Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Trigonometría: Una propuesta didáctica para 4º de ESO, opción B

Autor: Miguel Angel Cuesta Camarero

Director: Rafael Escolano Vizcarra

Junio de 2015

FACULTAD DE EDUCACIÓN ZARAGOZA

Universidad Zaragoza 1542

Indice

1 El objeto matemático a enseñar

El objeto matemático para el que vamos a desarrollar esta propuesta didáctica es la trigonometría en 4º de la ESO opción B. Se ha elegido este objeto porque tiene un origen histórico con una clara componente práctica y se ha elegido este curso de la ESO porque es el momento de presentación de la trigonometría en el currículo actual.

Consideramos importante vincular el proceso de enseñanza del objeto matemático con las necesidades sociales y humanas que ha resuelto. Por este motivo, atendiendo a la funcionalidad de los aprendizajes de los alumnos, procedemos a organizar el campo de problemas de la trigonometría atendiendo a la resolución de triángulos que modelizan situaciones contextualizadas que tienen aplicaciones en el cálculo de longitudes y distancias de lugares inaccesibles. Alrededor de los problemas de resolución de triángulos se enseñarán las técnicas y las tecnologías asociadas a este objeto matemático.

2 El estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Respecto a la trigonometría, en la orden de BOA de 9 de Mayo de 2007 en la que se aprueba el currículo de la ESO, para 4º de la ESO, opción B, para la Comunidad Autónoma de Aragón, se detallan los siguientes contenidos relacionados con la trigonometría:

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente.
- Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo:

$$\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x; \quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

- Razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º, 60º, 90º.
- Cálculo gráfico de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Resolución de problemas de triángulos rectángulos.
- Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.

- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.

En el currículo LOMCE (Orden de 15 de mayo de 2015, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón) en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º curso se detallan los siguiente contenidos:

- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.
- Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.
- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.

Asociados a estos contenidos, el currículo establece cuatro estándares de aprendizaje:

- Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.
- Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.
- Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.
- Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.

De esta forma el currículo tiene una orientación introductoria de la trigonometría, presentando las razones trigonométricas, sus relaciones básicas aplicando la definición de las mismas y el teorema de Pitágoras, sus valores para los ángulos más habituales y la resolución de triángulos rectángulos. Ninguno de los dos currícula aporta orientaciones didácticas para la enseñanza de la trigonometría. Tan sólo el currículo aragonés de la LOE considera el siguiente criterio de evaluación:

"Conocer y aplicar las relaciones y razones fundamentales de la trigonometría elemental para resolver problemas geométricos.

Se pretende que los estudiantes demuestren su capacidad en el manejo de las razones trigonométricas y sus relaciones para resolver problemas, así como que en la realización de los cálculos se ayuden, si es preciso, de la calculadora".

Dado que los documentos oficiales orientan poco a los docentes es de esperar que éstos recurran a las editoriales de libros de textos para buscar pautas de actuación.

Como ejemplo de cómo se presenta este objeto matemático, hemos analizado dos libros de texto de este curso, opción B, el de la editorial SM (proyecto esfera) de 2009 y el de la editorial Edelvives de 1995.

En el libro de SM, hay un tema previo sobre la semejanza y otro especifico que se titula trigonometría. En este último, se justifica su introducción aduciendo razones de importancia histórica pero no hay un problema introductorio, ni aplicaciones prácticas para el alumno. Sólo al final de la unidad cuando se proponen problemas prácticos que relacionan el contenido teórico con su aplicación a la resolución de problemas.

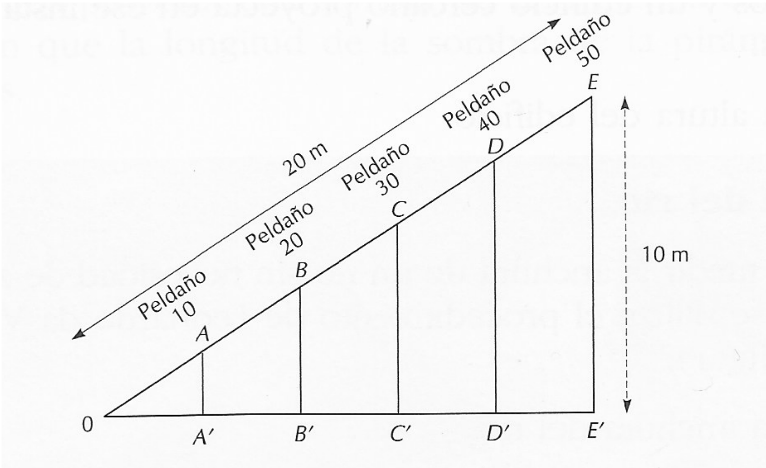
La metodología del texto de SM se puede considerar tradicional y consiste en presentar técnicas muy potentes de cálculo, normalmente justificadas, para a continuación presentar un ejemplo resuelto y ejercicios propuestos.

No hay campo de problemas como tal sino ejercicios descontextualizados para primero, manejar las propiedades de las razones trigonométricas, y para segundo, resolver triángulos. Al final del currículo se presentan problemas contextualizados de resolución de triángulos como campo de problemas y el cálculo de áreas y volúmenes ayudados de la trigonometría.

En este libro de texto de la editorial SM (proyecto esfera) las técnicas que se enseñan son:

- Unidades de medida de ángulos: grados y radianes
- Definición de las razones trigonométricas
- Razones trigonométricas del ángulo de 45º
- Razones trigonométricas de los ángulos de 30º y 60º
- Uso de la calculadora para hallar las razones trigonométricas
- Teorema de Pitágoras representado en base a razones trigonométricas
- Ecuación fundamental de la trigonometría
- Relaciones entre razones trigonométricas de ángulos suplementarios, complementarios, opuestos y que difieran 180º
- Uso de la calculadora
- Teorema del cateto
- Teorema del seno
- Teorema del coseno

En el libro de Edelvives el título del tema es de “Thales a la topografía”, que ya es bastante representativo de la presentación de la trigonometría muy ligada a la semejanza de triángulos, y a su aplicación práctica. Como razón de ser se plantea un problema sobre una escalera. El alumno tiene que construir una tabla en la que para cada 10 peldaños tiene que calcular la relación entre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo formado desde el inicio de la escalera.



A continuación propone el mismo problema pero con diferentes pendientes y ángulos. En un siguiente paso propone problemas contextualizados de aplicación de las razones entre catetos e hipotenusas para los ángulos calculados en los distintos casos de escaleras.

Después el libro presenta un momento de institucionalización del saber dando nombre a las relaciones trigonométricas y explicando el manejo de la calculadora.

El campo de problemas que trabaja es la resolución de triángulos rectángulos, casi siempre de manera contextualizada, faros, aeropuertos, estatuas, ríos, etc. No plantea la resolución general de triángulos.

Como hemos visto, el planteamiento de los dos libros, es muy diferente. En el libro más antiguo, el de Edelvives, se plantea una metodología de enseñanza a través de la resolución de problemas, dónde el alumno tiene un rol más importante en la construcción del saber matemático y el docente tiene un rol más de facilitador. En el libro más reciente, se basa en un modelo enseñanza-aprendizaje más tradicional, donde la construcción de potentes teoremas que convierten problemas en meros ejercicios es el eje epistemológico.

Podemos comprobar que la interpretación que los libros de texto respecto al currículo propuesto por la DGA, es bastante dispar. Nos encontramos con un currículo poco orientador y con propuestas de enseñanza diferentes según sea la editorial de libros de texto que la formule. Por otra parte, la administración educativa tampoco ofrece propuestas concretas sobre la enseñanza objetos matemáticos, entre ellos la trigonometría.

3 Metodología de aula para la enseñanza de la trigonometría.

Entendemos que la presentación de la trigonometría como un nuevo objeto matemático que hay que aprender a manejar sin entender muy bien para qué, sin una relación directa y clara con aplicaciones prácticas que el alumno pueda realizar, provoca en el alumno la sensación de desconcierto y de miedo ante otro campo matemático.

Creemos que precisamente este objeto matemático se puede presentar de una forma eminentemente manipulativa, práctica, y ligada a la resolución de problemas por lo que:

- Haremos un planteamiento metodológico basado en la resolución de problemas. Plantearemos problemas contextualizados de dificultad creciente que sirvan de camino a los alumnos para resolver el campo de problemas.
- Reduciremos al máximo el número de técnicas. No plantearemos las potentes técnicas como el teorema del seno o del coseno que reducen la resolución de triángulos a la mera aplicación de una fórmula. En su lugar usaremos técnicas más sencillas como la de mediante la altura dividir un triángulo normal en dos triángulos rectángulos, ya que estas técnicas son más formativas al necesitar estar más cerca de la definición de las razones y de su comprensión para manejarlas. A su vez estas técnicas, debido a su sencillez, perdurarán más en el tiempo.
- Evitaremos la presentación ostensiva de técnicas con la intención de que sean los propios alumnos los que empleen de modo autónomo técnicas menos sofisticadas pero no por ello menos valiosas para el aprendizaje.

Como norma general se propone que los alumnos trabajen los problemas en grupo, tras lo cual uno de los grupos lo resuelve en la pizarra y se debate en la clase. Al final hay un momento de institucionalización por parte del profesor si es necesario.

El rol del profesor es de guía y facilitador del proceso de aprendizaje, planteando las reglas de funcionamiento de la clase, proponiendo los problemas adecuados y haciendo preguntas motivadoras. Pretendemos que el alumno sea protagonista de su formación, y asuma la responsabilidad del aprendizaje, afrontando el reto de resolver problemas para los que no dispone de técnicas específicas, pero contando con la ayuda de sus compañeros.

