

**Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria,  
Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas**

**Especialidad de Matemáticas**

## **Trabajo Fin de Máster**

# **Trigonometría: una propuesta didáctica para 4º de ESO Opción B**

Autor: Cristina Puyo Abadía

Director: Miguel Ángel Marco

Junio de 2015



**Universidad  
Zaragoza**

## Contenido

A. El objeto matemático. ....	2
B. La enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.....	4
C. Conocimientos previos del alumno.....	7
D. Las razones de ser del objeto matemático.....	11
E. Campo de problemas. ....	17
F. Técnicas. ....	22
G. Tecnologías. ....	26
H. Secuencia Didáctica.....	31
I. Evaluación .....	39
Bibliografía .....	59
Anexos .....	61

## A. El objeto matemático.

El objeto matemático que voy a enseñar es TRIGONOMETRÍA para 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en la opción B de Matemáticas.

En la Ley para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), como figura en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre (BOE, 3 de enero de 2015) solo aparece como contenidos de trigonometría para este curso:

“Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos”.

Como dichos contenidos están muy poco detallados, enseñaré los que aparecen en el currículo oficial para trigonometría de 4º de ESO opción B especificados en la Orden de 9 de mayo de 2007 (BOA, 1 de junio de 2007). Estos contenidos son:

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente.
- Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo:

$$tg \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha}$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

- Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45°, 60°, 90°.
- Cálculo gráfico de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Resolución de problemas de triángulos rectángulos.
- Uso de la calculadora científica para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.

Es decir, no explicaré ángulos en otros cuadrantes, otras razones trigonométricas (inversas: cosecante, secante, cotangente) ni relaciones trigonométricas que no sean estas indicadas aquí.

Estos conocimientos los enseñaré a partir de las semejanzas de triángulos, utilizando estas como la base de la tecnología que justifica que las razones entre los lados de los triángulos semejantes son siempre las mismas y de ahí surgen las definiciones de seno, coseno y tangente, así como las relaciones entre ellas. Mediante las técnicas de resolución de estas definiciones aprenderán a resolver triángulos

rectángulos que serán aplicados a campos de problemas en los que hay que calcular una distancia a partir de un ángulo y un lado del triángulo, o bien uno de los ángulos, a partir de dos lados.

## **B. La enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.**

Habitualmente la enseñanza de la trigonometría se justifica mediante situaciones que se pueden modelar con triángulos rectángulos y en las que se necesita conocer la medida de algunos de sus lados, pero que no son accesibles para medir directamente, como alturas de montañas, pirámides o en Astronomía.

Se pueden encontrar ejemplos de esto en los libros de texto utilizados actualmente en las aulas. Así, el libro de texto de la editorial SM introduce un problema clásico como el de Tales de Mileto para calcular la altura de la pirámide. Después de razonarlo mediante la semejanza de triángulos que utilizó Tales de Mileto, explican que el cálculo se podía haber realizado con un triángulo rectángulo de ángulo  $30^\circ$  o  $60^\circ$ , ya que las relaciones entre sus lados también son conocidas.

En el libro de texto de la editorial Edebé se introducen problemas de cálculo de alturas de edificios resolviéndolos también mediante semejanza de triángulos rectángulos y después de plantear unos cuantos, plantean uno donde sólo se tiene la longitud de un cateto y un ángulo. Explican que el teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos son insuficientes en este caso y ahí introducen que la medida del ángulo proporciona una estrategia que permitirá servirnos de una semejanza para resolver el problema.

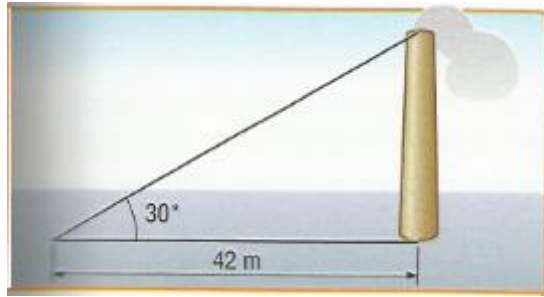
En estos libros de textos actuales los campos de problemas se centran en situaciones normalmente contextualizadas en la vida diaria para realizar medidas a partir de triángulos rectángulos en los que se conoce el ángulo y uno de los lados, y hay que calcular otro.

Por ejemplo, en el libro de la editorial SM:

*Una escalera de 5 m se apoya en una pared. El ángulo que forma con ella es de  $20^\circ$ . Calcula la altura que alcanza la escalera y la separación de la pared.*

Y en el libro de texto de la editorial Edebé:

*El ángulo de elevación del extremo de una chimenea, observado desde un punto del suelo situado a 42 m del pie de la chimenea, es de  $30^\circ$ . Calcula la altura de dicha chimenea.*



Para resolver estos problemas hay que utilizar las fórmulas que han dado previamente del seno, coseno y tangente, si bien la tecnología en que se basan estas relaciones no siempre se explica.

Por ejemplo, en el libro de la editorial Edelvives, comienzan dando directamente las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

y a partir de estas se plantean problemas en los que simplemente hay que aplicar dichas fórmulas para obtener el dato que falta, por lo que no se pueden considerar problemas sino ejercicios.

En otros libros (editorial Edebé y SM), sí que sustentan estas definiciones en la semejanza de triángulos para justificar que en un mismo ángulo estas relaciones se mantienen constantes sean cuales sean las longitudes de sus lados.

En todos ellos, los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°, y las relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo, se justifican mediante geometría.

Este aprendizaje de la trigonometría hace que haya alumnos que muestren dificultades de comprensión debido a la naturaleza abstracta de este objeto matemático, y otros que resuelven con facilidad los ejercicios aplicando las fórmulas que se han

aprendido pero que no llegan a relacionar estos procedimientos con conocimientos más generales, ni conocen las justificaciones de los pasos que se siguen.

Según Araya Chacón, M. A. (2007), el estudio de la comprensión de los estudiantes en trigonometría “refleja una comprensión del tema razones trigonométricas que les limita a realizar tareas que demanden de ellos únicamente memorización y aplicación sistemática de un teorema o de una definición”.

Concretando más, Gür, H. (2008) realizó un estudio en el que constató que muchos estudiantes tenían un entendimiento incompleto o fragmentado de las tres formas principales de entender el seno y el coseno: como coordenadas de un punto en el círculo unidad, como distancias horizontales y verticales de la consecuencia gráfica de esas coordenadas y como razones de los lados de un triángulo de referencia. Esta falta de entendimiento completo se debe a los métodos de memorización que aplican los profesores y que sólo facilitan a los estudiantes un conocimiento de trigonometría a muy corto plazo.

Por ello es necesario que, para superar estos obstáculos, el alumno construya un significado personal de las razones trigonométricas suficientemente rico justificando de dónde proceden.

Una idea de la metodología a seguir en este aprendizaje la aporta Byers, P. (2010), quien observó que los alumnos a los que se les enseñan las razones trigonométricas simplemente mediante sus definiciones tienen más dificultades que aquellos a los que se les empieza explicando el triángulo rectángulo y las propiedades geométricas de semejanzas de triángulos. De ahí que sugiera este proceso como el más óptimo.

### C. Conocimientos previos del alumno.

Los conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar el aprendizaje de Trigonometría son:

- La definición y medidas de **ángulos**: saber medirlos en grados y radianes.
- El **Teorema de Pitágoras**.
- La **semejanza de triángulos**, para entender la tecnología en que se sustenta la Trigonometría.
- **Ecuaciones** para saber despejar incógnitas.
- **Fracciones y números reales** para las operaciones.

Todos estos conocimientos los han estudiado ya, bien en este curso o en cursos anteriores.

La semejanza de triángulos se estudia por primera vez en 2º curso de ESO. En 3º continúan aplicando los teoremas de Tales y Pitágoras para resolver problemas geométricos y del medio físico. Y en 4º curso los alumnos que optan por la opción B de Matemáticas vuelven a repasar la semejanza de triángulos antes de adentrarse en la Trigonometría.

El concepto de ángulo lo trabajan desde Primaria y continúan con él en la etapa de Educación Secundaria. En 1º de ESO trabajan sus propiedades y las operaciones con ellos. En 2º también estudian la medida de los ángulos.

Las ecuaciones se enseñan por primera vez en 1º de ESO y se siguen trabajando durante todos los cursos. En 3º aparecen las ecuaciones de segundo grado.

En cuanto a las fracciones, también es un concepto que conocen desde Primaria y en todos los cursos de Secundaria operan con ellas. Los números reales se introducen en 4º curso.

Por lo tanto, en 4º de ESO cuando se introduce el tema de Trigonometría se presuponen todos estos conceptos adquiridos.

Sin embargo, para asegurar que realmente tienen asimilados dichos conocimientos previos, son convenientes algunas actividades, especialmente referidas a ángulos y propiedades de los triángulos rectángulos (Teorema de Pitágoras y semejanza

de triángulos), puesto que las ecuaciones y manejo de fracciones y números reales se habrán trabajado recientemente en unidades anteriores.

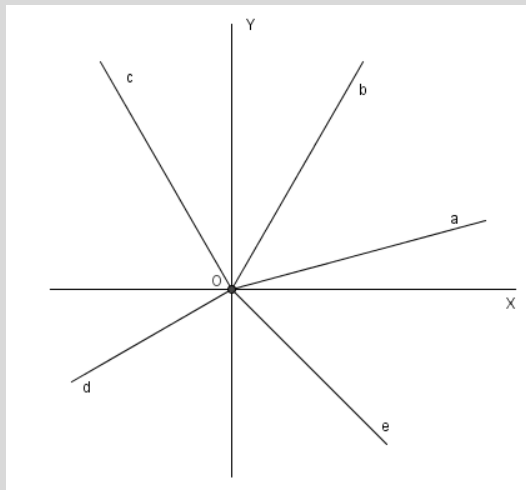
Para trabajar los **ángulos** se realizarán actividades para que recuerden lo que es un ángulo agudo, un ángulo recto, sus complementarios y tengan una idea aproximada de sus dimensiones y los sepan dibujar.

Dibuja un ángulo agudo y uno recto e indica a continuación su complementario.

Identifica en la figura los ángulos de  $15^\circ$  y  $60^\circ$ .

Dibuja aproximadamente los ángulos de  $40^\circ$  y  $80^\circ$ .

¿Cuáles son estos cuatro valores en radianes?



Aunque en esta actividad se trabajan también los ángulos en radianes, por lo general los alumnos entienden mejor la trigonometría expresada en grados sexagesimales, por lo que en todo el planteamiento del trabajo de este objeto matemático se utilizarán los grados, si bien he introducido esta pregunta con radianes para que los tengan presentes y para que no olviden las conversiones de unos en otros.

Para trabajar el **Teorema de Pitágoras** y la **semejanza de triángulos**, se realizará la siguiente actividad:

Para subir a un granero que está a 7 m de altura utilizamos una escalera de 12 m de longitud y con peldaños separados en 20 cm.

a) ¿Cuál es la distancia del pie de la escalera a la pared?

b) Nos fijamos en el peldaño número 25. ¿Cuánto dista del pie de la escalera? ¿A qué altura se encuentra? ¿A cuánta distancia, en horizontal, se encuentra del pie de la escalera?

c) Haz un dibujo de la situación destacando los peldaños que ocupan los lugares 12, 24, 36, 48 y 60 (fin de la escalera). Obtienes cinco triángulos rectángulos semejantes. Calcula en cada uno de ellos las razones:

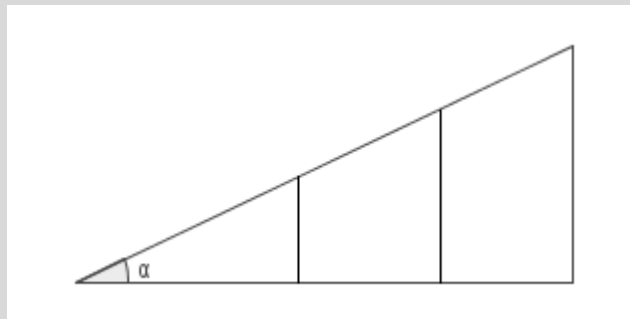
$$\frac{\text{cateto vertical}}{\text{hipotenusa}}, \frac{\text{cateto horizontal}}{\text{hipotenusa}} \text{ y } \frac{\text{cateto vertical}}{\text{cateto horizontal}}$$

d) Utilizando los valores obtenidos en el apartado anterior, calcula la altura a la que se encuentran los peldaños número 15 y 43.

e) De igual forma que antes, indica qué peldaños corresponden a una altura de 2,10 m y a una distancia, en horizontal, al pie de la escalera de 4,22 m.

Para que ejerciten el uso de la escuadra, el cartabón y el transportador de ángulos y, de esta forma, sepan dibujar triángulos rectángulos de amplitud dada, realizarán la siguiente actividad. Con ella también calcularán las razones entre los lados del triángulo como en la actividad anterior pero en esta la forma de denominar a los catetos será ya la general (catetos contiguo y opuesto) en lugar de horizontal y vertical, para que se vayan familiarizando con esta nomenclatura.

