Trabajo Fin de Grado

Análisis dinámico del modelo de Cournot con negociación salarial entre empresas y sindicatos

Autor

Beatriz Ferrero Gurpegui

Director/es

Joaquín Andaluz Funcia

Gloria Jarne Jarne

Facultad de Economía y Empresa

2015

Resumen

El trabajo desarrolla un modelo de duopolio dinámico con producto diferenciado y en el que cada empresa negocia bilateralmente con un sindicato el salario y el nivel de empleo.

El resultado de la negociación se obtiene a través de la solución de negociación de Nash y la dinamización se lleva a cabo mediante la definición de diferentes tipos de expectativas, respecto al comportamiento de las empresas.

Del análisis realizado se deduce que, una mayor simetría en el poder de negociación de las empresas y el sindicato favorece a la estabilidad local del equilibrio de Cournot-Nash, independientemente de la homogeneidad o heterogeneidad de las empresas respecto a la formación de expectativas.

Por otro lado, la influencia del grado de diferenciación del producto en la estabilidad depende del carácter complementario o sustitutivo de los bienes y de la conducta de las empresas.

Abstract

The present study develops a model of dynamic duopoly with differentiated product and in which each firm negotiates bilaterally with union the wages and the level of employment.

The result of the negotiation is obtained through Nash bargaining solution and the dimanic model is carried through by defining types of expectations, in relation to the behavior of the other firms.

Of the rewarded is deduced, that higher symmetrical bargaining power of the firm ant the union favors to local stability of Cournt-Nash equilibrium, regardless of the homogeneity or heterogeneity of the firms in relation to the formation of expectations.

On the other hand, the influence of the degree of product differentiation in the stability depends on the complement or substitute nature of the product and conduct of the firms.

Índice

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo general del trabajo es analizar teóricamente las interrelaciones entre los procesos de negociación salarial llevadas a cabo por empresas y sindicatos y la dinámica de la competencia en el mercado de un producto.

Para llevar a cabo dicho objetivo, he debido aplicar conocimientos adquiridos en diferentes materias, tales como Microeconomía, Teoría de Juegos y Matemáticas.

En concreto el trabajo me ha permitido demostrar habilidades adquiridas y profundizar en aspectos propios de las asignaturas de Microeconomía IV, Matemáticas II y Decisión y Juegos.

La parte del modelo de Cournot se imparte en dos asignaturas durante el grado que son Microeconomía II y Microeconomía IV. Para realizar la dinamización del modelo y el estudio de la estabilidad es necesario conocer el cálculo matricial y la resolución de ecuaciones en diferencias finitas, presentes en Matemáticas II, y por último aspectos visto en la asignatura de Decisión y Teoría de Juegos, ya que nos enfrentamos a un problema de negociación, donde se profundiza en los teoremas de Nash y Kalai-Smoridinsky.

El trabajo está divido en dos bloques fundamentales.

En el primer bloque se detalla la parte teórica, en la cual se explica cada una de las partes de modelo utilizado. Comenzando con los modelos de negociación, centrándose principalmente en la negociación bilateral, a continuación se determina la definición de equilibrio de Nash con sus respectivos axiomas y por último se hace referencia al otro concepto de solución de equilibrio en negociaciones Kalai-Smorodinski. Seguidamente se detalla brevemente el modelo de Cournot de una manera estática y a continuación la explicación de la dinamización del mismo en tiempo discreto, con tres tipos de expectativas: adaptativas, de racionalidad limitada e ingenuas. Por último en este bloque, se determina la relación que existe entre los sindicatos y la empresa, y las dos maneras de negociar (negociación eficiente y Right to manage). Una vez hecho una breve explicación de la parte teórica del trabajo, pasamos a la parte práctica, aplicando todo lo mencionado anteriormente.

En el segundo bloque, en primer lugar nos situamos en el escenario. De tal forma que comenzamos realizando una descripción del modelo, obteniendo las funciones objetivo de cada uno de los agentes. De esta manera ya tenemos el planteamiento del juego estático, y calculamos el equilibrio en dicho juego. Una vez obtenido el equilibrio de Cournot-Nash. Nos interesa saber que sucede en los periodos siguientes, para ello tenemos que dinamizarlo, y es necesario contar con las expectativas que tienen cada uno de los agentes, ya que esto nos va a determinar qué estrategia van a seguir las dos empresas.

Comenzamos considerando que las expectativas son heterogéneas, es decir, la empresa 1 tiene expectativas de racionalidad limitada y la empresa 2 ingenuas. Una vez determinado el equilibrio con estas expectativas pasamos a estudiar la estabilidad en dicho equilibrio. Para ello tiene que cumplir una serie de condiciones, a partir de las cuales podemos determinar el umbral de velocidad de ajuste que se será nuestra referencia para saber cómo varía la estabilidad. Concretamente como actúa este umbral ante variaciones en el poder de negociación de la empresa y en el grado de diferenciación del producto se vean alterados.

Seguidamente se consideran expectativas homogéneas, de tal forma que las dos empresas tienen racionalidad limitada. Y se hace el mismo procedimiento que en el caso anterior, se calcula el equilibrio, se determinan las condiciones de estabilidad que tiene que cumplir, a partir de las cuales se obtienen los umbrales velocidad de ajuste, para poder observar cómo afectan variaciones en los dos parámetros (poder de negociación y diferenciación) a la estabilidad del equilibrio.

Una vez realizado el estudio en cada escenario propuesto, se hace una comparativa de los dos, de tal forma que podemos determinar qué es más conveniente para la estabilidad si las expectativas heterogéneas o las homogéneas.

2. DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS DE NEGOCIACIÓN BILATERAL.

Una negociación bilateral, consiste en el acuerdo entre dos partes, en el que los agentes intentan alcanzar una situación mutuamente ventajosa, a partir de un punto inicial. En general, las preferencias de cada uno de ellos no coinciden, surgiendo entonces elementos tanto de cooperación como de conflicto. Un modelo de negociación puede por tanto considerarse como un juego de decisión.

Muchas situaciones de la vida diaria pueden entenderse como un juego de decisión, siendo de interés tanto para la Economía como para las Ciencias Sociales en general. Por ejemplo, el reparto de una tarta, la asignación de tareas domésticas, un comprador tratando de conseguir un buen precio o incluso la negociación salarial de los trabajadores con la empresa, que va a ser nuestro objeto de estudio.

En toda negociación aparecen tres elementos básicos. En primer lugar, la situación de *status quo* o punto de desacuerdo, se da en el caso de que no se alcance el acuerdo, es la situación a alcanzar. En segundo lugar, la presencia de beneficios mutuos de la cooperación y en tercer lugar, la multiplicidad de posibles acuerdos de cooperación que lleva a dividir de manera diferente el excedente resultante. Tenemos que tener en cuenta que un factor relevante para este tipo de problemas es el “poder de negociación”, ya que éste puede determinar los resultados así como las opciones elegidas.

La teoría de juegos ha dado lugar a modelos donde el poder de negociación de cada uno de los agentes adquiere un significado preciso.

Para poder analizar un problema de negociación tenemos que simplificar la realidad bajo una serie de supuestos. Analizaremos sólo los aspectos distributivos del problema de negociación, y a su vez supondremos que las partes tienen conocimiento completo de los acuerdos posibles, es decir, de todas las alternativas posibles que pueden elegir. Estas alternativas las denominaremos X. Y la elección de una de ellas se denominará x. Por lo tanto $x \in X$, de tal forma que x será la decisión tomada por cada agente. En el caso del ejemplo de la tarta, x sería la porción de tarta que se asigna a cada agente, en el caso del salario correspondería a la cuantía salarial pactada.

Otros elementos que hay que tener en cuenta a la hora de analizar un juego, son las preferencias de los individuos sobre el conjunto denominado X, que sería por ejemplo la actitud ante el riesgo, las preferencias intertemporales, el procedimiento de negociar y otros aspectos del contexto en que se realiza la negociación.

Vamos a realizar un estudio de juegos de negociación bajo el enfoque estático-axiomático, el cual desarrolla el juego desde el punto de vista de un árbitro que desea proponer una solución aceptable, viendo todas las posibilidades estratégicas de cada jugador.

Por lo tanto, un problema de negociación bajo este enfoque, está compuesto por dos funciones de utilidad u_1 y u_2, las cuales representan la predilecciones de cada uno de los individuos en el conjunto X, y un par de niveles de utilidad que representan lo que cada individuo puede conseguir sin no coopera su oponente (*status quo*). Por lo tanto, y de manera formal tendríamos que una negociación es un par *(S,d)* donde $S = \{u_1(x_1), u_2(x_2), con\ x_i \in X, i = 1,2\}$ representa el conjunto de acuerdos posibles a niveles de utilidad y $d \in S$ es el conjunto de utilidades en el caso de que no se produzca una cooperación por parte de los individuos. En palabras de Nash (1953), una solución para la negociación del juego es: *"una determinación de la cantidad de utilidad que cada individuo puede esperar de la situación, o mejor, una determinación de cuán valiosa es para cada individuo esta oportunidad de negociar*". Para determinar la solución Nash establece una serie de axiomas, en los que solo un par de valores cumplen estos axiomas. Será explicado brevemente más adelante.

2.1 COOPERACIÓN SIMPLE Y COOPERACIÓN MULTILATERAL

En los juegos cooperativos intervienen un grupo de agentes que deben tomar una decisión cooperativamente, pero tienen intereses contrapuestos. Sería el caso de la relación entre el sindicato y la empresa. Los sindicatos querrán un aumento de salario mayor y en caso de la empresa querrán disminuir sus gastos por lo tanto sus preferencias serán las contrarias, unos salarios más bajos.

Los problemas de cooperación tienen dos particularidades que les diferencia de otros juegos. Hay que distribuir las ganancias de la cooperación, para ello tienen que existir un punto de referencia para poder medirlas. Dicho punto constituye la situación a partir de la cual los agentes están dispuestos a negociar.

Podemos dividir estos juegos en dos grupos, por un lado se encuentran los juegos de cooperación simple, donde sólo existen dos posibilidades de solución, o bien los agentes aceptan el acuerdo o bien lo rechazan, por lo que no existirá acuerdo alguno.

Estos juegos podemos analizarlos como juegos de negociación bilateral. En cuanto al otro gran grupo, son los juegos de negociación multilateral. En ellos, además del acuerdo o desacuerdo unánime, cabe la posibilidad de que surjan acuerdos parciales entre agentes (coaliciones).

Un problema de cooperación simple está formado por los siguientes elementos (véase Villar 1999):

(1) Un conjunto de agentes $\mathbb{M} = \{1,2, \dots m\}$

(2) Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ que describe las posibles asignaciones del bien objeto de reparto que son alcanzables colectivamente (asignaciones que pueden obtenerse mediante acuerdos unánimes).

(3) Un punto $d \in \mathbb{R}^m$ que describe la situación que se alcanza cuando no hay acuerdo (y que, por tanto, acota inferiormente las asignaciones admisibles). Una solución a un problema de cooperación simple es una función F que a cada problema asocia una única asignación $v = F(S, d) \in \mathbb{R}^m$.

En un problema de cooperación multilateral además del colectivo $\mathbb{M}$ y los individuos aislados, son relevantes las diferentes coaliciones que pueden formarse. Los elementos característicos de un problema de este tipo son (Véase Villar 1999)

(1) Un conjunto de agentes $\mathbb{M} = \{1,2, \dots m\}$ y una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{M}$ que descubre las posibles coaliciones que pueden formarse entre los miembros de $\mathbb{M}$. En general se supone que $\mathcal{M}$ es el conjunto de todas las posibles coaliciones (El conjunto de las partes de $\mathbb{M}$)

(2) Una familia *v(K)* de conjuntos que describe las asignaciones que resultan factibles para la coalición K$\in \mathcal{M}$. En el caso más sencillo estos conjuntos están constituidos por un único número que describe las ganancias agregadas que una coalición puede obtener.

Una solución a un problema de cooperación multilateral es una función F que a cada problema asocia una única asignación, de tal forma que $v = F(\{v(K)\ K \in \ \mathcal{M}\})\ de\ \mathbb{R}^m$.

Nos ocuparemos del estudio de los problemas de cooperación simple, centrándonos en el caso de dos agentes. Posteriormente desarrollaremos una aplicación en un contexto de duopolio.

2.2. NEGOCIACIÓN BILATERAL

Vamos a enfocar nuestra solución al problema de negociación desde un punto de vista normativo, es decir, buscamos soluciones arbitradas que satisfagan ciertos criterios de equidad. Sería como la recomendación que un juez imparcial haría para resolver un conflicto. Todo esto lo abordaremos desde un punto de vista axiomático, con propiedades estructurales que describen características deseadas que tiene que tener la solución. Por lo tanto estamos ante una situación de juego porque los resultados obtenidos por los agentes dependen explícitamente de su interacción, y de cooperación, porque las dos partes tienen que ceder una fracción de sus ganancias para que al final se alcance un acuerdo mutuamente ventajoso.