4 Los conocimientos previos de los alumnos y dificultades

Para comenzar con esta unidad se requiere que los alumnos conozcan:

- Qué es un triángulo, qué datos necesitamos para construir uno

- Notación para representar triángulos, sus lados y sus ángulos

- Que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º

- Semejanza de triángulos. Teorema de Thales.

- Teorema de Pitágoras

- Técnicas operatorias aritméticas y algebraicas: como operar con números racionales e irracionales y resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Son conceptos geométricos que se han trabajado durante muchos años, y que además son bastante intuitivos, por lo que estimamos que no debe haber problema con ellos. De todas formas se plantearán 4 actividades que trabajen los datos necesarios para dibujar un triángulo y su notación, aplicaciones de la semejanza de triángulos como la medida de la altura de una pirámide y aplicación del teorema de Pitágoras en el cálculo de los lados de un triángulo rectángulo.

Actividad previa 1: El objetivo de esta actividad es saber qué es un triángulo y la notación asociada que vamos a utilizar.

- o Preguntas abiertas a la clase para responder entre todos:

- Etimología de la palabra triángulo
- ¿Qué es un triángulo? El triángulo es una forma geométrica que modeliza estructuras rígidas de tres lados. Uso del material didáctico Geotiras para comprobar que el triángulo modeliza la estructura rígida de menor número de lados. Aplicaciones del triángulo en la vida cotidiana, por ejemplo en la construcción de edificios y puentes se utiliza el triángulo garantizar la rigidez de la construcción.
- ¿De qué elementos se compone un triángulo?
- ¿Como denotamos los triángulos?
- ¿Cómo se denominan los vértices? ¿los lados? ¿los ángulos?
- Clasificaciones de los triángulos

Actividad previa 2: El objetivo de esta es saber qué datos necesitamos para resolver (dibujar) un triángulo

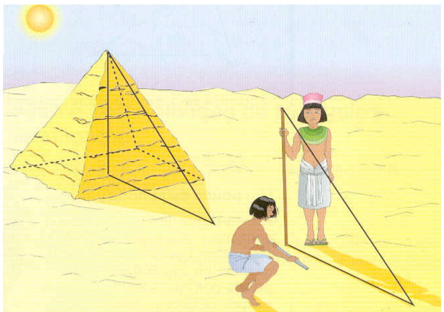
- Usando Geogebra, dibuja los triángulos que cumplen estas condiciones:
  - Lado de 3 unidades (no es posible construir un triángulo, ¿qué más datos necesitamos?)
  - Lados de 3, 5 unidades (observaremos en la clase que hay muchos triángulos que cumplen esta condición, luego necesitamos más datos)
  - Lados de 3, 5 y 6 unidades (Con este tercer dato, ya tenemos totalmente determinado el triángulo)
  - Lados de 2, 3 y 6 unidades (Este triángulo no es posible)
  - Lados de 3, 5 y ángulo entre ellos de 45º
  - Lados de 3, 5 y ángulo entre el lado de 5 y lado desconocido de 60º
  - Lado de 3 y los dos ángulos de este lado con los otros dos de 45º y 60º
  - Lado de 3 , un ángulo de este lado de 30º y el ángulo opuesto de 75º
  - Solo sabemos dos ángulos (Observaremos que podemos construir triángulos semejantes entre si, pero de lados distintos)

- Concluimos la actividad diciendo qué entendemos por resolver un triángulo. Resolver un triángulo consiste en calcular los lados y ángulos desconocidos de un triángulo dado del que conocemos al menos 3 datos, uno de los cuales debe ser un lado. También aprovecharemos para indicar los cuatro criterios de igualdad de triángulos:
    - Dos triángulos son iguales si tienen dos lados respectivamente iguales, y el ángulo comprendido por ellos igual.
    - Dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados respectivamente iguales.
    - Dos triángulos son iguales si tienen iguales dos ángulos y el lado común.
    - Dos triángulos son iguales si tienen dos lados respectivamente iguales y con un ángulo igual opuesto al lado mayor de ambos lados.

Actividad previa 3: Actividad de cálculo de la altura de una pirámide aplicando la semejanza de triángulos

Imagina que trabajas para un escriba en el antiguo Egipto, y el Faraón le ha encargado que mida la altura de la pirámide que acaban de construir para él. El escriba te encarga que hagas la medición teniendo en cuenta que el vértice proyecta una sombra que nos permite definir un triángulo semejante al formado por la sombra de un bastón.

Qué datos necesitaríamos medir y cómo calcularíamos la altura de la pirámide.



El propósito de la actividad es que los alumnos reflexionen para elegir aquellas medidas que le permitan resolver el problema utilizando el teorema de Thales. En este caso sería el lado de la base de la pirámide, la distancia de la pirámide a la sombra, la altura del palo y la longitud de su sombra.

Actividad previa 4: Calcula el área de un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 6cm aplicando el teorema de Pitágoras.

Otro aspecto a tener en cuenta en el diseño de la unidad, es prever las dificultades que pueden encontrar los alumnos. Mosquera (2005) señala que algunas de las dificultades que los estudiantes tienen en apropiarse de los contenidos de la trigonometría están relacionadas con problemas en el aprendizaje de otros conceptos matemáticos como la razón, el ángulo y la función, otras dificultades son propias del conocimiento trigonométrico como el concepto de periodicidad.

Este autor indica que las investigaciones sugieren que la introducción de la trigonometría se haga en contextos dinámicos con la ayuda de calculadoras y ordenadores.

5 Las razones de ser de la trigonometría

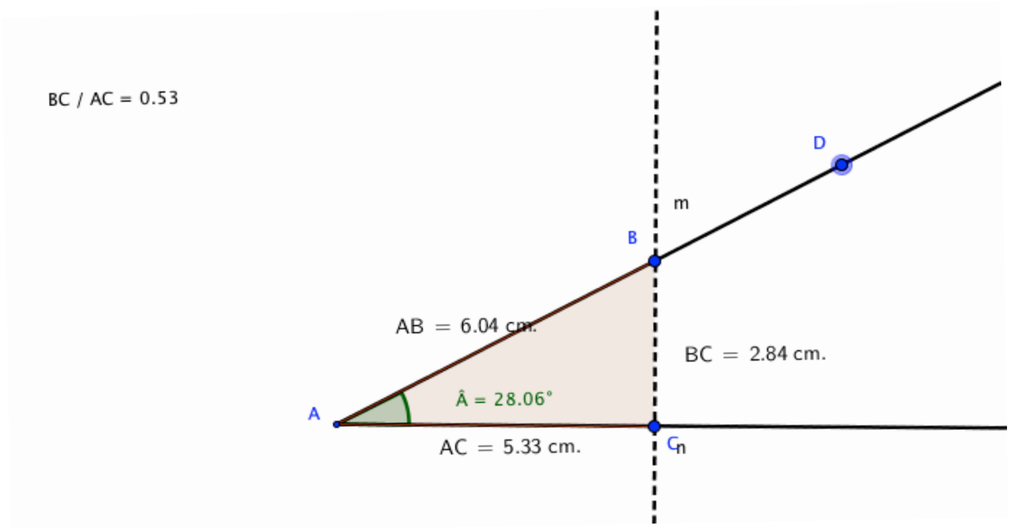
La razón de ser de la trigonometría es la necesidad de calcular distancias de lugares inaccesibles. Nos proponemos establecer relaciones matemáticas entre las longitudes de los lados de un triángulo con los ángulos que forman dichos lados. Basándonos en estas relaciones y en el Teorema de Thales de semejanza de triángulos es posible obtener medidas indirectas de distancias que no es posible medirlas directamente.

La trigonometría ha estado ligada desde su origen a la resolución de triángulos con fines métricos. Se han encontrado una tablilla babilónica escrita en cuneiforme, llamada Plimpton 322 (en torno al 1900 a. C.) que muestra quince ternas pitagóricas y una columna de números que puede ser interpretada como una tabla de funciones trigonométricas. Los egipcios desarrollaron la medida de los ángulos también con la finalidad de realizar mediciones. Ya en la Grecia Clásica el astrónomo Hiparco de Nicea en el siglo II a.C. construyó una tabla de cuerdas para resolver triángulos. La trigonometría fue clave en el desarrollo de la astronomía permitiendo medidas como el diámetro de la tierra, la distancia a la luna, etc.

Hoy en día la trigonometría se sigue usando para todas las actividades topográficas que permiten medir con precisión las alturas y las distancias entre los puntos de un terreno. Esta necesidad es más acuciante cuando se trata de medidas imposibles de hacer de otra forma por ser inaccesible, como por ejemplo la distancia entre dos picos.

Nos proponemos establecer relaciones matemáticas entre las longitudes de los lados de un triángulo con los ángulos que forman dichos lados. Basándonos en estas relaciones y en el Teorema de Thales de semejanza de triángulos es posible obtener medidas indirectas de distancias que no es posible medirlas directamente.

A pesar de la larga historia de la trigonometría no se va a usar ésta como razón de ser, sino que plantearemos como razón de ser la relación entre los catetos de un triángulo rectángulo fijando los ángulos. Hemos tomado el ejercicio 1.2.1 con Geogebra que proponen Gutiérrez y Fiallo (2009).



A1. **Actividad Inicial**: Como se ve en la figura, al mover el punto D, movemos la recta m, y variamos el ángulo A. Una vez fijado este ángulo, al mover Cn, vamos desplazando la recta de trazos, con lo que vamos creando triángulos semejantes. A la izquierda nos aparece el cociente entre BC y AC, que permanece fijo mientras no variemos el ángulo A.