En la siguiente figura hay tres triángulos rectángulos con un ángulo agudo  $\alpha$ :



Repite el dibujo cuando el ángulo  $\alpha$  vale  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ .

Para cada caso, mide en los tres triángulos los catetos y la hipotenusa y calcula las razones:

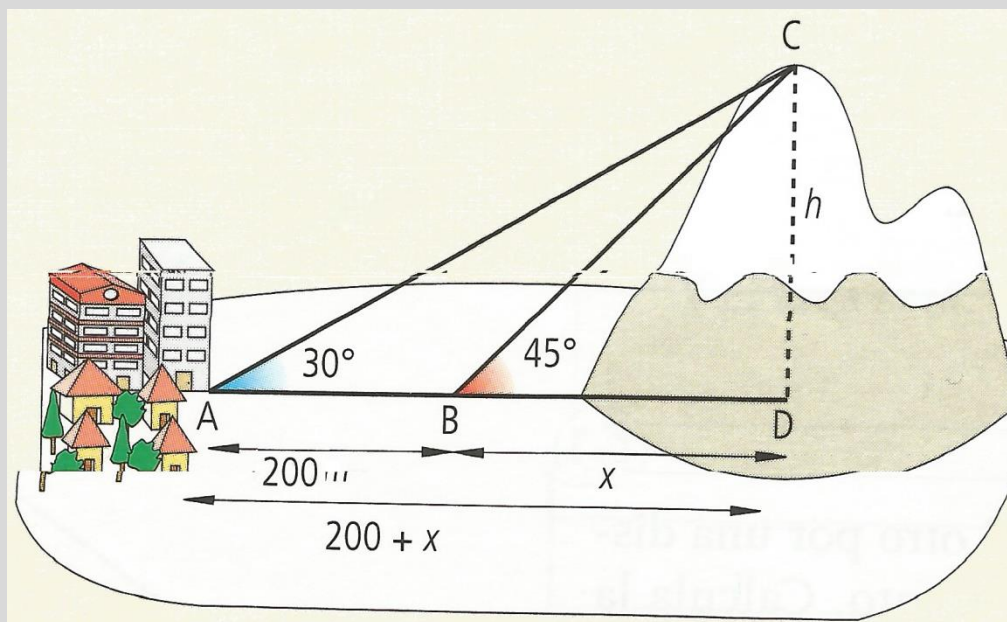
$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \text{ y } \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}.$$

## D. Las razones de ser del objeto matemático.

La razón de ser que voy a tener en cuenta para introducir las razones trigonométricas va a ser la resolución de triángulos rectángulos para calcular distancias muy grandes o que no se pueden medir directamente (por ejemplo, les explicaré que sirve para el cálculo de la altura de una montaña, o la distancia de la Tierra a la Luna), así como para calcular los ángulos de estos triángulos.

Sin intención de ser resueltos en este primer momento, se les puede mostrar ejemplos de este tipo de aplicaciones:

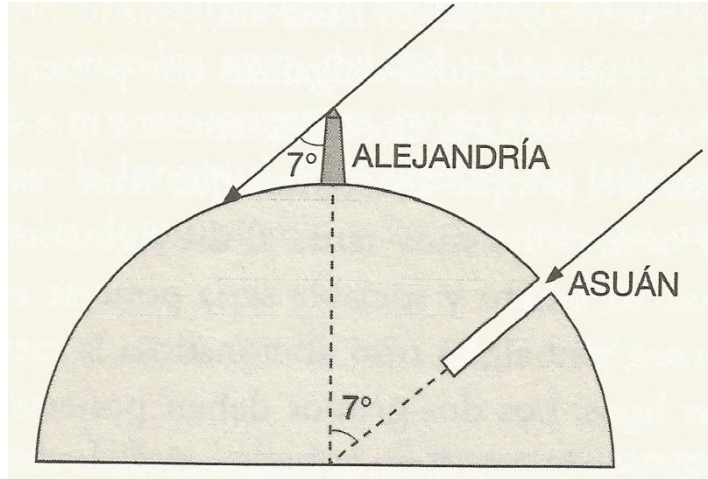
Unos excursionistas quieren conocer la altura de la montaña cercana al pueblo donde se encuentran. Para hacerlo, a la salida del pueblo miden el ángulo de elevación de la montaña que resulta ser de  $30^\circ$ . Cuando avanzan 200m hacia la base de la montaña lo vuelven a medir, siendo esta vez de  $45^\circ$ . ¿Cuál es la altura de la montaña?



Esta razón de ser sí que coincide con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto porque la Trigonometría tiene sus inicios ligados a la astronomía como herramienta auxiliar de cálculo.

Ya en el siglo III a. C. Eratóstenes calculó con asombrosa exactitud la longitud de la circunferencia de la Tierra basándose en la inclinación de los rayos solares al

incidir sobre la superficie terrestre en dos ciudades que se encontraban en el mismo meridiano (o eso creía él) y midiendo la distancia que separaba ambas ciudades (longitud del arco de circunferencia).



Este trabajo lo reflejó en su tratado *Sobre la medida de la Tierra*. En él se aprecia cómo se empiezan a relacionar ángulos (en la circunferencia) y distancias (longitud del arco). El intento de profundizar en el conocimiento de estas relaciones fue lo que impulsó el desarrollo de la trigonometría.

Ahora bien, según todos los indicios, las primeras tablas trigonométricas que relacionaban ángulos con las longitudes de la cuerda que sustentan en una circunferencia, fueron obra de Hiparco de Nicea (siglo II a.C), considerado el más grande astrónomo de la Antigüedad, y también “el padre de la trigonometría”. Estas tablas que elaboró eran las “tablas de cuerdas”. Aunque no se conservan sus obras, sus aportaciones son conocidas gracias a las referencias que hizo Ptolomeo casi tres siglos más tarde en su obra *Sintaxis Matemática* (llamada por los árabes *Almagesto*), un catálogo estelar donde también se encuentra la tabla de cuerdas que elaboró junto con su explicación.

A los hindúes les debemos la introducción de lo equivalente a la función seno, para reemplazar las tablas de las cuerdas griegas. Y los árabes realizaron tres aportaciones fundamentales: el establecimiento del conjunto de las funciones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente); la deducción de la regla del seno y la obtención de otras ecuaciones trigonométricas; y la

elaboración de tablas trigonométricas muy precisas. Fue a través de los árabes como llegaron a la Europa del Renacimiento todos estos conocimientos.

Para conseguir que los alumnos den sentido a las razones trigonométricas de un ángulo se les propondrá un problema para calcular una distancia y otro para calcular un ángulo.

Problema para calcular una longitud:

En el siguiente problema hay que calcular una altura que no se puede obtener por medidas directas pero en el que la situación se puede simular mediante un triángulo rectángulo donde se conocen un lado y un ángulo:

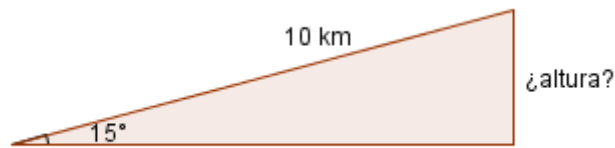
Si un coche sube un puerto de montaña, por una carretera con  $15^\circ$  de inclinación, y el “cuentakilómetros” indica que ha recorrido 10 km. ¿Cuántos metros ha ascendido el coche?

Se les plantea el problema pidiéndoles que reflexionen individualmente durante 10 minutos sobre cómo se debería resolver y recomendándoles que hagan un dibujo para entenderlo mejor.

Al cabo de este tiempo, se ponen en común las ideas y problemas surgidos.

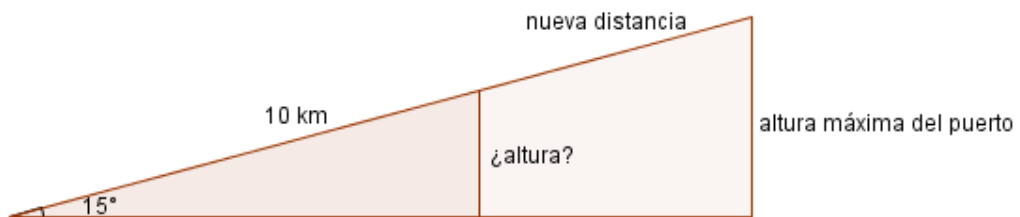
Es posible que, al ver el dibujo de un triángulo rectángulo, hayan intentado resolverlo mediante el teorema de Pitágoras o que bien haya surgido la idea de usar triángulos semejantes puesto que son las técnicas que conocen. Sin embargo, en ambos casos, se necesitarían datos adicionales.

Para los que hayan comentado que se resolvería con Pitágoras, se les pregunta qué dato necesitarían y cuando contesten que el otro cateto se les hace ver que ese dato es poco probable de conseguir en una situación real pues habría que medir por el interior de la montaña.



Así pues, nos centramos en la semejanza de los triángulos. Para aplicar esta técnica se necesitaría construir un triángulo semejante. Podría plantearse que, conociendo la altura máxima del puerto (y por supuesto, la altura a la que ha comenzado la ascensión) se podría ver cuánto ha recorrido hasta ese punto y, por tanto, la altura a los 10 km se calcularía utilizando las proporcionalidades entre distancia recorrida y altura en cada caso.

$$\frac{\text{altura}}{10 \text{ km}} = \frac{\text{altura máxima del puerto}}{10 \text{ km} + \text{nueva distancia}}$$



Ahora bien, les hacemos ver que el problema no facilita esos datos pero sin embargo estamos dejando de utilizar uno que nos dan: la pendiente de la carretera es de 15°.

¿Cómo podemos utilizar ese dato con los conocimientos que tenemos?

Aquí es cuando se puede introducir el concepto nuevo: las razones trigonométricas.

A partir del dibujo de las semejanzas de los triángulos, se explica que para un mismo ángulo, la proporción  $\frac{\text{altura}}{\text{distancia recorrida}}$  siempre va a ser la misma. Generalizando, la “altura” en este problema corresponde al cateto opuesto del ángulo que conocemos y la “distancia recorrida” a la hipotenusa.

Se realizarán más actividades para comprobar esta proporción para distintos ángulos hasta dar la definición de que a esta relación se le llama “seno del ángulo” y

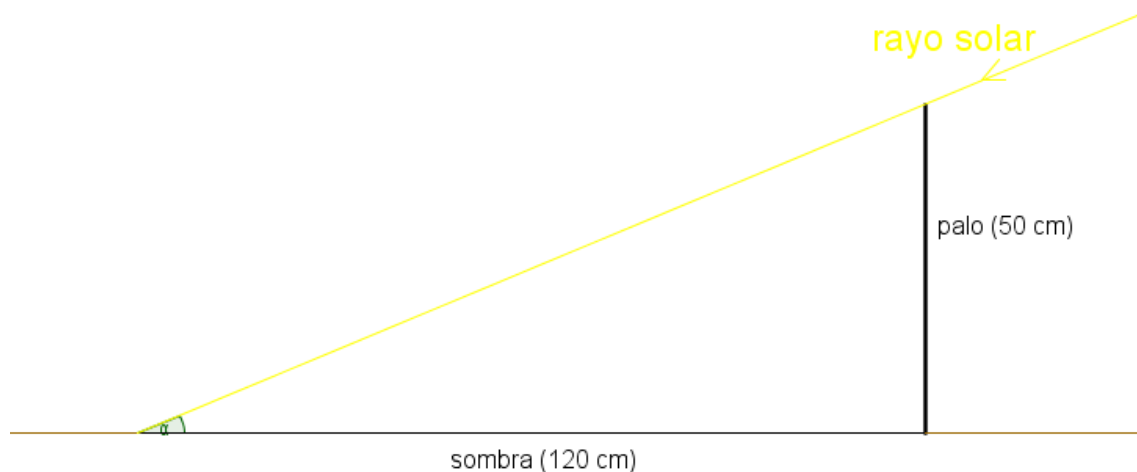
para cada ángulo tiene un valor determinado. Con esta introducción ya se puede comenzar con la explicación de cómo se calculan estos valores y el resto de razones trigonométricas.

Problema para calcular un ángulo:

Para completar otro aspecto de la trigonometría se les planteará a los alumnos un nuevo problema en el que se conocen dos lados de un triángulo rectángulo y se necesita calcular el ángulo.

*¿Qué ángulo forman los rayos solares con la Tierra cuando un palo de 50 cm de altura clavado verticalmente en el suelo proyecta una sombra de 120 cm?*

Con el enunciado de este nuevo problema se les orienta a que también realicen un dibujo donde simulen esta situación mediante un triángulo rectángulo y que sitúen en él los datos conocidos, que son los dos catetos del triángulo y el ángulo a calcular.



Este problema se planteará una vez que ya se hayan presentado al alumno las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Ahora tienen que asociar los datos que tienen a una de dichas razones trigonométricas.

En este caso, deducirán que es la tangente:

$$tg \alpha = \frac{50}{120}$$

A partir de esta fórmula se explicará que el valor del ángulo se obtiene aplicando el arcotangente (“arco cuya tangente es”):

$$\alpha = \arctg \left( \frac{50}{120} \right)$$

Esta definición se utilizará también para recordar la relación de la longitud del arco de la circunferencia con el ángulo.

