Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Funciones y gráficas: una propuesta didáctica para 2º de ESO

Autor: Miguel Ángel López Ibáñez

Director: Alberto Arnal Bailera

Junio de 2015

Contenido

1. Introducción

He elegido escoger este objeto matemático debido a las dificultades en el aprendizaje que suelen presentar los alumnos cuando se introduce. Es importante que tengan una buena o al menos aproximada concepción de lo que significa y para lo que sirve, ya que de hecho el valor de las funciones es darles una utilidad práctica para representar ciertos comportamientos de la vida cotidiana mediante las relaciones que presentan una serie de variables.

Hoy día, en muchos medios de comunicación podemos encontrar gráficas y funciones que pueden representar por ejemplo el estado de la economía, datos estadísticos sobre la población, resultados deportivos… Por ello, el estudio y conocimiento de este objeto matemático es de gran utilidad para el desarrollo de un sentido crítico por parte del alumno, pudiendo así interpretar y describir adecuadamente este tipo de situaciones que encontramos a nuestro alrededor con relativa facilidad. Considero entonces oportuno empezar a formar a los alumnos con algo más de profundidad en el tema ya desde estos cursos, porque continuamente están en contacto con este objeto matemático, y se pretende que sean capaces de desenvolverse con soltura y habilidad a la hora de realizar o comprender cualquier tipo de función y su gráfica, siendo capaces de interpretar las implicaciones que tiene para ellos o su entorno más cercano.

Ubicamos la unidad didáctica de funciones y gráficas concretamente en segundo curso de educación secundaria obligatoria, correspondiente al Bloque IV Funciones (BOA (p. 8992)) que recoge el estudio de las relaciones entre variables y su representación mediante tablas, gráficas y ecuaciones.

He decidido dividir el campo de problemas que pretendo enseñar en dos grandes bloques. Por un lado se realiza el estudio de las funciones en general y sus propiedades, para seguidamente entrar algo más en detalle en algunos casos particulares, como son la función lineal, de proporcionalidad inversa y cuadrática. No obstante esto no quiere decir que se tengan que dar exclusivamente en ese orden, las funciones tipo pueden surgir como casos especiales en el estudio de funciones, ya que muchas de las propiedades vistas en funciones en general son aplicables a los casos particulares. Finalmente hay un apartado de actividades para realizar sobre el objeto matemático una vez vista la unidad.

En la primera parte de este trabajo hablo sobre el estado actual de la enseñanza de las funciones, cómo se justifica su introducción, qué campos de problemas y técnicas se utilizan y los efectos en la enseñanza. A continuación destaco los conocimientos previos más relevantes a tener en cuenta para la introducción de este objeto y algunas actividades para reforzarlos. Tras esto describo la razón de ser en la introducción escolar adjuntando inmediatamente después la histórica, y añadiendo finalmente tres problemas que representen la razón de ser a mi juicio. Finalmente los últimos apartados se centran en la parte más práctica, donde despliego mi campo de problemas y diseño los problemas y ejercicios relativos al campo de problemas anterior, las técnicas necesarias y la implementación en el aula tanto de las actividades como de la institucionalización de cada uno de los aspectos del objeto matemático, creando a continuación una especie de secuencia didáctica o cronograma y terminando con una prueba de evaluación que determine si se consiguen alcanzar los conocimientos requeridos sobre el objeto que posteriormente especificaré junto con los criterios de calificación.

2. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

2.1 Justificación

Las funciones se introducen debido a la necesidad de representar gráficamente la relación existente entre dos variables numéricas relativas a cierta situación real, como podría ser la temperatura que va haciendo a lo largo del día, la distancia recorrida de un coche según su velocidad, la altura de un río a lo largo de un año… Es decir, a los alumnos se les pide construir una serie de gráficos cartesianos de funciones, que sean capaces de explicar cierto fenómeno de su entorno plasmando esa información en el papel. Mencionar también que la relación a la que se le da más importancia en este curso es la de proporcionalidad directa, debido a que es un conocimiento que tienen más reciente y puede transponerse a diversas situaciones reales, pudiendo no sólo considerar la gráfica sino también la ecuación de la función y así obtener cualquier valor para almacenarlo en una tabla de puntos o representarlo gráficamente.

2.2 Campo de problemas, técnicas y tecnologías

A continuación procederé a presentar el campo de problemas que habitualmente se enseña en 2º curso de la ESO. Primero, haré una transcripción de los contenidos mínimos dictados por el BOA (09/05/2007):

Bloque 5: *Funciones y gráficas*

I. Tablas y gráficas. Relaciones funcionales. Distintas formas de expresar una relación funcional: verbal, tabla, gráfica y simbólica. Representación de tablas numéricas en un sistema de coordenadas cartesianas y obtención de tablas a partir de gráficas.
II. Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
III. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes y de la función polinómica de primer grado. Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.
IV. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.
V. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
VI. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
VII. Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta.

Para describir el campo de problemas utilizado, recurriré a tres libros (uno más antiguo y dos más actuales) con la finalidad de hacernos una idea de los problemas y ejercicios que suelen estar ligados con las funciones y gráficas de 2º de ESO. En algunos casos si no especifico técnicas es porque son iguales o similares a las ya vistas en anteriores ejemplos, por lo que destacaré las más relevantes o diferentes en algún sentido:

Libro 1 (Edebé, 1997)

1. Coordenadas cartesianas.

a. Coordenadas de un punto en el plano.

Técnica: Para un punto $(x, y), x$ es la coordenada de la abscisa e y de la ordenada. Valores positivos se dibujan en el semieje derecho de abscisas y semieje superior de ordenadas, las negativas es el contrario.

b.1 Representación de puntos en el plano.

Técnica: Se localizan las coordenadas en los ejes y se trazan dos rectas paralelas por los puntos que se cortarán en el punto buscado.

b.2 Determinación de coordenadas de un punto.

Técnica: Se trazan rectas verticales y horizontales pasando por el punto, y donde corte con los ejes representará las coordenadas (x, y).

2. Concepto de variable.

Técnica: Para diferenciar la variable dependiente de la independiente, se prueba cuál de ellas se obtiene a partir de la otra.

3. Concepto de función.

Técnica: Una relación de variables será función, cuando para cada valor de la variable independiente se tiene un único valor de la variable dependiente.

4. Dominio y recorrido.

Técnica: Para el dominio, se observa el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. En el caso del recorrido se hace lo propio con la dependiente.

5. Funciones afines.

a. Ecuación de una función.

Técnica: La ecuación es de la forma $y = mx + n$, y se puede obtener conociendo el pendiente m y la ordenada en el origen n, o bien conocidos dos puntos y planteando un sistema sustituyendo en la ecuación. Si surge a partir de un problema, es el mismo sistema que se utilizaba con la proporcionalidad directa.

b. Tabla de valores.

Técnica: Para construir una tabla de puntos se sustituyen valores en la ecuación de la función, y a través de un par de valores de la tabla también se puede obtener la ecuación como en la técnica anterior.

c. Gráfica de una función.

Técnica: O bien sustituyendo valores en la ecuación o utilizando los puntos de la tabla, se representan en el plano como con la técnica *b.1 Representación de puntos en el plano* trazando la recta que los une en este caso.

6. Características de las gráficas.

a. Intersección con los ejes

Técnica: Observar la gráfica viendo en qué puntos se corta la curva con los ejes y extraer tales puntos.

b. Crecimiento y decrecimiento

Técnica: Una función será creciente, si al aumentar valores para la variable independiente, también aumenta en la dependiente, en caso contrario, será decreciente.

c. Máximos y mínimos

Técnica: Una función tiene un máximo en un punto cuando antes de llegar a ese punto es creciente y después pasa a ser decreciente. Si pasa la situación contraria, será un mínimo.

d. Continuidad

Técnica: Una función es discontinua, si no es posible trazar su gráfica sin levantar el lápiz del papel.

Justificación: Hace una especie de justificación a través de situaciones reales, en las que se interpreta cada uno de los elementos de estudio, si sube o baja la temperatura, en qué punto es más alta, más baja…

7. Representación gráfica de funciones por medio de programas informáticos.

Técnica: Se sugiere a los alumnos utilizar alguna plataforma informática en casa para visualizar y representar con más exactitud todo tipo de funciones.

Libro 2 (Santillana, 2012)

1. Coordenadas cartesianas.

Técnica: La primera coordenada x se representa sobre el eje de las abscisas (horizontal), la segunda coordenada y se representa sobre el eje de las ordenadas (vertical). Se parte desde el punto de corte de los ejes $(0, 0)$.

2. Concepto de función.

Técnica: Para que una relación represente una función, a cada valor de x, le tiene que corresponder un único valor para y, siendo x la variable independiente e y la dependiente.

Justificación: Lo justifica con un ejemplo, a partir de la temperatura que hace a lo largo del día que es función del tiempo, ya que en cada momento hace una temperatura única.

3. Representación gráfica de una función.

a. A partir de una tabla de valores.

Técnica: Se identifican cada uno de los valores x con su respectiva imagen y, y se representan como puntos en el plano.

b. A partir de una expresión algebraica.

Técnica: A partir de la expresión de la función $y = f(x)$, se van dando valores a x obteniéndose la y correspondiente para así colocarlos en el plano.

Justificación: Lo justifica y ejemplifica con un problema de función de proporcionalidad directa obteniendo la ecuación.

4. Estudio de una función.

a. Continuidad.

Técnica: Una función es continua si su gráfica se puede dibujar de un solo trazo.

Justificación: Se llama punto de discontinuidad si al dibujar la gráfica hay un punto donde se interrumpe.

b. Puntos de corte con los ejes.

Técnica: Los puntos de corte con el eje X, se obtienen sustituyendo la variable y por cero. Para el corte con el eje Y, se sustituye x por cero.

Justificación: Los puntos de corte con el eje X son de la forma $(x, 0)$ y con el eje Y son de la forma $(0, y)$.

c. Crecimiento y decrecimiento.

Técnica: Una función será creciente en un tramo, si al aumentar el valor de x también aumenta el valor de y. Si en lugar de ello disminuye el valor de y será decreciente.

d. Máximos y mínimos.

Técnica: En los puntos donde la gráfica pasa a ser de creciente a decreciente se dice que son máximos, si pasa a ser de decreciente a creciente serán mínimos.

Justificación: Hace una especie de justificación del estudio global a partir de un ejemplo de una etapa ciclista explicando lo que significa cada apartado.

Libro 3 (Anaya, 2012)

1. Concepto de función.

2. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.

a. Crecimiento y decrecimiento.

b. Tramos constantes.

Técnica: Cuando la función mantiene el mismo valor en todo el tramo.

c. Máximos y mínimos.

Técnica: En el punto en que la ordenada toma mayor valor se le llama máximo de la función, cuando es el menor se le llama mínimo.

Justificación: Se justifica a través de un ejemplo que relaciona el precio de las naranjas a lo largo de cierto año, traduciendo lo que significa cada uno de los apartados anteriores.

3. Funciones de proporcionalidad.

a. Tabla de puntos.

b. Ecuación $(y = mx)$.

c. Representación.

Técnica: es una recta que siempre pasa por el origen (0, 0) y otro punto que puede obtenerse de la ecuación o la tabla.

4. Funciones afines.

a. Tabla de puntos.

b. Ecuación ($y = mx + n$).

b.1. Rectas paralelas.

Técnica: para obtener la ecuación de dos rectas paralelas se tiene que utilizar el mismo pendiente m para ambas.

Justificación: De esa forma tendrán la misma inclinación y por tanto serán paralelas.

c. Representación.

Técnica: La ecuación se representa mediante una recta de pendiente m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

5. Funciones constantes.

a. Tabla de puntos.

b. Ecuación ($y = k$).

Justificación: Es una función lineal ($y = mx + n$) con pendiente $m = 0$.

c. Representación.

Técnica: Se representa por una recta paralela al eje X, a una distancia k de éste.

2.3 Efectos en el aprendizaje de los alumnos

El trato que se le da actualmente a esta unidad didáctica, a pesar de que también pueda tener sus ventajas, podría acarrear las siguientes dificultades en el aprendizaje de los alumnos:

Introducir las funciones como relación gráfica de variables no es una mala idea, sin embargo se le da una importancia excesiva a la representación, por lo que en ocasiones los alumnos asocian el concepto de función con la posibilidad o imposibilidad de trazar una curva, y frente a funciones un tanto extrañas, como podrían ser la de Dirichlet o de Gelbaum dudan al responder afirmativamente a si lo son (Giorgio T. Bagni, 2004).

Será entonces relevante una adecuada introducción del concepto, haciendo una firme institucionalización sobre el significado de función, remarcando que la posterior representación gráfica es una buena ayuda visual pero no una herramienta definitiva que decide la relación entre dos variables.

Por otra parte, tal como dicen Leinhard et al. (1990), decidir si un gráfico ha de ser representado de forma continua o no, no es una cuestión trivial. Tanto si se trata de un gráfico discreto como continuo, los alumnos tras la representación de puntos, tienden a trazar la curva que los une sin pensar si tiene sentido esa unión o no, es decir, si estamos tratando con una variable independiente discreta o continua. Por lo que será interesante tratar con algunos ejemplos en los que surjan los dos tipos de variables, haciendo que los alumnos aprendan a reflexionar cuándo se trata de un tipo o de otro, decidiendo eventualmente si se tienen que unir o no los puntos de la gráfica.

Otro de los aspectos a tener en cuenta es que el estudio de funciones en este curso está más centrado en el conocimiento de funciones lineales, lo cual según mi propia experiencia personal como profesor, puede hacer propiciar al alumno la idea de que cualquier relación entre variables va a ser directamente proporcional. Se hace el intento de una creación de situaciones ficticias en el que se requiere de una función lineal para su estudio, sin embargo, no podemos hacer una transposición directa de este fenómeno al mundo real en la mayoría de los casos, y el aprendizaje en los alumnos se va a limitar a saber representar puntos en el plano y la recta que viene representada por una ecuación o viceversa.

Es cierto no obstante, que en algunos problemas se pide el estudio global de la gráfica de una función no lineal, pero el concepto para los alumnos de función es todavía algo abstracto y nuevo, por lo que no serían capaces de comprender en su totalidad el significado de tal gráfica o lo que está representando (es decir qué significa el crecimiento o decrecimiento, un determinado comportamiento que tenga en cierto lugar…) , por lo que sería conveniente mostrarles algunos tipos de funciones distintas, que además tengan cierto significado y representen alguna situación de su entorno, a pesar de que eventualmente nos centremos un poco más en ejemplos de funciones lineales.

Considerando ahora las funciones lineales, hay que destacar la importancia del uso de una buena escala para su representación gráfica (González, F.G., Gracia, F y Palomero, I. ,1998).

Además de saber utilizar el pendiente y la ordenada en el origen, las medidas de los ejes tienen que escogerse de tal forma que la posterior interpretación de la gráfica se asemeje a la realidad que está modelizando. Este concepto por supuesto, se transfiere también a la representación gráfica de otras funciones cualesquiera, ya que si los alumnos escogen una mala proporción entre el eje de las abscisas y el de las ordenadas, a pesar de que interpreten adecuadamente la gráfica resultante, es posible que cambie radicalmente de la interpretación real de la situación que representa, y que por tanto la información quede falseada.

También se puede presentar una concepción errónea del significado de máximos o mínimos absolutos. Como he citado anteriormente, en la técnica que se utiliza para su cálculo habitualmente, sólo se consideran los puntos de cambio de monotonía, sin prestar atención a lo que ocurre en los extremos del intervalo o puntos de discontinuidad donde la función está definida, que aunque es cierto que no representan máximos o mínimos relativos, sí que podemos decir, que si tales puntos están por encima o por debajo que el resto de la gráfica, corresponden entonces a máximos o mínimos absolutos.

Además, también podrían surgir problemas con tramos constantes que estén por encima o por debajo que el resto de la gráfica, ya que no se han considerado como extremos relativos tampoco, y es posible que representen en este caso, un intervalo de máximos o mínimos absolutos. No obstante también se puede dar el caso a la inversa, y considerar como máximos y mínimos sólo aquellos puntos que se encuentran por encima o por debajo de la gráfica, dejando a un lado los relativos (Ortega, Tomás y Pecharromán, Cristina, 2014).

En cualquier caso, es importante que los alumnos sepan diferenciar cada uno de ellos, entendiendo también que no siempre se tratan de puntos aislados, sino que podemos encontrar varios máximos y mínimos absolutos (pudiendo ser también relativos), e incluso tramos continuos de extremos absolutos, como pueden ser los intervalos constantes.

El tema de la continuidad de las funciones es otro concepto que según la mayoría de los libros, no llega a entenderse como lo que realmente significa, textualmente, los alumnos se quedan con la siguiente frase: ''*si la función puede dibujarse de un trazo, es continua, sino, discontinua*''.

Lo podemos encontrar por ejemplo en los libros de matemáticas de 2º de ESO de las editoriales: Edebé (1997), Vicens Vives (2003) y Santillana (2012), lo cual es una buena aproximación, pero en un futuro puede inducirles a error ya que es un resultado parcialmente cierto. Bien es verdad, que la continuidad en una función es un término con un nivel de complejidad más alto de lo que pareciera, ya que antes de hablar de ello primero se debe discutir dónde está definida la función (dominio) y cómo se comporta dentro del mismo. Por lo que tal vez, para este curso no sea muy adecuado enseñarlo en su totalidad y haya que hacer cierta transposición didáctica, o bien empezar a tratar el dominio de una función con más profundidad y sus consiguientes implicaciones respectivas a la continuidad. Por tanto, lo que habría que plantearse es si enseñarlo en este curso o esperar al siguiente, de hecho, en algunos libros no se toca la continuidad en segundo curso (por ejemplo los libros de 2º ESO de matemáticas de las editoriales Edelvives (2007) y Anaya (2012)).

3. Conocimientos previos necesarios

Para afrontar el aprendizaje del objeto matemático en cuestión, obviamente se requerirá del conocimiento de una serie de conceptos base para el adecuado desarrollo del proceso didáctico. Con ello, buscamos obtener una mejor comprensión y concepción de la razón de ser del objeto, ya que partiendo de una mala base será mucho más difícil que este nuevo concepto asiente adecuadamente. Se requerirá pues del conocimiento de los siguientes objetos matemáticos:

- *Números enteros y recta entera*: necesitamos que los alumnos entiendan el significado de número entero (en particular de los negativos) junto con sus operaciones, sabiendo posicionar cada uno de ellos en su correspondiente lugar de la recta entera, diferenciando cuales son mayores o cuales menores. En funciones, el siguiente paso será añadir una segunda recta de valores enteros, para que las dos variables tengan su recorrido (el plano).
- *Números Reales:* para representar el carácter continuo de algunas funciones, las cuales no sólo representan enteros sino todo el dominio de números reales en el cual están definidas.
- *Proporcionalidad:* Como las primeras funciones introducidas serán las de proporcionalidad directa y lineales, la comprensión del tema de proporcionalidad o relación de proporcionalidad entre dos variables será importante a la hora de aplicarlo a funciones y gráficas, que representarán tal proporcionalidad.
- *Álgebra y ecuaciones:* Deberán ser capaces de manejar expresiones algebraicas y sus operaciones, ya que una función se puede representar mediante una ecuación que relaciona dos variables (en el caso de funciones en el plano que es donde trabajaremos).

