

REVISTA
DE LA

ACADEMIA
DE
CIENCIAS

Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales

DE
ZARAGOZA



Serie 2^a

Volumen 36

1981

INDICE DE MATERIAS

M. P. ALFARO GARCÍA. — <i>Fórmulas de recurrencia y sumación de orden p para polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad</i>	5
M. ANGELES GIL ALVAREZ. — <i>Criterio mixto de utilidad y quietud esperadas (invariante frente a traslaciones respecto a las utilidades)</i>	15
C. MARTÍNEZ LÓPEZ. — <i>Formaciones producto de S-grupos</i>	27
L. J. HERNÁNDEZ PARICIO. — <i>Resoluciones (CO) fibradas</i>	35
M. TORRES. — <i>Dos notas sobre secciones de Lockett en clases de Fitting de grupos finitos</i>	43
S. GONZÁLEZ-JIMÉNEZ. — <i>Sobre el anulador de un álgebra</i>	47
J. JAVIER GUADALUPE HERNÁNDEZ y JAIME VINUESA TEJEDOR. — <i>Una condición adicional al teorema de equivalencia de las fórmulas fundamentales para sucesiones reales de polinomios ortogonales</i>	53
A. CAVERO y E. BERNABÉU. — <i>Potenciales interatómicos para el estado fundamental de sistemas cesio-gas noble</i>	57
J CASAS, I. ESCALONA y F. MERINO. — <i>Estudio de la frecuencia crítica de fusión con luz coherente y espacialmente incoherente</i>	69
A. LARENA y M. VALERO. — <i>Efectos de trazas metálicas en la quimioluminiscencia del 2, 4, 5-trifenilimidazol</i>	81
J. AZNÁREZ ALDÚAN, M. A. BELARRE PIEDRAFITA y A. BONA ERNICAS. — <i>Síntesis y estudio del 2- (2-hidroxi-5-cloro-fenil)-imino -metil -fenol como reactivo analítico</i>	87
Félix M. ROYO; Mariano GRACIA and Celso GUTIÉRREZ LOSA. — <i>Thermodynamic study of some binary mixtures and energy parameters of the various types of contacts involved, II</i>	95
M. CALVO, J. NAVAL, F. LAMPREAVE y A. PIÑEIRO. — <i>Aislamiento simultáneo de alfa-fetoproteína y de la albúmina del suero fetal de rata</i>	105
M. LAGO. — <i>Consideraciones sobre la edad de unas rocas ofíticas en la zona meridional sur-pirenaica (provincias de Huesca-Lérida)</i>	115
Necrológicas. — <i>Excmo. Sr. D. Francisco Pascual de Quinto y Martínez de Andosilla, Barón de Tamarit</i>	123

FORMULAS DE RECURRENCIA Y SUMACION DE ORDEN p PARA POLINOMIOS ORTOGONALES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD (*).

M.P. ALFARO GARCIA

Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Ciencias. Zaragoza (España).

We expose here a general and essentially simple procedure to obtain several recurrent expressions relating a certain number of different elements of the family: $\{z^p \hat{P}_{n-p}(z), \{z^j \hat{K}_{n-j}(z,0)\}_{j=0}^{p-1}\} \{z^j \hat{K}_{n-j-1}(z,0)\}_{j=0}^{p-1}, \hat{P}_n(z)$ where $p \leq n$, $\hat{P}_n(z)$ is the n th-orthonormal polynomial and $\hat{K}_n(z,0)$ denotes the n th-kernel. The use of the sequences $\{w_n\}_{n=1}^\infty, \{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ introduced to construct the parametric theory, simplifies considerably the expression of recurrence formulas obtained. We will deduce, then, the parametric expression of them. Anyway, the largest contribution of this paper is, perhaps, to express a geometrical meaning of recurrence formulas, unknown until now. We obtain too, several general formulas of Christoffel-Darboux. Particularizing we deduce of them, the formulas used in the classical theory, together with other new expressions.

I. El Espacio $\Pi(z)$

1. INTRODUCCION

Se considera en $\Pi(z)$, espacio vectorial de los polinomios en z con coeficientes complejos, la estructura prehilbertiana definida por un producto escalar (\cdot) asociado a una matriz $m = (c_{ij})_{i,j=0}^\infty$ hermitiana definida positiva y de Teopltitz. Por tanto [1], dicho producto escalar verifica la propiedad característica:

$$zP(z) \cdot zQ(z) = P(z) \cdot Q(z)$$

para cualquier par de polinomios $P(z), Q(z)$.

Con $\Pi_n(z)$ se designa el subespacio lineal de los polinomios de grado $\leq n$. Si $A(z)$ es un subespacio vectorial de $\Pi_n(z)$, $[A(z)]^\perp$ representa su complemento ortogonal respecto a $\Pi_n(z)$. Para el subespacio engendrado por una familia de polinomios de $\Pi(z)$, $\{Q_i(z)\}_{i=1}^m$, se utiliza la notación $L[\{Q_i(z)\}_{i=1}^m]$.

A partir de los Δ_k (Δ_k es el menor principal de orden $k+1$ de la matriz m) se define la sucesión de "excesos" $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ en la forma siguiente:

$$e_0 = \Delta_0 = c_{00}$$

$$e_n = \Delta_n / \Delta_{n-1} \quad n \geq 1.$$

Sea $\{\hat{P}_n(z)\}_{n=0}^\infty$ la familia de polinomios ortogonales (PO) normalizados asociada al producto escalar anterior, familia que es base ortonormal (ON) del espacio $\Pi(z)$ y cuyos elementos admiten la expresión en forma de determi-

nante que puede verse en [5] ó [6]; en términos de las sucesiones paramétricas $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en [1], resulta:

$$\hat{P}_n(0) = -w_n/\sqrt{e_n} \cdot e_{n-1} \quad ; \quad \hat{P}_n(0) = -\tau_n/\sqrt{e_n} e_{n-1}$$

La sucesión de n-núcleos $\{K_n(z,y)\}_{n=0}^{\infty}$ se define para cada $y \in \mathbb{C}$ en la forma habitual:

$$K_n(z,y) = \sum_{j=0}^n \overline{\hat{P}_j(y)} P_j(z) \quad n \geq 0$$

Además, (v. [6]), siendo $\|K_n(z,y)\|^2 = K_n(y,y)$ se tiene la correspondiente sucesión normalizada $\{\hat{K}_n(z,y)\}_{n=0}^{\infty}$, poniendo

$$\hat{K}_n(z,y) = K_n(z,y)/\sqrt{K_n(y,y)} \quad n \geq 0.$$

En particular, la sucesión, $\{\hat{K}_n(z,0)\}_{n=0}^{\infty}$, viene definida por

$$\hat{K}_n(z,0) = \sqrt{e_n} K_n(z,0) \quad n \geq 0$$

Obsérvese que, para cada n , $\hat{K}_n(z,0)$ no es sino el polinomio recíproco $P_n^*(z)$ de la teoría clásica (v. [2] ó [3]) aunque como tal no será utilizado en este trabajo.

2. LAS BASES $\{B_p^{(n)}\}_{p=0}^n$ DE $\Pi_n(z)$.

Con notaciones habituales pondremos para $p \in \mathbb{N}$:

$$z^{p\Pi_k}(z) = \{z^{pP}(z) \mid P(z) \in \Pi_k(z)\} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

$$z^{p\Pi}(z) = \{z^{pP}(z) \mid P(z) \in \Pi(z)\}$$

Es claro que $\Pi(z) \supset z\Pi(z) \supset \dots \supset z^{p\Pi}(z) \supset \dots$ y que el ideal $z^{p\Pi}(z)$ está engendrado por los vectores $\{z^m\}_{m=p}^{\infty}$ o por la familia $\{z^{p\hat{P}_j}(z)\}_{j=0}^{\infty}$, evidentemente ON. Por restricción se obtiene la base ON $\{z^{p\hat{P}_j}(z)\}_{j=0}^k$ para el subespacio $z^{p\Pi_k}(z)$ ($k \in \mathbb{N}$).

PROPOSICION I.1.- Para cada $p \leq n$ la familia

$$B_p^{(n)} : (\{z^{p\hat{P}_j}(z)\}_{j=0}^{n-p} ; \{z^{j\hat{K}_{n-j}}(z,0)\}_{j=0}^{p-1}) \quad (I.1)$$

es una base ON de $\Pi_n(z)$.

DEMOSTRACION: La descomposición en suma directa de $\Pi_n(z)$:

$$\Pi_n(z) = z^{p\Pi_{n-p}}(z) \oplus [z^{p\Pi_{n-p}}(z)]^{\perp} \quad (I.2)$$

es válida para cada $p \leq n$.

Se comprueba fácilmente que los p vectores $\{z^{j\hat{K}_{n-j}}(z,0)\}_{j=0}^{p-1}$ constituye una base ON de $[z^{p\Pi_{n-p}}(z)]^{\perp}$. Basta ahora completar con la base $\{z^{p\hat{P}_j}(z)\}_{j=0}^{n-p}$ de $z^{p\Pi_{n-p}}(z)$ antes citada.

En particular, si $p = 1$ se tiene la base utilizada habitualmente en [1] (una base análoga ha resultado útil en [4] para el estudio de P.O. sobre cassinianas). En los casos extremos $p = 0$, $p = n$ se obtienen las bases:

$$B_0^{(n)} : (\{\hat{P}_j(z)\}_{j=0}^n)$$

$$B_n^{(n)} : \{(z^j \hat{K}_{n-j}(z, 0))_{j=0}^n\}.$$

3. FORMULAS DE RECURRENCIA DE ORDEN p .

La proposición siguiente es punto de partida para obtener expresiones recurrentes que generalizan las usualmente conocidas.

PROPOSICION I.2. Para cada p (0 < p < n) las familias

$$\{z^p \hat{P}_{n-p}(z) ; \{z^j \hat{K}_{n-j}(z, 0)\}_{j=0}^{p-1}\}$$

$$\{ \{z^j \hat{K}_{n-j-1}(z, 0)\}_{j=0}^{p-1} ; \hat{P}_n(z) \}$$

son bases ON distintas del subespacio $[z^p \Pi_{n-p-1}(z)]^\perp$.

DEMOSTRACION: A partir de la descomposición de $\Pi_n(z)$

$$\Pi_n(z) = \Pi_{n-1}(z) \oplus L[\hat{P}_n(z)] ,$$

se obtienen las expresiones

$$\Pi_n(z) = L[\{z^p \hat{P}_j(z)\}_{j=0}^{n-p-1}] \oplus L[z^p \hat{P}_{n-p}(z) ; \{z^j \hat{K}_{n-j}(z, 0)\}_{j=0}^{p-1}]$$

$$\Pi_n(z) = L[\{z^p \hat{P}_j(z)\}_{j=0}^{n-p-1}] \oplus L[\{z^j \hat{K}_{n-j-1}(z, 0)\}_{j=0}^{p-1} ; \hat{P}_n(z)]$$

de las que se deduce inmediatamente la tesis. #

Podemos ahora establecer:

PROPOSICION I.3. Si $0 < p \leq n$ son válidas las $2p+2$ relaciones siguientes que llamaremos "fórmulas de recurrencia de orden p" :

$$\left. \begin{aligned} z^p \hat{P}_{n-p}(z) &= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\tau_{n-j}}{\sqrt{e_{n-p}}} z^j \hat{K}_{n-j-1}(z, 0) + \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-p}}} \hat{P}_n(z) \\ \hat{K}_n(z, 0) &= \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{K}_{n-1}(z, 0) + \sqrt{e_n} \overline{\hat{P}_n(0)} \hat{P}_n(z) \\ z^h \hat{K}_{n-h}(z, 0) &= \sum_{j=0}^{h-1} \tau_{n-j} \overline{\hat{P}_{n-h}(0)} z^j \hat{K}_{n-j-1}(z, 0) + \\ &+ \sqrt{\frac{e_{n-h}}{e_{n-h-1}}} z^h \hat{K}_{n-h-1}(z, 0) + \sqrt{e_n} \overline{\hat{P}_{n-h}(0)} \hat{P}_n(z) \end{aligned} \right\} \text{(I.3)}$$

(h=1, 2, ..., p-1)

$$\left. \begin{aligned} z^i \hat{K}_{n-i-1}(z, 0) &= \frac{\tau_{n-i}}{\sqrt{e_{n-p}}} z^p \hat{P}_{n-p}(z) + \sqrt{\frac{e_{n-i}}{e_{n-i-1}}} z^i \hat{K}_{n-i}(z, 0) + \\ &+ \sum_{j=i+1}^{p-1} \tau_{n-i} \overline{\hat{P}_{n-j}(0)} z^j \hat{K}_{n-j}(z, 0) \\ &\quad (i=0, 1, \dots, p-2) \\ \hat{K}_{n-p}(z, 0) &= \frac{\tau_{n-p+1}}{\sqrt{e_{n-p}}} z \hat{P}_{n-p}(z) + \sqrt{\frac{e_{n-p+1}}{e_{n-p}}} \hat{K}_{n-p+1}(z, 0) \\ \hat{P}_n(z) &= \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-p}}} z^p \hat{P}_{n-p}(z) + \sqrt{e_n} \sum_{j=0}^{p-1} \overline{\hat{P}_{n-j}(0)} z^j \hat{K}_{n-j}(z, 0) \end{aligned} \right\} \text{(I.4)}$$

DEMOSTRACION: Basta determinar por el procedimiento habitual, los coeficientes $\{A_j^{(h)}\}_{j=0}^p$, $\{B_j^{(i)}\}_{j=0}^p$ ($h, i=0, 1, \dots, p$) en las relaciones

$$\left. \begin{aligned} z^p \hat{P}_{n-p}(z) &= \sum_{j=0}^{p-1} A_j^{(p)} z^j \hat{K}_{n-j-1}(z, 0) + A_p^{(p)} \hat{P}_n(z) \\ z^h \hat{K}_{n-h}(z, 0) &= \sum_{j=0}^{p-1} A_j^{(h)} z^j \hat{K}_{n-j-1}(z, 0) + A_p^{(h)} \hat{P}_n(z) \end{aligned} \right\} \\ h=0, 1, \dots, p-1$$

$$\left. \begin{aligned} z^i \hat{K}_{n-i-1}(z, 0) &= B_p^{(i)} z^p \hat{P}_{n-p}(z) + \sum_{j=0}^{p-1} B_j^{(i)} z^j \hat{K}_{n-j}(z, 0) \end{aligned} \right\} \\ i=0, 1, \dots, p-1$$

$$\hat{P}_n(z) = B_p^{(p)} z^p \hat{P}_{n-p}(z) + \sum_{j=0}^{p-1} B_j^{(p)} z^j \hat{K}_{n-j}(z, 0)$$

cuya existencia y unicidad asegura la proposición anterior para cada $0 < p < n$.

Si $p = n$ no es posible hacer uso de la proposición citada, pero se obtienen las correspondientes relaciones directamente, al expresar los polinomios $z^n \hat{P}_0(z)$, $z^{n-1} \hat{K}_1(z, 0)$, $z^{n-2} \hat{K}_1(z, 0)$ en términos de la base $B_n^{(n)}$ de $\Pi_n(z)$. #

Las igualdades (I.3) y (I.4) son, en definitiva, la expresión analítica de un cambio de base ON en el subespacio $[z^p \hat{P}_{n-p-1}(z)]^\perp$ de $\Pi_n(z)$. La matriz del cambio de base es unitaria de orden $p+1$, con determinante igual a $(-1)^p$; por tanto es directa si p es par.

COROLARIO I.3.1: Para cada $n \in \mathbb{N}$ son válidas en $\Pi(z)$ las siguientes fórmulas ordinarias de recurrencia:

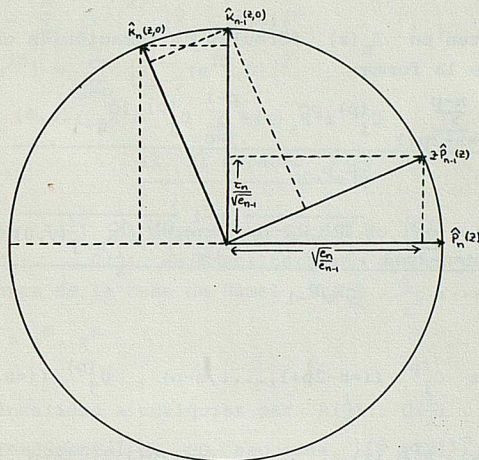
$$\left. \begin{aligned} z \hat{P}_{n-1}(z) &= \frac{\tau_n}{\sqrt{e_{n-1}}} \hat{K}_{n-1}(z, 0) + \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{P}_n(z) \\ \hat{K}_n(z, 0) &= \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{K}_{n-1}(z, 0) - \frac{\tau_n}{\sqrt{e_{n-1}}} \hat{P}_n(z) \end{aligned} \right\} \quad (I.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{K}_{n-1}(z, 0) &= \frac{\bar{\tau}_n}{\sqrt{e_{n-1}}} z \hat{P}_{n-1}(z) + \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{K}_n(z, 0) \\ \hat{P}_n(z) &= \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} z \hat{P}_{n-1}(z) - \frac{\tau_n}{\sqrt{e_{n-1}}} \hat{K}_n(z, 0) \end{aligned} \right\} \quad (I.6)$$

DEMOSTRACION: Basta hacer $p = 1$ en (I.3) y (I.4). #

Las (I.5) y (I.6) son la expresión paramétrica de las relaciones recurrentes que se obtenían en [1] operando en los determinantes expresión de $\hat{P}_n(z)$ y $\hat{P}_n^*(z)$. Con el método aquí seguido dichas relaciones resultan como expresión de un cambio de base en un subespacio lineal de $\Pi_n(z)$, lo que les confiere un significado geométrico no establecido hasta el momento.

Por otra parte, las fórmulas ordinarias de recurrencia en su forma paramétrica, admiten una interpretación gráfica precisa si τ_n es real, como puede verse en la figura siguiente en que se representa el círculo unidad del subespacio $[z\Pi_{n-2}(z)]^\perp$ y en la que se interpretan de manera evidente las relaciones (I.5) y (I.6).



4. FÓRMULAS DE SUMACION DE ORDEN p .

Las usualmente llamadas fórmulas de sumación son caso particular de expresiones más generales, cuya existencia asegura la proposición siguiente:

PROPOSICION I.4. En $\Pi_n(z)$ son válidas las dos relaciones siguientes que llamaremos respectivamente 1ª y 2ª fórmula de sumación de orden p ($0 < p < n$).

$$K_{n-p}(z,y) = \frac{-\sum_{h=n-p+1}^n \overline{\hat{p}_h(y)} \hat{p}_h(z) + \sum_{j=0}^{p-1} \bar{y}^j z^j \overline{\hat{K}_{n-j}(y,0)} \hat{K}_{n-j}(z,0)}{1 - \bar{y}^p z^p}$$

$$K_n(z,y) = \frac{-\bar{y}^p z^p \sum_{h=n-p+1}^n \overline{\hat{p}_h(y)} \hat{p}_h(z) + \sum_{j=0}^{p-1} \bar{y}^j z^j \overline{\hat{K}_{n-j}(y,0)} \hat{K}_{n-j}(z,0)}{1 - \bar{y}^p z^p}$$

DEMOSTRACION: Basta obtener la expresión del polinomio $K_n(z,y)$ de $\Pi_n(z)$ en términos de la base $B_p^{(n)}$ de dicho espacio y hacer uso de la expresión recurrente del n -núcleo $K_n(z,y)$. #

COROLARIO I.4.1. Si $p = 1$, resultan respectivamente

$$K_{n-1}(z,y) = \frac{-\overline{\hat{p}_n(y)} \hat{p}_n(z) + \overline{\hat{K}_n(y,0)} \hat{K}_n(z,0)}{1 - \bar{y}z}$$

$$K_n(z, y) = \frac{-\bar{y}z\widehat{P}_n(y)P_n(z) + \widehat{K}_n(y, 0)K_n(z, 0)}{1 - \bar{y}z} \quad \#$$

Estas dos fórmulas de sumación se obtuvieron en [1] aunque por procedimiento distinto.

PROPOSICION I.5. Existen en $\Pi_n(z)$ fórmulas de sumación de orden p (3^a y 4^a respectivamente) de la forma:

$$K_{n-p}(z, y) = \frac{\sum_{i=n-2p+1}^{n-p} C_i^{(p)} z^i \widehat{P}_i(z) + \sum_{j=0}^{p-1} D_j^{(p)} z^j \widehat{K}_{n-j}(z, 0)}{\bar{y}^p z^{p-1}}$$

$$K_{n-p}(z, y) = \frac{\sum_{i=n-2p+1}^{n-p} C_i^{(p)} y^i \widehat{P}_i(y) + \sum_{j=0}^{p-1} D_j^{(p)} y^j \widehat{K}_{n-j}(y, 0)}{\bar{y}^p z^{p-1}}$$

NOTA. Los coeficientes $C_i^{(p)}$ ($i=n-2p+1, \dots, n-p$), $D_j^{(p)}$ ($j=0, 1, \dots, p-1$) vienen definidos por

$$C_i^{(p)} = (\bar{y}^p z^{p-1}) K_{n-p}(z, y) \circ z^i \widehat{P}_i(z) \quad i=n-2p+1, \dots, n-p$$

$$D_j^{(p)} = (\bar{y}^p z^{p-1}) K_{n-p}(z, y) \circ z^j \widehat{K}_{n-j}(z, 0) \quad j=0, 1, \dots, p-1.$$

Su determinación, que en casos particulares es posible unas veces directamente, otras, con ayuda de la última de las fórmulas de recurrencia (I.4), no parece asequible en el caso general.

Obsérvese que, puesto que los $C_i^{(p)}$, $D_j^{(p)}$ son función de y , la notación $C_i^{(p)}$, $D_j^{(p)}$ supone en este caso concreto sustitución de y por z , y conjugación de coeficientes.

DEMOSTRACION: La 3^a fórmula de sumación se obtiene a partir de la expresión en términos de la base $B_p^{(n)}$ del polinomio $(\bar{y}^p z^{p-1}) K_{n-p}(z, y)$ que pertenece a $\Pi_n(z) \quad \forall y \in \mathbb{C}$. La 4^a fórmula de sumación se deduce de la anterior teniendo en cuenta la relación $K_{n-p}(z, y) = \widehat{K}_{n-p}(y, z)$. #

En el caso $p = 1$ se tienen dos fórmulas de sumación no conocidas hasta ahora:

COROLARIO I.5.1. Si $p = 1$, se tienen respectivamente

$$K_{n-1}(z, y) = \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \frac{z \widehat{P}_{n-1}(z) \widehat{P}_n(y) - \widehat{K}_{n-1}(y, 0) \widehat{K}_n(z, 0)}{\bar{y}z - 1}$$

$$K_{n-1}(z, y) = \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \frac{\bar{y} \widehat{P}_{n-1}(y) \widehat{P}_n(z) - \widehat{K}_{n-1}(z, 0) \widehat{K}_n(y, 0)}{\bar{y}z - 1} \quad \#$$

En lo anterior se ha supuesto $0 < p < n$. En el caso $p = n$ sólo la ex-

presión de $K_n(z, y)$ en la base $B_n^{(n)}$ de $\Pi_n(z)$ tiene cierto interés, obteniéndose la relación:

$$K_n(z, y) = \sum_{j=0}^n \bar{y}^j \widehat{K}_{n-j}(y, 0) z^j \widehat{K}_{n-j}(z, 0)$$

y, en particular,

$$K_n(z, z) = \sum_{j=0}^n |z^j|^2 |\widehat{K}_{n-j}(z, 0)|^2$$

$$K_n(e^{i\theta}, e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^n |\widehat{K}_{n-j}(e^{i\theta}, 0)|^2$$

II. El espacio $\Pi(\frac{1}{z})$

Designamos con $\Pi(\frac{1}{z})$ el espacio vectorial de los polinomios en z^{-1} con coeficientes en \mathbb{C} ; $\Pi(\frac{1}{z})$ es prehilbertiano con el producto escalar definido para los elementos de la base de Hamel $\{1, \frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots\}$ mediante

$$\frac{1}{z^n} \circ \frac{1}{z^m} = z^m \circ z^n$$

y extendido por linealidad a cualquier par $P(\frac{1}{z}), Q(\frac{1}{z})$.

La sucesión fundamental de PO asociada, $\{\widehat{P}_{-n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ viene definida por

$$\widehat{P}_{-n}(z) = \overline{\widehat{P}_n(\frac{1}{z})} \quad n \geq 0$$

donde con la notación de segundo miembro, se indica que la conjugación afecta sólo a los coeficientes del polinomio $\widehat{P}_n(\frac{1}{z})$.

En cuanto a la sucesión de n-núcleos, $\{K_{-n}(z, y)\}_{n=0}^{\infty}$,

$$\forall y \in \mathbb{C}, \quad K_{-n}(z, y) = \sum_{j=0}^n \overline{\widehat{P}_{-j}(y)} \widehat{P}_{-j}(z) \quad n \geq 0$$

y normalizando:

$$\widehat{K}_{-n}(z, y) = K_{-n}(z, y) / \sqrt{K_{-n}(y, y)} \quad n \geq 0$$

Definiendo $\widehat{P}_{-n}(\infty)$ en la forma natural $\widehat{P}_{-n}(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \widehat{P}_{-n}(z)$, resulta $\widehat{P}_{-n}(\infty) = \widehat{P}_n(0)$, luego

$$K_{-n}(z, \infty) = \sum_{j=0}^n \widehat{P}_j(0) \widehat{P}_{-j}(z) \quad n \geq 0$$

$$\widehat{K}_{-n}(z, \infty) = \sqrt{e_n} K_{-n}(z, \infty)$$

(Obsérvese que $\widehat{K}_{-n}(z, \infty) = \overline{\widehat{K}_n(\frac{1}{z}, 0)}$).

Con el empleo de la base $B_{-p}^{(n)}$ ($p \leq n$)

$$B_{-p}^{(n)}: \{z^{-p} \widehat{P}_{-j}(z)\}_{j=0}^{n-p}; \{z^{-j} \widehat{K}_{-(n-j)}(z, \infty)\}_{j=0}^{p-1}$$

y con razonamientos paralelos a los utilizados anteriormente, se obtienen en $\Pi(\frac{1}{z})$ fórmulas homólogas de recurrencia y sumación que pasamos a exponer, omitiendo demostraciones.

PROPOSICION II.1. Para cada p ($0 < p \leq n$) son válidas en $\Pi_n(\frac{1}{z})$ las

2p+2 fórmulas de recurrencia siguientes:

$$\left. \begin{aligned}
 z^{-p} \hat{P}_{-(n-p)}(z) &= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\overline{\tau_{n-j}}}{\sqrt{e_{n-p}}} z^{-j} \hat{K}_{-(n-j-1)}(z, \infty) + \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-p}}} \hat{P}_{-n}(z) \\
 \hat{K}_{-n}(z, \infty) &= \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{K}_{-(n-1)}(z, \infty) + \sqrt{e_n} \hat{P}_n(0) \hat{P}_{-n}(z) \\
 z^{-h} \hat{K}_{-(n-h)}(z, \infty) &= \sum_{j=0}^{h-1} \frac{\overline{\tau_{n-j}}}{\hat{P}_{n-h}(0)} z^{-j} \hat{K}_{-(n-j-1)}(z, \infty) + \\
 &+ \sqrt{\frac{e_{n-h}}{e_{n-h-1}}} z^{-h} \hat{K}_{-(n-h-1)}(z, \infty) + \\
 &+ \sqrt{e_n} \hat{P}_{n-h}(0) \hat{P}_{-n}(z) \quad (h=1, 2, \dots, p-1)
 \end{aligned} \right\} \text{(II.1)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 z^{-i} \hat{K}_{-(n-i-1)}(z, \infty) &= \frac{\overline{\tau_{n-i}}}{\sqrt{e_{n-p}}} z^{-p} \hat{P}_{-(n-p)}(z) + \sqrt{\frac{e_{n-i}}{e_{n-i-1}}} z^{-i} \hat{K}_{-(n-i)}(z, \infty) + \\
 &+ \sum_{j=i+1}^{p-1} \frac{\overline{\tau_{n-i}}}{\hat{P}_{n-j}(0)} z^{-j} \hat{K}_{-(n-j)}(z, \infty) \\
 &\quad (i=0, 1, \dots, p-2) \\
 \hat{K}_{-(n-p)}(z, \infty) &= \frac{\overline{\tau_{n-p+1}}}{\sqrt{e_{n-p}}} z^{-1} \hat{P}_{-(n-p)}(z) + \sqrt{\frac{e_{n-p+1}}{e_{n-p}}} \hat{K}_{-(n-p+1)}(z, \infty) \\
 \hat{P}_{-n}(z) &= \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-p}}} z^{-p} \hat{P}_{-(n-p)}(z) + \sqrt{e_n} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\overline{\tau_{n-j}}}{\hat{P}_{n-j}(0)} z^{-j} \hat{K}_{-(n-j)}(z, \infty)
 \end{aligned} \right\} \text{(II.2)}$$

COROLARIO II.1.1. En el caso $p = 1$ se obtienen las cuatro fórmulas de recurrencia siguientes:

$$\left. \begin{aligned}
 z^{-1} \hat{P}_{-(n-1)}(z) &= -\sqrt{e_n} \hat{P}_n(0) \hat{K}_{-(n-1)}(z, \infty) + \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{P}_{-n}(z) \\
 \hat{K}_{-n}(z, \infty) &= \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{K}_{-(n-1)}(z, \infty) + \sqrt{e_n} \hat{P}_n(0) \hat{P}_{-n}(z)
 \end{aligned} \right\} \text{(II.3)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{K}_{-(n-1)}(z, \infty) &= -\sqrt{e_n} \hat{P}_n(0) z^{-1} \hat{P}_{-(n-1)}(z) + \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \hat{K}_{-n}(z, \infty) \\
 \hat{P}_{-n}(z) &= \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} z^{-1} \hat{P}_{-(n-1)}(z) + \sqrt{e_n} \hat{P}_n(0) \hat{K}_{-n}(z, \infty)
 \end{aligned} \right\} \text{(II.4)}$$

#

PROPOSICION II.2. En $\Pi_n(\frac{1}{z})$ se tienen las relaciones siguientes que llamaremos de sumación de orden p ($0 < p < n$)

$$K_{-(n-p)}(z, y) = \frac{-\sum_{h=n-p+1}^n \widehat{p}_{-h}(y) \widehat{p}_{-h}(z) + \sum_{j=0}^{p-1} \bar{y}^{-j} z^j \widehat{k}_{-(n-j)}(y, \infty) \widehat{k}_{-(n-j)}(z, \infty)}{1 - \bar{y}^{-p} z^{-p}}$$

$$K_{-n}(z, y) = \frac{-\bar{y}^{-p} z^{-p} \sum_{h=n-p+1}^n \widehat{p}_{-h}(y) \widehat{p}_{-h}(z) + \sum_{j=0}^{p-1} \bar{y}^{-j} z^{-j} \widehat{k}_{-(n-j)}(y, \infty) \widehat{k}_{-(n-j)}(z, \infty)}{1 - \bar{y}^{-p} z^{-p}}$$

$$K_{-(n-p)}(z, y) = \frac{\sum_{i=n-2p+1}^{n-p} C_i^{(p)} z^{-p} \widehat{p}_{-i}(z) + \sum_{j=0}^{p-1} D_j^{(-p)} z^{-j} \widehat{k}_{-(n-j)}(z, \infty)}{\bar{y}^{-p} z^{-p-1}}$$

$$K_{-(n-p)}(z, y) = \frac{\sum_{i=n-2p+1}^{n-p} C_i^{(-p)} \bar{y}^{-p} \widehat{p}_{-i}(y) + \sum_{j=0}^{p-1} D_j^{(-p)} \bar{y}^{-j} \widehat{k}_{-(n-j)}(y, \infty)}{\bar{y}^{-p} z^{-p-1}}$$

con coeficientes $C_i^{(-p)}$, $D_j^{(-p)}$, las dos últimas, definidos por:

$$C_i^{(-p)} = (\bar{y}^{-p} z^{-p-1}) K_{-(n-p)}(z, y) \circ z^{-p} \widehat{p}_{-i}(z) \quad i=n-2p+1, \dots, n$$

$$D_j^{(-p)} = (\bar{y}^{-p} z^{-p-1}) K_{-(n-p)}(z, y) \circ z^{-j} \widehat{k}_{-(n-j)}(z, \infty) \quad j=0, 1, \dots, n-1$$

y cuya determinación efectiva no parece posible en general. #

La notación $\overline{C_i^{(-p)}}$, $\overline{D_j^{(-p)}}$ es la que se precisa en la proposición 1.5.

En el caso $p = n$, se obtiene la relación:

$$K_{-n}(z, y) = \sum_{j=0}^n y^j \widehat{k}_{-(n-j)}(y, \infty) z^j K_{-(n-j)}(z, \infty).$$

COROLARIO II.2.1. En el caso $p = 1$ se obtienen las siguientes fórmulas de sumación ordinarias:

$$K_{-(n-1)}(z, y) = \frac{-\widehat{p}_{-n}(y) \widehat{p}_{-n}(z) + \widehat{k}_{-n}(y, \infty) \widehat{k}_{-n}(z, \infty)}{1 - \bar{y}^{-1} z^{-1}}$$

$$K_{-n}(z, y) = \frac{-\bar{y}^{-1} z^{-1} \widehat{p}_{-n}(y) \widehat{p}_{-n}(z) + \widehat{k}_{-n}(y, \infty) K_{-n}(z, \infty)}{1 - \bar{y}^{-1} z^{-1}}$$

$$K_{-(n-1)}(z, y) = \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \frac{z^{-1} \widehat{p}_{-(n-1)}(z) \widehat{p}_{-n}(y) - \widehat{k}_{-(n-1)}(y, \infty) \widehat{k}_{-n}(z, \infty)}{\bar{y}^{-1} z^{-1} - 1}$$

$$K_{-(n-1)}(z, y) = \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}} \frac{\bar{y}^{-1} \widehat{p}_{-(n-1)}(y) \widehat{p}_{-n}(z) - \widehat{k}_{-n}(y, \infty) \widehat{k}_{-(n-1)}(z, \infty)}{\bar{y}^{-1} z^{-1} - 1}$$

Obsérvese que todas las relaciones que aquí se obtienen resultan de las correspondientes de $\Pi(z)$ al sustituir $\hat{P}_n(z)$ y $\hat{K}_n(z,0)$ por $\hat{P}_{-n}(z)$ y $\hat{K}_{-n}(z,\infty)$ respectivamente y conyugar coeficientes.

(*) Este artículo es parte de la Tesis Doctoral de la autora, leída en Zaragoza el 6 de Julio de 1978 y dirigida por el Prof. Dr. D. Luis Vigil y Vázquez.

BIBLIOGRAFIA

1. M. ALFARO: "Teoría paramétrica de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad", Rev. Acad. Ci. Zaragoza (2) 29 (1974), pp. 5-79.
2. G. FREUD: "Orthogonal polynomials", Pergamon Press. Londres (1971).
3. F. MARCELLAN: "Polinomios ortogonales sobre cassinianas", Tesis Doctoral, Dpto. Teoría de Funciones. Facultad de Ciencias. Zaragoza.
4. G. SZEGÖ: "Orthogonal Polynomials", AMS, Colloquium Publications, XXIII Providence, Rhode Island (1968).
5. L. VIGIL: "Sobre propiedades formales de polinomios ortogonales: Sumatoria y recurrencia". Rev. Acad. Ci. Madrid, 63 (1969), pp. 11-32.

CRITERIO MIXTO DE UTILIDAD Y QUIETUD ESPERADAS (INVARIANTE FRENTE A TRASLACIONES RESPECTO A LAS UTILIDADES)

María Angeles Gil Alvarez

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Oviedo.

In the theory of making decision under risk, experiments are considered to be informative since they reduce the amount of uncertainty associated with the states of nature. If the decision maker can make several decisions and he is able to allocate them numeric values (utilities), depending on the states of nature, to evaluate the interest that the election of a decision before a state of nature has for him, then, the increase of information provided by a experiment performance infers an increase of utility (value of information). In the other hand, the concurrence of uncertainty and diversity of utilities in a same problem causes the appearance of unquietness associated with the states of nature.

Now, we assume that certain decision maker can perform several random experiments, but he cannot perform two experiments simultaneously. Then, he must make a selection among them. In this paper, we establish a criterion of comparison between two experiments, which consider better an experiment when the provided information implies more increase of utility and, if the increases of utility are equal for two experiments, when that information provides more quietness to the decision maker.

1. INTRODUCCION.

Si consideramos un proceso de decisión en ambiente de riesgo y suponemos que cierto decisor puede realizar experimentos distintos, pero no a un tiempo, convendría efectuar la selección del más adecuado, que en principio sería aquel experimento que proporcionara mayor información sobre los estados de la naturaleza. Con tal motivo, P. García Carrasco formuló en ⁴ un criterio de comparación de experimentos basado en la maximización de la información de Shannon, que resolvía satisfactoriamente el problema de selección.

Si admitimos por otro lado que el decisor dispone de un conjunto de decisiones cuya consideración, según el estado de la naturaleza que pueda presentarse, es capaz de evaluar mediante una función de utilidad, entonces, el camino más indicado siguiendo un comportamiento bayesiano sería tomar, previamente a la realización de experimentos, aquella decisión que maximizara la utilidad esperada y, tras la realización de un experimento y del conocimiento de su resultado (lo que representaría el paso de una distribución a priori a una distribución a posteriori sobre el conjunto de estados de la naturaleza), tomar aquella decisión que maximizara la nueva utilidad esperada. Después de la toma de decisiones, el decisor tendría que seleccionar el experimento más adecuado para realizar, que a la luz de los nuevos datos sería aquel experimento para el cual el conocimiento de su resultado proporcionara la mayor ganancia esperada de utilidad (entendiendo por ganancia de utilidad, la variación en la utilidad esperada que posibilita la información acerca de la realización del experimento). En la misma línea que el criterio basado en la información de Shannon, P. García Carrasco estudió otro criterio cimentado en el valor de la información muestral

o EVSI, definido por Raiffa y Schlaifer y que intuitivamente puede interpretarse como la ganancia esperada de utilidad mencionada anteriormente.

El objetivo del trabajo que nos ocupa, es formular un criterio más fuerte que este último, en el sentido de que permita comparar algunos experimentos que mediante el criterio precedente no son comparables, pero manteniendo el orden entre los comparables.

Para ello se incorpora el concepto de "inquietud" definido y analizado en ⁵ y del que se han propuesto dos medidas ⁶, aplicables a dos situaciones distintas, en una de las cuales vamos a fundamentarnos posteriormente.

Como observamos ya en el resumen, la inquietud asociada a los estados de la naturaleza surge para el decisor por la concurrencia de una incertidumbre sobre el estado que puede presentarse y de una función de utilidad que representa una valoración del interés que las distintas decisiones tienen para él.

El criterio que establecemos a continuación sigue los pasos siguientes: a) Se supone que antes de realizar un experimento el decisor elige la acción a_0 que maximice su utilidad esperada y que tras la realización de un experimento X , y el conocimiento de su resultado x , elige la acción a_x que maximice la nueva utilidad esperada; b) Se define el valor esperado de la información o EV SI para cada experimento; c) Se define el valor esperado de la inquietud que cada experimento suministra sobre el conjunto de estados de la naturaleza, como la variación esperada que sufre la inquietud sobre ellos al pasar de tomar la acción a_0 a tomar la acción a_x .

Detallamos ahora los anteriores pasos:

Consideremos un problema general de decisión (E, Z, A, θ) , siendo E el espacio de experimentos, Z el de resultados, A el de acciones y θ el de estados de la naturaleza.

Un experimento X asociado a θ consiste en un espacio medible (x, A) y una familia de distribuciones $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ sobre él. Denotaremos este experimento por $X = \{x; A; P_\theta, \theta \in \Theta\}$.

