{\circ}30'$ . Valor de la función de calidad 12,72

- (a) Ampliación de la fotografía de un punto luminoso.
- (b) D'agrama de puntos.
- (c) Fotografía del test utilizado para la determinación de la calidad de la imagen.





For. 27. — Posición del plano imagen 74. Angulo de campo  $12^{\circ} 57'$ . Valor de la función de calidad 13,51



For. 28. — Posición del plano imagen 68. Angulo de campo  $12^{\circ} 57'$ . Valor de la función de calidad 6,0

- (a) Ampliación de la fotografía de un punto luminoso.
- (b) Diagrama de puntos.
- (c) Fotografía del test utilizado para la determinación de la calidad de la imagen.



A el valor de la distancia  $R$  para el cual  $F$  se hace aproximadamente un tercio del valor en el máximo. Así, la imagen será tanto mejor cuanto más se ajuste la curva densidad-distancia a esta función exponencial, para un máximo valor de  $C$  y un mínimo valor de  $A$ , ya que en este caso la imagen corresponderá a un punto muy pequeño y muy brillante.

No obstante, puesto que nuestro propósito es obtener una función directamente aplicable a los diagramas de puntos para que se pueda juzgar la calidad sin necesidad de realizar ninguna prueba fotográfica, es para nosotros importante hallar una función empírica, a la vista de los impactos en el diagrama de puntos, que nos indique teóricamente el valor de la densidad en la imagen para cada punto de la distribución de rayos en el diagrama.

Se ha optado por tomar como valor de intensidad de luz en cada punto correspondiente a un impacto, la inversa de la distancia al más próximo, obteniéndose así una expresión empírica

$$E_i = f(R_i) \quad [4]$$

que está en buena concordancia con la distribución de luz en las imágenes de los focos puntuales; en [4]  $R_i$  es la distancia de cada impacto al centro de concentración.

Una vez obtenida la tabla de valores correspondientes a la expresión [4] para cada diagrama de puntos, se le ajusta una curva exponencial 3 por el método de mínimos cuadrados, tomando como variables los valores de  $C$  y  $A$  para que la suma de las desviaciones al cuadrado se haga mínima.

$$\sum \delta_i^2 = \sum (E_i - F_i)^2$$

En cada diagrama obtenemos el valor de la desviación final entre la curva empírica y la exponencial así como los valores de  $C$  y  $A$  para el ajuste máximo. Es de esperar que una imagen de buena calidad corresponderá a una desviación mínima entre dichas curvas, con un valor de  $C$  grande y un pequeño valor de  $A$ .

Al realizar este estudio para el campo extremo, como la distribución de densidad no es similar a la forma de campana de la función [3] quedan en los cálculos errores muy grandes. Ahora bien, al trabajar con las imágenes en el eje se ajusta fácilmente esa función [3] y se obtiene  $A = 0,03$  mm. en todas aquellas imágenes correspondientes a la zona de mejor calidad.

Mediante este razonamiento encontramos la explicación del valor de  $A$  adecuado para que la función  $F$  representada en [2] sea significativa en cuanto al juicio de calidad, viendo que dicho valor de  $A$  corresponde en las imágenes simétricas, al radio para el cual la densidad de luz se hace aproximadamente igual a un tercio del máximo.

Ya que el ajuste de la curva exponencial [3] a la de densidad de la imagen sólo nos conduce a resultados correctos al tratarse de imágenes con simetría central, damos definitivamente como función de calidad aquella de la forma [2] con el valor  $A = 0,03$  mm., cuyos resultados hemos visto que están totalmente de acuerdo con la experiencia, siendo por lo tanto significativa para juzgar la definición y comparar aquellas imágenes correspondientes a un mismo ángulo de campo.

Hemos proseguido el estudio comparando las imágenes correspondientes



al borde del campo, a media altura y en el eje entre sí. Todos los observadores han coincidido en la ordenación según el aspecto de definición de las imágenes; en la tabla 27 se dan los resultados de dicha comparación y al lado se indican los valores de la función  $F$  de la forma [2] aplicada a los

TABLA 27

ORDENACION SIMULTANEA DE LOS PLANOS IMAGENES PARA EL CAMPO EXTREMO (ANGULO  $12^{\circ} 57'$ , SUBINDICE 1), CAMPO MEDIO (ANGULO  $6^{\circ} 30'$  SUBINDICE 0,5) Y EJE (SUBÍNDICE 0). (COLUMNA 1.<sup>a</sup>)

VALORES DE  $F$  DE LA FORMA [2] QUE RESULTAN AL APLICAR LA FUNCION A LOS DIAGRAMAS DE PUNTOS CORRESPONDIENTES. (COLUMNA 2.<sup>a</sup>)

<i>Ordenación por los observadores</i>	<i>Valores de <math>F</math></i>
75,5 <sub>0</sub>	41,83
75,5 <sub>0,5</sub>	29,14
76,5 <sub>0,5</sub>	27,76
74 <sub>0</sub>	31,17
76,5 <sub>0</sub>	32,24
74 <sub>0,5</sub>	19,45
77,5 <sub>0,5</sub>	19,51
72 <sub>1</sub>	12,17
74 <sub>1</sub>	13,51
78,5 <sub>0,5</sub>	12,59
72 <sub>0,5</sub>	12,72

diagramas de puntos correspondientes. Se observa que dichos valores dan idea de la calidad relativa de las fotografías si se trata de las imágenes de borde y de media altura. Sin embargo, para las fotografías del eje obtenemos siempre valores superiores de la función, mientras que los observadores no las consideran en todos los casos como mejores en cuanto a su definición.

Como conclusión deducimos que la función teórica 2 estudiada en este capítulo nos da idea de la calidad y es capaz de comparar acertadamente las fotografías siempre que la forma de los diagramas de puntos correspondientes sea parecida. Así, podemos comparar aquellas de un mismo ángulo de campo y aún para diversos ángulos entre sí podemos extender la comparación siempre que no se trate del eje, donde la forma de la imagen difiere totalmente del resto por su perfecta simetría central.

Es de destacar la importancia de esta función matemática que aplicada a los impactos de los diagramas de puntos, obtenidos únicamente de los datos del proyecto, puede dar teóricamente una idea correcta de la calidad del instrumento, así como de las posiciones de mejor definición.



### CONCLUSIONES GENERALES

1.<sup>a</sup> En los objetivos fotográficos afectados de astigmatismo y coma, la zona de buena definición de la imagen cuando trabajan con pequeña abertura está centrada entre las focales sagital y tangencial, coincidiendo las posiciones óptimas con la curva media entre ellas.

2.<sup>a</sup> Al abrir la abertura e intervenir la luz aberrante sobre el astigmatismo, se deforma la imagen y la zona de buena calidad se reduce, desplazándose las posiciones óptimas hacia los lugares que para abertura pequeña se corresponden con las sagitales, llegando incluso a sobrepasar éstas para los ángulos de campo superiores. Este hecho es independiente del signo del astigmatismo.

3.<sup>a</sup> Al corregir un objetivo que vaya a trabajar con abertura constante, si ésta es grande bastaría con llevar las focales sagitales a un plano para que la curva de mejor imagen fuese también plana. Si fuera a actuar con abertura muy pequeña debe ser plana la curva media entre las focales. Ahora bien, si el objetivo es de abertura variable hay que corregir el astigmatismo para que en todo caso estén en un plano las posiciones de mejor foco.

4.<sup>a</sup> Las posiciones de mejor poder separador quedan desplazadas hacia la sagital respecto a las de mejor definición, cuando la abertura es pequeña.

5.<sup>a</sup> Para aberturas grandes las posiciones de mejor poder separador se desplazan hacia las focales sagitales quedando próximas a las de mejor definición y al mismo lado de éstas que en el caso de abertura pequeña.

6.<sup>a</sup> En general es más informativo el poder resolutivo medido en los test cuyas barras están en dirección radial y transversal.

7.<sup>a</sup> Al disminuir el contraste en los test de poder separador las posiciones óptimas no se acercan a las de mejor imagen quedando próximas a aquellas obtenidas con los test de contraste elevado.

8.<sup>a</sup> La curva de posiciones de mejor acutancia no coincide exactamente con la de buena definición; para pequeñas aberturas queda desplazada hacia las sagitales y para aberturas grandes se traslada con el poder separador y la mejor imagen hacia la zona de la sagital llegando incluso a sobrepasarla.

9.<sup>a</sup> Tanto el poder separador como la nitidez medida por la acutancia, no nos dan cada uno de por sí información correcta de la calidad de la imagen aún cuando en general se desplazan en una zona próxima, lo que indica que son parámetros independientes y pueden tomarse como criterios de valoración.

10.<sup>a</sup> La mejor definición corresponde a una forma de la imagen de los puntos luminosos en que parte de la luz se halla concentrada en un punto pequeño y simétrico, con un halo suave que lo rodea.

11.<sup>a</sup> Existe plena concordancia entre las imágenes experimentales de los focos puntuales y las figuras teóricas de los diagramas de puntos, siempre que el tamaño de la imagen puntual no sea comparable al de la difracción.

12.<sup>a</sup> Se halla una función matemática con una cota mínima en los valores de las distancias que aplicada a las coordenadas de los impactos de un diagrama nos indica el centro de concentración de puntos. Esta mis-



ma función sirve para valorar y ordenar los diagramas de puntos correspondientes a un mismo ángulo de campo en cuanto a la calidad o definición de la imagen fotográfica que se obtendría trabajando en idénticas condiciones a como se han realizado dichos diagramas.

13.<sup>a</sup> Se obtiene una explicación para el valor de la cota inferior de distancias utilizada al aplicar la función de calidad, correspondiendo dicho valor a la distancia al centro de concentración en que la densidad decrece a una tercera parte de su valor máximo.

14.<sup>a</sup> Se aplica la función de calidad para valorar y ordenar entre sí diagramas correspondientes a distintos ángulos de campo, obteniendo validez siempre que la forma de dichos diagramas sea similar, es decir que las aberraciones que intervengan sean de la misma clase.

### BIBLIOGRAFIA

1. L. E. HOWLETT: *Bases for testing photographic objectives*. Proc. of the N. B. S. Symp. on Opt. Imag. Eval. Ap. (1954).
2. E. W. H. SELWYN: *Theory of Resolving Power*. Proc. of the N. B. S. Symp. Opt. Imag. Eval. Ap. (1954).
3. R. E. HOPKINS, HOWARD KERR, THOMAS LAUROESCH y VANCE CARPENTER: *Measurements of Energy Distribution in Optical Imagen*. Proc. of the N. B. S. Symp. Opt. Im. Ev. Ap. (1954).
4. G. C. HIGGINS y R. N. WOLFE: J. Opt. Soc. Am. 45, 121 (1955).
5. O. H. SCHADE: *A New System of Measuring and Specifying Image Definition*. Proc. of the N. B. S. Symp. Opt. Im. Ev. Ap. (1954).
6. R. R. WOLFE y F. C. EISEN: J. Opt. Soc. Am. 43, 914 (1953).
7. G. C. HIGGINS y L. A. JONES: J. Soc. Motion Picture and Television Engrs, 58, 277 (1952).
8. Ver (4).
9. R. DEBOT: *Mesure de la granularite*.
10. J. H. ALTMAN: Applied Optics, vol. 3.º, n.º 1, pág. 35 (1964).
11. HENRY THIRY: Applied Optics, vol. 3.º, n.º 1, pág. 39 (1964).
12. E. HEYNACHER y FRITZ KOBER: Revista Zeiss (en español), año 12, n.º 51.
13. P. M. DIFFIEUX: *La integral de Fourier et ses applications a l'Optique*. Besançon (1946).
14. G. C. HIGGINS: Appl. Opt., vol. 3, n.º 1, Jan. (1964).
15. M. FRIESER y F. BIEDERMANN: Phot. Sci. Eng. 7, 28 (1963).
16. K. ROSENHAUER y K. H. ROSENBRUCH: Optik 3, 121 (1963).
17. A. H. KATZ: J. Opt. Soc. Am. 38, 604 (1948).
18. A. COUDER: Cahiers Phys. n.º 14, págs. 35-48, mayo (1943).
19. A. ARNULF: *Methods and Apparatus for Measuring Performance and Quality of Optical Instrumens*. Proc. of the N. B. S. Symp. Opt. Im. Ev. Ap. (1954).
20. J. CASAS, F. MERINO y S. VALDÉS: *Sobre la mejor imagen visual en presencia de aberraciones*. An. Soc. Esp. Fís. y Quím. T. LVII (A), pág. 231, núms. 9 y 10, septiembre-octubre (1961).
21. J. CASAS, S. VALDÉS y F. MERINO: *Sobre la mejor imagen visual en relación con el poder resolutivo*. An. Esp. Fís. y Quím. T. LX (A), pág. 73, núms. 3 y 4, marzo-abril (1964).
22. J. L. ARIAS: *Valoración visual e interferométrica de la imagen óptica*. Tesis Doctoral. (En próxima publicación).
23. F. ZERNIKE: *The diffraction Theory of aberrations*. Proc. of the N. B. S. Symp. Opt. Im. Ev. Ap. (1954).



## INFLUENCIA DE LOS ORDENES SUPERIORES DE LAS ABERRACIONES ESFERICA Y ESFEROCROMATICA EN LA CORRECCION DE UN SISTEMA OPTICO

P O R

J. CASAS, J. R. DE F. MONEO y RAMÓN GARCÍA CRISTÓBAL

### PROPÓSITO

En trabajos anteriores (1) y (2), se habían obtenido resultados que confirmaban la relación de linealidad existente, entre la aberración esférica de un sistema y su aberración esférica de tercer orden, obtenida a partir de la suma de Seidel, para esta aberración.

En algunos casos, la recta así determinada no pasa por el origen, como debía suceder al anularse la esférica de Seidel. Como ésta responde del tercer orden de la aberración, parecía lógico pensar que la desviación fuera ocasionada por órdenes aberrantes superiores al tercero.

La determinación de los órdenes elevados de aberración, cuando no imposible, es extremadamente complicada y en definitiva poco útil. Interesan por ello procedimientos aproximados que compensen en rapidez, lo que pudieran tener de menor exactitud.

En este trabajo pretendemos llegar a un método aproximado para obtener determinadas aberraciones, basándonos en la desviación ya indicada. Queremos encontrar un procedimiento para hallar la aberración esférica verdadera de un sistema, a partir de la ecuación de la recta antes mencionada. El método permitirá igualmente, la obtención de cada uno de los órdenes aberrantes por separado. Todo lo cual facilitará la corrección de un sistema, mediante el cálculo aproximado de su aberración esférica.

También veremos que la recta en cuestión es característica de cada tipo de sistema.

El método en principio podría aplicarse a todas las aberraciones que, como la esférica, guarden esta relación de linealidad. En nuestro trabajo veremos de la misma forma, que la aberración esferocromática está sujeta a idéntica variación y que también podremos obtenerla rápidamente, por un método análogo.

Una aplicación ulterior, permitirá corregir fácilmente estas aberraciones, para una altura determinada.



## EXPOSICIÓN DEL MÉTODO

La aberración esférica es un fenómeno de revolución con simetría respecto del eje. Por tanto, si la desarrollamos en serie de potencias, por ejemplo, de la altura de incidencia, obtendremos una serie, que, por simetría, sólo contendrá términos de grado par, por consiguiente tendrá la forma

$$E = a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + a_4 h^8 + \dots \quad [1]$$

donde  $E$  es la aberración esférica y cada uno de los sumandos representa los órdenes sucesivos de aberración:  $a_1 h^2$  el tercero;  $a_2 h^4$  el quinto;  $a_3 h^6$  el séptimo;  $a_4 h^8$  el noveno, etc. Evidentemente  $h$  representa la altura y cada uno de los  $a$  el coeficiente de su orden respectivo.

Como la aberración esférica es finita, la serie es convergente, y únicamente es infinita cuando el objeto está en el foco.

Utilizando la propiedad analítica de que en un polinomio de orden  $n$ , las diferencias enésimas son iguales, C. Morais (3) da un método para la investigación de los órdenes de aberración esférica de un sistema.

Supongamos un sistema óptico en el que sólo hay aberración de tercer orden. Obtengamos la abscisa de la imagen paraxial y las correspondientes a tres aberturas más,  $h$ ,  $2h$  y  $3h$ . En este caso la aberración será

$$E = a_1 h^2$$

tendremos

Aberturas	0	$h$	$2h$	$3h$
Abscisas	$s_p'$	$s_p' + a_1 h^2$	$s_p' + 4a_1 h^2$	$s_p' + 9a_1 h^2$
Dif. I		$a_1 h^2$	$3a_1 h^2$	$5a_1 h^2$
Dif. II			$2a_1 h^2$	$2a_1 h^2$

las diferencias segundas ya son iguales. De aquí resulta que el coeficiente de aberración esférica de tercer orden, si no hay otra aberración es

$$a_1 = \frac{\text{dif II}}{2! h^2} \quad [2]$$

Para el estudio de órdenes superiores se procede de manera análoga.

Para un sistema con séptimo orden, se hallan siete marchas para las alturas resultantes de dividir la altura máxima, en siete partes iguales. Se forma el cuadro de abscisas y se van obteniendo las distintas diferencias sucesivas. Según el método, si efectivamente no existiese más de un séptimo orden, las diferencias sextas serían iguales. El procedimiento indica además la aparición de los órdenes sucesivos de aberración esférica. Así, si una vez formado el cuadro de diferencias hasta la quinta altura, las diferencias cuartas son iguales, indica que hasta dicha altura, solamente existe aberración esférica de quinto orden o inferior; de la misma manera, si las diferencias segundas son iguales, hasta la tercera altura existe únicamente aberración esférica de tercer orden.



C. Morais utiliza también las diferencias para obtener los coeficientes de los distintos órdenes de aberración.

Del mismo modo que hemos hallado en [2] el coeficiente del tercer orden, pueden obtenerse los de los órdenes sucesivos.

Aplicando el procedimiento anterior a los objetivos que han servido para este trabajo, dos objetivos fotográficos de los tipos Tessar y Taylor, aparecen los siguientes resultados:

<i>Diferencias sextas</i>			
Tessar		Taylor	
0,37970	— 0,26666	0,21981	0,70747

En el Tessar las diferencias sextas son incluso de signo contrario lo que podría interpretarse por la existencia de un noveno orden considerable. En el Taylor la diferencia no es tan sensible, pero es apreciable, y presumible un noveno orden, aunque muchísimo menos importante que en el Tessar. En la exposición posterior aparece, sin embargo, que el Taylor no tiene un noveno orden importante, por tanto parece que la utilidad del método es relativa.

En el triplete de Taylor las diferencias segundas son iguales, y puede calcularse el coeficiente de tercer orden por la fórmula [2] y compararlo con el valor verdadero de dicho coeficiente, obtenido a partir de las sumas de Seidel. Los valores son:

$$a_1 = \frac{\text{dif II}}{2 h_1^2} = -0,0070 \quad a_1 = \frac{-S_1/2n'\sigma'^2}{h_1^2} = -0,0104$$

La diferencia entre ambos, lleva a pensar que el procedimiento no es aconsejable, ya que, probablemente, al hallar las sucesivas diferencias y disminuir el valor de éstas, el error relativo aumenta.

Así pues, podemos decir que este procedimiento puede servir para dar una idea preliminar de los órdenes aberrantes que entran en juego en un sistema, pero que no es útil para la obtención de los coeficientes.

## NUEVO MÉTODO

Busquemos ahora un método para expresar la aberración esférica total de un sistema en función de la aberración esférica del tercer orden, obtenida por las sumas de Seidel, para lo cual, utilizaremos los métodos de cálculo trigonométrico de J. Casas y J. Barcala (4) en la determinación exacta de la aberración esférica y las sumas de Seidel del tercer orden como las da H. H. Hopkins (5) para el cálculo aproximado.

Así, como la esférica de Seidel,  $E_s$ , es la fracción:

$$E_s = -\frac{S_1}{2 n' \sigma'^2}$$



( $S_1$ , suma de Seidel;  $n'$ , índice de refracción del último medio;  $\sigma'$  abertura paraxial), que da la contribución del tercer orden, la diferencia entre  $E$ , esférica real, y  $E_s$  representará el valor de los órdenes superiores al tercero. Como puede apreciarse  $E_s$ , coincide con el primer término  $a_1 h^2$ , del desarrollo en serie de la esférica.

Pretendimos, partiendo de la diferencia  $E - E_s$ , ajustar la esférica real sólo con quinto orden, evitando así trabajosas marchas y considerar órdenes más elevados.

Considerando únicamente hasta el quinto orden, el coeficiente  $a_2$  se obtiene fácilmente, ya que es igual a

$$a_2 = \frac{E - E_s}{h^4}$$

y como el del tercer orden es

$$a_1 = \frac{-S_1/2n'\sigma'^2}{h^2} \quad [3]$$

donde  $h$  es la altura para la que se ha hallado  $S_1$ ; podemos determinar la esférica para cada altura.

Así, en el Tessar, obtenemos  $a_2$  para cada una de las siete alturas y los valores resultantes son todos distintos entre sí. Ahora bien, teóricamente, era de esperar que si sólo hubiera quinto orden, el coeficiente tuviera idéntico valor para cada una de las alturas, el que no resultara así, llevaba a suponer la existencia de órdenes superiores al quinto. No obstante, pareciendo lógico pensar que pese a todo, el quinto orden fuera más importante que los superiores, se intentó otra aproximación. Entre todos los coeficientes  $a_2$ , que teníamos, elegimos uno que era la media de todos ellos; la comprobación subsiguiente no resultó como esperábamos e hicimos otra tentativa. Ahora fue con un valor para  $a_2$  más próximo al correspondiente a la mayor altura, en la que era más notoria la influencia de los órdenes, elevados. Precisamente para esta altura, la esférica así obtenida es de signo contrario a la verdadera, lo que nos lleva a considerar la necesidad de manejar órdenes superiores de aberración y para ello es preciso buscar otro camino.

Como queda dicho, se comprobó que la aberración esférica verdadera  $E$ , era lineal con la aberración esférica de tercer orden de Seidel  $E_s$ , y esto se cumple para distintas alturas. Así pues, podemos poner

$$E = m E_s + b$$

y como

$$E = E_s + E_5 + E_7 + E_9 + \dots$$

donde  $E_s, E_5, E_7, E_9$  son las aberraciones esféricas de tercero, quinto, séptimo y noveno orden respectivamente.

Quedará

$$E_5 + E_7 + E_9 + \dots = (m - 1) E_s + b$$



Lo que indica que la suma de los órdenes superiores es función lineal del tercero. Como esto se cumple para distintas alturas, podemos decir que, analíticamente cada uno de los sumandos, ha de ser también por separado, función lineal de  $E_s$ .

$$E_5 = f_1(E_s) \quad E_7 = f_2(E_s) \quad E_9 = f_3(E_s)$$

donde  $f_1, f_2, f_3$  son funciones lineales.

Si no hubiera séptimo y noveno órdenes, la ecuación quedaría:

$$E_s = (m - 1) E_s + b$$

En función de las alturas

$$E = a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + a_4 h^8 + \dots = m a_1 h^2 + b \quad [4]$$

o también

$$a_2 h^4 + a_3 h^6 + a_4 h^8 + \dots = n a_1 h^2 + b$$

donde  $n = m - 1$ .

Igualmente en este caso, los coeficientes de los distintos órdenes, serán funciones lineales de  $a_1$ , coeficiente del tercero.

$$a_2 = F_1(a_1) \quad a_3 = F_2(a_1) \quad a_4 = F_3(a_1)$$

y  $F_1, F_2, F_3$  son funciones lineales.

El problema consiste en hallar dichas funciones, para lo cual habremos de resolver un sistema de ecuaciones en función de  $a_1$ , cuyo valor, ya conocido, es igual a

$$a_1 = \frac{E_s}{h^2}$$

Así pues, determinando la ecuación de la recta del segundo miembro de [4], para tantas alturas distintas, como coeficientes incógnitos existan, tendremos planteado un sistema, que en este caso será de tres ecuaciones, con las tres incógnitas  $a_2, a_3$  y  $a_4$ . Quedará:

$$a_2 h_1^4 + a_3 h_1^6 + a_4 h_1^8 = n_1 a_1 h_1^2 + b_1$$

$$a_2 h_2^4 + a_3 h_2^6 + a_4 h_2^8 = n_2 a_1 h_2^2 + b_2$$

$$a_2 h_3^4 + a_3 h_3^6 + a_4 h_3^8 = n_3 a_1 h_3^2 + b_3$$

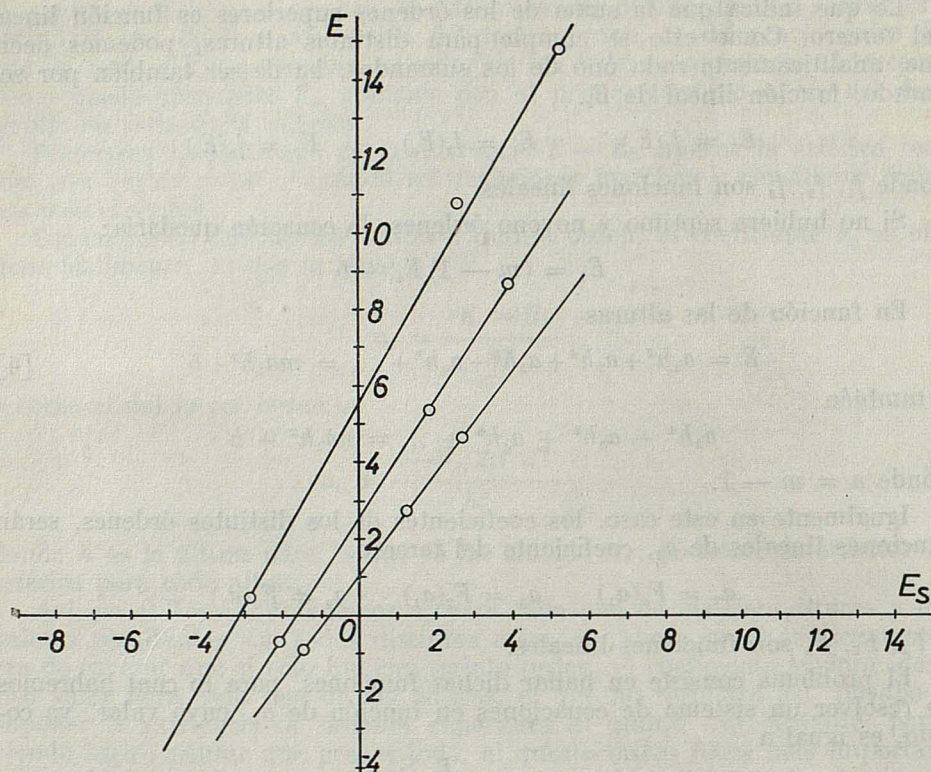
Para comprobar la linealidad, modificamos dos veces, la última superficie del sistema, para tres alturas distintas y efectivamente los tres puntos así obtenidos están alineados, véase gráfica núm. 1. Para evitar en lo posible los errores, determinaremos las rectas necesarias para los sistemas, con dos puntos lo suficientemente alejados.

Planteado de esta forma el sistema, los coeficientes de orden superior aparecen en función del tercer orden; lo que representa rapidez para los cálculos, ya que sólo hemos tenido que usar un sistema de ecuaciones.

Otro método sería hacer:

$$a_2 h^4 + a_3 h^6 + a_4 h^8 = E - E_s$$





Gráfica 1

y así para cada altura. Aquí no hemos calculado las ecuaciones de las rectas; pero hallados los valores de los  $a_i$ , para una de las modificaciones del sistema óptico, tendremos que plantear otro sistema de ecuaciones para la segunda modificación. Obtenidas las dos parejas de valores para cada coeficiente, hallaremos la función lineal que los realciona con  $a_1$  y en definitiva habremos de hallar las ecuaciones de unas rectas. El camino seguido es más largo que el anterior.

En las modificaciones anteriores no se había seguido ningún criterio especial, pero un estudio de las dimensiones de los coeficientes, lleva a una consideración importante. En efecto, de [1] se deduce fácilmente, que como las dimensiones de la aberración esférica son de una longitud, cada uno de los sumandos tendrá idénticas dimensiones,

$$[a_1 h^2] = L \quad [a_2 h^4] = L \quad [a_3 h^6] = L \quad [a_4 h^8] = L$$

y como  $[h] = L$  se cumplirá:

$$[a_1] = L^{-1} \quad [a_2] = L^{-3} \quad [a_3] = L^{-5} \quad [a_4] = L^{-7}$$

Las características de estos coeficientes restaban generalidad a su aplicación, y es necesario llevarlos a una forma más general.



Cuando modificamos, por ejemplo, la última superficie del sistema, la focal varía y naturalmente también lo hace la abertura; podemos decir que hemos pasado a un sistema diferente, y ya no podemos relacionar lógicamente el nuevo punto con el anterior, para determinar de esta forma la ecuación de la recta ya nombrada.

Entonces necesitamos tener en cuenta para nuestras modificaciones, que la abertura debe conservarse, y para ello si mantenemos al altura de entrada, habremos de hacer lo mismo con la distancia focal. Un método sencillo de conseguirlo sería modificar las superficies interiores y conservar focal con la última. Sin embargo este método se reveló como poco práctico, ya que en los distintos sistemas en que se utilizó, daba dos puntos tan próximos que implicaba mucho error, la determinación de la recta con ellos. El intento de dar fuertes variaciones a varias superficies, no consiguió alejar demasiado dichos puntos.

Se hicieron pruebas con un objetivo fotográfico tipo Tessar, un triplete Taylor, un triplete ocular y un teleobjetivo. Estos dos últimos no sirvieron para nuestro trabajo porque únicamente tenían tercer orden, aunque pudo comprobarse en ellos la linealidad.

Si en el sistema se efectúa una transformación de semejanza de razón  $m$ , todas las longitudes aparecen modificadas en dicha razón, mientras que los ángulos no varían. Así les pasa a las alturas, distancias focales, radios, aberración esférica, etc., esto en el caso de que la luz viene del infinito, si no hay que modificar la  $s$  de entrada en la misma proporción.

Según esto, podemos elegir una modificación con una determinada focal, entrar a la altura primitiva y multiplicar o dividir todas las longitudes por la razón entre ambas focales; o también, modificar la altura en la misma proporción que las focales, conservando las demás longitudes y reducir igualmente las dos esféricas así obtenidas. Este último procedimiento es el más rápido y cómodo.

*Elección de Alturas.* — Según los órdenes de aberración que entran en juego se necesitan más o menos alturas. Sabemos que hasta un noveno orden, necesitamos tres alturas para plantear el sistema de ecuaciones.

Si se tiene una focal  $f_1'$ , y la modificación de la última superficie lleva a otra focal  $f_2'$ , si es  $f_2'/f_1' = m$ , se eligen las alturas de forma que sean  $h$ ,  $mh$ , y  $m^2h$ .

Haciendo para  $h$  una marcha completa de focal  $f_1'$ , se obtienen su aberración esférica verdadera  $E$  y la aberración esférica del tercer orden o de Seidel  $E_s$ . Esta  $E_s$  multiplicada por  $m^2$  y  $m^4$  dará las  $E_s$  de alturas  $mh$  y  $m^2h$  y distancia focal  $f_1'$ . Para las correspondientes esféricas verdaderas sólo faltan dos marchas de borde.

Si modificamos la última superficie de la marcha paraxial de altura  $h$ , para  $f_2'$ , obtenemos una  $E_s$  que multiplicada por  $m$ ,  $m^2$  y  $m^4$ , dará las  $E_s$  correspondientes a la segunda modificación.

Las marchas de borde de altura  $mh$  y  $m^2h$  llevadas a focal  $f_2'$  dan las esféricas verdaderas que divididas por  $m$  son las correspondientes a los segundos puntos para alturas  $h$  y  $mh$ .

Sólo restará efectuar una marcha de borde para altura  $m^3h$  y focal  $f_2'$  y reducir la esférica así obtenida, dividiendo por  $m$ , que serviría para la ordenada del segundo punto de altura  $m^2h$  y focal  $f_1'$ .



De esta forma, obtenidas las tres parejas de puntos, podemos plantear el sistema de ecuaciones, cuya resolución permite encontrar las tres expresiones para cada uno de los coeficientes:

$$\begin{aligned} a_2 &= n_2 a_1 + b_2 \\ a_3 &= n_3 a_1 + b_3 \\ a_4 &= n_4 a_1 + b_4 \end{aligned} \quad [5]$$

y sustituyendo en

$$E = a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + a_4 h^8$$

obtenemos la aberración esférica total.

Al objeto de obtener una forma general, que independice a los  $a_i$  de la focal, podemos hallar unos nuevos coeficientes para lo cual, basándonos en las dimensiones de éstos, efectuamos la siguiente transformación:

$$a_1 = \frac{A_1}{f_1'} \quad a_2 = \frac{A_2}{f_1'^3} \quad a_3 = \frac{A_3}{f_1'^5} \quad a_4 = \frac{A_4}{f_1'^7}$$

donde los  $A_i$  ya no tienen dimensiones.

Sustituyendo en [5] quedaría:

$$\begin{aligned} A_2 &= n_2 f_1'^2 A_1 + b_2 f_1'^3 \\ A_3 &= n_3 f_1'^4 A_1 + b_3 f_1'^5 \\ A_4 &= n_4 f_1'^6 A_1 + b_4 f_1'^7 \end{aligned} \quad [6]$$

Como  $n_i$ ,  $b_i$  y  $f_1'$  son conocidos, queda:

$$\begin{aligned} A_2 &= p_2 A_1 + q_2 \\ A_3 &= p_3 A_1 + q_3 \\ A_4 &= p_4 A_1 + q_4 \end{aligned}$$

donde  $p_i$  y  $q_i$  son valores generales dados por:

$$\begin{aligned} p_2 &= n_2 f_1'^2 & q_2 &= b_2 f_1'^3 \\ p_3 &= n_3 f_1'^4 & q_3 &= b_3 f_1'^5 \\ p_4 &= n_4 f_1'^6 & q_4 &= b_4 f_1'^7 \end{aligned}$$

Para una focal cualquiera  $f'$ ,

$$A_1 = a_1 f'$$

donde  $a_1$  se calcula de la manera indicada ver [3], y sustituyendo  $A_1$  en las ecuaciones anteriores obtenemos  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$ .

La fórmula a emplear para la esférica verdadera será:

$$E = \frac{A_1}{f'} h^2 + \frac{A_2}{f'^3} h^4 + \frac{A_3}{f'^5} h^6 + \frac{A_4}{f'^7} h^8$$

y teniendo en cuenta que  $h/f' = \sigma'$  ( $\sigma'$  abertura paraxial) quedará:

$$E = f' (A_1 \sigma'^2 + A_2 \sigma'^4 + A_3 \sigma'^6 + A_4 \sigma'^8)$$



que es más práctica para el cálculo que la anterior; o también, como la  $E_s$  será conocida, por haberla hallado por lo menos para una altura (la fórmula de paso de una  $E_s$  para una altura  $h_1$ , a otra para una  $h_2$  es  $E_{sh_2} = E_{sh_1} (h_2/h_1)^2$ ) y quedará:

$$E = E_s + f' (A_2 \sigma'^4 + A_3 \sigma'^6 + A_4 \sigma'^8)$$

que es la fórmula general que da la esférica en función de la focal y altura de incidencia.

## CÁLCULOS

### Tessar

Contamos con un objetivo, tipo Tessar, cuyos datos de partida son:

Radios	Espesor	Indices
32		
—500	4	1,65425
—47,3	4	1
36,4	1,8	1,5739
—104,5	5,8	1
58,2	2	1,52456
—34,5	5	1,62239

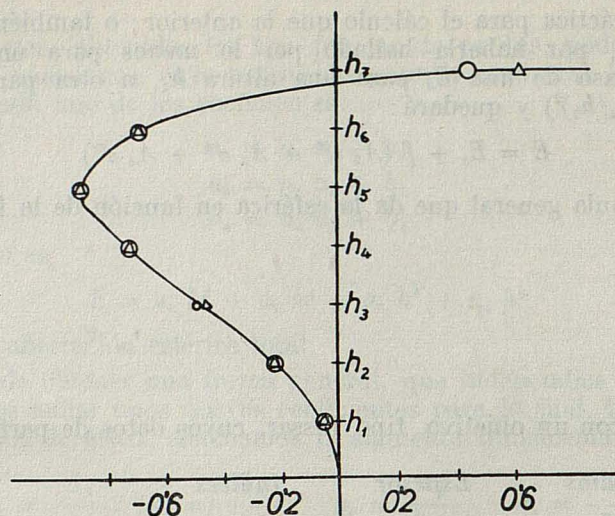
$f' = 91,4$

Para este objetivo se hicieron siete marchas completas de aberración esférica, dado que su abertura es 1:3,5 obtenemos la altura máxima y la dividimos en siete partes iguales, las aberraciones obtenidas son:

Alturas	Ab. esférica	Ab. 3 <sup>er</sup> orden
$h_1$ 2,04286	—0,05457	—0,05974
$h_2$ 4,08571	—0,22676	—0,23907
$h_3$ 6,12857	—0,47954	—0,53798
$h_4$ 8,17143	—0,72056	—0,95640
$h_5$ 10,21429	—0,89455	—1,49440
$h_6$ 12,25714	—0,69611	—2,15202
$h_7$ 14,30000	0,45088	—2,92912

La curva de esférica es la de la gráfica núm. 2.





Gráfica 2

Como ya vimos, el cuadro de diferencias, señalaba la conveniencia de ajustar un noveno orden.

Para comprobar la linealidad, se modificó el radio de la última superficie para las alturas  $h_5$ ,  $h_6$  y  $h_7$  a  $r_7 = -39$  y focal  $f' = 107,97$  y  $r_7 = -41$  y focal  $f' = 119,01$ .

Los valores de esféricas obtenidos fueron:

	$r_7 = -39$		$f' = 107,97$
	$h_5$	$h_6$	$h_7$
$E$	2,75583	5,41359	10,76874
$E_s$	1,26921	1,82766	2,48764
	$r_7 = -41$		$f' = 119,01$
	$h_5$	$h_6$	$h_7$
$E$	4,69580	8,72426	14,81594
$E_s$	2,70373	3,89336	5,29931

Estos primeros cálculos, aún sin conservar abertura, sirvieron para confirmar la linealidad. Véase gráfica núm. 1.

La modificación a  $r_7 = -39$  y  $f' = 107,9$  fue la usada para obtener los segundos puntos para cada altura.

Para aprovechar el material existente elegimos en principio las alturas  $h_5$ ,  $h_6$  y  $h_7$  con la abertura correspondiente a  $f' = 91,4$ .

Como se ve en la curva de esférica, éstas eran las más características. Aunque la práctica nos ha demostrado la necesidad de usar las mayores alturas, en este caso particular la  $h_7$  tenía incidencias superiores a  $30^\circ$  y la



curva se hacía muy horizontal, lo que daba grandes variaciones de esférica para pequeñas variaciones de altura. Todo lo cual llevó a elegir la  $h_4$  en vez de la  $h_7$ .

La relación de focales es de 1,2 y por ello las alturas para  $r_7 = -39$  y  $f' = 107,97$ , debían ser  $h_4 \times 1,2$ ,  $h_5 \times 1,2$  y  $h_6 \times 1,2$ , como sabemos. En este caso coincidió ser  $h_6 = h_5 \times 1,2$  lo que facilitó los cálculos.

Las esféricas obtenidas fueron:

	$r_7 = -39$	$f' = 107,97$	
	$h_4 \times 1,2$	$h_5 = h_4 \times 1,2$	$h_6 \times 1,2$
$h$	9,80571	12,25714	14,70857
$E$	2,39883	5,41359	12,43048
$E_s$	1,17519	1,82766	2,63182

Reduciendo a focal 91,4, o sea dividiendo por 1,2.

	$r_7 = -39$	$f' = 91,4$	
	$h_4$	$h_5$	$h_6$
$E$	1,99903	4,51133	10,35873
$E_s$	0,97933	1,52305	2,19319

Estos puntos en unión de los

	$r_7 = -34,5$	$f' = 91,4$	
	$h_4$	$h_5$	$h_6$
$E$	-0,72056	-0,89455	-0,69611
$E_s$	-0,95640	-1,49440	-2,15202

sirven para determinar las ecuaciones de las rectas. Efectuando los cálculos queda:

Para  $h_4$

$$E = 1,40495 a_1 h_4^2 + 0,62313$$

Para  $h_5$

$$E = 1,79154 a_1 h_5^2 + 1,78273$$

Para  $h_6$

$$E = 2,54415 a_1 h_6^2 + 4,77894$$

El sistema de ecuaciones quedaría, dividiendo todos los términos por  $h_4^2$ , así:

$$a_2 + 66,77 a_3 + 4458,53 a_4 = 6064,6 \cdot 10^{-6} a_1 + 139,7 \cdot 10^{-6}$$

$$a_2 + 104,33 a_3 + 10885,08 a_4 = 7586,7 \cdot 10^{-6} a_1 + 163,7 \cdot 10^{-6}$$

$$a_2 + 150,23 a_3 + 22571,32 a_4 = 10278,0 \cdot 10^{-6} a_1 + 211,7 \cdot 10^{-6}$$



Resuelto el sistema los valores de los coeficientes son:

$$a_2 = 4910,12 \cdot 10^{-6} a_1 + 131,54 \cdot 10^{-6}$$

$$a_3 = 2,60 \cdot 10^{-6} a_1 - 0,205 \cdot 10^{-6}$$

$$a_4 = 0,22 \cdot 10^{-6} a_1 + 0,0049 \cdot 10^{-6}$$

Para las modificaciones que han dado origen al sistema de ecuaciones podemos aplicar directamente estos coeficientes.

Así para  $r_7 = -34,5$  es:

$$a_1 = -0,01432$$

y por tanto

$$a_2 = 61,23 \cdot 10^{-6}$$

$$a_3 = -0,242 \cdot 10^{-6}$$

$$a_4 = 0,00175 \cdot 10^{-6}$$

Sustituyendo en [1] obtenemos los valores aproximados de las esféricas, que podemos comparar con las verdaderas.

	<i>E verdadera</i>	<i>E obtenida</i>
$h_1$	-0,05457	-0,05869
$h_2$	-0,22676	-0,22299
$h_3$	-0,47954	-0,46094
$h_4$	-0,72056	-0,72066
$h_5$	-0,89455	-0,89539
$h_6$	-0,69611	-0,69905
$h_7$	0,45088	0,62198

en la gráfica núm. 2 aparecen con un triángulo los puntos obtenidos por este método y con un círculo los verdaderos y en ella se aprecia la coincidencia entre ambos métodos.

El mismo significado tendrán dichos signos en todas las gráficas.

Para  $r_7 = -39$  podrían también usarse los  $a_i$ , pero su comprobación la hemos englobado con la de otros sistemas.

Para obtener los coeficientes generales  $A_i$  basta multiplicar por las correspondientes potencias de  $f' = 91,4$  en [6] y queda:

$$A_2 = 41,019 A_1 + 100,438$$

$$A_3 = 181,454 A_1 - 1307,65$$

$$A_4 = 128265,0 A_1 + 261112,6$$

Podemos ahora aplicar estos coeficientes a la obtención de las esféricas de distintas modificaciones del Tessar.

Para  $r_7 = -39$  y  $f' = 109,97$  el valor obtenido para  $a_1$  es 0,01217 y por consiguiente deduciremos fácilmente:

$$A_1 = 1,33833$$

$$A_2 = 155,334$$

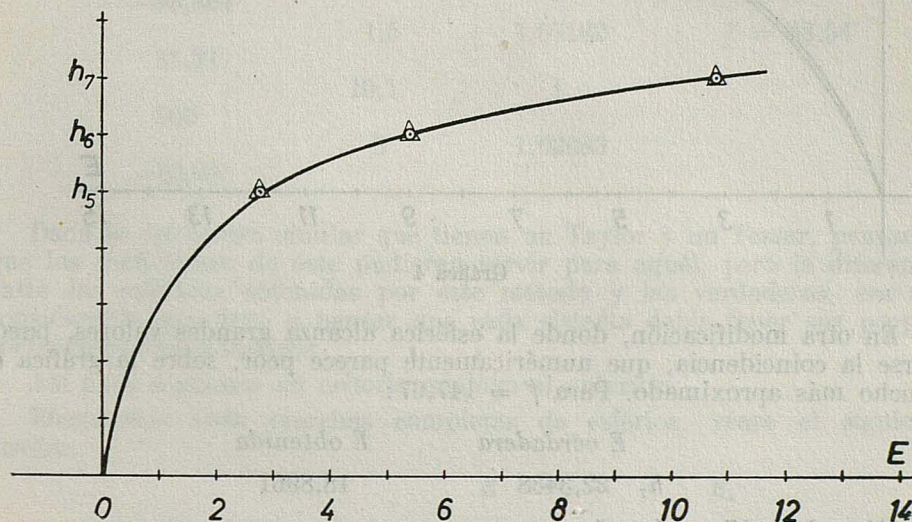
$$A_3 = -1064,805$$

$$A_4 = 432773,54$$



Podemos con estos coeficientes hallar los valores correspondientes de la aberración esférica y compararlos con los verdaderos.

	<i>E verdadera</i>	<i>E obtenida</i>
$h_5$	2,75583	2,72692
$h_{4.1,2}$	2,39883	2,38638
$h_6$	5,41359	5,38082
$h_7$	10,76876	10,70838
$h_{6.1,2}$	12,43048	12,28269



Gráfica 3

En la gráfica núm. 3 podemos ver la concordancia de los dos métodos.

Aplicemos ahora nuestro método a una modificación que no intervino en la obtención de los coeficientes, a cuyo efecto tomamos  $r_7 = -41$  y  $f' = 119,01$ . Como  $a_1 = 0,02591$  queda:

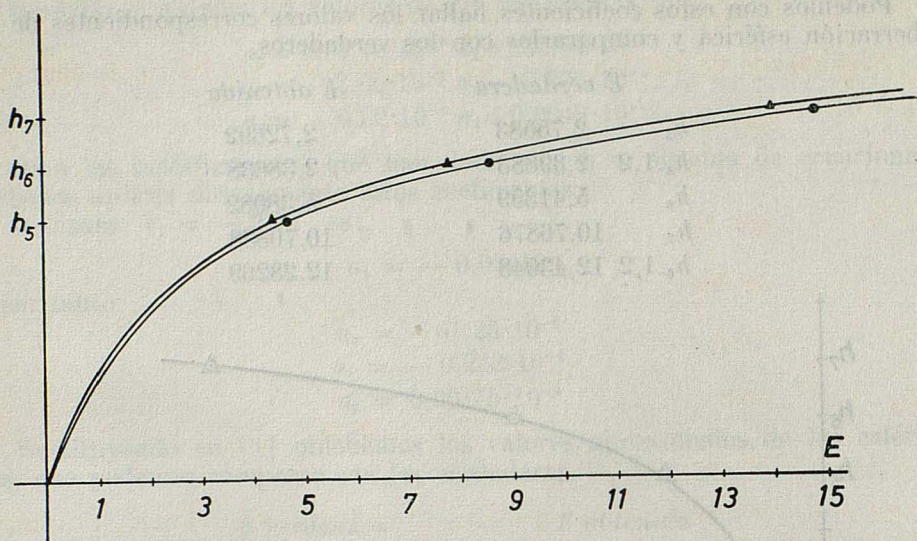
$$\begin{aligned} A_1 &= 3,0835 \\ A_2 &= 226,92 \\ A_3 &= -748,137 \\ A_4 &= 656617,8 \end{aligned}$$

Los valores son:

	<i>E verdadera</i>	<i>E obtenida</i>
$h_5$	4,69580	4,36115
$h_6$	8,72426	7,84144
$h_7$	14,81591	14,02031

La pequeña separación que existe entre ambas curvas, aparece claramente en la gráfica núm. 4.



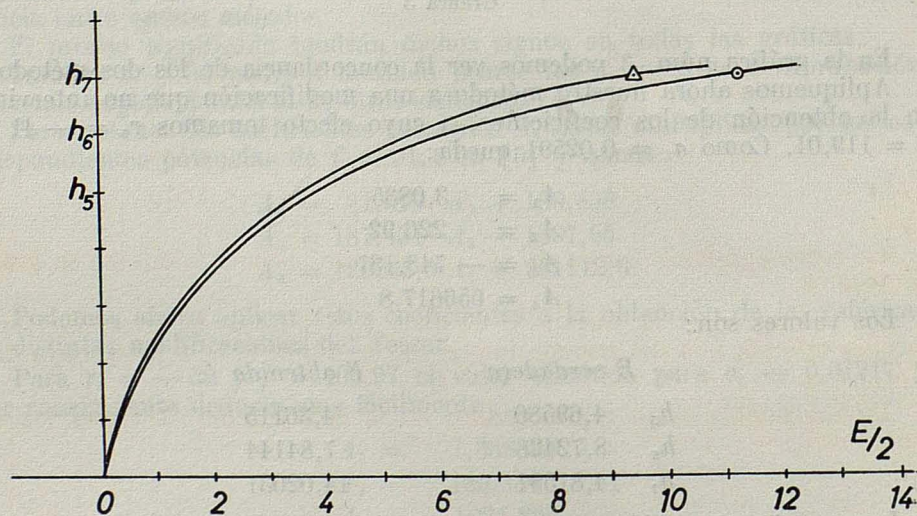


Gráfica 4

En otra modificación, donde la esférica alcanza grandes valores, puede verse la coincidencia, que numéricamente parece peor, sobre la gráfica es mucho más aproximado. Para  $f' = 147,67$ :

	<i>E verdadera</i>	<i>E obtenida</i>
$h_7$	22,3438	18,8961

Véase la gráfica núm. 5.



Gráfica 5



*Aplicación al estudio de un triplete de Taylor*

Partimos de un sistema, cuyos datos funcionales son los siguientes:

<i>Radios</i>	<i>Espesor</i>	<i>Indices</i>	
34,413			
	3	1,62683	
—292,16			
	9,3	1	
—38,364			
	1,5	1,67182	$f' = 88,54$
37,27			
	10,1	1	
500			
	3	1,62683	
—30,94			

Dada la estructura similar que tienen un Taylor y un Tessar, pensamos que los coeficientes de éste pudieran servir para aquél, pero la diferencia entre las esféricas obtenidas por este método y las verdaderas, era tan considerable que llevó a pensar que cada sistema debía tener sus propios coeficientes característicos.

Así pues seguimos un criterio análogo al anterior.

Efectuamos siete marchas completas de esférica, véase el siguiente cuadro.

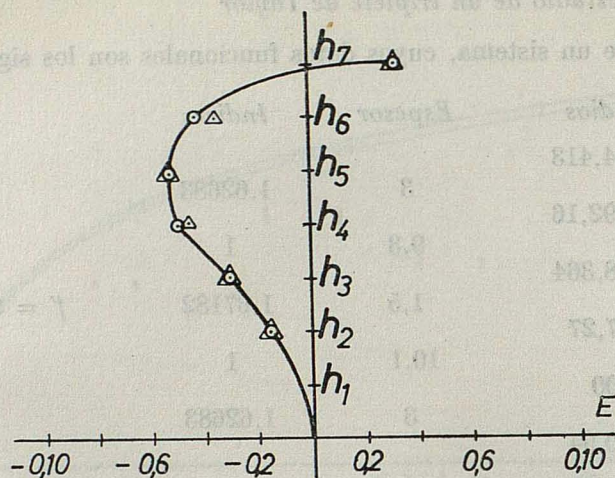
	<i>E</i>	<i>E<sub>s</sub></i>
$h_1$ 1,9791	—0,05016	—0,04093
$h_2$ 3,9582	—0,15665	—0,16373
$h_3$ 5,9373	—0,31811	—0,36839
$h_4$ 7,9164	—0,49680	—0,65492
$h_5$ 9,8955	—0,53205	—1,02332
$h_6$ 11,8746	—0,44522	—1,47358
$h_7$ 13,8539	—0,32682	—2,00570

La correspondiente curva de esférica de este sistema, viene en la gráfica núm. 6.

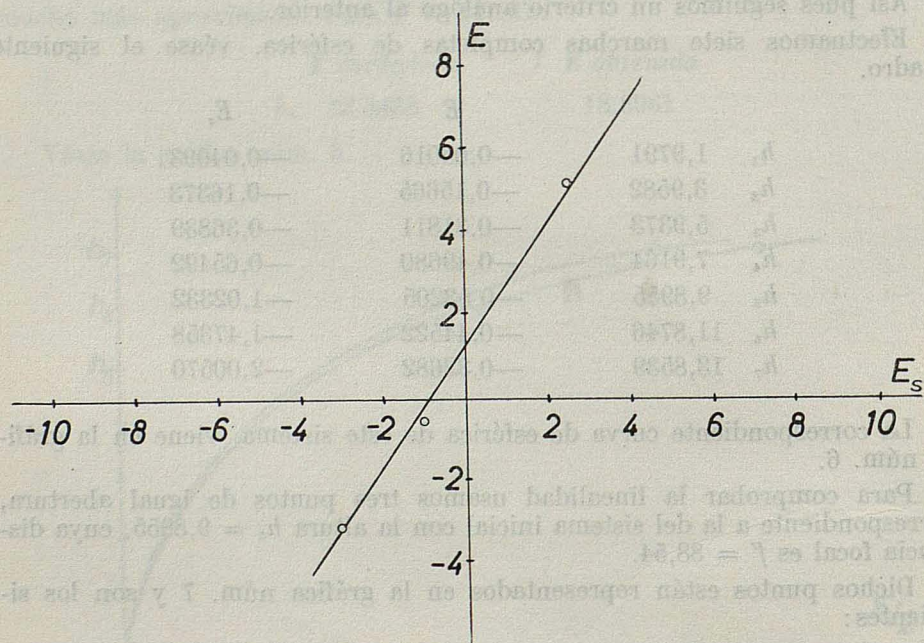
Para comprobar la linealidad usamos tres puntos de igual abertura, correspondiente a la del sistema inicial con la altura  $h_5 = 9,8955$ , cuya distancia focal es  $f' = 88,54$ .

Dichos puntos están representados en la gráfica núm. 7 y son los siguientes:





Gráfica 6



Gráfica 7



TABLA I

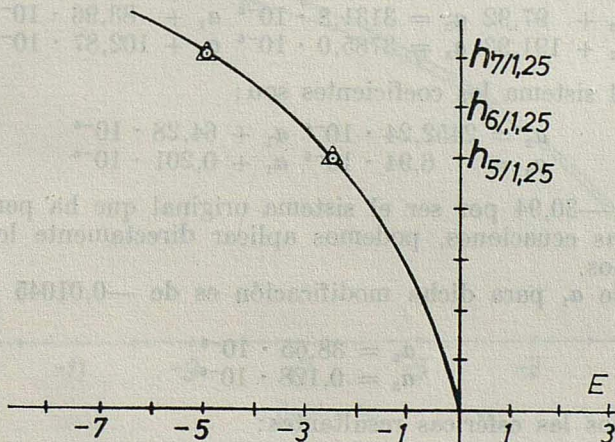
$r_6 = -26,599$	$E = -3,05833$ $E_s = -2,95670$
$r_6 = -30,94$	$E = -0,53205$ $E_s = -1,02332$
$r_6 = -35$	$E = 5,23087$ $E_s = 2,52433$

Como en el Tessar, intentamos plantear en el sistema hasta un noveno orden, con las alturas  $h_4$ ,  $h_5$  y  $h_6$ ; pero en la comprobación posterior la esférica obtenida para la altura  $h_7$  no coincidía con la verdadera, e incluso los signos eran opuestos. Observando la curva de esférica, vemos que estas tres alturas son muy poco representativas, por ello elegimos la  $h_7$  para nuestro planteamiento.

Para salvar el problema de las incidencias en las superficies, hicimos la segunda modificación de forma que disminuyera la focal. Los datos fueron

$$r_6 = -26,599 \quad f' = 70,83$$

y la relación con la focal primitiva resultó ser de 1,25. La curva de esférica de esta modificación es la de la gráfica núm. 8.



Gráfica 8

En el curso de nuestro trabajo habíamos observado que este objetivo no respondía bien con un noveno orden y por ello ajustamos ahora únicamente hasta el séptimo. Las alturas elegidas son la  $h_5$  y  $h_7$ . Para conser-



var abertura, entramos con alturas  $h_5/1,25 = h_4$  y  $h_7/1,25$  en  $r_6 = -26,599$  y  $f' = 70,83$  los valores obtenidos son:

$h_5/1,25$	$h_7/1,25$
$E -2,44667$	$-4,97238$
$E_s -2,36536$	$-4,63610$

Sus valores reducidos aparecían ya en la tabla I.  
Téngase en cuenta que por haber disminuido focal, había ahora que multiplicar por 1,25.

Los puntos son:

$$r_6 = -26,599 \quad f' = 88,54$$

$h_5$	$h_7$
$E -3,05833$	$-6,21547$
$E_s -2,95670$	$-5,79513$
$r_6 = -30,94$	$f' = 88,54$

$h_5$	$h_7$
$E -0,53205$	$0,32682$
$E_s -1,02332$	$-2,00570$

Las rectas son por tanto:

$$E = 1,30667 a_1 h_5^2 + 0,80509$$

$$E = 1,72646 a_1 h_7^2 + 3,78959$$

El sistema de ecuaciones previa simplificación será:

$$a_2 + 97,92 a_3 = 3131,8 \cdot 10^{-6} a_1 + 83,96 \cdot 10^{-6}$$

$$a_2 + 191,93 a_3 = 3785,0 \cdot 10^{-6} a_1 + 102,87 \cdot 10^{-6}$$

Resuelto el sistema los coeficientes son:

$$a_2 = 2452,24 \cdot 10^{-6} a_1 + 64,28 \cdot 10^{-6}$$

$$a_3 = 6,94 \cdot 10^{-6} a_1 + 0,201 \cdot 10^{-6}$$

Para  $r_6 = -30,94$  por ser el sistema original que ha permitido la resolución de las ecuaciones, podemos aplicar directamente los coeficientes ahora obtenidos.

El valor de  $a_1$  para dicha modificación es de  $-0,01045$  y, por tanto, será:

$$a_2 = 38,65 \cdot 10^{-6}$$

$$a_3 = 0,128 \cdot 10^{-6}$$

Comparemos las esféricas resultantes:

<i>E verdadera</i>	<i>E obtenida</i>
$h_3 -0,31811$	$-0,31476$
$h_4 -0,49680$	$-0,47162$
$h_5 -0,53204$	$-0,53254$
$h_6 -0,44522$	$-0,34625$
$h_7 0,32682$	$0,32303$



Sobre la gráfica núm. 6 podemos ver las dos clases de puntos. De igual forma en la gráfica núm. 8 vemos la coincidencia de los puntos que sirvieron para la obtención del sistema.

Según el procedimiento indicado y para  $f' = 88,54$  obtenemos los coeficientes generales  $A_i$ .

$$\begin{aligned} A_2 &= 19,22 A_1 + 44,62 \\ A_3 &= 426,53 A_1 + 1093,78 \end{aligned}$$

Efectuemos ahora una serie de comprobaciones.

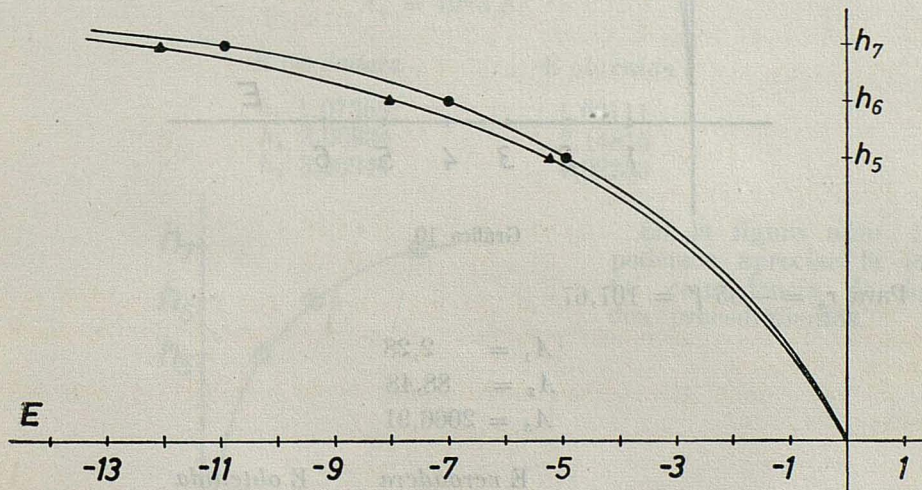
Para  $r_6 = -25$   $f' = 64,91$ .

$$\begin{aligned} A_1 &= -3,039 \\ A_2 &= -13,81 \\ A_3 &= -202,45 \end{aligned}$$

y las esféricas son:

<i>E verdadera</i>	<i>E obtenida</i>
$h_5 = 4,97316$	$-5,23461$
$h_6 = 7,52749$	$-8,09909$
$h_7 = 10,88376$	$-12,08813$

En este sistema había una incidencia de  $44^\circ$ , pese a lo cual puede verse en la gráfica núm. 9, que las curvas son bastante coincidentes.



Gráfica 9

Para una modificación como la de  $r_6 = -33$  y  $f' = 97,9$  obtenemos los siguientes coeficientes:

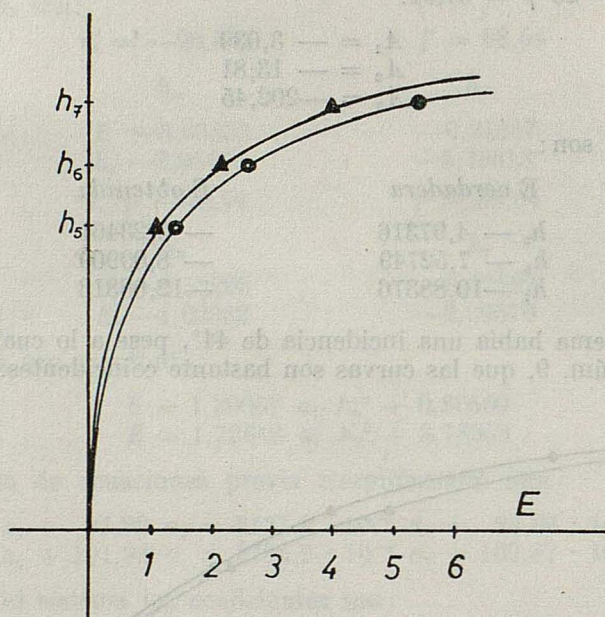
$$\begin{aligned} A_1 &= 0,45570 \\ A_2 &= 53,376 \\ A_3 &= 1288,14 \end{aligned}$$



Con ellos podemos comparar ambas esféricas.

	E verdadera	E obtenida
$h_5$	1,35840	1,13571
$h_6$	2,61137	2,18899
$h_7$	5,27640	4,00151

La gráfica núm. 10 corresponde a estos puntos y también da dos curvas muy próximas.



Gráfica 10

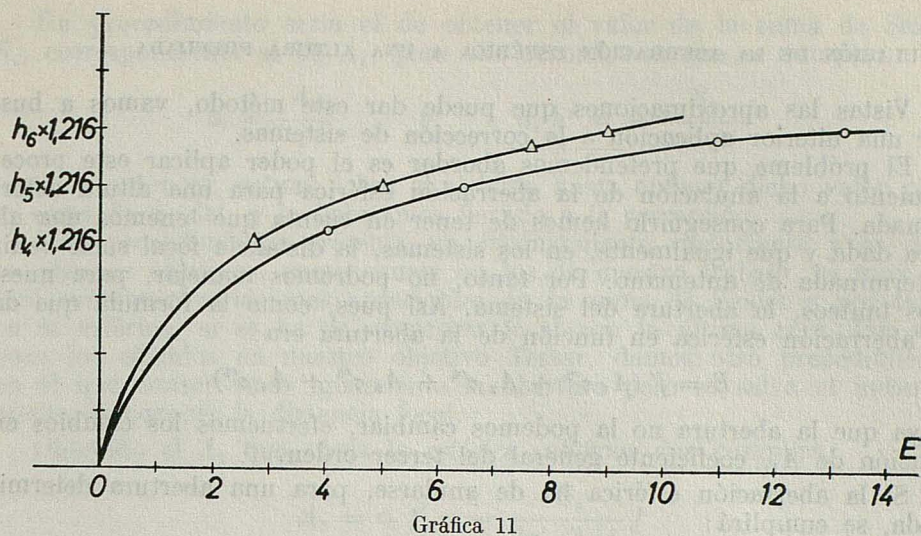
Para  $r_6 = -35$   $f' = 107,67$

$A_1 =$	2,28
$A_2 =$	88,48
$A_3 =$	2066,91

	E verdadera	E obtenida
$h_6 \cdot 1,216$	13,15937	8,79831
$h_7$	10,97957	7,68751
$h_5 \cdot 1,216$	6,36073	4,98616
$h_4 \cdot 1,216$	3,10473	2,68718

Véase en la gráfica núm. 11, que aun aumentadas considerablemente las curvas son muy próximas.





Para  $r_4 = 42$   $r_6 = -35$   $f' = 95,24$

$$A_1 = 0,3519$$

$$A_2 = 51,38$$

$$A_3 = 1243,87$$

*E verdadera*

$$h_5 \ 1,07368$$

$$h_6 \ 2,00934$$

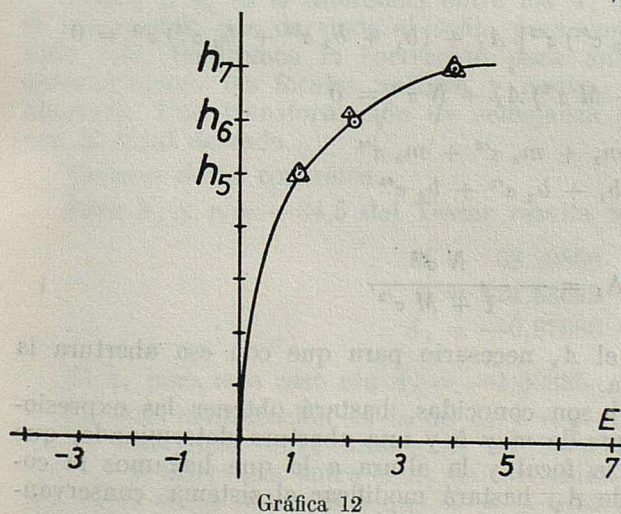
$$h_7 \ 3,95944$$

*E obtenida*

$$1,08111$$

$$2,14815$$

$$4,02233$$



En la figura núm. 12 podemos apreciar la total coincidencia de los dos procedimientos.