Con el fin de describir un modelo de negociación bilateral, consideremos el ejemplo de una economía de intercambio formada por dos consumidores, i = 1,2, caracterizados por sus conjuntos de consumo $X_i = \mathbb{R}^l_+$, sus funciones de utilidad $u_i: \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ y los recursos de que disponen $w_i \in \mathbb{R}^l_+$. Se trata de encontrar un reparto de los recursos totales disponibles $w = w_1 + w_2$. De tal forma que el conjunto de asignaciones factibles viene dado por

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^l_+ \, x \, \mathbb{R}^l_+ \,/\, x_1 + x_2 \leq w\}$$

A partir de aquí podemos definir los siguientes conjuntos:

(i) Conjunto de posibilidades de utilidad:

$$\mathbb{U}(w) = \{[u_1(x_1), u_2(x_2)] \in \mathbb{R}^2 / \,(x_1, x_2) \in X\}$$

(ii) El conjunto de posibilidades de utilidad que son individualmente racionales:

$$IR\ (w) = \{(v_1, v_2) \in \ \mathbb{U}\ (w) \ / \ \ v_1 \geq u_1(w_1), v_2 \geq u_2(w_2)\}$$

El conjunto *IR(w)* nos dice cuáles son los vectores de utilidades que además de ser factibles dan a cada consumidor un nivel de satisfacción que es el mejor o igual que el que obtendría consumiendo los recursos que posee. Indica posibles repartos que mejoran a ambos individuos con respecto a su situación inicial.

Problema de negociación bilateral: si los agentes son capaces de llegar a un acuerdo sobre cómo redistribuir los recursos que poseen, ambos podrían salir ganando. El tema es cómo repartirse las ganancias de la cooperación sin que se desaprovechen las oportunidades, (como encontrar una asignación que resulte aceptable para los individuos y sea a la vez Pareto eficiente e individualmente racional). Partiendo del conjunto de posibilidades de utilidad individualmente racionales como elemento de referencia, una asignación de utilidades que permita repartir convenientemente las posibles ganancias de la cooperación.

Denominaremos S a un conjunto genérico de posibilidades de utilidad y d al vector de utilidades que los agentes pueden garantizarse; en el ejemplo anterior tendríamos $S = \mathbb{U}(w), d = [u_1(w_1), u_2(w_2)]$. El conjunto S representa las distribuciones factibles de utilidad asociadas a un cierto problema distributivo. El punto *d* se conoce como punto de desacuerdo (también llamado punto de ruptura) y representa los niveles de utilidad que obtendría cada uno de los agentes si decidieran romper las negociaciones antes de llegar a un acuerdo, es decir, punto mínimo de partida, a partir del cual estarán dispuestos a negociar. El elemento característico del tipo de análisis que desarrollaremos es que toda la información relevante se resume en el par *(S,d)* sin que el problema concreto que genera estos elementos aparezca explícitamente.

Definición 1: un problema de negociación bilateral es un par *(S,d)*, con $S \subset \mathbb{R}^2$, $d \in S$, donde *S* representa un conjunto de posibilidades de utilidad y *d* es un punto que describe las utilidades que cada uno de los agentes puede garantizarse.

Denominaremos *IR(s,d)* al conjunto de posibilidades de utilidad individualmente racional, *IR(s,d)*= $\{v \in S / v \geq d\}$. Desarrollaremos las discusión sobre una familia concreta de problemas de negociación bilateral: aquella en que S es un conjunto convexo y comprehensivo con *int IR(S,d) ≠ Ø* y compacto. Formalmente:

Definición 2. La familia $\mathcal{B}$ de problemas convencionales de negociación bilateral está constituída por todos los problemas *(S,d)* que verifican las siguientes propiedades:

(i) $S \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto cerrado, convexo y comprehensivo

(ii) *IR (S,d)* es un conjunto acotado con interior no vacío

Que S sea cerrado equivale a suponer que las funciones de utilidad son continuas. Su interpretación intuitiva es que si un nivel de utilidad es alcanzable, siempre se pueden alcanzar situaciones en la que los agentes estén peor.

Al suponer que *IR(S,d)* está acotado y posee interior no vacío introducimos dos restricciones que hacen interesante el problema de negociación.

Definición 3. Una solución es una función $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, para cada problema $(S,d) \in \mathcal{B}$, asociada a un único punto $F(S,d) \in S$, distinto del vacío que verifica:

(i) $F(S,d) \geq d$

(ii) $v \gg F(S,d) \Rightarrow v \notin S$

El punto *F(S,d)* se interpreta como una propuesta razonable de reparto de utilidades. La condición (i) establece que la solución debe proponer una asignación que sea individualmente racional; de esta forma se asegura que nadie está peor en la solución que en la situación que resultaría de romper las negociaciones.

Para llegar a una solución que maximice las utilidades de los agentes, vamos a detallar la solución axiomática del equilibrio de Nash.

2.3 DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN DE NEGOCIACIÓN DE NASH: PROPIEDADES FUNDAMENTALES.

Nash (1950) es quien primero define formalmente un problema básico de negociación, entendiéndolo como un conjunto de posibles asignaciones de utilidad (del tipo Von Neuman-Morgenstern) resultante de todos los posibles acuerdos que pueden alcanzar las partes negociantes, y una asignación correspondiente al pago que obtiene cada uno de los jugadores en caso de que no logren llegar a un acuerdo. Para buscar solución al problema de negociación, recurre a establecer una serie de propiedades en términos axiomáticos, que la función solución debe cumplir para así determinar la fórmula de resolución que debe aplicarse. En este contexto, una solución de negociación es una regla de asignación de utilidades aplicable a cualquier problema de negociación.

Nash propone estos axiomas como propiedades deseables que tiene que tener la solución:

Primer axioma **(Independencia de transformaciones lineales afines):**

Para todo $(S,d) \in \mathcal{B}$ y para todo $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0, i = 1,2$, sea (S',d') un problema donde $(v'_1, v'_2) \in S'$ si y sólo si $v'_1 = \alpha_1 v_1 + \beta_1, v'_2 = \alpha_2 v_2 + \beta_2$, con $(v_1 v_2) \in S$ $d' = (\alpha_1 d_1 + \beta_1, \alpha_2 d_2 + \beta_2)$. Entonces, $F_i(S',d') = \alpha_i F_i(S,d) + \beta_i$, i=1,2.

Este primer axioma establece que las utilidades son cardinales y no comparables interpersonalmente. De este modo, el resultado alcanzado es independiente de la representación del espacio de utilidades.

Segundo axioma **(Simetría):**

Para todo $(S,d) \in \mathcal{B}$ si $d_1 = d_2$ y $(v_1, v_2) \in S \Rightarrow (v_2, v_1) \in S$, entonces $F_1(S,d) = F_2(S,d)$.

En aquella situación en la que los agentes tienen idénticos puntos de desacuerdo y que el conjunto de posibilidades de utilidad es simétrico, la solución propondrá la misma utilidad para ambos.

El segundo axioma garantiza un mínimo grado de equidad en la solución.

Tercer axioma **(Consistencia en las Contracciones o bien Invariancia respecto a origen y unidades):**

Para todo $(S,d)(S',d') \in \mathcal{B}$ tales que *d=d'* y $S \subset S'$, si $F(S',d') \in S$, entonces $F(S,d) = F(S',d')$.

Dados dos problemas, siendo uno de ellos subconjunto del otro y ambos con el mismo punto de desacuerdo. Si la solución elegida en el conjunto grande está disponible en el pequeño, dicha elección debe ser también solución del conjunto pequeño.

Nash demuestra que aceptar estos axiomas equivale a resolver los problemas de negoción bilateral mediante un sencillo procedimiento, que consiste en escoger aquella distribución de utilidades v^* que maximizan la función $(v_1-d_1)(v_2-d_2)$ sobre el conjunto *IR (S,d)*. Esta función no es más que el producto de las ganancias de utilidad de ambos agentes con respecto al punto de desacuerdo.

Con el siguiente gráfico 1, se ilustra la naturaleza de esta solución. Podemos observar que las curvas de nivel de esta función son hipérbolas equiláteras definidas sobre el cuadrante dado por los puntos $x \epsilon \mathbb{R}^2$ tales que $x \geq d$. El máximo de la función se obtiene en el punto de tangencia de la frontera de *IR(S,d)*. Como estamos ante una función continua y estrictamente cóncava y el conjunto es no vacío, compacto y convexo, la solución al programa $Max(\, v_1 - d_1)(\, v_2 - d_2)$ bajo la restricción $v \in IR(S, d)$existe y es única.

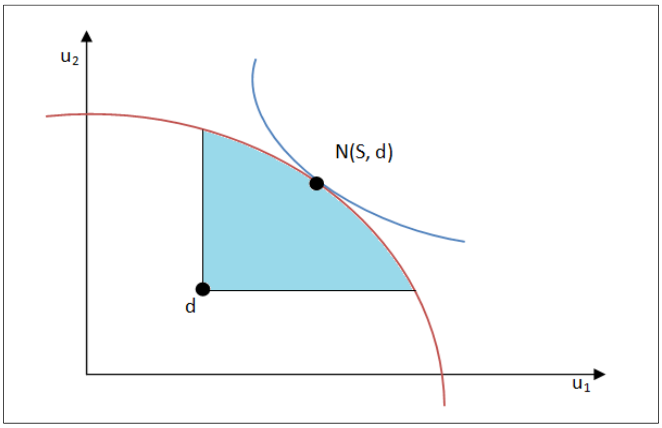

Gráfico 1

Llamando *N(S,d)* a la solución arbitraria de Nash, se deduce el siguiente teorema:

Teorema. Una solución $\mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ verifica las condiciones de los tres axiomas, si y sólo si es la solución de Nash, es decir si y sólo si es la solución que resulta de maximizar $(\, v_1 - d_1)(\, v_2 - d_2)$ sobre *IR(S,d)* (véase Villar 1999 para su demostración).

La solución de Nash constituye una forma atractiva de abordar los problemas de negociación bilateral. Por un lado define una fórmula operativa y con significado económico. Por otro lado es la única solución que satisface los tres axiomas postulados. Este último rasgo indica que sólo si encontramos poco justificado alguno de estos axiomas tiene sentido buscar otras soluciones, sustituyendo algunos axiomas por otros nuevos. Esto es lo que hacen Kalai y Somorodinsky a partir de la crítica al axioma de consistencia en las contracciones, como discutimos a continuación.

2.4 DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN DE KALAI-SOMORODINSKY: PROPIEDADES FUNDAMENTALES

De los tres axiomas propuestos por Nash, el de Consistencia en las Contrataciones es el que tiene una defensa menos sólida. De hecho, se puede demostrar que la condición CC puede conducir a repartos muy desiguales en la solución de Nash. Veamos un ejemplo ilustrativo, tomado de Villar (1999).

Consideramos dos problemas de negociación bilateral, *(T,0), (S,0)* dados por:

$T = co\ \{(0,0), (0,2), (2,0)\}$

$S = co\ \{(0,0), (2,0), (1,1), (0,1)\}$

Como *(T,0)* es un problema simétrico, la solución de Nash es *N(T,0) = (1,1)*. Además como $S \subset T$ y $(1,1) \in S$ la propiedad de consistencia implica que *N(S,0) = (1,1)*. La figura siguiente ilustra esta situación:

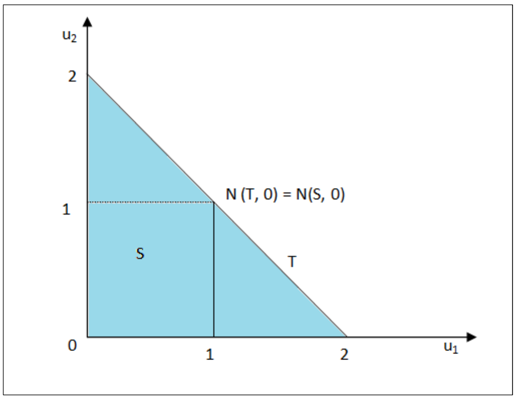

Gráfico 2

Observamos que en este problema *(T,0)* ambos agentes obtienen idénticas ganancias relativas respecto a su punto de desacuerdo *(0,0):* la mitad del máximo que podrían obtener sobre el conjunto *IR(S,d)* . En el problema de *(S,0),* sin embargo, el individuo 2 ve colmadas sus aspiraciones al 100% mientras que el individuo 1 sólo obtiene el 50% de sus aspiraciones máximas. Esto nos muestra que la distribución de las ganancias relativas puede ser muy desigual en la solución de Nash. Se puede argumentar que la condición de consistencia induce a repartos de utilidad que son poco equitativos.

Por ello Kalai y Smorodinsky proponen tomar en cuenta explícitamente las ganancias relativas, sustituyendo el axioma de Consistencia en las Contracciones por otro que refleja una relación monótona entre la solución propuesta y las aspiraciones relativas de los agentes. Para presentar este nuevo axioma comencemos por definir, para cada problema $(S,d) \in \mathcal{B}$, un punto ideal que describe las máximas aspiraciones de los individuos. Este punto, que denotamos como *M (S,d),* se define como sigue:

$$M_1(S,d) = \max_{v_1}\{v_1 \in \mathbb{R} \,/\, (v_1,v_2) \in IR\ (S,d)\}$$
$$M_2(S,d) = \max_{v_2}\{v_2 \in \mathbb{R} \,/\, (v_1,v_2) \in IR\ (S,d)\}$$

La ilustración de la construcción de este punto:

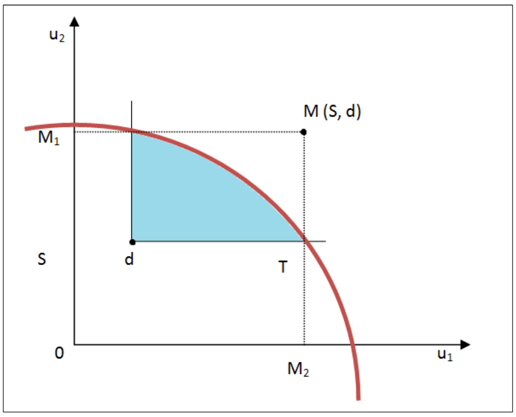

Gráfico 3

Si *M(S, d)* fuera un punto factible entonces la solución debería escoger este punto, pero que si el punto ideal no es alcanzable, entonces la solución debe ser visible a las aspiraciones relativas de los agentes. El axioma que proponen como alternativa al de consistencia es el siguiente:

Cuarto axioma: **(Monotonía Individual)**.

