

Hugo Ferrer Pérez

El contraste de raíz unitaria MSB: la influencia de la observación inicial

Departamento
Análisis Económico

Director/es

Ayuda Bosque, María Isabel
Aznar Grasa, Antonio

<http://zaguan.unizar.es/collection/Tesis>

© Universidad de Zaragoza
Servicio de Publicaciones

ISSN 2254-7606



Universidad
Zaragoza

Tesis Doctoral

EL CONTRASTE DE RAÍZ UNITARIA MSB: LA INFLUENCIA DE LA OBSERVACIÓN INICIAL

Autor

Hugo Ferrer Pérez

Director/es

Ayuda Bosque, María Isabel
Aznar Grasa, Antonio

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Análisis Económico

2015

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

FACULTAD DE ECONOMÍA Y EMPRESA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS ECONÓMICO



**Universidad
Zaragoza**

TESIS DOCTORAL

EL CONTRASTE DE RAÍZ UNITARIA MSB:

LA INFLUENCIA DE LA OBSERVACIÓN INICIAL

PRESENTADA POR:

D. HUGO FERRER PÉREZ

DIRECTORES DE TESIS:

**Dr. D. ANTONIO AZNAR GRASA
Dra. Dña. MARÍA ISABEL AYUDA BOSQUE**

ZARAGOZA, 2015

©2015: Hugo Ferrer Pérez

Ninguna parte de esta tesis, incluido el diseño de la cubierta, puede ser reproducida, almacenada o transmitida en manera alguna ni por ningún medio sin permiso previo del autor.

A mis padres y hermano,

Agradecimientos

Está claro que recoger en tan solo estas líneas mis agradecimientos de tantos años se antoja empresa difícil, pero intentaré al menos no olvidarme de nadie ni nada de lo que quiero decir.

En primer lugar, quiero dar las gracias a mis dos directores de tesis por quienes verdaderamente siento una profunda admiración y de los que resulta un auténtico placer aprender en el día a día. Antonio, Maribel, sin vosotros este trabajo no habría salido adelante. Gracias por la confianza que depositasteis en mí desde el primer día. Después de estos cinco largos años, esta tesis no es lo único que me llevo con un valor incalculable, sino también vuestra amistad, que de otra forma no hubiera existido. Gracias por vuestra dedicación y formación durante todos estos años, por inculcarme ese espíritu analítico-crítico, por mostrarme que no solo existe un camino para obtener las cosas y que siempre se encuentra uno para obtenerlas. Gracias por permitirme disfrutar con vosotros tantos momentos.

También, quisiera agradecer a la Fundación ENDESA por la financiación parcial recibida en la etapa pre-doctoral, y al grupo de investigación “Selección de modelos econométricos” de la Universidad de Zaragoza por la financiación recibida todos estos años. También, me gustaría agradecer a muchos de los profesores que compartieron su conocimiento en mis años de formación así como al personal de administración y servicios del departamento de Análisis Económico.

Mis agradecimientos continúan para el grupo de mis amigos de la uni, mis compañeros del máster y para “los jefos”, mis grandes amigos del cole de toda la vida. Gracias a todos vosotros por las experiencias vividas.

Un lugar reservado en estos agradecimientos tienen mis dos grandes amigos Eduardo y Pilar. Sin vosotros, todos estos duros años de investigación hubieran sido muy distintos. A ti, Edu, gracias por tu apoyo, tus recomendaciones y por tu forma de ver siempre el lado optimista de las cosas. Y a ti, Pilar, la mujer más excepcional y mi gran baluarte en el día a día, para quien las palabras que en estas líneas dedico tienen como objetivo ser fiel reflejo de la importancia de sentir su aliento incondicional.

No quiero terminar estos agradecimientos sin mencionar a mi hermano, mi gran apoyo en la ardua tarea de programación sobre todo cuando daba mis primeros pasos. Y, aunque deje para el final a mis padres, ese no es el lugar que les corresponde puesto que son las personas más importantes en mi vida y quienes me han dado todo. Sin ellos, estoy seguro de que muchas de las cosas que he conseguido en esta vida no habrían sido posibles. Esta tesis es una pequeña muestra de lo que digo.

A todos vosotros, gracias.

El hombre se descubre cuando se mide con un obstáculo

Antoine de Saint-Exupéry

Índice

Índice de tablas	v
Índice de figuras	vii
Introducción	1
1 El contraste MSB: una revisión de sus propiedades asintóticas	15
Resumen	17
1.1 Introducción	17
1.2 Propiedades bajo el procedimiento de Mínimos Cuadrados Ordinarios.	22
1.3 Propiedades bajo el procedimiento de “cuasi-diferenciación” de Elliott <i>et al.</i> (1996)	27
Propiedades asintóticas del MSB sin elementos deterministas	33
Apéndice matemático	37
2 Un estudio de Monte Carlo para el análisis del contraste MSB	71
Resumen	73
2.1 Introducción	73
2.2 Valores críticos	75
2.3 Análisis del estimador de la varianza a largo plazo.	76
2.4 Análisis comparado del MSB	89
2.5 Análisis comparado de los contrastes de raíz unitaria.	96
2.6 Conclusiones	101
3 El contraste MSB y el tamaño de la observación inicial	103
Resumen	105
3.1 Introducción	105
3.2 Modelo e hipótesis	106
3.3 Propiedades asintóticas del MSB	108
3.4 Simulaciones de Monte Carlo	112
3.4.1 Puntos críticos.	113
3.4.2 Tamaño empírico	114
3.4.3 Potencia ajustada al tamaño	115
3.5 Conclusiones	130

Apéndice matemático	131
Apéndice de tablas	145
4 Una versión robusta al valor inicial del estadístico de contraste MSB	153
Resumen.	155
4.1 Introducción	155
4.2 Revisión de la literatura.	156
4.3 Una versión robusta del estadístico de contraste MSB	158
4.4 Simulaciones de Monte Carlo en muestras pequeñas.	161
4.4.1 Potencia ajustada al tamaño	162
4.5 Comparaciones con otros contrastes de raíz unitaria	166
4.6 Conclusiones	172
Apéndice matemático	175
Apéndice de tablas	179
Conclusión final	207
Bibliografía	211

Índice de tablas

2.1	Puntos críticos asintóticos del contraste MSB	76
2.2	Notación utilizada en los experimentos de Monte Carlo	79
2.3	Ratio EVR de estimadores kernel ($p = 0$)	81
2.4	Ratio EVR de estimadores kernel ($p = 1$)	82
2.5	Ratio EVR de estimadores autorregresivos ($p = 0$)	83
2.6	Ratio EVR de estimadores autorregresivos ($p = 1$)	84
2.7	ECM de estimadores kernel ($p = 0$)	85
2.8	ECM de estimadores kernel ($p = 1$)	86
2.9	ECM de estimadores autorregresivos ($p = 0$)	87
2.10	ECM de estimadores autorregresivos ($p = 1$)	88
2.11	Relación de versiones del estadístico MSB	90
2.12	Tamaño empírico de diferentes versiones del MSB^μ	92
2.13	Potencia ajustada al tamaño de diferentes versiones del MSB^μ	93
2.14	Tamaño empírico de diferentes versiones del MSB^τ	94
2.15	Potencia ajustada al tamaño de diferentes versiones del MSB^τ	95
2.16	Estadísticos utilizados en el estudio de Monte Carlo	96
2.17	Tamaño empírico de los contrastes de raíz unitaria M^μ	97
2.18	Tamaño empírico de los contrastes de raíz unitaria M^τ	98
2.19	Potencia ajustada al tamaño de los contrastes de raíz unitaria M^μ	99
2.20	Potencia ajustada al tamaño de los contrastes de raíz unitaria M^τ	100
3.1	Puntos críticos de MSB_{OLS}^τ , MSB_{GLS1}^τ y MSB_{GLS2}^τ (5%)	113
3.2	Tamaño empírico de MSB_{OLS}^τ , MSB_{GLS1}^τ y MSB_{GLS2}^τ . $u_t \sim MA(1)$	114
3.3	Tamaño empírico de MSB_{OLS}^τ , MSB_{GLS1}^τ y MSB_{GLS2}^τ . $u_t \sim AR(1)$	115

3.4	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 100, u_t \sim \text{MA}(1)$	116
3.5	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 250, u_t \sim \text{MA}(1)$	117
3.6	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 500, u_t \sim \text{MA}(1)$	117
3.7	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 100, u_t \sim \text{AR}(1)$	118
3.8	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 250, u_t \sim \text{AR}(1)$	119
3.9	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 500, u_t \sim \text{AR}(1)$	119
3.10	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 100, u_t \sim \text{MA}(1)$	121
3.11	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 250, u_t \sim \text{MA}(1)$	122
3.12	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 500, u_t \sim \text{MA}(1)$	124
3.13	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 100, u_t \sim \text{AR}(1)$	126
3.14	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 250, u_t \sim \text{AR}(1)$	127
3.15	Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 500, u_t \sim \text{AR}(1)$	128
3.16	Tamaño asintótico y potencia asintótica local bajo PGD1	145
3.17	Potencia asintótica local bajo PGD2	148
4.1	Potencia asintótica local del contraste NMSB	179
4.2	Potencia asintótica local de contrastes robustos	182
4.3	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 100, u_t \sim \text{MA}(1)$	186
4.4	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 250, u_t \sim \text{MA}(1)$	187
4.5	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 500, u_t \sim \text{MA}(1)$	188
4.6	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 100, u_t \sim \text{AR}(1)$	190
4.7	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 250, u_t \sim \text{AR}(1)$	191
4.8	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 500, u_t \sim \text{AR}(1)$	192
4.9	Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 100, u_t \sim \text{MA}(1)$	194
4.10	Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 250, u_t \sim \text{MA}(1)$	196
4.11	Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 500, u_t \sim \text{MA}(1)$	198
4.12	Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 100, u_t \sim \text{AR}(1)$	200
4.13	Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 250, u_t \sim \text{AR}(1)$	202
4.14	Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 500, u_t \sim \text{AR}(1)$	204

Índice de figuras

3.1	Tamaño asintótico y potencia asintótica local bajo PGD1	111
3.2	Potencia asintótica local bajo PGD2	112
4.1	Potencia asintótica local de NMSB y MSB_{GLS2}	161
4.2	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. Errores i.i.d	163
4.3	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $MA(1)$ - $AR(1)$. $\rho_c = 0.95$, $T = 100$	164
4.4	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $MA(1)$ - $AR(1)$. $\rho_c = 0.95$, $T = 500$	165
4.5	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $MA(1)$ - $AR(1)$. $\rho_c = 0.80$, $T = 100$	165
4.6	Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $MA(1)$ - $AR(1)$. $\rho_c = 0.80$, $T = 500$	166
4.7	Potencia asintótica local de HL_{05} , HL_{06} , EM , UR_{SA} y $NMSB_{20}^7$	167
4.8	Potencia ajustada al tamaño. Errores i.i.d.	168
4.9	Potencia ajustada al tamaño. $MA(1)$ - $AR(1)$. $\rho_c = 0.95$, $T = 100$	169
4.10	Potencia ajustada al tamaño. $MA(1)$ - $AR(1)$. $\rho_c = 0.95$, $T = 500$	170
4.11	Potencia ajustada al tamaño. $MA(1)$ - $AR(1)$. $\rho_c = 0.80$, $T = 100$	171
4.12	Potencia ajustada al tamaño. $MA(1)$ - $AR(1)$. $\rho_c = 0.80$, $T = 500$	172

Introducción

El objetivo de este trabajo es examinar las propiedades de un contraste de raíz unitaria, el contraste MSB, propuesto en Stock (1999). El trabajo consta de dos grandes partes. En la primera, se lleva a cabo un análisis exhaustivo de las propiedades del contraste MSB, tanto asintóticas como en muestras finitas. La segunda está dedicada a analizar la dependencia de las propiedades del contraste respecto al tamaño de la observación inicial. En esta Introducción, en primer lugar, presentaremos una panorámica de lo que consideramos más relevante dentro de la literatura dedicada a los contrastes de raíz unitaria. A continuación, se presentará un esquema del trabajo realizado en los cuatro capítulos de los que consta la tesis presentada.