Suponemos que los alumnos conocen Geogebra, y les pedimos que hagan paso a paso la construcción a la que hemos hecho referencia de una forma guiada. Es decir el profesor da orientaciones escritas a los alumnos para que éstos, por parejas, realicen los siguientes pasos en sus ordenadores:

- Dibujan una recta, un punto A perteneciente a dicha recta, un punto D exterior a la recta
- Dibujan la recta m que pasa por D y A y que midan el ángulo que forman las dos rectas.
- Comprueban que al mover D el ángulo varía.
- Dibujan por un punto Cn, de la primera recta, una recta perpendicular a la dicha recta.
- Calculan los lados del triangulo rectángulo formado y las razones entre catetos, y entre cada cateto y la hipotenusa.
- Ven que si desplazamos Cm en la recta inicial estos ratios no cambian.
- Al mover D y cambiar el ángulo vemos cómo cambian las razones.

A continuación hay un momento de institucionalización del profesor donde se les explica cómo se define el seno, el coseno y la tangente de un ángulo, así mismo les indicamos que estos valores se pueden consultar usando calculadoras o tablas.

Los alumnos copian en su cuaderno estas definiciones de las razones trigonométricas.

Se les pide a los alumnos que busquen los valores máximos y mínimos de cada una de las razones trigonométricas. Los alumnos van dando sus razonamientos, hasta llegar a unas conclusiones válidas.

Se les pide a los alumnos que demuestren las relaciones trigonométricas:

$$\tan x = \text{sen } x/\cos x; \quad \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

La primera identidad es una consecuencia inmediata de las definiciones de las razones trigonométricas. Y la segunda identidad es una nueva versión del teorema de Pitágoras.

Después de un tiempo de trabajo, salen dos voluntarios a la pizarra para resolver el ejercicio y se acaba de institucionalizar entre todos.

Los alumnos copian las demostraciones en su cuaderno.

6 Los campos de Problemas

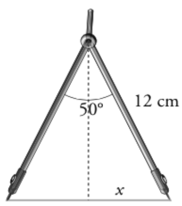
Se plantean dos campos de problemas, uno de resolución de triángulos rectángulos y otro de resolución de triángulos cualesquiera.

A continuación vemos ejemplos de los problemas a resolver de cada campo.

- **C1 Resolución de triángulos rectángulos**

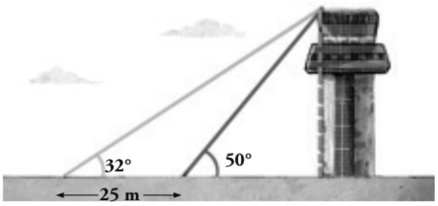
En un primer campo de problemas, se **resolverán triángulos rectángulos** y se subdividirá en dos tipos. El primero es conocido un ángulo agudo y un lado, y el segundo es una aplicación muy utilizada en la que normalmente queremos conocer un cateto, midiendo el ángulo desde dos puntos alineados con distancia conocida. No consideramos el caso de conocidos dos lados, ya que este campo de problemas se resuelve con la aplicación directa del teorema de Pitágoras.

  - **C1.1. Conociendo un lado y un ángulo agudo**
    - P1. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

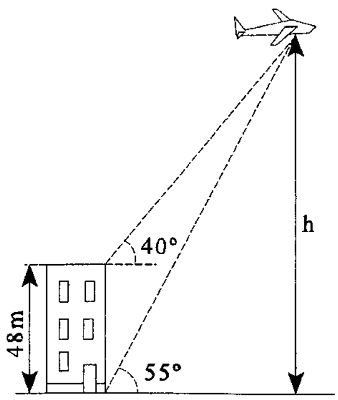


- P2. Una torre proyecta una sombra de 17m de longitud. Calcula la altura de la torre si, en ese momento, el sol tiene una inclinación de 70º con la horizontal.
- P3. La longitud de un avión es 30m, y cuando vuela exactamente encima de nosotros, observamos que abarca un ángulo de 3º. ¿A qué altura vuela?

- **C1.2. Cálculo del cateto común de dos triángulos rectángulos, conocida la distancia entre los vértices opuestos y los ángulos opuestos a dicho cateto.**
  - P4. Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 25 m, el ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre?



  - P5. Para saber a qué altura vuela un avión medimos los ángulos de elevación del avión desde el portal (55º) y desde la terraza (40º) de nuestra casa y se hace un esquema como el die la figura. La altura de la casa es de 48m. ¿A qué altura vuela el avión?

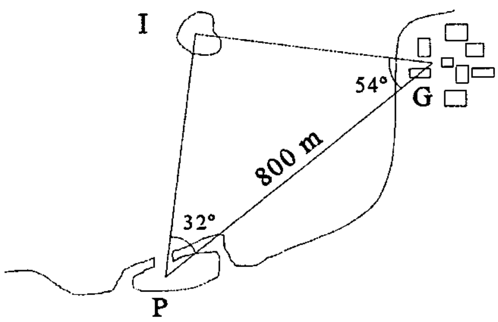


- **C2 Resolución de triángulos cualesquiera**

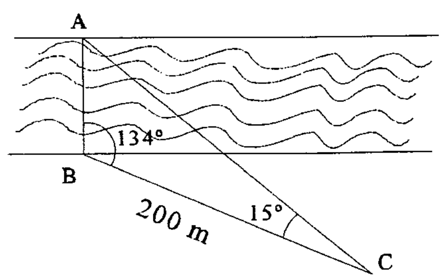
En este segundo campo de problemas, se **resolverán triángulos cualquiera** y se subdividirá en cuatro tipos. Resolución conociendo 2 ángulos y un lado, conociendo dos lados y el ángulo que forma, conociendo 2 lados y el ángulo opuesto de uno de ello y conociendo sus 3 lados.

  - **C2.1. Conociendo 2 ángulos y un lado**

    - P6. Distancia a una isla: Queremos ir con una lancha hasta un islote I, pero antes nos gustaría saber a qué distancia se encuentra del puerto deportivo P, situación descrita en la figura de debajo. Para ello localizamos algún edificio del pueblo, por ejemplo la iglesia G, y medimos los ángulos IPG (32º) y PGI (54º), y la distancia del puerto a la iglesia (800m). ¿Cuánto dista el islote del puerto?



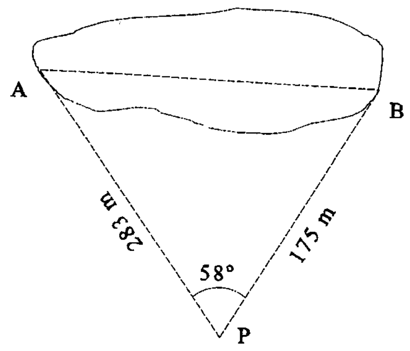
    - P7. Anchura de un río: Localizamos un objeto en cada orilla de forma que estén uno enfrente del otro (Ay B) como en la figura. Desde B, miramos a otro objeto cualquiera C, y medimos la distancia BC (200m) y los ángulos ABC(134º) y BCA(15º). ¿Cuál es la anchura del río?



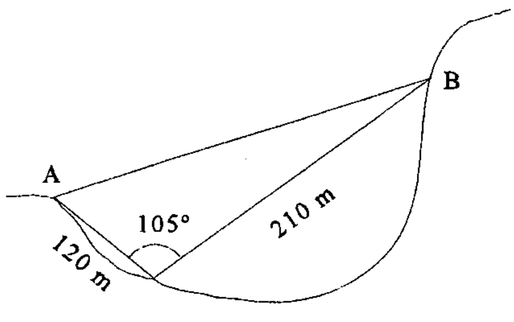
- P8. Para calcular la anchura de un río, medimos desde los puntos A y B de una de las orillas, los ángulos que forma la dirección de ésta con las correspondientes visuales al punto C de la orilla opuesta, que resultan ser de 36º y 52º respectivamente. Si A y B distan 50m, ¿cuál es la anchura del río?

- **C2.2. Conociendo 2 lados y el ángulo que forman**

  - P9. Anchura de un lago: Para medir la anchura de un lago, nos situamos en la posición P y medimos las distancias desde P a los dos extremos del lago (A y B), así como el ángulo APB (58º) según se indica en la figura. ¿Cuál es la anchura del lago?

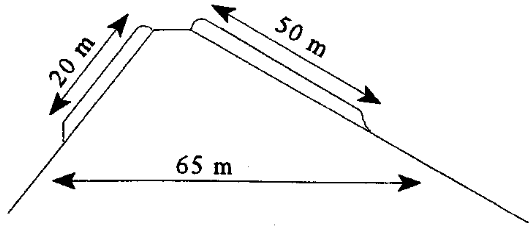


  - P10. Se desea tender un cable tenso entre ambos lados (AyB) de una hondonada, como se indica en la figura. Situados en el fondo, las distancias a A y B son respectivamente, 120 y 210m, y dichos puntos se ven con un ángulo de 105º. ¿Qué longitud debe tener el cable?



  - P11. De un puerto salen simultáneamente 2 barcos con rumbos que difieren 33º y velocidades de 24 y 29 nudos, respectivamente. ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro al cabo de 1hora y 20 minutos? Un nudo es una milla náutica por hora. Una milla náutica equivale a 1.852m.

- **C2.3. Conociendo 2 lados y el ángulo opuesto de uno de ellos**
  - P12. Un poste eléctrico está sujeto por dos cables cuyos puntos de anclaje están situados a ambos lados del pie del poste. Si se sabe que los cables tienen una longitud de 20 y 30 metros y que el cable de mayor longitud tiene una inclinación de 35,3º con respecto a la horizontal. Calcula la altura del poste y la distancia entre los dos puntos de anclaje.
- **C2.4. Conociendo sus 3 lados**
  - P13. Desde dos puestos de control que distan entre sí 8400m, se detecta un avión que sobrevuela la línea que une ambos puestos y dista 5800m del primero y 4500 del segundo. ¿A qué altura vuela el avión?
  - P14. En una estación de invierno, se construyen dos toboganes para saltos de esquí. Desde la posición de lanzamiento, se puede optar por uno o por otro, que tienen 20m y 50m de longitud, y van a parar a lugares con la misma altura y distantes entre sí 65m. ¿Qué pendiente tiene cada tobogán?