Supongamos que existe una distribución de probabilidad a priori $p(\theta)$ sobre una σ -álgebra F de subconjuntos de Θ , y para cada experimento $X = \{x; A; P_\theta, \theta \in \Theta\}$ la familia de distribuciones condicionadas P_θ determina junto con la dada a priori una distribución sobre el espacio medible $(\Theta \times x; F \times A)$.

En lo sucesivo, admitiremos que $p(\theta)$ es absolutamente continua respecto de cierta medida α sobre F y que para todo experimento $\{x; A; P_\theta, \theta \in \Theta\}$ las distribuciones P_θ son absolutamente continuas respecto de una medida σ -finita μ sobre A .

Por último y para simplificar más el estudio, θ y x serán espacios euclídeos con la σ -álgebra de Borel, y α y μ las medidas de Lebesgue.

Si en la situación anteriormente descrita el decisor es capaz de construir una función de utilidad sobre el espacio $A \times \Theta$ que evalúe el interés que para él reviste el hecho de elegir una acción cuando se presenta un estado de la naturaleza determinado, frente a los intereses de los restantes pares (acción, estado), pueden establecerse las siguientes definiciones:

Definición 1.1.- Sea X un experimento perteneciente a E y x el resultado de X . Designaremos por a_x la acción Bayes, a posteriori, es decir, la que verifica:

$$E_{\theta/x}[u(a_x, \theta)] = \max_{a \in A} \{E_{\theta/x}[u(a, \theta)]\}$$

y, designaremos por a_0 la acción Bayes, a priori, que cumple:

$$E_{\theta}[u(a_0, \theta)] = \max_{a \in A} \{ E_{\theta}[u(a, \theta)] \}$$

Definición 1.2.- Recibe el nombre de "valor esperado de la información muestral" (EVSÍ, definido por Raiffa y Schlaifer), la expresión, si existe:

$$\begin{aligned} V(X; \theta) &= E_x \{ E_{\theta/X}[u(a_x, \theta)] - E_{\theta}[u(a_0, \theta)] \} = \\ &= E_{x, \theta} [u(a_x, \theta) - u(a_0, \theta)] \end{aligned}$$

Definición 1.3.- Recibe el nombre de "valor esperado de la quietud que el experimento X proporciona sobre el espacio paramétrico θ ", la expresión, si existe:

$$\begin{aligned} IU^*(\theta; X) &= E_{x, \theta} \left\{ [u(a_0, \theta) - E_{\theta}[u(a_0, \theta)]]^2 + \right. \\ &\quad \left. - [u(a_x, \theta) - E_{\theta/X}[u(a_x, \theta)]]^2 \right\} = E_{x, \theta} \left\{ [u(a_0, \theta)]^2 + \right. \\ &\quad \left. - [u(a_x, \theta)]^2 \right\} - \left[E_{\theta}[u(a_0, \theta)] \right]^2 + \left[E_x \{ E_{\theta/X}[u(a_x, \theta)] \} \right]^2 \end{aligned}$$

(En estas definiciones hemos considerado que el espacio de acciones es tal que el valor $\max_{a \in A}$ de las expresiones afectadas es alcanzable. No obstante, cuando sea preciso a fin de garantizar la existencia de a_x y a_0 se sustituirá el $\max_{a \in A}$ por el $\sup_{a \in A}$).

Queremos destacar, que la medida de quietud considerada en la definición 1.3, está construida a partir de la medida de inquietud consistente en la varianza de las utilidades, la cual ha sido estudiada en tal sentido en ⁶, artículo en el que se esboza una caracterización axiomática de la varianza como medida para la inquietud, a partir de su consideración como medida de dispersión.

Conviene reseñar, finalmente, que tanto la expresión $V(X; \theta)$ como la expresión $IU^*(\theta; X)$ son invariantes frente a traslaciones de la escala de utilidades, por lo que para una valoración más eficaz y realista sería deseable que el decisor estableciera la función de utilidad atendiendo a la significación de las diferencias entre las utilidades de los distintos pares (acción, estado).

2. CRITERIO MIXTO DE UTILIDAD Y QUIETUD ESPERADAS.

Dado el problema de decisión anterior, se dice que el experimento X de E es preferido al experimento Y de E con el "criterio mixto de utilidad y quietud esperadas (invariante frente a traslaciones respecto a las utilidades)", y lo denotaremos por $X \overset{u^*}{\succsim} Y$, si y sólo si:

$$V(X; \theta) > V(Y; \theta) \quad \text{o} \quad V(X; \theta) = V(Y; \theta) \quad \text{e} \quad IU^*(\theta; X) \geq IU^*(\theta; Y)$$

Se dice, así mismo, que $X \overset{u^*}{\sim} Y$ si y sólo si $X \overset{u^*}{\succsim} Y$ e $Y \overset{u^*}{\succsim} X$, para lo cual es condición necesaria y suficiente que $V(X; \theta) = V(Y; \theta)$ e $IU^*(\theta; X) = IU^*(\theta; Y)$.

De aquí en adelante, supondremos la existencia de los valores $V(X; \theta)$ e $IU^*(\theta; X)$ para todos los experimentos X de E con los que trabajemos, así como la permutación de las diversas integrales múltiples que aparezcan en las de-

mostraciones posteriores. En relación con los primeros, cuando sea preciso especificar la distribución a priori sobre θ se denotará $V(X;\theta)$ por $V(X;\theta;p(\theta))$ e $IU^*(\theta;X)$ por $IU^*(\theta;X;p(\theta))$.

A lo largo del estudio que se desarrolla en los dos siguientes apartados, se emplean definiciones y resultados recopilados y analizados en ⁴, y en la mayoría de las propiedades que vamos a exponer, la primera etapa de su demostración se encuentra realizada en dicho trabajo.

3. PROPIEDADES.

Propiedad 3.1.- La relación $\underset{\sim}{\succ}^{u^*}$ es un preorden completo.

Demostración: En efecto, dicha relación es reflexiva, transitiva y de orden total, por identificarse con la composición de dos relaciones de orden sobre un subconjunto de números reales.

Propiedad 3.2.- Si N es el experimento nulo, es decir $N = \{y; B; Q_\theta, \theta \in \Theta\}$ tal que Q_θ no depende de θ , se verifica que $X \underset{\sim}{\succ}^{u^*} N$, para todo experimento X de E .

Demostración: En efecto, por definición de $a_x, E_{\theta/x}[u(a_x, \theta)] \geq E_{\theta/x}[u(a_o, \theta)]$ y, por tanto, $V(X; \theta) \geq 0$.

Como Q_θ es independiente de θ se deduce que $Q(\theta/y)$ es independiente de y por lo que, en consecuencia, las acciones a_y y a_o coinciden. Luego, $V(N; \theta) = 0$.

La demostración se reduce entonces a probar que, para aquellos experimentos X cuyo valor de información $V(X; \theta)$ sea nulo, se cumple que $IU^*(\theta; X) \geq IU^*(\theta; N)$.

Acabamos de ver que para el experimento nulo las acciones a posteriori se identifican con la acción a priori y ya que $Q(\theta/y)$ es independiente de y se concluye que $IU^*(\theta; N) = 0$.

Sea X un experimento sobre θ tal que $V(X; \theta) = 0$. Esta última condición indica que:

$$E_{x, \theta}[u(a_x, \theta)] = E_{x, \theta}[u(a_o, \theta)]$$

y como, por otro lado, es $E_{\theta/x}[u(a_x, \theta)] \geq E_{\theta/x}[u(a_o, \theta)]$, para todo $x \in x$, se colige que esta última desigualdad debe ser c. s. una igualdad, es decir que a_x y a_o coinciden para casi todo x en x . De esta forma:

$$IU^*(\theta; X) = \left(E_x \{ E_{\theta/x}[u(a_o, \theta)] \} \right)^2 - \left(E_\theta [u(a_o, \theta)] \right)^2$$

diferencia que, en virtud de la concavidad de la función $f(x) = x^2$ y de la desigualdad de Jensen, resulta no negativa con lo que la propiedad queda probada.

Propiedad 3.3.- Sean X_1 y X_2 dos experimentos sobre θ y sea (X_1, X_2) el experimento compuesto. Se verifica que:

$$(X_1, X_2) \underset{\sim}{\succ}^{u^*} X_1$$

Demostración: En efecto:

$$V((X_1, X_2); \theta) = E_\theta [E_{x_1, x_2 / \theta} \{ u(a_{x_1, x_2}, \theta) - u(a_o, \theta) \}] =$$

$$\begin{aligned}
&= E_{\theta} [E_{x_1 x_2 / \theta} \{u(a_{x_1 x_2}, \theta) - u(a_{x_1}, \theta)\}] + E_{\theta} [E_{x_1 x_2 / \theta} \{u(a_{x_1}, \theta) - u(a_0, \theta)\}] \\
&= E_{\theta} [E_{x_1 x_2 / \theta} \{u(a_{x_1 x_2}, \theta) - u(a_{x_1}, \theta)\}] + V(X_1; \theta)
\end{aligned}$$

Como la diferencia que aparece en el primer sumando es no negativa, por la definición de $a_{x_1 x_2}$, se deduce que:

$$V((X_1, X_2); \theta) \geq V(X_1; \theta)$$

cualquiera que sea el experimento X_2 sobre θ .

Si suponemos que X_2 es un experimento tal que $V((X_1, X_2); \theta) = V(X_1; \theta)$, se tiene:

$$E_{x_1 x_2 \theta} [u(a_{x_1 x_2}, \theta) - u(a_0, \theta)] = E_{x_1 \theta} [u(a_{x_1}, \theta) - u(a_0, \theta)]$$

de donde:

$$E_{x_1 x_2 \theta} [u(a_{x_1 x_2}, \theta)] = E_{x_1 x_2 \theta} [u(a_{x_1}, \theta)]$$

Pero, ya que cualquiera que sea $(x_1, x_2) \in x_1 \times x_2$:

$$E_{\theta / x_1 x_2} [u(a_{x_1 x_2}, \theta)] \geq E_{\theta / x_1 x_2} [u(a_{x_1}, \theta)]$$

entonces, esta desigualdad debe ser c. s. una igualdad, lo que indica que $a_{x_1 x_2}$ y a_{x_1} coinciden para casi todo (x_1, x_2) en $x_1 \times x_2$. En consecuencia:

$$\begin{aligned}
IU^*(\theta; X_1, X_2) &= E_{x_1 x_2 \theta} \left\{ \{u(a_0, \theta)\}^2 - \{u(a_{x_1}, \theta)\}^2 \right\} - \left\{ E_{\theta} [u(a_0, \theta)] \right\}^2 + \\
&+ \left\{ E_{x_1 x_2} \{E_{\theta / x_1 x_2} [u(a_{x_1}, \theta)]\}^2 \right\} = E_{x_1 \theta} \left\{ \{u(a_0, \theta)\}^2 - \{u(a_{x_1}, \theta)\}^2 \right\} + \\
&- \left\{ E_{\theta} [u(a_0, \theta)] \right\}^2 + \left\{ E_{x_1} \{E_{\theta / x_1} [u(a_{x_1}, \theta)]\}^2 \right\} + \left\{ E_{x_1 x_2} \{E_{\theta / x_1 x_2} [u(a_{x_1}, \theta)]\}^2 \right\} \\
&- \left\{ E_{x_1} \{E_{\theta / x_1} [u(a_{x_1}, \theta)]\}^2 \right\} = IU^*(\theta; X_1) + \\
&+ E_{x_1} \left\{ E_{x_2 / x_1} \left(\{E_{\theta / x_1 x_2} [u(a_{x_1}, \theta)]\}^2 - \{E_{\theta / x_1} [u(a_{x_1}, \theta)]\}^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

resultando no negativo el segundo sumando, si se tiene en cuenta que cualquiera que sea x_1 es $E_{\theta / x_1} [u(a_{x_1}, \theta)] = E_{x_2 / x_1} \{E_{\theta / x_1 x_2} [u(a_{x_1}, \theta)]\}$ y se aplica la desigualdad de Jensen a la función cóncava dada por $f(x) = x^2$.

Propiedad 3.4. - Sea $X^{(n)}$ el experimento correspondiente a la muestra aleatoria simple de tamaño n de X . Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, se verifica que:

$$X^{(n+1)} \stackrel{u^*}{\geq} X^{(n)}$$

Demostración: En efecto, se prueba mediante un razonamiento similar al expuesto en la tercera propiedad.

Propiedad 3.5. - Sean X_1 , X_2 y X_3 tres experimentos sobre θ tales que

$X_1 \stackrel{u^*}{\geq} X_3$ para toda distribución a priori sobre θ y X_2 es independiente de X_1 y X_3 . Se verifica, entonces, que para toda distribución a priori:

$$(X_1, X_2) \stackrel{u^*}{\geq} (X_3, X_2)$$

Demostración: En efecto, para demostrarlo utilizaremos dos lemas de apoyo que estableceremos a continuación:

3.5.1.- Sean Y_1 e Y_2 dos experimentos sobre θ independientes y $p(\theta)$ la distribución a priori sobre θ . Si (Y_1, Y_2) es el experimento compuesto, se verifica que:

$$V((Y_1, Y_2); \theta; p(\theta)) = V(Y_2; \theta; p(\theta)) + E_{Y_2} \{V(Y_1; \theta; p(\theta/Y_2))\}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} V((Y_1, Y_2); \theta; p(\theta)) &= E_{Y_1 Y_2 \theta} [u(a_{Y_1 Y_2}, \theta) - u(a_\theta, \theta)]^2 = \\ &= E_{Y_2 \theta} [u(a_{Y_2}, \theta) - u(a_\theta, \theta)]^2 + E_{Y_2} \{E_{Y_1 \theta/Y_2} [u(a_{Y_1 Y_2}, \theta) - u(a_{Y_2}, \theta)]^2\} \end{aligned}$$

Si, fijado y_2 arbitrario, denotamos por $p'(\theta)$ la distribución sobre θ , $p(\theta/Y_2)$, la correspondiente distribución a posteriori $p'(\theta/Y_1)$ será, en virtud de la independencia de Y_1 e Y_2 , $p(\theta/Y_1, Y_2)$ de donde las acciones Bayes a priori a'_θ y a posteriori a'_θ vendrán dadas, respectivamente, por a_{Y_2} y $a_{Y_1 Y_2}$, por lo cual:

$$\begin{aligned} V(Y_1; \theta; p(\theta/Y_2)) &= E_{Y_1} \{E_{\theta/Y_1 Y_2} [u(a_{Y_1 Y_2}, \theta) - u(a_{Y_1}, \theta)]^2\} = \\ &= E_{Y_1 \theta/Y_2} [u(a_{Y_1 Y_2}, \theta) - u(a_{Y_2}, \theta)]^2 \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del primer lema.

3.5.2.- Sean Y_1 e Y_2 dos experimentos independientes y $p(\theta)$ la distribución a priori sobre θ . Si (Y_1, Y_2) es el experimento compuesto, se verifica que:

$$IU^*(\theta; (Y_1, Y_2); p(\theta)) = IU^*(\theta; Y_2; p(\theta)) + E_{Y_2} \{IU^*(\theta; Y_1; p(\theta/Y_2))\}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} IU^*(\theta; (Y_1, Y_2); p(\theta)) &= E_{Y_1 Y_2 \theta} (\{u(a_\theta, \theta) - E_\theta [u(a_\theta, \theta)]\}^2 + \\ &- \{u(a_{Y_1 Y_2}, \theta) - E_{\theta/Y_1 Y_2} [u(a_{Y_1 Y_2}, \theta)]\}^2) = IU^*(\theta; Y_2; p(\theta)) + \\ &+ E_{Y_1 Y_2 \theta} (\{u(a_{Y_1}, \theta) - E_{\theta/Y_2} [u(a_{Y_2}, \theta)]\}^2 - \{u(a_{Y_1 Y_2}, \theta) + \\ &- E_{\theta/Y_1 Y_2} [u(a_{Y_1 Y_2}, \theta)]\}^2) = IU^*(\theta; Y_2; p(\theta)) + E_{Y_2} \{E_{\theta/Y_1 Y_2} (\{u(a_{Y_2}, \theta) + \\ &- E_{\theta/Y_2} [u(a_{Y_2}, \theta)]\}^2 - \{u(a_{Y_1 Y_2}, \theta) - E_{\theta/Y_1 Y_2} [u(a_{Y_1 Y_2}, \theta)]\}^2)\} \end{aligned}$$

y, mediante un razonamiento análogo al del lema anterior:

$$\begin{aligned} IU^*(\theta; Y_1; p(\theta/Y_2)) &= E_{Y_1 \theta/Y_2} (\{u(a_{Y_2}, \theta) - E_{\theta/Y_2} [u(a_{Y_2}, \theta)]\}^2 + \\ &- \{u(a_{Y_1 Y_2}, \theta) - E_{\theta/Y_1 Y_2} [u(a_{Y_1 Y_2}, \theta)]\}^2) \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del lema.

Aplicando ahora ambos lemas, vamos a probar la propiedad enunciada:

En virtud de la independencia de X_2 con X_1 y X_3 :

$$V((X_1, X_2); \theta; p(\theta)) = V(X_2; \theta; p(\theta)) + E_{X_2} \{V(X_1; \theta; p(\theta/X_2))\} \quad (3.5.a)$$

$$V((X_3, X_2); \theta; p(\theta)) = V(X_2; \theta; p(\theta)) + E_{X_2} \{V(X_3; \theta; p(\theta/X_2))\} \quad (3.5.b)$$

$$IU^*(\theta; (X_1, X_2); p(\theta)) = IU^*(\theta; X_2; p(\theta)) + E_{X_2} \{IU^*(\theta; X_1; p(\theta/X_2))\} \quad (3.5.c)$$

$$IU^*(\theta; (X_3, X_2); p(\theta)) = IU^*(\theta; X_2; p(\theta)) + E_{X_2} \{IU^*(\theta; X_3; p(\theta/X_2))\} \quad (3.5.d)$$

Por otra parte, del hecho de que $X_1 \stackrel{u^*}{\geq} X_3$ para toda distribución a priori sobre θ y a partir de la definición de la relación establecida en el segundo apartado del presente trabajo, se desprenden dos consecuencias posibles:

- Si para casi todo $x_2 \in x_2$ se cumple que $V(X_1; \theta; p(\theta/x_2)) = V(X_3; \theta; p(\theta/x_2))$ entonces para casi todo $x_2 \in x_2$ será $IU^*(\theta; X_1; p(\theta/x_2)) \geq IU^*(\theta; X_3; p(\theta/x_2))$, lo que implica a la vista de las igualdades (3.5.a), (3.5.b), (3.5.c) y (3.5.d) que cualquiera que sea la distribución $p(\theta)$ sobre θ :

$$V((X_1, X_2); \theta; p(\theta)) = V((X_3, X_2); \theta; p(\theta))$$

e:

$$IU^*(\theta; (X_1, X_2); p(\theta)) \geq IU^*(\theta; (X_3, X_2); p(\theta))$$

- Si no se presenta la anterior situación, obviamente existe un conjunto A de x_2 de medida no nula y tal que $\forall x \in A$ es $V(X_1; \theta; p(\theta/x_2)) > V(X_3; \theta; p(\theta/x_2))$ mientras que para los x_2 que no pertenezcan a A la anterior desigualdad se transforma en igualdad, de donde a la vista de las igualdades (3.5.a) y (3.5.b) se tiene que:

$$V((X_1, X_2); \theta; p(\theta)) > V((X_3, X_2); \theta; p(\theta))$$

y, por tanto:

$$(X_1, X_2) \stackrel{u^*}{\geq} (X_3, X_2)$$

Propiedad 3.6.- Sean X_1, X_2, X_3 y X_4 cuatro experimentos sobre θ , tales que

$X_1 \stackrel{u^*}{\geq} X_2$ y $X_3 \stackrel{u^*}{\geq} X_4$ para toda distribución a priori. Si X_1 es independiente de X_3 y X_2 es independiente de X_4 , se verifica que:

$$(X_1, X_3) \stackrel{u^*}{\geq} (X_2, X_4)$$

para toda distribución a priori sobre θ .

Demostración: En efecto, para demostrarlo basta definir cuatro experimentos Y_1, Y_2, Y_3 , e Y_4 tales que, $\forall \theta \in \theta$, Y_i tenga la misma distribución que X_i ($i=1, 2, 3, 4$), de forma que Y_1 sea independiente de Y_3 , Y_2 lo sea de Y_4 y por último Y_2 sea independiente de Y_3 . Entonces, aplicando la propiedad anterior, cualquiera que sea la distribución $p(\theta)$ sobre θ :

$$\begin{aligned} IU^*(\theta; (X_1, X_3); p(\theta)) &= IU^*(\theta; (Y_1, Y_3); p(\theta)) \geq IU^*(\theta; (Y_2, Y_3); p(\theta)) \geq \\ &\geq IU^*(\theta; (Y_2, Y_4); p(\theta)) = IU^*(\theta; (X_2, X_4); p(\theta)) \end{aligned}$$

Propiedad 3.7.- Sea $X = \{x; A; P_\theta, \theta \in \theta\}$ un experimento sobre θ y sea $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

una partición de x por elementos de la σ -álgebra A . Si se considera el experimento $Y = \{y; B; Q_\theta, \theta \in \theta\}$ donde $y = \{E_i / i \in \mathbb{N}\}$, B es la σ -álgebra engendrada por los E_i , y tal que $Q_\theta(E_i) = P_\theta(E_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$X \stackrel{u^*}{\geq} Y$$

para toda distribución a priori sobre θ .

Demostración: En efecto, sea $p(\theta)$ una distribución a priori cualquiera sobre θ . Entonces, $\forall i \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in E_i$, será:

$$E_{\theta/X}[u(a_x, \theta)] \geq E_{\theta/X}[u(a_{E_i}, \theta)]$$

de donde:

$$\sum_{i \in N} \left\{ \int_{E_i} E_{\theta/X}[u(a_x, \theta)] P(dx) \right\} \geq \sum_{i \in N} \left\{ \int_{E_i} E_{\theta/X}[u(a_{E_i}, \theta)] P(dx) \right\}$$

es decir:

$$E_{X, \theta}[u(a_x, \theta)] \geq \sum_{i \in N} P(E_i) \cdot E_{\theta/E_i}[u(a_{E_i}, \theta)]$$

y, por tanto:

$$V(X; \theta; p(\theta)) \geq V(Y; \theta; p(\theta))$$

Si, en particular, se satisface que $V(X; \theta; p(\theta)) = V(Y; \theta; p(\theta))$, en virtud de la primera desigualdad que aparece en la presente demostración se cumplirá $\forall i \in N$ con $P(E_i) \neq 0$ que para casi todo x de E_i las acciones a_x y a_{E_i} coinciden. En consecuencia:

$$\begin{aligned} IU^*(\theta; X; p(\theta)) &= \sum_{i \in N} \iint_{E_i \times \Theta} \{u(a_o, \theta) - E_{\theta}[u(a_o, \theta)]\}^2 + \\ &- \{u(a_{E_i}, \theta) - E_{\theta/X}[u(a_{E_i}, \theta)]\}^2 P(dx, d\theta) = \sum_{i \in N} \int_{\Theta} \{u(a_o, \theta) + \\ &- E_{\theta}[u(a_o, \theta)]\}^2 P(E_i, d\theta) - \sum_{i \in N} \int_{\Theta} \{u(a_{E_i}, \theta)\}^2 P(E_i, d\theta) + \\ &+ \sum_{i \in N} \int_{E_i} \{E_{\theta/X}[u(a_{E_i}, \theta)]\}^2 P(dx) = \sum_{i \in N} \int_{\Theta} \{u(a_o, \theta) + \\ &- E_{\theta}[u(a_o, \theta)]\}^2 P(E_i, d\theta) - \sum_{i \in N} \int_{\Theta} \{u(a_{E_i}, \theta)\}^2 P(E_i, d\theta) + \\ &+ \sum_{i \in N} P(E_i) \int_{E_i} \frac{\{E_{\theta/X}[u(a_{E_i}, \theta)]\}^2}{P(E_i)} P(dx) \end{aligned}$$

$$\text{Como } E_{\theta/E_i}[u(a_{E_i}, \theta)] = \int_{E_i} \frac{1}{P(E_i)} E_{\theta/X}[u(a_{E_i}, \theta)] P(dx), \forall i \in N, \text{ por}$$

la desigualdad de Jensen se obtiene:

$$\begin{aligned} IU^*(\theta; X; p(\theta)) &\geq \sum_{i \in N} \int_{\Theta} \{u(a_o, \theta) - E_{\theta}[u(a_o, \theta)]\}^2 P(E_i, d\theta) + \\ &- \sum_{i \in N} \int_{\Theta} \{u(a_{E_i}, \theta)\}^2 P(E_i, d\theta) + \sum_{i \in N} P(E_i) \cdot \{E_{\theta/E_i}[u(a_{E_i}, \theta)]\}^2 = \\ &= IU^*(\theta; Y; p(\theta)) \end{aligned}$$

Propiedad 3.8. - Si $X^{(n)}$ es el experimento correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño n de X y $T = T(X^{(n)})$ es un estadístico de dicha muestra, se verifica que:

$$X^{(n)} \stackrel{u^*}{\succ} T$$

cualquiera que sea la distribución a priori sobre θ . Además, si T es un estadístico suficiente de $X^{(n)}$, se cumple que:

$$X^{(n)} \stackrel{u^*}{\sim} T$$

Demostración:

Sea $p(\theta)$ una distribución a priori sobre θ . Denotemos, para $t \in \mathbb{R}$, $z_t = \{z \in \mathbb{R}^n / T(z) = t\}$. Entenderemos por $p(\theta, t) = P\{(\theta, z) / (\theta, z) \in \theta \times z_t\}$.

Entonces, $\forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall z \in z_t$ se cumple:

$$E_{\theta/z}[u(a_z, \theta)] \geq E_{\theta/z}[u(a_t, \theta)]$$

de donde:

$$\int_{z_t} E_{\theta/z}[u(a_z, \theta)] P(dz) \geq \int_{z_t} E_{\theta/t}[u(a_t, \theta)] P(dz)$$

y, por tanto:

$$E_{z, \theta}[u(a_z, \theta)] \geq E_{t, \theta}[u(a_t, \theta)]$$

es decir:

$$V(X^{(n)}; \theta; p(\theta)) \geq V(T; \theta; p(\theta))$$

Si, en particular, se satisface la igualdad $V(X^{(n)}; \theta; p(\theta)) = V(T; \theta; p(\theta))$, en virtud de la primera desigualdad que aparece en la demostración presente, se cumple $\forall t \in \mathbb{R}$ con $p(z_t) \neq 0$ que para casi todo $z \in z_t$ la acción a_z y la acción a_t coinciden. En consecuencia:

$$\begin{aligned} IU^*(\theta; X^{(n)}; p(\theta)) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\iint_{\theta \times z_t} \{u(a_o, \theta) - E_{\theta}[u(a_o, \theta)]\}^2 + \right. \\ &\quad \left. - \{u(a_t, \theta) - E_{\theta/z}[u(a_t, \theta)]\}^2 \right) P(dz, d\theta) dt = \\ &= E_t \left(\int_{z_t} \frac{\{E_{\theta/z}[u(a_t, \theta)]\}^2}{p(t)} P(dz) + E_{t, \theta} \{u(a_o, \theta) - E_{\theta}[u(a_o, \theta)]\}^2 + \right. \\ &\quad \left. - \{u(a_t, \theta)\}^2 \right) \end{aligned}$$

Como $E_{\theta/t}[u(a_t, \theta)] = \int_{z_t} \frac{1}{p(t)} E_{\theta/z}[u(a_t, \theta)] P(dz)$, aplicando la desi-

gualdad de Jensen:

$$\begin{aligned} IU^*(\theta; X^{(n)}; p(\theta)) &\geq E_t \{ \{E_{\theta/t}[u(a_t, \theta)]\}^2 \} + E_{t, \theta} \{ \{u(a_o, \theta) - E_{\theta}[u(a_o, \theta)]\}^2 + \\ &\quad - \{u(a_t, \theta)\}^2 \} = E_{t, \theta} \{ \{u(a_o, \theta) - E_{\theta}[u(a_o, \theta)]\}^2 - \{u(a_t, \theta) + \\ &\quad - E_{\theta/t}[u(a_t, \theta)]\}^2 \} = IU^*(\theta; T; p(\theta)) \end{aligned}$$

Por otro lado, si T es un estadístico suficiente de $X^{(n)}$, siguiendo la notación precedente y según la definición bayesiana $P_{\theta}(t) \stackrel{c.s.}{=} P_{\theta}(z)$, $\forall z \in z_t$, de lo cual se deduce que $\forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall z \in z_t$ las acciones a_t y a_z coinciden c.s.. Por tanto:

$$E_{z, \theta}[u(a_z, \theta)] = E_{t, \theta}[u(a_t, \theta)]$$

es decir:

$$V(X^{(n)}; \theta; p(\theta)) = V(T; \theta; p(\theta))$$

y, además:

$$IU^*(\theta; X^{(n)}; p(\theta)) = \int_{\mathbb{R}} \left(\iint_{\theta \times z_t} \{u(a_o, \theta) - E_{\theta}[u(a_o, \theta)]\}^2 + \right.$$

$$- \{u(a_z, \theta) - E_{\theta/z}[u(a_z, \theta)]\}^2 P(dz, d\theta) dt = E_{t, \theta} \{u(a_0, \theta) + \\ - E_{\theta} [u(a_0, \theta)]\}^2 - \{u(a_t, \theta) - E_{\theta/t}[u(a_t, \theta)]\}^2 = IU^*(\theta; T; p(\theta))$$

luego:

$$X^{(n)} \underset{\sim}{\overset{u^*}{T}}$$

Propiedad 3.9.- Si S y T son dos estadísticos suficientes de una muestra aleatoria simple de tamaño n , $X^{(n)}$, y de una muestra aleatoria simple de tamaño m , $Y^{(m)}$, respectivamente, se verifica que:

$$X^{(n)} \underset{\geq}{\overset{u^*}{Y^{(m)}}} \text{ si y sólo si } S \underset{\geq}{\overset{u^*}{T}}$$

cualquiera que sea la distribución a priori sobre θ .

Demostración: En virtud de la propiedad anterior, cualquiera que sea la distribución $p(\theta)$ sobre θ :

$$V(S; \theta; p(\theta)) = V(X^{(n)}; \theta; p(\theta)) \text{ e } IU^*(\theta; S; p(\theta)) = IU^*(\theta; X^{(n)}; p(\theta))$$

$$V(T; \theta; p(\theta)) = V(Y^{(m)}; \theta; p(\theta)) \text{ e } IU^*(\theta; T; p(\theta)) = IU^*(\theta; Y^{(m)}; p(\theta))$$

Entonces, $X^{(n)} \underset{\geq}{\overset{u^*}{Y^{(m)}}}$ si y sólo si:

$$V(X^{(n)}; \theta; p(\theta)) > V(Y^{(m)}; \theta; p(\theta)) \quad \text{o}$$

$$V(X^{(n)}; \theta; p(\theta)) = V(Y^{(m)}; \theta; p(\theta)) \text{ e } IU^*(\theta; X^{(n)}; p(\theta)) \geq IU^*(\theta; Y^{(m)}; p(\theta))$$

lo cual equivale a:

$$V(S; \theta; p(\theta)) > V(T; \theta; p(\theta)) \quad \text{o}$$

$$V(S; \theta; p(\theta)) = V(T; \theta; p(\theta)) \text{ e } IU^*(\theta; S; p(\theta)) \geq IU^*(\theta; T; p(\theta))$$

para lo que es condición necesaria y suficiente que $S \underset{\geq}{\overset{u^*}{T}}$.

Propiedad 3.10.- Sea $X = \{\mathbb{R}; \beta; P_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ un experimento sobre Θ , siendo β la σ -álgebra de Borel, y sea $T = T(X)$ de forma que T es una aplicación real monótona estricta y derivable. Se cumple entonces que:

$$X \underset{\sim}{\overset{u^*}{T}}$$

cualquiera que sea la distribución a priori sobre θ .

Demostración: Sea $y = T(\mathbb{R})$ y consideremos el experimento $T = \{y; \beta; Q_{\theta}, \theta \in \Theta\}$.

Por ser T monótona estricta y derivable, existe la aplicación inversa h que es a su vez monótona estricta y derivable, lo cual implica que $|h'(t)| \neq 0, \forall t \in y$, y que:

$$Q_{\theta}(t) = P_{\theta}[h(t)] \cdot |h'(t)|, \quad \forall t \in y$$

es decir:

$$q(t) = p[h(t)] \cdot |h'(t)|$$

de donde:

$$q(\theta/t) = \frac{Q_\theta(t) \cdot p(\theta)}{q(t)} = \frac{P_\theta[h(t)] \cdot p(\theta)}{p[h(t)]} = p(\theta/h(t))$$

En consecuencia, y en virtud de la inyectividad de h y T , teniendo en cuenta que por ser T continua es también medible, se verifica que $T = T(X)$ es un estadístico suficiente de la muestra aleatoria simple de tamaño 1, X , lo que indica por la propiedad 3.8 que $X \stackrel{u^*}{\sim} T$.

Propiedad 3.11.- Sea $X = \{\mathbb{R}; \beta; P_\theta, \theta \in \Theta\}$ un experimento y $T = t(X)$ de forma que t es una aplicación biyectiva y continua de $(\mathbb{R}; \beta)$ en $(\mathbb{R}; \beta)$, siendo β la σ -álgebra de Borel. Entonces, se cumple que $X \stackrel{u^*}{\sim} T$, cualquiera que sea la distribución a priori sobre Θ .

Demostración: Por ser t biyectiva y continua, se verifica que existe la aplicación inversa t^{-1} que también es biyectiva y continua. En consecuencia, t y t^{-1} son aplicaciones medibles, de donde por la propiedad 3.8 se deduce:

$$X \stackrel{u^*}{\sim} t(X) = T \quad \text{y} \quad T \stackrel{u^*}{\sim} t^{-1}(T) = X$$

lo que implica que $T \stackrel{u^*}{\sim} X$.

4. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES FINALES.

El criterio propuesto y estudiado en el presente trabajo es obviamente más fuerte que el criterio basado en la maximización del valor esperado de la información y es aplicable en las mismas situaciones.

Puede también comprobarse que el criterio mixto de utilidad y quietud esperadas, bajo determinadas condiciones es más fuerte que el propuesto por Blackwell y que el de suficiencia y más débil que ellos bajo otras hipótesis, siendo siempre más débil que el criterio de Lehmann, aunque también más simple en lo que se refiere a trabajar con él.

Conviene, por último, reseñar que aunque las expresiones $V(X; \theta)$ e $IU^*(\theta; X)$ son invariantes frente a traslaciones de las utilidades y el decisor puede haber construido su función de utilidad sobre $A \times \Theta$ no atendiendo a las diferencias entre los valores otorgados a cada dos pares (a, θ) , o desconociendo si lo ha hecho, dicho decisor podrá adoptar el criterio expuesto aunque su eficacia será menor. Como caso aparte, queremos destacar que cuando el decisor haya establecido la función de utilidad fijándose en las razones entre los valores de los distintos pares podría aplicarse con resultados apreciables el criterio propuesto en el presente trabajo, realizando previamente el cambio en el sistema de utilidades $v(a, \theta) = \lg u(a, \theta)$ que transformaría las expresiones V e IU^* en funciones invariantes frente a homotecias positivas, pero en tal circunstancia ambas resultarían de operatividad más compleja. Para resolver el problema de selección de experimentos en esa situación, se ha propuesto otro criterio que se estudia en ⁷ en el cual se sustituyen V e IU^* por funciones que miden conceptos análogos, pero invariantes frente a homotecias, muy operativas.

BIBLIOGRAFIA:

1. D. BLACKWELL: Comparisons of experiments, Proc. Sec. Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability. University of California Press, 93-102. (1951).
2. D. BLACKWELL: Equivalent comparisons of experiments, Ann. Math. Stat. 24, 265-272. (1953).
3. D. BLACKWELL y M.A. GIRSHICK: Theory of Games and Statistical Decisions, Wiley, New York. (1954).
4. M.P. GARCIA CARRASCO: Criterios para la comparación de experimentos, Rev. Trabajos de Estadística e I.O., vol. 29, cuaderno 2. (1978).
5. A. GIL: Incertidumbre y utilidad, Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo. (1979).
6. A. GIL: On two unquietness measures for finite experiences, (pendiente de publicación).
7. A. GIL: Criterion of maximizing the expected utility and the expected quietness (invariant by homotethies in relation to the utilities), (pendiente de publicación).
8. M.H. DE GROOT: Optimal allocation of observations, Annals of Institute mathematics, 18, 13-28. (1966).
9. E.L. LEHMANN: Testing Statistical Hypotheses, Wiley. (1959).
10. H. RAIFFA Y R. SCHLAIFER: Applied Statistical Decision Theory, The M.I.T. Press. (1961).
11. S. ZACKS: The theory of Statistitcal Inference, Wiley. (1971).

FORMACIONES PRODUCTO DE \mathcal{S} -GRUPOS

C. Martínez López

Departamento de Álgebra. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza.
Zaragoza. España.

The aim of this work is to study the product of saturated formations of locally soluble FC-groups. The saturation is understood in the sense of the existence of projectors. We give a necessary condition for the existence of projectors relative to the formation product and, in this case, we characterize them.

In this paper we apply the well known results of saturated formations of finite soluble groups.

1. INTRODUCCION

Uno de los problemas fundamentales en teoría de formaciones en una determinada clase de grupos (no necesariamente finitos) es conseguir asegurar la existencia de proyectores. Así se llega a las formaciones saturadas. (Nosotros emplearemos siempre el término "saturación" para los casos en que se pueda asegurar la existencia de proyectores). La teoría de formaciones saturadas, perfectamente estudiada en el caso finito¹, se ha estudiado también en el infinito (ver Werfritz², Stonehewer³, Tomkinson⁴ y Gardiner-Hartley-Tomkinson⁵), obteniéndose que los proyectores constituyen una clase transitiva de subgrupos respecto de un grupo de automorfismos, generalmente los automorfismos internos o los localmente internos.

En⁶ se investigan condiciones necesarias para poder asegurar que el producto de dos formaciones saturadas siga siendo una formación saturada, y en tal caso se llega a determinar los proyectores de la formación producto a partir de los proyectores de las formaciones factores.

En teoría de clases de Fitting, en cierto sentido dual de la teoría de formaciones, se tiene análogo problema con los inyectoros. Lockett⁷ caracteriza en grupos finitos resolubles los inyectoros de una clase de Fitting producto de otras dos. Estos resultados han sido obtenidos para la clase \mathcal{S} en⁸.

Nuestro objetivo es estudiar en esta clase \underline{S} las formaciones producto y caracterizar sus proyectores.

Consideramos la clase \underline{S} de los FC-grupos periódicos localmente resolubles porque la existencia de un sistema local de subgrupos normales finitos, asegurada por el lema de Dicman, nos permite utilizar los resultados conocidos del caso finito.

2. RESULTADOS PREVIOS Y NOTACIONES

Usaremos la notación de Robinson⁹ para clases y operaciones clausura.

Citamos previamente, sin demostración, algunos resultados de Tomkinson⁴ que se usarán frecuentemente en lo sucesivo.

Emplearemos \underline{S} para denotar los FC-grupos periódicos localmente resolubles y \underline{S}^{\wedge} para los grupos finitos resolubles. En general $\hat{\quad}$ se usará para denotar la correspondiente clase de grupos finitos.

2.1. Teorema

Si $G \in \underline{S}$ y Z es el centro de G , G/Z es residualmente finito.

2.2. Teorema

Sea \underline{F} una formación local de \underline{S} -grupos, entonces \underline{F}^{\wedge} es una formación de grupos finitos resolubles.