En este momento se explica cómo se usa la calculadora científica para hacer este cálculo y se introducen el resto de funciones inversas:

Para el seno  $\rightarrow$  arcoseno (“arco cuyo seno es”).

Para el coseno  $\rightarrow$  arcocoseno (“arco cuyo coseno es”).

## E. Campo de problemas.

Se plantearán problemas que permitan determinar medidas de lados y ángulos sobre triángulos rectángulos contextualizados en situaciones de la vida cotidiana, para reforzar la adquisición del concepto de razón trigonométrica (seno, coseno, tangente). Además se realizarán problemas que tengan en cuenta sus orígenes y razón de ser. Dado que calcular, por ejemplo, la distancia de la Tierra a la Luna es complicado en este nivel, me limitaré a hacerles notar que la mayoría de las distancias por las que se pregunta en los problemas son inaccesibles y no sería posible obtenerlas de otro modo.

Estos problemas no consistirán simplemente en aplicar las técnicas, sino que en ellos los alumnos deberán comprobar, demostrar o justificar dichas técnicas.

<p>Campo de problemas 1: <i>Calcular un lado de un triángulo rectángulo, conocidos otro lado y un ángulo.</i></p>	<p>1a.- Se conoce un ángulo agudo y el cateto opuesto y se desea conocer la hipotenusa. O bien: 1a'.- Se conoce un ángulo agudo y la hipotenusa y se desea conocer el cateto opuesto a dicho ángulo.</p>
	<p>1b.- Se conoce un ángulo agudo y el cateto contiguo y se desea conocer la hipotenusa. O bien: 1b'.- Se conoce un ángulo agudo y la hipotenusa y se desea conocer el cateto contiguo a dicho ángulo.</p>
	<p>1c.- Se conoce un ángulo agudo y un cateto y se desea conocer el otro cateto.</p>
<p>Campo de problemas 2: <i>Calcular un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, conocidos dos lados.</i></p>	<p>2a.- Se conocen la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo a calcular.</p>
	<p>2b.- Se conocen la hipotenusa y el cateto contiguo al ángulo a calcular.</p>
	<p>2c.- Se conocen los dos catetos.</p>

### Campo de problemas 1:

1a.- Conocido el ángulo y la hipotenusa, calcular el cateto opuesto al ángulo.

Ejemplo:

Desde un barco se observa la cima de una montaña. Se mide el ángulo que forma la visual desde el barco a la cima con el horizonte y se obtiene  $\alpha=23^\circ$ . Con ayuda del radar se mide también la distancia del barco a la cima que resulta ser de 5837 metros. ¿Cuál es la altura sobre el nivel del mar de la cima de la montaña?

1b.- Conocido el ángulo y la hipotenusa, calcular el cateto contiguo al ángulo.

Ejemplo:

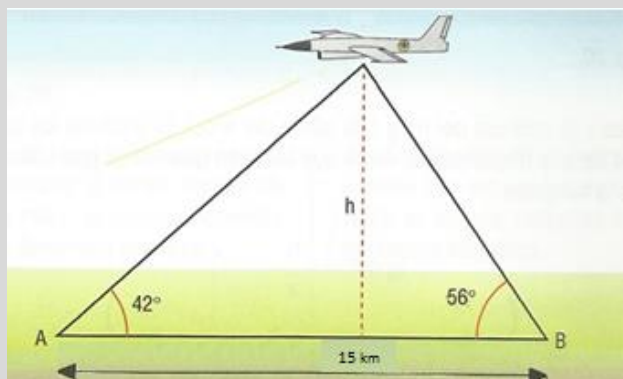
Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de  $45^\circ$  y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de  $30^\circ$ . Halla la anchura de la calle.



1c.- Conocido un ángulo agudo y un cateto, calcular el otro cateto.

Ejemplo:

Dos radares, A y B, distan entre sí 15 km y detectan un avión que está en el mismo plano vertical que ellos, bajo ángulos de  $42^\circ$  y  $56^\circ$  respectivamente como se muestra en la figura. Halla la altura a la que vuela el avión.



Campo de problemas 2:

2a.- Se conocen la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo a calcular.

Ejemplo:

¿Con qué ángulo sobre el suelo deberemos colocar una escalera de 6 m para que alcance una altura de 4 m?

2b.- Se conocen la hipotenusa y el cateto contiguo al ángulo a calcular.

Ejemplo:

Un globo está atado a una cuerda de 200m. Una brisa de aire lo desvía de la vertical 20 m. Halla el ángulo que forma la cuerda con el suelo.

2c.- Se conocen los dos catetos.

Ejemplo:

¿Qué ángulo forman los rayos solares con el suelo cuando un edificio de 40 m proyecta una sombra de 70 m?

Cuando se empieza a trabajar estos problemas se puede añadir una condición adicional al enunciado para no utilizar la calculadora y usar el transportador de ángulos para dibujar un triángulo semejante.

Por ejemplo, en el problema 1a:

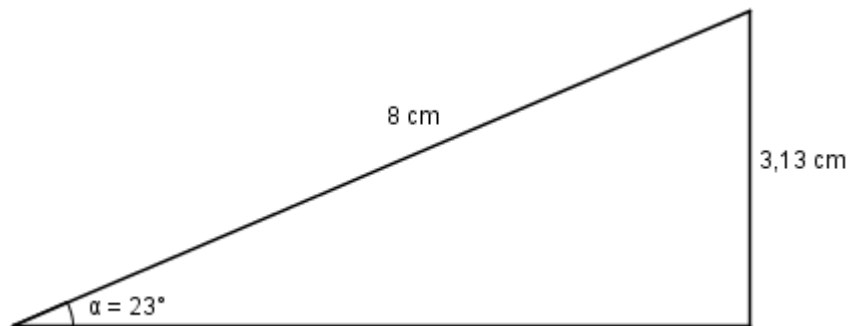
Desde un barco se observa la cima de una montaña. Se mide el ángulo que forma la visual desde el barco a la cima con el horizonte y se obtiene  $\alpha=23^\circ$ . Con ayuda del radar se mide también la distancia del barco a la cima que resulta ser de 5837 metros. ¿Cuál es la altura sobre el nivel del mar de la cima de la montaña?

*Si no pudieras utilizar la calculadora, ¿cómo lo harías? Ayúdate de un dibujo y utiliza el transportador de ángulos para representar realmente un triángulo de  $\alpha=23^\circ$ . ¿Qué propiedades de los triángulos puedes aplicar para obtener la solución?*

Esta condición adicional pretende que los alumnos apliquen la semejanza de triángulos para que de esta forma:

- Visualicen, dibujen y construyan triángulos.
- Tomen conciencia del significado de las razones trigonométricas y de que solo dependen del ángulo.

Así pues, si han dibujado un triángulo de ángulo  $23^\circ$  donde la hipotenusa mide, por ejemplo, 8 cm, el cateto opuesto medirá 3,13 cm:



Como este triángulo es semejante al del enunciado del problema, las relaciones entre la hipotenusa y el cateto opuesto de cada uno de ellos serán iguales:

$$\frac{3.13}{8} = \frac{\text{altura montaña}}{5837}$$

Para comprobar la solución obtenida con este método, se utilizará la técnica de aplicar la razón trigonométrica  $\text{sen } \alpha$ :

$$\text{sen } 23^\circ = \frac{\text{altura montaña}}{5837}$$

Los problemas en los que se apliquen estas dos técnicas serán realizados por los alumnos en clase, trabajándolos durante un determinado tiempo individualmente y poniéndolos después en común con toda la clase. Se les puede hacer ver que las diferencias en ambos resultados provienen de la aproximación de decimales y de la inexactitud de las medidas, por lo que es más preciso utilizar la razón trigonométrica.

Cuando se introduzca un problema para ser resuelto con una razón trigonométrica distinta, seré yo quien lo explique en la pizarra para mostrar esta nueva razón.

Una vez considerado que los alumnos han entendido el concepto enseñado, algunos problemas se pueden poner como tarea para casa, para que los puedan pensar con más tranquilidad y luego, en clase, se pondrán en común los procedimientos seguidos.

Se irá aumentando el grado de dificultad de estos problemas de forma que para resolverlos tengan que incorporar otros conocimientos como la resolución de sistemas de ecuaciones (ver problema 1c).

Para apoyar todo esto y ver la utilidad en las medidas reales y no solo sobre el papel, se saldrá a hacer mediciones reales al patio del instituto (explicado en el apartado “*H. Secuencia Didáctica*”).

## F. Técnicas.

Para afianzar cada técnica y adquirir dominio de ella de forma que sean capaces de usarla cuando sea necesario, la técnica se trabajará de forma rutinaria mediante ejercicios. Es decir, en un primer momento cuando se planteen las actividades, pueden ser consideradas problemas porque presentan la dificultad para los alumnos de decidir cómo afrontarlos pero con la repetición de este mismo tipo de actividades pasarán a ser ejercicios porque ya los resolverán de forma mecánica mediante la aplicación de las técnicas.

Las actividades que se van a presentar en el aula para cada tipo de técnica son:

Técnica 1: Resolución de triángulos rectángulos. Uso de las definiciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en un triángulo rectángulo para calcular un lado del triángulo o el ángulo agudo conociendo los otros elementos.

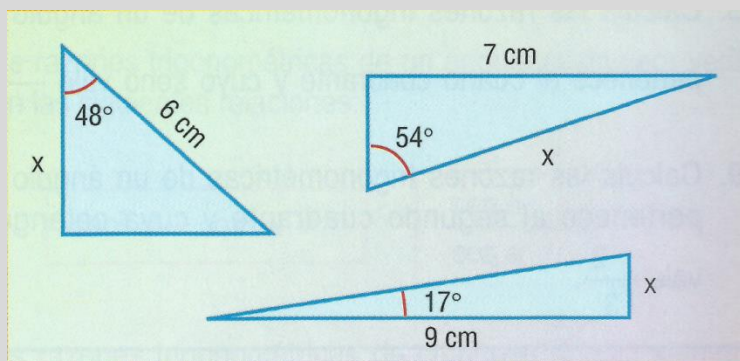
Tipos de actividades: para cada razón trigonométrica, hallar un lado o el ángulo de un triángulo dados los otros elementos necesarios, en casos no contextualizados.

Ejemplos:

Calcula las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm, y su hipotenusa, 5 cm.

Halla los valores de los ángulos.

Calcula el valor de  $x$  en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:



Con este tipo de tareas, conseguimos que el alumno adquiriera destreza en visualizar triángulos, sepa reconocer el ángulo recto y a partir de ahí sitúe el ángulo agudo y las relaciones entre sus lados para poder aplicar las razones trigonométricas sabiendo, en cada caso, según los datos que tiene, cuál utilizar.

Técnica 2: deducir propiedades de las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Por ejemplo, que los valores del seno y coseno de un ángulo agudo sólo pueden estar comprendidos entre 0 y 1, y que estos valores no son una función lineal.

El conocer estas propiedades lo incluyo dentro de las técnicas porque facilita la comprensión de los problemas y les aporta una mayor rapidez para su resolución.

En este caso, los ejemplos que planteo son preguntas de razonamiento y con ellas se pretende que reflexionen y deduzcan algunas propiedades nuevas de las que ya conocen.

Ejemplos:

Sabiendo los valores del seno y coseno de los ángulos de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ , justifica entre cuáles de estos valores se encontrará el ángulo  $\alpha$  que cumple:

a)  $\cos \alpha = 0.32$

b)  $\sin \alpha = 0.20$

¿Es posible que el seno de un ángulo sea 1,25? Justifica la respuesta.

¿Es  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha$ ? Justifica tu respuesta.

¿Es  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ ? Justifica tu respuesta.

¿Y si sustituimos el seno por el coseno? ¿Y por la tangente?

En estos problemas, ya no basta con aplicar las fórmulas de las razones trigonométricas sino que tienen que utilizar el dibujo, la visualización geométrica de estas relaciones trigonométricas para razonar. Se les plantean situaciones en las que no se pide únicamente un cálculo concreto sino que tienen que reflexionar.

Por eso, este tipo de preguntas son abiertas en el sentido de que cada alumno puede encontrar una manera de justificarlas. Pueden hacerlo con las propias definiciones de las razones trigonométricas pero también se les puede orientar a que utilicen dibujos sobre la circunferencia y que justifiquen los valores numéricos tanto de los ángulos conocidos que utilizan de referencia, como para los que se preguntan.

Lo más adecuado para estas actividades es que se trabajen individualmente, para que cada alumno encuentre su propia manera de justificarlas. Es bueno que se hagan en clase para que yo ayude cuando alguno se quede bloqueado o que incluso plantee otras técnicas a los que ya lo hayan resuelto de una, para dar más justificación a su razonamiento.