## ANULACIÓN DE LA ABERRACIÓN ESFÉRICA A UNA ALTURA PREFIJADA

Vistas las aproximaciones que puede dar este método, vamos a buscar una ulterior aplicación a la corrección de sistemas.

El problema que pretendemos abordar es el poder aplicar este procedimiento a la anulación de la aberración esférica para una altura determinada. Para conseguirlo hemos de tener en cuenta que tenemos una altura dada y que igualmente, en los sistemas, la distancia focal suele venir determinada de antemano. Por tanto, no podremos manejar, para nuestros tanteos, la abertura del sistema. Así pues, como la fórmula que da la aberración esférica en función de la abertura era:

$$E = f' (A_1 \sigma'^2 + A_2 \sigma'^4 + A_3 \sigma'^6 + A_4 \sigma'^8)$$

y ya que la abertura no la podemos cambiar, efectuemos los cambios en función de  $A_1$ , coeficiente general del tercer orden.

Si la aberración esférica ha de anularse, para una abertura determinada, se cumplirá:

$$E = f' (A_1 \sigma'^2 + A_2 \sigma'^4 + A_3 \sigma'^6 + A_4 \sigma'^8) = 0$$

y será:

$$A_1 + A_2 \sigma'^2 + A_3 \sigma'^4 + A_4 \sigma'^6 = 0$$

recordando que

$$A_2 = m_1 A_1 + b_1 \quad A_3 = m_2 A_1 + b_2 \quad A_4 = m_3 A_1 + b_3 \quad [7]$$

y sustituyendo

$$A_1 + (m_1 A_1 + b_1) \sigma'^2 + (m_2 A_1 + b_2) \sigma'^4 + (m_3 A_1 + b_3) \sigma'^6 = 0$$

o también

$$[1 + (m_1 + m_2 \sigma'^2 + m_3 \sigma'^4) \sigma'^2] A_1 + (b_1 + b_2 \sigma'^2 + b_3 \sigma'^4) \sigma'^2 = 0$$

quedará

$$(1 + M \sigma'^2) A_1 + N \sigma'^2 = 0$$

Donde

$$M = m_1 + m_2 \sigma'^2 + m_3 \sigma'^4$$

$$N = b_1 + b_2 \sigma'^2 + b_3 \sigma'^4$$

y despejando  $A_1$

$$A_1 = - \frac{N \sigma'^2}{1 + M \sigma'^2}$$

que es la fórmula que da el  $A_1$  necesario para que con esa abertura la aberración esférica sea nula.

Como las ecuaciones [7] son conocidas, bastará obtener las expresiones  $M$  y  $N$  usando los valores de  $m$  y  $b$  y una abertura determinada, que vendrá dada por la distancia focal y la altura a la que hagamos la corrección. Hallado el valor de  $A_1$ , bastará modificar el sistema, conservando la focal, para llevarlo a un  $A_1$  como el obtenido.



Un procedimiento sería el de obtener el valor de la suma de Seidel  $S_1$ , correspondiente al de  $A_1$ , para ello recordemos que se cumple:

$$a_1 = \frac{A_1}{f'} \quad \text{y} \quad a_1 h^2 = -\frac{S_1}{2n' \sigma'^2}$$

bastaría entonces, actuar sobre el sistema hasta obtener dicho valor para la suma de Seidel, y lo habríamos llevado a la corrección.

Este procedimiento presenta un inconveniente importante y es que, en algunos objetivos, como ocurre en los de nuestro trabajo, es muy difícil conseguir variaciones apreciables en la suma de Seidel y por tanto en la esférica, si se ha de conservar focal con la última cara. Por ello para los cálculos en nuestro objetivo Tessar, damos otro procedimiento en el que conservamos igualmente la abertura pero se salva el inconveniente de conocer la distancia focal.

Obtenido el  $A_1$  que anula la esférica sabemos que cumplirá:

$$A_1 = a_1 f' = -\frac{S_1}{2n' \sigma'^2 h^2} f'$$

Si modificamos por ejemplo la última superficie, la focal cambia y tendremos que ajustar una suma de Seidel con ella para que dé el valor esperado de  $A_1$ . La manera de hacerlo es la siguiente:

Hallamos el  $A_1$  para dos modificaciones y el incremento que hayamos dado al radio para pasar de una a otra. Si hallamos la diferencia entre el  $A_1$  del sistema y el  $A_{1c}$  de corrección, podremos plantear:

$$\frac{\Delta A_1}{\Delta r} = \frac{A_{1c} - A_1}{X}$$

Donde  $\Delta A_1$  es la diferencia entre los  $A_1$  de las modificaciones y  $X$  es el incremento que daremos al radio para conseguir el  $A_1$  deseado. Obtenido éste, tendremos la corrección para una altura relacionada con la anterior como las focales antigua y nueva, o sea habremos conservado abertura. Una transformación de semejanza deja el sistema corregido y con la focal deseada.

Veamos datos concretos.

Para  $h_s$  y  $r_7 = -34,5$  del Tessar resulta ser  $\sigma' = 0,11176$  y, por tanto:

$$M = 63,29500$$

$$N = 124,83692$$

$$A_1 = -0,87086$$

El  $A_1$  para este caso era  $A_1 = -1,30885$ .

La otra modificación es la de  $h_s$  y  $r_7 = -39$  que tenía  $A_1 = +1,33833$ .

La diferencia entre ambos  $A_1$  es 2,64718, el incremento del radio  $-4,5$  y la diferencia entre el  $A_1$  de corrección y el de  $r_7 = -34,5$ , 0,43799, con estos datos obtenemos que  $X = -0,74$  ó sea que el radio quedaría  $-35,24$ .



Como el  $A_1$  así obtenido no se aproximaba mucho al teórico, hicimos lo mismo para la modificación de  $r_7 = -39$  obteniendo un incremento de 3,37 y el radio quedaba  $r_7 = -35,63$ .

Obteniendo la media entre los dos resulta  $r_7 = -35,43$ , que lleva la esférica desde  $-0,89455$  a  $-0,13712$ .

#### APLICACIÓN AL ESTUDIO DE LA ABERRACIÓN ESFEROCROMÁTICA

Vamos ahora a intentar aplicar este procedimiento, a una aberración estrechamente emparentada con la esférica, como es la esferocromática.

En el caso de un objetivo fotográfico tomamos como índice medio  $n_e$ , o sea el correspondiente a la raya  $e$  para la longitud de onda de  $555 \text{ m } \mu$ ; para extremos del espectro consideramos las rayas  $C$  y  $F$ . Pues bien, como sabemos la aberración esferocromática es la diferencia entre las aberraciones esféricas para los índices extremos.

Para la aberración esferocromática del tercer orden, bastaría hallar la misma diferencia, pero con las esféricas del tercer orden de las rayas  $F$  y  $C$ .

Suponiendo que igual que ocurría con la aberración esférica, existe una relación de linealidad entre la esferocromática total  $EC$  y la de tercer orden  $EC_3$ , podremos utilizar un método análogo al anteriormente empleado. Por otra parte, las características propias de esta aberración hacen que su estudio haya de tomar formas particulares, que veremos en el transcurso de su exposición.

Empecemos considerando cada raya por separado y llegaremos así a completar las marchas que podrán darnos las aberraciones esféricas.

La esférica para la raya  $F$  cumplirá:

$$E_F = E_{SF} + a_{2F} h^4 + a_{3F} h^6 + \dots$$

donde el significado de los símbolos es el mismo que ya vimos, con el subíndice que indica la raya en cuestión.

Para la  $C$  tendremos igualmente

$$E_C = E_{SC} + a_{2C} h^4 + a_{3C} h^6 + \dots$$

La diferencia entre ambas

$$E_F - E_C = E_{SF} - E_{SC} + (a_{2F} - a_{2C}) h^4 + \dots$$

pero, recordemos que por la definición que hemos dado de las aberraciones esferocromáticas, se cumplirá

$$\begin{aligned} E_F - E_C &= EC \\ E_{SF} - E_{SC} &= EC_3 \end{aligned}$$

y además

$$a_{1F} - a_{1C} = a_1$$

donde los nuevos  $a_i$  así definidos, son los coeficientes de los distintos órdenes de esferocromática.



Evidentemente quedará:

$$EC = EC_3 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + a_4 h^8 + \dots$$

completamente análoga a la obtenida para la aberración esférica.

Por ser lineal con el tercer orden se cumplirá:

$$EC = m EC_3 + b$$

y teniendo en cuenta que  $EC_3 = a_1 h^2$  llegamos a:

$$a_2 h^4 + a_3 h^6 + a_4 h^8 = (m - 1) a_1 h^2 + b$$

con lo que podremos formar un sistema cuya resolución nos dará los coeficientes buscados, en función de  $a_1$ .

Para la obtención de las ecuaciones de las rectas que figuran en los segundos miembros del sistema, recordemos que las consideraciones hechas en el caso de la aberración esférica, tienen también aquí validez. Es decir, necesitamos parejas de puntos, relacionadas entre sí por corresponder a la misma abertura y lo suficientemente alejados para que las rectas no impliquen mucho error. De la misma manera, la forma más rápida de conseguir un segundo punto con igual abertura es modificar la última cara y entrar a una altura que esté con la primitiva, en la misma relación que las dos distancias focales. Bastará entonces reducir convenientemente las dos esferocromáticas así conseguidas, para obtener el punto deseado. La forma de hacerlo, así como la elección de las alturas que facilitan mayormente los cálculos, está ya descrita en la parte correspondiente a la aberración esférica.

Naturalmente, el cálculo de los coeficientes de la aberración esferocromática, puede hacerse a través de los coeficientes de aberración esférica de las rayas  $F$  y  $C$ , obtenidos por el método ya señalado.

La diferencia entre los coeficientes del mismo orden, dará el correspondiente de la aberración esferocromática. Como hemos de efectuar marchas para las dos rayas, esto supondrá únicamente plantear dos sistemas de ecuaciones, en vez de uno.

Por la intervención de los datos de la raya media, que luego veremos, se hace necesario trabajar para las mismas alturas que en aquella, y por supuesto, los únicos datos que varían serán los índices de las lentes.

La resolución del sistema de ecuaciones en cuestión, dará lugar a las siguientes expresiones:

$$a_2 = n_2 a_1 + b_2$$

$$a_3 = n_3 a_1 + b_3$$

$$a_4 = n_4 a_1 + b_4$$

Estos coeficientes tienen las mismas dimensiones que los de la esférica, ya que son la diferencia entre ellos. De la misma forma que hacíamos en la esférica, podremos aquí obtener unos coeficientes generales que ya no dependan de la focal.

$$a_1 = A_1/f' \quad a_2 = A_2/f'^3 \quad a_3 = A_3/f'^5 \quad a_4 = A_4/f'^7$$

donde la focal será la del índice medio y correspondiente a la configuración del sistema para la que se ha conservado la abertura.



Sustituyendo en las expresiones de los  $a_i$

$$A_2 = n_2 f_1^2 A_1 + b_2 f_1^3$$

$$A_3 = n_3 f_1^4 A_1 + b_3 f_1^5$$

$$A_4 = n_4 f_1^6 A_1 + b_4 f_1^7$$

Como  $n_i$ ,  $b_i$  y  $f_1$  son conocidos, queda:

$$A_2 = p_2 A_1 + q_2$$

$$A_3 = p_3 A_1 + q_3$$

$$A_4 = p_4 A_1 + q_4$$

donde los  $p_i$  y  $q_i$  son valores generales.

Para una focal cualquiera  $f'$

$$A_1 = a_1 f'$$

y como  $a_1 = a_{1F} - a_{1C}$  habrá que obtener los  $a_1$  de cada una de las rayas extremas.

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la aberración esférica:

$$EC = EC_3 + A_2/f'^3 h^4 + A_3/f'^5 h^6 + A_4/f'^7 h^8$$

Multiplicando y dividiendo por  $f'$  y teniendo en cuenta que como la focal es la correspondiente al índice de refracción medio, el cociente de la altura partido por la distancia focal, será la abertura paraxial de la raya media:  $h/f' = \sigma'$  ( $\sigma'$  de la raya media) y, por tanto, la ecuación será:

$$EC = EC_3 + f' (A_2 \sigma'^4 + A_3 \sigma'^6 + A_4 \sigma'^8)$$

que es la fórmula general que da la aberración esférica total en función de la de tercer orden y de la distancia focal y abertura, de la raya media.

También puede usarse la fórmula

$$EC = f' (A_1 \sigma'^2 + A_2 \sigma'^4 + A_3 \sigma'^6 + A_4 \sigma'^8)$$

pero como hemos de conocer la esférica de tercer orden, puede evitarse la obtención del primer sumando del paréntesis, con esta fórmula podemos hallar la aberración esférica total, para cualquier altura.

#### ANULACIÓN DE LA ABERRACIÓN ESFÉRICA A UNA ALTURA PREFIJADA

Otro problema, cuya resolución es de mucho interés para los calculadores, es el poder predecir, que las curvas de esférica para los índices extremos, se cortarán para una altura determinada; que es lo mismo que decir que la aberración esférica se anulará para dicha altura. Esta altura suele ser la altura máxima, dividida por raíz de dos, pero igual puede hacerse para una altura cualquiera o para aquella en que sea máxima la aberración esférica.



El procedimiento es análogo al empleado con la esférica, pero presenta algunas características propias de las cromáticas.

Como la focal del sistema suele ser fija y elegimos una altura para la corrección de la esferocromática, nos encontramos con que permanecerá inmutable la abertura y, por tanto, no podremos utilizarla como parámetro variable en nuestros tanteos.

La dificultad que esto pudiera representar, la salvamos utilizando, abertura fija con la fórmula que da la esferocromática. En ella para anular la esferocromática a una altura determinada bastará:

$$EC = f' (A_1 \sigma'^2 + A_2 \sigma'^4 + A_3 \sigma'^6 + A_4 \sigma'^8) = 0$$

y quedará:

$$A_1 + A_2 \sigma'^2 + A_3 \sigma'^4 + A_4 \sigma'^6 = 0$$

y teniendo en cuenta las expresiones halladas para los  $A_i$ :

$$A_1 + (m_1 A_1 + b_1) \sigma'^2 + (m_2 A_1 + b_2) \sigma'^4 + (m_3 A_1 + b_3) \sigma'^6 = 0$$

sacando factor común:

$$[1 + (m_1 + m_2 \sigma'^2 + m_3 \sigma'^4) \sigma'^2] A_1 + (b_1 + b_2 \sigma'^2 + b_3 \sigma'^4) \sigma'^2 = 0$$

Si

$$M = m_1 + m_2 \sigma'^2 + m_3 \sigma'^4$$

$$N = b_1 + b_2 \sigma'^2 + b_3 \sigma'^4$$

$$(1 + M \sigma'^2) A_1 + N \sigma'^2 = 0$$

y despejando  $A_1$ :

$$A_1 = - \frac{N \sigma'^2}{1 + M \sigma'^2}$$

como los coeficientes  $A_i$  son conocidos podemos obtener  $M$  y  $N$  y dada la abertura correspondiente, tendremos  $A_1$ .

El modo práctico de llevar nuestros cálculos a partir de este  $A_1$ , es el siguiente:

Como  $a_1 = A_1/f'$ , podemos fácilmente hallar la esferocromática de tercer orden

$$a_1 h^2 = EC_3$$

Como la marcha paraxial para raya media ya la tenemos, así como sus sumas de Seidel, es evidente que conocemos la aberración esférica de tercer orden para la abertura en cuestión.

Como por otra parte sabemos que aproximadamente se cumple

$$\frac{E_{SF} + E_{SC}}{2} = E_s$$

$$E_{SF} - E_{SC} = EC_3$$

de estas ecuaciones hallamos las aberraciones esféricas de tercer orden para cada una de las rayas  $E_{SC}$  y  $E_{SF}$ .



Ahora sólo tendremos que modificar la dispersión de los vidrios para cada una de las rayas, hasta llevar sus esféricas de Seidel a esos valores previamente obtenidos. Como los tanteos se hacen únicamente con un índice y en marchas paraxiales, se obtiene rápidamente el valor necesario.

### CÁLCULOS

Para nuestros cálculos vamos a utilizar el mismo objetivo Tessar, que ya vimos y cuyos nuevos datos damos a continuación. El utilizar este mismo objetivo, facilita el trabajo, pues tenemos ya todas las marchas necesarias para la raya media que como queda expuesto nos son necesarias en los cálculos posteriores.

Los datos indicados son:

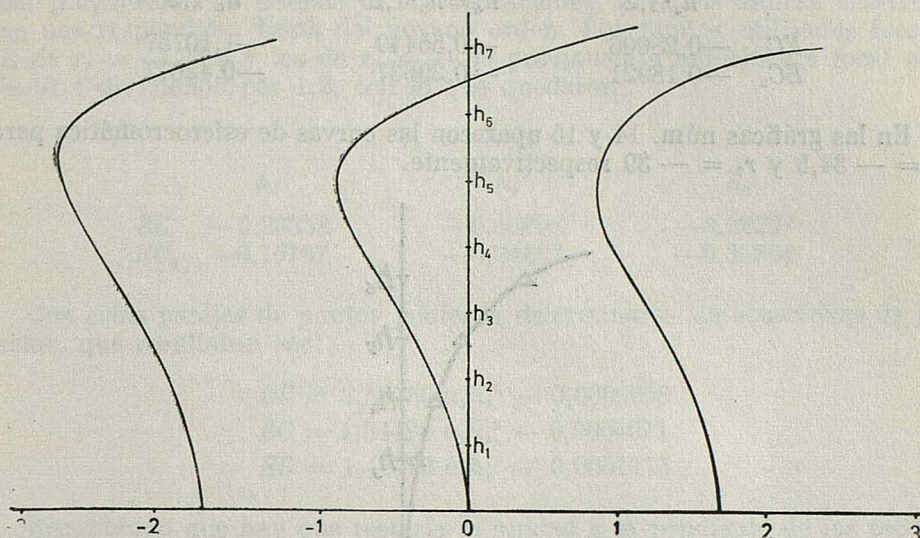
Vidrio	Indices	$\nu_e$
LaK 7	$n_c$ 1,64874	58,26
	$n_F$ 1,65997	
	$n_e$ 1,65425	
BaLF 3	$n_c$ 1,56862	52,70
	$n_F$ 1,57951	
	$n_e$ 1,57931	
K 5	$n_c$ 1,52024	59,47
	$n_F$ 1,52906	
	$n_e$ 1,52456	
F 12	$n_c$ 1,61417	36,19
	$n_F$ 1,63137	
	$n_e$ 1,62239	

Hemos efectuado marchas completas para las rayas  $F$  y  $C$ , correspondientes a las alturas  $h_6$ ,  $h_5$ ,  $h_4$  y  $h_3$  del Tessar primitivo. Las esféricas obtenidas son, para  $r_7 = -34,5$ .

	$C$	$F$
	$f' = 93,168$	$f' = 89,51$
$h_6$	$E$ -0,60183	-0,80426
	$E_s$ -2,11744	-2,19528
$h_5$	$E$ -0,84836	-0,95452
	$E_s$ -1,47044	-1,52450
$h_4$	$E$ -0,71357	-0,76877
	$E_s$ -0,94108	-0,97568
$h_3$	$E$ -0,46393	-0,48955
	$E_s$ -0,29781	-0,30876



La variación cromática de la aberración esférica puede verse en la gráfica núm. 13.



Gráfica 13

Las  $s'_F$  paraxiales para cada una de las tres rayas eran:

$F$	$e$	$C$
79,39077	81,15736	82,83927

Sus diferencias dan los puntos de  $h = 0$  en la gráfica anterior.

Para plantear el sistema usamos la modificación a  $r_7 = -39$  y alturas  $h_6 \cdot 1,2$ ,  $h_5 \cdot 1,2$ , y  $h_4 \cdot 1,2$ . Las esféricas obtenidas fueron:

		$C$	$F$
		$f' 112,273$	$f' 107,54$
$h_6 \cdot 1,2$	$E$	12,95761	11,85005
$h_6 \cdot 1,2$	$E_s$	2,83464	2,40787
$h_5 \cdot 1,2$	$E$	5,67819	5,12369
$h_5 \cdot 1,2$	$E_s$	1,96850	1,67213
$h_4 \cdot 1,2$	$E$	2,52854	2,24847
$h_4 \cdot 1,2$	$E_s$	1,25938	1,07016

Las aberraciones esferocromáticas, eran en cada caso:

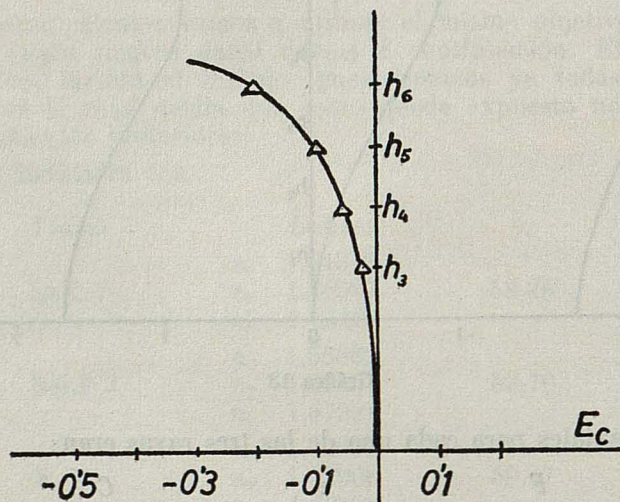
	$h_4$	$h_5$	$h_6$
$EC$	-0,05520	-0,10616	-0,20242
$EC_s$	-0,03460	-0,05406	-0,07785



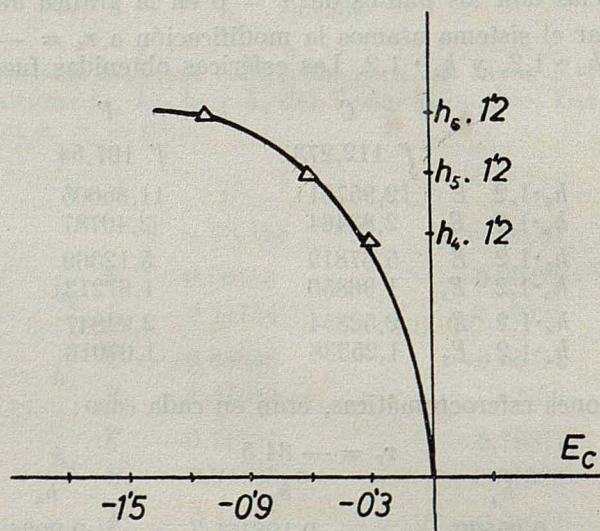
$$r_7 = -39$$

	$h_4 \cdot 1,2$	$h_6 = h_5 \cdot 1,2$	$h_6 \cdot 1,2$
$EC$	-0,28006	-0,55449	-1,10757
$EC_3$	-0,18921	-0,29637	-0,42677

En las gráficas núm. 14 y 15 aparecen las curvas de esferocromática para  $r_7 = -34,5$  y  $r_7 = -39$  respectivamente.



Gráfica 14



Gráfica 15



La diferencia entre la aberración esférica total y la del tercer orden, indicaba la existencia de órdenes elevados de aberración. Por lo cual preparamos un sistema de tres ecuaciones, para las alturas citadas y que nos respondiera hasta del noveno orden. Los puntos utilizados fueron los de  $r_7 = -34,5$  y los de  $r_7 = -39$  previamente reducidos a focal media 91,4 dividiendo por 1,2, con lo que quedaron:

$$r_7 = -39$$

	$h_4$	$h_5$	$h_6$
EC	-0,23338	-0,46208	-0,92297
EC <sub>3</sub>	-0,15767	-0,24697	-0,35564

Con estas parejas de puntos pudieron determinarse las ecuaciones de las rectas, que resultaron ser:

$$EC = 2,59380 a_1 h_6^2 - 0,0005058$$

$$EC = 1,84493 a_1 h_5^2 - 0,0064271$$

$$EC = 1,44773 a_1 h_4^2 - 0,0051115$$

Recordando que hay que restarle la unidad a la pendiente de las rectas, y previa división por la potencia cuarta de la altura, quedará:

$$a_2 + 66,77 a_3 + 4458,53 a_4 = 6705,4 \cdot 10^{-6} a_1 - 1,14 \cdot 10^{-6}$$

$$a_2 + 104,33 a_3 + 10885,08 a_4 = 8098,5 \cdot 10^{-6} a_1 - 0,590 \cdot 10^{-6}$$

$$a_2 + 150,23 a_3 + 22571,32 a_4 = 10608,4 \cdot 10^{-6} a_1 - 0,022 \cdot 10^{-6}$$

La resolución del sistema da los siguientes valores:

$$a_2 = 5691,720 \cdot 10^{-6} a_1 - 2,341 \cdot 10^{-6}$$

$$a_3 = 1,159 \cdot 10^{-6} a_1 + 0,020 \cdot 10^{-6}$$

$$a_4 = 0,210 \cdot 10^{-6} a_1 - 0,00003 \cdot 10^{-6}$$

Para la comprobación en el propio sistema que ha servido de base para su obtención, vamos a sustituir en las ecuaciones anteriores el valor de  $a_1$ , que es la diferencia entre los  $a_1$  de aberración esférica para ambas rayas.

$$r_7 = -34,5$$

F

C

$$a_1 = -0,01461$$

$$a_1 = -0,01409$$

la diferencia es:

$$a_1 = -518,2 \cdot 10^{-6}$$

y los demás:

$$a_2 = -5,29 \cdot 10^{-6}$$

$$a_3 = 0,0194 \cdot 10^{-6}$$

$$a_4 = -0,00014 \cdot 10^{-6}$$



Las esferocromáticas obtenidas por el empleo de estos valores, en la ecuación general las podemos comparar con las verdaderas.

	<i>EC verdadera</i>	<i>EC obtenida</i>
$h_6$	-0,20242	-0,20279
$h_5$	-0,10616	-0,10620
$h_4$	-0,05520	-0,05519
$h_3$	-0,02562	-0,01766

y la aproximación, como vemos en la gráfica núm. 14 es suficientemente buena.

Podemos usar ahora las fórmulas que nos dan los coeficientes generales  $A_i$ , usando las potencias de la distancia focal media 91,4, con lo que llegamos a:

$$\begin{aligned} A_2 &= 47,548 A_1 - 1,787 \\ A_3 &= 80,887 A_1 + 127,576 \\ A_4 &= 122434,80 A_1 - 1598,649 \end{aligned}$$

Para la modificación  $r_7 = -39$  teniendo en cuenta que es  $a_{1F} = 0,01310$  y  $a_{1C} = 0,01113$  quedará que  $a_1 = -0,00197$  y como la focal media es 107,97 y  $A_1 = a_1 f'$  queda:

$$\begin{aligned} A_1 &= -0,21694 \\ A_2 &= -12,10252 \\ A_3 &= 110,02863 \\ A_4 &= -28159,385 \end{aligned}$$

que nos conducen a:

$$r_7 = -39$$

	<i>EC verdadera</i>	<i>EC obtenida</i>
$h_6 \cdot 1,2$	-1,10756	-1,09867
$h_5 \cdot 1,2$	-0,55449	-0,55282
$h_4 \cdot 1,2$	-0,28006	-0,27963

En la gráfica núm. 15 aparecen representados los dos conjuntos de valores.

Para modificaciones ajenas al planteamiento del sistema y en las que se cambiaron los dos últimos radios, tenemos.

Para  $r_6 = 55$   $r_7 = -40$  y siendo la focal media 113,37, para la altura  $h_6$

$$a_1 = EC_3/h_6^2 = -0,00237$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} A_1 &= -0,26862 \\ A_2 &= -14,55987 \\ A_3 &= 105,84833 \\ A_4 &= -34486,95 \end{aligned}$$

y darán:

	<i>EC verdadera</i>	<i>EC obtenida</i>
$h_6$	-0,65456	-0,62269



Para otra modificación como la de

$$r_6 = 60 \quad r_7 = -36 \quad f' \text{ media} = 97,92$$

es  $a_1 = -0,00094$  y los coeficientes generales:

$$A_1 = -0,09150$$

$$A_2 = -6,13793$$

$$A_3 = 120,175$$

$$A_4 = -12800,85$$

y los resultados:

*EC verdadera*

*EC obtenida*

$$h_6 = -0,30083$$

$$-0,31973$$

Podemos ver una última modificación a

$$r_6 = 60 \quad r_7 = -38 \quad f' \text{ media} = 106,10$$

el valor de  $a_1$  es:

$$-0,00160$$

y los  $A_i$

$$A_1 = -0,16954$$

$$A_2 = -9,84870$$

$$A_3 = 113,86$$

$$A_4 = -22355,90$$

con ellos podemos obtener los valores de la esferocromática y compararlos con la verdadera.

*EC verdadera*

*EC obtenida*

$$h_6 = -0,46091$$

$$-0,47333$$

que son bastante coincidentes.

*Aplicación al caso de la anulación de la esferocromática a una altura prefijada*

Para conseguir la corrección de la aberración esferocromática para una altura dada, por ejemplo la  $h_6$  del Tessar de  $r_7 = -34,5$  y  $f' = 91,4$ , aplicaremos las fórmulas ya indicadas.

$$A_1 = -\frac{N \sigma'^2}{1 + M \sigma'^2}$$

donde  $N$  y  $M$  son las expresiones:

$$M = m_1 + m_2 \sigma'^2 + m_3 \sigma'^4$$

$$N = b_1 + b_2 \sigma'^2 + b_3 \sigma'^4$$

[10]



Para dicha altura corresponde una abertura  $\sigma' = 0,13412$  y tiene una esferocromática igual a  $-0,20242$  y con los  $m_i$  y  $b_i$  de las fórmulas [10] que daban los  $A_i$ , obtenemos:

$$M = 88,62321$$

$$N = -0,00996$$

y quedará  $A_1 = 69 \cdot 10^{-6}$  y de éste sabiendo que la distancia focal es  $f' = 91,4$  obtenemos que

$$a_1 = A_1/f' = 0,754 \cdot 10^{-6}$$

y por tanto  $EC_3 = a_1 h^2 = 113,3 \cdot 10^{-6}$ .

Como para dicha altura  $E_s = -2,15202$  tenemos que aproximadamente los valores de las aberraciones esféricas de tercer orden, para las rayas  $C$  y  $F$  serán:

$$E_{sf} = -2,15207$$

$$E_{sc} = -2,15196$$

y si modificando el índice de la última superficie llevamos la esférica de tercer orden a ese valor habremos corregido la esferocromática.

Para la raya  $F$  llevando el referido índice a 1,62996 obteníamos una aberración esférica de tercer orden  $E_{sf} = -2,15253$  y para la  $C$ , con 1,61524 llegamos a una  $E_{sc} = -2,15206$  y la aberración esferocromática total queda así reducida a  $EC = 0,01656$ , lo que representa un buen resultado.

## CONCLUSIONES

1.<sup>a</sup> Todo nuestro trabajo confirma que, la aberración esférica de cualquier sistema, es una función lineal de su esférica de 3.<sup>er</sup> orden.

2.<sup>a</sup> En la representación de la aberración esférica total en función de la de tercer orden, la ordenada en el origen es una consecuencia de la existencia de órdenes superiores al tercero.

3.<sup>a</sup> Del estudio que hemos realizado se desprende que en los sistemas que presentan órdenes superiores al tercero en la aberración esférica, cuando se modifican los parámetros del sistema, tales como radios, espesores, índices, pero se conservan las características de focal y abertura, los términos de órdenes superiores de la aberración varían cada uno de ellos según una función lineal del término de 3.<sup>er</sup> orden, siempre que las incidencias no excedan de  $30^\circ$ .

4.<sup>a</sup> Expresada la aberración esférica de un sistema en serie de potencias de orden par del ángulo de abertura de la forma

$$E = f' (A_1 \sigma'^2 + A_2 \sigma'^4 + A_3 \sigma'^6 + A_4 \sigma'^8)$$

el coeficiente  $A_1$  del término de 3.<sup>er</sup> orden, podemos obtenerlo a partir de la suma  $S_1$  de Seidel, ya que  $f' A_1 \sigma'^2$  es la aberración esférica de 3.<sup>er</sup> orden. Los restantes coeficientes  $A_2, A_3 \dots A_n$  son, según lo dicho anteriormente, funciones lineales de  $A_1$ .



5.<sup>a</sup> Los coeficientes  $A_i$ , que carecen de dimensiones, son válidos para sistemas de cualquier focal y abertura, siempre que se conserve el formato del sistema.

Por lo tanto el conocimiento de estos coeficientes para un tipo de sistemas, nos permitirá calcular la aberración esférica hasta el orden que deseamos, para cualquier abertura.

6.<sup>a</sup> Para estimar los órdenes aberrantes que hemos de considerar, dado un sistema óptico, calculamos la aberración esférica correspondiente al rayo de borde de pupila, y la esférica del tercer orden según Seidel. La diferencia entre ambas y la exactitud buscada, indicarán que el cálculo de la aberración esférica aproximada ha de llevarse con términos hasta un cierto orden.

7.<sup>a</sup> Para el cálculo de los coeficientes, proponemos el siguiente método: Efectuamos tantas marchas de rayos, como órdenes superiores al tercero utilizemos, tomando la máxima abertura y las resultantes de dividir ésta por  $m$ ,  $m^2$ ,  $m^3$ , etc., siendo  $m$  el factor de paso de focal, y obtenemos las correspondiente aberraciones esféricas.

Modificamos el último radio para obtener una focal igual a la anterior dividida por  $m$ , y calculamos nuevamente la esférica de tercer orden y las marchas de borde para las mismas aberturas (sirven todas las efectuadas menos una, hasta la penúltima superficie). Llevando todos estos valores de  $E$  a la ecuación de la conclusión 4.<sup>a</sup>, obtenemos un sistema del que podemos despejar  $A_2$ ,  $A_3$  ...  $A_n$ , en función de  $A_1$ .

8.<sup>a</sup> Con nuestro método podemos corregir la aberración esférica de un sistema para el valor que deseamos de la abertura. Para ello, sustituimos en la fórmula mencionada los coeficientes  $A_2$ ,  $A_3$  ...  $A_n$  por sus expresiones en función de  $A_1$  e igualamos a cero. Obtenemos así un valor para  $A_1$ ; basta entonces llevar al sistema, modificando los radios, espesores, o índices, hasta obtener el valor calculado de  $A_1$  (lo que se hace sólo con marchas paraxiales) para encontrar el valor deseado de la aberración esférica.

9.<sup>a</sup> Por lo que respecta a la aberración esferocromática, dados los resultados obtenidos con la aberración esférica, se puede concluir que la aberración esferocromática es una función lineal de la aberración esferocromática del 3.<sup>er</sup> orden, así como lo son cada uno de los órdenes superiores por separado.

10.<sup>a</sup> Los coeficientes de los distintos órdenes pueden calcularse a base de las diferencias cromáticas de los del 3.<sup>er</sup> orden.

11.<sup>a</sup> Se da un procedimiento para corregir la aberración esferocromática a una altura prefijada.

#### B I B L I O G R A F I A

- (1) J. CASAS, J. R. DE F. MONEO y J. LACASTA. — Rev. Ac. Cienc. Zaragoza (1961).
- (2) C. CUEVAS. — Tesis Doctoral.
- (3) C. MORAIS. — Conferencias archivadas en el Instituto de Optica. Madrid.
- (4) J. CASAS y J. BARCALA. — *Esquemas de cálculos ópticos para máquinas de calcular*. An. Real Soc. F. y Q., 49 A, 191 (1953).
- (5) H. H. HOPKINS. — *Wave Theory of Aberrations*. — Oxford University Press, 1959.



# MEDIDAS EN ESPACIOS FOLIADOS Y EN ESPACIOS HOMOGENEOS APLICACION A LA GEOMETRIA INTEGRAL

POR

F. JAVIER ECHARTE REULA

## INTRODUCCION

Los estudios sobre Geometría Integral pueden dividirse en dos períodos. El primero, iniciado por el profesor Blaschke en 1933, estudia las medidas de objetos geométricos en el espacio ordinario, espacio euclídeo de  $n$  dimensiones y las generalizaciones debidas a Santaló a espacios de curvatura constante. En esta época se obtienen gran número de resultados, siendo muchos los cultivadores que continúan los estudios del profesor Blaschke, dando lugar a la llamada "escuela de Hamburgo".

El segundo período se inicia en 1942 con la memoria del profesor Chern publicada en los "Annalen of Math" de Princeton sobre: *Geometría Integral en un espacio de Klein*. Todos los resultados anteriores relativos a los espacios euclídeos o de curvatura constante, quedaban sistematizados con los métodos del profesor Chern relativos a un espacio en el que actúa un grupo de transformaciones transitivamente. Estos estudios son continuados por el prof. Santaló y el estado de la Geometría Integral después de la aportación de las ideas de Chern, queda magistralmente expuesta en el libro de Santaló: *Introduction to Integral Geometry*, París 1953. En la sistematización del profesor Chern, no quedaban incluidos los resultados relativos a la Geometría Integral en los espacios de Riemann, y desde un principio el objetivo que nos propusimos fue pasar a un espacio conveniente en donde las figuras que se desean medir sean subvariedades integrales de un sistema de Pfaff completamente integrable, para lograr una teoría que comprendiese como caso particular la de Chern relativa a los espacios homogéneos.

Por otro lado en ninguno de los estudios relativos a la Geometría Integral se utiliza la frontera del conjunto que se desea medir, pero en un resultado del profesor Vidal del año 1950, la integral de geodésicas que cortan a una curva  $C$  sobre una superficie, se encuentra como integral de la diferencial de un invariante integral relativo sobre el "tubo" de geodésicas tangentes a  $C$ . Siendo  $C'$  una curva cerrada cualquiera que corta a las geodésicas tangentes, se verifica:

$$\left| \iint \sin \alpha \, d\alpha \, ds \right| = \int_{2, C'} \cos \alpha \, ds$$

( $\alpha$  el ángulo de corte de  $C'$  con las geodésicas).



Si como curva  $C'$  se toma la curva  $C$  dada,  $\alpha = 0$ ; encontrándose entonces  $\int \cos \alpha \, ds = 2L$ , siendo  $L$  la longitud de  $C$ . Nuestro objetivo por lo tanto, era elaborar una teoría para medir conjuntos de figuras geométricas estableciendo una correspondencia (difeomorfismo) con otras que constituyen un espacio foliado; sobre este espacio las medidas vendrán dadas por invariantes absolutos diferenciales exteriores de invariantes relativos.

Aun cuando al comenzar nuestro estudio no conocíamos existiese ningún otro en la misma dirección, durante su elaboración aparecieron varios que nos confirmaron en el interés del tema, pero que por la importancia de las nociones puestas en juego nos han inducido a modificar algo nuestros objetivos iniciales, obligándonos a reelaborar completamente nuestros resultados. El primero a considerar es un trabajo del profesor Legrady (1), iniciando el estudio de la Geometría Integral en espacios homogéneos con los recursos de la teoría de espacios fibrados. Otro trabajo reciente (1960) más ambicioso y más próximo al objetivo inicial de nuestros estudios, considera independientemente la Geometría Integral en un espacio foliado y en un espacio homogéneo, y utiliza sistemáticamente los recursos de La Geometría Diferencial Global, relativa a las aplicaciones entre dos variedades diferenciales (Hermann (2)).

Puesto que la medida de un conjunto de hojas en la variedad foliada corresponderá a una densidad en el espacio cociente nos pareció necesario comenzar por analizar las condiciones de existencia de un espacio cociente en la variedad foliada y cuando este espacio cociente era variedad diferenciable, relacionando estos estudios con las nociones sobre "aplicación de descomposición" y "hojas regularmente conectadas", de Hermann ([1], 1960 y [3], 1962). Para ello hemos seguido los estudios de Reeb (1) y Palais (1, 1957) de las variedades foliadas, especialmente en lo relativo a sistemas reguladores completamente integrables deduciendo diversos resultados en relación con los de Hermann (teoremas (2,3), (2,5) y (2,7)).

Hemos completado las fórmulas de Hermann con otras más generales relacionándolas con las de Mostow [1], en los espacios fibrados.

Estudiamos la relación entre las formas invariantes en las aplicaciones de descomposición y los invariantes integrales en el sentido clásico, valiéndonos de la exposición de Deheuvels [1], dando alguna demostración original como la relativa al grupo de holonomía de la hoja en variedad foliada si la transformación inducida en los espacios tangentes por los cambio de cartas viene dada por un grupo de matrices.

Dado el sistema de Pfaff  $\omega_i = 0$ , ( $i = 1, 2 \dots n$ ) completamente integrable, la forma  $\Omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n$  será una densidad si  $d\Omega = 0$ . Analizamos la variedad foliada, la variedad cociente de la foliación y los invariantes integrales en relación con esta forma diferencial, completando las fórmulas de Hermann con las relativas a la frontera.

Estudiamos y clasificamos los invariantes integrales, deduciendo nuevas expresiones para los invariantes relativos y dando algunos ejemplos utilizando los resultados de la integral clásica de Hilbert del cálculo de variaciones y la integral de geodésicas en un espacio de Riemann, obteniendo nuevas fórmulas tales como la expresión del invariante relativo, y un



ejemplo de descomposición de un invariante relativo en suma de un absoluto y una diferencial exacta, de acuerdo con un teorema de Poincaré.

En el estudio de la Geometría Integral en los espacios homogéneos damos una nueva y detallada deducción de la fórmula de Hermann para calcular la integral  $\int_G N(K \cap K_0) dg$  siendo  $K$  y  $K_0$  dos subvariedades de  $G/H$  ( $H$  subgrupo cerrado de  $G$ ),  $N(K \cap K_0)$  = número de intersecciones de  $gK$  y  $K_0$ ;  $g \in G$ . Hermann sigue un método muy ingenioso considerando la variedad  $K_0 \times H \times K$ , equivalente a tomar unas coordenadas sobre las subvariedades  $K$  y  $K_0$ , determinando cada posible intersección de  $K$  y  $K_0$  si existe  $g \in G$  tal que  $gx = y$ , sea  $A = (y, h, x)$  ( $y \in K_0$ ,  $h \in H$ ,  $x \in K$ ), el número de estos elementos  $A$  correspondientes a cada  $g \in G$ , da el número de puntos de intersección, es decir  $(y, h, x)$  determinan un elemento  $g = \psi(\gamma) h \theta(x)^{-1}$  tal que  $gx = y$ . Tomar cada punto posible de intersección  $x = y$ , y allí todas las posibles posiciones de  $K$ , con ese punto  $y$  en  $x$ , es lo mismo que considerar cada posición multiplicada por el número de intersecciones. La primera tiene la ventaja de poder encontrar una forma diferencial  $\alpha^*(dg)$  sobre el espacio fibrado de base  $K \times K_0$ , y fibra  $H$  deduciéndose:

$$\int_G N dg = \int_{K_0 \times H \times K} \alpha^*(dg)$$

Aplicamos estas teorías anteriores a varios ejemplos simples en espacios euclídeos de dos y tres dimensiones, generalizándolos a los de  $n$  dimensiones, y considerando conjuntos de dimensión menor que la máxima posible. Exponemos brevemente las nociones precisas sobre la Geometría Integral en espacios de curvatura constante y deducimos una nueva fórmula que no conocemos hubiese sido generalizada a estos espacios: "densidad de pares de puntos", utilizando resultados de Allendoerfer (1).

Finalmente deducimos algunos resultados relativos a ejemplos de medidas posibles en variedades sobre las que actúan grupos de Lie no transitivamente.



## MEDIDAS EN ESPACIOS FOLIADOS

—Medidas en espacios cociente de foliaciones.

### 1. Espacios foliados y aplicaciones de descomposición

Dada la variedad diferenciable  $(M, \psi)$ , siendo  $\psi$  un atlas  $n$ -dimensional completo para el conjunto  $M$ , los dominios de las cartas de  $\psi$  forman una base para una topología  $Y$ , llamada *topología de la variedad*  $(M, \psi)$ .

Un sistema de coordenadas para la variedad diferenciable  $(M, \psi)$  es un  $m+1$ -tuple  $(x_1, x_2, \dots, x_m, U)$ , tales que  $U$  es el dominio de una carta  $\varphi \in \psi$  y las  $x_i$  son funciones con valores reales en  $M$  tales que  $(x_i/U = t_i \cdot \varphi)$ , donde las coordenadas naturales de  $\varphi(x)$  en  $R^m$ .

#### DEFINICIÓN

Diremos que  $(x_1 \dots x_m, U)$  es un sistema cúbico de coordenadas de ancho  $2a$  centrado en  $p \in M$ , si  $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ ,  $\varphi(U) = (t_1 \dots t_m) \in R^m$ ,  $|t_i| \leq a$ . En este caso si  $|t_{n+i}| \leq a$  para  $i = 1, 2, \dots, m-n$ , llamaremos *placa  $n$ -dimensional* de  $(x_1 \dots x_m, U)$  a la subvariedad  $\Sigma_t = \{q \in U, x_{n+i}(q) = t_{n+i}\}$  definida por  $t = (t_{n+1} \dots t_m)$ . Las placas corresponden en  $M$  a las subvariedades lineales determinadas en el sistema de coordenadas  $t$  en  $R^n$  por  $(t_1 \dots t_n)$ .

Sean  $(M, \psi)$  y  $(N, \Phi)$  variedades diferenciables en donde  $N$  está contenida en  $M$ , y sea además  $i$  la inclusión  $i: N \rightarrow M$ . Decimos que  $(N, \Phi)$  es una subvariedad diferenciable de  $(M, \psi)$  si  $i$  es diferenciable y regular. Si además  $i$  es un homeomorfismo respecto de las topologías de las variedades, entonces  $(N, \Phi)$  se dice que está regularmente sumergida en  $(M, \psi)$ , y finalmente si  $N$  es un subespacio cerrado de  $M$  respecto a la topología de la variedad  $(M, \psi)$  entonces  $(N, \Phi)$  se llama subvariedad cerrada de  $(M, \psi)$ .

Si  $(M, \psi)$  es una variedad diferenciable, y  $D$  un subconjunto abierto de  $M$ , y si  $\psi_D = \{\psi_\xi \in \psi; \xi \text{ (dominio de } \psi_\xi) \text{ contenido en } D, \text{ entonces } (D, \psi_D) \text{ es una subvariedad diferenciable regularmente sumergida en } (M, \psi) \text{ llamada subvariedad abierta definida por } D.$



Si  $F$  es un sistema diferencial  $n$ -dimensional sobre  $M$ , un sistema de coordenadas  $(x_1 \dots x_m, D)$  se llamará *llano* (flat) respecto de  $F$ , si para cada  $q \in D$ ,  $(X_i)_q$  es una base de  $F_q$ , siendo  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Si  $(x_1 \dots x_m, D)$  es un sistema cúbico de coordenadas en  $M$ , entonces una condición necesaria y suficiente para que sea llano respecto de  $F$ , es que cada una de sus placas  $n$ -dimensionales  $t = (t_{1+n} \dots t_m)$  sea una subvariedad integral de  $F$ .

Dada la variedad diferenciable real  $M$ , de dimensión  $m$ , sea  $\mathcal{F} = \Omega^\bullet$  haz de funciones  $C$  diferenciables sobre  $M$ ,  $\Omega^p$  el haz de formas diferenciables de grado  $p$  sobre  $M$ . Sea  $M_x$  el espacio tangente en  $x \in M$ . Si  $\Phi: M \rightarrow N$  es una aplicación  $C^\infty$  de  $M$  en  $N$ ,  $\Phi_*: M \rightarrow N_{\Phi(x)}$  es la aplicación lineal inducida entre los espacios tangentes. Si  $\omega$  es una forma diferencial sobre  $N$ , denotaremos  $\Phi^*(\omega)$  la forma diferencial inducida sobre  $M$  por  $\Phi$ .  $\Phi \cdot \Phi$  define una relación de equivalencia sobre  $M$ .

#### DEFINICIÓN 1-2

Una foliación en  $M$  está definida por un campo  $C^\infty$ ,  $F: x \rightarrow F_x \in M_x$  de subespacios tangentes de dimensión constante, completamente integrable: o lo que es lo mismo, satisfaciendo a la condición de Frobenius  $[X_i, X_j] = \sum_h c_{ij}^h X_h$  para todo  $X_i, X_j, X_h \in F$ , formando lo que Chevalley llama una *distribución involutiva*.

Que el sistema  $F$  sea completamente integrable también es equivalente a que en cada punto  $p \in M$ , exista un sistema cúbico de coordenadas centrado en  $p$  y llano respecto de  $F$  (vid. Palais [1]). Por cada  $x \in M$  existe una variedad conexa  $L$  máxima para la foliación, de dimensión  $n$  igual a la de  $F$ , tal que el espacio tangente a  $L$  en cada punto  $x \in L$  es  $F_x$ . Las variedades  $L$  son las hojas de la foliación.  $\pi_F: M \rightarrow M/F$  es la proyección que pasa de un punto  $x$  a la hoja que lo contiene.  $M$  se llama *espacio foliado*.

#### DEFINICIÓN 1-3

Decimos que una aplicación diferenciable, de clase  $C^\infty$ ,  $\theta: U \rightarrow B$  (sobre  $B \subset N$ ), de un abierto  $U$  de  $M$ , es una aplicación de descomposición para dicha foliación, cuando se verifica:

- 1.º  $\dim M = \dim U = \dim B + \dim F$ .
- 2.º  $F_x = \theta_*^{-1}(0)$  para todo  $x \in U$ , siendo por tanto  $F_x$  el núcleo de  $\theta_*$  en  $x$ . Entonces por esta condición,  $\theta$  es constante sobre cada hoja de  $F$  en  $U$ . Una aplicación de descomposición no tiene que existir globalmente, puede existir localmente en el sentido de que  $M$  puede ser recubierta por un conjunto de abiertos  $U$ , tales que la foliación en cada  $U$  tiene una aplicación de descomposición  $\theta_u: U \rightarrow B_u$ . Si la propia  $\Phi: M \rightarrow N$  es una aplicación de descomposición, nos encontramos con que:



1.° Todos los puntos de la misma hoja se aplican sobre el mismo punto de  $N$ .

2.° Todos los vectores tangentes a las hojas y sólo ellos se aplican sobre el vector nulo. Por tanto si  $\Phi: M_x \rightarrow N_{\phi(x)}$ ,  $F_x$  es el núcleo de  $\Phi_*$  y por consiguiente  $M_x/F_x$  y  $N_{\phi(x)}$  son isomorfos. Si  $\omega$  es una forma diferencial sobre  $N$ ,  $\Phi^*(\omega)$  será la correspondiente sobre  $M$ , y entonces se verificará que si  $x, y \in L$  (hoja de  $M$ ),  $u \in F_x, v \in F_y$ , se sigue:

$\Phi_x^*(\omega)(u) = \Phi_y^*(\omega)(v) = \omega(x)(0)$ . Luego  $\Phi^*(\omega)$  es constante sobre cada una de las hojas.

Por cada punto de  $M$  pasa una hoja, y a cada una de dichas hojas les corresponde un punto de  $N$ , queda por tanto definida una aplicación  $\Phi: M/F \rightarrow N$  pudiendo establecer el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & N \\ \pi_F \downarrow & \nearrow \Phi' & \\ M/F & & \end{array}$$

También se deduce la sucesión exacta de aplicaciones

$$0 \longrightarrow F_x \xrightarrow{i} M_x \xrightarrow{\Phi_*} N_{\phi(x)} \longrightarrow 0$$

## 2. Variedades cociente definidas por foliaciones

En este número precisamos algunas propiedades en su mayoría conocidas, de las variedades cociente definidas por foliaciones, las cuales necesitamos para establecer relaciones entre esa variedad cociente y su frontera, que nos permitirán deducir las medidas en variedades foliadas pasando a calcular invariantes relativos sobre la frontera. Relacionamos los resultados de Reeb [1] y Palais [1] con los de Hermann, deduciendo nuevas consecuencias en especial los teoremas (2,3) y (3,4). Comenzaremos estableciendo algunas notaciones y definiciones.

### DEFINICIÓN 2-1

Considerando el espacio foliado  $M$  con hojas  $L$ , diremos que una curva  $\sigma: [0,1] \rightarrow M$  es vertical si está completamente en una hoja. Una homotopía de curvas  $0 \leq s, t \leq 1$ , se llama vertical, si para cada  $s$  la curva  $t \rightarrow \delta(s, t)$  es vertical. Es inmediato que estas homotopías tienen la propiedad geométrica de que bajo una aplicación de descomposición, todas las curvas  $s \rightarrow \delta(s, t)$  se proyectan en la misma curva del espacio base (vid. Hermann [1]).

Un campo  $E: x \rightarrow E_x \subset M_x$  de subespacios tangentes, tal que se verifique  $M_x = F_x \oplus E_x$  para todo  $x \in M$  se llamará *campo horizontal* para la foliación. Una curva  $\sigma: [0,1] \rightarrow M$  se dirá horizontal si  $\sigma'(t) \in E_{\sigma(t)}$  para  $t \in [0,1]$ .



Una curva horizontal  $\gamma: [0,1] \rightarrow M$  se llama regular si se verifica que para cada curva vertical  $\sigma: [0,1] \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = \sigma(0)$  existe una homotopía vertical  $\delta(s, t)$ ;  $s, t < 1$  tal que se verifique  $\delta(s, 0) = \gamma(s)$ ,  $\delta(0, t) = \sigma(t)$  y cada curva  $s \rightarrow \delta(s, t)$  es horizontal. Se sabe que si  $\sigma$  y  $\gamma$  son suficientemente pequeños,  $\delta$  existe siempre y es única (vid. Ehresmann [4]).

Se dice que dos hojas  $L$  y  $L'$  están *regularmente conectadas* si existe una curva horizontal regular conectando  $L$  y  $L'$ , tal que su inversa es también regular.

La condición de que un sistema de coordenadas, cúbico sea *llano* respecto a la foliación  $F$ , es que las curvas coordenadas  $x_1 \dots x_n$  sean verticales, es decir, que cada una de las placas  $n$ -dimensionales  $\Sigma$  definidas por  $t = (t_{n+1} \dots t_m)$  sea una variedad integral de  $F$ .

Se prueba que para que  $F$  sea completamente integrable es condición necesaria y suficiente que para cada punto  $p \in M$ , exista un sistema cúbico centrado en  $p$ , y cuyas coordenadas sean verticales (vid. Chevalley [1]).

Cuando cada placa  $\Sigma_t$  de un sistema cúbico  $(x_1 \dots x_m; D)$  de coordenadas sea parte de una hoja, la aplicación  $q \rightarrow (x_1(q) \dots x_m(q))$  de  $\Sigma_t$  en  $R^n$  se llama una carta-hoja de  $M$  respecto a la foliación  $n$  definida por  $F$ . Estas cartas-hojas constituyen una atlas diferenciable  $\psi_F$  para  $M$ . Entonces, una componente conexa respecto de la topología de la variedad  $(M, \psi_F)$ , considerada como una subvariedad abierta de esta variedad, es una hoja  $L$  de  $F$ .

Sea  $\pi_F$  la aplicación canónica de  $M$  en  $M/F$  que aplica  $x \in M$ , en la hoja  $L$  que pasa por  $x$ . Un subconjunto de  $M$  se llama *saturado* (con respecto a  $F$ ) si es la unión de hojas de  $F$ . Si  $S \subset M$ , la saturación de  $S$  es  $\pi_F^{-1}(\pi_F(S))$ . La topología cociente de  $M/F$  es la topología más fina para la que  $\pi_F$  es continua; los conjuntos abiertos de esta topología son las imágenes de los conjuntos abiertos y saturados de  $M$  por  $\pi_F$ .

En general, si  $\pi$  es una aplicación de un espacio topológico  $X$  sobre un conjunto  $Y$ , existe a lo sumo una topología en  $Y$  tal que  $\pi$  es continua y abierta. Por lo tanto:

## PROPOSICIÓN

*Si  $F$  es un sistema diferencial completamente integrable sobre una variedad diferenciable  $M$ , entonces la topología cociente de  $M/F$  está caracterizada unívocamente por la condición de que respecto a ella  $\pi_F$  es continua y abierta.*

## DEFINICIÓN 2-2

Sea  $F$  un sistema diferencial completamente integrable sobre la variedad diferenciable  $M$ . Un sistema de coordenadas  $(x_1 \dots x_m; D)$  en  $M$  se llama *regular* respecto de  $F$ , si es cúbico, llano respecto de  $F$ , y si cada hoja de  $F$  corta a  $D$  a lo más en una placa  $n$ -dimensional de  $(x_1 \dots x_m, D)$ . Una hoja de  $F$ , se llama hoja regular de  $F$  si corta a un dominio de un sistema de coordenadas regular (respecto a  $F$ ). El sistema se llama regular si toda hoja de  $F$  es regular.



Sea  $(x_1 \dots x_m; D)$  un sistema cúbico de coordenadas de ancho  $2a$  en  $M$  y que sea llano respecto del sistema  $n$ -dimensional  $F$ . Un sistema de coordenadas  $(y_1 \dots y_m; U)$  en  $M$  se dice subordinado al  $(x_1 \dots x_m; D)$  respecto de  $F$ , si es llano respecto de  $F$ , cúbico de ancho  $2b < 2a$  y si  $|t_{n+1}| < b$   $i = 1, 2 \dots m-n$ , implica que las placas  $n$ -dimensionales  $\sum_i$  de  $(x_1 \dots x_m; D)$  y  $(y_1 \dots y_m; U)$  definidas por  $(t_{n+1} \dots t_m)$  sean partes de una misma hoja de  $F$ .

## TEOREMA 2-1

Dado un sistema completamente integral  $F$  sobre  $M$ , una condición necesaria y suficiente para que una hoja  $L$  de  $F$  sea una hoja regular de  $F$ , es que para cada punto  $q \in L$  haya un sistema cúbico de coordenadas centrado en  $q$ , que sea regular respecto de  $F$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $F$  sea regular, es que para cada punto  $q \in L$  haya un sistema cúbico de coordenadas centrado en  $q$  y regular respecto a  $F$ .

Es interesante dar una idea de la demostración de la primera parte de este teorema (vid. Palais [1], pág. 14).

La condición necesaria se deduce inmediatamente de la definición de sistema de coordenadas regular. Para probar la condición suficiente tendremos en cuenta que si un sistema de coordenadas  $(x_1 \dots x_m; D)$  en  $M$  es regular respecto a  $F$ , cualquier sistema de coordenadas subordinado a él es regular respecto de  $F$ , es decir, tal que las placas  $(x_{n+1} \dots x_m; D)$  y  $(y_{n+1} \dots y_m; U)$  definidas por  $(t_{n+1} \dots t_m)$  son partes de una misma hoja si  $|t_{n+1}| < b < a$  para  $1 \leq i \leq m-n$ . Entonces si  $(x_1 \dots x_m; D)$  es un sistema regular con respecto a  $F$  tal que  $L \cap D = \Phi$  y  $q \in L$ , se pasa del sistema  $(x_1 \dots x_m; D)$  a otro  $(y_1 \dots y_m; U)$  con centro en un punto  $p \in L \cap D$  y de este a otro  $(z_1 \dots z_m; V)$  de centro  $q$  y subordinado al anterior y por tanto regular.

## TEOREMA 2-2

Sea  $F$  un sistema diferencial completamente integrable sobre una variedad  $M$   $m$ -dimensional, y  $(x_1 \dots x_m; D)$  un sistema de coordenadas regular con respecto a  $F$ . Entonces hay una única  $m-n$  dimensional carta en  $M/F$  con dominio en  $\pi_F(D)$  tal que  $\varphi_0 \pi_F(q) = (x_{n+1}(q) \dots x_m(q))$  para todo  $q \in D$ . Dos de tales cartas  $\varphi$ , están relacionadas diferencialmente y el conjunto de todas ellas para  $M/F$  constituye un atlas diferenciable para  $M/F$  si, y sólo si  $F$  es regular.

Demostración: Si  $L$  corta a  $D$  y si el sistema de coordenadas sobre  $D$  es regular con respecto a  $F$ , esta intersección es una sola placa de  $(x_1 \dots x_m; D)$  definida por  $(t_{n+1} \dots t_m)$ . Definimos por  $\varphi(L) = (t_{n+1}, \dots, t_m)$  donde resulta  $\varphi_0 \pi_F(q) = (x_{n+1}(q) \dots x_m(q))$ . Evidentemente  $\varphi$  es una correspondencia biunívoca y su imagen es el cubo en  $R^{m-n}$  de la misma anchura  $(x_1 \dots x_m; D)$ . Entonces  $\varphi$  es una carta  $m-n$ -dimensional sobre  $M/F$ . Dos de tales cartas están relacionadas diferencialmente. Recíprocamente,



si las  $\varphi$  forman un atlas diferenciable exige que pueda definirse sobre cada una de ellas un sistema de coordenadas regular, lo que significa que  $F$  es regular.

### DEFINICIÓN 2-3

#### *Variedad cociente de una foliación*

Sea  $F$  un sistema diferencial completamente integrable sobre la variedad diferenciable  $M$ . Una carta en  $M/F$  tal como las descritas en el teorema anterior se llama una carta *natural* (con respecto a  $F$ ). Si  $F$  es regular dichas cartas en  $M/F$  forman un atlas, llamado el *atlas natural* para  $M/F$ , y la variedad definida por este atlas natural se llama *variedad cociente* de  $M$  definida por  $F$ . Es importante hacer notar que si  $F$  no es regular el conjunto de las cartas naturales no forman un atlas para  $M/F$  y, por tanto,  $M/F$  no es una variedad diferenciable (Vid. Palais [1]).

### TEOREMA 2-3

Si  $F$  es un sistema diferencial regular sobre una variedad diferenciable  $M$ , la aplicación  $\pi_F: M \rightarrow M/F$  es una aplicación de descomposición.

En efecto, por cada  $p \in M$  para una hoja  $L$  de la foliación  $F$  y como  $F$  es regular, según el teorema 2-1 hay un sistema cúbico de coordenadas  $(x_1 \dots x_m; D)$  centrado en  $p$  que es regular respecto de  $D$ . Por definición de la variedad diferenciable  $M/F$  y ser  $(x_1 \dots x_m; D)$  regular, hay un sistema de coordenadas  $(\bar{x}_{n+1} \dots \bar{x}_m; \pi_F(D))$  en  $M/F$  tal que  $\bar{x}_{n+1} \circ \pi_F = x_{n+1}$  ( $1 \leq i \leq m-n$ ). Esto implica la diferenciabilidad de  $\pi_F$  en cada  $q \in D$ , y se deduce fácilmente que:

$$(\pi_F)_* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{para } i \leq n$$

$$(\pi_F)_* \left( \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \right)_p = \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}_{n+i}} \right)_{\pi_F(p)} \quad \text{para } 1 \leq i \leq m-n$$

con lo que queda probado que  $(\pi_F^{-1})_*(0) = F_x$ . Para completar la demostración basta tener en cuenta que

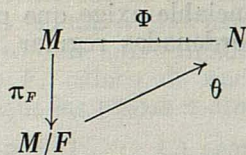
$$\dim M = \dim M/F + \dim F = \dim B + \dim F.$$

### TEOREMA 2-4

Sea  $F$  un sistema completamente integrable sobre una variedad diferenciable  $M$ . Entonces, si  $\Phi: M \rightarrow N$  es una aplicación diferenciable de  $M$  en otra variedad diferenciable  $N$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) Existe una aplicación  $\theta: M/F \rightarrow N$  tal que  $\Phi = \theta \circ \pi_F$ .
- 2) Para todo  $p \in M$  se sigue  $\Phi_*(F_p) = 0$ .
- 3)  $\Phi$  es constante sobre las hojas de  $F$ .





Demostración;  $1 \Rightarrow 2$ :

En efecto, si existe  $\theta$  cada espacio  $F_p$ , tangente a una hoja  $L$  de  $M$  en  $p$ , se transformará en otro espacio tangente a  $\Phi(L) = \theta(\pi_F(L))$ , pero  $\Phi(L)$  es un punto de  $N$  y por tanto, se transformará en un vector nulo.

$2 \Rightarrow 3$  Sea  $(y_1 \dots y_r:U)$  un sistema cúbico de coordenadas para  $N$  centrado en  $\Phi(p)$ . Puesto que  $\Phi$  es continua, se puede hallar un sistema cúbico de coordenadas  $(x_1 \dots x_n:D)$  centrado en  $p$  y llano con respecto a  $F$  tal que  $\Phi(D) \subset U$ , de modo que  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  para  $1 \leq i \leq n$  sea una base del espacio vectorial  $F_p$ . Por otra parte, como existen  $m-n$  funciones diferenciales  $\psi_j$  de  $(x_1 \dots x_m)$  en el cúbico  $\Phi(D)$  tales que

$$y_j \cdot \Phi(q) = \psi_j(x_1(q) \dots x_m(q)), \quad (1 \leq j \leq r)$$

para todo  $q \in D$ , según "2" tendremos

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = 0$$

para todo  $(x_1 \dots x_m) \in \Phi(D)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ;  $1 \leq j \leq r$ ; de donde por un conocido teorema fundamental de la teoría de funciones se deduce

$$y_j \cdot \Phi(q) = \psi_j^*(x_{n+1}(q), \dots, x_m(q))$$

para todo  $q \in D$  donde

$$\psi_j^*(x_{n+1}(q) \dots x_m(q)) = \psi_j(x_1(q) \dots x_n(q) \dots x_m(q))$$

Por tanto  $\Phi(p) = \Phi(q)$  para todo  $q$  perteneciente a la misma hoja de  $p$ , de donde por la conexión de  $L$  se deduce que  $\Phi$  es constante sobre cada hoja  $L$  de  $F$ .