2.3. Teorema

Sea \underline{F} una formación de \underline{S} grupos. Entonces un grupo $G \in \underline{S}$ posee \underline{F} -proyectores y dos de ellos son localmente conjugados en G .

2.4. Teorema

Si \underline{F} es una formación s-cerrada de grupos finitos resolubles, entonces $\underline{LF} \cap \underline{S}$ es una \underline{S} -formación.

2.5. Teorema

Si \underline{F} es una formación s-cerrada de \underline{S} -grupos, entonces:

$$\underline{F} = \underline{LF}^{\wedge} \cap \underline{S} = Q(\underline{RF}^{\wedge} \cap \underline{S}).$$

2.6. Lema

Si \underline{F} es la formación local de \underline{S} -grupos definida por (\underline{F}_p) , entonces \underline{F} es una formación de \underline{S} -grupos.

2.7. Teorema

Sea \underline{F} la formación local de \underline{S} -grupos definida por (\underline{F}_p) . Si para cada p , \underline{F}_p^{\wedge} denota los \underline{F}_p grupos finitos, entonces \underline{F}^{\wedge} es la formación local de \underline{S}^{\wedge} -grupos definida por $(\underline{F}_p^{\wedge})$.

2.8. Teorema

Si \underline{E} es la formación local de \underline{S}^{\wedge} -grupos definida por (\underline{E}_p) , donde $\underline{E}_p = sE_p$,

entonces $\underline{LE} \cap \underline{S}$ es la \underline{S} -formación local definida por $(\underline{LE}_p \cap \underline{S})$.

3. PRODUCTO DE FORMACIONES

3.1. Teorema

El producto de dos formaciones locales \underline{F}_1 y \underline{F}_2 s-cerradas de \underline{S} -grupos es una formación local s-cerrada de \underline{S} -grupos.

Demostración:

Sean \underline{F}_1 y \underline{F}_2 formaciones locales de \underline{S} -grupos definidas por $f_1(p)$ y $f_2(p)$ respectivamente, con $f_i(p)$ s-cerrada para $i = 1, 2$.

Sabemos por¹ que \underline{F}_1^\wedge y \underline{F}_2^\wedge son dos formaciones de grupos resolubles finitos s-cerradas. Entonces $\underline{F}_1^\wedge \underline{F}_2^\wedge$ es una formación s-cerrada y saturada de grupos finitos resolubles. Por tanto, según Gaschütz¹, es definible localmente.

Sea $\underline{F}_1^\wedge \underline{F}_2^\wedge$ definida localmente por $(f(p))$ con $sf(p) = f(p) \forall p$ ¹⁰, entonces $\underline{F} = \underline{F}_1 \underline{F}_2 = \underline{LF}^\wedge \cap \underline{S}$ y de modo obvio $\underline{F}^\wedge = \underline{F}_1^\wedge \underline{F}_2^\wedge$.

Por el lema 2.6. de¹⁰, y puesto que \underline{F}^\wedge viene definida localmente por $(f(p))$, \underline{F} viene definida localmente por $(Lf(p))$.

4. LA CLASE \underline{F}_π

Siempre que digamos grupo se entenderá \underline{S} -grupo y las formaciones consideradas son todas de \underline{S} -grupos.

4.1. Definición

Sea una formación \underline{F} y un conjunto de primos π . Llamamos \underline{F}_π a la clase de los grupos G tales que un \underline{F} -proyector de G contiene un π -subgrupo de Sylow de G .

4.2. Consecuencias

i) $\underline{F} \subseteq \underline{F}_\pi$

ii) Si $G \in \underline{F}_\pi$, los supergrupos de cualquier \underline{F} -proyector son también \underline{F}_π -grupos, ya que si F es \underline{F} -proyector de $G \in \underline{F}_\pi$, existe $S \in \text{Syl}_\pi(G)$ con $S \leq F$.

Si $F \leq H \leq G$, $S \leq H$, luego $S \in \text{Syl}_\pi(H)$ y F es \underline{F} -proyector de H , luego $H \in \underline{F}_\pi$. El resultado se sigue ahora de la conjugación local de los \underline{F} -proyectores.

iii) $\underline{S}_{\pi'} \underline{F}_\pi \cap \underline{S} = \underline{F}_\pi$

En efecto: $\underline{F}_\pi \subseteq \underline{S}_{\pi'} \underline{F}_\pi \cap \underline{S}$. Sea ahora $G \in \underline{S}_{\pi'} \underline{F}_\pi \cap \underline{S}$. Existe $N \trianglelefteq G$ tal que $N \in \underline{S}_{\pi'}$ y $G/N \in \underline{F}_\pi$. Si F es un \underline{F} -proyector de G , FN/N lo es de GN/N , luego existe $G_\pi N \in \text{Syl}_\pi(G)$ tal que $G_\pi N/N \leq FN/N$, luego $G_\pi N \leq FN$. Entonces existe $S_\pi \in \text{Syl}_\pi(F)$ tal que $G_\pi N = S_\pi N$. Pero por la conjugación local de los π -subgrupos de Sylow, existe α un automorfismo localmente interno tal que $S_\pi \leq G_\pi^\alpha$, luego $G_\pi N = S_\pi N \leq G_\pi^\alpha N$ y por tanto $S_\pi N = G_\pi^\alpha N$ por lo que $G_\pi^\alpha = G_\pi^\alpha \cap S_\pi N = S_\pi (G_\pi^\alpha \cap N) = S_\pi$ pues $G_\pi^\alpha \cap N = 1$ por ser N un π' -grupo.

Hemos visto que F contiene un π -subgrupo de Sylow de G y por tanto $G \in \underline{F}_\pi$.

4.3. Proposición

Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- i) $\underline{F} = \underline{F}_\pi$
- ii) $\underline{F} = \underline{S}_{\pi'} \underline{F} \cap \underline{S}$

Demostración:

i) \Rightarrow ii) Por la consecuencia 3 $\underline{F} = \underline{F}_\pi = \underline{S}_{\pi'} \underline{F}_\pi \cap \underline{S} = \underline{S}_{\pi'} \underline{F} \cap \underline{S}$

ii) \Rightarrow i) Puesto que $\underline{F} \subseteq \underline{F}_\pi$ siempre, basta ver $\underline{F}_\pi \subseteq \underline{F}$ cuando $\underline{F} = \underline{S}_{\pi'} \underline{F} \cap \underline{S}$. Sea $G \in \underline{F}_\pi$ y supongamos G residualmente finito y (N_i) los normales en G con índice finito. Entonces $G/N_i \in \underline{F}^\wedge$ y $\underline{F}^\wedge = \underline{S}_{\pi'}^\wedge \underline{F}^\wedge$. Luego por 2.2⁶

$$G/N_i \in \underline{F}^\wedge \subseteq \underline{F} \Rightarrow G \in \underline{F}.$$

Si G no es residualmente finito, G/Z lo es ($Z = Z(G)$). Así si $G \in \underline{F}_\pi$, $G/Z \in \underline{F}_\pi \Rightarrow G/Z \in \underline{F}$. Como $\underline{S}_{\pi'} \subseteq \underline{F}$, $w(\underline{F}) \supseteq \pi'$ y por definición de \underline{F}_π es claro que todo factor principal de G por debajo de Z es \underline{F} -central, luego $G \in \underline{F}$.

4.4. Proposición

\underline{F}_π es una formación

Demostración:

a) Sea $G \in \underline{F}_\pi$ y $N \triangleleft G$. Si H/N es un \underline{F} -proyector de G/N , $H = FN$ con F un \underline{F} -proyector de G , luego existe $S \in \text{Syl}_\pi(G)$ con $S \leq F$. $SN/N \leq H/N$ y $SN/N \in \text{Syl}_\pi(G/N)$. Luego $G/N \in \underline{F}_\pi$.

b) Sea $N_i \triangleleft G$, $G/N_i \in \underline{F}_\pi$ y $\bigcap_1 N_i = 1$.

Sea F un \underline{F} -proyector de G , FN_i/N_i es \underline{F} -proyector de G/N_i . Para cada $i \in I$ existe $S_{\pi'}^i \in \text{Syl}_\pi(G)$ tal que $S_{\pi'}^i N_i/N_i \leq FN_i/N_i$. Sea $F_{\pi'} \in \text{Syl}_\pi(F)$. Entonces $S_{\pi'}^i N_i/N_i \in \text{Syl}_\pi(FN_i/N_i)$ y por tanto es localmente conjugado a $F_{\pi'} N_i/N_i$ en FN_i/N_i .

Además $F_{\pi'} \leq G_{\pi'}$ con $G_{\pi'} \in \text{Syl}_\pi(G)$, luego $F_{\pi'} N_i/N_i = G_{\pi'} N_i/N_i \Rightarrow F_{\pi'} N_i = G_{\pi'} N_i \forall i \in I$.

Así $\bigcap_{i \in I} F_{\pi'} N_i = \bigcap_{i \in I} G_{\pi'} N_i = G_{\pi'}$ por el lema 4.8⁴, $G_{\pi'} \leq \bigcap_{i \in I} FN_i = F$ por 7.7⁴.

No parece que se pueda concluir que \underline{F}_π sea s-cerrada

4.5. Corolario

$$w(\underline{F}_\pi) = w(\underline{F}) \cup \pi'$$

Demostración:

$$\text{Como } \underline{S}_{\pi'} \subseteq \underline{F}_\pi \Rightarrow \pi' \subseteq w(\underline{F}_\pi)$$

$$\underline{F} \subseteq \underline{F}_\pi \Rightarrow \check{w}(\underline{F}) \subseteq w(\underline{F}_\pi) \Rightarrow w(\underline{F}) \cup \pi' \subseteq w(\underline{F}_\pi)$$

Ahora sea $p \in w(\underline{F}_\pi)$. Si $p \in \pi'$, $C_p \in \underline{F}_\pi$ y por tanto $C_p \in \underline{F} \Rightarrow p \in w(\underline{F})$.

Luego $p \in \pi'$ o $p \in w(\underline{F})$ y por tanto $w(\underline{F}_\pi) = w(\underline{F}) \cup \pi'$.

5. PROYECTORES DE LA FORMACION PRODUCTO

5.1. Lema

Sean \underline{F}_1 y \underline{F}_2 formaciones s-cerradas locales y $\underline{F} = \underline{F}_1 \underline{F}_2$, $\pi = w(\underline{F}_1)$.
Entonces $\underline{F} \cap \underline{F}_{2\pi} = \underline{F}_2$.

Demostración:

Es claro que $\underline{F}_2 \leq \underline{F} \cap \underline{F}_{2\pi}$. Sea ahora $G \in \underline{F} \cap \underline{F}_{2\pi}$. Existe $N \triangleleft G$, $N \in \underline{F}_1$ con $G/N \in \underline{F}_2$. Sea T un \underline{F}_2 -proyector de G . Como $G \in \underline{F}_{2\pi}$, existe $S \in \text{Syl}_\pi(G)$ con $S \leq T$. Por ser N π -subgrupo normal de G , $N \leq S$, luego $TN/N = T/N$ es \underline{F}_2 -proyector de $G/N \in \underline{F}_2$, luego $T = G$ y $G \in \underline{F}_2$.

5.2. Proposición

Sean \underline{F}_1 , \underline{F}_2 , π , \underline{F} como en 5.1. Si $G \in \underline{F}_{2\pi}$ y T es \underline{F}_2 -proyector de G , T es \underline{F} -proyector de G .

Demostración:

Supongamos en primer lugar $Z(G) = 1$, luego G residualmente finito.

Sean (N_i) los subgrupos normales de G de índice finito y H un \underline{F} -proyector de G .

Para cada $i \in I$, TN_i/N_i es un \underline{F}_2 -proyector de G/N_i , y por 3.2⁶ es un \underline{F} -proyector suyo, luego existe Ψ_i un automorfismo interno de G/N_i que lleva TN_i/N_i sobre HN_i/N_i .

Sea " A " el conjunto de automorfismos internos de G/N_i verificando esta propiedad subrayada. Por el lema 3.3.⁴ existe Ψ un automorfismo localmente interno de G tal que $\forall i T^{\Psi}N_i = HN_i$.

Por el lema 7.7.⁴, $T^{\Psi} = \bigcap_{i \in I} T^{\Psi}N_i = \bigcap_{i \in I} HN_i = H$, luego T es un \underline{F} -proyector de G .

Si $Z(G) \neq 1$, considerando $G/Z(G)$ se sigue que $TZ(G)/Z(G)$ es un \underline{F} -proyector de $G/Z(G)$. Luego existe H un \underline{F} -proyector de G tal que $HZ(G) = TZ(G)$ y como $HZ(G) \in \underline{F}$, también $TZ(G) \in \underline{F}$, y por tanto $TZ(G) = H$.

$G \in \underline{F}_{2\pi} \Rightarrow w(G) \cap \pi = w(\underline{F}_2)$, y $TZ(G) \in \underline{F}$ implica $w(TZ(G)) \subseteq w(\underline{F}) = w(\underline{F}_1) \cup w(\underline{F}_2) = \pi \cup w(\underline{F}_2)$ luego siempre $w(Z(G)) \subseteq w(\underline{F}_2)$.

Se prueba así que $TZ(G) \in \underline{F}_2$, luego $Z(G) \leq T$ y por tanto $T = H$ es un \underline{F} -proyector de G .

5.3. Proposición

Sean como antes \underline{F}_1 , \underline{F}_2 , \underline{F} y π . Si \underline{N} es la clase de los grupos nilpotentes y $G \in \text{LNF}_{2\pi} \underline{N}$ y T es un \underline{F}_2 -proyector de G , $T O_\pi(G)$ es un \underline{F} -proyector de G .

Demostración:

Existe $N \triangleleft G$, $N \in \underline{N}$ y $G/N \in \underline{F}_{2\pi}$. Si es $N = 1$, $G \in \underline{F}_{2\pi}$ y claramente $O_\pi(G) \leq T$, luego se reduce a la proposición anterior.

Como $N = O_\pi(N) \times O_{\pi'}(N)$, de nuevo se reduce al caso anterior si $O_{\pi'}(N) = 1$.

$(G/O_\pi(N))/N/O_\pi(N) \in \underline{F}_{2\pi}$ y $N/O_\pi(N) \cong O_{\pi'}(N)$ es un π' -grupo, luego $G/O_\pi(N) \in \underline{F}_{2\pi}$, $TO_\pi(N)/O_\pi(N)$ es \underline{F}_2 -proyector de $G/O_\pi(N)$, y por la proposición anterior es \underline{F} -proyector de $G/O_\pi(N)$.

Como $O_\pi(N) \in \underline{F}_1$ por ser un π -grupo localmente nilpotente, $TO_\pi(N) \in \underline{F}$. Concluimos que $TO_\pi(N)$ es su propio \underline{F} -proyector y por tanto es \underline{F} -proyector de G .

Por otra parte $TO_\pi(N)/O_\pi(N)$ es \underline{F}_2 -proyector de $G/O_\pi(N) \in \underline{F}_{2\pi}$, luego existe $S \in \text{Syl}_\pi(G)$ tal que $SO_\pi(N)/O_\pi(N) = S/O_\pi(N) \leq TO_\pi(N)/O_\pi(N)$ y $O_\pi(G) \leq SO_\pi(N)$, luego $TO_\pi(G) = TO_\pi(N)$ ya que $O_\pi(N) \leq O_\pi(G)$.

5.4. Proposición

Sean \underline{F}_1 , \underline{F}_2 , \underline{F} , π como en las proposiciones anteriores. Denotamos \bar{G} el $\underline{F}_{2\pi}$ -residual de G . Si $G \in \underline{F}_1 \underline{F}_{2\pi}$ y T es un \underline{F}_2 -proyector suyo, entonces $T\bar{G}$ es \underline{F} -proyector de G .

Demostración:

Si T es \underline{F}_2 -proyector de G , $T\bar{G}/\bar{G}$ lo es de $G/\bar{G} \in \underline{F}_{2\pi}$ y por tanto es \underline{F} -proyector de G/\bar{G} . Como $G \in \underline{F}_1 \underline{F}_{2\pi}$, es $\bar{G} \in \underline{F}_1$ y $T\bar{G}/\bar{G} \in \underline{F}_2$. Por tanto $T\bar{G} \in \underline{F}$ y es su \underline{F} -proyector, luego también de G .

5.5. Proposición

Sean \underline{F}_1 , \underline{F}_2 , π y \bar{G} como anteriormente. Si T es \underline{F}_2 -proyector de G , $\rho(G)$ es el radical localmente nilpotente, entonces $TO_\pi(\rho(G)) \leq T\bar{G}$.

Demostración:

$O_\pi(\rho(G)) \in \underline{F}_1$ por ser un π -grupo localmente nilpotente y $TO_\pi(\rho(G))/O_\pi(\rho(G))$ está en \underline{F}_2 , luego $TO_\pi(\rho(G)) \in \underline{F} = \underline{F}_1 \underline{F}_2$. También $TO_\pi(\rho(G))\bar{G}/\bar{G} \in \underline{F}$. $T\bar{G}/\bar{G}$ es \underline{F}_2 -proyector de $G/\bar{G} \in \underline{F}_{2\pi}$, luego es \underline{F} -proyector suyo y de $T\bar{G}/\bar{G} \leq TO_\pi(\rho(G))\bar{G}/\bar{G}$ se sigue $T\bar{G} = TO_\pi(\rho(G))\bar{G}$, es decir $TO_\pi(\rho(G)) \leq T\bar{G}$.

Puesto que \bar{G} es localmente nilpotente, se demuestra, como en una proposición anterior, que \bar{G} es π -grupo y por tanto $TO_\pi(\rho(G)) = T\bar{G}$.

Así cuando $G \in \text{LNF}_{\underline{F}_{2\pi}}$ los dos resultados obtenidos sobre \underline{F} -proyectores coinciden.

5.6. Proposición

Sean \underline{F}_1 , \underline{F}_2 , y π como antes. Todo \underline{S} -grupo posee un \underline{F}_1 -subgrupo normal no trivial o un \underline{F}_2 -subgrupo normal no trivial.

Demostración:

Consideremos $\rho(G) \neq 1$, $\rho(G) = H \times K$, con H un π -grupo y K un π' -grupo.

Si $H \neq 1$, $H \in \underline{F}_1$ y $H \trianglelefteq G$.

Si $H = 1$, $\rho(G)$ es un π' -grupo localmente nilpotente y por tanto un $\underline{F}_{2\pi}$ -grupo, ya que $\underline{S}\pi = \underline{F}_{2\pi}$.

5.8. Proposición

Sean \underline{F}_1 , \underline{F}_2 , \underline{F} , π , G como en las proposiciones anteriores. Si T es

un \underline{F}_2 -proyector de G y $T\bar{G} = U = G$, se tiene $U = \bar{U}\bar{G}U^F$ (Así $T\bar{G}$ es \underline{F} -proyector de G).

Demostración:

Si $U \trianglelefteq G$, denotaremos por \bar{U} , U' , U'' los correspondientes residuales de U con respecto a las formaciones $\underline{F}_{=2\pi}$, \underline{F} y \underline{F}_2 .

Como T es \underline{F}_2 -proyector de G , lo es de U , y por tanto $U = U''T$. De ser $\underline{F}_2 = \underline{F} \cap \underline{F}_{=2\pi}$, se sigue $U'' = U'\bar{U}$. Luego $U = TU'\bar{U}$. Por otra parte, $T\bar{G}/\bar{G}$ es \underline{F}_2 -proyector de $G/\bar{G} \in \underline{F}_{=2\pi}$ y $T\bar{G}/\bar{G} \trianglelefteq U/\bar{G}$, luego $U/\bar{G} \in \underline{F}_{=2\pi}$ por la consecuencia i). Así $\bar{U} \trianglelefteq \bar{G} \trianglelefteq U$. De ello se deduce $U = TU'\bar{U} = T\bar{G}U'$.

De la conjugación local de los \underline{F} -proyectores deducimos que todos ellos tienen la forma dada por la proposición anterior.

BIBLIOGRAFIA

1. W. GASCHUTZ: Math. Z. 80, 300, (1963)
2. B. WEHRFRITZ: Proc. London Math. Soc. (3) 18, 141, (1968)
3. S.E. STONEHEWER: Proc. Cambridge Philos. Soc. 62, 613, (1966)
4. M. J. TOMKINSON: Proc. London Math. Soc. 19, 675 (1969)
5. GARDINER-HARTLEY-TOMKINSON: Journal of Algebra 17, 177 (1971)
6. M. J. IRANZO: Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza (1974)
7. J. LOCKET: Math. Z. (3), 103 (1973)
8. M. GARCIA: Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza (1979)
9. D. J. ROBINSON: Finiteness Conditions and generalized soluble groups. Springer Verlag. Berlin Heidelberg. New York (1972)
10. CARTER-FISCHER-HAWKES: Journal of Algebra 9, 285, (1968)

RESOLUCIONES (CO) FIBRADAS

L.J. Hernández Paricio

Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Zaragoza. España.

For a ring with a unity element, we associate a fibre resolution to an abelian group A . Then we see that there exists a natural equivalence from the (co)homology of these resolutions to the homotopy (dual) groups of A (homotopy induced by R). Finally, we prove that the sequence of the homotopy (dual) groups associated to a homomorphism or to a (co)fibration is exact.

INTRODUCCION.

Sea C un grupo abeliano, y R un anillo con unidad, diremos que C es un R -casimódulo (a derecha) si admite una ley externa $F: C \times R \rightarrow C$ bilineal y tal que $F(c, 1) = c$. Notemos que no tiene por qué ser asociativa. Un homomorfismo $p: E \rightarrow B$, diremos que es fibración, si para todo homomorfismo $f: C \rightarrow B$ siendo C R -casimódulo, existe $\tilde{f}: C \rightarrow E$ tal que $p \cdot \tilde{f} = f$. Dualmente definimos cofibración. Diremos que $C \xrightarrow{p} B$ es una presentación fibrada de B , si C es R -casimódulo y p es fibración. En este trabajo vemos que todo grupo abeliano tiene una resolución (co)fibrada, después probamos que dos resoluciones (co)fibradas de un grupo abeliano tienen la misma (co)homología.

En 3 y en 4 hemos definido los grupos (duales) de homotopía, aquí demostramos que la (co)homología de las resoluciones (co)fibradas de un grupo abeliano es precisamente los grupos (duales) de homotopía anteriores. Finalmente probamos la exactitud de los grupos (duales) de homotopía asociados a un homomorfismo o bien a una (co)fibración. Denotaremos con Ab la categoría de los grupos abelianos, cuando decimos que un grupo abeliano es contráctil nos referimos a la teoría de homotopía definida en 3.

RESOLUCIONES (CO)FIBRADAS

1. DEFINICION.- Sea $X \in |Ab|$, sea el siguiente complejo de cadenas

$$\dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{q_{n+1}} C_n \xrightarrow{q_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots \quad (q_n \cdot q_{n+1} = 0, n \in \mathbb{Z})$$

Diremos que es una resolución fibrada de X , si para $n < 0$ $C_n = 0$, $C_0 = X$, $n \geq 1$ C_n contractil y \bar{q}_n es una fibración siendo $\bar{q}_n: C_n \longrightarrow \text{Ker } q_{n-1}$ único tal que $I \cdot \bar{q}_n = q_n$, $I: \text{Ker } q_{n-1} \longrightarrow C_{n-1}$ es la inclusión canónica.

Si tenemos un complejo de cocadenas:

$$\dots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{i_{n+1}} C_{n+1} \longrightarrow \dots \quad (i_{n+1} \cdot i_n = 0, n \in \mathbb{Z})$$

tal que para $n < 0$ $C_n = 0$, $C_0 = X$, $n \geq 1$ C_n contractil y \bar{i}_{n+1} es una cofibración siendo $\bar{i}_{n+1}: \text{Coker } i_n \longrightarrow C_{n+1}$ único tal que $\bar{i}_{n+1} \cdot P = i_{n+1}$ $P: C_n \longrightarrow \text{Coker } i_n$ es la proyección natural; diremos que es una resolución cofibrada de X .

2. PROPOSICION. Sea $f: X \longrightarrow Y$ homomorfismo, sea $C(X)$ una cadena tal que $n < 0$ $C_n = 0$ $C_0 = X$ y $n \geq 1$ C_n es contractil y $C(Y)$ una resolución fibrada de Y , entonces existe un homomorfismo de cadenas $F: C(X) \longrightarrow C(Y)$ tal que $F_0 = f$. Si $F, G: C(X) \longrightarrow C(Y)$ son tales que $F_0 = G_0$ entonces $F \simeq G$.

Dualmente, sea $C(Y)$ una cocadena tal que para $n < 0$ $C_n = 0$, $C_0 = Y$, $n \geq 1$ C_n es contractil y $C(X)$ una resolución cofibrada de X , entonces existe $F: C(X) \longrightarrow C(Y)$ tal que $F_0 = f$ y si $F, G: C(X) \longrightarrow C(Y)$ son tales que $F_0 = G_0 \implies F \simeq G$.

DEMOSTRACION. Supongamos que están definidas $F_0 = f$, F_1, \dots, F_n veamos como podemos definir F_{n+1} con lo que el teorema queda probado por inducción. Sea el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \longrightarrow & C_n(X) & \longrightarrow & C_{n-1}(X) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow F_{n+1} & & \downarrow F_n & & \downarrow F_{n-1} \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{q_{n+1}} & C_n(Y) & \longrightarrow & C_{n-1}(Y) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Como $q_n F_n q_{n+1} = F_{n-1} q_n q_{n+1} = 0$. Entonces $\text{Im} (I_n \cdot q_{n+1}) \subset \text{Ker } q_n$ y como \bar{q}_{n+1} es fibración y $C_{n+1}(X)$ es contractil existe $F_{n+1}: C_{n+1}(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ tal que $q_{n+1} F_{n+1} = F_n q_{n+1}$.

Sean ahora $F, G: C(X) \longrightarrow C(Y)$ tal que $F_0 = G_0$. Construyamos por inducción una homotopía $H_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$. Para ello tomemos $H_0 = 0$, con lo cual $q_1 H_0 + H_{-1} q_0 = F_0 - G_0 = 0$. Supongamos que tenemos construidas $H_0 \dots H_{n-1}$ verificando que $q_{i+1} H_i + H_{i-1} q_i = F_i - G_i$ $i = 0, \dots, n-1$ veamos que existe H_n verificando $q_{n+1} H_n + H_{n-1} q_n = F_n - G_n$.

$$q_n (F_n - G_n - H_{n-1} q_n) = F_{n-1} q_n - G_{n-1} q_n - q_n H_{n-1} q_n =$$

$$= (F_{n-1} - G_{n-1} - q_n H_{n-1}) q_n = H_{n-2} q_{n-1} q_n = 0$$

Por tanto $\text{Im}(F_n - G_n - H_{n-1} \cdot q_n) \subset \text{Ker } q_n$, \bar{q}_{n+1} fibración y $C_n(X)$ contráctil implica que existe $H_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ tal que $q_{n+1} \cdot H_n = F_n - G_n - H_{n-1} q_n$.

La segunda parte es dual de la primera. #

3. LEMA. Sea $X \in |Ab|$, entonces las siguientes cadena y cocadena son resoluciones fibrada y cofibrada respectivamente. A estas resoluciones las llamaremos canónicas.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & (\Omega^2 X)^R & \xrightarrow{q_3} & (\Omega X)^R & \xrightarrow{q_2} & X^R & \xrightarrow{q_1} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i_1} & X \otimes R & \xrightarrow{i_2} & SX \otimes R & \xrightarrow{i_3} & S^2 X \otimes R & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

siendo $\Omega X = \text{Ker } q_1$ y $SX = \text{Coker } i_1$.

DEMOSTRACION. Basta recordar que $X^R \xrightarrow{q_1} X$ y $X \xrightarrow{i_1} X \otimes R$ son fibración y cofibración y que X^R y $X \otimes R$ son contráctiles.

A continuación tomamos q_2 como la composición

$(\text{Ker } q_1)^R \xrightarrow{q_1} \text{Ker } q_1 \hookrightarrow X^R$, reiterando el proceso por inducción. Dualmente se construye la otra resolución.

4. PROPOSICION. Sea $X \in |Ab|$ dos resoluciones (co)fibradas de X son del mismo tipo de homotopía.

DEMOSTRACION. Sean C y C' dos resoluciones de X y consideremos $1_X: X \rightarrow X$, por la proposición 2, existen $F: C \rightarrow C'$ y $G: C' \rightarrow C$ tales que $F_0 = G_0 = 1_X$. Consideremos $G \cdot F: C \rightarrow C$ y $F \cdot G: C' \rightarrow C'$ como $(G \cdot F)_0 = 1_X$ y $(F \cdot G)_0 = 1_{C'}$ entonces $G \cdot F \simeq 1_C$ y $F \cdot G \simeq 1_{C'}$. #

5. TEOREMA. Existe una equivalencia natural entre los grupos de homología de las resoluciones fibradas canónicas de X y los grupos de homotopía de X .

DEMOSTRACION. Consideremos la resolución fibrada canónica de X y calculemos su homología (Suponemos que $\Omega^k = 0$ si $k < 0$)

$$C: \dots \longrightarrow (\Omega^n X)^R \xrightarrow{q_{n+1}} (\Omega^{n-1} X)^R \xrightarrow{q_n} (\Omega^{n-2} X)^R \longrightarrow \dots$$

$$H_n C = \text{Ker } q_n / \text{Im } q_{n+1} = \Omega^n X / (\Omega^n X)_0 = \pi_0(\Omega^n X) \cong \pi_n X$$

siendo $(\Omega^n X)_0$ la componente conexa por arcos de 0 en $\Omega^n X$. Ver también III.(3.3) de 3. La naturalidad es una comprobación. #

6 COROLARIO. Si C es una resolución fibrada de X , entonces $H_n(C) = \pi_n(X)$.

DEMOSTRACION. Si $C(X)$ es la resolución fibrada canónica de X , por la proposición anterior $C \simeq C(X) \Rightarrow HC \cong HC(X) \cong \pi(X)$, con $\pi(X)$ denotamos los diferentes grupos de homotopía de X .

Dualmente podemos considerar

7. TEOREMA. Existe una equivalencia natural entre la cohomología de la resolución cofibrada canónica de X y los grupos duales de homotopía de X .

8. COROLARIO. Si C es una resolución cofibrada de X entonces $H^n C = \sigma_n(X)$.

9. PROPOSICION. Consideremos el siguiente homomorfismo de cadenas.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{q_n^C} & C_{n-1} & \xrightarrow{q_{n-1}^C} & C_{n-2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \psi_n & & \downarrow \psi_{n-1} & & \downarrow \psi_{n-2} & & \\ \dots & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{q_n^D} & D_{n-1} & \xrightarrow{q_{n-1}^D} & D_{n-2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Sea (E, q^E) el complejo de cadenas asociado a ψ . Si $\bar{q}_{n-1}^C: C_{n-1} \rightarrow \text{Ker } q_{n-2}^C$ y $\bar{q}_n^D: D_n \rightarrow \text{Ker } q_{n-2}^D$ son fibraciones también lo es $\bar{q}_n^E: E_n \rightarrow \text{Ker } q_{n-1}^E$.

DEMOSTRACION. Sea $f: Z \rightarrow \text{Ker } q_{n-1}^E$ y veamos que tiene una elevación a través de \bar{q}_n^E . Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & C_{n-1} \times D_n & \xrightarrow{p_1} & C_{n-1} \\ & \swarrow \bar{q}_n & \downarrow q_n & = & \downarrow q_{n-1} \\ Z & \xrightarrow{f} & \text{Ker } q_{n-1} & \xrightarrow{I} & C_{n-2} \times D_{n-1} & \xrightarrow{p_1} & C_{n-2} \\ & & & & \downarrow q_{n-1} & = & \downarrow q_{n-2} \\ & & & & C_{n-3} \times D_{n-2} & \xrightarrow{p_1} & C_{n-3} \end{array}$$

I es la inclusión canónica y $p_1: E \rightarrow C$ es un homomorfismo de cadenas

$$q(p_1 I f) = q p_1 I f = p_1 q I f = p_1 \cdot 0 \cdot f = 0.$$

Como $f \simeq 0$ y q_{n-1}^C es fibración, existe $\widetilde{p_1 I f}: Z \rightarrow C_{n-1}$ tal que $q p_1 I f = p_1 I f$, además $\widetilde{p_1 I f} \simeq 0$.

Consideremos ahora $h = \psi \cdot \widetilde{p_1 I f} - p_2 I f: Z \rightarrow D_{n-1}$

$$\begin{aligned} q \cdot h &= q(\psi \widetilde{p_1 I f} - p_2 I f) = \psi q \widetilde{p_1 I f} - q p_2 I f = \psi p_1 I f - q p_2 I f = \\ &= p_2 q I f = p_2 \cdot 0 \cdot f = 0 \end{aligned}$$

Como $h \simeq 0$ por serlo f y $p_1 If$ y como \bar{q}_n^D es fibración existe $\tilde{h}: Z \rightarrow D_n$ tal que $q \cdot \tilde{h} = h$. Veamos que $\widetilde{p_1 If} \wedge \tilde{h}: Z \rightarrow C_{n-1} \times D_n$ es una elevación de f

$$\begin{aligned} q(\widetilde{p_1 If} \wedge \tilde{h}) &= q\widetilde{p_1 If} \wedge \Psi \widetilde{p_1 If} - q\tilde{h} = \\ &= p_1 If \wedge (\Psi \widetilde{p_1 If} - \Psi \widetilde{p_1 If} + p_2 If) = p_1 If \wedge p_2 If = If. \end{aligned}$$

Entonces $\bar{q}(\widetilde{p_1 If} \wedge \tilde{h}) = f$. #

10 PROPOSICION. Consideremos el siguiente homomorfismo de cocadenas

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-1}^C} & C_{n-1} & \xrightarrow{i_n^C} & C_n \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \Psi_{n-2} & & \downarrow \Psi_{n-1} & & \downarrow \Psi_n \\ \dots & \longrightarrow & D_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-1}^D} & D_{n-1} & \xrightarrow{i_n^D} & D_n \longrightarrow \dots \end{array}$$

Notemos que como $i_n^C \cdot i_{n-1}^C = 0 \exists ! \bar{i}_n^C: \text{Coker } i_{n-1}^C \rightarrow C_n$ análogamente consideramos $\bar{i}_{n-1}^D: \text{Coker } i_{n-2}^D \rightarrow D_{n-1}$. Sea $(E; i^E)$ es complejo de cocadenas asociado a Ψ . Si \bar{i}_n^C e \bar{i}_{n-1}^D son cofibraciones también lo es \bar{i}_n^E .

DEMOSTRACION. Dual a la anterior.

11. DEFINICION. Sea $\Psi: X \rightarrow Y$ un homomorfismo y sea $C(X) \xrightarrow{C(\Psi)} C(Y)$ el homomorfismo natural entre las resoluciones fibradas canónicas asociadas a X e Y . Consideremos $EC(\Psi)$ el complejo de cadenas asociado a dicho homomorfismo. Denotaremos $H_n(\Psi)$ a $H_n^E(C(\Psi))$ y lo llamaremos n -ésimo grupo de homología asociada a Ψ por resoluciones fibradas. Si $C(X) \xrightarrow{C(\Psi)} C(Y)$ es el homomorfismo natural entre las resoluciones cofibradas canónicas asociadas a X e Y . Si $EC(\Psi)$ es el complejo de cocadenas asociado a $C(\Psi)$, denotaremos $H^n(\Psi)$ a $H^n^E(C(\Psi))$ y llamaremos n -ésimo grupo de cohomología asociado a Ψ por resoluciones cofibradas.

12. TEOREMA. Existe una equivalencia natural entre los grupos de homología asociados a un homomorfismo $\Psi: X \rightarrow Y$ por resoluciones fibradas y los grupos de homotopía asociados a Ψ .

DEMOSTRACION. Sea E el complejo de cadenas asociado a $C(\Psi): C(X) \rightarrow C(Y)$, como $C(X)$ y $C(Y)$ son resoluciones fibradas, entonces por la prop. 9 $E_n \xrightarrow{\bar{q}_n^E} \ker q_{n-1}^E$ son fibraciones, además

$E_n = C_{n-1}(X) \times C_n(Y)$ es contráctil para $n \geq 2$, por tanto la siguiente sucesión es una resolución fibrada de $\ker q_1^E$

$$\dots \longrightarrow E_3 \xrightarrow{q_3} E_2 \xrightarrow{\bar{q}_2} \ker q_1^E$$

Ahora bien

$$\text{Ker } q_1^E = \{ (x, \alpha) \in X \times Y^R / \varphi(x) - \alpha(1) = 0 \} = F_\varphi .$$

En consecuencia

$$H_n(\varphi) = H_n E = H_{n-1} \text{ Ker } q_1^E \cong \pi_{n-1} F_\varphi \cong \pi_n(\varphi) \quad \text{para } n \geq 1 .$$

Para $n = 0$ podemos definir $\pi_0(\varphi) = \text{Coker } (\pi_0(X) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_0(Y))$ y no es difícil ver que $H_0(\varphi) = \pi_0(\varphi)$.

13. TEOREMA. Existe una equivalencia natural entre los grupos de cohomología asociados a un homomorfismo φ por resoluciones cofibradas y los grupos duales se homotopía asociados a φ .

DEMOSTRACION. Dual a la anterior.

Para demostrar la exactitud de la sucesión de los grupos de homotopía asociados a un homomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ basta considerar la sucesión de los grupos de homología asociada al homomorfismo $C(\varphi) : C(X) \rightarrow C(Y)$ siendo $C(X)$ y $C(Y)$ resoluciones fibradas de X e Y . Dualmente para los grupos duales de homotopía.

14. TEOREMA. Los grupos de (co)homología inducidos por resoluciones (co) fibradas son invariantes por homotopía.

DEMOSTRACION: Como H_n es aditivo (H^n), basta ver que $H_n(X) = 0$ para X contráctil ($H^n X = 0$). Como $\dots \rightarrow 0 \rightarrow X \xrightarrow{\text{id}} X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ es una resolución (co)fibrada de X , es claro que $H_n(X) = 0$ ($H^n X = 0$). #

También probamos por métodos homológicos, la exactitud de los grupos de homotopía asociados a una fibración.

15. TEOREMA. Sea la sucesión $K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ de modo que p es fibración e i es su núcleo, entonces

i) Existe un homomorfismo de conexión ∂ , tal que la siguiente sucesión es exacta

$$\dots \rightarrow \pi_1 E \xrightarrow{p_*} \pi_1 B \xrightarrow{\partial} \pi_0 K \xrightarrow{i_*} \pi_0 E \xrightarrow{p_*} \pi_0 B .$$

ii) Si p es epimorfismo también lo es $\pi_0 E \xrightarrow{p_*} \pi_0 B$.

Demostraremos primero el siguiente lema.

16. LEMA. Sea la sucesión $K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ de modo que p es fibración e i es su núcleo, y sean las resoluciones fibradas canónicas

$$\begin{array}{l} C(K) \xrightarrow{C(i)} C(E) \xrightarrow{C(p)} C(B) \quad \text{entonces} \\ C_n(K) \xrightarrow{C_n(i)} C_n(E) \xrightarrow{C_n(p)} C_n(B) \quad \text{es una sucesión exacta corta excindi-} \end{array}$$

ble para $n \geq 1$.

DEMOSTRACION: Para $n = 1$ la siguiente sucesión es exacta
 $0 \rightarrow K^R \rightarrow E^R \xrightarrow{p^R} B^R$, además como p es fibración, p^R admite una sección s , $p^R \cdot s = \text{id}_{B^R}$ entonces es una sucesión exacta corta excindida. Ver. I-(4.15) de 3. Además como p es fibración, en la siguiente sucesión es exacta Ωp es fibración. Ver II-(4.13) de 3.

$$0 \rightarrow \Omega K \xrightarrow{\Omega i} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \quad \text{y por tanto}$$

$$0 \rightarrow (\Omega K)^R \rightarrow (\Omega E)^R \rightarrow (\Omega B)^R \rightarrow 0 \text{ es exacta y excindida.}$$

Se completa la demostración por inducción. #

Demostración del teorema 15:

Estudiamos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K^R & \longrightarrow & E^R & \xrightarrow{p^R} & B^R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow q_1^E & & \downarrow q_1 & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

\bar{p} (arrow from E to Imp), j (arrow from Imp to B), \bar{q}_1 (arrow from E^R to Imp), j (arrow from Imp to B).

