



Universidad de Zaragoza



Centro Politécnico Superior

PROYECTO FIN DE CARRERA  
INGENIERÍA INDUSTRIAL

---

# Modelización del flujo circulante en estructuras hidráulicas en canales y ríos

---

Autor: Héctor Ratia Sánchez

Director: Dr. Javier Murillo Castarlenas

Zaragoza, Junio de 2010



Departamento de Ciencia y Tecnología de  
Materiales y Fluidos.  
Área de Mecánica de Fluidos



## RESUMEN

### Modelización del flujo circulante en estructuras hidráulicas en canales y ríos

En este proyecto fin de carrera se aborda el problema de la modelización de estructuras hidráulicas en el contexto de la simulación numérica de flujos transitorios y estacionarios.

En este trabajo el objetivo principal es la modelización de estructuras hidráulicas mediante una representación correcta de los efectos que estas causan en el flujo aguas arriba y aguas abajo en un modelo bidimensional promediado en la vertical. Los efectos de la interacción estructura-flujo determinan una disipación de energía que puede explicarse en su mayor parte a través del estudio de los fenómenos de contracción y expansión en el plano horizontal. La modelización propuesta evita el cálculo en detalle de los patrones de flujo inmediatamente alrededor de la estructura, mediante la caracterización de las pérdidas de energía a través de un modelo que promedia las cantidades relevantes del problema en secciones virtuales que sustituyen por completo la discretización espacial de las estructuras participantes. A cambio, el modelo propuesto se puede integrar en cálculos que ofrezcan resultados para operaciones de gestión hidráulica en tiempo real.

El modelo propuesto involucra los tres regímenes de flujo en los que puede encontrarse una estructura inmersa en el flujo: lámina libre, en presión, o sumergida. En este trabajo se exploran diversas formulaciones para cada caso y han sido incluidos en el método numérico de tal forma que las estructuras puedan pasar por cualquiera de los tres regímenes, incluso de forma transitoria.

A pesar de ser costoso computacionalmente, en el caso de lámina libre, se pueden obtener soluciones correctas con el método numérico básico modelando las estructuras como parte del terreno. Esto permite, en un primer paso, estudiar el régimen de lámina libre y comprobar la influencia de distintos factores como la resolución de la malla y la disposición geométrica de los puentes. En un segundo paso, utilizando resultados experimentales se valora el correcto funcionamiento de las diversas modelizaciones planteadas mediante la comparación de los resultados de simulación con los datos experimentales. También se ha comparado con los resultados proporcionados por HEC-RAS, el programa de simulación más comúnmente aceptado en la hidráulica computacional. Finalmente se han simulado casos transitorios, observando que el comportamiento de las modelizaciones es correcto y permite el paso de un régimen a otro sin discontinuidades y de forma estable.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Modelo matemático del flujo y método numérico</b>	<b>7</b>
2.1. Modelo de aguas poco profundas . . . . .	7
2.2. Método de volúmenes finitos . . . . .	9
2.3. Esquema explícito de primer orden . . . . .	11
<b>3. Formulación de las pérdidas para lámina libre</b>	<b>13</b>
3.1. Ecuación de Borda-Carnot . . . . .	13
3.1.1. Aplicación a tuberías . . . . .	14
3.1.2. Aplicación a canales . . . . .	16
3.2. Ecuaciones de energía y momento en canales . . . . .	16
3.2.1. Expansión abrupta . . . . .	16
3.3. El puente como contracción más expansión . . . . .	18
3.4. Fórmula de Manning . . . . .	19
<b>4. Simulación en lámina libre como elevación del fondo</b>	<b>21</b>
4.1. Validez de las simulaciones y resolución de la malla . . . . .	22
4.2. Influencia de la longitud de los pilares . . . . .	23
4.3. Influencia de la posición de los pilares . . . . .	25
<b>5. Simulación en lámina libre como pérdidas singulares</b>	<b>29</b>
5.1. Comparación de las formulaciones . . . . .	32
5.2. Comparación con resultados experimentales en puentes . . . . .	32
5.3. Término de fricción . . . . .	33
<b>6. Comparación de transitorios en lámina libre</b>	<b>37</b>
6.1. Rotura de presa . . . . .	37
6.2. Oscilación de caudal . . . . .	38

<b>7. El puente en presión</b>	<b>43</b>
7.1. Formulación de las pérdidas en presión . . . . .	43
7.2. Simulación y comparación con resultados experimentales . . .	44
<b>8. El puente completamente sumergido</b>	<b>47</b>
8.1. Simulación y comparación con resultados experimentales . . .	48
8.2. Transitorio . . . . .	48
<b>9. Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>A. Resumen de los experimentos con puentes</b>	<b>53</b>
<b>B. El programa de simulación</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La simulación de flujos transitorios de lámina libre es una herramienta útil en la predicción de las posibles consecuencias que las inundaciones tienen tanto desde el punto de vista socio-económico como desde el punto de vista medio ambiental. Las herramientas computacionales permiten obtener a un bajo coste predicciones de valores de calado y velocidad del agua en posibles eventos y diseñar medidas para evitar o mitigar posibles daños. La necesidad de controlar y conocer cómo afectan las estructuras hidráulicas inmersas en los cauces naturales o en canales forma parte de los análisis que deben ser realizados para obtener conclusiones realistas. Los puentes son uno de los tipos de elementos más comunes que obstaculizan y afectan al flujo de agua en canales y ríos, y su correcta modelización dentro de los modelos de simulación es fundamental para obtener resultados fiables.

Mediante la resolución numérica de modelos bidimensionales, como el modelo de aguas poco profundas que va a ser empleado en este trabajo, podemos obtener información de la evolución de la lámina de inundación en el tiempo y en el espacio, generando mapas de calado y velocidad entre otros. El análisis en profundidad de la influencia de las estructuras requiere una modelización detallada de las características del flujo circulante y puede dar lugar a un coste computacional extremadamente alto cuando se realizan simulaciones en tramos de ríos y canales de varios kilómetros. En este trabajo se van a estudiar estrategias de modelización que eviten tener que describir con gran detalle el flujo circulante en las estructuras de interés. De esta forma se proporcionarán resultados equivalentes, que ofrecerán menor información en las zonas que alberguen estructuras (zona B en la figura 1.1), ofreciendo a cambio información correcta sobre las consecuencias de su existencia en las regiones aguas arriba y aguas abajo (zonas A y C respectivamente en la figura 1.1) de las mismas a un bajo coste computacional.

Con este fin, en este proyecto, se va a estudiar la modelización de los

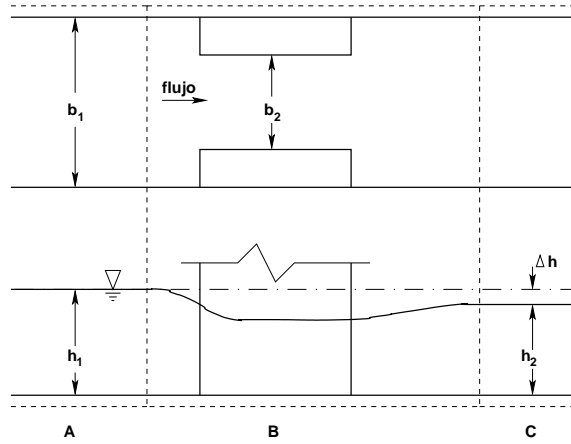


Figura 1.1: Esquema del problema de una estructura hidráulica en un canal, visto en planta (arriba) y de perfil (abajo).

puentes atendiendo a la forma en que se disipa la energía del flujo en estos procesos. Sobre la base de un modelo de simulación de flujos bidimensionales transitorios existente en el departamento, el trabajo de este proyecto evaluará diversas opciones de modelización de la presencia de una estructura tipo puente. Para ello, en un primer paso, la misma herramienta de simulación ofrece la posibilidad de estudiar diferentes configuraciones con detalle y evaluar esta disipación energética. Mediante el análisis de estos resultados, se definirán formulaciones de la pérdida de energía que sustituirán la necesidad de implementar en detalle la geometría de las estructuras a simular. Se compararán con formulaciones clásicas y se analizará el rango de validez de las mismas. Además se diferenciarán tres situaciones: flujo en lámina libre (sin llegar al tablero del puente), flujo a presión (el flujo llega al tablero sin sobrepasarlo) y flujo sobre el puente completamente sumergido (sobrepasa el tablero).

Los modelos serán contrastados con experimentos de laboratorio (experimentos realizados en un trabajo anterior del área [Burguete et ál., 2008]) y con el programa de cálculo de flujo unidimensional comúnmente aceptado [HEC-RAS 4.1, 2010].

En el capítulo 2 se presenta brevemente el modelo matemático de aguas poco profundas y el método numérico utilizado para discretizarlo, que es el método con el que trabaja el programa de simulación.

En los capítulos 3 a 6 se trata la situación de flujo en lámina libre. En el capítulo 3 se introducen distintas formulaciones de la pérdida de energía para la situación de flujo en lámina libre. En el capítulo 4 se estudia el comportamiento de los puentes en lámina libre representando los puentes como



---

elevación del fondo. En el capítulo 5 se utilizan las formulaciones introducidas en el capítulo 3 y se compara con los resultados experimentales y los del capítulo 4. Finalmente en el capítulo 6 se comparan situaciones transitorias simuladas con la formulación aproximada y con la altura del fondo.

En el capítulo 7 se trata la situación de flujo a presión. Se presenta la formulación utilizada y los resultados obtenidos. De manera similar se trata la situación del puente completamente sumergido en el capítulo 8. En este capítulo también se presentan casos transitorios en los que el puente pase por las tres posibles situaciones: lámina libre, presión y sumergido.

Finalmente, en el capítulo 9 se presentan las conclusiones y el trabajo futuro.

Al final de la memoria se pueden consultar los anexos y la bibliografía. El anexo A contiene un resumen de los experimentos. El anexo B explica el funcionamiento y uso del programa de simulación de flujos bidimensiones del área utilizado en este trabajo.



## Capítulo 2

# Modelo matemático del flujo y método numérico

En este capítulo se explica brevemente el modelo matemático y el método numérico en que se basa el programa utilizado para las simulaciones, que se ha modificado para reflejar el efecto de los puentes en el flujo.

### 2.1. Modelo de aguas poco profundas

El modelo de aguas poco profundas se obtiene aplicando algunas hipótesis a las ecuaciones de Navier-Stokes. Tras obtener las ecuaciones de Reynolds 3D, se pueden integrar en la vertical para obtener las ecuaciones 2D. Del término fuente de las ecuaciones 2D promediadas en la vertical se pueden despreciar:

- La acción de la fuerza de Coriolis
- La acción del viento
- La turbulencia

con lo que se llega al sistema de ecuaciones de aguas poco profundas. Las ecuaciones de aguas poco profundas son:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (2.1)$$

El término  $\mathbf{U}$  es el vector de variables, que contiene el calado  $h$  y los caudales en 2D:  $q_x = uh$  y  $q_y = vh$ ,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

donde  $u$  y  $v$  son las velocidades promedio vertical. Los términos  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  son los términos convectivos

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} q_x \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_x q_y}{h} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} q_y \\ \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_x q_y}{h} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

y finalmente  $\mathbf{S}$  representa los términos fuente,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx} - S_{Hx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy} - S_{Hy}) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

que contiene las pendientes del fondo:

$$S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.5)$$

los términos de rozamiento en función del coeficiente de rugosidad de Manning:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2.6)$$

y un término que representa las pérdidas de energía por otros mecanismos en función de la altura total:

$$S_{Hx} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad S_{Hy} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad (2.7)$$

Este término servirá para representar los puentes de manera simplificada a traves de las pérdidas de altura total  $\Delta H$  que causan.

El sistema 2.1 es dependiente del tiempo, no lineal y contiene términos fuente. Bajo la hipótesis de que la advección sea dominante se puede clasificar y tratar numéricamente como los sistemas de la familia hiperbólica. Entre sus propiedades matemáticas se incluye la existencia de un Jacobiano,  $\mathbf{J}_n$ , del flujo normal a una dirección dada por el vector unitario  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}n_x + \mathbf{G}n_y$  definido como:

$$\mathbf{J}_n = \frac{\partial \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} n_x + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} n_y \quad (2.8)$$

cuyas componentes son:

$$\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (gh - u^2)n_x - uvn_y & vn_y + 2un_x & un_y \\ (gh - v^2)n_y - uvn_x & vn_x & un_x + 2vn_y \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Los valores propios de  $\mathbf{J}_n$  representan las velocidades características de la información relevante en este modelo:

$$\lambda^1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c \quad \lambda^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \lambda^3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c \quad (2.10)$$

con  $\mathbf{u} = (u, v)$ ,  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  y  $c$  es la velocidad de las ondas de superficie de pequeña amplitud  $c = \sqrt{gh}$ . Los vectores propios de este Jacobiano son:

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + cn_x \\ v + cn_y \end{pmatrix} \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -cn_y \\ cn_x \end{pmatrix} \quad e^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - cn_x \\ v - cn_y \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Este Jacobiano se utiliza como base de la discretización numérica *upwind* presentada en la siguiente sección.

## 2.2. Método de volúmenes finitos

Para aplicar el método de volúmenes finitos el primer paso es integrar el sistema 2.1 en el volumen del dominio, una celda  $\Omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \mathbf{E}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega \quad (2.12)$$

La tercera integral se puede reescribir como [Vázquez-Cendón, 1999]

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dl \quad (2.13)$$

y aplicando el teorema de Gauss:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dl = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dl \quad (2.14)$$

Si se subdivide el dominio en celdas  $\Omega_i$ , usando una malla fija en el tiempo, se puede aplicar 2.14 a cada celda. Suponiendo primer orden en el espacio, la ecuación 2.14 se puede reducir a [Murillo et ál., 2007]

$$\frac{(\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n)}{\Delta t} A_i + \sum_{k=1}^{NL} (\delta \mathbf{E} - \mathbf{T})_k \cdot \mathbf{n}_k l_k = 0 \quad (2.15)$$

donde  $A_i$  es el área de la celda,  $j$  es una celda contigua a  $i$  conectada a través del lado  $k$ .  $\delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_j - \mathbf{E}_i$  es la diferencia de flujo en el lado  $k$  de la celda siendo  $\mathbf{E}_i$  y  $\mathbf{E}_j$  los valores de la función  $\mathbf{E}$  en las celdas  $i$  y  $j$  respectivamente.

