Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Cuerpos geométricos: una propuesta didáctica para 2º de ESO

Autor: ALBERTO CASTILLO ELENA

Director: ALBERTO ARNAL BAILERA

Junio de 2015

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar una propuesta didáctica alternativa a la tradicional enseñanza de los cuerpos geométricos de 2º de ESO. Para ello, presentamos una serie de actividades que iremos desarrollando de manera que garantice el correcto aprendizaje de nuestros alumnos.

Asimismo, antes de proceder a tal desarrollo, haremos un recorrido para identificar cuáles han sido las dificultades existentes en la actual metodología de enseñanza de nuestro objeto de estudio, haciendo referencia a varios artículos de investigación en los que se cuestionan las causas de esta problemática.

La secuenciación de campos de problemas y la metodología utilizada están pensadas para fomentar la iniciativa propia de nuestros alumnos, promover el trabajo continuo y colaborativo, sin olvidar la comunicación ente iguales y la importancia del uso de recursos manipulativos tanto materiales como virtuales.

Ejerciendo nuestra labor como docentes y con la ayuda de nuestra propuesta didáctica, esperamos proporcionar las herramientas necesarias para desarrollar un adecuado proceso de enseñanza-aprendizaje.

A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

El objeto matemático a enseñar son los cuerpos geométricos. Haremos previamente un recordatorio de figuras planas para después centrarnos en nuestro nuevo objeto de estudio, en su clasificación, características, propiedades y el cálculo de áreas entre otras.

Situamos nuestro objeto de estudio en la asignatura de Matemáticas, dentro del bloque de Geometría, de 2º curso de la E.S.O.

Para enmarcar mejor la posición que nuestro objeto de estudio debería tener en dicho curso y asignatura, vamos a hacer referencia a los contenidos que se explicitan en el Boletín Oficial de Aragón, en la Orden de 9 de Mayo de 2007, correspondiente al bloque de Geometría:

Bloque 4. Geometría […]

- *Elementos básicos de la geometría del espacio. Punto, segmento, recta y plano. Posición relativa de rectas y planos: incidencia y paralelismo. Ángulos diedros: propiedades y medida. La perpendicularidad.*

- *Cuerpos en el espacio. Prismas y pirámides: descripción, elementos y propiedades. Poliedros. Cilindro, cono y esfera: descripción, elementos y propiedades. Desarrollos planos. Realización de clasificaciones de figuras geométricas del espacio atendiendo a diferentes características. Obtención de figuras planas mediante cortes o proyecciones de figuras espaciales. Áreas y volúmenes de cuerpos en el espacio: concepto y cálculo.*

- *Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas en el plano y en el espacio. Elaboración de definiciones de objetos geométricos en un proceso de depuración de la descripción de sus características.*

- *Utilización de los teoremas de Thales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.*

- *Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.*

- *Utilización de procedimientos tales como la composición, descomposición, intersección, truncamiento, dualidad, movimiento, deformación o desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros.*

- *Utilización de métodos inductivos para formular conjeturas sobre propiedades geométricas. Uso de razonamientos deductivos para validar alguna afirmación o propiedad geométrica sencilla.*

Antes de pasar a trabajar propiamente con el objeto matemático que queremos estudiar (cuerpos geométricos), conviene tener una sesión previa en la que se recuerden las principales fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas. Puesto que es un tema que se debe estudiar en 1º E.S.O., trataremos de dar un enfoque distinto, de ir más allá de lo que se suele hacer al explicar estos temas, y que sirva no sólo para recordar lo que ya sabían, sino para aumentar sus conocimientos. Veremos más adelante la metodología propuesta para ello.

Después desarrollaremos más en profundidad los cuerpos geométricos, intentado seguir un orden gradual en la presentación de los campos de problemas, de modo que facilite la incorporación del objeto de estudio a la realidad del alumno, de manera que adquiera un interés, unas habilidades y destrezas para el buen manejo y comprensión de dicho objeto de estudio.

Dicho esto, disponemos en la siguiente tabla la secuencia de campo de problemas propuesto, el conjunto de técnicas asociadas a cada uno de estos campos de problemas y las tecnologías que justifican tales técnicas:

CUERPOS GEOMÉTRICOS. 2º ESO.		
CAMPO DE PROBLEMAS	**TÉCNICAS**	**TECNOLOGÍAS**
1. Clasificación y descripción de cuerpos geométricos cercanos a la realidad del alumno.	-Identificar cuerpos geométricos. Estudiar y determinar sus propiedades.	- Utilización de definiciones, propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.
2. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.	- Calcular áreas de figuras planas por composición/descomposición. - Aplicar procedimientos conocidos a situaciones distintas. - Diferenciar área y perímetro en distintas figuras planas.	- Uso de razonamientos deductivos para validar alguna afirmación o propiedad de figuras planas sencillas. - Conservación del área: la suma parcial de áreas de figuras más sencillas es igual al área total de la figura compuesta.
3. Deducción de la fórmula de Euler.	- Utilizar métodos inductivos para formular conjeturas sobre propiedades geométricas.	- Justificaciones basadas en resultados teóricos.
4. Construcción de cuerpos geométricos a partir de distintos desarrollos planos. Determinar el desarrollo plano dado un cuerpo.	- Construir cuerpos geométricos a partir de distintos desarrollos planos. - Realizar desarrollos planos de cuerpos geométricos	- Justificaciones geométricas para demostrar determinados resultados.
5. Resolución de problemas que impliquen la estimación y cálculo de longitudes, áreas o superficies.	- Descomponer figuras geométricas en cuerpos más sencillos. - Utilizar el Teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes. - Calcular áreas laterales y superficie total de cuerpos geométricos.	- Utilización de definiciones, propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico. - Conservación del área: la suma parcial de áreas de figuras más sencillas es igual al área total de la figura compuesta.
6. Construcción con cuerpos geométricos distintos objetos a partir de lo aprendido.	- Utilizar todas las técnicas anteriores.	

B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

B.1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Desde la antigüedad, diversas civilizaciones tales como la egipcia, empezaron a conocer y utilizar cuerpos geométricos sencillos (prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas), con el fin de calcular áreas y volúmenes. La manera de actuar era del tipo experimental. Producían en ocasiones resultados exactos, aunque frecuentemente, y sin tener constancia de ello, los resultados obtenidos eran meras aproximaciones.

Los procedimientos utilizados para la determinación de un área eran simples descripciones de los pasos que había que seguir para obtener la magnitud buscada: "la medida de la parte superior se multiplica por sí misma, se divide por cuatro y se suma…" (Colera y Gaztelu, 2008).

Más adelante el mundo griego recogió estos conocimientos y los enriqueció teóricamente. Personajes de importe relevancia en el estudio de este objeto matemático fueron Platón, Euclides y Arquímides.

Por tanto, la manera de justificar la introducción escolar del objeto matemático hace referencia, a la necesidad que tenían entonces antiguas civilizaciones de estudiar cuerpos geométricos para resolver problemas que pudieran tener, como la construcción de determinados objetos necesarios para su vida diaria, cálculo de superficies, etc.

Se hace hincapié en la importante evolución y transformación a lo largo de la historia, de esos procedimientos basados en pasos para calcular un área determinada, hasta la obtención de una fórmula concreta que conocemos hoy en día y aplicamos de manera directa.

A parte de la importancia histórica, otros libros (Domínguez, 2008; Gómez, 2008) hacen referencia a que la geometría se encuentra presente en la naturaleza que nos rodea. Hablan de todo tipo de similitudes que podemos encontrarnos y de ahí la importancia de su estudio, como por ejemplo la esfericidad de la Tierra.

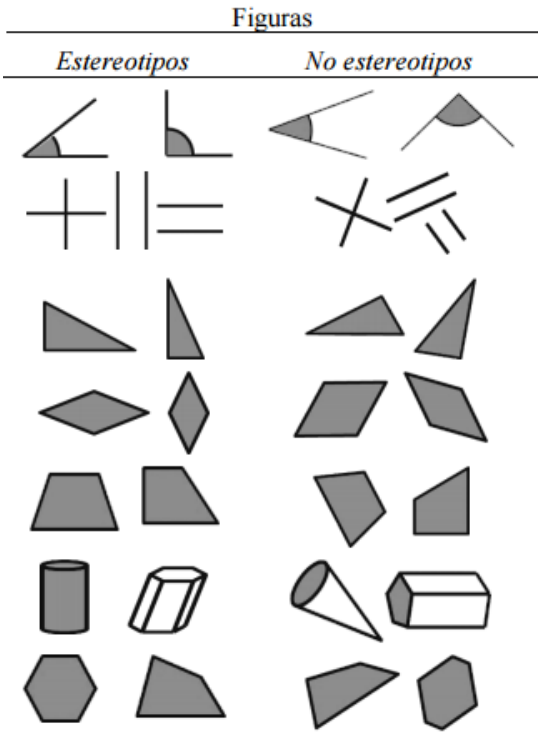
Podemos decir que hoy en día, la práctica de la enseñanza se sigue apoyando en los libros de texto. Éstos son utilizados por profesores y alumnos como un instrumento principal en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Ahora bien, ¿se recogen en ellos los contenidos adecuados que deben aprender los alumnos?, ¿lo hacen de forma ordenada en cada uno de los cursos, según se indica en la legislación?, ¿proponen actividades que ayuden a profundizar en los contenidos estudiados?

Se han hecho numerosos estudios e investigaciones sobre el papel que tienen los libros de texto en la enseñanza. Hemos indagado en varios artículos y las respuestas a estas preguntas no son especialmente positivas.

En uno de ellos (García, Guillén, 2008) varios profesionales en educación analizan distintos libros de texto de Matemáticas utilizados en la Comunidad Valenciana, donde podemos encontrar lo siguiente:

"En la exposición de contenidos se observan errores de concepto, descripciones ambiguas de algoritmos, contenidos en los que se han omitido condiciones de restricción y aparecen como generales… En los ejercicios resueltos, aparecen respuestas en las que el razonamiento que se lleva a cabo es contrario al razonamiento lógico. También, en los ejercicios propuestos, podemos ver problemas mal definidos que pueden ser interpretados de varios modos con distintas soluciones o que carecen de los datos necesarios para ser resueltos."

Estos no son los únicos errores que podemos observar. Otro artículo (Balletbo, Barrantes y López, 2014) pone de manifiesto las deficiencias existentes en referencia a la presencia de la Geometría en los libros de texto analizados, como pueden ser que los conceptos y figuras geométricas que se introducen utilicen pocas representaciones y éstas no son muy variadas, siendo en la mayor parte de los casos estereotipos con características de orientación estándar:



En definitiva, queda claro que el uso de estos materiales puede originar dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, sobre todo si no se acompañan de otros recursos dedicados a contrarrestar estas deficiencias.

Por ello, es preciso que los docentes, antes de utilizar un libro de texto, realicemos una exploración crítica del mismo para poder guiar a nuestros alumnos adecuadamente, intentando solucionar todas las deficiencias que encontremos en los libros actuales utilizando, por ejemplo, materiales complementarios propios.

B.2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Antes de comenzar a repasar qué tipo de campos de problemas, técnicas y tecnologías se introducen habitualmente, quiero hacer constar que para este estudio he utilizado los libros de las actuales y conocidas editoriales, como son Anaya, Santillana y SM.

He de decir que la estructura que muestran todos estos libros es bastante similar. Se empieza explicando lo que es un poliedro, prisma y pirámide, se continúa con los

poliedros regulares y por último con los cuerpos de revolución (cilindros, conos y esferas).

El desarrollo de cada uno de estos apartados es bastante homogéneo, comenzando con una breve clasificación de los elementos que intervienen en cada uno de los cuerpos geométricos, su desarrollo plano y el cálculo de sus áreas parciales (bases, laterales) y área total. Después de esto, se presenta algún ejemplo resuelto y finalmente se proponen ejercicios de lo explicado previamente en cada uno de los apartados.