Estado de la cuestión

¿Por qué es importante determinar si una serie temporal tiene o no una o varias tendencias estocásticas? Para poder responder correctamente a la pregunta, hemos de situar el tema dentro de un enfoque econométrico que se configuró en los años 90 fruto de la confluencia de dos grandes tradiciones: el enfoque estructural impulsado desde la *Cowles Commission* y el enfoque de series temporales, que recibe su primera sistematización en el libro de Box y Jenkins (1970, 1976).

Por razones de espacio y por la vinculación con el núcleo fundamental de la tesis, solo se va a prestar atención a lo que consideramos hechos relevantes de la segunda tradición. En el trabajo de Diebold (1999) puede encontrarse un estudio paralelo de los dos enfoques.

Lo que consideramos hitos importantes dentro de la segunda tradición que llevan al nuevo paradigma serían los siguientes: Box y Jenkins (1970, 1976), Granger y Newbold (1974), Sims (1980), Engle y Granger (1987) y Johansen (2006). En los dos primeros libros se presentan de forma sistemática los instrumentos, modelos y procedimientos de contraste que permiten especificar, estimar y chequear el modelo propuesto para una serie temporal particular. A lo largo de los capítulos de estos libros, aparecen los diferentes modelos ARIMA, las funciones de autocovarianza y autocorrelación, los procedimientos de contraste, etc. En Granger y Newbold (1974, Capítulo 6), aparece tratado el tema de la correlación espúrea que jugará un papel muy importante en el nuevo paradigma. En Sims (1980), el enfoque de series temporales se extiende al tratamiento simultáneo de varias variables, desarrollando el modelo VAR. Este autor parte de lo que él entiende son limitaciones del enfoque estructuralista, en particular, el problema de la identificación y la distinción entre variables endógenas y exógenas, cuya solución es totalmente arbitraria dentro del enfoque tradicional. La toma en consideración del modelo VAR resuelve ambos problemas ya que todas las variables son endógenas. A partir de su trabajo, el modelo VAR se ha convertido en uno de los instrumentos más utilizados en Econometría. En Engle y Granger (1987) se tratan los dos conceptos claves en la nueva metodología: la cointegración y el modelo con mecanismo de corrección del error (MCE). La cointegración está asociada con la idea de una relación fuerte entre dos o más variables con tendencias estocásticas: si la tendencia estocástica de una de las variables es explicada por la tendencia de otra variable entonces podemos hablar de una relación

fuerte entre ambas variables. Diremos que las dos variables están cointegradas. Si dos o más variables están cointegradas, el modelo VAR de las variables en niveles está sobreparametrizado y requiere dar entrada a las restricciones impuestas por la cointegración. La introducción de las restricciones en el modelo VAR nos lleva al modelo MCE. Johansen (2006) puede considerarse como el libro de texto de toda esta metodología, donde reciben un tratamiento completo y sistematizado todos los desarrollos relacionados con la cointegración y el modelo MCE. Podemos considerar los trabajos de Engle y Granger (1987) y Johansen (2006) como la materialización del nuevo paradigma de cómo hacer Econometría. Y, en este nuevo paradigma, la determinación de si una serie temporal tiene o no tendencia estocástica, es o no estacionaria, tiene o no una raíz unitaria, es o no integrada, juega un papel fundamental a la hora de especificar un modelo econométrico. Por esta razón, en los últimos 30 años, ha habido un gran desarrollo de técnicas dedicadas a contrastar el nivel de integración de una serie temporal dada.

Un estudio panorámico de la mayor parte de todas estas técnicas anteriores puede encontrarse en Maddala y Kim (1998), Phillips y Xiao (1998), Stock (1999), Haldrup y Jansson (2006) y Patterson (2010, 2011). En este trabajo proponemos estudiar solo algunos aspectos del proceso de determinación del orden de integración.

Para justificar la propuesta que hacemos, vamos a analizar con cierto detalle varios trabajos que, dentro de la extensa literatura sobre el tema, consideramos importantes por alguna de estas dos razones: o bien, porque en esos trabajos se proponen nuevos contrastes que han tenido un protagonismo sobresaliente, o bien, porque en los trabajos se lleva a cabo una ordenación de los criterios según diversos aspectos de los mismos. Los trabajos que vamos a analizar son: Dickey y Fuller (1979), Phillips y Perron (1988), Elliott *et al.* (1996), Perron y Ng (1996), Stock (1999) y Ng y Perron (2001). El comentario-resumen de cada uno de estos trabajos incluye resultados asintóticos que, por razones de espacio, no se demuestran. La mayor parte de estos resultados pueden verse en Hamilton (1994) y en Phillips y Perron (1988), para cuando se esté considerando una hipótesis alternativa local.

Aunque sobre cualquier tema siempre se pueden encontrar antecedentes, no cabe duda de que el artículo Dickey y Fuller (1979) constituye el punto de arranque de toda esta literatura. Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = d_t + v_t \tag{1}$$

$$v_t = \rho v_{t-1} + u_t \tag{2}$$

donde d_t representa la parte determinista del modelo. En este trabajo, consideraremos tres especificaciones para esta parte determinista:

$$M_0: d_t = 0$$

$$M_\mu: d_t = \delta_0$$

$$M_\tau: d_t = \delta_0 + \delta_1 t$$

y donde u_t es una perturbación aleatoria cuyas propiedades se establecerán a lo largo de la presentación.

Suponemos, en primer lugar, un modelo que no tiene elementos deterministas (M_0) cuya observación inicial es $y_0 = 0$ y la perturbación $u_t = \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. En este modelo, se trata de contrastar la hipótesis nula

$$H_0: \rho = 1$$

frente a la alternativa

$$H_1: \rho < 1$$

El estadístico de contraste es el siguiente:

$$t_{\hat{\rho}} = \frac{\hat{\rho} - 1}{\hat{\sigma}_\varepsilon / \sqrt{\sum_{t=2}^T y_{t-1}^2}} \quad (3)$$

en donde

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T y_{t-1} y_t}{\sum_{t=2}^T y_{t-1}^2} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = T^{-1} \sum_{t=2}^T (y_t - \hat{\rho} y_{t-1})^2$$

La distribución asintótica del estadístico de contraste, bajo la hipótesis nula de una raíz unitaria, toma la forma siguiente

$$t_{\hat{\rho}} \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r) dW(r)}{\sqrt{\int_0^1 W(r)^2}} \quad (4)$$

en donde “ \xrightarrow{d} ” denota convergencia en distribución y $W(r)$ se define como un movimiento Browniano o proceso de Wiener.

A partir de esta expresión, se pueden calcular los puntos críticos y especificar la región crítica correspondiente. Hay que destacar que la distribución asintótica no depende de ningún parámetro contaminante (*nuisance*). Pero este resultado se debe a las hipótesis restrictivas correspondientes a la perturbación aleatoria de la relación escrita en (2). Supongamos ahora que el término de la perturbación aleatoria del modelo se define como

$$u_t = \psi(L)\varepsilon_t \quad (5)$$

en donde $\psi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j$ es un polinomio de retardos cuyos coeficientes cumplen la siguiente condición: $\sum_{j=1}^{\infty} j |\psi_j| < \infty$. En este caso, la distribución límite del estadístico de contraste, bajo la hipótesis nula, es

$$t_{\hat{\rho}} \xrightarrow{d} \frac{\lambda \int_0^1 W(r) dW(r) + \omega}{\sigma_u \sqrt{\int_0^1 W(r)^2 dr}} \quad (6)$$

donde $\omega = (\lambda^2 - \sigma_u^2) / 2\lambda^2$, $\sigma_u^2 = E(u_t^2) = \sigma^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 \right)$ es la varianza de u_t y $\lambda^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \right)^2$ es la varianza a largo plazo de u_t . Notar que, en este caso, la distribución asintótica sí que

depende de parámetros contaminantes. Una primera solución a este problema, la proporcionaron los mismos Dickey y Fuller, proponiendo estimar no el modelo escrito en (2) sino un modelo ampliado por los retardos del incremento de la serie temporal. El nuevo modelo propuesto es el siguiente:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (7)$$

Se demuestra fácilmente que el estadístico t-ratio definido a partir de (7) sigue la misma distribución asintótica escrita en (4). Es lo que puede considerarse como una solución paramétrica.

Una alternativa no paramétrica es la de Phillips y Perron (1988), siguiendo una propuesta previa de Phillips (1987b). El contraste que proponen, similar al t-ratio, es el siguiente:

$$Z_t = \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\lambda}} t_{\hat{\rho}} - \frac{\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}_u^2}{2\sqrt{\hat{\lambda}^2 T^{-2} \sum_{t=2}^T y_{t-1}^2}} \quad (8)$$

Estos autores demuestran que la distribución asintótica de (8) coincide con la escrita en (4). Hay que destacar que, para definir esta expresión, hay que disponer de estimadores de la varianza y de la varianza a largo plazo de u_t , $\hat{\sigma}_u^2$ y $\hat{\lambda}^2$, respectivamente. Si se emplea (7) se necesita información sobre el número de retardos a incluir en la regresión y si se emplea (8) necesitamos saber cómo estimar la varianza a largo plazo.

