Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas.

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Ecuaciones de segundo grado: una propuesta didáctica para 3º de ESO

Autor: María Marzo García

Director: Miguel Ángel Marco

Junio de 2015

ÍNDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático que se pretende enseñar a lo largo de esta memoria, son las ecuaciones de segundo grado.

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros. En cada miembro podemos encontrar uno o más términos, y a su vez, éstos pueden contener números y letras. Una ecuación relaciona los valores conocidos (números) con los valores desconocidos o incógnitas (letras).

Según el número de incógnitas y el término de mayor grado, estaremos hablando de diferentes tipos de ecuaciones. En esta propuesta, nos centramos en ecuaciones con una única incógnita, que llamaremos x, y en las ecuaciones en las que el mayor grado del exponente es 2.

Para resolver una ecuación, debemos encontrar qué valores de la incógnita hacen que la igualdad entre los dos miembros se cumpla. Estos valores es lo que llamaremos solución de la ecuación.

El objeto matemático presentado se sitúa en el tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria de la asignatura de Matemáticas.

Según se establece en la Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón, los contenidos mínimos de tercer curso de esta etapa del bloque de Álgebra son los siguientes:

Bloque 3. Álgebra

- *Expresiones algebraicas. Interpretación y escritura de expresiones algebraicas.*
- *Análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas. Sucesiones recurrentes. Las progresiones como sucesiones recurrentes.*
- *Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.*

- Uso del lenguaje algebraico para expresar relaciones numéricas en sucesiones, tablas o enunciados de problemas. Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.
- Utilización de técnicas y procedimientos algebraicos para simplificar o desarrollar expresiones literales sencillas, aplicando la jerarquía de las operaciones y las reglas de uso de los paréntesis. Igualdades notables.
- Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones de segundo grado.
- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.

El bloque de Álgebra lo encontramos entre el bloque de Números y el de Geometría, y los criterios de evaluación presentes en esta misma orden, que hacen referencia a nuestro objeto matemático son los siguientes:

Criterios de evaluación

- Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado. Se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno, expresado mediante un enunciado o una tabla, para transformarla en una expresión algebraica.
- Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de segundo grado. Se pretende comprobar la capacidad para trasladar al lenguaje algebraico enunciados de problemas, para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales, para traducir el resultado al contexto en el que se enunció el problema y para comprobar la validez de dicho resultado.

En el campo de problemas propuesto para las ecuaciones de segundo grado, se hará una clasificación en base al entorno, y también según la técnica aplicada en cada uno de ellos. He querido realizar esta clasificación, ya que en estas ecuaciones hay una clara diferenciación en la técnica a aplicar; según sean ecuaciones de segundo grado completas o incompletas. Todo esto se explicará en detalle en el apartado E sobre el campo de problemas.

En cuanto a las técnicas y sus justificaciones, se presentarán en el aula de manera que los alumnos puedan reflexionar y ver la razón por la cual dichas técnicas presentadas funcionan. Además, irán acompañadas de ejemplos prácticos para conseguir que el alumno adquiera una mayor destreza y agilidad a la hora de aplicarlas.

Además, se presentará la fórmula que permite resolver ecuaciones de segundo grado completas, acompañada de su justificación para que los alumnos puedan ver que dicha fórmula se ha obtenido a través de una serie de pasos realizados a partir de la forma canónica general. Todo esto se explicará con más detalle en los apartados F y G sobre las técnicas y tecnologías, respectivamente.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

Basándome en la observación en diversos libros de texto de 3º de ESO, se puede concluir que, de manera general, la justificación de la introducción de las ecuaciones suele aludir habitualmente a fragmentos de historia matemática que despierten cierta curiosidad ante los alumnos.

En el libro de texto de 3º de ESO de la editorial Edebé se puede encontrar un fragmento de historia para justificar la introducción de las ecuaciones, y más genéricamente para la introducción de las expresiones algebraicas. En él, nos narran brevemente cómo fue el paso de representar números mediante letras, a comenzar a representarlos a través de símbolos propios. Así, el paso de la aritmética al álgebra es lo que en este libro de texto se usa como introducción del objeto matemático a enseñar.

En el libro de texto de 3º de ESO de la editorial SM, las ecuaciones de segundo grado las encontramos en el mismo tema que las ecuaciones de primer grado y los sistemas de ecuaciones. Así, para comenzar el tema encontramos el siguiente problema de ecuaciones de primer grado basado también en la historia de las matemáticas.

> En 1858, el egiptólogo escocés A. Henry Rhind compró un papiro que había sido encontrado en las ruinas de un antiguo edificio de Tebas.
>
> En él aparece el siguiente problema:
>
> *"Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24"*
>
> En notación moderna, la ecuación lineal correspondiente sería: $x + \frac{1}{7}x = 24$
>
> El autor del papiro fue el escriba Ahmes, quien lo escribió hacia el año 1650 a.C., a partir de otros escritos anteriores. Así pues, para llegar al actual método de resolución de ecuaciones lineales han tenido que transcurrir cerca de 4 000 años.
>
> *Templo de Luxor (Egipto)*

En el libro de texto de 3º de ESO de la editorial Algaida, las ecuaciones de segundo grado aparecen en un tema por separado, y la introducción de ellas se ve motivada por un problema geométrico, proponiendo su resolución por tanteo.

motivación

Con frecuencia necesitamos determinar una cantidad desconocida, *a*. La información que se nos suministra, para ello, es una *relación* en la que interviene dicha cantidad. Ejemplos de relaciones son:

Enunciado verbal	Expresión algebraica	Observaciones
El triple de un número vale 9.	$3 \cdot a = 9$.	Se refiere a un múltiplo.
El cuadrado de una cantidad es 64.	$a^2 = 64$.	Se refiere a una potencia.
El cuadrado de un número, menos su triple, vale 55.	$a^2 - 3 \cdot a = 55$.	

El *álgebra proporciona* una notación y unas reglas que permiten calcular una cantidad desconocida a partir de una relación establecida; veamos un ejemplo:

Los padres de Luisa han comprado una vivienda y en el plano observan que una de las habitaciones es rectangular; su área es de 24 m^2 y mide 2 m más de largo que de ancho. Para distribuir los muebles necesitan saber la longitud de cada pared. ¿Cómo hacer este cálculo?

Con una cinta métrica, en la obra, o una regla graduada, en el plano, se puede obtener la longitud de cada pared; *el álgebra permite calcular dichas longitudes sin realizar mediciones*.

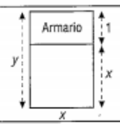
El área de un rectángulo se obtiene multiplicando la longitud del ancho por la del largo. Como las dos dimensiones son desconocidas, identificamos una de ellas con una incógnita: x; si el ancho es x, el largo es $x + 2$. Planteamos la ecuación $x \cdot (x + 2) = 24$; al resolverla, por tanteo, obtenemos las longitudes del ancho y del largo.

- Copia y completa la Tabla 1 hasta obtener estas longitudes.

Ancho: x	Largo: $x + 2$	Área: $x \cdot (x + 2)$
1 m	3 m	3 m^2
2 m	4 m	8 m^2
3 m		

Tabla 1

- Después de hacer un armario empotrado de 1 m de anchura, a lo largo de una pared, queda una superficie cuadrada de 25 m^2; ¿qué dimensiones tiene esta habitación? Resumimos esta situación:

Modelo geométrico	Enunciado verbal de la relación	Expresión algebraica
	Superficie rectangular Un lado mide 1 m menos que el otro La superficie cuadrada restante mide 25 m^2	 $y = x + 1$ $x^2 = 25$

Describe una situación que se pueda expresar con notación algebraica.

En esta propuesta de enseñanza, la justificación de la introducción del objeto matemático a enseñar, parte de conectar la realidad con las matemáticas, es decir, partir de problemas reales que despierten el interés del alumno por saber solucionarlos.

Habitualmente, en los libros de texto se presentan una gran cantidad de problemas de distintos tipos que se resuelven mediante ecuaciones. Se muestran algunos de ellos resueltos paso a paso, pero la gran mayoría quedan propuestos para su resolución por parte del alumno.

Para resolver ecuaciones de segundo grado incompletas, los libros de texto presentan paso a paso la técnica a aplicar con su justificación.

Así, en las ecuaciones sin término en x: $ax^2 + c = 0$, se muestran los pasos a seguir hasta despejar la incógnita: $\mathrm{x}^2 = -\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}} \rightarrow \mathrm{x} = \pm\sqrt{-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}}$, y en las ecuaciones sin término independiente: $ax^2 + bx = 0$, se justifica su resolución sacando factor común a la incógnita *x*, e igualando a cero cada uno de los factores: $(ax + b) \cdot x = 0$ de manera que las soluciones son: $x_1 = -\frac{b}{a}$, $x_2 = 0$.

Para las ecuaciones de segundo grado completas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, en todos los libros de texto se presenta la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sin embargo, no en todos ellos se presenta su justificación. Se suele incluir en los libros de texto más antiguos, como ocurre en el de la editorial Algaida mencionado anteriormente.

Resolución de una ecuación de segundo grado

Existen distintos procedimientos de resolución de una ecuación de segundo grado, aunque el más usual es el de la *fórmula cuadrática*.

Para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, procedemos como sigue:

Primero. La transformamos en su equivalente completando cuadrados:

$$x^2 + b/a \cdot x + c/a = 0$$
$$x^2 + b/a \cdot x = -c/a$$
$$x^2 + b/a \cdot x + (b/2a)^2 = -c/a + (b/2a)^2$$
$$(x + b/2a)^2 = -c/a + (b/2a)^2$$
$$(x + b/2a)^2 = -c/a + b^2/4a^2$$
$$(x + b/2a)^2 = (b^2 - 4ac) / 4a^2$$

Segundo. Obtenemos la raíz cuadrada:

$$\sqrt{(x + b/2a)^2} = \sqrt{(b^2 - 4ac) / 4a^2} \rightarrow \begin{array}{l} x + b/2a = +\sqrt{(b^2 - 4ac)}/2a \\ x + b/2a = -\sqrt{(b^2 - 4ac)}/2a \end{array}$$

Tercero. Calculamos las soluciones despejando x:

$$x_1 = \frac{\left(-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}\right)}{2a} \qquad x_2 = \frac{\left(-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}\right)}{2a}$$

o abreviadamente

$$x = \frac{\left(-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}\right)}{2a}$$

Los libros de texto que no muestran la justificación para la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado, lo razonan debido a que suponen que es un proceso “*largo y complicado*” para el curso de 3º de ESO. Así, los alumnos deben dar por demostrada dicha fórmula y únicamente deben saber aplicarla adecuadamente en los ejercicios y problemas propuestos.

Finalmente, a partir de la fórmula general, los libros de texto también presentan la técnica de calcular el número de soluciones reales de una ecuación de segundo grado, a partir del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Para todas estas técnicas mencionadas, en los libros de texto se presentan ejemplos y una gran cantidad de ejercicios para que el alumno adquiera hábito y agilidad a la hora de aplicarlas.

Además, también se presentan en los libros de texto los pasos a seguir para resolver problemas mediante ecuaciones; identificar los datos conocidos y desconocidos, relacionarlos mediante una ecuación, y finalmente resolver e interpretar los resultados obtenidos en base al contexto en el que nos encontremos.

Según M. Fernández Reyes (1983), la mayor dificultad que los alumnos suelen encontrar en el tema de ecuaciones se debe principalmente a la falta de práctica con el lenguaje matemático. El prestar una gran atención al lenguaje simbólico desde los primeros cursos de la Secundaria, ofrece ventajas que ayudan al alumno a interiorizar los conceptos necesarios para comprender con posterioridad los siguientes temas. Así, para realizar una buena enseñanza en el tema de ecuaciones, es necesario partir de una buena base en el lenguaje matemático y en el manejo de las expresiones algebraicas.

Centrándonos más concretamente en la enseñanza de las ecuaciones de segundo grado, y basándome en la experiencia del Prácticum, puedo concluir que para la resolución de ecuaciones de segundo grado, los alumnos se aprenden la fórmula general de memoria, sin ningún fundamento que la justifique. Así, esta forma de enseñanza produce diversos errores en el aprendizaje de este objeto matemático. Los alumnos suelen olvidar la fórmula, y por tanto ya no saben resolver la ecuación con otro método. Por ello, en esta propuesta nos centraremos en el proceso seguido hasta llegar a dicha fórmula para que los alumnos puedan deducirla paso a paso y resolverlas mediante otra técnica completando cuadrados.

Además, otro de los errores cometidos por los alumnos al resolver ecuaciones de segundo grado completas se da al aplicar la fórmula, sustituyendo incorrectamente las letras debido a la falta de comprensión.

Por otro lado, en las ecuaciones de segundo grado incompletas, debido a su mayor simplicidad, se suelen presentar las justificaciones de cada una de las técnicas. Por ello, la enseñanza de estas ecuaciones produce un menor número de errores. Aún con ello, los alumnos suelen olvidar la solución negativa de las ecuaciones de segundo grado incompletas en las que falta el término literal, y tienden a olvidar la solución $x = 0$ de las ecuaciones de segundo grado incompletas en las que falta el término independiente. Así, para intentar solventar este error, los alumnos deben recordar que este tipo de ecuaciones siempre presentan dos soluciones reales, y por tanto, si en la solución solo reflejan una de ellas, podrán observar que han olvidado la otra.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno.