Por tanto, el **campo de problemas** que podemos encontrar en la enseñanza que proporcionan estos libros es bastante similar entre unos y otros, y sigue una progresión secuenciada en función de lo que se va explicando en el libro. Así pues, podemos distinguir distintos campos de problema en los que es necesario:

- Identificar el tipo de cuerpo geométrico dadas unas figuras.
- Dibujar el desarrollo plano de las mismas o calcular el cuerpo geométrico dado el desarrollo o las indicaciones oportunas.
- Hallar sus áreas parciales y total dados una serie de datos que nos permiten hacer un uso directo de las fórmulas conocidas anteriormente para el cálculo de áreas en figuras planas.

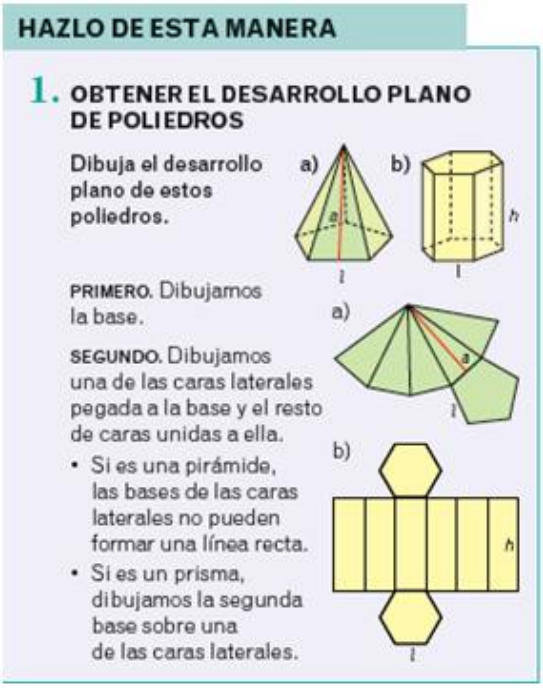
Incluso al final de estos libros, donde suele haber una colección de ejercicios que reúnen todo lo visto en el tema, se explicita literalmente cada uno de los subgrupos de ejercicios vistos anteriormente con el siguiente enunciado:

- *"Tipos de cuerpos geométricos"*.
- *"Desarrollo de cuerpos geométricos"*.
- *"Áreas sencillas"*.

Por último, al final del tema, aparece un apartado de "Problemas", en los que podemos observar un enfoque algo distinto con respecto a los meros ejercicios vistos hasta entonces. Estos problemas tienen que ver todos ellos con el cálculo de áreas laterales y total de una construcción. Sin embargo, parece que están algo más contextualizados. Parece que algunos de estos problemas podrían ser un ejemplo típico de algo que pudiéramos encontrar en una situación cotidiana, en los que se empieza a

hablar por ejemplo de la “cantidad de alambre que necesitaremos para…”, “…cuánto costará si el precio está a x€ por metro cuadrado”, etc.

En cuanto a las **técnicas**, es frecuente ver en estos libros recuadros a lo largo del tema en los que se explicita *“Hazlo así”* o *“Hazlo de esta manera”*:


HAZLO DE ESTA MANERA

1. OBTENER EL DESARROLLO PLANO DE POLIEDROS

Dibuja el desarrollo plano de estos poliedros.

a) b)

PRIMERO. Dibujamos la base.

SEGUNDO. Dibujamos una de las caras laterales pegada a la base y el resto de caras unidas a ella.

- Si es una pirámide, las bases de las caras laterales no pueden formar una línea recta.
- Si es un prisma, dibujamos la segunda base sobre una de las caras laterales.

a) b)

Esto puede suponer un grave problema en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumno. De este modo se limita a realizar los ejercicios de la forma que se indica, impidiendo completamente el desarrollo de la creatividad del alumno y la posibilidad de reflexión, entre otros problemas.

Es un claro ejemplo de lo que podemos observar en multitud de ocasiones, en todos y cada uno de los temas, de todos los libros que se utilizan actualmente para la enseñanza de las Matemáticas.

Queremos hacer referencia al problema 7 de este trabajo, donde proponemos la construcción libre de uno de los desarrollos planos de la pirámide pentagonal, utilizando para ello Geogebra. Hablamos de uno de los desarrollos planos puesto que sabemos que existen hasta 15 desarrollos planos distintos debido a la teoría de los sólidos de Johnson.

Además de esta técnica, podemos encontrar algunas otras como pueden ser:

- Aplicar el Teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes de cuerpos geométricos cuando es necesario calcular un dato desconocido.
- Cálculo de áreas en las que primero se determina el tipo de cuerpo que es y en función de esto se aplica una u otra fórmula para el cálculo del área de la base o áreas laterales. Finalmente sumando todas éstas, se obtiene el área total de la figura.

Básicamente, estas son los tipos de técnicas que se utilizan para resolver los tres tipos de campos de problemas que hemos descrito previamente.

Por último, en referencia a las **tecnologías** que se utilizan, podemos decir que son muy escasas o incluso hay ausencia de las mismas. No existe una justificación de porqué utilizar una técnica u otra. Simplemente se basan en resultados teóricos previos, conceptos, clasificaciones y fórmulas, que generalmente se dan sin una explicación de su deducción. Por tanto, esta es la única justificación existente.

B.3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Ahora bien, ¿esto es suficiente para afianzar los conocimientos necesarios que el alumno debe alcanzar para este curso?, ¿se produce un proceso de desarrollo intelectual con el estudio de nuestro objeto matemático?, ¿cuáles son los efectos que este tipo de enseñanza produce sobre el aprendizaje del alumno?

Por un lado, lo que hemos podido analizar hasta ahora no deja de ser una simple aplicación directa de ejercicios en los que el grado de razonamiento desarrollado por los alumnos es muy elemental, ya que se trata de resoluciones directas de ejercicios simples.

Sin embargo, al final del tema es cierto que en el apartado clasificado como “Problemas”, si que podemos observar un tipo de problemas que son algo más que una simple aplicación directa de fórmulas para el cálculo de áreas, en los que es necesario un razonamiento algo más exhaustivo por parte del alumno y en los que pueden desarrollar y afianzar un poco más los conocimientos que se pretenden estudiar

mediante ejemplos de la vida cotidiana. Ya no solo por su aplicabilidad, sino por el grado de desarrollo de pensamiento que es necesario para hacer frente a ellos.

Está claro que esto no es suficiente para contestar de forma positiva a las preguntas que planteábamos al principio de este apartado

EL MODELO DE VAN HIELE

Para ello, he recopilado varios artículos para obtener información sobre cuáles podrían ser los motivos principales de que este proceso de enseñanza y aprendizaje no sea tan eficaz con la metodología tradicional utilizada. Entre otros quiero destacar (Gutiérrez y Jaime, 2012) basado en una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele.

Los autores afirman que los estudiantes no sólo tienen dificultades en la realización de las operaciones básicas, sino más aún en la comprensión de los teoremas y propiedades que aparentemente parte de una inadecuada capacidad de observación de las figuras geométricas. A partir de aquí, el Modelo de Van Hiele proporciona una propuesta en la que trata de buscar alternativas de solución a fin de mejorar esta problemática.

Este modelo distingue dos procesos en la enseñanza de la geometría: uno de ellos explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico, desde lo más básico a lo más complejos, desde identificar simples figuras hasta lograr entender las relaciones entre unas y otras propiedades y llegar a ser capar de demostrarlas. El otro proceso explica cómo puede un profesor ayudar a sus alumnos para mejorar la eficacia de su aprendizaje.

Existen distintas fases de aprendizaje que constituyen su propuesta didáctica, en las que por ejemplo es fundamental, conocer el nivel en el que se encuentran los alumnos. Es imprescindible que afiancen cada uno de esos niveles antes de pasar al siguiente para desarrollar un aprendizaje de calidad. El profesor es quien guía y ayuda al alumno en ese proceso de transición entre unos niveles y otros.

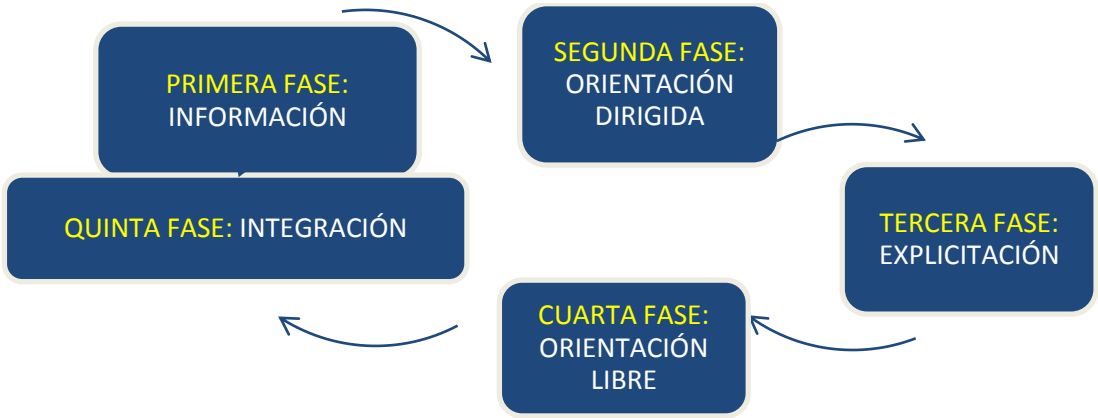
Para ello, también es interesante la propuesta de ejercicios y problemas que ayude a los alumnos a alcanzar el grado de desarrollo característico de cada fase de aprendizaje. Con este modelo se promueve la implantación de actividades en las que el alumno no sea un simple reproductor de los contenidos mediante imitación, sino que saquen sus propias conclusiones, que puedan razonar y desarrollar sus ideas ante distintos problemas.

Otra aspecto a destacar es la importancia de que los estudiantes intercambien sus experiencias, comenten lo que han observado y expliquen a sus compañeros la manera que han resuelto las actividades propuestas.

Por último, los alumnos deberán aplicar los conocimientos adquiridos hasta el momento en otro tipo de problemas o campos, con el objetivo de perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto puede desarrollarse, por ejemplo con ayuda del profesor, al plantear problemas más abiertos que puedan resolverse de diversas formas o que puedan dar lugar a diferentes soluciones.

Así, a lo largo de este proceso, los alumnos van adquiriendo conocimientos, habilidades y una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando lo aprendido con otros campos o con un conocimiento que tenían previamente asimilado. Esto supone una visión global y una integración de forma acumulativa a sus conocimientos existentes de manera que afianza y fortalece, no solo el objeto matemático a estudiar, sino sus técnicas y habilidades para un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje.

Todo esto de manera resumida, es lo que propone el modelo de Van Hiele a través de las distintas fases de aprendizaje:



C. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

Para hacer frente al estudio de nuestro objeto matemático, el alumno deberá tener unos conocimientos previos mínimos que le permitan el buen desarrollo y seguimiento de la unidad didáctica.

Para ello, es necesario que disponga de unos conocimientos básicos de figuras planas como pueden ser, conocer los elementos que forman cada una de ellas, distintas propiedades, ser capaz de clasificarlas en función de estas características que las definen o calcular el área y el perímetro de figuras simples.

Del mismo modo, son necesarios unos conocimientos básicos de cuerpos geométricos (prismas, pirámides, poliedros regulares, cuerpos de revolución…).