Podemos decir que la enseñanza anterior ha propiciado en principio adecuadamente a que los alumnos adquieran esta serie de conocimientos previos necesarios. De hecho corresponden con unidades didácticas que son enseñadas en el mismo curso de 2º de ESO, anteriormente al tema de *funciones y gráficas*, por lo que es un conocimiento que en cierta medida se mantiene fresco y los alumnos recuerdan y pueden relacionar con el nuevo tema.

También en algunas ocasiones se ha intentado hacer una pequeña mención a las funciones, como podría ser por ejemplo en el caso de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuando se representa gráficamente lo que ocurre con el número de soluciones que pueden tener y su significado como dos rectas iguales, paralelas o que se cortan en un punto solución.

Actividades de refuerzo de los conocimientos previos:

A continuación propondré una serie de actividades que se corresponden con los conocimientos previos necesarios:

1. Números enteros y recta entera:

a) Ordena los siguientes números enteros de mayor a menor:

$$5, -5, 2, 1, -2, 0, -3, 3, 7, -10$$

Considerando la recta de números enteros, colócalos en su posición correspondiente.

-En este caso, queremos sobre todo que recuerden el método de ordenación de los números enteros, considerando cuáles son mayores o menores para así, empezar a tener una idea del significado de eje cartesiano y la colocación de cada uno de los números en el mismo.

2. Números Reales:

a) Entre los números 1 y 2, ¿cuántos números reales crees que existen? ¿Y racionales?

-Con esta pregunta se pretende que reflexionen sobre el carácter continuo de los reales, y que entre cualesquiera dos números, siempre podremos intercalar un real (o un racional, que es en lo que más nos centraremos ya que pueden representarse mediante una fracción).

b) Reduce y ordena de mayor a menor los siguientes números racionales:

$$1)\ \frac{36}{90}, \frac{105}{45}, \frac{120}{180}, \frac{110}{66}$$

$$2)\ \frac{30000}{60000}, \frac{140}{120}, \frac{81}{108}, \frac{420}{84}$$

-En este ejercicio, queremos que recuerden cómo se reducían las fracciones a partir de sus factores primos comunes, y también la ordenación de números racionales obteniendo común denominador.

c) Coloca aproximadamente cada uno de los siguientes números racionales en la recta Real:

$$\frac{2}{5}, \frac{5}{2}, \frac{10}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{4}$$

-Una vez han practicado la reducción y ordenación, pasamos a su colocación en la recta de números reales, que en funciones y gráficas será lo que nos interese, debido a que algunos resultados pueden venir dados en forma de fracción, por lo que sería conveniente que también se les enseñara a hacer una partición adecuada en los ejes a la hora de colocar esos números. Por ejemplo, para representar $\frac{2}{5}$ exactamente, una opción sería, siempre que los demás números a representar no sean muy grandes en módulo, en una hoja cuadriculada cada 5 cuadrados representan una unidad, por lo que $\frac{2}{5}$ serían exactamente dos cuadrados.

3. Proporcionalidad:

a) Marcos ha comprado por su cumpleaños 5 entradas de cine para él y sus amigos por 22 euros y 50 céntimos. Después se unen más amigos, y Marcos compra también el resto de entradas por 31 euros y 50 céntimos. ¿Cuántos amigos se han unido a la fiesta de cumpleaños?

-Este problema requiere de una pequeña reflexión sobre si se trata de una relación de proporcionalidad directa o inversa, por lo que así recordarán lo que significaba cada una para así aplicar el proceso correspondiente, el cual será absolutamente necesario a la hora de resolver problemas que involucren a la función lineal (para el caso de proporcionalidad directa), por lo que es un conocimiento mínimo indispensable.

b) Se sabe que 4 alumnos de una clase tardan en realizar cierto trabajo 6 horas. Si suponemos que todos trabajan igual y a la misma velocidad, ¿cuántos alumnos se necesitan para realizar el mismo trabajo en 3 horas?

-En este caso queremos que se den cuenta de la relación de proporcionalidad inversa, y que sean capaces de diferenciarla de la directa, a pesar de que no se profundice mucho en esta unidad la inversa, sí que diferenciaremos sus gráficas, por lo que entenderán mejor las diferencias entre estos dos tipos de proporcionalidad.

4. Álgebra y ecuaciones:

a) Resuelve las siguientes ecuaciones para x:

1) $5x + 2 = 1 + 2x$

2) $2x - \frac{3}{2} = \frac{x+1}{3} - \frac{1}{6}$

3) $2x^2 + 5 - x = 3 + x^2 + 2x$

4) $-8 + x + 6x^2 = 4 + 3^2 + x$

-Se trata en este caso de ejercicios de repaso sobre resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Queremos que recuerden operaciones algebraicas simples además de la fórmula general para la resolución de ecuaciones de segundo grado, ya que será necesario por ejemplo en el cálculo de puntos de corte con el eje X, o bien para ordenar adecuadamente la ecuación de una función despejando la variable dependiente.

4. Razones de ser del objeto matemático

4.1 Razón de ser

La razón de ser principal que quiero transmitir es la de ser capaz a través de las funciones de estudiar las relaciones existentes entre dos conjuntos (en este caso de números) relativos al mundo que nos rodea, y además poder representarlas ya sea gráficamente, en tablas o con una ecuación, compactando así la información que nos transmite. Esa información también debe ser tratada y procesada, para poder describir el comportamiento del fenómeno mediante la función obtenida, pudiendo después traducirlo al lenguaje que nos sea más oportuno. Es decir, la utilidad de las funciones o su razón de ser, viene dada por ser capaz de modelizar un tipo de relación sobre un proceso de nuestro entorno, y a través de ella, entender e interpretar su comportamiento, pudiendo predecirlo a corto o largo plazo, incluso modificar ciertos factores para que se comporte como más queramos.

4.2 Historia de las funciones; evolución del concepto y razón de ser

Históricamente, se pueden considerar una serie de períodos esenciales referentes al nacimiento y evolución del concepto de función y su razón de ser, los cuales quedan divididos de la siguiente forma:

Egipto y Mesopotamia (2000 a. C.- 600 a. C.)

En las civilizaciones mesopotámicas (matemáticas babilónicas), ya se encontraban una serie de relaciones en tablas con los cuadrados de los números del 1 al 59, los cubos de los números del 1 al 39 y los inversos de los naturales (2000 a.C.), estas tablas se presentaban en forma de columnas definiéndose una especie de funciones de $N \rightarrow N$ o de $N \rightarrow R$. En el antiguo Egipto, aparece una tabla de descomposición de $\frac{n}{10}$ para $n = 1..9$ y otra con la descomposición $\frac{2}{n}$ como suma de fracciones unitarias para los impares n desde 5 hasta 101 recogidas en el *papiro Rhind* o *papiro Ahmes* (1700 a.C.).

Tablilla Babilónica

Papiro Rhind

Estas culturas no percibieron el concepto de función tal y como se conocería hoy día, ya que no abstrajeron la fórmula de tales relaciones debido quizás a la limitación en simbología y utilizar unas matemáticas algo intuitivas o empíricas, entre otros motivos.

Grecia (600 a.C. - 400 d.C.)

La primera vez en la historia que parece ser clara la noción de dependencia entre cantidades viene dada por los Griegos, en particular de la mano de Arquímedes y las leyes de la mecánica:

‘’Cualquier cuerpo sólido que se encuentre sumergido total o parcialmente en un fluido será empujado en dirección ascendente por una fuerza igual al peso del volumen del líquido desplazado por el cuerpo sólido’’.

También se pueden encontrar otros muchos ejemplos en sus trabajos de geometría. Pasamos a hacer una pequeña observación sobre el concepto de función griego a través del postulado de Euclides: *‘’Por dos puntos distintos pasa sólo una línea recta’’.*

Que traducido al postulado equivalente del matemático escocés John Playfair:

‘’A través de un punto fuera de una línea recta, se puede construir solamente una línea recta paralela a la recta dada’’.

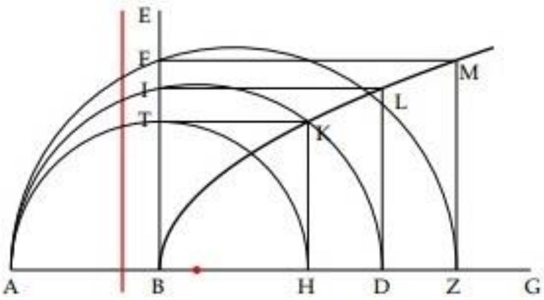
Establece una relación funcional entre los puntos del plano que no pertenecen a una recta dada y las rectas en el plano paralelas a la misma.

Pueblos orientales y semíticos, (600 a.C. - siglo XIV)

La matemática árabe (siglo VII- siglo XIII) ofrece las primeras evidencias de las hoy conocidas como razones trigonométricas. Poseían tablas para senos y cosenos, secante, cosecante, tangente y cotangente. Sentaron las bases del álgebra, la aritmética y la trigonometría, desarrollada a través de la trigonometría hindú (Surya Siddhanta). Hacia el siglo X ya existían tablas para las funciones trigonométricas, aunque un tanto distintas de nuestro concepto de función actual que tendría que esperar 600 años adelante.

A continuación se presenta la siguiente construcción usada por los artesanos árabes en sus cerámicas, la cual tiene una gran influencia griega y en forma asombrosa, llama la atención a las gráficas de la época Cartesiana.

Construcción gráfica de una parábola



<u>*Edad media (siglo V- siglo XIV)*</u>

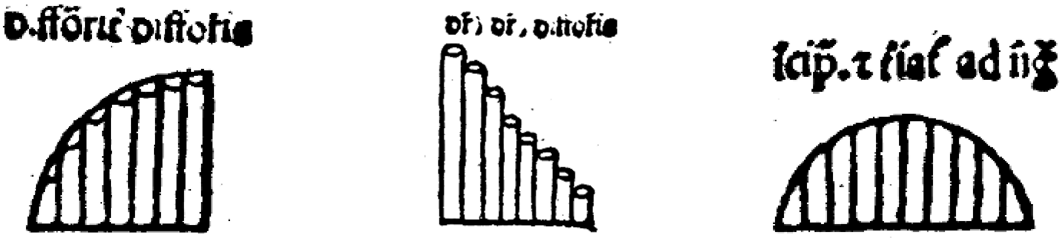
Durante este período, el concepto de función no tuvo mucha oportunidad de desarrollo, que aunque se conserva como dependencia de cantidades, no representa aun el concepto actual. No es hasta el renacimiento, cuando empieza a cobrar ese sentido. Sin embargo, cabe destacar dos acontecimientos importantes:

En el siglo XIV, Thomas Bradwardine (Oxford) utilizó un "álgebra de palabras" para expresar relaciones de tipo funcional. Utilizaba letras del alfabeto en lugar de números para sustituir cantidades variables, y representaba con palabras las operaciones elementales. En *"del tractatu de proportionibus velocitatum"* establece:

''Cuando la fuerza es mayor que la resistencia, la velocidad depende de los cocientes de ambas magnitudes, y cuando es igual o menor no se produce movimiento''.

Por otro lado, Nicholas Oresme (París) alrededor de 1361 diseñó una versión de representación gráfica rudimentaria para modelar variaciones, sobre todo en la naturaleza. Utilizaba segmentos verticales para representar las distintas variaciones, apoyados sobre un segmento horizontal formando así una figura geométrica.

Representaciones utilizadas por Oresme



El renacimiento (siglo XV – siglo XVI)

En este periodo podemos destacar dos situaciones que propiciaron al desarrollo del concepto de función:

1. Uso de símbolos para representar objetos matemáticos:

- Cardano en 1545 escribió:

  cubus p6 rebus aequalis 20, para representar $x^3 + 6x^2 = 20$.

- Viète en 1570 escribió:
  C + *8Q* + *16N aequ 40*, para representar $x^3 + 8x^2 + 16x = 40$.
- Descartes en 1637 escribió la ecuación anterior en la forma:
  xxx + *8xx* + *16x* = *40.*

2. Nueva perspectiva para el estudio de la naturaleza:

En el siglo XVI, los científicos se plantearon problemas desde el punto de vista experimental y físico. El estudio de variables requería relacionarlas, expresarlas mediante números y representarlas adecuadamente. Todo esto implicaba utilizar nuevas relaciones que podían verificarse en forma experimental.

Siglo XVII – siglo XVIII

Durante este período, hubo una serie de catalizadores que propiciaron la formalización del concepto de función hacia como es conocido hoy día:

1. Introducción de sistemas de coordenadas:

- Descartes, en el "*Discurso del Método*" expone su visión del sistema coordenado. A pesar de que no considera números negativos, sienta las bases para lo que hoy conocemos como *''Sistema cartesiano de coordenadas'',* Descartes distinguía el concepto de dependencia de variables, diferenciando la función de la variable independiente y la dependiente.

2. Ecuación de una función:

- Fermat utilizó ecuaciones para la representación de ciertas curvas. En 1629 había encontrado las ecuaciones de la recta, la circunferencia con centro en el origen, la elipse, la parábola y la hipérbola.

3. Fórmulas que relacionan cantidades:

- Galileo utilizaba fórmulas para relacionar ciertas cantidades y representar las relaciones que se generan entre variables de algún fenómeno.

Otro de los grandes aportes de esta época hacia el concepto de función viene de la mano de Newton y su teoría de fluxiones. Las magnitudes están descritas como movimientos continuos, de tal forma que la variable dependiente se va generando de forma continua a partir de la variable independiente.

La palabra función aparece por primera vez en un manuscrito de Leibniz de 1673, ‘’ *Método de la inversa de las tangentes, o de las funciones’’,* y la primera definición formal de función aparece en 1699 en un artículo de Bernoulli, publicado en *"Acta Eroditorum":*

‘’Aquí denotamos por función de una variable una cantidad compuesta, de una o varias maneras, de esta cantidad variable y constantes’’.

Eüler en 1740 utilizó por primera vez el símbolo $f(x)$ en un artículo llamado *"Additamentun"*. Seguidamente en 1748, en el capítulo primero de *"Introductio in Analysis Infinitorum"*, Eüler se refirió al concepto de función de la manera siguiente:

‘’Se acostumbra denominar como funciones a las cantidades dependientes de otras, tal que, como consecuencia de la variación de la últimas cambian también las primeras’’.

Más adelante, en 1787 también encontramos una definición de función por parte de Lagrange:

‘’Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas’’.

<u>Siglo XIX</u>

Es en esta época, a través de la teoría de funciones establecida en 1797 por parte de Lagrange, cuando se dan una serie de definiciones de función mucho más exactas y rigurosas que la de Eüler:

Cauchy en 1827 dentro de su ‘’Curso de Análisis Algebraico’’, escribió la siguiente definición de función:

‘’Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable’’.

Lobachevsky en 1834 hizo la siguiente aportación sobre el concepto de función:

‘’El concepto general exige llamar función de x a un número, el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x. El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida’’.

Dirichlet hacia 1837 dio una definición de función bastante aproximada y satisfactoria:

‘’Si una variable y *está relacionada con otra variable* x *de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a* x *hay una regla según la cual queda determinado un único valor de* y*, entonces se dice que y es una función de la variable independiente* x*’’.*

Dirichlet también aportó la posibilidad de expresar funciones incluso sólo con palabras, desligando el concepto de función de fenómenos físicos exclusivamente.

Función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x\ racional \\ 0, & si\ x\ irracional \end{cases}$$

<u>Siglo XX</u>

La idea que se tiene del concepto de función en este período se separa ya del uso de variables numéricas, y alcanza un grado superior de generalidad, en el que se trata con relaciones de dos conjuntos, tal y como se conoce hoy día.

Hausdorf en 1978 citó:

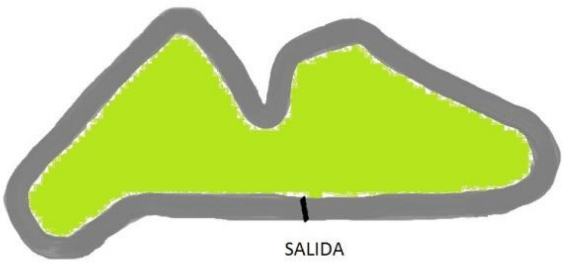
‘’El concepto de función es casi tan fundamental y primitivo como el concepto de conjunto. Una relación funcional está formada por pares de elementos, al igual que un conjunto está formado por elementos individuales’’.

4.3 Problemas que constituyen la razón de ser

A continuación se presentan tres problemas que se podrían corresponder con la razón de ser del objeto matemático a enseñar, que en nuestro caso son las funciones:

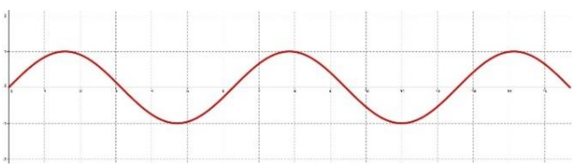
1. Patricia está balanceándose en un columpio, y queremos saber qué altura alcanza en cada momento, ¿serías capaz de representar gráficamente la situación? ¿Qué ocurre si Patricia se balancea más rápido? ¿Y si lo hace más despacio? ¿Y cuando no se balancea? Representa gráficamente cada una de las situaciones de la altura que alcanza en función del tiempo que transcurre.

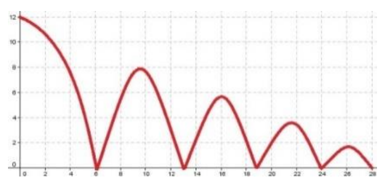
2. Considera el siguiente circuito de carreras:

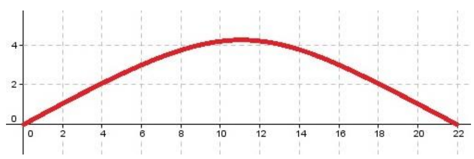


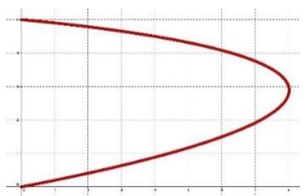
Imagina que partes de la salida con un coche o una moto, ¿podrías representar una gráfica que relacione la velocidad a la que circulas en función de la distancia recorrida? ¿Qué sucede en las rectas? ¿Y en las curvas? ¿Y si una curva es más cerrada que otra? Trata de justificar lo que estás haciendo.

3. Dadas las siguientes gráficas que relacionan dos variables, de entre las cuales una es el tiempo (eje horizontal) ¿Qué situaciones de la vida real podrían modelizar? ¿Consigues encontrar una situación para todas ellas? ¿Qué ocurre con la gráfica d)? Explica razonadamente si realmente es posible dar una relación funcional para esa gráfica.

a) 

b) 

c) 

d) 

Implementación: Estos problemas están pensados para ser presentados nada más comenzar con el tema de funciones, como elemento de introducción y presentación.

En el caso de los dos primeros, mediante lo que sean capaces de interpretar a través de la situación dada, tienen que plasmar toda esa información en un papel, y una de las formas más factibles de hacerlo es recurriendo a las funciones obteniendo su gráfica, relacionando la altura a la que está el columpio con el tiempo (Altura-tiempo) en el caso del primero, y la velocidad con la distancia recorrida en el circuito (Velocidad-distancia)

El tercer problema presenta la situación a la inversa. Se tienen una serie de gráficas a priori de funciones, las cuales representan ciertas relaciones entre dos variables, donde una de ellas es el tiempo. Por una parte, queremos que los alumnos reflexionen sobre la forma de la gráfica y el movimiento que hace a lo largo del tiempo para así, tratar de encontrar una situación que pueda representar esa relación (Los dos primeros problemas, estaban pensados para darles en este algunas ideas de situaciones reales). Por otro lado, como podemos apreciar hay una gráfica que no representa una función. Mediante la pista del tiempo como eje horizontal que les damos a los alumnos, buscamos que se den cuenta de que no es posible retroceder atrás en el tiempo, y que por consiguiente, tal gráfica no podría representar una situación real. Así, de esta forma, introducimos el concepto de función y su razón de ser a través de estos tres problemas.