Para que el alumno afronte el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado en tercero de Educación Secundaria Obligatoria, es necesario que parta de unos conocimientos previos adquiridos en cursos anteriores.

En los problemas y ejercicios que se plantean a lo largo de esta propuesta, se requieren ciertos conocimientos previos para poder afrontarlos en su totalidad. En cuanto a los bloques de Números y Geometría, los alumnos deberán saber calcular el mínimo común múltiplo de varios números naturales, operar con números enteros y con fracciones, conocer las reglas de jerarquía de operaciones, calcular perímetros y áreas de cuadriláteros y triángulos, calcular el volumen de un ortoedro, y calcular la longitud y el área de una circunferencia.

Además, el alumno deberá conocer de antemano algunos conocimientos del bloque de Álgebra; como traducción de expresiones del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico, cálculo del valor numérico de una expresión algebraica, simplificación y desarrollo de expresiones literales, identidades notables, resolución de ecuaciones de primer grado, y transformación de ecuaciones en otras equivalentes.

Todos estos contenidos están presentes en la Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón, y son contenido mínimo estudiado por el alumno antes del comienzo de las ecuaciones de segundo grado.

Esta propuesta de enseñanza se basa en gran parte en la resolución de problemas. Por ello, el alumno debe ser capaz de desarrollar estrategias y técnicas para abordarlos, y comprender las relaciones matemáticas que surgen de ellos.

Debido a que nos encontramos en tercero de Educación Secundaria Obligatoria, es de esperar que en los cursos anteriores de Educación Primaria y Secundaria Obligatoria, se hayan visto todos estos contenidos previos. Sin embargo, esto no siempre es así, por lo que se realizará la siguiente prueba inicial para comprobar los conocimientos de los que parten los alumnos. En base a lo observado, se podrá dedicar mayor tiempo al repaso si los conocimientos de los alumnos no fueran los suficientes.

PRUEBA DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

EJERCICIO 1:

Calcula el mínimo común múltiplo de las siguientes series de números:

a) 6, 8 y 15
b) 9, 21 y 36

EJERCICIO 2:

Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)$
b) $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$
c) $\left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)$

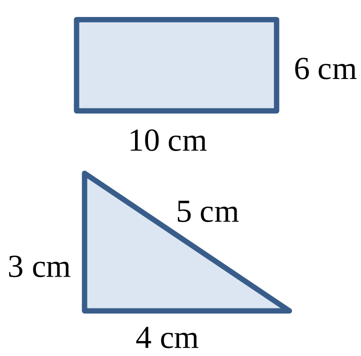
EJERCICIO 3:

Calcula:

a) $\frac{1}{3}$ de 252
b) $\frac{2}{5}$ de 35

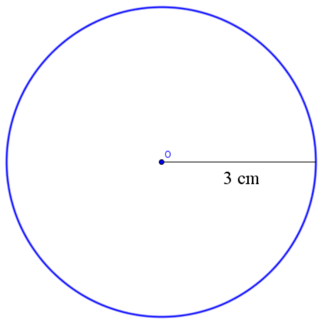
EJERCICIO 4:

Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



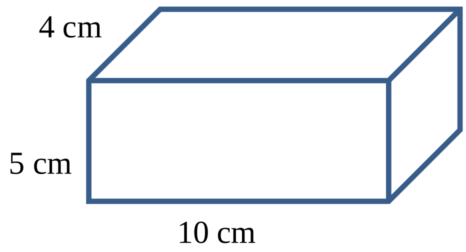
EJERCICIO 5:

Calcula la longitud y el área de la siguiente circunferencia:



EJERCICIO 6:

Calcula el volumen de la siguiente figura:



EJERCICIO 7:

Traduce a lenguaje algebraico las siguientes expresiones:

a) El cubo de un número.
b) La suma de los cuadrados de dos números.
c) La suma entre un número par, y el triple del siguiente par.
d) Las dos terceras partes de la suma de dos números.

EJERCICIO 8:

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $3x^2 + 2x - 1$ si $x = 2$
b) $2x + 3y - x^2 + y^2$ si $x = 1, y = -1$

EJERCICIO 9:

Realiza las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $3(2x + 1) - (x + 2) = 2x - 3(x - 1)$
b) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{5} = \frac{x-3}{4}$
c) $\frac{5-x}{2} - 2 = \frac{1-x}{2} - \frac{2(x+1)}{3}$

d) $2(x-3)+10x=\frac{8x-1}{2}$

e) $\frac{x-1}{2}=\frac{3x-10}{5}+\frac{x-2}{3}$

<u>EJERCICIO 10:</u>

Simplifica las siguientes expresiones:

a) $3x^2+2x+5x-2x^2$

b) $5x(2x-1)+3x-2$

c) $2(x-1)-(3x+5)$

d) $(x+1)^2=x^2+2x+1$

e) $(x+2)(x-2)=x^2-4$

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático.

Para la introducción de las ecuaciones de segundo grado en el curso 3º de ESO se plantearán una serie de problemas en los que sea necesario el uso de este objeto matemático.

Una de las razones de ser que se tendrán en cuenta, serán problemas geométricos del paso de área a longitud, como por ejemplo:

- Un campo cuadrado tiene de área $784\ \mathrm{m}^2$. ¿Cuál es la longitud del lado del campo?
- Una plaza de toros circular tiene un área de $2826\ \mathrm{m}^2$ aproximadamente. ¿Cuál es el diámetro de la plaza de toros?
- Un triángulo isósceles rectángulo presenta un área de $288\ \mathrm{cm}^2$. ¿Cuánto mide la base y la altura de dicho triángulo?

Otra razón de ser que se empleará, son problemas en los que se plantea un sistema de ecuaciones en el que interviene una ecuación de segundo grado, como por ejemplo:

- Halla dos números enteros tales que su suma sea 61 y su producto 900.
- ¿Qué dos números enteros cumplen que la diferencia entre el mayor y el menor es 5 y su producto es 500?

Las razones de ser que se introducen en esta propuesta didáctica coinciden en su totalidad con las razones de ser históricas que dieron origen a las ecuaciones de segundo grado. La necesidad de encontrar una solución ante determinados problemas es la base para introducir este objeto matemático en su razón de ser. Además, al igual que se refleja en esta memoria, la mayoría de estos problemas que introducen las ecuaciones de segundo grado son problemas geométricos, ya que las matemáticas de la antigüedad estaban basadas principalmente en la geometría.

La palabra “álgebra” proviene de la palabra arábica al-jabr que significa “restaurar”, que aparece en el título del libro “Hisab al-jabr w´al-muqabala”, un trabajo sobre la solución de ecuaciones, escrito en Bagdad cerca del año 825 por el matemático y astrónomo árabe Al- Khwarizmi (780-850). En este contexto, los términos “al-jabr” y “al-muqabala” se utilizan para denominar lo que nosotros entendemos por transposición de términos y posterior simplificación de términos semejantes con coeficientes negativos y positivos.

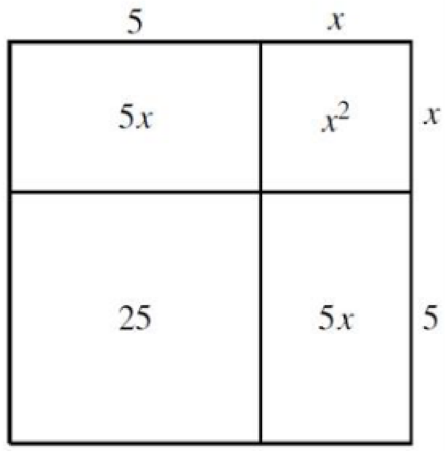
Al-Khwarizmi es considerado el padre del álgebra, y en su tratado nos explica la forma de resolver una ecuación de segundo grado sin conocer la fórmula que utilizamos hoy en día. Al- Khwarizmi plantea el siguiente problema:

"Un cuadrado y diez raíces es igual a treinta y nueve dirhems. ¿Cuánto vale la raíz del cuadrado?"

Este enunciado traducido al lenguaje algebraico corresponde a la ecuación:

$$x^2 + 10x = 39$$

Para resolverlo, Al- Khwarizmi representó x^2 por un cuadrado de lado x, y $10x$ por dos rectángulos de lados x y 5 (por lo tanto cada rectángulo tiene área $5x$), conforme la figura abajo. El cuadrado extra de área 25 completa el cuadrado de lado $x + 5$, cuya área será igual a 25 + 39, pues 39 es el valor de $x^2 + 10x$. De esta forma, el cuadrado grande de lado $x + 5$, tiene área 25 + 39 = 64, y por tanto su lado será 8, que es la raíz cuadrada de 64. Por tanto, $x + 5 = 8$, y así la solución de la ecuación es $x = 3$.



Es interesante que los alumnos conozcan también esta forma geométrica de completar cuadrados que utilizaba Al- Khwarizmi para resolver ecuaciones de segundo grado. Por ello, en una de las sesiones se reflejará este mismo ejemplo realizado con este método gráfico.

Al comenzar el nuevo tema de ecuaciones de segundo grado, el docente les planteará a los alumnos los problemas propuestos anteriormente como razón de ser. La metodología que se seguirá en el aula será que los alumnos, de forma grupal, intenten resolverlo e investiguen la manera de hacerlo. Los grupos de trabajo serán realizados por el docente, de manera que en cada uno de ellos cuatro alumnos y de forma que en cada uno de los grupos haya un alumno responsable, estudioso y esté dispuesto a ayudar, otros dos alumnos estándares, y otro alumno con necesidad de que le ayuden.

El objetivo es que perciban la necesidad de introducir un nuevo objeto matemático para resolver el problema propuesto. La manera en que los alumnos resuelvan el problema puede ser muy variada, desde tanteando con diversos valores, hasta aplicando algún método visto anteriormente. Una vez que los alumnos han intentado resolver el problema, se comentarán los resultados obtenidos y el método empleado hasta llegar a dicha solución. Si los alumnos no consiguen resolverlo, el docente les facilitará alguna idea y volverá a dejar tiempo para que los alumnos lo intenten. Así, finalmente entre todos se comentará la resolución y los pasos seguidos hasta llegar a la solución.

E. Sobre el campo de problemas.

Los problemas de ecuaciones de segundo grado que se presentarán en el aula serán clasificados en base al contexto en el que nos encontremos, y en base a la técnica empleada para su resolución según el tipo de ecuación de segundo grado presente en el problema. Así, el contexto de los problemas planteados podrá ser: edades (C1), situaciones formales (C2) o geométricos (C3), y la técnica empleada según el tipo de ecuación podrá ser: ecuación de segundo grado incompleta del tipo $ax^2 + c = 0, a \neq 0$ (T1), ecuación de segundo grado incompleta del tipo $ax^2 + bx = 0, a \neq 0$ (T2), o ecuación de segundo grado completa (T3).

En el aula se presentarán los siguientes problemas de ecuaciones de segundo grado:

1. La mitad del cuadrado de la edad de mi madre es 450. ¿Cuántos años tiene mi madre? (C1-T1)
2. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 da exactamente su cuadrado? (C1-T2)
3. La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno? (C1-T3)
4. Si multiplicamos la tercera parte de cierto número por sus tres quintas partes, obtenemos 405. ¿Cuál es ese número? (C2-T1)
5. Calcula un número distinto de 0 de manera que, dos veces su cuadrado sea 7 veces dicho número. (C2-T2)
6. Hallar dos números positivos consecutivos cuyo producto sea 380. (C2-T3)
7. Calcular dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 195. (C2-T3)
8. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6. (C2-T3)
9. El área de un terreno circular es de 100 m^2. Calcula la longitud del radio de dicho terreno. (C3-T1)
10. Un depósito de agua tiene forma de ortoedro cuya altura es 10 m y su capacidad 4000 m^3. Hallar el lado de la base sabiendo que es cuadrada. (C3-T1)
11. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es 40 cm^2. Halla los catetos de este triángulo. (C3-T3)

12. Uno de los lados de un rectángulo es 5 unidades mayor que el otro, y el área mide 50 m^2. Calcular las dimensiones del rectángulo. (C3-T3)

Para la implementación de todos estos problemas en el aula, de manera análoga a la metodología empleada con los problemas de razón de ser, los alumnos reflexionarán la manera de resolverlos, y a partir de ahí, junto con el docente se comentará dicha resolución. El objetivo es que los alumnos investiguen y exploren por ellos mismos y puedan llegar a encontrar la técnica que les lleve a la resolución. Este proceso se indicará con más detalle en el apartado H sobre la secuencia didáctica.

Tras la realización de cada uno de estos problemas, los alumnos serán capaces de resolver ecuaciones de segundo grado incompletas, y completas mediante el método de completar cuadrados. Por tanto, para que puedan resolverlos mediante la fórmula general, es necesario realizar modificaciones de la técnica de completar cuadrados, y llegar así a otro método de resolución más rápido que el adquirido con los problemas de razón de ser del objeto matemático.