Veamos para este apartado los contenidos que se explicitan en el Boletín Oficial de Aragón, en la Orden de 9 de Mayo de 2007, correspondiente al bloque de Geometría de 1º E.S.O:

Bloque 4. Geometría […]

- *Elementos básicos de la geometría del plano. Punto, recta y segmento. Posición relativa de rectas: incidencia y paralelismo. Ángulos: propiedades. Medida de ángulos: operaciones. La perpendicularidad.*

- *Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad.*

- *El triángulo. Descripción, elementos, construcción, clasificación y propiedades. Perímetro y área: concepto y cálculo.*

- *Polígonos: descripción, elementos, construcción, clasificación y propiedades. Perímetro y área: concepto y cálculo.*

- *Circunferencia y círculo. Descripción, elementos, construcción y propiedades. Cálculo de longitudes y áreas.*

- *Realización de clasificaciones de figuras geométricas planas atendiendo a diferentes características.*

- *Estimación y cálculo de áreas mediante fórmulas, triangulación y cuadriculación. Uso de la composición y descomposición de figuras planas en otras para facilitar la resolución de problemas.*

- *Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.*

- *Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.*

- *Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico.*

- *Elaboración de definiciones de objetos geométricos en un proceso de depuración de la descripción de sus características.*

- *Utilización de métodos inductivos para formular conjeturas sobre propiedades geométricas.*

- *Uso de razonamientos deductivos para validar alguna afirmación o propiedad geométrica sencilla.*

No podemos olvidar, por supuesto, los contenidos correspondientes a las unidades didácticas previas de nuestro objeto de estudio, pertenecientes al mismo curso de 2º E.S.O. Del mismo modo, hacemos referencia al Boletín Oficial de Aragón, en la Orden de 9 de Mayo de 2007, correspondiente al bloque de Geometría:

Bloque 4. Geometría […]

- *El triángulo. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Semejanza de triángulos: teorema de Thales. Criterios de semejanza de triángulos.*

- *Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Razón entre las superficies de figuras semejantes.*

Con todo esto, podemos afirmar que nuestros alumnos disponen de los conocimientos previos necesarios para hacer frente al desarrollo y estudio de nuestro objeto matemático.

Antes de empezar con nuestro objeto de estudio es fundamental asegurarse que nuestros alumnos disponen de unos conocimientos previos suficientes para hacer frente a tal objeto.

Para ello, creo que puede ser interesante realizar una evaluación inicial en la que obtendremos la información necesaria para saber de qué manera tenemos que actuar y tomar las medidas que consideremos oportunas.

La idea de esta propuesta, una vez realizada la prueba, sería la de hacer un recordatorio de aquellos aspectos imprescindibles que deben saber y afianzar o asimilar aquellos que todavía no hayan adquirido.

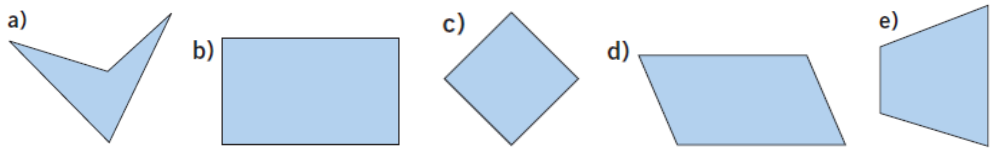
Asimismo, tenemos que tener en consideración que es posible que tengan ideas erróneas de determinados conceptos o propiedades y que por consiguiente tendremos que hacer algo para solucionar estas dificultades.

Con los resultados obtenidos de la evaluación inicial programaremos nuestra sesión de repaso o sesión previa a nuestra propuesta didáctica, con el fin de facilitar el buen desarrollo de la misma.

Planteamos a continuación una serie de actividades para nuestra evaluación inicial:

EVALUACIÓN INICIAL. CUERPOS GEOMÉTRICOS. 2º E.S.O.

1. Clasifica estos cuadriláteros, e indica si son cóncavos o convexos.



2. Obtén el área y el perímetro del suelo de una habitación rectangular de lados 3 y 7 metros.

3. Proporciona un ejemplo de algún objeto o construcción que se asemeje a un prisma recto de base triangular y otro a una pirámide de base rectangular. ¿Cuántas aristas, vértices y caras tienen?

4. Imagina que queremos construir un dado de papel para jugar al parchís. Dibuja un desarrollo plano de manera que al recortarlo y montarlo podamos construir correctamente nuestro dado.

5. Una escalera de 5 m apoyada en la pared, tiene su pie a 1,5 m de la base de la pared. ¿A qué altura llegará la escalera?

D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

D.1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

Si preguntamos a cualquiera de nuestros alumnos por lo que estamos haciendo en esta parte de la Geometría, nos dirán que estudiar las formas de las figuras y los cuerpos geométricos. Sin embargo, es frecuente que muchos de ellos cuestionen o no entiendan el porqué estudiar durante varios cursos este objeto matemático.

En la vida diaria encontramos modelos y ejemplificaciones físicas de estos objetos ideales que estudiamos en esta unidad didáctica.

Una de las principales fuentes donde estos objetos físicos evocan figuras y cuerpos geométricos está en la propia Naturaleza. Por ejemplo, existen multitud de elementos naturales de distinta especie que comparten la misma forma, como ocurre con las formas en espiral. Igualmente encontramos semejanzas entre nuestros cuerpos geométricos de estudio y distintos objetos físicos, como pueden ser la compleja construcción de volcanes o la simplicidad de la forma de determinadas frutas como la forma esférica de las naranjas. Otro ejemplo característico podría ser el de la disposición hexagonal perfecta de las celdillas de los panales de abejas.

Por otro lado, en nuestro día a día, las personas estamos constantemente reflejando en nuestras obras estas figuras que observamos de la Naturaleza: se realizan dibujos, edificios y utensilios en los que queda proyectada la importancia de las figuras geométricas. El entorno artístico y arquitectónico también es un importante factor de desarrollo de la Geometría. Así, desde la construcción de viviendas, hasta templos de distintos estilos, han impulsado constantemente el descubrimiento de nuevas formas y propiedades geométricas.

Incluso en el trabajo de muchas personas se utilizan este tipo de estructuras: albañiles, ceramistas, artesanos, decoradores, coreógrafos, diseñadores de muebles, etc. Todos ellos de forma más o menos consciente, utilizan el espacio y las formas geométricas.

También encontramos cuerpos geométricos en los juegos: billar (bolas esférica, y mesa rectangular y rombos en los bordes), parchís, ajedrez. En cuanto a los deportes, más de lo mismo: en fútbol (rectángulo del campo, áreas, balón, porterías, etc.), en baloncesto (canastas, zonas, campo, etc.), tenis…

En conclusión, a esta lista de situaciones y ámbitos donde podemos encontrar objetos geométricos podrían sumarse muchas más. De ahí la importancia del estudio de figuras y cuerpos geométricos, de conocer y entender sus propiedades y relaciones, y la adecuada introducción escolar de este importantísimo objeto matemático.

D.2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

El estudio de los cuerpos geométricos se ha realizado, de manera inconsciente o no, a lo largo de toda la historia, mucho antes de lo que podamos imaginar y podamos tener constancia de ello.

El significado etimológico de la palabra geometría, "medida de la tierra", hace referencia a su origen de tipo práctico, relacionándolo con las actividades de reconstrucción de los límites de las parcelas de terreno, que tenían que hacer los egipcios tras las inundaciones del Nilo. Sin embargo, la Geometría dejó ya hace mucho tiempo de ocuparse de la medida de la tierra. Con los griegos, la Geometría se interesó por el mundo de las formas, la identificación de sus componentes más elementales y de las relaciones y combinaciones entre dichos componentes.

Es por ello, que podemos decir que más o menos sí coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen a nuestro objeto de estudio. Obviamente todo sigue una evolución, un proceso de cambio, de ampliar o modificar conocimientos, pero la necesidad y razón de ser de este objeto ha estado presente, lo está y seguirá estando en la vida diaria de las personas.

D.3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar

Como hemos dicho en el apartado anterior, la razón de ser de nuestro objeto matemático a enseñar tiene su origen en la utilización de diversas figuras y cuerpos geométricos en diversos ámbitos y circunstancias, especialmente provenientes de la Naturaleza.

Con esta actividad intentaremos dar sentido a esa razón de ser, de modo que pediremos a nuestros alumnos que identifiquen y asocien diversas estructuras u objetos que pudieron encontrar hace miles de años, con las figuras que ellos conocen. Intentaremos que se den cuenta de la importancia que ha tenido la observación de estos objetos y las transformaciones que se han dado, lo que ha supuesto que hoy conozcamos y utilicemos los cuerpos geométricos de la manera en la que lo hacemos.

Para ellos pediremos que describan y analicen el objeto, y determinen algunas de sus propiedades, con el objetivo de que puedan llegar a entender la importancia de estudiar los cuerpos geométricos para su aplicación en todo tipo de objetos que nos podemos encontrar habitualmente.

Actividad inicial 1: Dada la siguiente lista de objetos contesta a las siguientes preguntas.

			
Morning Glory	Troncos	Cristal de roca	Abeto
			
Colmena de abejas	Setas	Diente de león	Estrella de mar
			
Prismas basálticos	Volcán	Naranja	Fluorita

a) Relaciona estos objetos con las figuras y cuerpos geométricos que conozcas.
b) Analiza y describe algunas de las propiedades de estos cuerpos.
c) Propón algún ejemplo en el que estas formas se presentan en distintos objetos que podemos encontrarnos actualmente.
d) Reflexiona sobre la importancia que esas formas y sus dimensiones tienen sobre los objetos.

Otro de los problemas fundamentales que deben incluirse en este apartado, tiene que ver con la optimización de un determinado material para construir un objeto determinado.

Hoy en día podemos encontrarnos numerosos ejemplos en la productividad de una empresa para todo tipo de construcciones. Antiguamente también se trabajaba de manera similar en la construcción de distintas estructuras.

Por ello, creemos que es fundamental plantear esta segunda actividad inicial que constituya en razón de ser nuestro objeto matemático a enseñar.

Actividad inicial 2: Una empresa se dedica a forrar el cartón de papel higiénico con un material específico. Para ello se nos presenta un ejemplar del cartón que queremos forrar.

¿Qué cantidad de material será necesario para forrar el cartón?
(Actividad desarrollada en la metodología).

D.4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La manera de introducir la **primera actividad inicial** en el aula, está pensada de tal manera que todos obtengan una información y conocimientos útiles y beneficiosos para afrontar el tema de los cuerpos geométricos.

Hay que tener en cuenta que es la primera actividad propuesta sobre este objeto de estudio. Esto implica que tal vez los conocimientos que tenían de otros años al respecto se hayan olvidado o no estén tan recientes como esperábamos, por lo que no esperamos una ejecución perfecta. Puede que realicen por ejemplo una descripción vaga, inexacta y con falta de un vocabulario correcto.

Por ese motivo, creo que es fundamental que esta tarea deba efectuarse de manera grupal, en la que cada uno pueda aportar sus conocimientos y entre todos lleguemos a unos resultados mucho más productivos.

Así pues, podríamos dividir a nuestros alumnos en varios grupos en los que a cada uno de ellos se les proporciona una serie de objetos de la lista propuesta. Quizás 12 sean muchos para que cada alumno vaya estudiándolo y analizándolo por su cuenta. Por tanto, se asignarán unos 3 objetos por grupo y cada grupo se centrará únicamente en los objetos que les ha tocado.

Entre todos los miembros de cada grupo irán aportando sus ideas, dando sus razones, explicando sus motivos y resolviendo cada una de las preguntas planteadas. Por ejemplo, para los apartados c) y d) los alumnos podrían responder de esta forma:

> *"Asociamos los troncos de madera a los cilindros. Podemos encontrar formas cilíndricas en muchas mesas de escritorio para darle soporte y mantener su estabilidad. Su forma alargada permite situar la mesa a una altura correcta y su reducido diámetro permite que haya suficiente espacio para sentarnos sin que nos molesten los soportes. Por tanto el área de la base tiene que ser pequeña y la altura del cilindro debe ser suficiente".*

Puede que en ocasiones los alumnos tengan alguna dificultad para buscar ejemplos o similitudes con los objetos que les presentamos en el ejercicio. En ese caso podríamos proporcionarles alguna idea. En el ejemplo de los cilindros, podríamos asociarlos a un bolígrafo. Así, algunas de sus respuestas podrían ser:

"Asociamos los troncos de madera a los cilindros. Podemos encontrar formas cilíndricas en los bolígrafos que utilizamos para escribir. Su forma cilíndrica, con sus dimensiones características, permiten que podamos manejar fácilmente este objeto.

Además, la cabeza del bolígrafo tiene forma de cono para poder escribir correctamente y deslizar sin problema el objeto sobre el papel."