En principio, resultará difícil para los alumnos representar las situaciones de los dos primeros problemas e interpretar las gráficas del tercero. Es aquí donde se pone de manifiesto la importancia del campo de problemas, que busca conseguir este tipo de objetivos a través de la introducción del concepto de función, el estudio de gráficas para su interpretación y la representación de cualquier tipo de relación funcional. Como casos particulares, se añaden las funciones tipo (Lineal, de proporcionalidad inversa y cuadrática), que además de aportar su representación gráfica, añaden la ecuación de la función, a partir de la cual se puede obtener cualquier punto y colocarlo ya sea en tablas o en una gráfica.

5. Campo de problemas, técnicas y tecnologías

Bloque 1: Sobre funciones en general

1. Ejercicios relacionados con el concepto de función.
2. Ejercicios sobre representación de puntos en el plano y viceversa.
    a. Trazo de la gráfica aproximada de una función cualquiera a partir de sus puntos.
3. Ejercicios sobre el estudio global de la gráfica de una función.
    a. Dominio y Recorrido.
    b. Intervalos de crecimiento, decrecimiento y constantes.
    c. Máximos y mínimos.
    d. Puntos de corte con los ejes.
    e. Continuidad.
4. Problemas sobre la construcción aproximada de la gráfica a partir de datos relativos a dominio y recorrido, monotonía, extremos relativos y continuidad.
5. Problemas sobre la recreación del comportamiento de un fenómeno real a través de la gráfica que lo representa tras el estudio global.
6. Problemas de asociación de gráficas con su correspondiente situación real y viceversa.

Bloque 2: Sobre funciones tipo

7. Funciones lineales (de proporcionalidad directa, constantes y afines)
    a. Ejercicios sobre representación gráfica de la función a partir de su ecuación y viceversa (Ecuación - Gráfica - Ecuación).
    b. Ejercicios sobre representación gráfica de una tabla de puntos y viceversa (Tabla - Gráfica - Tabla).
    c. Ejercicios sobre la obtención de la ecuación de la función a partir de una tabla de puntos y viceversa (Tabla - Ecuación - Tabla).
    d. Problemas basados en la obtención de la ecuación de la función y su representación gráfica o en tabla a partir de ciertos datos.
8. Funciones de proporcionalidad inversa
    a. Ejercicios sobre su representación gráfica y ecuación general.
9. Funciones cuadráticas.
    a. Ejercicios sobre su representación gráfica y ecuación general.

10. Problemas de relacionar gráficas de funciones tipo con su respectiva ecuación.
11. Problemas sobre la construcción de una gráfica a partir de combinación de funciones tipo.

Apartado final: Actividades sobre funciones.

Técnicas y tecnologías asociadas al campo de problemas

Cada uno de estos ejercicios y problemas requieren de una serie de técnicas o modificaciones de las mismas para su resolución. Las técnicas utilizadas serán detalladas y justificadas a continuación. El número de cada técnica estará relacionado con el ejercicio o problema respectivo en el campo de problemas.

Bloque 1: Sobre funciones en general

1. Determinar si una gráfica es función: Trazar una recta perpendicular al eje de las abscisas que pase por cada punto del dominio de la función, y ver que no la corte más de una vez.

Justificación: Ya que la definición de función es que para un mismo valor de la variable independiente solo exista un único valor para la dependiente, entonces trazando la recta vertical desde cada uno de los puntos del eje de las abscisas y comprobando que sólo corta a la gráfica una vez, estamos viendo que ésta tenga sólo una imagen en cada punto de su dominio de definición, y que por consiguiente sea función.

2. Representación de puntos en el plano y viceversa:

2.1 Representación de puntos en el plano: Cada punto viene representado por dos números (coordenadas), la primera corresponde al eje de las abscisas y se cuenta desde el origen (0,0) tantas veces según diga el número, a derecha si es positivo y a izquierda si es negativo. Luego se hace lo propio con la segunda coordenada, y desde donde estuviera el punto tras el movimiento de la primera coordenada, se mueve ahora, en un eje de ordenadas imaginario igual y paralelo al real, tantas veces como diga el número, hacia arriba si es positivo y hacia abajo si es negativo.

2.2 Obtención de puntos de una gráfica: Para obtener las coordenadas de un punto se hace el mismo proceso pero a la inversa, contando lo que se separa del origen horizontalmente (primera coordenada) y verticalmente al eje de las abscisas (segunda coordenada).

Justificación: es la forma de representar un punto en un plano por definición dadas sus dos coordenadas.

2.a *Representación gráfica de una función:* Para trazar la gráfica de una función a partir de sus puntos, primero habrá que discutir sobre el tipo de variable que estamos tratando. En caso de ser una variable discreta, los puntos se dejan sin unir. Sin embargo, si es variable continua, se traza una curva aproximada uniendo los puntos representados.

Justificación: En el caso de las variables discretas, no tiene sentido unir los puntos, ya que representan valores aislados de la función, por ejemplo, el número de alumnos en clase, que en este caso no se podría hablar de medio alumno o alguna fracción del mismo, por consiguiente se dejan sin unir. En caso de la continua sí que tienen que unirse, ya que se alcanzan los valores intermedios; como por ejemplo podría ser alguna medida en centímetros.

3. Estudio global de la gráfica de una función:

3.a Cálculo del dominio y recorrido: Para obtener el dominio y el recorrido de una función se utiliza una técnica parecida en ambos casos. En el caso del dominio, se recorre la recta de las abscisas completa y se observa para qué valores hay gráfica dibujada, o dicho en otras palabras existe imagen. Es importante diferenciar entre dominios de una variable independiente discreta o continua, ya que para la primera vendrá representado por puntos y para la segunda mediante intervalos en x. El cálculo del recorrido es muy similar, pero en este caso se recorre el eje de las ordenadas observando si hay gráfica dibujada en cada punto.

Justificación: Como el dominio por definición son el conjunto de puntos para la variable independiente en los cuales la función está definida, es necesario mirar qué puntos x de la gráfica devuelven imagen. En caso del recorrido es hacer lo mismo a la inversa.

3.b. Estudio de la monotonía: Para el estudio de la monotonía, se observa qué le sucede a la función cuando avanzamos en valores de la variable independiente (hacia la derecha del eje de las abscisas). Si los valores en la imagen $y = f(x)$ son mayores cada vez que se toman valores mayores de x, se dice que la función es creciente en ese tramo, si son menores será decreciente en ese tramo y si por el contrario se mantiene el mismo valor será constante en ese tramo. Los intervalos se escribirán para la variable independiente x.

Justificación: Por definición, una función $y = f(x)$ es creciente en un intervalo (a, b) del dominio, si para cada par de valores del intervalo $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$, luego si cada vez que se avanza en el eje de las abscisas a derecha, los valores de la imagen son mayores, entonces la función será creciente en ese tramo. Es decreciente en un intervalo (a, b) del dominio si para cada par de puntos $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$, luego si cada vez que se avanza en el eje de las abscisas a derecha los valores de la imagen son menores, entonces la función será decreciente en ese tramo. Finalmente, una función es constante en un intervalo (a, b) del dominio, si para cada punto x del intervalo se cumple que $f(x) = k$, con $k = constante$. Por lo que si al avanzar en las abscisas se mantiene la imagen igual la función será constante en ese tramo.

3.c Cálculo de extremos relativos y absolutos: Para calcular los máximos relativos en la gráfica de la función, se observan los puntos donde la función pasa a ser de creciente a decreciente. Para el caso de los mínimos relativos se buscan los puntos donde la función pasa a ser de decreciente a creciente. Los máximos y mínimos absolutos corresponden con el mayor o menor valor en imagen entre los extremos relativos, los extremos del intervalo o intervalos de definición de la función (dominio), los tramos constantes y los puntos de discontinuidad.

Justificación: Por definición, encontramos un máximo relativo en un punto x del dominio de la función, si para cualquier entorno reducido del punto, $f(x) > f(a)$ con a dentro del entorno y distinto de x. Luego si la función pasa de ser de creciente a decreciente, justamente el punto de cambio de monotonía representa un máximo relativo, ya que los puntos cercanos a su alrededor tendrán todos una imagen menor. Para el caso de mínimo relativo el razonamiento es similar considerando en este caso que $f(x) > f(a)$ para cualquier punto a del entorno reducido. Los máximos y mínimos absolutos corresponden con el mayor o igual o menor o igual valor de la imagen de la función, por ello, se necesita comprobar las imágenes de cada uno de los extremos relativos, los cuales tienen una imagen mayor que el resto en un entorno, los extremos de los intervalos de definición porque la función puede ser mayor o menor que los extremos relativos, y finalmente, como los tramos constantes y puntos de discontinuidad no se tratan como extremos, es posible que la función presente en ambos casos una imagen por encima o por debajo del resto de la función, por lo que se corresponderían con extremos absolutos (intervalos en el primer caso y puntos en el segundo).

3.d Obtención de los puntos de corte con los ejes en la gráfica: Para determinar los puntos de corte con los ejes no hay más que observar las coordenadas de los puntos de la gráfica cuando pasa por el eje de las abscisas (puntos de corte con el eje X) o de las ordenadas (punto de corte con el eje Y).

Justificación: Los puntos de corte con el eje X son aquellos que tienen coordenada segunda $y = 0$, por consiguiente hay que observar cuándo pasa la gráfica por el eje de las abscisas. Para el eje Y, el punto tiene coordenada primera $x = 0$, por tanto se encontrará en el eje de las ordenadas.

3.e Estudio de la continuidad: Se representarán las coordenadas de los puntos del dominio de definición de la función cuya imagen ‘’no enlace’’ con el resto de la gráfica, en cuyo caso se dirá que la gráfica es discontinua, en caso de no encontrar tales puntos, se dirá que es continua.

Justificación: Por definición, una función es continua en un punto de su dominio, si la imagen en ese punto y el límite de la función evaluado en ese punto coinciden, para explicarlo a los alumnos, daremos una idea intuitiva de la definición de límite, diciendo que si la imagen de la función en un punto no es acorde al resto de la gráfica y salta a otro nivel o no enlaza, entonces representará un punto de discontinuidad y la función será discontinua (Se justificará mediante ejemplos gráficos de funciones discontinuas).

4. Construcción de la gráfica: Teniendo en cuenta los datos, se tiene que trazar una gráfica aproximada que cumpla cada uno de los requisitos pedidos, utilizando las técnicas anteriores ya conocidas del apartado *3. Estudio global de la gráfica de una función*, pero en este caso el proceso es a la inversa.

5. Interpretación de una gráfica real: Una vez conocido como se realiza el estudio global, el siguiente paso es interpretar lo que significa cada uno de los tramos de crecimiento, decrecimiento y constantes, puntos especiales (extremos relativos, absolutos…) o que no sea continua en un punto, trasladando esta información a la situación real que representa.

6. Asociación gráfica-situación real: En este caso, se darán gráficas por un lado y un texto describiendo una situación por otro, así que se tendrá que identificar cada una con la suya utilizando los conocimientos que tienen sobre construcción de gráficas e interpretación de las mismas.

Bloque 2: Sobre funciones tipo

7. Funciones lineales (de proporcionalidad directa, constantes y afines):

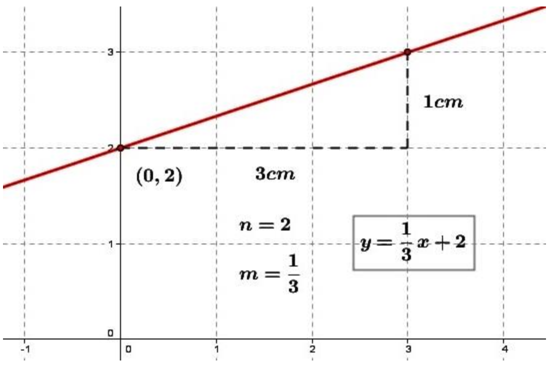
7.a.1 Ecuación-Gráfica:

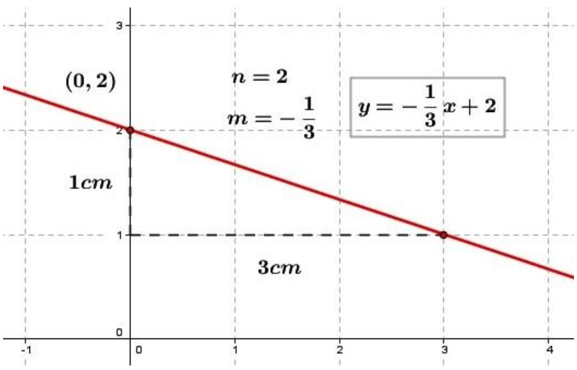
Técnica 1 Pendiente y ordenada en el origen: Conocidos el pendiente m y la ordenada en el origen n, teniendo como ecuación de la recta $y = mx + n$, se puede representar ubicando en primer lugar la ordenada en su lugar correspondiente del eje de las ordenadas dependiendo del número que sea, y a partir de ese punto, si el pendiente es de la forma $m = \frac{a}{b}$ (a y b enteros con $b \neq 0$), siendo m positivo se irá hacia arriba a unidades, si es negativo entonces hacia abajo, tras esto se avanza b unidades a la derecha y se marca el punto. Uniendo la ordenada con este punto obtenemos la recta.

Técnica 2 Sustitución de puntos: La gráfica también se podría representar a partir de dos puntos, los cuales se obtienen por sustitución en la ecuación $y = mx + n$. Se sustituyen dos valores para la variable independiente x, y haciendo las operaciones pertinentes se obtiene la segunda coordenada y, consiguiendo finalmente los puntos. Después se representan en la gráfica y se traza una recta que los una.

*También se podría realizar un híbrido de las dos técnicas anteriores.

Justificación: En el caso de la primera forma, la ordenada en el origen n, representa el punto de corte con el eje de las ordenadas, sustituyendo en la ecuación $y = mx + n$, se tiene que para $x = 0$ entonces $y = n$, luego el punto $(0, n)$ además de ser punto de corte pertenece a la recta. Por definición de pendiente, si se construye un triángulo rectángulo tomando como vértices a dos puntos de la recta y como hipotenusa el segmento de recta que los une, se tiene que es el cateto opuesto dividido por el contiguo, luego, si el pendiente es de la forma $m = \frac{a}{b}$, significa que subimos o bajamos a unidades, según sea positivo o negativo, y después avanzamos b.





Para la segunda forma, con la sustitución en x estamos obteniendo las imágenes correspondientes al valor dado en la variable independiente, y como para representar la recta basta con dos puntos, sólo es necesario hacerlo dos veces para sacar las coordenadas (x, y) de dos de los puntos de la recta $y = mx + n$.

7.a.2 Gráfica-Ecuación:

Técnica 1 Pendiente y ordenada en el origen: Como la ecuación de cualquier recta en el plano es de la forma $y = mx + n$, en esta primera técnica se calculan m y n por separado. Para obtener m (la pendiente), partimos de dos puntos de la recta los cuales obtendremos de su gráfica. Sean los puntos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ con $x_1 < x_2$ pertenecientes a tal recta, seguidamente obtenemos el vector $AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, y dividimos la segunda coordenada por la primera para obtener el pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Si n=0 (función de proporcionalidad) basta con dividir la segunda coordenada por la primera de cualquier punto, ya que la recta pasa por (0,0) y el vector es el mismo que el punto. Luego para obtener el n, se observa el punto que pasa por la coordenada $x = 0$, y su coordenada y será el valor de n. Finalmente se sustituyen m y n en la ecuación y ya la tenemos.

*En caso de que $y_2 - y_1 = 0$, entonces $m = 0$, por lo que la función es constante.

Justificación: Por la definición dada anteriormente de pendiente y ordenada en el origen queda perfectamente justificado, en el caso del pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ el numerador representa lo que se desplaza la y, y el denominador lo que se desplaza la x desde el punto (x_1, y_1) hasta el (x_2, y_2).

Técnica 2 Sistema de ecuaciones: En esta segunda técnica, también utilizaremos la ecuación $y = mx + n$, pero en este caso, a partir de dos puntos de la recta obtenidos de la gráfica, plantearemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (m y n) sustituyéndolos en la ecuación, y lo resolveremos mediante el método que prefiramos (reducción, sustitución o igualación).

Justificación: Sustituyendo dos puntos en la ecuación general $y = mx + n$ y planteando un sistema hacemos que pertenezcan a la misma recta, y como bastan dos para su obtención, conseguimos finalmente la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos.

*También existen técnicas híbridas de las anteriores, como la ecuación punto-pendiente, que no es más que sustituir m y el punto en la ecuación $y = mx + n$ y despejar n. O bien teniendo el n y un punto con un procedimiento similar se obtiene m.

7.b.1 Tabla-Gráfica: La técnica es muy similar a la técnica *2.1 Representación de puntos en el plano* , ya que se basa en la representación de puntos de una gráfica, la única diferencia, es que ahora los puntos se almacenan en una tabla, con una columna para la variable independiente x y otra para la dependiente y, representando cada una la primera y segunda coordenada del punto respectivamente.

7.b.2 Gráfica-Tabla: Análogamente al caso anterior, esta es muy similar a la técnica *2.2 Obtención de puntos de una gráfica,* almacenando los puntos obtenidos en una tabla.

Justificación: No es necesario justificarlas, porque ya lo están las técnicas 2.1 y 2.2, y se basan en lo mismo.

7.c.1 Tabla-Ecuación: Para la obtención de la ecuación de la función a partir de su tabla de puntos, escogemos puntos de la tabla, y seguidamente utilizamos alguna de las técnicas de *8.a.2 Gráfica-Ecuación*: *Técnica 1 Pendiente y ordenada en el origen, Técnica 2 Sistema de ecuaciones* o híbridos de las técnicas anteriores.

7.c.2 Ecuación-Tabla: El proceso a la inversa consiste en obtener la tabla de puntos a partir de la ecuación, mediante la técnica de *8.a.1 Ecuación-Gráfica: Técnica 2 Sustitución de puntos,* se obtienen una serie de puntos y en este caso, en lugar de colocarlos en la gráfica, se almacenan en una tabla para x e y.

Justificación: Como se basan en técnicas ya justificadas no es necesaria.

7.d Problemas función lineal: Este tipo de problemas requerirá del uso de las técnicas anteriores (4.a, 4.b, 4.c) o alguna pequeña modificación de las mismas, como por ejemplo rellenar espacios en blanco de una tabla, obtener la ecuación de una recta a partir de otra paralela, enunciados donde se tienen que reflexionar sobre los datos para saber cómo aplicarlos en la obtención de la ecuación o la gráfica…

8. Funciones de proporcionalidad inversa:

8.a Representación y ecuación: En este tipo de ejercicios, se tendrá que conocer y asociar la gráfica con su respectiva ecuación. Para la representación, la gráfica se puede aproximar sabiendo su forma (hipérbola) y a partir de la ecuación general $y = \frac{k}{x}$ con $k = \ constante$ distinta de cero, se sabe si las dos ramas se colocan en el primer y tercer cuadrante ($k > 0$) o si se colocan en el segundo y cuarto cuadrante ($k < 0$). Luego, cuanto más grande sea la constante k en módulo, más se separarán las ramas al principio de los ejes.