F. Sobre las técnicas.

Los ejercicios de ecuaciones de segundo grado que se presentarán en el aula son los siguientes:

1. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de segundo grado:
   a) $x^2 = 1$
   b) $x(x-5) = 0$
   c) $x^2 = 64$
   d) $x^2 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas de segundo grado:
   a) $x^2 - 4 = 0$
   b) $3x^2 - 7 = 20$
   c) $5x^2 - 2x = 0$
   d) $25x^2 - 1 = 0$
   e) $x(2x-3) = 0$
   f) $7x^2 = x$
   g) $x^2 + 5x = 3x - x^2$
   h) $2x^2 + 3 - 8 = 5 + 6 + x^2$

3. Completa cuadrados en las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:
   a) $x^2 - 4x + 1 = 0$
   b) $x^2 + 6x - 8 = 0$
   c) $x^2 + 16x + 64 = 0$
   d) $3x^2 - 12x + 1 = 0$
   e) $3x^2 - 4x - 5 = 0$
   f) $2x^2 + 4x + 5 = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:
   a) $x^2 + x + 4 = 0$
   b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
   c) $3x^2 - 11x - 4 = 0$
   d) $(x-3)(x-1) = 15$
   e) $\frac{x+1}{2} + \frac{10x^2+3x}{8} = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{8}$

f) $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{x}{4}$

g) $\frac{x^2+2}{5} - \frac{x^2+x}{2} = \frac{3x+1}{10}$

5. Determina, sin resolver la ecuación, el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado:
   a) $x^2 + 5x - 3 = 0$
   b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
   c) $2x^2 + 3x + 2 = 0$
   d) $x^2 + 2x = 0$
   e) $x^2 - 16 = 0$

Para resolver estos ejercicios propuestos de ecuaciones de segundo grado, las técnicas necesarias son:

- <u>Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas</u>:
  - Ecuaciones en las que falta el término literal:
    1. $ax^2 + c = 0$
    2. $ax^2 = -c$
    3. $x^2 = \frac{-c}{a}$
    4. $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

    La ecuación tendrá solución real siempre y cuando $\frac{-c}{a} \geq 0$.

  - Ecuaciones en las que falta el término independiente:
    1. $ax^2 + bx = 0$
    2. $x \cdot (ax + b) = 0$
    3. $x = 0\ ,\ \ ax + b = 0 \rightarrow\ x = \frac{-b}{a}$

- Resolución de ecuaciones de segundo grado completas:

  Para resolver ecuaciones de segundo grado completas, se comenzará con la técnica de completar cuadrados, para posteriormente deducir la fórmula general.

  - Completar cuadrados:

    Para explicar esta técnica en el aula, se procederá mediante diversos ejemplos prácticos que se reflejarán en el apartado H sobre secuenciación. Una vez mecanizada esta técnica, se pasará a la resolución de ecuaciones de segundo grado mediante la fórmula general. Así, los alumnos verán otra técnica de resolución menos costosa que la vista hasta el momento.

  - Fórmula general:

    Para resolver una ecuación de segundo grado completa de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, también se puede usar la siguiente fórmula:

    $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Y analizamos el número de soluciones de la ecuación mediante la técnica que se describe a continuación.

- Número de soluciones de una ecuación de segundo grado:

  Se llama discriminante a $\Delta = b^2 - 4ac$

  - Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
  - Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.
  - Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución: $x = \frac{-b}{2a}$. En este caso, se dice que la solución es doble.

- Resolución de ecuaciones de segundo grado (método general)

  1. Se quitan los paréntesis, si los hay, mediante la propiedad distributiva del producto.
  2. Se quitan los denominadores, si los hay. Para ello se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores y posteriormente se simplifica de manera que se supriman los denominadores de la ecuación.

3. Se agrupan los términos pasándolos todos al primer miembro.
4. Se detecta si la ecuación de segundo grado es completa e incompleta, y se aplican las técnicas anteriores en función de ello.

Para resolver problemas ecuaciones de segundo grado, la técnica que se presenta es la siguiente:

1. Leer y comprender el problema.
2. Identificar los datos conocidos y las incógnitas, es decir, que expresen qué es la incógnita.
3. Plantear la ecuación.
4. Resolver la ecuación.
5. Interpretar los resultados obtenidos en base al contexto del problema.

Todas las técnicas presentadas para ecuaciones de segundo grado son adecuadas al campo de problemas de esta propuesta, salvo la técnica de calcular el número de soluciones de una ecuación de segundo grado, la cual no se aplica en ninguno de ellos. Para resolver los problemas, se precisa de una buena comprensión del enunciado para plantear adecuadamente la ecuación y, una vez concluido esto, basta con aplicar las técnicas de resolución de ecuaciones de segundo grado, según el problema. Al resolver la ecuación se debe interpretar el resultado obtenido en base a los datos del problema.

Además, todas estas técnicas se presentarán motivadas por problemas que muestren su razón de ser y acompañadas posteriormente de ejemplos prácticos. Una vez vistas las técnicas, el docente realizará con los alumnos algunos de los ejercicios planteados anteriormente. El resto los deberá resolver el alumno, como se indicará con más detalle en el apartado H sobre la secuencia didáctica.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas).

En esta propuesta didáctica, todas las técnicas presentadas para la resolución de ecuaciones de segundo grado serán justificadas en el aula.

Las tecnologías asociadas a la resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas están justificadas paso a paso en el apartado de técnicas, y son realizadas por parte del docente con la colaboración de los alumnos.

En cuanto a las ecuaciones de segundo grado completas, el docente justificará la fórmula general para la resolución de ecuaciones de segundo grado completas, siguiendo los pasos empleados en la técnica de completar cuadrados, manteniendo la equivalencia de ecuaciones. Así, la tecnología asociada a dicha técnica es la siguiente:

Dada la ecuación de segundo grado completa: $ax^2 + bx + c = 0$:

1º. Dividimos ambos miembros por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2º. Pasamos el término independiente al otro miembro:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

3º. Completamos cuadrados en el primer miembro obteniendo un cuadrado perfecto, más un valor entero:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a}$$

4º. Pasamos el término independiente del primer miembro al segundo miembro:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

5º. Realizamos el cambio de variable:

$$z = x + \frac{b}{2a}$$

$$z^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

6º. Resolvemos la ecuación de segundo grado incompleta resultante:

$$z = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$z = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

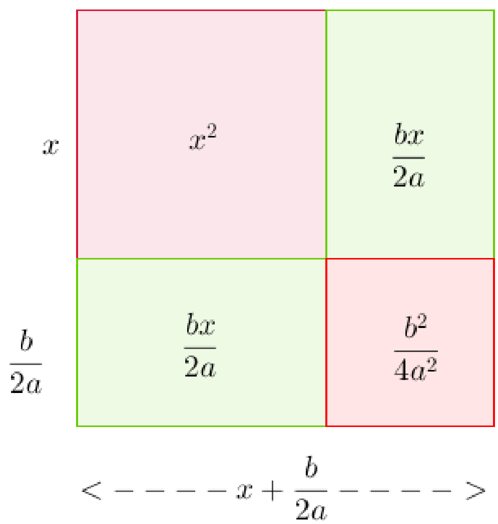
7º. Deshacemos el cambio de variable:

$$z = x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Además, acompañada de esta tecnología, el docente les presentará a los alumnos la forma gráfica de llegar a la fórmula general a partir de la ecuación:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$



A lo largo de esta propuesta didáctica, el alumno debe pasar por diferentes momentos para llegar a la institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Para ello, el alumno debe enfrentarse a un primer encuentro donde vea la necesidad de introducir un nuevo objeto matemático que hasta entonces no habían visto. Esto ocurrirá en la primera sesión, donde el docente les presentará un problema geométrico en el que deberán plantear una ecuación de segundo grado. Así, mediante el intento de resolver diferentes problemas en los que se usa este objeto matemático, el alumno se sitúa en el momento exploratorio, donde intenta encontrar y elaborar técnicas que permitan resolver los problemas propuestos por el docente. Una vez que el estudiante ha encontrado las técnicas que permitan resolver dichos problemas, se situará ahora en el momento de constitución del entorno tecnológico-teórico, donde deberá reflexionar y explicarse la razón de que funcionen las técnicas. Este paso será llevado a cabo por el docente, mediante la explicación de cada una de las técnicas necesarias y la justificación de cada una de ellas. Así, mediante la realización de diversos ejercicios, los alumnos reforzarán cada una de las técnicas presentadas, volviéndolas más eficaces y adquiriendo una mayor destreza.

Finalmente, tras todos estos pasos realizados, nos encontraremos entonces en el momento de institucionalización, donde las técnicas que han demostrado ser útiles y las tecnologías que las justifican, se incorporan al acervo cultural matemático de la clase para poder ser citadas cuando sea necesario.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma.

La secuenciación que se seguirá para llevar a cabo esta propuesta didáctica será la siguiente:

SESIÓN 1: Iniciación y repaso.

Durante esta primera sesión se realizará la prueba de conocimientos previos expuesta en el apartado C sobre conocimientos previos. Una vez analizados los resultados de la prueba, se podrá dedicar una sesión adicional para reforzar todos aquellos conceptos que peor hayan respondido los alumnos, y en los que más errores hayan cometido.

SESIÓN 2:

Durante esta sesión se introducirá el objeto matemático a enseñar. Para ello, se comenzará planteando a los alumnos algunos problemas de razón de ser de ecuaciones de segundo grado.

Mediante trabajo en grupos, los alumnos tratarán de buscar la solución del siguiente problema:

“Un campo cuadrado tiene de área $784\,\mathrm{m}^2$. ¿Cuál es la longitud del lado del campo?”

Se trata de un problema en el que se plantea una ecuación de segundo grado incompleta en la que falta el término literal. Se dejará tiempo a los alumnos para que piensen por ellos mismos e intenten buscar alguna técnica que lo solucione. Si los alumnos tuvieran dificultades en plantear la ecuación, el docente les daría alguna indicación que les ayudase.

Cabe esperar que algunos alumnos intenten resolver el problema mediante tanteo, otros realizarán la raíz cuadrada, pero lo más probable es que, al tratarse de longitudes, la mayoría no se percaten de la solución negativa de la ecuación de segundo grado.

Una vez que el problema ha sido resuelto por los alumnos, se comentará entre todos los pasos que han seguido hasta solucionarlo, si son correctos o no, y el porqué de cada uno de ellos. Asimismo, el docente les dejará perfectamente indicado la solución negativa de la ecuación, aunque en este caso, por el entorno del problema no tenga sentido.

Así, se les dejará otros problemas de razón de ser geométricos, que deberán intentar resolver siguiendo esta misma metodología:

- Una plaza de toros circular tiene un área de 2826 m^2 aproximadamente. ¿Cuál es el diámetro de la plaza de toros?
- Un triángulo isósceles rectángulo presenta un área de 288 cm^2. ¿Cuánto mide la base y la altura de dicho triángulo?

En estos problemas también se tratan ecuaciones de segundo grado incompletas en las que falta el término literal, por lo que los alumnos, una vez realizado el primer problema, es de esperar que presenten menos dificultades. Sin embargo, en estos problemas el coeficiente de x^2 no es mónico, por lo que deberán percatarse de este detalle y trasponer dicho término.

Una vez realizados y comentados cada uno de ellos, se les planteará de la misma manera otros dos problemas de razón de ser en los que intervienen sistemas de ecuaciones.

- Halla dos números enteros tales que su suma sea 61 y su producto 900.
- ¿Qué dos números enteros cumplen que la diferencia entre el mayor y el menor es 5 y su producto es 500?

En ellos, los alumnos deberán plantear, tras varios pasos realizados de antemano, una ecuación de segundo grado completa. Es de esperar que en estos problemas presenten mayores dificultades al llegar a la ecuación. De la misma manera que en los problemas anteriores, el docente realizará las indicaciones pertinentes como ayuda a los alumnos. Algunos alumnos intentarán resolver el problema mediante tanteo, pero nuestro objetivo es que intenten razonar, siguiendo una serie de pasos, hasta llegar a una ecuación de segundo grado incompleta (en la que falta el término independiente), de la cual, mediante los tres primeros problemas, ya han encontrado la técnica para resolverlas.

Como los alumnos no conocen la fórmula general para estas ecuaciones, deberán intentar resolverlas completando cuadrados. Sin embargo, esta técnica les puede resultar complicada, por lo que es de esperar que necesiten alguna indicación del docente en este paso.

SESIÓN 3:

Durante esta sesión, se les seguirá planteando a los alumnos diversos problemas de ecuaciones de segundo grado, antes de presentarles en las sesiones posteriores las técnicas pertinentes para cada uno de ellos.

El docente les planteará el Ejercicio 1 de ecuaciones de segundo grado expuesto en el apartado F, para que los alumnos calculen mentalmente la incógnita de diversas ecuaciones sencillas. De esta manera, podrán intuir las técnicas que han ido usando para cada uno de ellos y relacionar los términos que intervienen en la ecuación.

A continuación les dejará propuestos los problemas del 1 al 6 expuestos en el apartado E sobre el campo de problemas. El trabajo será grupal, ya que de esta forma los alumnos se pueden ayudar entre ellos y trabajan de forma más equitativa. Cada vez que vayan resolviendo cada uno de los problemas, se comentará en la pizarra los resultados obtenidos en cada uno de ellos y el proceso seguido.