7 Las técnicas

Las técnicas usadas se basan en la propia definición de las razones, así como en las propiedades de los triángulos, sean rectángulos o no.

A continuación se indican las técnicas que se presentarán en clase así como los ejercicios que irán ayudando a los alumnos al descubrimiento y dominio de las técnicas asociadas a la trigonometría.

T1: Relaciones trigonométricas $\tan x = \text{sen } x/\cos x$ y $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Lo hemos visto en la **Actividad Inicial** descrita en el capítulo 5 de esta memoria.

T2: Razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º, 60º.

- Ejercicio 1: Dado un triángulo rectángulo isósceles calcula el sen 45º, cos45º y tg45º aplicando el teorema de Pitágoras

  - Utilizando el teorema de Pitágoras, e identificando que los ángulos agudos de este triángulo son de 45º y que sus catetos son iguales, se podrá deducir la técnica de cálculo de razones trigonométricas del ángulo de 45º. El propio ejercicio sirve de justificación. También es un caso de resolución de triángulos rectángulos. Para su implementación en el aula, se propone que los alumnos trabajen en grupos, dándoles un tiempo de 15’. Uno de los grupos que haya dado con el resultado correcto lo presentará en la pizarra y se debatirá la solución en la clase y se plantearán cuestiones como ¿Por qué los ángulos son de 45º? ¿Qué útil de dibujo es un triángulo rectángulo isósceles? ¿Cómo podemos dibujar $\sqrt{2}$?

- Ejercicio 2: Dado un triángulo equilátero, divídelo en 2 con una de sus alturas y calcula sen60º, cos60º, tg60º , sen30º, cos30º, tg30º

  - Dividiendo el triángulo equilátero en 2 mediante una de sus alturas, identificando los dos ángulos agudos como de 30º y 60º, que el cateto que no es la altura es la mitad del lado del triángulo equilátero y aplicando el teorema de Pitágoras, obtendrán los alumnos la técnica de cálculo de razones trigonométricas del ángulo de 30º y 60º. Una vez dibujada la altura, la técnica a aplicar es muy similar al ejercicio anterior. El propio ejercicio sirve de justificación. También nos servirá para pre-introducir la técnica de división en triángulos rectángulos usando las alturas. Para su implementación en el aula, se propone que los alumnos trabajen en grupos, dándoles un tiempo de 20'. Uno de los grupos que haya dado con el resultado correcto lo presentará en la pizarra y se debatirá la solución en la clase y se plantearán cuestiones como ¿Por qué los ángulos son de 60º y de 30º? ¿Qué útil de dibujo es medio triángulo equilátero? ¿Cómo podemos dibujar $\sqrt{3}$? Tras el ejercicio, el profesor institucionalizará las razones trigonométricas de ángulos complementarios.

T3: Manejo de la calculadora

- Ejercicio 3: Haz una tabla con los resultados anteriores y en una nueva columna pon el resultado de la calculadora. Compara los resultados y verifícalos si hay diferencias.

  - La técnica que se va a fijar en este ejercicio es el uso de la calculadora, calculando una las razones trigonométricas de un ángulo, basándose en los resultados de los problemas anteriores. Para que sea más fácil, o el centro proporciona calculadoras iguales a todos los alumnos, o el centro en 3º de la ESO recomienda a los alumnos un modelo concreto de calculadora. Se trabajará, presentando el profesor que las calculadoras trabajan con 3 unidades de medida de ángulos, DEG, GRA y RAD, y que nosotros de momento sólo trabajaremos en grados sexagesimales (DEG). Se les propone a los alumnos empezar con una razón sencilla, por ejemplo seno30º. El ejercicio se hará de forma individual durante 15'. Los alumnos que no hayan completado el ejercicio serán ayudados por compañeros que tengan la misma calculadora.

- Ejercicio 4: Con la calculadora calcula los ángulos

  cuyo seno es: 0 0,7 0,85 1 -1 -0,5

  cuyo coseno es: 0 0,7 0,85 1 -1 -0,5

cuya tangente es: 0, 0,7 0,85 1 8 10 100 1000 -100

- La técnica que se va desarrollar en este ejercicio es el uso de la calculadora para las funciones inversas de las razones trigonométricas, es decir conocida la razón buscar el ángulo. También nos servirá para empezar a introducir las razones de los ángulos suplementarios y opuestos. Se trabajará, presentando el profesor que las calculadoras suelen designar como función inversa indicando la función elevado a -1. Se les propone a los alumnos empezar con un valor sencillo que ya conocen como 0,5 por ejemplo. El ejercicio se hará de forma individual durante 15'. Los alumnos que no hayan completado el ejercicio serán ayudados por compañeros que tengan la misma calculadora.

Una vez se hayan consolidado estas técnicas básicas, iremos presentando los distintos problemas de los campos de problemas definidos progresivamente y en orden de dificultad. La metodología de implementación será la misma que la presentada en los ejercicios anteriores: trabajo en grupo de los alumnos sin nociones adicionales presentadas por el profesor, resolución de los problemas primero en grupos pequeños y después con el grupo completo en la pizarra dando la posibilidad de realizar un debate conjunto en el aula.

T4: Dividir triángulos cualesquiera en dos triángulos rectángulos usando la altura

Esta técnica la iremos desarrollando para resolver el campo de problemas C2, e iremos planteando en clase problemas de este campo para que vaya desarrollando esta técnica. Será utiliza al resolver los problemas de P6 a P14 cuya solución se muestra en el Anexo 1 de este memoria.

8 Las tecnologías

El discurso tecnológico que acompaña a las técnicas guarda estrecha relación con la definición de las razones trigonométricas.

Los razonamientos en los que se basarán las tecnologías son muy sencillos y se basan en las propiedades de los triángulos y en el teorema de Pitágoras. Son siempre los alumnos los que tienen la responsabilidad de justificarlas bajo la supervisión del profesor.

Sólo dos requieren una justificación un poco más formal:

- Al final de la actividad inicial se pide a los alumnos que justifiquen las relaciones trigonométricas "tan x = sen x/cos x" y "$sen^2 x + cos^2 x = 1$". Son justificadas por los alumnos en la pizarra bajo la guía del profesor.

- En los ejercicios 1 y 2 se les pide que calculen las razones de 30º, 45º y 60º, que son justificadas por los alumnos en la pizarra bajo la guía del profesor.

Es resto de las técnicas son habilidades en la aplicación de las definiciones para conseguir resolver triángulos. No se usan técnicas como el teorema del cateto, del seno y del coseno, por lo que las tecnologías son mínimas.

Los momentos de institucionalización son escasos pero podemos destacar que en la actividad inicial hay uno, tras haber experimentado que las relaciones entre los catetos o entre un cateto y su hipotenusa se mantienen en relación con el ángulo, el profesor les explica cómo se define el seno, el coseno y la tangente de un ángulo, y que estos valores se pueden consultar usando calculadoras o tablas.

9 Secuenciación didáctica y cronograma

Se ha planificado esta unidad para 15 sesiones con el siguiente contenido de cada una de ellas.

Sesión 1: Conocimientos previos. Actividades previas 1 y 2 sobre qué es un triángulo, su notación y qué elementos necesitamos para resolver uno.

Sesión 2: Conocimientos previos. Actividad 3 y 4 de calculo de altura de una pirámide usando el teorema de Thales y cálculo del área de un triángulo aplicando el teorema de Pitágoras.

Sesión 3: Razón de ser. Actividad A1 de construcción con Geogebra que calcula la relación entre los catetos y es fija si fijamos el ángulo agudo del triángulo rectángulo.

Sesión 4: Parte final de la actividad A1. Valores posibles de las razones trigonométricas y justificación de las relaciones trigonométricas

Sesión 5: Razones trigonométricas de 30º, 45º, 60º. Ejercicios 1 y 2 que justifican las razones de estos ángulos.

Sesión 6: Manejo de la calculadora. Ejercicios 3 y 4 para aprender a usar la calculadora

Sesión 7: Resolución de triángulos rectángulos. Problemas 1, 2 y 3.

Sesión 8: Alturas pie inaccesible. Problemas 4 y 5

Sesión 9: Resolución de triángulos no rectángulos, conocidos 2 ángulos y un lado. Problemas 6 y 7

Sesión 10: Resolución de triángulos no rectángulos, conocidos 2 lados y el ángulo que forman. Problemas 9 y 10

Sesión 11: Resolución de triángulos no rectángulos, conocidos 2 lados y el ángulo opuesto de uno de ellos o conocidos 3 lados. Problemas 12 y 13

Sesión 12: Repaso. Problemas 8, 11, 14

Sesión 13: Sesión de cierre. Actividad A2 de manejo del móvil para medir distancias y alturas. Véase el detalle al final de este punto.

Sesión 14: Evaluación

Sesión 15: Resultados de la evaluación y resolución de los problemas de la evaluación.