Sean $(S,d),(S',d') \in \mathcal{B}$ tales que d=d', $S \subset S'$. Si $M_i(S',d') \geq M_i(S,d)$ y $M_j(S',d') = M_j(S,d)$ i,j = 1,2 entones $F_i(S,d) \leq F_i(S',d')$.

Si las alternativas disponibles se reducen de *S'* a *S*, sin cambiar el punto de desacuerdo, y uno de los agentes ve disminuidas sus aspiraciones máximas mientras que el otro las mantiene, entonces la solución *F(S, d)* no puede asignar más utilidad que *F(S',d')* al agente cuyas expectativas han disminuido.

El siguiente gráfico se ilustra este tipo de situación donde tomamos d=d'=0, por simplicidad.

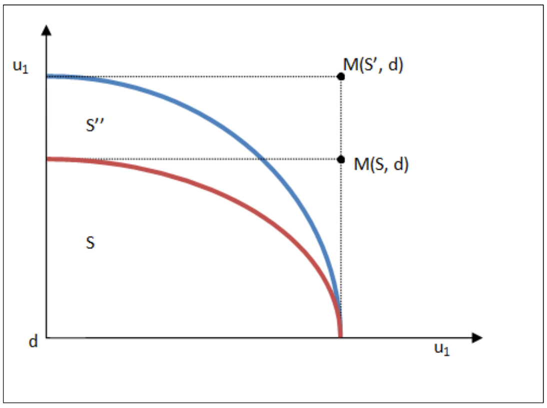

Gráfico 4

Kalai y Smorodinsky demostraron que el cambio del axioma de consistencia por el axioma de monotonía, mantenía el resto de los axiomas de Nash, y se obtiene una única solución: solución Kalai-Smorodinsky.

Esta solución escoge para cada problema $(S, d) \in \mathcal{B}$, aquel punto de la frontera del conjunto *IR(S, d)* que iguala las ganancias relativas de ambos agentes. Dicha asignación se obtiene como el punto de corte de la frontera de *IR(S, d)* con el segmento que uno los puntos *d* y *M(S, d)* gráficamente:

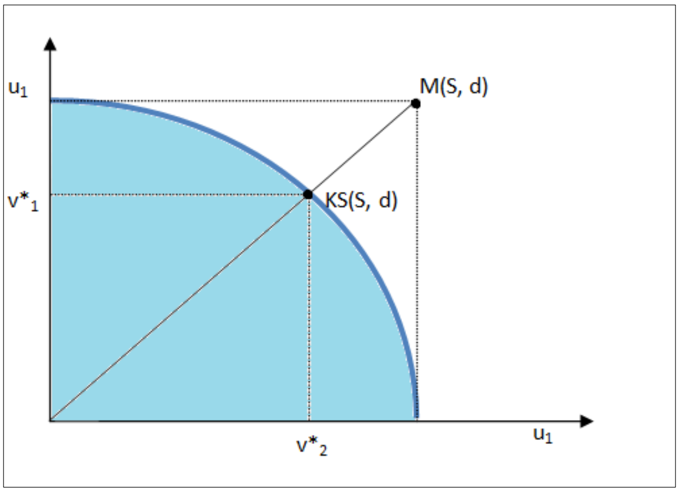

Gráfico 5

Por lo tanto el punto v*, viene definido de la siguiente manera:

$$\frac{v_1^* - d_1}{M_1(S,d) - d_1} = \frac{v_2^* - d_2}{M_2(S,d) - d_2}$$

Donde *KS(S,d)* es la solución de Kalai-Smorodinsky para el problema de negociación *(S,d)*.

Teorema 2: Una solución $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ verifica las propiedades de independencia de transformaciones lineales afines, simetría y monotonía individual si y solo si es la solución de Kalai-Smorodinsky. (Véase Villar 1999 para su demostración).

3. MODELO DE COURNOT, DINAMIZACIÓN Y NEGOCIACIONES SALARIALES

3.1. MODELO ESTÁTICO DE COURNOT

Para determinar las funciones de las dos empresas emplearemos el modelo de Cournot. Este modelo analiza aquella industria en la que la variable estratégica es el nivel de producción y la toma de decisiones es simultánea, de tal manera que cuando la empresa lanza una cantidad al mercado no sabe la estrategia que va a realizar su rival.

Este tipo de competencia (en cantidades) se suele dar en empresas donde el nivel de producción es difícil de ajustar, por ejemplo una empresa automovilística. Hay que tener en cuenta que el duopolio original de Cournot sigue unas hipótesis fundamentales que son: el precio es determinado por la oferta agregada, las empresas determinar simultáneamente la cantidad ofrecida y, en cuanto a los productos que ofertan las empresas son homogéneos.

Desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, tenemos la siguiente estructura: la variable estratégica manipulada por cada empresa es la cantidad producida (q); las cantidades se escogen simultáneamente; y el beneficio de cada empresa viene determinado por la cantidad del bien que produce, y del precio de mercado (el cual depende de las cantidades de producción de las dos empresas); suponemos que las empresas solo compiten una vez (de manera estática); y por último existe información perfecta, es decir las empresas saben cómo es la demanda de mercado, sus costes y los coste de su rival, y con ello los beneficios para las diferentes combinaciones estratégicas. Por lo tanto, el equilibrio de mercado viene dado por el equilibrio de Nash de este juego, también conocido como equilibrio de Nash-Cournot.

Una vez determinada la función de demanda inversa, la cual nos detalla el valor de los precios dependiendo de las cantidades producidas por la empresa 1 y por la empresa 2, obtendremos la función de beneficio de ambas empresas. Dando lugar a una interdependencia estratégica, ya que una variación en cualquiera de las empresas producirá una variación en el precio de mercado, y con ello un cambio en el precio de su rival.

Concretamente consideramos la empresa 1, la cual espera que la empresa 2 produzca q_2. Por lo tanto podemos afirmar que el problema de la empresa 1 es semejante al de un monopolista que se enfrenta a una cantidad residual. Dada una curva de costes marginales, determinamos la función de beneficio y aplicando la igualdad entre ingreso marginal y coste marginal se obtiene el óptimo de la empresa 1, que se denominará, $q^*_1(q_2)$. Hay que tener en cuenta que la producción que lance la empresa 1 va a depender de la que lance la empresa 2, es decir, dependiendo de los que oferte la empresa 2, la empresa 1 hará una elección óptima diferente. La función $q^*_1(q_2)$, que relaciona las cantidades optimas que maximizan los beneficios, ante cualquier decisión esperada del rival, se denomina función de mejor respuesta o función de reacción de la empresa 1 en relación a la empresa 2 o viceversa.

Como la información es completa, las empresas podrán anticiparse a la cantidad que va a lanzar su rival en el mercado, bajo un comportamiento racional, por lo tanto ambas tomarán su decisión mediante las funciones de mejor respuesta.

De esta forma, el equilibrio de Nash en el caso de duopolio, será la intersección de las dos funciones de mejor respuesta, de la empresa 1 con respecto a la empresa 2 y de la empresa 2 con respecto a la empresa 1. Gráficamente:

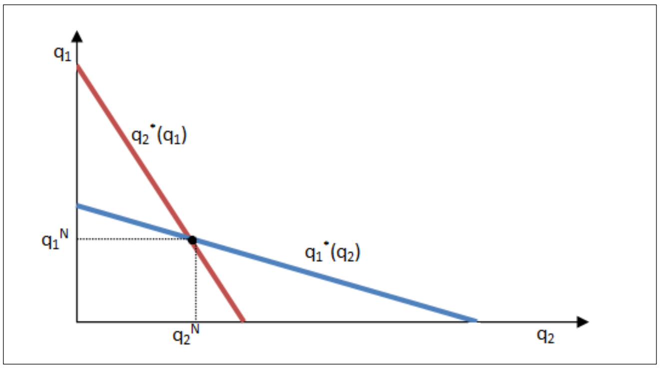

Gráfico 6

Ya que estamos ante un duopolio simétrico, por lo que las empresas tendrán la misma función de mejor respuesta y esto llevará a que las dos lancen la misma cantidad de bienes al mercado, determinado en el gráfico 6 como q_1^N y q_2^N.

De esta forma obtendremos el equilibrio de Nash-Cournot en un contexto estático. En siguiente apartado desarrollamos el modelo de Cournot de una forma dinámica.

3.2. DINAMIZACIÓN DEL MODELO DE COURNOT. EXPECTATIVAS

En el apartado anterior se ha descrito el juego estático, en el que las decisiones se toman de forma simultánea en un contexto de información completa y perfecta. En dicho escenario, si los jugadores seleccionan la correspondiente estrategia de equilibrio, ninguno de ellos tiene incentivos a cambiar su decisión unilateralmente. Si, por el contrario, las decisiones individuales no constituyen un equilibrio, cada jugador puede aumentar el valor de su función objetivo cambiando su elección de forma unilateral. Dado que todos los agentes son racionales y actúan de la misma forma, los niveles de equilibrio no se alcanzarán, surgiendo un proceso dinámico, el cual dependerá del modo en que los agentes elaboran sus expectativas, así como de la naturaleza del tiempo. Para una revisión en profundidad del análisis dinámico en modelos de oligopolio véase Bischi et al (2010).

La dinamización de los modelo dependerá de las expectativas que consideremos de cada una de las empresas. Es decir de lo que pensemos que van a producir nuestra empresa rival. Considerando las siguientes expectativas: adaptativas, de racionalidad limitada e ingenuas. En el modelo hemos empleado las expectativas de racionalidad limitada y las ingenuas.

Las expectativas adaptativas suponen que los agentes, para formular un pronóstico sobre las cantidades que va a ofertar la empresa rival, lo hacen en base a los valores lanzados en el pasado, de tal forma que teniendo en cuenta el comportamiento histórico de las cantidades lanzadas por la empresa rival, pronostican ajustando los errores de predicción realizado en el pasado. Corrigiendo los problemas ocasionados en *t*, obtenemos una relación lineal entre las cantidades ofertadas en el año t y las cantidades resultantes de la función de mejor respuesta ($q_{1,t}(q_{2,t})$ y $q_{2,t}(q_{1,t})$), una vez conocida la cantidad determinada por el rival. Por lo tanto, las ecuaciones dinámicas de ambas empresas serán las siguientes:

$$\begin{cases} q_{1,t+1} = (1 - v_1)q_{1,t} + v_1 q_{1,t}(q_{2,t}) \\ q_{2,t+1} = (1 - v_2)q_{2,t} + v_2 q_{2,t}(q_{1,t}) \end{cases}$$

donde $0 < v_1$, $v_2 < 1$ y representan la velocidad de ajuste de cada empresa con expectativas adaptativas

Por racionalidad limitada, tenemos en cuenta que los agentes no tienen un conocimiento completo del mercado, por lo que decide su producción sobre la base de una estimación local de la variación marginal de las ganancias derivadas de la negociación ($\frac{\partial V_{1t}}{\partial q_{1t}}$). Así decidirá aumentar su producción futura si dicha variación marginal es positiva, o disminuirla, si la variación es negativa. Este tipo de expectativas parece ser de las más realistas, por dos razones. En primer lugar, porque no supone que los jugadores tienen la información completa de todas las subyacentes características del mercado, incluidas las acciones de rivales por periodos, y en segundo lugar, las empresas ajustan sus salidas en base a estimaciones locales del marginal de la producción permitiendo que el juego se pueda reproducirse hacia un equilibrio de Nash.

Por lo tanto, las expectativas de racionalidad limitada se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1t} + \alpha_1 q_{1t} \dfrac{\partial V_{1t}}{\partial q_{1t}} \\ q_{2,t+1} = q_{2t} + \alpha_2 q_{2t} \dfrac{\partial V_{2t}}{\partial q_{2t}} \end{cases}$$

siendo α_1 y α_2 dos valores positivos que representan la velocidad de ajuste de cada empresa.

Las expectativas ingenuas o Cournot-naïve, son aquellas en las que en cada periodo dicha empresa espera que su rival lance la misma cantidad que en el periodo anterior. Si ambas empresas toman sus decisiones de acuerdo con esta regla de expectativas, este proceso converge al equilibrio de Nash obtenido en el juego estático, dado por el punto de intersección de las dos funciones de reacción (Véase Dixit 1986 y Tremblay 2011 para el análisis de la estabilidad en el modelo estático), ya que en este caso lo agentes poseen toda la información.

$$\begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1,t}(q_{2,t}) \\ q_{2,t+1} = q_{2,t}(q_{1,t}) \end{cases}$$

En el modelo hemos realizado una combinación de las dos últimas expectativas (racionalidad limitada e ingenuas), y un estudio sobre el caso de que las dos tengan racionalidad limitada. Es decir considerando en primer lugar las expectativas son heterogéneas, la empresa 1 tiene racionalidad limitada, no tiene toda la información del mercado y la empresa 2, tiene expectativas ingenuas, información perfecta. En el segundo caso hemos considerado expectativas homogéneas, de tal forma que la empresa 2 actúa bajo racionalidad limitada, es decir las dos tienen información imperfecta. La combinación que faltaría por realizar considerando que solo vamos a estudiar estos dos tipo de expectativas sería que las dos fueran ingenuas, dado que como hemos comentado anteriormente, el resultado converge al equilibrio de Nash por lo tanto dará la misma solución que con un modelo estático. De hecho las funciones empleadas para predecir la cantidad en *t+1* en el caso de las expectativas ingenuas son las funciones de mejor respuesta, y este equilibrio siempre es estable.