Stock (1999) propuso una clase de contrastes, llamados contrastes M, que explotan el hecho de que una serie converge con diferentes tasas de normalización bajo la hipótesis nula y bajo la hipótesis alternativa. Ya no se trata de contrastar si una raíz autorregresiva es o no diferente a la unidad, sino de explotar las diferentes tasas de convergencia según sea la hipótesis que se supone subyace al proceso generador de los datos. Los estadísticos de los tres contrastes M son los siguientes:

$$MZ_{\rho} = \frac{T^{-1} y_T^2 - \hat{\lambda}^2}{2T^{-2} \sum_{t=2}^T y_{t-1}^2} \quad (9)$$

$$MSB = \sqrt{\frac{T^{-2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}{\hat{\lambda}^2}} \quad (10)$$

$$MZ_t = Z_t + \frac{1}{2} MSB (\hat{\rho} - 1)^2 \quad (11)$$

Para estimar la varianza a largo plazo, Stock propone dos estimadores. El primero se llama estimador autorregresivo de densidad espectral (*autoregressive spectral density estimator*) o estimador autorregresivo y toma la forma siguiente:

$$\hat{\lambda}_{AR}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\gamma}_j\right)^2} \quad (12)$$

en donde $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ y $\hat{\gamma}_j$, ($j = 1, 2, \dots, k-1$) se estiman a partir de la siguiente regresión:

$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (13)$$

El segundo estimador propuesto por Stock es el estimador $\hat{\omega}^2$, que se basa en las autocovarianzas muestrales de los residuos mínimo cuadrático ordinarios (abreviando dicho procedimiento de estimación por sus siglas en inglés OLS) del modelo autorregresivo escrito en (2). El estimador puede escribirse como:

$$\hat{\omega}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 + 2T^{-1} \sum_{i=1}^{B_T} f\left(\frac{i}{B_T}\right) \sum_{j=i+1}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-j} \quad (14)$$

con $f(x)$ que cumple $f(x) = 0$ para $|x| > 1$ y B_T es el parámetro de ancho de banda o *bandwidth*, que proporciona el tope máximo del número de autocovarianzas que entran en el estimador. Stock relaciona los contrastes que propone con los propuestos en Sargan y Bhargava (1983) y Bhargava (1986) y los comentados anteriormente de Phillips y Perron (1988). Además, deriva las propiedades asintóticas de los tres contrastes, bajo la hipótesis nula y considerando una hipótesis alternativa local. Por último, presenta los resultados de un estudio de Monte Carlo en el que compara el comportamiento en muestras finitas de los tres contrastes que propone con el que corresponde al contraste de Dickey-Fuller (contraste DF en adelante), los de Phillips y Perron (1988), de ahora en adelante PP, y otros dos contrastes, que son casos particulares de la formulación general que Stock utiliza para hacer su propuesta. El modelo que utiliza para generar los datos es

$$\begin{aligned} (1 - \rho L)y_t &= u_t \\ u_t &= \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \end{aligned} \quad (15)$$

La conclusión a la que llega Stock es que el mejor comportamiento corresponde a los contrastes tipo M, porque tienen buenas propiedades en términos de potencia y no presentan las distorsiones en tamaño que afectan a los otros contrastes.

Perron y Ng (1996) parten de un resultado obtenido en otros trabajos que indica que, tanto los contrastes PP como el contraste DF sufren, más los primeros que los segundos, distorsiones severas de tamaño cuando la perturbación aleatoria sigue un proceso de medias móviles con un parámetro negativo próximo a la unidad. Estos dos autores, tratan de dar cuenta de este hecho, derivando las propiedades de los contrastes suponiendo escenarios con alternativas locales asumiendo que la perturbación aleatoria sigue un proceso autorregresivo o de medias móviles con parámetros próximos a la unidad. El primer modelo que consideran es lo que llaman caso casi-integrado, casi ruido-blanco (*nearly-white-noise, nearly-integrated case*), y que podemos escribir como:

$$\begin{aligned} y_t &= (1 + cT^{-1})y_{t-1} + u_t \\ u_t &= \varepsilon_t + \theta_T \varepsilon_{t-1} \\ \theta_T &= -1 + \delta T^{-1/2} \end{aligned} \quad (16)$$

en donde, la raíz de la parte autorregresiva tiende a la unidad y la raíz de la parte media móvil se aproxima a -1 cuando $T \rightarrow \infty$. Además, c es una constante, $c < 0$, y $\delta > 0$. El segundo de los modelos es lo que llaman modelo doblemente integrado (*nearly-twice integrated case*), y podemos escribirlo así:

$$\begin{aligned} y_t &= (1 + cT^{-1})y_{t-1} + u_t \\ u_t &= (1 + \phi T^{-1})u_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \tag{17}$$

con $\phi < 0$. El resultado al que llegan, a partir de dichos modelos, es que las distorsiones en tamaño se mantienen sea cual sea el estimador de la varianza a largo plazo empleado, aunque la distorsión es menor si se utiliza el estimador autorregresivo definido en (12). Los peores resultados se obtienen con el estimador kernel definido en (14).

Un segundo resultado al que llegan estos autores es que los contrastes tipo M, propuestos en Stock (1999), mejoran las propiedades, especialmente en lo que se refiere a las distorsiones en el tamaño empírico. Pero estas mejoras se alcanzan siempre que se utilice el estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo y no el estimador kernel. Por lo tanto, parece claro que es muy relevante el estimador de la varianza a largo plazo que se utilice.

Elliott *et al.* (1996), ERS en adelante, proponen una nueva clase de contrastes, llamados tipo P, que son contrastes puntuales óptimos en el sentido de Neyman-Pearson. Consideran un marco de alternativas locales de la clase $\rho_c = 1 + c/T$, y definen un concepto muy importante, la envolvente de potencia (*power envelope*), que establece la potencia máxima que un contraste puede alcanzar para cada valor del parámetro bajo la hipótesis alternativa. Esa envolvente se obtiene calculando, para cada valor bajo la alternativa, la potencia correspondiente al contraste puntual óptimo de acuerdo con Neyman-Pearson. Se dice que un contraste es casi-eficiente (*near efficient*) si la potencia que proporciona para cada valor bajo la hipótesis alternativa no está lejos del valor correspondiente a la envolvente.

Para definir el contraste tipo P elegimos un valor concreto del parámetro de interés, $\rho_{\bar{c}} = 1 + \bar{c}/T$, siendo $\bar{c} < 0$ y, definimos la siguiente “cuasi-diferenciación” de los datos:

$$y^{\bar{c}} = (y_1, y_2 - \rho_{\bar{c}}y_1, \dots, y_T - \rho_{\bar{c}}y_{T-1})' \tag{18}$$

$$Z^{\bar{c}} = (z_1, z_2 - \rho_{\bar{c}}z_1, \dots, z_T - \rho_{\bar{c}}z_{T-1})' \tag{19}$$

en donde $d_t = \delta' z_t$ y z_t es el vector determinista, que en el modelo más amplio será $z_t = (1, t)'$ para $t = 1, 2, \dots, T$. Sea entonces $S(\rho_{\bar{c}})$ la suma de cuadrados de los residuos OLS en la regresión de $y^{\bar{c}}$ sobre $Z^{\bar{c}}$, el estadístico P_T se define así:

$$P_T = \frac{S(\rho_{\bar{c}}) - \rho_{\bar{c}}S(1)}{\hat{\lambda}^2} \tag{20}$$

Cuando δ es conocido, la definición del estadístico no precisa de ninguna regresión y $\rho_{\bar{c}}$ se define directamente.

Estos autores demuestran que, bajo la hipótesis nula, la distribución límite de este estadístico, en el caso sin tendencia lineal, viene dada por

$$\bar{c}^2 \int W^2(s) - \bar{c}W^2(1)$$

y, la función de potencia

$$\pi(c, \bar{c}) \equiv \Pr \left(\bar{c}^2 \int W_c^2 - \bar{c}W_c^2(1) < b(\bar{c}) \right)$$

donde W_c es un proceso definido en Phillips (1987b) y $b(\bar{c})$ satisface

$$\Pr \left(\bar{c}^2 \int W^2 - \bar{c}W^2(1) < b(\bar{c}) \right) = \epsilon$$

Teniendo en cuenta que el contraste correspondiente a \bar{c} es óptimo frente a la alternativa $c = \bar{c}$, la función envolvente de esta familia viene dada por $\Pi(c) = \pi(c, c)$.

Estos autores también proponen una modificación del contraste DF basada en los datos transformados. Se define $y_t^d = y_t - \hat{\delta}' z_t$ en donde $\hat{\delta}$ se obtiene de la regresión de $y^{\bar{c}}$ sobre $Z^{\bar{c}}$. Entonces, el estadístico de Dickey-Fuller (que llaman DF_{GLS}) es el que se obtiene aplicando el t-ratio en la siguiente regresión:

$$\Delta y_t^d = \rho y_{t-1}^d + \gamma_1 \Delta y_{t-1}^d + \dots + \gamma_p \Delta y_{t-p}^d + \varepsilon_t \quad (21)$$

Para aplicar este contraste es necesario determinar, previamente, el número de retardos a incluir en el modelo.

Hay que destacar que, cada contraste P_T es un contraste puntual óptimo y tiene una curva de potencia asintótica que es tangente a la envolvente de potencia en un punto. Notar, además, que hay tantos contrastes tipo P como valores de \bar{c} entre cero y uno, y que, dado el tamaño muestral y el nivel de significación nominal, existe una correspondencia biunívoca entre el valor de \bar{c} y la potencia. Por lo tanto, podemos caracterizar cada contraste tipo P por la potencia que le corresponde, pudiéndose escribir:

$$P_T(\pi) = \frac{S[\bar{c}(\pi, T, \epsilon)] - \bar{c}(\pi, T, \epsilon)S(1)}{\hat{\lambda}^2} \quad (22)$$

Tal y como indican ERS, aunque cualquier miembro de esta familia es admisible, resultados previos muestran que valores de π en torno al 0.5, o equivalentemente, valores de $\bar{c} = -7.0$, si el modelo no tiene tendencia lineal o $\bar{c} = -13.5$, si tiene tendencia lineal, proporcionan contrastes cuya función de potencia está próxima a la envolvente.

En ERS, se estudian las relaciones existentes entre esta familia de contrastes y otros como el propuesto por Sargan y Bhargava (1983) y el contraste DF. Mediante un análisis gráfico, comparan las curvas de potencia de cinco contrastes (tres versiones del DF, el de Sargan y Bhargava y el $P_T^{\mu}(0.5)$) con la envolvente. También realizan un estudio de Monte Carlo suponiendo para la perturbación aleatoria diferentes modelos $AR(p)$ y $MA(q)$, según los valores tomados por los correspondientes parámetros. Finalmente, llegan a dos conclusiones. Primera, queda de manifiesto la superioridad de los contrastes GLS que estiman los parámetros de la parte determinista

asumiendo un planteamiento local. Se ve con claridad que el P_T y el DF_{GLS} tiene una potencia ajustada por el tamaño más alta que la que tienen los contrastes estándar DF. La segunda conclusión es que la elección que se haga del estimador de la varianza a largo plazo es muy importante y, parece claro, que el estimador autorregresivo proporciona mejores resultados que el estimador kernel.