Como podemos observar, las respuestas a estas últimas preguntas pueden ser muy variadas, que es en realidad lo que estamos buscando. Proponemos problemas que también tengan una parte más flexible, donde los alumnos puedan razonar sobre determinadas cuestiones y puedas responder de forma más abierta.

Con toda la información obtenida, se procederá a exponer lo que cada grupo ha sacado en claro, de tal manera que enriquezca el aprendizaje de todos, produzca una acumulación de conocimientos y corrección de posibles ideas falsas que pudieran tener.

La labor del profesor será la de guiar y aclarar cuestiones que pudieran surgir, e introducir de esta manera ideas clave de nuestro objeto a enseñar. No obstante, hay cientos de formas en las que podríamos desarrollar esta actividad.

Por último, ha de constar que la metodología que estamos utilizando en este tipo de actividades, así como en otras que propondremos más adelante, están basadas en el modelo de Van Hiele descrito anteriormente, modelo en el que se apoya la estructura de nuestra propuesta y a partir del cual desarrollamos el trabajo.

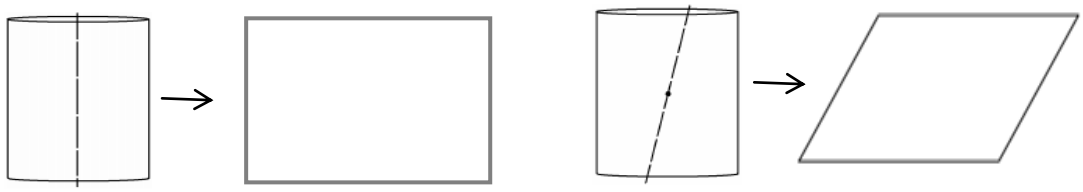
La **segunda actividad inicial** está pensada para relacionar de un modo sencillo la geometría tridimensional con la bidimensional a partir de la manipulación de los cilindros de cartón de papel higiénico.

Para obtener el mayor rendimiento posible al introducir esta actividad, proponemos una secuenciación de tareas que guíen el trabajo de nuestros estudiantes:

1. Les mostramos el cartón de papel higiénico con el que vamos a trabajar y les pedimos que lo describan. Queremos que sean capaces de reconocer el objeto como figura geométrica y conseguir, entre todos, una descripción verbal correcta y completa.

2. Nos centraremos ahora en las medidas del cilindro. ¿Qué medidas lo definen? Esperamos que utilizando una regla o un metro obtengan las medidas correspondientes a la altura del cilindro y al diámetro.

3. Para obtener una plantilla bidimensional de nuestro cilindro vamos a realizar varios cortes. Antes de ello, ¿qué figuras creen que obtendremos si realizamos un corte longitudinal? ¿Y con un corte oblicuo?



Creemos que este tipo de tareas pueden ser muy adecuadas ya que contribuyen verdaderamente a desarrollar la vision geométrica.

4. Es un buen momento para introducir el cáluclo de áreas para obtener finalmente la superficie de material que estábamos buscando. Podemos provocar una discusion sobre si el área de las distintas figuras planas obtenidas anteriormente es el mismo y posteriormente calcularlas.

Como hemos dicho hay infinidad de posibilidades para trabajar esta actividad. Se podría preguntar qué ocurriría si nuestro cilindro tuviera tapas o, por ejemplo, de qué manera se podría obtener un rombo al realizar el corte de nuestro cilindro. En cualquier caso, lo fundamental es trabajar de manera que nuestros alumnos puedan desarrollar al máximo sus capacidades.

E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS Y LAS TÉCNICAS

E.1. Diseña los distintos tipos de problemas y ejercicios que vas a presentar en el aula

Vamos a proponer distintos tipos de problemas para cada uno de los campos de problemas que queremos presentar en nuestra unidad didáctica. La secuenciación de los mismos viene dada por el proceso gradual de adquisición de los conocimientos que creemos que es necesario que los alumnos vayan desarrollando.

Asimismo, presentamos un listado de ejercicios con los que pretendemos reforzar las técnicas necesarias para hacer frente a nuestra propuesta.

Hay que decir que muchas de las técnicas que presentamos en este apartado han sido desarrolladas y utilizadas en los problemas planteados previamente.

CAMPO DE PROBLEMAS 1
Clasificación y descripción de cuerpos geométricos cercanos a la realidad del alumno.

Primero de todo, como hemos hecho en el apartado anterior, trataremos de diseñar varias actividades que constituyan la razón de ser de nuestro objeto matemático de estudio. Para la primera sesión de nuestra unidad didáctica, antes de meternos en materia, creemos que una actividad de este tipo puede resultar motivadora y esencial para después comprender mejor los aspectos a desarrollar.

En el apartado D hemos propuesto una serie de objetos que provienen de la Naturaleza. Una modificación de la actividad podría enfocarse a partir de las construcciones que tenemos hoy en día que se asemejan a cuerpos geométricos. Podría resultar interesante buscar por Internet información sobre las características de la estructura de dichas construcciones.

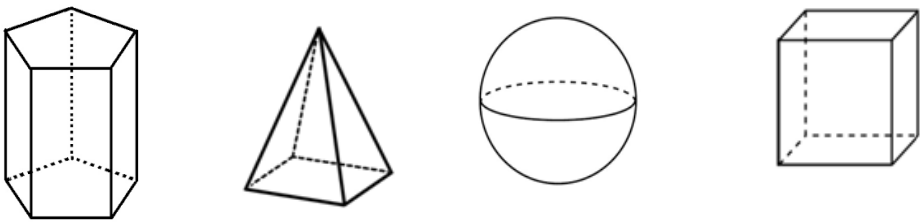
Problema 1: Dada la siguiente lista de construcciones contesta a las siguientes preguntas.

			
Atomium de Bruselas	Torre Agbar	Pirámides de Egipto	Hotel W
			
London Eye	Molino de viento	Torres KIO	Edificio
			
Torre Eiffel	Barrio Eixample	Cúpula Buckminster	Louvre

a) Relaciona estas construcciones con las figuras y cuerpos geométricos que conozcas.
b) Analiza y describe algunas de las propiedades de estos cuerpos.
c) Busca información sobre su estructura.
d) Reflexiona sobre la importancia que la estructura proporciona a la construcción.

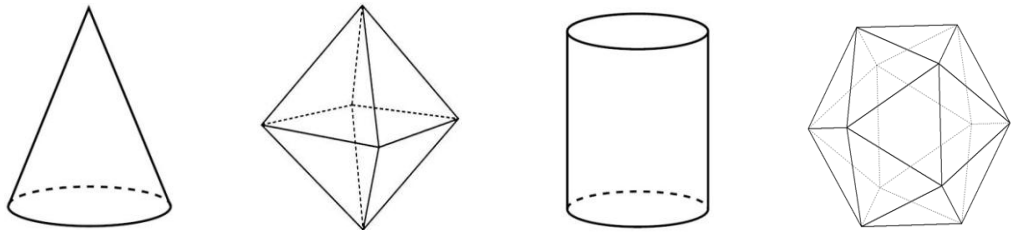
Para identificar correctamente distintos cuerpos geométricos es necesario estudiar y determinar las propiedades que caracterizan a cada uno de ellos. Proponemos una serie de ejercicios que nos ayudará a dar mayor sentido al campo de problemas 1:

Ejercicio 1: Nombra e indica los elementos que componen los siguientes cuerpos geométricos.



Ejercicio 2: Indica cuáles de los cuerpos geométricos del ejercicio anterior son poliedros. ¿Hay alguno regular?

Ejercicio 3: Nombra y determina cuáles de los siguientes cuerpos son de revolución.



CAMPO DE PROBLEMAS 2

Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.

Con los problemas planteados en este segundo campo de problemas pretendemos reforzar aquellos conocimientos que se suponen conocidos de otros cursos. Concretamente queremos hacer hincapié en demostrar de una forma sencilla el área de diversas figuras planas.

Esto puede ser interesante no sólo para recordar la fórmula del área, sino para entender el porqué un triángulo tiene esa área, si es una fórmula que surge de la nada o, por el contrario, tiene una deducción lógica.

Tal vez hasta ahora se hayan limitado a aprender de memoria una serie de propiedades de las figuras planas, fórmulas de áreas, relaciones, etc. Efectuando estos problemas pretendemos que se den cuenta de que detrás de todo esto hay un porqué y una justificación de tales propiedades. También puede que sea útil para razonar y cuestionarse, a partir de entonces, el significado de distintos objetos matemáticos.

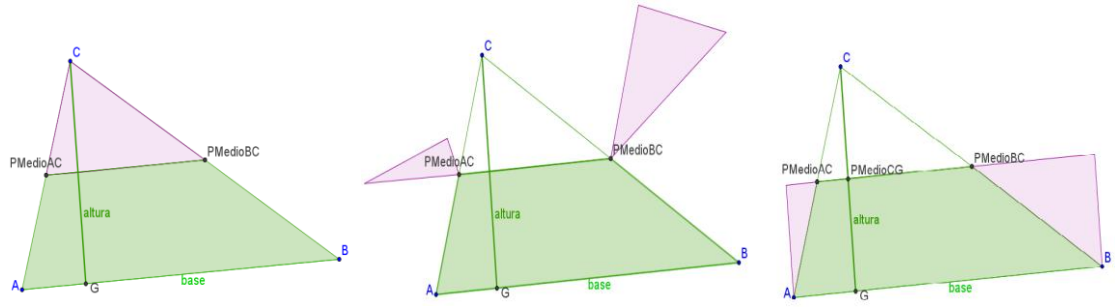
Problema 2: Deduce la fórmula del área de un triángulo

Para ello sigue los siguiente pasos:

- Dibuja un triángulo cualquiera.
- Traza una altura.
- Calcula el punto medio de la altura y una perpendicular que pase por tal punto.
- Analiza los polígonos que te quedan formados por intersección de los

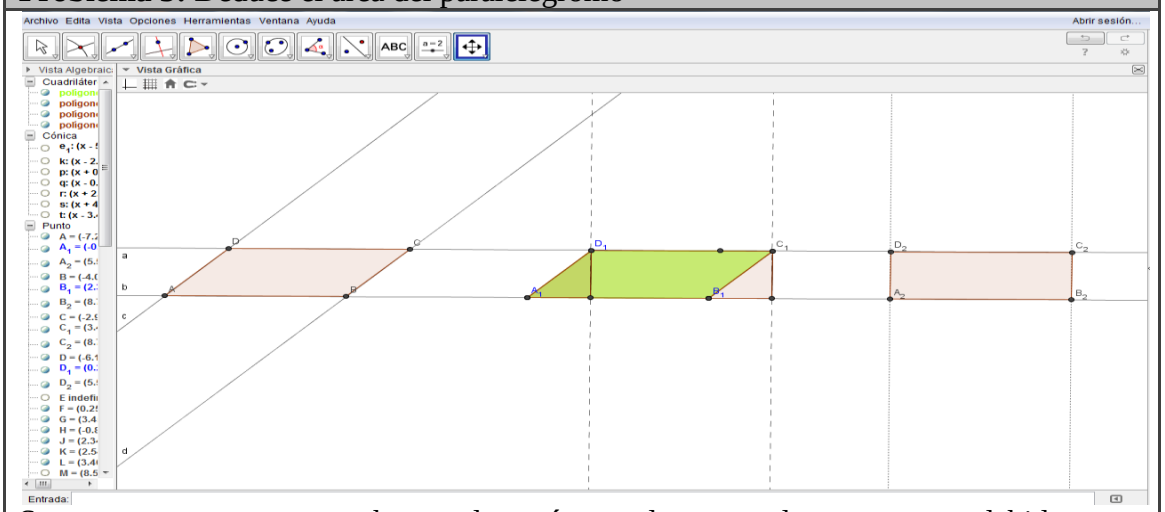
segmentos.
A partir de ahí deduce la fórmula del área del triángulo.