$\mathbf{n}_k = (n_x, n_y)$  es el vector unitario normal al lado  $k$  de la celda, en dirección hacia fuera.  $l_k$  es la longitud correspondiente al lado  $k$ ,  $NL$  es el número de lados de la celda.

Debido al caracter no lineal del flujo  $\mathbf{E}$ , la definición de un Jacobiano aproximado  $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{n},k}$  permite una linealización local de tipo Roe [Roe, 1986]. Este tratamiento proporciona tres valores propios reales  $\tilde{\lambda}_k^m$  con sus vectores propios asociados  $\tilde{\mathbf{e}}_k^m$ , construidos con los promedios de las variables:

$$\tilde{u}_k = \frac{u_i\sqrt{h_i} + u_j\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}}, \quad \tilde{v}_k = \frac{v_i\sqrt{h_i} + v_j\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_j}}, \quad \tilde{c}_k = \sqrt{g \frac{h_i + h_j}{2}} \quad (2.16)$$

obteniéndose

$$\tilde{\lambda}_k^1 = (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} + \tilde{c})_k \quad \tilde{\lambda}_k^2 = (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})_k \quad \tilde{\lambda}_k^3 = (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} - \tilde{c})_k \quad (2.17)$$

y

$$\tilde{\mathbf{e}}_k^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \end{pmatrix}_k \quad \tilde{\mathbf{e}}_k^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{c}n_y \\ -\tilde{c}n_x \end{pmatrix}_k \quad \tilde{\mathbf{e}}_k^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \end{pmatrix}_k \quad (2.18)$$

Utilizando los vectores propios  $\tilde{\mathbf{e}}_k^m$  se pueden construir las matrices  $\tilde{\mathbf{P}}_k$  y  $\tilde{\mathbf{P}}_k^{-1}$  que diagonalizan  $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{n},k}$

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{n},k} = (\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}\tilde{\mathbf{P}}^{-1})_k \quad \tilde{\mathbf{P}}_k = (\tilde{\mathbf{e}}_k^1, \tilde{\mathbf{e}}_k^2, \tilde{\mathbf{e}}_k^3) \quad (2.19)$$

donde  $\tilde{\Lambda}$  es la matriz diagonal de los valores propios  $\tilde{\lambda}_k^m$ . Para la matriz Jacobiana aproximada también se cumple [Roe, 1986]

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{n},k}\tilde{\mathbf{e}}_k^m = \tilde{\lambda}_k^m\tilde{\mathbf{e}}_k^m, \quad m = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

El problema se reduce a un problema de Riemann 1D proyectado en la dirección  $\mathbf{n}$  en cada lado de la celda. Con el procedimiento de diferencia de flujo, la diferencia en  $\mathbf{U}$  a través de un lado de la malla,  $\delta\mathbf{U}_k = \mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i$ , se proyecta en la base de la matriz de vectores propios

$$\delta\mathbf{U}_k = \sum_{m=1}^3 (\alpha\tilde{\mathbf{e}})_k^m \quad (2.21)$$

Esta notación se usa de aquí en adelante para denotar los incrementos espaciales en los lados  $k$ . Los coeficientes  $\alpha_k$  son:

$$\alpha_k^{1,3} = \frac{\delta h_k}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}_k} (\delta\mathbf{q}_k - \tilde{\mathbf{u}}_k\delta h_k) \cdot \mathbf{n}_k \quad \alpha_k^2 = \frac{1}{2\tilde{c}_k} (\delta\mathbf{q}_k - \tilde{\mathbf{u}}_k\delta h_k) \cdot \mathbf{n}_{T,k} \quad (2.22)$$

con  $\mathbf{n}_{T,k} = (-n_y, n_x)$ . Las contribuciones  $\delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})_k$  en el lado  $k$  se pueden escribir como:

$$\delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})_k = \sum_{m=1}^3 (\tilde{\lambda} \alpha \tilde{\mathbf{e}})_k^m l_k \quad (2.23)$$

Se procede de la misma manera con los términos fuente referidos a la pendiente del fondo, el término de fricción y el que representa a otras pérdidas de energía. Se linealizan también en la base de la matriz de vectores propios para reforzar el equilibrio discreto con los términos de flujo, así se asegura la propiedad C en el caso estacionario [Murillo *et ál.*, 2009] [Rosatti *et ál.*, 2007]

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_k = \tilde{\mathbf{P}}_k \mathbf{B}_k l_k = \sum_{m=1}^3 (\beta^m \tilde{\mathbf{e}}^m)_k l_k \quad (2.24)$$

con  $\mathbf{B}_k = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_k^T$ . Los coeficientes son

$$\beta_k^{1,3} = \mp \frac{\tilde{c}_k}{2} (\delta z + \delta H + d_{\mathbf{n}} S_f)_k \quad \beta_k^2 = 0 \quad (2.25)$$

con la discretización del término de fricción [Murillo *et ál.*, 2009]

$$S_{f,k} = \left( \frac{n^2 \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} |\tilde{\mathbf{u}}| d_{\mathbf{n}}}{\text{máx}(h_i, h_j)^{4/3}} \right)_k \quad (2.26)$$

donde  $d_{\mathbf{n}}$  es la distancia entre los centroides de las celdas que comparten el lado  $k$  proyectada en la dirección  $\mathbf{n}$ .  $\delta H$  es el término de pérdidas singulares cuya formulacion see propondrá en los apartados correspondientes.

## 2.3. Esquema explícito de primer orden

El esquema *upwind* explícito de primer orden para el sistema 2.15 adquiere la forma

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \Delta t \sum_{k=1}^{NE} \Psi_{i,k}^n \quad (2.27)$$

expresado como las aportaciones de cada lado,  $\Psi_{i,k}$ , calculadas como

$$\Psi_{i,k} = \sum_{m=1}^3 ((\tilde{\lambda}^- \alpha - \beta^-) \tilde{\mathbf{e}})_k^m \frac{l_k}{A_i} \quad (2.28)$$

donde

$$\tilde{\lambda}^- = \frac{1}{2}(\tilde{\lambda} - |\tilde{\lambda}|) \quad \beta^- = \frac{1}{2}(1 - \text{sign}(\tilde{\lambda})\beta) \quad (2.29)$$

y el paso de tiempo  $\Delta t$  no puede tomar valores cualesquiera, sino que está limitado por la condición de Courant-Friedrichs-Lewy.





## Capítulo 3

# Formulación de las pérdidas para lámina libre

En este capítulo se presenta la formulación utilizada para modelar los puentes en el caso de lámina libre. Las pérdidas de energía que ocasiona el puente son tres:

- Pérdidas por el proceso de contracción al entrar al puente.
- Pérdidas por el proceso de expansión al salir del puente.
- Pérdidas por fricción.

Las más importantes cuantitativamente son la contracción y expansión, para las que se presentan tres formulaciones diferentes. Adicionalmente se utilizará la fórmula de Manning para valorar las pérdidas por fricción en puentes de distinta longitud.

### 3.1. Ecuación de Borda-Carnot

La ecuación de Borda-Carnot es una descripción empírica de las pérdidas de energía mecánica del fluido debidas a expansiones abruptas del flujo. La ecuación recibe su nombre de Jean-Charles de Borda (1733-1799) y Lazare Carnot (1753-1823). Esta ecuación se utiliza tanto para flujo en canales como para flujo en tuberías. La ecuación de Borda-Carnot es:

$$\Delta E = \xi \frac{1}{2} \rho (v_1 - v_2)^2 \quad (3.1)$$

en la que  $\Delta E$  es la pérdida de energía del fluido por unidad de volumen,  $\xi$  es un coeficiente de pérdidas empírico (adimensional y de valor entre 0 y 1),

$\rho$  es la densidad del fluido,  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades medias del flujo aguas arriba y aguas abajo de la expansión. En el caso de una expansión grande y abrupta el coeficiente de pérdidas es uno. En otros casos, el coeficiente se ha de determinar por otros medios, frecuentemente a través de fórmulas empíricas basadas en datos experimentales. La ecuación de pérdidas de Borda-Carnot es válida solo para velocidades decrecientes,  $v_1 > v_2$ , en caso contrario la pérdida de energía  $\Delta E$  es cero ya que sin trabajo mecánico de fuerzas externas no puede haber una ganancia de energía mecánica del fluido. El suavizado de los contornos afecta al coeficiente  $\xi$ . Por ejemplo en las expansiones de tuberías se pueden reducir las pérdidas de energía utilizando un difusor que provoque una expansión gradual.

### 3.1.1. Aplicación a tuberías

#### Expansión abrupta

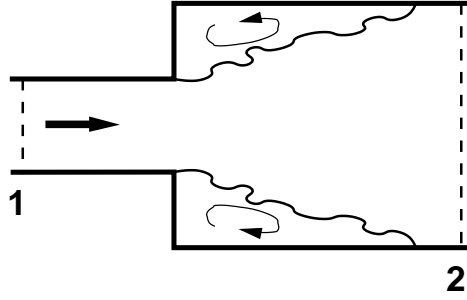


Figura 3.1: Expansión abrupta

Se aplica la ecuación de Borda-Carnot al flujo a través de una expansión abrupta en una tubería horizontal (figura 3.1). En la sección 1, la velocidad media del flujo es  $v_1$ , la presión  $p_1$  y el área de la sección  $A_1$ . Las cantidades correspondientes en la sección 2 tras la expansión son  $v_2, p_2$  y  $A_2$ . El coeficiente de pérdidas  $\xi$  para esta expansión abrupta es 1. Aplicando la conservación de la masa, y suponiendo que la densidad del fluido es constante, el caudal que fluye por ambas secciones es el mismo:  $A_1 v_1 = A_2 v_2$ . De acuerdo a la ecuación de Borda-Carnot sigue que las pérdidas de energía en esta expansión son:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 v_2^2$$

Y la correspondiente pérdida de altura total es:

$$\Delta H = \frac{\Delta E}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad (3.2)$$

### Contracción abrupta

En el caso de una reducción abrupta del diametro de la tubería (figura 3.2), sin suavizar, el flujo no puede adaptarse al giro brusco hacia la tubería más estrecha. Como consecuencia hay desprendimiento de flujo creando zonas de recirculación a la entrada de la tubería estrecha. La vena de flujo principal se contrae entre las zonas de recirculación y más adelante se vuelve a expandir para llenar toda la sección de la tubería. No hay grandes pérdidas de energía

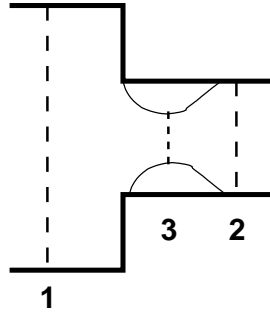


Figura 3.2: Contracción abrupta

entre la sección 1, aguas arriba de la contracción, y la sección 3, en la que la contracción del flujo es máxima. Sin embargo las pérdidas en la expansión entre las secciones 2 y 3 son considerables. Estas pérdidas se pueden expresar a través de la ecuación de Borda-Carnot, usando un coeficiente de contracción  $\mu$ :

$$\mu = \frac{A_3}{A_2} \quad (3.3)$$

con  $A_3$  el área de la sección 3, la de mayor contracción del flujo, y  $A_2$  el área de la sección de la tubería estrecha. Dado que  $A_3 \leq A_2$ , el coeficiente de contracción será siempre inferior a la unidad:  $\mu \leq 1$ . Se puede aplicar de nuevo conservación de la masa, y suponiendo densidad del fluido  $\rho$  constante el caudal en las tres secciones es constante:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3$$

con  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  las velocidades medias del flujo en las secciones correspondientes. De acuerdo a la ecuación de Borda-Carnot (con coeficiente de pérdidas  $\xi = 1$ ) la pérdida de energía debida a la contracción de la tubería sería:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \rho (v_3 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 v_2^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 v_1^2 \quad (3.4)$$

y la pérdida de altura total correspondiente:

$$\Delta H = \frac{v_1^2}{2g} \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (3.5)$$

De acuerdo a los experimentos de Weisbach, el coeficiente de contracción para contracciones abruptas es aproximadamente:

$$\mu = 0.63 + 0.37 \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^3 \quad (3.6)$$

### 3.1.2. Aplicación a canales

#### Expansión abrupta

La pérdida de altura total  $\Delta H$  en una expansión abrupta (figura 3.1), de  $A_1$  a  $A_2$ , de acuerdo a la fórmula de Carlier [Carlier, 1972]:

$$\Delta H_{exp} = \xi_{exp} \frac{v_2^2}{2g} \quad (3.7)$$

$$\xi_{exp} = \left[ \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right] \quad (3.8)$$

#### Contracción abrupta

La pérdida de altura total  $\Delta H$  en una contracción abrupta, de  $A_1$  a  $A_2$  (figura 3.2) viene dada por Carlier como:

$$\Delta H_{con} = \xi_{con} \frac{v_2^2}{2g} \quad (3.9)$$

$$\xi_{con} = \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right] \quad (3.10)$$

donde  $m$  es un coeficiente de contracción. Un valor típico sugerido para  $m$  es  $m = 0.63$  en [Soares-Fraza, 2008].