Por otro lado, también se puede representar a partir de la sustitución de puntos en la ecuación como se hacía con la lineal, solo que en este caso, se requiere de más de dos puntos para poder trazarla adecuadamente, y evaluar para valores de la variable independiente tanto positivos como negativos (dos ramas).

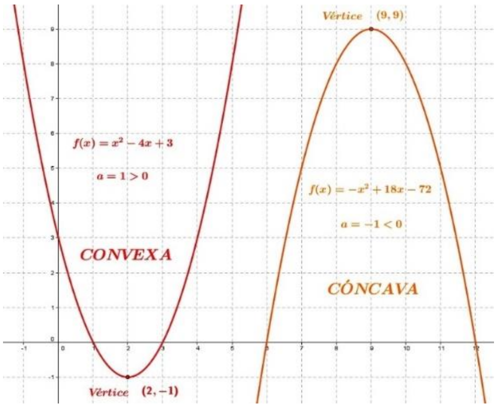
Justificación: Si representáramos la hipérbola, veríamos que al sustituir puntos en la ecuación, si $k > 0$, el signo de ambas coordenadas es el mismo, luego vendrá representada en el primer y tercer cuadrante. Por el contrario, si $k < 0$, entonces el signo de las dos coordenadas es distinto, y eso pasa en el segundo y cuarto cuadrante. Finalmente, sustituyendo en la ecuación por ejemplo $x = 1$, vemos que si k es muy grande en módulo, al principio las ramas de la hipérbola se separan mucho.

9. Funciones cuadráticas:

9.a Representación y ecuación: Igual que con las de proporcionalidad inversa, se tendrá que conocer y asociar la gráfica con su respectiva ecuación. Para la representación, se pueden calcular los puntos de corte con los ejes y el vértice de la parábola, para el punto de corte con el eje $Y,$ basta ver el término independiente, y para los cortes con el eje X, se sustituye $f(x) = 0$ en la ecuación general $f(x) = ax^2 + bx + c$, obteniéndose una ecuación de segundo grado que se tiene que resolver. El vértice viene determinado por la expresión $(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right))$ siendo la ecuación de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a distinto de cero. Además, conocido el signo y módulo de a, se puede saber si será convexa ($a > 0$) o cóncava ($a < 0$) y la amplitud, que será mayor cuanto menor sea el módulo de a, pudiendo aproximar bastante bien la gráfica de la función.

Por otro lado la gráfica también se puede aproximar a partir de la sustitución de puntos en la ecuación como hemos visto en casos anteriores.

Justificación: Como los puntos de corte representan los puntos que se encuentran en los ejes, basta con sustituir $x = 0$ para el eje de las ordenadas, e $y = 0$ para el eje de las abscisas, obteniéndose en este caso una ecuación de segundo grado al ser una parábola. Por la forma que tiene la gráfica de la parábola, sabemos que el vértice es un extremo relativo (máximo o mínimo), por lo que partiendo de su expresión general $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, y derivando finalmente se obtiene la expresión del vértice. Como no podemos explicar esta justificación a los alumnos, la basaremos en una especie explicación gráfica. En el caso de la curvatura, si $a > 0$, con valores para la variable independiente x muy grandes en módulo, ax^2 mandará sobre el signo de la expresión, por consiguiente la parábola subirá hacia los valores positivos (convexa). Si $a < 0$ pasa exactamente lo contrario (cóncava). Cuanto más grande sea a en módulo, la parábola será más estrecha ya que subirá o bajará a más velocidad cuando la x se separe del vértice, en caso contrario, será más amplia ya que lo hará más despacio.



11. Relacionar gráficas con su respectiva ecuación: Conocidas ya las técnicas anteriores de representación y la ecuación general de cada una de las funciones tipo vistas, este tipo de problemas consisten en aplicar tales conocimientos para asociar gráfica y ecuación.

12. Construcción de una gráfica: A partir de las características y propiedades de cada una de las funciones vistas, consiste en la realización de una gráfica con determinados elementos que se darán con anterioridad, siendo esta gráfica una combinación de funciones lineales, de proporcionalidad inversa y cuadráticas.

Actividades sobre funciones: Se aplicarán los conocimientos y técnicas adquiridas en la realización de estas actividades, utilizando también las TIC como apoyo.

6. Diseño del campo de problemas

A continuación propondré una serie de ejemplos de ejercicios y problemas relacionados con cada uno de los apartados del campo de problemas presentado anteriormente. Inmediatamente después de cada uno de ellos, se adjuntarán las técnicas o modificaciones de una técnica necesarias, además del proceso a seguir para su resolución y la implementación en el aula.

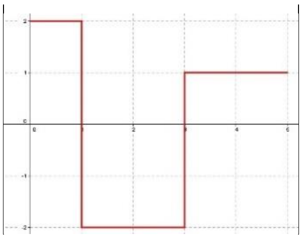
Bloque 1: Sobre funciones en general

1. Ejercicios relacionados con el concepto de función.

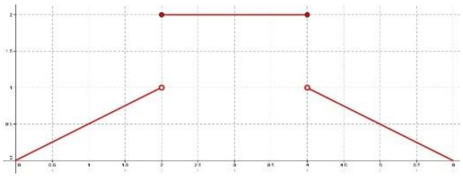
Ejemplos:

1) Dadas las siguientes gráficas, ¿cuáles representan una función? ¿Por qué? De las que has descartado, ¿Por qué no pueden ser funciones?

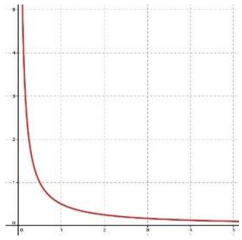
a)



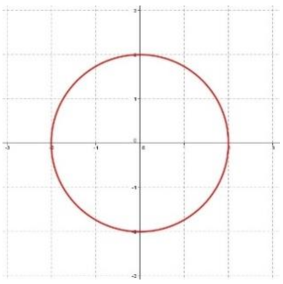
b)



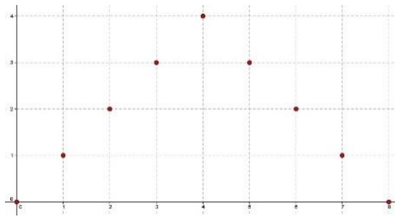
c)



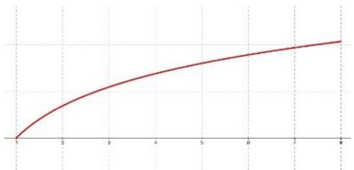
d)



e)



f)



2) Inventa algunas gráficas que representen una función y otras que no. ¿Qué situaciones reales podrían representar las funciones que has construido? Justifica tu respuesta.

Técnicas empleadas, implementación y resolución:

Para la resolución de ambos ejercicios se requiere del uso del concepto de función y su técnica *1. Determinar si una gráfica es función.*

El planteamiento de estos dos ejercicios está pensado hacerlo tras la introducción del concepto de función y su razón de ser a través de los tres problemas vistos anteriormente. Inmediatamente después, se institucionalizaría el concepto y se mostraría la técnica para determinar si una gráfica es función. Así, para determinar si los alumnos verdaderamente han comprendido el significado se proponen estos dos ejercicios sobre el concepto de función. El primero muestra 6 ejemplos de gráficas donde 4 de ellas son función (gráficas b, c, e y f) y las otras 2 no (gráficas a y d). Entre ellas se encuentran ejemplos de ramas infinitas, discontinuidades y variables discretas, para así familiarizar a los alumnos con los distintos tipos de función que pueden existir y que logren diferenciar las que no lo son. El segundo está pensado para desarrollar el conocimiento del concepto tratando de que imaginen gráficas de funciones que se puedan relacionar con la vida cotidiana y otras que no lo sean, proporcionándole así una utilidad.

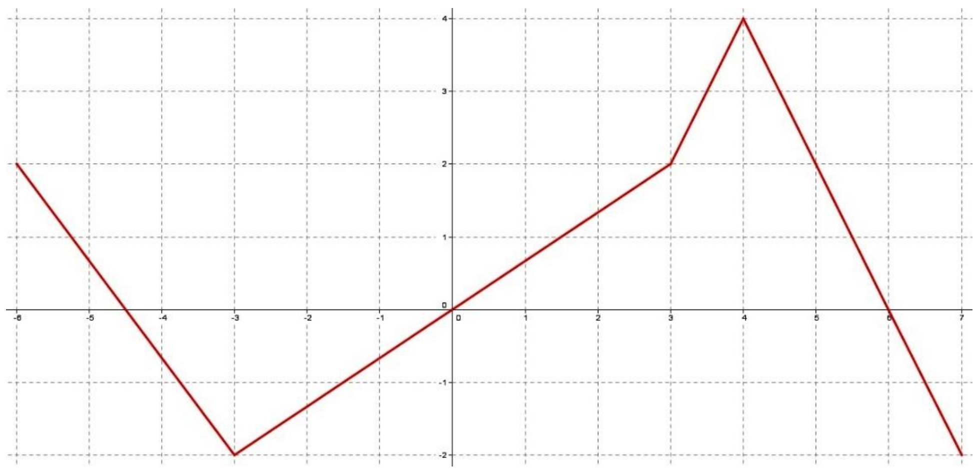
2. Ejercicios sobre representación de puntos en el plano y viceversa.

Ejemplos:

1) Representa en el plano los siguientes puntos e identifica que cuadrante ocupa cada uno según el signo de las coordenadas:

$$A = (3, 5) \quad B = (-1, 2) \quad C = (6, -2) \quad D = (-4, -3)$$

2) Obtén las coordenadas de cuatro puntos (uno de cada cuadrante) de la siguiente función:



a. Trazo de la gráfica aproximada de una función cualquiera a partir de sus puntos.

Ejemplos:

1) Se han recogido en una tabla una serie de velocidades en km/h según el tiempo transcurrido en segundos de una coche que circula por la ciudad:

Velocidad	0	27	40	30	38	50	45	36
Tiempo	0	4	7	11	14	18	20	24

a) Diferencia cual es la variable independiente, la dependiente y dibuja una gráfica aproximada de la situación utilizando los puntos dados.
b) Imagina ahora que en el segundo 24 cuando el coche circula a 36 km/h tiene un pequeño accidente por lo que el coche para repentinamente. ¿Cómo representas esa situación?

2) Se recogen ahora las alturas en centímetros de un grupo de alumnos de 2º de ESO:

Altura	157	140	161	150	143	165	152	148
Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8

Diferencia cual es la variable independiente, la dependiente y dibuja una gráfica aproximada de la situación utilizando los puntos dados. ¿Tiene sentido en este caso unir los puntos? Justifica tu respuesta.

Técnicas empleadas, implementación y resolución:

Los dos primeros ejercicios requieren de las técnicas *2.1 Representación de puntos en el plano* y *2.2 Obtención de puntos de una gráfica.* Los dos siguientes, requieren de la técnica *2.a Representación gráfica de una función.* Los ejercicios sobre representación y obtención de puntos en el plano serán planteados tras la introducción de una serie de conceptos necesarios para la representación de funciones, tales como ejes coordenados (abscisas y ordenadas), diferenciación entre variable dependiente e independiente, coordenadas de un punto, cuadrantes según las coordenadas… Se trata de sencillos ejemplos para practicar en la utilización y obtención de coordenadas de puntos en el plano y que además, sean capaces de diferenciar según el signo de cada coordenada a que cuadrante pertenecen.

Tras aprender la representación de puntos y obtención de una gráfica además de los elementos necesarios para la representación, pasamos ahora al trazo aproximado de la gráfica a través de dos problemas. Por un lado, en ambos pedimos diferenciar las variables independientes de las dependientes ya que se tiene que tener claro a la hora de dibujar la gráfica. Por otra parte, en el primer ejemplo, como se utiliza el tiempo como variable independiente, estamos ante una variable continua, por tanto, para aproximar la gráfica tras ubicar cada uno de los puntos se pueden unir trazando la curva que representa la situación. Además, también se hace un principio de introducción a las discontinuidades a través del choque, ya que la reducción de velocidad es casi instantánea y se puede considerar como una discontinuidad de salto. En el segundo ejemplo, queremos que se den cuenta, de que no es posible tratar a los alumnos como variable continua, ya que no se pueden partir, de esta forma, no tiene sentido que se unan los puntos en la gráfica. De este modo se dejaría institucionalizado y diferenciado cada tipo de variable (discreta y continua), y tendríamos el camino allanado para en el siguiente apartado del campo de problemas tratar la continuidad.

Solución ejercicio 1:

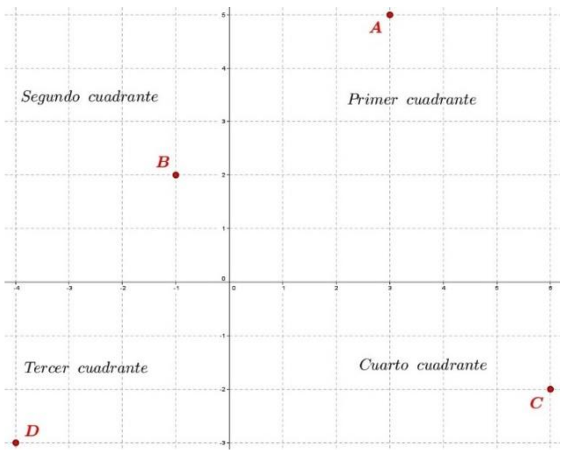
Primer cuadrante → (3, 2)

Segundo cuadrante → (-6, 2)

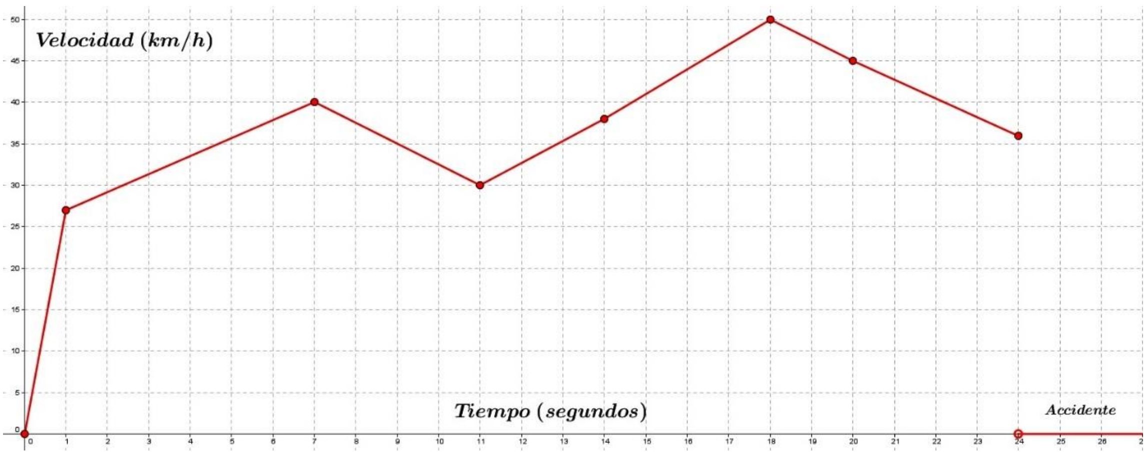
Tercer cuadrante → (-3, -2)

Cuarto cuadrante → (7, -2)

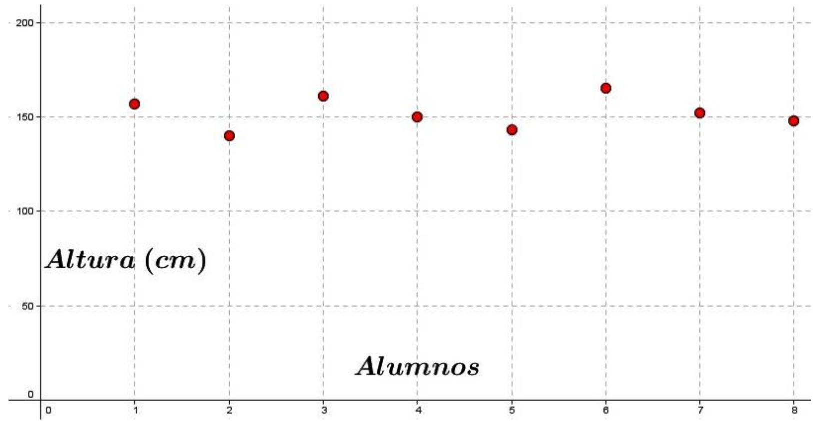
Solución ejercicio 2:



Solución ejercicio a.1:



Solución ejercicio a.2:



3. Ejercicios sobre el estudio global de la gráfica de una función.

a. Dominio y Recorrido.

b. Intervalos de crecimiento, decrecimiento y constantes

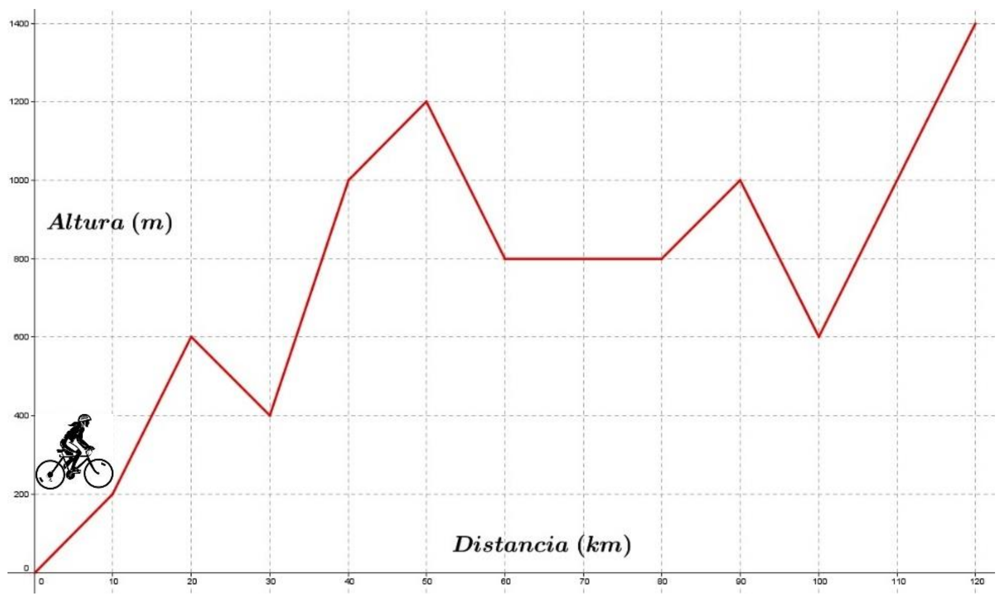
c. Máximos y mínimos.

d. Puntos de corte con los ejes.

e. Continuidad.