Este es un problema simple que podría hacerse con papel y tijeras, aunque quizás sea más visual y eficaz si utilizan Geogebra. Pueden añadir un deslizador en el que vean como los triángulos superiores completan el rectángulo inferior de la siguiente forma:



Una vez analizado el ejemplo para determinar el área de un triángulo, nuestros alumnos pueden utilizar este mismo razonamiento para calcular el área de otros polígonos. Por lo tanto, pueden proponerse ejercicios para el refuerzo de esta técnica:

Problema 3: Deduce el área del paralelegromo



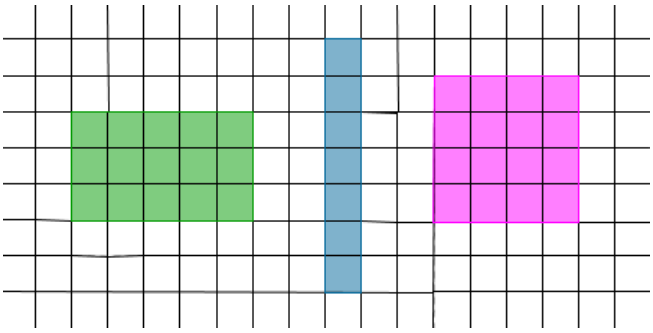
Se espera que en este caso hagan algo así y ayude a entender que esto es debido a que los lados opuestos son iguales y paralelos dos a dos. De esta manera podemos trazar un triángulo rectángulo y desplazarlo formando un rectángulo, cuya área conocemos.

Evidentemente se podría proponer de la misma forma deducir el resto de áreas de figuras planas como el círculo, el rombo, el trapecio o el área de polígonos regulares.

Otro aspecto que quería introducir en este campo de problemas es el de perímetro. Muchas veces suele confundirse área con perímetro, por lo que propondremos una serie de problemas para intentar aclarar estas ideas.

Problema 4: Área VS perímetro

En una cuadrícula de 1$\mathbf{cm^2}$ se presentan las siguientes figuras:

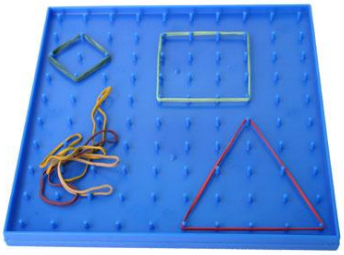


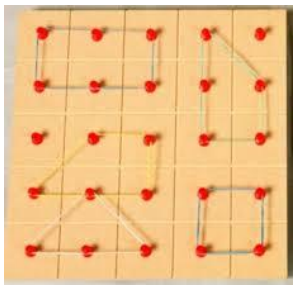
- Calcula el perímetro de todas ellas.
- ¿Tienen todas el mismo área?
- ¿Cuándo crees que se obtiene el mayor área posibles?

Problema 5: Área VS perímetro

Dibuja varias figuras con un área todas ellas de 9$\mathbf{cm^2}$ pero distintos perímetros.

Para estas actividades se les propone trabajar con un material concreto: el **GEOPLANO**.





El geoplano es un material didáctico que puede ser de diversas formas. El más común sea quizás el que distribuye de manera equidistante una cierta cantidad de clavos sobre su superficie cuadrada. Se puede acompañar por gomas elásticas de distintos tamaños y colores que ayuden a diferenciar las líneas, permitiendo así que se superpongan varias figuras.

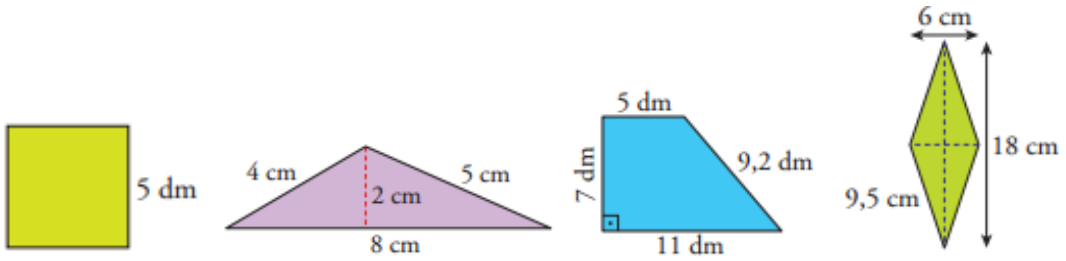
En el problema 4 puede usarse, por ejemplo, un hilo o algún material similar que no se estire, ya que estamos trabajando con polígonos que tienen un perímetro constante.

Por otro lado, una técnica fundamental que hemos utilizado para calcular o deducir el área de figuras planas conocidas, tiene que ver con la composición y descomposición de determinadas figuras planas en otras ya conocidas. Así, para el cálculo del área del triángulo o del paralelogramo, transformábamos nuestra figura en un rectángulo y de ahí deducíamos su área.

Utilizando este razonamiento con ligeras modificaciones, aprendemos una técnica que nos servirá para aplicar este procedimiento a situaciones similares.

Es fundamental, antes de enfrentarnos a problemas de este tipo, tener un dominio del cálculo de áreas y perímetro en figuras planas sencillas. Por esta razón, planteamos el siguiente ejercicio:

Ejercicio 4: Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras.



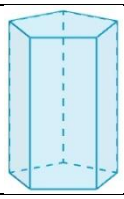
CAMPO DE PROBLEMAS 3

Deducción de la fórmula de Euler

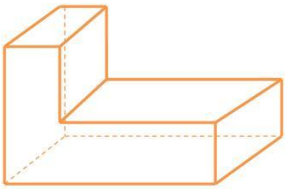
Una vez conocidos los cuerpos geométricos, es interesante que reflexionen sobre algunas de sus propiedades geométricas y las relaciones existentes entre los elementos que componen el cuerpo. Para ello, proponemos la siguiente actividad:

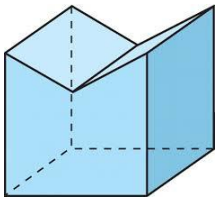
Problema 6: Determina la fórmula de Euler

a) Completa la siguiente tabla y determina la relación existente entre los elementos que componen cada uno de estos cuerpos.

Poliedros	Nº Caras	Nº Vértices	Nº Aristas	PISTAS	
Octaedro				+2	Louvre de París
Prisma pentagonal				+2	
Pirámide triangular				+2	Una única base triangular

b) Comprueba si se cumple para la siguientes figuras:





Para la construcción de alguno de estos cuerpos puede ser interesante utilizar **POLYDRON (CREATOR)**. Se trata de un material compuesto de piezas de plástico que se pueden ensamblar permitiendo construir figuras en dos dimensiones y volúmenes o cuerpos geométricos.

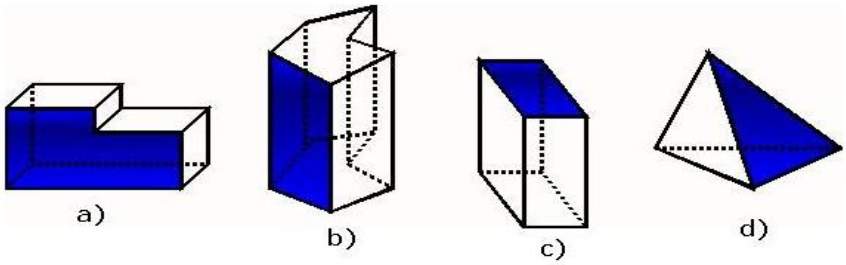
La principal utilidad didáctica de este material reside en que se pueden hacer y deshacer las figuras, trabajando en su desarrollo.

En el problema que acabamos de plantear hemos visto una técnica fundamental como es la de utilizar métodos inductivos para formular conjeturas sobre propiedades geométricas. Para ello, hemos calculado el número de caras, aristas y vértices y hemos tratado dar sentido a todo eso mediante alguna relación que se cumpliera en todos los casos.

Es importante analizar e identificar los distintos cuerpos que se nos presenta, determinar sus propiedades y si es posible clasificarlos con todo lo que podamos saber de ellos.

Para reforzar esta técnica presentamos el siguiente ejercicio:

Ejercicio 5:
Estudia y describe las siguientes figuras. Por ejemplo, clasifícalos en cóncavos y convexos, indica si son cuerpos geométricos conocidos, número de caras, aristas, vértices, etc.

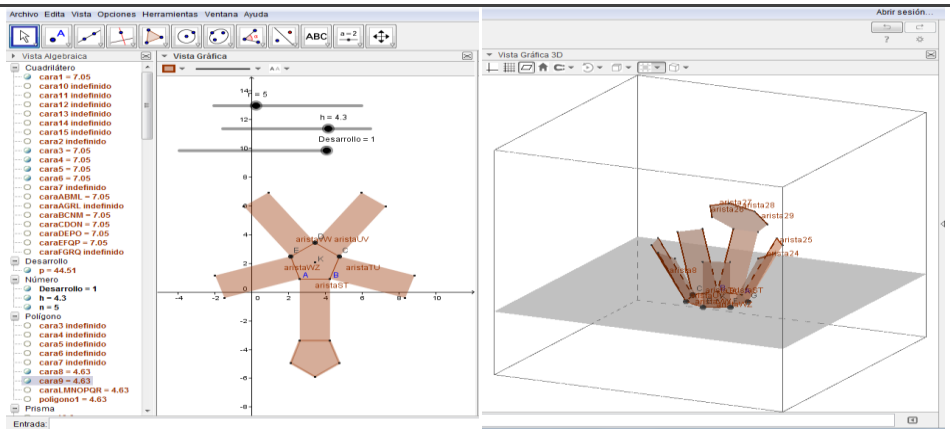


CAMPO DE PROBLEMAS 4

Construcción de cuerpos geométricos a partir de distintos desarrollos planos.
Determinar el desarrollo plano dado un cuerpo.

Cada vez vamos más allá en el desarrollo de la unidad didáctica. Para este campo de problemas será imprescindible ser capaz de descomponer figuras, de manera que podamos conocer el desarrollo plano de un cuerpo. De la misma manera, dados diferentes desarrollos planos tendremos que ver a qué figura de las estudiadas corresponde.

Problema 7: Construcción de desarrollos planos
Dibuja el desarrollo plano de un prisma regular en función del polígono de su base. Utiliza para ello Geogebra.

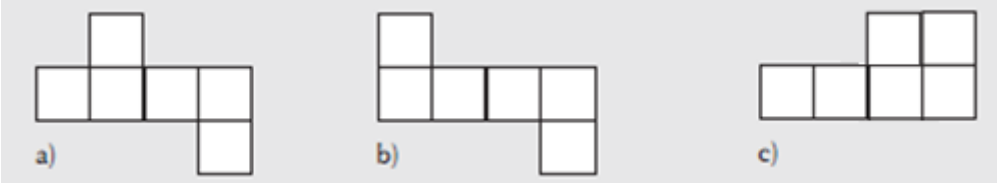


Se espera que con nuestra ayuda consigan algo así. Hay tres tipos de deslizadores en la figura:

- Para cambiar el número de lados de la base.
- Para cambiar la altura del cuerpo.
- Para cambiar de cuerpo geométrico en 3D a desarrollo plano.

Problema 8: Construcción de cuerpos geométricos

Determina si, antes de colocar las pestañas, se puede construir un cubo con las siguientes plantillas:

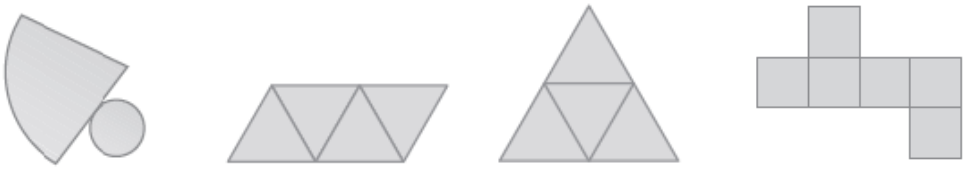


Para este campo de problemas se presentan varias técnicas.

En primer lugar, debemos trabajar con nuestros alumnos la técnica de construir distintos cuerpos geométricos dados distintos desarrollos planos. Puede ser útil trabajar con varias plantillas en las que determinen si es posible formar algún cuerpo o no. También pueden utilizarse para estos casos POLYDRON.