## 3.2. Ecuaciones de energía y momento en canales

### 3.2.1. Expansión abrupta

Se puede obtener una fórmula teórica bajo ciertas hipótesis [Henderson, 1966]. En la figura 3.3 se considera que  $E_1 = E_2$  y que  $M_2 = M_3$ , siendo  $E$  la energía

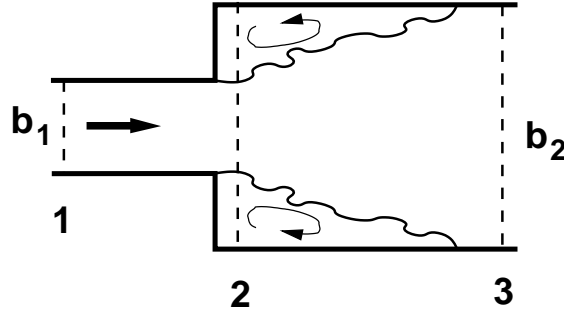


Figura 3.3: Expansión abrupta

$E = h\rho g + v^2\rho/2$ , y  $M$  el momento  $M = Qv/g + h^2b/2$ . Suponiendo:

- a) que el calado en la sección 2 es constante e idéntico al de la sección 1  
 $h_1 = h_2$
- b) que el ancho del agua en movimiento en la sección 2 es igual a  $b_1$

De la aplicación de la ecuación del momento:

$$M_2 = M_3$$

$$\frac{Q_2 v_2}{g} + \frac{h_2^2 b_2}{2} = \frac{Q_3 v_3}{g} + \frac{h_3^2 b_2}{2}$$

De la condición a)  $h_2 = h_1$  y de la condición b)  $v_2 = v_1$ . Además  $Q_3 = Q_2 = Q_1 = h_1 b_1 v_1$  y  $v_3 = v_1 \frac{h_1 b_1}{h_3 b_2}$

$$\frac{h_1 b_1 v_1^2}{g} + \frac{h_1^2 b_2}{2} = \frac{h_1 b_1 v_1^2}{g} \frac{h_1 b_1}{h_3 b_2} + \frac{h_3^2 b_2}{2}$$

Dividiendo esta ecuación entre  $h_1^2 b_1$ :

$$\frac{v_1^2}{h_1 g} + \frac{b_2}{2b_1} = \frac{v_1^2}{gh_1} \frac{h_1 b_1}{h_3 b_2} + \frac{h_3^2 b_2}{2h_1^2 b_1}$$

Ahora se puede introducir el número de Froude  $Fr_1^2 = \frac{v_1^2}{gh_1}$  y los coeficientes  $r = b_2/b_1$  y  $s = h_3/h_1$ .

$$Fr_1^2 + \frac{r}{2} = \frac{Fr_1^2}{rs} + \frac{rs^2}{2} \quad (3.11)$$

De la ecuación de la energía se puede obtener:

$$\Delta H = H_1 - H_3 = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} - h_3 - \frac{v_3^2}{2g}$$

$$\Delta H = h_1 - h_3 + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \frac{h_1^2 b_1^2}{h_3^2 b_2^2}$$

$$\Delta H = h_1(1 - s) + \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{1}{r^2 s^2}\right)$$

Utilizando el numero de Froude  $h_1 = \frac{v_1^2}{gFr_1^2}$ :

$$\Delta H = \frac{v_1^2}{gFr_1^2}(1 - s) + \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{1}{r^2 s^2}\right)$$

$$\Delta H = \frac{v_1^2}{2g} \left(\frac{2}{Fr_1^2} - \frac{2s}{Fr_1^2}\right) + \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{1}{r^2 s^2}\right)$$

$$\Delta H = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 + \frac{2}{Fr_1^2} - \frac{1}{r^2 s^2} - \frac{2s}{Fr_1^2}\right) \quad (3.12)$$

De la ecuación 3.11 se puede despejar  $s$  suponiendo que  $Fr_1$  es lo suficientemente pequeño como para hacer despreciable  $Fr_1^4$  y potencias superiores. Introduciendo  $s$  en la ecuación 3.12 se puede calcular la pérdida de altura total entre las secciones 1 y 3 como:

$$H_1 - H_3 = \Delta H = \frac{v_1^2}{2g} \left[ \left(1 - \frac{b_1}{b_2}\right)^2 + \frac{2Fr_1^2 b_1^3 (b_2 - b_1)}{b_2^4} \right] \quad (3.13)$$

### 3.3. El puente como contracción más expansión

Utilizando las fórmulas de las secciones anteriores se puede modelar el puente como una contracción en el flujo seguida de una expansión:

$$\Delta H_{\text{puente}} = \Delta H_{\text{contracción}} + \Delta H_{\text{expansión}} \quad (3.14)$$

De acuerdo a la figura 3.4 se tendrían

$$\Delta H_{\text{contracción}} = \frac{v_1^2}{2g} f_{\text{contracción}}$$

$$\Delta H_{\text{expansión}} = \frac{v_4^2}{2g} f_{\text{expansión}}$$

donde los factores  $f$  dependerían del conjunto de fórmulas elegido. Se pueden comparar los factores  $f$  según las distintas formulaciones en la tabla 3.3.

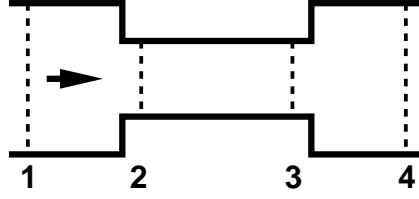


Figura 3.4: Secciones de referencia en un puente

Formulación	$f_{contracción}$	$f_{expansión}$
B-C tuberías	$\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$	$\left(\frac{A_4}{A_3} - 1\right)^2$
Carlier	$\left[\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \frac{1}{9}\right] \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$	$\left(\frac{A_4}{A_3} - 1\right)^2 + \frac{1}{9}$
Henderson		$\left[\left(1 - \frac{b_3}{b_4}\right)^2 + \frac{2Fr_3^2 b_3^3 (b_4 - b_3)}{b_4^4}\right] \left(\frac{A_4}{A_3}\right)^2$

Tabla 3.1: Resumen de las formulaciones.

### 3.4. Fórmula de Manning

La fórmula empírica de Manning en una dimensión adopta la siguiente forma

$$v = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_{fricción}^{1/2} \quad (3.15)$$

se puede utilizar para calcular las pérdidas por fricción despejando la pendiente  $S_{fricción}$ :

$$S_{fricción} = \frac{v^2 n^2}{R_h^{4/3}} \quad (3.16)$$

donde  $v$  es la velocidad promedio de la sección,  $v = Q/A$ ,  $n$  es el número de Manning, y  $R_h$  es el radio hidráulico obtenido de dividir el área por el perímetro mojado:

$$R_h = \frac{A}{P_m} \quad (3.17)$$

donde  $A$  es una sección mojada representativa del puente. Y finalmente la pérdida de energía por rozamiento en el puente se ha formulado como:

$$\Delta H_{fricción} = L_{puente} S_{fricción} \quad (3.18)$$





## Capítulo 4

# Simulación en lámina libre como elevación del fondo

Una posible representación de los puentes en el caso de lámina libre es mediante la altura del fondo. Cambiando convenientemente la elevación de algunas de las celdas de la malla se pueden representar puentes con formas rectangulares (esta técnica no sirve para arcos), como si fueran una parte más del cauce por donde discurre el río o canal. Un ejemplo de este tipo de representación de los puentes se puede ver en la figura 4.1.

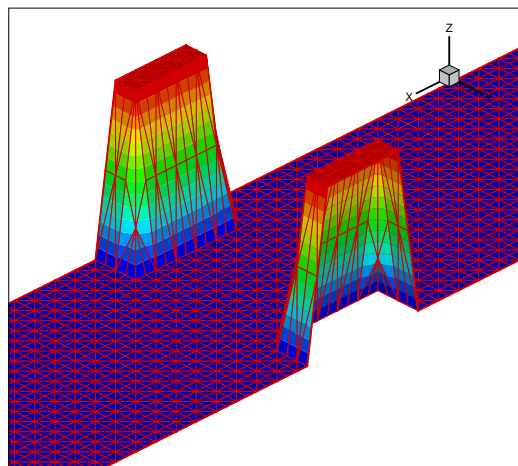


Figura 4.1: Puente representado como elevación del fondo.

Este capítulo tiene tres secciones, en la primera los objetivos son:

1. Comprobar la corrección de los resultados obtenidos mediante simulación comparando con resultados experimentales.

2. Estudiar el efecto de la resolución de la malla en los resultados.

Una vez valorados esos dos puntos se pueden tomar las simulaciones de lámina libre por elevación del fondo como si fueran la realidad, y utilizarlas para evaluar otras representaciones de los puentes. Para analizar estos dos puntos se han realizado varias simulaciones de los casos experimentales en lámina libre representables mediante elevación del fondo.

Las secciones segunda y tercera tienen por objetivo:

1. Estudiar la influencia de la longitud de los pilares.
2. Estudiar la influencia la disposición de los pilares en el cauce.

Para estos casos no se dispone de datos experimentales, pero al representarse por elevación del fondo se considera que las conclusiones obtenidas son válidas.

## 4.1. Validez de las simulaciones y resolución de la malla

Las geometrías y denominación se pueden consultar en el anexo A. Para cada puente se han realizado simulaciones con 5 mallas diferentes, expeto para el puente T que se han realizado 4. Se ha procurado que estas mallas representen de manera fiel el alzado de los puentes y aproximen la dimensión en la dirección del flujo. Como resultado de la simulación interesan dos aspectos:

- El calado aguas arriba,  $h_u$ , por ser el dato experimental más relevante.
- La información de detalle de lo que pasa alrededor del puente.

Se dispone de los valores de  $h_u$  experimentales con los que se comparan los resultados de la simulación en la tabla 4.1. Incluso las mallas más gruesas consiguen capturar adecuadamente el fenómeno de pérdida de energía causado por el puente. Por tanto en simulaciones de casos de lámina libre modelables con la elevación del fondo, se pueden tomar los resultados de la simulación como correctos.

Respecto al detalle que se obtiene alrededor del puente, no se dispone de medidas experimentales con las que comparar. Sin embargo se puede observar en la figura 4.2 cómo una malla simple captura bien la pérdida de energía pero no llega a capturar el detalle de la estela que se produce tras el puente

## 4.2. Influencia de la longitud de los pilares

Puente	$Q(m^3/h)$	Experimental	$h_u(cm)$				
			Simulación: $N_{celdas}$				
			536	2128	4800	19200	43200
Rect1	9.2	5.7	5.63	5.69	5.72	5.74	5.75
T	5.8	3.2	—	3.14	3.12	3.12	3.13
T	8.2	4	—	3.84	3.82	3.81	3.84
RC	14.8	10.4	10.22	10.09	10.08	10.08	10.06
			Simulación: $N_{celdas}$				
			1596	6384	14406	24678	38828
Rect2	9.2	4.2	4.18	4.21	4.22	4.39	4.36
Rect2	14.8	6	5.72	5.73	5.77	6	5.96

Tabla 4.1: Comparación de resultados experimentales y de simulación con puentes representados por la elevación del fondo.

T. En la figura 4.3 se observa que al aumentar la resolución de la malla se puede apreciar el detalle de la reflexión de ondas en las paredes del canal y cambia ligeramente la posición el salto hidráulico.

## 4.2. Influencia de la longitud de los pilares

En las formulaciones clásicas presentadas en la tabla 3.3 no aparece ninguna variable que represente la longitud de canal ocupada por los pilares del puente, pero no es una variable que a priori se pueda descartar. Según Yarnell[Yarnell, 1934a][Yarnell, 1934b] esta variable tiene una influencia pequeña. En sus experimentos utilizando pilares de proporciones 1:4, 1:7 y 1:13 notó que la pérdida de energía era un 5 % y un 10 % mayor en los pilares más esbeltos respecto al de proporción 1:4.

Se han hecho simulaciones para comprobar esta hipótesis, representando como altura de fondo puentes con pilares en las proporciones 1:4, 1:7 y 1:13 (figura 4.4). En las simulaciones se han utilizado dos mallas con distinta obstrucción del canal. Una con dos pilares de 3cm de ancho y otra con pilares de 6cm. Las dimensiones se dan en la tabla 4.2. Los resultados de estas simulaciones, en la figura 4.5 muestran que la pérdida de altura total es muy similar para las tres proporciones simuladas, la longitud de los pilares tiene una influencia pequeña en las pérdidas de energía. En la figura 4.6 se puede

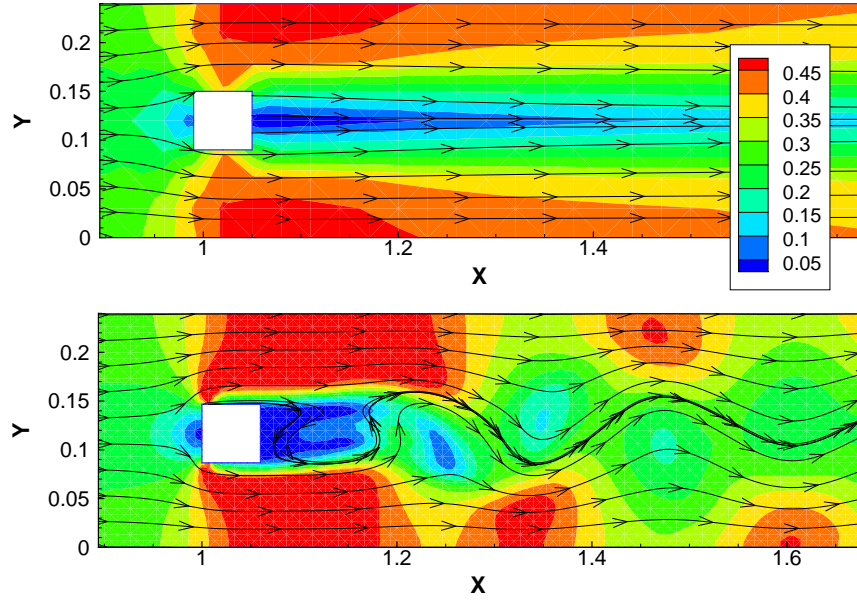


Figura 4.2: Módulo de la velocidad (representada en código de colores,  $m/s$ ) y líneas de corriente del puente T con caudal de  $8.2 m^3/h$ . Mallas de 2128 celdas (arriba) y 19200 celdas (abajo).