3.3. INTRODUCCIÓN A LA NEGOCIACIÓN SALARIAL ENTRE EMPRESAS Y SINDICATOS EN UN CONTEXTO DE OLIGOPOLIO.

Los sindicatos son asociaciones de trabajadores, cuyo objetivo es la defensa de los intereses profesionales, económicos y laborales de los asociados.

Podemos distinguir dos modelos de sindicalismo. Por un lado, tendríamos aquellos sindicatos en los que los acuerdos adoptados se aplican a todos los trabajadores incluidos dentro del ámbito correspondiente, independientemente de que estén o no afiliados a los sindicatos firmantes, dentro de un mismo sector. Es el modelo más frecuente en los países europeos. Y por otro lado estarían aquellos en los que solo los miembros del sindicato pueden ser contratados en un mercado concreto, particularmente estos sindicatos negocian con su propia empresa. En este método se encuentra frecuentemente en Estados Unidos y, en menor medida, en Gran Bretaña. Sera el caso que emplearemos más adelante.

Lo que diferencia especialmente a estos modelos de negociación (cada sindicato negocia con su empresa) es que la empresa participa activamente en el proceso de negociación en lugar de limitarse a elegir el nivel de empleo a un salario fijado unilateralmente por el sindicato. Por lo tanto, en los procesos de negociación, los trabajadores y las empresas son mutuamente dependientes, por lo que el intercambio que realizan exige una negociación. Podemos decir que ambas partes salen ganado si cooperan y llegan a un acuerdo. Sin embargo, las dos partes se encuentran en una posición competitiva porque la "relación de intercambio" depende de la fuerza relativa de cada una de las partes y determinan cómo se repartirán entre ambas los ingresos que se deriven de sus esfuerzos cooperativos en el proceso de negociación.

Los comportamientos salariales y de empleo pueden ser modelados de diferentes maneras (Véase Fanti y Gori 2010) cuando los trabajadores están organizados de tal forma que cada sindicato negocia con su empresa, principalmente distinguimos dos, la negociación eficiente y modelos adecuados para gestionar (right to manage).

Cuando el sindicato gestiona de manera eficiente, estamos ante una situación en la que el sindicato negocia tanto el empleo como el salario con la empresa. Esta negociación hace que sea un nivel de empleo eficiente o, al menos en aquellos casos en los que el empleo sea demasiado alto o demasiado bajo para el desarrollo social de eficiencia. En este caso el objetivo de las empresas es maximizar su beneficio, y el objetivo de los sindicatos de maximizar su utilidad.

En cuanto a la modalidad de right to manage, el sindicato solo puede negociar el salario, siendo las empresas libre de elegir unilateralmente el empleo. El objetivo de la empresa es maximizar las ganancias respecto al empleo y al salario, mientras que el objetivo de los sindicatos es maximizar la utilidad con respecto a los salarios. Por lo tanto, las empresas y el sindicato negocian descentralizadamente sobre los salarios, y las empresas son libres unilateralmente de elegir el nivel de empleo.

En nuestro caso nos vamos a centrar en el modelo de negociación eficiente.

Por lo tanto y dado las características detalladas anteriormente ya podemos realizar el modelo de negociación de Cournot, de una manera estática, seguido de una dinamización con expectativas de racionalidad limitada e ingenuas.

4. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

4.1 CARACTERIZACIÓN DE LA DEMANDA

Para determinar la función de demanda nos vamos a basar en el modelo elaborado por Singh y Vives (1984)

Se considera una economía con dos bienes. Un bien diferenciado, el cual es producido por dos empresas en régimen de duopolio, y un bien numerario, producido en condiciones competitivas, cuyo precio se normaliza a la unidad.

Existe un continuo de consumidores idénticos, de modo que las preferencias de un individuo representativo están representadas por una función de utilidad separable y lineal en el bien numerario.

Formalmente, la especificación de la función de utilidad viene dada por:

$$V(q_1, q_2) = u(q_1, q_2) - \sum_{i=1}^{2} p_i q_i \qquad (1)$$

siendo q_1 y q_2 la cantidad del bien diferenciado 1 y 2 respectivamente, y p_1 p_2 sus precios.

La función $u(q_1, q_2)$ suponemos que es cuadrática y estrictamente cóncava. Siguiendo a Shing y Vives (1984), adoptamos la siguiente expresión:

$$u(q_1, q_2) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 - \frac{\beta_1 q_1^2 + \beta_2 q_2^2 + 2\gamma_{12} q_1 q_2}{2} \qquad (2)$$

A efectos de simplificación, supondremos que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ y $\gamma_{12} = d$.

Con el fin de garantizar la concavidad estricta de (2), imponemos que el parámetro d, que determina el grado de diferenciación de los productos, tiene que estar comprendido entre -1 y 1. De tal forma que si $0 < d < -1$ estaríamos ante bienes complementarios (siendo complementarios perfectos cuando $d = -1$), si $0 < d < 1$ serían sustitutivos (siendo sustitutivos perfecto en caso de que $d=1$) y si $d=0$, los bienes serían independientes.

Realizando la maximización de la función (1) y teniendo en cuenta (2), se deduce la función inversa de demanda, cuya estructura es lineal y está definida para precios no negativos:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = 1 - q_1 - dq_2 \\ p_2 = 1 - q_2 - dq_1 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

4.2 CARACTERIZACIÓN DE LA OFERTA

Como ya se ha mencionado anteriormente, la demanda de las variedades del bien diferenciado está abastecida por dos empresas que producen las cantidades q_1 y q_2 respectivamente.

Se supone que ambas empresas cuentan con la misma tecnología, caracterizada por unos costes marginales constantes. Siguiendo a Correa López y Naylor (2004), la función de producción de cada empresa es de la forma $q_i = l_i$, siendo l_i el nivel de empleo utilizado. Es decir, se supone que una unidad de output emplea una unidad de mano de obra.

Por tanto, la función de costes viene dada por la relación lineal: $C_i(l_i) = w_i l_i$, con w_i el salario de la empresa i. $(i = 1,2)$.

4.3 FUNCIONES OBJETIVO DE LOS AGENTES: EMPRESAS Y SINDICATOS

Desarrollamos un duopolio en el que la cantidad producida (equivalentemente el nivel de empleo) y el salario se determinan simultáneamente de forma negociada entre cada empresa y un sindicato específico (en línea con Correa López y Naylor, 2004, Dowrick, 1989 y Bughin, 1995).

Teniendo en cuenta la función de demanda inversa (3), donde viene definido el precio de cada una de ellas por: $p_1 = 1 - q_1 - dq_2$ y $p_2 = 1 - q_2 - dq_1$, y que tenemos unos costes marginales constantes para ambas, w_1 y w_2, la función de beneficio de cada empresa vendrá dada por:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1(w_1, l_1) = (p_1 - w_1)l_1 = (p_1 - w_1)q_1 = (1 - q_1 - dq_2 - w_1)q_1 \\ \Pi_2(w_2, l_2) = (p_2 - w_2)l_2 = (p_2 - w_2)q_2 = (1 - q_2 - dq_1 - w_2)q_2 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Por otro lado, la función objetivo de los sindicatos viene definida por una función de utilidad, expresada en términos del salario y del nivel de empleo:

$$\left.\begin{array}{l} U_1(w_1, l_1) = (w_1 - \overline{w})^{\theta} l_1 = (w_1 - \overline{w})^{\theta} q_1 = w_1 q_1 \\ U_2(w_2, l_2) = (w_2 - \overline{w})^{\theta} l_2 = (w_2 - \overline{w})^{\theta} q_2 = w_2 q_2 \end{array}\right\} \quad (5)$$

donde $\overline{w}$ indica el salario de reserva, que supondremos nulo sin pérdida de generalidad, y θ denota la ponderación del salario con respecto al empleo. Igualmente, a efectos de simplificación, consideramos $\theta = 1$, de manera que los sindicatos dan la misma ponderación al salario que al empleo.

4.4 PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DEL JUEGO ESTÁTICO

Aplicando el Teorema del apartado 2.3 descripción de la solución de negociación de Nash, podemos determinar la función objetivo a maximizar, que es el producto de los beneficios de las empresas y las utilidades de cada uno de los sindicatos, ponderando en cada caso su poder de negociación:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \Pi_1^{\beta} U_1^{1-\beta} = [(1 - q_1 - dq_2 - w_1)q_1]^{\beta}(w_1 q_1)^{1-\beta} \\ V_2 = \Pi_2^{\beta} U_2^{1-\beta} = [(1 - q_2 - dq_1 - w_2)q_2]^{\beta}(w_2 q_2)^{1-\beta} \end{array}\right\} \quad (6)$$

donde β, es un parámetro que representa el poder de negociación de la empresa con respecto al sindicato, cuyo valor está comprendido entre 0 y 1. Por tanto, si β es mayor que ½, el poder de negociación de la empresa será mayor, y si es menor a ½, el sindicato ostentará un mayor poder de negociación.

Por lo tanto, las funciones de mejor respuesta de ambas empresas se determinan maximizando la función (6) con respecto a q_i y w_i de cada una de las empresas. Dada la simetría entre las empresas y sindicatos, resolvemos el problema para una de las empresas, por ejemplo, la 1.

$$Max_{\{q_1, w_1\}} V_1 = (1 - q_1 - dq_2 - w_1)^{\beta}\, w_1^{1-\beta} q_1 \quad (7)$$

Las condiciones necesarias[1] para maximizar esta función se realizan calculando la derivada parcial de V_1 con respecto a q_1 y con respecto a w_1 e igualándolas a 0:

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_1} = w_1^{1-\beta}\left[(1 - q_1 - dq_2 - w_1)^{\beta} - \beta q_1 (1 - q_1 - dq_2 - w_1)^{\beta - 1}\right] = 0$$

$$q_1(q_2, w_1) = \frac{1 - dq_2 - w_1}{1 + \beta} \quad (8)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_1} = q_1\left[(1-\beta) w_1^{-\beta}(1 - q_1 - dq_2 - w_1)^{\beta} - \beta w_1^{1-\beta}(1 - q_1 - dq_2 - w_1)^{\beta - 1}\right] = 0$$

$$w_1(q_1, q_2) = (1-\beta)(1 - q_1 - dq_2) \quad (9)$$

De (9), se observa que, para cada par de cantidades producidas de los bienes, el salario es creciente con respecto al poder de negociación del sindicato.

Introduciendo la igualdad (9) en (8), se obtiene la función de reacción de la empresa 1, o función de mejor respuesta:

[1] Las condiciones suficientes se cumplen dada las características de las funciones

$$q_1(q_2) = \frac{1 - dq_2}{2} \tag{10}$$

Como hemos comentado, las funciones son simétricas, así que en el caso de la empresa 2 con respecto a las cantidades producidas por la empresa 1, su función de mejor respuesta será la siguiente:

$$q_2(q_1) = \frac{1 - dq_1}{2} \tag{11}$$

Vemos que la pendiente de las funciones de reacción depende de la naturaleza de las variedades del producto diferenciado. En el caso de variedades sustitutivas ($d > 0$), las funciones de reacción son decrecientes, en cuyo caso, las cantidades producidas son sustitutivas estratégicas (el aumento de la producción de una empresa provoca una reducción en la producción de su rival). Análogamente, si las variedades son complementarias desde el punto de vista de la demanda ($d < 0$), las cantidades actúan como variables complementarias estratégicas (véase Tirole 1990).

El equilibrio de Cournot-Nash viene dado por la solución del sistema formado por las dos funciones de mejor respuesta (10) y (11).

$$\begin{cases} q_1(q_2) = \dfrac{1 - dq_2}{2} \\ q_2(q_1) = \dfrac{1 - dq_1}{2} \end{cases} \tag{12}$$

Resolviendo dicho sistema obtendremos el equilibrio de Nash, ya que el sistema es lineal y simétrico sólo admite soluciones simétricas, por lo tanto tendremos que los valores de q_1 y q_2 son iguales

$$E^* = (q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{1}{2 + d}, \frac{1}{2 + d}\right) \tag{13}$$

Desde un punto de vista geométrico y en un contexto estático, dicho equilibrio corresponde al punto de intersección de ambas funciones de reacción, para el que las ganancias marginales de la negociación, se anulan: $\frac{\partial V_1}{\partial q_1} = \frac{\partial V_2}{\partial q_2} = 0$.

5. DINAMIZACIÓN DEL MODELO CON EXPECTATIVAS HETEROGÉNEAS

5.1. INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS DINÁMICOS

En este apartado vamos a estudiar la estabilidad local del equilibrio de Nash-Cournot en un contexto dinámico de tiempo discreto y suponiendo que los jugadores son heterogéneos respecto a la formación de expectativas. Para profundizar en los sistemas dinámicos en tiempo discreto, en los conceptos de puntos de equilibrio o estados estacionarios y de estabilidad de los mismos ver Gandolfo (2010) o Fernández, Vázquez y Vegas (2003).

En cada momento del tiempo, cada empresa debe formar unas expectativas sobre la cantidad producida por su rival en dicho periodo.