SESIÓN 4:

Esta sesión seguirá la misma metodología que la sesión anterior. El docente les planteará los problemas del 7 al 12 expuestos en el apartado E sobre el campo de problemas.

Una vez acabada esta sesión, los alumnos ya habrán pasado por el momento de primer encuentro con el nuevo objeto matemático, y por el momento exploratorio, en el que hayan tratado de resolver las diferentes tareas propuestas por el docente y en el que se espera que hayan elaborado las técnicas que les permitan resolver las tareas propuestas de manera autónoma y personal.

Llegados a esta situación, en las sesiones siguientes nos situaremos en el momento de constitución del entorno tecnológico-teórico, y en el momento de trabajo de la técnica. El estudiante con la ayuda del docente, deberá reflexionar y explicarse la razón de que funcionen las técnicas, acudiendo a un discurso tecnológico-teórico. Asimismo, todas las técnicas que el estudiante ha ido desarrollando, deben ser mejoradas y reforzadas, volviéndolas más eficaces y mejorando la destreza que se tiene de ellas. Para ello, en las sesiones posteriores, el docente les planteará diversos ejercicios que deberá resolver el alumno siguiendo las técnicas pertinentes.

SESIÓN 5:

Con el planteamiento de todos estos problemas, el docente procederá en las sucesivas sesiones a la explicación de cada una de las técnicas necesarias para el objeto matemático a enseñar. En esta sesión comenzará con la explicación de la técnica de ecuaciones de segundo grado incompletas realizando, paso a paso, los apartados a) y c) del ejercicio 2 de ecuaciones de segundo grado.

Apartado a):

$x^2 - 4 = 0$	Nos encontramos ante una ecuación de segundo grado incompleta en la que falta el término literal.
$x^2 = 4$	Mediante la trasposición de términos, pasamos el término independiente al otro miembro de la ecuación. Nos planteamos la siguiente pregunta: "¿Qué número al cuadrado me da como resultado 4?".
$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$	La operación inversa del cuadrado es la raíz cuadrada, luego tomando raíces cuadradas en ambos miembros tendremos despejada la incógnita. Notar que siempre tenemos que poner $\pm$ delante de la raíz cuadrada ya que, tanto 2 como -2, al elevarlos al cuadrado da 4.

Apartado c):

$5x^2 - 2x = 0$	Nos encontramos ante una ecuación de segundo grado incompleta en la que falta el término independiente.

$x \cdot (5x - 2) = 0$	El primer paso a realizar es sacar factor común a x.
$x = 0$ $5x - 2 = 0$	Ahora bien, si el producto de dos términos es nulo, es porque alguno de ambos términos, o los dos, se anula. Por tanto igualamos a cero cada uno de los términos.
$x = 0$ $5x = 2 \rightarrow\ x = \frac{2}{5}$	Nos quedan así dos ecuaciones de primer grado a resolver. Notemos que en estos casos, $x = 0$ siempre será solución de la ecuación.

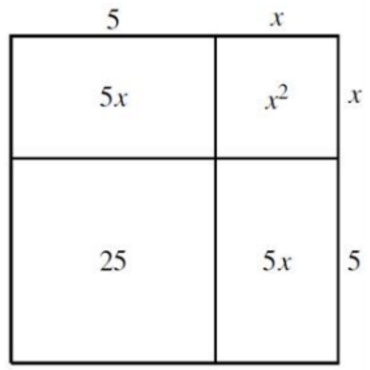
Una vez vistas estas dos técnicas para resolver ecuaciones de segundo grado incompletas, el resto de apartados del ejercicio 2 quedan propuestos para que los resuelva el alumno individualmente durante la clase.

Con la resolución de este ejercicio, los alumnos habrán mecanizado las técnicas para resolver ecuaciones de segundo grado incompletas.

SESIÓN 6:

Durante esta sesión, el profesor explicará la técnica de resolución de ecuaciones de segundo grado completas mediante la técnica de completar cuadrados, que es la que han estado trabajando en las sesiones anteriores con los problemas propuestos. Para ello, el docente comenzará plasmando a los alumnos el método gráfico de Al- Khwarizmi y continuará posteriormente realizando tres ejemplos de dicha técnica en la pizarra:

Para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$ realizamos la siguiente figura:



x^2 representa el área del cuadrado de lado x, y $10x$ el área de los dos rectángulos de lados x y 5. El cuadrado extra de área 25 completa el cuadrado de lado $x+5$, cuya área será igual a 25 + 39, pues 39 es el valor de x^2+10x. De esta forma, el cuadrado grande de lado $x+5$, tiene área 25 + 39 = 64, y por tanto su lado será 8, que es la raíz cuadrada de 64. Por tanto, $x+5=8$, y así la solución de la ecuación es $x=3$.

Así, aunque este método gráfico no es el que usarán los alumnos para resolver ecuaciones de segundo grado, les servirá para ver la fundamentación de esta técnica.

<u>EJEMPLO 1</u>: $2x^2+4x-5=0$

$x^2+2x-\frac{5}{2}=0$	1º. Si el coeficiente de x^2 no es 1, dividimos ambos miembros por dicho coeficiente.
$x^2+2x=\frac{5}{2}$	2º. Pasamos el término independiente al otro miembro.
$(x+1)^2-1=\frac{5}{2}$ (En efecto, usando las identidades notables: $(x+1)^2-1=x^2+2x+1-1=x^2+2x$, que es lo que teníamos anteriormente en el primer miembro)	3º. Completamos cuadrados en el primer miembro de manera que se siga manteniendo la igualdad y obtengamos un cuadrado perfecto, más un número entero.
$(x+1)^2=\frac{5}{2}+1$ $(x+1)^2=\frac{7}{2}$	4º. Pasamos el término independiente al otro miembro, y ya habremos completado cuadrados.
$z=x+1$ $z^2=\frac{7}{2}$	5º. Realizamos un cambio de variable para transformar la ecuación de segundo grado completa inicial, en una ecuación de segundo grado incompleta en la que falta el término en x. Para ello, llamamos z a lo que está dentro del paréntesis elevado al cuadrado.

$z = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$	6º. Resolvemos la ecuación de segundo grado incompleta resultante tras realizar el cambio de variable.
$z = x + 1 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ $x = -1 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$	7º. Finalmente, deshacemos el cambio de variable y ya tenemos las soluciones de la ecuación de segundo grado original.

Siguiendo estos mismos pasos, se realizarán también los siguientes ejemplos de ecuaciones de segundo grado completas, en los que cambia el número de soluciones.

<u>EJEMPLO 2:</u> $x^2 - 5x + 10 = 0$

1º. Como el coeficiente de x^2 es 1, pasamos directamente al siguiente paso.

2º. $x^2 - 5x = -10$

3º. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = -10$

4º. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -10 + \frac{25}{4} \quad \rightarrow \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{-15}{4}$

5º. $z = x - \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad z^2 = \frac{-15}{4}$

6º. $z = \pm\sqrt{\frac{-15}{4}}\ (\notin \mathbb{R})$

7º. $z = x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{-15}{4}}$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{-15}{4}}\ (\notin \mathbb{R})$

Luego se deduce que la ecuación no tiene soluciones reales.

<u>EJEMPLO 3:</u> $4x^2 + 4x + 1 = 0$

1º. $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

2º. $x^2 + x = -\frac{1}{4}$

3º. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

4º. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

5º. $z = x + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad z^2 = 0$

6º. $z = 0$ (Doble)

7º. $z = x + \frac{1}{2} = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ (Doble)

Luego deducimos que la solución de la ecuación es $-\frac{1}{2}$ doble.

Una vez realizado estos ejemplos en la pizarra, es el momento de que los alumnos trabajen individualmente esta técnica. Así, se les dejará tiempo para que realicen el ejercicio 3, señalando expresamente que el enunciado no nos pide que resolvamos la ecuación. Es decir, exige únicamente hasta el 4º paso de la técnica. Sin embargo, el profesor les pedirá a los alumnos que resuelvan la ecuación de tres apartados que ellos deseen, de los seis apartados que presenta el ejercicio.

SESIÓN 7:

En esta sesión el profesor explicará la técnica de resolución de ecuaciones de segundo grado completas mediante la fórmula general. Para ello, les presentará la tecnología expuesta en el apartado G, que justifica la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado completas. Así, una vez presentada dicha fórmula a los alumnos, el docente procederá a aplicarla en diversos ejercicios para que los estudiantes puedan aprender otro método de resolución de ecuaciones más rápido que la técnica de completar cuadrados.

Con respecto a esta técnica, el profesor realizará en la pizarra el ejercicio 4 a), b), e) con detalle.

Apartado a): $x^2 + x + 4 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = $ $= \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} \notin \mathbb{R}$	Se trata de una ecuación de segundo grado completa, luego procedamos a aplicar la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ identificando cada una de las letras. En este caso $a = 1, b = 1$ y $c = 4$
Esta ecuación no tiene soluciones reales.	Concluimos las soluciones de la ecuación de segundo grado.

Apartado b): $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = $ $= \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$ (doble)	Se trata de una ecuación de segundo grado completa, luego procedamos a aplicar la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ identificando cada una de las letras. En este caso $a = 4, b = 4$ y $c = 1$
Las soluciones de esta ecuación son: $-\frac{1}{2}$ (doble)	Concluimos las soluciones de la ecuación de segundo grado.

Apartado e): $\frac{x+1}{2} + \frac{10x^2+3x}{8} = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{8}$

$\frac{x+1}{2} + \frac{10x^2+3x}{8} = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{8}$	Nos encontramos ante una ecuación de segundo grado con denominadores, y al igual que ocurría en las ecuaciones de primer grado, el primer paso a seguir es eliminar los denominadores.
$\frac{8(x+1)}{2} + \frac{8(10x^2+3x)}{8} = \frac{8x^2}{4} + \frac{8 \cdot 5}{8}$	Para quitar los denominadores multiplicamos ambos miembros por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores, que es 8.
$4(x+1) + 10x^2 + 3x = 2x^2 + 5$	Simplificamos los términos en rojo y obtenemos una ecuación de segundo grado sin

	denominadores.
$4x+4+10x^2+3x=2x^2+5$	Nos ha quedado una ecuación con paréntesis, luego procedamos primero a suprimir los paréntesis mediante la propiedad distributiva.
$10x^2-2x^2+4x+3x+4-5=0$ $8x^2+7x-1=0$	Ahora agrupemos todos los términos en un solo miembro y operemos aquellos que sean semejantes.
$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 8\cdot(-1)}}{2\cdot 8}=$ $=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{16}=$ $=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{16}=\frac{-7\pm 9}{16}=$ $\frac{-7+9}{16}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$ $\frac{-7-9}{16}=\frac{-16}{16}=-1$	Hemos obtenido una ecuación de segundo grado completa, luego procedamos a aplicar la fórmula $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ identificando cada una de las letras. En este caso $a=8, b=7$ y $c=-1$
Soluciones: $x=\frac{1}{8}$ $x=-1$	Finalmente concluimos las soluciones de la ecuación de segundo grado.

El resto de apartados del ejercicio 4 los realizará el alumno de manera individual durante la clase usando esta técnica.

Además, el docente les dejará claramente indicado a los alumnos que para resolver ecuaciones de segundo grado completas, disponen de dos técnicas; completando cuadrados, o mediante la fórmula general. Por tanto, para resolver una ecuación de este tipo, podrán aplicar el método que mejor les convenga en cada caso, a no ser que el enunciado o el profesor indiquen la técnica que deben emplear.

SESIÓN 8:

En esta sesión, el docente procederá a explicar la técnica para calcular el número de soluciones de una ecuación de segundo grado, usando la fórmula explicada anteriormente. Para ello realizará los apartados a) y d) del ejercicio 5.

Apartado a):

$x^2 + 5x - 3 = 0$	Nos encontramos ante una ecuación de segundo grado completa. Pasemos a identificar cuáles son en este caso las letras a, b y c correspondientes a la forma general $ax^2 + bx + c = 0$. $a = 1, b = 5$ y $c = -3$
$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$ $\Delta = 25 + 12 = 37$	Para calcular el número de soluciones basta con determinar el signo de $\Delta = b^2 - 4ac$.
$\Delta > 0$ Luego la ecuación tendrá dos soluciones reales.	Ahora bien, aplicando la técnica, como el signo del discriminante es > 0, se tendrá que la ecuación tiene dos soluciones reales. Esto se debe a que, si miramos la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, lo que está dentro de la raíz cuadrada es mayor que cero, y por tanto, la raíz cuadrada existe y es un número real.

Apartado d):

$x^2 + 2x = 0$	Identificamos los valores de a, b y c. $a = 1, b = 2$ y $c = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0$ $\Delta = 4 - 0 = 4$	Calculamos el discriminante.
$\Delta > 0$ Luego la ecuación tendrá dos soluciones reales.	A partir del signo del discriminante, deducimos el número de solucione de la ecuación.

Análogamente a las técnicas anteriores, el resto de apartados del ejercicio 5 quedan propuestos para que los resuelva el alumno durante la clase de manera individual.

En lo que resta de sesión, haciendo referencia a la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, el docente explicará en la pizarra dos propiedades que cumplen las soluciones de una ecuación de segundo grado.