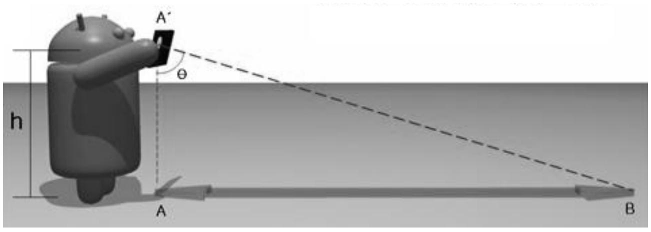
Podemos ver esta misma información de una forma más gráfica en la siguiente tabla:

Sesión	Contenidos	Recursos docentes de soporte
1	Conocimientos previos. Definición, notación y resolución de un triángulo	Actividades previas 1 y 2
2	Conocimientos previos. Aplicación de teoremas de Thales y de Pitágoras.	Actividades previas 3 y 4
3	Razón de Ser	Actividad A1 de construcción con Geogebra . Parte inicial
4	Valores posibles de las razones trigonométricas y justificación de las relaciones trigonométricas	Actividad A1 de construcción con Geogebra . Parte final
5	Razones trigonométricas de 30º, 45º, 60º	Ejercicios 1 y 2
6	Manejo de la calculadora.	Ejercicios 3 y 4.
7	Resolución de triángulos rectángulos	Problemas 1, 2 y 3
8	Alturas de pie inaccesible	Problemas 4 y 5
9	Resolución de triángulos no rectángulos, conocidos 2 ángulos y un lado.	Problemas 6 y 7
10	Resolución de triángulos no rectángulos, conocidos 2 lados y el ángulo que forman.	Problemas 9 y 10
11	Resolución de triángulos no rectángulos, conocidos 2 lados y el ángulo opuesto de uno de ellos o conocidos 3 lados	Problemas 12 y 13
12	Repaso.	Problemas 8, 11, 14
13	Sesión de cierre.	Actividad A2 de manejo del móvil para medir distancias y alturas. Véase el detalle al final de este punto.
14	Evaluación	Prueba escrita
15	Resultados	Resultados de la evaluación y resolución de los problemas de la evaluación.

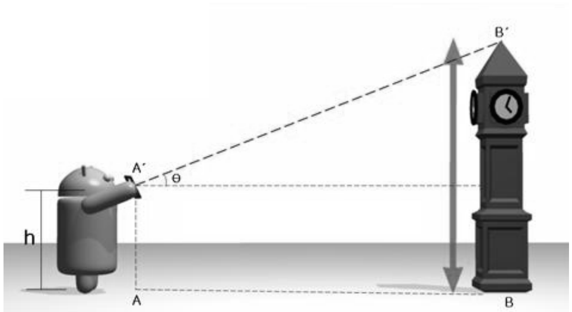
A2. **Actividad final**. Se puede plantear también una actividad de cierre en el que vea una aplicación del cálculo trigonométrico que hace uso una aplicación móvil para medir distancias y alturas.

Incidiremos que aunque los medios técnicos cambian, una aplicación importante de la trigonometría sigue siendo la necesidad de medir distancias. La actividad se contextualiza en un entorno muy próximo al alumno como el uso y comprensión de aplicaciones móviles.

Estas aplicaciones miden la distancia a un objeto y su altura en dos pasos. Primero, dada la altura de observación, miden el ángulo entre la hipotenusa formada por los ojos del observador y un punto respecto al que queremos medir la distancia y la vertical, usando el giróscopo incorporado en el móvil.



Una vez calculada la distancia a la que se encuentra el objeto, mediremos su altura mediante la medición del ángulo formado entre la visual y el punto más alto del objeto con la horizontal según el dibujo.



En ambos pasos, usa la tangente del ángulo.

Esta presentación induce al alumno a desprenderse del aspecto mágico de las nuevas tecnologías y motivarle por el sentimiento de orgullo de entender cómo funcionan.

La metodología en la implementación de esta actividad introductoria se hará formando grupos de alumnos, de forma que cada grupo disponga de un móvil.

- Explicación de la actividad que consiste en medir la distancia desde la pizarra al fondo de la clase y la altura del techo con una aplicación móvil.
- Descarga de la aplicación
- Los alumnos aprenderán a usar la aplicación , entendiendo cómo funciona, los datos necesarios
- Verificarán la fiabilidad de sus medidas realizadas comparando las realizadas por los distintos grupos
- Se les propondrá averiguar cómo hace la aplicación para calcular las distancias, en base a las razones trigonométricas aprendidas en esta unidad.
- Se preparará entre todos un procedimiento que optimice la fiabilidad en la medición con los móviles.

10 Evaluación

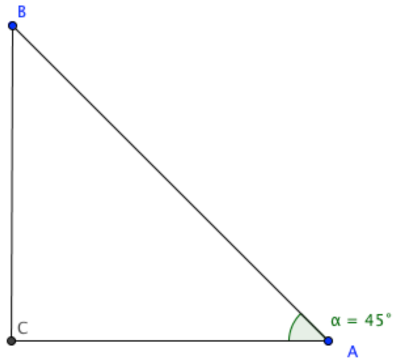
10.1 Diseño de la prueba escrita

La prueba escrita de evaluación a realizar en la sesión 12 se compone de 5 preguntas que en esta memoria se destacan en estilo negrita. Tras la pregunta se explica como se espera que se resuelva cada ejercicio. Tras la solución se analizan dónde pueden equivocarse los alumnos.

1. Sin usar la calculadora, calcula el valor de sen 45° y tan 45°. Justifícalo. (2 puntos)

Se espera que el alumno lo resuelva en base a la construcción de un triángulo rectángulo isósceles y la aplicación del teorema de Pitágoras.

Solución:



Un triángulo rectángulo isósceles, tiene sus dos ángulos agudos de 45º y los dos cateto $sen45^{o} = \frac{c}{h}$ s c iguales. Llamaremos h a la hipotenusa, y aplicando el teorema de Pitágoras podemos despejar h en función de c.

$$c^2 + c^2 = h^2 \Rightarrow 2c^2 = h^2 \Rightarrow h = c\sqrt{2}$$

y sustituyendo en la definición tenemos que:

$sen45^{o} = \frac{c}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ que también lo podemos expresar multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2}$, como $sen45^{o} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Respecto a la tangente tenemos por definición de la misma que $\tan 45^{o} = \frac{c}{c} = 1$

Los posibles errores pueden acontecer al no relacionar el ángulo de 45º con un triángulo rectángulo isósceles, lo que le bloquea en el desarrollo, también pueden acontecer errores al aplicar de modo erróneo la definición de seno y tangente, el teorema de Pitágoras o al realizar algún cálculo. Si un alumno no llega a expresar la forma tradicional de sen 45º, no se le penalizará.

2. Usando la calculadora calcula con 4 decimales: (0,5 puntos cada cálculo, 2 puntos en total)

cos 56˚=

tan 129˚=

sen 34˚54'=

sen^{-1}0,8767= (Expresa el resultado en grados sexagesimales)

En este problema se espera que el alumno verifique que tiene ajustada correctamente su calculadora en modo "DEG" y ejecute los cálculos propuestos. En uno de los casos debe pasar los minutos a grados dividiendo por 60.

Solución:

cos 56°= 0,5592

tan 129°= -1,2349

sen 34°54'= 0,5721

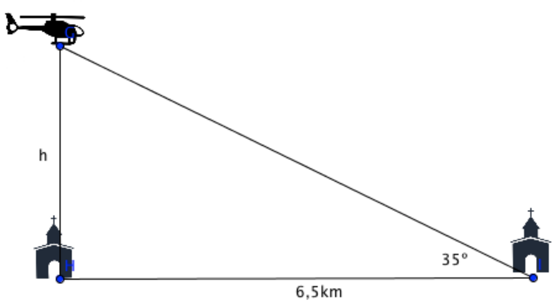
sen^{-1}0,8767= 61,22468º ó 61º 14,8' ó 61º 14'48,5"

Puede haber errores al no redondear adecuadamente al número de decimales elegido por ellos.

3. Sobre dos pueblos de la meseta que distan entre sí 6,5km sobrevuela un helicóptero. Calcula la altura a la que vuela si se le divisa con un ángulo de 35º desde un pueblo cuando está en la vertical del otro. (2 puntos)

Se espera que el alumno dibuje el triángulo rectángulo formado por los dos pueblos y el helicóptero y calcule la altura con la tangente del ángulo dado.

Solución:



Aplicando la definición de tangente en el triángulo rectángulo que forman los dos pueblos con el helicóptero tenemos que:

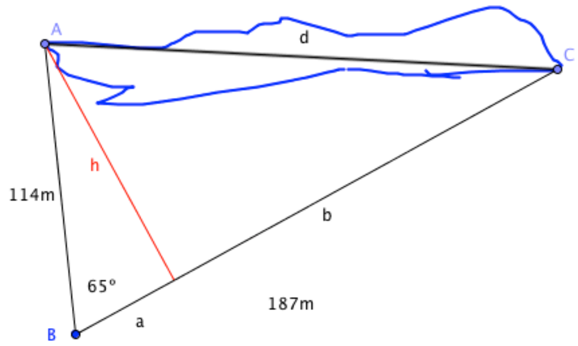
$$\tan 35^\circ = \frac{h}{6,5} \Rightarrow h = 6,5 \cdot \tan 35^\circ = 4,55km$$

La dificultad principal del problema está en que los alumnos interpreten el triángulo rectángulo que se forma y que sepan aplicar la razón trigonométrica adecuada. Además pueden equivocarse al operar con la calculadora.

4. Para medir la anchura de un lago, nos situamos en una posición intermedia desde la que medimos la distancia a los dos extremos del mismo que es de 187m y 114m. El ángulo entre las dos visuales es de 65º. (2 puntos)

En este caso un primer problema es traducir el texto a un croquis que nos ayude en el planteamiento. Una vez hecho el dibujo, deben de elegir la altura desde uno de los vértices situados en los extremos del lago.