Si denotamos por $q_{1,t}$ y $q_{2,t}$ a las cantidades producidas por la empresa 1 y 2 en el periodo t, entonces su producción para el próximo periodo $t+1$ vendrá definida por estos dos problemas de optimización:

$$\begin{aligned} q_{1,t+1} &= argmax_{q_1}\, \Theta_1\left(q_{1,t}, q_{2,t+1}^e\right) \\ q_{2,t+1} &= argmax_{q_2}\, \Theta_2\left(q_{2,t}, q_{1,t+1}^e\right) \end{aligned} \quad (14)$$

donde $q_{2,t+1}^e$ y $q_{1,t+1}^e$, representan la cantidad esperada que va a producir la empresa rival en el futuro *(t+1)*. Y $\Theta_1\left(q_{1,t}, q_{2,t+1}^e\right)$ y $\Theta_2\left(q_{2,t}, q_{1,t+1}^e\right)$ son las funciones objetivo que, en nuestro caso, vienen dadas por el valor de la solución de negociación de Nash, dado en (6): $V_1\left(q_{1,t}, q_{2,t+1}^e\right)$ y $V_2\left(q_{2,t}, q_{1,t+1}^e\right)$.

5.2 MODELO DINÁMICO CON EXPECTATIVAS HETEROGÉNEAS. PUNTOS DE EQUILIBRIO

Consideramos las siguientes expectativas para cada una de las dos empresas:

La empresa 1 tiene racionalidad limitada, es decir, no tiene un completo conocimiento del mercado.

Suponemos que la empresa 2 tiene expectativas Cournot-naïve. Es decir, tiene información perfecta del mercado.

Para más detalle, observar apartado 3.2 de este trabajo.

De manera formal, el sistema que caracteriza esta situación, es el siguiente:

$$\begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1t} + \alpha q_{1t} \dfrac{\partial V_{1t}}{\partial q_{1t}} \\ q_{2,t+1} = q_{2t}(q_{1t}) \end{cases} \tag{15}$$

donde $\alpha > 0$ es un coeficiente que capta la velocidad de ajuste de la empresa 1.

Para poder resolver dicho sistema (15) calculamos la derivada parcial de la función de Nash (V_1) con respecto a las cantidad producida por la empresa 1 (ver (8)). Pero en esta derivada vamos a sustituir w_1 por el salario de equilibrio que nos viene determinado en la expresión (9), así conseguiremos que dicha derivada solo dependa de la producción que lance la empresa rival y la propia empresa, y no del salario. Por lo tanto, el sistema dinámico (15) viene expresado como:

$$\begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1,t} + \alpha q_{1,t}\left[(1-\beta)^{(1-\beta)}\beta^{\beta}\left(1 - 2q_{1,t} - dq_{2,t}\right)\right] \\ q_{2,t+1} = \dfrac{1 - dq_{1,t}}{2} \end{cases} \tag{16}$$

Los puntos de equilibrio o estados estacionarios del sistema (16) se obtienen imponiendo la condición: $q_{1,t+1} = q_{1t} = q_1$ y $q_{2,t+1} = q_{2t} = q_2$. Por lo tanto, son las soluciones no negativas del sistema no lineal:

$$\begin{cases} 0 = \alpha q_1(1 - 2q_1 - dq_2) \\ q_2 = \dfrac{1 - dq_1}{2} \end{cases} \tag{17}$$

Resolviendo el sistema (17) obtenemos dos equilibrios:

$$E_0 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$
$$E^* = \left(\frac{1}{2+d}, \frac{1}{2+d}\right)$$

E_0 es un punto de equilibrio frontera, mientras que E^* es el único punto de equilibrio interior, que corresponde con el equilibrio de Nash del juego estático obtenido en (13).

5.3. CONDICIONES DE ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO DE NASH

A continuación, estudiamos la estabilidad de estos puntos de equilibrio. En el caso de sistemas dinámicos discretos, un punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable si los valores propios de la matriz jacobiana del sistema evaluada en dicho punto se hallan en el interior del círculo unitario; es decir, debe ser en valor absoluto menores que la unidad. En el caso de un sistema bidimensional, esta condición puede expresarse en términos de la traza (*Tr*) y el determinante (*Det*) de la matriz jacobiana mediante una serie de desigualdades que se conocen con el sobre de condiciones de Schur (véase Gandolfo 2010):

(i) 1+Tr + Det> 0

(ii) 1- Tr + Det> 0 (18)

(iii) 1- Det > 0

Si una sola de las desigualdades anteriores se convierte en igualdad, cumpliéndose el resto, el equilibrio pierde la estabilidad a través de una bifurcación. Esta bifurcación se llama bifurcación de flip, cuando $1+Tr+Det=0$, bifurcación transcrítica, si $1-Tr+Det=0$, y bifurcación de Neimark-Sacker, cuando $1-Det=0$.

La matriz jacobiana del sistema dinámico (16) es:

$$J_{HM}(q_1,q_2)=\begin{pmatrix} 1+\left[\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}(1-4q_1-dq_2)\right] & -d\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}q_1 \\ \dfrac{-d}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Esta matriz evaluada en el punto de equilibrio frontera $E_0 = \left(0,\frac{1}{2}\right)$ es:

$$J_{HM}(E_0)=\begin{pmatrix} 1+\dfrac{\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}(2-d)}{2} & 0 \\ \dfrac{-d}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Dada las características de la matriz evaluada en el punto (0,1/2) vamos a determinar la estabilidad de dicho punto mediante el cálculo de los valores propios. Al estar frente a una matriz triangular los valores propios son los elementos de la diagonal, por lo tanto, tendremos que comprobar si están dentro del círculo unitario, de la siguiente manera:

$$\lambda_1 = 1+\frac{\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}(2-d)}{2} > 1$$
$$\lambda_2 = 0$$

Por lo tanto y dados los valores propios que tiene la matriz jacobiana evaluada en el punto $E_0 = \left(0,\frac{1}{2}\right)$, podemos afirmar que es un equilibrio no estable ya λ_1 es mayor que 1.

A continuación estudiamos la estabilidad del equilibrio de Cournot-Nash. La matriz jacobiana (19) evaluada en dicho punto es:

$$J_{HM}(E^*)=\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{2\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{(1-\beta)}}{2+d} & \dfrac{-\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{(1-\beta)}d}{2+d} \\ -\dfrac{d}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

En este caso recurrimos a las condiciones de Schur dadas en (18) para analizar la estabilidad del equilibrio. El valor de la traza y el determinante de la matriz (21) vienen dados por:

$$Tr_{HT} = Tr\, J_{HT} = J_{11} + J_{22} = 1 - \frac{2\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}{2+d} \quad (22)$$

$$Det_{HT} = Det\,(J_{HT}) = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = -\frac{\alpha d^2\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}{2(2+d)} \quad (23)$$

Introduciendo las expresiones (22) y (23) en (18), las condiciones de estabilidad vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
&(i)\ 2 - \frac{(4+d^2)\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}{2(2+d)} > 0 \\
&(ii)\quad \frac{\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}{2+d}\left(2 - \frac{d^2}{2}\right) > 0 \\
&(iii)\ 1 + \frac{\alpha d^2\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}{2(2+d)} > 0
\end{aligned} \quad (24)$$

Como vemos, las condiciones de estabilidad asintótica local del equilibrio, dependen de tres parámetros: la velocidad de ajuste de la empresa con expectativas con racionalidad limitada (α), el poder de negociación (β), y el grado de sustituibilidad (complementariedad) de las variedades (d).
Analizaremos la influencia de cada uno de ellos en la estabilidad.

5.4 PÉRDIDA DE ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO DE NASH

Como se puede observar en las condiciones dadas en (24), las desigualdades (ii) y (iii) se cumplen siempre, dado que d está acotado entre *-1* y *1*, y β entre *0* y *1*. Nuestro problema viene determinado por la primera condición de estabilidad.

De dicha condición, es posible deducir el valor máximo del parámetro indicador de la velocidad de ajuste por debajo del cual el equilibrio de Nash es localmente asintóticamente estable. Despejando α de la condición (i) en (24), queda la siguiente expresión:

$$\alpha < \quad \alpha^{F}_{HT}(\beta, d) = \frac{4(2+d)}{(4+d^2)\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} \quad (25)$$

De esta forma obtenemos el valor de α crítico a partir del cual el equilibrio se desestabiliza mediante una bifurcación de flip, estableciéndose la siguiente proposición:

Proposición 1. Para todo $0 < \alpha < \alpha_{HT}^{F}(\beta, d)$, el equilibrio de Cournot-Nash E^{*} del sistema dinámico (16) es localmente asintóticamente estable.

En el siguiente gráfico se representa el umbral $\alpha_{HT}^{F}(\beta, d)$ de la velocidad de ajuste:

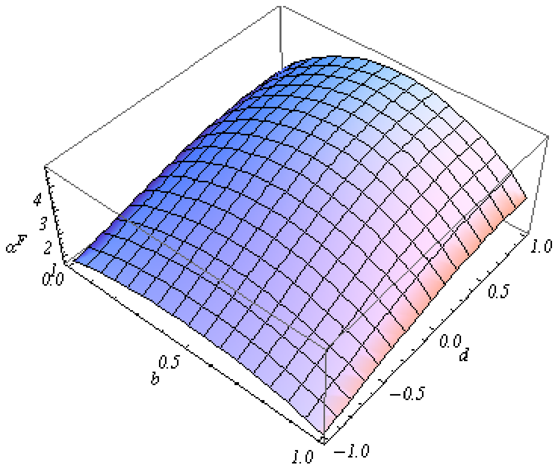

Gráfico 7

Las siguientes figuras muestran distintas simulaciones del sistema dinámico (16), generadas con el software Wolfram Mathematica 7, para los valores paramétricos *β = 0,5, d = 0,5* y *α* libre.

En el gráfico 1 se muestra una convergencia asintótica al equilibrio de Nash puesto que $\alpha < \alpha_{HT}^{F}(0{,}5; 0{,}5)$

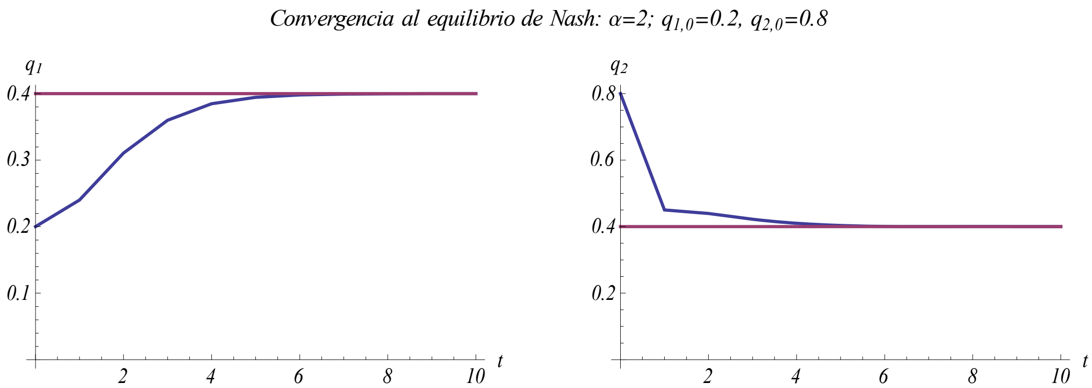

Gráfico 8

En los otros tres gráficos siguientes se muestra el comportamiento de las trayectorias de las cantidades cuando se ha superado el umbral α_{HT}^{F}. Se observa que cuanto más aumenta la velocidad de ajuste el comportamiento se hace cada vez más complejo, primero converge a un 2-ciclo, luego a un 4-ciclo y así sucesivamente hasta alcanzar un comportamiento complejo lo cual muestra la presencia de una bifurcación de flip.