$3 \Rightarrow 1$  En efecto, basta refinar  $\theta$  de modo que

$$\theta(\pi_F(L)) = \Phi(L)$$

para toda hoja  $L \subset M$  de  $F$ .

#### TEOREMA 2-5

Si en las condiciones del teorema 2-4,  $\Phi$  es abierta, entonces para que la aplicación  $\Phi: A \rightarrow B$  de un abierto  $A$  de  $M$  sobre  $B \subset N$  sea de descomposición, es condición necesaria y suficiente que  $\dim \Phi_*(M_p) \geq m-n$  para todo  $p \in A$ .



Demostración. — Sean  $(x_1 \dots x_m : D)$  y  $(y_1 \dots y_r : M)$  las cartas utilizadas en la demostración del teorema anterior para cada  $p \in A$  en donde se puede elegir  $D$  de modo que  $D \subset A$ . Entonces, como  $\Phi_*(M_p)$  es un espacio vectorial isomorfo a  $M_p / \Phi_*^{-1}(0)$  resulta que

$$\dim \Phi_*^{-1}(0) = \dim M - \dim \Phi(M_p) \leq m - (m - n) = n$$

y como por el teorema 2-4,  $n = \dim F \leq \dim \Phi_*^{-1}(0) \leq n$ .

se deduce que  $F = \Phi_*^{-1}(0)$  y  $\dim \Phi_*^{-1}(0) = m - n$ .

Por tanto, como  $\dim \Phi_*^{-1}(0) = m - n$ , por un conocido teorema sobre las matrices jacobinas y por ser  $\Phi$  abierta se tiene:

$$\dim B = \dim N = \dim \Phi(D) = m - n = \dim M - \dim N$$

Recíprocamente: si  $\Phi: A \rightarrow B$  es una aplicación de descomposición, por ser  $\Phi_*^{-1}(0) = F_p$ , resulta:

$$\dim B = \dim \Phi_*(M_p) = M - \dim F$$

### 3. Medidas en espacios foliados

A continuación nos limitamos a medidas definidas por formas diferenciales diferentes de 0 en toda la variedad diferenciable  $M$ , de manera análoga a como proceden algunos autores (vid. Mostow [1]).

Estableceremos el teorema 3-1, modificando la exposición de Stenberg [1]. Aunque este teorema es conocido, nos ha parecido conveniente incluirlo para la coherencia de lo que sigue.

A continuación exponemos las fórmulas de Hermann completándolas con otras y con algunos ejemplos aclaratorios.

#### DEFINICIÓN 3-1

Una variedad diferenciable  $M$  se dice orientable si existe un atlas  $\psi$ , tal que para dos sistemas de coordenadas  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_m} : D_i)$   $(x_{j_1}, \dots, x_{j_m} : D_j)$ , correspondientes a dos cartas  $(\varphi_i, D_i)$ ;  $(\varphi_j, D_j)$ , se tenga

$$\left| \frac{\partial x_{i_h}}{\partial x_{j_k}} \right| > 0$$

en todo punto de  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in \varphi_j(D_i \cap D_j)$ . Dos atlas  $\psi$ ,  $\varphi$  de  $M$  que cumplan esta condición, se dice que definen la misma orientación sobre  $M$ , si la unión  $\varphi \cup \psi$  es un atlas que cumple la condición descrita.

#### TEOREMA 3-1

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$  con una base contable. Entonces existe una forma exterior  $\omega$  de grado  $m$  sobre  $M$  no nula en ningún punto, y sólo si  $M$  es orientable.



Demostración: En efecto supongamos que  $M$  sea orientable, entonces existe una familia de sistemas cúbicos coordinados  $(x_{i_1} \dots x_{i_m}; D_i)$ ,  $(i \in I)$  de modo que los  $D_i$  sean un cubrimiento de  $M$  y que el jacobiano

$$\left| \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \right| > 0$$

en la imagen de  $D_i \cap D_j$  en  $R^n$ .

Por otra parte, como  $M$  posee una base contable, existe una partición  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  de la unidad subordinada a  $\{D_i\}_{i \in I}$  y, por tanto, si

$$\omega_i = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}$$

la forma diferencial

$$\omega = \sum \varphi_i \cdot \omega_i \neq 0.$$

puesto que, por ser  $\varphi_i > 0$  para cada  $i \in I$  y  $\sum \varphi_i = 1$  sobre  $M$  para todo  $p \in M$ , existe un  $j \in I$  tal que  $p \in D_j$ ,  $\varphi_j(p) > 0$  y, por consiguiente,

$$\sum \varphi_i \left| \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \right| > 0$$

en  $p$ ; y

$$\omega = \sum \left( \varphi_j \cdot \sum \varphi_i \left| \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \right| \right) \neq 0$$

Recíprocamente, si existe una forma diferencial exterior  $\omega$  de grado  $m$  sobre  $M$  con  $\omega_p \neq 0$  para todo  $p \in M$ , y  $(D, \varphi)$  es una carta cúbica de atlas  $\psi$  de  $M$ , se tiene:

$$\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$$

sobre  $D$ , con  $f > 0$  ó  $f < 0$  por ser  $\omega \neq 0$  y  $D$  conexo, siendo  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  las coordenadas de  $\varphi(q)$ . Denotemos por  $\varphi'$  la aplicación  $\varphi$  si  $f > 0$ , y la aplicación  $q \rightarrow (-x_1, \dots, -x_m)$  de  $D$  en  $R^m$  si  $f < 0$ . Entonces  $(D, \varphi')$  es una carta sobre  $M$ , y el conjunto de dichas cartas es un atlas  $\psi'$  sobre  $M$ , tal que si  $(D_i, \varphi_i)$  y  $(D_j, \varphi_j)$  pertenecen a  $\varphi'$  se tiene:

$$\left| \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \right| = \frac{f_j}{f_i} > 0$$

Sea  $S$  un espacio de Hausdorff localmente compacto. Designemos por  $C(S)$  el conjunto de funciones continuas en  $S$ , por  $C_0(S)$  el conjunto de funciones en  $C(S)$  con soporte compacto, y por  $R$  el cuerpo de los números reales. Entonces:

Una medida sobre  $S$  es una aplicación lineal  $\chi: C_0(S) \rightarrow R$ , con la propiedad de que para cada conjunto compacto  $K \subset S$  existe una constante  $a$  tal que

$$|\mu(f)| \leq a \sup |f(x)|$$

para todo  $f \in C_0(S)$  cuyo soporte está contenido en  $K$ .

Se deduce que una aplicación lineal  $\mu: C_0(S) \rightarrow R$  tal que  $\mu(f) \geq 0$  para  $f \geq 0$ ;  $f \in C_0(S)$  es una medida  $S$ , tales medidas se llaman *medidas positivas*.

Sobre una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $m$ , toda forma diferencial  $\omega \in C_0(M)$  de grado  $m \neq 0$  sobre  $M$ , define una medida positiva. Como es sabido (vid. Helgason [1], Stenberg [1]) se define en este caso como medida la integral  $\int_M f \omega$  para cada  $f \in \Omega_c^0(M)$ .



en  $D_i \cap D_j$ , puesto que

$$\omega = f_i dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}; \text{ con } f_i > 0 \text{ sobre } D_i.$$

En la Geometría Integral clásica se trata de hallar la medida sobre una variedad diferenciable cuyos elementos pueden ser hojas de una foliación definida en otra variedad diferenciable. Esta medida se puede determinar de formas diferentes como exponemos a continuación de manera general.

Sean  $M, N$  dos variedades diferenciables, y  $\Phi: M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable que define una foliación regular sobre  $M$ . Entonces, a cada punto  $x \in N$  le corresponde la hoja  $\Phi^{-1}(x)$ . Se define

$$f(x) = \int_{\Phi^{-1}(x)} \alpha$$

(siendo  $\alpha$  una forma diferencial sobre  $\Phi^{-1}(x)$ , y se establece que

$$\int_M \Phi^*(\omega) \wedge \alpha = \int_N f(x) \cdot \omega$$

o sea

$$\int_M \Phi^*(\omega) \wedge \alpha = \int_N \left[ \int_{\Phi^{-1}(x)} \alpha \right] \omega$$

fórmula debida a Hermann.

Como ejemplos podemos citar los siguientes:

Ejemplo 1.º — Evidentemente, las rectas  $x = a$  constituyen una foliación sobre el plano euclídeo. Un punto  $p = (x, y(x))$ ,  $y(x)$  función uniforme y continua, será un punto del espacio cociente, entonces si  $\omega = dx$ ,  $\alpha = g(x, y) dy$ ,

$$f(p) = \int_{\Phi^{-1}(p)} \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy$$

la fórmula de Hermann queda establecida así:

$$\int_{D_2} g(x, y) dx \wedge dy = \int_a^b dx \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy \right]$$

siempre que  $g$  sea una función con soporte compacto perteneciente a  $C^\infty$ . Entonces, en este caso la fórmula de Hermann adopta una forma bien conocida.

Ejemplo 2.º — Sea ahora una foliación más general dada por la ecuación  $u(x, y) = a$ , (siendo  $u$  una función uniforme y continua), sea  $x = x(a)$ ,  $y = y(a)$  un punto de un espacio cociente, espacio que pertenece a una foliación complementaria  $v(x, y) = b$ . Tomemos  $\omega = du$ ,  $\alpha = g(u, v) dv$ , entonces

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u, v) dv;$$



estos valores convierten a la fórmula de Hermann en:

$$\int_a^b du \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(u, v) dv \right] = \int_{v_1}^{v_2} g(u, v) du \wedge dv$$

### DEFINICIÓN 3-2

Diremos que una forma diferencial  $\omega$  sobre  $M$  es una forma invariante de un foliación  $F$  sobre  $M$  si, para cada aplicación de descomposición  $\theta: U \rightarrow B$ , existe una forma  $\omega_\theta$  sobre  $B$  tal que  $\omega = \theta^*(\omega_\theta)$ . Como de costumbre sea  $m = \dim M$ ,  $n = \dim F$ , entonces  $p = \dim B = \dim M/F = m - n$ . Supongamos que  $\omega$  es una  $p$ -forma sobre  $M$  que sea invariante para la foliación  $F$ , y tal que  $\omega_\theta = 0$  en cada punto de  $B$ , de donde resulta que  $B$  es orientable. Entonces  $\omega_\theta$  define una medida sobre  $B$  mediante la aplicación

$$f \longrightarrow \int_B f \cdot \omega_\theta$$

del espacio de las funciones continuas con soporte compacto en  $B$  en el cuerpo  $R$  de los números reales.

Si existe una aplicación de descomposición  $\theta: M \rightarrow B$  ( $U = M$ ), se puede considerar  $\omega$  como una forma sobre  $M/F$ , para lo cual se verifica:

$$\int_B f(x) \cdot \omega = \int_{M/F} f[\theta(y)] \cdot \theta^*(\omega_\theta)$$

con lo que obtenemos la medida de un conjunto de hojas mediante la integración de una expresión sobre el espacio cociente  $M/F$ .

### 4. Grupo de holonomía de una hoja

Dada la variedad foliada  $M$  y una hoja  $L$  de la foliación de  $M$ . Si existe una aplicación de descomposición global  $\theta: M \rightarrow B$  y  $\theta(L) = b \in B$ , entonces  $\theta: M_x/F_x \rightarrow B_b$  es un isomorfismo para todo  $x \in L$ .

Pero en general no existe tal aplicación de descomposición global. En este caso por prolongación analítica puede extenderse ese isomorfismo lineal globalmente a lo largo de las curvas de  $L$ . Se puede escribir esto como sigue: Sea  $\sigma: I \rightarrow L$  una curva en  $L$  donde  $I = [0, 1]$ . Dado un vector horizontal  $v \in M_{\sigma(0)}/F_{\sigma(0)}$  existe un único campo vectorial, llamado de traslación vertical de  $v$  a lo largo de  $\sigma: t \rightarrow v(t)$ ,  $v(t) \in M_{\sigma(t)}/F_{\sigma(t)}$  tal que  $v(0) = v$  y, para  $t_1, t_2$  suficientemente próximos, de modo que  $\sigma(t)$ , para  $t_1 \leq t \leq t_2$ , pertenezca a un conjunto abierto con una aplicación de descomposición, entonces  $v(t_1)$  y  $v(t_2)$  están relacionados por el isomorfismo que se deduce de esta aplicación de descomposición.

La aplicación  $v(0) \rightarrow v(1)$  define un isomorfismo

$$M_{\sigma(0)}/F_{\sigma(0)} \rightarrow M_{\sigma(1)}/F_{\sigma(1)}$$



que siguiendo a Hermann representaremos por  $k_\sigma$ . Si  $\sigma$  se compone de dos curvas  $\sigma_1, \sigma_2$  entonces  $k = k_{\sigma_1} \cdot k_{\sigma_2}$ . En particular, el conjunto de todos los lazos  $\sigma$  de base  $x \in L$  forman un grupo de automorfismo de  $M_x/F_x$ , que se llama el *grupo de holonomía* de la hoja  $L$  en  $x$ . Es fácil comprobar que para dos curvas homotópicas  $\sigma_1, \sigma_2$  en  $L$  con los mismos extremos se tiene,  $k_{\sigma_1} = k_{\sigma_2}$ . Esto significa que el grupo de holonomía de  $L$  puede considerarse como una representación del grupo fundamental.

Si  $M$  es de dimensión  $m$  y la foliación de dimensión  $n$ , el espacio cociente  $M_x/F_x$  es de dimensión  $m-n$ . Si  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-n}) = (\omega_s)$  son  $m-n$  formas lineales invariantes, linealmente independientes en cada punto de un conjunto abierto  $U \subset M$ , entonces, ellas constituyen una base para las formas invariantes respecto a la foliación, y así mismo inducen una base para el espacio dual de cada  $M_x/F_x$ . Se prueba fácilmente que  $\omega_s(v(t)) = \omega_s(v)$  siendo  $\sigma$  una curva vertical en  $U$ , y  $v(t)$  el vector trasladado a través de  $\sigma$  verticalmente.

Si  $(\alpha_s)$  son las formas diferenciales en  $B$  tales que para la aplicación de descomposición  $\theta: U \rightarrow B$  verifican que  $\theta^*(\alpha_s) = \omega_s$  se tiene

$$\omega_s(v(t)) = \theta^*(\alpha_s)(v(t)) = \alpha_s[\theta_*(v(t))] = \alpha_s(v)$$

Como consecuencia se demuestra la proposición siguiente:

### Proposición

El grupo de holonomía de una hoja  $L$  en uno de sus puntos  $x$ , es subgrupo del grupo lineal de matrices  $(m-n) \times (m-n)$ .

Demostración: Supongamos que  $M$  se puede cubrir por conjuntos abiertos  $U_i$ , tales que en cada  $U$  existe una base de formas  $\omega_s(\omega_1, \dots, \omega_{m-n})$  invariantes para la foliación. Sean  $U, U'$  dos de tales abiertos, siendo  $\omega_s, \omega'_s$  dos bases de formas de  $U$  y  $U'$  respectivamente en cada  $x \in U \cap U'$ , cada  $\omega'_i \in (\omega'_s)$  se expresará como combinación lineal de  $\omega'_j \in (\omega'_s)$  y por tanto  $(\omega_i)_x = A_{ij}(x)(\omega'_j)_x$ , siendo  $A_{ij}(x)$  una matriz  $(m-n) \times (m-n)$  cuyos elementos serán función del punto  $x$ . El conjunto de matrices  $A_{ij}(x)$  constituye el  $GL_{m-n}$  (grupo lineal de matrices).

El grupo de holonomía de la hoja  $L$  en el punto  $x$ , se compone de matrices  $(m-n) \times (m-n)$  puesto que se trata de automorfismos entre vectores de dimensión  $m-n$ . Estas matrices que constituyen el grupo de holonomía de  $L$  en  $x$ , están contenidas en el grupo determinado por las  $A_{ij}(x)$ , definiendo por tanto un subgrupo de este último.

Si  $X_1, X_2$  son dos campos de vectores horizontales, y  $\omega_1, \omega_2$  dos formas duales, es decir;  $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ ; entonces si  $X_2 = M X_1$  se sigue que  $\omega_2 = M^{-1} \cdot \omega_1$ .

### 5. Relación entre la forma $\Omega$ y la foliación

Como es bien sabido en una variedad diferenciable  $M$ , viene determinada una foliación por un campo de  $n$ -planos. (Distribución en el sentido de Chevalley), que cumple la condición de que si los campos  $X, Y \in \mathcal{D}$  también  $[X, Y] \in \mathcal{D}$ . Las subvariedades cuyos planos tangentes en cada punto



vienen definidos por los campos de vectores de  $\mathcal{D}$  en dichos puntos, son las llamadas "hojas" de la foliación.

También puede venir definida dicha foliación por el ideal de formas  $\omega$  que se anulan sobre dichos campos. Si  $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{D}$ , las  $\omega_{n+1}, \dots, \omega_m$  que constituyen dicho ideal verifican la condición  $\omega_i(X_j) = 0$ , ( $i = 1 \dots n$ ;  $j = n+1 \dots m$ ). Este sistema deberá de ser completamente integrable lo que exige que

$$d\omega_j \wedge \Omega = 0; \quad (j = n+1 \dots, m) \quad (5-1)$$

en donde hemos llamado

$$\Omega = \omega_{n+1} \wedge \omega_{n+2} \wedge \dots \wedge \omega_m$$

#### PROPOSICIÓN 5-1

La condición necesaria y suficiente para que el sistema  $\omega_{n+1} = \dots = \omega_m = 0$  sea completamente integrable, es que se verifique:

$$d\Omega = \lambda \wedge \Omega \quad (5-2)$$

(siendo  $\lambda$  una forma de primer grado).

Demostración: En efecto, como  $\omega_i \wedge \Omega = 0$  para  $i = n+1 \dots m$ , diferenciando se deduce:

$$d\omega_i \wedge \Omega - \omega_i \wedge d\Omega = 0$$

de donde siendo el sistema completamente integrable resulta  $d\omega_i \wedge \Omega = 0$  para  $i = n+1 \dots m$  y finalmente  $\omega_i \wedge d\Omega = 0$ , lo que se cumple únicamente si  $d\Omega = \lambda \wedge \Omega$ . Recíprocamente si esto se cumple llegamos a la conclusión de que  $d\omega_i \wedge \Omega = 0$ , luego será el sistema completamente integrable.

Si el sistema  $\omega_i = 0$  es completamente integrable, define sobre la variedad  $M$  (de dimensión  $m$ ), una foliación cuyas hojas son de dimensión  $n$ . Si esta foliación es regular será equivalente dentro del entorno de coordenadas al sistema

$$d\xi_{n+1} = 0 \dots d\xi_m = 0$$

siendo por tanto

$$\xi_i(x_1 \dots x_m) = c_i; \quad (i = n+1 \dots m)$$

las ecuaciones de las hojas. Para cada sistema de constantes ( $c_{n+1} \dots c_m$ ) tenemos una hoja distinta. Distinguiremos dos clases de sistemas según que  $d\Omega$  sea o no igual a cero.

Como

$$d\omega_i = \sum \theta_i^j \omega_j \quad (n+1 \leq i, j \leq m)$$

$$\begin{aligned} d\Omega &= \sum (-1)^{i-1} \omega_{n+1} \wedge \dots \wedge d\omega_i \wedge \dots \wedge \omega_m = \sum \omega_{n+1} \wedge \dots \wedge \left( \sum \theta_i^j \omega_j \right) \\ &= \left( \sum_{n+1}^m \theta_i^i \right) \wedge \Omega \end{aligned}$$



por tanto si  $d\Omega = 0$  se tiene

$$\sum_{n+1}^m \theta_i = 0$$

#### DEFINICIÓN 5-1

Sean sobre una variedad foliada, regular,  $M$ , subvariedades  $D_i$  de dimensión  $k \leq m-n$ , teniendo un punto a lo sumo en cada una de éstas.

Diremos que  $\Omega$  es un *invariante integral absoluto* para la foliación definida sobre  $M$ , si cualquiera que sea el dominio  $\Sigma_0 \subset D_0(p)$ , y el  $\Sigma_1 \subset D_1(p)$  deducido de él por deformación continua (cada punto de  $\Sigma_0$  se transforma en otro de  $\Sigma_1$  estando en la misma hoja), se verifica:

$$\int_{\Sigma_0} \Omega = \int_{\Sigma_1} \Omega. \quad (5-3)$$

Si para que se verifique esta igualdad se requiere que  $\Sigma_0, \Sigma_1$  sean cerrados, diremos que se trata de un invariante integral relativo.

No es necesario que el sistema sea regular por toda variedad  $M$ , basta que sean regulares las hojas que cortan a un cierto dominio  $\Sigma_0$  para poder definir los invariantes.

Es posible establecer para estos invariantes integrales condiciones análogas a las dadas por Lichnerowicz [1] para las curvas y que fueron generalizadas por Vidal [3] a las variedades foliadas.

Los invariantes absolutos se clasifican en dos clases:

1.ª clase

$$\int_{T_p} \Omega = 0, \int_{T_{p+1}} d\Omega = 0; \quad d\Omega \neq 0,$$

2.ª clase

$$\int_{T_p} \Omega = 0, \quad d\Omega = 0,$$

en donde  $T_p, T_{p+1}$  son los espacios engendrados por la frontera de  $\Sigma_0$ , y el propio  $\Sigma_0$  en su deformación continua hasta  $\Sigma_1$ .

#### TEOREMA 5-1

Un invariante integral absoluto, respecto del sistema completamente integrable  $\omega_{n+1} = 0 \dots \omega_m = 0$ , que define sobre una variedad diferenciable  $M$  una foliación regular, se expresa localmente en función de integrales primeras y de sus diferenciales.

En efecto, si las variedades integrales del sistema pueden expresarse localmente en la forma  $\xi_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = c_i$ , cada punto de la variedad se expresa localmente por las coordenadas  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_m)$  las  $m-n$  últimas definen la hoja sobre la que se halla el punto debido a que cada una de las hojas corta a 1 abierto correspondiente en una sola placa, y las



$n$  primeras definen el punto dentro de su hoja correspondiente. Un invariante integral absoluto ha de depender exclusivamente de las  $\xi$  y no de la posición de los puntos de  $\Sigma_0$  en cada una de las hojas, luego localmente se escribirá:

$$\Omega = \sum f_i (\xi_{n+1} \dots \xi_m) d\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi_{i_n} \quad (i_n = n+1 \dots m); \quad (5-4)$$

recíprocamente, toda expresión de este tipo es invariante integral absoluto pues sólo depende de las hojas medidas, y no de los puntos de cada una de ellas que componen el recinto sobre el cual se integra.

#### 6. Condición para la existencia de una medida en una variedad foliada

Una medida de las hojas integrales del sistema  $\omega_{n+1} = \dots \omega_m = 0$  completamente integrable, y que determina sobre  $M$  una foliación regular, vendrá definida por un invariante integral respecto del sistema, puesto que debe depender exclusivamente de las hojas, deberá de ser absoluto ya que los recintos sobre los que se integra no tienen por qué ser cerrados, además exigiremos que  $d\Omega = 0$ . Por tanto, como por ser el sistema completamente integrable es  $d\Omega = \lambda \wedge \Omega$ , en este caso

$$\lambda = \sum_{n+1}^m f_i \omega_i$$

#### 7. Relaciones entre invariantes absolutos y relativos

Cualquier forma diferencial sobre el espacio cociente  $M/F$  en un invariante absoluto de primera especie. Un invariante relativo es la suma de un invariante absoluto de 1.ª especie y una forma diferencial exacta sobre  $M$ . Localmente un invariante absoluto de 1.ª especie y orden  $h$ , se escribirá así:

$$\Omega_1 = \sum f_i (\xi_{n+1} \dots \xi_m) d\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi_{i_n}; \quad (i_j = n+1 \dots m)$$

y uno relativo del mismo orden se escribirá:

$$\pi = \Omega_1 + dF_{h-1} (\xi_1, \xi_2 \dots \xi_m)$$

donde  $F_{h-1}$  es una forma diferencial sobre  $M$ .

Un invariante absoluto de 2.ª especie, que sirve para definir las medidas, presentará la misma forma que los de 1.ª especie si bien su diferencial ha de ser nula. El caso que vamos a considerar es el del "elemento volumen" es decir, el invariante-medida de máximo orden posible sobre  $M/F$ , orden que es igual a la dimensión de  $M/F$ , y esta medida no solamente tiene su diferencial nula, si no que es la diferencial de un invariante absoluto de 1.ª especie como demostraremos a continuación.

Un invariante integral absoluto de 2.ª especie,  $d\Omega = 0$ , medida del conjunto de hojas de dimensión máxima de una foliación regular definida por el sistema  $\dot{F}$  ( $\omega_i = 0$ ,  $i = n+1 \dots m$ ), se escribe:

$$\Omega = \omega_{n+1} \wedge \dots \wedge \omega_m$$



y localmente lo podemos escribir:

$$\Omega = A(\xi_{n+1} \dots \xi_m) d\xi_{n+1} \wedge \dots \wedge d\xi_m \quad (\text{vid. 5-4})$$

siendo  $d\xi_i = 0$ ,  $i = n+1 \dots m$ , el sistema localmente equivalente al anterior. En tales condiciones existe un invariante integral absoluto de 1.<sup>a</sup> especie cuya diferencial es igual a  $\Omega$  localmente.

En efecto,

$$\pi = \sum A_i(\xi) d\xi_{n+1} \wedge \dots \wedge \overline{d\xi_i} \wedge \dots \wedge d\xi_n$$

$$d\pi = \left( \frac{\partial A_{n+1}}{\partial \xi_{n+1}} - \frac{\partial A_{n+2}}{\partial \xi_{n+2}} + \dots + (-1)^{m-n} \frac{\partial A_m}{\partial \xi_m} \right) d\xi_{n+1} \wedge \dots \wedge d\xi_m; \quad (7-1)$$

como

$$d\xi_i = \sum \alpha_{ij} \omega_j,$$

queda substituida en (7-1),

$$d\pi = \left( \frac{\partial A_{n+1}}{\partial \xi_{n+1}} + \dots + (-1)^{m-n} \cdot \frac{\partial A_m}{\partial \xi_m} \right) \Delta(\alpha) \cdot \omega_{n+1} \wedge \dots \wedge \omega_m$$

lo que comparado con (7-1) exige que

$$\left( \frac{\partial A_{n+1}}{\partial \xi_{n+1}} + \dots + (-1)^{m-n} \cdot \frac{\partial A_m}{\partial \xi_m} \right) \cdot \Delta(\alpha) = 1$$

y esto se puede conseguir sin más que hacer

$$A_i = \beta_{1i}, \beta'_{1i}, \xi_i + \varphi_i(\xi_{n+1} \dots \xi_i \dots \xi_m)$$

donde  $\beta_{ij}$  son los elementos de la matriz  $\beta = \alpha^{-1}$ , y  $\beta'_{ij}$  sus respectivos adjuntos.

### 8. Los invariantes integrales y la aplicación de descomposición

Sea  $M$  una variedad diferenciable, sobre la que está definida una foliación regular, y sea  $\pi_F: M \rightarrow M/F$  la aplicación natural, aplicación que será de descomposición (vid. teorema 2-3), y  $M/F$  tendrá la estructura de variedad diferenciable (vid. teorema 2-2). Denotemos por  $M_x$  ( $M/F$ ) <sub>$x$</sub>  los espacios tangentes a  $M$  y  $M/F$  en  $x$ , y respectivamente. Sea  $F_x$  el espacio tangente a la hoja de  $M$  que pasa por  $x$ , y sea finalmente  $M_x = H_x \oplus F_x$ .

La correspondencia  $\pi_F: M_x \rightarrow (M/F)_{\pi_F(x)}$  es un homomorfismo, en el que  $F_x$  es el núcleo. Por tanto  $M_x/F_x$  es isomorfo a  $(M/F)_{\pi_F(x)}$ .

Sea  $\Omega$  una forma diferencial lineal que define una medida sobre  $M/F$ .  $\pi_F^*(\Omega)$  será una forma homóloga sobre  $M$ , verificándose por definición

$$\pi_F^*(\Omega)(X) = \Omega(\pi_F^*(X)); \quad (X \text{ campo vectorial sobre } M)$$

luego

$$\int_{\Sigma_i} \pi_F^*(\Omega) = \int_{\Sigma} \Omega$$



siendo  $\Sigma$  una porción de  $M/F_i$  y  $N_i$  una subvariedad de  $M$  que tiene un punto en cada hoja, siendo  $\Sigma_i \subset N_i$  y representada por  $\pi_F$  en  $\Sigma$ .

$\pi_F^*(\Omega)$  es un invariante absoluto, pues a los recintos  $\Sigma_i$  no les hemos impuesto la condición de ser cerrados, y además para otra subvariedad  $\Sigma$ , en las mismas condiciones que  $\Sigma_i$ , también se verificará que

$$\int_{\Sigma_j} \pi_F^*(\Omega) = \int_{\Sigma} \Omega \quad \text{luego} \quad \int_{\Sigma_i} \pi_F^*(\Omega) = \int_{\Sigma_j} \pi_F^*(\Omega)$$

además

$$d \pi_F^*(\Omega) = \pi_F^*(d \Omega) = \pi_F^*(0) = 0$$

luego cumple las condiciones de ser invariante absoluto y de diferencial nula, lo que asegura ser  $\pi_F^*(\Omega)$  una medida sobre la foliación en  $M$ .

### 9. La medida y los invariantes integrales relativos

Seguimos considerando la misma foliación regular  $F$  sobre la variedad diferenciable  $M$ . Sea  $\Omega_0$  una forma sobre  $M/F$ , y  $\Omega = \pi_F^*(\Omega_0)$  la forma homóloga, sobre  $M$ , forma que verifica la condición  $d \Omega = 0$ , si también  $d \Omega_0 = 0$ . Si  $\Omega = d \pi(\Omega$  diferencial exacta), aplicando la fórmula de Stokes a la integral

$$\int_{\Sigma_i} \Omega$$

tendremos:

$$\int_{\Sigma_i} \Omega = \int_{\partial \Sigma_i} \pi$$

(siendo  $\partial \Sigma_i$  la frontera de  $\Sigma_i$ ), si  $\Omega$  es invariante sobre recintos  $\Sigma_i$  cualesquiera,  $\pi$  lo será sobre recintos  $\partial \Sigma_i$  cerrados, y en consecuencia  $\pi$  será un invariante integral relativo.

### 10. Fórmula de Hermann aplicada a la frontera de una variedad

Dada la foliación regular  $F$  sobre la variedad  $M$ , consideremos una forma diferencial  $\alpha$ , siendo  $d \alpha = 0$  sobre las hojas. Para cada punto  $y \in M/F$  sea  $\pi_F^{-1}(y)$  la correspondiente hoja y llamemos  $f(y) = \int_{\pi_F^{-1}(y)} \alpha$  en estas condiciones y según la fórmula de Hermann se verificará:

$$\int_M \pi_F^*(\Omega) \wedge \alpha = \int_{M/F} f(y) \Omega \quad (10-1)$$

y teniendo en cuenta que

$$d [\pi_F^*(\pi) \wedge \alpha] = d \pi_F^*(\pi) \wedge \alpha;$$

por ser  $d \alpha = 0$

$$d [\pi_F^*(\pi) \wedge \alpha] = \pi_F^*(d \pi) \wedge \alpha = \pi_F^*(\Omega) \wedge \alpha$$



y aplicando el teorema de Stokes

$$\int_M \pi_F^*(\Omega) \wedge \alpha = \int_{\partial M} \pi_F^*(\pi) \wedge \alpha \quad (10-2)$$

y comparando (10-1) y (10-2) se concluye que:

$$\int_{\partial M} \pi_F^*(\pi) \wedge \alpha = \int_{M/F} f(y) \cdot \Omega$$

### Ejemplo de invariante integral relativo

Un ejemplo de invariante integral relativo bien conocido lo constituye la llamada integral de Hilbert. Es sabido que si consideramos en un espacio euclídeo de tres dimensiones, la integral:

$$I(E) = \int_{c_1(t)}^{D_1(t)} f(x, y, z, y', z') dx$$

a lo largo de un arco variable, cuyos extremos  $C$  y  $D$  describen dos curvas fijas si la integral  $I$  se toma a lo largo de un arco de extremal dependiente de un parámetro  $t$ , esto es:

$$I(t) = \int_{c_1(t)}^{D_1(t)} f(x, y, z, y', z') dx$$

se deduce el siguiente teorema:

El valor de la integral  $I$  a lo largo de un arco de extremal variable, con propiedades de continuidad, y cuyos extremos describen las curvas fijas  $(C)$ ,  $(D)$ , tiene por diferencial:

$$dI = [f dx + (dy - y' dx) f_{y'} + (dz - z' dx) f_{z'}]$$

a la integral de esta expresión

$$I^* = \int [f dx + (dy - y' dx) f_{y'} + (dz - z' dx) f_{z'}]$$

se denomina "*integral de Hilbert*".

Si los extremos de un arco de extremal variable  $E$  describen dos curvas  $(C)$ ,  $(D)$ , la diferencia de los valores de  $I$  entre dos posiciones  $E_{c_1 D_1}$ ,  $E_{c_2 D_2}$  de  $E$  se da por la fórmula:

$$I(E_{c_1 D_1}) - I(E_{c_2 D_2}) = I^*(D_{c_1 D_2}) - I^*(C_{c_1 D_2})$$

Si se tiene un tubo de extremales y se consideran dos curvas que den la vuelta al tubo, el primer miembro se anula resultando así que la integral  $I$  de Hilbert es un invariante relativo.



11. *Extremales de una integral simple en un espacio de  $n$ -dimensiones*

En un espacio euclídeo  $E_n$  de  $n$  dimensiones  $E(x_1 \dots x_n)$  consideremos una función positiva, homogénea de primer grado respecto de las  $dx_i$ :

$$L(x_1, x_2 \dots x_n, dx_1, dx_2 \dots dx_n) = L(x, dx)$$

se llaman curvas extremales las que anulan la primera variación de la integral  $I = \int L(x, dx)$ .

Si se considera un arco de extremal  $\widehat{AB}$  y se hacen variar infinitamente poco las extremidades de este arco para obtener un nuevo arco de extremal infinitamente próximos  $\widehat{A'B'}$ , la variación sufrida por dicha integral  $I$  es:

$$\left[ \sum \frac{\partial L}{\partial x'_i} \cdot \delta x_i \right]_B^{B'} - \left[ \sum \frac{\partial L}{\partial x'_i} \cdot \delta x_i \right]_A^{A'}$$

$x'_i$  son los parámetros directores de la tangente a la extremal en  $AB$ ,  $\partial x_i$  designan las variaciones elementales sufridas por las coordenadas  $x_i$  al pasar de  $A \rightarrow A'$ ;  $B \rightarrow B'$ . Si se considera un tubo de estas extremales, esto

es, una serie lineal continua y cerrada, la forma  $\omega = \sum \frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot \delta x_i$  define

un *invariante, integral relativo*, puesto que si se consideran dos curvas cualesquiera  $C, D$  que den la vuelta al tubo, como la variación de la integral  $I$  al dar la vuelta completa será nula, se deduce que

$$\int_C \omega = \int_D \omega$$

El teorema de Dixon-Cartan, establece que el problema variacional referente a hallar las extremales de la función  $\int L(x, dx)$  en el espacio

$E_n$  tiene por imagen el hallar las extremales de la función  $\int \omega$  en el espacio  $E_{2n-1}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n)$  y estas curvas cumplen con la condición necesaria y suficiente de que admiten  $\int \omega$  como *invariante integral relativo*

(vid. Vidal [2]) y forma una foliación en este espacio  $E_{2n-1}$ , con lo que la medida de las extremales en  $E_n$  queda reducida a la medida de las hojas de una dimensión de una variedad foliada en  $E_{2n-1}$ . Y en dicha foliación

$\omega = \sum \frac{\partial L}{\partial x'_i} \cdot \delta x_i$  es invariante integral relativo, y por tanto  $d\omega$  es el *invariante integral absoluto y medida*.



*Medida de un conjunto de geodésicas en un espacio de Riemann de 2 dimensiones*

Como aplicación de lo anterior al caso de un espacio de Riemann  $R^n(x_1 \dots x_n)$ , en el que  $ds^2 = \sum g_{ij} dx_i dx_j$ ; las geodésicas son las curvas extremales de la función  $I = \int \sqrt{g_{ij} dx_i dx_j}$ , las curvas imágenes en  $E_{2n-1}$  admiten como invariante integral relativo

$$\int \frac{\sum g_{ik} dx_i}{\sqrt{\sum g_{ik} dx_i dx_k}} \cdot \delta x_k = \int \sum p_k \cdot \delta x_k = \pi$$

del que se deduce el invariante integral absoluto por diferenciación

$$\Omega = \sum d p_k \wedge \delta x_k$$

que representará la medida de geodésicas para espacios de dos dimensiones.

Para la forma del invariante integral relativo se tienen otras expresiones. Se verifica:

$$\pi = \int \frac{\sum g_{ik} dx_i}{\sqrt{\sum g_{ik} dx_i dx_k}} \cdot \delta x_k = \int \frac{\sum g_{ik} dx_i \cdot \delta x_k \cdot \sqrt{\sum g_{ik} \delta x_k}}{\sqrt{(\sum g_{ik} dx_i dx_k) \cdot (\sum g_{ik} \delta x_i \delta x_k)}} = \int_c \cos \alpha ds$$

siendo  $\alpha$  el ángulo formado por las geodésicas con la curva sobre la cual se integra, dando como resultado el elemento de arco de dicha curva. Esta expresión  $\int_c \cos \alpha ds$  que para un tubo de geodésicas de una dimensión fue hallado por el profesor Vidal Abascal, nos da por diferenciación la medida, encontrándose la fórmula

$$d \pi = \Omega = |\sin| d \alpha \wedge ds$$

medida de un conjunto de geodésicas de 2 dimensiones. Se toma  $|\sin \alpha|$  por considerar densidad positivas.

*Medida de geodésicas de un conjunto de dimensión 2 (n — 1)*

Es sabido que para el conjunto de geodésicas del espacio de Riemann  $R^n$ ,  $\Omega = d p_k \wedge dx_k$  es un invariante absoluto, por tanto cualquier potencia de él también lo será. Ahora bien; el conjunto de geodésicas del  $R^n$  es de dimensión 2 (n — 1), luego la medida deberá de ser una forma diferencial de este mismo orden. El invariante más sencillo de orden 2 (n — 1) media de dicho conjunto de geodésicas es la potencia n — 1-sima de  $\Omega$ :

$$\Omega_n = \Omega^{n-1} = (\sum dp_k \wedge dx_k)^{n-1} = \sum_k dp_1 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \tilde{dp}_k \wedge \tilde{dx}_k \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dx_n$$



y el invariante relativo del que se deduce este por diferenciación es:

$$\pi_n = \frac{1}{n-1} \sum_i p_i \wedge dx_i \wedge \left[ \sum_h dp_1 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dp_h} \wedge \widehat{dx_h} \wedge \dots \wedge \widehat{dp_i} \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dx_n \right]$$

(con el símbolo  $\wedge$  significamos la emisión de la diferencia respectiva).

Otro ejemplo de invariante absoluto

Dada una curva plana, convexa y cerrada  $C$ , consideremos el conjunto de rectas que cortan a  $C$ . La frontera de este conjunto está constituida por las rectas tangentes a  $C$ . Sea  $D$  una curva que apoya cada uno de sus puntos en una tangente a  $C$ . La expresión  $\pi = \cos \alpha d\sigma$  ( $\alpha$  ángulo de la tangente genérica a  $C$  con  $D$ ,  $d\sigma$  elemento de longitud de  $D$ ), es un invariante integral relativo según hemos dicho; por otra parte el teorema de Poincaré (vid. Poincaré [1]) asegura que un invariante relativo es la suma de un invariante absoluto y una forma diferencial exacta,  $\pi = \omega + d\theta$ . En tal caso:  $\pi = \cos \alpha d\sigma = \omega + d\theta$ ;

$$\int_{\widehat{D_0 D_1}} \cos \alpha d\sigma = \int_{\widehat{D_0 D_1}} \omega + \int_{\widehat{D_0 D_1}} d\theta = \int_{\widehat{D_0 D_1}} \omega + \theta(D_1) - \theta(D_0)$$

si consideramos  $C$  como caso particular de  $D$ , teniendo en cuenta que  $\alpha = 0$ , en este supuesto:

$$\int_{\widehat{C_0 C_1}} d\sigma = \int_{\widehat{C_0 C_1}} \omega + \theta(C_1) - \theta(C_0)$$

y restando estas dos últimas fórmulas, se obtiene:

$$\int_{\widehat{D_0 D_1}} \cos \alpha d\sigma - \int_{\widehat{C_0 C_1}} d\sigma = [\theta(D_1) - \theta(D_0)] - [\theta(C_1) - \theta(C_0)]$$

ya que

$$\int_{\widehat{D_0 D_1}} \omega = \int_{\widehat{C_0 C_1}} \omega$$

por ser  $\omega$  invariante absoluto.

$$\int_{\widehat{D_0 D_1}} \cos \alpha d\sigma = \int_{\widehat{C_0 C_1}} (1 + \lambda) d\sigma$$

luego

$$\int_{\widehat{C_0 C_1}} \lambda d\sigma = \lambda_1 - \lambda_0 = [\theta(D_1) - \theta(D_0)] - [\theta(C_1) - \theta(C_0)]$$

$$\lambda_1 - \lambda_0 = [\theta(D_1) - \theta(C_1)] - [\theta(D_0) - \theta(C_0)]$$



exige que en general

$$\lambda(s) = \theta[D(s)] - \theta[C(s)]$$

Resumiendo  $\theta(x, y)$  es una función uniforme y tal que

$$\theta[D(s)] - \theta[C(s)] = \lambda(s)$$

siendo  $C(s)$  la curva definida por  $\vec{x}(s)$ , y  $D(s)$  la definida por  $\vec{x}(s) + \lambda(s) \cdot \vec{x}'(s)$ . Calculada  $\theta(x, y)$  con dicha condición entonces, como

$$\int_{D_0 D_1} \cos \alpha \, d\sigma = \int_{D_0 D_1} \omega + \int_{D_0 D_1} d\theta,$$

para cualquier curva se deducirá

$$\omega = \cos \alpha \, d\sigma - d\theta$$

fórmula que nos permite calcular  $\omega$ .

Si la curva  $C$  es la circunferencia  $x = \cos s$ ;  $y = \sin s$ , entonces  $\theta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ ; pues para un punto de  $C$ ,  $\theta(x, y) = 0$ , y para el punto correspondiente a  $D(x + \lambda x', y + \lambda y')$ ;  $\theta(x, y) = \lambda$  verificándose la condición anterior. Entonces

$$\omega = \cos \alpha \, d\sigma - \frac{x \, dx + y \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$$

*Invariante integral en un espacio euclídeo de 3 dimensiones*

Sea  $I = \iint F(x, y, z, p, q) \, dx \wedge dy$  una integral doble sobre una superficie  $z = f(x, y)$  siendo  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ . Consideremos  $I$  extendida a una superficie extremal  $S$  limitada por un contorno cerrado  $C$ . Al variar  $C$  y por tanto  $S$  una variación infinitesimal hasta tomar posiciones  $C'$ ,  $S'$  respectivamente, la integral  $I$  experimenta una variación cuyo valor es:

$$\iint_{S'} F \, dx \wedge dy - \iint_S F \, dx \wedge dy = \iint_{\Sigma} \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) dx \wedge dy - \frac{\partial F}{\partial p} dy \wedge dz - \frac{\partial F}{\partial q} dz \wedge dx$$

siendo  $\Sigma$  la banda lateral limitada por el camino recorrido por  $C$  al pasar a  $C'$  en su variación.



Si  $S$  describe una superficie en forma de toro  $T$ , y aplicamos la fórmula anterior a lo largo de dicha superficie  $T$ , dicha fórmula se transforma en

$$\iint_T \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) dx \wedge dy - \frac{\partial F}{\partial p} dy \wedge dz - \frac{\partial F}{\partial q} dz \wedge dx = 0$$

luego la expresión

$$\pi = \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) dx \wedge dy - \frac{\partial F}{\partial p} dy \wedge dz - \frac{\partial F}{\partial q} dz \wedge dx$$

es un invariante integral. A la misma conclusión llegaríamos si consideramos  $C$  y  $C'$  entornos homotópicos a través de  $C(t)$  posición intermedia genérica donde  $C(0) = C$ ;  $C(1) = C'$ , siendo además  $C(t)$  una función continua. Entonces si  $\Sigma'$  es la porción de tubo descrita por  $C(t)$  para

$0 \leq t \leq 1$  con los mismos extremos  $C, C'$  que  $\Sigma$  se verifica que  $\iint_{\Sigma'} \pi = \iint_{\Sigma} \pi$  luego  $\pi$  es un invariante para superficies  $\Sigma, \Sigma'$  con la misma frontera. Por tanto  $\pi$  es un invariante absoluto.

## 12. Consecuencias

Como resultados bien conocidos que relacionan las clases de cohomología de las formas diferenciales con las de homología de la variedad, se pueden definir algunas consecuencias.

Sea  $C_p$  el grupo de cadenas de dimensión  $p$  de una variedad diferenciable. Sea  $Z_p$  el grupo de ciclos (cadenas de frontera nula), y los  $B_p$  bordes (cadenas frontera de otras cadenas),  $Z_p/B_p$  se le llama grupo de homología de orden  $p$ .

Las formas diferenciales sobre la variedad de orden  $p$ ,  $F^p$  forman un grupo; de entre éstas, las formas cerradas (de diferencial nula), forman un subgrupo  $\check{F}^p$  que contiene a las formas  $d F^{p-1}$ , al cociente  $\check{F}^p/d F^{p-1}$  se le llama grupo de "de Rham" de la variedad.

Se definen las cocadenas como aplicaciones lineales  $f^p$  de las cadenas en los números reales  $f^p(C_p) \rightarrow R$ , dualmente a la frontera de una cadena se define la  $p$  cofrontera por la igualdad

$$\delta f^p(C_{p+1}) = f^p(\partial C_{p+1})$$

Las cadenas  $C^p$  tales que  $f^p(C_p) = 0$  forman un grupo que contiene a  $\delta C^{p-1}$ ; a  $\check{C}^p/\delta C^{p-1} = H^p$  se le llama grupo de cohomología de la variedad. El teorema de "de Rham" demuestra que los grupos  $H^p$  y  $R^p$  son isomorfos.

Si  $M$  es una variedad foliada, sea  $\omega_1 = 0 \dots \omega_k = 0$  el sistema completamente integrable cuyas soluciones son las hojas de la variedad,  $L_i$ . Sean  $\Omega_i$  los ideales de las formas lineales que se anulan sobre cada una de las hojas de  $L_i$ . Sea  $\Omega$  el grupo de formas lineales sobre  $M$ ,  $\Omega/\Omega_i$  es el



conjunto de clases invariantes sobre cada hoja  $L_i$ , al grupo  $\Omega_i$  le llamaremos grupo anulador sobre cada hoja  $L_i$ .

La intersección  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \dots \cap \Omega_h$  es el ideal  $\mathcal{G}$  que se anula sobre todas las hojas y que por tanto tiene por base  $\omega_1, \dots, \omega_h$ . Las clases  $\Omega/\mathcal{G}$  son invariantes sobre la foliación. En una variedad diferenciable cualquiera, si  $\omega^p$ ,  $C_p$  son las formas de orden  $p$  y las cadenas de dimensión  $p$  sobre ella. La integral  $\int_{C_p} \omega^p$  establece una aplicación  $C_p \times \omega^p \rightarrow R$ .

Representaremos  $\int_{C_p} \omega^p$  por  $(C_p, \omega^p)$ . Una forma  $\omega$  se dice invariante integral sobre el conjunto de cadenas  $C_1, C_2 \dots C_n$  si se verifica:

$$(C_1, \omega) = \dots (C_n, \omega)$$

si no se impone más condiciones, a la forma se le llama invariante integral absoluto de primera especie, si para que esto suceda es necesario que  $\omega$  sea una forma cerrada ( $\omega = d\alpha$ ) se dice ser la forma invariante integral absoluto de segunda especie. Si para que se verifique dicha igualdad es necesario que las cadenas sean cerradas, se dice invariante integral relativo.

Si un invariante integral absoluto de segunda especie es la diferencial exterior de un invariante relativo. Se tendrán las siguientes relaciones:

Por la fórmula Stokes  $(C_i, d\omega) = (\partial C_i, \omega)$  luego si

$$(C_1, d\omega) = \dots = (C_n, d\omega)$$

también podremos escribir:

$$(\partial C_1, \omega) = \dots = (\partial C_n, \omega)$$

2.<sup>a</sup> Para un invariante integral existe un grupo de cadenas  $\Sigma(\epsilon_1 \dots, \epsilon_k)$ , sobre las que se anula el invariante.

Si  $(C_i, \omega) = (C_j, \omega)$ ; se deduce  $(C_i - C_j, \omega) = 0$  luego  $C_i - C_j = \epsilon_k$  a  $\Sigma$  le llamaremos grupo anulador de la forma  $\omega$ .

3.<sup>a</sup>  $\omega$  es un invariante respecto de las clases  $C/\Sigma$  que llamaremos clases de invariancia.

4.<sup>a</sup> Si dos formas  $\omega_1, \omega_2$  tienen los anuladores  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , ambas se anulan sobre el subgrupo.  $\Sigma_{12} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ .

5.<sup>a</sup> Si una forma es combinación lineal de otras dos,  $\omega_1 = \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3$ , su grupo anulador  $\Sigma_1$  contiene al subgrupo  $\Sigma_{23} = \Sigma_2 \cap \Sigma_3$ .

6.<sup>a</sup> Si una forma es combinación de otras dos, como consecuencia  $\Sigma_{12}, \Sigma_{13}, \Sigma_{23}$  coinciden.

7.<sup>a</sup>  $Z_1, Z_2$  son dos ciclos homólogos  $Z_1 - Z_2 = \partial C$ , si  $\omega_1, \omega_2$  son dos formas cohomólogas ( $\omega_1 - \omega_2 = d\alpha$ ), se verifica que  $(Z_1, \omega_1) = (Z_2, \omega_2)$ ; es decir que las integrales de los ciclos sobre formas cerradas sólo dependen de la clase de homología del ciclo y de la clase de cohomología de la forma.



## MEDIDAS EN ESPACIOS HOMOGENEOS

### *Medidas relacionadas con grupos de Lie*

En el primer capítulo de este trabajo hemos tratado de foliaciones regulares  $F$  definidas sobre una variedad diferenciable cualquiera, así como de medidas de las hojas de la foliación, medida definida sobre la variedad cociente  $M/F$ . En este segundo capítulo vamos a hacer un estudio paralelo en el caso particular de que las variedades diferenciables sean además grupos de Lie, o sobre las que actúen dichos grupos.

### 13. Grupos de Lie

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable  $G$ , que tiene a su vez la estructura de grupo, de tal suerte que la aplicación

$$\varphi : (x, y) \rightarrow x \cdot y^{-1}, \quad (x, y \in G)$$

es una aplicación diferenciable.

La aplicación  $\tau_g : x \rightarrow g x$  ( $x, g \in G$ ) es un homeomorfismo de  $G$  en sí mismo que llamaremos traslación por la izquierda. Estas traslaciones inducen una transformación subordinada entre los campos de vectores tangentes a la variedad en  $G$ ,  $d \tau_g : X \rightarrow d \tau_g(X)$ . Dualmente las formas diferenciales  $\omega$  sobre  $G$  se transforman así:  $\delta \tau_g : \delta \tau_g(w) \leftarrow w$  verificándose por tanto

$$[\delta \tau_g(w)](X) = w[d \tau_g(X)]$$

Un campo vectorial  $X$ , o una forma diferencial  $\omega$  se dice que son invariantes por  $G$ , si se verifica que  $d \tau_g(X) = X$ , ó  $\delta \tau_g(w) = w$  respectivamente.

Sea  $\alpha_g : x \rightarrow g x g^{-1}$  un automorfismo interno; subordina sobre los campos vectoriales la transformación

$$d \alpha_g : X \rightarrow M_g X$$

siendo  $d \alpha_g$  un homomorfismo,  $M_g$  una matriz cuyos elementos dependen de  $g$  (supuesto existente un sistema de coordenadas), la correspondencia

$$A d(G) : g \rightarrow M_g$$

se llama *representación adjunta* del grupo  $G$ .

La matriz  $M_g$  la denotaremos por  $Ad_g$ .



### Espacios homogéneos

Sea  $G$  un grupo de Lie y  $H$  un subgrupo cerrado; consideremos las clases  $G/H$ , clases que son subvariedades diferenciales de  $G$ , pasando una sola por cada punto, y que componen una foliación regular, foliación que puede ser definida por el sistema

$$\omega_{n+1} = 0 \dots \omega_m = 0 \quad 13-1$$

siendo  $w_i$  formas diferenciales invariables por  $G$ .

Al espacio cociente  $G/H$ , variedad diferenciable, se le llama *espacio homogéneo*.

La medida es la forma  $\Omega = w_{n+1} \wedge \dots \wedge \omega_m$  si  $d\Omega = 0$ , que es la condición de Cherm-Sanalé que hemos generalizado a variedades foliadas regularmente en el capítulo anterior.

Diremos que  $X_1, X_2 \dots X_n$  son campos de vectores base de la foliación  $F$ , cuando son invariantes por  $G$ , y en cada punto son tangentes a la hoja de  $F$  que pasa por un punto  $p$ , satisfaciendo además a la condición de Frobenius  $[X_i, X_j] = \sum c_{ij}^k X_k$ , condición que es equivalente a la de ser el sistema [13-1] completamente integrable.

Históricamente, el estudio de la medida en los espacios homogéneos, se llevó a cabo al estudiar la medida de elementos de un espacio de Klein  $K$ , sobre el que actúa transitivamente un grupo de Lie  $G$ . En este caso los elementos de  $K$  se corresponden biunívocamente con las clases  $G/H$ , siendo  $H$  el subgrupo de  $G$  que deja fijo un elemento de  $K$  (grupo de isotropía del punto), grupo que es cerrado, siendo  $G/H$  la variedad cociente. Por tanto, el problema de encontrar una medida sobre  $K$  quedaba reducido a medir un conjunto de hojas de una foliación regular sobre la variedad diferenciable  $G$ , problema que ya hemos resuelto de una manera general en el capítulo anterior.

### Geometría Integral en espacios homogéneos de grupos de Lie

Una de las fórmulas fundamentales de la Geometría Integral en espacios homogéneos trata de calcular la integral de una función de la intersección de dos subvariedades, una fija y la otra transformada por elementos  $g$  del grupo. A continuación damos una importante fórmula de Hermann para este caso, dando una nueva deducción.

Sea  $G$  un grupo de Lie,  $H$  un subgrupo cerrado,  $K_0, K$  dos subvariedades de  $G/H$  tales que  $\dim K_0 + \dim K + \dim H = \dim G$ , actuando  $G$  por la izquierda sobre  $G/H$ . Sea también  $N(G)$  el número de puntos de intersección de  $gK$  con  $K_0$  y  $d g$  una medida sobre  $G$  (forma invariante a izquierda de dimensión igual a la de  $G$ ). En tales condiciones calculemos

$$\int_G N d g.$$

Sean por otra parte  $\varnothing : K \rightarrow G$ ;  $\psi : K \rightarrow G$  secciones a través de  $G/H$ . y  $\alpha$  una aplicación  $\alpha : K_0 \times H \times K \rightarrow G$  de la forma siguiente:

$$\alpha(y, h, x) = \psi(y) h \varnothing(x)^{-1} \text{ siendo } y \in K_0, h \in H, x \in K$$



Para  $g \in G$ ,  $N(g)$  es el número de puntos en  $\alpha^{-1}(g)$ , pues al ser

$$g = \psi(y) h \Theta(x)^{-1}, \quad g \Theta(x) = \psi(y) h; \quad \Phi(x)$$

es de la clase  $x$  en  $G/H$ ,  $\psi(y) h$  es de clase  $y$  en  $G/H$ , luego  $g$  transforma la clase  $x$  en la  $y$ , por tanto,  $g x = y$ . Recíprocamente si  $y \in g K \cap K_0$  hay un  $x \in G/H$  tal que  $g x = y$ , existiendo una correspondencia biunívoca entre  $\alpha^{-1}(g)$  y los puntos de intersección de  $g K$  con  $K_0$ .

En la integral  $\int_G N dg = \int_{K_0 x H x K} \alpha^*(dg)$ ; donde  $G$  es un grupo conexo, interesa calcular  $\alpha^*(dg)$ , para ello es suficiente hacerlo con las formas base  $w_0$  sobre  $G$ , invariantes a la izquierda por dicho grupo, puesto que cualquier  $dg$  podrá expresarse como combinación de éstas.

Nos encontramos con el siguiente hecho:

$$\begin{aligned} \alpha; K \times H \times K &\rightarrow G \\ \alpha^*; \alpha^{0*}(w_i) &\leftarrow w_i \end{aligned}$$

representando por  $\alpha^*$  la aplicación entre formas dual de la aplicación  $\alpha$  entre campos de vectores.

Teniendo en cuenta que si el producto de variedades diferenciales se aplica sobre otra (véase Kobayashi-Nomizu [1]), los campos de vectores se transforman así:

$$\alpha_*; X, Y, Z \rightarrow \alpha_{1*}(X) + \alpha_{2*}(Y) + \alpha_{3*}(Z)$$

siendo  $X, Y, Z$  tres campos de vectores sobre  $K, H, K$  resp.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  las aplicaciones tales que

$$\alpha(y, h, x) = \alpha_1(y), \alpha(y, h, x) = \alpha_2(h); \alpha(y, h, x) = \alpha_3(x).$$

Dualmente se verificará:

$$\alpha^*(w_i) = \alpha_1^*(w_i) + \alpha_2^*(w_i) + \alpha_3^*(w_i).$$

Para ver cuáles son  $\alpha_i^*(w_i)$  habrá que tener en cuenta que si

$$\tau_g; x \rightarrow g x g^{-1}, \quad \tau_g^*; (A dg)_{ij}' w_i \leftarrow w_i$$

siendo  $(A dg)_{ij}$  la matriz adjunta de  $g$ . En tal caso y teniendo en cuenta que  $\psi(y) h \Theta(x)^{-1} = g$ , nos quedará:

$$\psi(y) h \Theta(x)^{-1} = \psi(y) [\Theta(x) h^{-1}]$$

y, por tanto,

$$\alpha_1^*(w_i) = Ad[\Theta(x) h^{-1}] \psi^*(w_i);$$

si  $i$  es la aplicación inclusión  $i; H \rightarrow G$ ,  $i^*(w)$  será invariante por  $\delta L \psi(y)$  a la izquierda, pero en cambio la  $\theta(x)$  repercutirá así:

$$\alpha_2^*(w_i) = [Ad \theta(x)^{-1}]_{ij} i^*(w_j);$$

por último la  $\alpha_3(w_i)$  se obtendrá teniendo en cuenta que al elemento  $\theta(x)$



viene afectado a la izquierda por  $\psi(y)$ , la forma  $\theta^{-1}(w_i) = -\theta^*(w_i)$  permanecerá invariante, y por tanto

$$\alpha^*(w_i) = \alpha_1^*(w_i) + \alpha_2^*(w_i) + \alpha_3(w_i) = (Ad\theta(x)h^{-1})_{ji}\psi^*(w_j) + (Ad[\theta(x)])_{ji}i(w_j) - \theta^*(w_i)$$

Esta fórmula establece la estructura del cálculo seguido para obtener muchas fórmulas de la Geometría Integral.

A continuación damos algunos ejemplos de medidas en espacios euclídeos.

#### 14. Medidas de conjuntos de puntos y rectas en el plano euclídeo

En el plano euclídeo el grupo  $G$ , es ahora el de los movimientos directos, grupo que tiene por ecuaciones:

$$\begin{aligned}x^+ &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + a \\y &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + b\end{aligned}$$

y cuyas componentes relativas son: (Santaló [1])

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \varphi da + \sin \varphi db \\ \omega_2 &= \sin \varphi da + \cos \varphi db \\ \omega_{12} &= d\varphi\end{aligned}$$

siendo  $d\omega_i = \omega_j \wedge \omega_{ji}$  en este caso  $d\omega_{12} = 0$  la ecuación de estructura.

En el conjunto de puntos, el subgrupo de isotropía de un punto viene definido por la rotación  $\omega_{12}$  que deja invariante el origen. Por ejemplo las subvariedades  $G/H$  serán en este caso las integrales del sistema  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$  y por tanto la medida será  $\omega_1 \wedge \omega_2 = da \wedge db = \omega$ ; verificándose que  $d\omega = 0$ , el invariante relativo será  $\pi = \frac{1}{2}(a db - b da) \rightarrow$  tal que  $d\pi = \Omega$ .

Un conjunto bidimensional de rectas, tendrá como subgrupo de isotropía de una de ellas (eje  $OX$ ) las traslaciones  $\omega_1$ , las subvariedades  $G/H$  serán en este caso las integrales del sistema  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_{12} = 0$  siendo la medida por tanto  $\omega_2 \wedge \omega_{12} = -d\omega_1 = 0$ , y  $\omega_1$  el invariante relativo. El sistema  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_{12} = 0$  da al integrarlo las siguientes variedades representantes de las rectas.

$$\left. \begin{aligned}-a \sin \varphi + b \cos \varphi &= \xi_2' \\ \varphi &= \xi_1\end{aligned} \right\}$$

es decir; rectas del espacio  $G$ , situadas en planos paralelos al  $\alpha = 0$  y dentro de cada plano  $\varphi = \xi_1$ , las rectas obtenidas son paralelas entre sí.

En el espacio cociente  $G/H$ , a cada una de estas rectas le corresponde un punto de coordenadas  $(\xi_1 = \varphi; \xi_2 = p)$ ,  $p$  distancia desde el origen a la recta, y  $\varphi$  ángulo de la normal a la recta con el eje  $OX$ .

Si se trata de una curva cerrada y convexa, siendo  $0$  interior, para una  $\varphi$  fija, las rectas que cortan a la curva estarán limitadas por las dos tangentes a la misma de esa dirección. Si es  $p(\varphi)$  la distancia entre esas dos tangentes de dirección  $\varphi$ , los puntos  $(\xi_1, \xi_2)$  del espacio cociente representantes de las rectas llenarán el espacio limitado por los ejes  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  la ordenada  $\pi$



y la curva  $P(\varphi)$ ; y como las rectas que cortan a una curva convexa tienen por medida la longitud de ésta; resultará que  $L = \int_0^\pi P(\varphi) d\varphi$ . En el caso de la circunferencia,  $p(\varphi) = 2r$ , por tanto el recinto es un rectángulo de base  $\pi$  y de altura  $2r$ , siendo la medida de las rectas que cortan a la circunferencia igual al área de este recinto del plano cociente, tendremos que la longitud de la circunferencia es  $2\pi r$ .

Podemos hacer extensiva esta teoría a los óvalos de anchura constante. Entonces  $p = k$ , la medida es pues  $k\pi$  y por tanto la longitud del óvalo (teorema de Barbier), con lo que queda demostrado este teorema con recursos de la Geometría Integral (Vid. Rey Parstor-Santaló [1]).

### 15. Medidas de conjuntos en el espacio Euclídeo de 3 dimensiones

El grupo  $G$  de los movimientos del espacio, es un grupo que depende de seis parámetros. Las componentes relativas las representaremos por  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ , siendo las tres primeras traslaciones infinitesimales en la dirección de los ejes, y las tres segundas rotaciones infinitesimales alrededor de los mismos ejes. El conjunto de puntos de tres dimensiones tiene por  $H$  el subgrupo de isotropía del origen, los giros  $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ , las subvariedades  $G/H$  son integrales del sistema  $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0$ , siendo la medida  $\Omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = da \wedge db \wedge dc$  y por tanto  $d\omega = 0$ . El invariante relativo es en este caso

$$\pi = \frac{1}{3} (a db \wedge dc + b dc \wedge da + c da \wedge db)$$

Si se trata del conjunto tridimensional de planos,  $H$  grupo de isotropía del  $XOY$  estará formado por las traslaciones  $\omega_1, \omega_2$  y el giro  $\omega_{12}$ . Los planos vendrán representados por las variedades integrales del sistema  $\omega_3 = 0, \omega_{13} = 0, \omega_{23} = 0$  y la medida será  $\omega_3 \wedge \omega_{13} \wedge \omega_{23}$  cumpliéndose aquí también la condición  $d\omega = 0$ , y el invariante relativo será

$$\pi = p \wedge d\omega_{12}$$

De análoga manera se deducirá para el conjunto cuatridimensional de rectas  $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_{13} \wedge \omega_{23}$ ;  $d\omega = 0$ .

### 16. El grupo de los movimientos en el espacio de $n$ dimensiones

En el espacio euclídeo de  $n$  dimensiones, los puntos vienen referidos a un punto especial (origen) y a un sistema de vectores unitarios y ortogonales entre sí dos a dos  $\vec{e}_i$ . Sea  $x$  un punto cuyas coordenadas expresaremos referidas a un sistema absoluto  $(A^0, \vec{e}_i^0)$ ; aplicando un movimiento a la referencia, el punto transformado será  $\vec{x}^i = \vec{A} + \sum x_i \vec{e}_i$ ,  $d\vec{A} = \sum \omega_i \vec{e}_i$ ;  $d\vec{e}_i = \sum \omega_{ij} \cdot \vec{e}_j$  (6-1). Las  $\omega_i, \omega_{ij}$  son las componentes relativas del grupo de movimientos. Las  $\omega_i$  son traslaciones infinitesimales en la dirección de los ejes y las  $\omega_{ij}$  son rotaciones infinitesimales alrededor de rectas que pasan por el origen. Entre éstas existen las siguientes relaciones siendo:  $d\vec{A} = \sum_i \omega_i \vec{e}_i$ ,



por diferenciación se obtiene  $\sum (d \omega_i e_i - \omega_i \wedge d e_i) = 0$  y teniendo en cuenta (16-1) queda:

$$d \omega_i = \sum \omega_j \wedge \omega_{ji}$$

De la relación  $d e_i = \sum \omega_{ij} e_j$  por diferenciación también puede obtenerse:

$$\sum (d \omega_{ij} e_j - \omega_{ij} \wedge d e_j) = 0$$

y multiplicando por  $e_i$  queda

$$d \omega_{ij} = \sum \omega_{ih} \wedge \omega_{hj}$$

que junto a la anterior conclusión componen las llamadas *ecuaciones de estructura*.