Ejemplos:

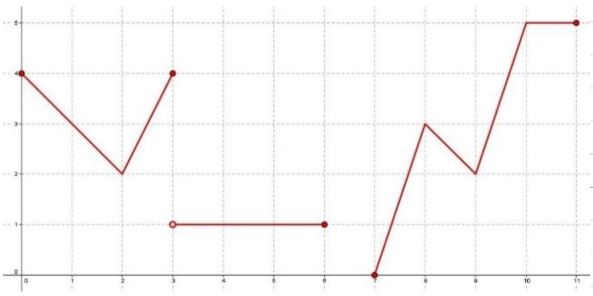
1) La siguiente gráfica representa la altura que se va alcanzando en una etapa ciclista respecto al nivel del mar en función de la distancia recorrida:

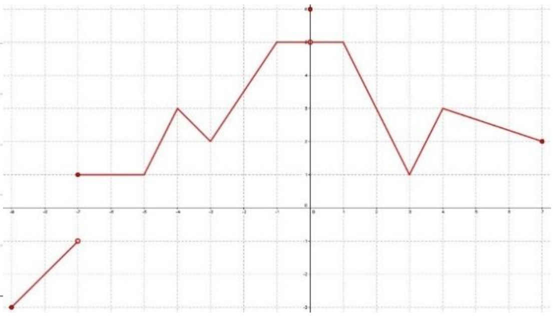


¿Cuál es la distancia total de la etapa? ¿Qué alturas máxima y mínima se alcanzan? ¿En qué tramos se sube? ¿En cuales se baja? ¿En qué puntos se pasa de subir a bajar o de bajar a subir? ¿Hay algún tramo que mantenga la misma altura? ¿Qué puntos hay al nivel del mar?

2) Realiza un estudio global de la gráfica. Calcula dominio y recorrido, extremos relativos y absolutos, intervalos de crecimiento, decrecimiento y constantes, puntos de corte con los ejes y continuidad.

a) b)





<u>*Técnicas empleadas, implementación y resolución:*</u>

La resolución de los ejercicios requiere del uso de las técnicas *3.a Cálculo del dominio y recorrido, 3.b. Estudio de la monotonía, 3.c Cálculo de extremos relativos y absolutos, 3.d Obtención de los puntos de corte con los ejes en la gráfica* y *3.e Estudio de la continuidad.* Después de la introducción del concepto de función y las herramientas necesarias para la representación, pasamos al estudio global de una función. Para explicar y justificar cada uno de los apartados, usaremos el primer ejercicio propuesto de este apartado, es una gráfica de una vuelta ciclista que relaciona la distancia recorrida con la altura alcanzada. Representa un ejemplo intuitivamente muy claro, y se hacen una serie de preguntas relacionadas con los conceptos que serán institucionalizados a continuación, tales como el dominio, recorrido, máximos y mínimos, intervalos constantes y puntos de corte a través del comportamiento que representa la gráfica. Después del ejemplo y la explicación formal de los apartados (para el apartado de continuidad, aprovecharemos el ejemplo anterior del choque del coche y propondremos algunos más) se realizarán estudios de gráficas más simples para seguidamente realizar las dos del ejercicio 2 de este apartado.

En el primero, el dominio no es un solo intervalo y además presenta una discontinuidad de salto, como extra, los máximos y mínimos absolutos no son relativos, por un lado es el extremo de un intervalo y por otro es un intervalo constante de puntos. El segundo ejemplo muestra un recorrido en dos intervalos y un punto aislado (discontinuidad de punto además de otra de salto), también es un caso especial de máximos y mínimos absolutos, ya que uno de ellos es un extremo del dominio, y otro es el punto de discontinuidad. Además dominio y recorrido también presentan cantidades negativas.

Solución ejercicio 1:

Distancia total: 120 km, Máx. Altura: 1400 m, Mín. Altura: 0 m, Nivel mar: 0 km

De subir a bajar: 20 km, 50 km y 90 km, De bajar a subir: 30 km y 100 km

Tramos subida: (0 km, 20 km), (30 km, 50 km), (80 km, 90 km) y (100 km, 120 km)

Tramos bajada: (20 km, 30 km), (50 km, 60 km) y (90 km, 100 km)

Tramos misma altura: (60 km, 80 km)

Solución ejercicio 2: a)

Dominio: [0, 6] U [7, 11] Recorrido: [0, 5]

Interv. crecimiento: (2, 3) U (7, 8) U (9, 10) Mín. rel. $x = 2, x = 9$

Interv. decrecimiento: (8, 9) Máx. rel. $x = 8$

Interv. constantes: (3, 6] U [10, 11] Mín. abs. $x = 7$

Discontinua ($x = 3$) Máx. abs. $x \in [10, 11]$

Puntos corte eje X: $(7, 0)$ Punto de corte eje Y: (0, 4)

b)

Dominio: [-9, 7] Recorrido: [-3, -1) U [1, 5) U {6}

Interv. crecimiento: (-9, 7) U (-5, -4) U (-3, -2) U (3, 4) Mín. rel. $x = -3$, $x = 3$

Interv. decrecimiento: (-4, -3) U (1, 3) U (4, 7) Máx. rel. $x = -4, x = 4$

Interv. constantes: [-7, -5] U [-1, 1] Mín. abs. $x = -9$

Discontinua ($x = -7,\ x = 0$) Máx. abs. $x = 0$

Puntos corte eje X: Ninguno Punto de corte eje Y: (0, 6)

4. Problemas sobre la construcción aproximada de la gráfica a partir de datos relativos a dominio y recorrido, monotonía, extremos relativos y continuidad.

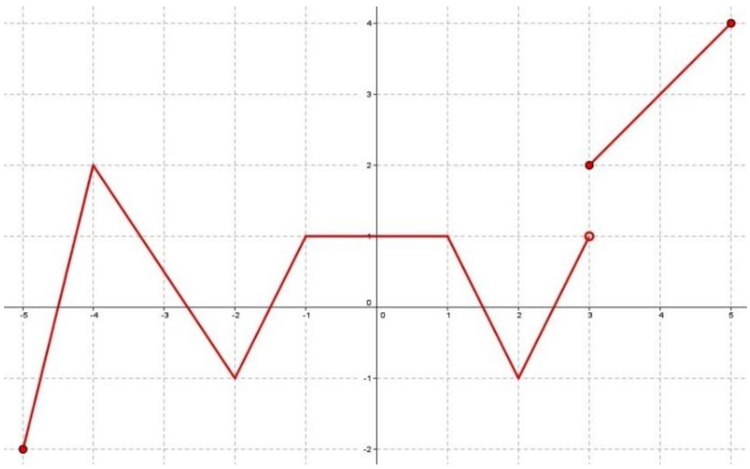
Ejemplos:

1) Dibuja la gráfica aproximada de una función que tenga por dominio $[-5, 5]$, recorrido $[-2, 4]$, un máximo relativo en $x = 4$, dos mínimos relativos en $x = -2$ y $x = 2$, un intervalo constante en [-1, 1], un mínimo absoluto en el extremo izquierdo del dominio, un máximo absoluto en el extremo derecho del dominio y una discontinuidad de salto en $x = 3$.

<u>Técnicas empleadas, implementación y resolución:</u>

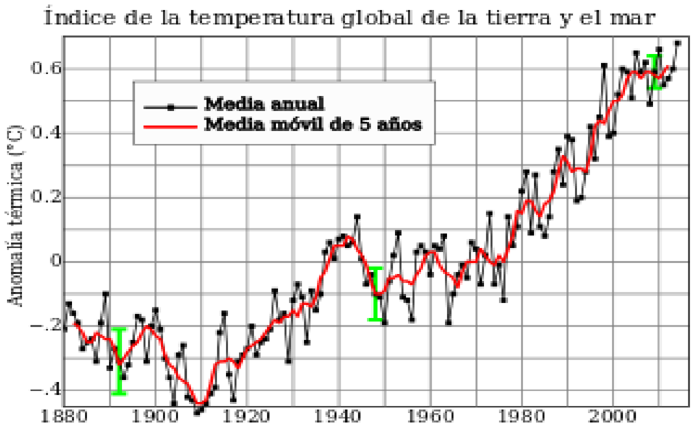
La resolución de este ejercicio requiere del uso de las técnicas asociadas al estudio global de una función utilizadas ahora para la construcción de una gráfica. Después de aprender las técnicas del estudio global y haber realizado varios de algunas funciones, ahora se pide trazar la gráfica dados ciertos datos del estudio. Como en el caso del ejercicio 1 de este apartado no se dan todos, se tiene que utilizar el dominio dado, saber cómo se comporta la gráfica a derecha e izquierda de un extremos relativo, colocar adecuadamente el intervalo constante y la discontinuidad teniendo en cuenta el recorrido, además de poner a una altura adecuada los puntos extremo del intervalo, ya que son máximo y mínimo absoluto. En esencia es un compendio de los conceptos vistos para comprobar si se comprende y utiliza adecuadamente cada uno de ellos. Este ejercicio es un ejemplo tipo, se propondrán algunos más variando en algún aspecto los datos dados.

Posible solución ejercicio 1:

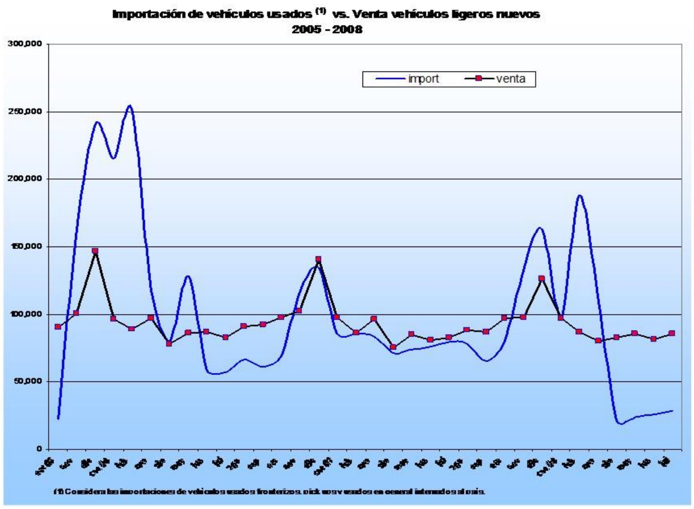


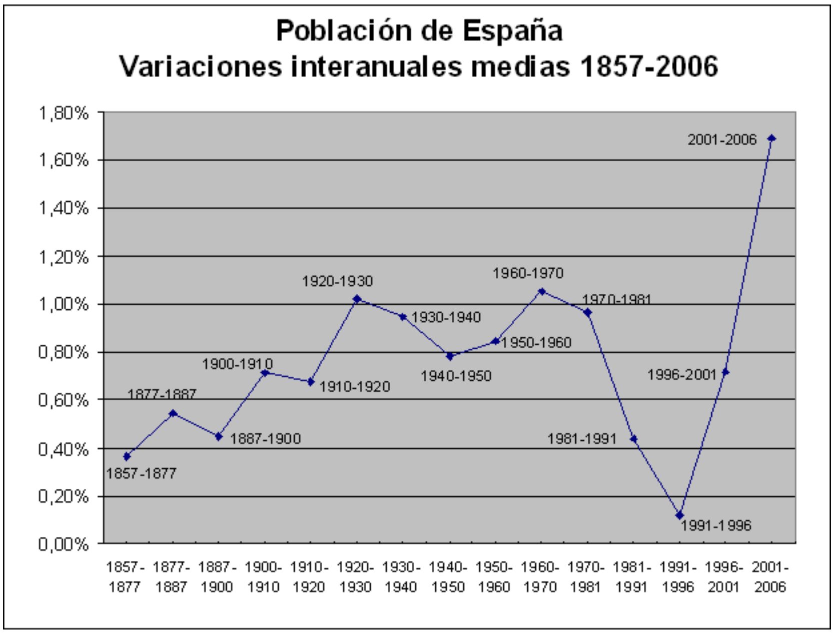
5. Problemas sobre recreación del comportamiento de un fenómeno real a través de la gráfica que lo representa tras el estudio global.

1) A continuación, se muestran una serie de ejemplos de gráficas que podemos encontrar en nuestro entorno a través por ejemplo de los medios de comunicación. Mediante el estudio global, trata de interpretar cada una de las gráficas y explicar lo que sucede:

a) 

b) 

c) 

d) 

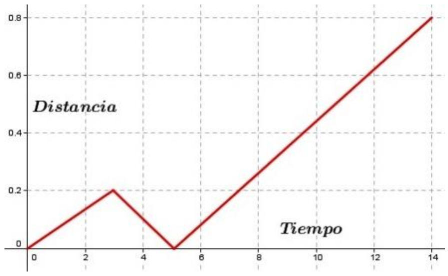
__Técnicas empleadas, implementación y resolución:__

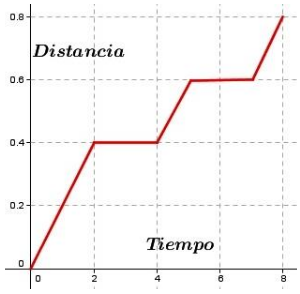
En la resolución de este tipo de ejercicios se utilizarán las técnicas adquiridas en el estudio global de una función, traduciendo su significado a la correspondiente situación real que la gráfica esté representando. Serán propuestos después de haber realizado varios ejemplos tanto de estudios globales de funciones como de construcción de gráficas a partir de datos del estudio. En este caso, queremos que los alumnos se familiaricen con gráficas que pueden encontrar fácilmente en cualquier medio, de manera que utilizando lo que han aprendido del estudio, sean capaces de interpretar y explicar cada gráfica en función de lo que modeliza. Se han escogido ejemplos de la temperatura anual, el paro, las ventas de vehículos y la población, al igual que podrían haberse escogido otros que les pudieran resultar de más interés. Se tendrá que explicar primero qué es lo que relaciona, dominio que abarca y recorrido, significado del crecimiento o decrecimiento, los máximos y mínimos… y hablar un poco de la tendencia que pueda tener y las consecuencias que implica el estudio realizado.

6. Problemas de asociación de gráficas con su correspondiente situación real y viceversa.

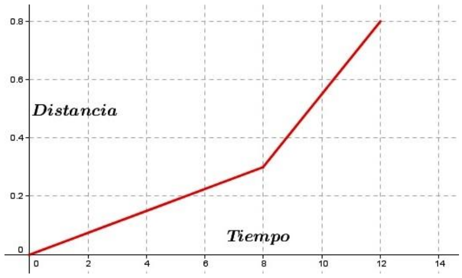
1) Cuatro alumnos de 2º de ESO salen de casa para ir al colegio. Las siguientes gráficas relacionan la distancia que recorren desde su casa hasta el colegio en función del tiempo. Relaciona cada gráfica con su respectivo alumno. Justifica tu respuesta.

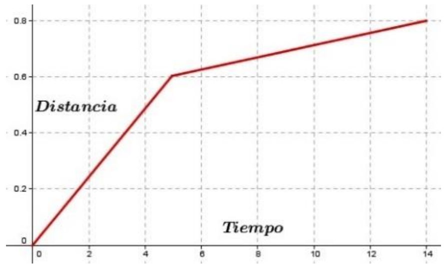
a) b)





c) d)





I) Alberto: He salido muy deprisa de casa porque era tarde, pero al cabo de un rato me he cansado y tenido que ir más despacio.

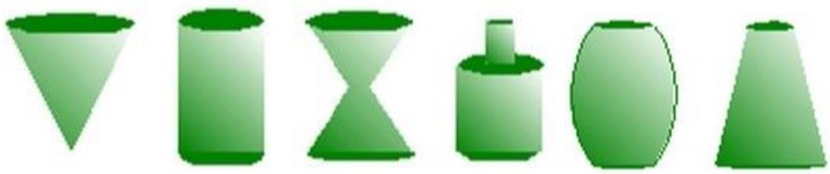
II) Alicia: Al salir de casa me he encontrado con una amiga y me ha acompañado un rato, como hemos ido despacio, luego he tenido que ir algo más deprisa para llegar a tiempo.

III) Ismael: Al poco de salir de casa, me he dado cuenta de que me he dejado los libros y he tenido que volver, después he ido caminando al mismo ritmo.

IV) Miguel: Mi madre me ha llevado en coche al colegio, pero nos hemos encontrado dos semáforos por el camino que nos han parado un poco.

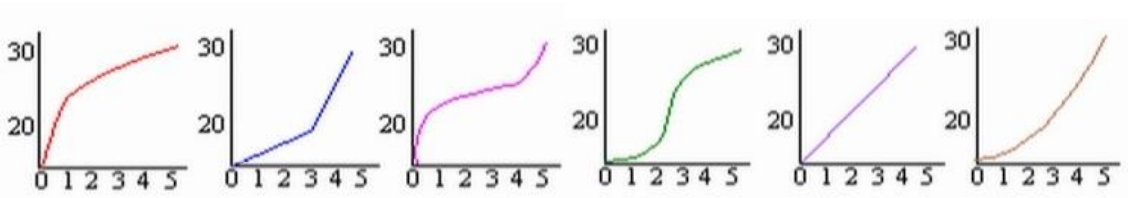
2) Considerando que los siguientes recipientes tienen la misma altura (30 cm) y capacidad:

a) b) c) d) e) f)



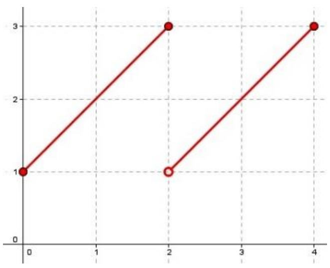
Asocia cada una de las siguientes gráficas a su correspondiente recipiente, si representan la altura de la columna de agua que se forma en función del tiempo:

I) II) III) IV) V) VI)

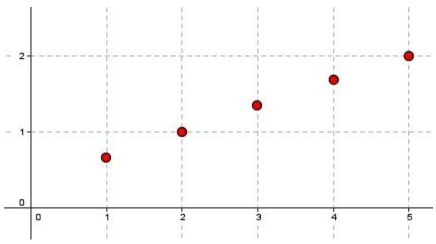


3) Asocia cada una de las siguientes gráficas a su correspondiente situación:

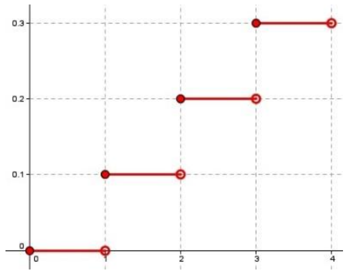
a)



b)



c)



I) Coste de manzanas por unidad.

II) Crecida del pelo en función del tiempo, con un corte de pelo entre medias.

III) Coste de una llamada telefónica, si la compañía cobra 10 céntimos por minuto.

<u>Técnicas empleadas, implementación y resolución:</u>

Vistas todas las técnicas anteriores para el estudio de gráficas, en estos casos se requiere de una reflexión sobre la forma de la gráfica y la situación que puede representar en función de las variables que relaciona, utilizando todo lo conocido sobre funciones. El primer ejercicio presenta unas gráficas que relacionan la distancia a casa en función del tiempo. Dependiendo de la velocidad a la que se vaya la pendiente será mayor o menor, si hay paradas representa un tramo constante y si hay alguna vuelta hacia atrás sería un pendiente negativo, así los alumnos tendrán que reflexionar sobre estos aspectos y decidir qué gráfica se aproxima más a cada situación, de este modo también abrimos paso a la definición de pendiente en las funciones lineales, que vendrán a continuación. El segundo ejercicio es parecido, solo que en este caso se utiliza la forma de ciertos recipientes con misma altura y volumen, por lo que la altura que alcanza el agua en función del tiempo es también relativa a la velocidad que se llena dependiendo de la forma de cada uno. Finalmente se propone un ejercicio donde encontramos discontinuidades y variable discreta, es importante que también conozcan ejemplos de este tipo, ya que no todas las funciones se pueden unir en un trazo.