1. La suma de las dos soluciones de una ecuación de segundo grado es $\frac{-b}{a}$.

   En efecto, las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son:

   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   Si las sumamos:

   $$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

   $$= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

2. El producto de las dos soluciones de una ecuación de segundo grado es $\frac{c}{a}$.

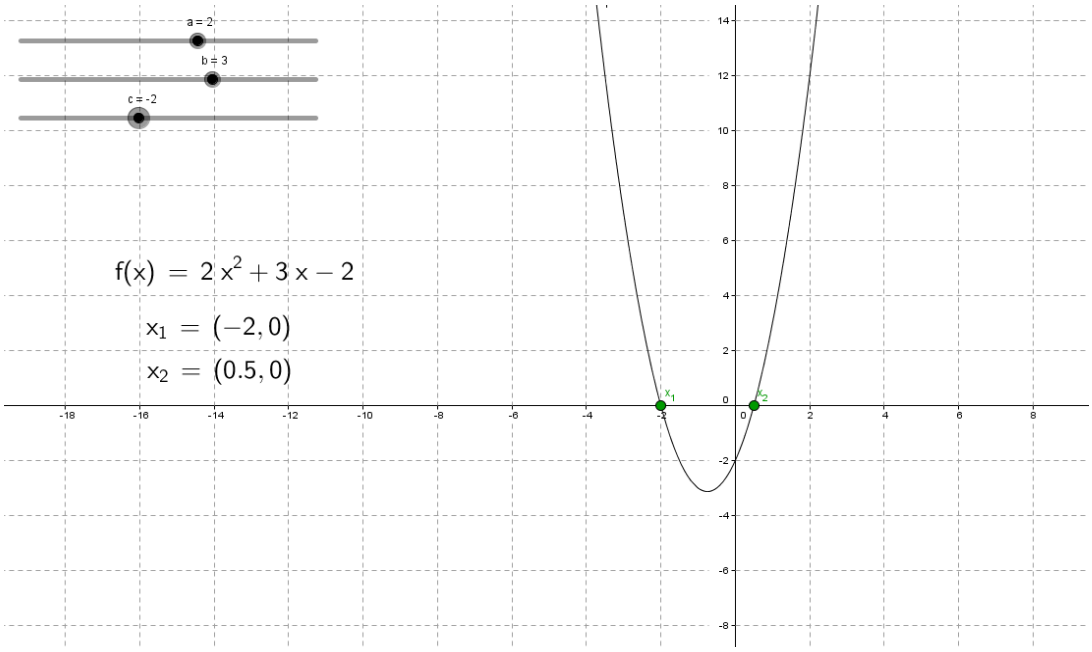
   En efecto, procediendo de manera análoga a la propiedad anterior se tiene que:

   $$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a \cdot 2a} =$$

   $$= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

SESIÓN 9:

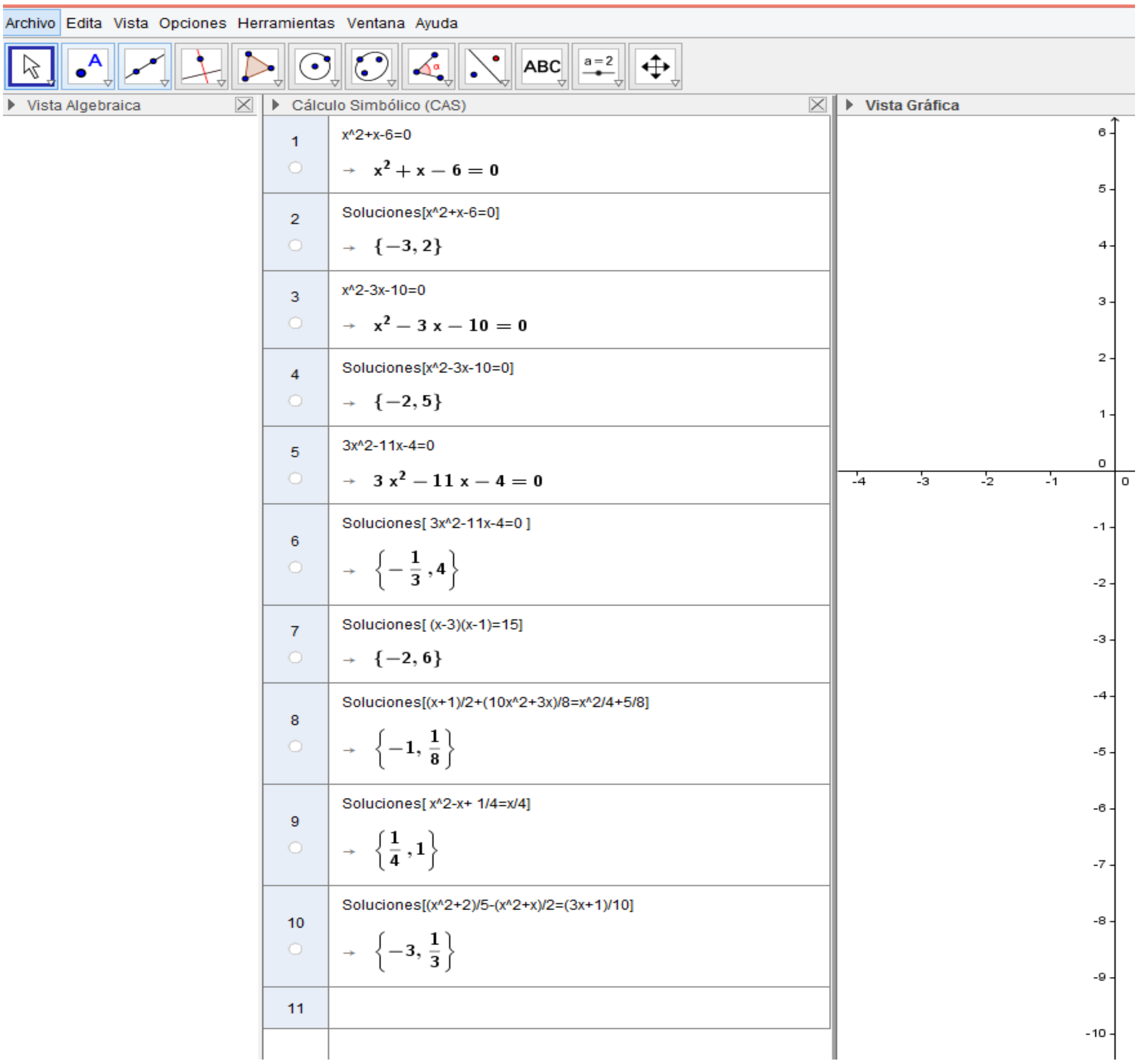
Esta sesión, los alumnos trabajarán junto con el docente, con el programa GeoGebra. Se les presentarán los siguientes contenidos:



A través de esto, los alumnos podrán comprobar que resolver una ecuación es calcular los puntos de corte con el eje de abscisas de la función correspondiente. Así, para las ecuaciones de segundo grado, podrán ver que la función de que se trata es una parábola (aunque esto es contenido mínimo de cuarto curso), observando ahora cómo deslizando las constantes a, b y c, de la forma canónica $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones "x_1, x_2" van variando, obviando la segunda coordenada $y = 0$, que siempre es así al estar calculando los puntos de corte con dicho eje. Además, en estas ecuaciones, al deslizar las constantes, pasaremos por casos en los que haya dos soluciones reales (dos puntos de corte), una solución real doble (un único punto de corte), o ninguna solución real (ningún punto de corte).

Además, para que los alumnos comprueben que realmente esto se cumple, se les pedirá que resuelvan alguna ecuación, para comprobar posteriormente con GeoGebra, que efectivamente da la misma solución.

Este programa también permite resolver ecuaciones solo con introducir la expresión de la ecuación que se quiere calcular. Así, los alumnos podrán conocer un programa con el cual, de una manera rápida y eficaz, puedan resolver ecuaciones de segundo grado.



Con esto, podrán comprobar si las ecuaciones que han ido resolviendo en el aula las han resuelto correctamente o no.

<u>SESIÓN 10:</u>

En esta sesión se realizará la prueba expuesta en el apartado I sobre la evaluación.

<u>SESIÓN 11:</u>

Durante esta sesión se procederá a la entrega y corrección de la prueba escrita realizada en la sesión anterior.

Para ello, antes de entregar individualmente a cada alumno las calificaciones obtenidas, resolverán la prueba en la pizarra para que vean la solución correcta de cada una de las preguntas. En este proceso, el docente pedirá voluntarios para la realización de los ejercicios en la pizarra, y así poder observar el porqué de los errores cometidos, y las explicaciones dadas por los alumnos.

Una vez corregida toda la prueba, el profesor la entregará corregida individualmente a cada alumno para que puedan observar su calificación y los errores cometidos.

Así, los alumnos podrán preguntar cualquier duda que les surja en cuanto a los criterios de calificación y en cuanto a la nota obtenida.

En lo que sigue, mostraré una tabla con la temporalización aproximada de cada aspecto tratado en las sesiones. Consideraré que cada sesión tiene una duración de 50 minutos aproximadamente.

Sesión 1	Sesión de repaso.	50'
Sesión 2	Problemas de razón de ser. (Aproximadamente 10 ' por problema)	50'
Sesión 3	Ejercicio 1. (Alumnos)	5'
	Problemas del 1 al 6.	45'
Sesión 4	Problemas del 7 al 12.	50'
Sesión 5	Técnica ecuaciones de segundo grado incompletas: apartados a) y c) del ejercicio 2. (Docente)	20'
	Resto de apartados del ejercicio 2. (Alumnos)	30'
Sesión 6	Técnica de completar cuadrados para resolver ecuaciones de segundo grado: tres ejemplos prácticos. (Docente)	15'

	Ejercicio 3. (Alumnos)	35'
Sesión 7	Técnica de resolución de ecuaciones de segundo grado mediante la fórmula general: tecnología y apartados a), b) y e) del ejercicio 4. (Docente)	30'
	Resto de apartados del ejercicio 4. (Alumnos)	20'
Sesión 8	Técnica para calcular el número de soluciones de una ecuación de segundo grado: apartados a) y d) del ejercicio 5. (Docente)	30'
	Resto de apartados de ejercicio 5. (Alumnos)	10'
	Propiedades de las soluciones de una ecuación de segundo grado.	10'
Sesión 9	GeoGebra.	50'
Sesión 10	Prueba escrita.	50'
Sesión 11	Corrección y entrega de la prueba.	50'

I. Sobre la evaluación.

A continuación se muestra la prueba escrita sobre ecuaciones de segundo grado para evaluar el aprendizaje realizado por los alumnos.

Durante la prueba los alumnos no podrán emplear la calculadora, ya que para los cálculos presentes no es necesaria, y de esta manera ejercitan también el cálculo mental.

Además, cada una de las preguntas del examen está valorada con la misma puntuación.

EXAMEN 3º ESO

<u>ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO</u>

1. Dada una ecuación de segundo grado completa, $ax^2 + bx + c = 0$, demuestra que la suma de las soluciones de dicha ecuación es igual a $\frac{-b}{a}$.

2. Sin resolver la ecuación, averigua el número de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:
   a) $x^2 + 3x + 2 = 0$
   b) $x^2 - x + 1 = 0$
   c) $x^2 - 16x + 64 = 0$
   d) $-2x^2 + 5x + 2 = 0$

3. Sin resolverlas, completa cuadrados en las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:
   a) $x^2 + 3x + 1 = 0$
   b) $3x^2 - 5x + 6 = 0$
   c) $2x^2 + 4x - 3 = 0$
   d) $x^2 - 2x - 8 = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:
   a) $3x^2 + x - 1 = 0$
   b) $3x^2 - 12 = 0$

c) $x^2 + 6x = 0$

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

e) $\frac{3x}{2} = 1 + \frac{x^2+4}{4}$

5. Halla dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 182. Escribe todos los casos posibles en el caso de que hubiera más de uno.

6. Un campo rectangular tiene $2400\,\mathrm{m}^2$ de superficie y $20\,\mathrm{m}$ más de largo que de ancho. Halla las dimensiones.

7. Se desea construir un depósito de agua de $90\,\mathrm{m}^3$ de capacidad, con forma de ortoedro de base cuadrada y de $2{,}5\ \mathrm{m}$ de altura. ¿Cuánto tiene que medir el lado de la base?

8. Halla dos números enteros tales que su producto sea 165, y la diferencia entre el mayor y el menor sea 4. ¿Existe solo un par de números cumpliendo esto? En caso de que la respuesta sea negativa, expresa todos los casos posibles.

En lo que sigue, se plasmará para cada una de las preguntas del examen, la respuesta que se espera que contesten los alumnos, y los criterios de calificación empleados. Así mismo, basándome en la experiencia en el Prácticum, también se reflejarán los errores más frecuentes cometidos por los alumnos en cada una de las preguntas.

PREGUNTA 1:

En la sesión 8 se explicó esta proposición junto con la análoga para el producto de soluciones. Así, los alumnos deben tener en cuenta la fórmula de segundo grado y las dos soluciones que resultan. El resto de la resolución, se basa en operaciones aritméticas en las que, en principio, el alumno no debe tener dificultades.