### La medida en los espacios euclídeos de $n$ dimensiones

La generalización de las fórmulas vistas anteriormente se hace de la siguiente manera: (Santaló [2]). Sea  $L_r^n$  un  $r$ -espacio o variedad lineal de  $E_n$ . La densidad de un conjunto de puntos es

$$\Omega_r^n = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

igual al elemento de volumen.

Para los restantes casos consideremos primero la medida del conjunto  $L_{r(o)}^n$  espacios lineales  $r$ -dimensionales que pasan por un punto  $O$ . La densidad de los  $L_{r(o)}^n$  determinados por  $r$ -vectores  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_r$  es el producto exterior  $\Omega_{r(o)}^n = \Pi \omega_{ik}$

$$i = 1, 2, \dots, r; h = r + 1, r + 2, \dots, n$$

Los  $L_{n-r(o)}^n$  espacios lineales complementarios que pasan por el mismo punto  $O$  tienen la misma medida  $\Omega_{r(o)}^n = \Omega_{n-r(o)}^n$  por ejemplo para las rectas e hiperplanos que pasan por un punto

$$\Omega_{r(o)}^n = \omega_{12} \wedge \omega_{13} \wedge \dots \wedge \omega_{1n} = dO_{n-1}$$

siendo  $dO_{n-1}$  el elemento de área de la hipersfera de centro  $O$  y radio unidad y dimensión  $n - 1$ .

Pasemos ahora a un conjunto  $L_r^n$  cualquiera, tracemos por el punto  $O$  el espacio paralelo a cada uno de ellos  $L_{r(o)}^n$ , sea  $P$  el punto genérico de intersección de cada  $L_r^n$  con el  $L_{n-r(o)}^n$  de dimensión complementaria y perpendicular a él por  $O$ ; designemos por  $dV$  el elemento de volumen generado por  $P$ . La densidad de los espacios  $L_r^n$  está dada por

$$\Omega_r^n = dV \wedge \Omega_{r(o)}^n$$

El invariante relativo será igual a  $\Pi_r^n = V \wedge \Omega_{r(o)}^n$

Ejemplo: Siendo

$$\Omega_{1(o)}^4 = \omega_{14} \wedge \omega_{24} \wedge \omega_{34}$$



la densidad de rectas que pasan por un punto en un espacio euclídeo de cuatro dimensiones, el invariante relativo correspondiente es:

$$\pi_{1(o)}^4 = \frac{1}{4} (\omega_{12} \wedge \omega_{34} + \omega_{13} \wedge \omega_{42} + \omega_{14} \wedge \omega_{23})$$

*Medidas de conjuntos de dimensión menor que la máxima*

Así como en el espacio ordinario se miden áreas, longitudes y volúmenes, también con recursos de Geometría Integral pueden medirse conjuntos de diferente número de dimensiones dentro de un mismo espacio base.

Entendemos por medida de un conjunto de variedades  $V$  de integrales del sistema  $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0 \dots \omega_n = 0$ , donde las  $\omega_i$  son las componentes relativas del grupo  $G$ , siendo el conjunto de variedades de dimensión  $p \leq h$ , a la expresión  $\Omega = A_{i_1 i_2 \dots i_p} \omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$

siendo las  $A_{i_1 i_2 \dots i_p}$  constante y  $d\Omega = 0$ .

Por ejemplo si se trata de un conjunto unidimensional de rectas del plano, será según la definición de la forma  $A_2 \omega_2 + A_3 \omega_{12}$ , se verificará que  $d\Omega = 0$  si  $A_2 = 0, A_3 = 1$ , y entonces nos queda  $d\Omega = \varphi$ .

Si un arco de curva es convexo, la medida del conjunto de tangentes coincide con la expresión  $z(s) ds$ , en donde por  $z(s)$  se representa la curvatura. Si el arco no es convexo bastará considerar  $|z(s) ds|$ .

En el caso de conjuntos bidimensionales de planos o rectas en  $E_3$  serán  $\omega_{13} \wedge \omega_{32}$ .

Finalmente la medida de un conjunto unidimensional de rectas se obtendrá trazando sus paralelas por  $O$ , y cortando a éstas por la superficie esférica de centro  $O$  y radio unidad. La longitud de la curva sección será la medida. En vez de utilizar el grupo de movimientos pudimos habernos referido a otro cualquiera, que transforme el espacio, como el subgrupo de afinidades

$$(x') = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x)$$

que transforman transitivamente los puntos del plano euclídeo, pues dados dos puntos existe siempre una de estas afinidades que transforman  $P_0$  en  $P'_0$ , ya que

$$\left. \begin{aligned} x'_0 - x_0 &= a y_0 + b \\ y'_0 - y_0 &= a \end{aligned} \right\} \text{ tiene } \Delta = -1,$$

sistema siempre compatible.

Las componentes relativas son  $\omega_1 = da; \omega_2 = db - a da$ .

La medida del conjunto de puntos se calculará a partir del invariante  $\Omega_2 = da \wedge db$  y como medida lineal  $\Omega_1 = db + (1 - a) da$ , ambas verificando la propiedad de tener su diferencial nula.



## GEOMETRÍA INTEGRAL EN ESPACIOS DE CURVATURA CONSTANTE

## 17. Espacios de curvatura constante

En el espacio euclídeo de tres dimensiones, entendemos por superficie de curvatura constante, aquellas en las que en todos sus puntos es constante su curvatura total. Dos superficies de la misma curvatura constante son isométricas.

Una variedad diferenciable se dice que es de curvatura constante cuando lo es su curvatura total en todos sus puntos, la llamaremos *espacio de curvatura constante*.

Todo espacio de curvatura constante admite un grupo simplemente transitivo de transformaciones dependientes de  $\frac{1}{2}n(n+1)$  parámetros que lo transforman en sí mismo. Por ej. en la hiperesfera de  $n$ -dimensiones hay tantos movimientos que la transforman en sí misma, como giros hay de su propio centro en el espacio euclídeo  $E_{n+1}$  que la contiene, número que sabemos que es  $\binom{n+1}{2}$ . Definido uno de estos movimientos sobre un  $S_n$  de curvatura constante, por isometría nos quedará definido otro movimiento sobre otro  $S_n'$  de igual curvatura constante que el anterior, ya que la isometría conserva la curvatura total. Además la transformación resultante en el  $S_n'$  será otro movimiento, pues en la isometría se conservan distancias y ángulos. Sea  $x_0$  un punto fijo de  $S_n$  y  $\vec{e}_i$   $n$  vectores unitarios de origen  $x_0$  y ortogonales entre sí. El conjunto de  $x_0$  más los  $n$  vectores  $\vec{e}_i$  forman un  $n$ -edro, y cada movimiento determina otro  $n$ -edro conservando la misma orientación. Sea el vector que une los puntos  $x, x + dx$ . Se podrá expresar como combinación lineal de la base  $dx = \sum \omega_i e_i$  análogamente las diferenciales absolutas  $De$  se expresarán

$$De_i = \sum \omega_{ih} \vec{e}_h$$

Tanto las  $\omega_i$  como las  $\omega_{ih}$  son formas diferenciales lineales el valor de éstas se deduce inmediatamente multiplicando escalarmente por los vectores  $e_i$ , quedando

$$\omega_i = \vec{e}_i \cdot dx; \omega_{ih} = \vec{e}_h \cdot De_i = -\omega_{hi}$$

por ser los  $e_i$  unitarios y ortogonales  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ .

Las ecuaciones de estructura (ecuaciones que expresan las diferenciales de  $\omega_i, \omega_{ih}$  como función de éstas) son:

$$d\omega_i = \sum \omega_h \wedge \omega_{hi}$$

$$d\omega_{ih} = \sum \omega_{ih} \wedge \omega_{hj} + \frac{1}{2} R_{ih}^j \omega_i \wedge \omega_h$$

$R_{ih}^j$  es el tensor de curvatura del espacio, que en nuestro caso particular



será la constante  $k$  de curvatura constante, por tanto las ecuaciones de estructura se podrán escribir en la forma:  $d\omega_i = \sum \omega_{ih} \wedge \omega_{hi}$

$$d\omega_{ij} = \sum \omega_{ih} \wedge \omega_{hj} + \frac{1}{2} k \omega_i \wedge \omega_j$$

Las formas de Pfaff  $\omega_i$ ,  $\omega_{ij}$  son las componentes relativas del grupo  $G$ , invariantes por dicho grupo, en consecuencia el producto exterior de varias de ellas también lo será. A partir de estas formas vamos a encontrar las medidas en espacios lineales  $L_r$ .

### Densidad para espacios lineales $L_r$

Consideremos el espacio lineal  $L_r$ , definido por un punto  $x$  y los  $r$ -vectores  $e_i$ . Todo movimiento que deje invariante  $L_r$ , deberá de ser tal que  $\omega_i = 0$ ;  $\omega_{jh} = 0$  siendo ( $i = r + 1 \dots n$ ;  $j = 1 \dots r$ ,  $h = r + 1 \dots n$ ).

Este sistema de ecuaciones de Pfaff, debe de ser completamente integrable y sus variedades integrales representarán en el espacio del grupo  $G$ , al subgrupo  $g$  (que deja invariante al  $L_r$ ) y a sus transformados por las operaciones de  $G$ . El producto exterior  $\Omega_r^n = \Pi \omega_i \wedge \Pi \omega_{ih}$

$$(i = r + 1 \dots n, j = 1, 2 \dots r, h = r + 1 \dots n)$$

es siempre invariante por las operaciones de  $G$ , por serlo cada uno de los factores, y será la densidad para  $L_r$  siempre y cuando su valor dependa exclusivamente de  $L_r$  y no del punto  $x$  elegido para definirlo, ni de los vectores  $e_i$ , lo que equivale a que se verifique que  $d\Omega_r^n = 0$  cosa que ocurre en este caso.

Si se trata del caso particular de un conjunto de puntos, es decir  $r = 0$ , se tendrá  $\Omega_0^n = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n$  expresión que coincide con la vista para el espacio euclídeo.

### DENSIDAD DE PARES DE PUNTOS

#### Densidad de pares de puntos en un $S_{n+1}$ de curvatura constante.

Consideremos en  $S_{n+1}$  un sistema de coordenadas geodésicas paralelas, en las que la primera forma tiene la expresión:

$$ds^2 = (dx_0)^2 + \sum g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

elegidas de tal manera que

- $x_0 = 0$  es la hipersuperficie  $V_n$
- Las curvas  $x_\alpha = \text{const}$  ( $\alpha = 1 \dots n$ ) son normales a las superficies  $V_n$  en las cuales la longitud del arco se mide por  $x_0$  positivamente hacia fuera de  $V_n$ .
- La orientación positiva de  $S_{n+1}$  está dado por el orden  $(x_0, x_1 \dots x_n)$ . Los valores de  $g_{\alpha\beta}$  para  $x_0 = 0$  se representan por  $\gamma_{\alpha\beta}$  tal que  $\gamma_{\alpha\beta}$  son las componentes del tensor métrico de  $V_n$ .

$$\left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_0} \right)_{x_0=0} = - \frac{\Omega_{\alpha\beta}}{2}$$



son los coeficientes de la segunda forma fundamental de  $V_n$  relativa a  $S_{n+1}$ . Representamos por  $g$  al determinante  $|g_{\alpha\beta}|$  poniendo

$$|-\Omega_{\alpha\beta} + \lambda \gamma_{\alpha\beta}| = \Theta_0 + \Theta_1 \lambda + \dots + \Theta_n \lambda^n$$

será

$$g^{\frac{1}{2}} = \gamma^{-\frac{1}{2}} (\Theta_0 + \Theta_1 \lambda + \dots + \Theta_n \lambda^n) \frac{\sin^n(x_0 k^{\frac{1}{2}})}{(k^{\frac{1}{2}})^n}$$

En efecto, se deduce:

$$R_{\alpha_0\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_0 \partial x_0} \right) - \frac{1}{4} \left( g^{\gamma\delta} \cdot \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x_0} \right)$$

pero por ser  $S_{n+1}$  de curvatura constante  $R_{\alpha_0\beta} = -k \cdot g_{\alpha\beta}$  de donde

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_0 \partial x_0} \right) - \frac{1}{4} \left( g^{\gamma\delta} \cdot \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x_0} \right) + k \cdot g_{\alpha\beta} = 0.$$

Consideremos un punto fijo  $P$  sobre  $V_n$  y la geodésica  $G(P)$  por  $P$  normal a  $V_n$ , tal que en ese punto la primera y la segunda fórmula fundamental se reduzca a suma de cuadrados, esto es  $\bar{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ : Pero por un lema demostrado por Allendoerfer [1], en las coordenadas elegidas, se verifica,  $\bar{g}_{\alpha\beta} = 0$  ( $\alpha \neq \beta$ ) para todos los puntos de  $G(P)$ . Así a lo largo de  $G(P)$  la ecuación diferencial anterior se reduce a

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{g}_{\alpha\alpha}}{\partial x_0 \partial x_0} \right) - \frac{1}{4} \bar{g}^{\alpha\alpha} \left( \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\alpha}}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\alpha}}{\partial x_0} \right) + k \bar{g}_{\alpha\alpha} = 0,$$

siendo en este caso  $\bar{g}_{\alpha\alpha} = (g^{\alpha\alpha})^{-1}$  y puesto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (g^{\frac{1}{2}}_{\alpha\alpha})}{\partial x_0^2} &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left[ \frac{1}{2} (g_{\alpha\alpha})^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\alpha}}{\partial x_0} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\alpha}^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial^2 g_{\alpha\alpha}}{\partial x_0 \partial x_0} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\alpha\alpha}^{-\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\alpha}}{\partial x_0} \right)^2, \end{aligned}$$

la ecuación se puede escribir

$$\frac{\partial^2 (\bar{g}_{\alpha\alpha})^{\frac{1}{2}}}{\partial x_0^2} + k (\bar{g}_{\alpha\alpha})^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Esta ecuación se puede integrar fácilmente (vid. E. Vidal, "Geometría Diferencial, pág. 242) encontrándose:

$$(g_{\alpha\alpha})^{\frac{1}{2}} = -\Omega_{\alpha\alpha} [K^{-\frac{1}{2}} \sin(x_0 k^{\frac{1}{2}}) + \cos(x_0 k^{\frac{1}{2}})].$$

De donde para el determinante  $g = |g_{\alpha\beta}|$  se encuentra:

$$|g^{-\frac{1}{2}}| = \pi [-\Omega_{\alpha\alpha} [k^{-\frac{1}{2}} \sin(x_0 k^{\frac{1}{2}}) + \cos(x_0 k^{\frac{1}{2}})]]$$



Este es el valor de  $g^{\frac{1}{2}}$  en un punto cualquiera de  $G(P)$  en función del valor de  $x_0$  y de los valores de  $\Omega_{\alpha\beta}$ ;  $\gamma_{\alpha\beta}$  sobre  $V_n$ : Volviendo a las coordenadas originales:

$$g^{\frac{1}{2}} = \det \left| -\frac{\Omega_{\alpha\beta}}{(\gamma_{\alpha\beta})^{\frac{1}{2}}} (k^{\frac{1}{2}} \sin(x_0 \cdot k^{\frac{1}{2}}) + \cos(x_0 k^{\frac{1}{2}})) \right|$$

pero

$$\det | -\Omega_{\alpha\beta} (k^{\frac{1}{2}} \sin(x_0 k^{\frac{1}{2}}) + \gamma_{\alpha\beta} \cos(x_0 k^{\frac{1}{2}})) |$$

es de la forma

$$\det | -\Omega_{\alpha\beta} + \lambda \gamma_{\alpha\beta} | \frac{\sin^n(x_0 k^{\frac{1}{2}})}{k^{n/2}},$$

poniendo  $\lambda = \frac{\cos(x_0 k^{\frac{1}{2}})}{\sin(x_0 k^{\frac{1}{2}})}$  se podrá escribir:

$$g^{\frac{1}{2}} = \gamma^{-\frac{1}{2}} (\Theta_0 + \Theta_1 \lambda + \dots + \Theta_n \lambda^n) \cdot \frac{\sin^n(x_0 k^{\frac{1}{2}})}{k^{n/2}},$$

en donde  $\gamma_{\alpha\beta}$  son los valores de  $(g_{\alpha\beta})_{x_0=0}$  sobre la hipersuperficie  $V_n$ .

$$\int g^{\frac{1}{2}}(A) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

es el elemento de volumen de  $V_n$  y

$$M_i = \int_{V_n} \theta_i \gamma^{-\frac{1}{2}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n;$$

(para  $i = 1 \dots n$  son las curvaturas medias).

La medida de un par de puntos sobre la variedad  $V_n$  vendrá dada por

$$\begin{aligned} \int \dot{A} \dot{B} &= \int g^{\frac{1}{2}}(A) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge da \cdot g^{\frac{1}{2}}(B) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge db \\ &= \int \theta_0 dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \cdot \int \frac{\sin^n(x_0 k^{\frac{1}{2}})}{K^{n/2}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge da \wedge db + \\ &+ \int \theta_1 dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \cdot \int \lambda \frac{\sin^n(x_0 k^{\frac{1}{2}})}{K^{n/2}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge da \wedge db + \\ &+ \int \theta_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \cdot \int \lambda^n \cdot \frac{\sin^n(x_0 k^{\frac{1}{2}})}{K^{n/2}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge da \wedge db \end{aligned}$$

### 18. Grupos actuando sobre una variedad no transitivamente

Sea  $V$  una variedad diferenciable,  $G$  un grupo de Lie conexo y localmente compacto actuando sobre  $V$  NO transitivamente. Se verifican las siguientes propiedades:



1.<sup>a</sup> Si  $x_1$  es un punto de  $V$  y  $X_1 \in V$  es el conjunto de puntos transformados de  $x_1$  por  $G$ , los puntos de  $X_1$  se transformarán transitivamente por  $G$ , pues si  $y, z$  son dos puntos de  $X_1$ ,  $y = g_1 x_1$ ;  $z = g_2 x_2$  ( $g_1, g_2 \in G$ ),  $y = g_1 g_2 z = g_3 z$ . Recíprocamente si  $x_2 \notin X_1$ , ningún punto de  $X_1$  puede transformarse de  $x_2$  por  $G$ , pues si existiera algún  $y$  tal que  $y = g_1 x_1$  y también  $y = g_2 x_2$ , luego  $x_2 = g_2^{-1} g_1 x_1$  por tanto  $x_2 \in X_1$  en contra de lo supuesto. Los puntos de  $V$  se agrupan por tanto en clases de equivalencia cuyos puntos se transforman transitivamente por  $G$ .

Ej.; el grupo de transformaciones

$$(x)' = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x)$$

divide al espacio  $R^3$  en las clases  $y = k$ , y dentro del plano  $y = 0$  en las  $\begin{cases} x = p \\ y = 0 \end{cases}$

2.<sup>a</sup> Si  $H_1$  es el subgrupo de  $G$  que deja fijo un punto de  $X_1$ , la medida de los puntos de  $X_1$  será la  $m(G/H_1)$  vista anteriormente.

Si la variedad  $V$  se descompone en las  $X_1 \dots X_n$  en número finito, por ser la medida una función aditiva se tendrá

$$m(V) = m(G/H_1) + m(G/H_2) + \dots + m(G/H_n)$$

siendo  $H_i$  el subgrupo que deja fijo un punto de  $X_i$ , y siendo además cerrados todos los  $H_i$ .

3.<sup>a</sup> Las clases de equivalencia a que nos estamos refiriendo pueden ser hojas de una foliación, si las  $H_i$  son todos de la misma dimensión y cerrados.

Ej.: El grupo de giros planos del mismo centro, transforma a cualquier punto del plano sobre otro de su misma circunferencia de centro el centro de los giros. Aquí las hojas son dichas circunferencias concéntricas.

Otro ej.: El grupo de transformaciones sobre  $R^2$

$$(x)' = \begin{pmatrix} a+1 & a & b \\ -a & 1-a & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (x)$$

verifica la propiedad de que  $x' + y' = x + y$ , y por tanto la foliación es en este caso la familia de rectas paralelas a la bisectriz del segundo cuadrante.

Otro ej.: El grupo de transformaciones sobre  $R^2$

$$(x)' = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (x)$$

verifica la propiedad de que  $x' - \frac{y'^2}{2} = x - \frac{y^2}{2}$  y por tanto queda de-

finida una foliación dada por la familia de parábolas  $x - \frac{y^2}{2} = k$ .



4.<sup>a</sup> Si  $G$  define una foliación sobre  $V$ , y es  $X$  una variedad diferenciable que apoya un punto en cada hoja,  $X$  se transformará por  $G$  en otras variedades que gozarán de la misma propiedad; en tal caso si es  $\omega$  el invariante integral absoluto que sirve para la medida de las hojas se tendrá:

$$\int_X \omega = \int_{gX} \omega \quad (g \in G)$$
 coincidiendo aquí los dos conceptos de invariante de Lie y de Cartan-Poincaré. Entonces la medida sobre  $V$  vendrá definida como producto de la medida de  $X$  por  $m(G/H)$ .

5.<sup>a</sup> Si un grupo  $G$  divide a una variedad  $V$  en clases de equivalencia, que son hojas de una foliación, actuando no transitivamente sobre ella, siendo estas hojas homeomorfas entre sí, cosa que ocurrirá si son homeomorfos los  $H_i$ , entonces queda definido sobre  $V$  la estructura de espacio fibrado, cuyas fibras son dichas clases de equivalencia y  $G$  es ahora el grupo estructural que actúa sobre cada fibra. Podemos tomar como base el conjunto de los puntos homólogos, uno en cada fibra, en los homeomorfismos que transforman la una en la otra y que tienen el mismo subgrupo  $H$  que los deja invariantes.

Si  $G$  define sobre  $V$  una fibración de base  $X$  (siendo  $X$  una variedad diferenciable, lugar de puntos invariantes por  $H$ ), y  $g_1 H = g_2 H$  entonces  $g_1 X, g_2 X$  son dos subvariedades homeomorfas entre sí que no tienen ningún punto común y cada una de éstas tiene un punto común con las fibras definidas anteriormente. A la foliación obtenida transformando  $X$  por todos los  $g \in G$  posibles, le llamaremos foliación complementaria. Si además sobre  $X$  existiera un grupo actuando transitivamente sobre ella, tendríamos una nueva fibración.

Ej.: Un espacio fibrado principal, en él  $F = G$ , el grupo coincide con las fibras, y por tanto  $G$  es el grupo estructural. En estas condiciones la base puede venir dada por los puntos unidad de las diferentes fibras, siempre que sea variedad diferenciable. El lugar del punto  $g$  en las diferentes fibras constituirá una nueva hoja de la foliación complementaria. La fórmula de Hermann se aplicará en este caso de la siguiente forma: la

integral  $\int_F \theta$  sobre lo que Hermann denomina "fibra genérica", será la

forma de Chern  $N = \int_{F(x)} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h$  producto de componentes re-

lativas de  $G$ , si  $\omega$  es la medida sobre  $X$  del conjunto de fibras;  $\Phi: V \rightarrow X$  (aplicación del fibrado  $V$  en la base  $X$ ) y se tiene:

$$\int_V \Phi^*(\omega) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_h = \int_X N \omega$$



## BIBLIOGRAFIA

1. C. B. ALLENDOERFER: *Steiner's formulae on a general  $S^{n-1}$* . Bull. of the A. Math. S. V. 54, págs. 127-135 (1948).
1. BLISS: *Lectures on the calculus of variations*. The Univ. of Chicago. Press, 1957.
1. V. BOURBAKI: *Elements de mathématique*. Vol. VI, *Integration* Ch. I-V, Hermann, París, 1952-1956.
1. E. CARTAN: *Leçons sur les invariants intégraux*. Hermann, París, 1922.
2. E. CARTAN: *Les espaces metriques fondees sur la notion d'aire*. Act. 72-Hermann. París, 1933.
3. E. CARTAN: *Les systemes différentiels exterieures et leurs applications geometriques*. Act. 994. Hermann. París, 1945.
4. E. CARTAN: *Sur l'intégration des équations différentielles complètement intégrables*. Ouvres complètes, Pt II, V. I. 555-561.
1. S. S. CHERN: *On Integral geometry in Klein spaces*, Ann. of Math., V. 43 (1942), págs. 178-189.
2. S. S. CHERN: *On the kinematic formula in Euclidean space of N dimension*. Am. Journal of math., vol. 174 (1952), págs. 227-235.
1. C. CHEVALEY: *Theory of Lie groups*. V. I. Princeton Univ. Press Princeton-New Jersey-1946.
1. P. DEDECKER: *Systemes différentiels exterieures, invariants intégraux et suites spectrales*. Con. Int. Geo. Dif. Edizioni Cremonese-Roma, 1954.
2. P. DEDECKER: *Calcul des variations et Topologie Algebrique*. Univ. de Liège, 1957.
1. R. DEHEUVELS: *Invariants d'un système de Pfaff complètement intégrable*. Col. Geo. Dif. Univ. Santiago (1963), págs. 45-51.
1. G. DE RHAM: *Variétés Différentiels*. Act. 1.222-Hermann-Paris (1955).
1. C. EHRESMANN, G. REEB: *Sur les camps d'elements de contact de dimension p complètement intégrable*. C. R. A. S. 218-(1944)-955.
2. C. EHRESMANN, SHIH WEI SHU: *Sur les espaces feuilletés theoreme de stabilité*. C. R. A. S. (1956), págs. 234 al 344.
3. C. EHRESMANN: *Space de estructures locales; elargissements de categorie*. Seminaire Ehresmann (1961). Trad. de Gattungen von Lokalem Strukturen. Jahresberich Deuch. Mat. Vereinigung 60 (1957).
4. C. EHRESMANN: *Les conexions infinitesimales dans un space fibré différentiable*. Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950, págs. 29-55.
5. C. EHRESMANN: *Sur la theorie des varietes feuilletées*. Ren. Mat. e delle sue apl. Roma (1951).
6. C. EHRESMANN: *Structures feuilletées*. Procee of the 5.<sup>a</sup> Canadian Math. Congress.
1. I. M. GELFAND, M. I. GRAEV: *The Geometry of homogeneous spaces, groups representations in homogeneous spaces and questions in the integral geometry*. Trudy-Moskow-Mat. Obsc (1959) 321.
1. HAEFLIGER: *Structures feuilletées et cohomologie a valeur dans un faisceau de groupoides*. Comment Mat. Helv. 32 (1952).
1. S. HELGASON: *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Acad. Press (1962).
1. R. HERMANN: *On the differential geometry of foliations*. Ann. Mat., vol. 72, 1960, págs. 445-457.
2. R. HERMANN: *Remarks on the foundations of integral geometry*. Rend Ciculo Mat. Palermo, 1960, págs. 1-6.
3. R. HERMANN: *The Diff. Geometry of Foliat.* II, Jour. Math, 1962, págs. 303-316.



1. S. KOBAYASHI, K. NOMIZU: *Foundations of Differential Geometry*. Inters. Plub. New York, 1963.
1. K. LEGRADY: *Sobre la determinación de funcionales en la Geometría integral*. Rev. de la Unión Mat. Argentina, vol. XIX, págs. 175-178 (1960).
1. A. LICHNEROVICZ: *Les relations integrales d'invariance et leurs applications a la dynamique*. Bull. des Sc. Mat. 2.<sup>a</sup> ed., t. LXX, 1946.
1. G. D. MOSTOW: *Homogeneous spaces with finite invariant measure*. Annals of Mat., vol. 75 (1962), págs. 17-37.
1. PALAIS: *A global formulation of Lie theory of Transformation groups*. Memoirs of the Ann. Math. n.º 22 (1957).
1. H. POINCARÉ: *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*. T. III, Paris-Gauthiers Villars (1899).
1. G. REEB: *Sur certaines proprietes topologiques des varietes feuilletées*. Act. 1183. París (1962).
1. REINHART: *Foliated manifolds with bundle-like metrics*. Ann of Mat., vol. 69 (1959), págs. 119-131.
1. J. REY PASTOR, L. A. SANTALO: *Geometría integral*. Espasa Calpe. Buenos Aires.
1. R. SALINAS: *Generalización sobre módulos del teorema de Hahn Banach y sus aplicaciones*. Coll Mat. Vol. IV, págs. 105-151 (1962).
1. L. A. SANTALO: *Integral Geometry on surfaces-Duke*. Mat. Jour. Vol. 16, n.º 2 (1949).
2. L. A. SANTALO: *Geometría Integral en espacios de curvatura constante*. Serie Mat. Vol. 1. Buenos Aires, 1952.
3. L. A. SANTALO: *Measure of sets of geodesics in a riemannian space*. Summa Bra. Matmyol 13. Fas. 1. Río Janeiro.
1. STEENROD: *Topological Methods for the construction of tensor functions*. Ann of Mats 42 (1942), págs. 116-131.
1. SH. STERNBERG: *Lectures on Differential Geometry*. Prentice Hall. Inc. Englewood., Cliffs. N. J.
1. E. VIDAL: *Geometría Integral sobre superficies curvas*. Consj. Sup. Inv. Científicas. Santiago, 1950.
2. E. VIDAL: *Generalización de los invariantes integrales y aplicación a la Geometría Integral en los espacios de Klein y Reimann*. Col. Mat. Vol. XII. Barcelona, 1960, páginas 71-102.
3. E. VIDAL: *A generalization of integral invariants*. Proceedings of the am Mat Society. Vol. 10 (1959), págs. 721-727.
4. E. VIDAL: *A Generalization of Steiner's formulae*. Bull of Ann Mat. Society. Vol. 53, págs. 841-844 (1947).
5. E. VIDAL: *Sobre algunos problemas en relación con la medida en espacios foliados*. 1.<sup>a</sup> Col. Geo. Dif. Univ. Santiago, págs. 63-77 (1964).
1. A. WELL: *L'integration dans les groupes topologiques et ses aplicaciones*. Act. Scie. Ind. págs. 869-1.145. Hermann. París, 1953.



## ESTADO ACTUAL DE LOS ESTUDIOS SOBRE LA INTERFERONA

Por el

ILMO. SR. D. ANGEL SÁNCHEZ FRANCO

*Excelentísimos e Ilustrísimos Señores,*

*Señoras y señores:*

Solamente vuestra generosidad y benevolencia, al juzgar mis escasos méritos ha podido proporcionarme el inmerecido honor de ser recibido en esta Academia.

Por ello deseo expresar mi gratitud a todos los Sres. Académicos, que han tenido la gentileza de admitirme en esta Docta Corporación. Y deseo proclamar, en este acto solemne, mi promesa de colaborar leal y sinceramente en esta Academia, pues yo estimo que el título de Académico no lo es solamente de alarde y de vanagloria, sino de función y oficio; por ello debemos prometer trabajar sin descanso hasta fundirnos, en este postulado como es: trabajar para hacer el bien.

Pecaría de injusto si no dedicase unas palabras de gratitud al ilustrísimo Académico y compañero de Facultad Dr. D. Jesús Sáinz y Sáinz Pardo, que con su gentileza me trae de la mano a este, para mí inolvidable acto de recepción. Su formación científica y su amistad son el mejor padrino y ello hará que me confiera la debida serenidad para recibir el privilegio otorgado por los restantes Académicos.

Como final del prólogo debo dedicar unas palabras a nuestro Ilustre antecesor, en esta Real Academia, Ilmo. Sr. D. Pedro Ramón Vinós.

Deseo confesar que me asusta el pensar que pueda ser yo, quien venga a ocupar la vacante que dejó tan ilustre persona, pues vosotros, Académicos que me hacéis el honor de escucharme, compartisteis con él las tareas y estoy seguro, que en vuestras mentes perdurarán durante mucho tiempo, las nobles y sabias palabras que vertió en esta docta casa.

Aunque no tuvimos el honor de conocer a D. Pedro Ramón Vinós, sí habíamos leído algunos de sus interesantes y magníficos trabajos. *Histopatología y clínica del cáncer. Comentarios al problema del cáncer. El anatomopatólogo en la solución de algunos problemas de diagnóstico y pronóstico en Patología. Reacción local del organismo a la invasión cancerosa y Teoría virásica del cáncer.*

En todos ellos se puede apreciar una gran inquietud por los problemas patológicos, y con especial interés los dedicados al estudio de la etiopatología.



genia del cáncer, tema preferente de sus investigaciones y de cuyo resultado habrá que esperar todavía algún tiempo para demostrar si sus experiencias sobre la teoría vírica del cáncer son ciertas o no, pero lo que sí se puede asegurar es que de sus estudios y trabajos de investigación se sacarán resultados de positivo interés para las ciencias biológicas.

Nosotros, modestamente y como homenaje a un gran hombre, que dedicó su vida al estudio y a la investigación, hemos deseado persistir en el tema que él cultivó con interés y cariño, y por ello queremos dedicar este trabajo al estudio de la Interferona, problema tan íntimamente ligado a los procesos patológicos producidos por virus.

### ESTADO ACTUAL DE LOS ESTUDIOS SOBRE LA INTERFERONA

ISAACS, y LINDERMAN, 1957, demostraron que el virus Influenza era capaz de producir un inhibidor antiviral, el cual denominaron Interferona. Posteriormente, distintos investigadores, continuaron estos estudios, llegando a la conclusión de que este fenómeno hay que incluirlo dentro de un concepto biológico más que como un fenómeno químico.

Basándose en los conocimientos estudiados por los distintos autores, en el momento actual, la Interferona se define como una sustancia segregada por las células sometidas a la acción de un primer virus y que inhibe por su presencia, durante un cierto tiempo, el desarrollo de otros virus, en las células que le han dado origen, o en otras que entren en contacto con ellas (GORET).

Para poder estudiar mejor este fenómeno es necesario conocer los dos elementos principales que entran en juego: la célula y el virus.

Aunque JENNER sospechó la presencia de un virus como agente etiológico de la viruela, fueron LOEFFLER y FROSCH estudiando un proceso infeccioso de los bóvidos, quienes señalan la presencia de un agente invisible a través del microscopio, lo que les hizo sospechar que se trataba de agentes ultramicroscópicos. Desde aquella época los estudios de los virus se han ido sucediendo y actualmente son conocidas su morfología, las dimensiones y también su estructura. El microscopio electrónico, la ultracentrifugación, los cultivos de virus en medios hísticos han permitido llegar a conocer todos los caracteres de estos agentes.

Es conocido que los virus no poseen el equipo enzimático suficiente para asegurar su propia multiplicación, necesariamente tiene que ser un parásito obligado de la célula por lo que para asegurar su multiplicación tienen que integrarse dentro del metabolismo celular y tomar de ésta los factores necesarios para sus funciones vitales.

Los estudios bioquímicos de los virus han llegado a precisar los componentes de algunos de ellos, virus como el de la vacuna en el cual se han identificado hidratos de carbono, lípidos, varias proteínas, cobre, biotina y riboflavina.



Los estudios más modernos han comprobado que los virus contienen ácidos nucleicos ADN (desoxivirus) o ARN (ribovirus). Estos ácidos nucleicos están constituidos por nucleótidos, que comprenden un ácido fosfórico, una pentosa y una base púrica (denina y guanina) o pirimidínica (citosina, metilcitosina, uracilo y tiamina).

Algunos virus poseen una envoltura de naturaleza mucopolisacárida que es de origen mixto, viral y celular.

Aunque el conocimiento de la penetración y multiplicación de los virus animales todavía es escaso, parece guardar en líneas generales cierto parecido con la multiplicación de los virus bacterianos y vegetales.

La primera fase de acercamiento estaría favorecida por una acción enzimática del virus que favorecería su unión sobre los receptores celulares.

En cuanto a la entrada del virus en la célula parece ser que están implicados dos fenómenos, una fijación electrostática y una fijación enzimática.

Según GORET y PROVOST, en fases posteriores, el ácido nucleico viral se integra en el ciclo nuclear de los ácidos nucleicos celulares, y estas células durante el corto período de su vida, fabricarán únicamente la nucleoproteína vírica. Es la muerte de la célula por desaparición de sus estructuras normales, las cuales son reemplazadas por las estructuras víricas.

Hemos partido de una célula sensible al virus, pues en otro caso la célula rechaza la nucleoproteína extraña, la metabolizará y asimilará para la elaboración de sus propias nucleoproteínas. Ello daría lugar a la sobrevivencia y curación de la célula y también de la asimilación del elemento exógeno, lo que constituye al "primum movens" de la inmunidad tisular, sobre la que se establece la resistencia adquirida (LEPINE, citado por OVEJERO).

Es precisamente en esta fase que hemos descrito donde se elaboran diversos productos y entre ellos, especialmente, la interferona, lo cual permitirá a la célula rechazar otros virus invasores a los que era sensible. Podremos ver también cómo la interferona interviene protegiendo las células que la han absorbido, por lo que debe ser considerada como uno de los factores de la inmunidad celular y, por tanto, del organismo.

## INTERFERONA

Como es sabido, en el curso de las enfermedades víricas se forman anticuerpos específicos que persisten en el torrente sanguíneo, a veces hasta la muerte del individuo. Por ello es natural que se atribuya a los anticuerpos un papel en la superación de las infecciones víricas.

Sin embargo, recientemente, se ha observado que los individuos enfermos de "hipogammaglobulinemia" hacen frente a muchas infecciones víricas a pesar de que sólo pueden formar vestigios de anticuerpos. También se han obtenido resultados parecidos en animales de experimentación que habían sido tratados con rayos Roentgen, y que superaron la infección vírica sin formar una cantidad de anticuerpos significativa.



Estas y otras razones llevaron a ISAACS, a pensar que los anticuerpos no parecen desempeñar un papel importante en la superación de las infecciones víricas. También ha podido ser comprobado que el suero de los conejos inoculados con virus del Herpes carecen de acción sobre el virus herpético, mientras que el cerebro de estos animales destruye, "in vitro", el virus, y que la mezcla cerebrovirus, puede ser inoculada sin riesgo alguno a nuevos conejos receptibles.

Una célula parasitada por un virus tiene una resistencia a la infección de otro virus del mismo o perteneciente a otro grupo.

Por primera vez fue JENNER quien apreció cómo las lesiones vacunales variolosas se presentaban con menor regularidad en presencia del virus herpes. Fue también revelado que monos infectados con virus de la Fiebre del valle del Rift, resultaban protegidos contra la Fiebre amarilla y que este fenómeno denominado interferencia viral, no era debido a una respuesta inmunitaria, por formación de anticuerpos. Continuando estos estudios se aprecia que monos infectados con virus de la Coriomeningitis linfocitaria no presentaban parálisis cuando habían sido infectados anteriormente con virus de la poliomielitis, por otra parte la médula espinal de los monos infectados contenía menor cantidad de virus de polio que en los monos de control, de lo que se deducía la existencia de una inhibición de la multiplicación del virus.

También se llegó a demostrar que virus inactivado por el calor o por los rayos ultravioletas pueden inducir a la producción de interferona.

Entre los virus que inducen a las células a la formación de interferona se encuentran los mixovirus, pox virus, arbovirus, enterovirus y otros grupos. La formación de interferona está determinada por la infectividad, dosis, cepas y virulencia del virus inductor. Estudios con fragmentos de fembrana alantoidea, revelaron que el virus influenza inactivado, por radiaciones ultravioleta, estimula la producción de interferona más eficientemente que los virus inactivados por el calor, o los virus patógenos. En contraste, los mixovirus, arbovirus, o enterovirus inactivados fallan en la producción de interferona.

También hay que señalar que los virus avirulentos estimulan a las células a la formación de mayor cantidad de Interferona que los virus virulentos. ENDERS, fue el primero en demostrar que los poliovirus atenuados presentan un gran poder de producción de Interferona.

En algunos casos se ha demostrado lo contrario, puesto que las distintas cepas de virus vacunantes de la Enfermedad de NEWCASTLE son relativamente pobres inductores de interferona en las células embrionarias del pollo, en contra de lo que ocurre con las cepas virulentas que producen una mayor cantidad de interferona.

Posteriores investigaciones han demostrado que células estimuladas por la infección vírica producen una sustancia antivírica, la interferona; se puede imaginar esta formación como una reacción inmunitaria de las células frente a la infección vírica, al contrario de lo que sucede con la formación de anticuerpos, a cargo de determinadas células especializadas, las



cuales reaccionan de esta forma, ante la penetración en el organismo de las sustancias llamadas *antígenos*.

La interferona impide la difusión de la infección, desempeñando un papel en el proceso curativo. Se ha demostrado ya firmemente que la interferona interviene para neutralizar las infecciones víricas.

La célula infectada sintetiza al mismo tiempo virus e interferona, pero se trata de un fenómeno reversible y no definitivo en cuanto aparece con la infección y desaparece después de la multiplicación celular.

Desde el año 1956, en que A. ISAACS y colaboradores iniciaron sus estudios sobre este problema, el cual, dado su interés, se ha intensificado en todos los países, y por numerosos autores tratando en investigaciones relacionadas con el fenómeno de la interferencia.

El fenómeno de la interferencia, muy difundido en Virología, se basa en la propiedad que poseen numerosos virus de determinar en la célula parasitada, un estado refractario hacia una segunda infección viral, que invade las células poco tiempo después de la primera.

La interferona se puede describir como una sustancia antivírica natural, que se opone a la acción de muy diversos virus. Las células de las aves, roedores y muchos maníferos, incluido el hombre, responden a la infección vírica produciendo interferona. El nombre de esta sustancia ha nacido en el estudio del bien conocido fenómeno de la interferencia entre los virus.

La interferona formada en la célula puede salir de ésta, pasar al medio que la rodea y venir a ejercer una acción protectora, sobre las células vecinas. Su papel protector es de índole general, no específico y su estudio tiene gran interés para el conocimiento del metabolismo de la célula normal.

El vertebrado adulto responde a la infección produciendo interferona en el lugar donde se multiplica el virus, en las primeras etapas de la infección. Después el animal produce un anticuerpo específico, y esto conduce a una prolongada resistencia a la infección por el mismo virus. En algunas infecciones víricas puede desarrollarse también una hipersensibilidad retardada. Resulta difícil valorar la contribución que corresponde a cada uno de estos factores y de muchos otros, tales como la fiebre en el proceso de recuperación de la infección vírica. Parece, sin embargo, que el papel de los anticuerpos es menos importante de lo que se creyó en principio.

Se ha demostrado que la acción de mayor o menor intensidad de los virus sobre las células depende de varios factores. Porque se supone que es la producción de interferona uno de los principales factores que condicionan la virulencia —ya que en algunas enfermedades, como el sarampión y la poliomielitis, los virus menos patógenos producen mayor cantidad de interferona que los de mayor virulencia—.

Entre la virulencia de los virus y la producción de interferona existe una característica común. No constituyen propiedades aisladas de un virus sino su acción en relación con un grupo particular de células. Así está demostrado en el caso de la pseudopeste aviar. El virus es muy virulento en los pollos adultos y en los embriones, crece bien en las células de embrión de pollo "in vitro" y produce bajos rendimientos de interferona. El mismo



virus muestra escasa virulencia en el hombre, crece mal en las células humanas "in vitro", pero induce a la producción de interferona en grandes cantidades.

El mérito de ISAACS, LINDERMAN, BURKE y colaboradores es haber demostrado que este fenómeno es interpuesto por una macromolécula de naturaleza proteica, pues se forma cuando el virus vivo o muerto está en condiciones de invadir una célula huésped. Esta sustancia aislada en la primera capa de la célula se la conoce con el nombre de interferona de las AA. por los que la descubrieron y es capaz de inhibir el crecimiento de un gran número de virus; se comporta como un antibiótico antiviral de gran espectro.

Se comprende el interés suscitado por el descubrimiento de esta sustancia, no sólo desde el punto de vista teórico, para obtener un mejor conocimiento de los problemas que conciernen al fenómeno de la interferencia y su mecanismo, sino a la importancia en el campo de la terapéutica antiviral.

El gran interés suscitado por el descubrimiento de la interferona ha llevado en Inglaterra a la constitución del Comité Nacional para Investigación Médica de la Universidad de Glasgow y los Laboratorios Glaxo Chemical Industry and Wellcome Research Laboratories.

Después de haber obtenido alentadores resultados sobre animales, se ha iniciado la fase de investigación clínica y así, recientemente, ha aparecido un informe del Comité científico de investigación Médica sobre la interferona, refiriéndose al descubrimiento de las lesiones del virus vacunal inoculado por vía intradérmica.

#### PRODUCCIÓN INTRACELULAR DE LA INTERFERONA

Hemos señalado que en el estudio de la interferona intervienen dos elementos principales: la célula y el virus. Refiriéndose a este último, podemos decir que el virus es parásito obligado de la célula viva, por no poseer equipo enzimático para asegurar su propia multiplicación, es decir, que según frase de GORET "para un virus no hay vida sin vida".

La interferona, como algunos autores han considerado, no es un antibiótico interno (DELAUNAY), ya que solamente aparece cuando las células son sometidas al ataque de un virus. El contacto viral o al menos el contacto con un ácido nucleico viral, y la integridad de la célula receptiva, son, como decíamos antes, los dos factores necesarios para su producción. Las interferonas producidas por diferentes virus sobre un mismo tipo de células tienen actividades biológicas parecidas, por lo cual se evidencia que el mecanismo productor de la interferona es celular. Esta es, por lo tanto, producida dentro de la célula, lo que se demuestra por el hecho de que continúa segregándose durante 96 horas después del tratamiento inductor por el virus y además, es posible una segunda recogida después de una posterior aplicación de virus inactivado. Las células tienen pues el metabolismo alterado y el proceso de la respuesta viral está modificado en la producción de interferona.



No es indispensable que las células que la produzcan sean normalmente sensibles al virus inductor. POLINKOFF ha podido demostrar que las células de riñón de cerdo o embrión de hamster, sometidas a un virus gripal, al que son insensibles, producen interferona.

La interferona no es tóxica, incluso a grandes dosis para las células, sin embargo, en éstas se puede apreciar un cambio temporal de la morfología que, para las células de tipo epitelial, se transforman en tipo fibroblástico. La interferona no dificulta la división celular; las células de tiroides humano se dividen al mismo ritmo en presencia de interferona.

De todo lo que hemos expuesto se puede llegar a la conclusión de que la interferona se produce en las células como respuesta a la acción de los ácidos nucleicos virales. Es la respuesta celular a una introducción de ácido nucleico extraño a la célula; la interferona puede ser considerada como un medio de defensa de la célula, es decir, un agente que ellas oponen a la invasión por un virus.

Diversas hipótesis han sido formuladas sobre el mecanismo bioquímico de la interferona.

Basado en datos y estudios de investigación, WAGNER llega a considerar que la interferona se comporta modificando la reacción metabólica que conduce a la síntesis vírica.

Actualmente se concibe un virus como ácido nucleico envuelto en una cubierta proteínica, perfectamente ajustada y dispuesto a transmitir sus "instrucciones" a la célula para sintetizar otros virus. En un principio la síntesis de un ácido nucleico del virus y de los ácidos nucleicos celulares normales, se describieron a veces como procesos superpuestos, de tal modo análogos que sería imposible afectar a uno sin hacerlo simultáneamente el otro. Si fuera así, resultaría imposible evitar la duplicación del virus sin perjudicar a la reproducción normal de las células. Existen, sin embargo, pruebas recientes de la independencia de ambos procesos. El tratamiento de las células con actinomicina D, que inhibe la síntesis del ácido ribonucleico (ARN) celular normal, sin inhibir la duplicación de ciertos virus ARN. La mitomicina inhibe en las células la síntesis del ADN celular normal y no la duplicación del adenovirus ADN. La independencia de los dos procesos apoya la idea de que puede ser posible una inhibición de la síntesis de los ácidos nucleicos víricos, sin inhibir el mismo proceso celular normal; esto puede ocurrir en células tratadas por interferona.

La primera reacción de la célula a la infección vírica es la síntesis de los enzimas necesarios para la síntesis del ácido nucleico del virus. Bajo la influencia de la ARN polimerasa vírica, que es probablemente distinta de la normal, los nucleótidos se unen para formar ARN vírico. Después es sintetizada la proteína de la envoltura del virus, que se funde con el ácido nucleico, para producir partículas víricas maduras, que entonces son liberadas por la célula. En algunas infecciones, la multiplicación del virus conduce a la desorganización completa de la célula, pero en la mayor parte de las infecciones víricas hay un elemento de ordenación en lo referente al proceso de la multiplicación. La síntesis del ácido nucleico y proteínas ví-



ricas no continúa indefinidamente, sino que de ordinario se detiene y permite a la célula recuperarse de la infección. Esto implica que existen reguladores demostrado por JACOB y MONOD, en relación con la infección de la *E. Coli* por el bacteriófago y con los procesos de inducción enzimática. La interferona es, sin duda, un regulador de esta clase en las células animales.

Cuando se tratan las células con grandes cantidades de interferona, que inhiben en gran manera el crecimiento del virus, el ritmo de la división celular no resulta inhibido apreciablemente.

La inhibición se produce, sin embargo, cuando las dosis de interferona son excesivamente altas, pero se recupera el ritmo normal de la división celular cuando la interferona se retira. Parece demostrado que la interferona inhibe mucho más intensamente la síntesis de las sustancias víricas, que la de las mismas sustancias de los procesos metabólicos normales.

La interferona no inhibe la adsorción del virus por las células o la penetración de aquel en éstas, lo que hace es bloquear la multiplicación del virus en una etapa posterior a la de separación del ácido nucleico y proteínas víricas, pero antes que el ácido nucleico se haya duplicado; aunque no se conoce en la actualidad el proceso mediante el cual se impide la síntesis del ácido nucleico vírico.

La acción de la interferona y su producción por la acción de los virus fue demostrada primariamente con virus inactivados, pero en la actualidad se ha conseguido estimular la producción de interferona mediante ácidos nucleicos no víricos, pero "extraños" a las células estimulantes. Es evidente que la interferona desempeña un papel en la economía de la célula normal, relacionada con la síntesis de los ácidos nucleicos.

Los estudios de los efectos metabólicos de la interferona fueron investigados por A. ISAACS. Después de haber confirmado que las células tratadas con interferona producen una cantidad de ácido láctico tres veces superior que las células de control y que consumen una cantidad mayor de  $\text{CO}_2$ , aunque entre límites modestos e inconstantes, el autor realizó investigaciones sobre la influencia de la interferona en el metabolismo celular de los glúcidos siempre en relación con su actividad antiviral. A este respecto ha formulado, mediante estudios experimentales, tres hipótesis de las cuales señalamos las dos primeras por considerarlas más importantes.

La primera se refiere a la acción antiviral de la interferona, la cual puede ser debida al aumento de la glucólisis que habría provocado una disminución del pH o bien un aumento de la concentración de lactato. Los resultados obtenidos demostraron que la interferona no actúa muy eficazmente en condiciones de una acidez muy débil, y que en las mismas, produce una disociación en el comportamiento de la interferona y del 2-4 nitrofenol; la interferona presenta un grado mucho mayor de inhibición en comparación al dinitrofenol, el cual en cambio estimula más fuertemente la glucólisis. Los autores por tanto concluyen que no es probable que la inhibición de la multiplicación viral pueda ser atribuida al aumento de la glucólisis.

La segunda hipótesis considera que la interferona inhibe la producción de ribosa, disminuyendo la oxidación de la glucosa por medio de las pen-



tosas. ISAACS ha observado que los fibroblastos de embrión de pollo tratados con interferona presentan un conjunto de modificaciones metabólicas, tras las cuales hay un aumento de la glucólisis anaerobia análoga a la que induce el 2-4 dinitrofenol, sustancia que tiene actividad "in vitro" y que actúa bloqueando la fosforilización oxidativa; aunque la interferona puede influir por este mecanismo y limitar la cantidad de ATP (adenosintrifosfórico) disponible para la síntesis viva, esta hipótesis estaría confirmada en razón del comportamiento particular de la célula cancerosa. Se ha observado por Ho y ENDERS, que células cancerosas (células HELA y KB) estando en el momento de producir interferona son insensibles a la acción antiviral; tal insensibilidad puede ser admitida en relación al hecho de que la célula cancerosa está en el grado de formar ATP necesario para su crecimiento mediante procesos de tipo anaerobio. Según WARBUG la glicólisis provee a la célula cancerosa de suficiente ATP, para la necesidad metabólica y por tanto la fosforilización oxidativa no tiene la misma importancia que para la célula normal. De este modo se comportan las células embrionales jóvenes que asemejan a las cancerosas en cuanto se considera la intensidad de la glicólisis anaerobia y por su refractariedad a la acción antivírica de la interferona. Esto puede explicar el hecho de que las infecciones humanas por algunos virus den lugar a malformaciones solamente cuando la infección se produce en el primer trimestre de la gestación, por ser éste el período de mayor sensibilidad al virus, debido a la escasa o nula producción de interferona en él mismo.

Sobre el mecanismo de la interferencia se han dado numerosas explicaciones e hipótesis, para demostrar este fenómeno. La destrucción de los receptores virales de la membrana celular para impedir la fijación de otros virus, hecho improbable puesto que se necesitarían importantes cantidades de virus interferentes para bloquear todos los receptores celulares. Por otra parte, se ha demostrado que el virus interferido puede penetrar también en la célula.

También se ha señalado y asimismo rechazado, una acumulación de virus en el interior de la célula. Como es difícil admitir la presencia de lesiones celulares por el primer virus, lo que provocaría un medio disgenésico para el segundo virus, pues hay que tener en cuenta que con virus inactivados se produce interferona.

La necesidad de algunas horas después de la primoinfección viral para que aparezca el fenómeno de la interferencia, hace pensar que un proceso metabólico tiene que producirse durante este intervalo, por lo que nos parece más acertada la hipótesis señalada por ISAACS.

Casi todos los virus son capaces de producir interferona; los virus Arbor y los mesovirus (igualmente el virus de la gripe) son los más activos, pero también lo son los enterovirus, los virus variólicos y los oncogénicos (sarcoma de Rous); la capacidad de inducir interferona es una propiedad general de los virus que parasitan las células.

Los mesovirus también inactivados por el calor o por los rayos ultravioletas conservan el poder inductor a condición de que se inocule a las célu-



las con una dosis masiva de estos virus. Los virus inactivados con rayos ultravioleta son mejores inductores que los inactivados por el calor.

Con un virus inactivado e inoculado a dosis masivas, la interferona aparece rápidamente y su producción alcanza el máximo en algunas horas, mientras que con un virus infectante, la interferona aparece paralelamente a la producción de las partículas virales hijas y alcanza el máximo solamente después de que el título infectante ha llegado al máximo.

#### CARACTERÍSTICAS FÍSICO-QUÍMICAS Y BIOLÓGICAS DE LA INTERFERONA

Las propiedades biológicas y biofísicas de la interferona han sido estudiadas. Se ha demostrado que la interferona contiene una sustancia no común con las partículas víricas y estable frente a los cambios de pH y las temperaturas.

La naturaleza proteica de la interferona se había supuesto inicialmente, basada en algunas propiedades tales como la estabilidad e inactivación por parte de los enzimas proteolíticos. El peso molecular se ha calculado aproximadamente sobre 70.000 mediante el coeficiente de difusión atravesando un gel de agar. Sólo recientemente BURKER ha logrado obtener un preparado de interferona altamente puro que ha permitido comprobar la naturaleza proteica.

La interferona resiste un pH de 1 a 10 durante 24 horas a 2°C. Su actividad se modifica ligeramente por la conservación de 0°C durante 2 semanas. Se destruye a 100°C en 5 minutos; la temperatura de 56°C la resiste una hora y es completamente destruida en este mismo tiempo a 60°C.

La ultracentrifugación durante 4 horas a 100.000 r.p.m. no provoca pérdida de actividad interferente en el sobrenadante.

La actividad interferente es relativamente resistente a las irradiaciones ultravioleta.

El tratamiento con ultrasonidos no tiene efecto sobre la interferona.

El tratamiento con éter o con la mezcla de alcohol amílico-cloroformo inactiva completamente la actividad interferente.

La interferona es completamente inactivada por la pepsina y tripsina.

Todos los autores están de acuerdo que la interferona no representa la proteína viral ni un fragmento de la misma. Al contrario que los anticuerpos virales, la interferona se produce en escaso tiempo después de la infección vírica y desaparece alrededor de las 96 horas como máximo. Los anticuerpos aparecen tardíamente y después de la fase aguda de la enfermedad persistiendo durante mucho tiempo.

Recientemente ISAACS examinando los factores que intervienen en el desarrollo de una enfermedad infecciosa, en ratones infectados artificialmente con desarrollo de una neumonía viral, ha podido demostrar que la interferona está presente en concentraciones relativamente elevadas en el pulmón, en el momento en que existe la máxima concentración vírica, mientras que los anticuerpos aparecen en este órgano solamente 10 días más tarde.



La actividad de la interferona se puede medir añadiendo soluciones de interferona a diluciones progresivas sobre cultivos de tejidos, que posteriormente son inoculados con virus cuyo poder infectante sea conocido; el grado de protección de la interferona sobre los cultivos se basa en la inhibición de la multiplicación viral o también por la inhibición de las lesiones celulares.

Las células por ejemplo de amnios humano son buenas productoras de interferonas y son sensibles a su acción; inoculadas en presencia de interferona se hacen resistentes a la acción viral.

Las células tumorales humana en línea continua, buenas productoras de interferona, son poco sensibles a su acción, puesto que no permiten a ésta ejercer su acción antiviral sobre la célula.

Se ha demostrado que la acción protectora de la interferona está ligada a la especie celular que la ha producido; así una interferona segregada por las células de un ternero protegen a estos mejor contra la acción de un virus que la producida en el pollo. Pero tal especificidad no es absoluta porque la interferona de células de riñón de mono protege "in vitro" a las células de origen humano.

El efecto protector de la interferona no sigue la ley del "Todo o nada".

#### APLICACIONES TERAPÉUTICAS Y PRÁCTICAS DE LA INTERFERONA

Interesa considerar en estos momentos la posibilidad del empleo terapéutico de interferona en el hombre. Actualmente el problema no presenta grandes posibilidades de una próxima realización, debido a la especificidad de la especie en la preparación de interferona. Sin embargo, WAGNER considera la posibilidad de sustituir la aplicación de interferona exógena por el tratamiento con virus atenuado capaz de estimular intensa y rápidamente la producción de interferona endógena, y recuerda que éste podría ser el mecanismo por el cual la vacuna poliomielítica obtenida de un tipo de virus atenuado provoca la resistencia frente a la enfermedad causada por un tipo de virus diferente.

Hasta ahora es han realizado algunas tentativas de aplicación de interferona en el hombre sin que se aposable señalar conclusiones. Sin embargo, se puede citar la prueba realizada con 38 voluntarios por CANTELL y TOMMILA, en 1960, los cuales fueron vacunados contra la viruela previo tratamiento con la interferona y en los que se apreció un alto grado de protección en relación con los controles, a los cuales no se les había inoculado interferona. Igualmente JONES cita siete casos de queratitis, en los cuales se observaron efectos curativos sobre al evolución de la infección.

En estudios sucesivos se ha demostrado que la interferona producida a partir de cultivos de células renales de mono instilada en el ojo determina la cicatrización rápida de las lesiones ulcerativas epiteliales de la queratitis variolosa y también de la reacción inflamatoria de la vacunación antivariólica, siempre que con anterioridad se haya realizado una inoculación intradérmica de interferona.



La interferona asimismo puede dar lugar a problemas de epidemiología y de patogénesis viral. Según PREVOT la acción nociva de la corticoterapia en las enfermedades producidas por virus se puede explicar por la acción de inhibición que ejerce la cortisona sobre la producción de la interferona así como sobre su acción.

El fenómeno de la interferencia viral tiene aplicaciones variadas; citaremos algunas que atañen especialmente a la Medicina Veterinaria. En el dominio de las vacunaciones el fenómeno no es evidente más que con virus-vacunas vivos, atenuados o modificados. Como regla general la resistencia hacia el virus salvaje virulento conferida por la vacunación se revela de 2 a 4 días después de esta última, mucho antes de la aparición de anticuerpos neutralizantes.

Se puede sacar provecho de esta resistencia en la vacunación contra:

—La peste bovina con la ayuda de vacuna caprina modificada por pases sobre cabras (Interferencia en 48 horas), o sobre conejo (Interferencia en 104 horas).

—Enfermedad de Rubarth con la ayuda de virus avirulento inoculado por vía conjuntival (Interferencia en 4 días).

—La enfermedad de Newcastle apareciendo la interferona dos días después de la absorción en el agua de bebida de la cepa HITCHNER B<sub>1</sub>.

—La peste porcina, en la que el virus vacuna lapinizado o de tejidos confiere la protección en los cerdos después de 4 días de la inoculación.

Visto bajo este ángulo, el fenómeno de interferencia tiene un valor inestimable en Medicina y Veterinaria; es por su aplicación razonada que pueden combatirse las grandes epizootias con un rápido poder de difusión, tales como la peste bovina, porcina y aviar. Es la que autoriza la vacunación en medio contaminado, donde la esperanza reside en que un número importante de animales no estén aún contaminados.

Es seguro que este es el mismo principio en que se funda la vacunación contra la gripe humana, o digestiva contra la poliomiелitis cuando se interviene en los momentos de una epidemia de una comunidad. Paradójicamente es así mismo el fenómeno de la interferencia, el que suministra la explicación de ciertos fracasos de la vacuna antipolio por vía bucal. En Méjico se observaron fracasos de vacunación en comunidades de niños. Una encuesta epidemiológica probó que albergaban enterovirus que interferían el desarrollo intestinal normal y de virus-vacuna polio. La misma explicación fue dada en Suiza, pero en este caso fue un virus Coxsakie el que fue aislado de las heces.

Estas observaciones que hemos señalado con referencia a la poliomiелitis son aplicables a la enfermedad de Newcastle, pues en muchas ocasiones hemos asistido a problemas de diferentes grados de inmunidad en lotes de aves de la misma o distinta granja con la aplicación del mismo lote de vacuna y, sin embargo, los resultados han sido muy diferentes, aunque es lógico pensar entre otros muchos factores que pueden intervenir en los fenómenos inmunitarios, no es menos cierto que en muchas ocasiones la vacunación se realiza coincidiendo con procesos latentes o asintomáticos de bronquitis o de otras enfermedades de localización en el árbol respiratorio, cu-



yos virus producirán o pueden producir una interferencia heteróloga (SÁNCHEZ FRANCO).

No podríamos dejar de evocar la vacunación contra la mixomatosis del conejo por el virus del papiloma de Shope, que se funda en el doble concepto de propiedades inmunógenas comunes y en una interferencia muy precoz que empieza alrededor de las 18 horas y autoriza la intervención en el medio infectado.

No intentaremos citar las aplicaciones de la interferencia con fines experimentales; son una legión, ya que el fenómeno ha intrigado a los virólogos desde que fue conocido.

Si el virus aftoso es citopático en los cultivos celulares, la destrucción celular debida al virus Newcastle es menos patente, casi inexistente en algunas cepas; de ahí una fórmula para la titulación de ese último virus sobre células. DANNACHER y FERIDA han pensado utilizar la interferencia que ejerce el virus de Newcastle en cultivos celulares de riñón de ternera en frente de virus aftoso, para poder titular cómodamente el primero; si existe en un tubo virus Newcastle, que no produce lesiones en las células, producirá una interferencia para el virus aftoso, que debe introducirse en un segundo tiempo y éste no manifestará su efecto de destrucción celular. En los tubos donde las células están intactas, se puede estimar que existía virus Newcastle. De esta forma se posee un método fácil de valoración del virus últimamente indicado.

Así mismo este fenómeno ha sido utilizado por el Dr. SÁNCHEZ BOTIJA para el diagnóstico diferencial entre la peste porcina africana y la peste porcina clásica.

GIRARD, en 1964, ha conseguido la producción de interferona por la interacción del cultivo de epitelio lingual bovino en supervivencia (cultivo de FRENKEL) e igualmente del virus aftoso.

Continuando los estudios en la investigación de la interferosa debemos citar los trabajos del Prof. TORLONE y sus colaboradores en 1965; los cuales han realizado unas investigaciones de gran interés sobre la producción de interferona en cerdos previamente infectados con virus de peste porcina.

Las pruebas fueron llevadas a cabo en cerdos de 12 semanas de edad, los cuales fueron inoculados con 1 c.c. de virus peste porcina patógeno. Después de 60 horas la temperatura ascendió a 41°C y se sacrificaron después de las 96 horas de la infección.

En pruebas posteriores confirmaron las hipótesis de que la actividad antiviral detectable en el suero de los cerdos infectados con virus peste era debida a la interferona. Con relación al tiempo de producción "in vivo" de esta sustancia llegaron a la conclusión de que aparece rápidamente en la sangre, incluso antes de que se eleve la temperatura y que persiste después de la viremia.

Estos trabajos de TORLONE vendrían a confirmar los de LHOFF, realizados en 1959, el cual ya había minimizado el papel de los anticuerpos en la curación de una enfermedad por virus y había pensado que la fiebre que se manifiesta en el enfermo, era uno de los factores importantes. Esta concepción se apoyaba en la constatación tantas veces conocida de la inhibición



del desarrollo viral a una temperatura superior a la de su huésped de origen. Tal como nosotros hemos mencionado anteriormente, las temperaturas ligeramente hipotérmicas favorecen la producción de interferona. De ahí a preguntarse, como ISAACS, si la fiebre del enfermo no tendrá primordialmente el efecto de estimular la producción de interferona, no hay más que un paso. En efecto, se ha podido demostrar en el hombre (ISAACS, 1963) que su producción era paralela a la severidad de una infección viral.