Cuando ya hayan asimilado estas propiedades de las razones trigonométricas, se les dará la siguiente tabla de ángulos destacados que resulta muy fácil de memorizar si se les hace ver las secuencias de los numeradores:

GRADOS	RADIANES	SENO	COSENO
0°	0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$
30°	$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
90°	$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$

### Técnica 3: relaciones entre las razones trigonométricas.

Con estas tareas se pretende que ejerciten y comprendan las siguientes relaciones entre las razones trigonométricas:

$\text{sen } \alpha = \cos \beta$ , siendo  $\alpha$  y  $\beta$  complementarios (es decir,  $\beta = 90^\circ - \alpha$ ),

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Se trata de que vean que estas relaciones trigonométricas facilitan el razonamiento y los cálculos en otros problemas.

Ejemplos:

Sabiendo que  $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ , calcula el  $\cos \alpha$ .

Si  $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$ , halla las razones trigonométricas de su ángulo complementario.

Se sabe que  $\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$ . Halla  $\text{sen } \alpha$  y  $\cos \alpha$ .

¿Es verdadera la igualdad  $1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ? Justifica tu respuesta.

Estas preguntas se les plantearán antes de darles todas las relaciones entre las razones trigonométricas. Consiste en que, con los conocimientos que tienen, lleguen a deducirlas ellos.

Para los ejercicios de calcular una razón trigonométrica a partir de otras expresadas como fracciones, tendrán que saber que existe un triángulo cuyo cateto tenga de longitud el numerador y cuya hipotenusa tenga de longitud el denominador, y tendrán que calcular el cateto que falta por Pitágoras. Se les indicará que dejen el resultado como fracción y expresado con la raíz si al hacerla no sale un número natural.

## G. Tecnologías.

Las tecnologías las deduciré basándome en que las relaciones trigonométricas surgen como conclusión de las semejanzas de los triángulos rectángulos.

Tecnologías que utilizaré:

Tecnología para justificar las razones trigonométricas: la semejanza de triángulos. Los triángulos semejantes tienen lados proporcionales y ángulos iguales. Por tanto, si definimos las razones trigonométricas como relación entre sus lados, esta relación siempre será igual para los triángulos semejantes.

Para que los alumnos lo comprueben por ellos mismos, se les planteará la siguiente actividad que dará pie a justificar la tecnología:

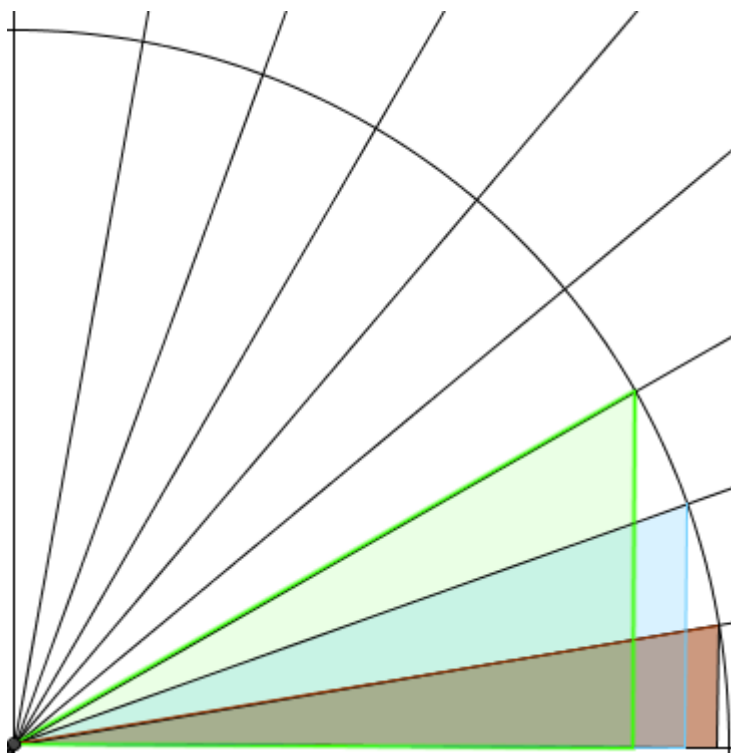
Juntando a los alumnos por parejas, tendrán que construir una tabla trigonométrica de valores angulares entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .

En una cartulina, cada grupo dibujará un círculo de radio indicado (por ejemplo, unas parejas lo dibujarán de 10 cm; otras, de 15 cm; otras dos de 20 cm; y otras de 25cm). También sería interesante que se hiciera para radios mayores. En estos casos, si no se consigue un compás de ese tamaño, se puede trazar la circunferencia utilizando una cuerda. Cada círculo lo graduarán de  $10^\circ$  en  $10^\circ$  desde  $0^\circ$  hasta  $90^\circ$  con la ayuda de un transportador de ángulos.

Para los ángulos de  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,... y  $90^\circ$  dibujarán el triángulo rectángulo donde la hipotenusa es el radio de la circunferencia inicial.

Para cada uno de estos triángulos, los alumnos medirán el cateto opuesto, el contiguo y la hipotenusa (esta siempre será el radio) y colocarán esos valores en una tabla. A continuación calcularán e incluirán en la tabla la relación para cada ángulo de  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ ,  $\frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$  y  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$ .

Se pondrán en común los datos de todos los grupos comprobando que los cocientes calculados para cada ángulo son los mismos en todos los grupos aunque el radio de la circunferencia inicial sea distinto!



Los alumnos que hayan dibujado la circunferencia de  $r = 10$  cm obtendrán esta tabla:

	MEDIDAS			RELACIONES		
	cateto opuesto	cateto contiguo	hipotenusa	cat. opuesto / hipotenusa	cat. contiguo / hipotenusa	cat. opuesto / cat. contiguo
10°	1,7	9,8	10	0,17	0,98	0,173
20°	3,4	9,4	10	0,34	0,94	0,362
30°	5	8,6	10	0,5	0,86	0,581
...	...	...	...	...	...	...
90°	10	0	10	1	0	

Aunque tendrán poca precisión de medida pues en las reglas escolares la unidad de medida más pequeña que tienen es el milímetro, se pueden hacer las medias de los valores de las distintas parejas que tienen el círculo con el mismo radio.

Los que hayan dibujado la circunferencia con otro radio tendrán distintas medidas pero los valores en la parte “relaciones” serán iguales.

De aquí se ha deducido que los triángulos semejantes tienen las mismas razones trigonométricas. Así pues, puesto que estas razones se definen como seno, coseno y tangente, institucionalizaremos esta conclusión haciéndoles ver que los triángulos

rectángulos semejantes tienen iguales los valores seno, coseno y tangente de sus ángulos agudos.

Si durante las medidas algunos alumnos han terminado antes que los demás, se les puede pedir que calculen los ángulos intermedios ( $5^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $25^\circ$ ,...). Con los resultados obtenidos se puede construir una tabla para tener en clase y consultarla cuando se necesite. Con esta tabla también se puede analizar el intervalo de validez de las funciones seno y coseno para los ángulos entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , y observar cómo varían los valores para que comprueben que se encuentran entre 0 y 1 y que no corresponden a una función lineal.

Otra demostración se puede realizar con el programa GeoGebra para que cada alumno compruebe las relaciones entre dos triángulos semejantes para el ángulo que elijan. Además, al comprobar después el valor con la calculadora científica, practican el uso de esta para el cálculo de razones trigonométricas.

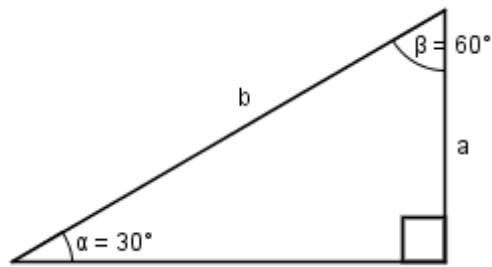
Dibuja con GeoGebra dos triángulos rectángulos semejantes de distintas dimensiones. Mide en cada caso la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo que tienen ambos con la misma amplitud. Calcula el seno y compruébalo con la calculadora. Repite la operación para otros triángulos rectángulos donde los ángulos agudos sean distintos a los que has elegido antes y para las otras razones trigonométricas.

#### Tecnología para justificar la relación entre las razones trigonométricas en los ángulos complementarios:

En el caso de los ángulos complementarios, lo pueden justificar de forma sencilla sobre el mismo triángulo recordando que en un triángulo rectángulo sus ángulos agudos son complementarios y, posteriormente, viendo que las propias definiciones de seno y coseno del complementario utilizan los mismos lados.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$



Luego,  $\sin \alpha = \cos \beta$

Aunque esto también se podría ver rotando un triángulo de  $30^\circ$  en el primer cuadrante de una circunferencia, considero que esta explicación es la más sencilla de ver y entender porque se justifica con la propia definición de las razones trigonométricas.

Tecnología para explicar  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

Considero que, igual que en el caso anterior, la forma más sencilla para justificarlo y que lo entiendan es operando con la propia definición de las razones trigonométricas.

Como  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$  y  $\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$ ,

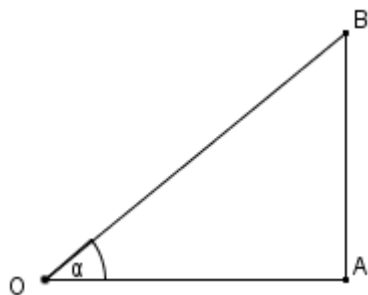
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{\sin \alpha \cdot \text{hipotenusa}}{\cos \alpha \cdot \text{hipotenusa}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

También se podría justificar mediante la circunferencia de radio unidad pero creo que, como no me he basado en ella para introducir la trigonometría, tiene más sentido explicarlo del modo anterior.

Tecnología para justificar  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

La tecnología que sustenta esta relación es el teorema de Pitágoras y la propia definición de las razones trigonométricas.

Sea el triángulo



Por Pitágoras:

$$AB^2 + OA^2 = OB^2$$

Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\text{sen } \alpha = \frac{AB}{OB} \text{ y } \cos \alpha = \frac{OA}{OB},$$

$$(OB \cdot \text{sen } \alpha)^2 + (OB \cdot \cos \alpha)^2 = OB^2$$

Simplificando:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Igual que en el caso anterior, también se podría justificar mediante la misma circunferencia de radio unidad identificando el lado AB con el seno y OA con el coseno pero considero que esta otra justificación sigue más la línea de la propuesta de enseñanza planteada.

## H. Secuencia Didáctica

Las actividades se podrían secuenciar en once sesiones teniendo en cuenta que cada sesión corresponde a una clase de 50 minutos. El conjunto de todas las sesiones se desarrollará aproximadamente durante tres semanas:

### 1ª sesión: **Introducción al tema y repaso de conocimientos previos.**

Les presentaré el nuevo tema que vamos a tratar: Trigonometría.

Como es un objeto matemático nuevo para ellos, les preguntaré si saben algo de él: para qué se utiliza, cuándo se desarrolló... y tras las ideas que aporten, les haré una introducción histórica de cómo surgió la necesidad de la trigonometría. También les mostraré una utilización cotidiana que pueden entender como es el cálculo de distancias inaccesibles con el ejemplo de calcular la altura de una montaña (descrito en el capítulo *D. Las razones de ser del objeto matemático*). No se trata de explicarles en este momento cómo se resuelve el problema sino de que vean que simulando triángulos rectángulos se pueden obtener las medidas que necesitamos.

En esta introducción habré hecho referencia a las semejanzas de triángulos y para comprobar sus conocimientos en este tema, haremos las actividades indicadas en el capítulo “C. Conocimientos previos”: dibujar ángulos agudos y sus complementarios, identificar valores de ángulos, recordar las medidas en radianes, trabajar los teoremas de Pitágoras y de Tales y comprobar que las relaciones entre los lados de triángulos semejantes son iguales.

Esta sesión corresponde al **momento del primer encuentro** con este objeto matemático.

### 2ª sesión: **Razón de ser y definición de las razones trigonométricas.**

Esta sesión corresponderá al **momento exploratorio** del objeto matemático. En ella les plantearé el primer problema que se va a constituir en razón de ser (explicado en el capítulo “D. Las razones de ser del objeto matemático”). Es el problema planteado para calcular una longitud. El enunciado nos habla de un coche que sube una montaña con cierta inclinación y queremos saber cuánta altura ha ascendido cuando ha recorrido

10 km. El alumno comenzará a explorar la tarea propuesta tratando de elaborar técnicas de manera autónoma y personal. Se pretende que piensen en un triángulo rectángulo pero con los conocimientos que tienen, necesitan más datos. Les ayudaré dándoles la pista de crear otro triángulo semejante si el coche sigue ascendiendo todo el puerto, para aplicar los conocimientos que tienen de semejanza de triángulos. Cuando se haya llegado a la conclusión de que la proporción  $\frac{\text{altura}}{\text{distancia recorrida}}$  siempre va a ser la misma y que la “altura” en este problema corresponde al cateto opuesto del ángulo que conocemos y la “distancia recorrida” a la hipotenusa, se comprobará gráficamente que esto es así para cualquier medida de los lados de los triángulos semejantes. Para eso se realizará la actividad explicada en *G. Tecnologías* donde por parejas calcularán proporciones entre los lados de distintos triángulos que se generan en circunferencias con diferentes radios. Con esta actividad habrán comprobado experimentalmente que los triángulos semejantes tienen las mismas razones trigonométricas.