Solución:



Trazamos la altura desde A, por lo que dividimos el triángulo ABC en dos triángulos rectángulos. En uno de ellos conocemos la hipotenusa y uno de los ángulos agudos, por lo que podemos calcular a y h. Conocido a podemos calcular b, ya que su suma es 187m. Tenemos pues en el segundo triángulo conocidos sus dos catetos h y b, por lo que podemos calcular la hipotenusa d, que es la anchura del lago.

$$sen65^{o} = \frac{h}{114} \Rightarrow h = 114 sen65^{o} = 103,32m$$

$$\cos 65^{o} = \frac{a}{114} \Rightarrow a = 114\cos 65^{o} = 48,18m \Rightarrow b = 187 - a = 175 - 48,18 = 126,82m$$

$$d^2 = h^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{103,32^2 + 126,82^2} = 163,58m$$

En este caso supone la mayor dificultad, trazar la altura adecuada que permita obtener dos triángulos rectángulos. Además puede haber errores de cálculo con la calculadora y de operaciones algebraicas.

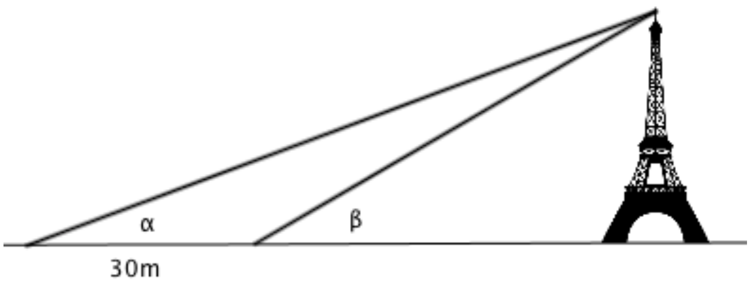
5. Explica cómo medirías la altura de la torre Eiffel un día nublado (no hay sombras) si dispones de un aparato de medir ángulos y de una cinta métrica de 10m. Lamentablemente hay obras en la torre, y no se puede acceder al centro de la torre que está marcado en el suelo con una cruz. No es necesario hacer cálculos

ni plantear fórmulas, únicamente debes de explicar qué medidas tomarías y hacer un croquis indicándolas. (2 puntos)

Durante la unidad se han usado tres estrategias para medir la altura de algo, una usando las sombras y aplicando el teorema de Thales, otra cuando podemos acceder a la base, en base a un triángulo rectángulo y uno de sus ángulos, y la última midiendo dos ángulos y la distancia entre los puntos de medición cuando no podemos acceder a la base. En este caso en el enunciado se anulan dos de las opciones, ya que no hay sombra al estar nublado, y hay obras por lo que no podemos acceder a la base.

Solución:

Al ser un día nublado, no tenemos sobras, por lo que no podemos aplicar el teorema de Thales para medir la altura. La solución más fácil hubiera sido medir con el metro 40 o 50 metros desde el centro de la torre, pero no podemos acceder a él por lo que otra solución podría ser medir el angulo desde la horizontal a la punta de la torre desde dos puntos separados por ejemplo 3 veces la cinta métrica.



10.2 Campos de problemas, técnicas y tecnologías objeto de evaluación

En la primera pregunta no hay campo de problemas y se pretenden evaluar por un lado la comprensión de las razones trigonométricas, y si el alumno es capaz de exponer la tecnología que justifica algunos de las razones más utilizadas utilizando las características más relevantes de algunos triángulos y el teorema de Pitágoras. Por lo tanto estamos evaluando directamente el razonamiento matemático. Como tarea principal tenemos la aplicación de la definición de seno y tangente e identificar que un triángulo rectángulo isósceles tiene los ángulos agudos de 45º y los catetos iguales. Como tareas auxiliares específicas necesarias tenemos la aplicación del teorema de

Pitágoras y el dibujo del triángulo. Como tareas auxiliares generales consideramos la técnica de despejar de una igualdad y sustituir en otra, así como el trabajar con fracciones.

En la segunda pregunta tampoco tenemos un campo de problemas asociados, sino que estamos evaluando la técnica de manejo de la calculadora en la trigonometría. No hay tampoco ninguna justificación de la técnica aplicada. La única tarea auxiliar específica que podemos destacar es saber pasar minutos a grados.

En estas dos preguntas podríamos relacionarlas con el primeros de los estándares de aprendizaje LOMCE para este tema que es "Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos."

En la tercera pregunta, en primer lugar se evalúa la visión espacial necesaria para comprender el problema y reducirlo a una abstracción geométrica en la que se plantea un caso del campo de problemas de resolución de triángulos rectángulos conocido un ángulo agudo. La técnicas necesarias son la propia definición de tangente necesaria para el planteamiento del problema, y el uso de la calculadora, que constituyen las tareas principales junto con la comprensión espacial del problema que permite plasmarlo en un dibujo.

En la cuarta pregunta, es un caso del campo de problemas de resolución de triángulos no rectángulos, concretamente de cuando conocemos 2 lados y el ángulo que forman. Las técnicas que evaluamos son la definición de razones trigonométricas, el uso de la calculadora, y la técnica de usar una altura para dividir el triángulo en dos rectángulos. No hay tecnologías asociadas. Las tareas principales son dibujar el croquis del problema, trazar la altura más adecuada para la resolución del problema, elegir, aplicar las razones que nos ayuden y obtener resultados correctos usando la calculadora. Como tareas auxiliares específicas tenemos la aplicación del teorema de Pitágoras y como generales, operaciones con ecuaciones algebraicas para despejar y sustituir valores.

En la quinta pregunta se evalúa la competencia para usar la trigonometría en el cálculo de distancias diseñando un procedimiento matemático. Se espera que los alumnos planteen medir el ángulo a la punta de la torre desde un punto y desde otro que esté por ejemplo 30 m más cerca de la torre que el primero. Es una pregunta que puede crear incertidumbre en los alumnos ya que el resultado que se pide es un procedimiento de medida. Corresponde al campo de problemas de resolución de triángulos rectángulos conocido un ángulo y las técnicas a aplicar son la definición de las razones trigonométricas, y el trazado de la altura para ayuda en el planteamiento. Aquí las tareas principales son hacer el planteamiento y dibujar el croquis con las medidas a realizar.

En estos tres problemas podemos relacionar el ejercicio con el tercer estándar de aprendizaje LOMCE: "Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones."

10.3 Criterios de calificación, guía de corrección y comunicación de resultados

Como guía que oriente en corrección fiable por varios correctores, a los problemas del ejercicio resueltos presentados un epígrafe anterior, añadiríamos los siguientes criterios de calificación basados en el modelo propuesto por Gairín, Muñoz y Oller (2012):

- Error en tarea principal, penalización del 40%
- Error en tarea auxiliar específica, penalización del 20% por un error y hasta un máximo del 30% para varios errores.
- Error en tarea auxiliar general, penalización de un 10% por un error, hasta un 20% para varios errores.

Según lo dicho en puntos anteriores, podemos hacer un resumen de qué consideraremos, en cada problema, tareas principales (TP) y auxiliares específicas (TAE). La tareas auxiliares generales son el resto de tareas básicas como por ejemplo operaciones algebraicas y aritméticas.

- Problema1: TP son plantear la estrategia para cálculo y justificación en base a que un triángulo rectángulo isósceles tiene los ángulos agudos de

45º y los catetos iguales, así como el uso adecuado de la definición de cada razón trigonométrica. TAE es la correcta aplicación del teorema de Pitágoras y dibujar el triángulo.

- Problema 2: TP es el uso correcto de la calculadora. TAE es el saber pasar de minutos a grados.
- Problema 3: TP son la comprensión espacial del problema que permite plasmarlo en un dibujo, la aplicación de las definiciones de las razones trigonométricas, y el uso correcto de la calculadora. No tenemos TAE.
- Problema 4: TP son dibujar el croquis del problema, trazar la altura adecuada del triángulo, elegir y aplicar las razones que nos ayuden y usar bien la calculadora. TAE es la aplicación del teoremas de Pitágoras.
- Problema 5: TP es hacer el planteamiento y dibujar el croquis con las medidas a realizar. No tenemos tareas auxiliares específicas.

En la programación de la unidad se ha previsto una sesión especial para en primer lugar hacer el examen en la pizarra, que los alumnos de modo voluntario realizarán con la ayuda del resto de la clase. Se pide a los alumnos que copien los resultados en su cuaderno.

A continuación se les entrega los exámenes con la las correcciones del profesor para que puedan ver sus errores y sea por lo tanto formativa. El profesor pide a los alumnos que si tienen alguna duda o no están de acuerdo con la corrección lo digan.

11 Referencias bibliográficas

Blackett, N.y Tall, D. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. En F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (15th, Assisi, Italy), volume 1(págs. 144-151).

Esteban, M., Ibañes M., y Ortega T. (1998). Educación Matemática en Secundaria. Trigonometría. Madrid: Editorial Síntesis.

Frías, V., Paz, M.L., Río, T. y Vidal, M.D. (1995). 4º Matemáticas opción B. Zaragoza: Edelvives

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García, L. Ordónez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp.261-274). Baeza, España: SEIEM

Gutiérrez, A., y Fiallo, J. (2009). Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. En Recio, T. (ed.), Geometría dinámica (pp. 147-171). Madrid: Grupo Anaya.

Joseph, G. (2000). The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics. Londres: Penguin Books

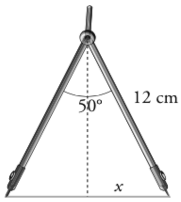
Moody, M., Trigonometry for solving problems. Recuperado el 5 de junio de 2015, de http://illuminations.nctm.org/hsactivity/

Mosquera, J. (2005). Didáctica del Algebra y la Trigonometría. Caracas: Universidad Nacional Abierta

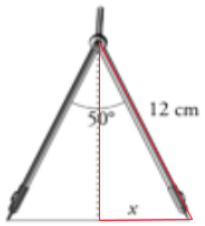
Vizmanos, J.R., Anzola, M., Santos, I. y Hervás, J.C.(2009). Matemáticas 4 opción B. Proyecto Esfera. Madrid: Ediciones SM

Anexo 1. Soluciones de los problemas propuestos

P1. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?