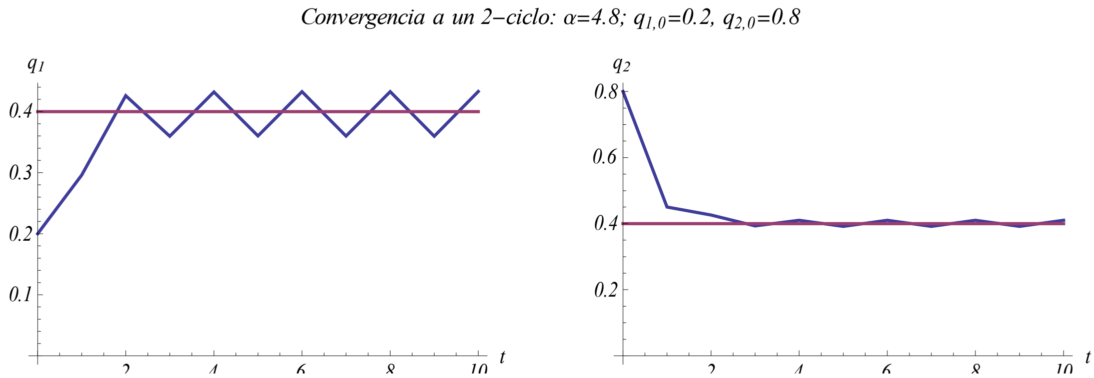

Gráfico 9

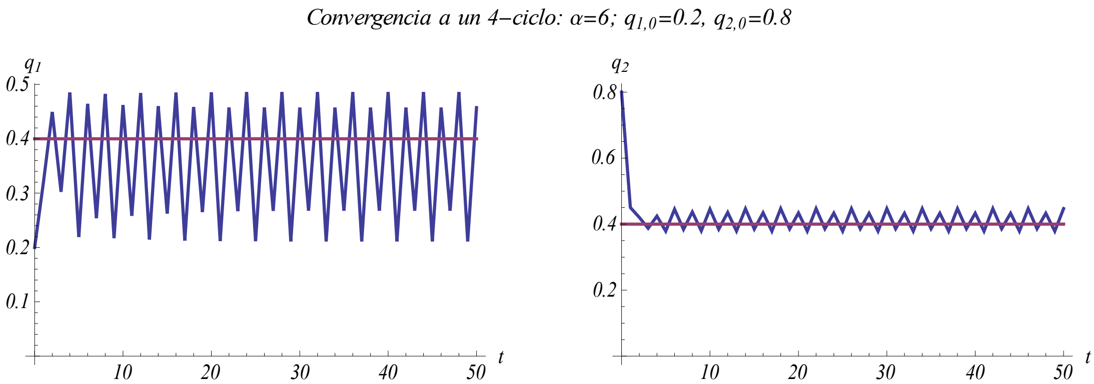

Gráfico 10

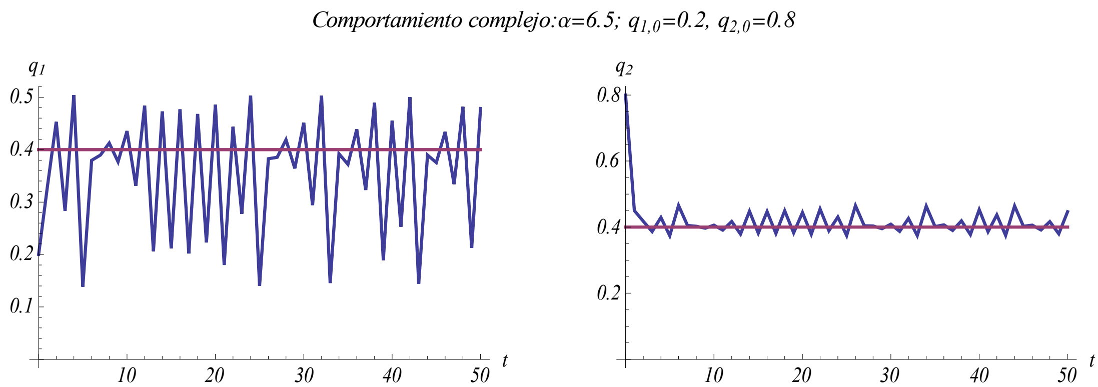

Gráfico 11

5.5. DEPENDENCIA DE LA ESTABILIDAD RESPECTO AL PODER DE NEGOCIACIÓN Y AL GRADO DE DIFERENCIACIÓN DE LOS PRODUCTOS

Una vez determinado el umbral de la velocidad de ajuste, $\alpha_{HT}^{F}(\beta, d)$, debemos estudiar su dependencia con respecto a los otros parámetros del modelo: el poder de negociación de la empresa y el sindicato, *(β),* y el grado de sustituibilidad o complementariedad, *(d),* existente entre las variedades del producto diferenciado.

En primer lugar, calculamos la derivada de $\alpha_{HT}^{F}(\beta, d)$ con respecto β, para saber cómo afecta al valor crítico de la velocidad de ajuste del modelo dinámico una variación en el poder de negociación de la empresa. Para que el cálculo de la derivada resulte más sencillo, escribimos $\alpha_{HT}^{F}(\beta, d)$ de la forma:

$$\alpha_{HT}^{F} = \frac{4(2+d)}{(4+d^2)\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} = \frac{k}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} \qquad (26)$$

siendo $k = \frac{4(2+d)}{(4+d^2)} > 0$

Se deduce la siguiente proposición:

Proposición 2: Dado el grado de sustituibilidad (complementariedad) entre las variedades, si $\beta < 1/2$, un aumento del poder de negociación de la empresa incrementa la estabilidad local del equilibirio. Si $\beta > 1/2$, el equilibrio de Nash es más estable, cuanto menor sea el poder de negociación de la empresa.

Demostración

Tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad (26) y utilizando las propiedades logarítmicas, se tiene que:

$$ln\alpha_{HT}^{F}(\beta, d) = ln\frac{k}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} = lnk - \beta\ln\beta - (1-\beta)\ln(1-\beta) \qquad (27)$$

Derivando esta última expresión respecto a β se obtiene:

$$\frac{\frac{\partial \alpha_{HT}^{F}(\beta,d)}{\partial \beta}}{\alpha_{HT}^{F}(\beta,d)} = -\ln\beta - \beta\frac{1}{\beta} - (-1)\ln(1-\beta) - (1-\beta)\left(\frac{-1}{1-\beta}\right)$$

Y despejando la derivada parcial se obtiene:

$$\frac{\partial \alpha_{HT}^{F}(\beta,d)}{\partial \beta} = \frac{4(2+d)}{(4+d^2)\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}\ln\frac{(1-\beta)}{\beta} \tag{28}$$

Como podemos observar, el efecto que provoca una disminución o aumento del poder de negociación en la velocidad de ajuste crítica (signo de la derivada (28)), va a depender de que el $ln\frac{1-\beta}{\beta}$ sea positivo o negativo. Por lo tanto, si $\frac{1-\beta}{\beta} > 1$ el logaritmo será positivo, lo que nos lleva a que si β < *½,* la derivada será positiva. Del mismo modo si $\frac{1-\beta}{\beta} < 1$ el logaritmo es negativo, por lo tanto cuando β > *½,* la derivada parcial de la velocidad de ajuste con respecto al poder de negociación será negativa. Queda así demostrada la proposición.

Por lo tanto, si partimos de una situación en la que la empresa posee mayor poder de negociación que el sindicato, β > ½, un aumento en el mismo provocará una disminución del valor crítico de la velocidad de ajuste, y con ello una menor estabilidad local del equilibrio, ya que el conjunto de valores de la velocidad de ajuste que aseguran la estabilidad local es menor.

En cambio si inicialmente la empresa tiene menos poder de negociación que los sindicatos, β < *½,* un aumento en dicho poder provocará que el umbral crítico se vea aumentando, y en consecuencia el equilibrio de Nash sea más estable.

La intuición económica que subyace en dicho resultado es la siguiente. Si existe asimetría en la distribución del poder de negociación a favor de la empresa, una reducción en el poder de ésta favorece la estabilidad del equilibrio. En ese caso, un menor poder por parte de la empresa da lugar a un mayor salario, reduciendo el poder de mercado de las empresas y dando lugar a situaciones más competitivas. Lo contrario sucede si inicialmente es el sindicato quien posee un mayor poder de negociación. En este caso, un mayor poder de monopolio por parte de las empresas puede ser una fuente de estabilización del equilibrio de Nash.

En definitiva, el efecto del poder de negociación sobre la estabilidad local del equilibrio se neutraliza cuando el poder de negociación se distribuye simétricamente entre la empresa y el sindicato.

Una vez determinado el efecto del parámetro β sobre la estabilidad del equilibrio, vamos a analizar la influencia del grado de sustituibilidad entre las variedades en la estabilidad local del equilibrio de Nash. Para ello, calculamos la derivada parcial del umbral crítico de la velocidad de ajuste con respecto al parámetro *d*:

$$\frac{\partial \alpha_{HT}^{F}(\beta,d)}{\partial d}=\frac{4(4-d^2-4d)}{(4+d^2)^2\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} \tag{29}$$

Para saber el comportamiento que tiene esta derivada ante variaciones en la diferenciación del producto, tendremos que saber para qué valores de *d* el numerador tiene signo positivo o negativo. Se deduce la siguiente proposición:

Proposición 3.

Dado el poder de negociación de la empresa y del sindicato:

(i) Si $-1<d<2(\sqrt{2}-1)$, una disminución de la complementariedad (si $d<0$) o un aumento de la sustituibilidad (si $d>0$) entre los bienes (menor grado de diferenciación) implica una mayor estabilidad del equilibrio de Nash ($\frac{\partial \alpha_{HT}^{F}(\beta,d)}{\partial d}>0$).

(ii) Si $2(\sqrt{2}-1)<d<1$, el equilibrio de Nash es más estable cuanto menor es el grado de sustituibilidad entre los bienes (mayor diferenciación) ($\frac{\partial \alpha_{HT}^{F}(\beta,d)}{\partial d}<0$).

Este resultado difiere de las conclusiones existentes en la literatura. Concretamente, las proporcionadas por Fanti y Gori (2012), quienes en un contexto de duopolio bajo competencia en cantidades, demuestran que el equilibrio de Cournot-Nash es más estable cuanto más independientes son las variedades del producto diferenciado. Ello pone de manifiesto la influencia de un proceso de negociación entre la empresa y el sindicato en el mercado del producto.

6. DINAMIZACIÓN DEL MODELO CON EXPECTATIVAS HOMOGÉNEAS

6.1 MODELO DINÁMICO CON EXPECTATIVAS HOMOGÉNEAS. PUNTOS DE EQUILIBRIO

Analizaremos cómo afecta al equilibrio de Cournot-Nash que las dos empresas tengan expectativas homogéneas, de tal manera que las dos actúen bajo racionalidad limitada.

El sistema que caracteriza dicha situación será:

$$\begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1t} + \alpha_1 q_{1t} \dfrac{\partial V_{1t}}{\partial q_{1t}} \\ q_{2,t+1} = q_{2t} + \alpha_2 q_{2t} \dfrac{\partial V_{2t}}{\partial q_{2t}} \end{cases} \tag{30}$$

donde α_1 y α_2 representa la velocidad de ajuste de cada una de las empresas, y siempre es positiva. Para simplificar nuestro modelo vamos a considerar que la velocidad de ajuste de ambas empresas es la misma, por la tanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$.

Sustituyendo las derivadas parciales:

$$\begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1,t} + \alpha q_{1,t}(1-\beta)^{(1-\beta)}\beta^{\beta}\left(1 - 2q_{1,t} - dq_{2,t}\right) \\ q_{2,t+1} = q_{2,t} + \alpha q_{2,t}(1-\beta)^{(1-\beta)}\beta^{\beta}\left(1 - 2q_{2,t} - dq_{1,t}\right) \end{cases} \tag{31}$$

Como en el caso de las expectativas heterogéneas, los puntos de equilibrio o estados estacionarios del sistema (31) se obtienen imponiendo la condición: $q_{1,t+1} = q_{1t} = q_1$ y $q_{2,t+1} = q_{2t} = q_2$. Po lo tanto, son las soluciones no negativas del sistema no lineal:

$$\begin{cases} 0 = \alpha q_1(1 - 2q_1 - dq_2) \\ 0 = \alpha q_2(1 - 2q_2 - dq_1) \end{cases} \tag{32}$$

Resolviendo dicho sistema obtenemos varios equilibrios:

$$
\left.\begin{array}{r}
E_0 = (0,0) \\
E_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\
E_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \\
E^* = \left(\frac{1}{2+d}, \frac{1}{2+d}\right)
\end{array}\right\} \tag{33}
$$

Los equilibrios E_0, E_1 y E_2 son equilibrio frontera y, como en el apartado anterior, se puede deducir que estos equilibrios no son estables en el tiempo.

Nos vamos a centrar en estudiar la estabilidad del equilibrio de Nash (E*).

6.2. CONDICIONES DE ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO DE NASH

Como en el caso anterior con expectativas heterogéneas, la estabilidad del equilibrio la estudiamos a partir de la matriz Jacobiana del sistema (31) evaluada en *E**. En este caso dado que el sistema de ecuaciones es simétrico, la matriz también lo será, por lo tanto:

$$
J_{HT}(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}(1 - 4q_1 - dq_2) & -d\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}q_1 \\ -d\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}q_2 & 1 + \alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}(1 - 4q_2 - dq_1) \end{pmatrix} \tag{34}
$$

Concretamente en el punto de equilibrio (E^*), la matriz será la siguiente:

$$
J_{HM}(E^*) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{(1-\beta)}}{2+d} & \dfrac{-\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{(1-\beta)}d}{2+d} \\ \dfrac{-\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{(1-\beta)}d}{2+d} & 1 - \dfrac{2\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{(1-\beta)}}{2+d} \end{pmatrix} \tag{35}
$$

Para analizar la estabilidad en dicho punto, recurrimos como en el caso anterior a las condiciones de Schur dadas en (18). El valor de la traza y el determinante vienen dados por:

$$
T_{HM} = 2 - \frac{4\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}{2+d} \tag{36}
$$

$$
D_{HM} = T_{HM} - 1 + \frac{\alpha^2\beta^{2\beta}(1-\beta)^{2(1-\beta)}(2-d)}{2+d} \tag{37}
$$

Introduciendo las expresiones (36) y (37) en las condiciones de estabilidad definidas en (18), dichas expresiones son:

$$\begin{aligned}
&(i)\ 2T_{HM} + \frac{\alpha^2\beta^{2\beta}(1-\beta)^{2(1-\beta)}(2-d)}{2+d} > 0 \\
&(ii)\ \frac{\alpha^2\beta^{2\beta}(1-\beta)^{2(1-\beta)}(2-d)}{2+d} > 0 \\
&(iii)\ \frac{\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}{(2+d)^2}\left[4-\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}(2-d)\right] > 0
\end{aligned} \tag{38}$$

También en este caso las condiciones de estabilidad asintótica local del equilibrio, dependen de tres parámetros: la velocidad de ajuste de las empresas (α), el poder de negociación (β), y el grado de sustituibilidad (complementariedad) de los bienes (d).

6.3 PÉRDIDA DE LA ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO DE NASH

Como podemos observar en las condiciones determinadas en (38), dados los valores de d y β cualesquiera ($-1 < d < 1$, $0 < \beta < 1$) la condición (ii) siempre se cumple, ya que para cualquier valor de los parámetros es positiva. Por lo tanto vamos a estudiar las dos condiciones restantes, la condición (i) y la condición (iii).