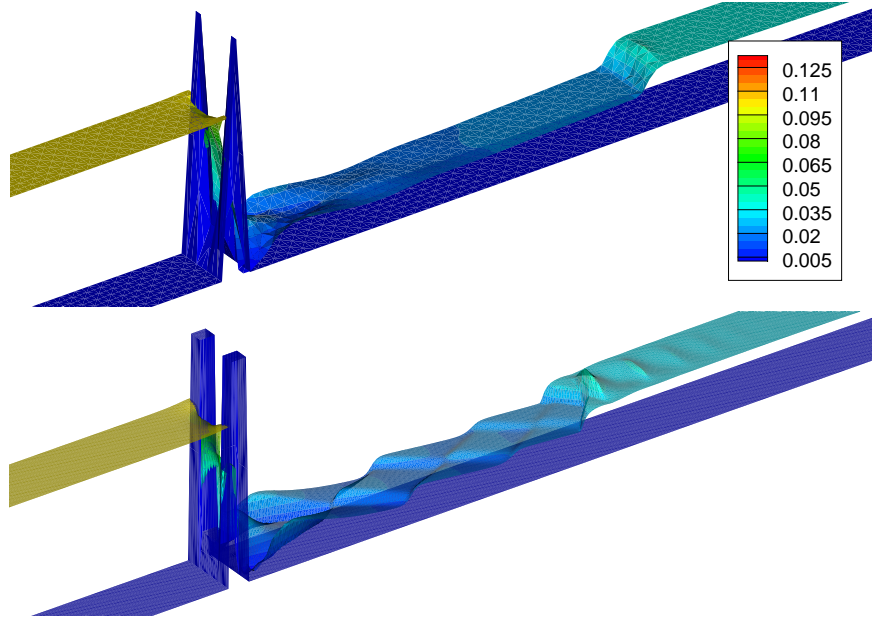


Figura 4.3: Visualización 3D del puente RC con caudal de  $14.8 m^3/h$ . El código de colores representa el calado, en  $m$ . Mallas de 2128 celdas (arriba) y 43200 celdas (abajo).

### 4.3. Influencia de la posición de los pilares

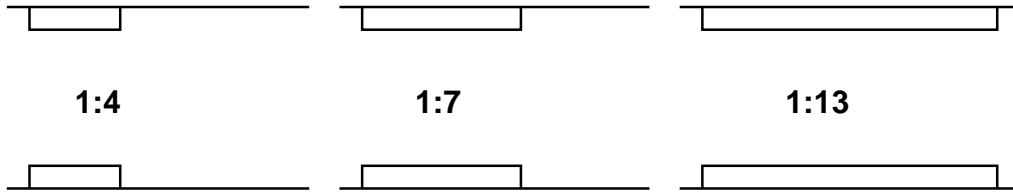


Figura 4.4: Esquema de los pilares en el estudio de la influencia de la longitud.

Caso	Ancho (cm)	Largo (cm)		
		1:4	1:7	1:13
A1	3	12	21	39
A2	6	24	42	78

Tabla 4.2: Dimensiones de los pilares en las simulaciones para estudiar la influencia de la longitud de los pilares.

ver el aspecto que tiene el flujo para las distintas longitudes de pilar en una de las simulaciones.

Con estos resultados se puede proceder con la formulación presente despreciando las pérdidas asociadas a la longitud de los pilares.

### 4.3. Influencia de la posición de los pilares

Otro factor que las formulaciones presentadas no tienen en cuenta es la posición de los pilares. Por ejemplo para el caso de un puente con dos pilares, estos pueden estar colocados en los lados del canal dejando un único paso o en medio del canal dividiendo el cauce en tres. En la bibliografía revisada se plantean formulaciones empíricas diversas para cada caso particular. Se han hecho simulaciones para comparar estos dos casos, representados esquemáticamente en la figura 4.7.

Con mallas que representan los pilares como elevación del fondo y pilares del mismo tamaño, colocados en los dos casos de la figura 4.7, se han obtenido resultados como los de la figura 4.8. Los pilares colocados en medio del cauce causan unas pérdidas ligeramente superiores. Por tanto es razonable la formulación planteada en la que cualquier disposición de pilares se representa de la misma manera.

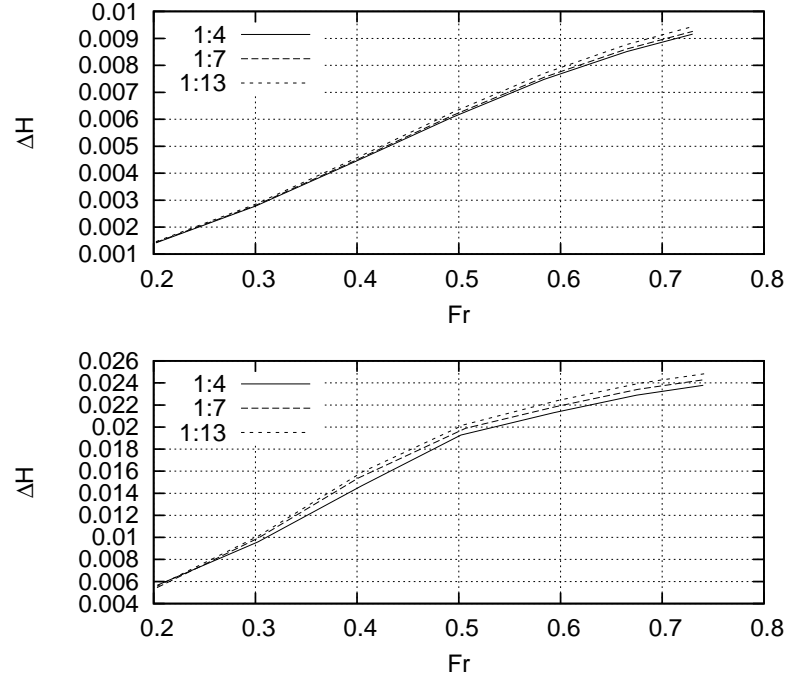


Figura 4.5: Influencia de la longitud de los pilares. Se representa la pérdida de altura total frente al número de Froude aguas abajo. Pilares del caso A1 (arriba) y A2 (abajo).

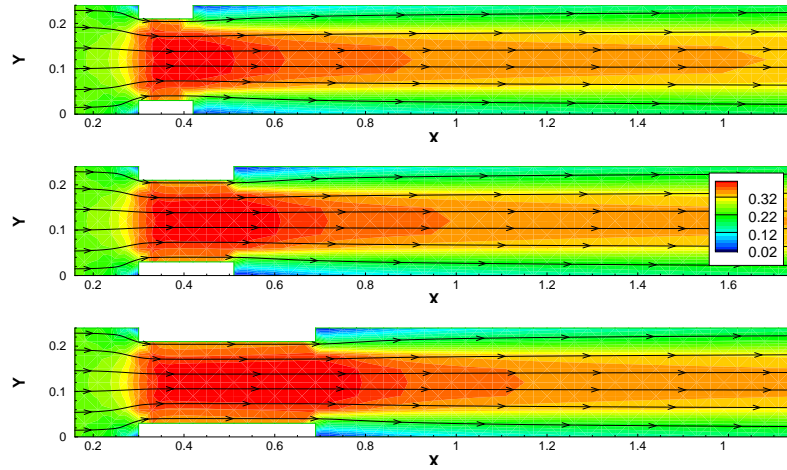


Figura 4.6: Aspecto del flujo en los pilares del caso A1 para Froude de 0.6. En código de colores se representa el módulo de la velocidad ( $m/s$ ). De arriba a abajo 1:4, 1:7 y 1:13.

### 4.3. Influencia de la posición de los pilares

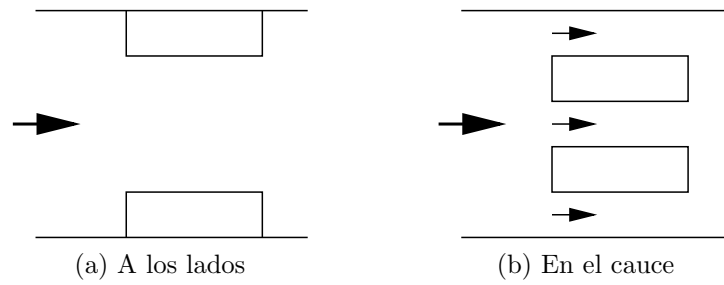


Figura 4.7: Dos situaciones para el análisis de la influencia de la posición de los pilares.

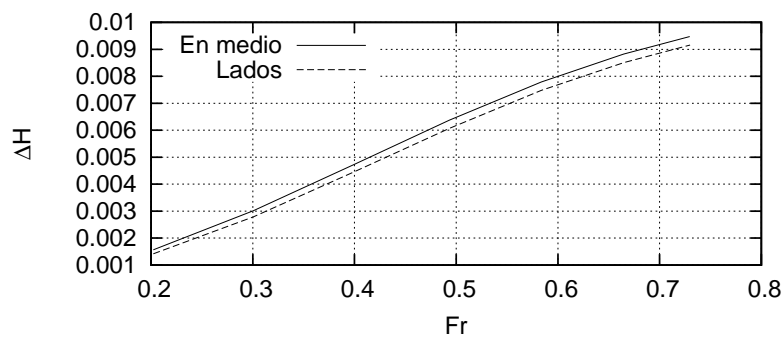


Figura 4.8: Comparación de las pérdidas de altura total causadas por pilares colocados a los lados o en medio del cauce.





## Capítulo 5

# Simulación en lámina libre como pérdidas singulares

En este capítulo se presentan resultados para puentes modelados utilizando las formulaciones presentadas en el capítulo 3. Estas formulaciones sirven sólo para el caso de lámina libre, pero permiten separar el puente de la malla y por tanto incluir puentes en mallas más bastas que no permiten representar el puente por elevación del fondo. Además se pueden definir puentes como el de arco, que no se pueden representar como altura del fondo.

El puente se define mediante las celdas de la malla a las que afecta, que se sitúan a ambos lados de una línea y determinan una sección de entrada y otra de salida. Para aplicar las formulaciones se siguen los pasos:

1. Calcular valores promedio en las secciones para las variables de interés: áreas, velocidades, número de froude...
2. Calcular el valor de las pérdidas de acuerdo con la formulación elegida, utilizando los valores promedio calculados.
3. Introducir las pérdidas en las celdas correspondientes, a través de los términos  $S_{Hx}$  y  $S_{Hy}$  del modelo matemático presentado en el capítulo 2.

Este proceso se repite en todos los pasos de tiempo del cálculo, permitiendo obtener soluciones en transitorio de la misma manera que cuando los puentes se representan como elevación del fondo.

El objetivo en este capítulo es comprobar los resultados obtenidos con las formulaciones presentadas. Para ello se compara primero con los resultados experimentales, y luego se valora la respuesta ante transitorios.

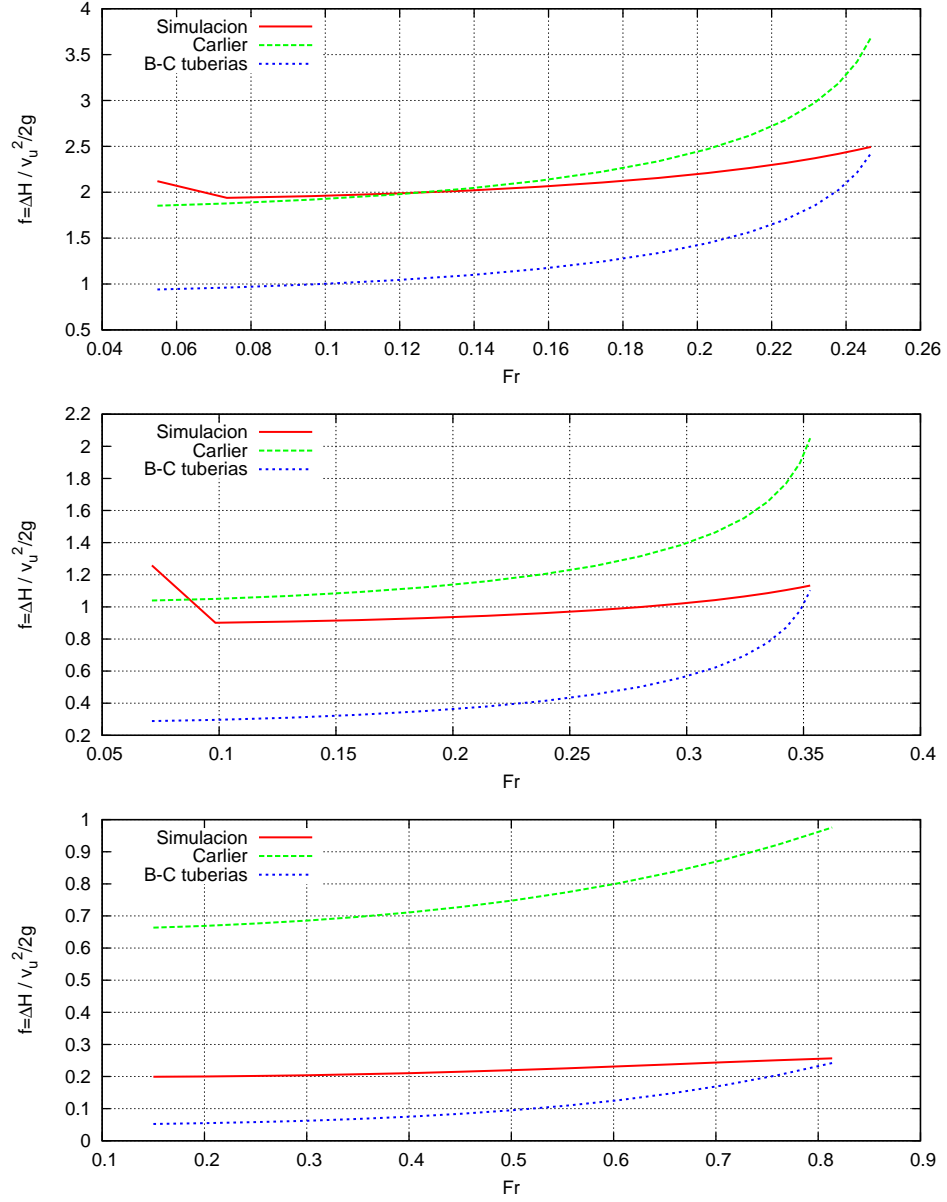


Figura 5.1: Comparación de la simulación y las formulaciones para contracciones de 24 a 12,16 y 20 cm.