Solución ejercicio 1:

a) → III)

b) → IV)

c) → II)

d) → I)

Solución ejercicio 2:

a) → I)

b) → V)

c) → IV)

d) → II)

e) → III)

f) → VI)

Solución ejercicio 3:

a) → II)

b) → I)

c) → III)

Bloque 2: Sobre funciones tipo

7. Funciones lineales (de proporcionalidad directa, constantes y afines).

1) Un tren AVE circula a una velocidad media de 200 km/h. ¿Podrías decir cuántos kilómetros recorre en 2 horas? ¿Y en 3 horas y media? Intenta dar una expresión que nos devuelva la distancia recorrida en función del tiempo transcurrido. ¿Cuántos kilómetros recorre ahora en función del tiempo si de partida ya había recorrido 150 km? ¿Qué cambiaría de la expresión inicial?

a. Representación gráfica de la función a partir de su ecuación y viceversa (Ecuación - Gráfica - Ecuación).

b. Representación gráfica de una tabla de puntos y viceversa (Tabla - Gráfica- Tabla).

*En este caso como ya se han realizado ejercicios de representación de puntos y obtención de coordenadas de una gráfica, no se incidirá en hacer más específicos de estos, ya que están ligados implícitamente al apartado anterior y siguiente. Además resulta más relevante ser capaz de obtener la ecuación a partir de una tabla o gráfica, utilizando el pendiente y la ordenada en el origen en lugar de por sustitución y representación de puntos.

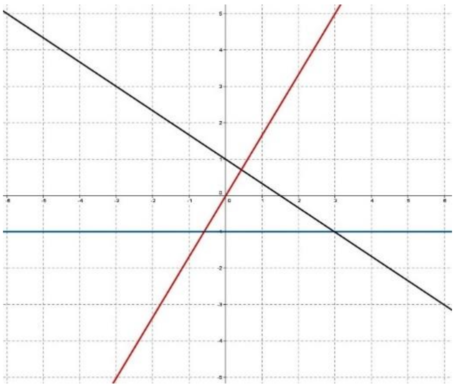
c. Obtención de la ecuación de la función a partir de una tabla de puntos y viceversa (Tabla - Ecuación - Tabla).

1) Representa gráficamente las siguientes funciones lineales utilizando el pendiente y la ordenada en el origen. Obtén también una tabla de puntos mediante sustitución.

$a)\ f(x) = 4x$ $\quad b)\ f(x) = 4x - 3$ $\quad c)\ f(x) = 2x + 1$

$d)\ f(x) = -2x + 1$ $\quad e)\ f(x) = 1$

2) Calcula las ecuaciones de las siguientes rectas utilizando el pendiente y la ordenada en el origen. Obtén también una tabla de puntos mediante sustitución.



3) Dada la siguiente tabla de puntos de una función lineal incompleta, calcula la ecuación de dicha función, represéntala gráficamente y rellena la tabla.

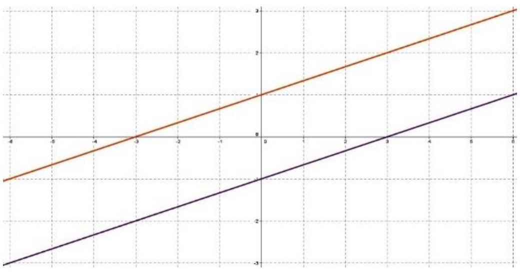
x	-7		0	2	
y	5	27/7	3		11/7

d. Problemas basados en la obtención de la ecuación de la función y su representación gráfica o en tabla a partir de ciertos datos.

Ejemplos:

1. Un paracaidista se lanza desde 20 kilómetros de altitud. Si sabemos que cada segundo baja un promedio de 10 metros, a qué altura estará pasados 10 minutos? ¿Y pasados 35 minutos? Representa gráficamente ambos casos.

2. Explica cuál es el significado de tener dos rectas paralelas (Ayúdate de la gráfica). ¿Cuál es la relación entre sus pendientes? ¿Podrías dar la ecuación de 5 rectas paralelas distintas? ¿Cuántas rectas paralelas a una dada se pueden obtener?



¿Podrías explicar cuál es el significado de que en lugar de ser paralelas, se corten? Relaciona todo lo anterior con los sistemas de ecuaciones vistos anteriormente.

3) El precio por unidad de cierto artículo es de 5 euros. Si existe un gasto fijo de compra de 1 euro, ¿Cuánto nos costaría comprar 4 de esos artículos? Calcula la ecuación de la función y representa la situación gráficamente.

4) Sabemos que una compañía telefónica cobra 10 céntimos por cada minuto de llamada. Considerando los minutos de una llamada y el precio en euros, ¿cuánto nos cobraría la compañía si hablamos durante 10 minutos? ¿Qué ocurre si a los 5 minutos se nos corta la llamada 1 minuto y tras esto volvemos a llamar hasta alcanzar otra vez los 10 minutos? ¿Cuánto nos cobraría ahora? Calcula la ecuación de la función y representa la situación gráficamente.

¿Qué cambios habría en el problema si ahora la compañía nos cobra 20 céntimos por establecimiento de llamada? (es decir, cada vez que llamamos nos cobra fijos 20 céntimos).

Técnicas empleadas, implementación y resolución:

Para la resolución de los problemas y ejercicios anteriores, se requiere del uso de las técnicas relativas a la función lineal: *7.a Ecuación - Gráfica - Ecuación, 7.b Tabla – Gráfica - Tabla, 7.c Tabla – Ecuación -Tabla* o combinación de éstas, además de ciertos conocimientos sobre propiedades de la función lineal y proporcionalidad directa para la resolución de problemas.

Tras el primer bloque del apartado de problemas dedicado a la introducción de las funciones y su estudio para describir el comportamiento de cierto fenómeno a través de su representación gráfica, pasamos a casos particulares de funciones, donde en este caso podemos obtener además de su representación gráfica una ecuación que nos sirva para obtener cualquier punto. La función que más se estudiará en profundidad es la lineal, y se introducirá a través de un problema de proporcionalidad directa, el que propongo al principio del AVE. Utilizando los conocimientos que tienen sobre proporcionalidad pueden obtener la distancia recorrida en función del tiempo, e inconscientemente, estarán calculando la ecuación de la función, que a continuación se pide explícitamente.

Una vez obtenida, se pide reflexionar sobre lo que ocurre con una distancia recorrida previa, a lo que tendrán que sumar tal cantidad a su expresión para finalmente, obtener la ecuación de la función lineal pedida. Es ahora cuando se institucionaliza el concepto de función lineal y su significado, los tipos de representación (Tabla, gráfica y ecuación) y sus propiedades mediante otro tipo de ejemplos sencillos.

A continuación, pasamos a la práctica en las formas de representación, mediante los tres ejercicios propuestos inmediatamente después. Cada uno de ellos parte de una forma de representación distinta, el primero con la ecuación, el segundo con la gráfica y el tercero con una tabla. Se pretende que en todos ellos utilicen a ser posible las propiedades relativas al pendiente y la ordenada en el origen de la ecuación general $f(x) = mx + n$ ya que resulta de más interés que la sustitución directa de dos puntos y resolución de un sistema de ecuaciones, aunque la técnica de sustitución puede utilizarse para la obtención de más puntos de la tabla si se pide, pero siempre que pueda evitarse en la obtención de la ecuación o la gráfica mejor.

Después de practicar con las técnicas (gráfica – ecuación - tabla) pasamos a los problemas. Como ya hemos introducido la función lineal a través de un problema, se utilizará como ejemplo para resolver otros similares. Para variar, el primer problema propuesto es otro de proporcionalidad directa, pero en este caso con pendiente negativo, así que tendrán que tener en cuenta no sólo eso, sino que comienza desde cierta altura en el eje Y, y transcurrido cierto tiempo, no podrá pasar del nivel del suelo (eje de las abscisas). Luego tenemos uno sobre propiedades del pendiente para reforzar ese concepto y enlazar con lo conocido de sistemas de ecuaciones, y pasamos finalmente a casos extraños de funciones lineales, donde en este caso no se unen los puntos por una recta. El primero se representaría mediante puntos, ya que no se pueden vender trozos del artículo, va por unidades. El segundo presenta discontinuidades de salto cada minuto que es donde cambia de precio, además tienen que reflexionar sobre el corte de la llamada y lo que sucede.

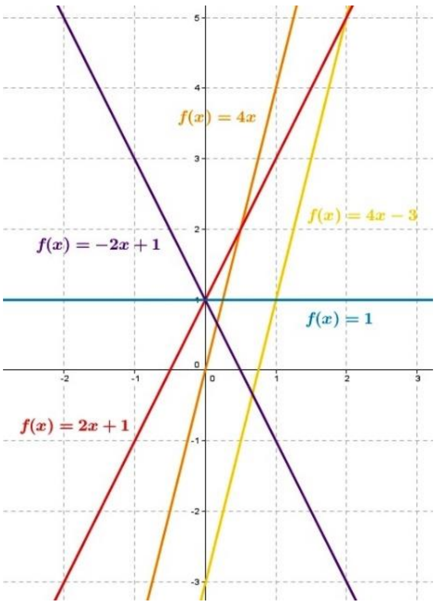
Solución problema 7.1:

2 horas → 400 km $\qquad$ x horas → $200x$ km $\qquad$ $f_2(x) = 200x + 150$

3,5 horas → 700 km $\qquad$ $f_1(x) = 200x$

Solución ejercicios Ecuación - Tabla - Gráfica:

1)



2)

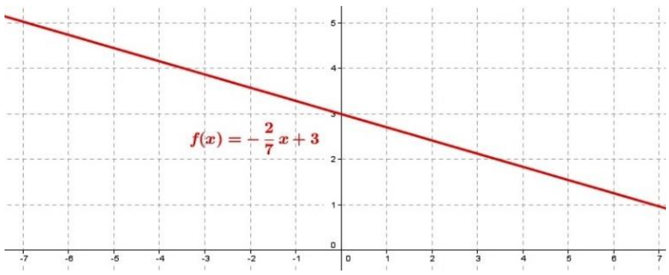
$f(x) = -1$

$f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$

$f(x) = \frac{5}{3}x$

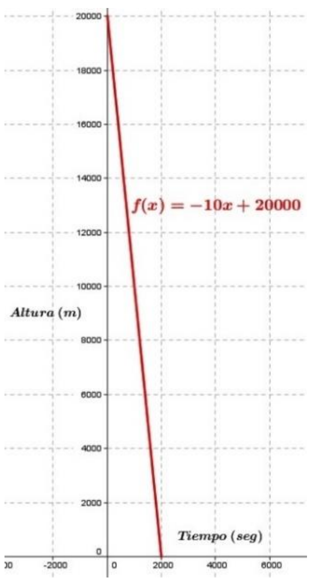
3)

x	y
-7	5
-3	27/7
0	3
2	17/7
5	11/7

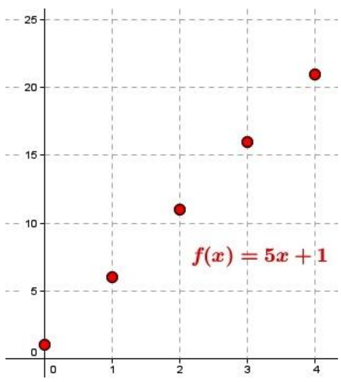


Solución problemas:

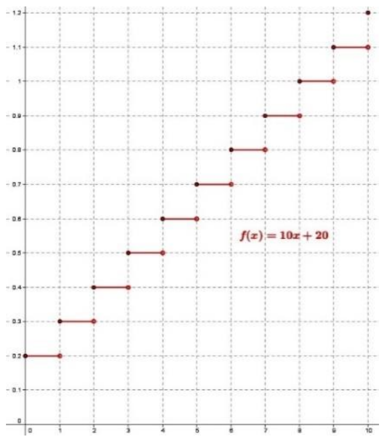
1)



3)



4)



(Con establecimiento de llamada)

2) Utilizar como pendiente $m = \frac{1}{3}$

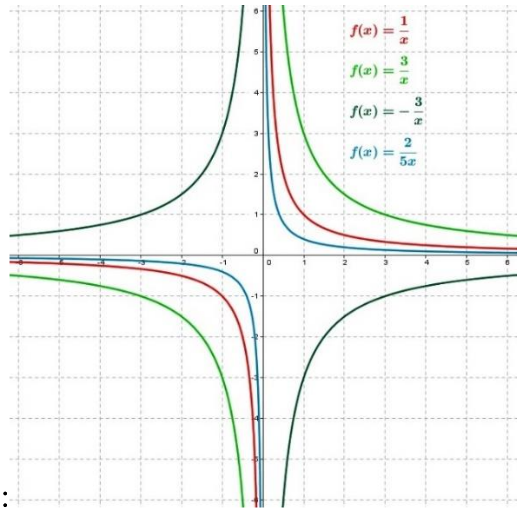
8. Funciones de proporcionalidad inversa.

a. Ejercicios sobre su representación gráfica y ecuación general.

Ejemplo: 1) Traza la gráfica aproximada de las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{3}{x}$ c) $f(x) = -\frac{3}{x}$ d) $f(x) = \frac{2}{5x}$

<u>Técnicas empleadas, implementación y resolución:</u> En la resolución de este tipo de ejercicios se utilizarán las técnicas relativas a funciones de proporcionalidad inversa: *8.a Representación y ecuación.* Tras trabajar con las funciones lineales, damos una pequeña puntada a estas funciones. Lo que se pedirá es conocer la forma de la gráfica y la ecuación general $f(x) = \frac{k}{x}$, utilizando su coeficiente k para saber la separación respecto de los ejes y colocación en el plano. Para diferenciarlas de las lineales, se puede proponer al inicio un problema de proporcionalidad inversa, que les haga reconocer cuándo se puede utilizar, aunque como he dicho no se profundizará más, debido a que las funciones lineales es el tema central de este curso, pero conviene al menos que conozcan otro tipo de funciones con ecuación.

Solución ejercicio 1: 

9. Funciones cuadráticas.

a. Ejercicios sobre su representación gráfica y ecuación general.

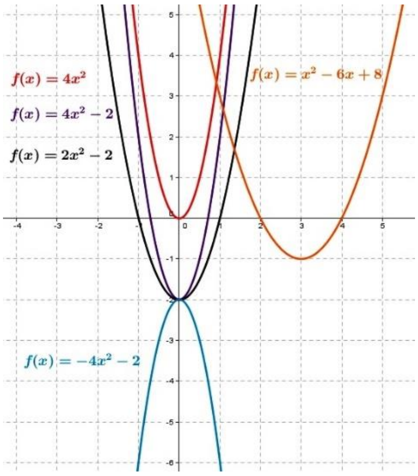
Ejemplo: 1) Traza la gráfica aproximada de las siguientes parábolas:

a) $f(x) = 4x^2$ b) $f(x) = 4x^2 - 2$ c) $f(x) = 2x^2 - 2$

d) $f(x) = -4x^2 - 2$ e) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Técnicas empleadas, implementación y resolución: Para la resolución de este tipo de ejercicios se requiere de las técnicas relativas a funciones cuadráticas: *9.a Representación y ecuación.* Al igual que con las funciones de proporcionalidad inversa, se propone dar una pequeña puntada a las cuadráticas, conociendo la forma de la parábola y siendo capaz de representarla a partir de la ecuación general $f(x) = ax^2 + bx + c$, reflexionando sobre su curvatura y apertura en función del coeficiente a, además del cálculo del vértice para una mejor aproximación en el trazo. Se presentarán a la vez que las funciones de proporcionalidad inversa, y al igual que con éstas, se puede proponer algún ejemplo donde se vean involucradas, pero sin profundizar demasiado.

Solución ejercicio 1:

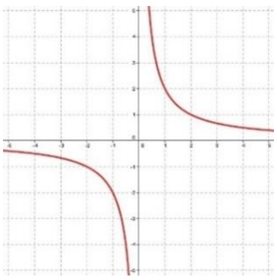


10. Problemas de relacionar gráficas de funciones tipo con su respectiva ecuación y viceversa.

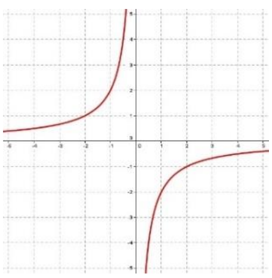
Ejemplo:

1) Relaciona cada una de las siguientes gráficas de funciones con su respectiva ecuación. Justifica tu respuesta.

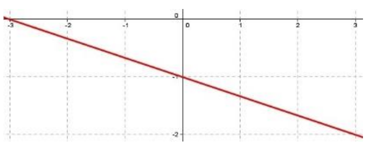
a)



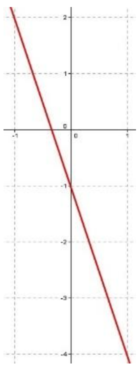
b)



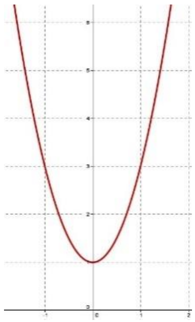
c)



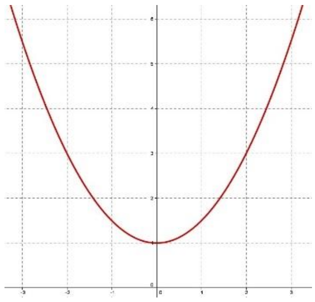
d)



e)



f)



$I)\ f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + 1$ $II)\ f(x) = -3x - 1$ $III)\ f(x) = \frac{2}{x}$ $IV)\ f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$

$V)\ f(x) = 2x^2 + 1$ $VI)\ f(x) = -\frac{2}{x}$

Técnicas empleadas, implementación y resolución: La resolución de este tipo de ejercicios requiere de las técnicas y propiedades aprendidas sobre las funciones tipo vistas anteriormente (lineal, de proporcionalidad inversa y cuadrática). Se pretende que sean capaces de diferenciar cada una de las gráficas y asociarlas con su respectiva ecuación utilizando los conocimientos que han adquirido en los problemas y ejercicios anteriores.

Solución ejercicio1:

a) → III) b) → VI) c) → IV) d) → II) e) → V) f) → I)

11. Problemas sobre la construcción de una gráfica a partir de combinación de funciones tipo.

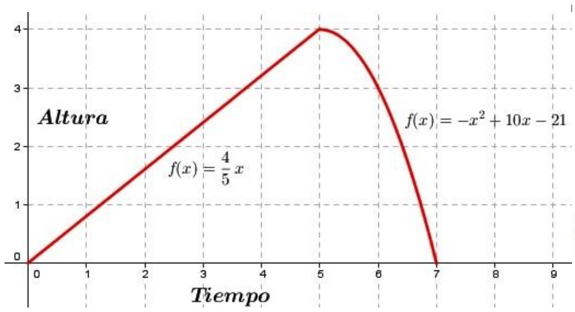
Ejemplo:

1) Construye una gráfica continua en la que se combinen funciones lineales y cuadráticas de la forma que prefieras. Trata de encontrar una situación real que la pueda tener por gráfica.