Solución:

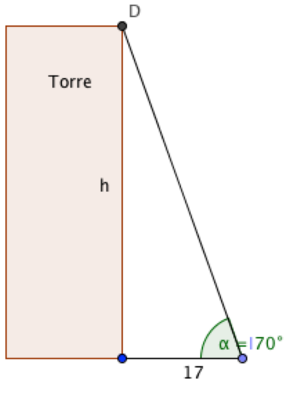


Vemos que la altura del triángulo formado por el compás forma un triángulo rectángulo con brazo del compás y el radio de la circunferencia. El ángulo entre la altura y el brazo es de 25º, luego si aplicamos la definición de seno de un ángulo tenemos que

$$sen 25º = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 12 sen 25º = 5,07 cm$$

P2. Una torre proyecta una sombra de 17m de longitud. Calcula la altura de la torre si, en ese momento, el sol tiene una inclinación de 70º con la horizontal.

Solución:

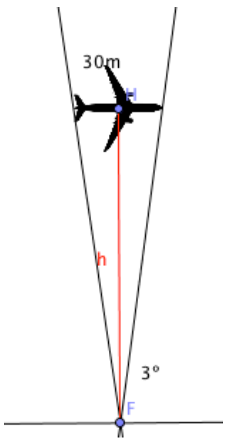


Vemos que la torre forma con su sombra un triángulo rectángulo y aplicando la definición de la tangente del ángulo formado por los rayos del sol con la horizontal tenemos que $\tan 70º = \frac{h}{17} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = 17 \cdot \tan 70º = 17 \cdot 2,747 = 46,71 m$$

P3. La longitud de un avión es 30m, y cuando vuela exactamente encima de nosotros, observamos que abarca un ángulo de 3º. ¿A qué altura vuela?

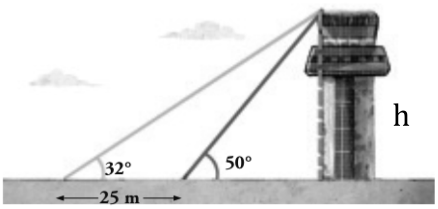
Solución:



El avión forma un triángulo isósceles con el observador, siendo el avión la base de dicho triángulo. La vertical desde el centro del avión es la altura h que queremos calcular. Dicha altura forma un triángulo rectángulo cuyo cateto pequeño es la mitad del avión y cuyo ángulo opuesto es la mitad del ángulo que abarca el avión completo. Es decir 1,5º. Si aplicamos a este ángulo la definición de tangente tenemos que: $\tan 1{,}5^\circ = \dfrac{15}{h} \Rightarrow h = \dfrac{15}{\tan 1{,}5^\circ} = 572{,}82m$

P4. Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 25 m, el ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre?

Solución:



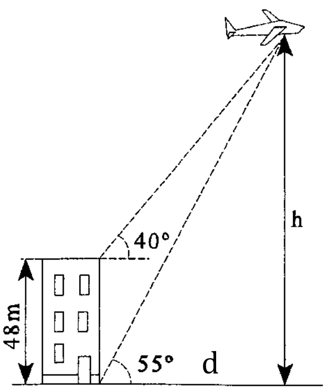
En este caso tenemos dos triángulos rectángulos con uno de los catetos (h) comunes. Por otro lado tenemos que la diferencia entre los catetos no comunes es igual a 25m. El valor de estos catetos no iguales es igual a $\dfrac{h}{\tan\alpha}$ siendo alfa cada uno de los ángulos dados. Por lo tanto podemos plantear la igualdad:

$$\frac{h}{\tan 32^\circ} - \frac{h}{\tan 50^\circ} = 25 \Rightarrow \frac{h\cdot(\tan 50^\circ - \tan 32^\circ)}{\tan 50^\circ \cdot \tan 32^\circ} = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{25\cdot \tan 50^\circ \cdot \tan 32^\circ}{\tan 50^\circ - \tan 32^\circ} = 25\frac{0{,}7447}{0{,}5669} = 32{,}84m$$

P5. Para saber a qué altura vuela un avión medimos los ángulos de elevación del avión desde el portal (55º) y desde la terraza (40º) de nuestra casa y se hace un esquema como el die la figura. La altura de la casa es de 48m. ¿A qué altura vuela el avión?

Solución:



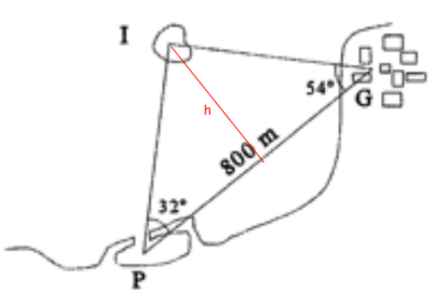
En este caso tenemos dos triángulos rectángulos que tienen en común el cateto que es la distancia del avión al edificio que llamaremos d. Si igualamos d calculada a partir de la tangente de cada uno de los ángulos conocidos tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{h}{\tan 55^\circ} = \frac{h-48}{\tan 40^\circ} \Rightarrow h\frac{\tan 40^\circ}{\tan 55^\circ} = h-48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\left(1-\frac{\tan 40^\circ}{\tan 55^\circ}\right) = 48 \Rightarrow h(0,4124) = 48 \Rightarrow h = \frac{48}{0,4124} = 116,37m$$

P6. Distancia a una isla: Queremos ir con una lancha hasta un islote I, pero antes nos gustaría saber a qué distancia se encuentra del puerto deportivo P, situación descrita en la figura de debajo. Para ello localizamos algún edificio del pueblo, por ejemplo la iglesia G, y medimos los ángulos IPG (32º) y PGI (54º), y la distancia del puerto a la iglesia (800m). ¿Cuánto dista el islote del puerto?

Solución:



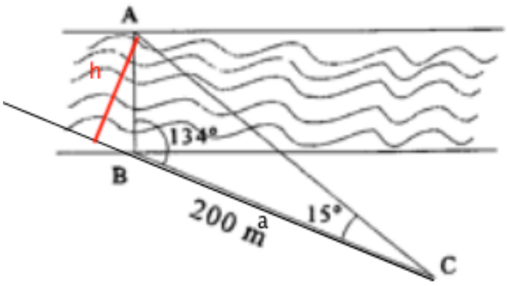
Trazamos la altura h. Para calcular la distancia PI, que llamaremos d, podemos usar la definición de seno ya que $sen 32^\circ = \frac{h}{d}$ Pero necesitamos calcular antes h. Para ello vemos que h divide al segmento PG en dos partes cuya suma es 800m, por lo que podemos plantear la ecuación:

$$\frac{h}{\tan 32^{o}}+\frac{h}{\tan 54^{o}}=800\Rightarrow h(\tan 54^{o}+\tan 32^{o})=800\cdot\tan 32^{o}\cdot\tan 54^{o}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=800\frac{\tan 32^{o}\tan 54^{o}}{\tan 32^{o}+\tan 54^{o}}=343{,}81m$$

P7. Anchura de un río: Localizamos un objeto en cada orilla de forma que estén uno enfrente del otro (Ay B) como en la figura. Desde B, miramos a otro objeto cualquiera C, y medimos la distancia BC (200m) y los ángulos ABC(134º) y BCA(15º). ¿Cuál es la anchura del río?

Solución:



Trazamos la altura h por A. Para calcular la distancia AB, que llamaremos d, podemos usar la definición de seno ya que $sen134^{o}=\frac{h}{d}$. Pero necesitamos calcular antes h. Para ello vemos que h pertenece a dos triángulos rectángulos, uno de ángulo opuesto 15º y otro de ángulo opuesto 180º-134º por lo que podemos plantear la ecuación:

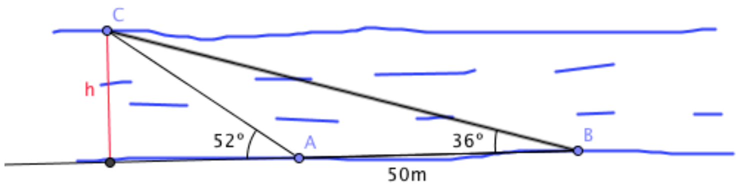
$$\frac{h}{\tan 15^{o}}-\frac{h}{\tan 46^{o}}=200\Rightarrow h\left(\tan 46^{o}-\tan 15^{o}\right)=200\tan 15^{o}\tan 46^{o}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=200\frac{\tan 15^{o}\tan 46^{o}}{\tan 46^{o}-\tan 15^{o}}=200\frac{0{,}2775}{0{,}7676}=72{,}30m$$

P8. Para calcular la anchura de un río, medimos desde los puntos A y B de una de las orillas, los ángulos que forma la dirección de ésta con las correspondientes visuales al punto C de la orilla opuesta, que resultan ser de 36º y 52º respectivamente. Si A y B distan 50m, ¿cuál es la anchura del río?

Solución:

El primer paso es dibujar la información que nos dan en el enunciado. A continuación dibujamos la altura del triángulo ABC que pasa por C.

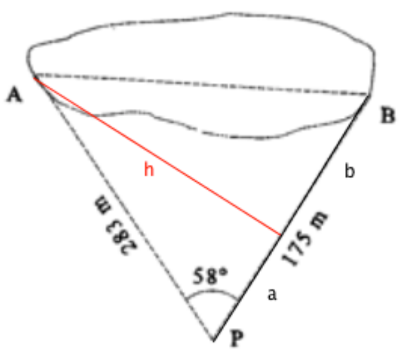


Esta altura h es directamente lo que nos preguntan. Este triángulo forma 2 triángulos rectángulos, uno con vértice en A y otro con vértice en B. Por lo tanto usamos la tangente de los ángulos en A y en B para definir la ecuación:

$$\frac{h}{\tan 36^\circ} - \frac{h}{\tan 52^\circ} = 50 \Rightarrow h = 50\frac{\tan 36^\circ \tan 52^\circ}{\tan 52^\circ - \tan 36^\circ} = 84{,}02m$$

P9. Anchura de un lago: Para medir la anchura de un lago, nos situamos en la posición P y medimos las distancias desde P a los dos extremos del lago (A y B), así como el ángulo APB (58º) según se indica en la figura. ¿Cuál es la anchura del lago?