En el caso de la condición (iii), despejamos α y obtenemos el valor de α por debajo del cual se verifica (iii):

$$\alpha_1 = \frac{4}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}\,(2-d)} \tag{39}$$

En el caso de la condición (i), sustituyendo la traza en la expresión, se obtiene la desigualdad:

$$4 - \frac{8\alpha\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}{2+d} + \frac{\alpha^2\beta^{2\beta}(1-\beta)^{2(1-\beta)}(2-d)}{2+d} > 0 \tag{40}$$

Denotando $k = \beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}$, la inecuación (40) es equivalente a:

$$(2-d)\alpha^2k^2 - 8\alpha k + 4(2+d) > 0 \tag{41}$$

Resolviendo dicha inecuación de segundo grado, se deducen los valores que la hacen cero:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{4+2d}{(2-d)k} \\ \alpha &= \frac{4-2d}{(2-d)k} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Sustituyendo el valor de *k*, obtenemos que los valores de *α* que anulan la condición (i):

$$\alpha_2 = \frac{4+2d}{(2-d)\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} \tag{43}$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} \tag{44}$$

De esta manera, podemos observar que en el caso de α_2 depende tanto del grado de diferenciación del producto como del poder de negociación, en cambio en el caso de α_3, solo depende del poder de negociación que tenga la empresa.

Para determinar cuando se cumplen a la vez las condiciones (i) y (iii) tendremos que ordenar los valores críticos obtenidos α_1, α_2, α_3 de menor a mayor y determinar en qué casos se cumplen ambas condiciones.

Proposición 4: Considerando $d > 0$ (bienes sustitutivos), si $0 < \alpha < \alpha_3(\beta, d) = \frac{2}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}$, entonces el equilibrio de Nash es asintóticamente localmente estable

Demostración:

Observando los valores críticos (α_1, α_2 y α_3), vamos a determinar cómo se distribuyen de menor a mayor. Para ello vamos a calcular las diferencias entre ellos, y así determinar el orden de los mismos.

Comenzaremos restando α_1-α_2, para poder saber cuál de los dos valores es el mayor.

$$\frac{4}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}\,(2-d)} - \frac{4+2d}{(2-d)\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} = \frac{-2d}{(2-d)\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} < 0 \quad (45)$$

De tal forma que $\alpha_1 < \alpha_2$

Otra diferencia a realizar es α_1-α_3:

$$\frac{4}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}\,(2-d)} - \frac{2}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} = \frac{2d}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}\,(2-d)} > 0 \quad (46)$$

Por lo tanto $\alpha_1 > \alpha_3$

De esta forma, podemos concluir que al ser $d < 0$, se tiene $\alpha_3 < \alpha_1 < \alpha_2$. En consecuencia el valor crítico por debajo del cual se asegura la estabilidad asintótica local de $E*$ es $\alpha_{HM}^{F}(\beta, d) = \alpha_3 = \frac{2}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}$, quedando así demostrada la proposición.

En este caso el umbral α_{HM}^{F} no depende del grado de diferenciación del producto por lo tanto, será independiente del grado de sustituibilidad, y solo se verá modificado por las variaciones en el poder de negociación, siempre considerando que partimos de bienes sustitutivos. En la siguiente figura se muestra, la representación gráfica de este umbral:

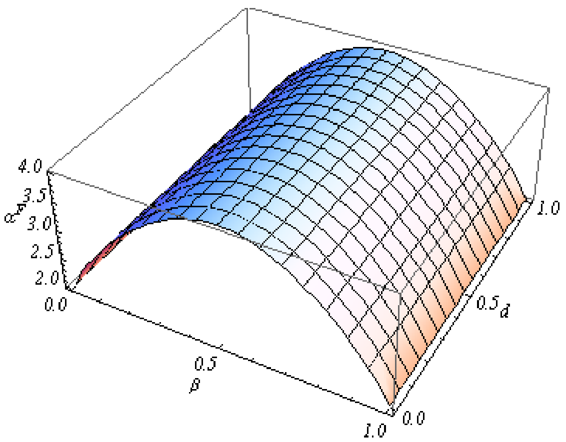

Gráfico 12. Representación gráfica de $\alpha_{HM}^{F}(\beta, d)$ con bienes complementarios

Proposición 5. En el caso de que $d < 0$ (bienes complementarios) si $0 < \alpha < \alpha_2 = \alpha_{HM}^F(\beta, d) = \frac{4+d}{(2-d)\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}}$, entonces el equilibrio de Nash es local y asintóticamente estable.

Demostración:

Como en el caso anterior, vamos a realizar diferencias entre los valores críticos para determinar el orden de los mismos. De tal formar, y siguiendo las pautas de la demostración anterior, se calcula α_1-α_2

$$\frac{4}{\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}\,(2-d)} - \frac{4+2d}{(2-d)\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}} = \frac{-2d}{(2-d)\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}} > 0 \quad (45)$$

Deduciendo que $\alpha_1 > \alpha_2$

Otra comparación a realizar es α_1-α_3:

$$\frac{4}{\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}\,(2-d)} - \frac{2}{\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}} = \frac{2d}{\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}\,(2-d)} < 0 \quad (46)$$

Por lo tanto $\alpha_1 < \alpha_3$

En definitiva se obtiene que si $d < 0$ entonces $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3$ y por tanto el umbral en este caso es $\alpha_{HM}^F(\beta, d) = \alpha_2 = \frac{4+d}{(2-d)\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}}$

La siguiente figura es la representación gráfica del umbral $\alpha_{HM}^F(\beta, d)$ para bienes complementarios:

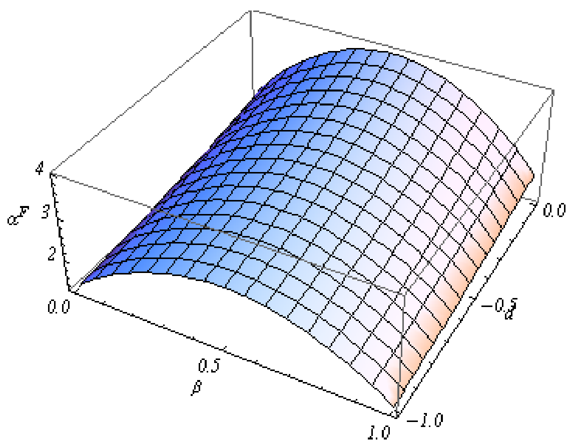

Gráfico 13. Representación de $\alpha_{HM}^F(\beta, d)$ con bienes complementarios

Las siguientes figuras muestran dos simulaciones generadas por el modelo (31). En la primera se observa convergencia al equilibrio de Nash y en la segunda comportamiento complejo. Las representaciones intermedias serían iguales que las que aparecen en expectativas heterogéneas, ya que del mismo modo llegamos a una bifurcación de flip. Por lo tanto en primer lugar se producirá una convergencia a un 2-ciclo, a continuación una a un 4-ciclo así sucesivamente hasta llegar a un comportamiento complejo que es el que aparece en el gráfico 15.

Convergencia al equilibrio de Nash: $\alpha=2$; $q_{1,0}=0.2$, $q_{2,0}=0.8$

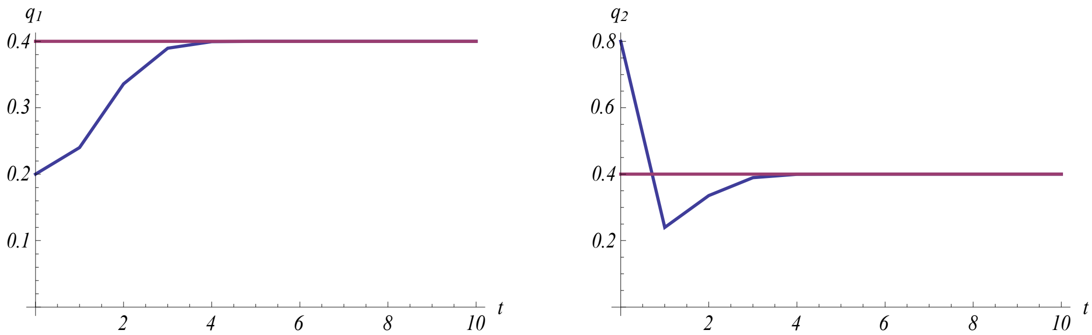

Gráfico 14

Comportamiento complejo: $\alpha=5.5$; $q_{1,0}=0.38$, $q_{2,0}=0.42$

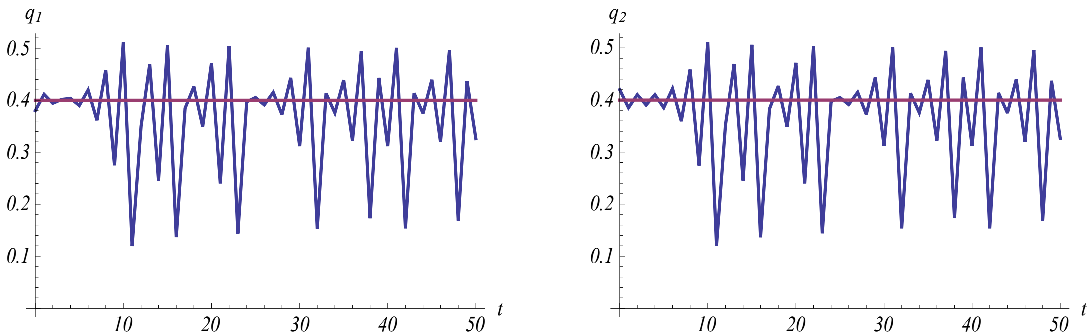

Gráfico 15

6.5 DEPENDENCIA DE LA ESTABILIDAD RESPECTO AL PODER DE NEGOCIACIÓN Y AL GRADO DE DIFERENCIACIÓN

Una vez obtenidos los dos valores del umbral de la velocidad de ajuste, en el caso de que los bienes sean complementarios ($d < 0$) y en el caso de sustitutivos ($d > 0$), vamos a determinar cómo afectan a dichos umbrales las variaciones tanto en el poder de negociación como en el grado de diferenciación del producto.

Para ello, tendremos que diferenciar si los bienes son sustitutivos o complementarios, ya que como hemos observado tenemos dos umbrales de ajuste diferentes, dependiendo del grado de sustituibilidad o complementariedad de los bienes.

Comenzaremos, considerando que los bienes son sustitutivos, es decir, $d > 0$. Como hemos demostrado anteriormente, cuando $d > 0$, el umbral de la velocidad de ajuste, a partir del cual el equilibrio de Nash puede ser inestable, mediante la bifurcación de Flip, es:

$$\alpha_{HM}^{F}(\beta, d) = \frac{2}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} \tag{47}$$

Igual que en el caso de expectativas heterogéneas, vamos a derivar este umbral en función de β, para saber cómo influye una variación en el poder de negociación, en $\alpha_{HM}^{F}(\beta, d)$ (47). Para ello tenemos que tomar logaritmos en ambos lados de la igualdad y aplicando las propiedades logarítmicas:

$$ln\, \alpha_{HM}^{F} = ln2 - \beta ln\beta - (1-\beta)\ln(1-\beta) \tag{48}$$

Derivando (48) respecto a β, obtenemos:

$$\frac{\frac{\partial \alpha_{HM}^{F}}{\partial \beta}}{\alpha_{HM}^{F}} = ln(1-\beta) - (1-\beta)\frac{-1}{(1-\beta)} - ln\beta - \beta\frac{1}{\beta} \tag{49}$$

Y despejando la derivada parcial se obtiene:

$$\frac{\partial \alpha_{HM}^{F}}{\partial \beta} = \frac{2}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}\, ln\frac{1-\beta}{\beta} \tag{50}$$

Como podemos observar, el valor que determina el signo de la derivada (50), depende del logaritmo neperiano, sea mayor o menor que cero. De tal forma que si $\frac{1-\beta}{\beta} > 1$ el logaritmo será positivo, en cambio en el caso de que $\frac{1-\beta}{\beta} < 1$, el logaritmo será negativo. Podemos reafirmar la Proposición 2, detallada en expectativas heterogéneas, ya que como hemos observado sale el mismo resultado, pero tenemos que tener en cuenta que en este caso estamos considerando que los bienes son sustitutivos.

Por lo tanto, si ambas empresas lanzan bienes sustitutivos entre sí, cuando partimos de una situación en la que la empresa tiene un mayor grado de negociación ($\beta > ½$), un aumento en dicho valor de negociación provocará una disminución del umbral de la velocidad de ajuste, llevando consigo una inestabilidad en el mercado. En cambio cuando partimos de una situación en la que el poder de negociación de los sindicatos es mayor, es decir, $\beta < ½$, una disminución de poder de los sindicatos, que está determinado por un incremento de β, provocará un aumento del umbral, dejando mayor estabilidad en dicho mercado.

Para continuar, vamos a realizar el estudio en el caso de que los bienes sean complementarios. En este caso el valor de α crítico del cual tenemos que partir es el siguiente:

$$\alpha_{HM}^{F}(\beta, d) = \frac{4 + 2d}{(2 - d)\beta^{\beta}(1 - \beta)^{1-\beta}} = \frac{M}{\beta^{\beta}(1 - \beta)^{1-\beta}} \tag{51}$$

Donde, para una mayor comodidad a la hora de derivar, $M = \frac{4+2d}{2-d}$

De la misma forma que en los bienes sustitutivos, podemos calcular la derivada de esta función, respecto a β, que como se puede observar va a ser la misma que en el caso anterior, por la tanto la conclusión será la misma. De tal forma que se vuelve a confirmar la proposición 2, antes citada.