Se institucionalizará esta conclusión diciendo que a estas relaciones las denominaremos “seno”, “coseno” y “tangente” del ángulo y que para cada ángulo tienen un valor determinado.

Así se llega al **momento de constitución del entorno tecnológico-teórico** en el que el estudiante dispone de una técnica basada en un discurso tecnológico-teórico.

### 3ª sesión: Trabajo de la técnica y uso de la calculadora.

Recordaremos de la sesión anterior las definiciones de las razones trigonométricas y calcularemos de nuevo el problema planteado como razón de ser por medio de ellas, buscando cuál es la apropiada en este caso.

Para calcular el valor  $\text{sen } 15^\circ$  que es lo que se necesita en este problema se puede consultar la tabla que crearon en la sesión anterior, si alguno calculó este ángulo. Luego, a modo de curiosidad, se les pueden mostrar las tablas que se utilizaban hace años antes de que se comercializaran las calculadoras científicas, haciéndoles ver que son como las suyas pero con más exactitud (ver *Anexo I*) y, por último, les explicaré cómo se utiliza la calculadora científica para calcular estas razones trigonométricas.

Para asentar estos conocimientos, realizarán varias actividades de aplicación de dichas definiciones, como las que están propuestas en el apartado “*F. Técnicas*” para la “técnica 1” (resolución de triángulos rectángulos) donde dados unos triángulos tienen que encontrar el valor de uno de los lados. De esta forma los alumnos adquirirán destreza en visualizar triángulos y aprenderán a aplicar las razones trigonométricas sabiendo, en cada caso, según los datos que tienen, cuál utilizar. Este momento corresponde al **trabajo de la técnica** porque se mejora la técnica y se va adquiriendo maestría en su uso.

Después de realizar estas actividades se introducirá un nuevo campo de problemas: calcular el ángulo a partir de dos lados. Para la explicación utilizaré el problema para calcular un ángulo del capítulo “*D. Las razones de ser del objeto matemático*”, en el que se busca la inclinación de los rayos solares sabiendo la altura de un palo y midiendo la sombra que proyecta. Tendrán que asociar los datos que tienen a una de las razones trigonométricas. Cuando ya la sepan, les explicaré cómo se realizan las operaciones inversas (arcoseno, arcocoseno y arcotangente) con la calculadora científica y realizarán ejercicios de los propuestos en el apartado “*F. Técnicas*” para la “técnica 1” (resolución de triángulos rectángulos) donde dados unos triángulos tienen que encontrar el valor de un ángulo.

#### **4ª sesión: Problemas y razonamiento sobre las propiedades de las razones trigonométricas.**

Puesto que en la sesión anterior ya trabajamos las técnicas para aplicar las razones trigonométricas, en esta seguiremos aplicándolas pero con problemas contextualizados de los nombrados en el apartado *E. Campos de problemas*. Aquí ya tendrán que interpretar el enunciado simulando un triángulo rectángulo y saber en él cuáles son los valores que tienen y los que hay que calcular aplicando la razón trigonométrica adecuada, pero no habrá en ellos ninguna dificultad añadida. Estos problemas los trabajaremos de la siguiente manera: les plantearé el enunciado de un problema para que lo resuelvan individualmente pero yo iré ayudando a los que vea que tienen dificultades. Luego un alumno lo resolverá en la pizarra, momento en el que

aprovecharé para ir recalcando ideas importantes que tienen que tener en cuenta para la resolución de los problemas, a partir de las dificultades que hayan surgido.

Cuando se hayan realizado algunos, se trabajarán las preguntas de razonamiento descritas en la “técnica 2” del apartado “*F. Técnicas*”. Por medio de ellas asimilarán las propiedades de las razones trigonométricas y les servirá para afianzar su conocimiento. Una vez trabajadas se les dará la tabla de ángulos destacados para que la puedan memorizar.

**5ª sesión: Resolución de problemas y relaciones entre las razones trigonométricas.**

Esta sesión, igual que la anterior, también la dedicaremos a realizar problemas pero en este caso dichos problemas tendrán más dificultad: o bien habrá que aplicar un sistema de ecuaciones o la visualización del triángulo rectángulo será más compleja.

Haremos los problemas que se pueda durante media sesión y les mandaré otros similares para que los hagan en casa.

Durante la otra media sesión, explicaré las relaciones entre las razones trigonométricas: el seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario; la tangente también se puede definir como el cociente entre seno y coseno; y que la suma del cuadrado del seno y el cuadrado del coseno es 1. Para practicarlas se plantearán preguntas y problemas donde haya que aplicarlas como los propuestos en el apartado “*F. Técnicas*” para la “técnica 3”. Para realizarlos se seguirá la misma metodología que para los problemas anteriores: pensarlos individualmente en clase y ponerlos luego en común.

**6ª sesión: Refuerzo de los conocimientos.**

En esta sesión corregiremos los problemas que tenían que realizar en casa, explicándolos en la pizarra. Con esta corrección podré ver en cuáles tienen más dificultades para incidir en ellos.

Esta sesión la planteo como trabajo personalizado para que cada alumno pueda ejercitar la trigonometría en el nivel en que se encuentra. Para los alumnos que tengan dificultades en las nociones básicas como saber qué razón trigonométrica aplicar, les prepararé problemas de los que hicimos en las sesiones iniciales: en un triángulo rectángulo saber reconocer dónde está el ángulo recto y definir las razones trigonométricas en función de los ángulos y los lados. Yo les ayudaré explicándoles individualmente. A los que tienen bien adquiridos todos los conocimientos les plantearé problemas con mayor grado de dificultad en los que haya que razonar más el planteamiento.

#### 7ª sesión: **Preparación de la prueba experimental y resolución de problemas.**

Esta sesión será de preparación para la siguiente en la que los alumnos saldrán al patio del instituto a tomar medidas de alturas reales, aplicando el objeto de ser de la trigonometría que es calcular las distancias inaccesibles.

Con esta tarea de salir a medir se pretende motivar a los estudiantes para que vean la aplicación directa de lo que están estudiando en un caso práctico y que consigan un aprendizaje significativo de la trigonometría.

Les entregaré un guion de la práctica a realizar (*ver Anexo II*) y explicaré en qué consiste- Organizaré grupos de cuatro personas intentando que sean heterogéneos, es decir, estarán formados por alumnos que presenten una mayor dificultad en cuanto al manejo de los procedimientos junto con otros con menos dificultades. Medirán la altura del edificio por dos procedimientos distintos: mediante la sombra que proyecta el edificio utilizando la propiedad de semejanza de los triángulos rectángulos; y mediante la medida del ángulo de observación, utilizando las razones trigonométricas. Se explicarán ambos métodos durante esta sesión haciéndoles ver que el de la medida por semejanza es más sencillo pero tiene el inconveniente de que hay que tener accesible la medida de la sombra (además de hacer sol). Por eso, es más seguro el método por trigonometría pero necesitan un aparato que mida ángulos. Así pues, construirán un goniómetro (teodolito) casero para tomar la medida de los ángulos (*ver Anexo III*).

Si en esta sesión queda tiempo, lo dedicaremos a seguir realizando problemas contextualizados. Sobre todo es interesante que se realice alguno de calcular una altura midiéndola desde dos puntos distintos como el problema planteado al exponer la razón de ser (obtener la altura de la montaña medido el ángulo desde el pueblo y unos metros más adelante) puesto que es el tipo de resolución que necesitarán aplicar para el cálculo de las alturas que medirán en la práctica. Para introducir este tipo de resolución se les puede hacer una simulación con GeoGebra mostrándoles que, situándonos en dos puntos de la misma recta, si dibujamos en el primero una recta de determinado ángulo con la horizontal y otra en el segundo con mayor inclinación, se cortan en un punto que es el que nos da la altura del objeto a medir.

#### 8ª sesión: **Realización de medidas reales.**

Realización de las medidas en el patio del instituto. El guion está enfocado a medir la altura del edificio del Instituto pero se puede aplicar a cualquier edificio o altura inaccesible.

Si es posible, cada grupo medirá el edificio desde lugares distintos para que no interfieran unos con otros, y yo iré pasando por cada grupo para ver cómo lo están llevando a cabo y si tienen alguna duda.

Si todos los grupos han terminado de tomar las medidas antes de que finalice la sesión, volveremos de nuevo a clase para realizar los cálculos. En los mismos grupos en que estaban intentarán resolver ambos métodos: el primero, por semejanza de triángulos; el segundo, por trigonometría con los conocimientos que ya tienen (recordando que en la sesión anterior resolvimos un problema similar). Después, se pondrán en común los datos y los resultados.

Este punto ya corresponde al **momento de institucionalización**. La técnica ha demostrado ser útil y la tecnología se incorpora al acervo cultural matemático de la clase. Además, puede corresponder también al **momento de evaluación** del objeto matemático porque se determina el alcance y las limitaciones de la técnica, y esta actividad les sirve para ver la utilidad de lo aprendido y la importancia de conservar este conocimiento para aplicaciones futuras.

Para evaluar la utilidad de la actividad harán un “reaction paper” (redacción muy breve, de una página aproximadamente) donde cada alumno dará su sensación personal sobre esta actividad. De esta forma sabré la impresión que le ha causado, si la ha considerado útil, si ha aprendido, y esta información servirá para enfocar otras actividades y para mejorar esta. Esta redacción no será en ningún caso para evaluar al alumno sino solo la actividad.

**9ª sesión: Resolución de dudas y práctica con GeoGebra.**

Si no dio tiempo a realizar los cálculos de las medidas experimentales durante la sesión anterior, se realizarán en esta.

Dado que esta es la sesión previa al examen, se utilizará para resolver dudas de las situaciones que más les cueste entender y para realizar problemas de forma que afiancen los conocimientos.

En esta sesión también se puede realizar una actividad con GeoGebra como la comentada en *G. Tecnologías* de dibujar triángulos semejantes y calcular las razones trigonométricas. Con esta actividad se familiarizan con esta herramienta viendo que también sirve para calcular el seno, el coseno y la tangente.

También pueden dibujar solo un ángulo definido por dos segmentos, obtener los valores de las razones trigonométricas e ir moviendo los segmentos de forma que varíe dicho ángulo y puedan comprobar cómo cambian los valores del seno, coseno y la tangente.

**10ª sesión: Prueba escrita.**

En esta sesión se realizará una prueba escrita para evaluar los conocimientos adquiridos (ver siguiente apartado “*I. Evaluación*”).

**11ª sesión: Corrección de la prueba y comunicación de los resultados.**

Esta sesión consistirá en la corrección del examen en clase por mi parte, explicando lo que tenían que haber contestado en cada pregunta, entregando a cada

alumno su examen corregido y explicándole de manera individual en qué ha fallado y las razones de esos fallos.

Las pruebas escritas, además de para calificar a los alumnos, sirven para hacer un seguimiento de su aprendizaje. Por eso es importante que los alumnos sean conscientes de sus fallos para que puedan mejorarlos. Serviría de poco si la prueba se queda en una calificación pero no se reflexiona sobre los tipos de errores que comete el alumno ni se propone una línea de actuación para corregirlos.

Así pues, realizaré un análisis de la prueba de cada alumno indicando:

- Si el alumno ha adquirido los conocimientos matemáticos evaluados.
- Si falla en otros aspectos como planteamiento o razonamiento.
- Si hay carencias en conocimientos previos.

Estas conclusiones las transmitiré al alumno para que sea consciente de ellas y, si lo considero necesario, las entregaré por escrito y con propuestas de actividades de refuerzo. En cualquier caso, esta comunicación siempre la haré de forma personal explicándosela individualmente de palabra, sin que el resto de alumnos la oigan. Si se hace durante una clase, pueden estar realizando otras tareas mientras voy llamando a cada uno.

Creo que en las edades de los alumnos de 4° de Secundaria es bueno no hacer públicas las notas porque tienden a compararse y puede ser perjudicial para los alumnos con malos resultados y baja autoestima. Si ellos quieren, comentarán sus resultados con los compañeros pero ya será una decisión personal.

## I. Evaluación

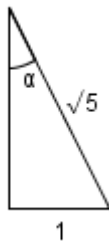
Para evaluar el aprendizaje realizado por los alumnos sobre este objeto matemático, estos realizarán la siguiente prueba escrita:

1. Responde breve y razonadamente a las siguientes cuestiones:

(Cada apartado puntúa 0,5 puntos. Puntuación máxima de la pregunta: 2 puntos)

- ¿El ángulo que mide un radián es agudo u obtuso?
- ¿Puede valer 1,5 el seno de un ángulo? Justifica tu respuesta usando un dibujo.
- ¿Puede ocurrir que el seno y el coseno de un ángulo coincidan?
- ¿Qué ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  verifican que  $\sin \alpha = \cos \beta$ ?