Era lógico pensar que dados los numerosos estudios que, por numerosos investigadores y en todos los países, se están realizando sobre hipótesis vírica del cáncer no podía dejar de relacionarse esta enfermedad con los conceptos actuales de la interferona. Es cierto que ningún virus cancerígeno humano ha podido aún ser aislado, aunque parece permitido poder trasladar al hombre lo que se sabe de los llamados tumores animales; que son debidos a virus incluso aunque los virus no hayan podido ser aislados nuevamente de los tumores.

ATANASIU, CHANY y BARSKI han significado que los virus oncógenos animales son sensibles a la interferona, ya que los virus sensibles a la interferona son los que la producen normalmente en las células. Se encontrarían entonces en ciertas circunstancias, las condiciones de una infección celular crónica explicando la larga latencia de la infección. Posteriormente cuando interviniera un factor desencadenante, el virus, se desarrollaría. Esto es precisamente lo que ocurre con el metil-colantreno, agente cancerígeno conocido, con el cual DE MAYER llegó a demostrar que inhibía la producción intracelular de la interferona. Vemos como de esta forma se encuentran unidas las teorías víricas y químicas del cáncer.

El virus oncógeno infectante de un grupo celular se desarrollaría inmediatamente después de la infección o bien después de la acción desencadenante que hemos señalado, pero en ambos casos produciendo interferona. Así, el virus oncógeno sería el "primus movens", pero el tumor se constituiría sin virus lo que explicaría la dificultad de poner en evidencia agentes oncógenos en su seno.

Aunque esta hipótesis no permite que sea generalizada, ha sido demostrada para el virus del polioma, agente cancerígeno de hamster en el que produce sarcomas subcutáneos.

Como puede observarse la terapéutica de las infecciones por virus se encuentra frente a una nueva perspectiva; la experimentación deberá confirmar si se trata verdaderamente de un nuevo paso decisivo para el bien de la Humanidad.

Hemos visto como la Biología se afana en conseguir la última verdad de los hechos vivos, aunque no se ignora que "delante de nosotros siempre está el infinito" (SANT HILAIRE) y también que si un día se llegara a encontrar la primera causa de la vida, no haría otra cosa que encontrar nítidamente a Dios, porque sino lo encontrara las investigaciones habrían recorrido el camino del error (MORROS SARDA).



## BIBLIOGRAFIA

- ANDREWS, R. D. (1961). *Brit. Med.* June, pp. 21-30.
- BARON, Se ISAACS, A. (1961). *New Scientisc.* 11, p. 81.
- BARON, S. and BUCKLER, C. F. (1963). *Scienza.* 141 (1061).
- BARON; S. Du Buy, H. G. BUCKLER, C. E. JHONSON, Ml. (1964). *Proc. Soc. Exp. Biol* (N. Y.) 117/2: (338-341).
- BENDINELLI, M. RUSCHI, A. and SNATOPADRE, C. (1963). *Riv. Ittal. Igiene.* 23/5: (418-429).
- BURKE, D. C. ISAACS, S. (1958). *Acta Virology.* Vol. 4, pág. 452.
- BURKE, D. C. and BUCHAN (1965). *Virology* (N. Y.). Vol. 26, núm. 1, págs. 28-36.
- CANTELL, K. TOMMILA, V. (1960). *Lancet*, 2.628.
- CLEVELAND, C. (1954). *Proc. Soc. Exp. Biol.* (N. Y.) 115/4 (947953).
- CHESJIRE (1954). *Virology* (N. Y.) 24/4 (589-597).
- DELMON, J. and DUTRIES, T. M. (1964). *Res. Immunol.* 28/3 (157-128).
- DINTER, Z. et PHILIPSON, L. (1962). *Proc. Soc. Exp. Biol.* (N. Y.), 109 (875-879).
- FINTER, N. H., ONEIL, C. E. (1964). *Virus Unit. Gal.*
- FINTER, N. B. (1964). *J. Hyg.* 62/23 (337-349).
- FRIEMAN, R. M. (1946). *Ant. Brancha Nat. Cancer. Inst. Setheeda. Med.* 201/4921 (848-84).
- FRIEDMANI, R. M. et RAMSON, A. S. (1964). *J. Exp. Med.* T. 119, págs. 71-81.
- GASCOW, L. A. et HABEL, K. (1962). *J. Exp. Med.* (N. Y.) t. 115, págs. 503-512.
- GLASKY, A. J. SIMON, L. and HOLPER, J. C. (1964). *Science* (N. Y.) 144/3.686 (1581-158).
- GORET y A. PROVOST. (1964). *Rec. Med. Vet.* núm. 5-6.
- GRAND (1964). *Publ. Helt. Uny, Pittsburgh. Science* 146/365, págs. 1472-1474.
- GRESSER, I. (1961). *Proc. Nat. Acad. Sci.* T. 47, págs. 1817-1822 (N. Y.).
- GRESSER, I. (1961). *Prod. Soc. Exp. Biol.* (N. Y.), T. 108, págs. 303-307.
- GROSSBERG, S. E. and SCHERER, E. (1964). *Amer. J. Path.* 45/3, págs. 519-531.
- HELLSTROM, I. (1964). *J. Nat. Cancer. Inst. Biol.* 33/2, págs. 209-213.
- HENLE, N. (1963). *Virology* (N. Y.), T. 21, págs. 11-21.
- HENLE, W. (1963). *Immunol.* T. 9191, págs. 140-150.
- HENSON, S. and SMITH, R. D. (1964). *Prod. Soc. Exp. Biol.* (N. Y.), 117/2, págs. 4517.
- HERMODSSON, S. (1964). *Acta. Path. Microbiol.* 62/1, págs. 133-144.
- HERMODSSON, S. (1963). *Virology* (N. Y.), T. 20, págs. 333-343.
- ISAACS, A. LINDENMANN, J. (1957). *Prov. Boy. Coc.* (London), S. R. 147, págs. 268-450.
- ISAACS, A. BRUKE, D. C. FADEEVA, L. (1958). *Brit. Path.* 39, pág. 447.
- ISAACS, A. ESTOWOOD, M. A. (1959). *Lancet*, 2, pág. 324.
- ISAACS, A. (1961). *Sci. Basis. Mod.* (ann. Rev.), págs. 21-30.
- ISAACS, A. POTERFIELD, J. S. BARON, S. (1961). *Virology*, 14, pág. 450.
- ISAACS, A. KREMPERER, H. G. HITCOK, G. (1961). *Virology*, 13, pág. 191.
- JONES, B. R. FALBRAITH, J. E. K. et. AL-HUSSAINE, M. K. (1962). *Lancet*, T. 1, págs. 875-879.
- LAMPSON, G. D. TYTELL, A. A. NEMES, M. M. et HILLEUAN, M. R. (1963). *Proc. Soc. Expe. Biol.* (N. Y.), T. 197, págs. 724-725.
- LE CLERE, J. (1965). *Acta Virol.* Institutio Pasteur de Bruselas, 9/1, págs. 18-24.
- LEVY, H. B. SNELLBAKER, L. F. et BARON, S. (1963). *Virology*, T. 21, págs. 48-55.
- LINDERMANN, J. et GIFFORD, G. E. (1963). *Virology*, T. 19, pág. 283-293.
- LOCKART, R. Z. (1963). *J. Bact.* T. 85, págs. 556-566.
- MAHDY, N. S. (1964). *Proc. Sec. Exp. Biol.* (N. Y.), 116/1, págs. 174-177.
- MORROS, J. (1956). Discurso en la Universidad de Oviedo.
- OVEJERO, S. (1963). Discurso, Real Acd. Med. Valladolid.
- PALLIKEFF, R. DONKIAN, M. A. PADRON, A. et. coll. (1962), *Proc. Soc. Exp. Biol.* (N. Y.), T. 110, págs. 232-234.
- PAUCKER, K. (1964). *Clin. Pediat.* (Filadelfia), 3/11, págs. 661-678.
- PERIES, J. BOINON, M. et CANIVET, M. (1965), *Annales del Institut. Pasteur*, T. 109, número 4, octubre.



- PAUCKER, K. CANTELL, J. (1962). *Virology* (N. Y.), T. 18, pág. 45.
- PEROL, Y. (1964). *La Presse Medicali*, núm. 72, pág. 21.
- PLUMMER, G. (1963). *Brit. J. Exp. Path.* T. 44, págs. 58-65.
- PIRKO POHJANPELTO (1965). *Virology* (N. Y.), Vol. 25, núm. 3, págs. 350-357.
- PRINZIE, P. DENIS, P. SCHONNE, E. (1962). *Virology*, T. 16, págs. 63-70.
- ROTEM, Z. (1964). *J. Exp. Med.* (Israel). 11/4, págs. 174-178.
- ROBERT, R. (1963). *Annual Review of Microbiology*. Col. 17, págs. 265-270.
- SÁNCHEZ FRANCO, A. *Public. Symposium. Patolo-Aviar*. Tarragona, 1965.
- SCHULMAN, J. L. et KILBOURNE, E. D. (1963). *Proc. Soc. Exp. Biol.* (N. Y.), T. 113, páginas 431-435.
- SRCEVALSAN, T. et LOCKART, R. Z. (1962). *Virology* (N. Y.), T. 17, págs. 207-208.
- TAYLOR, Joice (1965). *Virology* (N. Y.). Vol. 25, núm. 3, págs. 341-349.
- TORLONE, V. TITOLI, P. and L. GIALLETTI (1965). *Life Science*. Vol. 4, págs. 1707-1713, Gran Bretaña.
- VALTUEÑA BOSQUE (1964). *Pres. Pediatría y Puericultura*. Vol. 7, Fascículo 3.º, Madrid.
- VILCEK, J. (1961). *Acta Viraol.* T. 5, págs. 278-282. —
- VILCEK, J. (1962). *Acta Viro.* T. 6, págs. 144-150.
- VILCEK, J. ET. STANCER, D. (1963). *Acta Viro.* T. 7, págs. 331-338.
- WAGNER, R. LEVY, A. H. (1960). *Ann. New York, Acad. Sci.* 88-1308.
- YOUNGER, J. S. (1964). *Science*, 144: 1022. May.



## DISCURSO DE CONTESTACION

por el Académico

ILMO SR. D. JESÚS SÁINZ Y SÁINZ-PARDO

*Excelentísimos e Ilustrísimos Señores,*

*Señoras y señores:*

He sido designado por los compañeros de esta Academia para contestar al discurso de ingreso en ella que acabamos de oír al Profesor Sánchez Franco. Misión honrosa, pues debo ser portavoz de tan ilustre Corporación, y a la vez grata, porque incluye dar la bienvenida a tan buen amigo y colega.

El Profesor Sánchez Franco nació en Salamanca, el día 22 de septiembre de 1911. Después de realizar los estudios primarios y los del Bachillerato en su ciudad natal, pasó a la Universidad de Madrid, en cuya Facultad de Veterinaria obtuvo brillantemente el título de Licenciado y, años más tarde, el de Doctor. Su tesis, titulada *Receptividad del cerdo al bacilo Erysipelothrix rhusiopathiae suis y sus aplicaciones biológicas*, mereció el Premio extraordinario del Doctorado. Con ella culminaba una larga serie de investigaciones sobre la patología infecciosa porcina. Los hallazgos que en este trabajo exponía en relación con la mal conocida patogenia del mal rojo, fueron ratificados por varios autores. Pero, además, demostraron la inocuidad de las carnes de animales hiperinmunizados para la obtención de suero contra dicha enfermedad. La transcendencia de esta demostración es evidente, pues constituía un poderoso argumento en pro del aprovechamiento de estas carnes.

Quizá sea este el momento más oportuno para decir que en la actitud de nuestro nuevo compañero al escoger el rumbo de sus trabajos, se reconocen siempre claramente los dos motivos más nobles que pueden, y deben, impulsar al hombre de ciencia en su labor. Por un lado, la inquietud por alcanzar el *gozo de conocer*, que es, como ha escrito Jean Rostand, el honor del espíritu humano. Y, por otro, el deseo de contribuir al bienestar de nuestros semejantes.

Un admirado maestro, suyo y mío, el Profesor González Alvarez, ha retratado a Sánchez Franco con palabras certeras, que no me resisto a transcribir. Don Angel, dice, ... "anda serio por la vida desde que comenzó sus estudios y ... pone toda la verdad de su alma en aprender, en trabajar, en descubrir de cara a todas las dificultades, sin rehuirlas", ... "Cuando él formulaba una conclusión resultado de sus investigaciones, era oro de ley.



Jamás he conocido en el mundo de laboratorio o de clínica una conducta científicamente más honesta", ... "demasiado modesto para lo que ahora se estila, ... abre los ojos todos los días con ingenuidad infantil, cortés, amable con todo el mundo, con sinceridad de modales y de palabra."

Mucho antes de publicar su Tesis Doctoral, había comenzado el nuevo académico sus actividades científicas y profesionales en las materias de las que hoy es maestro. Ya en el año 1935, obtenía en la Escuela Nacional de Sanidad un Diploma que acreditaba su preparación bacteriológica. Desde el año 1936 hasta el 1939, prestó sus servicios técnicos en el Laboratorio Central del Ejército.

Después, hasta el año 1962, desempeñó los cargos de Jefe de la Sección de Bacteriología y de Director Técnico en dos importantes Empresas industriales dedicadas a la obtención de sueros, vacunas y otros productos empleados en Veterinaria.

Durante esta época continúa su especialización en Parasitología y Enfermedades parasitarias, según atestiguan los Diplomas que obtuvo en el Instituto de Parasitología (Granada, 1949 y 1950) y en el *Bernhard-Nocht-Institut für Schiffs- und Tropenkrankheiten* de Hamburgo (1957) en los que amplió sus estudios como becario de la Dirección General de Ganadería y de la Comisaría de Protección Escolar, respectivamente. Este mismo Organismo le había concedido otra beca en el año 1956 para realizar estudios en la Facultad de Veterinaria de Perugia (Italia).

En el año 1963 ganó por oposición la Cátedra de Enfermedades infecciosas y parasitarias de la Facultad de Veterinaria de esta Universidad, en la cual viene realizando desde entonces una eficaz labor de enseñanza e investigación.

En el año 1965 obtuvo otra beca de la Comisaría de Protección Escolar para realizar estudios sobre cultivos de virus en el *Instituto Zooprofilattico* en Brescia (Italia).

Ha asistido a varias Reuniones y Congresos Científicos, como el Congreso Mundial de Veterinaria (Madrid, 1959), el Congreso Internacional de Parasitología (Roma, 1959), el Congreso Regional de la Cuenca del Duero (Valladolid, 1945), el *Symposium* de Patología aviar (Tarragona, 1965) y la Semana del Ganado Lanar (Salamanca, 1965), en calidad de ponente en los tres últimos.

Ha sido Director del Centro de Estudios del Sindicato Español Universitario de León y en la actualidad desempeña el cargo de Secretario de la Facultad de Veterinaria de Zaragoza.

Pertenece a la Asociación Internacional de Microbiología, a la Sociedad Veterinaria de Zootecnia, a la Asociación Internacional de Parasitólogos y es colaborador permanente de la *Revista Ibérica de Parasitología* y de los *Archivos de Veterinaria práctica*. Además, ha publicado una larga serie de interesantes trabajos, ha pronunciado múltiples conferencias y ha desarrollado varios cursos sobre temas sanitarios de su especialidad, según se indica en las siguientes relaciones:



PUBLICACIONES

- La tuberculosis bovina y su profilaxis*, 1951.  
*Enfermedades de importancia social: Brucelosis*, 1953.  
*Enfermedades de importancia social: Tuberculosis*, 1954.  
*Enfermedades de las aves en la provincia de León*, 1954.  
*Blue tongue (Lengua azul)*, 1956.  
*Estudio sobre una enzootia del ganado vacuno de la Montaña Leonesa*, 1958.  
*Leucosis aviar*, 1958.  
*Enteritis hemorrágica del cerdo*, 1959.  
*Brucelosis bovina*, 1960.  
*Diagnóstico diferencial de las enfermedades rojas del cerdo*, 1957.  
*La peste aviar como enfermedad transmisible al hombre*, 1956.  
*Toxoplasmosis*, 1965.  
*Diagnóstico diferencial de las enfermedades de las aves*, 1964.  
*Coccidiosis intestinal de las aves*, 1955.  
*Nuevos conceptos sobre las mamitis de las vacas lecheras*, 1954.  
*Estudio "post-mortem" de un caso de pielonefritis bovina bacterica, con pruebas de sensibilidad del Corynebacterium renale frente a varios antibióticos "in vitro"*, 1955.  
*Epizootias más frecuentes en la Cuenca del Duero*, 1945.  
*Observaciones acerca del poder patógeno de los virus vivos modificados de peste porcina sobre cerdas gestantes*, 1956.  
*Sobre algunos aspectos hematológicos y anatomopatológicos de la peste porcina*, 1957.  
*Estudio comparativo de diversas vacunas contra el Mal Rojo del cerdo*, 1963.  
*Enterotoxemia bovina en la Región de León*, 1964.  
*Receptividad del cerdo al B. Erysipelothrix rhusiopathie suis y sus aplicaciones biológicas. (Tesis doctoral)*, 1953.  
*Problemas actuales de la Pseudopeste o enfermedad de Newcastle (Interferencias en la vacunación)*, 1965.  
*Problemas actuales de las enfermedades infecciosas del ganado ovino*, 1965.  
*Diagnóstico diferencial de las enfermedades víricas del perro*, 1963.  
*Enfermedades infecciosas del cerdo*, 1944. (En colaboración con los Profesores Ovejero y González Alvarez).

CONFERENCIAS

- Valladolid. *Epizootias más frecuentes de la Cuenca del Duero*, 1945.  
 Salamanca. *Salmonellosis*. Instituto Provincial de Higiene, 1956.  
 León. *Diagnóstico diferencial de las enfermedades rojas del cerdo*, 1956.  
 Palencia. *Leucosis*. Colegio Oficial de Veterinarios, 1957.  
 León. *Diagnóstico diferencial de las enfermedades víricas de las aves*, 1957.



- León. *Toxoplasmosis*. Facultad de Veterinaria, 1960.  
León. *Brucelosis bovina*. Colegio Oficial de Veterinarios, 1961.  
Vitoria. *Enfermedades víricas porcinas*. Colegio Oficial de Veterinarios, 1962.  
Salamanca. *Brucelosis*. Colegio Oficial de Veterinarios, 1963.  
Barcelona. *Epidemiología y epizootología de la Brucelosis*. C. O. de Veterinarios, 1963.  
Pamplona. *Neumonías víricas porcinas*, 1963.  
Barcelona. *Diagnóstico diferencial de las enfermedades víricas del perro*, 1964.  
Reus. *Enfermedades respiratorias de las aves*. Cooperativa Avícola, 1964.  
Lérida. *Problemas que presentan las enfermedades víricas de las aves*. Centro de Estudios Ilerdenses, 1964.  
Zaragoza. *El perro, amigo y enemigo del hombre*. Centro de Estudios de San Francisco de Asís, 1965.  
Tudela. *Virosis de las aves. Enfermedad de Gumboro*. 1965.  
Tarragona. *Problemas actuales de la Pseudopeste o Enfermedad de Newcastle* (Interferencias en la vacunación), 1965.  
Pamplona. *Mycoplasmosis*, 1965.

#### CURSOS DE DIPLOMADOS

Ha actuado como Profesor en los cursos organizados para la especialización de los aspirantes al Diploma de Sanidad en la Escuela Departamental de Salamanca (1957-58, 1958-59, 1959-60, 1960-61), y en la Escuela Departamental de Zaragoza (1963-64 y 1964-65).

\* \* \*

El historial científico y las cualidades humanas del Profesor Sánchez Franco justifican enteramente que esta Academia le eligiera para que ocupe el puesto vacante desde hace dos años por el fallecimiento del excelente Catedrático y hombre sabio y bondadoso que fue el Ilmo. Sr. Dr. D. Pedro Ramón y Cajal Vinós.

\* \* \*

El Profesor Sánchez Franco nos ha leído un discurso, pleno de modernidad, sobre una sustancia, la interferona, que quizá sea la más eficaz contra esos agentes patógenos, muchas veces terribles, que son los virus.

La importancia de este agente inhibidor de la multiplicación de los virus, pudiera ser todavía más grande. Basta recordar que numerosos datos hablan en pro de la etiología vírica de muchas neoplasias en ciertos animales. Aunque hasta ahora no se ha podido aislar virus alguno con poder cancerígeno para el hombre, algunos experimentos, como los realizados por PETZETAKIS (1,a) parecen reforzar la hipótesis de que también muchas neo-



plasias humanas (de mama, estómago, recto, hígado, etc.) son producidas por virus. Si tal suposición pudiera ser confirmada, se habría dado un paso importante en el difícil camino que la Ciencia debe recorrer antes de llegar a la solución de este gravísimo problema.

\* \* \*

Encontrar medios eficaces para combatir las infecciones producidas por los virus es un arduo problema. Ni el médico ni el veterinario disponen, prácticamente, todavía de medicamentos que actúen directamente contra estos agentes patógenos. El método seguido habitualmente frente a ellos, trata de prevenir la infección mediante el empleo de vacunas, es decir, de productos biológicos que estimulan al organismo a producir anticuerpos específicos, los cuales actuarán contra el virus cuando ingrese en la corriente sanguínea.

En ocasiones, el ataque por el virus provoca la muerte del organismo. Bien sabido es que la rabia, abandonada a sí misma, es fatalmente mortal y que la mortalidad de otras infecciones producidas por virus, como la viruela y la fiebre amarilla, es elevadísima. Muchos niños y ancianos sucumben también tras la invasión de sus vías respiratorias por el virus de la gripe. La encefalitis, la poliomiелitis y la hepatitis producidas por virus ocasionan, asimismo, algunas veces, la muerte de los pacientes.

Pero también es igualmente cierto que las infecciones víricas habituales de las vías respiratorias del hombre pueden ser padecidas cinco a diez veces al año por cada individuo y que, por lo general, el organismo las vence rápidamente. Los niños atacados por los virus del sarampión, la varicela o la parotiditis superan casi siempre con relativa facilidad estas enfermedades.

Vemos, por lo tanto, que el organismo es capaz, en muchos casos, de combatir y vencer por sí solo una infección vírica.

Como es lógico, al intentar interpretar esta capacidad se pensó en primer lugar que el organismo invadido por el virus reaccionaba produciendo anticuerpos específicos. Por otra parte, se demostró que durante ciertas infecciones víricas (por ejemplo, sarampión), aparecen anticuerpos específicos que perduran en el suero sanguíneo, incluso hasta la muerte del organismo. Finalmente, la eficacia de las vacunas en la profilaxis de la rabia, viruela, fiebre amarilla, poliomiелitis, fiebre aftosa, peste aviar y otras muchas infecciones víricas, parece atestiguar de modo concluyente el poder protector de los anticuerpos contra los virus causantes de enfermedades del hombre o de los animales.

Pero, el organismo humano y el de los animales domésticos está expuesto al inexorable ataque de tantas clases de virus, que, según ISAACS (1b), pudiera resultar poco práctico, y acaso imposible, preparar vacunas específicas contra cada uno de ellos.

Además, el papel de los anticuerpos en la defensa natural antivírica no aparece claro en ciertas enfermedades. Los anticuerpos se unen a los virus fuera de las células, pero normalmente no penetran en el interior de éstas.



No se puede atribuirles, por consiguiente, la inhibición de infecciones producidas por virus que, como el de la viruela de la vaca, se transmiten de una a otra célula.

Por otra parte, los anticuerpos aparecen, generalmente, en una fase tardía de la infección por el virus y, a veces, cuando la enfermedad ha entrado ya en un período de franca curación.

Como es bien sabido, los anticuerpos (2) son proteínas del grupo de las globulinas y se forman cuando en el organismo penetran o son inyectados proteínas o proteidos extraños a él (los llamados antígenos), ya aislados, ya como componentes de grandes complejos (bacterias, virus). Tienen un peso molecular de 156.000, aproximadamente, y su punto isoeléctrico se encuentra entre pH 6,8 y pH 7,3, es decir, presentan características fisicoquímicas muy parecidas a las de las gammaglobulinas normales. También es muy parecida la composición química de unos y otras, si bien recientemente se han podido comprobar algunas diferencias de la estructura primaria (es decir, en la secuencia u ordenación de los aminoácidos) de los anticuerpos.

La formación de los anticuerpos no ha sido aclarada completamente todavía. Se sabe, sin embargo, que tiene lugar en los *plasmocitos* o *células plasmáticas* (*células cianófilas* de Cajal) de los ganglios linfáticos, médula ósea y pulpa esplénica.

Con métodos microespectrográficos y microquímicos, ha sido posible seguir la metamorfosis de los *plasmocitos* durante el proceso de la inmunización. En las fases de intensa proliferación se comprobó la presencia de ribonucleoproteínas en grandes proporciones. Por ello, se admite que la biosíntesis sigue el mismo curso que la biosíntesis de las proteínas en general, en la que también intervienen las ribonucleoproteínas (3).

En la biosíntesis de las proteínas cabe distinguir dos problemas parciales. Uno, se refiere a la explicación de cómo es posible desde el punto de vista energético la formación del enlace peptídico. El otro, al mecanismo que establece la secuencia de los aminoácidos.

Los aminoácidos han de ser activados antes de unirse para formar las cadenas polipeptídicas que integran las proteínas. La energía química es suministrada por el adenosintrifosfato (ATP), que forma con los aminoácidos un anhídrido mixto carboxilofosfórico. Este cede después el grupo aminoacilo a una molécula de ácido ribonucleínico *soluble* (es decir, no unido a la estructura de los ribosomas y, por ello, no separable por ultracentrifugación). Se supone que existen tantos ácidos ribonucleínicos *solubles* como aminoácidos diferentes se encuentran en las proteínas. El ácido ribonucleínico *soluble* se llama también ARN de *transferencia* porque cada molécula del mismo tiene la misión de transportar un aminoácido al lugar donde se produce la síntesis de proteínas (por ejemplo, los ribosomas). La secuencia de los aminoácidos en la proteína parece ser determinada por otro tipo de ácido ribonucleínico. En contacto con el ácido desoxirribonucleínico (ADN) de los cromosomas se forman *matrices* o *mensajeros*-ARN. La denominación de *mensajeros* se debe a que transcriben la información de la molécula de ADN y la transportan para ser traducida en la molécula de proteína (4).

El ARN transmite la información a través de un *código* de bases (púri-



cas y pirimidínicas) que consta, para cada aminoácido, de tres bases en un orden determinado. Los aminoácidos, que estaban unidos enérgicamente al ARN de transferencia, se disponen sobre el ribosoma de acuerdo con estos códigos y se unen entre sí por efecto de una acción enzimática.

Ya desde las primeras observaciones de cortes celulares con el microscopio electrónico, se observó que los ribosomas podían asociarse entre sí para formar agregados ribosómicos. Nació así el concepto importante del *polirribosoma* o *polisoma*, llamado también *ergosoma*, es decir, de agregados ribosómicos encargados de la síntesis de proteínas (5).

Parece tener considerable importancia la forma en que están unidos entre sí los ribosomas. El microscopio electrónico ha permitido comprobar que la unión se establece por medio de un delgado filamento, que se cree está formado por una sola cadena de ARN-mensajero de la información genética desde el núcleo.

Se admite que los ribosomas viajan a lo largo del ARN-mensajero en un proceso dinámico durante el cual el mensaje contenido como código en él es traducido en las moléculas de proteína. Estas son dejadas en libertad por los ribosomas y, mediante un mecanismo aún desconocido, ingresan en el *retículo endoplasmático* (RE), integrado por túbulos, vesículas y, a veces, grandes cisternas, sobre cuya superficie se encuentran los polirribosomas en disposición bidimensional. En el RE son almacenadas las proteínas para ser eliminadas al exterior de la célula. Por medio de anticuerpos marcados con ferritina, se ha podido demostrar este almacenamiento (6) por lo que se refiere a las gammaglobulinas.

Probablemente, el argumento más fuerte contra la importancia de los anticuerpos en la curación de las enfermedades víricas, haya sido suministrado por las observaciones realizadas en los individuos que padecen la rara enfermedad conocida con el nombre de *hipogammaglobulinemia* (7). Esta enfermedad se caracteriza por una muy deficiente capacidad para la síntesis de gammaglobulinas y, por tanto, de anticuerpos. Cuando uno de estos enfermos ha sido infectado por una bacteria o por un virus, sólo se pueden descubrir vestigios de anticuerpos en su suero sanguíneo. Sin embargo, estos pacientes conservan la capacidad de defensa contra numerosas infecciones por virus. Se puede creer, por lo tanto, que los anticuerpos no son un factor decisivo en la curación de estas enfermedades.

Un hallazgo netamente experimental, realizado hace pocos años, ha arrojado nueva luz sobre el problema de la defensa antivírica de los organismos. ISAACS y LINDENMANN, en 1957 (8), descubrieron que una sustancia producida por las células, a la que llamaron *interferona*, ejerce una notable actividad inhibidora frente a muchos virus. El descubrimiento vino a aclarar el fenómeno de la *interferencia de los virus*, conocido desde hace casi treinta años y posiblemente observado ya por JENNER en 1805. El primer ejemplo claro de interferencia de virus en condiciones naturales, quizás fuera descrito por FINDLAY y Mac CALLUM (9) en 1937. Estos investigadores comprobaron que los monos infectados con virus de la *fiebre valle del Rift* quedaban protegidos contra los fatales efectos del virus de la *fiebre amarilla*. La pro-



fección no podía ser atribuida a un efecto de los anticuerpos, porque los anticuerpos contra el virus de la fiebre del valle del Rift son completamente ineficaces contra el virus de la fiebre amarilla.

El descubrimiento de ISAACS y LINDENMANN fue realizado, inesperadamente, cuando investigaban la acción del virus de la gripe inactivado por el calor. Comprobaron que el líquido nutritivo del cultivo, libre de células, había adquirido en pocas horas la sorprendente propiedad de conferir a nuevas células frescas una capacidad de resistencia contra gran número de virus.

Muy pronto, aislaron la sustancia responsable y la denominaron *interferona*, porque la resistencia que confería manifestaba todos los caracteres observados en la interferencia de los virus.

Conviene tener en cuenta que el nombre interferona, usado en singular, designa genéricamente a varias sustancias inhibitoras muy afines, que se producen en los cultivos celulares, o en los tejidos huéspedes, como respuesta a la infección por virus activos o inactivados (10). Por consiguiente, corresponde más a un concepto biológico que a una entidad química.

Las interferonas preparadas en distintas especies animales ofrecen pequeñas diferencias de una a otra, de igual modo que las ofrecen las hormonas proteínicas, los anticuerpos o los enzimas de especies zoológicas distintas. Según RITA y colaboradores (11), se puede concluir que la interferona presenta una especificidad absoluta de clase zoológica. También existe una especificidad de especie, pero no es tan absoluta como la de clase, ya que se puede relajar a consecuencia de las diferentes condiciones experimentales.

Por el contrario, su acción inhibitora frente a los virus es inespecífica, pues una misma interferona puede impedir la multiplicación de virus diferentes. No obstante, se han comprobado grados en la sensibilidad de los virus, que permiten una clasificación en grupos más o menos sensibles. Los virus tumorígenos, como el productor de sarcoma de Rous son también inhibidos por la interferona.

Varios autores han estudiado las propiedades fisicoquímicas de las interferonas obtenidas de diferentes sistemas virus/célula huésped. Del conjunto de los resultados se puede concluir que las interferonas son proteínas débilmente básicas (P. I. E. alrededor de pH 8). Sus moléculas son mucho menores que las partículas de los virus, de las cuales se pueden distinguir por los métodos serológicos.

La interferona obtenida por ISAACS y sus colaboradores (12, 13, 14, 15) con el virus de la gripe A Melbourne cultivado en membrana corioalantoidea de embrión de pollo, se inactiva completamente en una hora a 60°C si el pH de la disolución no es ajustado a 7,4, en el cual puede resistir parcialmente durante una hora a 70°C. El calentamiento a 100° durante cinco minutos la destruye totalmente.

Otras interferonas presentan ligeras diferencias en la termorresistencia. Así, la preparada por WAGNER (16) y WAGNER y LEVY (17) con virus de la gripe AWS y líquido alantoideo, fue completamente estable a 70°C durante una hora y perdió el 90 % de su actividad en una hora a 85°C.

Las investigaciones sobre el peso molecular de las interferonas han su-



ministrado resultados diferentes. Según PORTERFIELD, BURKE y ALLISON (18), es de 63.000. Recientemente, LAPSON y otros (19), con la interferona producida en el sistema virus de la gripe AWS/líquido alantoideo muy purificada (4.500 veces), han encontrado un peso molecular comprendido entre 20.000 y 34.000 calculado por los resultados de la ultracentrifugación. Otros investigadores (20) han estudiado las interferonas producidas en varios sistemas diferentes por el virus y por las células (virus Chicunguya/fibroblastos de embrión de pollo, virus de la enfermedad de Newcastle/fibroblastos de embrión de ratón, virus gripal A-Kunz/células de riñón de mono, virus gripal A-PRO/pulmón de ratón *in vivo*). Los resultados de la ultracentrifugación demostraron que todas las interferonas probadas tenían un coeficiente de sedimentación parecido y muy próximo al de la lisozima, cuya constante es 1,9 S, lo que les permitió llegar a la conclusión de que el peso molecular de las interferonas se encuentra entre un mínimo de 13.000 y un máximo de 20-25.000. Estos resultados concuerdan bien con los obtenidos por WAGNER y por LAMPSON y colaboradores. El peso molecular mínimo, calculado por el contenido en determinados aminoácidos, debe ser 7.900 y el peso molecular real correspondería a un múltiplo de esta cifra.

La obtención de interferona en estado puro ha permitido estudiar su composición química. La interferona purificada por LAMPSON y colaboradores contiene tirosina (2,3 %), triptófano (2,6 %) (calculados ambos del espectro de absorción en el U. V.), arginina (7,2 %) y lisina (11,1 %). No contiene ácidos nucleínicos, pero sí vestigios de hidratos de carbono.

Las propiedades de las interferonas parecen ser semejantes a las de las histonas. De acuerdo con su constitución química, son inactivadas por diversas proteínasas (tripsina, quimotripsina, pepsina y papaína), pero son insensibles a la acción de las exopeptidasas, de las  $\alpha$ -amilasas y de las lipasas. Por último, se ha demostrado que no pueden identificarse con la lisozima ni con la ribonucleasa o la desoxirribonucleasa.

La producción de interferona tiene lugar en el interior de las células de órganos muy diversos. Ha sido comprobada en la gallina, el pato, conejo, cobaya, ratón, perro, hurón, vaca, cerdo, mono y hombre (21).

Para llegar a una caracterización más perfecta de las interferonas producidas en los diferentes sistemas virus/célula en estas especies animales, será preciso esperar a que se determine la composición en aminoácidos y la secuencia de los mismos en las preparaciones purificadas.

El poder antigénico de las interferonas fue puesto en duda después de los primeros intentos infructuosos realizados para producir anticuerpos contra ellas. Sin embargo, quedó demostrado posteriormente al descubrirse que los sueros de cobayas repetidamente tratados con estas sustancias neutralizan la actividad inhibidora de las mismas. Es posible que los resultados negativos obtenidos al intentar demostrar el carácter antigénico de algunas interferonas, se deban, entre otros motivos, a que estos cuerpos son, según dijimos, proteínas de bajo peso molecular y, por tanto, es probable que su potencia antigénica sea escasa (22).

Las dos cuestiones de mayor interés en el estudio de la interferona son, probablemente, su síntesis en el interior de la célula y el mecanismo por el



cual inhibe la multiplicación de los virus. Antes de entrar en el análisis de estas cuestiones, conviene recordar algunos datos sobre estos agentes infecciosos.

Los virus son partículas submicroscópicas, que pueden penetrar en células-(huésped) adecuadas y multiplicarse dentro de ellas. La formación de nuevos virus exige siempre el aparato de una célula viva (23). La clasificación de los virus puede atender a distintos puntos de vista, pero suele hacerse de acuerdo con la naturaleza de los organismos huéspedes. Correspondientemente, se distinguen virus *bacteriófagos*, que solamente pueden infectar a bacterias, virus *fitopatógenos*, que atacan a las plantas, y virus *zoopatógenos*, entre los cuales figuran los que producen enfermedades en los animales homeotermos.

Con la ayuda del microscopio electrónico se ha podido conocer la morfología de los virus. Casi todos tienen una forma globulosa o de bastoncillo. Como componentes químicos, todos contienen ácidos nucleínicos (ARN o ADN, pero nunca los dos juntos) y proteínas, estas últimas como sustancia envolvente, al mismo tiempo. Los virus mayores pueden contener, además, otras sustancias, por ejemplo, lipoides. De acuerdo con la naturaleza de su ácido nucleínico, frecuentemente se distinguen también virus-ARN y virus-ADN.

Los procesos que se desarrollan durante una infección por virus han sido investigados muy intensamente en los bacteriófagos, cuyo comportamiento se considera como modelo para muchos problemas relativos a los virus. Los fagos constan de una parte cefálica y de otra caudal, que es de longitud variable. El ácido nucleínico de los bacteriófagos está compuesto, la mayoría de las veces, por ADN, localizado en la cabeza del fago (recientemente se han demostrado también fagos con ARN). La membrana cefálica y la prolongación caudal contienen diversas proteínas. Cuando los bacteriófagos se reúnen con célula-huésped apropiadas, el virus es adsorbido en la pared celular por el extremo de la porción caudal. Después de varios estadios intermedios, el ADN del fago y una pequeña cantidad de proteína son inyectados en la célula bacteriana. Si se trata de un fago *virulento*, el metabolismo de la célula atacada se transforma, orientándose hacia la producción de nuevos fagos. La célula parece por lisis y los fagos terminados quedan en libertad (24).

Dada la naturaleza química de las interferonas, su formación sigue, desde el punto de vista bioquímico, la vía general de la biosíntesis de las proteínas, expuesta al tratar de la génesis de los anticuerpos.

Parece improbable que la información genética completa para la producción de interferona sea llevada por los ácidos nucleínicos de los diferentes virus-ARN y -ADN capaces de estimular la formación de interferona (25). Esto exigiría la presencia de idénticas secuencias de bases en los nucleótidos de cada uno de ellos. Además, células de diferentes especies animales pueden responder al mismo virus con la producción de interferonas que se pueden distinguir una de otra, por lo menos en lo referente a la especificidad de especies (26).



De hecho, no se ha aclarado todavía si el estímulo primario de la formación de interferona corresponde al ácido nucleínico o a la proteína del virus. Lo que sí puede afirmarse razonablemente, es que las células no infectadas no producen interferona y que los virus, probablemente, desempeñan importantes funciones como inductores de la producción de esta sustancia. Nada puede decirse todavía sobre la posibilidad de que la formación de interferona sea inducida también por estímulos que no sean los virus o sus componentes.

En cualquier caso, el ADN de la célula debe participar en la ordenación de los acontecimientos que llevan a la síntesis de interferona. Como piensa WAGNER (10), el mecanismo de la producción de esta proteína puede corresponder a una de las siguientes posibilidades:

1.<sup>a</sup> La interferona es un componente normal de la célula producido constantemente como un precursor sin actividad biológica, que sería convertido en interferona activa por el virus infeccioso.

2.<sup>a</sup> La integración genética (o epigenética) del ácido nucleínico del virus con el ADN de la célula da por resultado la formación de una nueva proteína (interferona).

3.<sup>a</sup> Un gene *operador* situado en un cromosoma es activado por la infección vírica para inducir la producción de interferona. Esta inducción tiene lugar sobre un gene *estructural* inmediato dentro del operón, es decir, de la nueva unidad genética que, según las ideas de JACOB y MONOD (27), comprende el *operador* y un conjunto de otros genes que están bajo su control. O, alternativamente, un catabolito de la célula infectada por el virus actúa como *represor* de un gene regulador situado en otro lugar (28), bloqueando así la acción de éste sobre el operador. El resultado podría ser una aceleración de la actividad de los genes estructurales (puesta en marcha por el operador) seguida por la producción de más ARN mensajero y más proteína.

La tercera de estas posibilidades concuerda mejor con numerosas observaciones sobre los mecanismos genéticos que regulan la síntesis de enzimas inducidas bajo la influencia de la estimulación por el sustrato o la represión por el producto final.

En efecto, según JACOB y MONOD, existen *genes reguladores* que controlan la velocidad de síntesis de una proteína. Cada uno de estos genes actúa sobre la síntesis de diferentes proteínas, mientras que un *gene estructural* obedece al principio "un gene, una proteína".

El fenómeno de la represión enzimática sólo ha sido conocido en los doce años últimos. Se ha encontrado que la síntesis de la enzima triptófano-sintetasa en la bacteria *Escherichia coli* es inhibida selectivamente por el triptófano y algunos compuestos semejantes. La importancia de este fenómeno en la regulación de muchas actividades celulares es muy grande. En todos los casos que han sido estudiados, el producto final de una secuencia biosintética inhibe la síntesis de la enzima correspondiente.

El mecanismo de la producción de interferona quizá pudiera ser aclarado experimentalmente mediante el empleo de inhibidores específicos de la



síntesis de ácido nucleínico y de proteína. El más útil puede ser la actinomicina  $C_1$  (actinomicina D de los autores americanos), por razón de su capacidad para combinarse y formar un complejo con el ADN, sin influir sobre la síntesis de ARN. Tal capacidad de la actinomicina parece debida a que este antibiótico ocupa las matrices ADN, con lo que impide la formación de ARN dependiente del ADN y, por lo tanto, la del ARN mensajero (29).

Los estudios preliminares realizados por WAGNER (10) revelan que la actinomicina disminuye intensamente la producción de interferona por las células de la alantoides del pollo. Si nuevas investigaciones confirmaran estos resultados, se reforzaría la noción de que la síntesis de interferona es determinada por el ADN celular a través del ARN mensajero.

Es posible que la producción de interferona obedezca a un mecanismo de *retroacción* ("feed-back") semejante a los que se admiten para otros procesos de biosíntesis.

Los conocimientos sobre el mecanismo de acción de la interferona no han progresado mucho desde que fueron propuestas las primeras teorías. No obstante, se sabe con seguridad que la inhibición ejercida por la interferona es un fenómeno endocelular. De aquí, que se atribuya a una intervención en los procesos metabólicos generales de la célula o a una intervención sobre los mecanismos específicos de la multiplicación de los virus. La unión interferona-célula no altera los receptores de la superficie celular para la fijación del virus (30, 31).

El estudio de los efectos de la interferona sobre el metabolismo celular ha sido desarrollado por ISAACS (1) y por ISAACS y col. (32). Encontraron que las células tratadas con interferona producen una cantidad de ácido láctico tres veces mayor que la producida por las no tratadas, lo que les llevó a admitir que la interferona actúa sobre el metabolismo de los hidratos de carbono.

Conviene recordar que, en las células normales, la glucólisis es el primer paso de un complejo proceso metabólico que convierte a la glucosa en anhídrido carbónico y agua. El resultado neto del proceso es la transferencia de la energía contenida en la glucosa al adenosintrifosfato (ATP), que lleva la energía en una forma fácilmente utilizable por la célula en muchos procesos. En la glucólisis, una molécula del azúcar produce dos moléculas de ácido pirúvico y dos moléculas de ATP. Después, eventualmente, las dos moléculas de ácido pirúvico son convertidas en seis moléculas de anhídrido carbónico y cuatro de agua, produciéndose otras 36 moléculas de ATP. El proceso total es denominado fosforilación oxidativa (33).

Después de considerar otras varias hipótesis, ISAACS ha sugerido que la interferona actúa desacoplando la fosforilación oxidativa. Esto significa que la glucosa todavía es metabolizada, como lo indica el ácido láctico formado por su oxidación, pero el proceso ya no rinde una proporción normal del compuesto rico en energía ATP, lo que impide la multiplicación de los virus.

La sugestiva hipótesis de ISAACS explicaría que la interferona no detiene la multiplicación de las partículas de virus en algunas células tumorales (34, 35). Según descubrió WARBURG, estas células podrían obtener anaeró-



bicamente todo el ATP que necesitan. Puesto que la interferona sólo impediría la formación del ATP por la vía oxidativa, su efecto contra los virus no sería ejercido en las células cancerosas. Cuando un virus invadiera una de estas células, encontraría suficiente ATP para su multiplicación a pesar de la presencia de cantidades importantes de interferona.

ISAACS y sus colaboradores (36, 37) evidenciaron que los virus cuya multiplicación es más intensamente frenada por una disminución de la tensión del oxígeno, son, salvo algunas excepciones, más sensibles a la acción de la interferona, lo que iría de acuerdo con la hipótesis de que esta sustancia actúa sobre los mecanismos de la utilización del oxígeno e inhibiendo un proceso que suministra a la célula la energía necesaria para la síntesis de los componentes del virus.

Las sustancias desacoplates de la fosforilación oxidativa (también pudiera llamarse oxidación fosforilante) desligan el proceso de fosforilación del transporte de electrones por la cadena respiratoria. Son cuerpos desacoplates, por ejemplo, el dinitrofenol, el dicumarol, la tiroxina, la azida sódica y el verde Janus.

De las observaciones de varios autores, dedujo ISAACS (15) que los efectos de la interferona eran semejantes a los del dinitrofenol. Ambos estimulan la glucolisis, inhiben la formación de copias o réplicas de partículas de virus en las células normales y no la inhiben en ciertas células cancerosas (células He La).

En menoscabo de la hipótesis de ISAACS, calificada por WAGNER (10) de intrigante, están las observaciones de que el dinitrofenol y otros poderosos desacoplates son mucho menos activos que la interferona como inhibidores de los virus (32) y que el virus de la *encefalitis equina del Oeste* conserva la susceptibilidad a la interferona en condiciones de anaerobiosis (38). Por otra parte, las interferonas muy purificadas y concentradas no desacoplan la fosforilación oxidativa ni tienen efecto alguno sobre la glucolisis anaerobia o aerobia (19). Todavía no se sabe cuáles son las impurezas responsables de esta diferencia en el comportamiento de las interferonas purificadas y no purificadas.

Se han hecho varios experimentos para estudiar las relaciones tiempo-dosis, como un medio para averiguar el mecanismo de acción de la interferona. La interpretación de los resultados fue, a veces, difícil por el número de variables en tales pruebas. No obstante, los estudios sobre el efecto de diferentes interferonas en la inhibición del virus Rous (39) y del virus de la estomatitis vesicular (40) sugieren una cinética de primer orden. Una relación lineal dosis-respuesta fue observada también en los experimentos con la sustancia interferente transmisible (T) del virus de la estomatitis vesicular (41), que puede, o no, ser una interferona.

Todavía no se sabe con seguridad si cada célula tiene uno o varios lugares "críticos" para la acción de la interferona; pero parece probable que, para ejercer un efecto, sólo sean necesarias muy pocas unidades biológicamente activas de este cuerpo (10). Como Ho (31) ha demostrado, la acción de la interferona no obedece a la "ley del todo o nada".

Otras muchas investigaciones se han llevado a cabo para precisar el efec-



to de la interferona sobre la infectividad y sobre la síntesis del ARN de los virus. Los resultados de las mismas han sido resumidos por RITA y sus colaboradores (11) en la forma siguiente: 1.°, la interferona actúa endocelularmente; 2.°, no inactiva directamente al ARN del virus a través de la estimulación de la producción de una ARNasa específica; 3.°, no inhibe la multiplicación del virus por una actuación sobre el proceso de maduración del mismo; 4.°, inhibe específicamente la síntesis de un ARN-mensajero del virus, mientras que no parece inhibir la del ARN celular normal; 5.°, inhibe primitivamente la síntesis del ARN del virus en una fase inicial de la infección.

De cuanto antecede, se puede deducir que la utilización de la interferona exógena con fines profilácticos o terapéuticos se ve restringida en la práctica por dos motivos principales. Uno de ellos se refiere especialmente a su empleo en el hombre y se debe a la especificidad de especie de los preparados de este inhibidor. Pero, está demostrado que interferonas obtenidas en células de animales pertenecientes a diferentes órdenes, llegan a superar esta especificidad. Por lo que se refiere al hombre en particular, las interferonas preparadas en células de mono actúan igualmente en células humanas. El segundo motivo está relacionado con la posibilidad de purificar y concentrar las interferonas. Sin embargo, esta dificultad puede considerarse ya resuelta, por lo menos desde el punto de vista experimental.

Por lo tanto, se va confirmando una vez más, que, en las Ciencias, según ha escrito recientemente GAVAUDAN (42), no hay última página que no deba ser considerada como provisional. Con esta afirmación, queremos terminar nuestra contestación al discurso del Ilmo. Sr. Dr. D. Angel Sánchez Franco, pero no lo haremos sin darle antes la bienvenida a esta Academia, que espera abundantes frutos de su sólida preparación científica.

HE DICHO.

## BIBLIOGRAFIA

- (1a) PETZETAKIS, M.: *C. R. Sob. Biol.*, **148**, 19-20, 1560-1563, oct. 1954.
- (1b) ISAACS, A.: *Interferon. Publ. por Freeman and Company*, San Francisco (California). Reimpr. de Scientific American, mayo, 1961.
- (2) KARLSON, P.: *Kurzes Lehrbuch der Biochemie für Mediziner und Naturwissenschaftler*. Stuttgart, 1962.
- (3) GANDARIAS, J. M. DE: *Fisiología especial*, tomo I, p. 150. Salamanca, 1964.
- (4) DE ROBERTIS, E. D. P., NOWINSKI, W. W. y SAEZ, F. A.: *Biología Celular*. 6.ª ed. Editorial "El Ateneo". Buenos Aires, 1965.
- (5) WARNER, J. R., RICH, A. y HALL, C. E.: *Science*, **138**, 1399, 1962.
- (6) RIFKIND, R. A., MORGAN, C. y HARWET, M. R.: *Fifth. Congress for Electron. Microsc.*, Academy Press U. S., 1962.
- (7) GROSS, P. A. M., GITLIN, D. y JANEWAY, C. A.: *New England J. Med.*, **260**, 170, 1959.
- (8) ISAACS, A. y LINDENMANN, J.: *Proc. Roy. Soc. (London) Biol. Sc.*, **147**, 258-267, 1957.
- (9) FINDLAY, G. W. M. y Mc. CALLUM, F. O.: [cit. en (2)].



DISCURSO DE CONTESTACION

- (10) WAGNER, R.: *The Interferons: cellular inhibitors of viral infection*. Ann. Rev. of Microbiology, **17**, 285-295, 1963.
- (11) RITA, G., RUSSI, M., BIANCHI BANDINELLI, F. y DIANZANI, F.: *Atti Congr. Naz. Soc. Ital. Micr.* p. 1.<sup>a</sup>. Perugia, 1963.
- (12) LINDENMANN, J., BURKE, D. C. e ISAACS, A.: *Brit. J. exp. Pathol.* **38**, 551-562, 1957.
- (13) BURKE, F. M. e ISAACS, A.: *Brit. J. exp. Pathol.*, **39**, 452-458, 1958.
- (14) ISAACS, A. y BURKE, D. C.: *Brit. med. Bull.*, **15**, 185-188, 1959.
- (15) ISAACS, A.: *Nature and function of interferon*. Ed. por Morris Pollard, Burgess Publ. Co. Minneapolis. *Perspectives in Virology*, **2**, 117-123, 1961.
- (16) WAGNER, R. R.: *Bact. Rev.*, **24**, 151-166, 1960.
- (17) WAGNER, R. R. y LEVY, A. H.: *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **88**, 1308-1318, 1960.
- (18) PORTERFIELD, J. S., BURKE, D. y ALLISON, A. C.: *Virology*, **12**, 197-203, 1960.
- (19) LAMPSON, G. P., TYTELL, A., NEMES, M. M. y HILLEMANN, M. R.: *Proc. Soc. Exp. Biol. Med.*, **112**, 468-478, 1963.
- (20) ROTEM, Z. y CHARLWOOD, P. A.: *Nature*, **198**, 1066-1068, 1963.
- (21) ISAACS, A.: *Defensa natural antivirica. Triángulo*. Vol. V, núm. 7, p. 311-315, enero 1963.
- (22) PAUCKER, K. y CANTELL, K.: *Virology*, **18**, 145-147, 1962.
- (23) LURIA, S. E.: *General Virology*. John Wiley. New York, 1953.
- (24) HARBERS, E. DOMAGK, G. F. y MÜLLER, W.: *Die Nucleinsäuren*. Georg Thieme Verlag. Stuttgart, 1964.
- (25) HO, M.: *New England J. Med.*, **266**, 1258-64, 1313-18, 1367-71, 1962.
- (26) WAGNER, R. R.: *Virology*, **19**, 215-224, 1963.
- (27) JACOB, F. y MONOD, J.: *J. Mol. Biol.*, **3**, 318, 1961.
- (28) MOYED, H. S. y UMBARGER, H. E.: *Physiol. Rev.* **42**, 446-466, 1962.
- (29) HARBERS, E. y MÜLLER, W.: *Biochem. biophys. Res. Commun.*, **7**, 107-110, 1962.
- (30) WAGNER, R. R.: *Virology*, **13**, 323-337, 1961.
- (31) HO, M.: *Virology*, **17**, 262-275, 1962.
- (32) ISAACS, A., KLEMPERER, H. G. y HITCHCOCK, G.: *Virology*, **13**, 191-199, 1961.
- (33) LEHNINGER, A. L.: *Energy Transformation in the Cell*. Scientific American, mayo 1960.
- (34) CHANY, C.: *C. R. Acad. Sc.*, **250**, 3903-3905, 1960.
- (35) CHANY, C.: *Virology*, **13**, 485-492, 1961.
- (36) BARON, S., PORTERFIELD, J. S., ISAACS, A.: *Virology*, **14**, 444-449, 1961.
- (37) ISAACS, A., PORTERFIELD, J. S., BARON, S.: *Virology*, **14**, 450-455, 1961.
- (38) ZEMLA, J. y SCHRAMER, S.: *Virology*, **16**, 204-205, 1962.
- (39) BADER, J. P.: *Virology*, **14**, 436-443, 1962.
- (40) LEVY, H.: *Clin. Res.*, **10**, 218, 1962.
- (41) BELLET, A. J. D. y COOPER, P. D.: *J. Gen. Microbiol.*, **21**, 498-509, 1959.
- (42) GAVAUDAN, P.: *Addendum a la obra "L'origine de la vie sur la Terre"*, por A. I. OPARIN. Masson et Cie. Ed., París, 1965.



## FORMACION Y VALORACION DE LA IMAGEN OPTICA

Por el

ILMO. SR. D. JUSTINIANO CASAS PELÁEZ

*Excelentísimo Sr. Presidente,*

*Excelentísimos e Ilustrísimos señores Académicos,*

*Señoras y señores:*

Cuando esta ilustre Academia tuvo a bien designarme como miembro para compartir sus quehaceres, sentí la satisfacción natural del que llega al más alto peldaño de la honorabilidad, y, con ella, el desasosiego propio de quien recibe una distinción que no marca precisamente, como es usual, el fin de una tarea felizmente coronada, sino el principio de una responsabilidad, el comienzo de una actuación en la cual uno tiene que hacerse acreedor a los méritos que le permitan ostentar airoosamente el galardón que, en honor a la confianza, le ha sido concedido por anticipado.

Pueden estar seguros los señores Académicos de que, en la medida de mis fuerzas, pondré todo mi entusiasmo en ser digno de la acogida que me dispensan.

En este sendero de preocupaciones, la primera que me obsesiona es el pensar que vengo a relevar en su puesto al Prof. D. Mariano Velasco Duránte, lo que tiene para mí un significado especial. Conozco muy bien al profesor Velasco porque a él me ligan desde hace mucho tiempo profundos lazos de amistad, motivados, de un lado, por una constante relación científica basada en nuestra idéntica especialidad, y, de otro, por nuestra común manera de pensar como paisanos nacidos entre las labranzas de la dura tierra castellana y crecidos bajo su cielo azul con horizontes sin límites.

En él he tenido siempre un gran estímulo para mi trabajo, un consejero leal, y un gran instigador en su día para que abrazara la cátedra y viniera a sustituirle en la Universidad de Zaragoza.

Hoy he sido llamado también a sustituirle en su silla de académico y sé bien lo que representa para mí el ser sucesor de un hombre con tantas virtudes, entre las que resaltan su sabiduría, su bondad, el amor a su profesión y a sus semejantes, la sencillez y la modestia al par con su envidiable laboriosidad.

Don Variato Velasco, nació en Villacón (Palencia) en 1897, estudió su Licenciatura en las universidades de Salamanca y Madrid, doctorándose en esta última con el "Premio Echegaray". En 1931 ganó por oposición la Cátedra de Óptica de la Universidad de Zaragoza y en 1952 ocupó por concur-



so la correspondiente de la Universidad de Barcelona, siendo nombrado miembro de esta Academia en octubre de 1945.

En su vida científica colaboró con los profesores españoles Blas Cabrera y Julio Palacios en el laboratorio de Investigaciones Físicas en Madrid. Con E. Rutherford en el Cavendish Laboratory de Cambridge, con C. D. Ellis en el King's College de la Universidad de Londres y con R. Scherrer en la Technische Hochschule de Zurich. Fruto de su gran capacidad de trabajo e incansable actividad son los numerosos artículos publicados sobre la refracción molar, moléculas polares, y sobre la estructura fina en la absorción de rayos X.

A su fructífera labor docente desarrollada en la cátedra, hemos de añadir una colección de publicaciones en las que se ponen de manifiesto sus singulares dotes pedagógicas, y entre las que figuran "Física General", en tres tomos; "Prácticas de laboratorio de Física", "Pasado y presente del Radar y sus aplicaciones", etc.

No cabe duda de que un hombre con estas cualidades científicas y humanas siempre es difícil de sustituir.

La segunda de las preocupaciones a que antes he aludido fue la elección de tema para este discurso. A fuer de físico, recorrí el panorama de la Física actual, en el que existen paisajes cautivadores, conquistas recentísimas que han requerido una elaboración mental de extraordinaria profundidad. Pero existen también problemas tan viejos como la propia humanidad que conservan al mismo tiempo la novedad, no sólo de no estar resueltos, sino de aparecer cada día con nuevas exigencias.

A uno de estos problemas: "La formación y valoración de la imagen óptica", ha dedicado el que os habla la mayor parte de su vida científica, y del que, abusando de vuestra benevolencia, quiere haceros partícipes en estos momentos, no sin antes rendir público homenaje de gratitud a las personas que con su ayuda han hecho posible este feliz suceso, debiendo comenzar en orden temporal por mi querido tío, Ilmo. Sr. D. Justiniano Casas Barrero, gracias a cuyo esfuerzo y sacrificio pude seguir en la vida la senda intelectual, en la que he podido remar arropado siempre por el amor a la ciencia que él supo despertar en mí.

A los Excmos. Sres. D. José María Otero Navascués y D. Armando Durán Miranda, cuya contribución a la Óptica es bien conocida internacionalmente, y gracias a cuyos esfuerzos se puso en marcha el cultivo de esta ciencia en nuestro país. Bajo su dirección me inicié en la investigación científica, y de ellos he recibido siempre los mejores estímulos y ayudas para el desarrollo de mi labor.

A todos mis colaboradores, que no puedo citar de nómine porque ya van siendo muchos. Ellos son verdaderamente quienes han contrastado y convertido en realidad mis modestas ideas.

Finalmente, a mi esposa, que sin exigencias, y con un formidable espíritu de renuncia, ha sabido estimularme y anteponer a todo mi dedicación a la ciencia y a la Universidad.



## FORMACION Y VALORACION DE LA IMAGEN OPTICA

Cualquier descripción del mundo sería incompleta si no diera una explicación de los procesos físicos y fisiológicos por medio de los cuales el hombre hace sus observaciones. Esta descripción científica debe a su vez incluir una explicación de las ligaduras entre el cerebro humano y aquellos entes: átomos, moléculas, etc., cuya existencia se postula para de algún modo describir las observaciones que, en fin de cuentas, se hacen siempre a través de nuestros sentidos.

Históricamente se ha reconocido que una gran parte de nuestras observaciones se realizan por medio de la luz y la visión. Hoy se estima que más del 50 % de la información que recibimos del mundo exterior se hace a través del sentido de la vista, por las percepciones conscientes que en nuestro cerebro producen los estímulos retineanos, originados por las imágenes que la parte anterior del ojo, unas veces por propia cuenta, y otras con ayuda de instrumentos, forma sobre su retina.

Pero no siempre se ha entendido así este proceso que encadena el estímulo físico, en forma de energía radiante, con la sensación y la percepción, aunque desde las más remotas civilizaciones se ve que el hombre siente verdadera preocupación por explicar el fenómeno de la visión.

Este intento que en sus principios no trascendió del marco de la más pura filosofía, considerándolo como facultad anímica exclusivamente, dio lugar a uno de los más bellos capítulos de la filosofía natural: la Óptica.

Para las mentes helénicas del siglo V a. C., que es donde se encuentran los primeros tratamientos de la cuestión, cualquier información de un objeto distante debería hacerse estableciendo de algún modo un *contacto* de nuestra alma con el objeto visto, debiendo existir un *algo* por medio del cual se realizara este contacto. Este "algo" es lo que hoy llamamos *luz*.

Estas ideas están perfectamente expresadas en un escrito atribuido a Leucipo de Mileto<sup>1</sup>, de la escuela atomística de Demócrito, donde dice "Todas nuestras percepciones son táctiles; todos nuestros sentidos son variedades del tacto. Por tanto, si nuestra alma no sale de nuestro interior para ir a tocar a los objetos exteriores, es necesario que estos objetos vengan a tocar a nuestra alma pasando a través de los sentidos. Pero nosotros no vemos que los objetos se nos acerquen cuando los percibimos, debiendo ocurrir por tanto que ellos envíen a nuestra alma algo que los represente: imágenes (*εἰδολα*), especies de sombras o simulacros materiales que revistiendo los cuerpos se agitan en su superficie y pueden desprenderse para traer a nuestra alma las formas, los colores y todas las demás cualidades de los cuerpos de los cuales emanan".

La escuela pitagórica opinaba, según escritos de Apuleyo<sup>2</sup> (430 a 365 antes de C.), que la visión se producía por un fuego invisible que saliendo

1 J. TROUSSERT. — *Recherches sur quelques phénomènes de la Vision*. Brest, Anner, 1854.

2 Ver V. RONCHI. — *Storia della Luce*. Znicelli, 1952.



de los ojos iba a tocar y explorar los objetos a modo de tentáculo, poniéndonos de manifiesto las formas y colores.

Esta teoría puramente táctil, que no pudo explicar por qué en la oscuridad no se veían los objetos, ni por qué cuando los cuerpos se calentaban se hacían visibles ellos y sus circundantes, duró 14 siglos, y, con ella como principio, Euclides sentó las bases de la Óptica geométrica sobre el concepto de rayo emitido por el ojo.

Finalmente hay que citar la teoría de Aristóteles, según la cual la visión se producía por un movimiento o alteración del medio entre el ojo y el objeto, que aunque no tuvo seguidores, tuvo al menos la virtud de detener las investigaciones por medio de los instrumentos ópticos durante 20 siglos (hasta Galileo) por haber sostenido la idea de que cualquier instrumento puesto entre el ojo y el objeto perturbaba la visión, produciendo un engaño, y que, por tanto, cualquier información obtenida de este modo sería falsa.

Como aportaciones a la aclaración del fenómeno de la visión en épocas sucesivas, son dignas de mencionarse la de Galeno (130-201 d. C.), dando la anatomía del ojo, con su nervio óptico por el cual salían los efluvios del cerebro hasta el cristalino, que era la parte sensible donde se hacía el contacto del fuego interno con los simulacros atomistas, según las ideas de su contemporáneo Platón.

Ocho siglos después encontramos una importante contribución del mundo árabe con Alhazen (965-1039 d. C.) para quien definitivamente la luz va de los objetos a los ojos comportándose en la reflexión como los proyectiles en el choque elástico, lo que da entrada al criterio mecanicista. Esta misma idea es utilizada por Descartes (1596-1650) para explicar la ley de la refracción y, modificada, llega hasta Newton (1642-1726).

En el intermedio aparece la figura de Juan Kepler (1571-1630), en cuya obra "*Ad Vitellionem Paralipomena*", da importantes y nuevos conceptos sobre la luz y la visión. Respecto a la luz dice textualmente: "A la luz compete la propiedad de efluir o de ser lanzada por su fuente hacia un lugar lejano". "Desde un punto cualquiera la luz efluye según un número infinito de direcciones, siendo por sí misma apta para avanzar hasta el infinito. Las líneas de esta emisión son rectas y se llaman "rayos".

Salvo que no se pronuncia sobre la naturaleza de la luz, la óptica newtoniana queda diseñada con las citadas palabras.

Respecto a la visión, establece de un modo definitivo el concepto actual sobre la localización del estímulo en la siguiente frase: "Digo que la visión tiene lugar cuando la imagen de todo el hemisferio del mundo que está ante el ojo, y aún un poco más, se forma sobre la superficie cóncava rosada de la retina".

Un nuevo rumbo toman los problemas de la luz con Descartes (1596-1650), dando definitivamente las leyes de la óptica geométrica; pero sobre todo con el P. Grimaldi (1618-1663), de quien en 1665 aparece un volumen titulado "*Phycomathesis de Lúmine*", donde se ponen de manifiesto los fenómenos de difracción; y con Robert Hooke (1635-1703), quien en su libro



"Micrografía", aparecido también en 1665, además de dar impulso a la microscopía, intenta una explicación de los colores interferenciales en las láminas delgadas.

Tanto él como Grimaldi necesitan que la luz tenga algo periódico, bien sea sustancia o movimiento y esto prepara la fase siguiente en que aparecen en el escenario científico las dos grandes figuras: Newton (1642-1726), sustentando la teoría de la emisión corpuscular, la cual desemboca en una óptica geométrica que adquiere con Fermat su estamento definitivo, y Huygens (1629-1695) con su teoría ondulatoria, que no pudo abrirse paso, debido a la autoridad de Newton, hasta un siglo después en que en 1801 Thomas Young da la teoría de las interferencias y A. Fresnel (1788-1827) las de la difracción y polarización en los medios anisótropos.

Esta teoría alcanza su unidad con Maxwell en 1864 al asignar a las ondas luminosas naturaleza electromagnética, con lo que la teoría ondulatoria adquiere el estado en que hoy la conocemos.