Como p es fibración, $\text{Im } q_1 \subset \text{Im } p$ (ya que existe $\bar{q}_1: B^R \rightarrow E$, tal que $p\bar{q}_1 = q_1$) entonces designemos por \bar{p} y \bar{q}_1 los homomorfismos inducidos, verificando $j\bar{p} = p$, $j\bar{q}_1 = q_1$, $\bar{q}_1 p^R = \bar{p} q_1^E$, $\text{Ker } \bar{q}_1 = \text{Ker } q_1$ y \bar{p} es sobre. Teniendo en cuenta el lema anterior, y la sustitución en el grado cero de la sucesión inicial por la sucesión

$0 \rightarrow K \rightarrow E \xrightarrow{p} \text{Im } p \rightarrow 0$. Podemos asegurar por el teorema IV-(2.1) de 5, que la siguiente sucesión es exacta

$$\dots \rightarrow \pi_1 E \rightarrow \pi_1 B \rightarrow \pi_0 K \rightarrow \pi_0 E \xrightarrow{\bar{p}_*} \pi_0(\text{Im } p) \rightarrow 0$$

además es claro que $j_* \cdot \pi_0(\text{Im } p) \rightarrow \pi_0(B)$ es monomorfismo y por tanto $\text{Ker } p_* = \text{Ker } (j_* \cdot \bar{p}_*) = \text{Ker } p_*$ y podemos sustituir la sucesión anterior por la del enunciado. Si p es sobre entonces $p = \bar{p} \text{ Im } p = B$ y por tanto $p_* \pi_0(E) \rightarrow \pi_0(B)$ es sobre. #

Dualmente podemos probar la exactitud de los grupos duales de homotopía asociados a una cofibración.

17. TEOREMA. Sea la sucesión $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} C$ de modo que i sea cofibración y p su conúcleo, entonces

i) Existe un homomorfismo de conexión tal que la siguiente sucesión es exacta

$$\sigma_0(A) \xrightarrow{i_*} \sigma_0(X) \xrightarrow{p_*} \sigma_0(C) \xrightarrow{d} \sigma_1(A) \xrightarrow{i_*} \sigma_1(X) \longrightarrow \dots$$

ii) Si i es monomorfismo también lo es $\sigma_0(A) \xrightarrow{i_*} \sigma_0(X)$.

BIBLIOGRAFIA

1. H. CARTAN ; S. EILEMBERG: Homological Algebra. Princeton University Press (1956).
2. A. HELLER: Stable Homotopy Categories. Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 28-63.
3. L.J. HERNANDEZ: Un ejemplo de Teoría de Homotopía en los Grupos Abelianos. Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología (Univ. de Zaragoza) (1981).
4. L.J. HERNANDEZ: Grupos duales de Homotopía de Grupos Abelianos (Por aparecer).
5. P.J., HILTON; U. STAMMBACH: A course in Homological Algebra. GTM 4 , Springer-Verlag. (1971).
6. J.H. HUBER: Homotopy Theory in General Categories. Math. Annalen 144 , 361-385 (1961).

DOS NOTAS SOBRE SECCIONES DE LOCKETT EN CLASES DE FITTING DE GRUPOS FINITOS

M. Torres

Departamento de Algebra y Fundamentos. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza. España.

In this note two facts about Lockett sections of Fitting Classes of Finite Groups are established. By the first one it is proved that every group belonging to the greater class in the section appears as a complement of a certain normal subgroup of a group in the smallest Fitting Class of the section; this result is compared with well known results of Blessenohl and Gaschütz about the size of a normal Fitting Class. The second point extends the results of Johnsen and Laue on finitely generated Fitting Classes concerning to Lockett sections.

0. INTRODUCCION

Todos los grupos considerados en esta nota se suponen finitos, salvo mención expresa. Una clase de Fitting \underline{F} es una clase de grupos cerrada bajo las operaciones de formar subgrupos normales y productos normales de grupos en \underline{F} ; ello permite asociar a cada grupo G un máximo subgrupo normal en el mismo que pertenece a \underline{F} , el radical $G_{\underline{F}}$. Con cada clase de Fitting \underline{F} Lockett¹ asocia una clase de Fitting \underline{F}^* definida por:

$$\underline{F}^* = (G: (G \times G)_{\underline{F}} \text{ es subdirecto en } G \times G).$$

Como consecuencia del buen comportamiento de la operación $*$ respecto a la intersección de clases de Fitting, Lockett define asimismo, otra clase de Fitting \underline{F}_* dada por:

$$\underline{F}_* = \bigcap (\underline{X}: \underline{X} \text{ es clase de Fitting y } \underline{X}^* = \underline{F}^*)$$

Por otro lado, Bryce y Cossey³ introducen el concepto de normalidad relativa entre clases de Fitting; dadas dos clases de Fitting no triviales \underline{F} y \underline{G} y tales que $\underline{F} \subseteq \underline{G}$, se dice que \underline{F} es fuertemente normal (o central) en \underline{G} si

$$[G, \text{Aut}(G)] \subseteq G_{\underline{F}} \text{ para todo } G \text{ en } \underline{G}$$

Se llama par de Fitting^{2,3} definido sobre $\underline{F} \subseteq \underline{G}$ a un par (A, f) en donde A es un grupo abeliano no necesariamente finito y f una ley que asocia a cada G en \underline{G} un homomorfismo f_G de G en A con las siguientes propiedades

1ª Si H, K pertenecen a \underline{G} y $a: H \rightarrow K$ es un monomorfismo normal, $f_H = f_K \circ a$

2ª Dado G en \underline{G} , se tiene que $G_{\underline{F}} = \ker f_G$

y 3ª $A = (f_G(g) : g \in G \in \underline{G})$

Las principales propiedades de la operación $*$, de la normalidad relativa y del comportamiento de los pares de Fitting los podemos resumir en:

(0.1) TEOREMA^{1,2,3}: (a) \underline{F}^* y \underline{F} son clases de Fitting de modo que $\underline{F} \subseteq \underline{F}^* \subseteq \underline{F}^{**}$.
 (b) $(\underline{F}^*)^* = \underline{F}$. (c) $(G \times H)_{\underline{F}^*} = G_{\underline{F}^*} \times H_{\underline{F}^*}$. (d) \underline{F} es fuertemente normal en \underline{G} si y solo si $\underline{G} \subseteq \underline{F}^*$. (e) \underline{F} es fuertemente normal en \underline{G} si y solo si existe un par de Fitting (A, f) definido sobre $\underline{F} \subseteq \underline{G}$. Más aún, la ley $A(\underline{X}) = (f_G(g) : g \in G \in \underline{X})$ define un isomorfismo entre el retículo de las clases de Fitting \underline{X} tales que $\underline{F} \subseteq \underline{X} \subseteq \underline{G}$ y el retículo de los subgrupos de A .

(0.2) DEFINICION: Se llama sección de Lockett de la clase de Fitting \underline{F} al retículo $L(\underline{F})$ de todas las clases de Fitting \underline{X} tales que $\underline{X}^* = \underline{F}^*$. Una clase de Fitting \underline{F} se llama de Lockett si $\underline{F} = \underline{F}^*$.

Finalmente se mencionan dos resultados que se usarán en lo que sigue.

(0.3) PROPOSICION⁴: Sea \underline{F} una clase de Lockett, K y H grupos cualesquiera y $G = K \text{ wr } H$; denotando por K^* al subgrupo base de G , se tiene:

$$K \in \underline{F} \iff K^* \subseteq G_{\underline{F}} \quad \text{y} \quad K \notin \underline{F} \iff G_{\underline{F}} \subset K^*$$

Dadas dos clases de Fitting cualesquiera \underline{X} e \underline{Y} , se denota por $\underline{X} \vee \underline{Y}$ a la menor clase de Fitting que contiene a ambas; se tiene entonces:

(0.4) PROPOSICION⁵: Dadas $\underline{F} \subseteq \underline{G} \subseteq \underline{F}^*$, se tiene que en el par de Fitting (A, f) definido sobre $\underline{F} \subseteq \underline{G}$ el grupo A es finito si y solo si existe un grupo G en \underline{G} tal que $\underline{G} = \underline{F} \vee \text{Fit}(G)$; en donde $\text{Fit}(G)$ denota a la menor clase de Fitting que contiene a G .

Las clases de Fitting de la forma $\text{Fit}(G)$ se llaman finitamente generadas.

1.

Denotemos por \underline{U} la clase de todos los grupos finitos y por \underline{S} a la de todos los grupos finitos resolubles.

(1.1) PROPOSICION: Sea \underline{F} una clase de Fitting tal que $\underline{F}^* \neq \underline{U}$. Para todo H en \underline{U} existe G en \underline{U} tal que $G/G_{\underline{F}}$ es producto semidirecto de un subgrupo normal y de un subgrupo isomorfo a \bar{H} . (Analogamente poniendo en todos los lugares \underline{S} en vez de \underline{U} y suponiendo $\underline{F} \subseteq \underline{S}$).

DEMOSTRACION: Como $\underline{F}^* \neq \underline{U}$, existe $K \notin \underline{F}^*$; teniendo, entonces, para todo grupo H que el radical $G_{\underline{F}}$ de $G = K \text{ wr } H$ está estrictamente contenido en K^* , en virtud de (0.3), ya que $\bar{K} \in \underline{F}^*$. Se tiene así:

$$H \approx G/K^* \approx (G/G_{\underline{F}})/(K^*/G_{\underline{F}}) \quad \text{y} \quad H \approx HG_{\underline{F}}/G_{\underline{F}} \subseteq G/G_{\underline{F}}$$

Con lo cual $\bar{G}/G_{\underline{F}} = [K^*/G_{\underline{F}}] \bar{H}G_{\underline{F}}/G_{\underline{F}}$, producto semidirecto.

(1.2) PROPOSICION: Sea \underline{F} una clase de Fitting cualquiera; para todo H en \underline{F} existe G en \underline{F} tal que G es producto semidirecto de un subgrupo normal y

y de un subgrupo isomorfo a H.

DEMOSTRACION: Sea (A, f) par de Fitting asociado a $\underline{F} \subseteq \underline{F}^*$; dado H en \underline{F}^* se considera $f_H: H \rightarrow A$ y $B = f_H(H)$; si $i_k: H \rightarrow H^n$ denota la k-ésima inclusión canónica; para $k = 1, 2, \dots, n$ se tiene $f_H = f_{H^n} \circ i_k$, con lo que $B = f_{H^n}(H^n)$ para todo n. Si se toma $n = \exp(B)$, se tiene:

$$H \approx \bar{H} = ((h, h, \dots, h): h \in H) \subseteq \ker f_{H^n} = G \in \underline{F}^*$$

Denotando por p_k la restricción a G de la k-ésima proyección canónica de H^n en H, se tiene: $G = [\ker p_k]H$, producto semidirecto.

(1.3) CONSECUENCIAS: Comparando (1.1) y (1.2) y haciendo en ésta $\underline{F}^* = \underline{U}$, se tienen los siguientes hechos:

A: Dado G cualquiera y \underline{F} clase de Fitting tal que $\underline{F}^* = \underline{U}$, existe H en \underline{F} tal que $G \subseteq H$.

A': Dado G cualquiera y \underline{F} clase de Fitting tal que $\underline{F}^* \neq \underline{U}$, existe H tal que $G \subseteq H/H_F$.

B: Dado G cualquiera y \underline{F} clase de Fitting tal que $\underline{F}^* = \underline{U}$, existe H en \underline{F} tal que $G \approx H/K$ con $K \trianglelefteq H$.

B': Dado G cualquiera y \underline{F} clase de Fitting tal que $\underline{F}^* \neq \underline{U}$, existe H tal que $G \approx H/K$ con $H_F \subseteq K \trianglelefteq H$.

Análogas consideraciones cambiando \underline{U} por \underline{S} en todos los lugares y suponiendo que $\underline{F} \subseteq \underline{S}$. En este caso los resultados A y A' son debidos a Blessohl y Gaschütz⁶ y el resultado B' puede verse en Beidleman⁷.

2.

Dado un grupo G y un entero positivo n, se define:

$$G(n) = ((g, g, \dots, g): g \in G)(G')^n$$

que, claramente, es un subgrupo normal de G^n . Johnsen y Laue⁸ demuestran que para todo grupo finito G y todo entero positivo n, se tiene $\text{Fit}(G(n)) \subseteq \text{Fit}(G)$ y $\text{Fit}(G(n))^* = \text{Fit}(G)^*$; estos resultados son consecuencia de que $G(n)$ es subgrupo normal de G^n y de las propiedades formales de la operación *.

En este párrafo se dan demostraciones alternativas y se extienden los principales puntos del párrafo primero del antes citado trabajo de Johnsen y Laue.

(2.1) LEMA: Sean \underline{F} y \underline{G} clases de Fitting con \underline{F} fuertemente normal en \underline{G} y sea (A, f) el par de Fitting correspondiente y $B = f_G(G)$. Entonces, para todo n se tiene:

$$f_G^n(G(n)) = B_G^m$$

con $m = \text{m.c.d.}(n, \exp(B))$.

DEMOSTRACION: Como $(G')^n \subseteq \ker f_G^n$, es obvio que $f_G^n(G(n)) = f_G^n(\bar{G})$ con $\bar{G} = ((g, g, \dots, g): g \in G)$. Sea, en primer lugar, $b \in B$ cualquiera; existe $g \in G$ tal que $b = f_G(g)$ con lo que para $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene $b = f_{G^n}(1, \dots, g, \dots, 1)$ (con g en el lugar i); por tanto $b^n = f_{G^n}(g, g, \dots, g)$ pertenece a $f_G^n(G(n))$.

Como $m = \text{m.c.d.}(n, \exp(B))$, existen r y s enteros tales que $m = nr + \exp(B)s$, con lo que $b^m = (b^n)^r$ pertenece a $f_{G^n}(G(n))$ para todo b en B , en consecuencia: $B^m \subseteq f_{G^n}(G(n))$. Suponer ahora c en $f_{G^n}(G(n))$; existe g en G tal que

$$c = f_{G^n}(g, \dots, g) = f_G(g)^{mm'}$$

por tanto c pertenece a B^m .

(2.2) COROLARIO⁸: Dado G finito cualquiera, si el exponente de G/G' divide a n , se tiene $G(n) \in \text{Fit}(G)_*$; en particular $\text{Fit}(G(n)) = \text{Fit}(G)_*$.

DEMOSTRACION: Basta aplicar (2.1) con $\underline{G} = \text{Fit}(G)$ y $\underline{F} = \text{Fit}(G)_*$ y observar que $m = \exp(B)$ con lo que $f_{G^n}(G(n))$ es trivial, es decir $G(n) \in \text{Fit}(G)$.

(2.3) COROLARIO⁸: Dado G finito cualquiera y n entero positivo tales que n y el orden de G/G' son primos entre sí, se tiene $G \in \text{Fit}(G(n))$; en particular $\text{Fit}(G) = \text{Fit}(G(n))$.

DEMOSTRACION: Por lo mencionado al principio del párrafo, $\text{Fit}(G(n))$ es fuertemente normal en $\text{Fit}(G)$, por lo que si en (2.1) se hace $\underline{F} = \text{Fit}(G(n))$ y $\underline{G} = \text{Fit}(G)$ y observando que $\text{m.c.d.}(n, \exp(B)) = 1$, se tiene $f_{G(n)}(G(n)) = f_{G^n}(G(n)) = B$. Por otro lado $G(n) \in \underline{F}$ implica $f_{G(n)}(G(n)) = 1$ con lo que $f_G(G) = 1$, es decir, G pertenece a \underline{F} .

(2.4) LEMA: Sean \underline{F} y \underline{G} clases de Fitting con \underline{F} fuertemente normal en \underline{G} y con par de Fitting asociado (A, f) ; entonces si \underline{F} es finitamente generada, se tiene \underline{G} finitamente generada si y solo si A es finito.

DEMOSTRACION: Es una consecuencia de (0.4) y del hecho siguiente:

$$\text{Fit}(G \times H) = \text{Fit}(G) \vee \text{Fit}(H)$$

cualesquiera que sean G y H . Notar que si $\underline{F} = \text{Fit}(G)$ y $\underline{G} = \text{Fit}(G \times H)$, se tiene $A = f_H(H)$.

(2.5) PROPOSICION: Si en una seccion de Lockett $L(\underline{F})$ uno de sus miembros \underline{X} es finitamente generado, lo son también todos los miembros de $(\underline{Y} : \underline{F} \subseteq \underline{Y} \subseteq \underline{X})$ y lo son todos los miembros de $L(\underline{F})$ si y solo si en el par de Fitting (A, f) de $\underline{F} \subseteq \underline{P}$ el grupo A es finito.

DEMOSTRACION: Por (2.2), \underline{X} finitamente generada implica \underline{F}_* finitamente generada; en el par de Fitting (B, f') de $\underline{F} \subseteq \underline{X}, B$ es finito; por (2.4), (0.1)-(d) y (0.1)-(e) se tiene $\underline{F} \subseteq \underline{Y} \subseteq \underline{X}$ implica \underline{Y} finitamente generada.

3. REFERENCIAS

- 1 F. P. LOCKETT, Math. Z. 137 131-136 (1974)
- 2 BRYCE-COSSEY, Math. Z. 141 99-110 (1975)
- 3 H. LAUSCH, Math. Z. 130 67-72 (1973)
- 4 J. COSSEY, Math. Z. 141 289-295 (1975)
- 5 E. CUSSACK, Math. Z. 167 37-47 (1979)
- 6 BLESSENOHL-GASCHÜTZ, Math. Z. 118 1-8 (1970)
- 7 J. BEIDLEMAN, Arch. Math. (Basel) 28 347-356 (1977)
- 8 JOHNSEN-LAUE, Arch. Math. (Basel) 30 350-360 (1978).

SOBRE EL ANULADOR DE UN ALGEBRA

S. González-Jiménez

Departamento de Algebra y Fundamentos. Facultad de Ciencias.
Universidad de Zaragoza. España.

In these notes we give several results about the annihilator of an Associative Algebra or, more generally, that of any of his ideals. We pay a special attention to the cases of weak-Hamiltonian and semisimple Algebras. Finally we study those Algebras whose ideals are all annihilators of same subset of the Algebra.

INTRODUCCION

La noción de anulador en teoría de anillos asociativos es de fundamental importancia. Así, en ¹ se ve que un anillo sin elementos nilpotentes distintos de cero es regular von Neumann si y sólo si todo ideal a izquierda principal es el anulador a izquierda de un elemento. También en ² se da una caracterización de anillos regulares arbitrarios en términos de anuladores e igualmente en dichos términos se obtienen varias propiedades de anillos artinianos.

En este orden de ideas, Johns en ³ prueba que todo anillo con identidad Noetheriano a derecha, en que todo ideal a derecha es anulador a derecha, es anillo artiniano a derecha, lo que permite dar una nueva caracterización de anillos quasi-Frobenius.

En álgebras asociativas, la estructura de espacio vectorial permite varios cálculos que no son posibles en un anillo arbitrario, siendo resultados de teoría de álgebras de gran importancia en el estudio de anillos. Así, la equivalencia introducida por Kruse-Price en ⁴, en la página 27, es de considerable ayuda en el tratamiento de los anillos de orden pequeño.

Pues bien, en el párrafo primero de estas notas, se dan nuevos resultados sobre el anulador en un álgebra, prestándose especial atención, con ayuda de ⁴, a las álgebras Hamiltonianas-débiles. En el párrafo segundo se dan

resultados sobre el anulador en las álgebras semisimples y finalmente, en el último párrafo, se estudian las álgebras que cumplen la condición de anulador, ésto es, que todo ideal es el anulador de un subconjunto del álgebra. Se dan ejemplos de álgebras con dicha condición.

Todas las álgebras consideradas son asociativas, de dimensión finita y sobre un cuerpo arbitrario k .

1. ANULADORES Y ALGEBRAS HAMILTONIANAS-DEBILES

1.1. Notaciones

- $F(A)$ es el radical nilpotente de A .
- Si $a \in A$, indicamos por $\langle a \rangle$ la subálgebra de A engendrada por a .
- S subconjunto de A distinto de vacío. Entonces el anulador en A de S es el conjunto $\{x \in A / x.s = s.x = 0 \ \forall s \in S\}$. Se indica An_S .
- $H \trianglelefteq A$. Entonces $An_H H = \{x \in H / x.h = h.x = 0 \ \forall h \in H\}$.
- H/K factor principal de A . Entonces $An_A(H/K) = \{a \in A / aH \subseteq K, Ha \subseteq K\}$.

1.2. Definiciones

- Un álgebra A se dice Hamiltoniana-débil (H.d.) si toda subálgebra maximal de A es ideal en A .
Towers⁵ caracteriza estas álgebras como nilpotentes o como $N \oplus B$ con N nilpotente y B engendrada por un idempotente.
- A se dice semisimple si $F(A) = 0$.

1.3. Proposición

$F(A)$ es la intersección de los anuladores en A de los factores principales de una serie principal cualquiera de A .

1.4. Proposición

Sea A un álgebra nilpotente y H un ideal propio de A . Entonces $H \cap An_A \neq 0$.

Demostración:

Supongamos $\exp A = n$ y H ideal minimal de A . Se tiene la serie:

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n = A$$

tal que $An(A/X_1) = X_{i+1}/X_1$. Por ser H ideal propio de A , existe i tal que $H \cap X_i = 0$, $H \cap X_{i+1} \neq 0$. Ahora, $0 \neq H \cap X_{i+1} \trianglelefteq A$ implica $H \cap X_{i+1} = H$ por ser H minimal, luego $H \leq X_{i+1}$ y así $AH \leq AX_{i+1} \leq X_1$. Por tanto $AH \leq X_1 \cap H = 0$, luego $H \leq An_A$.

Si H no es minimal, existe B ideal minimal de A , $B \leq H$. Luego $B \leq An_A$ y así $An_A \cap H \neq 0$.

1.5. Proposición

El álgebra $An(F(A))/An_{F(A)}F(A)$ es semisimple.

Siguiendo ⁴ introducimos la siguiente definición:

1.6. Definición

Dos álgebras A y B sobre el mismo cuerpo k, se dicen equivalentes (A e. B) si:

- 1) Existe $\varphi: A/AnA \longrightarrow B/AnB$ isomorfismo
- 2) Existe $\psi: A^2 \longrightarrow B^2$ isomorfismo tal que $\psi(a_i + AnA) = b_i + AnB$
 $i=1,2$, implica $\psi(a_1 a_2) = b_1 b_2$.

1.7. Observaciones (Ver⁴)

- 1) eq. es una relación de equivalencia.
- 2) A nilpotente y B eq. A implica B nilpotente.
- 3) Si A eq. B, $\dim A < \dim B$, entonces $B = A \oplus N$ con $N^2 = 0$.

1.8. Proposición

- 1) C subálgebra de A, $A = C + AnA$. Entonces $An_C C = C \cap AnA$.
- 2) C subálgebra maximal de A. Entonces $An_C C = C \cap AnA$.

1.9. Proposición

Sea A álgebra H.d. Entonces $An_{F(A)} F(A) = AnA$.

1.10. Teorema

Supongamos que AnA es ideal maximal de A. Entonces A es H.d.

Demostración:

Hay que considerar dos casos

- 1º) $AnA = F(A)$. Entonces A no es nilpotente, luego existe e tal que $e^2 = e$. Consideramos la subálgebra $\langle e \rangle$, y así $\langle e \rangle + F(A) = A$, lo que implica $\langle e \rangle$ eq. A. Luego por 1.7. $A = \langle e \rangle \oplus N$ con $N^2 = 0$ y así A es H.d. no nilpotente.
- 2º) $AnA \neq F(A)$. Entonces $F(A) = A$, luego A es nilpotente.

1.11. Teorema

Sea A un álgebra H.d. no nilpotente. Entonces AnA es un ideal maximal de A si y sólo si $F(A)^2 = 0$.

1.12. Observaciones

- 1ª) A nilpotente tal que existe $x \neq 0$ no perteneciente a AnA y $x^2 = 0$. Entonces el AnA no es ideal maximal de A.
- 2ª) Existen álgebras nilpotentes en que el AnA es ideal maximal. Considérese, por ejemplo, el álgebra $A = \langle b, c \rangle$, $b^2 = c$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$.

2. ANULADORES Y ALGEBRAS SEMISIMPLES

2.1. Proposición

Sea A semisimple y $I \triangleleft A$. Entonces $An(I+AnI/AnI) = 0$.

Demostración:

Sea $An(I+AnI/AnI) = B/AnI$. Entonces $B(I+AnI) = AnI$, luego $BI \subseteq AnI$ y así $BI^2 \subseteq IAnI = 0$. Por tanto $BI^2 = 0$, luego $(BI)^2 = 0$ y por ser A semisimple $BI = 0$, esto es $B \subseteq AnI$, lo que prueba que $An(I+AnI/AnI) = 0$.

2.2. Proposición

Sea A semisimple y $I \triangleleft A$. Entonces la suma $I+AnI$ es directa.

2.3. Proposición

Sea A semisimple no simple. Entonces existe $H \triangleleft A$ tal que $H \oplus AnH = A$.

Demostración:

A semisimple implica $A = H_1 \oplus \dots \oplus H_n$, $n > 1$ por no ser A simple, y los H_i ideales simples no nilpotentes. Es obvio que $H_2 \oplus \dots \oplus H_n \subseteq AnH_1$ y aplicando 2.2. se obtiene que $A = H_1 \oplus AnH_1$.

2.4. Observación

Si A es semisimple, no simple, tal que todo ideal propio es maximal, entonces A posee exactamente dos ideales propios distintos H_1 y H_2 siendo $A = H_1 \oplus H_2$, $H_2 = AnH_1$ y $H_1 = AnH_2$.

3. LA CONDICION DE ANULADOR

3.1. Definición

Un álgebra A cumple la condición de anulador si para todo ideal H de A , existe un subconjunto S de A tal que $H = AnS$.

3.2. Ejemplos

1º) El álgebra $A = \langle a, b \rangle$ tal que $a^2 = a$, $b^2 = b$, $ab = ba = 0$, tiene como únicos ideales A , 0 , $\langle a \rangle$ y $\langle b \rangle$; verificando que $AnA = 0$, $An0 = A$, $An\langle b \rangle = \langle a \rangle$, $An\langle a \rangle = \langle b \rangle$. Luego A cumple la condición de anulador.

2º) El álgebra $A = \langle a, b, c \rangle$ tal que $a^2 = a$, $b^2 = c$, $c^2 = bc = cb = 0$, $ab = ba = b$, $ac = ca = c$, cumple la condición de anulador. En efecto:

i) 0 , $F(A)^2 = \langle c \rangle$, $F(A)$ y A son ideales de A que cumplen la condición de anulador, pues $A = An0$, $0 = AnA$, $F(A)^2 = AnF(A)$ y $F(A) = AnF(A)^2$ pues $F(A) \subseteq AnF(A)^2$ y si el contenido es estricto, por ser $\dim A = 3$, se tiene $A = AnF(A)^2$, lo que no es cierto ya que $ab^2 = ac = c \neq 0$.

ii) Los ideales anteriores son los únicos ideales de A . En efecto, sea $0 \neq H \triangleleft A$. Si $\dim H = 1$, entonces $H = \langle ra+sb+tc \rangle$ y se prueba que $r = s = 0$, luego $H = \langle c \rangle = F(A)^2$. Si $\dim H = 2$, se tiene $H = \langle ra+sb+tc, r'a+s'b+t'c \rangle$. Se ve que $c \in H$, luego $H = \langle c, ra+sb+tc \rangle$. Entonces si $t \neq 0$, se prueba que $H = \langle c, sb+tc \rangle$, luego H es nilpotente y por tanto $H = F(A)$. Finalmente, si $t = 0$ $H = \langle c, ra+sb \rangle$; probándose que $r = 0$. luego $H = \langle a, b \rangle = F(A)$.

3.3. Proposición

- 1) Sea S un subconjunto de A . Entonces $AnS = An(An(AnS))$
- 2) Sea $H \triangleleft A$, $H = An(AnH)$ y $H \cap AnH = 0$. Entonces $An(H+AnH) = 0$.

3.4. Corolario

En las condiciones del resultado 3.3. (2) se tiene que $AnA = 0$.

3.5. Teorema

Sea A un álgebra que cumple la condición del anulador. Entonces:

- 1) Si H y K son ideales de A tal que $AnK \subseteq AnH$, entonces $H \subseteq K$.
- 2) Si $H \subseteq An(AnH)$, entonces $H = An(AnH)$.
- 3) $AnA = 0$.
- 4) Si $H \triangleleft A$ tal que $H \cap AnH = 0$, entonces $A = H \oplus AnH$.

Demostración:

1) Sea $H = AnS$ y $K = AnT$. Entonces $AnK \subseteq AnH$ implica $An(AnT) \subseteq An(AnS)$. Luego $An(An(AnS)) \subseteq An(An(AnT))$ y por 3.3. $AnS \subseteq AnT$.

2) Es inmediato.

3) Es claro que $A = An(0)$. Ahora $(0) \subseteq An(An(0))$ y por 2) $(0) = An(An(0))$, esto es $AnA = 0$.

4) $H \cap AnH = 0$ implica $H \subseteq An(AnH)$ y por 2) $H = An(AnH)$. Ahora $An(H+AnH) = AnH \cap An(AnH) = 0$. Luego $An(H+AnH) \subseteq AnH$ y por 1) $A \subseteq H+AnH$, esto es, $A = H+AnH$. Finalmente es claro que $A = H \oplus AnH$.

3.6. Observaciones

1ª) Si A es simple y nilpotente, entonces cumple trivialmente la condición de anulador.

2ª) Si A es semisimple y todo ideal propio es maximal, entonces A cumple la condición de anulador.

3ª) Las álgebras H.d. no cumplen la condición de anulador, ya que se ve que si $F(A)^n = 0$, $F(A)^{n-1} \neq 0$, entonces $0 \neq F(A)^{n-1} \subseteq AnA$. Luego no se cumple el resultado 3.5. (4).

4ª) Sea A un álgebra con $0 \neq F(A) \neq A$ y tal que todo ideal propio es maximal. Entonces A cumple la condición de anulador ó $F(A)$ es anulado por todo elemento de A .

BIBLIOGRAFIA

1. YUE CHI MING: Proc. Edinburg Math. Soc. 19 , 39-91 (1974)
2. YUE CHI MING: Math. J. Okayama Univ. 19 , nº 1 , (1977)
3. B. JOHNS: Journal of Algebra 49 , 222-224 , (1977)
4. KRUSE-PRICE: Gordon an Breach , Science Publishers Inc , New York (1976)
5. D. TOWERS: Proc. London Math. Soc. (3) , 27 , 440-462 , (1973)
6. S. GONZALEZ: Rev. de la Univ. de Santander, nº 2 , part II , 799, (1979)
7. NIEWIEZERZAL: Bull. de l'Acad. Polonaise des Sc. , vol XXIV, 7 , 463-466
(1976)

UNA CONDICION ADICIONAL AL TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE LAS FORMULAS FUNDAMENTALES PARA SUCESSIONES REALES DE POLINOMIOS ORTOGONALES

J. Javier GUADALUPE HERNANDEZ y Jaime VINUESA TEJEDOR

Departamento de Teoría de Funciones. Universidad de Zaragoza.

We obtain in this note a new equivalent condition to the equivalence theorem of fundamental formulas of orthogonal polynomials on the real axis, based on the typical extension of a scalar product.

INTRODUCCION

En este trabajo se obtiene una nueva condición equivalente a las propiedades características de Polinomios Ortogonales sobre la Recta Real que aparecen en [1], donde se les llama también Fórmulas Fundamentales. Esta nueva "fórmula fundamental" (*) ha aparecido de la consideración y estudio de las extensiones del producto escalar, en particular de la extensión típica. Tenemos el proyecto de hacer un estudio exhaustivo de las extensiones típicas de los productos escalares correspondientes a Polinomios Ortogonales sobre curvas algebraicas (en especial armónicas y cassinianas), en relación con las propiedades características de dichos Polinomios Ortogonales (ya estudiadas en los casos citados). En tal sentido este trabajo constituye el primer resultado y quizás el punto de partida, por ser la recta real el caso más sencillo de curva armónica en el plano complejo.

En [2], y también en [3] como caso particular, aparece demostrado el teorema de equivalencia de las fórmulas fundamentales para el caso de P.O. sobre \mathbb{R} . Sin embargo no está enunciado explícitamente en ninguno de ellos, por lo que lo citamos a continuación.

(*) Aunque no se trata de una fórmula propiamente dicha, seguiremos llamando así a la nueva propiedad característica, con objeto de mantener la notación y forma del teorema de equivalencia.

TEOREMA. (Vinuesa)

"Dada una sucesión de polinomios con coeficientes reales, $\{P_n(x)\}_0^\infty$, son equivalentes:

- i) $\{P_n(x)\}_0^\infty$ es la sucesión de P.O. correspondiente a un producto escalar definido por la integral respecto de una función de distribución sobre R .
- ii) $\{P_n(x)\}_0^\infty$ es una sucesión de P.O. definida (en la base $\{x^n\}_0^\infty$) por una matriz de Hankel.
- iii) $\{P_n(x)\}_0^\infty$ verifica una fórmula de Recurrencia de Christoffel-Darboux.
- iv) $\{P_n(x)\}_0^\infty$ verifica una fórmula de Sumación de Christoffel-Darboux.
- v) $\{P_n(x)\}_0^\infty$ verifica una fórmula de interpolación de Christoffel."

Como anunciábamos más arriba introduciremos una sexta condición equivalente a las anteriores, que las relaciona con la extensión típica. Para ello damos las siguientes definiciones:

DEFINICION 1.

"Un producto escalar en Π_{n-1} (Espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que $n-1$) se dice típico si puede expresarse en la forma

$$P \circ Q = \sum_{i=1}^n p_i P(x_i) Q(x_i) \quad (1)$$

(v. [4])."

PROPOSICION 1.

"La condición necesaria y suficiente para que (1) defina un producto escalar en Π_{n-1} es que $p_i > 0$ ($i=1,2,\dots,n$), que $x_i \in R$ ($i=1,2,\dots,n$), y que $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$)."

DEMOSTRACION.

Desde luego la condición es suficiente.

Si $p_1 \leq 0$ y/o $x_1 = x_2$, el polinomio $P(x) = (x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)$, perteneciente a Π_{n-1} y no idénticamente nulo tendría norma menor o igual que cero. Por simetría se sigue el resto. .c.q.d.

PROPOSICION 2.

"La expresión (1) no puede definir un producto escalar en Π_n ".

DEMOSTRACION.

Basta considerar la norma del polinomio no idénticamente nulo $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ de grado n . .c.q.d.

DEFINICION TRIVIAL.

"Un producto escalar en Π_n se dice extensión de otro en Π_{n-1} si el

segundo es la restricción del primero al subespacio Π_{n-1} ".

El producto escalar definido en (1) admite una extensión sencilla a Π_n de la forma siguiente:

Si $P \in \Pi_{n-1}$, $Q \in \Pi_n$ ponemos

$$P \circ Q = Q \circ P = \sum_{i=1}^n p_i P(x_i) Q(x_i) \quad (2)$$

Si $\text{grad. } P = \text{grad. } Q = n$:

$$P \circ Q = \sum_{i=1}^n p_i P(x_i) Q(x_i) + e p q \quad (3)$$

siendo p, q los coeficientes conductores de $P(x)$, $Q(x)$ respectivamente, y e un número real positivo fijo cualquiera.

DEFINICION 2.

"La extensión de un producto escalar se dice típica si existen p_1, p_2, \dots, p_n positivos, x_1, x_2, \dots, x_n distintos dos a dos y $e > 0$, de forma que el producto escalar en Π_n viene dado por (2) y (3)".

NOTA.

Si P_0, P_1, \dots, P_n son los polinomios ortogonales correspondientes a una extensión típica, las raíces de $P_n(x) = 0$ son las x_1, x_2, \dots, x_n de la extensión. (v. [4]).

PROPOSICION 3.

"Una condición necesaria y suficiente para que x_1, x_2, \dots, x_n sean las raíces de una extensión típica de Π_{n-1} a Π_n es que se verifique

$$K_{n-1}(x, x_i) \circ K_{n-1}(x, x_j) = 0 \quad (\text{si } i \neq j),$$

donde

$$K_{n-1}(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(x) P_k(y)}{\|P_k\|^2}$$

es el $(n-1)$ -núcleo de la fórmula de sumación".

DEMOSTRACION.

Ver [5].

DEFINICION 3.

"Una sucesión de Polinomios Ortogonales sobre \mathbb{R} se dirá típica si para cada $n \in \mathbb{N}$, el producto escalar en Π_n es una extensión típica de su restricción a Π_{n-1} ".

TEOREMA.

"Cada una de las condiciones i) a v) del teorema de equivalencia citado al comienzo es equivalente a la siguiente:

vi) $\{P_n(x)\}_0^\infty$ es una sucesión típica de Polinomios Ortogonales".

DEMOSTRACION.

vi) \Rightarrow ii) : Sea $M = (c_{p,q})_{p,q=0}^\infty$ la matriz correspondiente al producto escalar en la base $\{x^i\}_{i=0}^\infty$ y llamemos $\{s_k\}_0^\infty$ a su primera fila, $s_k = c_{k,0}$. Fijados p, q tomemos $n \geq p+q$, y sean P_1, P_2, \dots, P_n ; x_1, x_2, \dots, x_n los correspondientes a la extensión típica de Π_{n-1} a Π_n . Se tiene

$$c_{p,q} = \sum_{i=1}^n P_i x_i^p x_i^q = \sum_{i=1}^n P_i x_i^{p+q} = c_{p+q,0} = s_{p+q}$$

que prueba que M es de Hankel.

iv) \Rightarrow vi): Por el teorema citado en el enunciado, $\{P_n(x)\}_0^\infty$ es entonces una sucesión de P.O. que verifica la fórmula de sumación de Christoffel-Darboux:

$$K_{n-1}(x, y) = \frac{1}{\Delta_{n-1}^2} \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{x-y} \quad (x \neq y, n=1,2,\dots)$$

Si son x_1, x_2, \dots, x_n las raíces de $P_n(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} K_{n-1}(x, x_i) \cdot K_{n-1}(x, x_j) &= K_{n-1}(x_i, x_j) = \\ &= \frac{1}{\Delta_{n-1}^2} \frac{P_n(x_i)P_{n-1}(x_j) - P_n(x_j)P_{n-1}(x_i)}{x_i - x_j} = 0 \quad (\text{si } i \neq j), \end{aligned}$$

y por la Proposición 3 deducimos que el producto escalar en Π_n es extensión típica del correspondiente en Π_{n-1} . $\{P_n(x)\}_0^\infty$ es por tanto una sucesión de Polinomios Ortogonales típica. e.q.d.

REFERENCIAS.

- 1.- J. VINUESA: Fórmulas fundamentales para sucesiones reales de polinomios ortogonales. Rev. de la Acad. de Ciencias de Madrid, Tomo LXV, cuaderno 4º - 1971.
- 2.- J. VINUESA: Sobre polinomios ortogonales. Equivalencia de las fórmulas Fundamentales para una distribución real. Actas de la XI R.A.M.E. Madrid, 1971.
- 3.- J. VINUESA: Polinomios ortogonales relativos a curvas algebraicas armónicas. Pub. del Dpto. de Teoría de Funciones de la Universidad de Zaragoza. 1974.
- 4.- L. VIGIL : Sobre propiedades formales de polinomios ortogonales: 2) Ceros y Constantes de Christoffel. Rev. de la Acad. de Ciencias de Madrid, Tomo LXIII, cuaderno 3º, 1969.
- 5.- L. VIGIL : Caracterización de la extensión típica de un producto escalar. Rev. Matemática Hispano-Americana, Tomo XXIX, núm. 4, Madrid 1969.