Ejercicio 6: Construcción de cuerpos geométricos

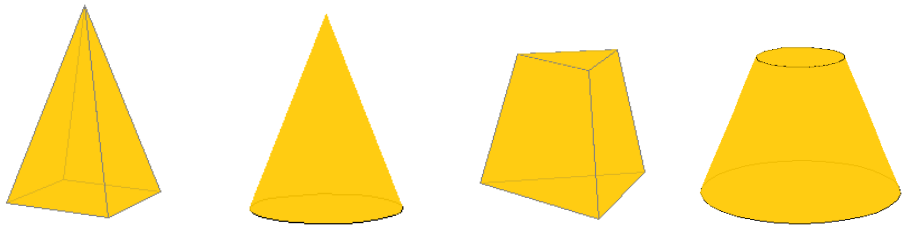
Indica a qué cuerpo corresponden los siguientes desarrollos planos:



Por otra parte, es igualmente importante adquirir habilidad en representar el desarrollo plano de cuerpos geométricos. Esta técnica será fundamental para el cálculo de áreas que estudiaremos en el próximo apartado.

Ejercicio 7: Construcción de desarrollos planos

Determina el desarrollo plano de los siguientes cuerpos geométricos



CAMPO DE PROBLEMAS 5

Resolución de problemas que impliquen la estimación y cálculo de longitudes, áreas o superficies

Para este apartado será imprescindible aplicar todo lo aprendido hasta ahora. Trataremos de resolver problemas frecuentes en los que es necesario el cálculo de áreas de cuerpos geométricos.

Problema 9: Cálculo de áreas y superficies

Se quiere tratar dos depósitos con pintura antioxidante. Los depósitos tienen 7.3 metros de alto y 9.7 metros de radio de la base. El precio por pintura de cada metro cuadrado es de 39 euros. ¿Cuál es el precio final de la pintura, sabiendo que sólo se pinta la base superior y la parte externa de cada uno?

Problema 10: Cálculo de áreas y superficies

Una empresa se dedica a forrar distintos productos. El último trabajo solicitado consiste en fabricar un envoltorio para una caja de bombones de forma de prisma triangular de 21 cm de largo y 3 cm de lado de la base. ¿Cuál es la cantidad de papel mínimo que se necesita para envolver la caja?

Para este campo de problemas las técnicas que utilizaremos son muy diversas. Pueden ser necesarias las técnicas descritas en el campo anterior, como la construcción del desarrollo plano que nos facilite el cálculo de áreas.

Podemos encontrarnos diversos problemas en los que se desarrolla una figura formada por varios cuerpos geométricos. En situaciones de este tipo será fundamental descomponer la figura en cuerpos más simples y resolver el problema por partes, teniendo especial cuidado con las caras comunes en la descomposición para no contarlas dos veces.

Otra de las técnicas fundamentales que desarrollaremos, tiene que ver con la aplicación del Teorema de Pitágoras para obtener longitudes necesarias para la resolución de nuestros problemas. Esta técnica se ha visto en capítulos anteriores de este mismo curso, por lo que no la desarrollaremos en esta unidad didáctica.

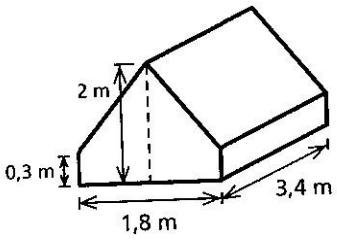
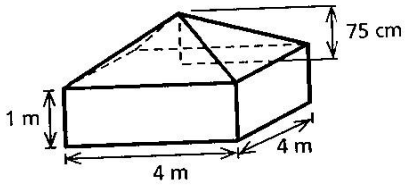
La última que queda por señalar, simplemente trata de hallar la superficie total del cuerpo a través de las sumas parciales de áreas planas (áreas laterales y bases).

Ejercicio 8: Descomponer en cuerpos más sencillos.

Dada la siguiente estructura:

a) Identifica cada uno de los cuerpos que componen la figura.
b) Realiza los desarrollos planos de los cuerpos obtenidos.

Ejercicio 9: Utiliza el teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes
La base de un prisma es un hexágono de 5cm de lado y su altura es de 7cm. a) Halla la apotema de la base.

Ejercicio 10: Cálculo de áreas y superficie total.
Calcula el área total de las siguientes figuras.    

CAMPO DE PROBLEMAS 6

Construcción de un cuerpo geométrico

Finalmente, para este último campo de problemas queremos que los alumnos creen una figura mediante la combinación de diversos cuerpos geométricos. Pueden utilizar el material que quieran, como la madera, unas cartulinas o lo que ellos consideren oportuno. Cuando lo terminen se hará una breve exposición con los proyectos creados.

Un posible ejemplo podría ser la construcción de un reloj de arena. A continuación les proporcionaremos la lista de cuerpos geométricos que deben construir para su fabricación:

- Dos bases con forma de prisma rectangular.
- Cuatro cilindros a modo de soporte.
- Dos recipientes de forma cónica.

Se puede facilitar el trabajo añadiendo las medidas exactas de cada cuerpo, los materiales necesarios para su fabricación, el tipo de herramientas necesarias que utilizaremos y los pasos más detallados a seguir para la construcción de nuestro reloj.

E.2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

La propuesta de estos campos de problemas está diseñada para que finalmente sean capaces por ellos mismos de hacer frente a distintos tipos de problemas y razonamientos.

No esperamos que en un principio puedan responder de forma correcta a lo que se propone. Intentamos seguir un desarrollo gradual en el estudio de nuestro objeto matemático. Así, desde un primer momento irán apareciendo conceptos, razonamientos y formas de enfrentarse a un ejercicio, que posteriormente habrá que ajustar para resolver otros ejercicios similares.

De este modo, intentaremos evitar la simple resolución sistemática por repetición de ejercicios idénticos con datos distintos, y que esto sirva para afianzar realmente los conocimientos y producir un buen desarrollo del aprendizaje.

E.3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Primero trataremos de proponer una serie de problemas cerrados para introducir cada uno de los objetos de estudio. En este tipo de problemas es fundamental la comunicación entre los alumnos de las distintas ideas que vayan surgiendo.

A continuación se propondrán una serie de problemas o ejercicios más abiertos, en los que será necesario aplicar lo que se ha visto con anterioridad, pero desde otro punto de vista o utilizando unos razonamientos similares, con el objetivo de reforzar los conceptos. En este tipo de ejercicios esperamos encontrar respuestas variadas en las que no existe una única solución como válida.

Finalmente, y cuando sea necesario, profesor y/o alumnos procederán a institucionalizar lo que se ha trabajado. Se pone nombre, se aclaran o se explican detalladamente aquellos aspectos que han ido surgiendo a lo largo de las actividades propuestas, para transformar en conocimiento lo que nuestros alumnos han aprendido.

Como podemos observar, la metodología a seguir guarda una gran similitud con el modelo de Van Hiele ya descrito. Somos conscientes que no en todas las actividades

podemos llevar esto a cabo. Sin embargo, en la medida de lo posible, hemos intentado proponer actividades que sigan el estilo de este modelo y dejen a un lado la metodología tradicional utilizada que criticamos, asimismo, en este trabajo.

Hay que añadir que nuestra propuesta didáctica está diseñada para proporcionar un aprendizaje continuo y formativo. Exponemos a continuación una serie de principios en los que nos hemos basado para su desarrollo:

- Queremos potenciar el trabajo colaborativo entre alumnos, ya sea en grupos o por parejas. Esto es fundamental para el intercambio de ideas, la expresión entre iguales y mejora del trabajo en equipo. De esta manera, se crea también un ambiente de confianza que fomenta la participación de la mayoría de los estudiantes.

- Potenciar el trabajo autónomo del alumno. Es fundamental que profundicen en distintos aspectos de la geometría, busquen información, indaguen…

- Se ha intentado siempre que los propios alumnos sean los que resuelvan los problemas planteados y expliquen sus procesos de resolución a sus compañeros. Es importante dedicar especial atención en el uso del lenguaje geométrico apropiado y a encontrar y discutir distintos procedimientos de resolución. También a la comprobación y formalización de la solución obtenida. El papel del profesor en este tipo de actividades consiste en orientar y guiar a los alumnos, dejando la iniciativa en sus manos. Se ha tratado de fomentar la autoconfianza para que superen el temor al error y su dificultad de explicar apropiadamente los procedimientos seguidos.

- Por último, es fundamental utilizar recursos manipulativos, tanto materiales como virtuales. La gran mayoría del alumnado no conoce la importancia de utilizar estos recursos. Por eso es preciso que ellos mismos los utilicen y manipulen para entender su utilidad y posibles aplicaciones.

F. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS (JUSTIFICACIÓN DE LAS TÉCNICAS)

F.1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Como hemos expuesto en el cuadro del apartado A, las tecnologías que justifican las técnicas asociadas a cada uno de los campos de problemas son las siguientes:

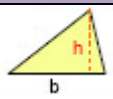
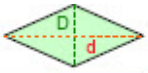
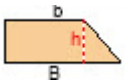
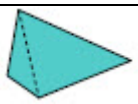
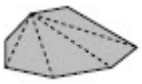
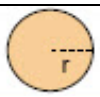
- Utilización de definiciones, propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.
- Uso de razonamientos deductivos para validar alguna afirmación o propiedades de figuras planas sencillas.
- Justificaciones basadas en resultados teóricos.
- Conservación del área: la suma parcial de áreas de figuras más sencillas es igual al área total de la figura compuesta.
- Justificaciones geométricas para demostrar determinados resultados.

Para el campo de problemas "Clasificación y descripción de cuerpos geométricos cercanos a la realidad del alumno" nos basamos en la simple descripción de determinadas figuras, como pueden ser elementos que encontramos en la Naturaleza o en distintas construcciones. A partir de la observación y recurriendo a su definición, analizamos sus regularidades y de ahí deducimos una serie de propiedades características de ese tipo de objeto en concreto, agrupándolo de tal manera con otros que comparten características similares.

En el cálculo de áreas de determinadas figuras simples utilizamos una serie de razonamientos deductivos para dar validez a las fórmulas que determinan su área. Por ejemplo, en el caso del área de un triángulo, a través de un sencillo ejercicio, deducíamos que ésta era la mitad que el área de un rectángulo.

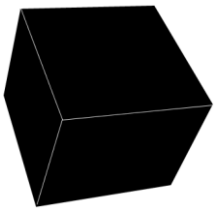
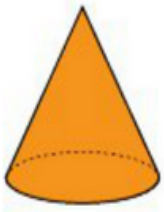
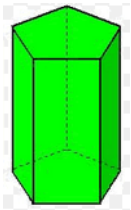
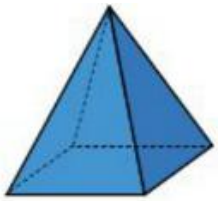
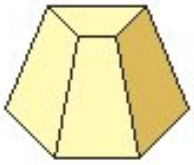
Asimismo, hay que hacer referencia a las fórmulas del área y perímetro de figuras planas sencillas. Para el perímetro de figuras planas vamos a recurrir únicamente a su definición. El perímetro de una figura plana será igual a la suma de las longitudes de sus lados.