Los progresos sobre el conocimiento de la naturaleza de la luz continúan, y en 1900, con Plank, nace la teoría cuántica, y con ella la incómoda situación de la dualidad onda corpúsculo que da origen a la Mecánica cuántica.

No obstante estos progresos sobre el conocimiento de la naturaleza de la luz, y mucho antes de ser alcanzados, se inicia un divorcio entre el progreso de la Óptica instrumental y las teorías de la luz, que realmente todavía padecemos en nuestros días, y no parece que esté en vías de arreglo inmediato.

La óptica instrumental sigue progresando sobre los conceptos geométricos y la teoría geométrica de las aberraciones, que alcanza su esplendor con Abbe, Seidel y Petzval a mediados del siglo XIX, y puede decirse que es la única que en la actualidad guía el diseño de instrumentos.

Un hecho insólito tiene lugar sin embargo en 1835, en que el astrónomo inglés y director del observatorio de Greenwich, Airy, da la teoría para calcular la distribución de luz en la mancha de difracción que un instrumento ideal produce en la imagen de un punto, cuya obra se completa en 1884 con Kirchhoff, quien da correcto estamento matemático al principio de Huygens para ondas escalares, con lo cual queda abierta la puerta a la teoría difraccional de las imágenes.

En esta época se tienen por tanto las bases para unificar la teoría geométrica de los instrumentos con la ondulatoria, pero lejos de llegarse al acuerdo entre las dos teorías, que en esencia son la misma, el divorcio se hace cada vez más patente. Los calculadores de instrumentos siguen aferrados a sus métodos geométricos, mientras que la teoría ondulatoria progresa por un camino que bien pudiéramos llamar teórico, ya que en la práctica no es primordialmente utilizado como material de diseño.

De cualquier modo se llega a una importante conclusión: la imagen que un instrumento real da de un punto, nunca es un punto, sino una mancha. La calidad de la imagen depende de la forma, tamaño y distribución de la luz en esta mancha, y estas circunstancias dependen a su vez del lugar en que la imagen sea recogida.



Si se pretenden hacer instrumentos de alta calidad, debe entenderse que se trata de instrumentos que den alta y permanente calidad de imagen. Entonces cabe preguntarse ¿Qué entendemos por calidad de imagen? ¿Cuándo podemos decir que una imagen es buena? ¿Qué criterios seguros tenemos para decidir sobre la calidad de la imagen?

Y viene aquí como anillo al dedo aquella frase de Lord Rayleigh: "Cuando se puede medir aquello de que se habla y expresarlo por números, se sabe algo a su respecto; sin medidas, el conocimiento es escaso e insuficiente".

Pero acontece que en una imagen no se pueden hacer fácilmente medidas que valoren su calidad, ya que el único criterio para saber cuál es la mejor imagen que da, por ejemplo, una cámara fotográfica, es obtener una serie de fotografías con distintas exposiciones y enfoques, presentar esta colección a un grupo de observadores y aceptar como mejor aquella que la mayoría repite como tal.

Análogamente diríamos de los instrumentos de visión. Cuando un observador enfoca su telescopio o microscopio, en realidad no hace sino seleccionar lo que él considera como la mejor imagen.

El problema de la valoración de una imagen es por tanto en todos los casos un problema psicológico que aparea la gravedad de reducir a números una apreciación psicológica, lo que no puede llevar otro camino que el estadístico.

Hoy, llevadas las cosas por estos derroteros estadísticos, parece haberse llegado a la conclusión bastante segura de que una imagen es buena cuando en ella se cumple un determinado compromiso entre tres variables que tienen una correcta definición física: el poder resolutivo, el contraste y la nitidez de reproducción de una línea que separa una playa clara de una oscura. Lo difícil está en determinar a priori este compromiso en cada caso. Así, para un retrato la imagen puede ser considerada como buena si una cámara la produce con gran suavidad, aunque en ella se pierdan un sin fin de detalles menores. Es decir, que cuando observamos un retrato, intuitivamente entre en juego nuestro sentido artístico. Si esta cámara la utilizáramos, sin embargo, para catastro o reconocimientos aéreos, el mismo observador diría que las fotografías que producen son detestables por su baja calidad en la reproducción de detalles.

Pero, lógicamente, no tendría ningún significado el valorar una imagen por el simple hecho de valorarla, si esto no se hiciera con miras más elevadas. Los problemas de valoración de la imagen se manifiestan con todas sus exigencias cuando se trata de construir un instrumento al cual a priori hay que exigirle una calidad en la reproducción, pues no tendría objeto haber gastado millones en hacer el prototipo para después comprobar desoladamente que el instrumento no da la calidad esperada.

Y aquí es donde surge el verdadero problema: ¿Cómo se le dice en cifras al proyectista la calidad psicológica que el presunto observador espera del instrumento?, y lo que es peor aún, ¿cómo puede el ingeniero que proyecta relacionar los parámetros geométricos que él maneja en el proyecto,



que no son otros que radios de curvatura de las lentes, espesores e índices de refracción, con la sicología del observador medio? ¿Cuál es la cadena que enlaza una colección de parámetros geométricos con los subjetivos de una sensación?

La resolución de esta cuestión ha consumido y consume la vida de un crecido número de científicos que todavía están aportando datos parciales para tratar de llegar a la síntesis final.

En el lento proceso de realización de un instrumento óptico se comienza por un anteproyecto en el cual, a la vista de las exigencias de campo que se ha de observar, aumentos y luminosidad, se fijan los diámetros de lentes y diafragmas, y las potencias operando sobre lentes delgadas que después se sustituyen por lentes reales gruesas.

Con este planteo previo se hace el paso de los rayos que proceden de un punto del objeto para ver si todos ellos van al punto imagen, y se van modificando los radios, índices y espesores de las lentes hasta conseguirlo. Pero ocurre que esto no se puede conseguir. En contadas circunstancias todos los rayos que salen de un punto cualquiera del objeto y atraviesan el sistema van después a un punto, dando así lugar a una imagen defectuosa o como decimos los ópticos, con aberraciones.

La imposibilidad de obtener una imagen perfecta en el más amplio sentido espacial desde el punto de vista geométrico, radica en la incompatibilidad de las condiciones de Abbe y Herschell, es decir, en los propios principios de la óptica geométrica.

Por si esta imposibilidad fuera poco, la luz se manifiesta con su carácter ondulatorio, y al pasar por los orificios del sistema se producen los fenómenos de difracción, lo que conduce a que aun cuando el sistema fuera perfecto desde el punto de vista geométrico, o bien, que todos los rayos que salen de cualquier punto del objeto fueran a un punto de la imagen, entre las ondas se producen fenómenos de interferencia que dan lugar a que la imagen de un punto sea una mancha rodeada de anillos alternativamente claros y oscuros.

Es decir que por cualquier camino que se ataquen los problemas, existen causas de imposibilidad que por principio son insuperables.

Pudiéramos decir, por tanto, que la óptica instrumental es una ciencia absurda, que trata de hacer instrumentos perfectos yendo en contra de sus propios principios, lo que acarrea, como es lógico, la natural penitencia.

Es cierto también que consigue instrumentos cuya calidad de imagen nos asombra por su bondad, pero en general con trampa; porque desde que el proyectista comienza a hacer un instrumento, en todo instante le preside una idea fundamental: engañar al observador, engañar al ojo.

Mas para que este engaño pueda producirse es menester conocer bien al sujeto engañado al objeto de atacarle en sus puntos flacos. Esto ha hecho que los estudios fisiológicos sobre el ojo, a los que en su día prestó gran contribución nuestro compatriota Cajal, como hoy los presta la relevante escuela de Optica fisiológica creada por José María Otero, junto a los correspondientes a la sicología de la percepción visual, hayan sido y sean en la actualidad objeto de gran preocupación, y también que se hayan reali-



zados profundos estudios sobre el comportamiento de los sistemas ópticos a fin de compaginar las posibilidades del instrumento con las debilidades del observador.

Un ejemplo sensacional de engaño de tipo psicológico lo tenemos en el cine. Durante mucho tiempo se ha perseguido la realización del cine en relieve sin éxito, hasta que E. Chretien hizo el "cinemascope". Se sabe que el ojo en grandes extensiones no ve las cosas planas, sino curvas, como ocurre con la bóveda celeste, el horizonte, etc. También cuando miramos a panoramas extensos nuestro campo visual es más amplio en sentido horizontal que vertical, y que cuando miramos a una escena amplia vemos una zona bien enfocada y el resto con borrosidad. Pongámosle pues al ojo un cine con amplia pantalla rectangular curva, enfoquemos de un modo especial la parte de la pantalla donde se produce la escena que reclama la atención del espectador y ajustemos el sonido de modo que proceda del punto de la pantalla donde parece que debe producirse, la sensación de relieve será extraordinaria.

Otros engaños tienen su fundamento en la anatomía, en el sentido de ver hasta qué punto el ojo es capaz de discernir detalles debido a la granularidad de su retina. La retina es como un mosaico de terminales de células nerviosas, y dos estímulos que caigan dentro de la misma pieza, no los percibiría el ojo sino como uno sólo. Si las manchas que de un punto produce un instrumento en su imagen son más pequeñas que las piezas del mosaico, el ojo encontrará al instrumento perfecto, si son mayores considerará que la imagen es borrosa. Algo análogo pudiéramos decir de las cámaras fotográficas; éstas serán de buena calidad en el discernimiento de detalles si el proyectista consigue que la mancha imagen puntual sea menor que el grano de la emulsión. Todo lo cual produce un gran alivio en el límite de afino del proyecto.

Históricamente, debido al mayor desarrollo de la óptica geométrica, los instrumentos se hacían sin más que reducir las aberraciones geométricas al mínimo posible, y como los campos y aperturas de aquellos antiguos instrumentos eran extraordinariamente pequeños, las aberraciones prácticamente se anulaban. Los aparatos mayormente en uso eran los telescopios que tenían exigencias mínimas, y entonces la imagen de una estrella aparecía como una mancha originada casi exclusivamente por los fenómenos de difracción, cuya distribución de luz podía calcularse a priori teóricamente. Y como quiera que al observar estrellas la única que importaba era que los instrumentos tuvieran buen poder resolutivo para poder ver separadas estrellas angularmente muy próximas entre sí, comenzó a tomarse como parámetro único que respondiera de la calidad de la imagen el poder resolutivo.

La situación la resume L. E. Howlett<sup>3</sup> en las siguientes palabras: "La resolución en ausencia de aberraciones vino a ser considerada como la propiedad intrínseca de la geometría del sistema —y añade— fue una desgracia que esta manera de pensar se convirtiera en hábito, cuando había que

3 L. E. HOWLETT. — *Optical Image Evaluation*. N. B. S. Circ. 526 (1954).



prestar atención a los objetivos fotográficos en los que las imágenes están limitadas por las aberraciones residuales".

El problema, de todos modos, se va perfilando y aparecen delimitadas dos cuestiones: por un lado la calidad de la imagen y, por otra parte, la situación de la mejor imagen, siendo clamor unánime por parte de los instrumentistas que estas cuestiones se resuelvan en función de las aberraciones geométricas.

En el aspecto de la calidad, como acabamos de decir, en principio se tomó el poder resolutivo como único factor determinante, lo cual no dejaba de ser criterio operante cuando los instrumentos se utilizaban para observar objetos puntuales y debido a las pequeñas exigencias de campos y aperturas estaban prácticamente corregidos de aberraciones, entonces el criterio de Lord Rayleigh era suficiente. Cuando estos parámetros fueron ampliándose se vio que la presencia de aberraciones modificaba la estructura de la mancha reduciendo la concentración de luz en el disco central de la difracción y aumentándola en los anillos. En 1894, a la vista de estas circunstancias, vino a tomarse como medida de la calidad de la imagen el número de Strehl, definido por el cociente entre la intensidad luminosa en el centro de la mancha cuando existen aberraciones, y la intensidad en el instrumento ideal de igual apertura.

En 1919, Conrady<sup>4</sup> publica los primeros trabajos sobre la distribución de luz en la imagen en presencia de pequeñas aberraciones. Lo que se obtuvo de provecho con ello lo refleja un comentario del ruso G. G. Sliusarev<sup>5</sup> en 1933, quien dice "El estudio experimental de la dependencia entre el poder resolutivo y las aberraciones geométricas de los sistemas, presenta una grave dificultad y hasta hoy no ha sido efectuado, aunque de ello pudieran derivarse resultados importantes para el cálculo. A fin de que la prueba de la calidad de la imagen producida por instrumentos ópticos ya contruidos pueda dar un resultado bien determinado e indiscutible, es necesario establecer las características en base a las cuales se pueda apreciar el sistema no sólo del lado cualitativo sino también del cuantitativo. Tales características deberán consentir una valoración numérica de la propiedad más importante y necesaria de un sistema óptico. Aun cuando no existen hasta hoy criterios de tal suerte y general aceptación, es indudable que uno de los más importantes lo suministra el poder resolutivo. —Y añade— aunque ello podría ser calculado en teoría, los cálculos sin embargo son insufribles".

De todo ello saca como consecuencia que un juicio definitivo sobre la bondad de la imagen de un instrumento solamente puede darse por la experiencia sobre un ejemplar construido.

Como se ve, en esta época se siguen haciendo instrumentos por método de tanteo, desechando aquellos que después de contruidos no produzcan una imagen de calidad deseable. Pero el criterio sigue aferrado al poder resolutivo para objetos puntuales como único factor determinante de la calidad.

4 A. E. CONRADY. — *Monthly Notices*, p. 575 (1919).

5 G. G. SLIUSAREV. — *Calcolo dei sistemi ottici* (Trad. italiana).



En el aspecto de los objetos puntuales para el caso de pequeñas aberraciones se ha progresado hasta el límite y pudiéramos decir que existe ya un cuerpo de doctrina que da a priori toda la respuesta del instrumento, incluso se ha logrado modificar la mancha imagen por medio de la apodización, introducida por Couder y Jaquinot, consistente en la supresión de los anillos de difracción.

El estudio de la relación que existe entre los fenómenos de difracción y aberraciones con la forma y tamaño de la mancha imagen, así como su influencia en la distribución de luz dentro de la misma, no ha recibido la misma atención por parte de los investigadores desde los comienzos de la Óptica hasta nuestros días. Mientras existe un cuerpo de doctrina que nos permite conocer la influencia de la difracción, no podemos afirmar lo mismo en lo que se refiere a las aberraciones, aun sabiendo que la descripción de la mancha imagen en función de las aberraciones que afectan al sistema es lo que determina el comportamiento óptico de muchos instrumentos y, por lo tanto, constituye una de las grandes aspiraciones de todos aquellos que están interesados en la óptica instrumental.

En confirmación de ello dice G. Kuwara en 1955<sup>6</sup>: "Para un sistema ideal, libre de aberraciones, la distribución de luz en la imagen de un punto luminoso ha sido resuelta teóricamente por la óptica ondulatoria. Sería muy deseable el tratar de una manera análoga un sistema con aberraciones, esto es, encontrar la relación entre la distribución de luz en la imagen y las aberraciones del sistema expresadas geométricamente, puesto que la mayor parte de los problemas de la Óptica de las lentes, tales como la calidad de la imagen, localización del plano de mejor imagen, etc., están relacionadas con el carácter de esta distribución de luz en el punto imagen".

Como se ve, en nuestros días continúa el divorcio entre los proyectistas de instrumentos y los teóricos de la imagen respecto a su calidad y situación, y aunque el problema de los objetos puntuales, está bastante adelantado, el de los objetos extensos sigue en pie.

El objeto extenso se caracteriza por estar formado por zonas de claridad y color diferentes. Aun prescindiendo de la coloración a fin de no complicar el problema, para llegar a definir la calidad de la imagen, que como se ha dicho depende de la reproducción de contrastes y de la nitidez de líneas, se ha hecho necesario tipificar los objetos y se ha venido a tomar como objeto tipo el formado por bandas paralelas de igual anchura alternativamente claras y oscuras (test de Foucault).

Si en el objeto estas barras son blancas y negras, de contraste unidad, y bordes nítidos, en la imagen aparecerán grises oscuros los negros y grises claros los blancos, es decir que se produce una disminución del contraste. Los bordes nítidos de las barras se suavizan, estableciéndose en ellos un gradiente de luminosidad, cuyo valor numérico se toma como medida de la nitidez. Finalmente, si el número de barras por unidad de longitud aumenta, el contraste entre ellas puede reducirse tanto que en lugar de barras se vea una playa gris. La distancia mínima entre las barras para que se vean como tales da una medida numérica del poder resolutivo.

6 GORO KUWARA. — J. O. S. A. 43 (1953) y 45 (1955).



Pero ¿cómo saber a priori, o en cualquier etapa del proyecto de un instrumento cómo van a suceder estas cosas en la imagen?

En los últimos años, como en toda la Física, se ha llegado en este aspecto a resultados teóricos de extraordinaria profundidad y complicación. Afortunadamente el desarrollo de los métodos de cálculo electrónico ha permitido llevar a cabo los estudios necesarios.

Entre los pioneros en estos trabajos debemos citar a Duffieux<sup>7</sup> que introduce la transformada de Fourier y puede decirse que ello es la base de partida de todos los estudios modernos, en los que han destacado, Wolf en Norteamérica, H. H. Hopkins y Linfoot en Inglaterra, Miyamoto en Japón y Marechal y Françon en Francia.

Gracias a esta introducción de la transformada de Fourier se pueden obtener una relación entre el reparto de claridades en el objeto y la correspondiente de la imagen por medio de operaciones de convolución. A tales efectos se descompone el objeto en un sistema de armónicos de distintas frecuencias y orientaciones (frecuencias espaciales). El sistema óptico al transmitirlos actúa sobre ellos con un factor de atenuación que depende de su frecuencia y orientación. Estos armónicos transmitidos y atenuados componen la imagen, dándonos su reparto de luz y contrastes y, por tanto, también la nitidez y el poder resolutivo en un plano determinado.

Planteado así el problema, se observa que a medida que aumenta la frecuencia de los armónicos, aumenta fuertemente el factor de atenuación, llegándose a una frecuencia de corte por encima de la cual el sistema ya no transmite. Viene así a comportarse un sistema óptico como un filtro electrónico de paso de baja, y esta unificación de los problemas electrónicos y ópticos ha permitido introducir en la Óptica instrumental la teoría de la información, en cuyos trabajos se ha distinguido Gabor. La función de atenuación respecto a las frecuencias espaciales es la llamada "función de transmisión óptica" (transfer function), y aunque todavía no ha dado sus frutos de aplicación práctica, se tiene gran esperanza en sus posibilidades.

Pudiéramos, pues, decir que esta forma de operar constituye el último avance de la cuestión en la determinación apriorística de la calidad de la imagen en un plano.

Pero, por otra parte, los cultivadores de la óptica geométrica intentan también resolver estos problema a su modo, y entre ellos merece citarse a Herzberger<sup>8</sup> quien con su "spot diagram", estudiando el reparto de los impactos que los rayos que atraviesan la pupila de un instrumento producen alrededor del punto imagen, halla una distribución de luz muy semejante a la que dan teorías más acabadas. Ciertamente que no es tan exacta, pero tiene al menos para el calculador la ventaja de que la obtiene con el mismo material con que lleva a cabo la corrección del sistema.

En el año 1961, sobre esta problemática, todavía escribe Miyamoto<sup>9</sup>: "Cuando los proyectistas tratan de aplicar estos útiles resultados al cálculo

7 P. M. DUFFIEUX. — *La integral de Fourier et ses applications a l'Optique*. Besançon, 1946.

8 M. HERZBERGER. — *Modern Geometrical Optics*. Interscience (1958).

9 K. MIYAMOTO. — *Progress in Optics*. I, 33. North Holl., 1961.



de sistemas, encuentra un gran obstáculo, las recientes investigaciones sobre la formación y evaluación de la imagen dependen de la Óptica ondulatoria, mientras que los calculadores acuden a la óptica geométrica según su vieja tradición, teniendo buenas razones para ello entre otras por la comodidad de cálculo. Por estas razones la relación entre los dos métodos ha permanecido oscura cuantitativamente y el cambio de ideas entre los seguidores de unos y otros es más bien insatisfactoria".

Y en el año 1960, escriben Françon y Marechal<sup>10</sup>: "La evolución de la mancha de difracción en presencia de aberraciones es un problema complejo; se pueden emplear para estudiarla desarrollos en serie cuando las aberraciones son pequeñas, o asintóticos cuando son grandes, pero estamos desprovistos de medios para estudiarlas cuando las aberraciones son intermedias".

En concreto, no estamos mucho mejor que al principio. Cuando las aberraciones son pequeñas, manda la difracción y la teoría escalar hecha en 1864 (hace un siglo) por Kirchhoff es suficiente. Cuando son grandes, en las grandes aperturas, es la óptica geométrica quien suministra los elementos de juicio. En el paso intermedio, que es el grave, no sabemos a qué atenernos.

Con todo, el progreso es enorme y no cabe duda de que tarde o temprano, más bien temprano, se resolverá el hallar las características físicas de la imagen en un plano. Pero aun en este supuesto cabe todavía hacer la pregunta que nos hicimos en principio. ¿Cómo se compagina esto con la sentencia del último juez, el ojo? De ello parece que nadie se preocupa en principio.

Nosotros en nuestras modestas investigaciones llevadas a cabo en Zaragoza, en colaboración con Merino, Valdés, Arias e Yzuel, hemos tratado de sondear el ojo para ver cuál es su respuesta ante una imagen aberrante tanto en instrumentos fotográficos como telescópicos, y hemos encontrado sistemáticamente que el ojo encuentra su mejor imagen donde menos lo podíamos esperar; en el caso de sistemas astigmáticos, para aperturas medias, y grandes, el ojo encuentra que un instrumento produce su mejor imagen en el lugar donde las deformaciones de la imagen de un punto son nada menos que los segmentos de recta correspondientes a las imágenes sagitales, y en el tren de cálculo de sistemas que lleva nuestro entrañable colaborador J. R. F. Moneo, se calcula sobre estas bases.

### LA TEORIA DE IMAGENES EN EL FUTURO

Como hemos visto, la teoría y valoración de las imágenes ha perseguido hasta ahora fundamentalmente resolver el problema para instrumentos visuales y cámaras fotográficas tal como sus cometidos se han desarrollado en el pasado.

El futuro, ya presente, reserva, sin embargo, importantes tareas que atacar, cuando todavía no se han acabado los problemas anteriores.

10 A. MARECHAL y M. FRANÇON. — *Difraction*. Rev. D'Opt. (1960).



En primer lugar nos plantea problemas importantes la utilización de los *laser*. Estas fuentes de luz de alta intensidad permiten hacer fotografías con exposiciones mucho más cortas que con las corrientes lámparas de destello, lo cual se estima que ha mejorado la calidad de las imágenes en un factor diez. Por otra parte, el hecho de que su luz sea totalmente coherente, plantea los inevitables problemas a la teoría difraccional, puesto que toda la luz procedente de objetos extensos puede interferir, ya que aunque proceda de puntos muy distantes la coherencia está asegurada para pulsos de  $10^7$  m. de longitud.

La Óptica con fibras está haciendo progresos formidables. En la actualidad se hacen fibras cuyo diámetro es menor que el de la mancha de difracción con aparatos clásicos de apertura relativa equivalente. Por otra parte, en las propias fibras se puede producir efecto *laser* obteniéndose así imágenes con una impresionante amplificación de luminosidad, lo que sin duda planteará serios problemas a la teoría de las imágenes.

Los sistemas de telemunicación del futuro, sobre todo los espaciales, parece que vuelven sus ojos hacia los métodos ópticos por medio de *lasers* y diodos de inyección en sustitución de radares y otros métodos basados en ondas medias y cortas. La recepción planteará nuevos problemas a la citada teoría.

Los receptores físicos intentan desplazar en primera instancia al ojo para evitar lo que pudiera considerarse como una tara psicológica, y con ello la respuesta incierta. Por otra parte las placas fotográficas van disminuyendo el tamaño de su grano, sin menoscabo de la sensibilidad.

Así mismo, los modernos sistemas con óptica de infrarrojo y ultravioleta dotados de detectores de imagen fluorescente son otros tantos ejemplos de tareas que requieren atención.

Por si esto fuera poco, todavía ni siquiera se ha pensado en introducir en las mencionadas cuestiones instrumentales el concepto cuántico de la luz por considerarse hasta ahora inoperante, pero no cabe duda de que todo ello impedirá descansar a la Óptica, esta vieja ciencia que, como ciencia de la luz ha ido alumbrando constantemente los senderos por los que ha discurrido la Física en su progreso.

Con estas consideraciones hago punto final para que pueda hacer uso de la palabra mi querido colega Prof. Juan Cabrera, a quien agradezco vivamente la gentileza de apadrinarme en este solemne acto.

HE DICHO



## DISCURSO DE CONTESTACION

Por el Académico

EXCMO. SR. D. JUAN CABRERA Y FELIPE

*Excmo. Sr. Presidente;*

*Excmos. e Ilmos. Sres.;*

*Señoras y señores:*

Con una gran satisfacción paso a ocupar esta Tribuna, y ello por dos razones fundamentales. En primer lugar por representar en estos momentos a la Academia de Ciencias Exactas, Físico - Químicas y Naturales de Zaragoza, cuya Directiva me ha honrado encargándome dé, en su nombre, la bienvenida al nuevo Académico en este solemne acto de recepción. En segundo lugar porque el nuevo Académico es el Dr. D. Justiniano Casas Peláez, con quien me unen grandes y antiguos lazos de amistad y afecto con anterioridad a su llegada a la Cátedra de Optica de la Facultad de Ciencias de esta Universidad.

Habéis oído al nuevo Académico que viene a ocupar el puesto que dejó vacante nuestro querido compañero el Prof. Velasco, por haberse marchado a Barcelona en el año 1952. Fue entonces cuando comenzó mi estrecha amistad con el Prof. Casas; Velasco me habló de él como posible Catedrático de Zaragoza y con frecuencia, al hacer algún viaje rápido a Madrid, acudía por el Instituto de Optica "Daza de Valdés", del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, para entrar en relación con él a través de su maestro, mi buen amigo el Prof. D. Armando Durán, e inmediatamente me di cuenta de su gran interés por la enseñanza, pues es un sentimiento que resalta espontáneamente en todas sus manifestaciones y en la conversación más trivial, y además adquirí el convencimiento de que si llegara a ganar las oposiciones, como era muy posible, no sería un Catedrático de paso, sino para dedicar su vida a nuestra Facultad. Posteriormente tuve la suerte de formar parte del Tribunal de sus oposiciones y como todos le conocéis bien, convendréis conmigo que puedo sentirme satisfecho de haber contribuido desde aquel puesto en el Tribunal para actuar con justicia y proponerlo para Catedrático de Optica de esta Universidad.

Toda su vida y amplia formación cultural ha estado orientada a lo que hoy es su plena actuación universitaria. Nacido en Granucillo de Vidriales, provincia de Zamora, el 25 de febrero de 1915, cursó los estudios del



Bachillerato de Ciencias como alumno libre del Instituto de Palencia, desde 1925 a 1931 e inmediatamente hizo la carrera del Magisterio Primario en su Grado Profesional en la Escuela Normal de Palencia, de 1931 a 1935. Su vocación decidida por la enseñanza quedó bien de manifiesto, pues se dedicó de lleno, sin pérdida de tiempo, al Magisterio Primario en activo hasta 1944, excepto en los tres años de nuestra guerra, por haberse incorporado al Ejército Nacional.

Juntamente con el ejercicio de su magisterio, realizó en la Universidad de Madrid los estudios de la Licenciatura en Ciencias Exactas en el intervalo 1940-1945, obteniendo el Grado de Licenciado con la calificación de Sobresaliente y cursó los estudios correspondientes al Doctorado entre 1945 y 1947, ayudándose en sus estudios durante estos dos años con las enseñanzas del Bachillerato de Ciencias en Colegios reconocidos. Entonces entró en relación con el que habría de ser su maestro, orientador y asiduo animador, el Prof. Dr. D. Armando Durán y como Ayudante suyo en la Cátedra de Óptica de la Facultad de Ciencias de Madrid, desde 1947 a 1951. completa sus estudios para Licenciarse en Ciencias Físicas, y en ese año de 1951 presenta su tesis doctoral y adquiere el título de Doctor en Ciencias Físicas con la calificación de Sobresaliente, mediante un trabajo sobre "Estudio teórico de los sistemas ópticos con cuádricas de revolución centradas"; así entra de lleno en lo que ya ha de ser su orientación futura.

Su labor investigadora la comienza en 1947 como Becario en el Instituto de Óptica, en la Sección de Óptica Geométrica y Cálculo de Sistemas. En los años 1949 a 1951 es Colaborador en el Instituto "Leonardo Torres Quevedo", de Física Aplicada, y en el período 1951-1954 Investigador en el Instituto de Óptica y Ayudante del Departamento Técnico del mismo. De esta época son sus primeros trabajos de investigación, entre los cuales creemos se deben destacar: "Distribución de la luz en la imagen de un sistema óptico afectado de aberración esférica de tercer orden", en colaboración con C. Morais; "Proyecto de máquinas para el tallado de las cuádricas de revolución por medio de útiles planos"; "Métodos para el contraste de fabricación de superficies cuádricas", estos dos en colaboración con A. Durán; "Sobre la corrección de objetivos de microscopio" y "Esquemas de cálculos ópticos para máquina de calcular", los dos en colaboración con J. Barcala; todos estos trabajos publicados en los Anales de Física y Química en los años 1948-53.

En este período realizó su gran labor en el cálculo de Instrumentos de Óptica, en cuyo campo aparece como un especialista destacado, debiendo llamar la atención de las grandes dificultades que estos trabajos llevan consigo por el secreto de los técnicos y hemos de citar entre sus proyectos ópticos: "Objetivo Apocromático para Resolvímetro", fabricado por LTIEMA; "Estereoscopio para Fotogrametría", fabricado por el Instituto "Torres Quevedo"; "Microscopio Estereoscópico binocular", con aumento variable de 15 a 105 aumentos, fabricado por LTIEMA y Torres Quevedo; "Telémetro estereoscópico de 3,5 m de base", también fabricado por LTIEMA; "Telémetro de coincidencia de 0.70 m de base", construido por el Taller de Precisión de Artillería; "Visor para cañón antiaéreo con visión



binocular" y otro "Visor de fusil de asalto con 4 aumentos", ambos fabricados por ENOSA; "Optica de un Oftalmoscopio", "Optica de un Colorímetro de Wright", "Objetivo de Proyección Petzval", "Seis objetivos de proyección tipo Taylor" y "Anteojo astronómico para laboratorio de cuatro aumentos", todos ellos construidos por el Instituto de Optica "Daza de Valdés"; "Astrolabio de prisma catadiótrico" para el Observatorio de San Fernando, fabricado por LTIEMA, y otros de menos importancia y algunos proyectos que no llegaron a construirse.

Con este bagaje llegó el año 1954 y con él las oposiciones del Dr. Casas a la Cátedra de Optica de nuestra Facultad de Ciencias, a las que ya hice referencia, y por ello no les extrañará que no encontrara dificultad alguna; sus ejercicios fueron de gran brillantez y dentro de muy pocos meses se cumplen los doce años desde que tuvimos la suerte de verlo en nuestra Facultad, para con su inteligencia, entusiasmo y laboriosidad contribuir al prestigio de la misma.

Incorporado el Dr. Casas a la Cátedra no sólo emprende de modo decidido su trabajo diario, sino que también busca los medios para llegar a constituir un grupo de colaboradores con quienes llevar a cabo un conjunto de trabajos de investigación y formar una escuela, cuya realidad es ya un hecho en estos momentos. Inmediatamente fue nombrado Jefe de la Sección en Zaragoza del Instituto de Optica "Daza de Valdés". En 1955 publica en la Revista de la Universidad de Zaragoza un trabajo con el título "Consideraciones sobre la Curvatura de Campo de los Instrumentos ópticos" y para perfeccionar sus conocimientos marcha en la primera quincena de julio a la Casa Leibold, en Colonia, y asiste a los cursos prácticos de laboratorio sobre la enseñanza de la Física, bajo la dirección del doctor Hetch y termina ese verano en el Instituto de Optica de París trabajando, bajo la dirección del Dr. Penciolelli, sobre el cálculo de combinaciones ópticas y por último el verano de 1960 acude al Instituto de Química-Física de la Universidad de Zurich, para iniciarse en la Separación de isótopos por termomodifusión, siguiendo las enseñanzas del tristemente fallecido profesor Clusius. En 1957 se le nombra Jefe del grupo de trabajo subvencionado por la Junta de Energía Nuclear para el estudio de Espectrometría de masas y separación de isótopos en Zaragoza, y con los medios recibidos consigue proyectar y construir en nuestra Facultad el primer espectrómetro de masas que funciona en España. Por último al crearse en 1960 el Departamento de Física del Consejo Superior de Investigaciones Científicas en Zaragoza, es nombrado Jefe de su Sección de Física experimental.

Junto con su función docente en la Cátedra de Optica, ha explicado durante varios años un curso de Física General, y además ha desempeñado cursos de Física Matemática y de Física Atómica, así como cursos monográficos de Doctorado sobre "Colorimetría", "Cálculo de sistemas ópticos", "Métodos de Hamilton en Optica Geométrica", "Sistemas ópticos prismáticos", "Espectrometría de masas", "Separación de isótopos", "Sistemas fotográficos y de proyección" y otros.

Su gran labor de investigación queda bien de manifiesto por el número de tesis doctorales que se han presentado bajo su dirección en estos años:



La del Prof. Lacasta, "Oculares de cuatro componentes, tipo 2-2", y la del doctor Arasti, "Aplicaciones ópticas de los Ovalos de Descartes", fueron las dos primeras publicadas en la Revista de esta Academia en 1958. A continuación y también bajo su dirección, han conseguido sus títulos los doctores Barcala, F. Merino, J. F. Moneo, S. Valdés, R. García, C. Cuevas y J. L. Arias, sobre temas específicos de Óptica y J. M. Savirón: "Sobre la Teoría de la separación de isótopos por Termodifusión", M. Quintanilla: "Termodifusión en sistemas binarios de isótopos de neon, metano y mezclas de ellos" y D. González: "Difusión térmica de mezclas multicomponentes".

Aparte de esta colección de tesis, ha publicado varios trabajos entre los cuales merecen destacarse: en colaboración con Lacasta y Moneo uno "Sobre la corrección del Coma", en los Anales de Física y Química de 1961, y otro "Contribución al Cálculo de Combinaciones ópticas" que apareció en la Revista de esta Academia en 1962; en colaboración con Merino y Valdés un trabajo presentado al VI Congreso Internacional de Óptica en Múnic en 1962 con el título "Best Visual Image and Maximum Resolving Power in a System affected by astigmatism, with residues of spherical aberration and Coma"; también ha publicado en la Revista de esta Academia de 1964, con María Josefa Izuel, el trabajo "Dimensionado de prismas ópticos" y en los Anales de Física y Química de 1964 publicó dos artículos en colaboración con Savirón y Quintanilla, sobre difusión térmica y también presentaron a la Tercera Conferencia Internacional para uso pacífico de la energía atómica, celebrada en Ginebra en el mismo año, el trabajo "The production of Stable Isotopes in Spain. Thermal Diffusion".

Con esta rápida exposición de la personalidad del nuevo académico y de la labor científica por él desarrollada, creo han quedado destacadas con suficiente claridad los sobrados méritos de nuestro nuevo compañero de Academia, demostrando que ésta ha tomado con completa justicia la decisión de llamarlo a su seno; sin embargo considero de interés referirme al trabajo que nos ha presentado con el título "Formación y valoración de la imagen óptica" y que hemos oído con tanta satisfacción.

Sin que pueda extrañarnos después de lo manifestado y como consecuencia de su absoluta dedicación a estas tareas, es notorio que este trabajo representa un conocimiento profundo de la cuestión. Como se ve, los estudios del Prof. Casas no son precisamente lo que pudiéramos llamar diletantismo científico, ya que él persigue en todo momento hacer una verdadera investigación científica que desemboque inmediatamente en resultados prácticos.

Cuando un investigador emprende esta u otra tarea, una gran ayuda para él son los estudios hechos por los demás; en una palabra la bibliografía. Pero ocurre en esto, como en todo, que el contenido de las publicaciones ayuda muy poco a resolver problemas prácticos, porque cuando las investigaciones conducen a resultados aplicables directamente a la mejora técnica, se guardan en el más profundo secreto, como ya hemos dicho. Así ocurre que las leyes del electromagnetismo son conocidas desde hace más de un siglo, pero cabe preguntar ¿cuántas industrias en el mundo fabrican motores eléctricos de alta calidad? Los instrumentos ópticos se proyectan aplicando una ley tan sencilla como la de la refracción que todos hemos



conocido a los catorce años, pero cabe la misma pregunta: ¿Es suficiente este conocimiento fundamental para hacer una buena cámara fotográfica?

El nuevo académico nos ha presentado con admirable claridad un profundo problema cuya solución es crucial en el progreso de la Óptica instrumental, pero no se deduce de su discurso la importante contribución que con sus estudios ha prestado al desarrollo de la Óptica en nuestro país.

Ha sido creencia general en el proyecto de sistemas ópticos que el observador humano encontraba la mejor imagen en el lugar donde ésta tuviera la mayor simetría, tomando por tanto como situación teórica de ella el punto intermedio entre las focales sagital y tangencial. El descubrimiento hecho por el Prof. Casas y sus colaboradores de que se encuentra donde teóricamente tiene mayor disimetría nos permitimos calificarlo de sensacional.

Pero su contribución no ha parado en encontrar esta respuesta en el comportamiento del ojo, sino que ha ido más allá buscando un método físico de valoración que con independencia de la intervención de factores psicológicos pudiera ser manejado por leyes matemáticas exactas. Los estudios interferométricos llevados a cabo han puesto de manifiesto así mismo que existe una correlación bien determinada entre las valoraciones visual e interferométrica de la imagen, encontrándose que la mejor imagen visual corresponde a un enfoque para el cual la onda emergente tiene el mayor porcentaje de onda plana, lo que se encuentra precisamente en las proximidades de la focal sagital. Y como quiera que en los medios isótropos las trayectorias ortogonales de las congruencias ópticas coinciden con las superficies de igual fase de la Óptica física, ello pone de manifiesto la existencia de una importante coyuntura para conducir el proyecto de instrumentos por sencillos métodos geométricos obteniendo resultados fácilmente traducibles a términos ondulatorios.

Otra importante faceta de su dedicación científica en la misma línea de trabajo ha sido la labor desarrollada sobre cálculo de las combinaciones ópticas. El Prof. Casas comenzó con sus colaboradores corrigiendo las aberraciones por el tradicional método de tanteo, pero pronto su espíritu científico le llevó al convencimiento de que debía de existir una sistemática. Encontrarla ha sido su mayor preocupación, y, en efecto, después de improbables trabajos y con medios de cálculo que en la actualidad pudiéramos calificar de rudimentarios, fue hallado que las aberraciones exactas guardan una relación lineal con las sumas paraxiales del tercer orden en tanto no se superen ángulos de incidencia que de suyo son prohibitivos en los instrumentos reales; por tanto una ley de general aplicación de la que deriva un considerable ahorro económico en la confección de proyectos.

En otros aspectos científicos el nuevo académico, ya habéis visto por lo dicho en la primera parte de mi intervención, ha desarrollado con su equipo de colaboradores otros trabajos también dignos de mención, demostrando su gran capacidad en los diferentes dominios de la Física.

Pudiera continuar enumerando y glosando la importante obra científica y didáctica del Prof. Casas, pero debo terminar aquí, entre otras razones, porque estais esperando con ansias el momento en que nuestro ilustre Pre-



sidente haga la imposición de la medalla al nuevo compañero de Academia. Al darte la bienvenida a esta Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza, sé que estás convencido del honor que ello supone y también de la responsabilidad que has adquirido al aceptar y por ello quiero que mis últimas palabras sean para desearte el éxito pleno en tu futuro, continuando la gran labor que has venido realizando y confirmando la ilusión que en ella tiene siempre este compañero que te abraza con todo afecto.



## LOS JOVENES PRE Y POSTGRADUADOS Y LA INVESTIGACION MATEMATICA EN ESPAÑA

Por el

ILMO. SR. D. JUAN SANCHO DE SAN ROMÁN

*Excelentísimos e Ilustrísimos Señores,*

*Señores Académicos,*

*Señoras y Señores:*

Mis primeras palabras tienen que ser de gratitud. Porque entre los diversos sentimientos que me confunden en este momento, sobresale el del agradecimiento. Gracias a Dios, que me ha dado vida y protección para llegar hasta aquí. Gracias a Vds., señores académicos y amigos míos, por la distinción con que me honran al quererme admitir en el seno de esta ilustre Academia. Gracias también, a todas y cada una de las personas que me han ayudado, científica o afectivamente, a llegar a este punto de mi vida. Muchas de ellas no lo sabrán, porque a menudo, se ayuda o se ama, sin darse cuenta uno mismo. Mis familiares, mis profesores, mis amigos, a todos recuerdo con cariño y gratitud en este instante, y a todos quisiera nombrar para que lo supieran. No me atrevo a intentarlo, pues larga sería la lista. Pero cada uno de ellos, puede estar seguro de que la lista está completa en mi corazón, y su nombre, impreso en ella con la profundidad que marcó su amor o su amistad.

También quiero expresar, la gran satisfacción que me produce el ligarme más a Zaragoza, con el ingreso en su Academia de Ciencias. Ello tiene para mí una particular emoción, por el hecho de que soy la mitad zaragozano. Mi padre nació en Calatayud, y se educó aquí, en cuya Facultad hizo la Licenciatura de Ciencias Químicas. Nombrado pronto catedrático del Instituto de Toledo, allí se afincó, y enseñó durante 43 años. Yo quisiera, dentro de mis modestas posibilidades, pagar a Zaragoza, en mi calidad de toledano, y con la misma moneda, al menos parte del trabajo que un zaragozano dedicó a Toledo.

Tengo el gran honor de venir a ocupar el puesto de académico que dejó vacante D. JOSÉ RIUS Y CASAS, uno de los fundadores de la Academia. Este ilustre Profesor nació en Barcelona el 27 de marzo de 1867. En 1883 terminó el Bachillerato y en 1887 la carrera de Ciencias Físico-Matemáticas, ambos con Premio Extraordinario. En 1889 se graduó de Doctor con una tesis sobre funciones elípticas, también con la máxima calificación.



Simultáneamente con los estudios de Doctorado, se preparaba para oposiciones al Observatorio Astronómico de Madrid, en las que obtuvo plaza; y al poco fue nombrado Auxiliar de la Facultad de Ciencias de aquella Universidad. En 1892 dejó el Observatorio, para incorporarse a una cátedra que ganó, con el número uno, en la Escuela de Artes y Oficios de Villanueva y Geltrú, pasando tres años después a la de Madrid.

Fue catedrático de Universidad en 1897, ganando por oposición una cátedra de la Facultad de Ciencias de Granada, y al año siguiente vino ya por concurso a Zaragoza, donde explicó durante 39 años los cursos primero y segundo de Análisis Matemático. Algunos de sus alumnos, felizmente presentes, podrían mejor que nadie elogiar sus grandes cualidades de profesor entregado por entero a su tarea. Destacaré el hecho de que diariamente dictaba problemas, que más tarde corregía y calificaba. Y no se crea que el número de alumnos era de un cifra, pues en aquel entonces, los dos primeros años de Exactas y Químicas eran comunes.

Su vocación y entusiasmo por las matemáticas, le llevó a fundar la «Sociedad Matemática de Zaragoza», revista trimestral, que con «El Progreso Matemático» de D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO, son antecesores que debiéramos resucitar, con la creación de un descendiente. El Prof. RIUS publicó entretanto multitud de trabajos, en los que destacan: «Teoría formal de los objetos complementarios», «Cálculo del período de ciertas funciones decimales», «Caracteres formales de la igualdad» y «Sobre ciertos sistemas incompletos de restos con relación a un módulo».

Cuando se fundó esta Academia de Ciencias, fue nombrado Vicepresidente de la Sección de Exactas, cargo que desempeñó con gran celo hasta su muerte.

Desearía con toda mi alma, no defraudar a tan ilustre personalidad, como la que me ha precedido en el puesto académico.

## LOS JOVENES PRE Y POSTGRADUADOS Y LA INVESTIGACION MATEMATICA EN ESPAÑA

Cuando uno piensa en elegir tema para este discurso, lo natural es inclinarse hacia un asunto de la especialidad científica que se cultiva. Ello ha sucedido, normalmente, en la mayoría de los casos que me han precedido.

No ha sido así en el mío, y quiero explicar los motivos que me decidieron a considerar el tema, o mejor dicho, los temas de mi disertación. Digo temas en plural, porque claramente son dos: los jóvenes matemáticos y la investigación, si bien no considerados en general, sino en sus relaciones, particularmente las que se refieren al papel esencial, a la influencia decisiva, que tienen aquellos en esta.



En la Ley de Ordenación Universitaria de 1943, y en su artículo segundo, se establecen como funciones propias de la Universidad, entre otras, las siguientes: c) impulsar la investigación científica y preparar para la ulterior dedicación a ella a los que tengan vocación de investigadores; e) difundir la cultura y la ciencia españolas mediante las publicaciones universitarias.

Aunque no lo dijese la Ley, esto es una de esas verdades casi absolutas que acepta como tales todo el mundo.

Pues bien, creo que todos los que profesamos matemáticas en la Universidad, desde el comienzo de nuestra profesión, entre la multitud de preocupaciones, pequeñas o grandes, tenemos una constante, una que puede aumentar o disminuir, pero que está siempre ahí, en el centro de nuestras inquietudes profesionales: ¿porqué en la Universidad española, concretamente en la Facultad donde uno trabaja, los jóvenes licenciados, profesores casi todos, no publican artículos de investigación matemática en la medida de sus posibilidades, de su capacidad y de su número?

La realidad no nos permite, por desgracia, dedicar a esta cuestión el tiempo que se merece, reflexionar hondamente sobre ella, buscar la manera de atacarla. El número de cursos que debemos atender, demasiados en general, con su secuela de preparación de clases, lectura de ejercicios escritos, supervisión de prácticas, representa ya una parte importante de la jornada. Si añadimos el trabajo, necesario de todo punto, de atender a las publicaciones nuevas de interés especial, leer para actualizarse, y llevar adelante una investigación, siquiera sea todo ello en grado mínimo, la jornada totalmente consumida.

En definitiva, cualquier problema que se salga de la tarea diaria insoslayable, por importante que sea, como el que mencionamos, no encuentra nunca cabida en nuestro pensamiento, no tiene la menor oportunidad de que le dediquemos un minuto. Parece increíble cuando se reflexiona sobre este hecho, pero así es.

Dadas estas circunstancias, y teniendo en cuenta que la redacción del presente discurso académico, entraba también en la categoría de las cosas que se desean hacer sin encontrar el cuando, he querido aprovechar la ocasión que se me presentaba: hacer el discurso y a la vez, estudiar un tema, al cual deseaba dedicar hacía tiempo, algo más que unos comentarios rápidos e improvisados, en conversaciones esporádicas con los compañeros.

Alguien puede pensar, con sobrada razón, que en un momento en que la investigación científica está de moda, en que diariamente se habla y se escribe sobre su interés, resulta inoportuno tratar de un asunto, sobre el cual se han dicho ya tantas cosas, que no queda prácticamente nada por decir.

Ahora bien, el tema es tan importante, que cualquier cosa que se diga en su favor, «con oportunidad o sin ella», como escribía S. Pablo, no puede



calificarse de totalmente inútil, por modesta que sea, como la presente, ya que la insistencia dicen que termina por abrir las puertas.

Por otro lado, la enorme mayoría de las manifestaciones en pro de la investigación, se refieren concretamente a la aplicada, e incluso a la «aplicadísima», es decir, a aquella que se tradujera inmediatamente en beneficio económico. No les falta razón a los que opinan, que en un país en vías de desarrollo [1]\*, «no podemos olvidar a la ciencia pura, pero debemos la mayor parte de nuestros recursos a trabajos que rindan inmediatamente al país». Pero sí les falta, en mi opinión, a los que exageran esta postura, y creen que se puede hacer investigación aplicada sin dedicar a la básica una atención proporcional, porque «da la casualidad» que las naciones con grandes conquistas en la investigación aplicada, son también adelantadas en la de ciencia pura.

Otra posición frecuente, que me parece razonable, si no se lleva al extremo, consiste en propugnar que la investigación pura se realice sobre todo en campos cuyos resultados puedan ser útiles a las investigaciones aplicadas en ejecución. En cierto modo, esta ha sido la postura de la matemática rusa en los últimos lustros, con éxitos indudables. Sin embargo, repito que solo me parece admisible con un sentido amplio y de conjunto.

En resumen, como consecuencia del aire económico que se respira, la investigación pura, independiente u orientada, queda así subestimada por los grandes planificadores y de ahí poco ayudada, o quizá con poca eficacia. A esta, no tan de moda como la otra, es a la que quiero referirme. Concretamente, a la investigación matemática en la Universidad, que equivale a decir en España\*.

¿Y porqué especialmente en relación con la juventud? La investigación es tarea de todos, jóvenes y maduros. Pero creo firmemente que no se avanzará con la velocidad que exigen los tiempos actuales, mientras no se incorporen a la tarea todos los postgraduados capaces de realizarla.

Sí, pienso que el problema reside sobre todo, en lo que hagan los jóvenes matemáticos, en ese período que más o menos, podemos fijar entre los veinte y los treinta años.

En primer lugar, ellos representan el número, la cantidad. Y aunque suene bien aquello de: no es cantidad lo que importa sino calidad, la experiencia demuestra que en general, aparecen trabajos de calidad donde hay muchos en cantidad. Pero además, ellos representan también la energía, la vitalidad, el entusiasmo que se necesitan para ponerse rápidamente

\* Las referencias bibliográficas van al final.

\* En un artículo publicado en 1963 [2], el Prof. Vidal Abascal señala que de 68 autores españoles citados en la Revista de recensiones de trabajos «Mathematical Reviews», durante los años 1940 a 1955, 62 eran universitarios. Como dato más reciente, añadiremos que en las Actas publicadas hasta la fecha, de las Reuniones Anuales de Matemáticos Españoles, años 1961 a 1965, de los 55 autores de artículos, al menos 53 proceden de la Universidad.



al día en un asunto e investigar sobre él, antes de que disminuya demasiado aquel vigor. Ellos mejor que nadie, son capaces de calzarse las botas de siete leguas de que nos habla el francés Queneau, que en un artículo apologetico de BOURBAKI (nombre colectivo de los autores de la más famosa enciclopedia matemática contemporánea), escribe: «El tren de la matemática sigue avanzando a gran velocidad, y Bourbaki es las botas de siete leguas que uno debe calzarse para poderlo alcanzar»[3]. En el mismo artículo, el autor destaca el comentario siguiente: «Hacia 1930, algunos jóvenes matemáticos se dieron cuenta del retraso de la matemática francesa, no solo en la enseñanza sino en la investigación. Crearon a Bourbaki, y después de 1945, tres de ellos obtuvieron una medalla Field: Schwartz, Serre y Thom» (la medalla Field en matemáticas es como el premio Nobel en otras ciencias). Por lo demás, esto no es nuevo en la historia de la Matemática, puesto que en ella se observa, con harta frecuencia, que el matemático realiza su obra principal en el período que acabamos de mencionar, e incluso, muchas veces, antes de los veinticinco años.

Pero en fin de cuentas, la razón fundamental de que centremos la cuestión en los jóvenes, es realmente de Perogrullo: si una persona no pone los cimientos y comienza una determinada labor científica en esa época de la vida, algo peor lo hará después. La excepción confirma la regla, y aún en estos casos, es indudable que el retraso inicial supone un handicap jamás recuperable.

Planteado el tema, parece obligado justificar su punto de origen, es decir, mi estimación de que la investigación matemática de los postgraduados, en España, es poca. Bastaría decir que esta opinión es compartida por la mayoría de los científicos españoles, matemáticos o no. Pero como nunca faltan optimistas exagerados, repetiré una vez más lo que han dicho ya, en multiples y recientes ocasiones, voces y plumas más autorizadas que las mías.

Previamente, deseo precisar que, en conjunto, entiendo por investigación matemática no solo aquellas publicaciones en que se obtiene un resultado nuevo, sino también las que dan demostraciones originales e interesantes de cosas conocidas, ó que critican constructivamente trabajos importantes, o que afinan resultados, es decir, todo aquello que aporta una contribución positiva al fondo mundial de los conocimientos matemáticos\*.

No voy a referirme al déficit absoluto de investigación, es decir, al que puede ponerse de relieve cuando se tiene en cuenta la producción económica, industrial y cultural del país, y se compara con la matemática. Esta comparación implicaría considerar, entre otros, los motivos por los cuales el número de estudiantes de Ciencias Matemáticas resulta menor de lo que cabría esperar, y no es mi intención tratar de este asunto. Como

\* Cf. J. M. IÑIGUEZ [11].



ya hice notar desde el principio, solamente quiero referirme al deficit que se manifiesta por ejemplo, cuando se compara el número de páginas que se publican con investigaciones de matemáticos jóvenes y el número de estos que podrían muy bien realizarlas. De nuevo debo disculparme por medir la cantidad de ciencia por un número, como si se tratase de energía eléctrica, pero la verdad es que hay que medirla de algún modo, y esta no me parece demasiado inadecuada.

Pues bien, podemos calcular que en el curso 1964-65, se graduaron en España unos 35 Licenciados en Ciencias Matemáticas. El número de adjuntos y ayudantes de la Sección, que figuran en dicho periodo, no puede cifrarse en menos de 140, la gran mayoría muy jóvenes. Sin embargo, las publicaciones correspondientes suman un número de páginas realmente pequeño. He consultado las Revistas de 1965 que publican casi todos los trabajos matemáticos en España, y contando también como autores jóvenes los que desconozco, sus trabajos no pasan de 10 y las páginas no llegan a 100.

Reconozco que estos últimos datos son aproximados, y puede suceder que se haya publicado algún artículo más, aparte de alguna tesis doctoral, pero creo que ello no modificaría sensiblemente, la enorme desproporción entre el número de postgraduados y su labor investigadora.

Otro dato al respecto, que refuerza el anterior, es que en las cuatro Actas publicadas de las Reuniones de Matemáticos españoles, de los 55 autores de trabajos, no llegan a 8 los menores de 30 años.

Deseo hacer constar, que la situación actual me parece bastante mejor que la que existía hace no muchos años, pero solo en valor absoluto. Con esto quiero decir, que aunque en España avancemos, como los países de nuestra esfera también corren, si no aceleramos lo suficiente para igualar al menos su velocidad, se producirá la paradoja de que avanzaremos, retrasándonos respecto del mundo en que vivimos.

Tras estas breves referencias, que han intentado poner de relieve el déficit en cuestión, volvamos a la pregunta inicial: ¿porqué? Algo y no poco, se ha escrito y hablado sobre sus causas, como parte integrante de las que afectan a la investigación científica en general. No hay duda de que son numerosas y complejas, y pienso que algunas de ellas, desconocidas para mi.

Pero creo firmemente, que el motivo fundamental que se presenta a los ojos de un profesor universitario, es que los jóvenes postgraduados, mejor dicho, el joven postgraduado apto para el oficio de matemático puro, no es alentado ni estimulado por las circunstancias económicas y sociales hacia ese camino, sino que realmente es obstaculizado por las condiciones adversas en las cuales debe vivir varios años, si elige la senda que le señalan sus aptitudes y su vocación.

Otro hecho importante, en cuanto contribuye a retrasar la puesta en



marcha investigadora del recién graduado, es que por lo general, se dedica poco tiempo en la Licenciatura a la educación y formación de las facultades creadoras del alumno. E incluso este tiempo se emplea en proponer con explicación posterior, unos ejercicios que son simple aplicación de la teoría. Resulta inmediato preguntar: ¿Y porqué no se hace algo más profundo en ese orden? Pues principalmente, porque ello exigiría a los alumnos un aumento de trabajo, y por tanto de tiempo, que no podrían atender, debido a lo recargado que está el conjunto de los estudios teóricos de cualquier curso. Y sin embargo, todos sabemos que el aprendizaje científico que se reduce a un profesor hablando, y unos alumnos escuchando o estudiando, es mezquino, y desarrolla bien poco la mente del estudiante. Pero sobre esto, volveremos un poco más tarde.

Con el objeto de comprobar hasta qué punto pueden ser acertadas las anteriores consideraciones, comencé procurando informarme de lo que sucede, en situaciones análogas, en algunos países que están a la cabeza de la investigación matemática mundial. Para uniformar los datos y hacerlos así comparables, he dirigido la atención principal, en torno de los puntos siguientes: 1) Cursos equivalentes a nuestra Licenciatura; 2) En qué medida se educa y fomenta la iniciativa personal y creadora del alumno, especialmente del pregraduado, es decir, en los dos últimos años de la carrera; 3) Qué soluciones económicas se ofrecen al postgraduado apto, que desea dedicarse a la matemática superior, pero que también quiere vivir profesionalmente de ella, en cuanto que es un titulado facultativo; 4) Qué posibilidades de futuro estable tiene dicho postgraduado, en caso de no defraudar.

Obvio parece advertir, que los datos obtenidos representan una aproximación del promedio, pero creo que suficiente para el fin propuesto.

He aquí los datos de Francia, con referencia especial a la Facultad de Ciencias de París:

1) La Licence, equiparable a la nuestra, consta de un curso propedeútico (Álgebra lineal, Cálculo infinitesimal y Física), y cinco certificados (Mat uno, Mat dos, Física, Mecánica y otro). Como cada certificado equivale a dos de nuestras asignaturas, resulta un total de trece, que pueden aprobarse en cuatro años.

2) Las clases prácticas se dedican a ejercicios, aplicación directa de los resultados teóricos, o complemento de estos. Cada quince días se propone un problema extenso a cada clase, se recoge a las tres semanas, y una después se devuelve corregido y se da la solución.

3) El graduado de Licence que desea dedicarse a la matemática superior, debe realizar un cierto número de cursos monográficos del «tercer ciclo» y una tesis, para obtener el título de Doctor tercer ciclo, semejante a nuestro Doctorado. Durante ese tiempo, el graduado distinguido puede ser nombrado assistant (adjunto) que atiende, por ejemplo, a un grupo de



propedeútico, con un sueldo de 1300-1500 F (unas 17.500 pts.), más ayuda familiar. Este cargo no es estable. Si no obtiene el título en un plazo prudencial (cuatro a cinco años), suele ser removido del cargo de assistant, para dar oportunidad a otros.

4) Si consigue el título de Doctor, el claustro de cualquier Universidad puede nombrarle Maitre assistant (digamos, profesor agregado) que es ya cargo estable, prácticamente vitalicio.

Antes de seguir adelante, deseo dar las gracias a mi querido compañero el Dr. Viviente, profesor de matemáticas de la Sorbona durante varios años, que me informó amablemente de todo lo que precede.

Quiero añadir, que el actual Ministro de Educación de Francia, M. Fouchet, propugna una división de las enseñanzas universitarias en tres ciclos, de dos años cada uno, que corresponden a tres títulos: Licence, Maitrisse y Doctorat. La Maitrisse equivale a la antigua Licence, y la nueva Licence es un grado menor cuyo objeto es acelerar la creación de profesores de matemáticas para los Liceos, que deberán en todo caso, cursar además un año de formación pedagógica.

Pasemos a exponer ahora, los datos de Estados Unidos, tomados principalmente de la Universidad de Chicago. 1) Los cursos equivalentes a nuestra Licenciatura comprenden los estudios de College y de Master. En cada Universidad varían los cursos de College en relación con los de Master, pero el conjunto suele ser análogo, y supone unos cinco años, debiendo advertir que el College comienza a un nivel semejante al de nuestro PREU.

2) Ya en College, es frecuente que el alumno deba leer algunas obras que se le indican, y dar un informe comentado sobre ellas. En general, viene obligado a presentar resueltos problemas de enunciado complejo, y a escribir artículos sobre temas que ha de estudiar y profundizar con esfuerzo casi exclusivamente personal.

3) Los Master aspirantes al título de Ph. Doctor (análogo al de Doctor en España) han de solocitarlo en la Universidad donde desean obtenerlo, con un informe de sus últimos profesores. Como suele haber un cupo por Universidad, ésta selecciona a los aspirantes con un examen teórico y práctico. La gran mayoría de los aceptados, digamos todos salvo los de elevada situación económica, obtienen becas del orden de 250 doll. mensuales, más un fuerte subsidio familiar. Es típico el estudiante de Ph. Doctor casado, que vive con la beca y lo que gana su esposa. El caso contrario es más insólito aún tratándose del país del matriarcado.

En cuanto a su trabajo, no realiza labor docente. Se le asigna un director, que suele comenzar proponiendo ya al aspirante el problema pendiente objeto de la tesis, y éste debe valerse por sí mismo en aprender lo necesario para investigar la cuestión. Sigue cursos monográficos para postgraduados, sobre los temas que le interesen en relación con su tesis.



debiendo aprobar algunos de ellos para obtener el certificado. Si va bien, consigue el título de Ph. Doctor en tres o cuatro años.

4) Un Ph. Doctor recién titulado, cuyo trabajo resulte satisfactorio, va pasando por los cargos siguientes, para los que siempre hay vacantes en una u otra Universidad: a) Research associate (investigador). No suele hacer tarea docente. Se contrata anualmente con un sueldo mensual de 500-650 doll; b) Instructor (digamos profesor ayudante). Se contrata por dos o tres años con sueldo mensual de 750-1.000 doll.; c) Assistant (profesor adjunto), que es análogo a instructor pero un escalón más arriba; d) Associate Profesor (profesor agregado), que es el primer cargo docente prácticamente vitalicio.

Lo que precede son noticias directas recibidas del Dr. Pascual, Catedrático de la Universidad de Valencia, que fue Research Associate en la de Chicago durante dos años, y a quien expreso por su amabilidad mi profunda gratitud.

No resistimos la tentación de añadir algunos datos, tomados de un estudio estadístico que ha publicado recientemente la Academia Nacional de Ciencias de Estados Unidos [4], sobre un colectivo de 10.000 Ph. Doctor en Ciencias, elegidos entre los 200.000 becarios para dicho título, que hubo desde 1920, aunque el estudio cubre el período 1935-60. La mayoría, un 59 %, resultaron ser profesores de Colleges o Universidades, el 8 % funcionarios federales, y un 15 % empleados en empresas industriales. En cuanto a su labor, resulta que el tiempo medio dedicado a la investigación ha subido, y el dedicado a la enseñanza ha bajado, conforme se va pasando de cada promoción de Ph. Doctor a la siguiente. En los años extremos del período estudiado se tiene: en 1935, 36 % dedicado a la investigación y 47 % a la docencia; en 1960, 49 % y 33 % respectivamente. El tiempo gastado en tarea administrativa sube rápidamente a medida que el Ph. Doctor aumenta en edad, pues pasa del 8 % hasta el 32 %, dato curioso e interesante. Finalmente, los sueldos medios oscilan desde los 1.414 doll. mensuales del Ph. Doctor ingeniero, seguido de físicos, químicos y economistas, hasta los 1.181 del Ph. Doctor matemático. En todas partes gana más la ciencia aplicada, pero aquí la diferencia con la pura no es tan acusada como en otros países.

Terminaremos este paseo informativo por el extranjero, exponiendo los datos correspondientes a Rusia, que he tomado de un informe bastante detallado que publicó en 1957 [5] el matemático ruso Gnedenko, con ocasión de una visita que hizo a los Estados Unidos.

1) Los cursos universitarios de la Licenciatura, son equiparables a los que componen el College y Master americano, y ocupan también cinco años, separados en diez semestres. Pero desde segundo año el alumno puede elegir entre diversos seminarios y cursos especiales, los que más le interesen, iniciando así, en cierta medida, una orientación particular.



2) En segundo, tercero y cuarto año, los alumnos deben escribir artículos, en general de tipo compilativo, con el fin de desarrollar su espíritu de independencia, de iniciativa. Para escribirlos, vienen obligados a leer ciertas monografías o Revistas, y presentar una especie de resumen. En el quinto año, deben elaborar una tesina, a la cual se suele dedicar el último semestre. Son muy variadas, pues cada profesor debe dirigir algunas.

En los seminarios, las discusiones sobre el tema son constantes y forman parte del entrenamiento matemático del alumno. Se insiste en que: menos clases teóricas y más tiempo para pensar con independencia sobre los temas. Se considera esencial que el alumno invente tanto como que aprenda. Que dedique tanto tiempo a la solución de problemas como al estudio teórico.

La Universidad crea y alienta círculos matemáticos, en los que se proponen problemas de tipo extraordinario, que desarrollan las facultades creadoras de los participantes.

Se opina en general, que las Universidades deben ejercer la máxima presión para estimular el interés científico activo en los estudiantes. En algunas se han hecho intentos para reducir el peso de los estudios teóricos.

3) El graduado que quiere dedicarse a la ciencia pura, debe entrar en la Escuela de graduados de la Universidad, donde al cabo de tres años puede obtener el título de Candidato en Ciencias Fisico-Matemáticas, análogo al Doctor español. Muchos alumnos han producido trabajos notables en esos años. Para entrar en la Escuela, el graduado ha de ser recomendado por sus profesores universitarios; y al entrar es asignado a un supervisor que le orienta en su trabajo. Sigue cursos sobre materias relacionadas con su tesis, y debe aprobar dos exámenes sobre las mismas. Al término de los tres años debe presentar los resultados de sus investigaciones, en particular una tesis, que tiene que defender en público con dos oponentes oficiales, especialistas en la materia.

A pesar de la selección realizada para entrar en esta Escuela, es corriente que algunos postgraduados no puedan alcanzar el título de Candidato.

Durante su estancia en la Escuela, los gastos del estudiante corren a cargo del Estado.