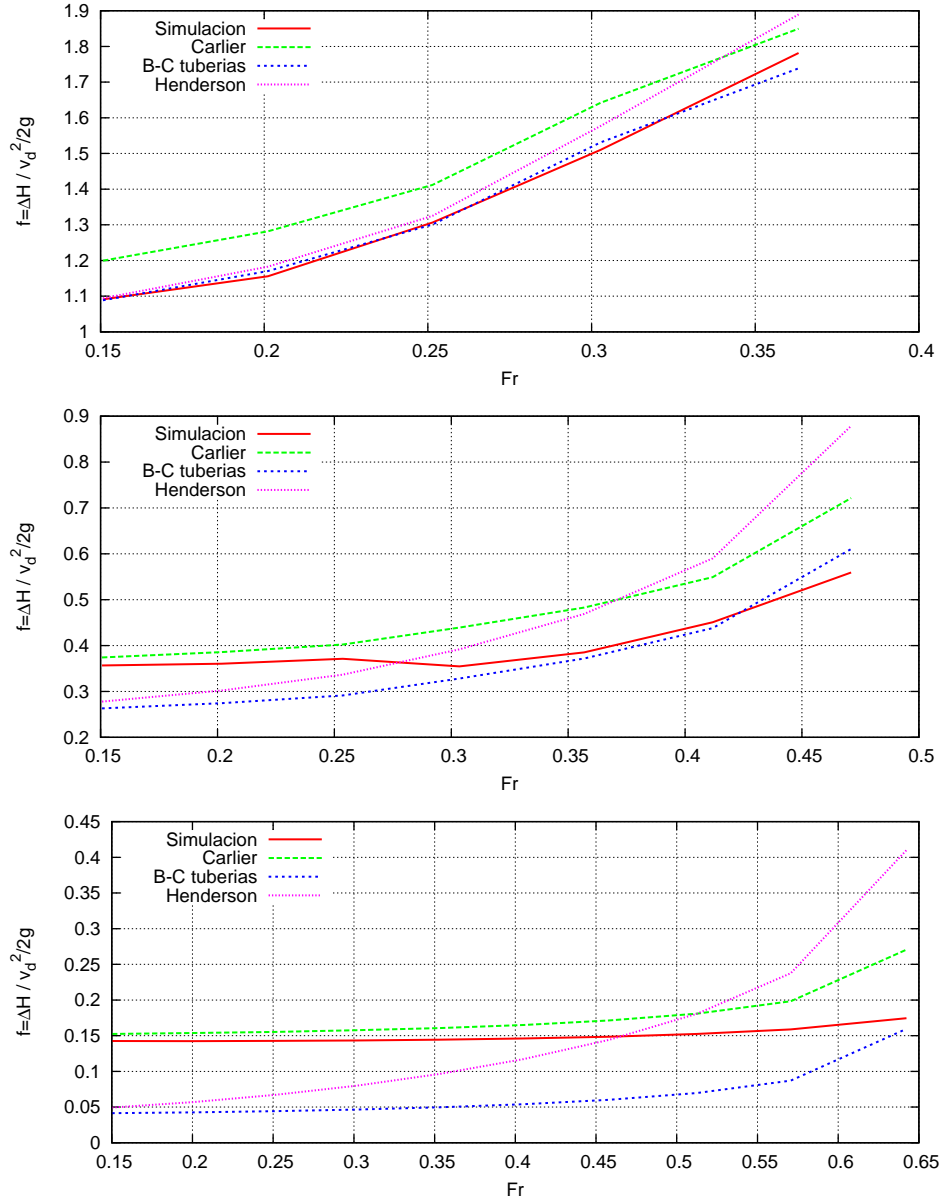


Figura 5.2: Comparación de la simulación y las formulaciones para expansiones de 12,16 y 20 cm a 24cm.

## 5.1. Comparación de las formulaciones

Se ha simulado una batería de casos para comparar las distintas formulaciones entre sí y con la simulación por elevación del fondo. En una malla de 4800 celdas representando un canal de  $0.24m$  por  $6m$  (dimensiones del canal disponible para ensayar en el laboratorio del área) se han simulado expansiones o contracciones puras, representadas mediante la elevación del fondo. Se ha simulado sin fricción y solo flujo puramente subcrítico para evitar que aparezcan pérdidas de energía distintas de la causada por la expansión o contracción. Las geometrías que se han simulado son  $24cm$  a  $20cm$ ,  $16cm$  y  $12cm$  para las contracciones y los correspondientes para las expansiones. La condición de contorno se fija mediante una curva de descarga a la salida.

Para cada geometría se han simulado distintos caudales. Para cada simulación se han promediado los valores de velocidad, calado, etc en una sección aguas arriba y en otra sección aguas abajo, que permiten aplicar las fórmulas, y también calcular el valor de  $f$  real. Los resultados obtenidos son las figuras 5.1 y 5.2. En estas figuras se representa el valor del factor adimensional  $f$  frente al número de Froude. Se representa el valor del factor  $f$  según los resultados de la simulación como elevación del fondo (tomado como valor real) en línea continua, y en discontinua el valor que predicen las distintas formulaciones.

## 5.2. Comparación con resultados experimentales en puentes

Sobre una malla de 4800 celdas (elegida por compromiso entre la velocidad del cálculo y el nivel de detalle) que representa el canal en el que se realizaron los experimentos, se han modelizado los puentes con los que se experimentó usando las fórmulas de pérdida de energía. Como resultado de estas simulaciones se obtienen los valores de calado aguas arriba  $h_u$  de la tabla 5.1. Al representar los puentes de esta manera se pierde toda la información de detalle, como se puede apreciar en la figura 5.3.

En la tabla 5.1 en la última línea se muestra el error estándar (definido como  $e_{std} = \sqrt{e^2}$ ), para los 5 puentes en los que se pueden utilizar los 4 métodos de representación del puente. A la vista de estos resultados, queda claro que la representación por elevación del fondo es la que mejores resultados da. Entre las formulaciones aproximadas, se elige la de Carlier a pesar de dar resultados ligeramente peores que la de Henderson porque:

- El resultado para el puente Arco es mejor.

Puente	$Q(m^3/h)$	$h_u(cm)$					
		Exp.	B.C. Tub.	Carlier	Hend.	Fondo	HEC-RAS
Rect 1	9.2	5.7	4.60	5.20	5.53	5.75	6.06
Rect 2	9.2	4.2	3.91	4.36	4.44	4.36	4.78
Rect 2	14.8	6.0	5.25	5.91	6.03	5.96	6.52
T	5.8	3.2	2.97	3.27	3.29	3.13	3.49
T	8.2	4.0	3.58	3.98	4.03	3.84	4.29
Arco	5.8	5.0	4.64	5.03	5.36		5.82
E. std.			12 %	4 %	3 %	3 %	9 %

Tabla 5.1: Comparación de resultados experimentales y de simulación con puentes representados por expansión más contracción.

- La formulación de Henderson no se puede aplicar exactamente dentro de la simulación, ya que no se dispone de los datos de la sección en la que se calcula el número de Froude y hay que aproximarlos.

En la columna HEC-RAS de la tabla 5.1 se recogen los resultados de simular los puentes con el programa HEC-RAS del US Army Corps of Engineers, que es el programa más comunmente utilizado y aceptado para simulaciones hidrológicas. Se puede comprobar que los resultados obtenidos con HEC-RAS son peores que los obtenidos con la modelización presentada en este trabajo.

### 5.3. Término de fricción

Para valorar el interés de incluir el término de fricción presentado en la sección 3.4 se comparan los casos de la sección 4.2 con los resultados obtenidos al simular el puente solo con el modelo de contracción más expansión, o con este modelo y el término de fricción.

En la figura 5.4 se muestran los resultados de estas simulaciones. Parece que la inclusión del término de fricción es interesante cuando el número de Froude aumenta.

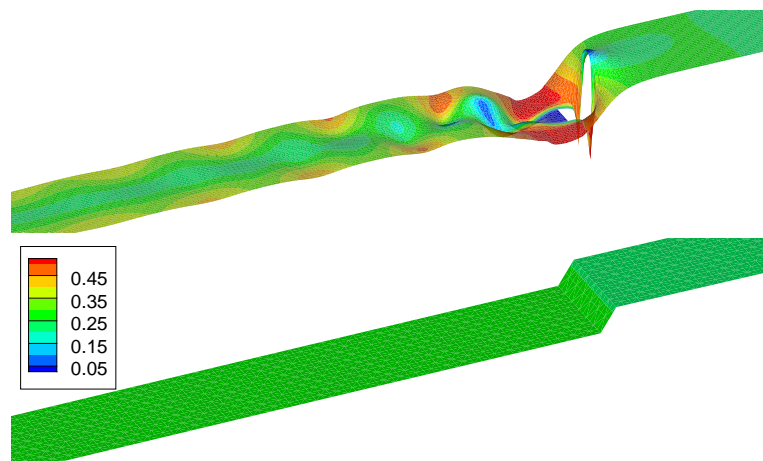


Figura 5.3: Información de detalle en una simulación del puente T por elevación del fondo (arriba) y por pérdidas de expansión más contracción (debajo). Representado en código de colores el módulo de la velocidad ( $m/s$ ).

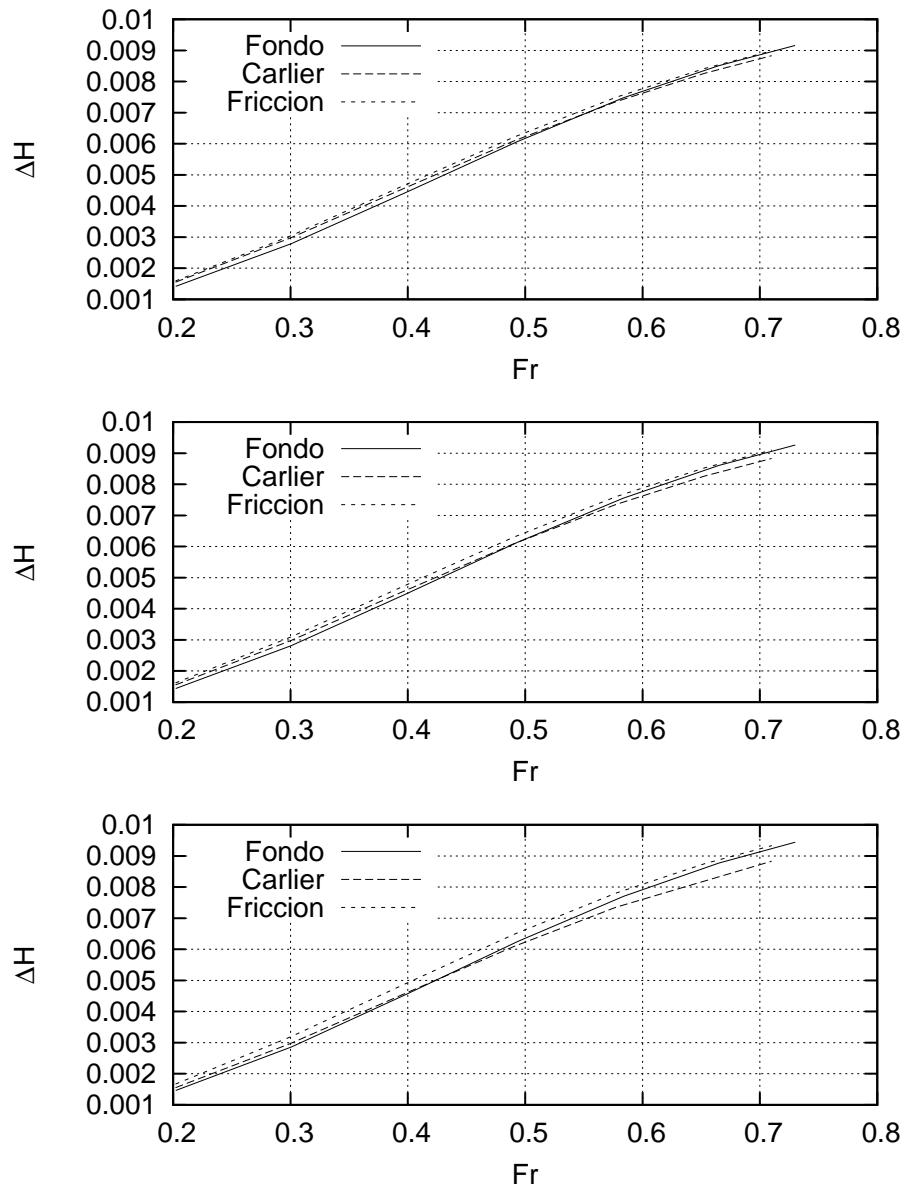


Figura 5.4: Influencia de la inclusión del término de fricción. De arriba a abajo, simulaciones con pilares de relación 1:4, 1:7 y 1:13.





## Capítulo 6

# Comparación de transitorios en lámina libre

La simulación en 2D con el método de aguas poco profundas permite calcular transitorios correctos, a diferencia de lo habitual en los programas de cálculo de flujo en ríos y canales que solo calculan la situación estacionaria. En esta sección se comparan los transitorios que se producen en puentes representados como elevación del fondo con los transitorios producidos representando los puentes como contracción más expansión con las formulaciones propuestas.

Se compara la respuesta a dos tipos de regímenes transitorios: uno rápido (el problema de rotura de presa) y otro lento (oscilación del caudal).

### 6.1. Rotura de presa

En la rotura de presa no hay entradas o salidas de caudal, sino que se libera en el instante inicial una cantidad de agua remansada aguas arriba del puente (figura 6.1) y se permite que rebote en el canal. Se han estudiado tres

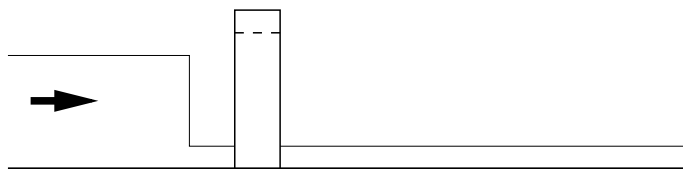


Figura 6.1: Vista de perfil del problema de rotura de presa para el análisis de transitorios en el instante inicial. El agua remansada aguas arriba (izquierda) tiene un calado mucho mayor que el agua en el resto del canal.