Para las fórmulas de áreas de figuras planas proponemos la siguiente tabla:

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	NOMBRE		FIGURA	ÁREA
	Triángulo			$A = \frac{b \cdot h}{2}$
	Paralelogramos	Cuadrado		$A = l^2$
		Rectángulo		$A = b \cdot h$
		Rombo		$A = \frac{D \cdot d}{2}$
		Romboide		$A = b \cdot h$
	Trapecio			$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$
	Trapezoides			Se divide en dos triángulos y se suman sus áreas.
	Polígonos de n lados	Polígono regular		$A = \frac{P \cdot a}{2}$
		Polígono irregular		Se divide en triángulos y se suman sus áreas.
	Círculo/Circunferencia			$A = \pi \cdot r^2$ $L = 2 \cdot \pi \cdot r$

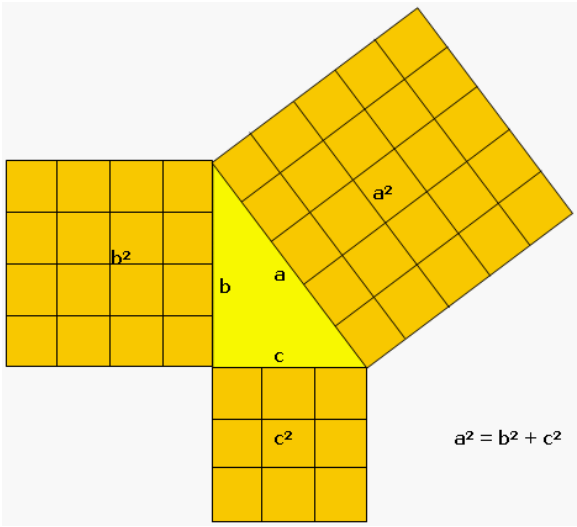
Para la deducción de la fórmula de Euler utilizábamos métodos inductivos para formular conjeturas sobre determinadas propiedades geométricas. En particular, que el número de caras más el número de vértices, es igual al número de aristas + 2.

Por otro lado, para la resolución de problemas que impliquen la estimación y cálculo de longitudes o superficies utilizábamos la descomposición de figuras geométricas en cuerpos más sencillos. Así, conocidos estos cuerpos, podíamos calcular sus áreas laterales y totales por el principio de conservación de las áreas, es decir, la suma parcial de áreas de figuras más sencillas es igual al área total de la figura compuesta:

ÁREA DE CUERPOS GEOMÉTRICOS			
CUBO 	$A = 6 \cdot A_L$ $A_L = l^2$	**CONO** 	$A_T = A_B + A_L$ $A_B = \pi \cdot r^2$ $A_L = \pi r \cdot g$ g = generatriz del cono
PRISMA 	$A_T = 2 \cdot A_B + A_L$ A_B = depende del polígono de la base. $A_L = b \cdot h$	**TRONCO DE CONO** 	$A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$ $A_{B1} = \pi \cdot R^2$ $A_{B2} = \pi \cdot r^2$ $A_L = \pi \cdot (r + R) \cdot g$
CILINDRO 	$A_T = 2 \cdot A_B + A_L$ $A_B = \pi \cdot r^2$ $A_L = 2\pi r \cdot h$	**PIRÁMIDE** 	$A_T = A_B + A_L$ A_B = depende del polígono de la base. $A_L = \frac{P_B \cdot Ap}{2}$ P_B = perímetro de la base Ap = apotema de la pirámide
ESFERA 	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	**TRONCO DE PIRÁMIDE** 	$A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$ $A_{B1}\ y\ A_{B2}$ = dependen del polígono de la base. $A_L = \frac{P_{B1} \cdot P_{B2}}{2} \cdot Ap$ P_{B1} = perímetro de la base mayor. P_{B1}= perímetro de la base menor. Ap = apotema del tronco de pirámide.

Por último, podemos demostrar determinados resultados mediante distintas justificaciones geométricas. Es el caso, por ejemplo, del teorema de Pitágoras. Para demostrar que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, utilizamos que el área del cuadrado, entendido

como figura plana, construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.



F.2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Hay que decir que es frecuente en la práctica actual de las matemáticas que no se justifiquen las técnicas. Ya no estamos hablando solo de una ausencia de tecnología en los libros, sino también por parte de los docentes.

Es por ello que en gran cantidad de ocasiones los alumnos no sean capaces de hacer frente a determinadas situaciones.

Creo que es imprescindible hacer una buena elección del material didáctico que pretendemos llevar al aula para intentar introducir este tipo de justificaciones. Nuestros alumnos han de ser quienes, con nuestra ayuda, sean capaces de demostrar determinadas propiedades, justificar algunos resultados y entender un poco el por qué de las cosas.

Como hemos dicho, es habitual escuchar en las aulas expresiones del tipo *"Esto es así y hay que aprenderlo de esta manera"*. También hemos podido observar, como hemos hecho en el apartado B, que en distintos libros de texto aparecen enunciados como *"Hazlo de este modo"*.

Esto supone un grave problema, que entra en contradicción directamente con lo que estamos promoviendo aquí. De esta forma queda limitada completamente la

iniciativa del estudiante por descubrir por sí mismo determinados aspectos y propiciar unos razonamientos adecuados.

Debemos empezar a cambiar esta situación, dando más libertad a nuestros alumnos, ayudándoles, guiándoles, puesto que no es tarea fácil, y justificando aquellas técnicas que requieran una comprensión más compleja con nuestra intervención.

F.3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático

Para diseñar un adecuado proceso de institucionalización de los distintos aspectos de nuestro objeto matemático de estudio hacemos referencia a los contenidos que aparecen en el Boletín Oficial de Aragón, en la Orden de 9 de Mayo de 2007, correspondiente al bloque de Geometría de 2º E.S.O.

Ahí encontramos de forma secuenciada cada uno de los aspectos que tenemos que incluir en nuestra propuesta didáctica. Aspectos que debemos presentar y trabajar para que finalmente formen parte de los conocimientos adquiridos por nuestros alumnos. En el apartado A incluimos tales contenidos y aspectos a institucionalizar.

F.4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología a seguir es la que hemos explicado hasta ahora. Mediante diversos ejercicios se promueve el trabajo autónomo y colaborativo de nuestros alumnos, que sean ellos mismos los que resuelvan los problemas planteados y discutan los distintos procedimientos de resolución existentes.

Nuestra función será la de orientar y guiar a los alumnos e institucionalizar y formalizar, cuando sea necesario, aquellos aspectos que vayan surgiendo, resolviendo las dudas o problemas que pudieran existir, modificando o ajustando problemas a situaciones distintas y, de este modo, garantizar y proporcionar un aprendizaje de calidad.

G. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

G.1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores

Indicar únicamente que la secuenciación de actividades está ajustada al campo de problemas y trabajo de la técnica que hemos propuesto durante la unidad didáctica.

Además, en las últimas sesiones se realizará una encuesta de satisfacción donde los propios alumnos expondrán su propia opinión sobre el transcurso de la unidad, si han podido seguirla con facilidad, dificultades, aspectos positivos, negativos a destacar, a modificar y una valoración general del trabajo realizado a lo largo de las sesiones.

Por último, indicar que el día después de la realización del examen, se entregarán los resultados, se resolverán dudas y se propondrá a los alumnos que resuelvan y entreguen, para el próximo día, aquellos ejercicios en los que han obtenido una puntuación de la mitad o inferior de la puntuación total asignada.

Pretendemos con esta última tarea que afiancen aquellos conceptos que no habían asimilado hasta entonces, que se den cuenta de sus errores y en definitiva que aprendan. Para motivar esta tarea se les podrá redondear la nota final del examen en medio punto.

Dicho esto, para la secuenciación de actividades hemos realizado el cuadro que exponemos a continuación:

SECUENCIACIÓN DE LAS ACTIVIDADES		
Nº SESIÓN	**ACTIVIDADES**	**TEMPORA-LIZACIÓN**
1	- Introducción de nuestro objeto matemático. Explicación de la forma de trabajar durante la unidad didáctica. - Evaluación inicial.	30 minutos 30 minutos
2	- Comentar los resultados de la evaluación inicial y aclarar conceptos erróneos. - Breve introducción a las actividades iniciales que constituyen la razón de ser de nuestro objeto de estudio (Cuerpos geométricos en la Naturaleza e introducción al cálculo de áreas y desarrollos planos en problemas).	30 minutos 30 minutos
3	- **CP1**. Clasificación y descripción de cuerpos geométricos cercanos a la realidad del alumno:	

	• Problema 1 (Cuerpos geométricos en construcciones). • Ejercicios 1, 2 y 3 (Identificar cuerpos geométricos. Estudiar y determinar sus propiedades).	30 minutos 30 minutos
4	- **CP2**. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas: • Problema 2 (Deduce el área del triángulo). • Problema 3 (Deduce el área del paralelogramo).	 30 minutos 30 minutos
5	- **CP2**. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas: • Problemas 4 y 5 (Áreas y perímetro con Geoplano). • Ejercicio 4 (Áreas y perímetro de figuras simples).	 40 minutos 20 minutos
6	- **CP3**. Deducción de la fórmula de Euler: • Problema 6 (Determinar la fórmula de Euler). • Ejercicios 5 (Euler con figuras, dibujos).	 40 minutos 20 minutos
7	- **CP4**. Cuerpos geométricos y desarrollos planos: • Problema 7 (Desarrollos planos con Geogebra). • Problema 8 (Construcción de cuerpos geométricos) • Ejercicios 6 y 7 (Construcciones y desarrollos con papel, plantillas y Polydron)	 20 minutos 10 minutos 30 minutos
8	- **CP5**. Resolución de problemas que impliquen la estimación y cálculo de longitudes, áreas o superficies: • Problemas 9 y 10 (Cálculo de áreas). • Ejercicio 8 (Descomposición de figuras en cuerpos más sencillos). • Ejercicio 9 (Aplicación del teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes).	 30 minutos 20 minutos 10 minutos
9	- **CP5**. Resolución de problemas que impliquen la estimación y cálculo de longitudes, áreas o superficies: • Ejercicio 10 (Cálculo de áreas y superficie total). - Breve repaso de la unidad.	 30 minutos 30 minutos
10	- **CP6**. Exposición de trabajos: Construcción de un cuerpo geométrico. Evaluación de satisfacción.	 1 hora
11	- **Evaluación final.**	1 hora
12	- Entrega de resultados, corrección de dudas y propuesta de la última tarea.	 30 minutos

G.2. Establece una duración temporal aproximada

La temporalización expuesta en la tabla anterior se ajusta a doce sesiones de una hora aproximadamente cada una.

Nuestra unidad didáctica está diseñada para efectuarse en unas tres semanas de curso dependiendo, por supuesto, de los imprevistos que pudieran surgir o modificaciones durante el desarrollo de la misma por dedicar más o menos tiempo a determinados aspectos.

H. SOBRE LA EVALUACIÓN

H.1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos

Uno de los aspectos más importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje es la evaluación. Es interesante realizar esta actividad no solo porque nos informa de los avances y dificultades de nuestros estudiantes, sino también porque nos permite conocer los resultados de nuestra metodología empleada en la enseñanza y, por tanto, hacer las correcciones oportunas.

La evaluación es un proceso integral del progreso académico de nuestros alumnos que informa sobre sus conocimientos, habilidades, intereses, hábitos de estudio, etc. Es un método que permite obtener y procesar información relevante para mejorar el aprendizaje y la enseñanza.

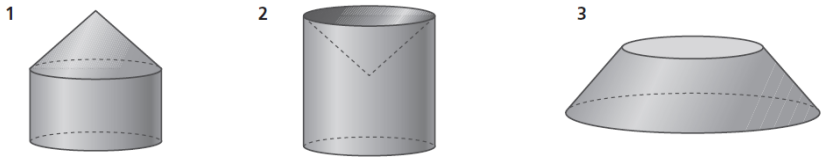
Para medir la evaluación podemos utilizar varios recursos. Podemos efectuar pruebas escritas, orales, un conjunto de tareas o actividades, trabajos, exposiciones…

A continuación, para este apartado, presentamos una propuesta de evaluación basada en una prueba escrita que se ajusta a los contenidos presentados en nuestra unidad didáctica:

EXAMEN DE MATEMÁTICAS. CUERPOS GEOMÉTRICOS. 2º E.S.O.

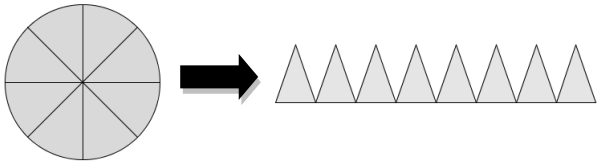
1. Para animar a sus equipos, Juan y Marta hacen girar sus banderines.

a) Señala cuál de los siguientes cuerpos geométricos se obtiene al hacer girar el banderín de cada niño.