Ng y Perron (2001) parten de dos problemas ampliamente ilustrados en la literatura. El primero, se refiere a que la mayoría de los contrastes tienen una potencia muy baja cuando la raíz del polinomio autorregresivo se aproxima a la unidad. El segundo, hace referencia a que la mayor parte de los contrastes sufren de distorsiones en el tamaño cuando el polinomio de medias móviles de la primera diferencia de la serie temporal tiene una raíz negativa grande. El objetivo de su trabajo es doble. Por un lado, aumentar la potencia de los contrastes que ellos consideran son los menos afectados por los problemas de la distorsión en el tamaño, contrastes tipo M, utilizando datos tras aplicarles la transformación GLS que subyace a la expresión escrita en (21). El segundo objetivo es derivar un nuevo procedimiento para determinar el número de retardos (*truncation lag*). Su punto de partida son los criterios de información AIC y BIC, los cuales, estos autores comprueban que subestiman el coste de elegir un número pequeño de retardos cuando el polinomio de medias móviles tiene una raíz grande y negativa. Para intentar solucionar este problema, proponen una nueva clase de criterios modificados que denominan *Modified Information Criteria* (MIC) y que dependen de un factor de que penaliza en función de la muestra de que se disponga. Estos autores concluyen que la combinación del procedimiento de “cuasi-diferenciación” GLS de los datos y el uso de la clase de criterios MIC llevan a contrastes con sustanciales mejoras en tamaño y potencia.

Una parte importante del trabajo de estos dos autores está dedicada a derivar el nuevo criterio para determinar el número de retardos, el criterio MIC. Primero, muestran como el uso de dicho criterio determina un número mayor de retardos y luego derivan las propiedades asintóticas del mismo.

Un aspecto importante del trabajo es que aparecen nuevos elementos en las cuatro familias de contrastes descritos previamente: DF, PP, tipo M y tipo P.

Así, por ejemplo, aparecen los contrastes DF_{GLS} , PP_{GLS} , M_{GLS} y P_T^{GLS} . Estos criterios se distinguen porque se aplican a datos GLS transformados. Si, además, la varianza a largo plazo se estima con este tipo de datos obtenemos los contrastes \overline{PP}_{GLS} , \overline{M}_{GLS} y \overline{P}_T^{GLS} . También, es posible distinguirlos según sea el criterio utilizado para determinar el número de retardos; por ejemplo, se distinguirán entre los criterios DF_t^{GLS} , DF_{MIC}^{GLS} y DF_{BIC}^{GLS} . Puede hablarse de una quinta familia de contrastes, que llaman MP y que, para el caso del modelo con una constante, podemos escribir como:

$$MP_T^{GLS} = \frac{\bar{c}^2 T^{-2} \sum_{t=1}^T (y_{t-1}^d)^2 - \bar{c} T^{-1} (y_T^d)^2}{\hat{\lambda}_{AR}^2} \quad (23)$$

en donde el estimador de varianza a largo plazo $\hat{\lambda}_{AR}^2$ queda definido como en (12).

Realizada esta revisión de lo que consideramos trabajos más relevantes, sin pretender haberlo recogido todo, vamos a realizar un resumen de lo que entendemos es hoy el estado de la cuestión sobre el tema.

En primer lugar, podemos hablar de al menos cuatro grandes familias de contrastes: la primera, constituida por los contrastes DF (en su versión estándar y aumentada) propuestos por Dickey y Fuller (1979). La segunda familia son los contrastes PP propuestos por Phillips y Perron (1988). La tercera está constituida por los contrastes tipo M propuestos en Stock (1999) y la última familia se compone de los criterios tipo P propuestos en Elliott *et al.* (1996). Los contrastes de la primera familia son paramétricos en el sentido de que requieren para su definición un modelo explícitamente formulado con la correspondiente estructura probabilística. Los correspondientes a las otras tres familias son no paramétricos o semiparamétricos, dependiendo de si para estimar la varianza a largo plazo se utiliza el estimador kernel o el estimador autorregresivo.

En segundo lugar, dentro de cada una de estas cuatro familias, se pueden distinguir subfamilias atendiendo a diferentes aspectos: la forma que adoptan los elementos deterministas, el tipo de transformación de datos que se utiliza, el estimador de la varianza a largo plazo que se use y el procedimiento utilizado para determinar el número de retardos. La presencia de elementos deterministas condiciona el modelo en el que se define el estadístico del contraste. Al comienzo de este trabajo, hemos hecho referencia a los tres modelos más habituales contemplados en la literatura: modelo sin elementos deterministas, modelo solo con una constante y modelo con constante y tendencia lineal temporal. Esto no agota todas las posibilidades de especificar la parte determinista. Lo que es más importante es que cada una de estas especificaciones, requiere una formulación diferente del estadístico. Así, por ejemplo, centrándonos en la familia de contrastes de Dickey-Fuller y limitándonos a las versiones más conocidas, tenemos tres estadísticos que escribimos como DF , DF^μ y DF^τ , el primero para un modelo sin elementos deterministas, el segundo para un modelo que solo tiene una constante y el tercero para un modelo con constante y tendencia lineal.

Respecto a la transformación de los datos, cabe hablar de la transformación estándar y de la transformación GLS propuesta en ERS. En el planteamiento estándar, los datos sólo se transforman para tratar la presencia de términos deterministas. Si el modelo de contraste no tiene elementos deterministas, entonces los datos no son transformados. La transformación GLS ha sido descrita en (18) y (19) y requiere la especificación de un valor concreto del parámetro de interés, $\rho = \rho_{\bar{c}}$. En este caso, la versión estándar no recibe una distinción especial mientras que la versión basada en la transformación GLS se escribe como DF_{GLS} .

El estimador de la varianza a largo plazo aparece en el denominador de los estadísticos de los contrastes no paramétricos. En este trabajo hemos considerado dos clases de estimadores, el autorregresivo y el kernel, escritos en (12) y (14), respectivamente. Cada uno de ellos, a su vez, admite diferentes formulaciones dependiendo, en el caso autorregresivo, del número de retardos y, en caso del kernel, de la ventana espectral utilizada así como del parámetro de ancho de banda elegido. Hemos visto que la elección del estimador de la varianza a largo plazo juega un papel importante en las propiedades de los contrastes resultantes. En general, como puede verse en los trabajos de Phillips y Perron (1988) y en Elliott *et al.* (1996), parece que las mejores propiedades se obtienen utilizando el estimador autorregresivo.

En lo que respecta a la determinación del número de retardos, en la literatura se han propuesto muchos procedimientos para contrastar la significatividad del parámetro del último retardo pero, tal como puede verse en Aznar (1989) y Aznar y García-Olaverri (2002), todo queda reducido a especificar el factor de penalización o, equivalentemente, el nivel de significación. Tiene gran interés, la propuesta realizada por Ng y Perron (2001) de un criterio de información cuyo factor de penalización depende de la muestra y, en particular, de la presencia de una raíz unitaria.

En este caso, podemos escribir DF_t , DF_{AIC} , DF_{BIC} y DF_{MIC} , según que el criterio utilizado sea, respectivamente, la *t-Student* de forma secuencial, los criterios de información AIC y BIC o los nuevos criterios de información MIC propuestos por Ng y Perron (2001).

En tercer lugar, se han establecido criterios para establecer una ordenación de los contrastes según el *trade-off* de tamaño y potencia que les correspondan. Es importante destacar que la hipótesis alternativa es compuesta, por lo que la calidad de un contraste hay que establecerla prestando atención a la función de potencia, habiendo especificado previamente el nivel de significación y, no solo a la potencia correspondiente a un valor concreto bajo esa hipótesis alternativa. En este sentido, la propuesta más elaborada es la que formulan ERS en torno al concepto de función de potencia envolvente. Esta función nos da la máxima potencia que puede alcanzarse siguiendo el enfoque de Neyman-Pearson para el caso de una hipótesis nula simple frente a una hipótesis alternativa, que también es simple. Parece claro, que esta envolvente no puede ser alcanzada por ningún contraste, pero la calidad de los contrastes se puede establecer por el grado de proximidad a la misma. El mejor contraste, el contraste casi-eficiente (*near-efficient*), será aquel que tenga una función de potencia que se aproxime más a la envolvente.

Lo comentado hasta el momento, puede considerarse el tronco común a partir del cuál se han desarrollado diferentes ramas como consecuencia de prestar atención a determinados aspectos particulares. Entre estos aspectos, cabe destacar:

- La doble raíz unitaria
- Raíz unitaria estacional
- Procesos fraccionales
- Raíz unitaria en datos tipo panel
- Raíz unitaria en series acotadas
- Influencia del tamaño de la observación inicial.

Todos estos temas tienen un gran interés y han recibido mucha atención en la literatura como puede verse en los trabajos panorámicos comentados anteriormente. Nosotros, en este trabajo, nos centramos en el último de los puntos, la influencia del tamaño de la observación inicial. El punto de arranque de esta línea es Elliott (1999). En este trabajo, se propone un nuevo proceso generador de los datos en el que, bajo una hipótesis alternativa local, el valor inicial se extrae de su distribución no condicionada. También, se propone un nuevo contraste puntual óptimo que se diferencia de los anteriores porque se transforma el valor inicial de las variables que entran en la definición del estadístico del contraste. Por último, para el nuevo marco, deriva las propiedades asintóticas del nuevo contraste y de otros propuestos en la literatura.

A partir de la aportación de Elliott (1999) se han desarrollado dos grandes corrientes con dos objetivos: primero, conocer como se ve influida la potencia de los contrastes cuando cambia el tamaño de la observación inicial y, segundo, encontrar contrastes robustos en el sentido de que su función de potencia no cambie cuando lo hace el tamaño de la observación inicial.

La primera corriente arranca en Elliott (1999) y luego se extiende en Müller y Elliott (2003) y Elliott y Müller (2006). Lo que distingue la propuesta de estos autores es que asumen una

distribución de probabilidad a priori para el valor inicial, cuya varianza depende de un parámetro κ , que representa una función de ponderación¹. El estadístico resultante, que llaman $Q(\bar{c}, \kappa)$, depende de dos parámetros: \bar{c} , que elige el valor concreto bajo la hipótesis alternativa y, κ , que entra en la varianza. Müller y Elliott (2003) derivan la distribución asintótica de este contraste en su Teorema 3 y demuestran que, cuando κ toma un valor finito la potencia decrece con el tamaño del valor inicial, mientras que si $\kappa \rightarrow \infty$, entonces la potencia cambia a una pauta creciente. Para evitar esta dependencia Elliott y Müller (2006) demuestran que es posible encontrar un valor de κ , que depende de \bar{c} , para el que el contraste $Q(\bar{c}, \kappa)$ se hace robusto respecto al valor inicial. En concreto, para un modelo con tendencia lineal y con $\bar{c} = -15$ el valor de κ que hace que el contraste $Q(\bar{c}, \kappa)$ sea robusto es $\kappa_{\star} = 3.968$.