La tarea principal de esta pregunta es que el alumno elabore una estrategia a seguir y concluya la solución.

La tarea auxiliar específica es que aplique la fórmula de segundo grado, diferenciando las dos soluciones.

Las tareas auxiliares generales son las operaciones aritméticas realizadas hasta llegar a la solución.

Como se resolvió en la sesión 8, se espera que los alumnos contesten de la misma manera, ya bien sea porque lo entendieron o porque lo estudiaron de memoria.

Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, según la fórmula general, son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así, la suma de las soluciones será:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Por tanto, podemos concluir que la suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es $\frac{-b}{a}$.

Con esta pregunta, en principio los alumnos no deberían tener ninguna dificultad para afrontarla, ya que ha sido realizada en el aula. Los alumnos tienden a aprenderse la teoría de memoria, por lo que se pueden cometer errores al olvidar algún paso. Para evitarlos, es necesario hacer hincapié en que los alumnos razonen el porqué de cada paso realizado.

Para calificar esta pregunta, debido a que ha sido resuelta en clase, la corrección será estricta y se exigirá que la respuesta sea la correcta en su totalidad. En caso contrario la calificación será nula.

PREGUNTA 2:

En esta pregunta el alumno debe aplicar la técnica de "Número de soluciones de una ecuación de segundo grado". Se trata de un ejercicio en el que el alumno, solo leyendo el enunciado, ya debería saber el método a seguir. Sin embargo, aunque se espera que los alumnos apliquen esta técnica, pueden existir casos en los que apliquen la técnica de completar cuadrados y de ahí deduzcan el número de soluciones de la ecuación.

Por tanto, si los alumnos realizan el ejercicio con la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$, la tarea principal será que apliquen bien dicha fórmula y concluyan la solución; y la tarea auxiliar general es la realización de las operaciones aritméticas necesarias para su resolución. De otra forma, si los alumnos proceden completando cuadrados sin resolver la ecuación, la tarea principal será que procedan correctamente hasta completar cuadrados y concluyan a partir de ahí la solución; y la tarea auxiliar general, de la misma manera, será la realización de todas las operaciones aritméticas necesarias.

Según lo explicado en el aula, procediendo mediante la técnica "Número de soluciones de una ecuación de segundo grado", se espera que los alumnos procedan de la siguiente manera:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

En este caso $a = 1, b = 3$ y $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

Por tanto, esta ecuación tiene dos soluciones reales.

b) $x^2 - x + 1 = 0$

En este caso $a = 1, b = -1$ y c $= 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

Por tanto, esta ecuación no tiene ninguna solución real.

c) $x^2 - 16x + 64 = 0$

En este caso $a = 1, b = -16$ y $c = 64$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64 = 0$

Por tanto, esta ecuación tiene una única solución real doble.

d) $-2x^2 + 5x + 2 = 0$

En este caso $a = -2, b = 5$ y $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25 + 16 = 41 > 0$

Por tanto, esta ecuación tiene dos soluciones reales.

En esta pregunta, los errores que los alumnos pueden cometer son: olvidarse la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$, operar mal la fórmula o razonar incorrectamente qué ocurre según el signo de Δ. Para evitarlos, es importante que los alumnos entiendan el porqué del procedimiento de dicha técnica, es decir, que razonen a partir de la fórmula general qué ocurre con las soluciones de la ecuación en función del discriminante.

Para calificar esta pregunta nos basaremos en los siguientes criterios:

- Si realiza correctamente la primera tarea principal (aplicar la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$), obtendrá un 40% de la nota total. En caso contrario, la calificación será nula.
- Una vez realizada correctamente esta tarea, si la tarea auxiliar general (operaciones aritméticas) es correcta, añadiremos un 20% a la calificación. En caso contrario se parará la corrección y el alumno habrá obtenido el 40% de la nota total.
- Finalmente, si las operaciones aritméticas han sido correctamente efectuadas, se evaluará la segunda tarea principal (concluir la solución según el signo del discriminante). Si esta resolución es correcta, el alumno añadirá el 40% restante de la nota final.

Si el alumno no aplicara la fórmula del discriminante, y dedujera el número de soluciones a partir de la técnica de completar cuadrados, los criterios a seguir serian:

- Si completa cuadrados correctamente obtendrá el 50% de la nota total.

- Si a partir de ahí, concluye correctamente el número de soluciones se añadirá el 50% restante.

PREGUNTA 3:

Para resolver esta pregunta, el alumno debe aplicar la técnica de completar cuadrados, hasta llegar, mediante un cambio de variable, a una ecuación de segundo grado incompleta. Como el enunciado no pide resolver la ecuación, basta con que lleguen al paso 4º de la técnica "Completar cuadrados" vista en el apartado F sobre las técnicas.

La tarea principal en esta pregunta, se trata de que los alumnos apliquen los pasos correctamente hasta llegar a completar cuadrados.

La tarea auxiliar general es la realización de cada una de las operaciones aritméticas necesarias hasta llegar a la solución correcta.

Para resolver esta pregunta, en base a lo explicado en el aula, y a los pasos a seguir en la técnica a aplicar, el alumno debería proceder de la siguiente manera:

a) $x^2 + 3x + 1 = 0$

$$x^2 + 3x = -1$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = -1$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -1 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

b) $3x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + 2 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x = -2$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} = -2$$

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=-2+\frac{25}{36}$$

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=-\frac{47}{36}$$

c) $2x^2+4x-3=0$

$$x^2+2x-\frac{3}{2}=0$$

$$x^2+2x=\frac{3}{2}$$

$$(x+1)^2-1=\frac{3}{2}$$

$$(x+1)^2=\frac{3}{2}+1$$

$$(x+1)^2=\frac{5}{2}$$

d) $x^2-2x-8=0$

$$x^2-2x=8$$

$$(x-1)^2-1=8$$

$$(x-1)^2=8+1$$

$$(x-1)^2=9$$

Los errores más comunes que los alumnos habitualmente suelen cometer al aplicar la técnica de completar cuadrados, se encuentran en el tercer paso de dicha técnica. En muchas ocasiones se debe a la falta de comprensión de las identidades notables, que al no aplicar bien estas fórmulas, completan cuadrados incorrectamente. Para solventar estos errores, es necesario que los alumnos practiquen esta técnica con la realización de varios ejercicios, y así adquieran manejo y agilidad de la técnica.

Para calificar cada uno de los apartados de esta pregunta nos basaremos en los siguientes criterios:

- Si el alumno realiza correctamente cada uno de los pasos hasta llegar a completar cuadrados (tarea principal), obtendrá el 80% de la nota total.

- Si las operaciones aritméticas realizadas (tarea auxiliar general) son correctas, se añadirá el 20% restante.

PREGUNTA 4:

En esta pregunta encontramos ecuaciones de segundo grado completas e incompletas. El alumno debe saber reconocer en cada caso la técnica a aplicar; "Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas", "Resolución de ecuaciones de segundo grado completas", y "Resolución de ecuaciones de segundo grado (método general)". Esta última técnica solo la aplicará en el caso de que la ecuación tenga una fisionomía complicada (paréntesis, denominadores, etc.) como es en el caso del último apartado.

Apartado a): La tarea principal es que el alumno detecte que se trata de una ecuación de segundo grado completa, la solucione o bien mediante la técnica de completar cuadrados, o bien mediante la fórmula de segundo grado, y concluya las soluciones. En el caso de que la solucione mediante la técnica de completar cuadrados, la resolución de la ecuación de segundo grado incompleta resultante tras hacer el cambio de variable, se considerará tarea auxiliar específica. Las tareas auxiliares generales son las operaciones aritméticas realizadas.

En base a los conocimientos adquiridos, los alumnos podrían contestar de estas dos maneras:

Completando cuadrados; $$x^2+\frac{x}{3}-\frac{1}{3}=0$$ $$x^2+\frac{x}{3}=\frac{1}{3}$$ $$\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}=\frac{1}{3}$$	Aplicando la fórmula de segundo grado: $$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ e identificando que, en este caso $a=3,\ b=1$ y $c=-1$ se tiene que:

$\left(x+\frac{1}{6}\right)^2=\frac{13}{36}$ $\left(z=x+\frac{1}{6}\right)\ z^2=\frac{13}{36}$ $z=\pm\sqrt{\frac{13}{36}}=\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$ $z=x+\frac{1}{6}=\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$ $x=-\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{13}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$	$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$

Así, las soluciones de la ecuación son: $\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ y $\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$

Apartado b): La tarea principal es que el alumno detecte que se trata de una ecuación de segundo grado incompleta en la que falta el término literal, y aplique la técnica correspondiente. Las tareas auxiliares generales son las operaciones aritméticas necesarias para la resolución del ejercicio.

Se trata de una ecuación de segundo grado incompleta en la que falta el término literal, luego los alumnos deberán proceder de la siguiente manera:

$3x^2=12$

$x^2=\frac{12}{3}$

$x^2=4$

$x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

Luego las soluciones de la ecuación son 2 y -2.

Apartado c): La tarea principal, al igual que en el apartado anterior, es que el alumno reconozca que se trata de una ecuación de segundo grado incompleta en la que falta el término independiente, y aplique la técnica correspondiente; es decir, que realice factor común y separe en las dos ecuaciones resultantes. La tarea auxiliar específica es la realización de las ecuaciones resultantes, y las tareas auxiliares generales son las operaciones aritméticas realizadas.

Se trata de una ecuación de segundo grado incompleta en la que falta el término independiente, luego el alumno deberá proceder de la siguiente manera:

$$x(x+6)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x+6=0 \;\rightarrow\; x=-6 \end{cases}$$

Luego las soluciones de la ecuación son 0 y $-$ 6.

Apartado d): Para la resolución de este apartado, distribuiremos las tareas de la misma manera que en el apartado a). Así, en base a los conocimientos adquiridos, los alumnos podrían contestar de estas dos maneras:

Completando cuadrados; $x^2-6x=-9$ $(x-3)^2-9=-9$ $(x-3)^2=0$ $(z=x-3)\ z^2=0$ $z=0$ (doble) $z=x-3=0$ (doble) $x=3$ (doble)	Aplicando la fórmula de segundo grado: $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e identificando que, en este caso $a=1,\ b=-6$ y $c=9$ se tiene que: $x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}$ $x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{0}}{2}=\dfrac{6}{2}$ $=3$ (doble)

Así, se puede dar el resultado de las siguientes maneras: 3 (doble) o 3 y 3.

Apartado e): Al ser una ecuación con una fisionomía más complicada que las anteriores, la tarea principal es que el alumno sepa eliminar los denominadores y llegue a una ecuación de segundo grado completa. La tarea auxiliar específica es la resolución de la ecuación de segundo grado que quede tras simplificar la ecuación original, y la tarea auxiliar general es el cálculo de las operaciones aritméticas realizadas.

Lo primero que los alumnos deberían realizar es quitar los denominadores. Para ello se calcula el mínimo común múltiplo entre 2 y 4, que es 4. Se multiplica ambos miembros por 4 y procedemos como sigue:

$$\frac{4\cdot 3x}{2} = 4\cdot 1 + \frac{4\cdot (x^2+4)}{4}$$

$$6x = 4 + (x^2+4)$$

$$6x = x^2 + 8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Se trata de una ecuación de segundo grado completa. Así, llegando a este paso, los alumnos pueden procedes de estas dos maneras:

Completando cuadrados;	Aplicando la fórmula de segundo grado:
$x^2 - 6x = -8$ $(x-3)^2 - 9 = -8$ $(x-3)^2 = 1$ $(z = x-3)\ z^2 = 1$ $z = \pm 1$ $z = x - 3 = \pm 1$ $x = 3 \pm 1$	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e identificando que, en este caso $a = 1,\ b = -6$ y $c = 8$ se tiene que: $x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1}$ $x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$ $= \frac{6 \pm 2}{2}$

Así, las soluciones de la ecuación son: $\frac{6+2}{2} = 4$ y $\frac{6-2}{2} = 2$

En las ecuaciones de segundo grado completas (Ejercicio 4 a), d) y e)), si los alumnos las resuelven mediante la fórmula general, los errores que pueden cometer son:

- Olvidar la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- Sustituir mal cada una de las letras.
- Realizar mal las operaciones aritméticas.
- Razonar incorrectamente las soluciones resultantes.

Si en caso contrario, las resuelven mediante la técnica de completar cuadrados, al igual que ocurre en la pregunta 3, los errores más comunes se encuentran al completar cuadrados hasta llegar a una ecuación de segundo grado incompleta.

En las ecuaciones de segundo grado incompletas en las que falta el término literal (Ejercicio 4 b)) el error más frecuente es olvidarse de $\pm$ para concluir las soluciones.

En las ecuaciones de segundo grado incompletas en las que falta el término independiente (Ejercicio 4 c)), se pueden cometer errores al sacar factor común y al separar correctamente las dos ecuaciones de primer grado resultantes. Así, los alumnos suelen olvidar la solución $x = 0$.