Caso	Calado aguas arriba	Calado aguas abajo
B1	8cm	1cm
B2	8cm	2cm
B3	8cm	4cm

Tabla 6.1: Casos para la comparación de transitorios con rotura en presa.

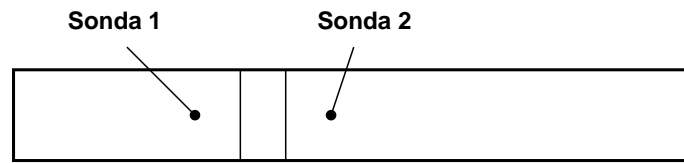


Figura 6.2: Colocación de las sondas para el análisis de transitorios.

casos, resumidos en la tabla 6.1, idénticos salvo por el valor del calado aguas abajo. Los resultados de estas simulaciones son el calado registrado en una sonda aguas arriba (sonda 1) y otra aguas abajo (sonda 2) del puente, y se muestran en la figura 6.2. El modelo funciona correctamente cuando ocurren transitorios rápidos. Los resultados se pueden observar en la figura 6.3, y algunas imágenes de la evolución de la lámina en la figura 6.4. Representando el puente como pérdidas singulares se pierde toda la información de detalle pero el avance, rebote y magnitud de las ondas se simula correctamente.

## 6.2. Oscilación de caudal

Para comparar transitorios más lentos que la rotura de presa se realizan simulaciones con el hidrograma de entrada de la figura 6.5, en el que el caudal realiza una oscilación completa en un tiempo de 150 segundos y luego permanece estacionario. Los tres casos comparados se diferencian en la condición de contorno aguas abajo (figura 6.6), que fija diferentes curvas de descarga. Los calados registrados por las sondas (figura 6.7) muestran que también estos transitorios se pueden estudiar correctamente con el modelo de pérdidas singulares.

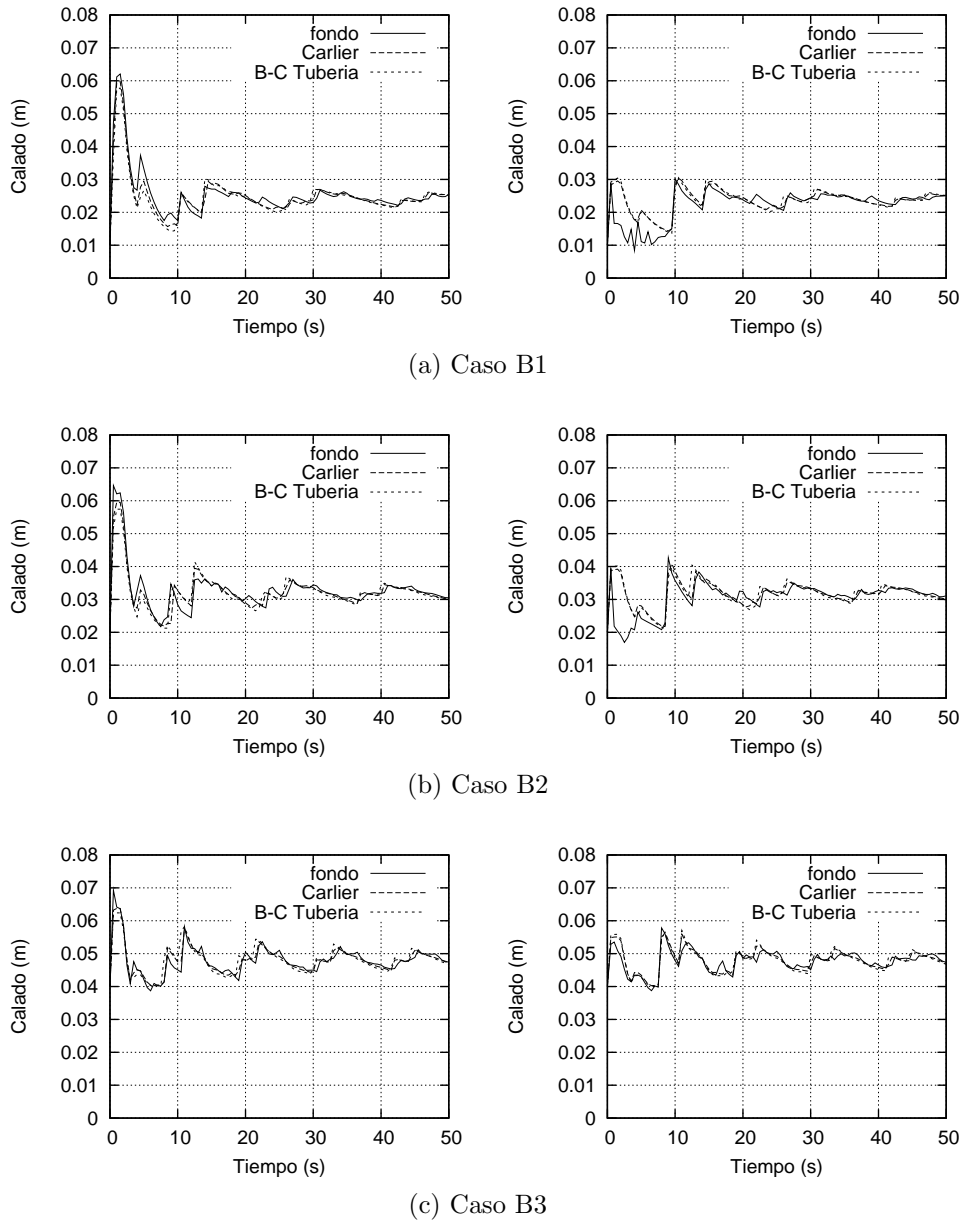


Figura 6.3: Calado registrado por las sondas 1 (izquierda) y 2 (derecha) en los casos de rotura de presa.

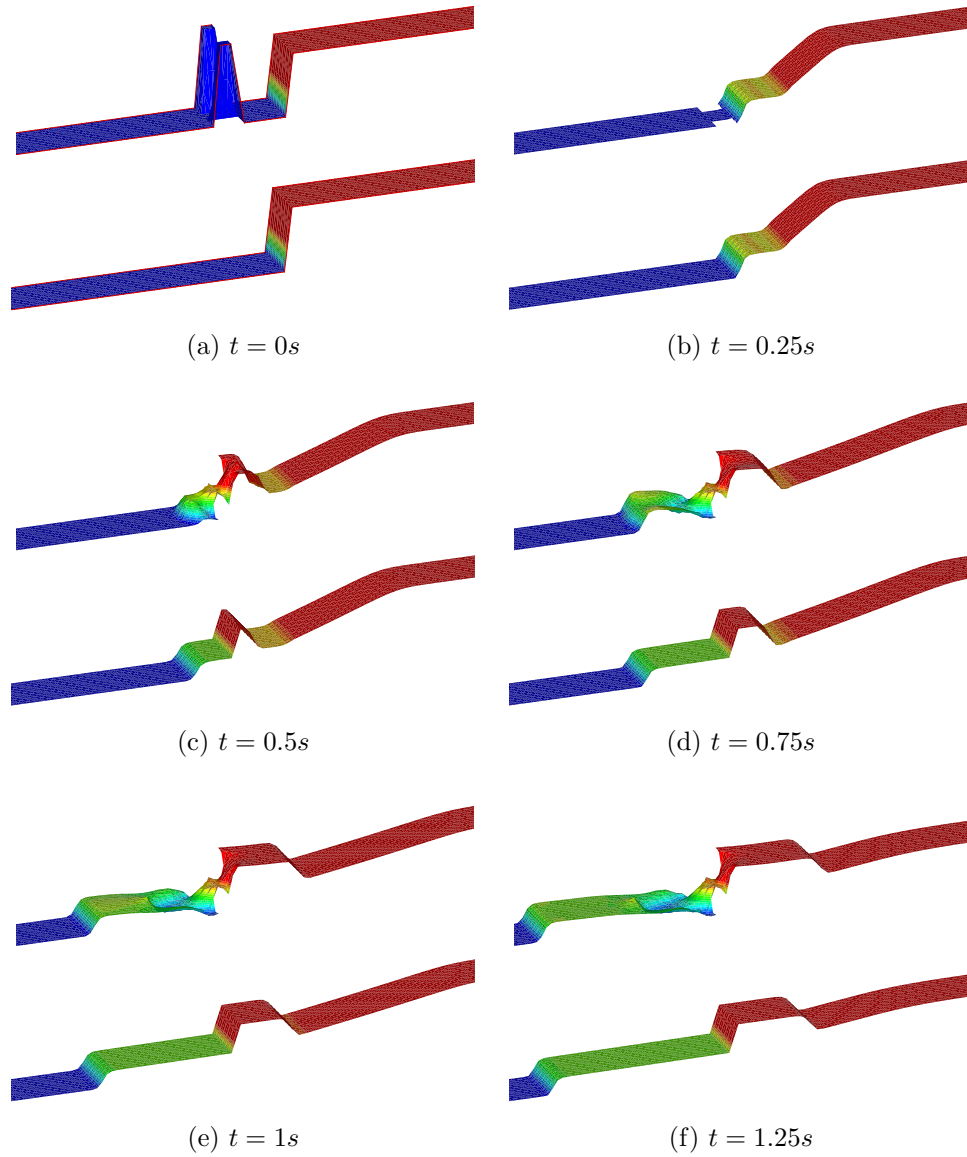


Figura 6.4: Evolución de la lámina libre en la rotura de presa B1 simulada por elevación del fondo (arriba) y por pérdidas singulares (abajo).

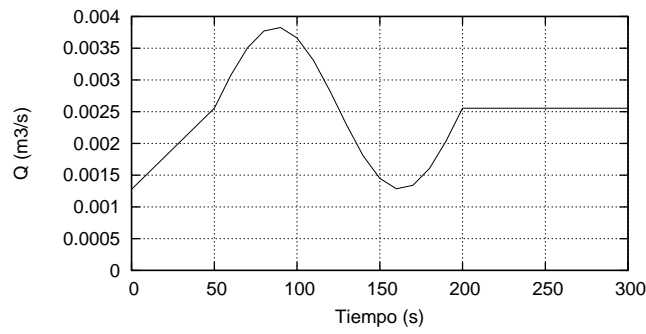


Figura 6.5: Hidrograma de entrada para comparar transitorios con oscilación de caudal.

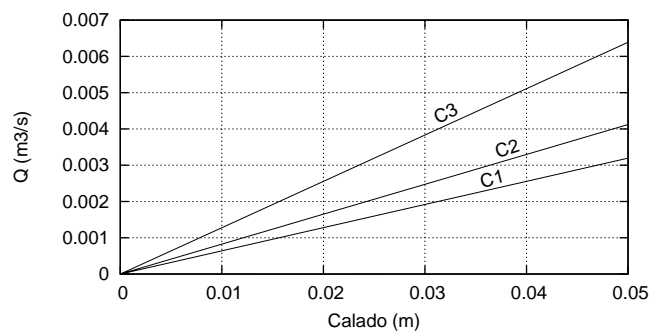


Figura 6.6: Curvas de descarga  $Q(h)$  que fijan la condición de contorno en los casos C1, C2 y C3 para la comparación de transitorios con oscilación de caudal.

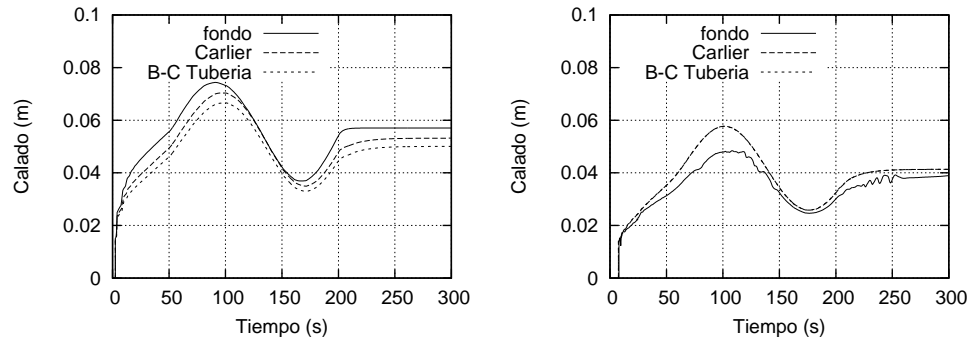
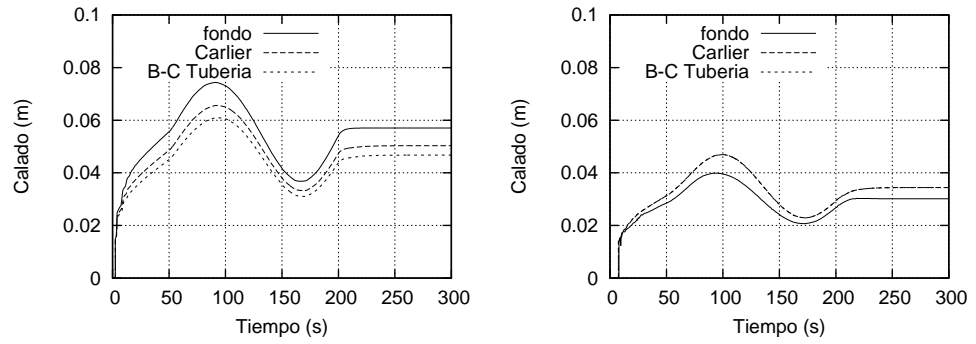
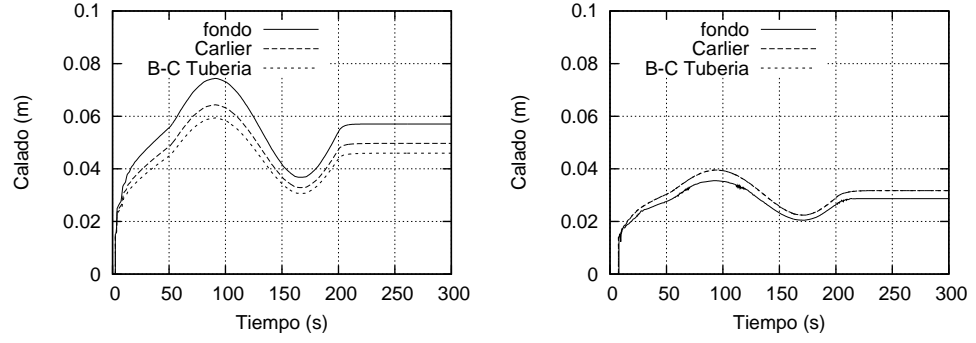


Figura 6.7: Calado registrado por las sondas 1 (izquierda) y 2 (derecha) en casos de oscilación de caudal.