La segunda corriente, Harvey y Leybourne (2005, 2006) y Harvey *et al.* (2009), abarca una serie de estrategias en las que se combina el contraste DF_{OLS} con otros contrastes. La razón de que el contraste DF_{OLS} tenga un papel pivotal se debe a que, aunque su potencia es baja cuando el valor inicial es pequeño, cuando este valor se va haciendo grande la potencia del DF_{OLS} crece también y no sigue la pauta decreciente seguida por la mayor parte de los otros contrastes.

Harvey y Leybourne (2005) proponen un contraste que es un promedio de los contrastes DF_{OLS} y DF_{GLS} . La ponderación es una función exponencial (los autores destacan que puede ser de otro tipo) de la desviación de la primera observación respecto a una tendencia lineal estimada. Pese a que esta estimación no es consistente, los autores comentan las razones que justifican su uso. El resultado es un contraste que mejora la baja potencia del DF_{OLS} cuando el valor inicial es pequeño pero que es más robusto e incluso muestra una pauta creciente de su potencia, cuando el tamaño de la observación inicial se hace mayor.

Harvey y Leybourne (2006) proponen promediar el contraste DF_{OLS} y el contraste puntual óptimo $Q(\bar{c}, \kappa)$ de Elliott y Müller (2006). La forma de ponderar es similar a la comentada anteriormente y se llega a un contraste con una potencia similar a la obtenida para el contraste-promedio anterior.

Por último, Harvey *et al.* (2009) proponen combinar los contrastes DF_{OLS} y DF_{GLS} pero no promediando, sino utilizando lo que llaman la “unión de rechazos”. En primer lugar, se contrasta la hipótesis nula utilizando el contraste DF_{GLS} (1ª etapa); si la hipótesis nula no se rechaza, entonces se contrasta esa hipótesis utilizando el contraste DF_{OLS} (2ª etapa). La hipótesis nula es rechazada si se rechaza en cualquiera de las dos etapas; en otro caso se mantiene. Un aspecto importante del proceso resultante es que el tamaño empírico es mayor que el tamaño teórico adoptado, por lo que proponen modificar los puntos críticos mediante un ejercicio de simulación. El contraste resultante mejora la potencia del contraste DF_{OLS} cuando el valor inicial es pequeño y evita la pauta decreciente cuando ese tamaño se va haciendo grande.

Por lo tanto, tenemos cuatro propuestas de contrastes con una potencia razonable y que son robustos con respecto al tamaño del valor inicial.

¹Dependiendo del valor que tome el parámetro, la varianza no condicional se pondera de manera diferente y como consecuencia, la familia de estadísticos $Q(\bar{c}, \kappa)$ coincidirá con el estadístico de Elliott *et al.* (1996) si $\kappa = 0$, y de Elliott (1999) si $\kappa = 1$.

Resumen del contenido

Como ya hemos indicado, la tesis tiene dos partes con dos capítulos cada una de ellas. La primera parte está dedicada a estudiar las propiedades, asintóticas (Capítulo 1) y en muestras pequeñas (Capítulo 2), del contraste MSB escrito en (10). La razón de elegir este contraste frente a los otros dos tipo M es porque es el más simple de los tres y parece disfrutar de buenas propiedades. Se trata de estudiar sus propiedades comparándolas con las de otros contrastes, con especial referencia a la distancia de su función de potencia respecto a la envolvente. Se pretende llevar a cabo un ejercicio de valoración exhaustivo, considerando diferentes estimadores de la varianza a largo plazo, diferentes transformaciones de los datos y diferentes formas de determinar el número de retardos en el modelo de contraste.

El contraste MSB que vamos a estudiar es el escrito en (10) que, teniendo en cuenta el marco general que queremos adoptar para llevar a cabo su evaluación, podemos reescribirlo de la siguiente forma

$$\text{MSB}_l^{i,j} = \sqrt{\frac{T^{-2} \sum_{t=1}^T (v_{t-1}^{i,j})^2}{\hat{\lambda}^2}} \quad (24)$$

El superíndice i hace referencia a la transformación de los datos que se ha adoptado. No se indica cuando se utiliza la transformación estándar basada en los estimadores OLS y se hace igual a GLS cuando se toman datos GLS transformados. El superíndice j se refiere a la forma del elemento determinista en el modelo; puede tomar tres signos: 0, μ y τ , según que el modelo no tenga elementos deterministas, tenga solo una constante o tenga una constante y una tendencia lineal temporal. Por último, el subíndice l se refiere al tipo de estimador de la varianza a largo plazo utilizado, limitando nuestra atención a los dos comentados a lo largo de esta introducción: el estimador autorregresivo ($l = \text{AR}$) y el estimador kernel ($l = \text{K}$).

Por ejemplo,

$$\text{MSB}_{\text{AR}}^{\mu} = \sqrt{\frac{T^{-2} \sum_{t=1}^T (v_{t-1}^{\mu})^2}{\hat{\lambda}_{\text{AR}}^2}}$$

significa que se ha utilizado la transformación estándar de los datos, se considera un modelo que tiene un término constante y se ha utilizado el estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo.

Como ya hemos indicado, en el Capítulo 1 se trata de derivar las propiedades del estadístico escrito en (24). Por ejemplo, cuando se utiliza una transformación estándar, ya se han obtenido esos resultados para algunos de los casos contemplados en la formulación anterior. El propio Stock (1999) ya derivó algunas de estas propiedades en un marco bastante general que luego completaron Perron y Ng (1996).

En el Capítulo 2 se estudian, mediante técnicas de simulación de Monte Carlo, las propiedades en muestras finitas de las diferentes versiones del contraste MSB analizadas en el Capítulo 1. El objetivo de este capítulo es triple. En primer lugar, obtener los puntos críticos, algunos de los cuales ya se han presentado en la literatura. Para ello, se han calculado los correspondientes valores críticos asintóticos a partir de las distribuciones asintóticas obtenidas en el Capítulo 1

bajo la hipótesis nula para diferentes modelos, según sean los elementos deterministas, y para los percentiles 1 %, 5 % y 10 %.

El segundo objetivo ha sido comparar las propiedades en muestras finitas de las diferentes versiones de los dos estimadores de la varianza a largo plazo, el autorregresivo y el kernel. El primero depende del procedimiento que se utilice para determinar el número de retardos del modelo autorregresivo que se utiliza para definir el estadístico del estimador. El segundo depende de dos opciones: el tipo de ventana y el parámetro *bandwidth*. Todas estas opciones dan lugar a diferentes versiones de los estimadores que son las que se comparan en muestras finitas en este Capítulo 2. El tercero de los objetivos es comparar, vía Monte Carlo, las diferentes versiones del contraste MSB para llegar a una conclusión respecto a cual de ellas funciona mejor en muestras finitas y, a continuación, comparar esta versión con los otros contrastes analizados en la sección anterior.

La segunda parte está dedicada, en primer lugar, a analizar los efectos negativos que, sobre la potencia del contraste MSB, tiene la variación del tamaño de la observación inicial y, en segundo lugar, a derivar una versión del contraste MSB que sea robusta ante cambios en el tamaño de la observación inicial.

En el Capítulo 3, se estudian las consecuencias sobre la función de potencia del contraste MSB de un cambio en el tamaño de la observación inicial. A las versiones OLS y GLS de este contraste se añade una nueva versión siguiendo la sugerencia de Elliott (1999) de transformar el valor inicial de las variables que entran en el estadístico. Tenemos, por tanto, tres contrastes y dos procesos generadores de datos, por lo que acabamos en seis casos. Para todos ellos derivamos la distribución asintótica cuando no haya sido derivada en el Capítulo 1. A continuación, se lleva a cabo la simulación de la potencia asintótica de los tres contrastes y la comparación, en muestras finitas, de sus propiedades. La conclusión que se obtiene a partir de todos estos análisis es siempre la misma y bastante negativa: la potencia decrece, en algunos casos muy drásticamente, conforme el tamaño de la observación inicial se hace mayor. La necesidad de derivar una versión robusta parece obvia.

Este es el objetivo del Capítulo 4. Teniendo en cuenta la forma que adopta la perturbación asumiendo la hipótesis de Elliott (1999), parece lógico hacer una transformación previa de los datos de forma que a cada observación de la variable se le reste la observación inicial ponderada según sea el periodo. Utilizando esta transformación, la definición del estadístico MSB es similar a la expuesta en capítulos anteriores. Lo que hacemos es derivar la distribución asintótica del contraste y, a continuación, la simulamos para la hipótesis alternativa local. También estudiamos las propiedades de este contraste en muestras finitas utilizando experimentos de Monte Carlo. La conclusión a la que se llega es que el nuevo contraste es robusto ante cambios en el tamaño de la observación inicial y que, comparando su comportamiento con el observado para los otros cuatro contrastes robustos mencionados en la revisión de la literatura hecha en la sección anterior, el resultado es muy favorable para el nuevo contraste MSB definido en este capítulo.

La tesis termina con una recapitulación de los resultados obtenidos a lo largo de los cuatro capítulos, así como la presentación de las líneas de investigación que se van a seguir en un futuro.

Capítulo 1

El contraste MSB: una revisión de sus propiedades asintóticas

Resumen

En este capítulo, se presentan una serie de desarrollos analíticos correspondientes al contraste de raíz unitaria MSB de Stock (1999) basados en el supuesto que tradicionalmente se ha considerado para la observación inicial de la serie temporal, que consiste en suponer que dicho valor inicial es $O_p(1)$ bajo ambas hipótesis de contraste. En la construcción del estadístico MSB se tienen en cuenta dos tipos de estimadores de varianza a largo plazo: el estimador autorregresivo de densidad espectral o estimador autorregresivo y el estimador kernel. Además, se distinguen dos procedimientos para eliminar la parte determinista del modelo: el procedimiento de Mínimos Cuadrados Ordinarios (abreviado por sus siglas en inglés OLS) y el procedimiento de “cuasi-diferenciación” de Elliott *et al.* (1996) que se denota por GLS. Atendiendo a esta distinción, se derivan los resultados bajo la hipótesis nula y alternativa no local. En estos desarrollos, resultan imprescindibles los resultados proporcionados en las Proposiciones 1 y 2 en el Apéndice matemático.