Solución:



Trazamos la altura desde A, por lo que dividimos el triángulo ABP en dos triángulos rectángulos. En uno de ellos conocemos la hipotenusa y uno de los ángulos agudos, por lo que podemos calcular a y h. Conocido a podemos calcular b, ya que su suma es 175m. Tenemos pues en el segundo triángulo conocidos sus dos catetos h y b, por lo que podemos calcular la hipotenusa d, que es la anchura del lago.

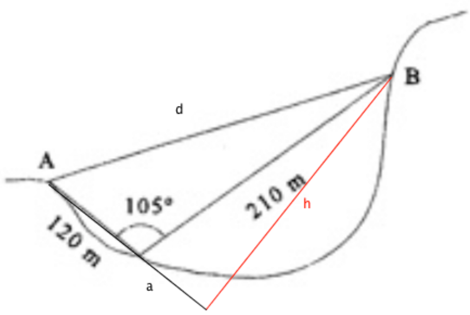
$$sen58^\circ = \frac{h}{283} \Rightarrow h = 283 sen58^\circ = 239m$$

$$\cos 58^\circ = \frac{a}{283} \Rightarrow a = 283\cos 58^\circ = 149,97m \Rightarrow b = 175 - a = 175 - 149,97 = 25,03m$$

$$d^2 = h^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{239^2 + 25,03^2} = 240,30m$$

P10. Se desea tender un cable tenso entre ambos lados (AyB) de una hondonada, como se indica en la figura. Situados en el fondo, las distancias a A y B son respectivamente, 120 y 210m,, y dichos puntos se ven con un ángulo de 105º. ¿Qué longitud debe tener el cable?

Solución:



Trazamos la altura desde B. En el triángulo formado por B, el punto de observación y la altura h podemos calcular tanto h como el otro cateto, ya que conocemos la hipotenusa y uno de los ángulos agudos. (180º-105º=75º)En un paso siguiente podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por AB, y la altura h.

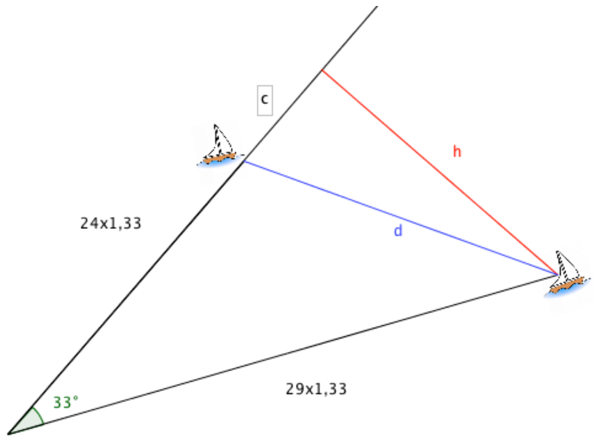
$$sen75^\circ = \frac{h}{210} \Rightarrow h = 210 sen75^\circ = 202,84m$$

$$\cos 75^\circ = \frac{a}{210} \Rightarrow a = 210\cos 75^\circ = 54,35m \Rightarrow$$

$$d^2 = h^2 + (120 + a)^2 \Rightarrow d = \sqrt{202,84^2 + (120 + 54,35)^2} = 267,48m$$

P11. De un puerto salen simultáneamente 2 barcos con rumbos que difieren 33º y velocidades de 24 y 29 nudos, respectivamente. ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro al cabo de 1hora y 20 minutos? Un nudo es una milla náutica por hora. Una milla náutica equivale a 1.852m.

Solución:



Para calcular el lado d, trazamos la altura h del triángulo formado por el puerto y cada uno de los dos barcos.

Esto nos permitirá calcular los dos catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por los dos barcos y la unión de h con uno de los lados según la figura. Por otro lado como 1hora y 20 minutos equivales a 1,33horas, para calcular las distancias recorridas por los dos barcos deberemos multiplicar su velocidad en nudos por 1, 33 para obtener las millas recorridas por cada uno.

$$sen33^{o} = \frac{h}{29 \cdot 1,33} \Rightarrow h = 29 \cdot 1,33 \cdot sen33^{o} = 21,059 millas$$

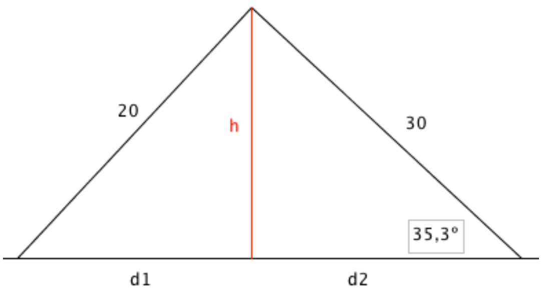
$$\cos 33^{o} = \frac{c + 24 \cdot 1,33}{29 \cdot 1,33} \Rightarrow c = 29 \cdot 1,33 \cdot \cos 33^{o} - 24 \cdot 1,33 =$$

$$= 1,33(29 \cos 33^{o} - 24) = 0,4285 millas \Rightarrow$$

$$d^2 = h^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{21,06^2 + 0,4285^2} = 21,064 millas$$

P12. Un poste eléctrico está sujeto por dos cables cuyos puntos de anclaje están situados a ambos lados del pie del poste. Si se sabe que los cables tienen una longitud de 20 y 30 metros y que el cable de mayor longitud tiene una inclinación de 35,3º con respecto a la horizontal. Calcula la altura del poste y la distancia entre los dos puntos de anclaje.

Solución:



Con el ángulo conocido podemos calcular tanto la altura del poste como la distancia d2 desde la base del poste hasta el punto de anclaje cuyo ángulo conocemos.

$$sen 35,3º = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 30 sen 35,3º = 17,34m$$

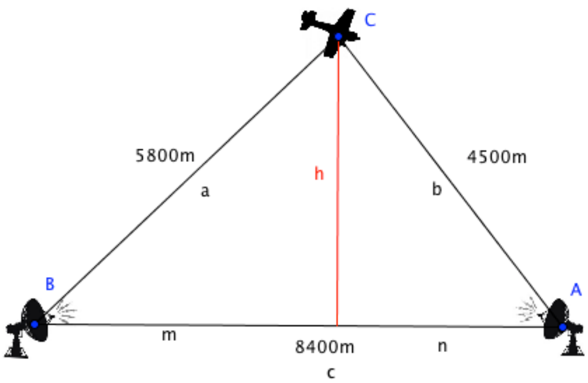
$$\cos 35,3º = \frac{d_2}{30} \Rightarrow d_2 = 30\cos 35,3º = 24,48m$$

Para calcular d1 podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la izquierda.

$$20^2 = h^2 + d_1^2 \Rightarrow d_1 = \sqrt{20^2 - 17,34^2} = 26,47m$$

P13. Desde dos puestos de control que distan entre sí 8400m, se detecta un avión que sobrevuela la línea que une ambos puestos y dista 5800m del primero y 4500 del segundo. ¿A qué altura vuela el avión?

Solución:



Al trazar la altura h, tenemos dos triángulos rectángulos a los que podemos aplicar el teorema de Pitágoras. Además sabemos que m+n=c y cuanto vale el cos B, por lo que:

$$a^2 = h^2 + m^2 = b^2 - (c-m)^2 + m^2 = b^2 - c^2 - m^2 + 2cm + m^2 = b^2 - c^2 + 2cm$$

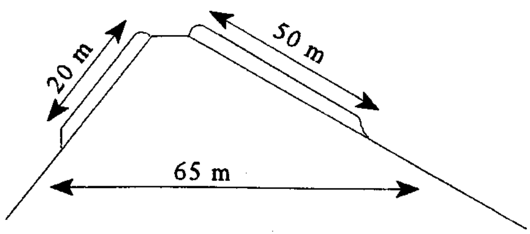
$$\cos\hat{B} = \frac{m}{a} \Rightarrow m = a\cos\hat{B} \Rightarrow a^2 - b^2 + c^2 = 2ca\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} =$$

$$= \frac{5800^2 - 4500^2 + 8400^2}{2\cdot 5800\cdot 8400} = 0{,}86156 \Rightarrow \hat{B} = 30{,}508^\circ$$

Ahora que sabemos uno de los ángulos, podemos calcular fácilmente la altura h

$$sen\hat{B} = \frac{h}{5800} \Rightarrow h = 5800 sen\hat{B} = 2944{,}44m$$

P14. En una estación de invierno, se construyen dos toboganes para saltos de esquí. Desde la posición de lanzamiento, se puede optar por uno o por otro, que tienen 20m y 50m de longitud, y van a parar a lugares con la misma altura y distantes entre sí 65m. ¿Qué pendiente tiene cada tobogán?



Solución:

Aplicando el mismo desarrollo que el problema anterior podemos calcular los dos ángulos de la base B y A:

$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} = \frac{20^2 - 50^2 + 65^2}{2\cdot 20\cdot 65} = 0{,}817307 \Rightarrow \hat{B} = 35{,}183^\circ$$

Si tomamos a por b y b por a tenemos:

$$\cos A = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2bc} = \frac{50^2 - 20^2 + 65^2}{2\cdot 50\cdot 65} = 0{,}97307 \Rightarrow A = 13{,}325^\circ$$