POTENCIALES INTERATOMICOS PARA EL ESTADO FUNDAMENTAL DE SISTEMAS CESIO-GAS NOBLE

A. Caveró y E. Bernabeu

Departamento de Óptica. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza. (España)

The experimental information existing up till now on interatomic potentials of Cs-noble gas systems obtained from elastic scattering experiments is analyzed. The resulting values for the well depth and radius, the analytic expression of the potential at long range and the expression for the repulsive term at very high energies are used to test different potential models for the systems Cs-Ar, Cs-Kr and Cs-Xe. Lennard-Jones [n-8-6] potentials are seen to reproduce all the experimental features satisfactorily.

INTRODUCCION

Los potenciales interatómicos juegan un importante papel en la descripción de los fenómenos relacionados con las colisiones entre átomos. Su forma y magnitud tienen incidencia directa sobre secciones eficaces, coeficientes de transporte, perfiles de líneas espectrales y reacciones químicas en general. Particularmente, los sistemas constituidos por átomos alcalinos, en estado fundamental o excitado, y gases nobles en estado fundamental resultan de gran interés por su simplicidad, revistiendo mayor importancia aquellos sistemas en los que intervienen átomos de cesio, dada la incidencia de este elemento en metrología. El interés de que son objeto los potenciales interatómicos de estos sistemas se evidencia en el continuado estudio que vienen mereciendo, del que dan cuenta las recientes puestas a punto de Baylis¹, Pauly², o las más clásicas de Bernstein y Muckerman³ y Pauly y Toennies⁴; aparte de la bien conocida obra de Hirschfelder⁵. La práctica totalidad de estos trabajos se refieren al estado fundamental, para el que casi toda la información se obtiene a partir de experiencias de difusión de haces atómicos y moleculares. Para estados excitados, las experiencias de difusión son más difíciles, y el método utilizado para obtener los potenciales pasa por la determinación previa de la diferencia de potencial entre el estado excitado y el fundamental a partir del análisis de líneas espectrales, método que requiere conocer previamente el potencial para el estado fundamental.

El propósito del presente trabajo es obtener potenciales interatómicos para sistemas cesio-gas noble en estado fundamental, con vistas a su utiliza-

ción en la obtención de potenciales de estos sistemas en estado excitado, aprovechando los resultados obtenidos en nuestro laboratorio en diversos tipos de experiencias: análisis de perfiles de líneas espectrales⁶, bombeo óptico⁷, y espectroscopía de plasmas⁸. Para ello analizamos la información existente sobre potenciales interatómicos de sistemas cesio-gas noble en estado fundamental, y discutimos diversos modelos analíticos para estos potenciales.

Los resultados recogidos en la literatura son muy dispersos y de ellos pueden inferirse datos aislados, relativos a la posición del pozo de potencial, a la forma del potencial a muy larga distancia de los colisionantes y a la forma de la interacción repulsiva a muy alta energía. Los procedimientos de inversión, es decir, obtención de potenciales punto a punto a partir de medidas experimentales no son todavía aplicables a sistemas cesio-gas noble⁹ y la forma del potencial para distancias intermedias debe ser aproximada mediante un modelo analítico. El modelo normalmente usado es el Lennard-Jones [12-6], $V(R) = C_{12}R^{-12} - C_6R^{-6}$, que resulta muy operativo matemáticamente y cuya validez física vamos a analizar, junto con la de otros modelos alternativos, a la luz de los resultados experimentales existentes.

OBTENCION DE INFORMACION SOBRE EL POTENCIAL A PARTIR DE DATOS EXPERIMENTALES

Para el estudio de la interacción de sistemas cesio-gas noble en estado fundamental, se dispone casi exclusivamente de resultados experimentales de difusión de haces atómicos*. Estos pueden ser de alta energía (entre 1 y 10^4 eV) y de energía térmica (menor que 10^{-1} eV). Dada la forma general del potencial en el estado fundamental, con una parte repulsiva a cierta distancia y una parte atractiva a larga distancia, y con un pozo de profundidad ϵ a distancia R_m (Fig. 1), y siendo ϵ para los sistemas citados del orden de 10^{-2} eV, se com-

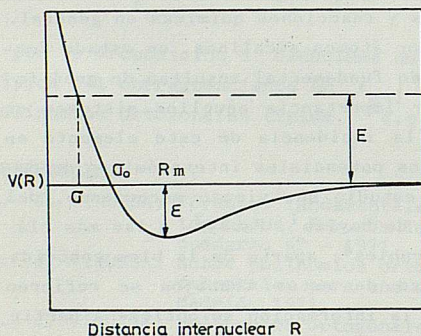


Fig. 1. Parámetros que describen el potencial: ϵ , R_m , profundidad y posición del pozo; σ_0 , valor de R que verifica $V(\sigma_0) = 0$ ($R \neq \infty$); σ , valor de R que verifica $V(\sigma) = E$, siendo E la energía inicial de los colisionantes.

prende que con haces a energía térmica puede obtenerse información sobre el pozo y la parte atractiva, mientras que los haces de alta energía proporcionan información sobre la parte netamente repulsiva.

* Al margen de las posibles aportaciones que las medidas de coeficientes de difusión y secciones eficaces de desorientación realizadas en nuestro laboratorio puedan suministrar.

Resulta, no obstante, más operativo clasificar las experiencias de difusión atendiendo a la magnitud experimentalmente medida.

Medidas de la sección eficaz diferencial de difusión $I(\theta, v)$

Estas medidas se realizan sobre haces a energías térmicas. En teoría clásica $I(\theta, v)$ viene dada por

$$I(\theta, v) = \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \sum_i b_i \left| \frac{db_i}{d\theta} \right|, \quad [1]$$

donde θ es el ángulo de deflexión, b_i los parámetros de impacto correspondientes a un ángulo de deflexión dado y v la velocidad. Como puede verse (Fig. 2), para b pequeño predomina el potencial repulsivo, y para b grande el atractivo;

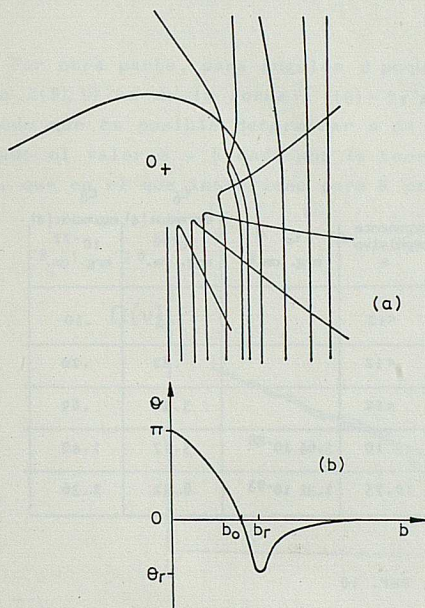


Fig. 2. (a) Trayectorias seguidas por un átomo lanzado contra otro con diferentes parámetros de impacto b y con la misma velocidad v , cuando el potencial interatómico es del tipo descrito en la Fig. 1. (b) Ángulos de deflexión θ correspondientes a los parámetros de impacto b .

el ángulo θ_r se denomina de "arco iris" por similitud con el fenómeno óptico. En la Fig. 3 se representa $I(\theta, v)$, calculada para un potencial Lennard-Jones [12-6]. Como puede deducirse de [1] existen singularidades para $\theta = 0$ y $\theta = \theta_r$ en teoría clásica, y para $\theta > \theta_r$, $I(\theta, v)$ se anula. Es de notar que el valor de θ_r es función de la energía reducida $\frac{E}{\epsilon}$, y por lo tanto de v . Cuando se calcula $I(\theta, v)$ en teoría cuántica, las contribuciones debidas a distintos b_i correspondientes al mismo ángulo θ interfieren entre sí produciendo la sustitución de las singularidades por máximos y una estructura oscilatoria de máximos secundarios (ver Fig. 3). La teoría rigurosa debe realizarse mediante la descomposición en ondas parciales. En muchos casos, las medidas experimentales de $I(\theta, v)$ pueden ajustarse mediante la teoría clásica, que se comporta como

límite de baja resolución de la cuántica.

El análisis de datos experimentales sobre $I(\theta, \nu)$ proporciona información sobre ϵ y R_m a través de la posición de θ_r y de la estructura de los máximos secundarios respectivamente. Aunque el análisis es delicado, los resultados correspondientes a ϵ y R_m pueden ser extraídos con relativa fiabilidad.

El método de análisis normalmente seguido es suponer modelos analíticos de potencial, suficientemente flexibles, basándose en los cuales se ajustan las medidas de secciones eficaces diferencial y total, comprobándose que los ajustes son excelentes para una combinación de potenciales de tipo Lennard-Jones.

Los resultados que se presentan en las columnas 1 y 2 de la Tabla I son debidos a Buck y Pauly¹⁰ y resultan ser los más fiables, pudiéndose evaluar su error en unos pocos tantos por cien. Estos resultados se obtienen analizando medidas tanto de secciones eficaces diferenciales como totales.

TABLA I

Gas	ϵ^a 10 ⁻¹⁴ erg.	R_m^a Å	exponente atractivo ^b s	C_6^c 10 ⁻⁵⁸ erg. cm. ⁶	exponente repulsivo ^d s	C_8^d erg. cm. ⁸	C_6	C_8
							expresión [4] 10 ⁻⁵⁸ erg. cm. ⁶	expresión [4] 10 ⁻⁷² erg. cm. ⁸
He			6	.43	<12		.43	.10
Ne			6	.83	<12		.82	.20
Ar	.9	5.50	6	3.35	<12		3.42	.89
Kr	1.47	5.44	6	4.97	10	5.64 10 ⁻⁸⁸	5.17	1.40
Xe	2.18	5.47	6	7.94	10.75	2.31 10 ⁻⁹³	8.42	2.36

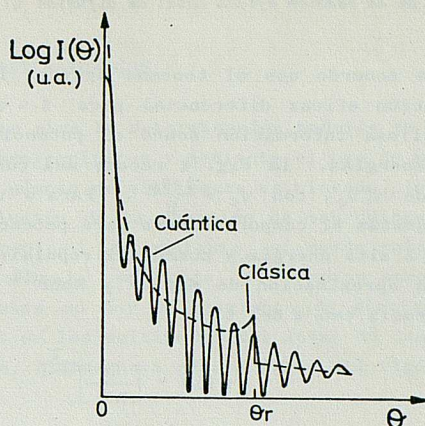
^a BUCK Y PAULI, Ref. 10

^b Ref. 3

^c DALGARNO Y DAVISON, Ref. 12

^d MALERICH Y CROSS, Ref. 13

Fig. 3. Sección eficaz diferencial de difusión $I(\theta, v)$, para una velocidad v dada calculada clásica y cuánticamente para un potencial Lennard-Jones [12-6].



Por otra parte, para ángulos θ pequeños, se demuestra que el comportamiento de $I(\theta, v)$ es de la forma $I(\theta) \sim \theta^{-(2s+2)/s}$ para potenciales del tipo C_s/R^s , de modo que es posible determinar s de ajustes con datos experimentales corroborando el valor $s = 6$ dado por la teoría para el término atractivo del potencial, que es el que interviene para θ pequeños (Columna 3 de la Tabla I).

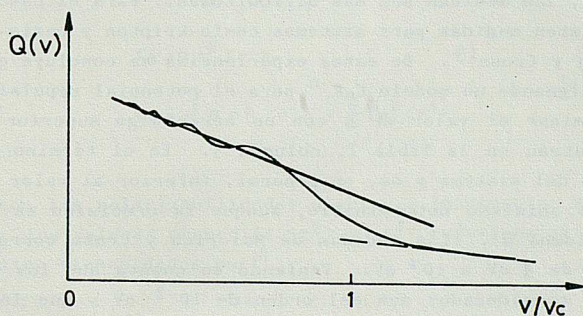


Fig. 4. Sección eficaz total de difusión $Q(v)$ para un potencial Lennard-Jones [12-6]. Las rectas corresponden al límite de considerar un potencial exclusivamente atractivo $\sim R^{-6}$ (línea continua) o repulsivo $\sim R^{-12}$ (línea de trazos).

Medidas de la Sección eficaz total de difusión $Q(v)$

De acuerdo con el teorema óptico, la sección eficaz total está ligada a la sección eficaz diferencial para $\theta = 0$. Las medidas de $Q(v)$ proporcionan una valiosa información sobre el potencial, tanto a energías térmicas como a altas energías. La Fig. 4 recoge una curva típica de Q frente a la velocidad reducida v/v_c , con $v_c = \frac{2\epsilon R_m}{\hbar}$. Para $v < v_c$ se observan oscilaciones cuánticas superpuestas al comportamiento para potencial atractivo. Para $v > v_c$, correspondiente a alta energía y potencial repulsivo, no hay oscilaciones.

La aproximación de Massey y Mohr¹¹ predice para un potencial C_s/R^s una dependencia con v del tipo

$$Q(v) \sim \left[\frac{C_s}{\hbar v} \right]^{s-1}, \quad [2]$$

El ajuste de medidas experimentales a energía térmica a [2] permite ratificar el valor $s = 6$ ya obtenido con medidas de $I(\theta, v)$ y asimismo determinar C_6 . El valor obtenido por distintos autores para C_6 difiere en menos de un 5% del valor calculado rigurosamente mediante la teoría cuántica salvo para el sistema Cs-Xe en el que la discrepancia es inferior al 10%. La columna 4 de la Tabla I presenta los valores de C_6 recopilados por Dalgarno y Davison¹², y que como se ha dicho, coinciden con los experimentales. También se extrae, como ya se ha dicho, información sobre ϵ y R_m a partir de las oscilaciones de $Q(v)$.

En lo que respecta a altas energías, que afectan a la parte repulsiva del potencial (Fig. 4), las medidas son más dificultosas. Para el caso de sistemas cesio-gas sólo existen medidas para sistemas cesio-kriptón y cesio-xenón, realizadas por Malerich y Cross¹³. De estas experiencias se concluye que los datos se ajustan bien asignando un modelo $C_n R^{-n}$ para el potencial repulsivo. Se puede entonces determinar el valor de s con un error algo superior al 8%. Los resultados se muestran en la Tabla I, columna 5. En el término repulsivo el valor de s depende del sistema y es, en general, inferior al valor 12 supuesto. El valor de C_s es asimismo determinable, aunque la precisión es inferior (un 25%) (Tabla I, columna 6). Las medidas de Malerich y Cross corresponden a un rango de energías de 5 eV a 10^4 eV. Teniendo en cuenta que los valores de E para los sistemas considerados son del orden de 10^{-2} eV y que los parámetros del pozo de potencial se determinan a energías térmicas ($< 10^{-1}$ eV) se concluye que los resultados de Malerich y Cross informan de la rama repulsiva del potencial y que existe una relativa independencia entre los resultados válidos para esta parte repulsiva y los relativos al pozo de potencial. No obstante, sí parece plausible suponer que al menos la forma funcional del término repulsivo a energía térmica coincida en buena aproximación con la forma funcional a más alta energía.

En resumen, podemos decir que las medidas experimentales nos proporcionan: 1) La forma funcional del potencial a larga distancia $C_6 R^{-6}$, 2) El coeficiente C_6 de dicha forma funcional, 3) La profundidad ϵ y la situación R_m del pozo de potencial, y 4) La forma funcional del término repulsivo a alta energía, que es distinta para cada sistema, y con muy escasa fiabilidad el coeficiente

de esta forma funcional.

ESTIMACIONES TEORICAS DE POTENCIALES INTERATOMICOS

Los métodos utilizados normalmente para la determinación teórica de potenciales son de tres tipos: ab initio, semiempíricos y mediante el uso de modelos. Para los sistemas cesio-gas, donde el número de electrones es elevado, los métodos ab initio, que implican la resolución de la ecuación de Schrödinger para el sistema, son absolutamente inaplicables. No obstante, sí puede calcularse teóricamente el potencial a larga distancia, es decir, el término atractivo, mediante teoría de perturbaciones, pues no hay solapamiento de electrones y el problema se reduce a la interacción de los multipolos del átomo de cesio con los multipolos inducidos del gas noble, y desemboca en una serie del tipo¹⁴

$$V(R) = -\frac{C_6}{R^6} - \frac{C_8}{R^8} - \frac{C_{10}}{R^{10}} \dots, \quad [3]$$

en la que domina el término de interacción dipolo-dipolo, $-\frac{C_6}{R^6}$, denominado término de Van der Waals. En el cálculo de C_6 intervienen las polarizabilidades de los gases nobles, que pueden obtenerse cuánticamente (Tabla I, columna 4). Resulta más cómodo realizar un cálculo semiempírico, utilizando valores experimentales para las polarizabilidades y las siguientes fórmulas aproximadas para C_6 y C_8 ¹⁵

$$\begin{aligned} C_6 &= \alpha e^2 \langle r^2 \rangle, \\ C_8 &= \frac{3}{2} \alpha e^2 \langle r^4 \rangle + \frac{5}{2} \beta e^2 \langle r^4 \rangle, \end{aligned} \quad [4]$$

donde α y β son las polarizabilidades dipolar y cuadrupolar del gas noble, respectivamente; los valores promedios $\langle r^2 \rangle$ y $\langle r^4 \rangle$ referidos al electrón de valencia del alcalino vienen dados por¹⁶

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \frac{1}{2} a_0^2 n^{*2} [5n^{*2} + 1 - 3l(l+1)] \\ \langle r^4 \rangle &= \frac{1}{8} a_0^2 n^{*4} [63 n^{*4} - 35n^{*2}(2l^2+2l-3) + 5l(l+1)(3l^2+3l-10) + 12] \end{aligned} \quad [5]$$

siendo n^* el número cuántico efectivo y a_0 el radio de Bohr⁺. En las columnas 4 y 7 de la Tabla I puede verse como los valores de la teoría cuántica y los semiempíricos difieren en menos de un 5%. La columna 8 de dicha Tabla da los valores de C_8 calculados mediante [4].

En cuanto al término repulsivo, no existen determinaciones teóricas de la forma del potencial. El origen de la repulsión está relacionado con la distorsión sufrida por las nubes electrónicas al superponerse, debido al principio de exclusión de Pauli. El problema ha sido solventado mediante unos potenciales que son, simultáneamente, semiempíricos y de modelo. El uso de modelos consiste en sustituir el problema físico original por otro más tratable matemáticamente. Así, en lugar de resolver el hamiltoniano del sistema para obtener la interacción repulsiva, ésta se presenta usando pseudopotenciales de tipo Gombás¹⁷ que evitan el problema de la antisimetrización mediante un tratamiento estadístico de la distribución electrónica, utilizando densidades electrónicas y polarizabilidades. De esta forma Baylis¹⁸, diagonalizando un hamiltoniano con dos pseudopotenciales y un término de atracción electrostática, obtuvo potenciales numéricos para los sistemas alcalino-gas noble. Posteriormente Pascale y Vandeplanque¹⁹, con el mismo modelo, con ligeras variantes y ampliando la base utilizada, obtuvieron otros potenciales que son hoy referencia obligada para cualquier trabajo sobre potenciales alcalino-gas. De ahí se infiere el interés de cotejar los potenciales de Pascale-Vandeplanque con el mayor número de resultados experimentales posible para verificar su validez. No obstante, debe decirse que, si bien los potenciales de Baylis y Pascale-Vandeplanque suponen una solución parcial al problema de la determinación de la interacción repulsiva, ésta sigue siendo uno de los puntos más oscuros dentro del contexto de potenciales interatómicos.

MODELOS DE POTENCIAL PARA SISTEMAS CESIO-GAS EN ESTADO FUNDAMENTAL

Basados en los resultados experimentales expuestos, vamos ahora a discutir distintos modelos para potenciales interatómicos de sistemas cesio-gas. Debido a la escasez de datos experimentales, el potencial no puede ser determinado con exactitud, punto a punto, y debe recurrirse al uso de modelos, que sean

+ ¹ se refiere al momento angular electrónico del estado considerado.

compatibles con todos los resultados experimentales y resulten además simples y operativos matemáticamente para ser útiles. El hecho de que los resultados de difusión puedan ajustarse mediante el uso de combinaciones diversas de potenciales Lennard-Jones para distintas zonas del potencial sugiere el uso de este tipo de modelos, si bien debe exigirse, para que éstos sean útiles, la validez de la misma forma analítica para todo el rango de energía térmica.

El modelo casi exclusivamente usado hasta ahora ha sido el Lennard-Jones [12,6], por su gran operatividad matemática. Sin embargo, cuando intentamos ajustar los valores de C_6 , C_{12} para que el potencial pase por el pozo (ϵ , R_m) determinado experimentalmente, nos encontramos con que el valor calculado de C_6 excede en un factor de alrededor de 1.5 el valor experimental. Ello refleja fallos del modelo, por otra parte esperables debido a su simplicidad.

En el siguiente paso, y procediendo de mayor a menor simplicidad en el modelo, hemos ensayado un modelo Lennard-Jones [n,6], donde para el coeficiente C_6 se toma el valor experimental (Tabla I) y por tanto el potencial es asintóticamente correcto; se suponen distintos valores enteros de n, y el coeficiente C_n se ajusta forzando al potencial a tener una profundidad de pozo igual a la determinada experimentalmente ϵ . Como queda un parámetro libre, R_m , la comparación de éste con el experimental nos indica la compatibilidad del modelo.

Para realizar estos cálculos hemos puesto a punto un programa de ordenador que calcula el mínimo de potencial para un valor de n dado variando el valor de C_n hasta que en el mínimo $V(R)$ toma el valor ϵ .

En la Tabla II se muestran los distintos valores de R_m obtenidos con mode-

TABLA II

	Modelo n-6		Modelo n-8-6		
	Exponente n	$R_m(\text{Å})$	Exponente n	$R_m(\text{Å})$	C_n (erg. cm ⁿ)
Ar	9	4.81	10	5.29	$3.57 \cdot 10^{-87}$
	12	5.15	11	5.44	$1.92 \cdot 10^{-94}$
	20	5.45	12	5.55	$10.55 \cdot 10^{-102}$
Kr	9	4.73	10	5.23	$5.30 \cdot 10^{-87}$
	12	5.07			
	20	5.36			
Xe	9	4.79	10.75	5.43	$3.2 \cdot 10^{-92}$
	12	5.13			
	20	5.42	11	5.46	$4.89 \cdot 10^{-94}$

los $n = 9, 12$ y 20 , juntamente con los valores experimentales de R_m . Como puede verse, los potenciales son incompatibles con los valores experimentales de

R_m , y hay que elevarse a valores de n excesivamente altos y que a su vez no son compatibles con la condición general de $n < 12$ encontrada por Malerich y Cross.

A la vista de estos resultados, hemos supuesto que la concordancia mejoraría al introducir otro término atractivo, el siguiente en la serie [3], $C_8 R^{-8}$, término que se utiliza en la interpretación de resultados de ensanchamiento de líneas espectrales. El potencial es entonces

$$V(R) = \frac{C_n}{R^n} - \frac{C_8}{R^8} - \frac{C_6}{R^6} \quad [6]$$

y el coeficiente C_8 se calcula mediante [4]. Análogamente hemos supuesto para Kripton y Xenon la forma funcional encontrada por Malerich y Cross para el término repulsivo a alta energía, suponiendo de forma tentativa su validez también para energías térmicas. Como puede verse en la Tabla II, el valor de R_m encontrado para Xenon es altamente satisfactorio, y el correspondiente a Kripton se aparta en menos de un 4% de valor experimental, lo que es satisfactorio. En cuanto a argon, no disponemos de resultado experimental para justificar un valor dado del exponente n , aunque sí podemos conjugar el carácter general $n < 12$ con la simplicidad operativa que posee un potencial de tipo $[n-6]$ cuando n es entero. En la Tabla II se muestran entonces los valores de R_m encontrados para $n = 10, 11, 12$, y como puede verse el más adecuado resulta ser $n = 11$. Asimismo, y también por razones de mayor operatividad matemática, en la Tabla II incluimos el valor de R_m encontrado cuando suponemos el valor entero $n = 11$ para Xenon en lugar del encontrado por Malerich y Cross $n = 10.75$. Como se ve, es también totalmente compatible con el resultado experimental. Se incluyen también en la Tabla II los valores de C_n encontrados.

Finalmente, para ilustrar nuestros resultados, la Fig. 5 muestra el potencial determinado por nosotros juntamente con el Potencial de Pascale y Vandepanque para el sistema cesio-kripton. La separación entre ambos potenciales para valores alrededor de $R \sim 8 \text{ \AA}$ se debe a que el potencial de Pascale y Vandepanque incluye todos los términos del desarrollo [3].

Así pues, utilizando la expresión [6] y los valores dados de C_6 (columna 4 de la Tabla I), C_8 (columna 8 de la Tabla I), con valores de n y C_n $n = 11$, $C_n = 9.65 \cdot 10^9$; $n = 10$, $C_n = 2.67 \cdot 10^9$; y $n = 11$, $C_n = 2.46 \cdot 10^{10}$ para argon, kripton y xenon respectivamente, obtenemos una representación de los potenciales interatómicos, de gran sencillez y operatividad matemática y cuya forma funcional se justifica experimentalmente, siendo el potencial compatible con todos los resultados experimentales. Por desgracia, para helio y neon, se carece de resultados experimentales suficientes para realizar un análisis paralelo, y sólo pueden darse datos del potencial a larga distancia.

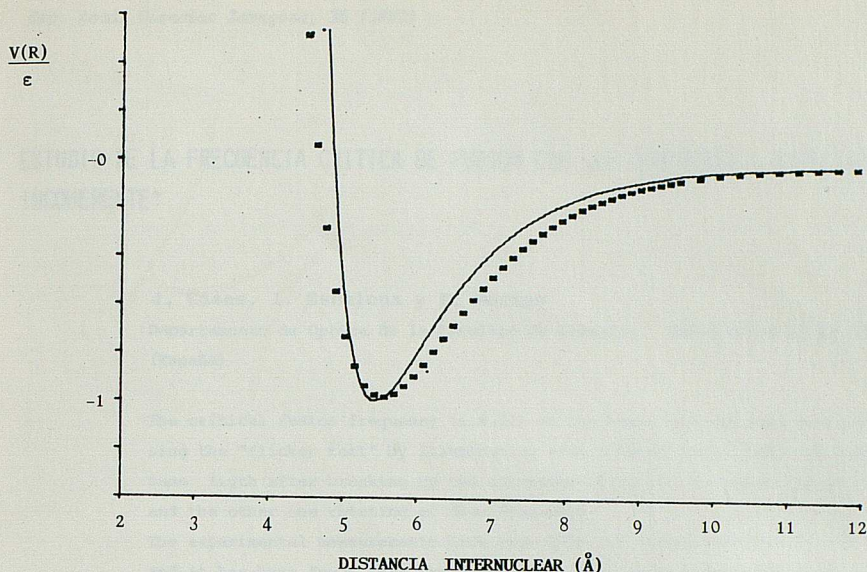


Fig. 5. Potencial interatómico deducido por nosotros para el sistema cesio-kriptón (ver texto), línea continua. El potencial de Pascale-Vandeplanque para el mismo sistema se muestra también, línea de puntos.

REFERENCIAS

1. W.E. BAYLIS, en *Progress in Atomic Spectroscopy*. Ed. W. Hanle y H. Kleinpoppen. Plenum 1978 (Cap. 6).
2. H. PAULY, en *Atom-Molecule Collision Theory*. Ed. R.B. Bernstein. Plenum 1979 (Cap. 4).
3. R.B. BERNSTEIN, J.T. MUCKERMAN. *Adv. Chem. Phys.* **12**, 389 (1967).
4. H. PAULY, J.P. TOENNES, *Adv. At. Mol. Phys.* **1**, 195 (1965).
5. J.O. HIRSCHFELDER, C.F. CURTISS, R.B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*. Wiley, New York (1964).
6. E. BERNABEU, J.M. ALVAREZ. *Phys. Rev. A* **22**, 2690 (1980).
7. J.C. AMARE y E. BERNABEU. *An. Fis.*, **76**, 15 (1980).
8. F. MORENO. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza 1982.
9. U. BUCK. *Rev. Mod. Phys.* **46**, 369 (1974).
10. U. BUCK, H. PAULY. *Z. Physik* **208**, 390 (1968).
11. H.S.W. MASSEY, C.B.O. MOHR. *Proc. Roy. Soc. (London)* **A144**, 188 (1934).
12. A. DALGARNO, W.D. DAVISON. *Adv. At. Mol. Phys.* **2**, 1 (1966).
13. C.J. MALERICH, R.J. CROSS Jr. *J. Chem. Phys.* **52**, 386 (1970).
14. J.O. HIRSCHFELDER, W.J. HEATH. *Intermolecular Forces*, editado por J.O. Hirschfelder. Wiley Interscience, New York (1967).
15. A. UNSOLD. *Physik der Sternatmosphären*. Springer Verlag. Berlin (1955).
16. E.V. CONDON, G.H. SHORTLEY, *The Theory of Atomic Spectra*. Cambridge V.P. London (1964).
17. P. GOMBAS, *Pseudopotentiale*. Springer New York (1967).
18. W.E. BAYLIS, *J. Chem. Phys.* **51**, 2665 (1969); JILA Report 100, University of Colorado, (1969).
19. J. PASCALE, J. VANDEPLANQUE, *J. Chem. Phys.* **60**, 2278 (1974); C.E.A. Report. Saclay (1974).

ESTUDIO DE LA FRECUENCIA CRITICA DE FUSION CON LUZ COHERENTE Y ESPACIALMENTE INCOHERENTE*

J. Casas, I. Escalona y F. Merino

Departamento de Optica de la Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza.
(España)

The critical fusion frequency (c.f.f.) of the human eye has been measured using the "flicker test" by illuminating with a He-Ne laser light and with the same light after breaking up the coherency using two diffusors one at rest and the other one rotating at slow frequency.

The experimental measurements have been made for foveal and extrafoveal vision and it has been found that the c.f.f. is always smaller when the light is coherent.

INTRODUCCION

Es un hecho conocido por la experiencia que un destello luminoso corto produce una sensación mayor en duración que la del propio destello.

Ya en 1765, d'Arcy se propuso determinar la persistencia de los destellos luminosos en la retina, obteniendo un valor que se convirtió en un dato clásico para los primeros ensayos en cinematografía.

Si en vez de emitir un sólo destello se emiten varios consecutivos con una frecuencia determinada, el sistema visual humano puede resolver las alternativas luz - oscuridad, pero no puede hacerlo en altas frecuencias, entonces el sistema visual recibe la impresión de una luz estacionaria.

El problema que se plantea con esta manera de actuar el sistema visual es el hecho de que un estímulo intermitente y, por lo tanto, no homogéneo, pueda producir una sensación idéntica a la de una luz estable y homogénea.

En bajas frecuencias se distinguen perfectamente las alternancias luz - oscuridad. A medida que aumenta la frecuencia, aparece un parpadeo de luz intenso, que se hace cada vez más suave hasta dar la impresión de un ligero temblor, que termina por desaparecer dando la sensación de una luz estable.

La frecuencia a la que se produce la transición de una apariencia de parpadeo a una luz estable se denomina FRECUENCIA CRITICA DE FUSION (f.c.f.).

El estudio de este fenómeno tiene interés por una triple motivación:

* El presente trabajo es un resumen de la Tesis Doctoral presentada por I. Escalona.

a) Científica.- Ya que nos permite tener un mejor conocimiento del sistema visual, por ser el poder resolutorio temporal una de sus características más importantes y existir una correlación entre este umbral y la agudeza visual.

b) Clínica.- Por ser un medio fácil para poder determinar en el organismo humano factores tales como drogas, alcohol, fatiga física y psíquica, envejecimiento, etc.

c) Técnica.- En la vida moderna, las luces intermitentes entran a formar parte de ella, tanto en frecuencias superiores a las de fusión, en técnicas tales como el cine, la TV, lámparas de c.a.; o en valores inferiores como en dispositivos de alarma, señales de tráfico en carreteras y aeropuertos, etc.

Hemos estudiado el tema, por el hecho de que a pesar de haber sido objeto de la atención de numerosos investigadores durante los 150 últimos años, no hay todavía hipótesis concluyentes que justifiquen los resultados obtenidos experimentalmente.

Una valoración de los resultados la encontramos en las siguientes palabras de Robert Boynton¹: "Desgraciadamente, los muchos cientos de estudios sobre el tema revelan poco sobre la fisiología subyacente en la percepción del parpadeo y es fácil estar de acuerdo con C. Landis, que la teoría general de Plateau en 1834 es tan compleja como la de cualquiera de sus sucesores".

FACTORES QUE INFLUYEN EN LA FRECUENCIA CRITICA DE FUSION

Las primeras experiencias de determinación del umbral de la fusión utilizando discos de sectores blancos y negros, fueron realizadas en 1829 por Plateau en Bélgica, y completadas cinco años más tarde por Talbot dando su conocida ley:

$$L_m = \frac{1}{t} \int_0^t L(t) \cdot dt$$

En 1892, Ferry, en los Estados Unidos, emplea discos con sectores abiertos y cerrados, obteniendo una ley que diez años más tarde, Porter, en Inglaterra, confirmaría utilizando los discos de Plateau.

Entre los factores que más influyen en la f.c.f. señalaremos:

a) El nivel de la luminancia del test a observar. Este es uno de los factores más estudiado. Son de destacar en este sentido los trabajos de Ferry y Porter, ya citados, estableciendo la ley que lleva sus nombres:

$$f.c.f. = a \log L + b$$

De las investigaciones ulteriores² se sigue que la ley es aproximada, y sólo válida en un intervalo limitado de luminancias.

b) La luminancia del campo circundante, que puede ser un fondo oscuro o estar iluminado. En este último caso se produce una elevación del valor de la f.c.f.³

c) El grado de adaptación del ojo, ya sea a la luz o a la oscuridad. A medida que aumenta el tiempo de permanencia en la oscuridad aumenta la sensibilidad,

hasta un tiempo algo superior a los 30 minutos.³.

d) La localización retineana, debido a la desigual distribución en la retina de conos y bastones, a la diversa sensibilidad de estos fotoreceptores a los niveles fotópico y escotópico y a las distintas longitudes de onda⁴.

e) La superficie estimulada. Otro de los factores clave es el tamaño y forma del test y por tanto de la superficie retineana estimulada.

En 1930, Granit y Harper encontraron una relación aproximadamente lineal entre el valor de f.c.f. y el logaritmo del área estimulada.

$$\text{f.c.f.} = c \log A + d$$

De acuerdo con ulteriores trabajos, entre otros los de M^a Therese de la Corte⁵, junto con el logaritmo del área hay que tener en cuenta el número de receptores modificado en unos índices de sumación espacial y temporal.

f) La forma de los pulsos de la luz, que generalmente se presenta en forma de ondas cuadradas o sinusoidales. Son de destacar en este tema los trabajos de De Lange⁶, y Kelly⁷.

g) Las condiciones en que se realiza la experiencia. De tal modo influyen todos los detalles concretos del modo como se determina la f.c.f., que resulta muy difícil comparar los datos obtenidos por los distintos investigadores.

NUESTRO PROPOSITO

En este trabajo se ha seleccionado como factor, el grado de coherencia de la luz, por un lado, por ser un parámetro poco estudiado, ya que la afirmación más generalizada encontrada en la Bibliografía es que tanto la luz coherente como la incoherente son igualmente efectivas para la retina³. Por otro lado, desde la aparición del Láser este tipo de iluminación esta alcanzando una gran difusión no sólo a nivel científico, sino en usos prácticos y decorativos⁸.

DESCRIPCION DEL MONTAJE EXPERIMENTAL

Como puede verse, en la fig. 1, la instalación consta de tres compartimentos distintos:

En primer término la parte exterior, donde están situados, la fuente de luz laser de Helio-Neon de 5 mw, $\lambda = 632,8 \text{ m}$, (Spectra-Physics), un fotomultiplicador (Oriel) para el control de la estabilidad mediante lectura en un voltímetro digital, y un contador de frecuencias digital (Helweltt-Packard).

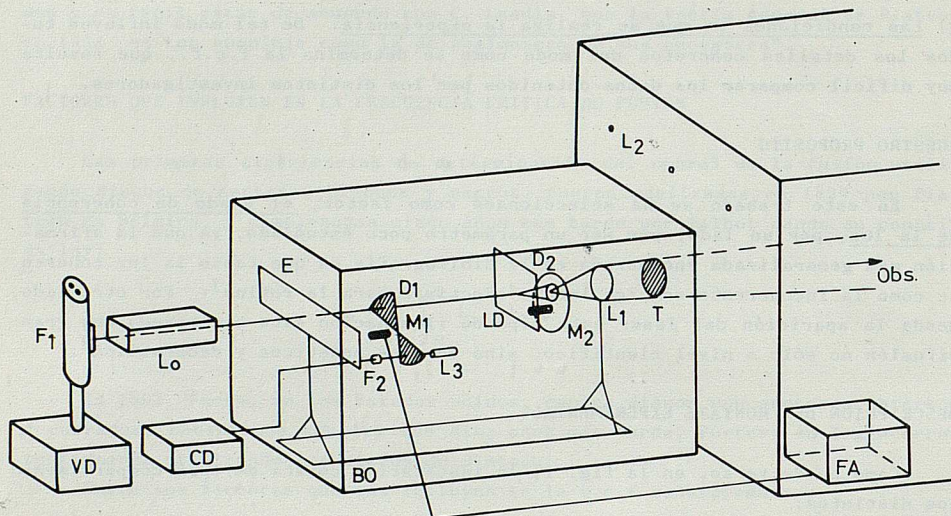
Cámara pequeña donde se encuentran: a) Dispositivo para filtros o Cuñas ópticas con objeto de poder regular la luminancia, (E). b) Dispositivo modulador, constituido por un disco de sectores, (D₁) de 90°, dos opacos y dos en vano que dejan pasar la luz a intervalos iguales de luz-oscuridad, accionado por un motor silencioso (M₁), acoplado a un reductor (Kelvin), regulado mediante tensión proporcionada por una fuente estabilizada (Ataio) (F.A.), que mediante un fotodiodo envía la señal al medidor de frecuencias (C.D.). c) Los difusos

res, uno fijo (L.D.), que consistía en una lámina de vidrio esmerilada por una cara a 0,5 cm. del móvil, (D₂), disco de vidrio esmerilado accionado por un motor (Crouzet) (M₂), que gira a 1/8 r.p.m. d) Lente (L₁) de 8 cm. de focal para centrar la luz e iluminar homogéneamente la mira, que es un círculo de vidrio esmerilado de 3,5 cm. de diámetro y que sustenta un ángulo de visión de 2° (T).

Cámara de observación, recinto tapizado de negro donde se sitúa sentado el observador siempre en la misma posición apoyado en una mentonera. Se ha observado con el ojo derecho, del lado temporal, a 1 m. de distancia del test. El observador tenía acceso solamente a los mandos de control de la fuente de alimentación (F.A.) que regula la frecuencia del modulador.

Al lado derecho del test (T), en la pared de la cámara, las luces de fijación (L₂), procedentes de una lámpara de Neon están situadas a distancias tales que sustentan ángulos de visión de 5°, 10°, 15° y 20°.

Otros aparatos utilizados fueron: Fotómetro (Lightmaster E.E.L.), Fotómetro (Spectra Pritchard), microdensitómetro diferencial registrador (Joyce Loeb), Microscopio de contraste de fase (Zeiss), etc.