2. Halla todas las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  en el siguiente triángulo rectángulo: (1 punto)



3. En un triángulo rectángulo donde el ángulo que forman los lados BC y CA es recto, conocemos el ángulo que forman los lados BC y AB, que es  $50^\circ$  y la longitud del lado BC (7 cm). Calcula la longitud de los lados AB, AC y el ángulo que forman dichos lados. (1,5 puntos)

4. Una escalera de 4 m está apoyada sobre una pared. Si su base dista 1,5 m de ésta, ¿cuál es ángulo que forma la escalera con la pared? (1,5 puntos)

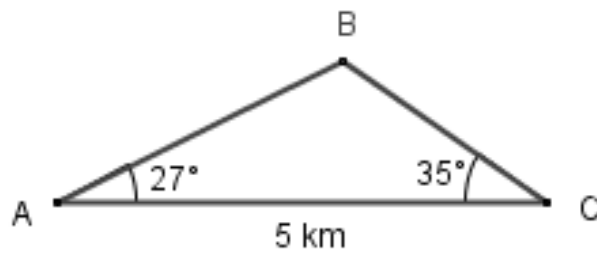
5. Desde un punto del suelo vemos una torre con un ángulo de  $55^\circ$ . Si retrocedemos 30 m vemos nuevamente la torre con un ángulo de  $25^\circ$ . Calcula la altura de la torre. (2 puntos)

6. En dos comisarías de policía, A y C, se escucha la alarma de un banco B. Con los datos de la figura calcula:

a) la distancia más corta del banco a la carretera que une ambas comisarías (1 punto)

b) la distancia del banco a cada una de las comisarías. (1 punto)

(Puntuación total: 2 puntos)



Esta prueba está pensada para evaluar todos los conocimientos trabajados durante las explicaciones. Hay preguntas para constatar si han adquirido los nuevos conocimientos sobre trigonometría y otros problemas donde, además de estos conocimientos, hay alguna dificultad adicional como saber interpretar el problema reconociendo los triángulos rectángulos que lo pueden simular, aplicar Pitágoras o plantear la solución mediante un sistema de ecuaciones.

Para la identificación de las tareas presentes en cada pregunta utilizo la clasificación de los problemas en dos categorías como definen Gairín, Muñoz y Oller (2012):

- Problemas de categoría 1: son aquellos cuya tarea principal consiste en la aplicación directa de una técnica de cálculo.
- Problemas de categoría 2: son problemas en los que debe manejarse algún concepto matemático.

También relaciono cada pregunta con los estándares de aprendizaje de la LOMCE presentes en el bloque de Geometría de este curso:

- 1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.
- 1.2. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.
- 1.3. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.

A continuación, particularizando para cada pregunta, especifico los campos de problemas, técnicas y tecnologías, así como las tareas que pretendo evaluar en ellas, los estándares de aprendizaje a que responden y las respuestas esperadas junto con los posibles errores y dificultades.

Pregunta 1 - Se compone de varias preguntas sobre conocimientos fundamentales de lo que significan los ángulos y las razones trigonométricas. Se

evalúan fundamentalmente las “técnicas 2” (deducir propiedades de las razones trigonométricas) descritas en el apartado “F. Técnicas” y el conocimiento de las tecnologías explicadas. Adicionalmente, en estas preguntas se evalúa que sepan razonar las contestaciones.

Todas estas cuestiones de la pregunta 1 se pueden englobar dentro del estándar de aprendizaje *1.1 Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos.*

a) *¿El ángulo que mide un radián es agudo u obtuso?*

Con esta pregunta pretendo evaluar si saben la definición de radián.

Las respuestas que puedo esperar son:

Respuesta 1: Sabemos que  $\pi/2$  radianes corresponde a un ángulo recto. Como  $\pi/2 > 1$ , 1 radián será menor que un ángulo recto. Por tanto, es un ángulo agudo.

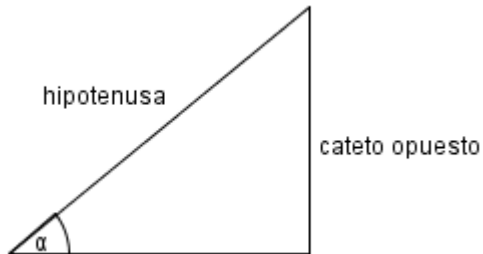
Respuesta 2: Puesto que los alumnos se suelen sentir más familiarizados a trabajar con grados sexagesimales en lugar de con radianes, es probable que establezcan la relación entre ellos de la siguiente manera: si  $2\pi$  radianes =  $360^\circ \rightarrow 1$  radián =  $57,29^\circ$ . Por tanto, es un ángulo agudo.

La posible dificultad que puede tener esta pregunta es que, al no estar familiarizados a trabajar con radianes, no recuerden su definición o su equivalencia con los grados sexagesimales.

b) *¿Puede valer 1,5 el seno de un ángulo? Justifica tu respuesta usando un dibujo.*

Con esta pregunta se valora si saben las propiedades de las razones trigonométricas de un ángulo agudo. En este caso, que los valores del seno de un ángulo agudo sólo pueden estar comprendidos entre 0 y 1. El pedirles un dibujo es para que hagan un triángulo y este les sirva de ayuda para el razonamiento. Además, en caso de que la respuesta no sea correcta, yo pueda ver qué concepto es el que no tienen claro: si la definición de seno o que la longitud de cada cateto es siempre menor que la de la hipotenusa.

Respuesta: No. La razón trigonométrica seno de un ángulo en un triángulo rectángulo está definida como la razón entre el cateto opuesto del ángulo y la hipotenusa. Como los catetos siempre son menores que la hipotenusa, esta razón nunca puede ser mayor que 1.



Un posible error que pueden cometer es pensar que como solo hemos estudiado los ángulos hasta 90° y ese es el ángulo cuyo seno vale 1, que los ángulos mayores de 90° tienen valores del seno mayores que 1. Con esta conclusión se pondría de manifiesto que no tienen bien adquirido el concepto de seno como razón entre el cateto y la hipotenusa.

En caso de que sí que interpreten esta razón correctamente, puede que tengan un error debido a un conocimiento previo sobre los triángulos y que no asimilen que los catetos son siempre menores que la hipotenusa.

*c) ¿Puede ocurrir que el seno y el coseno de un ángulo coincidan?*

Con esta pregunta se pretende que apliquen las definiciones de las razones trigonométricas seno y coseno para interpretarlas bien gráfica o matemáticamente, o también mediante la relación entre ambas razones.

Las respuestas correctas que puedo esperar son:

Respuesta 1: Sí. Por definición de seno y coseno:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

Por tanto, para que sean iguales,

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \alpha \rightarrow \text{cateto opuesto} = \text{cateto contiguo}.$$

Es decir, en los triángulos rectángulos cuyos catetos son iguales, el seno y el coseno coinciden. Esto ocurre en los triángulos rectángulos cuyos dos ángulos agudos son de  $45^\circ$ .

Respuesta 2: Sí. Según la relación entre las razones trigonométricas:

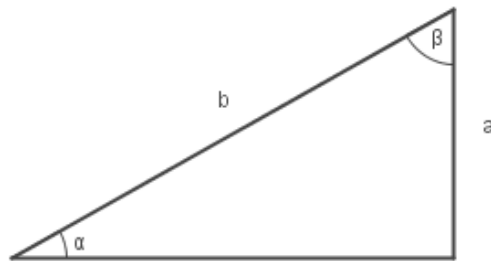
$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ . Por tanto si  $\text{sen} \alpha = \text{cos} \alpha \rightarrow 2 \text{sen}^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , que es una razón posible. Es más, equivale a  $\alpha = 45^\circ$ .

El posible error que pueden cometer es que piensen que como ambas razones trigonométricas tienen definiciones distintas, los resultados son distintos. En este caso se evidenciaría que saben y entienden las definiciones de las razones trigonométricas pero que no han analizado más los posibles casos de triángulos que pueden tener, así como que no recuerdan los valores de estas razones para los ángulos significativos ( $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ ).

d) ¿Qué ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  verifican que  $\text{sen} \alpha = \text{cos} \beta$ ?

Aquí se evalúa el concepto de ángulos complementarios.

Respuesta: los ángulos complementarios:  $\alpha = 90^\circ - \beta$



$$\text{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

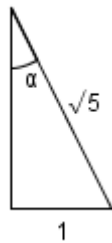
$$\text{cos} \beta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

Es decir,  $\text{sen} \alpha = \text{cos} \beta$

El posible error que pueden cometer es que piensen que se les está preguntando lo mismo que en la pregunta anterior y respondan  $45^\circ$  sin darse cuenta de que se está preguntando por ángulos de valores diferentes.

Si han entendido bien la pregunta es posible que alguno no recuerde que los ángulos agudos de los triángulos rectángulos son complementarios y, por tanto, no llegue a la conclusión esperada.

Pregunta 2 – *Halla todas las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  en el siguiente triángulo rectángulo:*



Esta pregunta pretende evaluar el uso de las definiciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en un triángulo rectángulo ("técnica 1" del apartado "F. Técnicas") aplicando las relaciones entre ellas ("técnica 3" del apartado "F. Técnicas").

Este problema se puede considerar de categoría 1, aunque si calculan el cateto que falta por Pitágoras, esa herramienta podría ser tarea auxiliar específica. Considerándolo de categoría 1 tendría las siguientes tareas:

**TAREAS PRINCIPALES:**

- Conocimiento de las razones trigonométricas.
- Conocimiento de las relaciones entre razones trigonométricas.

**TAREAS AUXILIARES**

**GENERALES:**

- De tipo algebraico al sustituir los valores en  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  o en el teorema de Pitágoras.

Esta pregunta evalúa el estándar de aprendizaje 1.3. *Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.*

Posibles respuestas: aplicando las relaciones trigonométricas o calculando los lados por Pitágoras.

Respuesta 1: Aplicando la definición del seno:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Aplicando la relación entre razones trigonométricas:  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,

$$\frac{1}{5} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Y aplicando la relación  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

Respuesta 2: Habrá alumnos que en lugar de aplicar las relaciones entre las razones trigonométricas, calcularan el lado que falta por Pitágoras. Como no está especificado en el enunciado que lo tienen que hacer de la forma anterior, este método también se considerará válido.

Sea  $c$  el cateto que falta. Según el teorema de Pitágoras:  $c^2 + 1^2 = (\sqrt{5})^2 \rightarrow$

$$c^2 = 4 \rightarrow c = 2$$

Por tanto, aplicando las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

Los posibles errores que pueden cometer van desde no definir el seno con los datos que se tienen por no tener bien adquirido el concepto de razón trigonométrica, o no saber continuar con las siguientes porque falta el valor de un cateto (lo que demostraría que no tiene recursos para calcularlo), hasta confundirse en las tareas auxiliares al intentar calcularlas.

**Pregunta 3** – *En un triángulo rectángulo donde el ángulo que forman los lados BC y CA es recto, conocemos el ángulo que forman los lados BC y AB, que es  $50^\circ$  y la longitud del lado BC (7 cm). Dibuja el triángulo, calcula la longitud de los lados AB, AC y el ángulo que forman dichos lados.*

Esta pregunta pretende evaluar la capacidad de resolver triángulos rectángulos dibujándolos a partir de ciertos datos y de utilizar la calculadora para calcular las razones trigonométricas de un ángulo. Esta pregunta pertenece al “campo de problemas 1” en que a partir de un ángulo y un lado, se calculan los otros lados.

Esta pregunta también es de categoría 1 porque el objetivo principal es el dominio de una técnica de cálculo (aplicar las razones trigonométricas).

#### TAREAS PRINCIPALES:

- Resolver triángulos rectángulos dibujándolos a partir de ciertos datos.
- Conocimiento de las razones trigonométricas.

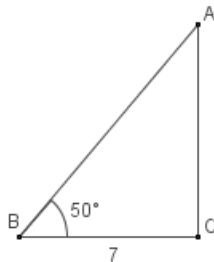
#### TAREAS AUXILIARES

##### GENERALES:

- De tipo algebraico al resolver las ecuaciones.
- De uso de la calculadora.

Esta pregunta evalúa los estándares de aprendizaje 1.2. *Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, [...] de figuras geométricas* y 1.3. *Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.*

Respuesta 1: Dibujamos el triángulo:



$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{AC}{7} \quad \rightarrow \quad AC = 7 \operatorname{tg} 50^\circ = 8,34 \text{ cm}$$

$$\cos 50^\circ = \frac{7}{AB} \rightarrow AB = \frac{7}{\cos 50^\circ} = 10,89 \text{ cm}$$

El ángulo que forman estos lados es el complementario de  $50^\circ$ , es decir,  $40^\circ$ .

Respuesta 2: Los lados los han podido calcular igual pero el ángulo, en lugar de darse cuenta de que es el complementario del otro ángulo agudo, es posible que lo calculen aplicando las razones trigonométricas:

$$\sin \beta = \frac{7}{10,89} \rightarrow \beta = \arcsen \frac{7}{10,89} \rightarrow \beta = 40^\circ$$

Posibles dificultades que pueden encontrar en la tarea principal: saber hacer un primer dibujo correcto con los datos dados en el enunciado. Una vez hecho el dibujo, el problema puede ser aplicar las razones trigonométricas correctamente. Pueden confundirse por no saberse bien las definiciones de estas o por no saber interpretar cuál es cada lado (catetos e hipotenusa).