Técnicas empleadas, implementación y resolución: Para finalizar con las funciones tipo, ahora se trata de hacer combinaciones de las mismas para obtener otras gráficas de funciones utilizando puntos comunes si se quieren hacer continuas o tan sólo colocar cada función en un tramo sin ‘’enganchar’’ con las demás obteniendo una función discontinua. También es interesante que traten de relacionar las gráficas obtenidas con una situación real que pudieran modelizar.

Solución ejercicio 1:

Gráfica de la altura que alcanza un objeto en una cinta transportadora al subir y al caer.



Apartado final: Actividades sobre funciones

Se proponen a continuación dos actividades que engloban todos los contenidos vistos del campo de problemas y que ponen en práctica los conocimientos adquiridos:

1. Estudiar en su totalidad e interpretar el comportamiento de cierta gráfica utilizando los conocimientos adquiridos en la unidad. La gráfica podrá ser obtenida de cualquier medio y el tema es totalmente libre, por lo que pueden escoger una función de lo que más les guste. Con estudio me refiero por ejemplo, qué significa que crezca o decrezca, si hay tramos constantes, los máximos y mínimos, velocidad a la que crece o decrece, continuidad... y todo lo que se le pueda ocurrir al alumno también.

2. Actividad con Geogebra. Se utilizará el aula de informática y este programa para que los alumnos visualicen cada una de las funciones dadas, varíen ellos mismos las constantes en la ecuación general y prueben con otras funciones nuevas y vean lo que sucede.

7. Cronograma

Agruparé ahora el contenido del campo de problemas en un cronograma dividido en 10 sesiones:

SESIONES	CONTENIDOS
1	-Ejercicios de conocimientos previos. -Problemas de razón de ser e introducción del concepto de función.
2	-Representación de puntos en el plano y viceversa. -Trazo de la gráfica aproximada de una función cualquiera a partir de sus puntos.
3	-Estudio global de la gráfica de una función. -Construcción aproximada de la gráfica a partir de datos relativos al estudio global.
4	-Recreación del comportamiento de un fenómeno real a través de la gráfica que lo representa. -Asociación de gráficas con su correspondiente situación real.
5	-Funciones lineales (introducción y ejercicios tabla-ecuación-gráfica).
6	-Funciones lineales (Problemas).
7	-Funciones de proporcionalidad inversa. -Funciones cuadráticas.
8	-Relación de gráficas de funciones tipo con su respectiva ecuación. -Construcción de una gráfica a partir de combinación de funciones tipo.
9	-Actividades (Estudio de gráficas y Geogebra).
10	-Prueba escrita.

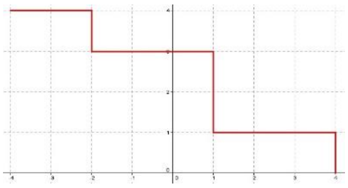
8. Evaluación

A continuación procederé al diseño de la prueba escrita que será propuesta al final de la impartición de la unidad didáctica relativa a funciones y gráficas. La prueba constará de 8 apartados con ejercicios y problemas similares a los ya realizados en las sesiones de clase por lo que se esperan unos buenos resultados. Seguidamente adjuntaré cada uno de los aspectos del conocimiento de los alumnos que pretendo evaluar y los criterios de evaluación junto a las posibles respuestas que se esperan.

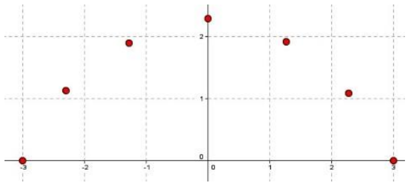
El examen se dividirá en dos apartados. En el primero se proponen ejercicios relativos a funciones en general (incluyendo a funciones tipo vistas). Se trata el concepto de función, relacionar gráficas con su ecuación, dibujar aproximadamente la gráfica de una función, un estudio global y finalmente relacionar gráficas con su posible situación real. El siguiente se centra en las funciones lineales con ejercicios tabla-ecuación-gráfica, sobre propiedades de las funciones lineales y un problema final.

1) Decide cuales de las siguientes gráficas representan una función. Justifica tu respuesta. (0.75 puntos)

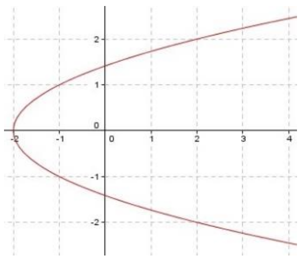
a)



b)

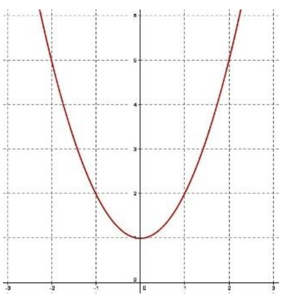


c)

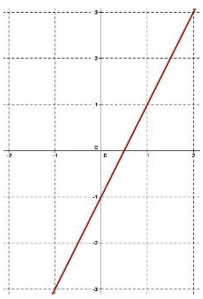


2) Relaciona cada una de las gráficas de funciones con su respectiva ecuación. Justifica tu respuesta. (1 punto)

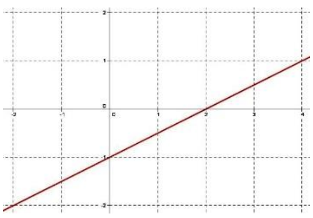
a)



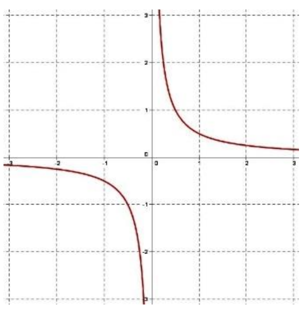
b)



c)



d)

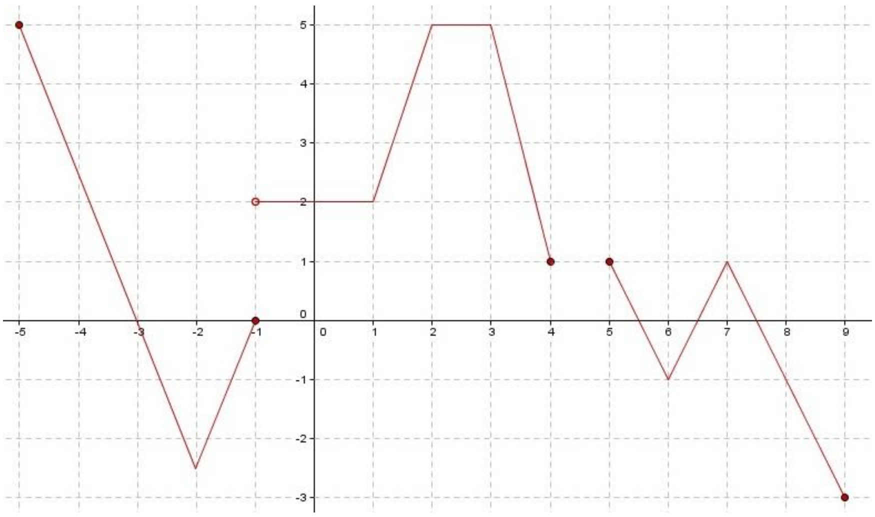


$I)\ f(x) = 2x - 1$ $\qquad$ $II)\ f(x) = \frac{1}{2x}$ $\qquad$ $III)\ f(x) = x^2 + 1$ $\qquad$ $IV)\ f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

3) Calcula los puntos de corte con los ejes (si los hay) y representa aproximadamente la siguiente función: (1 punto)

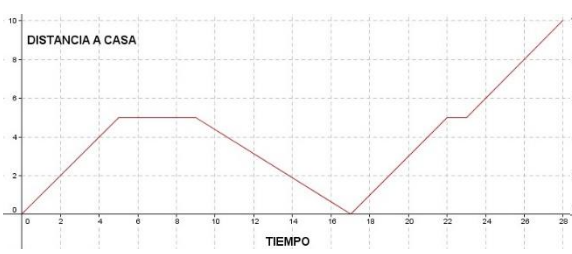
$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

4) Realiza un estudio global de la gráfica. Calcula dominio y recorrido, extremos relativos y absolutos, intervalos de crecimiento, decrecimiento y constantes, puntos de corte con los ejes y continuidad. (1.5 puntos)

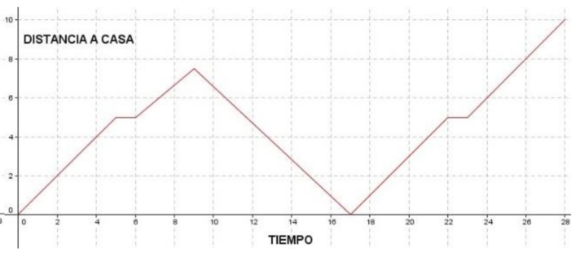


5) Carla sale de casa con su moto como habitualmente por la mañana para ir al trabajo. Avanza durante 5 minutos sin problemas y se encuentra con un semáforo en rojo por lo que tiene que parar 1 minuto. Después vuelve a arrancar y avanza durante 3 minutos más. Se da cuenta de que se olvidó de unos papeles importantes, por lo que da la vuelta y vuelve a casa sin paradas tardando otros 8 minutos. Vuelve a salir de casa, a los 5 minutos se encuentra con otro semáforo que la detiene por 1 minuto y finalmente llega al trabajo 5 minutos después. Relaciona esta situación con la gráfica correspondiente. Justifica tu respuesta. (1.25 puntos)

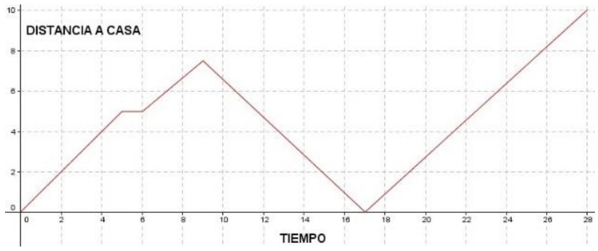
a)



b)



c)



6) Rellena la siguiente tabla de puntos de una función lineal obteniendo su ecuación y represéntala gráficamente. (1.5 puntos)

x	-3			0	1		3
y		-16/3	-11/3	-2		4/3	3

7) Dada la ecuación de la recta $f(x) = -3x + \frac{1}{2}$, obtener la ecuación de otra que sea paralela y que pase por el punto (1, 2). (1 punto)

8) Un fórmula 1 circula a 300 km/h, está al final de una recta y va a comenzar una curva, por lo que tiene que desacelerar, reduciendo 60km/h cada segundo hasta llegar a 60 km/h. Llegado a esta velocidad, empieza a salir de la curva y vuelve a acelerar, aumentando 80km/h cada dos segundos hasta llegar a 300 km/h. Interpreta la situación, obtén las ecuaciones de las funciones y dibuja la gráfica (en una escala adecuada) que relaciona la velocidad del fórmula 1 en km/h en función del tiempo en segundos. (2 puntos)

8.1 Aspectos del conocimiento evaluables, posibles respuestas y criterios de calificación

Pregunta 1 (tiempo estimado de realización 2-4 minutos)

Campo de problemas, técnicas y tecnologías: Esta pregunta es relativa al apartado del campo de problemas *1. Ejercicios relacionados con el concepto de función.* Las posibles técnicas evaluables son: *1. Determinar si una gráfica es función* o bien por observación directa del comportamiento de la gráfica. Como tecnologías, en caso de no utilizar la técnica 1, se tendrá que justificar adecuadamente sobre si se tienen una o más imágenes para un valor de la variable independiente x.

Tareas principales y auxiliares:

Tarea principal: Se trata de conocer adecuadamente el proceso para determinar si una gráfica representa una función o no, bien sea por la técnica anterior u otro proceso similar siempre que esté justificado.

Tarea auxiliar específica: Sería por ejemplo la corrección en el uso de la técnica anterior, ya que es una herramienta que requiere el proceso.

Respuestas correctas:

a) No es función, b) sí es función, c) no es función

1. Por un lado, los alumnos pueden utilizar la técnica para probar si una gráfica es función trazando o imaginando una línea vertical y viendo si corta dos o más veces la gráfica, en cuyo caso no será función. En caso de que esto nunca pase y siempre la corte sólo una vez, sí será función.

2. En lugar de trazar la línea recta pueden justificarlo diciendo que para un valor de la variable independiente x, se tiene más de una imagen en y, y que por tanto no es función, o que por el contrario sólo hay uno siempre y sí que lo es.

En ambos casos se calificará con la máxima puntuación (0.75 puntos).

Respuestas incorrectas:

Cada uno de los apartados tiene un puntuación de 0.25 si se hacen bien por separado.

1. Si se responde correctamente a algún apartado sin justificación ni uso de técnicas se calificará con 0.125 puntos por apartado.

2. En caso de no tener justificación o que sea errónea y utilizar mal la técnica o una inadecuada respondiendo incorrectamente o sin responder se calificará con 0 puntos por apartado.

Pregunta 2 (tiempo estimado de realización 3-5 minutos)

Campo de problemas, técnicas y tecnologías: Esta pregunta es relativa a los apartados del campo de problemas *11. Problemas de relacionar gráficas de funciones tipo con su respectiva ecuación, 7. Funciones lineales, 8. Funciones de proporcionalidad inversa y 9. Funciones cuadráticas.* Las posibles técnicas evaluables son: *11. Relacionar gráficas con su respectiva ecuación, 8.a.1 Ecuación-Gráfica, 8.a.2 Gráfica-Ecuación, 9.a*

Representación y ecuación (proporcionalidad inversa) y *10.a Representación y ecuación (cuadráticas).* Como tecnologías, al final se pide una justificación del proceso, es decir la explicación sobre por qué las ecuaciones representan la gráfica escogida, aunque también estaría implícita en la sustitución de puntos si se da el caso.

Tareas principales y auxiliares:

Tarea principal: Seleccionar un proceso válido y adecuado en la asociación de gráficas con su ecuación, ya sea por ecuación general, sustitución de puntos o cualquier otro.

Tarea auxiliar específica: Utilizar correctamente las técnicas relativas al proceso seleccionado.

Tarea auxiliar general: Realizar bien los cálculos operacionales que puedan contener las técnicas, como en la sustitución de puntos por ejemplo.

Respuestas correctas:

$$a) \to III), \qquad b) \to I), \qquad c) \to IV), \qquad d) \to II)$$

1. Una posible respuesta correcta sería utilizar la fórmula general para cada una de las funciones tipo y asociarlas con su gráfica. Luego en el caso de las lineales, como hay dos, comprobar la que tiene mayor pendiente ya que la ordenada en el origen es la misma.

2. Se pueden sustituir puntos en las ecuaciones y ver a qué gráfica corresponden, u obteniendo un punto de la gráfica comprobar qué ecuación cumple.

3. También se puede tener una mezcla de las dos anteriores.

En cualquiera de los casos se calificará con la máxima puntuación (1 punto).

Respuestas incorrectas:

Cada uno de los apartados tiene una puntuación de 0.25 si se hacen bien por separado.

1. Si se responde correctamente a algún apartado sin justificación ni técnicas se calificará con 0.125 puntos.

2. En caso de no tener justificación o que sea errónea y utilizar mal la técnica o una inadecuada respondiendo incorrectamente o no respondiendo se calificará con 0 puntos por apartado.

Pregunta 3 (tiempo estimado de realización 4-6 minutos)

Campo de problemas, técnicas y tecnologías: Esta pregunta es relativa a los apartados del campo de problemas *9. Funciones cuadráticas* o *2.a Trazo de la gráfica aproximada de una función cualquiera a partir de sus puntos*. Las posibles técnicas evaluables son: *9.a Representación y ecuación* (funciones cuadráticas) *y* 2.a *Representación gráfica de una función.* Como tecnologías, saber que cada uno de los puntos de corte tiene una coordenada igual a cero ya que se encuentran en los ejes, y el razonamiento sobre la forma de la parábola a partir de su ecuación o bien por la sustitución de puntos.

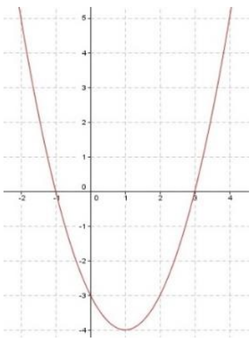
Tareas principales y auxiliares:

Tarea principal: Calcular los puntos de corte correctamente y utilizar un proceso adecuado para la representación de la parábola.

Tarea auxiliar específica: Determinar bien el vértice de la parábola o los puntos en la sustitución, es decir utilizar correctamente las técnicas.

Tarea auxiliar general: Realizar bien los cálculos operacionales que puedan contener las técnicas, como en la resolución de las ecuaciones o en la sustitución de puntos.

Respuestas correctas:



$f(x) = x^2 - 2x - 3$

Cortes con el eje X: $x = -1 \ y \ x = 3$

Corte con el eje Y: $y = -3$

1. La forma habitual de obtener las soluciones sería primero, calcular los puntos de corte sustituyendo por $y = 0 \ (eje \ X)$, $x = 0 \ (eje \ Y)$ y despejar, o bien para el eje Y sabiendo que la ordenada en el origen es -3. Para el dibujo de la gráfica, se requiere del cálculo del vértice con la fórmula $(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right))$, y utilizando los puntos de corte junto con el vértice trazar una curva que los una.

2. Para la parábola también se puede utilizar el signo y módulo de a, determinar su forma y hacer una gráfica aproximada.

3. Por último, se podrían sustituir puntos en la ecuación y colocarlos en la gráfica para así, uniéndolos obtener la curva aproximada de la parábola.

En cualquiera de los casos se calificará con la máxima puntuación (1 punto).

Respuestas incorrectas:

1. En caso de calcular mal los puntos de corte por algún error en las operaciones pero utilizar bien la técnica y haciendo una adecuada justificación sobre la forma de la parábola con una gráfica acorde a los puntos de corte obtenidos se calificará con 0.75 puntos.

    1.1 Si la técnica para calcular los puntos de corte no es la adecuada se calificará con 0.5 puntos.

    1.2 Si la justificación o la técnica para el trazo de la parábola no son las adecuadas se calificará con 0.25 puntos.

2. Si se obtienen bien los puntos de corte, pero no se hace una adecuada técnica o justificación para el dibujo de la parábola, se calificará con 0.5 puntos.

    2.1 En caso de existir un error operacional en algún punto de la parábola pero la técnica sea adecuada se calificará entre 0.5 y 0.75 puntos dependiendo de la gravedad o cantidad.

3. Si por algún motivo se obtiene más de un punto de corte para el eje Y, y también se traza la curva uniendo esos puntos se calificará con 0 puntos, ya que es un error de concepto de función.

4. En caso de no utilizar bien ni la técnica para calcular puntos de corte ni la del trazo de la parábola o una inadecuada justificación, respondiendo incorrectamente o no respondiendo se calificará con 0 puntos.

Pregunta 4 (tiempo estimado de realización 8-10 minutos)

Campo de problemas, técnicas y tecnologías: Esta pregunta es relativa al apartado del campo de problemas *3. Ejercicios sobre el estudio global de la gráfica de una función.* Las posibles técnicas evaluables son: *3.a Cálculo del dominio y recorrido*, *3.b. Estudio de la monotonía*, *3.c Cálculo de extremos relativos y absolutos*, *3.d Obtención de los puntos de corte con los ejes en la gráfica* y *3.e Estudio de la continuidad.*

Como tecnologías, el modo en que calculan cada uno de los puntos e intervalos encierra en cierta medida una justificación, por ejemplo para los máximos y mínimos absolutos que son los puntos más o menos elevados del dominio, que los puntos de corte están en los ejes..., aunque en este caso no se exige una justificación explícita.