1.1 Introducción

Este trabajo está dedicado a analizar las propiedades analíticas del estadístico MSB propuesto por Stock (1999) para contrastar si una serie temporal contiene o no una raíz unitaria. Sea entonces la serie $\{y_t\}$ generada de acuerdo con el siguiente modelo estándar en la literatura:

$$\begin{aligned} y_t &= d_t + v_t, & t = 1, \dots, T \\ v_t &= \rho v_{t-1} + u_t, & t = 2, \dots, T \end{aligned} \tag{1.1}$$

en donde el valor inicial cumple la siguiente condición:

Condición 1.1. *Sea $\{y_t\}$ generado en (1.1), bajo la hipótesis nula y alternativa del contraste se tiene que $v_1 = O_p(1)$.*

En nuestro modelo, el término de error cumple la siguiente condición:

Condición 1.2. *Se define el término de error $\{u_t\}$ como una secuencia de términos estocásticos que cumple las condiciones necesarias para ser un proceso lineal estable e invertible en ε_t : (a) $u_t = \psi(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ con $\psi(1)^2 > 0$ y $\sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_j| < \infty$. (b) El proceso estocástico $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y $E|\varepsilon_t|^\nu < k < \infty$ para algún $\nu \geq 4$.*

Los parámetros de varianza a corto y largo plazo están representados por σ^2 y λ^2 respectivamente.

Comentario 1.1. En nuestro análisis, se considera en (1.1) que el proceso estocástico u_t sigue un proceso lineal estable e invertible en ε_t , pero otras alternativas son también posibles. Por ejemplo, se podría haber debilitado las condiciones y planteado una secuencia de martingalas en diferencias (abreviado como *mds*) o diferentes tipos de procesos *mixing* como puede verse, entre otros, en Phillips y Perron (1988).

La varianza a largo plazo de u_t se define como:

$$\lambda^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E \left(\sum_{t=1}^T u_t \right)^2 = \psi(1)^2 \sigma_\varepsilon^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma(j) \tag{1.2}$$

y $\gamma(j) = E(u_t u_{t-j})$ para $j = 0, 1, 2, \dots$. En principio se supone que $\lambda^2 > 0$ con el objeto de evitar distribuciones degeneradas¹. Específicamente, en el caso de errores ruido blanco (i.i.d), el polinomio $\psi(L) = 1$ y, por lo tanto, $\lambda^2 = \sigma_\varepsilon^2$.

En el modelo (1.1), $d_t = z_t' \delta$ donde $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p)'$ es un vector de coeficientes y z_t es un vector de elementos deterministas de forma conocida, esto es, $z_t = (1, t, \dots, t^p)'$. Siguiendo a Ng y Perron (2001), consideramos los casos más relevantes: cuando el modelo generador incluye una constante y una tendencia lineal ($p = 1$) con $z_t = (1, t)'$ y, cuando el modelo solo incluye un término constante ($p = 0$) siendo $z_t = 1$. El primero de ellos se identifica como M_τ y el segundo, como M_μ . El modelo que no contiene elementos deterministas M_0 también se desarrolla en el presente trabajo y se presenta en un apéndice al final del capítulo. El motivo es el siguiente: al tratarse de un modelo sin parte determinista no necesita de ningún proceso de estimación previo para filtrar la serie de estudio y, por eso, no se puede integrar en ninguna de las dos grandes secciones de que consta este primer capítulo, ya que cada una de ellas está dedicada a una metodología de filtrado diferente.

Como ya se ha comentado antes, la primera parte de este trabajo está dedicada a desarrollar un procedimiento para contrastar la hipótesis nula de que la serie $\{y_t\}$ tiene una raíz unitaria

$$H_0: \rho = 1 \tag{1.3}$$

frente a la alternativa de que no la tiene. Las dos hipótesis alternativas estacionarias (local y no local) que vamos a considerar son, respectivamente

$$H_{1,c}: \rho = \rho_c = 1 + c/T \tag{1.4}$$

con $c < 0$, y

$$H_1: \rho = \rho_0 < 1 \tag{1.5}$$

en donde T denota el tamaño de la muestra. Notar, además, que el caso explosivo $\rho > 1$ queda excluido del estudio de esta tesis.

Comentario 1.2. Nuestro enfoque toma como escenario de referencia el marco no estacionario, es decir, cuando se considera la hipótesis nula de raíz unitaria. No obstante, un enfoque distinto es posible. Por ejemplo, se podría haber planteado como caso central la hipótesis alternativa local y entonces, el modelo daría cabida a un gran número de coeficientes autorregresivos atendiendo al valor del parámetro de no centralidad c que mide la desviación con respecto al caso de raíz unitaria. En este sentido, el caso de raíz unitaria puede contemplarse como un caso particular cuando $c = 0$. Esta flexibilidad es una característica importante del proceso generador que permite aplicar de manera similar la teoría asintótica tanto para $c = 0$ como para $c < 0$. Es precisamente este enfoque el que se va a adoptar en los capítulos 3 y 4.

¹En Perron y Ng (1996) por ejemplo, consideran dos opciones para la varianza a largo: a) $\lambda = 0$ y, b) $\lambda = \infty$.

Antes de proseguir, se enuncia un resultado fundamental en el caso de series que contienen una raíz unitaria, el Teorema Funcional Central del Límite (TFCL) nos dice que

$$\frac{y_{[Tr]}}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \lambda W(r) \quad (1.6)$$

en donde $[\cdot]$ se utiliza para denotar la parte entera y $W(r)$ es un proceso estándar de Wiener definido en $\mathcal{C}[0, 1]$. Dicho principio invariante se extiende al caso de raíz unitaria local. Siguiendo a Phillips (1987b) tenemos que

$$\frac{y_{[Tr]}}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \lambda J_c(r) \quad (1.7)$$

siendo $J_c(r)$ un proceso de Ornstein-Uhlenbeck (abreviado OU) generado a partir de la siguiente ecuación estocástica diferencial:

$$dJ_c(r) = cJ_c(r)dr + dW(r)$$

con la condición inicial $J_c(0) = 0$. Así que, cuando $c = 0$, el resultado (1.7) se reduce a (1.6). Sin embargo, cuando estamos trabajando bajo una hipótesis alternativa no local ($\rho_0 < 1$), hemos de aplicar el marco teórico estacionario estándar. Por esto, en nuestro análisis, no planteamos posibles problemas por discontinuidades asintóticas puesto que su tratamiento se aleja del objetivo de la tesis.

El procedimiento que centra el interés de nuestro estudio para contrastar si una serie temporal contiene una raíz unitaria es el contraste MSB propuesto por Stock (1999), cuyo estadístico puede escribirse como:

$$\text{MSB} = \left(\frac{T^{-2} \sum_{t=2}^T \hat{v}_{t-1}^2}{\hat{\lambda}^2} \right)^{1/2} \quad (1.8)$$

en donde \hat{v}_t es la serie libre de elementos deterministas, a la que también nos referiremos a lo largo del trabajo como residuo y , que se calcula así:

$$\hat{v}_t = y_t - z_t' \hat{\delta} \quad (1.9)$$

donde $\hat{\delta}$ es un vector de estimadores de δ . El estimador de la varianza a largo plazo es $\hat{\lambda}^2$ y en este trabajo se consideran dos tipos: el estimador kernel y el estimador autorregresivo como se ha indicado anteriormente. Así, el estadístico escrito en (1.8) puede adoptar diferentes formas atendiendo al modelo utilizado para eliminar los elementos deterministas de la serie y al estimador de la varianza a largo plazo utilizado.

A continuación, se van a presentar unos primeros resultados que van a permitir introducir más adelante los dos estimadores de varianza a largo y discutir su comportamiento asintótico. Partiendo de (1.1) y considerando que la estructura de u_t está dada en el apartado *a*) de la Condición 1.2, se puede escribir

$$\Delta v_t = \phi_1^* \Delta v_{t-1} + \phi_2^* \Delta v_{t-2} + \dots + \phi_p^* \Delta v_{t-p} + \phi^* v_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.10)$$

que, en forma matricial, queda

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon \quad (1.11)$$

en donde $\boldsymbol{\beta} = (\phi_1^*, \dots, \phi_p^*, \phi^*)'$, \mathbf{X} una matriz de observaciones de orden $T \times (p + 1)$ donde $\mathbf{x}_t = (\Delta v_{t-1}, \Delta v_{t-2}, \dots, \Delta v_{t-p}, v_{t-1})'$. Para más detalle, consultar la Proposición 1 en el Apéndice matemático. Como se puede deducir de la mencionada proposición, los p coeficientes en el lado derecho del modelo (1.10) se definirán de acuerdo con la hipótesis considerada en cada caso y que quedarán detallados convenientemente.

Entonces, la serie filtrada y diferenciada se puede escribir así:

$$\Delta \hat{v}_t = \Delta v_t + \Delta z_t'(\delta - \hat{\delta}) = \Delta v_t + h_t \quad (1.12)$$

Asimismo, nos resulta útil escribir

$$\begin{aligned} \Delta \hat{v} &= \Delta \mathbf{v} + \mathbf{h} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon + \mathbf{h} \\ &= \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})\boldsymbol{\beta} + \varepsilon + \mathbf{h} \\ &= \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{w} \end{aligned} \quad (1.13)$$

en donde $\tilde{\mathbf{X}}$ es una matriz $T \times (p + 1)$ de observaciones con $\tilde{\mathbf{x}}_t = (\Delta \hat{v}_{t-1}, \Delta \hat{v}_{t-2}, \dots, \Delta \hat{v}_{t-p}, \hat{v}_{t-1})'$ y $\boldsymbol{\beta}$ un vector $(p + 1) \times 1$ de coeficientes. La forma aquí adoptada por el término \mathbf{h} depende del modelo especificado en cada caso. La expresión para la observación t -ésima de (1.13) viene dada por

$$\Delta \hat{v}_t = \tilde{\mathbf{x}}_t' \boldsymbol{\beta} + w_t \quad (1.14)$$

Entonces, el primer tipo de estimador de varianza a largo plazo que se va a estudiar, se construye siguiendo a Stock (1999) y a Perron y Ng (1996):

$$\hat{\lambda}_{\text{AR}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_w^2}{[1 - \hat{\phi}^*(1)]^2} \quad (1.15)$$

en donde $\hat{\sigma}_w^2 = (T - p)^{-1} \sum_{t=p+1}^T \hat{w}_t^2$ y $\hat{\phi}^*(1) = \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i^*$, obtenidos ambos de la estimación OLS de (1.13), cuya expresión t -ésima es

$$\Delta \hat{v}_t = \sum_{i=1}^p \phi_i^* \Delta \hat{v}_{t-i} + \phi^* \hat{v}_{t-1} + w_t \quad (1.16)$$

Como ya se ha avanzado anteriormente, el otro estimador de la varianza a largo plazo que se va a emplear en el estudio es el estimador kernel. Este estimador se construye por defecto a partir de las autocovarianzas muestrales como muestran Perron y Ng (1998) entre otros y, que se escribe como sigue:

$$\hat{\omega}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 + 2 \sum_{j=1}^{B_T} f(B_T) T^{-1} \sum_{t=j+1}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-j} \quad (1.17)$$

La ventana espectral escogida para nuestro análisis es la ventana de Bartlett, que viene representada por $f(B_T)$ y, además de satisfacer las condiciones expuestas en Andrews (1991), asume $f(x) = 0$ para $|x| > 1$:

$$f(B_T) = 1 - \left(\frac{j}{B_T} \right) \quad (1.18)$$

para $j = 0, 1, \dots, p$. El parámetro de *bandwidth* (o de truncamiento) es B_T y satisface la siguiente condición:

Condición 1.3. *Asintóticamente, $B_T/T \rightarrow 0$ con $B_T \rightarrow \infty$.*

Comentario 1.3. La consideración de los argumentos de Newey y West (1987) en la ventana de Bartlett nos permite obtener estimaciones del parámetro de relación a largo plazo estrictamente positivas.