En fin, omitimos los datos relativos a otros países de matemática avanzada, como Alemania o Inglaterra, porque sería alargar demasiado la recopilación sin necesidad estricta, ya que si bien presentan alguna variación interesante, resultan en lo esencial, muy parecidos en los expuestos anteriormente. Por ejemplo, en Inglaterra es normal la obligación de hacer tesina en el último semestre de la carrera, que además de presentar por escrito, los mejores estudiantes exponen en una conferencia seguida de discusión.



Estas conferencias, que suelen tener lugar a fines de semestre, originan un animado ambiente científico en la Universidad [6].

El resumen de los informes precedentes es muy fácil de hacer, pues salvo en detalles secundarios, la coincidencia de los países considerados, resulta evidente en los puntos más importantes.

El principal, como fundamento de todos los demás, es la convicción del papel imprescindible que juega el ejercicio de lo que podríamos llamar pequeña investigación, en la tarea formativa y capacitadora que debe cumplir la Licenciatura. Y la necesidad absoluta de su existencia, en los estudios del postgraduado que ha de ponerse al día en un tema, lo cual resulta muy difícil el estímulo de la investigación.

En ambos casos, la sociedad actual reclama profesionales eficaces, que sepan hacer las cosas, que posean iniciativa de resolución, no que se limiten a repetir unas lecciones, o a poseer unos conocimientos muertos.

Un ingeniero, cuyo criterio director es el de la eficacia, escribe [7]: «La investigación que dentro de la básica se viene a llamar libre, es decir no orientada, se ha venido practicando tradicionalmente en las Universidades, y no solamente se presta a ello, sino que es opinión general que una labor de educación avanzada debe ir acompañada necesariamente con un esfuerzo por mantenerse en la vanguardia de los conocimientos, no por simple erudición sino participando en la investigación y de forma que se pueda transmitir a los alumnos la esencia de su estilo y espíritu. Como medio educador, la investigación puede adicionalmente estimular la capacidad creadora de los alumnos, enseñar precisión y exactitud, etc...».

En el caso particular de la matemática, su apariencia de ciencia teórica por excelencia, en la cual lo ejecutivo y realizador resulta secundario, es meramente superficial. La historia de la matemática, es la historia de los problemas que ha resuelto con efectividad. Y hoy más que nunca, tiene vigencia este hecho. «El matemático moderno» escribe Paul Germain [8] cuando toma entre manos una cuestión irresoluble por el cálculo clásico, lejos de abandonar el problema, lo aborda con otros métodos. Rodea en el fondo la dificultad, la ataca por otros lados. Se ha insistido mucho sobre el carácter particular de la investigación moderna, en la cual el sabio parece luchar contra una naturaleza resistente. Entre los griegos se estudiaban construcciones de la mente, en los siglos XVII y XVIII se combinaban elementos entre sí. Ahora se estudian cuestiones ya planteadas que es necesario resolver».

Los párrafos anteriores nos llevan a poner de relieve otra virtud importante de la actividad realizadora: crear el entusiasmo en quien la cultiva, lo cual en muy poco grado engendra el simple estudio. Y todos sabemos que el verdadero matemático, como el verdadero científico, es un entusiasta de su especialidad. Sin una buena dosis de pasión, es difícil



hacer matemáticas. Como los grandes ideales, las matemáticas se aman o se ignoran.

Las consideraciones precedentes, sin duda son admitidas como buenas en la Enseñanza Superior española de la materia, pero distan mucho de ser llevadas a la realidad. Para reforzar mi opinión personal, ya mencionada, he aquí unas conclusiones del II Seminario de Enseñanza Superior Científica y Técnica, celebrado en Madrid en el año 1960 (pág. 360): «A este respecto se ha comentado, que los conocimientos teóricos de nuestros alumnos suelen ser superiores a los de sus colegas europeos; pero por otra parte, se encuentran en franca desventaja cuando se trata de su aplicación a la realidad: insuficiencia de iniciativa, de capacidad experimental y de pensamiento original, son quizá los defectos más graves de nuestros sistemas tradicionales.

No parece que se pueda insistir demasiado en la idea de que la perfección se adquiere con la práctica, y que no basta con haber adquirido ciertos conocimientos, etc. etc.».

El segundo punto de coincidencia, consecuencia del anterior, es la opinión, absoluta en teoría, llevada a la práctica cuando se puede, de que las horas que un alumno dedica al trabajo en su carrera, deben repartirse por igual, al menos, entre el estudio de las lecciones ordinarias y el desarrollo de su capacidad creadora. Es claro que ambas actividades pueden coincidir en algunos momentos, pero no creo que en demasiados. Como diría un matemático, su intersección es no vacía, pero de medida nula. En efecto, la experiencia nos indica con desoladora frecuencia, que las cadenas deductivas de los teoremas se aprenden mecánicamente, con suficiente perfección para exponerlas sin faltar eslabones, e incluso dándose cuenta de la trabazón lógica, pero sin el dominio necesario para contestar una pregunta inesperada sobre la demostración, y mucho menos para inventar una distinta de la conocida. Sólo el alumno sobresaliente, cuando estudia, es capaz de emplear la imaginación además de la razón, sin necesidad de estímulos exteriores. Los demás, aprueban sí, los exámenes escritos, pero no resisten un oral con preguntas fuera de programa. Por eso, estas no se hacen.

Es evidente pues, que la capacidad creadora del alumno no se desarrolla con el estudio ordinario, y por tanto, para ello necesita tareas especiales dirigidas a tal fin. Ya se han mencionado algunas: resolución de problemas que exijan inventiva, demostraciones de teoremas marginales no dados, estudio de casos particulares, discusiones orales sobre un tema, etc. Lo importante es que dediquen a este tipo de trabajo, tiempo, bastante tiempo, y desde luego, mucho más del que suelen dedicar, en general, en las Licenciaturas españolas actuales.

El asunto tiempo no pone a la luz otra coincidencia importante: si el estudio de los programas ordinarios ocupa casi todo el tiempo de tra-



bajo disponible, es necesario, para obtener el reparto mitad-mitad que se propugna, descargar los estudios teóricos, rebajando el número de asignaturas y simplificando sus programas, de modo que perdiendo cantidad se gane profundidad. ¿Puede hacerse esto? No, si nos empeñamos en considerar todos los conocimientos igualmente importantes. Sí, cuando estemos dispuestos a aceptar con Balmes que «en toda ciencia, hay unos puntos esenciales sobre los cuales descansan los demás». Y esto lo decía en aquellos días en que la Ciencia conocida podría meterse en tres libros!

Sobre lo mismo, es muy bueno lo que dice Dieudonné [9], con esa claridad tan propia de los franceses: «Lo que ocurre con las matemáticas (y no con las demás ciencias) es que en esas revoluciones periódicas, los teoremas antiguos se conservan intactos en lugar de disolverse en afinamientos más sutiles, o de verse refutados por una experiencia más precisa, como sucede con los «hechos» mejor consolidados (en apariencia) de la Física o de la Biología. Pero a muchos de ellos, les sucede que del alto rango de «teoremas fundamentales», se ven poco o poco degradados a la situación subalterna de simples «corolarios», cada vez más despreciables, para terminar en el desván de los «ejercicios», que se dejan para que los haga el aprendiz de matemático. Es la conciencia de este proceso histórico permanente, lo que debe llevar a los matemáticos profesionales a un concepto más humilde de su papel y sus esfuerzos, haciéndoles prever que los descubrimientos que más trabajo les han costado, y de los cuales tendrían que enorgullecerse, corren el riesgo de convertirse pronto en simples juguetes para los estudiantes de las generaciones futuras.

Por supuesto, la enseñanza en las Universidades, no puede permitirse el ignorar demasiado tiempo estas devaluaciones en el edificio matemático, so pena de perder toda su eficacia y hasta su razón de ser».

Y el genial matemático André Weil, mucho antes ya escribió [10]: «Es necesario que en el futuro, como en el pasado, las grandes ideas sean simplificadoras, que el creador sea el que desenrede, para sí mismo y para los demás, la más complicada madeja de fórmulas y conceptos. Ya Hilbert se preguntaba: ¿No llegará a ser imposible al investigador individual abarcar todas las ramas de nuestra ciencia? Y justificaba su respuesta negativa no sólo con su ejemplo, sino por la observación de que todo progreso en Matemáticas está ligado a la simplificación de métodos, a la desaparición de antiguos desarrollos que se hacen inútiles, y a la unificación de dominios dispares».

En nuestro país se observa, desgraciadamente, no ya una tendencia a la simplificación, sino todo lo contrario. Lo curioso es que entre las conclusiones de cualquier reunión pedagógica, no falta alguna a favor de aquella. Por ejemplo, en el citado Seminario de Enseñanza Superior se dijo (pág. 173): «todos los cuestionarios de enseñanzas teóricas en nuestros estudios científicos y técnicos, están sensiblemente hipertrofiados; padecen



aún la idea pretérita de que la Ciencia es algo que se aprende para después enseñarla, en lugar de ser un conjunto de conocimientos organizados, cuya posesión se debe alcanzar para después aplicarlos o desarrollarlos ulteriormente».

Sin embargo, los planes de estudio de más reciente renovación, se presentan con mayor número de asignaturas y con horario más apretado que los anteriores. Me estremece pensar en una versión universitaria del Bachillerato, donde hay cursos con nueve asignaturas.

Como todos los sucesos que se repiten insistentemente, éste posee sus motivos, unos razonables, otros no tanto. Entre los primeros, es evidente el continuo aumento de volumen de la ciencia conocida, de novedades importantes que es necesario enseñar. Pero como ya se ha hecho notar, esto viene compensado con una exposición más sintética de los conocimientos, mediante teorías de una mayor generalidad, que en menos tiempo enseñan más.

Con símil muy acertado, se dice que la ciencia es una dama que interesa al hombre por dos razones principales: porque es bella y porque es útil. Pero tiene la tendencia a engordar sin límite, lo cual puede dar al traste con su belleza y su utilidad. De manera que si cada cierto tiempo no eliminamos sus grasas sobrantes, en lugar de una ciencia esbelta y servicial, nuestros alumnos encontrarán una imagen hinchada que no les servirá, y de la que por supuesto, no podrán enamorarse.

Queda finalmente por comentar, el tercer punto en que coinciden los países revistados. En todos ellos, el dedicarse a la matemática superior es una profesión como otra cualquiera, remunerada lo suficiente para vivir, y ello desde el momento en que se obtiene el grado de Licenciado. Creo que esto último, establece la diferencia esencial con nuestro país, y quizá el motivo número uno de la escasez de trabajos considerada. En efecto, el alumno dotado, con independencia de los planes de estudio o de los métodos de enseñanza que puedan tocarle en suerte, aprende matemáticas y las aprende bien. Todos los años terminan la carrera, jóvenes que dentro de lo previsible, parecen capacitados para emprender el cultivo de la matemática superior. No son muchos, pero en mi experiencia universitaria, puedo asegurar con satisfacción, que cada año he conocido terminar a alguno de éstos.

¿Y qué perspectivas profesionales se ofrecen ante sus ojos? Por un lado, plazas cuya oposición puede preparar en el lapso de un año, y realizar con éxito, por tratarse de un titulado sobresaliente. Cátedras de Enseñanza media, técnicas o no, plazas de Estadística, etc. Esto es lo fácil, lo seguro, el camino ancho; es comenzar la vida. Por otro lado, la cátedra de Universidad, ahora la plaza de Profesor Agregado, el camino estrecho. No digo difícil, ni inseguro, porque no lo es. Digo estrecho porque lo es; económicamente, se entiende. En este punto, y mal que me pese, no pue-



do evitar la mención de algunas cifras aproximadas actuales. Las plazas del sendero grande son vitalicias del Estado, con ingresos mensuales del orden de quince mil pesetas o más; las del otro, profesor adjunto como mucho, no son vitalicias, y su ingreso mensual no supera las nueve mil. pero además, no siempre hay una plaza disponible de profesor adjunto, adecuada al caso; en muchas ocasiones no la hay.

¿Cuáles son las consecuencias de esta realidad? La primera, que muchos, la mayoría, optan por seguir la senda fácil, y abandonan la matemática superior. La segunda, que los pocos que deciden continuar cultivándola, lo han de hacer, por razones económicas, dedicando gran parte de su tiempo a la docencia, con lo cual, su formación y su rendimiento en el campo de la ciencia pura son demasiado lentos para resultar verdaderamente satisfactorios. Con esto quiero decir, que el período óptimo ya comentado, con edad inferior a los treinta y cinco años, no se aprovecha al máximo, lo cual es imprescindible, dado el volumen y la profundidad de los estudios necesarios, para ponerse al día en un tema de la matemática actual, e investigar en ella cuando se está en pleno vigor juvenil. Desde luego, acepto la observación de que lo que no se puede hacer antes, se puede hacer después, pero ello no desvirtúa en absoluto el hecho de que, lo que se haga después, será en general menos, en cantidad y calidad, que lo que se hubiera logrado trabajando a un ritmo más vivo, en una edad de mayor vitalidad. Insisto así, una vez más, en las consideraciones hechas al principio de mi discurso.

En cuanto a los que piensan que la vocación está por encima de las circunstancias, y que el hecho clave es la falta de vocaciones, deseo hacerles observar que precisamente estamos viviendo en la época de la planificación desde arriba, y en la que está de moda la palabra promoción, lo cual demuestra que todos los gobiernos del mundo creen en la eficacia de las circunstancias en orden a fomentar una actividad. Y creo que no es preciso citar ejemplos, porque los hay a docenas; sólo recordaré, por haberla escuchado hace pocos días en la TV, la frase siguiente: «una protección adecuada nos ha dado felizmente, un conjunto de jóvenes directores de cine que prometen mucho, etc., etc.».

Incluso la protección exagerada, no perjudica al objeto, pues si es cierto que puede dar lugar a falsas vocaciones, este defecto está ampliamente compensado, por la virtud de que no se pierde ninguna verdadera, lo cual es esencial en nuestro caso, debido a la escasez de su número.

Conste que en todo lo que antecede, no he pretendido en absoluto, echar a nadie la menor parte de culpa, sino que me he limitado a poner de relieve la realidad de los hechos. Por el contrario, me es grato señalar, que me parece unánime la preocupación de las autoridades relacionadas con el problema. El Excmo. Sr. Ministro de Educación Nacional, en su discurso inaugural del curso 1962-63 en Madrid, decía: «Hemos de conse-



guir, y lo anunciamos desde ahora como propósito inmediato, que en ningún caso los apremios de una débil situación económica puedan malograr un valor de bien contrastada vocación científica». También es de notar, que desde hace varios años existe una Comisión de Política Científica al más alto nivel; de más reciente creación es el Fondo Nacional para la Investigación Científica, y no digamos la recientísima reorganización pro Ciencia, del Ministerio de Educación.

Pero creo sinceramente, que la aplicación de los medios disponibles, al caso real y concreto del postgraduado en cuestión, no ha sido hasta ahora lo bastante eficaz. No quiero hablar de lo que podría ayudar a la solución del problema, una mayor autonomía económica de la Universidad. Tampoco considero aquí oportuno, apuntar sugerencias particulares.

Quiero en cambio expresar mi decidido pensamiento, de que la ayuda a la vocación, en cada caso concreto, ha de alcanzar un mínimo por debajo del cual apenas es operante, y siempre con un rendimiento muy por bajo de su cuantía. Es un fenómeno comparable al del límite de elasticidad o del punto de fusión, por debajo del cual se gasta energía o calor sin efectos apreciables, es decir, no se rompe ni se funde nada.

Digámoslo en términos matemáticos y con esto termino.

Teorema: Para su efectividad, la condición de ayuda mínima es necesaria.

Tengo fé. en que un día no lejano, comprobaremos que también es suficiente.

HE DICHO.



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [ 1 ] J. M. DE SENDAGORTA, *Investigación e Ingeniería*. Nuestro Tiempo, vol. 139, pg. 8, 1966.
- [ 2 ] E. VIDAL ABASCAL, *La Universidad y el problema científico español actual*, Boletín de la Universidad Compostelana, núm. 71, 1963.
- [ 3 ] R. QUENEAU, *Bords*, París, 1963, pg. 18.
- [ 4 ] *Scientific American*, marzo, 1966.
- [ 5 ] V. GNEDENKO, *Mathematical Education in the URRS*, American Math. Monthly, vol. 64, núm. 6, 1957.
- [ 6 ] R. L. RUSSELL, informe presentado en el *Segundo Seminario de Enseñanza Superior Científica y Técnica*, Madrid, 1960, pg. 247.
- [ 7 ] J. M. DE SENDAGORTA, *loc. cit.*, pg. 11.
- [ 8 ] P. GERMAIN, *Las grandes líneas de la evolución de las matemáticas*, artículo de *Les grandes courants de la pensée mathématique*, París, 1948 (traduc. de Eudeba, Buenos Aires, 1962), pg. 256.
- [ 9 ] J. DIEUDONNE, *Algèbre lineaire et geometrie elementaire*, París, 1964, pg. 8.
- [10] A. WEIL, *El futuro de las matemáticas*, *Les grandes courants de la pensée mathématique*, pg. 341.
- [11] J. M. IÑIGUEZ, *La investigación en el campo de la ciencia matemática*, Revista de la Universidad Industrial de Santander, vol. 4, núm. 2, 1962, pg. 87.



## DISCURSO DE CONTESTACION

Por el

ILMO. SR. D. RAFAEL RODRÍGUEZ VIDAL

*Excelentísimos e Ilustrísimos señores,*

*Señoras y señores:*

Una amistad de muchos años, una trayectoria profesional con ciertos rasgos comunes, una preocupación compartida por la problemática de la Universidad, son motivos suficientes, con otros que se irán diciendo, para que yo reciba con especial alegría el honroso encargo de dar, en nombre de la Academia de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de Zaragoza, la bienvenida a nuestro nuevo compañero, el Profesor Don Juan SANCHO DE SAN ROMÁN.

La preocupación que me invadiría si se tratase de emular en la contestación el valor de las ideas que en el precedente discurso se nos acaban de exponer; la timidez que me dominaría si tratase de encontrar en mi modesta actividad científica los méritos para alzarme a comentar llanamente las opiniones del nuevo e ilustre académico (aunque protegido yo ahora por la benevolencia de tan prestigiosa Corporación), harían de este encargo algo penoso para mí, de no ser porque a toda otra consideración se superpone el conocimiento de los altos valores humanos, cordiales y amistosos del Sr. SANCHO DE SAN ROMÁN, que tal vez considere como la cosa más natural del mundo que este viejo amigo se asocie al desarrollo de tan notable efemérides de su vida profesional. Al presentar un resumen de esta vida, en las páginas que siguen, cumplo una parte del programa reglamentario de este acto, y al tiempo mismo justificaré mis antedichos juicios y la satisfacción de esta Academia en la ocasión presente.

### 1. *Títulos profesionales*

- Licenciado y graduado en Ciencias Exactas, por la Universidad de Madrid, en 25 de noviembre de 1941.
- Catedrático numerario de Institutos Nacionales de Enseñanza Media, en 2 de agosto de 1943.
- Ingeniero Geógrafo, por concurso entre Licenciados en Ciencias, en 28 de diciembre de 1944.



- Doctor en Ciencias Exactas, por la Universidad de Madrid, en 10 de febrero de 1945.
- Catedrático numerario de Universidad, en 27 de mayo de 1960.
- Doctor Ingeniero Geógrafo, en 27 de junio de 1962.

2. *Historia profesional*

- Catedrático de Matemáticas de Instituto; en el Femenino de La Coruña (curso 1943-44); en el de Toledo (cursos 1944-59).
- Ingeniero Geógrafo: en el Observatorio Geofísico de Toledo, años 1945-1960.
- Contrato de investigación con la División de Ciencias Matemáticas, Médicas y de la Naturaleza, a través del Instituto «Jorge Juan» (cursos 1959-60).
- Catedrático de Universidad: en la Facultad de Ciencias de la de Zaragoza (cursos 1960-66).
- Profesor agregado al Seminario Matemático «García de Galdeano» de Zaragoza, del C. S. I. C. (cursos 1961-66).

3. *Cursos de Licenciatura que ha desarrollado en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza*

Geometría tercero (titular).  
Geometría cuarto (titular).  
Geometría Algebraica (1960-66).  
Matemáticas generales (1960-61).

4. *Cursos de Doctorado*

Teoría de ideales: 1960-61.  
Teoría de conexiones: 1961-62.  
Fundamentos de Geometría algebraica: 1962-63.  
Grupos de Lie: 1963-66.

5. *Congresos o Reuniones científicas en que ha participado*

- a) Congresos Luso-Españoles para el progreso de las Ciencias.  
XXIV. Madrid, noviembre de 1958\*.  
XXVI. Oporto, junio de 1962\*.
- b) Reuniones anuales de Matemáticos Españoles.  
I. Madrid, octubre de 1960\*.  
II. Zaragoza, octubre de 1961\*.  
III. Barcelona, noviembre de 1962.



IV. Salamanca, diciembre de 1963\*.

V. Valencia, noviembre de 1964\*.

VI. Sevilla, octubre de 1965\*.

- c) Coloquio Internacional de Geometría diferencial, Santiago de Compostela, abril 1963.
- d) Coloquio Internacional de Geometría algebraica, Madrid, septiembre de 1965\*.

\* Comunicación presentada, que se cita en la relación que sigue:

#### 6. Trabajos de Investigación

1. «Sobre el método de Gräffe», Revista de la Universidad, de Madrid, 1942.
2. «Sobre la generalización del teorema de Wilson», Revista de la Universidad de Madrid, 1942.
3. «Solución simplificada del problema de las dos inversiones geométricas». Matemática Elemental, 4.<sup>a</sup> serie, t. IV, 1944.
4. «Sobre curvas alabeadas cerradas, en especial de anchura constante», Memorias de Matem. del Instituto Jorge Juan, n.º 10, 1949.
5. «Curvas alabeadas de anchura afín constante», Collectanea Mathematica, t. VIII, 1955.
6. «Sobre un nuevo concepto de anchura de óvalos, invariante afín», Revista Mat. Hispano-Amer., t. XVI, 1956.
7. «Un nuevo concepto de anchura afín de cuerpos ovales», Revista de la Real Academia de Ciencias Exac. Fís. Nat., t. LI, Madrid, 1957.
8. «Sobre valoraciones subordinadas de una valoración del cuerpo de una variedad, en los cuerpos de sus subvariedades». Public. del XXIV Congreso Luso-Español para el Progreso de las Ciencias, Madrid 1958.
9. «Sobre valoraciones subordinadas de una valoración de un cuerpo, en las especializaciones de éste», Revista Mat. Hispano-Amer., t. XVIII, 1958.
10. «Un nuevo método algebraico para la obtención de las formas canónicas de las matrices  $A - tA'$  no singulares». Revista Mat. Hispano-Amer., t. XIX, 1959.
11. «Sobre la equivalencia de dos definiciones de coordenadas de uniformización de una subvariedad algebraica», Actas de la I Reunión de Matemáticos españoles, Madrid, 1961 (Public. de la Universidad de Madrid).
12. «Contribución al estudio de las valoraciones no triviales subordinadas de una valoración dada», Actas de la II Reunión de Mate-



máticos españoles, Zaragoza, 1962 (Public. del Seminario de Matemático de la Universidad).

13. «Sobre la existencia de óvalos con dos puntos equicordales». *Collectanea Mathematica*, t. XIV, fasc. 2.º, 1962.
14. «Sobre una anchura afín de conjuntos convexos cerrados», *Coloquio Internacional de Geometría diferencial*, Santiago de Compostela, 1964.
15. «Polígonos de anchura afín constante», *Actas de la IV Reunión de Matemáticos españoles*, Salamanca, 1964.
16. «Valuations subordonnées d'une valuation donnée», *Actas del Coloquio Internacional de Geometría algebraica*, Madrid, 1965.
17. «Medidas relativamente invariantes sobre espacios homogéneos y aplicaciones a la Geometría Integral», *Actas de la V R.A.M.E.* Valencia, 1964.
18. «Sobre la equivalencia de condiciones para la existencia de medida invariante en un espacio de Klein», *VI R.A.M.E.*, Sevilla, 1965.

Son, desde luego, innecesarios los comentarios a tan valioso sumario de una rica vida profesional, pero quiero apuntar alguno.

Destaquemos, primero, cómo por su vocación de universitario y de investigador matemático, el profesor SANCHO DE SAN ROMÁN renunció, no a simples posibilidades o suposiciones, sino a la realidad de una destacada situación profesional, favorable a sus intereses materiales y grata para sus relaciones familiares. Había renunciado previamente a su comodidad, con el mérito de preparar una oposición tan trabajosa cuando se disfruta de una lucida y prestigiosa situación facultativa (también meritoria y trabajosamente conseguida, desde luego). Y después, conseguida la cátedra universitaria, le era legalmente posible simultanear ésta con aquellas otras actividades a que sus títulos le daban derecho. Sin embargo, indiferente a su interés económico, solicitó el Sr. SANCHO DE SAN ROMÁN su excedencia como Ingeniero Geógrafo y como Catedrático de Enseñanza Media. (Esto fue, a mi juicio, tanto más meritorio porque lo hizo en aquel tiempo en que los Catedráticos de Instituto éramos tratados por la Administración como merecedores de la confianza y consideración que una larga tradición de buen servicio nos hizo merecer; sin que hasta hoy haya, ni se prevea, razón ninguna para explicar, ni disculpar, que puedan olvidarse).

En cuanto a los temas y estilo de su trabajo, que demuestran que el mejor conocimiento de lo actual y difícil no es en ningún modo incompatible con el deseo de ser claro, más autorizadas que mi decir, son las palabras del importante matemático Sr. SANTALÓ, que comentando algunos escritos del Sr. SANCHO DE SAN ROMÁN escribía: «A mí, particularmente estas cosas [problemas sobre cuerpos convexos] me gustan y creo que tienen su importancia. Por lo menos se trata de problemas claramente enunciados



y con la solución, hasta donde se ha podido, también clara y definida: son las primeras condiciones de toda obra matemática. Lamentablemente entre «nuevos ricos» de la matemática está más de moda llenar páginas de definiciones y deducciones a primera vista incomprensibles y a segunda vista triviales. Pero con ello sólo se engaña a un pequeño entorno, casi siempre menor que  $\epsilon$ , y todo queda en el olvido sin cita ni comentario alguno».

\* \* \*

Comentemos ya el discurso del Sr. SANCHO SAN ROMÁN, que se inicia con una oportuna confrontación entre la matemática pura y la aplicada. (Haciendo al margen un comentario de nomenclatura, recordaremos que un aritmético clásico del siglo XVI, el Bachiller Juan Pérez de Moya, escribió un libro que alcanzó gran celebridad y se titulaba «Aritmética Práctica y Especulativa». Es lástima que las muchas ediciones que tuvo el libro no fueran bastantes para que llegasen hasta nosotros esos calificativos: práctica y especulativa, tan notoriamente más bellos y expresivos que los anodinos: pura y aplicada, que nos trajo el vocabulario francés. Pero esto no importa ahora). Lo que debemos señalar aquí, como lema previo para entender toda la historia que sigue, es que la frontera entre la Matemática pura y la aplicada, que decimos todos (o entre la práctica y la especulativa, que me gustaría decir) nunca ha sido constante, y, además, que ha variado siempre en el mismo sentido, inexorablemente, de modo que la práctica invade ininterrumpidamente el terreno de la especulativa. Así una gran parte de la matemática pura de una generación es matemática aplicada para las siguientes e incluso a no tardar deja, a veces, de ser considerada como matemática. Y si se quiere un ejemplo de esto (tal vez el más extremado) basta pensar en la Geometría Descriptiva una creación del siglo XIX, que era asignatura en las licenciaturas de Ciencias Matemáticas de hace bien pocos años (no sólo en España, en el mundo) y hoy desaparecida como capítulo de la Matemática. (Aunque el rótulo subsista para algunos efectos administrativos). Bien hace, pues el profesor SANCHO en recordar esta circunstancia a los posibles promotores de nuestra investigación científica, todavía demasiado pendientes de la utilidad inmediata, como ya había descubierto MENÉNDEZ Y PELAYO.

Se sabe por todos que las páginas de MENÉNDEZ Y PELAYO (incomparablemente genial) sobre la Ciencia Española, fueron el fulminante que ha provocado, desde el último cuarto del siglo XIX, una incesante bibliografía de escritos doctrinales o polémicos sobre los muy diversos aspectos con los que el tema puede ser considerado. En su conjunto el efecto de estas inquisiciones ha sido beneficioso. (Entre los textos más constructivos encontramos desde luego los de RAMÓN Y CAJAL, al margen de su propia obra investigadora, para estimular y promover la investigación científica). Y si



se escribieron y se escriben páginas apasionadas o inútiles, no faltan ocasiones en las que determinados aspectos particulares del amplísimo problema general, son vistos y diagnosticados con rigor y lucidez, como es, por ejemplo, el caso de las serenas páginas que el Sr. SANCHO DE SAN ROMÁN acaba de leernos. Volvamos por un momento a MENÉNDEZ Y PELAYO, para ver lo que el tiempo ha añadido a esas páginas suyas, escritas para una actualidad tan estricta y contemporánea al autor, tan para su «hoy mismo», que por lo menos el valor personal reconocido no podrán negárselo sus menos entusiastas lectores. Casi al azar tomamos estos párrafos en su obra [1]:

«El carácter utilitario de nuestra restauración científica en el siglo XVIII tampoco puede ocultarse a nadie. No la iniciaron hombres de ciencia pura, sino oficiales de Artillería y de Marina, médicos y farmacéuticos. Cuando comenzaba a formarse una generación más propiamente científica, vino la nefanda invasión francesa a ahogarlo todo en germen y a hacernos perder casi todo el terreno que trabajosamente habíamos ganado en medio siglo. Cuando en 1845 se inició la restauración de la enseñanza, creándose las facultades de ciencias y la Academia, hubo que echar mano de los únicos elementos que existían, valiosísimos algunos, pero casi todos de ciencia aplicada. No había más químicos que los de la Facultad de farmacia, ni otros matemáticos que los ingenieros, ni otros astrónomos que los oficiales de la armada.»

«Hoy el personal ha cambiado, y en medio del desamparo y abandono en que yace la Facultad de Ciencias, que ha sido siempre *la Cenicienta* entre nuestras facultades universitarias, hay ya en ellas puros científicos, algunos de extraordinario mérito; pero ¿qué hacen nuestros Gobiernos para alentarlos y darles medios de trabajo? Fuera de la Geodesia, que en cierto tiempo ha sido protegida con lujo y hasta con despilfarro (según dicen), nada, absolutamente nada. ...Aún lo poco que la enseñanza científica ha logrado en estos últimos años es precario, y está al arbitrio de cualquier remendador de presupuestos que, so pretexto de economías, nos deje a buenas noches, barriendo estas superfluidades que son caras, muy caras, si se han de enseñar como Dios manda. Para esto no faltaría un gran argumento, que nunca deja de encontrar eco entre los que deciden de los destinos de esta Nación desventurada: «La Facultad de Ciencias está desierta».

Y yo digo: ¡ojalá tuviese menos alumnos todavía y fuese lo que debía ser, es decir, una escuela cerrada de purísima investigación cuyos umbrales no traspase nadie, cuya vocación científica no hubiera sido aquilatada con rigurosísimas pruebas, y que entrase allí, no como huésped de un día, sin afición ni cariño, sino como ciudadano de una república intelectual, a la cual ha de pertenecer de por vida, ganando sus honores en ella, no con risibles exámenes de prueba de curso, que en la enseñanza superior son un absurdo atentado a la dignidad del magisterio, sino con la colaboración asidua y directa en los trabajos del laboratorio y de la cátedra, como se practica en todas partes del mundo, sin plazo fijo para ninguna enseñanza, sin imposición de programas, con amplios medios de investigación y con la seguridad de encontrar al fin de la jornada la recompensa de tantos afanes, sin necesidad de escalar una cátedra por el sistema tantas veces aleatorio de la oposición, que desaparecerá por sí mismo cuando el discípulo, día por día, se vaya transformando en maestro, pero que ahora conviene que subsista, porque todavía es el único dique contra la arbitrariedad!



Para glosar rápidamente esta cita señalemos, ante todo, que el que desee confirmar y precisar lo relativo a la contribución de los oficiales del Ejército en nuestra cultura matemática, encontrará este punto inmejorablemente desarrollado en el magnífico discurso que, como todos recordamos, en esta Academia, desarrolló el Excmo. Sr. Teniente General Don Santiago AMADO LÓRIGA en la memorable sesión de su ingreso [2]. No podemos luego dejar de advertir la ligera reticencia con que se alude la protección oficial a la Geodesia, que será sin duda un reflejo de los comentarios corrientes en el ambiente universitario de aquel tiempo, de los que nuestro autor, punto singular, no se hace solidario. Indudablemente, hacia esos tiempos de 1877, la crítica no podía sino apuntar al modesto apoyo que se debió prestar a algunos trabajos o investigaciones del General Don Carlos IBÁÑEZ. Por si algún lector no científico de esas páginas, se preguntase a sí mismo si la protección concedida a esas actividades científicas fue dinero perdido o malgastado, es preciso decirle rotundamente que no se puede pensar en una inversión más rentable. La obra en Geodesia del General IBÁÑEZ es, nada menos, la única que salva ante Europa y el mundo el honor científico de la España finisiclar. Por esto, las críticas que, por lo que se ve, contemporáneos miopes o envidiosos pudieran hacer al «lujo y despilfarro» con que se apoyó a IBÁÑEZ se parecen bastante, efectivamente, a las de las hermanas mayores de *La Cenicienta*, mirando que esta es la única a la que la cultura europea atiende y agasaja. El General IBÁÑEZ fue desde 1872 a 1891 Presidente electo por unanimidad de la Comisión Internacional del metro y de la de Pesas y Medidas. Su «figura gigantesca» ha sido considerada con atención en el Discurso con que el Académico Señor ESTEVAN CIRIQUIAN contestó al antedicho [2].

En este punto de la nula subvención para la investigación científica, pudieron repetirse durante muchísimos años lamentaciones idénticas, oídas con tal indiferencia por la sociedad española. Pero la situación ha mejorado mucho y es justo reconocerlo. Sobre todo en estos últimos 25 años el apoyo económico a la investigación científica ha venido creciendo ininterrumpidamente (y por lo que hace a las matemáticas, este apoyo era prácticamente nulo antes de este tiempo, mientras que hoy es de apreciable entidad). Pero lo más importante, el cambio fundamental, es que la sociedad ha tomado conciencia del problema, y juzga una inversión productiva y honesta, no un derroche, el elevado gasto que la investigación científica o especulativa, reclama.

En cuanto a las consideraciones que hace MENÉNDEZ Y PELAYO en esa página, propugnando por un reducidísimo número de alumnado selecto, es claro que traducen un equivocado optimismo de romanticismo juvenil. (Su autor las escribió a los 20 años). Tan pronto como la vida científica ha empezado a conocerse de verdad entre nosotros, nadie puede discutir



que el punto de vista acertado en esta cuestión es el que sostiene el señor SANCHE DE SAN ROMÁN en su meditada lección.

A la escasez de número de los estudiantes de Matemáticas (mientras en otras Facultades tal vez haya exceso de ellos), viene a sumarse otro problema, esto es, que llegan a la Universidad con su espíritu de iniciativa intelectual, cuando lo hubiese, generalmente destrozado por una preparación preuniversitaria demasiado larga, en la que los alumnos deben trabajar muchísimo, pero de forma totalmente ineficaz para su profesión científica. No abusaré insistiendo en esta problemática [3] pero sí declaro que las razones del Dr. SANCHE me ofrecen nuevos motivos de adhesión a las palabras del Dr. CIVEIRA, cuando hace poco tiempo expresaba [4] «... me coloco enfrente de todos los que hablan y escriben como solución de la plétora estudiantil el establecer cada día nuevos obstáculos a los jóvenes españoles para su entrada en la Universidad, en forma de reválidas, de años selectivos, de exámenes de madurez, de años de iniciación, de reiterados exámenes, etc., para que cada día sea más difícil la entrada en la Universidad y por tanto más reducido el núcleo de privilegiados en este aspecto. Nuestro criterio es radicalmente opuesto; lo urgente es abrir nuevas puertas para que cada vez mayor número de jóvenes puedan en la Universidad española "aprender los saberes"». Necesario se hace insistir, volviendo al caso de la Matemática, que lo peor de esta larga preparación previa, de esta inacabable «templar» (al modo de los rondadores de Lumpiaque), es que se lleva unos años insustituibles de agilidad intelectual máxima y de ilusión y confianza en la propia mente, equivocada a veces por optimismo, pero que sólo de milagro puede resistir sin quebranto el someterse a tantos retoques y controles como debe sufrir antes de divisar el campo a conquistar, el dominio de la viva y verdadera Matemática contemporánea.

No quiero ni debo apartarme del texto de la disertación del Sr. SANCHE DE SAN ROMÁN. Pero es que hay exposiciones que se leen o se escuchan, y son como una brisa que pasa por la imaginación del lector o del oyente. Y no se dice esto porque traigan un descanso confortador, como «el repaire al romero cansado» que dijo Berceo. Se dice porque, como la brisa con los vilanos, tal vez toman consigo algunas ideas quietas en la mente de los que atienden, y las llevan a terrenos a veces lejanos, donde luego prenden y florecen. Así, en la lección que hemos seguido, los oyentes que se hayan preocupado alguna vez por los temas de la investigación y la enseñanza, habrán encontrado de seguro en lo que escucharon, incentivo para nuevas reflexiones, cuya ligadura con las ideas del precedente discurso tal vez no sean de inmediata evidencia, pero no es difícil de encontrar.

¿Cómo no plantearse aquí, por ejemplo, la cuestión de las generaciones científicas? Problema que es una aplicación, homorfismo ordenado, de la



cuestión general de las generaciones sociales, planteada aquella en la relación profesor-alumnos, como ésta lo está en la relación padres-hijos.

Se nos dice a veces que hay una generación de jóvenes dispuesta a pedir cuentas a sus mayores por no se qué cosas que dejamos sin hacer o hicimos mal. Yo creo, por el contrario, que no hay enfrentamiento tal, si enfrentamiento se interpreta como hostilidad o malevolencia. Lo que sí me parece evidente es que hay un distanciamiento progresivo, en el sentido que voy a explicar. Este alejamiento se traduce en algunos signos externos como, por ejemplo, la cada vez mayor omisión de las manifestaciones de respeto en sus formas convencionales, de los jóvenes hacia los mayores. Pero esta falta de respeto reverencial se explican, a mi ver, por una serie de causas más sencillas y naturales que unos hipotéticos resentimientos, que me parecen un tópico literario. Una de estas causas naturales, en el punto de vista de un profesor universitario, podría llamarse la «discontinuidad científica entre dos generaciones». Este es un tema que me gustaría tratar con detalle en otra ocasión, pero ahora es fácil proponer un esquema de él.

Es bien sabido que la ciencia se desarrolla poniendo en juego todos sus recursos, y que como estos crecen proporcionalmente al desarrollo alcanzado, el crecimiento es de tipo exponencial. Así, un lapso de 50 años que no supone ninguna separación apreciable entre las concepciones de dos científicos del siglo XVII la presenta ya muy notable en los finales del pasado, y tanto más en la actualidad, hasta el punto que pueda hablar sin exageración de una «discontinuidad del progreso científico». Por ejemplo, nunca había ocurrido que una mecánica creada hacia el año 1900 pudiera ser caracterizada con el nombre de «vieja mecánica (cuántica)» en 1924 [5]. Sin que esa mecánica cuántica de 1924, a su vez, se parezca a su vez en casi nada a la contemporánea (que apenas me permito mencionar, porque se trata de un tema prácticamente desconocido para mí). Lo mismo ocurre con la Matemática pura: hace menos de 70 años se llamaba Geometría moderna a un capítulo de la matemática que ya ha desaparecido de los programas como cosa pasada. Y en los años 1930 volvió a caerse en el error de llamar Matemática moderna a algo que seguimos llamando así para entendernos, pero que es bien distinto de la esencial Matemática contemporánea. Todo esto nos lo ha explicado mucho mejor el Sr. SANCHO hace un momento. Entonces, el alumno que se ve llevado por esta corriente intelectual (o, casi, que se siente lanzado por esta explosión intelectual) no puede sentir la significación del profesor del mismo modo que en los tiempos viejos se sentía. Ni el profesor la del alumno, diré enseguida.

Un profesor de hace 200 o 100 años, sabía que sus alumnos iban a explicar, poco más o menos, las mismas cosas que estaba explicando él. En cambio, un buen profesor de hace 50 años preveía ya que las ense-



ñanzas de su sucesor llegarían más allá que las propias, pero tenía una idea bastante exacta de la dirección en que se iba a marcar el progreso. Pero hoy, cuando los profesores que se van incorporando explican programas que apenas tienen parecido con los que en esa misma aula aprendieron, nos es muy difícil (salvo, tal vez, a una minoría de mentes gigantescas) acertar a imaginarnos lo que nuestros hijos y nietos van a construir. (Precisamente (permítanme esta alusión personal) hablando no hace mucho a un grupo de casi graduados que tuvieron la atención de pedirnos unas ideas de orientación profesional, y llevado yo subconscientemente por las ideas que el Sr. SANCHO me acaba de concretar, y yo glosó tan pobremente, no pude por menos de confesarles: «Es una amable deferencia esta de preguntar a sus profesores que a dónde puede Vds. dirigirse, pero yo no les oculto que de lo que tengo verdadero deseo es de preguntar a Vds. que hacia donde nos llevan»).

Pasa algo parecido en la vida familiar. Nuestros abuelos, tal vez nuestros padres, tenían una idea muy exacta de lo que iba a ser la vida de los que dejaban detrás de ellos. Sabían, aunque no lo viesen ya, la edad en que iban a recibir cada sacramento, a terminar su carrera, y el patrón de cosas buenas y malas al que sus descendientes ajustarían su conducta social. Pero hoy los abuelos, totalmente desconcertados, ignoran casi absolutamente cuales van a ser las convenciones y normas en el modo de vida de sus nietos.

Todo en la vida es un libro que se va escribiendo sin cesar y el desenlace de cada capítulo no llegan a leerlo los lectores de la generación que lo empezó, sino los de la siguiente. Pero antes podían imaginarlo bastante bien. Ahora, los humanos hemos perdido la serenidad que nos daba saber cómo iba a seguir viviendo el mundo que dejábamos atrás; y esto hace que el morirse parezca ahora más morir que antes.

Pero eso me niego a creer que sean los jóvenes los que están inquietos y angustiados ante los interrogantes que les plantea el mundo de hoy. No, somos nosotros, sus mayores, los que estamos malhumorados y desconcertados ante un mundo que nos están haciendo, y no acabamos de entender.

He dicho «que nos están haciendo», y esto es importante. Tal vez a los adultos y viejos de este mundo de hoy nos gusta tanto hacernos la ilusión de que lo contemporáneo (sea plácido o angustioso) es la obra nuestra, que no nos importa, por sostenerlo, provocar que la generación vigente nos pida cuentas. Pero no, la juventud no nos pide cuentas de nada, porque está muy atareada en sus trabajos propios. Nada hemos de quitarnos unos a otros: cada generación tiene su gloria. La gloria de la nues-



tra está, creo yo, en que aceptó su ración de sacrificios con una alegría que ninguna otra generación ha sabido entender. La gloria de la de hoy es la inteligencia y el trabajo. Hace quince, veinte años, se nos viene hablando de adolescentes «inadaptados», de generaciones destrozadas. ¿donde fueron? ¿eran algo «representativo» los existencialistas de hace un decenio? Lo indudable es que han sido de su misma promoción los que nos están dando los computadores electrónicos, la astronáutica, la Matemática más abstracta,... Son también los que hacen que veamos esos congresos científicos en los que las personalidades son jóvenes de apenas treinta años de edad.

El progreso de la Ciencia pura (para no hablar de la técnica) no se detiene, y se habría detenido si una juventud reflexiva y genial y cada vez más numerosa (porque sin grandes números el proceso se rompe), no fuese consciente de sus deberes y de su vocación. Un periodista puede hablar de la juventud, y arrimar el ascua a la sardina de la comodidad o del derrotismo político. Pero los que tenemos la suerte de que nuestra profesión nos obligue al trato real y verdadero con la juventud (en la Universidad, en el cuartel,...) valoramos mejor la situación. Con precisión académica el Dr. ESCOLAR decía [6]: «Ante las mejoras técnicas y reformas que preveemos en este momento crítico que corresponde a nuestro país en materias de Enseñanza Universitaria, nosotros confesamos sentir asombro, en una mezcla de miedo, angustia y esperanza. Los jóvenes muestran sencillamente serenidad, esperando que el camino se haga más fácil para acercarse a la meta y perfilarla mejor.»

Vamos a resumir: el profesor se siente cada vez menos como un faro providencial y lejano, y se reconoce cada vez más como un colaborador y amigo de sus alumnos de hoy. Yo, que como profesor, en no muchos años, he tenido la inmensa alegría de ver llegar a las cátedras de la Universidad, y de tener como compañeros hoy (sólo que mucho más adelantados que yo y más eficaces) a algunos que ayer mismo fueron mis discípulos ¿cómo puedo creer que haya una hostilidad, ni un mal, ni un desafecto mínimo, en las formas vigentes de la relación profesor-alumno?

Se comprende bien, por todo lo dicho, cuánto me habrá satisfecho ver cómo el tema de los post-graduados y su estímulo profesional ha sido tratado por nuestro nuevo académico. Si en alguna cualidad puedo yo igualarle será sólo en esta, característica de los profesores dignos de serlo, de que no escatimaríamos ningún esfuerzo, ninguna idea, que nos llevase a acelerar todavía más el progreso científico de cada promoción de alumnos. Nuestro único disgusto es que pueda asomar la apatía. Nuestra única preocupación es, como se ha visto, cuando no somos superados por tantos como



quisiéramos ni en tanto como soñamos. Esto, y la veneración cordial al recuerdo de nuestros maestros, son los únicos sentimientos que nos avisan que las generaciones somos, efectivamente, distintas y sucesivas. Sólo Dios sabe el plan con que las encadena y bendice una tras otra.

HE DICHO.



REFERENCIAS

- [1] M. MENÉNDEZ Y PELAYO: *La ciencia española*. Ed. del C. S. I. C. Madrid. (T. II, pág. 437).
- [2] S. AMADO LÓRIGA: *Tres siglos de influencia del Ejército en el progreso y divulgación de las matemáticas en España*. (Discurso de Ingreso en la Academia): J. ESTEVAN CIRIQUIAN: *Discurso de contestación*. Publicaciones de la Academia de Ciencias. Zaragoza, 1964.
- [3] R. R. V.: *Discurso de contestación*, al de Ingreso en la Academia, de B. R.—SALINAS: *Sobre la teoría de la medida y sus fundamentos*. Publicaciones de la Ac. de C. Zaragoza, 1965.
- [4] F. CIVEIRA OTERMÍN: *La misión de la Universidad y su forma de cumplimiento*. Lección inaugural del Curso Académico 1965-1966. Publ. de la Universidad de Zaragoza.
- [5] C. CASTELFRANCHI: *Física moderna*. Barcelona, 1954 (pág. 491).
- [6] J. ESCOLAR GARCÍA: *Algunas actitudes de la juventud en relación con su problema formativo*. Discurso de Ingreso en la Real Academia de Medicina de Zaragoza. 1965.



## LA APORTACION DE LA INGENIERIA CIVIL AL ACERVO DE LA CULTURA ESPAÑOLA

P O R E L

ILMO. SR. D. ALBERTO VIADER MUÑOZ

### 1. — INTRODUCCION

Excmos. e Ilustrísimos Sres., señoras, señores:

Mis primeras palabras al ocupar esta tribuna han de ser para agradecer a esta docta Corporación la distinción de que me hace objeto y, al mismo tiempo, para rogar disculpa por las muchas faltas que, lógicamente, ha de encontrar en esta disertación.

Creo que tanto mi agradecimiento como mi petición de disculpa tienen la misma justificación, pues mi nombramiento como Académico Numerario es indudablemente un alto e inmerecido honor ya que mi nivel intelectual y cultural es muy inferior al de cualquiera de los ilustres Académicos que me escuchan.

Tan lo creo así, que, en muchas ocasiones, he tenido serias dudas sobre si debía aceptar o no. Me ha animado sólo el hecho de saber que voy a encontrarme rodeado por la amabilidad de todos, y me halaga y obliga el hecho de que mi nombramiento corresponde, en realidad, a un miembro del Cuerpo de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, al cual pertenezco, y, también, que sucedo a otro Académico que ostentaba el mismo título: el Ilmo. Sr. D. Cleto Miguel Mantecón y Arroyo.

### 2. — EL ACADEMICO DON MIGUEL MANTECON ARROYO

También en esta ocasión me considero en manifiesta inferioridad, dado que la historia profesional de mi antecesor no puede ser más brillante.

Desde 1891 en que ingresó al servicio del Estado ocupó distintos cargos en las Jefaturas de Obras Públicas de Avila, Soria y Zaragoza, pasando a la División Hidráulica del Ebro en 1900. Sus merecimientos fueron altamente estimados y en 1905 se le nombró Ingeniero Director de las obras del Pantano de Sta. María de Belsué, ascendiendo a Ingeniero Jefe en 1909, y pasando al Negociado de Puertos de la Dirección General de Obras Pú-



blicas hasta 1913, en que pasó al Negociado de Explotación de Ferrocarriles, volviendo al año siguiente a la Jefatura de Zaragoza como Ingeniero Jefe, y permaneciendo en ella hasta 1924, en que pasó a la situación de Super-numerario para dedicarse a asuntos propios.

Aunque la vida profesional de D. Miguel, al servicio del Estado fue muy brillante, es, a partir del momento en que se dedica a las empresas particulares, cuando, a mi juicio, comienza lo mejor de su actuación profesional, pues, si mi memoria no falla, fue en esas fechas cuando junto con su ilustre compañero D. Félix de los Ríos y con los debidos apoyos financieros creó la Sociedad Constructora Vías y Riegos, S. A. de la cual fue Presidente, y alcanzó en estas actividades la máxima categoría en España dado que, no sólo trabajó esa Empresa en Zaragoza y su región en las obras más importantes, tales como las Azucareras de Luceni, Cortes, Calahorra y Alfaro, la fábrica de Cementos Portland Zaragoza y el ferrocarril Soria-Castejón, la Presa del Pantano del Ebro, etc., sino que llegó, con proyecto, dirección y ejecución de obras a todo el ámbito nacional, adjudicándose en concursos internacionales libres, obras tan importantes como la esclusa del Puerto de Sevilla, incluso el plan de mejoras de sus darsenas y apertura del nuevo cauce por la vega de Triana, que hoy prestan sus servicios, aislando la ciudad de las avenidas del Guadalquivir e interviniendo en otras obras, como, por ejemplo, en Huelva, en los muelles de aquel puerto, que se citan en todos los tratados de cimientos especiales por constituir un avance precursor de la ciencia que hoy llamamos Mecánica del Suelo, ya que por primera vez se empleó la técnica de sustitución de suelos previa prueba de resistencia de los mismos mediante terraplén compresor.

Pero no fue sólo esta actividad de Contratista de Obras Públicas en la que D. Miguel tuvo actuaciones privadas, sino que aquí, en Zaragoza, formó parte del primer Consejo de Administración de la "Teledinámica del Gállego".

Como sabe esta docta Corporación, Eléctricas Reunidas de Zaragoza se constituyó por fusión de varias empresas, siendo las primeras la "Cía. Aragonesa de Electricidad", la "Electra Peral Zaragozana" y "Fuerzas Motrices del Gállego", las cuales constituyeron la que se llamó "Sociedades Eléctricas Reunidas" que nació en noviembre de 1904; y, al unirse a éstas "Teledinámica del Gállego" y "Electroquímica Aragonesa" fundaron la que hoy se llama "Eléctricas Reunidas de Zaragoza" en primero de enero de 1911, y de esta última, D. Miguel Mantecón y Arroyo fue su Presidente desde 1927 a 1936.

Con este esquema de la actuación profesional de D. Miguel queda bien claro que fue un ilustre Ingeniero, cabeza de una dinastía de Ingenieros de Caminos también de gran valía.



### 3. — EL "ARBOR SCIENTIAE"

El análisis de esta vida me ha llevado al conocimiento de que a una Academia de Ciencias Exactas Fisico-Químicas y Naturales pueden pertenecer hombres que no han dedicado sus actividades a la ciencia llamada pura, es decir, a aquella parte de la misma, cuyo estudio no tiene más estímulo que la superación del espíritu mediante el descubrimiento de las leyes que rigen el mundo que nos rodea, e incluso, de nuestro mundo interior, nuestro propio yo.

Por otra parte, al pensar que es difícil definir, dónde termina la ciencia pura y comienza la aplicada, y, dónde están los límites hasta los que llega el ámbito de una cualquiera de sus ramas y comienza el de su colateral, se concluye que, alrededor del "arbor scientiae", cuya pujante vida es inmortal y cuyo crecimiento y ramificación siguen en estos tiempos una ley exponencial, sea necesario agrupar hombres de muy distintas especialidades para lograr con el esfuerzo de todos el mejoramiento de los conocimientos humanos y, consecuentemente, del bienestar común.

Y puesto que estamos reunidos al pie de este corpulento y frondoso árbol, tratemos de escalarlo hasta encontrar la rama correspondiente a la Ingeniería Civil, y veamos cuáles son su ámbito, su importancia, sus entronques, y las aportaciones que ha hecho al acervo de nuestra cultura.

### 4. — LA INGENIERIA CIVIL. SU AMBITO

Claro está que para discriminar cuál es esta rama habremos de definirla previamente, y en el ánimo de todos está, que es aquella que da vida en nuestro país a las actividades de los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Evidentemente esta definición carece de rigor, pero quizá sea la mejor puesto que siendo fácil definir su esencia, resulta difícil precisar sus límites, dado que en muchos puntos roza o se superpone con otras actividades de la Ingeniería y de la Arquitectura.

Así lo demuestran los hechos que, a vía de ejemplo, vamos a comentar.

### 5. — LOS CAMINOS

Refiriéndonos a los caminos, carreteras o autopistas, cuando se trata de su construcción intervienen en primer lugar consideraciones de tipo político y económico, puesto que ellas determinan la necesidad de la nueva obra. Los caminos son conocidos de la humanidad desde tiempo inmemorial: comenzaron por sendas, siguieron por pistas, continuaron, con pavimentos como los de las calzadas romanas y siguieron, mejorando con el tiempo, hasta alcanzar los que todos conocemos y utilizamos en la actualidad. Pero lo mismo en este caso que en cualquier otra rama de la actividad humana a medida que el tiempo pasa, las cosas se complican, y así como aquellas



sendas primitivas, aquellas pistas, aquellas calzadas romanas e incluso las carreteras de Carlos III, no necesitaban más que ser trazadas a ojo por los sitios que parecían más convenientes, hoy, el proyecto de una autopista moderna constituye una verdadera ciencia, y, sin duda, uno de los brotes más importantes de la que nos ocupa.

En efecto, es preciso, no sólo unir dos puntos y tener en cuenta la topografía de los terrenos que ha de atravesar, sino el tráfico para cuyo servicio se crea, es decir, la clase y características de los vehículos, la densidad de su circulación, su origen y destino, la posibilidad y probabilidad de su crecimiento, etc. Una vez en posesión de estos datos, que nos entrega la llamada Ingeniería de Tráfico, se fija la sección transversal de la autopista, que normalmente ha de servir a dos direcciones con un ancho suficiente cada una para el número de canales que determine la densidad de tráfico, las pendientes más adecuadas, las curvas de acuerdo en horizontal y vertical, los peraltes, los pavimentos más indicados, los cruces y enlaces con otros caminos o autopistas, al mismo o a distintos niveles, que algunas veces resultan complicadísimos y exigen verdaderas obras maestras de la Ingeniería moderna, y para todo ello es preciso tener en cuenta, además, modalidades en las que, de momento no se piensa.

Parece como si el problema del trazado quedase resuelto mediante la comparación de presupuestos de varias soluciones; pero para ello no basta con un levantamiento topográfico aéreo, una restitución, unos cálculos, cubriciones y presupuestos con ordenadores electrónicos en los que se tengan en cuenta los movimientos de tierras mínimos o aquellos que ofrezcan una mejor compensación entre desmontes y terraplenes, habida cuenta de las obras de fábrica grandes y pequeñas que sea preciso hacer en cada una de las soluciones estudiadas, es decir, puentes, viaductos, túneles, alcantarillas, muros de contención o de defensa, etc., sino que, también, es preciso tener en consideración los muy diversos tipos de obras según las características de los terrenos y las diversas soluciones que tienen siempre un mismo problema. Igualmente, puede determinar un trazado, el valor de terrenos o instalaciones extremadamente ricos cuya expropiación sea demasiado onerosa, o el deseo de respetar y rendir homenaje a determinados monumentos históricos o artísticos; o atender a conveniencias turísticas.

Es decir que, en la concepción moderna de este antiquísimo medio de comunicación que hemos llamado "caminos" existe una variedad considerabilísima de circunstancias a tener en cuenta en su proyecto: políticas, económicas, históricas, artísticas, turísticas, etc., unas y, otras, técnicas comprensivas de las distintas ramas de la Ingeniería moderna que han de colaborar con la Civil, en los bordes de su típica actividad. Tales son, la Forestal, la Agronómica, la Industrial y la Ingeniería de Minas cuya intervención también puede determinar, como sabemos de algún caso concreto en España, que después de haber hecho estudios muy profundos de Ingeniería Civil de acuerdo con necesidades y conceptos urbanísticos para dar solución a tremendas congestiones de tráfico urbano mediante construcción de variantes importantes en sus vías de comunicación, han aparecido minas de gran importancia en el trazado seleccionado cuya expropiación ha obligado sin ningún género de duda a variar de ideas.



Ya vemos con este simple ejemplo como es preciso una íntima colaboración entre distintas técnicas para determinar un simple trazado privativo siempre, en lo principal, de la Ingeniería Civil.

En cuanto llegamos a pavimentos nos encontramos con otra rama muy especializada en la técnica de la Ingeniería Civil, y muy variada en cuanto a su diversidad. Exige, estudios del suelo muy importantes y previos al proyecto; y a pie de obra, durante la construcción, un laboratorio de análisis y recepción de materiales, dosificación y granulometría de los mismos. compactación, etc., es decir, laboratorios de Química y Mecánica del Suelo. Claro está que para el proyecto del pavimento más adecuado es preciso conocer previamente las sobrecargas a que ha de resistir y las condiciones que le imponen el suelo y el clima.

También entra dentro del ámbito de la Ingeniería Civil el proyecto y construcción de las pistas de aterrizaje, circulación y estacionamiento de aviones en los aeropuertos, cuya técnica se basa en los mismos principios que la de cualquier otro camino con las peculiaridades a que obligan las características de los vehículos que por ellas han de circular, es decir, los aviones. El proyecto y construcción de estos últimos es, sin duda, privativo de la Ingeniería Aeronáutica y ella es, la que debe señalar el trazado más conveniente de las pistas de circulación y despegue, zonas de servicios y superficies de seguridad necesarias, así como las sobrecargas que actúan sobre el pavimento.

## 6. — EL URBANISMO

El urbanismo moderno es otro de los capítulos cada vez más importantes de la clásica Ingeniería Civil enlazado íntimamente con la Arquitectura, pues los problemas recientes que origina el cada día más creciente tráfico obliga a soluciones viales de nueva concepción, que en el caso de ciudades modernas encauza y dirige la circulación según sus características de velocidad, peso y densidad previsibles, por vías independientes de aquellas otras privativas de sectores definidos como residenciales, comerciales, sociales, deportivos, de industria especial o pesada, etc., proporcionando al mismo tiempo los debidos enlaces entre unos y otros que suelen ser muy complicados. También en las ciudades antiguas es preciso aprovechar las centenarias arterias y en ocasiones es preciso construir pasos a distinto nivel unas veces elevados y otras subterráneos; ferrocarriles metropolitanos subterráneos o aéreos para descongestionar el tráfico callejero, etc.

No cabe olvidarnos aquí de las importantes obras de Ingeniería Civil de esas ciudades que, como todas, han nacido al amor de un río y han sabido utilizarlo no sólo para beber sus aguas sino para embellecerse encauzándolo y utilizando sus dos márgenes, uniéndolas por magníficos y en ocasiones bellísimos puentes, construyendo muelles para mercancías y viajeros de tráfico fluvial. Como contrapartida existen, desgraciadamente, otras que viven a espaldas de los mismos y vierten a ellos sus desperdicios con verdadero desprecio de sus posibilidades y olvido de los remedios que esa situación pudiera tener.

Obras urbanísticas típicas de la Ingeniería Civil son también los túneles



que unen las márgenes de los ríos importantes, cuyo cruce por puentes resultaría sumamente oneroso o imposible por motivos de navegación y los que se construyen a beneficio del tráfico solucionando difíciles problemas de cruces viarios; también lo son el abastecimiento y distribución de aguas en las poblaciones y su red de evacuación de aguas negras e incluso las modernas galerías de servicio en las cuales se agrupan todas las canalizaciones de aguas limpias y negras, teléfono, electricidad, gas, calefacción, etcétera que constituyen verdaderas ciudades subterráneas.

## 7. — FERROCARRILES

Si hablamos de ferrocarriles nos encontraremos con los mismos problemas anteriores pero todavía más complicados, puesto que los problemas característicos de la Ingeniería Civil que serían fundamentalmente los de la construcción de la vía con todas sus obras, importantísimas en muchos casos, se encuentran íntimamente ligados con la explotación de los ferrocarriles, lo que implica no sólo conocer y aún dirigir el tráfico, sino también, las características del material móvil y de tracción, sin olvidar que éste tiene características muy diversas, cada una de las cuales necesita medios muy distintos de aprovisionamiento, que han de ser proyectados y construidos adecuadamente.

La correcta planificación del tráfico, la señalización de la vía, la dirección centralizada del movimiento —sistemas CTC y otros— la electrificación, etc., permiten duplicar y aún triplicar la capacidad de transporte de una sola vía. El conocimiento y manejo de estos elementos permite resolver problemas que de otra manera no tendrían solución si no se construyesen dobles vías. A fin de cuentas, como siempre, antes de decidirse por una solución u otra es preciso hacer muchos números y contar con las finanzas.

Aquí nos encontramos otra vez perfectamente ligadas para trabajar en equipo en los límites de lo privativo de la Ingeniería Civil, con todas las ramas de la Ingeniería y con la Arquitectura, dado que a ella corresponde la construcción de los edificios de viajeros, muelles, almacenes y tinglados para el tráfico de mercancías, etc.

## 8. — OBRAS HIDRAULICAS

Si nos fijamos en la palabra "canales", que es el segundo apellido de los Ingenieros de Caminos, veremos que en ella queda sintetizada una inmensa especialidad que podríamos llamar, sin duda, Ingeniería Hidráulica.

En ella están comprendidos el proyecto, construcción, conservación y explotación de las presas de embalse o de derivación, la captación de aguas superficiales o subalveas, las conducciones de las mismas hasta sus puntos de aprovechamiento para usos industriales, agrícolas o ciudadanos, tanto mediante canales a cielo abierto o en conducciones cerradas, con presión o sin ella, incluso, si procede, con estaciones de tratamiento y corrección de las mismas, su distribución y, también, después de utilizadas, sus siste-



mas de evacuación y procedimientos de depuración. La defensa de ciudades y vegas contra la acción continuada de las aguas y durante avenidas mediante las obras pertinentes en cada caso.

Lo mismo que en el caso de los "caminos", en el proyecto, realización y explotación de cualquier obra hidráulica intervienen multitud de factores, principalmente de orden legal, político, social y económico; y ocupan, paradójicamente, el segundo lugar, los estrictamente técnicos.

En todos los casos, es primordial el conocimiento de los recursos hidráulicos que se trata de aprovechar y la necesidad que de los mismos se tenga.

De todos es conocida la gran variabilidad del caudal de un río, especialmente en nuestra Patria, en la que existen algunos que, por causas que no vamos a analizar, tienen avenidas de 10.000 m<sup>3</sup>/seg. y en estiaje se conforman con uno o dos. Es imprescindible en estos casos disponer de embalses de regulación interanual, llamados en otros tiempos hiperembalses, tanto si se desea disponer de estos caudales en la medida y tiempo convenientes como si se trata de defender a las ciudades y comarcas de las terribles inundaciones que con demasiada frecuencia asolan nuestro país.

Para conocer el régimen de un río es preciso disponer de datos de aforos que comprendan el período de tiempo más largo posible; y si, como sucede muchas veces, se carece de ellos se puede llegar a un conocimiento teórico bastante aproximado partiendo de datos pluviométricos, más abundantes hoy día, coeficientes de escorrentía, comparación con ríos vecinos, fórmulas que relacionan unos y otros con las cuencas, etc. El estudio y conocimiento de todo ello pertenece por completo a la Hidrología.

La medida y tiempo en que necesitamos de esas aguas depende de la clase de aprovechamiento. Si se trata de usos industriales el programa de necesidades será muy distinto al correspondiente a usos agrícolas y distinto también al de abastecimiento de aguas para usos domésticos; y más todavía si la necesidad de embalsar se deriva simplemente de la de defensa contra inundaciones.

Dentro de cada uno de estos grandes grupos hay también diferencias notables en el programa de necesidades. Sin embargo, existe la posibilidad y la evidente conveniencia de conjugar los diversos programas refundiéndolos en uno sólo para lograr el aprovechamiento integral de las aguas a lo largo de su curso desde su nacimiento hasta su desembocadura en otro río o directamente en el mar.

Estas mismas posibilidades se dan no sólo en un cauce aislado sino también, cuando se trata de un sistema formado por un caudaloso río y sus afluentes. Por ejemplo, el Ebro.

De la comparación entre el régimen de aportaciones y el programa de necesidades se deduce la capacidad del embalse.

La intuición del Ingeniero, la Topografía y la Geología determinan el lugar o lugares donde es posible embalsar, y mediante la curva de volúmenes entre el cauce y las diferentes cotas se deduce la altura de la presa. Es curioso anotar como la Naturaleza, única determinante de esta curva, sigue en todos los embalses una ley exponencial rigurosamente matemática.