F FOTOMULTIPLICADOR
VD VOLTIMETRO DIGITAL
CD CONTADOR DIGITAL
L₀ LASER
D₁ DISCO MODULADOR

LD LAMINA DIFUSORA FIJA
D₂ DISCO DIFUSOR MOVIL
L₁ LENTE
BO BANCO OPTICO
M₁ MOTOR DEL MODULADOR
M₂ MOTOR DEL DIFUSOR

FA FUENTE A. REGULADORA DE M₁
F₂ FOTO DIODO
L₃ FUENTE DE LUZ
L₂ LUCES DE FIJACION
T CIRCULO TEST

1) Rotura de la coherencia

Era necesario disponer de dos fuentes de luz de la misma longitud de onda y que produjeran la misma luminancia del test. Como fuente coherente se usó el láser y como fuente incoherente, después de diversos ensayos, se utilizó el mismo láser, a cuya luz se conseguía romper la coherencia espacial siguiendo el método de los difusores, uno fijo y otro en movimiento lento, según señalan S. Lowenthal y D. Joyeux⁹, ¹⁰.

Modificando el esmerilado, clase del vidrio, grosor de los discos, así como la velocidad del difusor móvil, se consiguió que el "Speckle" dejara de ser percibido a simple vista.

2) Variaciones de la luminancia por el giro del disco difusor

Se observaron unas oscilaciones en la luminancia de la luz incoherente debidas a que el disco difusor móvil no era totalmente homogéneo. Se probaron vidrios y esmerilados de calidades diferentes, sometiendo estos a un estudio fotométrico de lectura directa con fotomultiplicador y a un análisis mediante un microdensitómetro diferencial registrador para medir las variaciones de la densidad del vidrio en la corona circular donde incide el láser.

Se seleccionó un disco de vidrio óptico con un tamaño medio del grano del esmerilado de $e = (1,27 \pm 0,13) \cdot 10^{-6}$ m., medido con un microscopio de contraste de fase, calibrando su ocular con un micrómetro de precisión (ZEISS).

El difusor fijo se colocó a 0,5 cm. de distancia delante del difusor móvil, el giro de éste era de 1/8 r.p.m. El haz del láser incidía a 6 cm. del centro del disco, con lo cual la velocidad lineal del punto de difusión era de $v = (0,0781 \pm 0,0006)$ cm./seg.

3) Medida de luminancias

Teniendo en cuenta que uno de los factores que más influyen en el valor de la f.c.f. es la luminancia, se trató de medir ésta con toda exactitud y comprobar que su valor permanecía constante a lo largo de todo el tiempo que durasen las observaciones.

Se hicieron medidas, con un fotómetro (LIGHTMASTER) colocado inmediatamente detrás de la mira, con un fotomultiplicador a dos tensiones diferentes, 600 y 400 v. y con un fotómetro (PRITCHARD) colocado en la cámara de observación, en el lugar del ojo del observador, con ángulo de apertura de 2°.

Se repitieron las medidas unas 500 veces y se obtuvieron los valores medios que se recogen en la tabla I, llegando a la conclusión de que la luminancia del test no variaba al pasar la luz de coherente e incoherente.

Esto parecía previsible, pues ambas luces procedían de la misma fuente y atravesaban idénticos elementos ópticos y difusores, por tanto suponiendo la emisión del láser estacionaria, el fenómeno que tiene lugar con la luz coherente cuando atraviesa medios difusores y que da lugar al "speckle", produce como todo fenómeno interferencial una redistribución de la luz, pero no una aniquilación.

TABLA I

VALORES DE LA LUMINANCIA DEL TEST CON ILUMINACION COHERENTE E INCOHERENTE; FIJA Y PARPADEANTE A 33 c/seg.

	Fotómetro	Fotómetro	FOTOMULTIPLICADOR	
	PRITCHARD	LIGHTMASTER	600 v.	400 v.
	foot-Lamberts	Lumenes/pie ²	voltios	
LUZ FIJA				
Incoherente	30'34±0'08	3'7±0'1	56'8±0'3	3'9±0'05
Coherente	30'34±0'08	3'7±0'1	56'8±0'1	3'9±0'02
LUZ PARPADEANTE				
33 c/seg.				
Incoherente	15'18±0'05	1'8±0'1	34±0'2	1'9±0'02
Coherente	15'17±0'05	1'8±0'1	34±0'1	1'9±0'01

Se realizaron también medidas con luz fija y con luz parpadeante a frecuencias cercanas a la fusión y esto tanto con iluminación coherente como con incoherente, comprobando que en ambos casos se cumplía la ley de Talbot, por la cual para una frecuencia superior a la fusión, la luminancia efectiva de test intermitente es independiente de la frecuencia e igual a la de una luz estacionaria con la misma luminancia promedio temporal.

4) Técnicas de observación

Ya que el valor de la f.c.f. influyen los detalles concretos del modo de realizar la experiencia, se cuidaron al máximo los métodos de observación, haciéndose más de 4.000 determinaciones.

Se concretó el criterio de fusión teniendo en cuenta el efecto Bazol-Brücke, por el que en el momento de la fusión hay un despalzamiento de la luz hacia longitudes de onda más cortas, que en el caso del láser de $\lambda = 632,8 \text{ m}$ produce un virado hacia el amarillo. También se tuvo en cuenta el incremento subjetivo de la luminancia que se produce al extinguirse el parpadeo. No obstante, se fijó como criterio la separación del último indicio de temblor en la mira.

Al comienzo de cada sesión de medidas, el observador se situaba durante cinco minutos delante de un pantalla fuertemente iluminada, 430 nits, a un metro de distancia, con el objeto de borrar las imágenes retineanas anteriores. Luego permanecía 30 minutos en la oscuridad para adquirir el nivel estable de adaptación.

El observador se acomodaba al test durante 2 minutos, realizaba una serie de 15 medidas de las que sólo se anotaban 10, las 3 primeras se consideraban de adaptación y las 2 últimas se desechaban por cansancio. Se descansaba 2 mi-

nutos entre una y otra serie, así hasta un máximo de seis por sesión. Sólo se realizaba una sesión diaria y esta siempre a la misma hora.

Las medidas se efectuaban alternando, una de paso de fusión a parpadeo y otra de parpadeo a fusión, teniendo la preocupación de evitar posibles rutinas. El observador permanecía en silencio y se evitaron en lo posible los ruidos exteriores.

Para las medidas extrafoveales fué necesario un entrenamiento previo con el fin de acostumar al ojo a mirar el punto de fijación observando el test en la zona retineana correspondiente. El ojo tiende a fijar instintivamente su imagen en la fovea, esto llevó a cuidar de manera particular las medidas a 5° por la proximidad a la fovea. A los 20° la dificultad surgía por la falta de nitidez en la imagen visual.

5) Valores de la frecuencia crítica de fusión

De las más de 4.000 determinaciones del valor de la f.c.f. distribuidas en series tabulamos 800 cuyos valores medios junto con su error probable se resumen en la tabla II.

Como se ve, los valores de la f.c.f. con iluminación incoherente fueron 3 ó 4 c/seg. superiores a los valores correspondientes con luz coherente, y esto tanto para visión foveal como para la extrafoveal a 5°, 10°, 15°, si bien a los 20° la diferencia disminuye. El error probable fué inferior a 0,45 c/seg. en todos los casos.

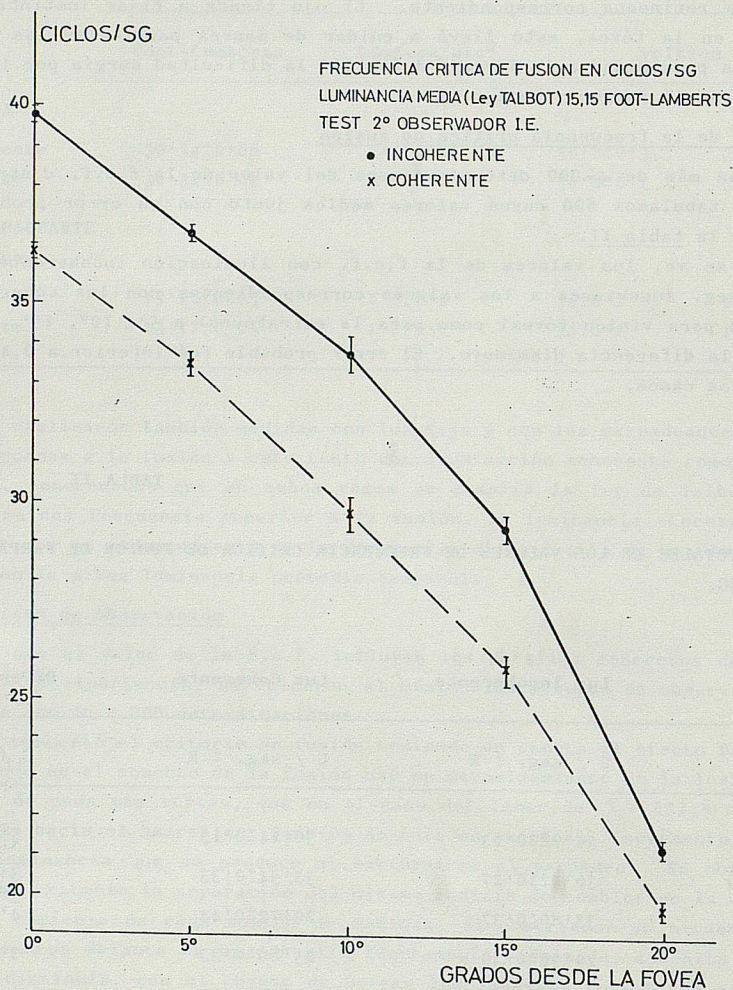
TABLA II

MEDIDAS TOTALES DE LOS VALORES DE FRECUENCIA CRITICA DE FUSION DE PARPADO EN CICLOS/SEG.

	Luz Incoherente	Luz Coherente	Diferencia
	C / seg. ± R	C / seg. ± R	C / seg.
FOVEAL	39'78±0'13	36'24±0'13	3'54
5°	36'82±0'27	33'54±0'33	3'28
10°	33'80±0'37	29'72±0'44	4'08
15°	29'36±0'33	25'80±0'33	3'56
20°	21'30±0'19	19'72±0'19	1'58

Por otro lado, si comparamos entre sí los valores de la f.c.f. con luz incoherente para las distintas localizaciones retineanas, forman una curva de-

creciente. Análogamente sucede para los valores de f.c.f. en iluminación coherente. Ambas curvas son sensiblemente paralelas, tendiendo a fundirse más allá de los 20°, (graf. 1). Este decrecimiento es debido al distinto comportamiento de bastones y conos ante la luz roja del láser, $\lambda = 632,8 \text{ m}$, y éstos disminuyen de manera notoria de la fóvea a la extrafóvea.



Hicieron determinaciones de la f.c.f. 3 observadores de edades distintas con resultados análogos.

6) Análisis fotográfico

Siempre hubo la sospecha de que la variación de la f.c.f. al pasar de iluminación coherente a incoherente entrañaba un problema fotométrico y, en consecuencia, que la luz coherente era menos efectiva que la incoherente para producir sensación visual siendo ello la causa de la disminución de la f.c.f.

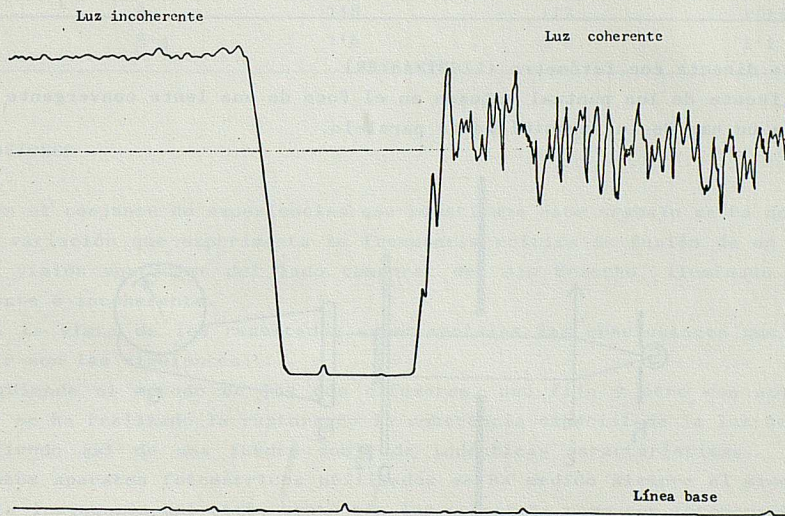
Tratando de comprobarlo, se hicieron fotometrías del test con extremo cuidado utilizando fotómetros diferentes y de muy alta precisión, sin que se llegara a detectar la menor diferencia.

Entonces, teniendo en cuenta que la placa fotográfica tiene una respuesta semejante a la retina del ojo, se recurrió a la fotografía como medio de detección del fenómeno.

Para hacer la fotografía se colocó la cámara en el lugar del ojo del observador, primero con objetivo y luego sin él. La cámara utilizada fué una Exacta Varex II - A. Con tiempos de exposición que variaron entre 2 y 20 segundos, con película Agfapan - 25, trabajando en la zona de respuesta lineal de la curva de sensibilidad de la placa.

Las parejas de fotografías fueron efectuadas con el mismo tiempo de exposición, idéntica película, y reveladas y fijadas simultáneamente.

De la simple observación de los negativos puede apreciarse, por un lado, notoriamente más ennegrecido el realizado con luz incoherente que el correspondiente con luz coherente. Por otro lado, el moteado característico de la luz coherente frente a la homogeneidad de la incoherente.



Los negativos se sometieron a un estudio detallado con:

- A) Microdensitómetro registrador (JOICE) haciendo exploraciones de la zona central y de los bordes de las placas. En la gráfica 2 puede observarse:
- La línea casi uniforme correspondiente a la placa impresionada con luz incoherente, frente a las grandes fluctuaciones correspondientes al "Speckle" característico de la luz coherente.

terístico de la placa impresionada con luz coherente.

- Puede medirse el distinto valor de la densidad que presenta una y otra placa debido al mayor o menor grado de ennegrecimiento.

Resultados que se recogen en la tabla III.

TABLA III

ESTUDIO DE LAS GRAFICAS DE LAS FOTOGRAFIAS CON MICRODENSIMETRO

1ª SERIE

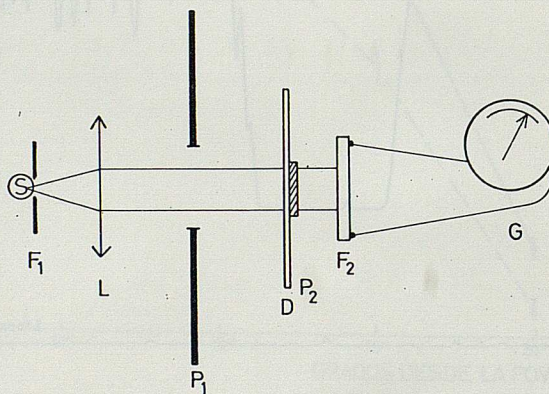
Tiempo	Coherente	Incoherente	Diferencia	Cociente
4 seg.	5'8 cm.	7'8 cm	0'13 D/cm.	1'34
2 "	4 "	5'5 "	0'097 "	1'37

2ª SERIE

16 seg.	3'3 cm.	4'2 cm.	0'065 D/cm.	1'27
18 "	3'5 "	4'8 "	0'084 "	1'37
20 "	4 "	4'9 "	0'058 "	1'22

B) Lectura directa con fotómetro (LIGHTMASTER).

Una fuente de luz puntual situada en el foco de una lente convergente proporcionaba un haz de luz sensiblemente paralelo.



F₁ = Fuente de luz

L = Lente

P₁ = Pantalla

D = Vidrio difusor

P₂ = Placa fotográfica

F₂ = Fotómetro

G = Galvanómetro

Una pantalla limitaba la luz y permitía pasar la porción que iluminaba una lámina de vidrio opal, detrás de la cual se hallaba la placa fotográfica e inmediatamente detrás el fotómetro.

Se realizó la fotometría a distintas luminancias, obteniéndose los resultados que se recogen en la tabla IV.

TABLA IV

ESTUDIO FOTOMETRICO DE LAS FOTOGRAFIAS CON EL FOTOMETRO LIGHTMASTER EEL

Lecturas en lumenes/pie²

1ª SERIE

Tiempo	Coherente	Incoherente	Diferencia	Cociente
4 seg.	4'2	3'3	0'9	1'27
2 "	4'9	4'3	0'6	1'14

2ª SERIE

16 seg.	9'5	8'2	1'3	1'16
18 "	9	7'8	1'2	1'15
20 "	8'4	7'6	0'8	1'1

CONCLUSIONES

En el conjunto de experiencias que constituye este trabajo se ha determinado la variación que experimenta la frecuencia crítica de fusión de un test de 2° en visión monocular del lado temporal del ojo derecho, iluminado con luz coherente e incoherente.

A la vista de los resultados experimentales las conclusiones que podemos deducir son las siguientes:

- 1) Siguiendo el método de los dos difusores, uno fijo y otro con movimiento lento, se ha realizado la ruptura de la coherencia espacial de la luz del laser, disponiendo así de una fuente doble de idénticas características. Con los distintos aparatos fotométricos utilizados se ha medido siempre el mismo valor para la luminancia del test, tanto con luz coherente como con incoherente, tanto en iluminación fija como en parpadeante.
- 2) Se han obtenido unos valores de f.c.f. en iluminación incoherente que superan en 3 a 4 cm./seg. a la correspondiente con iluminación coherente y esto tanto en visión foveal como en extrafoveal a 5°, 10°, 15°, si bien a los 20°, la diferencia es menor de 2 cm./seg. teniendo en cuenta que el error probable en el caso más desfavorable es menor que 0'45 cm./seg.

3) Como se ve en las gráficas, los valores de la f.c.f. decrecen de modo notorio de la visión foveal a la extrafoveal y este decrecimiento es análogo para las dos iluminaciones, manteniéndose los valores de la incoherente siempre superiores a los de la coherente.

4) Mediante fotografía, y efectuado el análisis fotométrico de los negativos se observa: a) la homogeneidad de la placa efectuada con luz incoherente frente a las fluctuaciones que denotan el moteado característico de la hecha con luz coherente, b) la diferencia de densidad de ambas placas que confirma el distinto grado de ennegrecimiento.

5) Estos resultados nos conducen a pensar que el comportamiento del ojo y de la placa fotográfica son análogos ante este fenómeno.

La disminución de la f.c.f. cuando se opera con luz coherente respecto a los valores que presenta en luz incoherente podría explicarse por el fenómeno interferencial que se produce en luz coherente.

Debido a este hecho, existen puntos en el campo de los cuales el flujo que llega al ojo no alcanza el valor umbral, por tanto es luz que se pierde.

En cambio en aquellos puntos donde el fenómeno interferencial produce un máximo, como quiera que la respuesta del ojo no es lineal con el estímulo, también se pierde efectividad.

En consecuencia, para el ojo, el test coherente es en promedio menos luminoso que el incoherente, lo que, al menos en parte, puede explicar la baja de la f.c.f.

BIBLIOGRAFIA

1. R. BOYNYON, J.F. STURR and M. IKEDA. "Study of flicker by increment threshold technique". J. Opt. Amer. 51, 2 (1961).
2. Y. LE GRAND. "Optique Physiologique". Ed. Reveu d'Optique. (1948).
3. The eye Ed. by HUGH DAVSON. Vol. 2A Visual function in man. (1976).
4. H.E. IVES. "Critical frequency relations in scotopic vision". J.O.S.A. 6, 1922 a.
5. G. LAVERGNE et M^e THERESE DE CORTE. "La détermination de l'exposant de sommation par la mesure de la fréquence critique de fusion". Visión Res. v. 10 (1970).
6. H. DE LANGE Dzn. "Relationship between critical flicker...". J.O.S.A. vol. 44, 5 (1954).
7. D.H. KELLY. "Visual responses to time-dependent stimuli". J.O.S.A. vol. 51, 4 (1961).
8. C. FERREIRA y M. AGUILAR. "Frecuencia crítica de fusión con iluminación coherente". An. Fis. Quim. 73. (1973).
9. W. MARTIENSSEN and E. SPILLER. An. J. Phys. vol. 32. (1964).
10. S. LOWENTHAL, D. JOYEUX. "Speckle removal by slowly..." J.O.S.A. vol. 61, 7 (1971).

EFFECTO DE TRAZAS METALICAS EN LA QUIMIOLUMINISCENCIA DEL 2, 4, 5 - TRIFENILIMIDAZOL

A. Larena* y M. Valero.

Departamento de Química I. Escuela Superior de Ingenieros Industriales.
Universidad de Zaragoza. España.

The chemiluminescent emission of lophine (2, 4, 5 - triphenylimidazole) with H_2O_2 in alkaline solution in presence of metallic ions: Cu(II), Mn(II), Ni(II), Co(III), Fe(III), Mg(II), Cd(II), Hg(II), As(III) and Pb(II) is studied. The main contribution of this work is given by the optimal experimental conditions (fixed in a previous paper¹¹), and by the experimental method used by us (reaction cell). These conditions and procedure give high sensitivity, using simple arrays.

INTRODUCCION

La sensibilidad de los efectos quimioluminiscentes a la presencia de iones metálicos es elevada, constituyendo las técnicas quimioluminiscentes un método de detección de trazas de iones metálicos. En este sentido el estudio de los fenómenos quimioluminiscentes se ha ido compaginando, en variadas ocasiones, con el análisis de los efectos que sobre la quimioluminiscencia produce la presencia de iones metálicos.

Los sistemas quimioluminiscentes en disolución acuosa que han sido más profusamente estudiados son los que utilizan como luminóforos luminol (5-amino-2,3-dihidro-1,4-ftalazinediona) o lucigenina (NN'-dimetil-9,9'-biacridinilo)¹⁻¹¹, mientras que son menos conocidos los fenómenos quimioluminiscentes en que interviene el 2,4,5-trifenilimidazol (lofina)¹²⁻¹⁵ como agente luminóforo.

La quimioluminiscencia del 2,4,5-trifenilimidazol acontece inmediatamente tras el tratamiento del luminóforo en medio básico con un agente oxidante y en presencia de un catalizador. El proceso de emisión de luz para el sistema

* Dirección actual: Departamento de Química I. Escuela Superior de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid. España.

de reacción lófina-oxidante se ve afectado por la presencia de ciertos iones metálicos en cuanto al máximo de la intensidad de la luz emitida y el tiempo de relajación, siendo de esperar según el sistema de reacción a utilizar un efecto catalítico o inhibitor con respecto al proceso de emisión y que afecta, no siempre regularmente, al tiempo de decaimiento de dicha emisión.

En este trabajo se estudian los efectos que sobre la quimioluminiscencia del 2,4,5-trifenilimidazol ejerce la presencia de diversos iones metálicos en el medio de reacción y se determinan el grado e intervalo de influencia de los mismos en el proceso de emisión quimioluminiscente. Para ello, se ha partido de unas condiciones óptimas de reacción, en cuanto al sistema reaccionante, anteriormente determinadas por nosotros¹¹ y que presentan ventajas apreciables en cuanto a sensibilidad frente al sistema utilizado por otros autores¹⁴⁻¹⁵.

El medio de optimización utilizado permite compaginar la aplicación de sistemas de reacción de bajo rendimiento quimioluminiscente en interacción con aquellos iones metálicos que activen el proceso de emisión frente a sistemas de elevado rendimiento quimioluminiscente en interacción con iones metálicos que produzcan un efecto de inhibición sobre el proceso de emisión.

Asimismo, el sistema de detección utilizado por nosotros es simple en relación con el referido por otros autores¹⁶⁻¹⁷.

PARTE EXPERIMENTAL

El sistema de reacción requiere la preparación previa de una disolución etanólica de lófina (Aldrich), de hidróxido potásico (mezcla A), y de las disoluciones (mezcla B) de peróxido de hidrógeno (Merck), de ferricianuro potásico (Merck) y la muestra de iones metálicos preparada en disolución acuosa en el día.

La reacción se lleva a cabo en una célula de reacción en forma de uve de 10mm de diámetro, de sección circular. Uno de los brazos permite la adición de la mezcla B sobre la A, utilizándose adiciones a volumen de mezclas iguales. El otro brazo de la célula de reacción permite introducir un microagitador de paletas.

La cinética de la intensidad de emisión quimioluminiscente de la reacción es seguida por un fotomultiplicador (Oriel, mod. 7060, para UV-V) y recogida en un registrador (HewlettPackard, mod. 7004 B) operando en y-t.

RESULTADOS Y DISCUSION

La señal de cationes metálicos considerados en este trabajo figura en la Tabla I, que recoge a su vez el tipo de efecto observado por su presencia en el medio de reacción lófina-oxidante-catalizador, así como el intervalo de influencia para el que ha sido detectada su actuación.

Con el sistema de reacción utilizado por nosotros es posible recoger la curva temporal de emisión quimioluminiscente para la reacción básica del luminóforo en fase previa a la determinación de la misma tras la acción de cada ión metálico considerado. Ello permite, por graduación en las concentraciones de los reactivos, poder recoger efectos debidos a concentraciones de determinados iones metálicos que no quedan posibilitadas según otro sistema de reacción.

TABLA I.- Tipo de efecto y rango de actuación observados por la presencia de diferentes iones metálicos en la quimioluminiscencia del sistema de reacción estudiado.

<u>Ion Metálico</u>	<u>Efecto</u>	<u>Rango de actuación (M)</u>
Cu (II)	Inhibición	10 ^{-2,7} - 10 ^{-6,2}
Mn (II)	Inhibición	10 ^{-2,7} - 10 ^{-4,3}
Ni (II)	Inhibición	10 ^{-2,7} - 10 ^{-3,5}
Co (III)	Inhibición	10 ^{-2,8} - 10 ^{-4,5}
Fe (III)	Inhibición	10 ^{-2,7} - 10 ^{-3,9}
Mg (II)	No observado efecto	
Cd (II)	No observado efecto	
Hg (II)	No observado efecto	
As (III)	No observado efecto	
Pb (II)	No observado efecto	

El grado de efectividad es función de la naturaleza del ión metálico utilizado. En la Fig. 1 se pone de manifiesto dicha efectividad según el grado en intervalo de influencia para los iones metálicos estudiados y que presentan efectividad en las condiciones de reacción consideradas.

Para alguno de los iones metálicos estudiados se ha valorado asimismo la influencia relativa de la presencia simultánea de varios de los iones metálicos en estudio sobre la quimioluminiscencia del 2,4,5-trifenilimidazol. En las Fig. 2, 3 y 4 se recogen los resultados obtenidos según diferentes proporciones para los sistemas Co/Cu, Ni/Fe y Ni/Co.

Los efectos observados se ponen de manifiesto no sólo en la intensidad de emisión quimioluminiscente sino a su vez en el decaimiento de la emisión, que sigue un proceso evolutivo descendente función de la intensidad inhibidora del agente metálico.

Varios aspectos de interés son posibilitados por el sistema propuesto como son: máxima respuesta quimioluminiscente, máxima o mínima sensibilidad del sistema frente a efectos metálicos por regulación del blanco de emisión en función de las concentraciones de los reactivos, así como la preparación de un sistema quimioluminiscente de emisión prolongada por un amplio tiempo

de relajación.

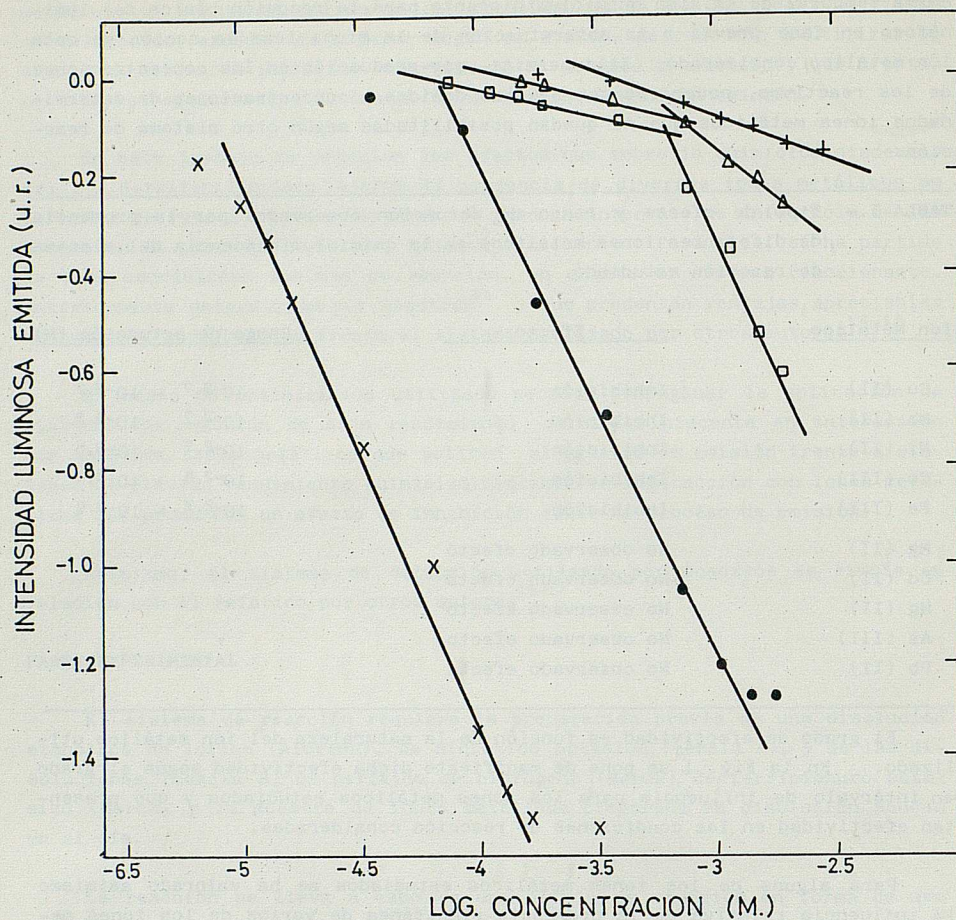


Fig. 1.- Grado de intervalo de influencia de diversos iones metálicos sobre el máximo de la intensidad de emisión del sistema quimioluminiscente considerado para 2,4,5-trifenilimidazol.

- X -- Cu (II)
- -- Co (II)
- -- Mn (II)
- Δ -- Fe (III)
- + -- Ni (II)

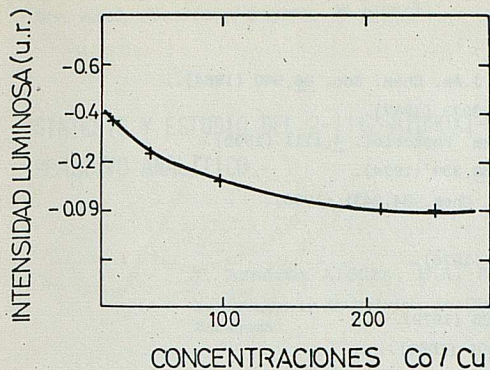


Fig. 2.- Variación de la intensidad de emisión quimioluminiscente para diferentes proporciones Co/Cu, a concentración de cobre constante de 4 ppm.

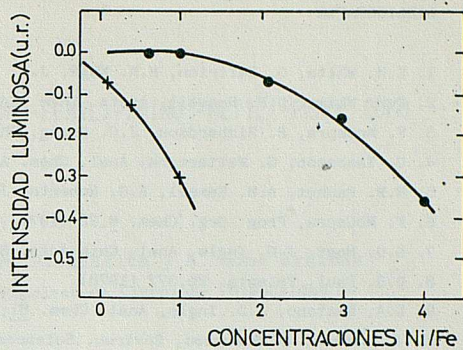


Fig. 3.- Variación de la intensidad de emisión quimioluminiscente para diferentes proporciones Ni/Fe + a concentración de hierro constante de 1000 ppm. . a concentración de hierro constante de 200 ppm.

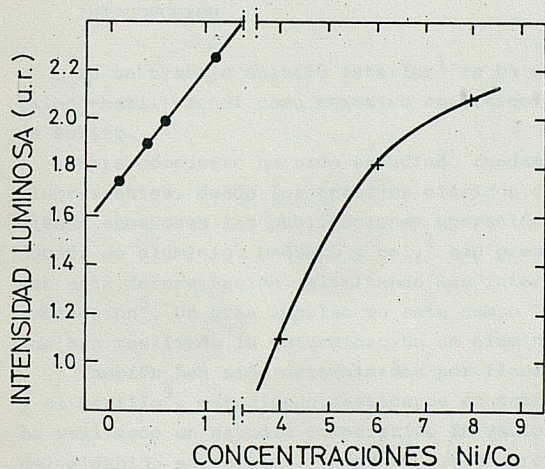


Fig. 4.- Variación de la intensidad de emisión quimioluminiscente para diferentes proporciones Ni/Co + a concentración de cobalto constante de 1000 ppm . a concentración de cobalto constante de 100 ppm

BIBLIOGRAFIA

1. E.H. White, O. Zafirion, H.M. Kägê, J.H. Hill, J. Am. Chem. Soc. 86,940 (1964).
2. E.H. White, D.F. Roswell, Accts. Chem. Soc. 89,3073 (1967).
3. F. McCapra, B. Richardson, J.C. Chang, Photochem. Photobiol. 4,1111 (1965).
4. U. Isacsson, G. Wettermark, Anal. Chem. Acta. 68,339 (1974).
5. M.M. Rauhut, A.M. Semsel, B.G. Roberts, J. Org. Chem. 34,2431 (1968).
6. F. McCapra, Prog. Org. Chem. 8,23 (1973).
7. S.D. Hogt, J.D. Ingle, Anal. Chim Acta. 87,163 (1976).
8. D.B. Paul, Talanta. 25,377 (1978).
9. L.A. Montano, J.D. Ingle, Anal. Chem. 51,919,926 (1979).
10. A. Larena, E. Bernabeu, Environ. Sciences. 3,601 (1980).
11. A. Larena, M. Valero, Rev. Acad. Ciencias Zaragoza. 35,117 (1980).
12. H. Tanino, T. Kando, K. Okada, T. Goto, Bull. Chem. Soc. Japan. 45,1474 (1972).
13. F. McCapra, Quart Review 485 (1966).
14. D.F. Marino, F. Walff, J.D. Ingle, Anal. Chem. 51,2051 (1979).
15. A. MacDonald, K.W. Chan, T.A. Nieman, Anal. Chem. 51,2077 (1979).
16. S.D. Hogt, J.D. Ingle, Anal. Chim Acta 87,163 (1976).
17. S. Stieg, T.A. Nieman, Anal. Chem. 49,1322 (1977).

SINTESIS Y ESTUDIO DEL 2-|(2-HIDROXI-5-CLORO-FENIL)-IMINO|-METIL|-FENOL COMO REACTIVO ANALITICO

J. Aznárez Aldúan, M.A. Belarra Piedrafita y A. Bona Ernicas
Departamento de Química Analítica. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza.

The synthesis of 2-|(2-hydroxy-5-chloro-phenyl)-imino|-methyl|-phenol is described. In view of its possible analytical applications a study of some of the physical properties and chemical reactions has been carried out. pK values of protonation constants are $7,25 \pm 0,20$ and $8,44 \pm 0,30$ (20°C). The solubility and spectral characteristics have been studied. Reactions with 64 different ions (cations and anions) are investigated. IO_3^- , Au(III), Ni(II) and Pt(IV) give the most sensitive reactions.

INTRODUCCION

En un trabajo nuestro anterior¹ se ha estudiado el 2-|(2-hidroxi-fenil)-imino|-metil|-fenol como reactivo analítico perteneciente al grupo de las bases de Schiff.

Este compuesto ha sido estudiado fundamentalmente en base a sus reacciones fluorescentes, desde los trabajos clásicos de HOLZBECHER² y FREEMAN y col.³, siendo numerosas las publicaciones aparecidas sobre su aplicación a la determinación de aluminio. DAGNALL y col.⁴ han presentado un procedimiento para realizar esta determinación, eliminando las interferencias mediante un proceso de extracción⁵. Un gran impulso en este campo lo han dado BOZHEVOL'NOV y col.^{6,7} que han realizado la determinación de aluminio en numerosas matrices reales.

También han sido determinados por fluorescencia molecular el galio (III)^{8,4} y el berilio⁹, mereciendo destacarse en este caso el trabajo de MORISIGE¹⁰ que ha realizado un estudio comparativo de varios reactivos del tipo bases de Schiff del aldehído salicílico. También ha sido propuesto como indicador fluorescente en diversas valoraciones por HOLZBECHER^{11,12}.

Frente a las numerosas aplicaciones en fluorescencia molecular sus aplicaciones en espectrofotometría de absorción visible-UV son mucho más escasas.

Como la introducción de un átomo de halógeno en la molécula produce frecuentemente un incremento de los coeficientes de extinción molar y, por otra parte, por el denominado efecto de átomo pesado atenúa o elimina la fluorescencia de la molécula, se ha pensado en estudiar el derivado 5-cloro del anterior,

es decir, el 2-|(2-hidroxi-5-cloro-fenil)-imino|-metil|-fenol como reactivo analítico espectrofotométrico.

La única referencia al estudio analítico de este reactivo se encuentra en el trabajo de ARGAUER y WHITE¹³ en un estudio comparativo de la intensidad de fluorescencia de los complejos del aluminio en una serie de 2,2'-dihidroxiázometinas.

EXPERIMENTAL

Aparatos

Aparato para determinar puntos de fusión Gallemkamp.

Espectrofotómetro I.R. Pye Unicam SP 1025.

Espectrofotómetro visible-UV Pye Unicam SP8-100.

pH-metro Orion Research 901 con electrodo de vidrio y electrodo de calomelanos saturado como referencial.

Reactivos

El salicilaldehído y el 4-cloro-2-amino-fenol utilizados en la síntesis del reactivo fueron de calidad R.A. (Merck). El segundo de ellos se purificó por recristalización en alcohol etílico, antes de su uso.

Los distintos disolventes orgánicos utilizados, tales como etanol, acetona, cloroformo, MIBC, fueron todos de calidad R.A., así como los diferentes ácidos y bases empleados.

Las disoluciones de los distintos iones empleados en los diferentes ensayos contenían todos una concentración de 1000 $\mu\text{g}.\text{ml}^{-1}$ del ión y se prepararon a partir de patrones primarios. En los casos en que se precisó disoluciones de menor concentración se obtuvieron por dilución de aquellas en el momento de su uso.

Las disoluciones amortiguadoras se prepararon según CLARK y LUBBS¹⁴ ajustando finalmente su fuerza iónica a 0,1 M.

Síntesis y caracterización del 2-|(2-hidroxi-5-cloro-fenil)-imino|-metil|-fenol

Se ha preparado el reactivo siguiendo el método propuesto por SOMAYAJULU y RAO¹⁵ para la síntesis del 2-|(2-hidroxifenil)-imino|-metil|-fenol. Se pesan 3,52 gr de 4-cloro-2-amino fenol y se disuelven en caliente en un matraz con refrigeración de reflujo en la mínima cantidad posible de nitrobenzono. Cuando la disolución es total se añaden 3,00 gr de aldehído salicílico y se deja reaccionar a reflujo, con agitación constante durante dos horas. Se deja enfriar durante toda la noche, apareciendo un precipitado de color marrón, que se filtra con placa filtrante a vacío.

El precipitado se lava repetidamente con agua para arrastrar la mayor cantidad posible de disolvente y se purifica recristalizándolo tres veces con etanol. El producto obtenido, una vez desecado, presenta un aspecto escamoso de

color naranja-ocre. Su punto de fusión es de 158-160°C (sin corregir) que coincide aceptablemente con el propuesto por ARGAUER y WHITE¹³. El rendimiento final del proceso fué de aproximadamente el 60% del teórico.