Este estimador puede adoptar diferentes formas según sea la ventana espectral, el *bandwidth* y el tipo de residuos considerados. En este trabajo, se va a considerar la primera diferencia de los residuos en lugar de emplear los residuos en su forma originaria (1.17), esto es, se impone la hipótesis nula en la construcción de tales residuos para obtener el siguiente estimador:

$$\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \Delta\hat{v}_t^2 + 2 \sum_{j=1}^{B_T} f(B_T) T^{-1} \sum_{t=j+1}^T \Delta\hat{v}_t \Delta\hat{v}_{t-j} \quad (1.19)$$

asumiendo nuevamente la ventana de Bartlett. Aunque, la utilización de este último estimador puede plantear algunas dudas, tal y como manifiestan Stock y Watson (1988), los resultados analíticos del presente capítulo, así como los que posteriormente se van a presentar en el Capítulo 2, ofrecen evidencia suficiente como para preferir esta opción del estimador.

La estructura del resto del capítulo es la siguiente. El capítulo consta de dos secciones según sea el procedimiento utilizado para eliminar los elementos deterministas de la serie temporal. La Sección 1.2 está dedicada al método OLS mientras que la Sección 1.3 se dedica al método de “cuasi-diferenciación” GLS de Elliott *et al.* (1996). Cada una de las dos secciones se ha diseñado con la siguiente estructura común: en primer lugar, se analiza el modelo M_τ , que posee una constante y una tendencia lineal, y se presentan una serie de lemas que contienen los principales resultados correspondientes al marco no estacionario y estacionario, local y no local. A partir de estos resultados, se formula el teorema que presenta las distribuciones asintóticas del contraste MSB en cada uno de los tres escenarios contemplados. Los resultados correspondientes al modelo M_μ (incluye solo una constante) se derivan como un caso particular del anterior teorema y se presentan en un corolario. Al término de la segunda sección, se presenta en un apéndice los resultados correspondientes al modelo sin elementos deterministas M_0 . Todas las pruebas formales se recogen en el Apéndice matemático.

1.2 Propiedades bajo el procedimiento de Mínimos Cuadrados Ordinarios

En esta parte, siguiendo el esquema diseñado al final de la sección anterior, se derivan los resultados asintóticos para el modelo generador más amplio M_τ (incluye término constante y tendencia lineal) utilizando el procedimiento OLS para eliminar el componente determinista de la serie. Los resultados del modelo M_μ se derivan directamente a partir del anterior.

La serie de datos $\{y_t\}$ viene generada por el proceso escrito en (1.1) donde el componente determinista se puede escribir como $d_t = \delta_0 + \delta_1 t$ y la observación inicial satisface la Condición 1.1. El contraste de hipótesis de raíz unitaria se describe a continuación:

$$\begin{cases} H_0: \rho = 1 \\ H_1: \rho < 1 \end{cases} \quad (1.20)$$

El estadístico de contraste MSB es el escrito en (1.8). Ante la presencia de elementos deterministas en la serie, resulta necesario eliminarlos para poder trabajar correctamente. Para filtrar la serie, primero se estiman los componentes deterministas utilizando el método OLS y, posteriormente, se eliminan de la misma obteniendo como resultado una serie libre de elementos deterministas o serie filtrada (*detrended*) o residuo:

$$\begin{aligned} \hat{v}_t &= y_t - (\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t) \\ &= v_t + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)t \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde $\hat{\delta}_0$ and $\hat{\delta}_1$ son los estimadores OLS de δ_0 y δ_1 , respectivamente. Notar que,

$$\begin{aligned} \hat{v}_t &= y_t - (\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t) \\ &= v_t + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t - 1) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) \end{aligned}$$

como $\hat{v}_{t-1} = v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t - 1)$, se puede reescribir el residuo en t , en función del residuo retardado un periodo, $t - 1$, y queda:

$$\hat{v}_t = \hat{v}_{t-1} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) + \Delta v_t \quad (1.22)$$

Así, por ejemplo, la primera diferencia de la serie filtrada es

$$\Delta \hat{v}_t = \Delta v_t + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) \quad (1.23)$$

que, bajo la hipótesis nula de raíz unitaria, se convierte en

$$\Delta \hat{v}_t = u_t + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) \quad (1.24)$$

esto es, en la perturbación original del modelo más un elemento no estocástico. El siguiente lema ofrece algunos resultados asintóticos básicos para este marco:

Lema 1.1. *Suponer el proceso generador de la serie de datos en (1.1) en donde $d_t = \delta_0 + \delta_1 t$ y se cumple la Condición 1.1. Entonces, bajo la hipótesis nula ($\rho = 1$), se tiene que*

- a) $\begin{cases} T^{-1/2}(\hat{\delta}_0 - \delta_0) \xrightarrow{d} \lambda W^{\delta_0} \\ \sqrt{T}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \xrightarrow{d} \lambda W^{\delta_1} \end{cases}$
- b) $T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \lambda^2 \int [W^\tau(r)]^2 dr$
- c) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i}^2 \xrightarrow{p} \gamma(0) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- d) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \Delta \hat{v}_{t-j} \xrightarrow{p} \gamma(j-i) \quad \text{para } i < j, j = 2, 3, \dots, p$
- e) $T^{-3/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} = o_p(1) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- f) $T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} w_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0)) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- g) $T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} w_t \xrightarrow{d} W^+$
- h) $T(\hat{\rho} - 1) = O_p(1)$

donde $W^\tau(r) = W^\mu(r) - 12(r-1/2) \int (s-1/2)W(s)ds$ y $W^\mu(r) = W(r) - \int W(r)dr$. Además, $W^{\delta_0} = 4 \int W(r)dr - 6 \int rW(r)dr$, $W^{\delta_1} = -6 \int W(r)dr + 12 \int rW(r)dr$ y $W^+ = (1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots) \sigma_\varepsilon^2 \{ \int W(r)dW(r) + W^{\delta_0}W(1) + W^{\delta_1} \int r dW(r) \} + \Phi^*(1) \lambda^2 W^{\delta_1} \{ \int W(r)dr + W^{\delta_0} + (W^{\delta_1}/2) \}$ donde $\Phi^*(1) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j^*$.

Prueba: ver Apéndice matemático.

La distribución asintótica del numerador del estadístico MSB bajo la hipótesis nula, viene dada por el apartado b) del lema anterior:

$$T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \lambda^2 \int [W^\tau(r)]^2 dr \quad (1.25)$$

Analizado el comportamiento del numerador, se aborda el comportamiento del denominador. El denominador contiene un estimador de varianza a largo plazo, para el cual se disponen de dos estimadores alternativos: el estimador autorregresivo de densidad espectral o estimador autorregresivo y el estimador kernel basado en las primeras diferencias de los residuos, o dicho de otra forma, asumiendo la hipótesis nula de raíz unitaria en los residuos. En esta sección se deriva el comportamiento asintótico del denominador para cada uno de los estimadores comenzando con el estimador autorregresivo ($\hat{\lambda}_{AR}^2$), escrito en (1.15).

A partir del modelo (1.13) definido con $h_t = (\delta_1 - \hat{\delta}_1)$, $\mathbf{x}'_t - \hat{\mathbf{x}}'_t = (-(\delta_1 - \hat{\delta}_1), \dots, -(\delta_1 - \hat{\delta}_1), -[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)])$, $\boldsymbol{\beta} = (\phi_1^*, \dots, \phi_p^*, \phi^*)'$ y $w_t = \varepsilon_t - \phi^* [(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)$. Los $p+1$ elementos del vector $\boldsymbol{\beta}$ se definen como

$$\begin{aligned} \phi_1^* &= \rho \phi_1 + \rho \phi_2 + \dots + \rho \phi_p - \phi_2 - \dots - \phi_p \\ \phi_2^* &= \rho \phi_2 + \dots + \rho \phi_p - \phi_2 - \dots - \phi_p \\ &\vdots \\ \phi_p^* &= \rho \phi_p \\ \phi^* &= \rho - 1 + \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p - \rho \phi_1 - \rho \phi_2 - \dots - \rho \phi_p \end{aligned} \quad (1.26)$$

por lo que, en este caso, se cumple la identidad $\sum_{i=1}^p \phi_i^* = \sum_{i=1}^p \phi_i$. Notar que, bajo la hipótesis nula ($\rho = 1$), $\phi^* = 0$. El lema que sigue proporciona la teoría asintótica para el estimador autorregresivo:

Lema 1.2. *Sea el proceso generador de los datos como en el Lema 1.1. Entonces,*

- a) $\sqrt{T}(\hat{\beta}_p - \beta_p) \xrightarrow{d} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{h}_1$
- b) $\hat{\sigma}_w^2 \xrightarrow{p} \sigma_\varepsilon^2$
- c) $\hat{\lambda}_{AR}^2 \xrightarrow{p} \lambda^2$

en donde $(\hat{\beta}_p - \beta_p)$ es un vector de dimensiones $(p \times 1)$ que representa el bloque de los p primeros elementos del vector de coeficientes $(\hat{\beta} - \beta)$.

Prueba: ver Apéndice matemático.

En lo que respecta al estimador kernel basado en los residuos que asumen la hipótesis nula, el siguiente lema presenta su resultado asintótico:

Lema 1.3. *Suponer el proceso generador de los datos del Lema 1.1. Bajo la hipótesis nula, se tiene que $\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2 \xrightarrow{p} \lambda^2$.*

Prueba: ver Apéndice matemático.