Por lo tanto, podemos afirmar que independientemente del grado de complementariedad o sustituibilidad de los bienes, si existe asimetría en el poder de negociación, por ejemplo, las empresas tienen mayor poder que los sindicatos un aumento del mismo llevará a una disminución del umbral de la velocidad de ajuste y con ello una inestabilidad en el equilibrio, produciendo como hemos citado anteriormente una disminución del salario, ya que, si el poder de la empresa es mayor, negociarán un salario más bajo. Por otro lado, y en caso contrario, si el poder de negociación de partida de los sindicatos es mayor que el poder de negociación de la empresa, un aumento del poder de la empresa llevará, a que el umbral sea mayor, con ello habrá una mayor estabilidad, de tal forma que si partimos de una situación en la que el poder lo tienen los sindicatos aumentar el poder de la empresas favorecerá a la estabilidad del equilibrio. Por lo tanto podemos concluir que la situación más favorable para ambos colectivos es: aquella en la que el grado de poder de negociación está repartido entre sindicatos y empresas de una manera simétrica.

Por último, vamos a ver qué sucede con el valor crítico de velocidad de ajuste en el caso de que se produzca una variación en el grado de diferenciación de los productos.

Para ello, volveremos a tener dos valores críticos que tendremos que analizar dependiendo de la naturaleza de los bienes. Comenzaremos con el caso de que los bienes sean sustitutivos, donde en el valor del umbral está determinado en la expresión (47), de tal forma que no depende del grado de diferenciación del producto, de tal forma que su derivada parcial respecto a *d* es cero:

$$\frac{\partial \alpha_{HM}^{F}(\beta, d)}{\partial d} = 0 \tag{52}$$

Por lo tanto, partiendo de bienes sustitutivos, las modificaciones en el grado de diferenciación no afectan al umbral de la velocidad de ajuste, así que tampoco afecta a la estabilidad del equilibrio de Nash.

De la misma manera vamos a comprobar qué sucede cuando los bienes son complementarios ($d < 0$), para ello necesitamos la expresión (51), mediante la cual obtendremos cómo afectan las variaciones en el grado de complementariedad al umbral de la velocidad de ajuste:

$$\frac{\partial \alpha_{HM}^{F}(\beta, d)}{\partial d} = \frac{8}{(2-d)^2 \beta^{\beta} (1-\beta)^{1-\beta}} > 0$$

De esta forma, la derivada parcial del valor crítico de la velocidad de ajuste en el caso de que los bienes sean complementarios es siempre positiva. De ello se deduce, que ante disminuciones en la diferenciación, es decir, los bienes se vuelven más independientes provocará un aumento del umbral de la velocidad de ajuste y con ello el equilibrio será más estable. Ya que estamos ante bienes complementarios ($d < 0$), por lo tanto incrementar el valor de *d*, es decir acercarlo más a la independencia de los bienes.

Por tanto se verifica la siguiente proposición:

Proposición 6: cuando los bienes son sustitutivos ($d > 0$), una variación en el grado de diferenciación no afecta a la estabilidad local del equilibrio, en cambio cuando los bienes son complementarios ($d < 0$), una mayor independencia entre los bienes aumenta la estabilidad del equilibrio.

Así, en un mercado con bienes complementarios una mayor independencia entre los bienes provocará un aumento en el umbral de la velocidad de ajuste, acompañado de una mayor estabilidad. Dado que el valor de d esta acotado entre -1 y 1, conforme se acerque más a 0 más estable será el equilibrio. Esta afirmación reproduce el resultado obtenido bajo expectativas heterogéneas para bienes complementarios. Y por otro lado confirma la afirmación realizada por Fanti y Gori (2012) que determina que cuanto más independientes son los bienes, más estable es el mercado

7. COMPARACIÓN ENTRE EXPECTATIVAS HETEROGENEAS Y EXPECTATIVAS HOMOGENEAS

En este apartado queremos comparar *ceteris paribus* el poder de negociación de empresas y sindicatos, β, y el grado de diferenciación de los productos, d, mediante el umbral o valor crítico de la velocidad de ajuste que garantiza la estabilidad asintótica del equilibrio de Nash (bifurcación de Flip) según las expectativas sean heterogéneas y homogéneas. Pero como ya hemos visto, en el caso de expectativas homogéneas, aparecen dos umbrales de velocidad de ajuste, según sea $d < 0$ o $d > 0$, por lo tanto tendremos que diferenciar en el caso de bienes complementarios o sustitutivos.

Comenzaremos comparando el umbral obtenido con expectativas heterogéneas con el obtenido en expectativas homogéneas en el caso de bienes sustitutivos, expresiones que aparece en (25) y en (47), de tal forma que la diferencia es:

$$\alpha_{HT}^{F} - \alpha_{HM}^{F} = \frac{2d(2-d)}{(4+d^2)\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}} > 0$$

Por lo tanto el umbral de la velocidad de ajuste de expectativas heterogéneas es mayor que el umbral de la velocidad de ajuste en expectativas homogéneas en caso de bienes sustitutivos. Así que, la estabilidad será mayor en el caso de expectativas heterogéneas ya que el conjunto de valores que aseguran la estabilidad local es mayor.

El siguiente paso a realizar es comparar el umbral obtenido en el caso de expectativas heterogéneas con el obtenido en homogéneas pero, para bienes complementarios, usaremos la expresión (25) y (51)

$$\alpha_{HT}^{F} - \alpha_{HM}^{F} = \frac{-2d(4d + 4 + d^2)}{(4 + d^2)(2 - d)\beta^{\beta}(1 - \beta)^{1-\beta}} > 0$$

La diferencia es positiva, por lo tanto el umbral en el caso de que los agentes tengan expectativas heterogéneas es mayor que si tienen expectativas homogéneas.

Esto permite deducir que, independientemente del tipo de bien que produzcan ambas empresa y del poder de negociación que tengan los sindicatos y las empresas, el equilibrio será más estable en el tiempo en el caso de expectativas heterogéneas, ya que el umbral es mayor, lo que quiere decir que el conjunto de valores de ajuste que aseguran la estabilidad local es mayor.

8. CONCLUSIONES

Viendo los distintos escenarios propuestos en el modelo, y analizando el grado de diferenciación del producto, el poder de negociación y la velocidad de ajuste en los modelos dinámicos, tanto con expectativas homogéneas como con expectativas heterogéneas, nos encontramos varios escenarios a comentar:

<table>
<tr><th></th><th>HETEROGÉNEAS</th><th colspan="2">HOMOGÉNEAS</th></tr>
<tr><td>Bienes</td><td>Sustitutivos y Complementarios
-1 < d < 1</td><td>Sustitutivos
1 > d > 0</td><td>Complementarios
-1 < d < 0</td></tr>
<tr><td>α crítico</td><td>$\alpha_{HT}^{F} = \frac{4(2+d)}{(4+d^2)\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}$</td><td>$\alpha_{HM}^{F} = \frac{2}{\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}$</td><td>$\alpha_{HM}^{F} = \frac{4+2d}{(2-d)\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}}$</td></tr>
<tr><td>d grado de diferenciación del producto</td><td>$-1 < d < 2(\sqrt{2}-1)$ un incremento de d (menor diferenciación) lleva una mayor estabilidad
$2(\sqrt{2}-1) < d < 1$ una disminución de d (mayor diferenciación) lleva a una mayor estabilidad</td><td>Las variaciones de d, no afectan al umbral de la velocidad de ajuste en bienes sustitutivos</td><td>Un incremento del valor de d (más independientes son los bienes), incrementa el umbral de la velocidad de ajuste y con ello la estabilidad del mercado.</td></tr>
<tr><td>β poder de negociación</td><td colspan="3">$\beta < 1/2$ un incremento en el poder de negociación provoca un incremento de α y con ello una mayor estabilidad
$\beta > 1/2$ un incremento en el poder de negociación provoca una disminución en α y con ello una inestabilidad</td></tr>
</table>

Tabla 1. Comparación de resultados

Desde el punto de vista del poder de negociación, vemos que es independiente que las expectativas de las empresas sean homogéneas o heterogéneas, ya que la conclusión es la misma. Considerando una asimetría en el poder de negociación a favor de la empresa, un aumento de este poder llevara a una inestabilidad del mercado. Teniendo en cuenta que partimos de una situación en la que la empresa ya tiene más poder que los sindicatos para negociar, un incremento de este poder, provocará una disminución de los salarios llevando a situaciones menos competitivas. Del mismo modo que si el poder de negociación de la empresa se ve disminuido, llevará a una estabilidad en el mercado, ya que tendrán más poder los sindicatos y estos negociaran un salario mayor, por lo tanto la empresa tendrá que ser más competitiva.

En cambio si partimos de una situación en la que el sindicato tiene un mayor poder de negociación, una disminución del poder de negociación de la empresa, llevará a una inestabilidad en el mercado, a través de la fijación de salarios más altos provocando una competencia más fuerte entre las empresas. Y en caso contrario un aumento del poder de negociación de la empresa, irá acompañado de una estabilidad en el mercado. Llevando a que la competencia entre las empresas se vea reducida, dado que al aumentar su poder, negociaran salarios más bajos dando lugar a situaciones menos competitivas. Por lo tanto la situación más favorecedora para ambos colectivos es que el poder de negociación este distribuido de una manera simétrica, de tal forma que el poder de negociación de los dos sea el mismo.

Por otro lado también hemos analizado en ambas expectativas cuando varía el grado de diferenciación de los bienes. En este caso sí que hay discrepancia entre tener expectativas heterogéneas y expectativas homogéneas. Si las expectativas son heterogéneas, vemos que si los bienes son sustitutivos, un aumento en el grado de sustituibilidad llevará a un equilibrio más estable. Por lo tanto cuanto menos diferenciados sean los bienes, la competitividad será menor en este mercado provocando menos fluctuaciones y más estabilidad, esto se produce gracias a la conducta de las expectativas ingenuas de la empresa 2. Pero tenemos que tener en cuenta que no lleguen a ser sustitutivos perfectos, porque entonces el equilibrio se desestabilizará. En cambio, en las expectativas homogéneas vemos que conforme los bienes se convierten en más independientes, el mercado es más estable. De tal forma que coincide con expectativas heterogéneas en caso de bienes complementarios.

Por lo tanto cuando los bienes son complementarios, sean cuales sean las expectativas de las empresas, el equilibrio será más estable conforme dichos bienes se aproximen a ser más independientes. Pero en el caso de que sean bienes sustitutivos si las expectativas son heterogéneas conforme menor sea la diferenciación, mayor será la estabilidad del equilibrio pero sin alcanzar la sustituibilidad perfecta.

De una manera genérica y comparando ambas expectativas, independientemente del bien al que no enfrentemos y del poder de negociación del que partamos, el umbral de la velocidad de ajuste es mayor en el caso de expectativas heterogéneas. Dado que frente a expectativas homogéneas, donde la información del mercado es limitada, en las expectativas heterogéneas una de las empresas tiene información perfecta. De esta manera podemos concluir que a mayor información mayor estabilidad del equilibrio.

9. BIBLIOGRAFÍA

[1] ANDALUZ. J; JARNE.G (2015) “On the dynamics of economic games based on product differentiation” Mathematics and Computers in Simulation 113, 16-27

[2] ARÉVALO. J.J (2004) “Teoría de juegos negociación: una visión general” Revista Sociedad y Economía. Número 7, págs. 45 a 64

[3] BINMORE. K “Teoría de juegos” University of Michigan, McGraw-Hill

[4] BISCHI G.I ; CHIARELLA.C; KOPEL.M. & SZIDAROVSKY F. (2010) “Nonlinear oligopies. Stability and bifurcations” Berlin Springer

[5] BUGHIN J. (1995) "Union and strategic managerial incentives" Economic Letters 47, 95-100

[6] CABRAL.L. (1997) “Economía Industrial” McGrawHill

[7] CHICA.Y; ESPINOSA, M.P (2005) “Union Formation and Bargaining Rules in the Labor Market” European Journal of Social Sciences 8, 88-106

[8] DIANA A. MENDES, VIVALDO M.MENDES, ORLANDO GOMES (2008) “Complex Dynamics in Simple Cournot Duopoly Games” Working Paper 10/08 ERC Lisbon Unersity Institute.

[9] DIXIT. A (1986) “Comparative Statics in oligopoly” Internacional Economic Review 27(1) 107-122

[10] DOWRICK, S (1989) "Union-Oligopoly bargaining" Economic Journal 99, 1123-1142

[11] FANTI.L; GORI.L (2011) “Efficient bargining versus right to manage: a stability analysis with heterogneous players in a duopoly with quantity competition and trade

unions" Departmen of Economics, University of Pisa, DEPARTAMENT OF Law and Economics "G.L.M. Casaregi" University of Genoa.

[12]FANTI.L; GORI.L (2012) "The dynamics of a differentiated duopoly with quantity competition" Economic Modelling, 29 421-427

[13] FERNANDEZ PEREZ C; VAZQUEZ HERNANDEZ, F.J; VEGAS MANTANES, J.M (2003) "Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos" Thomson

[14]GANDOLFO. G (2010) "Economic Dynamics" Springer

[15] PONSATI C. (1988) "Juegos de negociación" Cuadernos económicos del I.C.E. Nº40

[16] TIROLE.J. (1990) "La teoría de la organización industrial" Ariel economía

[17] TREMBLAY.C. & TEMBRAY.V. (2011) "The Cournot-Bertrand model and the degree of porduct differentiation" Economic Letters 11(3) 233-235

[18] VILLAR. A (1999) "Lecciones de microeconomía" A.Bosch

[19] X. VIVES; SING. N (1984) "Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly" The Rand Journal of Economics, Volumen 15, Isue 4, 546-554