Para calificar esta pregunta nos basaremos en los siguientes criterios:

○ <u>Apartados a) y d):</u>

- Si aplica correctamente la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, o en otro caso, completa cuadrados bien, obtendrá un 40% de la nota total. En caso contrario, la calificación será nula.
- Una vez realizada correctamente esta tarea, en el caso de que aplique la fórmula, si la tarea auxiliar general (operaciones aritméticas) es correcta, añadiremos un 20% a la calificación. En el caso de que utilice la técnica de completar cuadrados, si realiza bien la ecuación de segundo grado incompleta resultante tras realizar el cambio de variable, añadiremos un 30% a la calificación. En caso contrario se parará la corrección.
- Finalmente, si el alumno concluye correctamente las soluciones de la ecuación, se añadirá la puntuación restante del ejercicio.

- Apartado b):

Debido a la simplicidad de la técnica a usar en este apartado, para su corrección, se valorará que la ecuación esté correctamente resuelta en su totalidad. Por tanto, la pregunta será valorada con un 100% si está bien resuelta, y en caso contrario la puntuación será nula.

- Apartado c):

- Si realiza correctamente la primera tarea principal (realizar factor común y separar en las dos ecuaciones resultantes) obtendrá un 40% de la nota total. En caso contrario, la calificación será nula.
- Una vez realizada correctamente esta tarea, por cada ecuación realizada correctamente en su totalidad, añadiremos un 30% a la calificación. En caso contrario se parará la corrección y el alumno habrá obtenido el 40% de la nota total.

- Apartado e):

- Si realiza correctamente la tarea principal (eliminar los denominadores y llegar a una ecuación de segundo grado con todos los términos en el primer miembro) obtendrá un 40% de la nota total. En caso contrario, la calificación será nula.
- Una vez realizada correctamente esta tarea, si aplica correctamente la fórmula para ecuaciones de segundo grado completas, o bien, completa cuadrados correctamente, añadiremos un 30% a la calificación. En caso contrario se parará la corrección y el alumno habrá obtenido el 40% de la nota total.
- Si las operaciones aritméticas han sido correctamente efectuadas, añadirá un 20% a la calificación.
- Finalmente, si concluye correctamente las soluciones de la ecuación se añadirá el 10% restante.

PREGUNTA 5:

Este problema pertenece al campo C2-T3. El alumno debe comprender lo que nos pide el problema antes de comenzar a realizar operaciones. Así, es necesario un buen planteamiento del mismo antes de formar la ecuación de segundo grado resultante.

La tarea principal del problema es que el alumno elabore una estrategia de resolución, plantee la ecuación de segundo grado, y además, concluya la solución respondiendo a lo que pregunta el problema.

La tarea auxiliar específica es que resuelva la ecuación de segundo grado planteada.

Las tareas auxiliares generales son las operaciones aritméticas necesarias para la resolución del problema.

Para la resolución de este problema, lo primero que se debe plantear es que, si a un número lo llamamos x, su consecutivo será $x+1$.

Así, la ecuación a plantear es la siguiente:

$$x(x+1)=182$$
$$x^2+x=182$$
$$x^2+x-182=0$$

Observamos que nos ha dado una ecuación de segundo grado completa, luego los alumnos pueden proceder de las dos maneras siguientes:

Completando cuadrados;	Aplicando la fórmula:
$x^2+x=182$ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=182$ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{729}{4}$ $\left(z=x+\frac{1}{2}\right)\ z^2=\frac{729}{4}$ $z=\pm\sqrt{\frac{729}{4}}=\pm\frac{27}{2}$ $z=x+\frac{1}{2}=\pm\frac{27}{2}$ $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{27}{2}=\frac{-1\pm 27}{2}$	$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e identificando que, en este caso $a=1,\ b=1$ y $c=-182$ se tiene que: $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-182)}}{2\cdot 1}$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+728}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{729}}{2}$ $=\frac{-1\pm 27}{2}$

Así, las soluciones de la ecuación son: $\frac{-1+27}{2}=13$ y $\frac{-1-27}{2}=-14$

Por tanto existen dos casos posibles de números enteros de manera que el producto por su siguiente sea 182:

1º. 13 y 14

2º. -14 y -13

PREGUNTA 6:

Este problema pertenece al campo C3-T3. Al igual que en el problema anterior, es necesario que el alumno comprenda lo que nos narra el problema, y en caso de que le sea necesario, es conveniente que realice un dibujo plasmando los datos. Así, le será más sencillo plantear la ecuación de segundo grado.

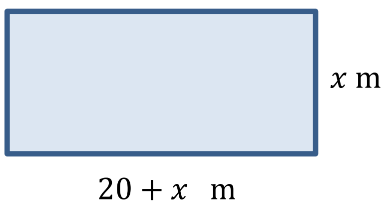
En este problema, las tareas que distinguiremos son las mismas que en el problema anterior:

La tarea principal del problema es que el alumno elabore una estrategia de resolución, plantee la ecuación de segundo grado, y además, concluya la solución respondiendo a lo que pregunta el problema.

La tarea auxiliar específica es que resuelva la ecuación de segundo grado planteada.

Las tareas auxiliares generales son las operaciones aritméticas necesarias para la resolución del problema.

Para plantear este problema, es aconsejable que los alumnos realicen el dibujo para plasmar los datos que nos da el enunciado:



Llamando x a la anchura del campo, tendremos que el largo, como son 20 m más, medirá $20 + x$ metros.

Ahora bien, el área del rectángulo es "*base* · *altura*", luego $A = (20 + x) \cdot x$

Y enlazando ahora con el dato del enunciado, que la superficie del campo es $2400\ \mathrm{m}^2$ planteamos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$(20+x)\cdot x = 2400$$

$$20x + x^2 = 2400$$

$$x^2 + 20x - 2400 = 0$$

Se trata de una ecuación de segundo grado completa, luego los alumnos pueden proceder de las dos maneras siguientes:

Completando cuadrados; $x^2+20x=2400$ $(x+10)^2-100=2400$ $(x+10)^2=2500$ $(z=x+10)\ z^2=2500$ $z=\pm\sqrt{2500}=\pm 50$ $z=x+10=\pm 50$ $x=-10\pm 50$	Aplicado la fórmula: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e identificando que, en este caso $a=1,\ b=20$ y $c=-2400$ se tiene: $x=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot 1\cdot(-2400)}}{2\cdot 1}$ $x=\frac{-20\pm\sqrt{10000}}{2}=\frac{-20\pm 100}{2}$

Así, las soluciones de la ecuación son: $\frac{-20+100}{2}=40$ y $\frac{-20-100}{2}=-60$

Ahora bien, al tratarse de longitudes, la solución negativa carece de sentido, por tanto nos quedamos únicamente con $x=40$.

Volviendo a nuestro dibujo, obtenemos que las dimensiones del campo son:
Ancho: $x=40$ m

Largo: $20+x=20+40=60$ m.

PREGUNTA 7:

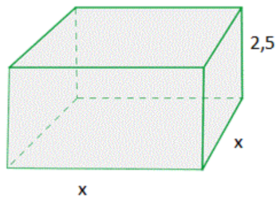
Se trata de un problema del campo C3-T1. Al ser geométrico, es conveniente que el alumno plasme los datos en un dibujo adecuado para que le sea más sencillo plantear la ecuación.

La tarea principal del problema es que el alumno elabore una estrategia de resolución, plantee la ecuación de segundo grado, y además, concluya la solución respondiendo a lo que pregunta el problema.

La tarea auxiliar específica es que resuelva la ecuación de segundo grado planteada.

Las tareas auxiliares generales son las operaciones aritméticas necesarias para la resolución del problema.

Para plantear este problema, realizaremos el dibujo del ortoedro para plasmar los datos que nos da el enunciado.



Llamando x al lado del cuadrado de la base, tendremos que el volumen del ortoedro es: $V = 2{,}5 \cdot x \cdot x = 2{,}5x^2 \ \mathrm{m}^3$

Ahora bien, el enunciado nos dice que el depósito tiene una capacidad de $90 \ \mathrm{m}^3$, por tanto la ecuación de segundo grado que el alumno debe plantear es:

$$2{,}5x^2 = 90$$

$$x^2 = \frac{90}{2{,}5} = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

Finalmente, al tratarse de longitudes, podemos deducir que el lado de la base medirá 6 m.

PREGUNTA 8:

Nos encontramos ante un problema del campo C2-T3 en el que se plantea un sistema de ecuaciones. Al igual que en los problemas anteriores, la tarea principal del problema es que el alumno elabore una estrategia de resolución, plantee la ecuación de segundo grado, y además, concluya la solución respondiendo a lo que pregunta el problema. La tarea auxiliar específica es que resuelva la ecuación de segundo grado planteada, y las tareas auxiliares generales son las operaciones aritméticas necesarias para la resolución del problema.

Para plantear este problema, el alumno debe identificar cuáles son las incógnitas. Por ejemplo, si se llama x al número entero mayor, e y al número entero menor, el alumno debería plantear el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x \cdot y = 165 \end{cases}$$

En este paso, el alumno puede resolver el sistema con cualquiera de los métodos vistos para ello, sin embargo, como en el aula el docente lo ha resuelto mediante el método de sustitución, se espera que el alumno lo resuelva de la misma manera. Aun así, se calificará de la misma manera si la resolución es correcta y se usa otro método.

Así, el sistema resultaría de la siguiente manera:

$\begin{cases} x - y = 4 \\ x \cdot y = 165 \end{cases}$ → Despejando x de la primera ecuación: $x = y + 4$, y sustituyéndola en la segunda, se tiene que:

$$(y + 4) \cdot y = 165$$

Llegados a este punto, el alumno puede proceder mediante la técnica de completar cuadrados, o usando la fórmula para ecuaciones de segundo grado completas.

Completando cuadrados;	Aplicando la fórmula general:
$(y + 4) \cdot y = 165$	$(y + 4) \cdot y = 165$
$y^2 + 4y = 165$	$y^2 + 4y - 165 = 0$
$(y + 2)^2 - 4 = 165$	$y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-165)}}{2}$
$(y + 2)^2 = 169$	$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 660}}{2}$
$(\, z = y + 2)\;\; z^2 = 169$	$y = \frac{-4 \pm \sqrt{676}}{2}$
$z = \pm\sqrt{169} = \pm 13$	$y = \frac{-4 \pm 26}{2}$
$z = y + 2 = \pm 13$	
$y = -2 \pm 13$	

Por tanto se ha obtenido que el número entero menor, y, es 11 o -15. Así, volviendo a la primera ecuación del sistema: $x = y + 4$, se tiene que $x = 15$ o $x = -11$, respectivamente.

Finalmente, se concluye que existen dos pares de números enteros satisfaciendo el enunciado del problema:

1º. 11 y 15

2º. -15 y -11

Las preguntas 5, 6, 7 y 8 se basarán en los mismos criterios de calificación:

- Cada una de las tareas principales (elaborar un plan a seguir para su resolución, plantear la ecuación, y concluir la solución en base al contexto del problema), se valorará con un 30% de la nota final.
- La correcta realización de la ecuación resultante se evaluará sobre el 10% restante.

En estas preguntas, el objetivo principal es que los alumnos razonen y elaboren una estrategia adecuadamente. Así, los errores más comunes los encontramos en este paso, y no en la resolución de la ecuación que los alumnos plantean. Para solventarlo, considero que es necesario dejarles tiempo en el aula para que los alumnos reflexionen por ellos mismos, y poder ayudarles así en este proceso.

J. Sobre la bibliografía y páginas web.

Legislación

Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón.

Libros de texto:

Matemáticas 3º ESO 2º Ciclo. (1995). Paseo San Juan Bosco, 62, Barcelona: Edebé. ISBN: 84-236-4095-7

Coriat, M., Marín del Moral, A., Palomino, G.F., Rico, L. (1994). *Educación Secundaria Obligatoria, 3º ESO Matemáticas.* Avda. San Francisco Javier, 22, Sevilla: Algaida Editores. ISBN: 84-7647-474-1

Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bellón, M., Hervás, J.C., Fernández, I. (2006). *3º ESO Matemáticas, Esfera.* Cabo de Gata, 1-3, Madrid: Ediciones SM. ISBN: 978-84-675-1177-2

Artículos:

Fernández Reyes, M. (1983). Resolución de problemas mediante ecuaciones: aspectos metodológicos. *Números,* Volumen 6, 39 – 44. Recuperado de

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/06/Articulo07.pdf

Webgrafía:

Wikipedia. http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n

Xunta de Galicia. I.E.S. Fernando de Mena. Departamento de Matemáticas. http://www.edu.xunta.es/centros/epapualbeiros/system/files/ficha_problemas_planteamiento.pdf

José Aurelio Pina Romero. Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. http://www.pinae.es/wp-content/uploads/2013/10/hoja08_3esoPRCONECUACIONES.pdf

Va de números. http://www.vadenumeros.es/tercero/problemas-segundo-grado.htm

Glosarios en espiral. Blog de Federico Arregui, para Matemáticas de 2º de ESO https://glosarios.files.wordpress.com/2009/03/problemas-con-ecuaciones-de-segundo-grado2.pdf

La casa de Gauss. https://lacasadegauss.files.wordpress.com/2012/12/problemas-de-ecuaciones-de-segundo-grado.pdf

Raquel Hernández. Apuntes Marea Verde. 3º ESO Capítulo 5: Ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales.