**Pregunta 4** – *Una escalera de 4 m está apoyada sobre una pared. Si su base dista 1,5 m de ésta, ¿cuál es el ángulo que forma la escalera con la pared?*

Este problema pertenece al “campo de problemas 2” en el que hay que calcular el ángulo dados dos lados. En este caso, aplicando la razón trigonométrica del seno. Se evalúa si saben interpretar gráficamente el enunciado del problema y aplicar la razón trigonométrica correcta. Además, deben saber utilizar la calculadora científica para calcular el arcoseno.

Al igual que las preguntas anteriores, esta también es de categoría 1 porque el objetivo principal es el dominio de una técnica de cálculo (aplicar la razón trigonométrica correspondiente).

#### TAREAS PRINCIPALES:

- Interpretación correcta del ángulo que piden.

- Conocimiento de las razones trigonométricas.
- Conocimiento de la función inversa de la razón trigonométrica para el cálculo del ángulo.

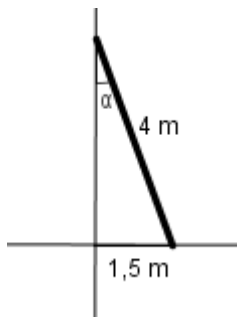
#### TAREAS AUXILIARES

##### GENERALES:

- De uso de la calculadora.

Esta pregunta evalúa el estándar de aprendizaje 1.2. *Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, [...] de figuras geométricas.*

Respuesta:



Como el ángulo que hay que calcular es el que forma la escalera con la pared, tenemos los datos para poder aplicar la razón trigonométrica del seno:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1,5}{4} \quad \rightarrow \quad \alpha = \arcsen\left(\frac{1,5}{4}\right) = 22^\circ$$

El ángulo que forma la escalera con la pared es de  $22^\circ$ .

Posibles dificultades que pueden encontrar en la tarea principal: saber interpretar el enunciado de una forma gráfica correcta colocando el ángulo donde corresponde y utilizar la razón trigonométrica correspondiente.

Los dos problemas siguientes puntúan más alto (2 puntos) porque precisan de un razonamiento y un desarrollo más elaborado.

Pregunta 5 – Desde un punto del suelo vemos una torre con un ángulo de  $55^\circ$ . Si retrocedemos 30 m vemos nuevamente la torre con un ángulo de  $25^\circ$ . Calcula la altura de la torre.

Este problema pertenece al “campo de problemas 1” donde dados un ángulo y un lado, hay que conocer otro lado. Se evaluará si interpretan correctamente de manera gráfica el enunciado y aplican la razón trigonométrica correcta. En este caso tienen que aplicar dos veces la tangente y la dificultad reside en que para cada una de las veces en que la plantean, no tienen todos los datos para resolverla por lo que aparece un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Es un problema de categoría 2.

#### TAREAS PRINCIPALES:

- Interpretar correctamente las dos situaciones del enunciado.
- Conocimiento de las razones trigonométricas.

#### TAREAS AUXILIARES

##### ESPECÍFICAS:

- Resolución de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

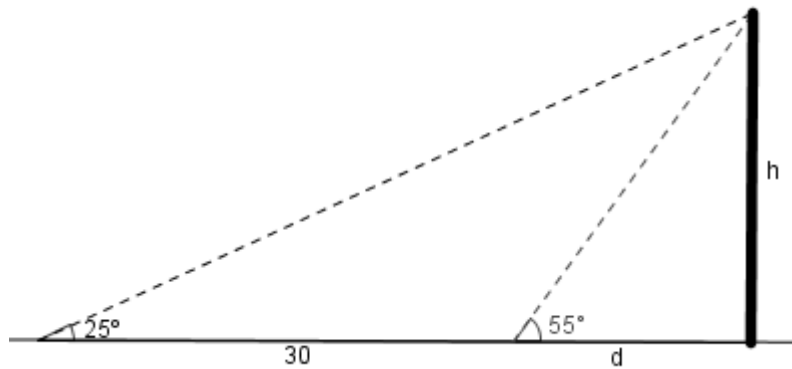
##### GENERALES:

- De tipo algebraico al resolver las ecuaciones.
- De uso de la calculadora.

Esta pregunta se puede considerar que evalúa los tres estándares de aprendizaje:

*1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos; 1.2. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, [...] de figuras geométricas; y 1.3. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.*

La respuesta correcta esperada es aplicar las tangentes desde los dos puntos de medición:



Si llamamos  $d$  a la distancia hasta la torre desde donde tomamos la primera medida, y  $h$  a la altura de la torre, en la primera medida aplicando la tangente tenemos:

$$\operatorname{tg} 55^{\circ} = \frac{h}{d}$$

De igual forma en la segunda medida,

$$\operatorname{tg} 25^{\circ} = \frac{h}{30+d}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $h$  y  $d$ ). Como lo que nos interesa es calcular  $h$ , despejamos  $d$  en la primera ecuación y lo sustituimos en la segunda:

$$d = \frac{h}{\operatorname{tg} 55^{\circ}} = 0.7 h$$

$$\operatorname{tg} 25^{\circ} = \frac{h}{30+0.7 h} \quad \rightarrow \quad h = 20,8 \text{ m}$$

La altura de la torre es de 20,8 m.

Posibles dificultades que pueden encontrar en la tarea principal: no saber interpretar los dos triángulos de cada medida y no saber deducir cuál es el cateto contiguo ya que es un dato que no viene dado en el enunciado.

**Pregunta 6** – En dos comisarías de policía, A y C, se escucha la alarma de un banco B. Con los datos de la figura calcula:

a) la distancia más corta del banco a la carretera que une ambas comisarías

*b) la distancia del banco a cada una de las comisarías.*

El plantearles la primera cuestión de calcular la distancia más corta a la carretera es para facilitarles la construcción de los dos triángulos rectángulos y para dirigirles en la realización por pasos del problema ya que puede ser una dificultad bloqueante el no tener datos suficientes para aplicar las razones trigonométricas en un primer momento.

Es un problema de categoría 2.

#### TAREAS PRINCIPALES:

- Reconocimiento de triángulos rectángulos.
- Conocimiento de las razones trigonométricas.

#### TAREAS AUXILIARES

##### ESPECÍFICAS:

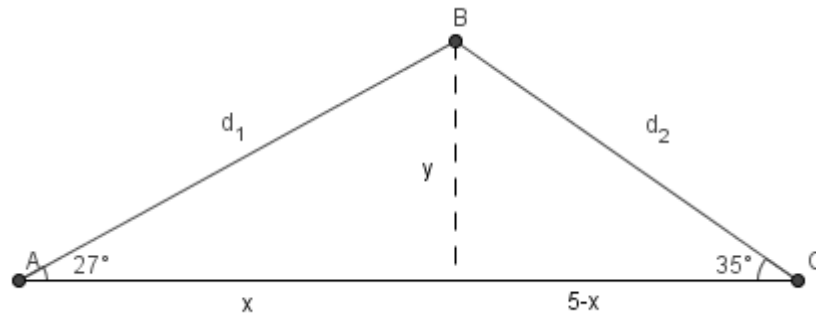
- Resolución de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

##### GENERALES:

- De tipo algebraico al resolver las ecuaciones.
- De uso de la calculadora.

Esta pregunta se puede considerar que evalúa los tres estándares de aprendizaje:  
*1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos; 1.2. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, [...] de figuras geométricas; y 1.3. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.*

Respuesta: La distancia más corta del banco a la carretera que une las comisarías se calcula trazando la perpendicular desde B al segmento AC. Así se construyen dos triángulos rectángulos:



$$\operatorname{tg} 27^{\circ} = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \text{Despejando } x: x = \frac{y}{\operatorname{tg} 27^{\circ}} \text{ y sustituyéndola en:}$$

$$\operatorname{tg} 35^{\circ} = \frac{y}{5-x} = \frac{y}{5 - \frac{y}{\operatorname{tg} 27^{\circ}}} \rightarrow y = 1,48 \text{ km}$$

La distancia más corta de B a la carretera es de 1,48 km.

Para calcular ahora las distancias  $d_1$  y  $d_2$ :

$$\operatorname{sen} 27^{\circ} = \frac{y}{d_1} = \frac{1,48}{d_1} \quad \rightarrow d_1 = 3,26 \text{ km}$$

$$\operatorname{sen} 35^{\circ} = \frac{y}{d_2} = \frac{1,48}{d_2} \quad \rightarrow d_2 = 2,58 \text{ km}$$

La comisaría A está a 3,26 km del banco y la comisaría B a 2,58 km.

Otras respuestas: pueden calcularlo aplicando otras razones trigonométricas.

Posibles dificultades que pueden encontrar en la tarea principal: en este problema la dificultad reside en que parece que faltan datos a priori, por lo que hay que saber simular los triángulos rectángulos y efectuar varias razones trigonométricas en ellos para llegar a la solución. Aunque sea similar al anterior por tener que aplicar dos razones trigonométricas desde dos puntos distintos, el que los triángulos no tengan la misma orientación y que el lado común no esté dibujado en el enunciado sino que lo tengan que descubrir, es una dificultad adicional.

### Criterios de calificación:

Las puntuaciones máximas para cada pregunta están especificadas en cada enunciado. Las cuatro primeras preguntas son las que incluyen los conceptos básicos

que considero que deben haber adquirido: en la primera pregunta están las cuestiones teóricas para evaluar su conocimiento sobre las propiedades de las razones trigonométricas; la segunda evalúa si saben aplicar las razones trigonométricas; la tercera, si saben construir un triángulo rectángulo con los datos dados y calcular otros lados a partir de un ángulo y un lado conocidos; y la cuarta pregunta evalúa si saben calcular el ángulo a partir de dos lados conocidos. Así pues, como engloban todos los conocimientos enseñados en esta unidad, las he puntuado con un total de 6 puntos de forma que un alumno que las conteste correctamente esté aprobado. Les he dado un punto más del aprobado justo para evitar que las posibles penalizaciones dejen al alumno por debajo del 5.

Las otras dos preguntas (preguntas 5 y 6) puntúan más alto (2 puntos cada una) porque tienen una dificultad mayor ya que no son una aplicación directa de las razones trigonométricas sino que requieren de un mayor razonamiento del planteamiento del problema y las resoluciones son de tipo algebraico.

Cada pregunta se calificará según el modelo de penalización basado en el “modelo de tercios” propuesto por Gairín, Muñoz y Oller (2012).

Se parte de la puntuación máxima asignada a cada pregunta.

Si no se realizan correctamente las tareas principales que corresponden a los contenidos que se pretenden calificar, puede finalizarse la corrección y penalizar hasta el 100%.

Si hay errores en las tareas auxiliares específicas, se podrá descontar hasta  $\frac{2}{3}$  de la nota pero se continuará con la corrección.

Si hay errores en las tareas auxiliares generales (operaciones aritméticas o algebraicas), se podrá descontar hasta  $\frac{1}{3}$  de la calificación global.

Según esto, cada una de las preguntas de esta prueba se evaluará del siguiente modo:

Pregunta 1 - Al ser una pregunta de teoría, la evaluación no seguirá este modelo descrito sino que se evaluará tanto el conocimiento como el razonamiento. Como cada

pregunta tiene un valor de 0,5 puntos, si la respuesta es correcta se asignará 0,25 y, si además está bien razonada, el 0,25 restante.

a) *¿El ángulo que mide un radián es agudo u obtuso?*

Si responden que es agudo: 0,25 puntos.

Si además dan la justificación (ver apartado 3. *Respuestas*), tendrán la puntuación total: 0,5 puntos.

b) *¿Puede valer 1,5 el seno de un ángulo? Justifica tu respuesta usando un dibujo.*

Si responden “no” dibujando un triángulo y diciendo correctamente la definición de seno: 0,25 puntos.

Si además explican que el cateto no puede ser mayor que la hipotenusa, obtendrán los 0,5 puntos.

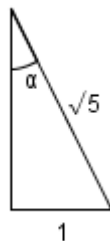
c) *¿Puede ocurrir que el seno y el coseno de un ángulo coincidan?*

Si contestan “sí” o dicen que sucede para el ángulos de  $45^\circ$ , tendrán 0,25 puntos. Si lo razonan, 0,5 puntos.

d) *¿Qué ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  verifican que  $\sin \alpha = \cos \beta$ ?*

La contestación correcta (ángulos complementarios) les puntuará 0,25 puntos. El razonamiento posterior si es correcto, sumará otros 0,25.

Pregunta 2 – *Halla todas las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  en el siguiente triángulo rectángulo:*



PENALIZACIÓN (esta pregunta vale 1 punto):

- Si no saben cómo calcular el coseno con la relación  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  o bien obteniendo el cateto que falta aplicando Pitágoras, se puede penalizar con la totalidad. Si solo se dejan de calcular la tangente, restará 0,3 puntos.
- Como mucho 0,3 puntos de penalización por el conjunto de los errores en tareas auxiliares generales.