Se ha realizado el análisis elemental del producto obtenido, que arrojó los siguientes resultados:

Calculado para $C_{13}H_{10}ClNO_2$:	C 63,03	H 4,04	N 5,67
Encontrado:	C 61,70	H 4,11	N 5,72

Como parte final de la caracterización del reactivo se realizó su espectro I.R. en pastilla de KBr. Las bandas más interesantes del mismo y su asignación se muestran en la Tabla I.

TABLA I

Frecuencia de vibración -OH (cm^{-1})	3200-3400
Frecuencia de vibración C=N- (cm^{-1})	1640-1295
Frecuencia de vibración $-C_6H_5$ (cm^{-1})	1510
Frecuencia de vibración -O-H (cm^{-1})	1370
Frecuencia de vibración -OH fenólico	1210
Frecuencia de vibración C-Cl (cm^{-1})	670

Hemos estudiado la solubilidad del 2-|(2-hidroxi-5-cloro-fenil)-imino|-metil|-fenol en varios de los disolventes más comunes. Para ello se prepararon soluciones saturadas del reactivo en los disolventes ensayados y se dejaron estabilizar durante un día a la temperatura de 20°C. La determinación de la solubilidad se llevó a cabo por métodos gravimétricos. El producto resulta ser francamente soluble en acetona (96,7 g.l⁻¹), menos soluble en etanol (24,8 g.l⁻¹) y cloroformo (20,3 g.l⁻¹) y escasamente soluble en agua (0,1 g.l⁻¹).

Espectros de absorción visible-UV de soluciones del reactivo

Se ha comenzado estudiando la estabilidad del reactivo en diversos medios. Se han encontrado los resultados que se muestran en la Tabla II para disoluciones en etanol-agua al 50% (v/v), donde la estabilidad es mayor que en etanol puro y en soluciones acuosas a diferentes valores de pH. Las concentraciones del reactivo eran 10⁻³ M en etanol-agua y 2.10⁻⁵ en solución acuosa.

La presencia de etanol produce un desplazamiento batocrómico del máximo de absorción respecto de la solución acuosa y un efecto hipercrómico, si bien ambos son de muy pequeña consideración. La influencia del pH de la solución acuosa sobre el espectro de absorción del 2-|(2-hidroxi-5-cloro-fenil)-imino|-metil|-fenol se muestra en la figura I.

Se han determinado las constantes de protonización del reactivo por método espectrofotométrico. En el intervalo de valores de pH comprendidos entre 2,0 y 12,0 se han localizado dos puntos isobésticos muy próximos entre sí. El primero a la longitud de onda de 343 nm. agrupa las curvas correspondientes a valores de pH comprendidos entre 2,0 y 7,6 y el segundo punto isobéstico, localizado a la longitud de onda de 340 nm. corresponde a los valores de pH comprendidos entre 8,0 y 10. La determinación de las constantes de protonización se

realizó por el procedimiento de SERJEANT y ALBERT¹⁶ obteniéndose los siguientes resultados:

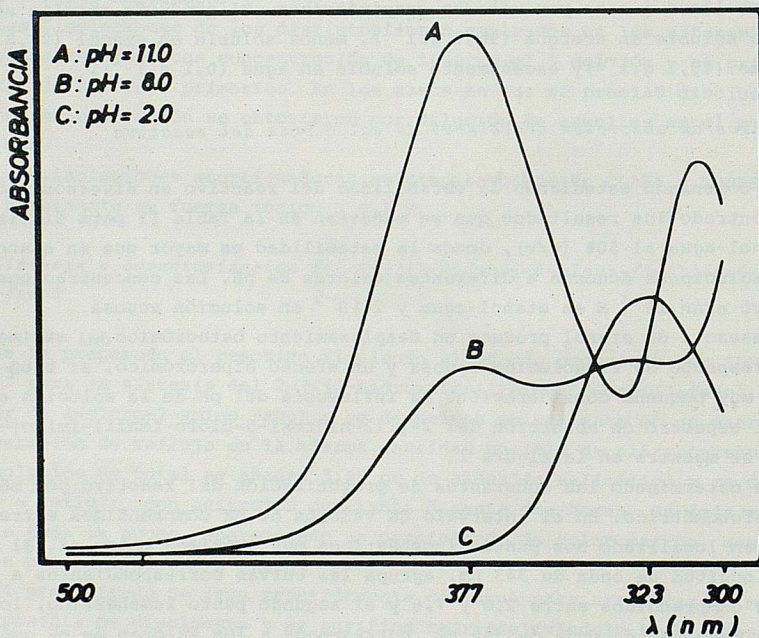
$$pK_1 = 7,25 \pm 0,20$$

$$pK_2 = 8,44 \pm 0,30$$

TABLA II

Tiempo minutos	Etanol-agua 50% (v/v)		Soluciones acuosas					
	λ (nm)	Absorb.	pH=2		pH=7		pH=11	
			λ_{max} (nm)	Abs.	λ_{max} (nm)	Abs.	λ_{max} (nm)	Abs.
--	449	0,197	322	0,092	295	0,133	375	0,171
30	440	0,094	322	0,089	295	0,130	375	0,190
60	435	0,069						
90	430	0,063	322	0,087	295	0,128	375	0,190
120	430	0,063						
150	430	0,064	322	0,090	295	0,126	375	0,192
300	430	0,064	322	0,091	295	0,130	375	0,190
420	430	0,065						
480	430	0,066	322	0,092	295	0,139	375	0,194

FIGURA I



Estudio de la reaccionabilidad analítica

Se han ensayado un total de 64 iones a cinco valores distintos de pH (1,5-4,0,7,0-9,0-12,0). Las disoluciones del reactivo empleadas eran al 0,1% (m/v) en etanol-agua al 50% (v/v).

Las soluciones de iones utilizadas contenían $1000 \mu\text{g} \cdot \text{ml}^{-1}$ del mismo. En los casos en que el ensayo resultó positivo, se calculan los valores de pD. En un tubo de ensayo se añaden 3 ml de solución amortiguadora del pH deseado, 2 ml de solución del reactivo al 0,1% (m/v) y solución del ión a investigar de $1000 \mu\text{g} \cdot \text{ml}^{-1}$ gota a gota, hasta que el ensayo aparece como claramente positivo.

En las reacciones susceptibles de aplicación espectrofotométrica se ha determinado la longitud de onda del máximo de absorción y se han calculado los coeficientes de extinción molar aproximados. En matraces aforados de 25 ml se añadieron 5 ml de solución del reactivo al 0,1% (m/v), 1 ml del ión a investigar de $100 \mu\text{g} \cdot \text{ml}^{-1}$, enrasando finalmente con la solución amortiguadora del pH deseado. La absorción de estas soluciones se midió frente a blancos preparados en las mismas condiciones, pero en ausencia del ión a investigar.

Cuando las medidas se realizaron tras un proceso de extracción se procedió de forma análoga a la anterior, efectuando la operación en embudos de separación, diluyendo finalmente a 25 ml. con cloroformo.

Los resultados obtenidos se exponen en la Tabla III.

RESULTADOS Y DISCUSION

La síntesis del reactivo se ha realizado por el método normalmente empleado en la obtención de bases de Schiff y la caracterización del mismo ha resultado satisfactoria. Como ya se ha observado con el 2-|(2-hidroxifenil)-imino|-metil|-fenol en el derivado -5cloro también destaca su gran solubilidad en acetona.

Resulta interesante comparar la aceptable estabilidad de las disoluciones de este reactivo para valores de pH superiores a dos, en comparación con las soluciones del 2-|(2-hidroxifenil)-imino|-metil|-fenol, cuya descomposición hidrolítica se realiza mucho más fácilmente como ha sido indicado por varios investigadores^{17,18}. La influencia de la introducción del sustituyente cloro tiene una marcada incidencia sobre las constantes de protonización del reactivo. En el caso del 2-|(2-hidroxifenil)-imino|-metil|-fenol se encontró un solo valor de pK^1 , debido a los valores extremadamente próximos de pK_1 y pK_2 que no pudieron diferenciarse por el método empleado. La influencia del cloro se traduce en una mayor separación de estos valores, apareciendo en el espectro de absorción del reactivo dos puntos isobésticos a longitudes de onda muy próximas, lo que ha permitido determinar los valores de pK de protonización correspondientes.

La influencia de la presencia del sustituyente 5-cloro había sido discutido en cuanto a su influencia sobre la intensidad de fluorescencia de los complejos con el aluminio¹³ encontrando un descenso de la intensidad de fluorescencia con respecto al compuesto no clorado, lo que está de acuerdo con el denominado "efecto de átomo pesado" en la pérdida de la fluorescencia molecular.

En las reacciones espectrofotométricas por el contrario, se puede observar una mejora en la sensibilidad de las determinaciones. Prácticamente todos los iones estudiados presentan coeficientes de extinción molar más elevados que los correspondientes al 2-|(2-hidroxifenil)-imino|-metil|-fenol, apareciendo alguna reacción nueva, como por ejemplo con los molibdatos. La reacción con aniones oxidantes experimenta también un incremento en la sensibilidad, siendo especialmente destacable con los IO_3^- .

TABLA III

Ión	pH	Precipitado	Disolución	pD	λ_{max} (nm)	ϵ ($1.\text{mol}^{-1}.\text{cm}^{-1}$)	Observaciones
Ag(I)	4,0			4,4			
Pd(II)	12,0		pardo-rojiza	4,8	457	$1,38.10^4$	Extr. MIBC
Cu(II)	7,0	amarillo		5,4			
	9,0		amarilla		431	$1,38.10^4$	medido en CHCl_3
Bi(III)	1,5	rosa		4,2			
Mo(VI)	1,5		amarilla	5,3	358	$0,70.10^4$	extr. MIBC
	4,0		amarilla	4,4	359	$0,84.10^4$	extr. MIBC
Pt(IV)	1,5		naranja	5,2			extr. MIBC
	12,0		naranja	5,2	434	$1,61.10^4$	extr. MIBC
Au(III)	1,5	pardo	amarilla	5,7	426	$2,36.10^4$	medido en CHCl_3
V(IV)	4,0		verdosa	4,7	432	$1,12.10^4$	
V(V)	1,5		rojo-naranja	5,7	451	$0,51.10^4$	
Fe(II)	4,0		naranja	4,4	401	$1,30.10^4$	
Fe(III)	1,5		rojo	6,4	471	$0,55.10^4$	extr. MIBC y CHCl_3
Zn(II)	9,0	amarillo		4,5			
Co(II)	9,0		naranja	4,4	442	$1,24.10^4$	extr. MIBC y CHCl_3
Ni(II)	9,0	amarillo	amarilla	4,2	426	$1,77.10^4$	medido en CHCl_3
CrO_4^{2-}	1,5		naranja	6,0	452	$1,38.10^4$	extr. MIBC
$\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$	1,5		naranja	4,7	434	$0,37.10^4$	
NO_2^-	1,5	naranja		5,0			
BrO_3^-	1,5		naranja	4,1	450	$0,24.10^4$	
IO_3^-	1,5		naranja	6,0	452	$2,82.10^4$	El color aparece al cabo de pocos minutos

BIBLIOGRAFIA

1. J. AZNAREZ, M.A. BELARRA, A. BONA, Rev. Acad. Ciencias Zaragoza. Pendiente publicación.
2. Z. HOLZBECHER, Chem. Listy, 49, 1030, (1955).
3. D.C. FREEMAN y Ch.E. WHITE, J. Am. Chem. Soc., 78, 2678, (1956).
4. R.M. DAGNALL, R. SMITH y T.S. WEST, Chem. Ind. 34, 1499, (1965).
5. R.M. DAGNALL, R. SMITH y T.S. WEST, Talanta, 13, 609, (1966).
6. E.A. BOZHEVOL'NOV, Chem. Abstr., 55, 229g, (1961).
7. E.A. BOZHEVOL'NOV, Chem. Abstr., 61, 2461e, (1964).
8. V. PATROVSKI, Chem. Listy, 48, 537, (1954).
9. V.S. EFIMICHEV, Chem. Abstr., 58, 13115h, (1963).
10. K. MORISIGE, Anal. Chim. Acta, 73, 245, (1974).
11. Z. HOLZBECHER, Chem. Listy, 52, 425, (1958).
12. Z. HOLZBECHER, Chem. Listy, 52, 430, (1958).
13. R.J. ARGAUER y Ch. E. WHITE, Anal. Chem. 36, 2141, (1964).
14. L. MEITES; Handbook of Analytical Chemistry, pag. 11-5, McGraw-Hill, London (1963).
15. V.V. SOMAYAJULU y N.V.S. RAO, Current. Sci., 25, 86, (1956).
16. E.P. SERJEANT y A. ALBERT, Butter&Tanner Ltd. London, (1962).
17. A.A. TUMANOV y U.S. EFIMYCHEV, Zh. Analit. Khim. 20, 889, (1965).
18. A.A. TUMANOV y U.S. EFIMYCHEV, Zh. Analit. Khim. 21, 1390, (1966).

THERMODYNAMIC STUDY OF SOME BINARY MIXTURES AND ENERGY PARAMETERS OF THE VARIOUS TYPES OF CONTACTS INVOLVED. II.

Felix M. Royo; Mariano Gracia and Celso Gutierrez Losa

Departamento de Química-Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, Spain.

Excess enthalpies, at 303.15 K, for the following binary mixtures: n-hexene,1, diphenylmethane, chlorodiphenylmethane, and dipropylether + n-hexane, + tetrachloromethane and + benzene, have been measured.

Excess volumes for dipropylether + n-hexane, + tetrachloromethane, and + benzene, were also measured at 303.15 K. Experimental results for excess enthalpies were examined in terms of Barker's treatment in order to determine the interaction energy for the various contacts involved in every mixture.

INTRODUCTION

In a previous paper,⁽¹⁾ binary mixtures formed by n-heptane, 1,3-dichloropropane, or 1,4-dichlorobutane + n-hexane, tetrachloromethane or benzene were studied in order to characterize the various interactions involved (Cl ↔ aliphatic, Cl ↔ aromatic; aliphatic ↔ aromatic; etc.). To this end, we have used Barker's method for treating excess enthalpy data. Following our study, we present in this paper a similar study containing excess enthalpy measurements, at 303.15 K, on n-hexene,1, diphenylmethane, chlorodiphenylmethane, and + benzene, and excess volume measurements, at 303.15 K, too, on dipropylether + n-hexane, + tetrachloromethane, and + benzene. As it was pointed out⁽¹⁾, mixtures were so chosen that we have only used our own experimental data to characterize the new contact types introduced: the results of a given system were used each time for estimation of the parameters of only one type of contact, while the others eventually needed were taken from the analysis of already studied mixtures.

EXPERIMENTAL

Materials:

Benzene, n-hexane, and tetrachloromethane were of the same quality as before;⁽¹⁾ all the other liquids used were Fluka products: n-hexene,1, (purum), diphenylmethane (purum), chlorodiphenylmethane (purum), and dipropylether (>99.5 mole per cent). All the liquids were kept on molecular

sieve (4 Å) previously activated by heating under vacuum. Purity, checked by gas-liquid-chromatography, was >99 mole per cent in every case.

Procedure:

Excess enthalpies (H^E) and excess volumes (V^E) were determined using both the calorimeter and the dilatometer described elsewhere^(2, 3). The temperature of the bath was held constant within ± 0.002 K.

RESULTS

The values of H^E and V^E were fitted by least squares to the equation

$$H^E (V^E) = x (1-x) \sum_i A_i (2x-1)^i$$

In table 1 and 2 experimental results, parameters A_i and standard deviations are given. Solid lines in figures 1-4 (for H^E) and in figure 5 (for V^E) are the curves obtained from the fitted equations. The curves of H^E -mole fraction for chlorodiphenylmethane are unfinished for safety's sake, because of the high toxicity of the compound.

In table 3, literature data are reproduced along with ours. It is to note that both sets of results refer to slightly different temperatures, except for those of Leal and Swinton on $C_{13}H_{12} + C_6H_6$.

TABLE 1

x	$H^E/J \text{ mol}^{-1}$	x	$H^E/J \text{ mol}^{-1}$	x	$H^E/J \text{ mol}^{-1}$
$x C_6H_{12} + (1-x) C_6H_{14}$					
0.0148	2.6	0.4014	65.9	0.6131	66.2
0.0434	9.0	0.4361	67.7	0.6587	62.1
0.1008	21.8	0.4695	68.9	0.7080	57.3
0.1841	37.9	0.4994	69.1	0.7550	48.0
0.2468	48.5	0.5256	69.1	0.8244	37.4
0.3087	57.2	0.5458	69.7	0.9061	20.5
0.3599	62.7	0.5780	68.5	0.9525	10.1

$$H^E = x (1-x) \{ 280.96 + 8.31 (2x-1) - 76.34 (2x-1)^2 \} J \text{ mol}^{-1}; \quad (H^E) = 0.8 J \text{ mol}^{-1}$$

$x C_6H_{12} + (1-x) CCl_4$

0.0420	10.8	0.3653	70.7	0.5515	71.8
0.0804	19.9	0.4030	73.7	0.6732	57.5
0.1559	35.6	0.4363	75.9	0.7572	46.4
0.2189	48.7	0.4598	76.5	0.8599	29.6
0.2750	58.9	0.4734	78.1	0.9218	17.5
0.3229	65.9	0.5130	74.6		

$$H^E = x (1-x) \{ 298.64 - 24.66 (2x-1) - 68.71 (2x-1)^2 \} J \text{ mol}^{-1}; \quad (H^E) = 2.0 J \text{ mol}^{-1}$$

TABLE 1. Continued

x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹
x C ₆ H ₁₂ + (1-x) C ₆ H ₁₂					
0.0237	58.3	0.3395	506.0	0.6378	467.4
0.0470	108.6	0.3565	515.5	0.6671	444.3
0.0637	146.2	0.4123	537.7	0.7002	415.5
0.0889	198.8	0.4391	539.0	0.7384	378.4
0.1157	248.6	0.4676	537.7	0.7780	333.8
0.1414	294.1	0.4863	534.8	0.8208	280.3
0.1705	339.6	0.5034	531.7	0.8680	214.9
0.2063	388.1	0.5214	527.0	0.8940	177.1
0.2506	438.5	0.5409	520.5	0.9278	119.8
0.2674	454.4	0.5619	511.8	0.9646	66.2
0.2884	471.1	0.5853	500.6	0.9899	16.4
0.3246	495.2	0.6088	486.6		

$$H^E = x(1-x) \{ 2138.5 - 3634(2x-1) - 12.7(2x-1)^2 \} \text{ J mol}^{-1}; \sigma_{(H^E)} = 2.8 \text{ J mol}^{-1}$$

x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹
x C ₆ H ₁₄ O + (1-x) C ₆ H ₁₄					
0.0310	19.0	0.3391	148.9	0.6119	150.2
0.0620	37.6	0.3830	157.0	0.6661	138.5
0.0959	56.5	0.4212	161.0	0.7301	119.4
0.1314	75.0	0.4626	164.3	0.8064	91.6
0.1705	92.6	0.4925	164.3	0.8917	56.1
0.2309	117.0	0.5265	161.8	0.9415	31.1
0.2888	137.4	0.5661	157.8		

$$H^E = x(1-x) \{ 651.7 - 46.2(2x-1) - 59.4(2x-1)^2 \} \text{ J mol}^{-1}; \sigma_{(H^E)} = 1.2 \text{ J mol}^{-1}$$

x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹
x C ₆ H ₁₄ O + (1-x) CCl ₄					
0.1124	-102.1	0.4390	-257.9	0.7960	-161.4
0.1936	-162.1	0.5215	-261.0	0.8739	-103.0
0.3461	-240.6	0.5948	-252.0		
0.4177	-255.9	0.6594	-226.8		

$$H^E = x(1-x) \{ -1049.4 + 57.0(2x-1) + 109.6(2x-1)^2 \} \text{ J mol}^{-1}; \sigma_{(H^E)} = 2.0 \text{ J mol}^{-1}$$

TABLE 1. Continued

x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹
x C ₆ H ₁₄ O + (1-x) C ₆ H ₆					
0.0276	21.0	0.2706	147.9	0.5121	149.6
0.0511	40.1	0.3112	158.3	0.5696	137.8
0.0854	65.6	0.3472	165.5	0.6417	120.4
0.1161	83.8	0.3658	165.4	0.7341	93.5
0.1400	96.0	0.3933	164.7	0.8478	55.4
0.1845	116.1	0.4264	162.3	0.9371	23.0
0.2289	133.3	0.4653	157.7		

$$H^E = x(1-x) \{ 617.3 - 332.0(2x-1) - 16.6(2x-1)^2 - 124.4(2x-1)^3 \} \text{ J mol}^{-1}; \overline{U}(H^E) = 2.1 \text{ J mol}^{-1}$$

x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹
x C ₁₃ H ₁₂ + (1-x) C ₆ H ₁₄					
0.0343	15.7	0.2788	80.5	0.5403	87.3
0.0626	28.1	0.3116	84.4	0.6087	82.7
0.1143	45.8	0.3412	87.4	0.6987	72.4
0.1620	59.4	0.4005	87.5	0.7518	65.1
0.2066	69.4	0.4387	88.6	0.8190	52.7
0.2449	75.5	0.4839	88.5	0.9527	15.5

$$H^E = x(1-x) \{ 357.13 - 67.00(2x-1) + 71.21(2x-1)^2 \} \text{ J mol}^{-1}; \overline{U}(H^E) = 1.0 \text{ J mol}^{-1}$$

x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹
x C ₁₃ H ₁₂ + (1-x) CCl ₄					
0.0441	0.2	0.2923	4.6	0.4896	9.3
0.0963	0.9	0.3225	5.1	0.5497	8.9
0.1434	1.5	0.3486	5.7	0.6225	8.3
0.1854	2.0	0.3745	6.2	0.7172	6.6
0.2242	2.8	0.4044	9.2	0.8396	3.3
0.2597	3.8	0.4448	9.3		

$$H^E = x(1-x) \{ 34.00 + 9.97(2x-1) - 29.51(2x-1)^2 \} \text{ J mol}^{-1}; \overline{U}(H^E) = 0.75 \text{ J mol}^{-1}$$

TABLE 1. Continued

x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹
x C ₁₃ H ₁₂ + (1-x) C ₆ H ₆					
0.0211	92.6	0.2748	938.3	0.5971	1031.0
0.0400	180.8	0.2915	969.1	0.6221	1001.0
0.0576	259.8	0.3087	1003.2	0.6471	967.7
0.0722	321.5	0.3255	1024.7	0.6749	922.5
0.1006	430.6	0.3446	1042.0	0.7031	871.3
0.1171	492.6	0.3591	1058.4	0.7297	815.4
0.1329	547.1	0.3743	1073.7	0.7575	755.7
0.1477	595.9	0.4049	1096.8	0.7889	682.4
0.1620	643.1	0.3890	1084.8	0.8168	606.3
0.1760	688.3	0.4262	1104.3	0.8457	522.2
0.1892	727.7	0.4433	1109.9	0.8829	411.4
0.2014	764.2	0.5162	1085.4	0.9058	335.4
0.2195	813.5	0.5334	1078.9	0.9365	225.9
0.2360	855.9	0.5520	1069.3	0.9672	114.6
0.2557	898.4	0.5714	1054.1		

$$H^E = x(1-x) \left\{ 4456.4 - 558.1(2x-1) - 246.8(2x-1)^2 \right\} \text{ J mol}^{-1}; \sqrt{H^E} = 9.5 \text{ J mol}^{-1/2}$$

x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹
x C ₁₃ H ₁₁ Cl + (1-x) C ₆ H ₁₄					
0.4880	1202.5	0.6922	983.5	0.9264	304.9
0.5267	1190.5	0.7294	901.6	0.9634	152.8
0.5550	1170.4	0.7642	818.8		
0.5841	1142.2	0.8056	712.2		
0.6204	1097.3	0.8442	596.7		
0.6561	1048.1	0.8819	466.6		
x C ₁₃ H ₁₁ Cl + (1-x) CCl ₄					
0.3600	354.3	0.6248	269.0		
0.3936	348.5	0.6888	237.3		
0.4337	341.1	0.7683	192.3		
0.4831	327.8	0.8416	129.5		
0.5446	304.5	0.9313	51.7		

TABLE 1. Continued

x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹	x	H ^E /J mol ⁻¹
x C ₁₃ H ₁₁ Cl + (1-x) C ₆ H ₆					
0.0110	0.4	0.3181	25.8	0.5712	16.9
0.0530	2.5	0.3515	25.0	0.6692	13.6
0.1003	5.5	0.3940	24.3	0.7925	9.4
0.1192	8.7	0.4221	24.1	0.8529	6.9
0.2671	26.1	0.4783	21.8	0.9285	3.0
0.2907	26.1	0.5513	21.8		

$$H^E = x(1-x) \{ 91.06 - 96.11(2x-1) - 42.84(2x-1)^2 + 125.42(2x-1)^3 \} \text{ J mol}^{-1}; \quad \overline{V}(H^E) = 1.8 \text{ J mol}^{-1}$$

TABLE 2

x	V ^E /cm ³ mol ⁻¹	x	V ^E /cm ³ mol ⁻¹
x C ₆ H ₁₄ O + (1-x) C ₆ H ₁₄			
0.1211	0.0874	0.6599	0.1720
0.2867	0.1660	0.7798	0.1349
0.3372	0.1790	0.8350	0.1060
0.4652	0.1938	0.8902	0.0752
0.5516	0.1908		
x C ₆ H ₁₄ O + (1-x) CCl ₄			
0.1085	-0.1188	0.5993	-0.3154
0.2347	-0.2270	0.6375	-0.3047
0.3990	-0.3117	0.7889	-0.2209
0.4560	-0.3262	0.8885	-0.1271
0.5688	-0.3198		

$$V^E = x(1-x) \{ 0.0266(2x-1)^2 - 0.0383(2x-1) + 0.7824 \} \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}; \quad \overline{V}(V^E) = 0.0019 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$V^E = x(1-x) \{ 0.0837(2x-1)^2 - 0.0438(2x-1) - 1.3124 \} \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}; \quad \overline{V}(V^E) = 0.0023 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

x	V ^E /cm ³ mol ⁻¹	x	V ^E /cm ³ mol ⁻¹
x C ₆ H ₁₄ O + (1-x) C ₆ H ₆			
0.1485	-0.0649	0.6055	-0.1603
0.2212	-0.0953	0.6924	-0.1466
0.3575	-0.1348	0.7868	-0.1194
0.4659	-0.1545	0.8364	-0.0991
0.5595	-0.1610		

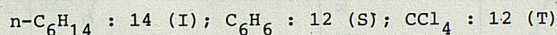
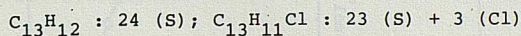
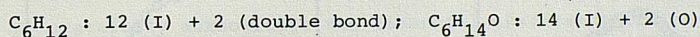
$$V^E = x(1-x) \{ 0.0257(2x-1)^2 - 0.1492(2x-1) - 0.6355 \} \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}; \quad \overline{V}(V^E) = 0.0010 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$$

TABLE 3

System	Literatura date		$H^E/J \text{ mol}^{-1}$	Authors	This paper $H^E/J \text{ mol}^{-1}$ at 303.15 K
	T/K	X			
$C_6H_{12} + C_6G_{14}$ + CCl_4	298.15	0.5	61	Woycicka ⁽⁴⁾	69
	298.15	0.5	90	Woycicka ⁽⁴⁾	78
	298.15	0.5	85	Karbalai ⁽⁵⁾ et al.	
	298.15	0.5	590	Karbalai ⁽⁵⁾ et al.	
$+ C_6H_6$	298.15	0.5	540	T. Letcher and J. Sack ⁽⁶⁾	534
	298.15	0.5	-279	L. Beath and Williamson ⁽⁷⁾	-263
$C_7H_{14}O + C_4Cl$	298.15	0.5	-276	A.G. Williamson ⁽⁸⁾	
	298.15	0.38	170	Kehiaian et al. ⁽⁹⁾	164
$C_{13}H_{12} + C_6H_6$	303.15	0.5	7	Leal and Swinton ⁽¹⁰⁾	9
			$V^E/cm^3 \text{ mol}^{-1}$		$V^E/cm^3 \text{ mol}^{-1}$ at 303.15 K
$C_7H_{14}O + C_4Cl$	298.15	0.5	-0.3327	Beath et al. ⁽¹¹⁾	-0.3281

DISCUSSION

The results were examined on the basis of Barker's treatment⁽¹²⁾. Although a strict application of it requires values at constant volume, we suppose it will retain its significance in a comparative study even when data at constant pressure are used instead. Thus, we assume that $U^E \approx H_P^E$, and also that interactions between contacts of the same type in different binary mixtures have the same energy. The number and type of contact points assigned to each compound were:



Symbol I refers to a contact point on a saturated hydrocarbon; S, an aromatic hydrocarbon; T, a contact point on chlorine in CCl_4 ; and O, to a contact point on oxygen (ether).

Since only one energy parameter can be obtained from the analysis of a mixture, it is often necessary to use each time another parameters already known. Some of these parameters were estimated in our preceding work⁽¹⁾; for example, the aliph \leftrightarrow Cl (tetrachl) and aliph \leftrightarrow arom energy interactions involved in n-hexene, 1 + CCl_4 , and + C_6H_6 , respectively, were taken from the study of n-heptane + CCl_4 , and + C_6H_6 , respectively. The results of these calculations are shown in table 4.

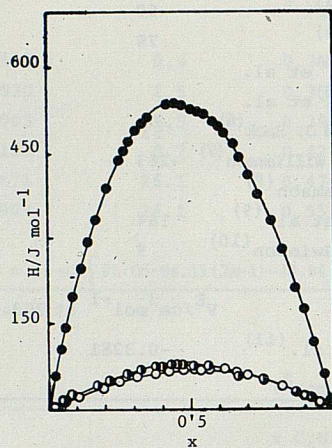


Fig. 1: Excess enthalpies H^E at 303.15 K
for: \circ , $x \text{ C}_6\text{H}_{12} + (1-x) \text{ C}_6\text{H}_{14}$;
 \circ , $+ (1-x) \text{ CCl}_4$; \bullet , $+ (1-x)$
 C_6H_6 .

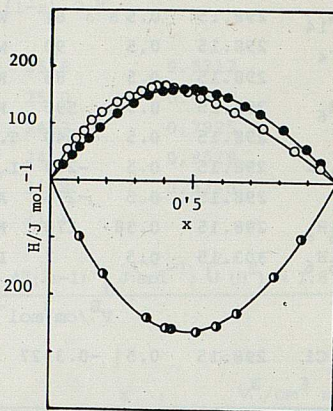


Fig. 2: Excess enthalpies H^E at 303.15 K
for: \circ , $x \text{ C}_6\text{H}_{14}\text{O} + (1-x) \text{ C}_6\text{H}_{14}$;
 \circ , $+ (1-x) \text{ CCl}_4$; \bullet , $+ (1-x) \text{ C}_6\text{H}_6$.

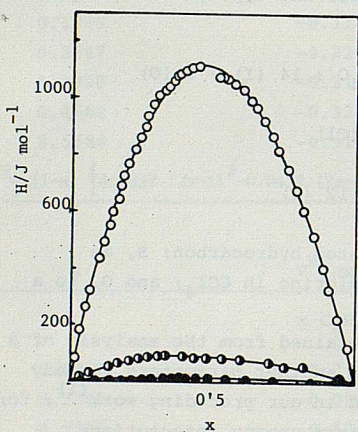


Fig. 3: Excess enthalpies H^E at 303.15 K
for: \circ , $x \text{ C}_{13}\text{H}_{12} + (1-x) \text{ C}_6\text{H}_{14}$;
 \circ , $+ (1-x) \text{ CCl}_4$; \bullet , $+ (1-x) \text{ C}_6\text{H}_6$.

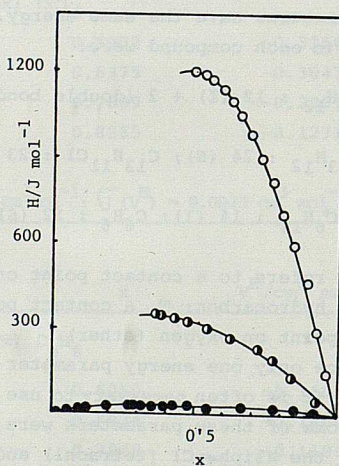


Fig. 4: Excess enthalpies H^E at 393.15 K
for: \circ , $x \text{ C}_{13}\text{H}_{11}\text{Cl} + (1-x) \text{ C}_6\text{H}_{14}$;
 \circ , $+ (1-x) \text{ CCl}_4$; \bullet , $+ (1-x) \text{ C}_6\text{H}_6$.

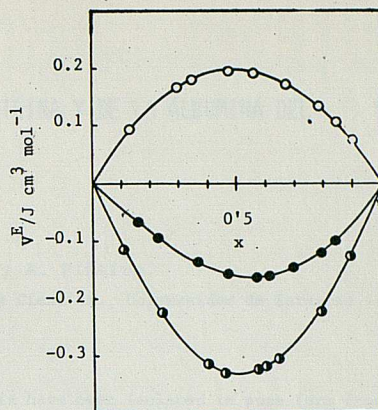


Fig. 5: Excess volumes V^E at 303.15 K
for: 0, x $C_6H_{14}O$ + (1-x) C_6H_{14} ;
○, + (1-x) CCl_4 ; ●, + (1-x) C_6H_6 .

TABLE 4

Exchange energies for the contacts operating in the binary mixtures.

Compound	Interaction	I	S	T
C_6H_{12}	π	720	230	160 J mol ⁻¹
$C_{13}H_{12}$	S	270	0	25
$C_{13}H_{11}Cl$	Cl	700	350	710
$C_6H_{14}O$	O	1550	-35	25

ACKNOWLEDGMENTS

We gratefully acknowledge the financial assistance of the Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica.

BIBLIOGRAPHY

- 1.- F. ROYO, M. GRACIA and C. GUTIERREZ.- Rev. Acad. Cienc. Exactas Fis.-Quim. Natur. Zaragoza. In the press.
- 2.- G. GUTIERREZ LOSA and M. GRACIA.- Rev. Acad. Cienc. Exactas Fis.-Quím. Natur. Zaragoza, **XXVI**, 1, 101 (1971).
- 3.- M. GRACIA.- J. Chem. Thermodynamics, **9**, 55 (1977).
- 4.- W. WOYCICKA.- J. Chem. Thermodynamics, **7**, 77 (1975).
- 5.- M.H. KARBALAI GHASSEMI; J.P.E. GROLIER and H.V. KEHIAIAN.- J. Chem. Phys. Physicochim. Biol., **925**, 73 (1976).
- 6.- T. M. LETCHERT and J. SACK.- J. South. African. Chem. Inst., **3**, 28 (1975).
- 7.- L.A. BEATH and A.G. WILLIAMSON.- J. Chem. Thermodynamics, **1**, 51 (1969).
- 8.- A.G. WILLIAMSON.- Int. DATA selected Data Mixts. Serv. A., **36**, 40 (1974).
- 9.- H.V. KEHIAIAN; K. SOSNKOWSKA and R. HYRNIEWICZ.- J. Chim. Phys., **68**, 922 (1971).
- 10.- H. LEAL and M. SWINTON. F.L. Trans. Faraday. Soc., **63**, 7, 1596 (1967).
- 11.- L.A. BEATH; S.P. O'NEILL and A.G. WILLIAMSON.- J. Chem. Thermodynamics, **1**, 293 (1969).
- 12.- J.A. BARKER.- J. Chem. Phys., **20**, 1526 (1952).

AISLAMIENTO SIMULTANEO DE LA ALFA-FETOPROTEINA Y DE LA ALBUMINA DEL SUERO FETAL DE RATA

M. Calvo, J. Naval, F. Lampreave y A. Piñeiro.

Departamento de Bioquímica. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza. Zaragoza. España.

Alpha-fetoprotein (AFP) and serum albumin have been isolated in pure form from fetal rat serum, with a yield higher than 60%. The method consists in a combination of several non-denaturing techniques. First, DEAE-Sephadex chromatography to achieve AFP plus albumin separation from the rest of serum proteins. Second, Cibacron Blue-Sepharose affinity chromatography which allowed AFP and albumin separation. Finally albumin was re-purified by Sephadex G-100 gel filtration and AFP by indirect immunoadsorption on insolubilized antibodies against adult rat serum proteins. The method compares favourably in both yield and simplicity with other published procedures. This method, applied in the present work to fetal rat serum, is also operative with other fetal or perinatal rat extracts.

INTRODUCCION

La alfa-fetoproteína (AFP) es una glicoproteína que pertenece al grupo de los antígenos oncofetales¹, cuya síntesis se limita, en condiciones normales, a los períodos embrionario, fetal y perinatal de los mamíferos y otros vertebrados^{1,2}. Las propiedades físico-químicas de la AFP, tales como peso molecular, carga iónica, secuencia, etc., son semejantes a las de la albúmina sérica^{2,3}. La separación de estas dos proteínas por procedimientos físico-químicos es por consiguiente difícil.

Para el aislamiento de la AFP se han utilizado numerosos procedimientos, entre los que destacan la electroforesis preparativa^{4,5}, la inmunoadsorción directa^{6,7} y la cromatografía de afinidad con concanavalina A (Con A) insolubilizada⁸. Aunque los métodos citados permiten una separación eficaz de la AFP y de la albúmina, presentan algunos inconvenientes, tales como la poca capacidad (electroforesis preparativa), el uso de condiciones de pH drásticas (inmunoadsorción) o la falta de especificidad (Con A). En los últimos años, el colorante Azul de Cibacron F 3GA, insolubilizado, se ha utilizado como adsorbente específico de la albúmina, particularmente en el caso humano⁹, aún cuando esta propiedad es general¹⁰. Por el contrario, la AFP no muestra capacidad de interac-

ción con este colorante. Esta diferencia entre las propiedades de la AFP y de la albúmina puede ser útil para la separación de ambas, como se describe en el presente trabajo para el suero fetal de rata.

MATERIALES Y METODOS

Sueros

El suero fetal de rata utilizado ha sido una mezcla procedente de numerosos fetos de 18 a 20 días de edad gestacional. Las ratas gestantes fueron anestesiadas con pentobarbital sódico. La cavidad abdominal fue expuesta y los fetos extraídos uno a uno. Cada feto fue exanguinado por decapitación. El suero se obtuvo por coagulación espontánea de la sangre y centrifugación moderada.

Reactivos inmunológicos

Los sueros de conejo anti-suero de rata adulta (ASRA), anti-albúmina de rata (AAR) y anti-AFP de rata (AFPR) fueron preparados por un procedimiento de inmunización previamente descrito¹¹. Los inmunógenos utilizados fueron, respectivamente, suero de rata adulta, albúmina purificada por cromatografía de afinidad¹⁰ y AFP de líquido amniótico parcialmente purificada. El AFPR fue convertido en específico para la AFP por inmunoadsorción con suero de rata adulta (macho) polimerizado¹².

Los anticuerpos específicos contenidos en 20 ml del ASRA fueron aislados por el método de Avrameas y Ternynck¹² utilizando suero de rata adulta polimerizado. Estos anticuerpos (60 mg) fueron insolubilizados en Sepharose 4B (Pharmacia, Uppsala, Suecia) por el procedimiento del CNBr¹³ para obtener el inmunoadsorbente ASRA-Sepharose.

Preparación del derivado Azul de Cibacron-Sepharose

El derivado Azul de Cibacron-Sepharose se preparó por el método de Heyns y De Moore¹⁴ con algunas modificaciones: 100 ml de Sepharose se suspendieron en 70 ml de una solución de Azul de Cibacron (10 mg/ml) en Na_2CO_3 0,1 M. La suspensión se incubó durante 48 horas a 45°C con agitación moderada. Seguidamente, el gel se lavó sobre una placa filtrante con abundante agua destilada hasta que el líquido de lavado no mostró absorción a 610 nm, debida al exceso de colorante. El gel se equilibró a conti-

nuación con tampón tris-(hidroximetil)aminometano (TRIS)/HCl 0,05 M y 0,01 M en NaCl, de pH 8,0 (tampón de Azul de Cibacron). La concentración de colorante insolubilizado fue medida espectrofotométricamente a 610 nm, previa hidrólisis de una alícuota del derivado en HCl 0,1N, y resultó ser de 2,8 mg de Azul de Cibacron por ml de gel.