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/05_Ecuaciones2.pdf

Wikipedia. http://es.wikipedia.org/wiki/Al-Juarismi

Instituto nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/alkwacion2.htm

Università degli studi di Palermo. http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

GeoGebra:

Resolución de ecuaciones de segundo grado. Parábolas.

https://tube.geogebra.org/material/show/id/1311705

Resolución de ecuaciones de segundo grado.
https://tube.geogebra.org/material/show/id/1311713

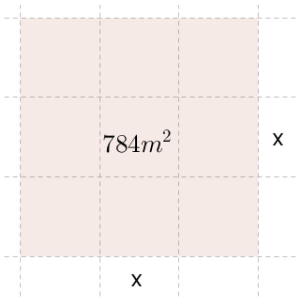
K. Anexos.

Se muestra a continuación la resolución de cada uno de los problemas planteados en el aula. Por ser un proceso menos costoso, en las ecuaciones de segundo grado completas, se plasmará su resolución mediante la fórmula general. Sin embargo, los alumnos disponen también de la técnica de completar cuadrados, a través de la cual pueden resolverlos.

<u>Problemas de razón de ser:</u>

- Un campo cuadrado tiene de área $784\ \mathrm{m}^2$. ¿Cuál es la longitud del lado del campo?

  Plasmemos en un dibujo lo que nos dice el enunciado:



Así, llamando x a la longitud del lado del cuadrado, si el área de cuadrado es $784\ \mathrm{m}^2$, la ecuación de segundo grado que se plantea es:

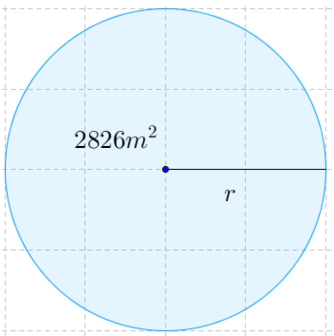
$$x^2 = 784$$

$$x = \pm\sqrt{784} = \pm 28$$

Por tanto, al estar tratando longitudes, la solución negativa no tiene sentido, y la solución del problema es: $28\ \mathrm{m}$ mide el lado del cuadrado.

- Una plaza de toros circular tiene un área de $2826\ \mathrm{m}^2$ aproximadamente. ¿Cuál es el diámetro de la plaza de toros?

  Plasmemos en un dibujo lo que nos dice el enunciado:



Así, llamando r a la longitud del radio de la circunferencia, si el área es $2826\ \text{m}^2$, la ecuación de segundo grado que se plantea es:

$$\pi r^2 = 2826$$

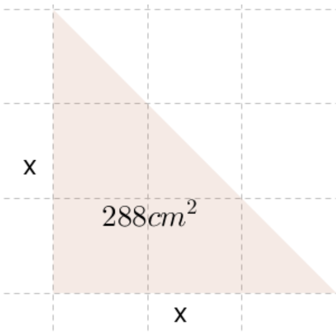
$$r^2 = \frac{2826}{\pi} \approx 900$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{2826}{\pi}} \approx \pm 30$$

Por tanto, al estar tratando longitudes, la solución negativa no tiene sentido, y la solución del problema es: $30\ \text{m}$ mide el radio de la circunferencia, luego $60\ \text{m}$ el diámetro.

- Un triángulo isósceles rectángulo presenta un área de $288\ \text{cm}^2$. ¿Cuánto mide la base y la altura de dicho triángulo?

  Plasmemos en un dibujo lo que nos dice el enunciado:



Al tratarse de un triángulo rectángulo isósceles, la base y la altura deben medir lo mismo. Así, llamando x a la longitud de la base y la altura, como el área es $288\ \text{cm}^2$, la ecuación de segundo grado que se plantea es:

$$\frac{x \cdot x}{2} = 288$$

$$\frac{x^2}{2} = 288$$

$$x^2 = 576$$

$$x = \pm\sqrt{576} = \pm 24$$

Por tanto, al estar tratando longitudes, la solución negativa no tiene sentido, y la solución del problema es: $24\ \text{cm}$ mide la base y la altura del triángulo.

❖ Halla dos números enteros tales que su suma sea 61 y su producto 900.

Llamando x e y a dichos números enteros, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 61 \\ x \cdot y = 900 \end{cases}$$

Procediendo mediante sustitución: $y = 61 - x$

$$x \cdot (61 - x) = 900$$

$$-x^2 + 61x - 900 = 0$$

$$x = \frac{-61 \pm \sqrt{61^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-900)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-61 \pm 11}{-2}$$

Luego las dos soluciones son: $x = 25$ y $x = 36$

Por tanto, para $x = 25, y = 61 - 25 = 36$, y para $x = 36, y = 61 - 36 = 25$.

Concluimos por tanto que los dos números enteros que satisfacen el enunciado son 25 y 36.

❖ ¿Qué dos números enteros cumplen que la diferencia entre el mayor y el menor es 5 y su producto es 500?

Llamando x al mayor de los dos números enteros, e y al menor, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x \cdot y = 500 \end{cases}$$

Procediendo mediante sustitución: $x = 5 + y$

$$(5 + y) \cdot y = 500$$

$$y^2 + 5y - 500 = 0$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-500)}}{2} = \frac{-5 \pm 45}{2}$$

Luego las dos soluciones son: $y = 20$ e $y = -25$

Por tanto, para $y = 20, x = 5 + 20 = 25$, y para $y = -25, x = 5 - 25 = -20$.

Concluimos por tanto que existen dos pares de números cumpliendo el enunciado: 20 y $25, -25$ y -20.

Campo de problemas:

1. La mitad del cuadrado de la edad de mi madre es 450. ¿Cuántos años tiene mi madre?

   $x \rightarrow$ Edad de mi madre.

$$\frac{x^2}{2} = 450$$

$$x^2 = 900$$

$$x = \pm 30$$

Como el problema trata de edades, la solución negativa no tiene sentido, luego mi madre tiene 30 años.

2. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 da exactamente su cuadrado?

   $x \rightarrow$ Edad de la persona.

$$15x = x^2$$

$$x^2 - 15x = 0$$

$$x(x - 15) = 0$$

$$x = 0, x = 15$$

Como el problema trata de edades, la solución $x = 0$ no tiene sentido, luego la persona tendrá 15 años.

3. La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?

	Ahora	Dentro de 24 años
Padre	x^2	$x^2 + 24$
Hijo	x	$x + 24$

Reflejando las incógnitas como muestra la tabla, la ecuación de segundo grado planteada es:

$$x^2 + 24 = 2(x + 24)$$

$$x^2 + 24 = 2x + 48$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-24)}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son: $x = 6$ y $x = -4$

Como el problema trata de edades, la solución negativa no tiene sentido, y así el hijo tiene 6 años y el padre 36.

4. Si multiplicamos la tercera parte de cierto número por sus tres quintas partes, obtenemos 405. ¿Cuál es ese número?

   $x \rightarrow$ Cierto número.

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{3x}{5} = 405$$

$$\frac{x^2}{5} = 405$$

$$x^2 = 2025$$

$$x = \pm\sqrt{2025} = \pm 45$$

Por tanto existen dos números satisfaciendo el enunciado; 45 y -45.

5. Calcula un número distinto de 0 de manera que, dos veces su cuadrado sea 7 veces dicho número.

   $x \rightarrow$ Número.

$$2x^2 = 7x$$

$$2x^2 - 7x = 0$$

$$x(2x - 7) = 0$$

$$x = 0, x = \frac{7}{2}$$

Como el enunciado nos indica que el número debe ser distinto de 0, la solución es $\frac{7}{2}$.

6. Hallar dos números positivos consecutivos cuyo producto sea 380.

   $x \rightarrow$ Número.

   $x + 1 \rightarrow$ Su consecutivo.

$$x(x + 1) = 380$$

$$x^2 + x - 380 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-380)}}{2} = \frac{-1 \pm 39}{2}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son: $x = 19, x = -20$.

Como el enunciado nos indica que el número tiene que ser positivo, concluimos que los números que satisfacen el enunciado son: 19 y 20.

7. Calcular dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 195.

   $2x + 1 \rightarrow$ Número impar

   $2x + 3 \rightarrow$ El número impar consecutivo.

$$(2x + 1)(2x + 3) = 195$$

$$4x^2 + 6x + 2x + 3 = 195$$

$$4x^2 + 8x - 192 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-192)}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 \pm 56}{8}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son: $x = 6, x = -8$.

Como el enunciado nos pide números naturales, nos quedamos únicamente con la solución positiva, y así, los números naturales impares consecutivos son 13 y 15.

8. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6.

Si denotamos por x e y a los factores que descomponen el número 8, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$$

Procediendo mediante sustitución: $y = 6 - x$

$$x(6 - x) = 8$$

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

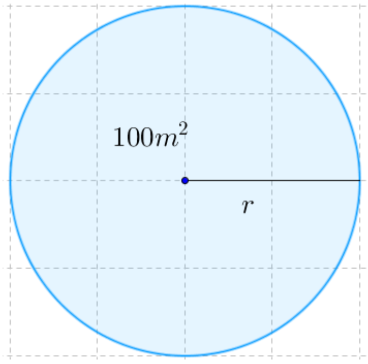
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 2}{-2}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son $x = 2, x = 4$.

Así, si $x = 2, y = 4$ y si $x = 4, y = 2$. Luego la descomposición queda: $8 = 2 \cdot 4$

9. El área de un terreno circular es de 100 m^2. Calcula la longitud del radio de dicho terreno.

Plasmemos en un dibujo lo que nos dice el enunciado:



Llamando r al radio del terreno circular, como el área es 100 m^2 se tendrá la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\pi r^2 = 100$$

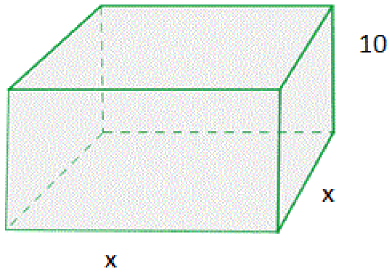
$$r^2 = \frac{100}{\pi} \approx 31{,}83$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{100}{\pi}} \approx 5{,}64$$

Como se trata de longitudes, la solución negativa no tiene sentido, y por tanto, el radio del terreno circular mide aproximadamente 5,64 m.

10. Un depósito de agua tiene forma de ortoedro cuya altura es 10 m y su capacidad 4000 m^3. Hallar el lado de la base sabiendo que es cuadrada.

    Plasmemos en un dibujo lo que nos dice el enunciado:



Llamando x al lado de la base del ortoedro, que es un cuadrado, el volumen del ortoedro es $V = x \cdot x \cdot 10$ y según el enunciado es 4000 m^3. Luego la ecuación que se plantea es:

$$10x^2 = 4000$$

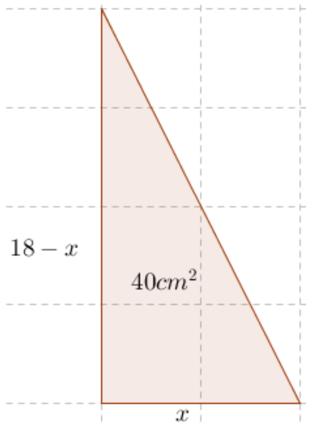
$$x^2 = 400$$

$$x = \pm\sqrt{400} = \pm 20$$

Como estamos tratando con longitudes, la solución negativa no tiene sentido, y por tanto la solución del problema es: 20 m mide el lado de la base.

11. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es 40 cm^2. Halla los catetos de este triángulo.

    Plasmemos en un dibujo lo que nos dice el enunciado:



Si llamamos x a uno de los catetos del triángulo, como la suma de los catetos es 18, el otro cateto medirá $18 - x$. Así, como el área es 40 cm^2 se tendrá la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\frac{x(18 - x)}{2} = 40$$

$$x(18 - x) = 80$$

$$-x^2 + 18x - 80 = 0$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-80)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-18 \pm 2}{-2}$$

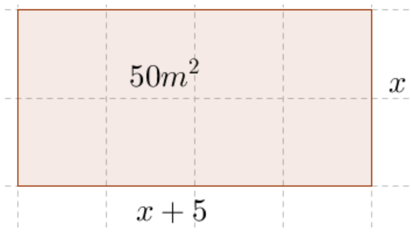
Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x = 8, x = 10$.

Así, si un cateto mide $x = 8$ cm, el otro medirá $18 - 8 = 10$ cm. Y si un cateto mide $x = 10\ cm$, el otro medirá $18 - 10 = 8$ cm.

Concluimos por tanto que los catetos miden 8 y 10 cm.

12. Uno de los lados de un rectángulo es 5 unidades mayor que el otro, y el área mide 50 m^2. Calcular las dimensiones del rectángulo.

    Plasmemos lo que nos indica el enunciado:



Si llamamos a uno de los lados del rectángulo x, como el otro lado es cinco unidades mayor, medirá $x + 5$. Así, como el área es $50\ \mathrm{m}^2$ se tiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x(x+5) = 50$$

$$x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-50)}}{2} = \frac{-5 \pm 15}{2}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son: $x = 5, x = -10$.

Ahora bien, como estamos tratando con longitudes, la solución negativa no tiene sentido, y así, los lados del rectángulo miden 5 y 10 m.