Tareas principales y auxiliares:

Tarea principal: Utilizar un proceso adecuado en el estudio de la gráfica para la obtención de cada uno de los apartados entendiendo lo que significa y pide cada uno.

Tarea auxiliar específica: Que las técnicas asociadas al proceso sean usadas correctamente.

Tarea auxiliar general: Equivocarse en la aproximación de las coordenadas de un punto ya que se hace por observación.

Respuestas correctas:

Dominio: [-5, 4] U [5, 9]

Recorrido: [-3, 5]

Interv. crecimiento: (-2,-1) U (1, 2) U (6, 7)

Mín. rel. $x = -2, x = 6$

Interv. decrecimiento: (-5,-2) U (3, 4)

Máx. rel. $x = 7$

Interv. constantes: (-1, 1) U (2, 3)

Mín. abs. $x = 9$

Discontinua ($x = -1$)

Máx. abs. $x = -5 \; y \; x \in (2, 3)$

Puntos de corte eje X: $(-3, 0), (-1, 0), (5.5, 0), (6.5, 0), (7.5, 0)$

Punto de corte eje Y: (0,2)

1. Siempre que los resultados sean como los mostrados arriba o semejantes.

2. En caso de no ser iguales y no poner por ejemplo intervalos abiertos en los intervalos de crecimiento o decrecimiento, poner los máximos y mínimos como puntos en lugar de la coordenada x sola y viceversa con los puntos de corte, no poner exactamente la unión pero entenderse los intervalos…, pero que el resultado sea el mismo. *Dominio y recorrido sí que tienen que ser intervalos cerrados.

En ambos casos se calificará con la máxima puntuación (1.5 puntos).

Respuestas incorrectas:

Por separado, cada una de las partes tienen los siguientes valores: Dominio y recorrido (0.3 puntos), extremos relativos y absolutos (0.4 puntos), monotonía (0.3 puntos), puntos de corte (0.3 puntos) y continuidad (0.2 puntos).

1. Para dominio y recorrido, si no se colocan los intervalos cerrados se restará 0.1. Si por equivocación se descuenta el $x = -1$ del dominio se restará otro 0.1. Calculando bien dominio y mal recorrido o viceversa se contará la mitad (0.15). En caso de no calcular bien ni dominio ni recorrido descontando los casos de arriba se puntuará con 0.

2. En caso de los extremos relativos y absolutos, calcular bien el máximo relativo es 0.1, mínimos relativos 0.1, máximos absolutos 0.1 y mínimo absoluto 0.1. Como hay dos mínimos relativos, cada uno cuenta 0.05 y lo mismo pasa con los máximos absolutos. En caso de que no sean correctos ninguno se calificará con 0 puntos por apartado.

3. Cada uno de los apartados de crecimiento, decrecimiento e intervalos constantes cuenta 0.1 si se hace correctamente, de lo contrario se calificará con 0 puntos.

4. Como tenemos más puntos de corte en X , calcularlos bien valdrá 0.25 puntos y el punto de corte con el eje Y valdrá 0.05 puntos. Dependiendo de los puntos de corte erróneos en el eje X, o no calculados, se puede descontar cierta cantidad de 0.25. En cualquier caso, contestando completamente mal ambas se calificará con 0 puntos.

5. Como sólo hay un punto de discontinuidad, si se tiene bien es 0.2 y si se tiene mal o no se contesta se puntuará con 0.

Pregunta 5 (tiempo estimado de realización 3-5 minutos)

Campo de problemas, técnicas y tecnologías: Esta pregunta es relativa al apartado del campo de problemas *6. Problemas de asociación de gráficas con su correspondiente situación real y viceversa.* Las posibles técnicas evaluables son: utilizar adecuadamente e interpretar las técnicas relativas al estudio global de una función. Como tecnologías, al final del problema se pide justificar la asociación a través de los intervalos de crecimiento, decrecimiento o constantes, los cuales explican en este caso la situación real.

Tareas principales y auxiliares:

Tarea principal: Realizar una adecuada interpretación y traducción del enunciado a la hora de escoger una gráfica.

Respuestas correctas:

La gráfica correcta es la b).

1. Escogiendo la gráfica adecuada y justificando en cierta medida con el uso de los datos del enunciado, traduciéndolos al crecimiento, decrecimiento o intervalos constantes que presenta.

En este caso se calificará con la máxima puntuación (1.25 puntos).

Respuestas incorrectas:

1. Si se escoge la gráfica adecuadamente pero no se justifica nada ni se utiliza ninguna técnica o procedimiento se contará 0.6 puntos.

2. En caso de hacer una buena justificación y traducción del problema pero equivocarse en la gráfica por algún tramo que no se ha tenido en cuenta, dependiendo de la gravedad se podrá contar entre 0.2 y 0.6 puntos.

3. En caso de hacer una mala justificación y utilización de técnicas en el proceso escogiendo la gráfica errónea se calificará con 0 puntos.

Pregunta 6 (tiempo estimado de realización 8-10 minutos)

Campo de problemas, técnicas y tecnologías: Esta pregunta es relativa al apartado del campo de problemas *7. Funciones lineales.* Las posibles técnicas evaluables son: *7.a.1 Ecuación-Gráfica, 7.b.1 Tabla-Gráfica*, *7.c.1 Tabla-Ecuación* y *7.c.2 Ecuación-Tabla.* Como tecnologías, al existir varias formas de obtener la ecuación de la función, rellenar la tabla y dibujar la gráfica, el proceso tendrá que estar adecuadamente justificado a través de las técnicas que se utilicen.

Tareas principales y auxiliares:

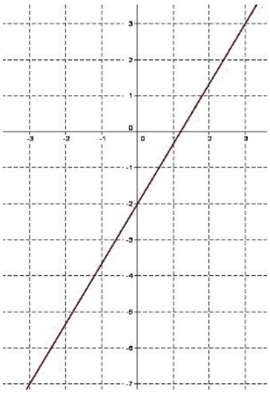
Tarea principal: Utilizar un proceso válido y adecuado en el cálculo de puntos de la tabla, obtención de la ecuación y dibujo de la gráfica.

Tarea auxiliar específica: Que las técnicas asociadas al proceso escogido sean usadas correctamente.

Tarea auxiliar general: Errores operacionales en el cálculo de la ecuación de la función o en la sustitución de puntos.

Respuestas correctas:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-16/3	-11/3	-2	-1/3	4/3	3



$$y = \frac{5}{3}x - 2$$

1. A partir de los puntos de la tabla, se pueden obtener el pendiente $m = \frac{3-(-2)}{3-0} = \frac{5}{3}$ y la ordenada en el origen $n = -2$, por lo que ya se tendría la ecuación (también se podría obtener uno de los dos (pendiente u ordenada) y utilizar un punto de la tabla para, sustituyendo en la ecuación general obtener el otro). Los restantes puntos de la tabla mediante sustitución en la ecuación y finalmente para la gráfica, cogiendo dos puntos de la tabla y trazando una recta que los une.

2. Por otro lado, la ecuación de la recta también se podría obtener con un sistema de ecuaciones, sustituyendo los dos puntos completos que se dan en la ecuación general de la recta $y = mx + n$. Sabiendo que el pendiente es $\frac{5}{3}$ los restantes puntos de la tabla se pueden obtener sumando y restando esa cantidad en la coordenada y, por lo que las veces que se haya hecho será lo que se sume o reste en la coordenada x (ejemplo: desde el punto $(3, 3)$; $3 - \frac{5}{3} = \frac{9}{3} - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$ que es la coordenada y, luego la coordenada x será $3 - 1 = 2$). En la representación gráfica, se pueden utilizar la ordenada en el origen -2 que es el punto de corte con el eje Y, y el pendiente $\frac{5}{3}$, desde el punto de corte avanzar 3 unidades y subir 5 para obtener el siguiente, trazando la recta que los une.

3. Combinar de varias formas técnicas anteriores utilizando un procedimiento adecuado y obteniendo un resultado correcto.

En cualquier caso se calificará con la máxima puntuación (1.5 puntos).

Respuestas incorrectas:

Cada una de las partes (tabla, ecuación y gráfica) valen 0.5 puntos por separado.

1. Si se comete algún error operacional en el cálculo de la ecuación, puntos o representación de la función, se descontarán entre 0.2 y 0.4 puntos en el apartado donde se hayan cometido dependiendo de la gravedad y cantidad (podría ser en todos si se cometen errores de cálculo por separado) siempre que el procedimiento y técnicas escogidas hayan sido las adecuadas.

2. En caso de contestar correctamente pero no realizar un proceso para obtener el resultado o no justificar lo que se hace, se puntuará 0.25 puntos por apartado realizado de ese modo.

3. Finalmente, si no se utiliza un proceso adecuado y se contesta erróneamente o no se contesta, se calificará con 0 puntos por apartado.

Pregunta 7 (tiempo estimado de realización 3-5 minutos)

Campo de problemas, técnicas y tecnologías: Esta pregunta es relativa al apartado del campo de problemas *7. Funciones lineales*. Las posibles técnicas evaluables son: *Ecuación punto-pendiente*. Como tecnologías, a la hora de obtener la recta paralela, se tendrá que justificar de algún modo la utilización de su pendiente, bien sea gráficamente o de palabra.

Tareas principales y auxiliares:

Tarea principal: Utilizar un proceso válido y adecuado en el cálculo de la recta paralela.

Tarea auxiliar específica: Que las técnicas asociadas al proceso sean usadas correctamente.

Tarea auxiliar general: Errores operacionales en el cálculo de la ecuación de la función o en la sustitución del punto.

Respuestas correctas:

$$m = -3, \qquad P = (1, 2)$$

$$f(x) = -3x + 5$$

1. En este caso solo hay una solución posible, el pendiente ha de ser el mismo que el de la ecuación del enunciado, después con ese pendiente ($m = -3$) se sustituye en la ecuación general de la recta $y = mx + n$ junto con el punto dado y se obtiene finalmente el n.

En este caso se calificará con la máxima puntuación (1 punto).

*También podría existir alguna excepción, y que se diera el caso de que se hiciera una solución gráfica, pero justificando adecuadamente lo que tiene que valer el pendiente trazando una recta a partir del punto dado, pudiéndose aceptar esta respuesta como buena a pesar de no ser lo que se pedía.

Respuestas incorrectas:

1. En caso de existir algún error operacional en la sustitución del punto pero realizar un proceso adecuado, se pueden descontar de 0.25 a 0.5 puntos dependiendo de los errores.

2. Si se responde correctamente, pero no existe ninguna técnica o justificación, se calificará con 0.5 puntos.

3. En caso de responder gráficamente, dibujando la recta del enunciado, el punto por el que pasa la recta pedida y trazar una paralela que pasa por el punto sin calcular la ecuación, se calificará con 0.5 puntos.

4. Escogiendo un mal procedimiento o justificación en la realización del ejercicio respondiendo erróneamente o sin responder, se calificará con 0 puntos.

Pregunta 8 (tiempo estimado de realización 12-15 minutos)

Campo de problemas, técnicas y tecnologías: Esta pregunta es relativa a los apartados del campo de problemas *7. Funciones lineales* y *11. Problemas sobre la construcción de una gráfica a partir de combinación de funciones tipo.* Las posibles técnicas evaluables son: Todas las relacionadas con la función lineal. Como tecnologías, tendrá que existir una buena justificación ya sea textualmente o a través de las técnicas que incluyan el proceso escogido a la hora del cálculo de las ecuaciones de las funciones y el trazo de la gráfica.

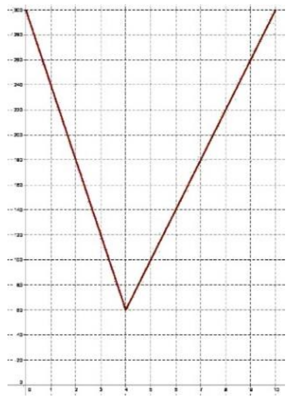
Tareas principales y auxiliares:

Tarea principal: Utilizar un procedimiento válido y adecuado en la interpretación del problema, cálculo de las ecuaciones y trazo de la gráfica.

Tarea auxiliar específica: Que las técnicas asociadas al proceso sean usadas correctamente.

Tarea auxiliar general: Cometer errores operacionales en el cálculo de la ecuación de la función o en la sustitución de puntos.

Respuestas correctas:



$f(x) = -60x + 300 \qquad x \in [0, 4]$

$f(x) = 40x - 100 \qquad x \in [4, 10]$

1. Por un lado, la primera ecuación se puede calcular a partir del pendiente que se da directamente (reduce 60 km/h por segundo; $m = -60$) y el punto de partida inicial que son 300 km/h (ordenada en el origen $n = 300$). Tras calcular la primera ecuación, se traza su gráfica desde el punto de ordenada $y = 300$ hasta $y = 60$, que se obtiene sustituyendo en la ecuación, y desde ese punto se calcula la siguiente, en este caso, no se da directamente el pendiente pero casi, no hay más que dividir por dos ya que es cada dos segundos ($m = 40$), utilizando ahora la ecuación general con el pendiente y sustituyendo el punto de partida se obtiene la segunda ecuación, finalmente se traza su recta hasta la ordenada $y = 300$ km/h.

2. Por otro lado, en lugar de utilizar pendientes se pueden obtener las ecuaciones de las rectas a partir de puntos de la gráfica calculados mediante proporcionalidad directa o regla de tres, siempre que se haga correctamente y de manera justificada.

*El trazo de los segmentos en la gráfica se puede hacer a través de un punto y utilizando los pendientes (avanzando una unidad en las abscisas y aumentando (positivo) o disminuyendo (negativo) la cantidad del pendiente en las ordenadas, o bien mediante la sustitución directa de puntos en la ecuación y su representación.

En cualquier caso se calificará con la máxima puntuación (2 puntos).

Respuestas incorrectas:

1. Si se calculan correctamente las ecuaciones de las rectas, pero no se representan o no se sigue un procedimiento adecuado para hacerlo, se calificará con 1 punto.

2. Si por el contrario, se consigue trazar bien la gráfica estando adecuadamente justificado, pero no se calculan las ecuaciones o no se hace correctamente se calificará con 1 punto.

3. En caso de que sólo se logre calcular la ecuación y la gráfica de uno de los tramos utilizando un adecuado procedimiento, se calificará con 1 punto.

4. Si tan sólo se escriben las ecuaciones y se traza la gráfica sin ningún tipo de justificación se calificará con 1 punto.

5. Si se cometen errores operacionales tanto en el cálculo de las ecuaciones como en la sustitución de puntos para la representación, pero se realiza un buen proceso, se descontará desde 0.2 a 1 punto dependiendo de la cantidad y gravedad de los errores.

6. Haciendo una mala interpretación del problema, pero calculando adecuadamente las ecuaciones y la gráfica siguiendo ese razonamiento previo, se podrá calificar hasta con 0.5 puntos.

7. En caso de hacer una buena interpretación del problema, pero no utilizar las técnicas adecuadas en el proceso o no llegar a calcular las ecuaciones ni representar la gráfica, se podrá calificar hasta con 0.5 puntos.

8. Por último, si no se realiza una buena interpretación del problema ni se utilizan las técnicas adecuadas para el proceso de cálculo de ecuaciones y gráfica respondiendo erróneamente o no respondiendo, se calificará con 0 puntos.

Comunicación de resultados:

Una vez realizada la prueba escrita y calificado a cada uno de los alumnos, se escogerá un día de clase para entregar a cada alumno por separado su examen para que pueda revisar individualmente sus respuestas, puntuaciones en cada apartado y errores propios cometidos. De esta forma, también si existe algún error mío tanto de corrección como en la suma de puntos o de cualquier otra índole, me podrá ser comunicado para modificar lo que fuese necesario. Además, una vez revisados los exámenes por parte de los alumnos, se hará una corrección del mismo en la pizarra.

En lugar de hacerlo yo, sería interesante que los alumnos salieran a intentar realizar cada uno de los apartados con la ayuda que fuese necesaria, así, si no lo han sabido hacer en la prueba, de este modo pueden llegar a comprender el procedimiento a seguir y solventar sus posibles dudas al respecto.

9. Referencias

Orden de 9 de mayo 2007, del departamento de educación, cultura y deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA nº65, del 1 de junio de 2007)

BOYER, C. (1986). *Historia de las Matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial.

Sastre, P., Boubée, C. y Rey, G. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Unión, 16*, pp. 141 – 155.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990): *Funciones y Gráficas.* Madrid: Síntesis.

Lacasta, E. y Pascual, J.R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.125-154). Barcelona: ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona y Horsori.

Shell Centre for Mathematical Education. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* Ministerio de Educación y Ciencia y Universidad del País Vasco.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación*, 12(2), pp. 209-221.

Fabra, M., Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: ’’Continuidad y prototipos’’. *Relime,* Vol. 3, Núm 2, pp. 207-230.

Giorgio T. Bagni (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Relime,* Vol. 7, Núm.1, pp. 5-23.

Alayo, F. (1989). Funciones y gráficas. *Suma*, 4, pp. 39-42.

González, F.G., Gracia, F y Palomero, I. (1998). La influencia de la escala en la interpretación gráfica de una función lineal. *Suma, 27*, pp. 111-116.

Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas, 4,* pp. 6-16.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, 10, pp. 89-104.

Leinhardt, et al. (1990). Functions, Graphs and Graphing: Tasks. *Learning and Teaching Review of Educational Research*, 60(2), pp. 1-64.

Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.). (1992). *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington, DC., EE. UU.: Mathematical Association of America.

El Bouazzoui, H. (1988): *Conceptions des eleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction.* Theses du grade de Ph. D. Université Laval.

Fuster, M. y Martín, F. (1997). *Libro de texto de Matemáticas de 2º ESO.* Editorial: Edebé.

Corbalán, F. (2003). *Libro de texto de Matemáticas de 2º ESO*. Editorial: Vicens Vives.

Martín, R., Carrasco, Mª A. y Ocaña X. M. (2007). *Libro de texto de Matemáticas de 2º ESO.* Editorial: Edelvives.

Cólera, J. y Gaztelu, I. (2012). *Libro de texto de Matemáticas de 2º ESO*. Editorial: Anaya.

Escoredo, A. y Pérez, C. (2012). *Libro de texto de Matemáticas 2º ESO: Avanza.* Editorial: Santillana.

John J O'Connor y Edmund F Robertson (2015). *MacTutor History of Mathematics archive*. Extraído de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

Meza C., Gerardo, Mora F, Walter y Ramíres A., Greivin (2015). *Revista digital matemática.* Extraído de: http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/

Revista matemática: *Suma*. Extraído de: http://revistasuma.es/

Revista matemática: *Unión.* Extraído de: http://www.fisem.org/www/union/

Revista matemática: *Números.* Extraído de: http://www.sinewton.org/numeros/

Revista matemática: *Sigma.* Extraído de: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/sigma_aldizkaria.html

Revista matemática: *Epsilon*. Extraído de: http://thales.cica.es/epsilon/

Revista de investigación matemática: *Relime.* Extraído de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/revista?codigo=7978

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Extraído de: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Shell Centre for Mathematical Education Publications Ltd. Extraído de: http://www.mathshell.com/index.php

Illuminations. Resources for teaching Math. Extraído de: http://illuminations.nctm.org/