Pregunta 3 – *En un triángulo rectángulo donde el ángulo que forman los lados BC y CA es recto, conocemos el ángulo que forman los lados BC y AB, que es  $50^\circ$  y la longitud del lado BC (7 cm). Dibuja el triángulo, calcula la longitud de los lados AB, AC y el ángulo que forman dichos lados.*

PENALIZACIÓN (esta pregunta vale 1,5 puntos):

- Si no dibujan correctamente el triángulo, se penalizará con el total de los puntos.
- Por cada razón trigonométrica que definan incorrectamente, penalizará 0,5 puntos. Si no dan el valor del ángulo que falta, también penalizará 0,5 puntos.
- Como mucho 0,5 puntos de penalización por el conjunto de errores en las tareas auxiliares.

Pregunta 4 – *Una escalera de 4 m está apoyada sobre una pared. Si su base dista 1,5 m de ésta, ¿cuál es el ángulo que forma la escalera con la pared?*

PENALIZACIÓN (esta pregunta vale 1,5 puntos):

- Si no aplican el seno o no sustituyen bien los valores en él, no se puntuará nada en esta pregunta.
- Si aplican el seno pero no despejan el ángulo aplicando el arco seno, se bajará un tercio la nota (0,5 puntos).
- Si es un error al obtener el resultado con la calculadora, se descontará un tercio del total (0,5 puntos).

Pregunta 5 – Desde un punto del suelo vemos una torre con un ángulo de  $55^\circ$ . Si retrocedemos 30 m vemos nuevamente la torre con un ángulo de  $25^\circ$ . Calcula la altura de la torre.

PENALIZACIÓN (esta pregunta vale 2 puntos):

- Si no reconocen que hay que aplicar las tangentes, se penalizará totalmente y no se seguirá corrigiendo.
- Si ven que son estas las razones que hay que aplicar pero no informan correctamente los valores de los catetos (por ejemplo, no se dan cuenta de que el cateto contiguo es una incógnita en el primer caso y esa misma incógnita más 30 m en el segundo), se puede descontar  $2/3$  del total, con lo que esta pregunta tendría 0,7 puntos y ya no se seguirá corrigiendo.
- Si se ha planteado correctamente el sistema de dos ecuaciones pero hay errores al resolverlo relacionados con tareas auxiliares específicas como puede ser despejar o sustituir mal las incógnitas, estos errores podrán descontar hasta aproximadamente un tercio de la nota, es decir, 0,7 puntos.
- Si hay errores en tareas auxiliares generales como puede ser un fallo en las operaciones al resolver las ecuaciones, en total se descontará como máximo un cuarto del total, es decir, 0,5 puntos.

Pregunta 6 – En dos comisarías de policía, A y C, se escucha la alarma de un banco B. Con los datos de la figura calcula:

- a) la distancia más corta del banco a la carretera que une ambas comisarías
- b) la distancia del banco a cada una de las comisarías.

PENALIZACIÓN (esta pregunta vale 2 puntos):

- Si no reconocen los triángulos rectángulos de la situación del enunciado, se dejará de corregir y no obtendrá ninguna puntuación esta pregunta.
- Si reconocen los triángulos pero no aplican correctamente las razones trigonométricas, se penalizará descontando  $2/3$  de la nota total y se finalizará la corrección.

- Si se ha planteado correctamente el sistema de dos ecuaciones pero hay errores al resolverlo relacionados con tareas auxiliares específicas como puede ser despejar o sustituir mal las incógnitas, estos errores podrán descontar hasta aproximadamente un tercio de la nota del apartado, es decir, 0,3 puntos.
- Si hay errores en tareas auxiliares generales como puede ser un fallo en las operaciones al resolver las ecuaciones, en total se descontará como máximo un cuarto del total del apartado, es decir, 0,25 puntos.

## Bibliografía

### Libros:

Esteban, M., Ibañez, M. y Ortega, T. (1998). *Trigonometría*. Madrid: Ed. Síntesis.

Lozano, M. (2005). *De Arquímedes a Einstein. Los diez experimentos más bellos de la física*. Barcelona: Grupo Editorial Random House Mondadori, S.L.

### Libros de texto:

Anzola, M. y Vizmanos, J. R. (1998). *Sigma. Matemáticas 4 opción B*. Madrid: Ed. SM.

Fuster, M. y Martín, F. (1996). *Matemáticas B ESO 4*. Barcelona: Ed. Edebé.

Ocaña, J.M., Martín, R. y Carrasco, M.A. (2005). *Matemáticas ESO: CURSO 4*. Zaragoza: Ed. Luis Vives.

### Artículos:

Araya, A. M., Monge, A. y Morales, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Actualidades investigativas en Educación*, vol 7, número. 2, 1-31.

Byers, P. (2010). Investigating Trigonometric Representations in the Transition to College Mathematics. *College Quarterly*, vol 13, nr. 2, 1-10 .

Feito, M. y Martínez, J. (2011). Medidas de altura: trigonometría con cuerda, metro y móvil. *Suma*, Febrero 2011, 35-40.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVI*, 261 - 274.

Gür, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, Vol. 57, No. 1, May 2009, 67-80.

**Páginas web:**

González, R. Problemas de trigonometría. Disponible en:

<http://selectividad.intergranada.com/ESO/ESO-4B/trigo.pdf>

<http://selectividad.intergranada.com/ESO/ESO-4B/Resueltos/Anaya/unidad8.pdf>

**Normativa:**

ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA 1 de junio de 2007).

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE 3 de enero de 2015).

## Anexos

**Anexo I:** Tablas con valores de seno, coseno y tangente.

**Anexo II:** “Guion de prácticas para el alumno” para las medidas a realizar en el patio.

**Anexo III:** Cómo construir un goniómetro.

# Anexo I

## TABLAS CON LOS VALORES DE SEN, COS Y TG

A continuación incluyo unos extractos de las tablas con los valores de *sen*, *cos* y *tg* para unos determinados ángulos con precisión de 10 minutos.

SENO							
Grados	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'
0	0.00000	0.00291	0.00582	0.00873	0.01164	0.01454	0.01745
1	0.01745	0.02036	0.02327	0.02618	0.02908	0.03199	0.03490
2	0.03490	0.03781	0.04071	0.04362	0.04653	0.04943	0.05234
3	0.05234	0.05524	0.05814	0.06105	0.06395	0.06685	0.06975
4	0.06976	0.07266	0.07556	0.07846	0.08136	0.08426	0.08716
5	0.08716	0.09005	0.09295	0.09585	0.09874	0.10164	0.10453
6	0.10453	0.10742	0.11031	0.11320	0.11609	0.11898	0.12187
7	0.12187	0.12476	0.12764	0.13053	0.13341	0.13629	0.13917
8	0.13917	0.14205	0.14493	0.14781	0.15069	0.15356	0.15643
9	0.15643	0.15931	0.16218	0.16505	0.16792	0.17078	0.17365

Coseno							
Grados	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'
10	0.98481	0.98430	0.98378	0.98325	0.98272	0.98218	0.98163
11	0.98163	0.98107	0.98050	0.97992	0.97934	0.97875	0.97815
12	0.97815	0.97754	0.97692	0.97630	0.97566	0.97502	0.97437
13	0.97437	0.97371	0.97304	0.97237	0.97169	0.97100	0.97030
14	0.97030	0.96959	0.96887	0.96815	0.96742	0.96667	0.96593
15	0.96593	0.96517	0.96440	0.96363	0.96285	0.96206	0.96126
16	0.96126	0.96046	0.95964	0.95882	0.95799	0.95715	0.95630
17	0.95630	0.95545	0.95459	0.95372	0.95284	0.95195	0.95106
18	0.95106	0.95015	0.94924	0.94832	0.94740	0.94646	0.94552
19	0.94552	0.94457	0.94361	0.94264	0.94167	0.94068	0.93969

Tangente							
Grados	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'
20	0.36397	0.36727	0.37057	0.37388	0.37720	0.38053	0.38386
21	0.38386	0.38721	0.39055	0.39391	0.39727	0.40065	0.40403
22	0.40403	0.40741	0.41081	0.41421	0.41763	0.42105	0.42447
23	0.42447	0.42791	0.43136	0.43481	0.43828	0.44175	0.44523
24	0.44523	0.44872	0.45222	0.45573	0.45924	0.46277	0.46631
25	0.46631	0.46985	0.47341	0.47698	0.48055	0.48414	0.48773
26	0.48773	0.49134	0.49495	0.49858	0.50222	0.50587	0.50953
27	0.50953	0.51319	0.51688	0.52057	0.52427	0.52798	0.53171
28	0.53171	0.53545	0.53920	0.54296	0.54673	0.55051	0.55431
29	0.55431	0.55812	0.56194	0.56577	0.56962	0.57348	0.57735

## GUION DE PRÁCTICAS DEL ALUMNO

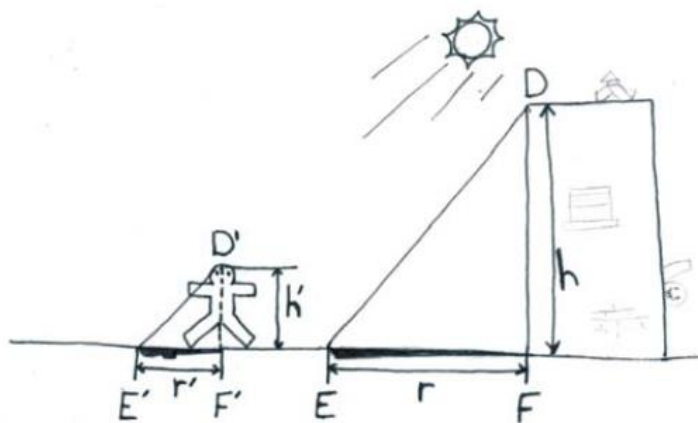
### Materiales:

- Este guion de la práctica.
- Metro.
- Goniómetro fabricado por ellos.
- Bolígrafo.
- Calculadora científica.

### Método I:

Se trata, por un lado, de medir la sombra que proyecta el edificio (para ello tiene que hacer sol y que la hora del día sea adecuada para que la sombra se sitúe en nuestra zona de medida) y, por otro lado, medir la altura de una persona y su sombra. Por lo tanto, hay que obtener las longitudes (mira el esquema)

- sombra del edificio:  $r=EF$ ,
- sombra del alumno:  $r'=E'F'$  y
- altura del alumno:  $h'=D'F'$ .



## Anexo II

### Medidas:

	r	r'	H
1ª medida			
2ª medida			
Media			

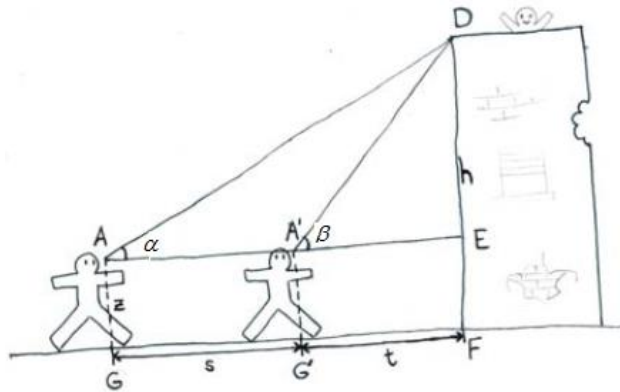
### **Método II:**

Se trata de medir los ángulos de inclinación con los que se observa un punto de la parte superior del edificio, desde dos distancias distintas y en línea recta, para calcular la altura de este aplicando las razones trigonométricas.

Para ello:

- Medir el valor  $z$  (altura hasta la visual del alumno).
- Escoger un punto D de la parte superior del edificio, del cual se medirá la altura sobre el nivel del suelo.
- Marcar dos puntos G y G' en línea recta y en dirección con el punto del edificio del cual se medirá la altura, Llámese G al punto más lejano (los puntos G y G' deben estar separados de 10m a 20m entre sí. Esta distancia debe medirse con la cinta métrica: es la distancia  $s$ ).
- Ubicarse exactamente sobre el punto G' y medir con el goniómetro el ángulo de elevación  $\beta$  del punto D.
- Ubicarse exactamente sobre el punto G y medir con el goniómetro el ángulo de elevación  $\alpha$  del punto D.

## Anexo II



- En cada caso todos los integrantes de cada equipo de trabajo deben realizar las medidas de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  desde los puntos G y G' respectivamente; luego se tomará el promedio de estas observaciones que serán los valores definitivos de estos ángulos. Llenar con estos datos la siguiente tabla:

	$z$	$\alpha$	$\beta$
1ª medida			
2ª medida			
Media			

- Las mediciones de cada ángulo realizadas por los integrantes del grupo, no deben variar excesivamente (se sugiere como máximo 1° de variación). En caso de existir mucha variación, se realizará responsablemente la repetición de la toma de medidas.

## CÓMO CONSTRUIR UN GONIÓMETRO

Un goniómetro es un aparato para medir ángulos.

### Materiales:

- 1 transportador de ángulos.
- 1 tubo estrecho de plástico o cartón (por ejemplo, la funda de un boli Bic).
- Cuerda fina.
- Peso pequeño (por ejemplo, una bolsita con arena).
- Cinta adhesiva.

### Cómo se construye:

- Atar la cuerda alrededor del tubo de plástico por la mitad de este.
- Pegar con cinta adhesiva este tubo al transportador de ángulos de forma que quede en la línea de 0° (dependiendo de modelo de transportador).
- Colgar el peso al extremo de la cuerda.