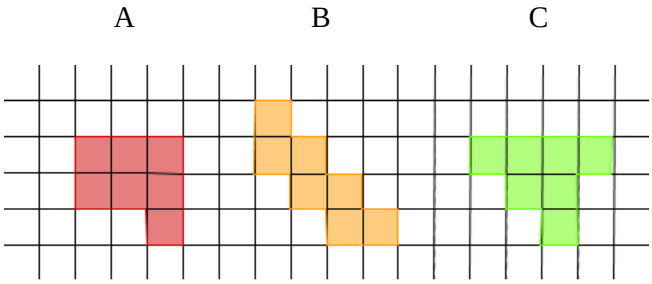


b) De las opciones anteriores, la que no se obtiene al hacer girara el banderín de Juan ni el de Marta es, sin embargo, el cuerpo geométrico que resulta al hacer girar el trapecio ABCD alrededor de otro de sus lados. ¿De qué lado se trata?

2. Ayudándote de la siguiente imagen y sabiendo que la longitud de la circunferencia es $P = 2\pi\frac{3}{2}$, determina de manera aproximada, que no exacta, el área del círculo.



3. Dada la siguiente cuadrícula de $1cm^2$:



- Construye una figura plana con el área de A y distinto perímetro.

- Construye una figura plana con el perímetro de C y el área de B.

- Determina la relación área/ perímetro de las figuras A, B y C.

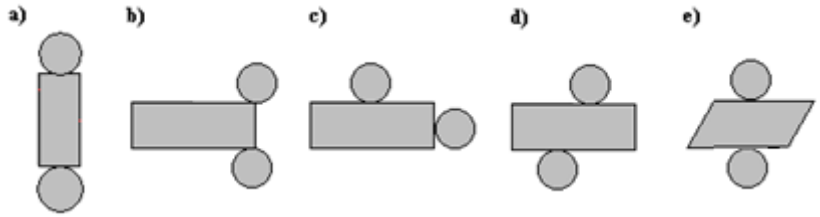
4. En la tabla se muestran algunos datos de poliedros convexos. Complétala, dibuja cada uno de ellos y comprueba que se verifica la fórmula de Euler.

Poliedros	Nº Caras	Nº Vértices	Nº Aristas	PISTA
A	4		6	Cubo / cono / tetraedro / prisma triangular / cilindro
B		8	12	
C	5	6		

Nota: En la pista sobran dos cuerpos geométricos y sólo tres de ellos corresponden a los poliedros A, B y C.

5. Pedro tiene una caja de zapatos vieja y la quiere forrar con un papel nuevo que le han regalado. Las medidas de la base son de 16 cm de ancho por 30 cm de largo. La altura es de 12 cm. Indica el nombre del cuerpo geométrico que forma la caja de zapatos y determina el desarrollo plano (con las medidas) que debe construir en el papel para forrar la caja.

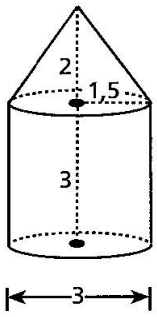
6. ¿Cuáles de las siguientes figuras hacen referencia al desarrollo plano de un cilindro? Justifica tu respuesta.



7. El desarrollo de un cubo está compuesto por seis cuadrados unidos por aristas, formando una figura plana que se denomina **hexaminó**.

Sabiendo que hay hexaminós que son desarrollos del cubo y otros que no, dibuja dos hexaminós distintos que sean desarrollos del cubo y dos que no lo sean.

8. Para las fiestas del Pilar han montado una carpa similar a la que se muestra en la siguiente figura. Calcula la superficie de tela necesaria para su fabricación si las medidas están expresadas en metros.



Nota: Todas las preguntas valen lo mismo. Dispones de 1 hora para resolver el examen.

H.2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

La selección de problemas que componen la prueba escrita no ha sido elegida al azar, como tampoco lo ha sido la disposición de éstos en la misma.

Con cada uno de los problemas pretendemos evaluar los distintos aspectos que el alumno ha debido adquirir a lo largo de nuestra unidad didáctica. Asimismo, esto nos servirá para conocer las dificultades que han tenido, los errores más frecuentes e incluso nos ayudará a nosotros mismos para desarrollar en un futuro una propuesta didáctica más adecuada.

Para hacer un estudio más exhaustivo, hacemos referencia a las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales objeto de evaluación de cada una de las preguntas de la prueba escrita propuesta:

ASPECTOS DEL CONOCIMIENTO QUE SE PRETENDE EVALUAR

P. Nº	TAREAS PRINCIPALES	TAREAS AUX. ESPECÍFICAS	TAREAS AUX. GENERALES
1	Identificar correctamente los cuerpos de revolución que surgen al girar los banderines sobre un eje concreto.	Identificar el eje sobre el que tiene que girar el banderín para obtener otras figuras.	Utilizar un lenguaje y una terminología adecuada.
2	Interpretar correctamente el problema y descomponer el círculo en una figura más sencilla que guarda relación con el rectángulo.	Determinar las medidas de los lados de la nueva figura y calcular su área.	Resolución operativa del problema correcta.
3	Calcular y saber diferenciar los conceptos de área y perímetro en figuras planas.	Construir distintas figuras con un área y perímetro concreto.	Utilizar un lenguaje y una terminología adecuada. Resolución operativa correcta.
4	Identificar distintos cuerpos geométricos en función del nº de caras, aristas y vértices. Conocer la fórmula de Euler.	Dibujar correctamente cada cuerpo geométrico.	Utilizar un lenguaje y una terminología adecuada.
5	Interpretar correctamente el problema. Determinar la estructura de un cuerpo geométrico y su desarrollo plano correspondiente.	Identificar las medidas correspondientes en el desarrollo plano.	Utilizar un lenguaje y una terminología adecuada. Resolución operativa correcta.
6	Identificar el tipo de	Justificar	Utilizar un lenguaje y

	desarrollo plano que pertenece al cilindro.	correctamente cada uno de los casos.	una terminología adecuada.
7	Construir y diferenciar distintos desarrollos planos que pertenezcan al cubo de otros que no pertenezcan.	Interpretar correctamente el término hexaminó.	Utilizar un lenguaje y una terminología adecuada.
8	Interpretar correctamente el problema e identificar los cuerpos geométricos, o partes, que intervienen.	Identificar las técnicas necesarias para la solución del problema (cálculo de longitudes, áreas o superficie).	Utilizar un lenguaje y una terminología adecuada. Resolución operativa correcta.

H.3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Hay que ser consciente de que las respuestas a cada una de las preguntas que planteamos en la prueba escrita puedes ser muy variadas. No podemos admitir una única respuesta como la únicamente correcta o verdadera.

Por ello, debemos analizar cada una de las respuestas que nuestros alumnos proporcionen e identificar si han adquirido los conocimientos básicos que esperábamos que adquirieran.

Dicho esto de una forma muy general, haremos a continuación un listado con las respuestas más adecuadas que podríamos esperar de nuestros alumnos, así como los posibles errores que podrían cometer en cada una de las preguntas:

RESPUESTAS Y ERRORES QUE ESPERAMOS DE NUESTROS ALUMNOS		
P. Nº	**RESPUESTAS**	**ERRORES**
1	Esperamos que sean capaces de reconocer que al girar el banderín de Juan sobre el eje BC se genera el cuerpo 3. En el caso del banderín de Marta sobre el eje CD deberían obtener el cuerpo 1. Además deberían ser capaces de decir que el cuerpo geométrico 2 que sobra, es el resultado de hacer girar el trapecio ABCD alrededor del lado AB.	Puede que comentan errores al identificar el cuerpo geométrico que resulta al girar en cada uno de los ejes.
2	Tienen que ser capaces de deducir, por medio	Es posible que no sepan

	del perímetro ($P = 2\pi\frac{3}{2}$) dado, el radio del círculo. Esperamos que se den cuenta que al descomponer el círculo en la figura que indicamos, podemos determinar un rectángulo con datos conocidos y, de forma aproximada, determinar su área.	interpretar correctamente el problema, que no determinen el radio del círculo o no efectúen correctamente las operaciones.
3	Queremos que sean capaces de determinar que todas ellas tienen igual área y distinto perímetro. Además que construyan adecuadamente las figuras que se indican.	Confusión entre términos o construcciones erróneas.
4	Esperamos que determinen que el poliedro A es un tetraedro, el B un cubo y el C un prisma triangular. Queremos que los dibujen y que comprueben que se cumple la fórmula de Euler.	Mala asimilación o conocimiento de los distintos cuerpos geométricos o de la fórmula de Euler. Errores al determinar el nº de caras, vértices o aristas.
5	Tienen que interpretar el problema correctamente, determinar que se trata de un prisma rectangular e indicar correctamente las medidas en el desarrollo plano del cuerpo geométrico.	No identificar el cuerpo geométrico, no saber realizar su desarrollo plano o error al asignar las distintas medidas en el mismo.
6	Esperamos justificaciones de si son o no desarrollos de un cilindro del tipo: a) No es desarrollo porque la base del rectángulo es menor que la longitud de la circunferencia. b) Sí lo es, al girar sobre la base forma un cilindro correctamente. c) No porque el círculo no puede estar en ese lado del rectángulo. d) y e) Sí lo son, como en b).	Problemas con la visión espacial o con el concepto de cuerpos de revolución.
7	Esperamos que, con la condición del término hexaminó, sean capaces de realizar 2 construcciones que sean desarrollo plano del cubo y 2 que no lo sean.	Confusión en la construcción de los distintos desarrollos planos o mal entendimiento del término hexaminó.
8	Tienen que ser capaces de descomponer el problema en otros más sencillos. La superficie de la carpa se descompone en la del cono y la del cilindro. Para la del cono es necesario aplicar Pitágoras para calcular la generatriz. Es importante que interpreten correctamente el problema y se den cuenta que deben calcular ambas superficies (cono y cilindro) pero sin contar ni la base del cono ni las bases del cilindro ya que se trata de una carpa y nos interesa la superficie de tela que recubre la carpa.	Errores al interpretar el problema o al calcular longitudes y áreas. Calcular las bases de ambos cuerpos geométricos.

H.4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Es imprescindible mostrar a los alumnos los criterios de calificación que vas a seguir para evaluar su aprendizaje.

Por un lado queremos especificar los criterios de calificación que emplearemos en la prueba escrita que hemos planteado. La puntuación máxima asignada corresponde con el 80% de la calificación final. Más detalladamente, en cada pregunta se valorará:

- 50% buena interpretación y planteamiento del problema.
- 30% utilización de las técnicas adecuadas para la resolución del problema.
- 20% uso correcto tanto del lenguaje matemático, como una buena ejecución operativa y corrección matemática.

Por otro lado, el 20% complementario de la nota de la asignatura estará basado en otro tipo de recursos de evaluación:

- 10% actitud y trabajo continuo: realización de trabajos y actividades, comportamiento, participación e interés mostrado.
- 10% exposición del trabajo final de la asignatura.

I. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

I.1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo

Balletbo, I., Barrantes, M. y López, M., (2014). La componente visual de la geometría en los libros de texto de secundaria. *Premisa*, 16(62), 24-35.

Colera J., Gaztelu I., (2008) *Matemáticas 2º ESO*. ANAYA: Madrid.

Domínguez Sánchez F., (2008) *Matemáticas 2º ESO*. SANTILLANA: Madrid.

Duque, C. y Quintero, M. E., (2009). Geometría intuitiva desde el cuarto de baño. *Números*, 70, 89-104.

García, M.A. y Guillén, G. (2008). Diseño de un estudio para el análisis de libros de texto de la Enseñanza Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana. El caso de la geometría. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de trabajo. XII Simposio de la SEIEM*. Badajoz.

Gómez Cutillas J.L., (2008) *Matemáticas 2º ESO*. EDEBE: Barcelona.

Gutiérrez, A. y Jaime, A., (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 32, 55-70.

Sgreccia, N. y Villarroel, S., (2012). Enseñanza de la Geometría en Secundaria. Caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas. *Unión*, 29, 59-84.