Aunque, a primera vista, parece que el problema de embalsar, tal como se ha expuesto queda ya resuelto pues no hay más que hacer la presa, no es



así ante la multiplicidad de tipos a comparar ya que lo convierten de aparentemente sencillo en realmente complicado.

Hoy se proyectan presas de tierras, de escollera, de materiales sueltos inyectados, de hormigón en masa, armado, pretensado, mixtas, etc., y dentro de cada uno de estos tipos existen múltiples variantes. Por ejemplo, refiriéndonos sólo a las de hormigón en masa cabe hablar de las de gravedad con perfil triangular, con perfil de igual resistencia, arco-gravedad, bóveda de simple o doble curvatura, de anillos independientes, de contrafuertes, aligeradas, etc.; con aliviadero de labio fijo o de compuertas, con toda su gran variedad, en coronación de la presa, con sus amortiguadores de energía al pie de la misma o disponiendo aliviaderos independientes. En ocasiones constituyen también grave problema los dispositivos de toma y desagüe de fondo que han de resolverse en cada caso, lo mismo que el fundamental de tipo de presa, atendiendo a las condiciones geológicas, físicas y mecánicas de la cerrada en donde se piensa construir, teniendo en cuenta, también, el destino ulterior del aprovechamiento.

Con una adecuada presa de embalse o un bien estudiado sistema de ellas se pueden cumplir varios fines simultáneamente como son, producción de energía eléctrica, riego, abastecimientos de aguas para usos domésticos y defensa contra inundaciones.

Si hechos los estudios, más arriba indicados, comparativos entre aportaciones y necesidades, resultase una capacidad de embalse muy pequeña, habríamos de construir una presa de derivación.

Las conducciones de agua desde sus embalses se hacen a presión o sin ella, estando en el primer caso la mayor parte de las conducciones para abastecimiento a las ciudades o poblados, todas las redes de distribución interior de las mismas y las forzadas para aprovechamientos industriales. Las conducciones sin presión, son los canales.

De su importancia, de su trazado ni de las importantes obras que le son características casi no vale la pena hablar, sobre todo en una región como la Aragonesa cuya riqueza agrícola se debe en su mayor parte a los canales de riego y cuya energía eléctrica, motor de su industria, es generada en abundantes saltos hidroeléctricos.

## 9. — LA ENERGÍA ELÉCTRICA

En el caso de estos aprovechamientos el Ingeniero, cuando trata de proyectar y construir uno, se ve obligado a estar en posesión de datos que se refieren a la futura explotación comenzando por conocer el mercado que ha de tener, tanto en cuanto al volumen de energía a producir como a sus curvas diarias, mensuales y anuales de demanda; y como el punto de entrega de ésta se fija por el abonado, también deberá proyectar o, al menos conocer, todas las características del transporte y distribución de la energía para conocer en cada momento, las pérdidas que sumadas a la demanda darán la energía que ha de ponerse en red y producirse.

La explotación de estas empresas, especialmente si se trata de un gran mercado y consecuentemente de una pluralidad de centros de producción



y de redes de transporte y distribución, obliga al Ingeniero en todos los casos a dirigir el tráfico, lo mismo que en las autovías o ferrocarriles, para que obteniendo el mejor aprovechamiento de sus recursos pueda hacer economías y evitar construcciones que podrían ser superabundantes. Hoy en casi todas las naciones la dirección del transporte de energía está centralizada en los llamados repartidores de cargas, que permiten conjugar los recursos totales de la nación obligando a intercambios entre las distintas empresas

Naturalmente, a nadie se le oculta, y muchísimo menos a un tan distinguido auditorio como el que me escucha, que siendo la energía eléctrica en España de procedencia fundamentalmente hidráulica y estando íntimamente ligadas la demanda de energía con la fluencia de las aguas en sus aprovechamientos resulta que los regímenes hidráulicos se ven condicionados a los energéticos y aún a los de protección de ciudades o comarcas contra inundaciones. Estas circunstancias han de tenerse en cuenta no sólo al momento de proyectar sino, también permanentemente, durante la explotación.

## 10. — LOS PUERTOS

El Ingeniero no puede olvidar que en todas sus actividades no hay más que un solo objetivo: servir de la mejor y más económica manera posible el servicio para el cual crea sus realizaciones.

Así en los "puertos", el servicio que se le pide es el característico de una estación de llegada, salida o transbordo de viajeros y mercancías desde un medio de transporte terrestre a otro marítimo o viceversa, con todas las instalaciones requeridas por esos fines.

Así, a los medios marítimos, los buques, ha de servirles con los dispositivos de atraque, abrigo, carga, descarga, aprovisionamiento, pertrechos, construcción y reparaciones que le son necesarios, faros, balizas, etc.

Igualmente a los medios terrestres, de cuanto necesitan incluso edificios de almacenes, estaciones marítimas de viajeros, lonjas para pescado, fábricas de hielo, frigoríficos y en ocasiones complicadas instalaciones de transbordo de minerales, etc.

Las primeras obras que se construyeron en los puertos fueron las de atraque, limitadas inicialmente a simples muelles o pantalanés de madera, suficientes para el servicio de pequeñas embarcaciones en el interior de puertos naturales o aprovechando el abrigo de los ríos tierra adentro.

Hoy las obras de atraque que se construyen son muy variadas y a veces de muy difícil ejecución vencida sólo por la técnica.

El tipo más adecuado de las mismas depende en primer lugar del servicio para el que se crean, del desplazamiento de los barcos que han de atracar, del terreno sobre el cual han de cimentarse, de los materiales de que se dispone para su construcción o en ocasiones, del plazo de ejecución.

Así nos encontramos con los muelles de atraque constituidos por grandes bloques de hormigón en masa prefabricados en tierra y simplemente colocados in situ con pesos de 60 a 80 toneladas y de forma adecuada para



resistir los empujes de trasdos de los rellenos, los impactos del atraque, y el tiro sobre bolardos, con cimientos generalmente de escollera y superestructura de hormigón o, antiguamente, de mampostería, a través de las cuales se establece una verdadera galería de servicios. Este mismo tipo de muelle se construye también con cajones de hormigón armado contruidos en gradas o varaderos ad hoc, flotados remolcados y hechos naufragar en su emplazamiento definitivo y finalmente rellenos hasta alcanzar el peso necesario para resistir a las solicitudes externas que le son características.

También se construyen con tablestacas de aceros especiales y anclajes en trasdos cuando los calados son grandes o mediante recintos de planta circular. En nuestra Patria se ha construido este tipo de muelle comercial para pequeños calados con pleno éxito empleando la técnica de los pilotes de hormigón armado in situ.

Otro tipo empleado en España es el aligerado constituido por pilas y bóvedas de puente de espesores adecuados aunque ha sido desechado en los puertos cuya carrera de marea era demasiado grande.

El hormigón armado en cuya técnica nuestro país ha alcanzado la mayor cotización ha permitido la construcción de muy económicos muelles pesqueros sobre pilotes del mismo material hincados a percusión, e igualmente, la de pantalanos algunos de los cuales se adentra en mar abierta más de 800 m. protegiéndose por Duques de Alba que proporcionan al mismo tiempo magnífico amarre y posibilidad de maniobra.

La primera obra portuaria es como decimos el muelle; pero aquellas que exigen mayor conocimiento de la mar con todas sus características de olas, mareas, corrientes, resacas, arrastres, temporales, etc. son los diques de abrigo que comenzaron a ser necesarios al hombre en cuanto hubo de utilizar puertos no naturales carentes del mismo.

El proyecto de los diques de abrigo ha constituido una de las mayores preocupaciones de la humanidad, pues es difícil determinar cuál es su sección transversal más adecuada para resistir la violencia de los temporales habida cuenta de los fondos, lo que exige conocimientos geográficos, geológicos y meteorológicos muy profundos; y en cuanto a su trazado en planta podemos decir que sólo en nuestros días se ha podido establecer una teoría matemática y científica, debida a un eminentísimo Ingeniero español, que por primera vez en la historia de la humanidad ha reducido a fórmulas y ha dominado los mares consiguiendo que cuando en alta mar hay tremendas tempestades que hacen zozobrar las embarcaciones, dentro del puerto reine la calma gracias al abrigo de sus bien proyectados diques que, por añadidura, protegen sus dársenas de los aterramientos por arrastres de arenas que los invadían en otros tiempos.

Además de estas obras fundamentales existen otras características de los puertos, que pareciendo complementarias son en ocasiones tan importantes y de difícil ejecución como las primeras. Tales son los diques secos de carena, las gradas de construcción, los varaderos, los faros, balizas, etcétera.

Señores Académicos: la técnica portuaria es sumamente sugestiva. Podríamos hablar de sus particularidades durante mucho tiempo y es preciso abreviar. Por ello no voy a mencionar las instalaciones de tierra adentro



que han de proporcionar al viajero o a la mercancía lo que los ingleses llaman "facilities", es decir, cuantos servicios son necesarios en una estación de transbordo, que esto y no otra cosa es un puerto. En ellos volvemos a encontrarnos con problemas urbanísticos, arquitectónicos, comerciales, aduaneros, policiales, viales y ferroviarios.

## 11. — ESTRUCTURAS

De lo dicho anteriormente, que es una simple exposición del significado que en nuestro título tienen las palabras "Caminos", "Canales" y "Puertos" se deduce cuál es el contenido de nuestra profesión al menos en su parte externa; pero repasando conceptos se ve claramente cómo el Ingeniero Civil ha de poseer muy amplios y profundos conocimientos del cálculo de estructuras ya que son muchas y variadas las que necesita proyectar como parte integrante y a veces singular de cualquiera de sus realizaciones. Es tan amplio este campo que constituye una verdadera especialidad dentro de nuestras actividades y, desde luego, una de las más difíciles de poseer hasta el punto de que dentro de ella hay especialistas de las distintas clases decimientos y superestructuras según sus materiales, según sus formas, según sus objetivos, sus método de contrucción, etc.

## 12. — ACCION EMPRESARIAL E INDUSTRIAL

Del mismo examen se deduce, igualmente, como el Ingeniero civil cuando resuelve los complicados problemas que presenta la explotación de cualquier sistema de comunicaciones y transportes, de riegos, de producción y distribución de energía eléctrica, servicios de puertos, etc. ha de tener amplios conocimientos de organización, desarrollo y actividad de empresas que, llegando a su madurez ha de dirigir.

Entre las industrias que le son más características está la de la construcción en cuyo campo militan hoy más del 25 % de los Ingenieros civiles españoles. Dificil profesión la del Contratista, nunca suficientemente apreciada por cuanto exige para su mejor desarrollo profundos conocimientos de los métodos de construcción, de la variadísima maquinaria, de la organización de las obras y de su empresa, legislación laboral, contractual, fiscal, empresarial y por si esto fuera poco ha de conocer perfectamente el arte y ciencia de proyectar con pleno conocimiento de aquello que se le exige, y acude, en ocasiones, con proyectos propios a concursos abiertos que le permiten, caso de adjudicación, mejores beneficios y la mayor consideración.

## 13. — IMPORTANCIA DE LA INGENIERIA CIVIL

Hasta ahora, señores, sólo hemos hablado de la Ingeniería Civil en términos generales, pretendiendo definir cuál es esta rama del "arbor scientiae" refiriéndonos a su especial campo de acción; y esta simple ex-



posición, o enumeración de actividades, parece bastante para proclamar su importancia y trascendencia en la gran revolución tecnológica que caracteriza la cultura de nuestros días.

#### 14. — CIENCIAS BÁSICAS Y AUXILIARES

Nuestra Ciencia, vemos se apoya en otras muchas: unas, ya clásicas, y otras de reciente nacimiento. Pero en todas, prácticamente por igual.

Podemos asegurar que arranca del tronco común de la Filosofía sin cuya ayuda, especialmente de la Lógica, no podría concebir ninguna de sus realizaciones; y se apoya fuertemente en la Matemática, la Física y la Química, en su teórica; pero en la práctica ha de depurarse en las Ciencias Económicas, en la Sociología y en el conocimiento del Derecho; y si quiere brillar a la altura que debe, también debe dominar la Lingüística, el Arte y la Historia.

Efectivamente, la Matemática y la Física son fundamentales: la primera, en todas sus partes ya que es herramienta indispensable para el Ingeniero: la segunda, en aquellos que eran brotes hace sólo pocos años y son hoy verdaderas y corpulentas ramas como la Estática clásica, la Resistencia de los sólidos, la Mecánica Elástica, la Plástica de los mismos; la Dinámica y Cinemática, la Mecánica de los fluidos enlazada con la Energética, la Termodinámica, las Ciencias Nucleares, etc. La Química, en cuanto a composición de los materiales que utiliza, cada día más variados y variables en sus propiedades, los combustibles sólidos, líquidos y gaseosos, etc. Necesita también de la Geología, Geografía Física, Hidrografía, Hidrología, Mecánica de los Suelos, de las Rocas, etc. en cuanto a su teórica.

En la práctica, en sus realizaciones, roza siempre con problemas sociales que ha de conocer a fondo, y ha de enfrentarse con la legislación administrativa, contractual, comercial, laboral, fiscal, práctica financiera, etc. Y después de servir de todos estos conocimientos —y no sé si se me habrá escapado alguno— antes de llevar a la realidad ninguno de sus frutos ha de consolidarlos mediante justificaciones de viabilidad en cuyo estudio entran de lleno las Ciencias Económicas, Sociológicas y, a veces, Históricas.

Y como el mundo en que vivimos se hace cada vez más pequeño a virtud de las mejores comunicaciones —debidas en parte a la Ingeniería Civil— también el Ingeniero, como cualquier científico de nuestros días, ha de ser un buen políglota si quiere estar debidamente informado de cuanto ocurre a su alrededor.

#### 15. — APORTACIONES A OTRAS CIENCIAS

Señores: hemos visto lo que recibe de otras ramas de la ciencia. Consignemos ahora sus aportaciones a otras, aparentemente muy distantes.

La Historia, en su rama dedicada a la cultura, se nutre no sólo de valiosos códices escritos, sino también del estudio e interpretación de monumentos de la Ingeniería y Arquitectura de otros tiempos que llegan a nues-



tros días. Así, por ejemplo, no podremos tener una idea clara de la organización, ni de la vida de la España Romana si no tenemos en cuenta sus calzadas cuyo estudio permitió, en fechas no muy lejanas, el descubrimiento de Numancia hecho por Saavedra, a la sazón Ingeniero de Obras Públicas de Soria. Tampoco podemos olvidar los magníficos puentes y acueductos de los romanos existentes hoy en nuestra Patria, como son el de Alcántara (Cáceres) sobre el Tajo construido reinando Trajano, con longitud de 194 m. y altura de 56 m. sobre el cauce; el de Mérida, sobre el Guadiana, con 780 m. de longitud; el acueducto romano de Mérida con 6 km. de longitud total y 140 arcos que todavía presta servicio; el de Segovia, con 766 m. de longitud y 28 de altura máxima, constituido por 165 arcos de 5 m. y aproximadamente 2500 sillares sentados sin mortero; el acueducto de Tarragona, con 217 m. de longitud, etc.

Si pasamos a la Edad Media nos encontramos con puentes todavía en servicio como son los de Zamora y Ricobayo del siglo xiii; el de Alcántara en Toledo, que los árabes encontraron ya construido aunque tuvieron que repararlo y prácticamente reconstruirlo; el de San Martín también en Toledo con el arco de mayor luz en puentes de piedra en España pues alcanza a 39,75 m. reconstruido entre 1376 y 1399; y entre otros muchos, nuestro Puente de Piedra que data de 1437 con un arco central de 35 m. que es el mayor de los siete de que consta.

Lo mismo cabe decir de las presas romanas de Proserpina y Cornalvo, y de las de los siglos xv y xvi que fueron las primeras que se construyeron en Europa, alguna, la de Tibi, en el río Monegre cerca de Alicante con 45 m. de altura y la de Relleu, en el río Amadorio (Alicante) con el moderno concepto de presa bóveda aunque perteneciente al siglo xvii.

El constante contacto de la Ingeniería que nos ocupa con el Derecho le ha permitido aportaciones interesantes al administrativo y contractual y muy valiosas y trascendentales a la legislación de aguas cuya bondad es tal que la Ley de Aguas se hace invulnerable a la erosión de los tiempos.

Su intervención en el campo de la Economía es evidente y trascendental pues no es preciso insistir en el hecho de que su finalidad primordial es la creación y acrecentamiento de la riqueza del país; véase si no qué efectos producen los caminos, canales y puertos en la vida de la nación.

La necesidad de intervenir en la explotación de aquellos sistemas de riegos, de aprovechamiento de la energía hidráulica, de ferrocarriles, autopistas, puertos, en la gerencia de las industrias de construcción y de fabricación de los materiales que emplea en sus obras, etc., es decir, de todo aquello que ha sido fruto de su imaginación creadora, ha obligado al Ingeniero a tomar contacto con las Ciencias Empresariales y a ellas ha aportado su trabajo y su experiencia.

Y al hacer mención de aportaciones a otras disciplinas que no le son características no tengo más remedio que recordar nuestra Escuela, en la que pasamos los mejores años de nuestra juventud y aprendimos, en medio de un ambiente de máxima pulcritud, honestidad profesional y espíritu de sacrificio de su profesorado, lo que necesitábamos para nuestro porvenir y, también, lo que la Ingeniería Civil, a través de esta Escuela, aportaba a la Pedagogía. En aquel centro docente, había tantos profesores como asigna-



turas. Se comenzaban las clases el 1.º de octubre y terminaban cuando el profesor había dado personalmente todas sus lecciones, durante las cuales el alumno estaba en plena libertad de diálogo con su profesor quien acompañaba en los viajes de prácticas a sus alumnos, les conocía y venía a ser un verdadero y fraternal amigo. En aquella Escuela había muchos alumnos becarios cuyo nombre no era conocido por los demás y el importe de sus becas les permitía no sólo estudiar sino vivir en pensiones de categoría normal estudiantil. También había varios premios para estímulo de los buenos estudiantes y uno, muy estimado —el Escalona— al compañerismo.

## 16. — SUS REALIZACIONES

La obra del Ingeniero puede valorarse, entre otras, de dos maneras: la primera, por su impacto en la economía; la segunda, por su valor científico dentro de su técnica.

Dentro de la primera valoración se encuentran, y con gran peso, las aportaciones hechas al organigrama de la Nación, es decir, el montaje y explotación de grandes Empresas Ferroviarias, Hidroeléctricas, de la Construcción, etc. y aquellas realizaciones estatales que mediante la legislación adecuada han dado vida a nuestras carreteras y puertos, solución a graves y complicados problemas urbanísticos, y, lo que es más importante, a nuestros sistemas de riegos. Esta es la gran aportación de la Ingeniería Civil a nuestra Cultura: la creación y explotación de riqueza.

Sin embargo, la otra vertiente, la científica, dentro de su técnica, necesita de cierta propaganda —valga la palabra— para ser conocida.

Las obras que, en cada caso particular, han resuelto complicados problemas, minimizados muchas veces por la trascendencia de los planes generales son propias de autores que rayan a la mayor altura internacional.

Así, merecen recordarse, las presas españolas de las que podemos enorgullecernos no sólo por ser nuestro país uno de los primeros en construirlas, sino porque hoy poseemos dentro de nuestra pequeña superficie, cerca de 400 de las calificadas como "grandes", figura España en cualquier estadística de presas entre los primeros países.

Así en el Congreso Internacional de Grandes Presas celebrado en Edimburgo en abril de 1964 se comprobó que sólo aventajaban a nuestro país Estados Unidos y Japón y con muy pequeña ventaja que seguramente habrán perdido hoy la India e Italia. Las más altas son, la de Camasara, en el Noguera Pallaresa, terminada en 1922 con 95 m. de altura, la mayor del mundo en su tiempo; la de Ricobayo, en el Esla con 99 m. también la mayor de sus tiempos en 1934; la Cohilla, en el Nansa, bóveda valientísima con 115 m. terminada en 1950; Escalles, en la Noguera Ribagorzana con 125 m. en 1955; San Esteban, en el Sil con 115 m. también en 1955; Salime, en el Navia con 134 m. en 1956; Eume, impresionante bóveda de doble curvatura con aliviadero de labio libre en coronación con 103 m. sobre el río del mismo nombre, inaugurada en 1959; Bao, en el Bibey con 108 m. y Barcena, en el Sil también de 18 m. puestas ambas en servicio en 1960; Canelles, de 150 m. en el Noguera Ribagorzana, terminada en



1960; Santa Ana, en el mismo río inaugurada en 1961 con 101 m.; Aldeadavila, en el Duero con 130 m. en servicio en 1964; Belesar, en el Miño bóveda con 126 m.; y en construcción las de Tous en el Júcar con 110 m.; Contreras, en el Cabriel con 122 m.; Iznajar, en el Genil con 119; Matalavilla, en el Valseco con 114 m.; Valdecañas, en el Tajo, con 135 m.; Quentar, en el Aguas Blancas con 107 m. y la mayor de España, hoy en sus comienzos; la de Villariño o, de la Almendra, en el Tormes, con más de 3 km. de longitud y altura en su parte central de 202 m.

Mayor altura que esta tienen solamente 10 en el mundo; de ellas la mayor, la Grande Dixence, en Suiza, con 287 m.

España ha ido siempre en vanguardia en las presas que no han de medirse sólo por su altura; aquí cerca, tenemos la presa de la Sotonera, de 38 m., construida con tierras y cerca de 4 km. de longitud y volumen de 4.000.000 m.<sup>3</sup> que fue en su día, la mayor del mundo en su clase. Las presas de contrafuertes fueron también patrimonio inicial de España con la de Burgomillodo; y en las de escollera, tenemos en proyecto o construcción las de Portodemuros, Guadalteba y Guadajoz con 90 m. de altura cada una.

La evolución y promoción de nuestras presas es paralela al consumo de electricidad. En su técnica es en la que ha brillado más el nombre de España.

Como obras sobresalientes en otras especialidades podemos citar en el hormigón armado: los sifones de Albelda y del Sosa, los de mayor diámetro y presión del mundo en su día; los del Guadalete por su original forma, antifunicular de sobrecargas e isorresistencia; la técnica de ciomientos con cajones de hormigón armado flotables e hincados por aire comprimido, puente de San Telmo en Sevilla, de María Cristina en San Sebastián y otros; los cajones flotantes de hormigón armado que ensamblados a flote y debidamente fondeados constituyen hoy los cajeros y soleras del dique de carena de Nuestra Señora del Rosario en Cádiz y que fueron los mayores del mundo. También esta técnica de cajones flotantes de hormigón armado ha sido utilizada con gran éxito y enorme longitud de transporte en alta mar en los diques de abrigo y atraque del puerto de Tarifa.

En puentes y acueductos posee España una gran riqueza, continuada desde los romanos y los árabes. Para no citar más, mencionaremos sólo el puente Martín Gil sobre el Esla, para ferrocarril con el arco que en su día fue entre los de hormigón el mayor del mundo, con 209 m. de luz, sobrepasado hoy solamente por el Sandö, de 260 m. en Suecia, el de la Rábida en Oporto con 270 m. y el de Gladsville en Sydney (Australia) con 300 m.

Como acueductos hemos de citar especialmente el de Allos en hormigón pretensado, verdadera maravilla de concepción intuitiva únicamente por un excepcional calculista de estructuras, y el de Tardienta por su longitud, ambos cerca de aquí.

En cubiertas laminares hemos de citar especialmente las del Mercado de Algeciras, la mayor del mundo en su clase —cúpula de 47,80 m. de diámetro y 9 cm. de espesor, con lucernario zenital y apoyo en 8 puntos, y la que cubrió inicialmente el frontón Recoletos de Madrid que con



8 cm. de espesor cubría en planta un rectángulo de  $55 \times 32,5$  m. mediante una lámina cilíndrica de generatrices horizontales y directriz formada por dos arcos de círculo de desigual radio.

Otras muchas realizaciones merecerían nuestro recuerdo con especial mención; pero su lista sería demasiado larga para tan reducido espacio.

## 17. — SUS HOMBRES

Permítaseme señores que, para finalizar, dedique un pequeño recuerdo a aquellas estrellas de primera magnitud que han dado brillo a nuestra profesión.

La primera de ellas es don AGUSTÍN DE BETANCOURT, fundador de nuestra Escuela y, por tanto, del Cuerpo. Nació en Puerto de la Cruz (Tenerife) en 1758 y falleció en San Petersburgo en 1824. Los estudios que hizo en su juventud fueron muy variados y todos brillantísimos, en España, en Francia y en Inglaterra. En 1802, a propuesta suya, Ceballos, Ministro de Estado, creó nuestra Escuela. La vida de Betancourt es digna de estudio pues si en nuestros tiempos parece interesante trabajar en nuestro país y fuera del mismo, mucho más lo era entonces que se carecía de las comunicaciones y medios de propaganda de hoy. Pues bien, Betancourt trabajó en Francia e Inglaterra y durante sus quince últimos años en Rusia al servicio del zar Alejandro I y fue su Director General de las vías de comunicación del Imperio, Teniente General de su ejército y fundó las Escuelas de Ingenieros Hidráulicos y de Ciencias Exactas de San Petersburgo y tomó parte en la reconstrucción de Moscú después de su incendio en 1812.

Si la figura de Betancourt es conocida por todos los que han tenido contacto con nuestra profesión, la de ILDEFONSO CERDÁ no lo es tanto. Y sin embargo a él debe Barcelona su espléndido plan urbanístico y fue el gran precursor del Urbanismo moderno en España. Su figura fue humilde en todo momento y en los finales de su vida, entregada toda ella al estudio, pasó apuros y estrecheces económicas. Nació en diciembre de 1816 en Santa Coloma de Centellas y falleció en agosto de 1876 en Caldas de Besaya. Cuando concibió su plan urbanístico, en 1860, Barcelona contaba con unos 300.000 habitantes y estaba encerrada en sus murallas por lo que la primera dificultad que hubo de vencer fue su derribo a pesar de la fuerte resistencia militar. Parece mentira cómo pudo concebir un ancho y disposición de calles que todavía hoy sigue siendo bueno a pesar de que en aquellos tiempos era imposible prever que cada ciudadano necesitase para pasear por la calle cinco metros cuadrados y circulase a 60 kilómetros hora; parece mentira cómo supo justificar un coeficiente de edificabilidad de  $6,4 \text{ m.}^3/\text{m.}^2$ ; unos chaflanes que permiten un conjunto arquitectónico muy armonioso y al mismo tiempo una visibilidad que evita riesgos en el día de hoy; cómo dispuso las líneas de fachada a  $45^\circ$  con el meridiano para permitir la máxima insolación; cómo logró las proporciones vigentes hoy entre zonas verdes, edificables, superficies de manzana, etc. Podemos afirmar que Cerdá es el gran precursor del Urbanismo moderno y así lo acreditan no sólo la espléndida ciudad de Barcelona que



no ha llegado a construirse exactamente con arreglo a aquel gran plan sino su propia obra "Teoría General de la Urbanización". En 1959 al cumplirse el centenario de este plan, Barcelona celebró un Congreso de Jornadas Urbanísticas y rindió homenaje a tan destacado Ingeniero.

A nadie puede escapar ni es preciso ponderar la gran personalidad de don JOSÉ DE ECHEGARAY. Nació en Madrid en 1832 hijo de padre aragonés, de Zaragoza. Fue excelente Ingeniero y profesor de Geometría Descriptiva, Estereotomía, Cálculo Diferencial e Integral, Mecánica Racional, Mecánica aplicada a las construcciones y, también, de Hidráulica. Como literato, nada hemos de decir aquí ni tampoco de su labor política: baste recordar que fue el creador del Banco de España cuando era Ministro de Hacienda. También lo fue, de Fomento. La personalidad de Echegaray más conocida por los españoles por su premio Nobel de literatura, corresponde en realidad a la de un gran matemático; y a la gran pasión que despiertan estas ciencias en quien las practica dedicó lo mejor de su vida. Fue miembro de la Academia de Madrid y llegó a ser su Presidente. También perteneció a la Academia de la Lengua. Según Rey Pastor, se debe a nuestra Escuela el resurgir de las Matemáticas en España, en 1802, y principalmente a Echegaray a partir de 1853. En 1911 Echegaray con Rey Pastor fundaron la "Sociedad Matemática Española" cuya primera presidencia ostentó Echegaray el cual estimuló a la juventud de entonces al cultivo de la Matemática pura "amor de mis amores —dijo— que las necesidades de la vida y la fuerza mayor de los acontecimientos me hicieron abandonar".

Uno de los últimos acontecimientos en que tomó parte Echegaray como Presidente de la Academia de Ciencias fue la imposición de la medalla a don LEONARDO TORRES QUEVEDO, otra de las glorias de nuestro Cuerpo.

Nació don Leonardo en 1852 y falleció en Madrid en 1936. Fue hijo, padre y abuelo de Ingenieros de Caminos. Es el gran precursor de la Automática. Todas sus grandes concepciones y realizaciones llevan el sello inconfundible de su personalidad. Así sus primeras máquinas algébricas para resolución de ecuaciones fueron las que por primera vez llegaron a resultados prácticos mereciendo informes altamente laudatorios de la Academia de Ciencias de Madrid y de la de París que ordenó la inserción de la Memoria de Torres Quevedo en el *Recueil des Savants Etrangers*. El dirigible ideado por él, con quilla y armadura interior, en el que la estabilidad de forma se lograba, con elementos flexibles, por la presión interior fue patentado y se explotó por la casa Astra con el nombre del dirigible Astra-Torres. El Gobierno español puso a su disposición un laboratorio que se llamó inicialmente de Mecánica Aplicada y, después, por indicación suya, cambió su nombre por el de Laboratorio de Automática. Fue uno de sus inventos más interesantes el Telekino cuyas pruebas realizó en el estanque del Retiro consistentes en dirigir a distancia el timón de una nave y acelerar sus motores hasta la velocidad deseada. Merece especial mención su Jugador automático de ajedrez que da mate con Rey y Torre blanca al Rey negro en un mínimo de jugadas avisando los jaques y denunciando los errores de su contrincante.

D. JOSÉ EUGENIO RIBERA, nacido en 1864 comenzó su vida profesional



en la Jefatura de Obras Públicas de Oviedo en la que permaneció durante doce años. En aquella época tuvo ocasión de proyectar y dirigir la construcción de importantes puentes que fueron el preludio de los más de 500 que hubo de construir después y le llevaron a la cátedra de Puentes y Cimentaciones de nuestra Escuela. Su gran obra fue la introducción en España del hormigón armado como material de construcción y, sobre todo, la creación de grandes empresas de contratas. Entre sus obras más resonantes se cuentan los sifones del Sosa y Albelda en el canal de Aragón y Cataluña que en su tiempo fueron los de mayor diámetro del mundo pues tenían 3,80 m. con presión de 28 m. de agua y 1,018 m. de longitud. el primero y 4,00 m. de diámetro el segundo con 720 m. de longitud y 40 m. de presión.

Su gran genio le permitió incorporar a sus proyectos las ideas propias del constructor y entre otros dispositivos ingeniosos ideó las cimbras rígidas, que deberían llamarse cimbras Ribera pues su hallazgo constituyó en su tiempo un gran adelanto. Así pudo construir el acueducto del Chorro en 1907 cerca de Málaga a 100 m. de altura sobre el cauce que de otra manera habrían necesitado difíciles y costosísimas cimbras de madera. Esta misma asociación de ideas del constructor y del proyectista le permitió dar un gran avance a la técnica de cimientos por aire comprimido pues fue él el primero en utilizar cajones flotantes de hormigón armado en el puente de María Cristina en San Sebastián, en el de San Telmo en Sevilla y en otros muchos hasta generalizar este procedimiento en España en mucha mayor proporción que en el extranjero. También mediante cajones flotantes de hormigón armado soldados a flote y hechos naufragar in situ proyectó el dique seco de carena de Nuestra Señora dei Rosario en Cádiz para barcos de 250 m. de eslora. También introdujo la técnica de cajones flotantes en la construcción de diques verticales de abrigo en los puertos.

Ribera fue ante todo un gran profesor y su nombre y su época van ligados al nombre de ZAFRA que fue el gran teórico del hormigón armado mientras Ribera fue el práctico, el intuitivo genial.

Ribera, al jubilarse estableció en su última clase su propio balance profesional. Expresó con sinceridad sus errores y también sus aciertos y dijo a sus alumnos "aunque sepáis mucha Matemática no incurrais en pedantería, pues más que problemas científicos tendréis que poner a contribución el buen sentido; más que sabios deberéis ser gerentes; antes que Ingenieros deberéis ser hombre y ciudadanos". También dijo en aquella memorable conferencia, publicada en la Revista de Obras Públicas de 1931, que lo más importante en la vida es "la íntima satisfacción del deber cumplido".

Otro de los grandes profesores de nuestra Escuela —y ha habido muchos— fue don JOSÉ LUIS GÓMEZ NAVARRO el cual, aparte sus trabajos como proyectista y constructor de saltos hidroeléctricos y fundador de una empresa tan importante como Boeticher y Navarro fue ante todo, como he dicho antes, un gran profesor. Su obra "Saltos de Agua y Presas de Embalse" alcanzó tiradas inmensas y sirvió y sigue sirviendo de norma a todos los proyectistas hispanoparlantes, y a los que hablan y piensan en otros idiomas.



En una Academia de Ciencias Exactas parece imposible acabar esta disertación sin mencionar a otro Ingeniero de Caminos, notabilísimo matemático y excelente profesor de Hidráulica Teórica como fue don PEDRO MARÍA GONZÁLEZ QUIJANO, académico muy ilustre de la de Madrid. Nació en Jerez de la Frontera en 1870 y allí una vez terminada su carrera y tras un breve plazo de ejercicio en Murcia estudió y construyó el Pantano de Guadalcaçín con sus sistemas de canales en los que intercaló sus famosos sifones invertidos, vulgarmente conocidos por "las asas". Obra audaz, original e impresionante. Tan impresionante como la contemplación de los más famosos monumentos arquitectónicos de la antigüedad. En 1924 fue nombrado profesor de Hidráulica Teórica e Hidrología que explicó desde el primer momento con tal rigor matemático que sus alumnos no podían menos de admirarse al contemplar una gotita de agua y pensar que en ella se contenían infinidad de integrales triples. El cálculo de probabilidades, aplicado a los fenómenos pluviométricos y a las corrientes fluviales fue una de sus mayores actividades. En "Madrid Científico" publicó en 1894 su "Representación gráfica de los lugares hipergeométricos" y en 1922 hubo de publicar en la Revista de la Academia una respuesta Maurice d'Ocagne que había creído descubrir un sistema muy parecido al anterior que reconoció desconocer. Este trabajo lo tituló "Sobre un sistema de geometría descriptiva del hiperespacio". En 1915 presentó al Congreso de Valladolid el trabajo titulado "Sobre algunas funciones continuas con infinitas singularidades en el menor intervalo". Funciones continuas sin derivada sólo eran conocidas entonces las de Riemann y la de Weierstrasse y Rey Pastor la popularizó con el nombre de "función Quijano". Publicó muchos otros trabajos de Matemática Pura y entre ellos destaca el dedicado al "espacio de un número fraccionario de dimensiones". Ingresó en la Academia de Ciencias en 1925 y llegó a ocupar la Presidencia de la Sección de Exactas.

GUADALHORCE, don Rafael Benjumea nació en 1876 y una vez terminada su carrera en 1901 casó con una distinguida dama malagueña y allí fijó su residencia y comenzó su vida profesional con algo que hoy es un axioma, cual es el conjugar los riegos con la producción de energía eléctrica. Gracias a su gestión se crearon el Sindicato Agrícola del Guadalhorce y la Hidroeléctrica del Chorro, y se construyeron la presa del embalse del Chorro, la del Gaitanejo, los dos saltos del mismo nombre y la presa de derivación y canal para riegos de la margen derecha del Guadalhorce.

Estas obras guardan y guardarán siempre la personalidad de don Rafael que fue no sólo el gran hombre de acción y gran político que todos conocemos sino, también, un gran Ingeniero y un gran artista. Baste recordar el paramento de aguas abajo de la presa del Chorro en calizas rosa coronadas con bellísimos arcos de sillarejo blanco y trazado personal o los efectos del paso de avenidas en el Gaitanejo sobre el techo abovedado de la central del mismo nombre contemplados desde el interior de la casa de máquinas formada por la bóveda mencionada y otros dos que son su piso y la propia presa.

Estas singulares realizaciones obligaron a don Alfonso XIII, que las



inauguró, a dar el título de Conde de Guadalhorce a aquel distinguidísimo Ingeniero que fue el primero que recibió un título nobiliario como recompensa a su labor profesional.

Pero la gigantesca obra de Guadalhorce es su gestión al frente del Ministerio de Fomento. Allí creó el "Circuito de firmes especiales" que elaboró y realizó con gran rapidez un plan para las carreteras principales españolas que todavía hoy sigue prestando sus servicios; allí promovió el plan de ferrocarriles, algunos de los cuales todavía están en período de realización, y para mejora de los entonces existentes logró la ayuda estatal; desde allí fundó las Confederaciones Sindicales Hidrográficas que no sólo por su concepción teórica sino por su realización práctica fueron un modelo inolvidable. Aquí tenemos la del Ebro, que fue la primera y la mejor dirigida y sobre cuya organización y estructura se basaron las demás. Tuvo Guadalhorce el acierto de poner al frente de la misma a un Ingeniero tan distinguido como Lorenzo Pardo cuyo nombre quedó vinculado para siempre al del Conde de Guadalhorce.

Las Confederaciones tal como fueron organizadas y concebidas permitieron conjugar las iniciativas de las Corporaciones, Comunidades de Regantes, Empresas y Entidades para aprovechar los recursos hidráulicos al máximo mediante un proceso metódico, científico y ordenado.

En el orden internacional se establecieron durante su mandato los acuerdos con Portugal para aprovechamiento del Duero internacional que ha permitido beneficiar a ambos países con los saltos hidroeléctricos mayores de Europa.

A la caída de la Dictadura, en el exilio, no dejó de trabajar con su ímpetu característico y construyó en Buenos Aires cuatro líneas del ferrocarril Metropolitano. Comenzó las obras en 1933 y en 1938 había puesto en explotación 16,5 km. de líneas. Fuerte fue su lucha para lograrlo; pero venció.

A su regreso a España ocupó la Presidencia de la RENFE en la que dejó sentir inmediatamente su personalidad y fue nombrado también Presidente Honorario del Consejo de Obras Públicas.

En esta relación de Ingenieros ilustres no podemos dejar de hacer especial mención de don MANUEL LORENZO PARDO al que ya hemos aludido como primer y excelente director de nuestra Confederación del Ebro y miembro de esta Academia. No mencionaré, por ser de todos conocida, su obra en el Ebro. Sí voy a recordar que en su Plan Nacional de Obras Hidráulicas sugirió por vez primera el aprovechamiento para riegos de Castellón, Alicante, Murcia y Almería de aguas de otras cuencas mediante los debidos trasvases. Fue un gran trabajador y luchador infatigable. Publicó gran número de obras demostrativas del acierto de sus ideas y pronunció conferencias en todas las tribunas desde donde podía ilustrar a sus auditorios y difundir sus ideas.

Claro está que no disponemos del tiempo suficiente para hacer mayor mención de los méritos de los ya aludidos Ingenieros y por fuerza hemos de prescindir de otros muchos, algunos de los cuales hicieron aportaciones importantes al acervo de nuestra cultura: por ejemplo, Otamendi y Mendoza con el Metro de Madrid, Félix de los Ríos con sus Riegos del



Alto Aragón y su creación y explotación de la Empresa Vías y Riegos, S. A., junto con Mantecón logrando los mayores éxitos en toda España: Orbegozo, creador de Iberduero; Maristany, Rahola, Boix, etc. No digamos nada de Rafo y Rivera, autores del proyecto del Canal de Isabel II ni de don Lucio del Valle su primer director.

Mencionaremos, eso sí, a una de las figuras cumbre de nuestra Ingeniería de todos los tiempos hace poco desaparecida: Don EDUARDO TORROJA MIRET. Esta no es una gloria exclusiva del Cuerpo de Caminos, ni de la Ingeniería, ni la Arquitectura española. Es una gloria de España entera que puede parangonarse con las más excelsas de nuestra Patria en cualquier campo de actividad. Quizá porque la vida científica del Ingeniero sea menos conocida que las de las otras ramas de la ciencia, sea el nombre de Torroja menos conocido por el vulgo que el de Cajal, por ejemplo; pero su obra, en su especialidad, ha sido tan grande como la que más.

Nació en Madrid en 1899 y fue profesor de nuestra Escuela desde 1933 hasta su muerte en 1961 acaecida en su propio despacho del Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento. Fue Director del Laboratorio Central de Ensayo de Materiales, Consejero de Obras Públicas, y fundador y Director del Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento, miembro del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, y Académico Numerario de la de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Madrid, y correspondiente de las de Barcelona y Córdoba, y también de la de Buenos Aires; Doctor "honoris causa" del Politécnico de Zurich, de la Universidad de Toulouse, de la Universidad de Buenos Aires, de la Universidad católica de Chile, Miembro de honor de varias asociaciones internacionales relacionadas con la técnica del hormigón, y miembro de honor y Presidente de la Federación Internacional de la Precompresión, Presidente del Instituto del Comité Internacional de Estructuras Pretensadas, miembro del Directorio de la Asociación Internacional de Puentes y Calzadas, francés, del de la Reunión Internacional de Laboratorios de Ensayo de Materiales de Construcción, también del Comité Ejecutivo Internacional para edificios de los Estados Unidos, miembro del Comité Europeo del hormigón, etc., e Ingeniero "honoris causa" de la Universidad de Lieja.

Entre sus numerosas publicaciones figuran: Teoría de la Elasticidad; Resistencia de materiales; Cálculo de estructuras; Hormigón armado y pretensado; Estructuras laminares y tipología estructural. Sus publicaciones en español, siempre sobre temas altamente técnicos son en número de 41; y en otros idiomas 34. Pronunció conferencias en distintos países, en Alemania una, en Argentina seis, en Austria una, en Bélgica siete, en Colombia seis, en Chile ocho, en España trece, en Estados Unidos de Norteamérica diez, en Francia tres, en Holanda una, en Inglaterra tres, en Italia seis, en Noruega dos, en Perú tres, en Portugal una, en Rusia una, en Suecia una, en Suiza cinco, en Venezuela una, en Polonia una.

Las técnicas sobre el hormigón del cual creó su teoría de anelasticidad le permitieron hacer estructuras laminares que fueron en su día las de mayores dimensiones del mundo en cada uno de sus tipos, tales son las cubiertas del Hipódromo de la Zarzuela, la primera cubierta del Fron-



tón Recoletos, verdadera maravilla de la técnica, el Mercado de Algeciras, la cuba hiperbólica de Fedala, y la presa de Canelles. Estas estructuras pueden ser admiradas, no sólo por los técnicos que pueden llegar a valorar el inmenso esfuerzo, el profundo conocimiento de la ciencia del cálculo de estructuras laminares, extremadamente difícil incluso en nuestros días, sino por sus efectos estéticos por cualquiera que las admire y tenga un mediano sentido del arte. El espesor de la lámina en voladizo que es la cubierta del Hipódromo de Madrid varía desde 6 cm. hasta 14 en el punto más grueso, y tiene una luz en voladizo de más de 12 m. La maravillosa lámina que constituyó la techumbre del Frontón Recoletos, y que fue destruida durante la guerra por efectos del bombardeo, no puede calificarse más que de maravillosa tanto por su concepción artística y funcional, como por el atrevimiento del proyectista y del constructor, ya que no contentos con unos espesores de hormigón difícilísimos de ejecutar y más difíciles de calcular, dispusieron lucernarios longitudinales con celosías que si en arquitectura puede haber poesía en ningún sitio la encontraremos mejor. El espesor de la lámina era sólo de 8 cm.; esta cubierta puede definirse estructuralmente como una lámina cilíndrica de generatrices horizontales de hormigón armado con la directriz formada por dos arcos de círculo desiguales que arrancando con tangentes verticales en los bordes se encuentran ortogonalmente, y en parte de los cuales se sustituye la lámina delgada por celosías triangulares del mismo material. La longitud a lo largo de las generatrices es de 55 m., la anchura entre bordes o generatrices extremas 32,5; el espesor 8 cm. Llama a primera vista la atención la total disimetría de la sección, nueva en ese género de estructuras, pero que en ese caso viene claramente impuesta por la necesidad funcional de abrir dos grandes ventanales situados precisamente en esa posición, y con esa inclinación para dar paso a la luz norte e iluminar directamente la cancha con el más alto, mientras que el otro envía luz complementaria a las tribunas altas sin perjudicar la visibilidad sobre la zona de juego.

La cubierta del Mercado de Algeciras es una cúpula esférica que se apoya sobre 8 soportes. El diámetro es de 47,80 m., y el radio de curvatura 44,10. En el centro hay un anillo de refuerzo que delimita la claraboya cenital, formada por triángulos prefabricados de hormigón armado sobre los que apoyan los vidrios del lucernario. El borde exterior del casquete esférico está cortado por bóvedas cilíndricas que van periféricamente de soporte a soporte. El enlace de estas bóvedas con el casquete sirve para rigidizar los bordes de éste y para encauzar hacia los soportes las tensiones principales. Estas bóvedas periféricas avanzan en voladizo cubriendo las partes de acceso al mercado, centradas en los lados del octógono. El espesor de cálculo de la lámina es de 9 cm., pero se aumenta a 50 al llegar sobre los soportes para resistir a la concentración de esfuerzos que necesariamente se producen en estos puntos de apoyo.

Merecen también especial mención sus iglesias de Pont de Suert y Sant Espirit, ambas para el ENHER.

La cuba de Fedala, que antes hemos mencionado, es un depósito elevado de aguas para 3.500 m.<sup>3</sup>. Es un hiperboloide de revolución que per-



mite un doble pretensado según sus dos familias de generatrices rectas, de este modo la pared queda en bicompresión y se evita el peligro de fisuración bajo la presión hidrostática. El espesor de la cuba es de 28 cm. en su base, y se reduce gradualmente hasta llegar a 17 a la altura superior de la lámina de agua, y el resto hasta la coronación mantiene un espesor constante de 10 cm. El fondo está formado por una bóveda tórica, apoyada exteriormente en el anillo de soportes e interiormente en la chimenea central de acceso.

Fue costumbre permanente de Torroja no sólo pensar sobre sus estructuras, calcularlas después, sino además comprobar sus cálculos con modelos a escala reducida. Así pudo llegar a proyectar la presa bóveda de Canelles, con 150 m. de altura, y que se estudió experimentalmente sobre veinte modelos reducidos sucesivos.

Obras de Torroja en estructuras metálicas también pueden considerarse como extraordinarias el hangar de Cuatro Vientos, que tiene 115 m. de luz. Puede citarse entre las de mayores dimensiones en sus tiempos. Lo mismo ocurre con los hangares de Torrejón, Barajas, el puente de Tordera, el puente de la Muga. No olvidemos la intervención de Torroja en la técnica de la soldadura.

Todas las obras de Torroja fueron geniales y todas representan un avance de la técnica sobre sus anteriores. Así lo fueron el acueducto de Tempul, el de Alloz, muy próximo a nosotros y fácil de contemplar desde la carretera de Pamplona a Logroño; pero el que realmente merece el calificativo de absolutamente excepcional, es el arco central del viaducto Martín Gil sobre el Esla, para el ferrocarril de Medina del Campo-Zamora y de Orense a Vigo. Este arco fue el mayor del mundo cuando se construyó y tiene 209 m. de luz. La sección transversal del mismo es trilobular, pero no sólo el cálculo aquilatado de la misma es extremadamente meritorio, sino como sucede también en todos los grandes arcos, la construcción es la que ofrece mayores dificultades. Estas las salvó Torroja construyendo una cimbra de acero soldado, que no era suficiente por sí misma para soportar el peso del hormigón del arco, sino que este hormigonado había de hacerse científica y paulatinamente, de modo que a medida que iba progresando se incorporase a la estructura mixta formada por el acero y el hormigón, de modo que contribuyese este último a la resistencia del conjunto. Esto se completaba con tensiones que se introducían mediante gatos, y una vez terminado ya el hormigonado se hizo la apertura en clave con 36 gatos hidráulicos capaces de equilibrar con holgura sobre cada mitad del arco el empuje de 7.500 toneladas producidas por el peso propio del mismo. De este modo se abrió la clave 9 cm., lo que venía a compensar el acortamiento por retractación y por deformación elástica o lenta bajo la acción permanente de la compresión.

Para mí, aunque la obra de Torroja sea toda ella excepcional, precisamente la construcción de este arco llevada de un modo extracientífico, digamos, es la obra cumbre suya.

A Torroja se deben estudios especiales sobre el hormigón, y fue el autor de la teoría de cálculo anelástico de secciones de hormigón armado, y estudió profundamente los coeficientes de seguridad en la compro-



bación de secciones de hormigón armado, llegando también a fundar la teoría del cálculo a rotura.

Torroja ha sido uno de los españoles de nuestro tiempo que han desmentido rotundamente aquella creencia de que la ciencia pura no es para nosotros. A Torroja deben los españoles haber difundido por todo el mundo nuestras realizaciones.

Aunque deliberadamente omitimos nombres de muy ilustres compañeros que para nuestro beneficio no han rendido tributo todavía a la muerte, habremos de consignar que la obra de Torroja continúa adelante y que para prestigio de nuestra ciencia existe para nuestros puertos y los de todo el mundo la teoría de los "Planos de Oleaje" que permite determinar las máximas características posibles del oleaje tanto en mar abierta como dentro de puerto, supuesto abrigado por los correspondientes diques cuyas secciones se pueden estudiar hoy con la misma seguridad que cualquier obra terrestre y cuyo trazado hace compatible la maniobra de entrada en condiciones cualesquiera con la evitación de aterramientos por el conocimiento del movimiento de las arenas en las costas.

Y con esto, Excmos. e Ilmos. Sres., termino, volviendo a manifestar mi gratitud por el inmerecido honor que me hacen aumentado en estos momentos por el derroche de paciencia que han hecho escuchándome. Muchas gracias.



## DISCURSO DE CONTESTACION

por el Académico

EXCMO. SR. D. SANTIAGO AMADO LÓRIGA

*Excelentísimos e Ilustrísimos señores,*

*Señoras y señores:*

Por designación de mis compañeros en esta corporación y por un encargo que tanto me compromete como me honra, me corresponde ahora el deber de contestar al discurso del nuevo académico, Doctor Ingeniero de Caminos D. Alberto Viader Muñoz. Sean mis primeras palabras para alabarlo y para expresar sinceramente dos cálidas felicitaciones. La primera a él por la emoción que me produjo leer hacer unos días su interesante trabajo y por los aplausos con los que lo premiaréis seguramente vosotros al escucharlo. La segunda a esta Academia por la satisfacción de contarle desde ahora entre sus miembros y por lo mucho que en lo sucesivo la prestigiará la promesa de su brillante colaboración. Y si esto último no pasa de ser una modesta opinión mía, seguro estoy de que la refrendará con toda su autoridad quien con acierto nos preside en esta casa, y puede por ello representar a todos.

El referido Ingeniero y Doctor tiene en efecto a pesar de su juventud, una personalidad bien acusada no sólo en España sino también en un amplio círculo de naciones extranjeras. Su inteligencia, su laboriosidad, sus técnicas competencias en muy distintos sectores, su dominio de idiomas, la publicación de sus investigaciones en revistas profesionales, sus cargos de gran altura en variadas empresas, le han ido creando una reputación envidiable entre sus compañeros de carrera. Y esto le concede ciertamente la mejor ejecutoria a la que puede aspirarse en cualquiera de los oficios de esta vida. Porque si todos los parabienes oficiales y todos los públicos reconocimientos halagan en verdad, es ese juicio íntimo y leal de los que están a nuestro lado, de los que profundamente apreciamos como colegas y como amigos, lo que más justamente debe enorgullecernos. Y hablo de ese orgullo bien ajeno en este caso a la más ligera sospecha de soberbia, pues nota destacada de la persona de quien tratamos es sin disputa su sencillez, su modestia y la lejanía de toda presunción.

Nace el beneficiario en Aragón, en Monzón del Cinca, provincia de Huesca, muy a finales del año 1910. Terminado con notable aprovechamiento el bachillerato que cursó en Zaragoza, se prepara para ingreso en la Escuela de Caminos, cuya entrada logra poco después con brillante oposición. Con tan magníficas conceptuaciones que merece el segundo puesto en



una promoción que por su valía deja recuerdos de excepción, concluye en 1934 su carrera. Antes de finalizar sus estudios es solicitado por Empresas privadas noticiosas de su extraordinaria competencia. Así por ejemplo en la de "Entrecanales y Távora" interviene siendo todavía alumno, en los proyectos y cálculos precisos para construir once puentes de hormigón y otras estructuras. Como titulado ingeniero de su cuerpo tiene su primer destino oficial en la División Hidráulica del S. de España, trabajando dentro de ella en encauzamiento de ríos, abastecimientos de aguas y estudios de pantanos. Desde allí pasa a ser Ingeniero Jefe del Servicio de estudios y obras nuevas de los F.F. C.C. andaluces, incorporándose a continuación a la RENFE tan pronto ésta se creó. En 1940 es nombrado asesor de la Sociedad Hidroeléctrica del Chorro. En el 41 colabora con la Empresa Tallefer productora y distribuidora de energía eléctrica en varias provincias andaluzas. En ese mismo año funda una oficina técnica y dirige al frente de ella numerosas obras y estructuras de edificios en esa misma región andaluza. En el 44 establece la "Constructora Vita" de la que ocupa en Málaga la dirección. En el 46 es nombrado Delegado para el Sur de "Dragados y Construcciones". En el 53 es designado Director técnico de la "Agrupación para Estudios y Proyectos de Obras" en Madrid. En el 59 crea la Empresa "Técnica y Obras" en la que pasa sucesivamente por los cargos de Presidente, Consejero Delegado y Director general. En el 61 es Ingeniero Consultor dentro del Ministerio de la Vivienda. En el 62 instituye la "Técnica de Ingeniería y Arquitectura" (Tinar). En el 63 es Director Gerente de Eléctricas Reunidas de Zaragoza y Consejero de todas sus filiales. Posteriormente ocupa simultáneamente el mismo cargo en la Compañía del Gas de esta misma ciudad. puestos estos dos últimos que sigue ejerciendo a la gran satisfacción de las empresas.

\* \* \*

Hemos hecho hasta aquí una rápida, veloz enumeración de algunas de sus actividades principales en los 30 años que lleva de ejercicio. Pero a lo que no podríamos llegar sin abuso imperdonable de la paciencia de cuantos nos escuchan, es al cómputo, por brevísimo que fuera, de todos los proyectos, obras, iniciativas y estudios que tuvo que realizar en la preparación y desarrollo de aquellas asombrosas y fecundas actividades suyas. Puentes, presas, saltos, túneles, estructuras de hormigón armado, esclusas, varaderos, muelles, diques, dragados, urbanizaciones, edificios gigantes, abastecimientos de aguas, surgen a cada paso de sus estudios, de sus cálculos, de sus directivas y de sus propias y personales ejecuciones. Su trabajo abrumador no tiene alivios ni descansos. Sus competencias se ensanchan y se amplían cada día. No hay ninguna especialidad, en las múltiples que tiene su carrera, que deje de atraerle. Su celo le lleva a traspasar las fronteras de Australia, del Uruguay, de Venezuela, de Mozambique, de Lisboa. Viaja por Africa del Sur, por Alemania, Angola, el Congo, los Estados Unidos, Italia, Liberia, Marruecos, Rhodesia, Senegal y Suiza. Y aún le queda tiempo para colaborar en Revistas técnicas, para escribir obras de difíciles materias, cuya consulta ha de ser tan frecuente y provechosa para muchos. Y si con ello en el campo de la matemática pura demuestra un gran dominio, en el



no menos importante de las aplicaciones de esa ciencia es maestro que acredita un valer de gran altura.

\* \* \*

Pero hasta ahora nos hemos ocupado únicamente de la personalidad del nuevo compañero y es ocasión ya muy indicada para pasar a comentar sumariamente su discurso. Tema el suyo por cierto muy acertadamente elegido, porque a todos nos interesa y nos seduce el conocer y divulgar la contribución que los Ingenieros civiles han legado a la cultura científica de la Patria y que debe constituir uno de los orgullos más legítimos de nuestra nacionalidad. De cuanto aportaron los de Caminos a ese desarrollo desde puestos siempre de vanguardia en nuestro progreso, ha expresado ya con sumo acierto y claridad mi predecesor en estos discursos, cuanto podía y debía de decirse. Hechos, misiones y nombres de los más preclaros entre ellos, pregonan una fama mantenida por el Cuerpo durante más de un siglo y llamada a acrecentarse cada año. No olvidemos sin embargo, que si en algunas otras naciones las voces de Ingenieros civiles y de Caminos son sinónimas, en otras y en España sobre todo, comprende la primera a un conjunto de especialidades entre las cuales la segunda no es más que una de sus partes. Ocupémonos pues de las demás y pensemos que también ellas contribuyen en distintas escalas a los avances prácticos y teóricos de la ciencia dentro de sus saberes correspondientes.

Como el disertante mencionó, en 1802 se creó la Escuela de su Cuerpo, que pasó por ello a ser la más antigua de aquel grupo. Algunos dicen que la de Minas había sido ya en 1777 fundada por Carlos III cuando este rey ordenó que empezara a darse enseñanzas de minería en Almadén, pero no creemos nosotros que sea acertado darle ese origen cuando es un hecho el que tardó sesenta años más, en constituirse realmente el nuevo escalafón. En 1935 se habla por primera vez de los denominados Ingenieros civiles al decretarse la institución de dos direcciones generales: una de caminos también conocida por de calzadas, y otra de minas, anunciándose que serían ampliadas por las de geógrafos y de bosques, tan pronto se abrieran las respectivas Escuelas suyas, en trámites de estudio todavía.

Vemos pues que desde sus arranques ya se consideraba a los ingenieros civiles de entonces agrupados en una misma denominación, para diferenciarlos de los militares que eran de mucha más antigüedad. No hace falta casi evocar como a partir de ese origen y a todo lo largo de la última mitad de ese *xix* siglo, se van creando las Escuelas de Agrónomos, de Industriales y de Montes. En la propia centuria en que vivimos y como asunto que parece de ayer mismo, se amplía la lista con nuevas especialidades: navales, aeronáuticas, telecomunicaciones. No creemos que tardará mucho en hacerlos asimismo nucleares.

Ese factor común a todos, anuncia la vieja realidad de que tienen que laborar muchas veces conjuntamente, en equipo como se dice propiamente y con frecuencia. El propio Doctor Viader nos explicaba cómo al planear el trazado de una simple carretera había que requerir las opiniones de los geólogos, de los industriales, de los mineros, de los de montes, y de los



agrónomos aparte de otras intervenciones ajenas a nuestro estudio. Y nosotros pensamos ahora también ¿de qué servirían las modernas autopistas si no hubieran de circular por ellas los más modernos medios de transporte que la industria crea? ¿Y qué decir de los ferrocarriles si por sus rieles no rodaran las más potentes locomotoras? ¿Y de los puertos si los astilleros nacionales no dotaran a nuestra nación de buques que los necesitasen? ¿Y qué añadir de las grandes presas si las aguas que almacenan no corrieran por canales y acueductos para regar las tierras secas y hacerlas fértiles con la cooperación de los agrónomos? ¿Y no regulan también los montes, con sus bosques creados y bien mantenidos, el régimen de esas aguas que alimentan las presas y fecundan asimismo aquellas tierras?

Vemos pues como todas esas ramas, las viejas, las nuevas y las que casi acaban de brotar, se agarran a un mismo tronco vigoroso y entran por derecho propio en esa honrosa denominación de Ingenieros civiles que tanto enaltece a cuantos la disfrutan.

\* \* \*

Cita el Doctor Viader con muy alta justicia algunos nombres de los muchos que dieron celebridad y renombre al Cuerpo suyo. Debemos inclinar con respeto nuestras frentes ante su recuerdo y sentir el orgullo de que nacieran españoles. A la lista que nunca podría ser exhaustiva por mucho que se alargase, vamos a permitirnos por cuenta nuestra añadir unos pocos más de los que florecieron en las otras especialidades de la civil ingeniería. Quisiéramos intencionadamente que fueran muy escasos para no exceder al tiempo prudente que tenemos reservado. Pero creemos un deber el que no termine esta sesión solemne sin sentir aunque sea simbólicamente en esas personas, el homenaje que merecieron los muchos que también sobresalieron en las restantes disciplinas. He aquí algunos de ellos:

#### INGENIEROS DE MINAS

D. José María de Madariaga y Casado, Profesor y Director de la Escuela, creador de la cátedra de Electrotecnia, en la que fue celebridad.

D. Lucas Mallada. Muy afamado profesor de Geología y Paleontología en la Escuela. Iniciador del Mapa Geológico de España.

#### INGENIEROS DE MONTES

D. Juan Navarro Reverter, Profesor de la Escuela. Ex-ministro de Hacienda y de Estado. Ingeniero industrial.

D. Máximo Laguna, Profesor y director de la Escuela. Autor de numerosas obras científicas.

#### INGENIEROS AGRÓNOMOS

D. Juan Marcilla Arrazola. 1.º de su promoción. Profesor de la Escuela. Director del Instituto. Sabio investigador especializado en Microbiología agronómica.



D. Mariano Fernández Cortés, destacado matemático. Profesor de Cálculo en la Escuela Politécnica y de Motores, Máquinas, Cálculo Integral, Mecánica y Resistencia de Materiales en la de su Cuerpo.

#### INGENIEROS INDUSTRIALES

D. Gumersindo Vicuña. Doctor en Ciencias y catedrático en la Central de Física Matemática.

D. Francisco de Rojas. Profesor de la Escuela, especializado en Termodinámica.

Todos ellos Académicos de Ciencias en la Real de Madrid, lo que para nosotros supone máxima categoría. Varios, fundadores de ella. Algunos, residentes de sus secciones y ocupando otros cargos directivos. La muerte ha ido haciendo pagar su tributo a cada uno.

\* \* \*

Quisiéramos ahora que se nos tolerase añadir a los nombres preclaros de Ingenieros de Caminos que citó el Doctor Viader, tres más por nuestra parte por las razones que daremos.

El primero, D. Amós Salvador Rodrigáñez. Presidió la Academia de Ciencias de Madrid. Fue cinco veces ministro en cinco carteras diferentes. Pero viene particularmente a nuestra memoria por su afición a temas militares y por la competencia con la que popularizó conocimientos de estrategia, logrando con ello premios nacionales.

El segundo, D. Alfonso Peña Boeuf, recientemente fallecido a la cabeza de esa misma Academia. Notable profesor muchos años de su Escuela, nos legó, con el conocido acueducto de Tardienta, un testimonio de su originalidad e ingenio. Aragón le debe gratitud por ello y no sería justo que olvidase además sus largos años de ministro de Obras Públicas.

Y el último, D. Ramón Iribarren Cavanillas, Ingeniero director del Grupo de Puertos del Cantábrico. Se especializó en estudios sobre formación de playas provocadas por construcción de muros de costa y alcanzó reputación internacional. Todos los que hemos veraneado en Fuenterrabía somos testigos muy agradecidos de cómo aquel espigón previsto y dirigido por él, hizo posible la existencia de una playa alejada más de 500 metros de la carretera. Los colegas franceses admirando la originalidad de su invención, la copiaron para Hendaya y en tributo al creador llamaron al espigón por ellos imitado, la "Jetée Iribarren", aparte de premiarle con la Legión de Honor. A su persona sospechamos que se refiere veladamente el propio señor Viader cuando habla en su discurso de la teoría matemática y científica que ha permitido modernizar los proyectos de diques de abrigo gracias a un eminentísimo ingeniero español, al que no nombra.

No sabríamos cerrar este capítulo de honrosas citaciones, sin acabarlo con el nombre de un general, sabio geógrafo, geodésico de fama mundial. Nos referimos a D. Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero, marqués de Mulhacén y sería ofensa para la gran cultura de cuantos nos escuchan el querer justificar los fundamentos de esa invocación.



Con cuanto hemos dicho creemos haber contribuido modestamente a la exaltación cultural y científica de todos los ingenieros que algunos califican de modernos. Quedaría hablar de los contemporáneos, entre los que afloran ya tantos valores, pero entendemos que no es tiempo todavía. Época llegará en la que puedan recordarse sus grandes figuras con iguales alabanzas.

\* \* \*

Breve debiera ser, señoras y señores, nuestro discurso por cortesía hacia vosotros y por deferencia hacia la gran figura a quien tanto estamos alabando aquí en esta mañana. Pensemos otra vez al concluirlo en todos los Ingenieros civiles. En los que fueron, en los que son y en los que serán en un futuro cuya esperanza hace nacer en nosotros tan halagadoras ilusiones. Meditemos en los que desaparecieron, en los que viven, para cuya larga existencia pedimos a Dios muchos años, y en esos otros que van todavía caminando con fatiga por el áspero y pendiente sendero que les llevará a serlo en tiempos sucesivos. Evoquemos una vez más todas las ramas de aquel tronco común al que nos referíamos hace unos minutos. Tronco arraigado, enraizado a un pequeño pedazo de esta tierra española, labrado, regado, laborado en un siglo incansable de esfuerzos, de estudios y sudores.

Quisiéramos ahora, para concluir, que imaginásemos todos que sobre la recia corteza de ese gran arbusto, como sobre la de esos chopos en los que los enamorados escriben sus cariños, hubiera unas letras grabadas, también a punta de navaja, amorosamente pensadas, que dijeran: "Ingenieros civiles". Y a su lado, esculpido igualmente en la madera, un gran corazón, no herido por ninguna flecha ni atravesado por cualquier rasguño, sino sano, vigoroso, latiendo con cadencia y con buen ritmo, que hiciera a todos recordar cómo palpita siempre por el amor a España, por la pasión de su engrandecimiento y por el afán de acrecentar ese gran tesoro de ella, de la Patria y que es el acervo de su científica cultura.

HE DICHO