Aislamiento de la AFP y de la albúmina

El procedimiento utilizado para aislar AFP y albúmina consta de varias etapas consecutivas que se describen seguidamente.

a) Cromatografía en Dietilamino-etil-Sephadex (DEAE-Sephadex) A-50

Dos ml de suero fetal de rata fueron dializados 24 horas a 4°C frente a dos litros de tampón 0,025 M de fosfato potásico y 0,05 M NaCl, pH 6,2. La muestra fue aplicada a una columna (1,5 x 14 cm) de DEAE-Sephadex A-50, equilibrada con el mismo tampón. La columna fue lavada con aproximadamente 100 ml del tampón citado, para eliminar las proteínas no retenidas. Las proteínas fijadas al intercambiador iónico fueron eluidas con un gradiente lineal de NaCl entre 0,05 M (100 ml) y 0,04 M (100 ml) en tampón fosfato potásico 0,025 M de pH 6,2. Se recogieron fracciones de 5 ml que fueron analizadas por inmunodifusión respecto al contenido en AFP y albúmina. Todas las fracciones que contenían estas proteínas fueron mezcladas y concentradas a un volumen de 5 ml por ultrafiltración en células Amicon (Lexington, USA) equipadas con membranas PM-10 (límite de exclusión 10.000 daltones).

b) Cromatografía de afinidad en Azul de Cibacron

La muestra procedente de la etapa anterior fue dializada frente a un volumen adecuado de tampón de Azul de Cibacron y se aplicó a una columna (1,2 x 20 cm) de Azul de Cibacron-Sephadex. La columna se lavó con el mismo tampón a un flujo de 30 ml/hora hasta que la absorción del eluido a 280 nm fue menor de 0,02. La fracción de proteínas no retenidas por el gel (fracción AFP) fue concentrada por ultrafiltración hasta un volumen de 5 ml.

Las proteínas adsorbidas por el derivado de afinidad fueron eluidas con NaSCN 0,2 M en TRIS/HCl 0,05 M de pH 8,0. Las fracciones que contenían albúmina (fracción albúmina) se reunieron y concentraron, como en otras ocasiones, hasta un volumen

de 2 ml. La muestra fue dializada en la misma célula de ultrafiltración con solución salina tamponada (SST, 0,15 M NaCl y 0,01 M en fosfato potásico, pH 7,4).

c) Filtración en Sephadex G-100

La fracción de albúmina de la sección anterior fue cromatografiada en una columna de 2 x 60 cm de Sephadex G-100 con SST. Las fracciones (3 ml cada una) del pico principal fueron analizadas por electroforesis para seleccionar la zona que contenía exclusivamente albúmina.

d) Inmunoadsorción

La AFP fue finalmente purificada por inmunoadsorción indirecta de la fracción AFP (sección b) con el inmunoadsorbente ASRA-Sepharose.

Métodos analíticos

Las electroforesis se han efectuado en geles horizontales de poliacrilamida (6%)-agarosa(0,8%)¹⁵. Los análisis por inmunodifusión¹⁶ y por electroinmunodifusión cuantitativa¹⁷ se han efectuado en geles de agarosa al 1%. Las proteínas totales fueron valoradas por el método de Lowry et al.¹⁸ utilizando albúmina bovina como estandar.

RESULTADOS

Cromatografía en DEAE-Sephadex

En las condiciones cromatográficas descritas (vease la sección de métodos), las proteínas de mayor punto isoeléctrico (inmunoglobulinas, transferrina, etc.) son excluidas de la columna de DEAE-Sephadex. Con el gradiente de NaCl, la albúmina y la AFP se eluyen simultáneamente (fig. 1). Por esta razón, todas las fracciones que contenían AFP y albúmina se recogieron conjuntamente. En la figura 2, se muestra una electroforesis donde se compara el suero fetal de rata con la fracción de proteínas enriquecida en AFP y albúmina. Esta última es la de mayor movilidad electroforética. La fracción contiene además α_2 -macroglobulina (banda próxima al origen), y otros componentes minoritarios.

FIGURA 1

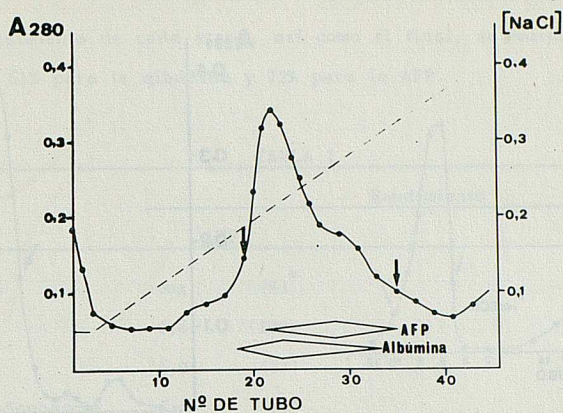


Fig. 1. Perfil de elución del suero fetal de rata en DEAE-Sephadex. La línea de trazos representa la concentración molar de NaCl. Las fracciones incluidas entre las flechas verticales fueron recogidas conjuntamente.

FIGURA 2

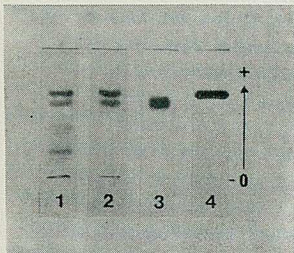


Fig. 2. Electroforesis en poliacrilamida-agarosa de distintas fracciones protéicas. 1.- Suero fetal de rata. 2.- Fracción procedente de la cromatografía en DEAE-Sephadex. 3.- AFP purificada. 4.- Albúmina purificada. La flecha muestra el sentido electroforético.

Cromatografía en Azul de Cibacron-Sepharose

La fracción anterior, enriquecida en AFP y albúmina fue sometida a la cromatografía de afinidad en Azul de Cibacron-Sepharose. Este derivado adsorbe la mayor parte de la albúmina y de las lipoproteínas, e igualmente parte de la α_2 -macroglobulina. El excluido está formado por AFP, acompañada de algo de albúmina y otros componentes minoritarios. En la figura 3 se representa el perfil de elución anterior y el obtenido al eluir con NaSCN las proteínas retenidas por el gel. Estas son fundamentalmente albúmina, impurificada con α_2 -macroglobulina y lipoproteínas.

FIGURA 3

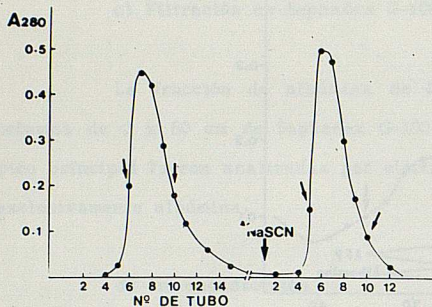


Fig. 3. Cromatografía de afinidad de Azul de Cibacron-Sepharose de la muestra procedente de la Fig. 1. El primer pico corresponde a las proteínas excluidas y el segundo a las proteínas eluidas con NaSCN. El volumen en cada tubo fue de 3 ml, y en cada caso se recogieron conjuntamente las fracciones incluidas entre las flechas.

FIGURA 4

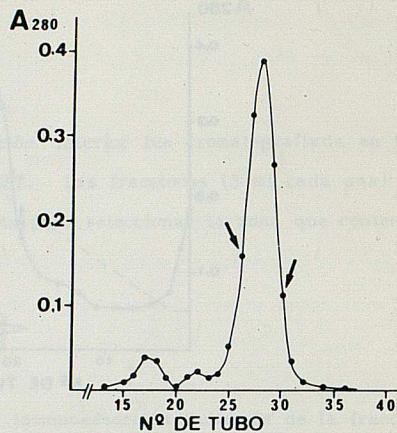


Fig. 4. Cromatografía en Sephadex G-100 de la fracción de albúmina eluida del Azul de Cibacron-Sepharose (Fig. 3). Las fracciones (3 ml cada una) incluidas entre las flechas, corresponden a la albúmina pura.

Filtración en gel

La albúmina eluida del derivado de Azul de Cibacron fue repurificada por filtración en Sephadex G-100 (Fig. 4). La α_2 -macroglobulina y otras proteínas contaminantes, de peso molecular mayor que el de la albúmina, aparecen en el primer pico. El pico principal corresponde a la albúmina purificada. La pureza de la proteína obtenida se comprueba por electroforesis (Fig. 2).

Inmunoadsorción

La fracción de AFP procedente de la cromatografía en Azul de Cibacron fue finalmente aplicada a una columna preparada con el inmunoadsorbente ASRA-Sepharose. Este adsorbente es capaz de retener las proteínas que acompañan a la AFP, mientras que ésta fluye libremente por la columna. En la figura 2 se muestra el comportamiento de

la AFP después de la etapa de inmuoadsorción indirecta.

El rendimiento de cada etapa, así como el final, se muestra en la Tabla I. Este fue elevado, 61% para la albúmina y 72% para la AFP.

TABLA I

Etapa del proceso	Rendimiento			
	AFP		Albúmina	
	mg	(%)*	mg	(%)*
Suero fetal	6,8	(100)	10,3	(100)
DEAE-Sephadex	6,0	(88)	9,3	(90)
Azul de Cibacron-Sepharose	5,4	(80)	7,9	(77)
Sephadex G-100	---	---	6,3	(61)
Inmuoadsorción	4,9	(72)	---	---

* Los valores entre paréntesis indican el porcentaje de recuperación respecto del valor inicial.

DISCUSION

Las propiedades bioquímicas de la AFP han sido estudiadas extensamente². Sin embargo, el papel fisiológico de esta proteína no es todavía conocido. Recientemente, se ha descrito que la AFP liga, al igual que la albúmina, ácidos grasos de cadena larga, pero a diferencia de ésta, muestra mayor afinidad por los ácidos grasos poliinsaturados araquidónico y docosahexenoico^{19,20,21}, que son derivados de los esenciales linoleico y linolénico, respectivamente. Esta es la única propiedad común que hasta ahora se ha encontrado en la AFP de todas las especies estudiadas^{19,20,21}. Es probable, por consiguiente, que dicha propiedad esté relacionada con el papel fisiológico de la AFP.

Para estudiar los ácidos grasos ligados a la AFP es necesario aislar esta proteína en cantidades apreciables por medio de métodos no desnaturalizantes. Hasta ahora, el método más generalmente utilizado en el aislamiento de la AFP ha sido la inmuoadsorción directa. En este procedimiento, rápido y de elevado rendimiento, la AFP fijada a un inmuoadsorbente específico se eluye con tampón ácido¹². En nuestro laboratorio se ha comprobado que un tratamiento de esta naturaleza altera, cuantitativa y cualitativamente la composición de los ácidos grasos ligados a la AFP²². La cromato-

graffa de afinidad en Con A-Sepharose⁸, no es útil para aislar cuantitativamente la AFP de rata, ya que ésta contiene microformas que no interaccionan con la lectina²³. Por esta razón, ha sido necesario diseñar un nuevo procedimiento para aislar AFP. Este procedimiento consta de varias etapas no desnaturalizantes, entre las que sobresale la cromatografía en Azul de Cibacron-Sepharose. Esta cromatografía ha sido empleada para el aislamiento de la albúmina humana por otros autores⁹. Se ha descrito que el Azul de Cibacron no es eficaz como adsorbente de otras albúminas, entre ellas la de rata²⁴. Sin embargo, nuestros estudios demuestran que si se utilizan derivados de elevada concentración de ligando, la albúmina de rata es igualmente adsorbida. Por otra parte, la AFP no es retenida por el Azul de Cibacron en las condiciones utilizadas en el presente trabajo.

El procedimiento que se ha descrito es relativamente sencillo y permite obtener AFP y albúmina con un rendimiento alto (mayor del 60%). En el presente trabajo, el método se ha aplicado al caso del suero fetal de rata; sin embargo, el mismo método es operativo con otros fluidos fisiológicos de la rata (líquido amniótico, extractos fetales, ect.) con mínimas modificaciones.

BIBLIOGRAFIA

1. D. GITLIN : Ann. N.Y. Acad. Sci. 259, 7-16 (1975).
2. E. RUOSLAHTI y M. SEPALA : Adv. Cancer Res. 29, 275-346 (1979).
3. S.W. LAW y A. DUGAICZYK : Nature 291, 201-205 (1981).
4. C. BENASSAYAG, G. VALLETTE, N. CITTANOVA, E.A. NUNEZ y M.F. JAYLE : Biochim Biophys. Acta 412, 295-305 (1975).
5. J.P. KERCKAERT, B. BAYARD, S. QUIEF y G. BISERTE : FEBS Lett. 53, 234-236 (1975).
6. S. NISHI y H. HIRAI : Biochim. Biophys. Acta 278, 293-298 (1972).
7. H. WATABE : Int. J. Cancer 13, 377-388 (1974).
8. M. PAGE : Can. J. Biochem. 51, 1213-1215 (1973).
9. J. TRAVIS, J. BOWEN, D. TEWKSBURY, D. JOHNSON y R. PANELL : Biochem. J. 157, 301-306 (1976).
10. J. NAVAL : Tesis de licenciatura. Zaragoza (1979).
11. A. PIÑEIRO, F. ORTEGA y J. URÍEL : Biochim. Biophys. Acta 379, 201-206 (1975).
12. S. AVRAMEAS y T. TERNYNCK : Immunochemistry 6, 53-66 (1969).
13. R. AXEN, J. PORATH y S. ERNBACH : Nature 214, 1302-1304 (1967).
14. W. HEYNS y P. DEMOOR : Biochim. Biophys. Acta 358, 1-13 (1974).
15. J. URÍEL : Bull. Soc. Chim. Biol. 48, 969-982 (1966).
16. O. OUCHTERLONY : Acta Path. Microbiol. Scand. 25, 186-191 (1948).
17. C.B. LAURELL : Anal. Biochem. 15, 45-52 (1966).
18. O.H. LOWRY, N.J. ROSEBROUGHT, A.L. FARR y R.J. RANDALL : J. Biol. Chem. 193, 265-275 (1951).
19. D.C. PARMELEE, M.A. EVENSON y H.F. DEUTSCH : 253, 2114-2119 (1978).

20. A. PIÑEIRO, A.M. OLIVITO y J. URIEL : C.R. Acad. Sci. Paris 289 D, 1053-1056 (1979).
21. R.N.K. CARLSSON, T. ESTES, J. DEGROOT, J.T. HOLDEN y E. RUOSLAHTI : Biochem. J. 190, 301-305 (1980).
22. A. PIÑEIRO, M. CALVO, J. NAVAL y F. LAMPREAVE : En preparación.
23. J.P. KERCKAERT, B. BAYARD y G. BISERTE : Biochim. Biophys. Acta 576, 99-108 (1979).
24. M.J. IQBAL y M.W. JOHNSON : J. Steroid. Biochem. 8, 977-983 (1977).

CONSIDERACIONES SOBRE LA EDAD DE UNAS ROCAS OFITICAS EN LA ZONA MERIDIONAL SUR-PIRENAICA (PROVINCIAS DE HUESCA-LERIDA)

M. Lago

Departamento de Petrología. Universidad de Zaragoza. España.

In the present paper we expose the data of the "absolute age" obtained by means of the dispersion-coefficient-birefringence method, applied to plagioclase crystals in the ophitic rocks of three outcrops located in the south-pyrenean zone (Spain).

The age obtained, upper Triassic-lower Liassic, is according to isotopic and stratigraphic ages.

INTRODUCCION

En este trabajo se exponen los resultados obtenidos sobre la edad de unas rocas básicas, utilizando dos metodologías: observaciones estratigráficas-estructurales y la determinación experimental de la variación del coeficiente de dispersión de la birrefringencia (Kd).

Las rocas consideradas son las denominadas ofíticas que presentan una paragénesis mineral muy uniforme consistente en: olivino (Fe_{66}) + augita-endiópsido ($En_{52.22}Fs_{10.12}Wo_{37.65}$) + pigeonita ($En_{65.66}Fs_{22.16}Wo_{12.15}$) + labrador ($An_{80}-An_{63}$), y un adecuado desarrollo de la textura ofítica. La composición química de estas rocas presenta una elevada uniformidad y escasa diferenciación, tanto a nivel de cada afloramiento como para el conjunto de los considerados, y es análoga a la que se ha dado como característica de los basaltos toleíticos continentales. La propiedad más destacada de estas rocas es el hecho de presentarse, con las características indicadas, emplazadas en los materiales del Keuper.

En los recientes trabajos que hemos realizado (LAGO¹, LAGO y POCIVI²) sobre las características geológicas, petrológicas y geoquímicas para un elevado número de rocas ofíticas situadas en el Norte de España, las observaciones estratigráficas nos han permitido deducir que en todos los casos, estas rocas están emplazadas en el Keuper con características muy similares a las que describiremos a continuación.

La edad que hemos determinado a partir de observaciones estratigráficas-

estructurales para las ofitas del Norte de España es la de Keuper superior-Lias inferior. Este resultado está de acuerdo con el obtenido mediante determinaciones radiométricas K/Ar para algunos afloramientos ofíticos del Norte de España (WALGENWITZ³, y CASTELLARIN et al.⁴).

La necesidad de obtener una corroboración sobre la simultaneidad del emplazamiento de las rocas ofíticas, según ha sido deducido por observaciones de campo, y también las ventajas que aporta el método experimental escogido (Kd): facilidad de medición, coste poco elevado y la fácil reproductividad en las determinaciones, nos ha orientado a su elección.

Se han seleccionado tres afloramientos ofíticos: Aulet-1, Aulet-2 y Estopiñán. Los dos primeros están próximos entre sí, situados en la provincia de Huesca y sus C. de G., en coordenadas UTM, son: longitud (03-14-00) y latitud (46-00-95) para el de Aulet-1, y longitud (03-13-35) y latitud (46-90-70) para el de Aulet-2. El yacimiento de Estopiñán está algo distante de los anteriores y se encuentra en la provincia de Lérida, sus C. de G., en coordenadas UTM, son: longitud (02-07-00) y latitud (46-51-35). Los dos primeros afloramientos están situados en la hoja nº 213 y el tercero en la 327 del mapa topográfico nacional, 1:50.000.

OBSERVACIONES DE CAMPO

Los tres afloramientos considerados están emplazados en estructuras extrusivas constituidas fundamentalmente por los materiales margo-arcillosos y yesíferos del Keuper y aisladas masas de calizas y carniolas del Muschelkalk y Lias.

En ninguno de los tres afloramientos ha sido posible reconocer un contacto gradual bien conservado entre las ofitas y los materiales del Keuper encajante. Para el afloramiento de Aulet-1 los contactos son claramente mecánicos mientras que para los de Aulet-2 y Estopiñán son observables los siguientes elementos: un Keuper movilizado y deformado, una banda de brecha y finalmente, las facies de borde correspondientes a las ofitas.

La banda brechificada interpuesta entre el Keuper y las ofitas consta de fragmentos de ofita empastados por una masa arcillosa fuertemente compactada y esquistosada. La amplitud de este nivel no sobrepasa 1 metro y puede llegar, en algunas zonas, a ser decimétrica. El estudio petrológico de los cantos de ofita alojados en la brecha permite reconocer en éstos la presencia de una textura microdiabásica porfídica y un notable desarrollo de alteraciones minerales (cloritización, saussuritización, albitización, epidotización, etc) y un elevado enriquecimiento de componentes de Fe, principalmente en forma de hematites y magnetita.

La fracción arcillosa del Keuper aglomerante presenta también ciertas modificaciones en su composición manifestadas principalmente por una cloritización (correspondiente al término clinocloro), fuerte impregnación por óxidos e hidróxidos de Fe y desarrollo de cristales de epidota y tremolita-actinolita.

Estas modificaciones mineralógicas y la fuerte compactación de las margo-arcillas son altamente acentuadas en las proximidades con la ofita mientras que faltan en zonas distanciadas de aquella.

Por otra parte, respecto a los afloramientos de ofita ha sido posible reconocer de forma bastante precisa que en sus zonas periféricas hay un adecuado desarrollo gradual de una zonación petrográfica y está expresada por la siguiente transición: ofita en las zonas centrales del afloramiento, y hacia las de borde por las facies subofítica porfídica, microdiabásica subofítica porfídica y finalmente la microdiabásica porfídica. Por otra parte, los estudios realizados sobre la variación de la composición química para las zonas más periféricas de las ofitas muestran que hacia la zona de contacto con el Keuper hay un aumento en Fe^{3+} , Mg^{2+} y H_2O , en tanto que disminuye el Fe^{2+} y Ca^{2+} . Estas variaciones guardan correspondencia con las modificaciones mineralógicas observadas microscópicamente.

Así pues, la brecha tectónica puede interpretarse como resultante de fenómenos tectónicos posteriores que afectaron a los contactos originales ó bien cabe suponer que sea sincrónica a la intrusión y originada por efectos de desplazamiento y arrastre diferencial entre la ofita y el Keuper a causa del emplazamiento de aquella.

Basándonos para las facies de borde en la presencia de clorita, de tremolita-actinolita y de epidota podemos suponer la existencia inicial de un metamorfismo de contacto desarrollado por el emplazamiento de las ofitas cuyas condiciones de estabilidad, en base a los minerales indicados, serían del orden de 400-500°C y presiones no superiores a 1 Kbar según WINKLER⁵. La ausencia de modificaciones mineralógicas de mayor gradiente indican que las ofitas debieron emplazarse en condiciones de avanzada consolidación y por consiguiente de baja temperatura. Por otra parte, el Keuper experimentó una mayor compactación y deshidratación a causa del gradiente térmico impuesto por la intrusión ofítica. De este modo se pudo facilitar la circulación de fluidos, entre los que adquiriría una mayor importancia el agua la cual a su vez pudo desempeñar una importante función de transporte para la difusión iónica como se deduce del progresivo aumento de ésta que es coincidente con el aumento de los iones Mg^{2+} y Fe^{3+} . Los resultados obtenidos por nosotros guardan buena correspondencia con los alcanzados por otros autores (BOSSIERE⁶, SUREAU et THIEBAUT⁷, ELLOY⁸, WALGENWITZ³, RUIZ CRUZ et al.⁹, etc.).

Como resultado de las transformaciones petrológicas observadas y del desarrollo de un metamorfismo de contacto, deducimos que las ofitas se emplazaron afectando, para el área indicada, solamente a los materiales del Keuper dada la ausencia de contactos de estas rocas con otros de edad superior.

DETERMINACIONES EXPERIMENTALES

a) Metodología: el método de geocronología óptica que hemos utilizado se basa

en la variación del coeficiente de dispersión de la birrefringencia (Kd). Fue inicialmente propuesto por KUZNETZOV¹⁰ y CHIBUKCHAM¹¹ en unos estudios de medidas de edades absolutas sobre rocas ígneas.

El Kd está expresado por la relación entre las diferencias de fase: Pa (con luz azul λ_a) y Pr (con luz roja λ_r) correspondientes a dos rayos que atraviesan la sección delgada de un mineral observado con nicoles cruzados. Este coeficiente se expresa: $Kd = Pa/Pr$.

Como las diferencias de fase Pa y Pr guardan una relación con los retardos, Ra y Rr, para las longitudes de onda empleadas, λ_a y λ_r , de acuerdo con las ecuaciones: $Ra = Pa \times \lambda_a$, y $Rr = Pr \times \lambda_r$; el coeficiente Kd puede también expresarse por el cociente de retardos Ra y Rr para las longitudes de onda λ_a y λ_r , según la expresión: $Kd = Pa/Pr = Ra/Rr \times \lambda_r/\lambda_a$.

En las primeras investigaciones sobre el método se efectuó una correlación, de forma empírica, entre el coeficiente Kd obtenido para los minerales de plagioclasas y la edad absoluta (T) de las rocas que contenían estos minerales. La expresión matemática obtenida es: $Kd = aT + b$, que corresponde a una recta con coeficiente angular a y ordenada en el origen b. Las dos constantes a y b se obtienen a partir de medidas de Kd y determinaciones isotópicas de K/Ar y Rb/Sr en minerales de plagioclasas. La recta obtenida $f(Kd, T)$ permite asignar a una roca una edad absoluta (T) a partir de un valor de coeficiente Kd. El límite máximo de fiabilidad del método alcanzaba los 140 M.A.

Posteriormente PIBOULE et VACHETTE¹² realizaron investigaciones sobre la propiedad indicada, Kd, en las plagioclasas y ampliaron el valor de correlación hasta 570 M.A., con una verificación satisfactoria mediante dataciones por métodos isotópicos. Esta correlación $f(Kd, T)$ fue expresada por una recta análoga a la de los autores precedentes (figura 1).

Recientemente, TINAO^{13,14} basándose en la metodología de PIBOULE et VACHETTE y tomando en consideración los resultados obtenidos por GUIMARAES¹⁵, aplica este método y lo confirma por medio de determinaciones isotópicas de K/Ar y Rb/Sr y las correspondientes de Kd en idénticas muestras corrigiendo la posición de la recta (figura 1).

Las medidas experimentales que hemos realizado han sido efectuadas en el Departamento de Petrología y Geoquímica de la Universidad Complutense de Madrid. El equipo utilizado y la metodología operatoria seguida son las expuestas por TINAO¹⁴ y las medidas experimentales aquí expresadas han sido realizadas bajo su dirección.

Los coeficientes de dispersión de la birefringencia, Kd, que hemos realizado han sido determinados sobre un total de 8 muestras cuyas características petrográficas son representativas a las observadas en los tres afloramientos seleccionados. Se han empleado siempre las plagioclasas como base de medición, pues es este el mineral más ampliamente utilizado para estos estudios debido a la facilidad que presenta para la determinación de retardos y porque además, permite estudiar más fácilmente las condiciones de cristalización.

Con los valores de Kd obtenidos en las plagioclasas, previamente tabulados y calculados sus errores medios, por aplicación de la recta Kd-T (figura 1) se obtienen para las rocas su edad absoluta con una aproximación ± 10 .M.A.

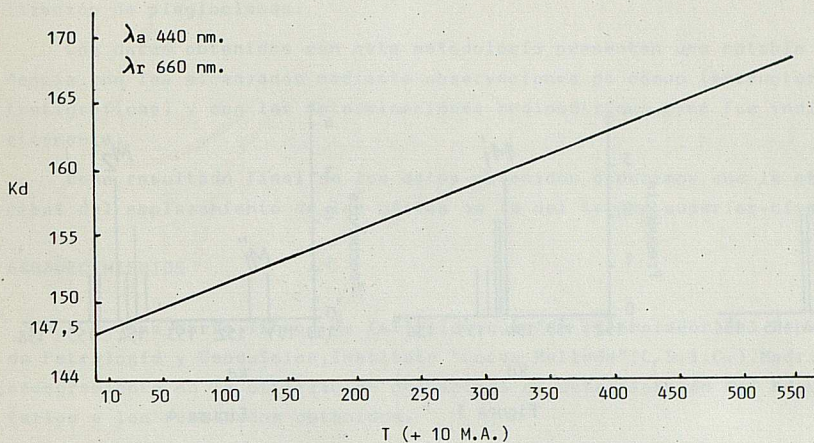


Figura 1. Relación entre el Kd y el tiempo (M.A.)

b) Resultados obtenidos: exponemos los resultados de coeficientes de Kd, obtenidos en muestras pertenecientes a cada uno de los tres afloramientos y posteriormente presentamos los resultados de forma integrada para los tres afloramientos.

AFLORAMIENTO DE AULET-1

La proyección de los valores de Kd obtenidos (figura 2) indica un proceso de cristalización continua marcado por un máximo (M_1). Los valores extremos de Kd se sitúan entre 153 (los más modernos que corresponderían al Jurásico medio) y 154.5 (los más antiguos que corresponderían al Keuper). El valor promedio de Kd es: $153,83 \pm 0,0735$ equivalente a 170 ± 10 M.A., es decir de edad Lias.

AFLORAMIENTO DE AULET-2

La proyección de los valores obtenidos (figura 3) indica una cristalización bastante continua con un máximo (M_1') comprendido entre los intervalos de Kd 154,2 y 154.8. El valor promedio: $154,38 \pm 0,043$ equivale a 180 ± 10 M.A., es decir correspondiente al Keuper.

AFLORAMIENTO DE ESTOPIÑAN

En este afloramiento se han realizado un total de 19 medidas de coeficientes de Kd cuya proyección de frecuencias es la de la figura 4. El histograma obtenido produce una cristalización distribuida en dos períodos principales M_1'' y M_2'' , de valores de Kd con el valor más alto en 154.8 y el mínimo en 151. El máximo M_2'' se sitúa entre los dos y su valor promedio es $154,19 \pm 0,083$ que se considera como característico. La edad correspondiente al máximo M_2'' es la de 170 ± 10 M.A.

equivalente al Lias.

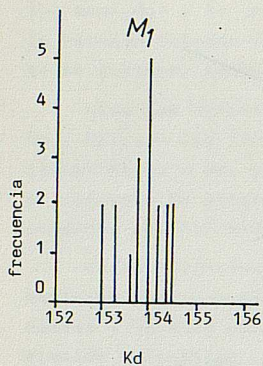


Figura 2

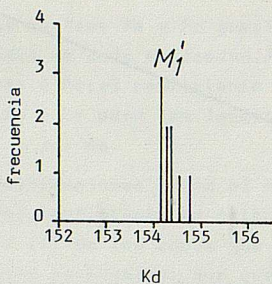


Figura 3

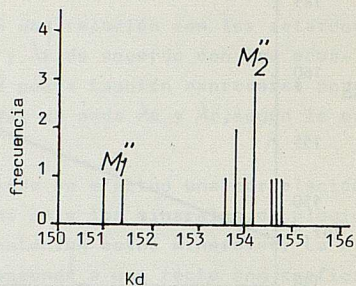


Figura 4

CONSIDERACIONES SOBRE LOS DATOS EXPERIMENTALES

Los resultados de las 38 medidas de coeficientes de Kd efectuadas (fig.5) indican cristalizaciones de plagioclasas con un máximo principal bien diferenciadas, con una distribución análoga en los tres afloramientos y un período de menor intensidad distante del anterior máximo. El máximo principal comprende el 94.7% del total de plagioclasas y representa valores de Kd muy análogos en los tres afloramientos, con un período de edad Keuper superior-Lías inferior.

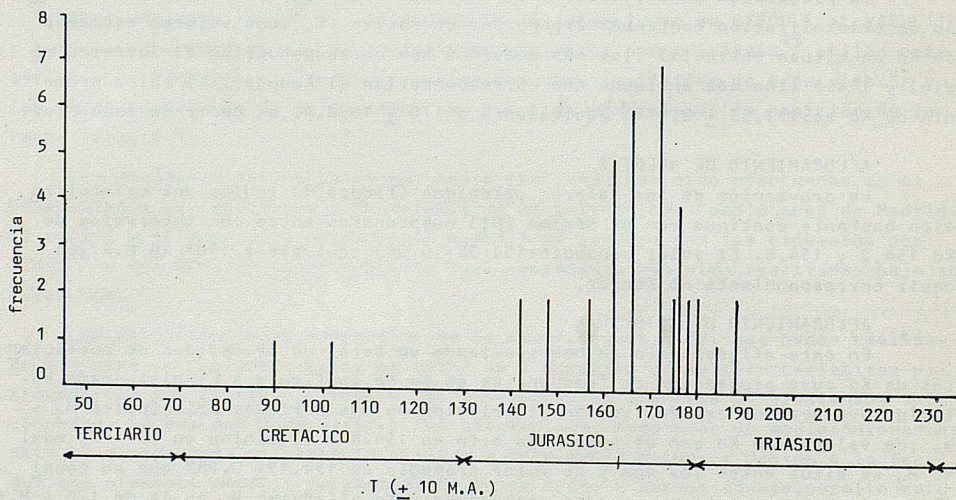


Figura 5

Este máximo representa la mayor duración e intensidad de cristalización de plagioclasas y se considera como característico de los afloramientos. Las edades más recientes, correspondientes al Cretácico (figura 5) pueden ser atribuidas a procesos de reactivación que afectan a las ofitas, con una posible cristalización de plagioclasas.

Los datos obtenidos con esta metodología presentan una notable correspondencia con los alcanzados mediante observaciones de campo (estructurales y estratigráficas) y con las determinaciones radiométricas, como fue indicado anteriormente.

Como resultado final de los datos obtenidos deducimos que la etapa principal del emplazamiento de las ofitas es la del Keuper superior-Lías.

AGRADECIMIENTOS

A D. José María Tínao, ya fallecido, que fue colaborador del Departamento de Petrología y Geoquímica, Instituto "Lucas Mallada" (C.S.I.C.), Madrid, por su asesoramiento en la utilización del método de determinación del Kd y sus comentarios a los resultados obtenidos.

BIBLIOGRAFIA

1. M.LAGO: Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza, I y II (1980)
2. M.LAGO y A.POCOVI: Acta Geológica Hispánica (1981, en prensa)
3. F.WALGENWITZ: Thèse. Fac. des Sc. et Tech. de l'Université de Besançon, I, (1976)
4. A.CASTELLARIN, F.LUCCHINI, J.ROSSEL, P.ROSSI, R.SARTORI y C.SAVELLI: Miner. Petrogr. Acta, 22, (1978)
5. H.WINKLER: Petrogenesis of metamorphic rocks. Springer-Verlag. New York (1974)
6. G.BOSSIERE: Thèse, 3^e cycle. Petrographie, Fac. Sc. Paris. (1968)
7. B.SUREAU et J.THIEBAUT: Bull. Soc. Hist. Nat. Toulouse, 90, (1969)
8. R.ELLOY: Rapport interne, S.N.P.A. (1973)
9. M.RUIZ CRUZ, M.DOVAL, J.BRELL y A.LA IGLESIA: Cuad. de Geol. Ibérica, 4, (1977)
10. E.A.KUTNETZOV: Edition de l'Etat. Moscou. (1964)
11. CHIBUKHCHJAM: Akad. Nauk. Arm. S.S.S.R., dokt, 37, nº 4, (1963)
12. M.PIBOULE et M.VACHETTE: C.R. Acad. Sc. Paris, 261, (1965)
13. J.M.TINAO: Apuntes sobre la determinación del método de Kd (inédito, 1975)
14. J.M.TINAO: Estud. Geológicos., 34, (1978)
15. D.GUIMARAES: D.N.P.M., D.G.M. Bol., 240, (1966)

NECROLOGICAS

**EXCMO. SR. D. FRANCISCO PASCUAL DE QUINTO Y MARTINEZ DE ANDO-
SILLA. Barón de Tamarit.**

Nació en Zaragoza el 24 de mayo de 1881 y falleció el 2 de septiembre de 1981.

Cursó sus estudios de Bachillerato en el colegio de las Escuelas Pías de Zaragoza, pasando después al Instituto Agrícola Alfonso XII de Madrid, hoy Escuela Superior de Ingenieros Agrónomos, donde obtuvo el título de Ingeniero Agrónomo el 8-XI-1905.

Su primer destino fue el de Jefe del Servicio Agronómico de la provincia de Logroño donde merece ser destacada su actuación en la reconstrucción del viñedo riojano destruido en su mayor parte por la invasión filoxérica.

En Logroño fué nombrado también director del Servicio Vitícola de la Diputación Provincial, y debido a su competencia y a los éxitos profesionales le fué concedida la Encomienda de la Orden Civil del Mérito Agrícola (28-IX-1912) a petición de los agricultores riojanos, siendo entonces trasladado a la Escuela Especial de Ingenieros Agrónomos de Madrid, donde desempeñó las Cátedras de Arboricultura, Selvicultura, Elayotécnica y Técnica Industrial.

A petición propia fue destinado en 1928 a la Confederación Sindical Hidrográfica del Ebro en Zaragoza como Jefe de los Servicios Agronómicos de la misma, dirigiendo la instalación y funcionamiento de las granjas de Ejea, Almudévar, Vivero frutal de Monzón, Estación de Riegos de Binéfar y la Granja La Melusa donde se estableció el primer cultivo de arroz en los nuevos regadíos aragoneses.

Una vez jubilado continuó realizando estudios e investigaciones sobre el cultivo del almendro en España, habiendo elaborado una invaluable obra sobre este tema, todavía inédita.

El Sr. Pascual de Quinto, modelo de hombre honesto y trabajador fue galardonado con la Gran Cruz de la Orden Civil del Mérito Agrícola el 20 de mayo de 1949.

Fue declarado socio de número de la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País en 30 de abril de 1932 y Académico Numerario de esta Academia el 28 de Junio de 1945.

El Sr. Pascual de Quinto fue elegido Presidente de nuestra Academia el 10 de diciembre de 1947, cargo que desempeñó hasta 12 de mayo de 1975 en que cesó a petición propia debido a su avanzada edad, siendo entonces nombrado Presidente honorario de la misma.

Durante su largo mandato, desplegó la Academia una gran actividad en tareas científicas y labor editorial, participando decididamente en la tarea de programación de los regadíos aragoneses.

ILMO. SR. D. FERNANDO CAMARA NIÑO.

El día 21 de noviembre de 1981 y a la edad de 74 años, falleció en Zaragoza, el Ilmo. Sr. D. Fernando Cámara Niño, Miembro Numerario de ésta Entidad, en la Sección de Naturales, desde el 4 de julio de 1945.

Natural de Zaragoza, era Doctor en Ciencias Naturales así como en Medicina, siendo Premio Extraordinario en ambos Doctorados. Los estudios de ambas carreras las realizó en la Universidad de Madrid.

Aprovechando sus desplazamientos estivales a la localidad de Corera de la Rioja Baja y animado por el Dr. Caballero, Catedrático de Botánica, inició su tesis doctoral acerca de la geobotánica de La Rioja, que era totalmente inédita, llenando ésta laguna acerca de la flora española.

Como resultado de todo ello publicó en 1936 su trabajo titulado "Estudios sobre flora de la Rioja Baja", que constituyó una gran aportación al estudio geobotánico de esa zona, en la que no se limita a hacer una descripción exhaustiva de las especies botánicas, sino que establece sus relaciones con el clima y suelo, proporcionando una visión paisajística, con la concertación de flora y terreno. En éste trabajo así como en otros posteriores, hay que resaltar las grandes dotes de dibujante del Dr. Cámara Niño, pues sus láminas son ejemplo de pulcritud y detalle acerca de las plantas observadas.

En el año 1932 accede por oposición a la Cátedra de Ciencias Naturales del Instituto de 2ª Enseñanza de Alcoy, que aprovechó para publicar varios trabajos botánicos de dicha zona.

En el año 1941 solicita su traslado al Instituto de 2ª Enseñanza "Miguel Servet" de Zaragoza, en el que compaginó sus tareas lectivas con las de investigador, conservándose en el mismo un interesante y completo herbario de plantas aragonesas, publicando una serie de trabajos que han llenado el hueco que existía acerca de la flora correspondiente a las regiones áridas de Aragón.

En 1947 era, por oposición, Médico Inspector de Balnearios, ocupación que por realizarse exclusivamente los veranos, compatibilizó siempre con la docencia. Resultado de ello son una serie de publicaciones muy interesantes acerca de la flora de las aguas medicinales.

Fue Profesor Adjunto de las Cátedras de Biología y Geología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza así como Asesor de Botánica durante muchos años, en la Estación Experimental de Aula Dei.

D. Fernando Cámara, a pesar de su valía, fue hombre en extremo humilde que trató siempre de pasar desapercibido, pero sus trabajos acerca de la Botánica de Aragón y la microflora de las aguas mineromedicinales constituyen una relevante obra básica e imprescindible para quienes deseen realizar estudios en estos campos.

Descansen en paz estos ilustres académicos.