# Capítulo 7

## El puente en presión

La entrada en presión del flujo es una situación que el modelo de aguas poco profundas no contempla. Por lo tanto pasa a ser imposible la simulación basada en la representación del puente como elevación del fondo y se hace obligatoria una modelización que aproxime las pérdidas de energía asociadas a esta condición de flujo.

### 7.1. Formulación de las pérdidas en presión

El puente en presión se puede analizar de forma similar a una compuerta. La situación se representa en la figura 7.1, donde  $w$  es la apertura de la compuerta o en nuestro caso la altura del puente bajo el tablero. Se han probado varias fórmulas de tipo compuerta[French, 1985][HEC-RAS Manual, 2010]:

$$Q = C_d A_2 \sqrt{2g \left( H_1 - \frac{w}{2} \right)} \quad (7.1)$$

$$Q = C_d A_2 \sqrt{2g(H_1 - h_3)} \quad (7.2)$$

$$Q = C_d A_2 \sqrt{2gh_1} \quad (7.3)$$

$$Q = C_d A_2 \sqrt{2g(h_1 - h_3)} \quad (7.4)$$

En la tabla 7.2 se reflejan los resultados de comparación de estas fórmulas con las situaciones a presión de los casos experimentales. La fórmula que mejor resultado ha dado es la 7.4. Se muestra a continuación el desarrollo necesario para incorporar al código la fórmula 7.4. El desarrollo de las otras tres fórmulas es similar.

En la ecuación 7.4 se relaciona el caudal circulante con el área bajo el puente por la que puede circular el flujo, un coeficiente de descarga  $C_d$  y los calados en las secciones 1 y 3. Para poder utilizar esta fórmula es necesario

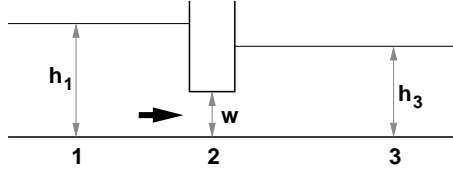


Figura 7.1: Esquema del puente a presión.

convertirla a pérdidas de energía. Partiendo de la definición de pérdida de energía:

$$\Delta H = H_1 - H_3 = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} - h_3 - \frac{v_3^2}{2g} = h_1 - h_3 + \frac{v_1^2 - v_3^2}{2g} \quad (7.5)$$

La diferencia de calados entre 1 y 3 se puede despejar de la ecuación 7.4:

$$h_1 - h_3 = \frac{1}{2g} \frac{Q^2}{A_2^2 C_d^2} \quad (7.6)$$

Los términos de velocidad se pueden desarrollar con la sustitución  $v = \frac{Q}{A}$  para llegar a la ecuación de pérdida de energía empleada:

$$\Delta H = \frac{1}{2g} \frac{Q^2}{A_2^2 C_d^2} \left[ 1 - C_d^2 \left( \frac{A_2^2}{A_3^2} - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right) \right] \quad (7.7)$$

El valor del coeficiente  $C_d$  se determina experimentalmente. Para este trabajo se ha ajustado el valor de  $C_d$  en base a un experimento con un puente a presión en el que tanto la sección 1 aguas arriba, como la sección 3 aguas abajo superaban la altura bajo el tablero del puente. En la tabla 7.1 se refleja la influencia de este coeficiente. El valor ajustado elegido es  $C_d = 1.1$ . Para la simulación de puentes a presión, se ha incorporado en el código la detección de esta situación. Cuando el calado a la entrada del puente supera la altura bajo el tablero del puente se dejan de calcular las pérdidas de energía como expansión más contracción para calcularlas según la ecuación 7.7.

## 7.2. Simulación y comparación con resultados experimentales

Se dispone de los datos de 4 experimentos con puentes a presión. Estos 4 casos se han simulado utilizando la formulación presentada en este capítulo y también con las formulaciones de lámina libre sin modificación. También se dispone de los resultados de simular los casos con el programa HEC-RAS.



## 7.2. Simulación y comparación con resultados experimentales

$C_d$	$h_u(cm)$
0.80	6.03
0.85	5.54
0.90	5.37
0.95	5.06
1.00	4.80
1.05	4.62
1.10	4.47
1.15	4.34
1.20	4.22
Exp.	4.30

Tabla 7.1: Ajuste del coeficiente de descarga  $C_d$ .

Puentes	$Q(m^3/h)$	$h_u(cm)$				
		Exp.	Ec. 7.1	Ec. 7.2	Ec. 7.3	Ec. 7.4
Rect1	12.8	7.5	6.92	6.17	6.68	6.54
T	15.9	6.5	5.15	5.37	5.15	6.09
Rect3	5.9	4.3	4.56	4.31	4.62	4.47
Arch	8.26	5	7.49	5.45	7.05	5.65
E. std.			27 %	13 %	24 %	10 %

Tabla 7.2: Comparación de las fórmulas para el puente en presión.

Puente	$Q(m^3/h)$	$h_u(cm)$					
		Exp.	Carlier	B.C. Tub.	Hend.	Pres.	HEC-RAS
Rect1	12.8	7.5	6.92	6.25	7.44	6.54	8.39
T	15.9	6.5	6.12	5.24	6.29	6.09	6.87
Rect3	5.9	4.3	4.69	4.31	4.9	4.47	5.29
Arch	8.26	5	7.35	6.76	7.54	5.65	8.38
E. std.			24 %	22 %	26 %	10 %	36 %

Tabla 7.3: Resultados de los experimentos y las simulaciones para el caso del puente en presión.

Los resultados de estas simulaciones se recogen en la tabla 7.3, donde *Pres.* representa la simulación con la fórmula para el puente en presión presentada en este capítulo. La formulación presentada en este capítulo ofrece el mejor comportamiento para los 4 casos experimentales, y cualquiera de las formulaciones supera a HEC-RAS.

## Capítulo 8

### El puente completamente sumergido

En el caso del puente completamente sumergido, el calado aguas arriba es superior al tablero del puente. Es la situación más compleja porque una parte del agua fluye a presión y otra en lámina libre. Se pueden dar dos situaciones, representadas en la figura 8.1, que se diferencian en si el calado aguas abajo también es superior al tablero del puente o no. Para modelar ambas situaciones se ha optado por usar las mismas formulaciones de pérdidas en lámina libre, pero corrigiendo las áreas para que incluyan el flujo que circula por encima del puente.

Siguiendo el mismo esquemas de secciones de la figura 3.4 se definen las áreas de las secciones 1, 2, 3 y 4 como se muestra en la figura 8.2. La sección 1 es el área total aguas arriba. La sección 2 es el área por la que circula el flujo en la zona del puente, por lo que el espacio material que ocupa el puente no se cuenta. La sección 3 se calcula de manera similar, pero contando el calado aguas abajo, y se le añade el área del flujo que circula por encima del puente. La sección 4 es el área total de acuerdo con el calado aguas abajo.

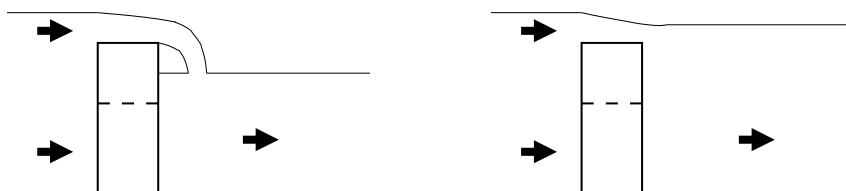


Figura 8.1: Esquema del puente sumergido. En la situación de la izquierda el nivel aguas abajo no sumerge el puente. En la situación de la derecha el nivel aguas abajo también sumerge el puente.

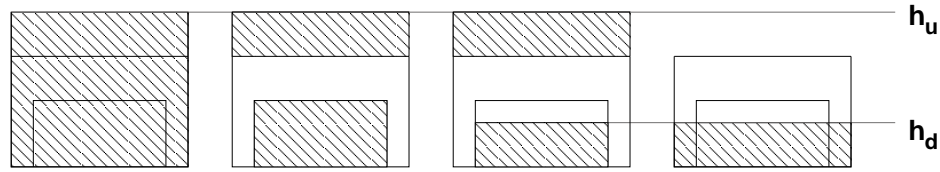


Figura 8.2: Áreas 1,2, 3 y 4 para el puente sumergido.  $h_u$  es el calado aguas arriba y  $h_d$  aguas abajo.

Puente	$Q(m^3/h)$	$h_u(cm)$		
		Exp.	Carlier	HEC-RAS
Rect3	10.7	7.60	8.35	7.86
Rect3	13.9	8.20	9.00	8.59
E. std.			10 %	4 %

Tabla 8.1: Resultados de los experimentos y las simulaciones para el caso del puente sumergido.

## 8.1. Simulación y comparación con resultados experimentales

En este caso solo se dispone de datos experimentales de 2 casos. Se han simulado con la formulación de Carlier con las áreas corregidas, y se comparan con los datos experimentales y los resultados de HEC-RAS en la tabla 8.1. Para los puentes sumergidos HEC-RAS proporciona mejores resultados que la formulación presentada en este trabajo.

## 8.2. Transitorio

Se han simulado varios casos transitorios en los que el puente trabaja primero en lámina libre, luego en presión, y por último sumergido; con el objetivo de mostrar como se integran las formulaciones propuestas para cada situación para dar una solución coherente. Se han hecho las simulaciones con dos juegos de formulas distintos:

- “Carlier” se ha realizado utilizando para las tres situaciones la formulación Carlier (ecuaciones 3.8 y 3.10), tomando las áreas apropiadas en cada situación.

Caso	Hidrograma	Conjunto de formulas	Tiempo de simulación
D1	A - 100s	Carlier	800s
D2	A - 100s	Carlier+fórmula de presión	800s
D3	B - 10s	Carlier	620s
D4	B - 10s	Carlier+fórmula de presión	620s

Tabla 8.2: Casos para la simulación del transitorio con puente sumergido.

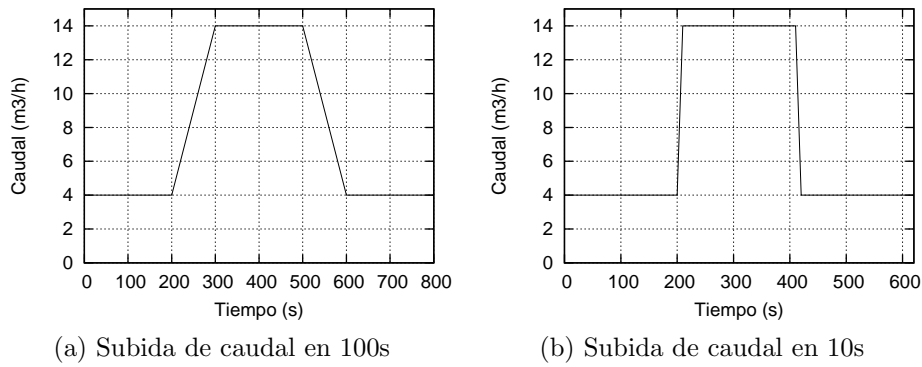
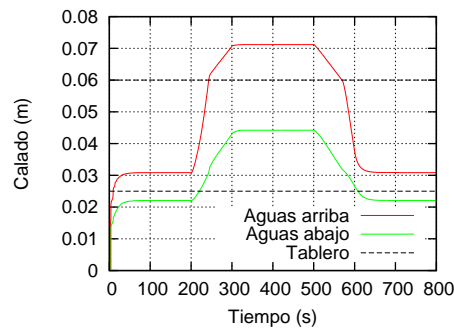


Figura 8.3: Hidrogramas A y B para la simulación del transitorio con puente sumergido.

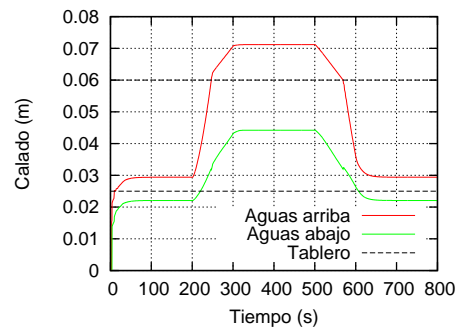
- “Carlier+fórmula de presión” se ha realizado utilizando Carlier para el puente en lámina libre y sumergido, y la ecuación 7.7 propuesta en el capítulo 7 para el puente en presión.

El puente simulado ha sido el *Rect3* recibiendo los dos hidrograma de la figura 8.3, que se diferencian en la velocidad con la que aumenta el caudal. Los casos simulados se resumen en la tabla 8.2.

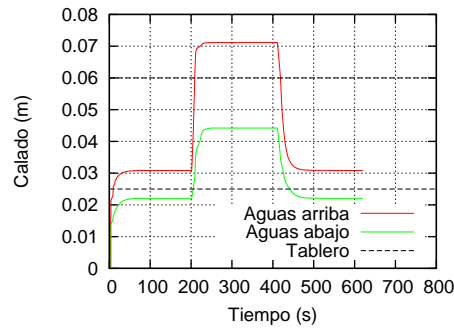
Como resultado de esta simulación se ha registrado el calado en dos sondas, situadas aguas arriba y aguas abajo del puente, de la misma manera que en la figura 6.2, y se ha representado en la figura 8.4. En esta figura se han incluido también los límites inferior y superior del tablero para distinguir fácilmente si el puente está en lámina libre, en presión o sumergido. Se puede observar que las transiciones entre estas situaciones son suaves, y que una vez que el puente queda completamente sumergido permite más paso de flujo.



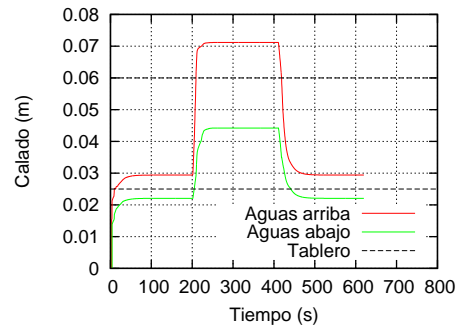
(a) Caso D1



(b) Caso D2



(c) Caso D3



(d) Caso D4

Figura 8.4: Calado registrado por las sondas en las simulaciones del transitorio con puente sumergido.

## Capítulo 9

# Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado en profundidad la modelización de puentes en la simulación del flujo de ríos y canales. Se ha valorado la influencia de varios parámetros tales como la resolución de la malla, la longitud de los pilares o posición de los pilares. Se ha visto que la longitud y posición de los pilares tienen una influencia pequeña sobre los resultados, comprobando las hipótesis de Yarnell, y que el parámetro más importante es la obstrucción frontal total al paso del flujo, es decir, el espacio del ancho del canal que ocupa el puente.

Se han implementado en el código y comparado varios modelos de representación de puentes en lámina libre en diversas situaciones, obteniéndose una medida fiable de las capacidades de cada modelo. En el caso de lámina libre el modelo de Carlier o el de Henderson permiten obtener resultados mejores que el programa comúnmente usado HEC-RAS. También se han estudiado formas de representar los puentes a presión y completamente sumergidos con resultados similares a los del programa HEC-RAS.

Estos modelos permiten incluir los puentes en la simulación transitoria de una manera dinámica y en cualquier régimen de flujo: lámina libre, presión o sumergido, sin necesidad de utilizar mallas finas y costosas de calcular.

Algundas ideas que se podrían tratar en trabajos futuros continuando en la línea de este proyecto fin de carrera son:

- Explorar la influencia de la forma de los pilares (cuadrados, triangulares, elípticos, cilíndricos, etc.) e incluirla en el modelo.
- Llevar a cabo experimentos de laboratorio sistemáticos.
- Estudiar más detalladamente los casos de puente a presión y puente sumergido.

- Estudiar la aplicación en ríos y canales reales, comparando con datos de campo.



## Anexo A

# Resumen de los experimentos con puentes

En este anexo se resume el artículo del que se han obtenido los datos experimentales[Burguete et ál., 2008] con los que comparar el modelo. Los puentes utilizados en los experimentos son los de la figura A.1, cuyas dimensiones se reflejan en la tabla A.1.

Los resultados registrados de estos experimentos son el caudal, el régimen(lámina libre, presión, sumergido), el calado aguas arriba  $h_u$  y el calado aguas abajo  $h_d$ . También se proporciona el valor de calado aguas arriba simulando con HEC-RAS. El conjunto de resultados se muestra en la tabla A.2.

Para simular estos experimentos en las simulaciones de este proyecto se ha fijado una curva de descarga  $Q(h)$  en base al calado aguas abajo. El punto  $Q - h_d$  se ha unido con el origen para formar una recta que se utiliza como curva de descarga.

Puente	a (cm)	b (cm)	c (cm)	d (cm)	e (cm)	f (cm)	g (cm)
Rect1	24	11	7	6	12	4,5	—
Rect2	24	12	10	3.5	17	7	—
Rect3	24	6	7	6	12	2.5	—
RC	24	16.5	7	6	12	12	2.5
Arch	24	8	7	7.3	9.4	—	—
T	24	8.5	6	9	6	4.5	4

Tabla A.1: Dimensiones de los puentes utilizados en los experimentos.

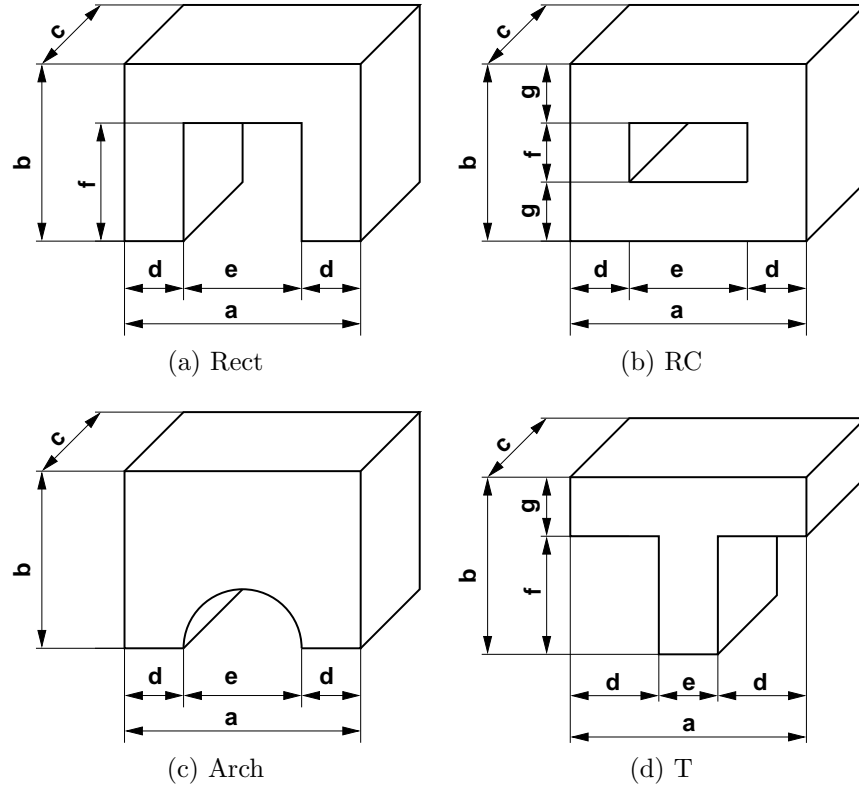


Figura A.1: Puentes utilizados en los experimentos.

Puente	Régimen	$Q(m^3/h)$	$h_u(cm)$	$h_d(cm)$	HEC-RAS $h_u(cm)$
Rect1	L. Libre	9.2	5.7	3.1	6.06
Rect1	Presión	12.8	7.5	3.7	8.39
Rect2	L. Libre	9.2	4.2	3.2	4.78
Rect2	L. Libre	14.8	6.0	4.5	6.52
Rect3	Presión	5.9	4.3	2.5	5.29
Rect3	Sumergido	10.73	7.6	3.2	7.86
Rect3	Sumergido	13.9	8.2	3.8	8.59
RC	L.Libre	14.8	10.4	3.5	10.6
Arch	L.Libre	5.8	5	2.4	5.82
Arch	Presión	8.26	7.3	2.5	8.38
T	L.Libre	5.8	3.2	2.4	3.49
T	L.Libre	8.2	4	2.9	4.29
T	Presión	15.9	6.5	4.2	6.87

Tabla A.2: Resumen de condiciones y resultados de los experimentos.

## Anexo B

### El programa de simulación

En este anexo se describe el funcionamiento y uso del programa de simulación. El programa de simulación es un código escrito en FORTRAN, que lee unos archivos de entrada, hace los calculos necesarios, y escribe el resultado en unos archivos de salida. Los archivos de entrada son archivos de texto que describen todos los aspectos de la situación a simular. Los más importantes son:

- La malla: La malla se describe mediante nodos y celdas. Para cada nodo se especifican sus coordenadas x e y, y para cada celda los nodos de los que esta formado y su elevación. También se puede definir la situación inicial en la que se encuentra el flujo, o partir de una malla seca. Las mallas se generan programando códigos auxiliares que calculen las posiciones de los nodos y los nodos que configuran cada celda y escriban el fichero de entrada necesario. Un ejemplo de como es una malla creada se muestra en la figura B.1. El archivo de texto que define

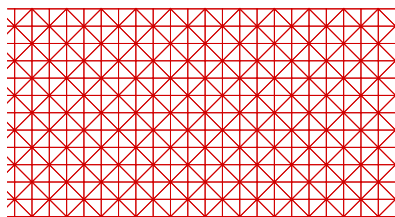


Figura B.1: Ejemplo de malla.

la malla tiene este aspecto:

NVERT                      3

```

NCELL          4800
NNODE          2613
  0.0000000000000000    0.0000000000000000
  1.9999999529651642E-002  0.0000000000000000
  3.99999991059303284E-002  0.0000000000000000
  ...

      1      2      202
      2     203      202
      2      3      204
  ...

  0.0000000000000000
  0.0000000000000000
  0.0000000000000000
  ...

```

- Entradas de cauce: En un archivo de texto se definen las entradas de cauce a la malla. Por ejemplo en la mayoría de los casos simulados en este proyecto se tiene una única entrada de cauce que se define a través de las celdas a las que afectaba y un hidrograma (curva  $Q(t)$ ). Esta curva se describe con algunos puntos, y en los puntos intermedios se interpolan los valores. Por ejemplo:

```

NUMERO_PUNTOS_FUNCION      3
0          0.002555556
10         0.002555556
36000      0.002555556

```

donde la primera columna especifica el tiempo en  $s$  y la segunda el caudal en  $m^3/s$ , sería un hidrograma de caudal constante.

- Salidas de cauce: Mediante otro archivo de texto similar al de entradas de cauce se definen las salidas de cauce de la malla. Este archivo fija la condición de contorno. En las simulaciones de este proyecto se ha utilizado una curva de descarga ( $Q(h)$ ) para esta condición de contorno.
- Puentes: Cuando se representan los puentes con las formulaciones presentadas en este proyecto es necesario un archivo que defina los puentes. En este archivo se dan las características geométricas de los puentes a través de puntos que definan la sección, un valor de ancho del puente y

---

otro del rozamiento. También se le indica al programa las celdas a las que afecta el puente. Este archivo tiene el siguiente aspecto:

```
PAREJASCELDAS_PUENTE1      12
CELDA12      99 101
CELDA12      500 502
CELDA12      899 901
...
```

```
DIR_X      1.D0
DIR_Y      0.D0
ANCHO      0.07D0
MANNING    0.03D0
NPUNTOS_PUENTE 29
0.0000 0.0600 0.0600 0.0600 0.0600
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0600
0.0100 0.0000 0.0000 0.0000 0.0600
...
```

- Otros: A través de otros archivos se pueden controlar parametros de la simulación tales como el tiempo que se va a simular, los rozamientos con el fondo o la colocación de sondas.

Como archivos de salida obtenemos principalmente:

- Volcados de la solución: El programa vuelca la solución de las variables  $h$ ,  $u$  y  $v$  para cada celda cada cierto tiempo en archivos de texto. Estos archivos tienen este aspecto:

```
NIVEL_SUPERFICIAL_INICIAL  0.0000000000000000
VELOCIDADX_INICIAL  0.0000000000000000
VELOCIDADY_INICIAL  0.0000000000000000
LEER_CELDAS      1
      0.052083198      0.204445015      0.000000000
      0.052081390      0.204451331      0.000000782
      0.052075700      0.204473947      0.000000000
...
```

Para las visualizaciones 2D y 3D se convierten estos archivos al formato reconocible por un programa de visualización, como por ejemplo Tecplot que ha sido el utilizado en este proyecto.

- Variables registradas por las sondas: Son archivos que continen las variables de interes registradas por las sondas en cada instante de tiempo.



# Bibliografía

- [Burguete y García Navarro, 2001] Burguete, J., García Navarro, P. (2001), Efficient construction of high-resolution TVD conservative schemes for equations with source terms: application to shallow water flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37, 209–248.
- [Burguete et ál., 2008] Burguete J., López-Barrera D., Ambroj S. , Murillo J. and García-Navarro P. (2008), Experimental characterisation of flow near bridges for the validation of a one-dimensional hydraulic simulation model, *The Eight International Conference on Hydro-Science and Engineering Proceedings*.
- [Carrier, 1972] Carrier, M. (1972), *Hydraulique Générale et Appliquée*, Eyrolles.
- [Chow, 1959] Chow, V.T. (1959), *Open Channel Flow*, MacGraw-Hill Book Co. Inc.
- [French, 1985] French, R.H. (1985), *Open-Channel Hydraulics*, MacGraw-Hill Book Co. Inc.
- [HEC-RAS 4.1, 2010] U.S. Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Centers River Analysis System (HEC- RAS), <http://www.hec.usace.army.mil/software/hec-ras/>.
- [HEC-RAS Manual, 2010] U.S. Army Corps of Engineers, HEC-RAS Hydraulic Reference Manual.
- [Henderson, 1966] Henderson, F.M. (1966), *Open Channel Flow*, MacMillan Publishing Co. Inc.
- [Murillo et ál., 2007] Murillo, J., Burguete, J., García-Navarro, P., Brufau, P. (2007), The influence of source terms on stability, accuracy and conservation in two-dimensional shallow flow simulation using triangular finite volumes., *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 54, 543–590.

- [Murillo *et ál.*, 2009] Murillo, J., García-Navarro, P., Burguete, J. (2009), Time step restrictions for well balanced shallow water solutions in non-zero velocity steady states, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, doi: 10.1002/fld.1939.
- [Roe, 1986] Roe, P.L. (1986), A basis for upwind differencing of the two-dimensional unsteady Euler equations, *Numerical Methods in Fluid dynamics, vol II*, (Oxford University Press, Oxford)
- [Rosatti *et ál.*, 2007] Rosatti, G., Murillo, J., Fraccarollo, L. (2007), Generalized Roe schemes for 1D two-phase, free-surface flows over a mobile bed, *Journal of Computational Physics*, 54, 543–590.
- [Soares-Frazao, 2008] Soares-Frazao, S. (2008), Two dimensional shallow-water model with porosity for urban flood modelling, *Journal of Hydraulic Research*, 46, 45–64.
- [Vázquez-Cendón, 1999] Vázquez-Cendón, M.E. (1999), Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry, *Journal of Computational Physics*, 148, 479–498.
- [Yarnell, 1934a] Yarnell, D.L. (1934), Pile Trestles as Channel Obstructions, *U.S. Department of Agriculture, Tech. Bull.*, 429.
- [Yarnell, 1934b] Yarnell, D.L. (1934), Bridge Piers as Channel Obstructions, *U.S. Department of Agriculture, Tech. Bull.*, 442.