Comentario 1.4. En el caso de una alternativa local ($\rho_c = 1 + c/T$, $c < 0$), bastaría sustituir $W(r)$ por $J_c(r)$ porque así nos lo dice el TFCL. Esto implica que los resultados para tal caso se extienden inmediatamente y, por ese motivo, no se detallan en esta tesis.

Al considerar ahora una hipótesis alternativa estacionaria no local $\rho_0 < 1$ en (1.1), se tiene que:

$$\Delta\hat{v}_t = (\rho_0 - 1)v_{t-1} + u_t + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) \quad (1.27)$$

Al igual que se hiciera en el caso anterior, el siguiente lema muestra un conjunto de resultados asintóticos básicos:

Lema 1.4. *Sea el modelo que genera la serie de datos (1.1) con $d_t = \delta_0 + \delta_1 t$ y v_1 satisface la Condición 1.1. Entonces, bajo la hipótesis alternativa $\rho_0 < 1$,*

- a) $\begin{cases} \sqrt{T}(\hat{\delta}_0 - \delta_0) \xrightarrow{d} 2\lambda_v \{3 \int W(r)dr - W(1)\} \\ T^{3/2}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \xrightarrow{d} 6\lambda_v \{W(1) - 2 \int W(r)dr\} \end{cases}$
- b) $T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \xrightarrow{p} \gamma^*(0)$
- c) $T^{-1} \sum \Delta\hat{v}_{t-i}^2 \xrightarrow{p} \mathbf{b}^2 \gamma^*(0) + \gamma(0) - 2\mathbf{b}\gamma_{uv}(1) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- d) $T^{-1} \sum \Delta\hat{v}_{t-i} \Delta\hat{v}_{t-j} \xrightarrow{p} \mathbf{b}^2 \gamma^*(j-i) - \mathbf{b}\gamma_{uv}(j-i-1) - \mathbf{b}\gamma_{uv}(i-j-1) + \gamma(j-i) \quad \text{para } i < j, j = 2, 3, \dots, p$
- e) $T^{-1} \sum \Delta\hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} \xrightarrow{p} -\mathbf{b}\gamma^*(i) + \gamma_{uv}(i-1) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$

$$f) T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} w_t = o_p(1) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$$

$$g) T^{-1/2} \sum \hat{v}_{t-1} w_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0) \mathbf{b}^{-2})$$

$$h) \hat{\rho} \xrightarrow{p} \rho_0^*$$

con $\lambda_v = \lambda_u(1 - \rho_0)^{-1}$, $\mathbf{b} = (1 - \rho_0)$, $E(v_t^2) = \gamma^*(0)$, $E(v_{t-i} v_{t-j}) = \gamma^*(j - i)$ y $E(v_{t-1} u_{t-i}) = \gamma_{uv}(i - 1)$ para $i < j, j = 2, 3, \dots, p$. La definición de los elementos ρ_0^* , $\Phi^*(1)$ y w_t se puede encontrar en el Apéndice matemático.

Prueba: ver Apéndice matemático.

En concreto, por el apartado b), se deduce que el numerador del estadístico MSB tiende a cero conforme $T \rightarrow \infty$. En lo que respecta a la convergencia del denominador del MSB, se puede observar que bajo la hipótesis alternativa estacionaria no local, en el modelo (1.13) se tiene que: $h_t = (\delta_1 - \hat{\delta}_1)$, $\mathbf{x}'_t - \tilde{\mathbf{x}}'_t = -(\delta_1 - \hat{\delta}_1), \dots, -(\delta_1 - \hat{\delta}_1), -[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t - 1)]$ y $w_t = \varepsilon_t - \phi_0^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t - 1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)$. El vector de coeficientes β se define como $\beta = (\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_p^*, \phi_0^*)'$ y cada uno de sus elementos se define como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_1^* &= \rho_0 \phi_1 + \rho_0 \phi_2 + \dots + \rho_0 \phi_p - \phi_2 - \dots - \phi_p \\ \phi_2^* &= \rho_0 \phi_2 + \dots + \rho_0 \phi_p - \phi_2 - \dots - \phi_p \\ &\vdots \\ \phi_p^* &= \rho_0 \phi_p \\ \phi_0^* &= \rho_0 - 1 + \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p - \rho_0 \phi_1 - \rho_0 \phi_2 - \dots - \rho_0 \phi_p \end{aligned} \tag{1.28}$$

y, que por interés, pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \phi_0^* &= -\mathbf{b} \Phi^*(1) \\ \phi_1^* &= (-\mathbf{b} + 1)\phi_1 - \mathbf{b} \sum_{j=2}^p \phi_j = \rho_0 \sum_{j=1}^p \phi_j - \sum_{j=2}^p \phi_j \\ \phi_2^* &= (-\mathbf{b} + 1)\phi_2 - \mathbf{b} \sum_{j=3}^p \phi_j = \rho_0 \sum_{j=2}^p \phi_j - \sum_{j=3}^p \phi_j \\ &\vdots \\ \phi_p^* &= (-\mathbf{b} + 1)\phi_p = \rho_0 \phi_p \end{aligned} \tag{1.29}$$

con $\mathbf{b} = (1 - \rho_0)$ y $\Phi^*(1) = (1 - \sum_{j=1}^p \phi_j)$. A diferencia del caso anterior, la identidad $\sum_{i=1}^p \phi_i^* = \sum_{i=1}^p \phi_i$ no se satisface. La teoría asintótica para el estimador autorregresivo de la varianza a largo está dada por el siguiente lema:

Lema 1.5. *Dado el mismo modelo generador del Lema 1.4. Asintóticamente, bajo la hipótesis alternativa no local, se tiene que*

$$a) \sqrt{T}(\hat{\beta}_p - \beta_p) \xrightarrow{d} \mathbf{C}_{12}\mathbf{h}_4$$

$$b) \hat{\sigma}_w^2 \xrightarrow{p} \sigma_\varepsilon^2$$

$$c) \hat{\lambda}_{AR}^2 \xrightarrow{p} \lambda_0^2$$

donde $\lambda_0^2 \neq \lambda^2$.

Prueba: ver Apéndice matemático.

En cuanto al estimador kernel, $\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2$, el resultado asintótico se presenta en el siguiente lema.

Lema 1.6. *Suponer el mismo proceso generador de datos que en el Lema 1.4. Entonces, bajo la hipótesis alternativa no local, se tiene que $B_T \hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2 \xrightarrow{p} 2\sigma_v^2 > 0$, con $B_T = o(T^{1/2})$, $\sigma_v^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{\infty} \rho_0^{i-j} \psi_j)^2 \sigma_\varepsilon^2$.*

Prueba: ver Apéndice matemático.

Comentario 1.5. En general, se observa que los estimadores de la varianza a largo plazo contemplados, bajo la hipótesis alternativa estacionaria no local, convergen a una constante diferente de cero.

Los principales resultados asintóticos para el estadístico MSB están representados en el teorema que sigue:

Teorema 1.1. *Suponer que el proceso generador de datos es (1.1) con $d_t = \delta_0 + \delta_1 t$ y que la observación inicial satisface la Condición 1.1. Entonces,*

a) bajo $H_0: \rho = 1$, se tiene que

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int [W^\tau(r)]^2 dr \right\}^{1/2} \quad (1.30)$$

b) bajo $H_{1,c}: \rho_c = 1 + c/T$ con $c < 0$, se tiene que

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int [J_c^\tau(r)]^2 dr \right\}^{1/2} \quad (1.31)$$

c) bajo $H_1: \rho_0 < 1$,

$$MSB \xrightarrow{p} 0 \quad (1.32)$$

el contraste es consistente.

Prueba: ver Apéndice matemático.

Corolario 1.1. *Sea el proceso que genera los datos (1.1) con $d_t = \delta_0$ y v_1 satisface la Condición 1.1. Asintóticamente,*

a) bajo $H_0: \rho = 1$, se tiene que

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int [W^\mu(r)]^2 dr \right\}^{1/2} \quad (1.33)$$

b) bajo $H_{1,c}: \rho_c = 1 + c/T$ con $c < 0$, se tiene que

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int [J_c^\mu(r)]^2 dr \right\}^{1/2} \quad (1.34)$$

c) bajo $H_1: \rho_0 < 1$, el contraste es consistente

$$MSB \xrightarrow{p} 0 \quad (1.35)$$

Prueba: ver Apéndice matemático.

Comentario 1.6. Cuando el proceso que genera los datos contiene elementos deterministas, con independencia de si son una constante y una tendencia lineal (M_τ) o simplemente una constante (M_μ), el contraste MSB es consistente asintóticamente en los tres escenarios contemplados. Así, bajo la hipótesis nula (y alternativa local), el estadístico MSB no diverge porque el numerador es $O_p(T^2)$ y el denominador es consistente. Y, bajo la hipótesis alternativa no local, el test MSB es consistente porque el numerador converge en probabilidad a cero, por ser $O_p(T)$ y, el estimador de la varianza a largo plazo posee un límite en probabilidad finito y estrictamente positivo.

1.3 Propiedades bajo el procedimiento de “cuasi-diferenciación” de Elliott et al. (1996)

En esta sección, se presentan los resultados derivados cuando se considera el método de “cuasi-diferenciación” GLS para eliminar los elementos deterministas de la serie objeto de análisis propuesto en Elliott et al. (1996). El esquema seguido es similar al de la sección anterior.

En primer lugar, se va a considerar el modelo (1.1) con $d_t = \delta_0 + \delta_1 t$. El valor inicial satisface la Condición 1.1. El contraste de hipótesis de raíz unitaria que se plantea queda como:

$$\begin{cases} H_0: \rho = 1 \\ H_1: \rho < 1 \end{cases} \quad (1.36)$$

El estadístico de contraste MSB se define como en (1.8). A diferencia del anterior procedimiento, el procedimiento GLS se basa en la transformación de las variables del modelo como etapa previa a la estimación del componente determinista para su posterior eliminación. Las variables transformadas quedan como:

$$y^{\bar{c}} = (y_1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)y_t)', \quad t = 2, \dots, T \quad (1.37)$$

$$Z^{\bar{c}} = (z_1, (1 - \rho_{\bar{c}}Lz_t)', \quad z_t = (1, t)', \quad t = 2, \dots, T \quad (1.38)$$

en donde $\rho_{\bar{c}} = 1 + \bar{c}/T$ dado un valor fijo $\bar{c} < 0$. Elliott et al. (1996) proponen la utilización de $\bar{c} = -13.5$ para el modelo más amplio que contiene constante y tendencia lineal y de $\bar{c} = -7.0$ para el modelo que solo contiene un término constante.

El modelo transformado escrito en forma matricial queda como:

$$y^{\bar{c}} = Z^{\bar{c}}\delta + v^{\bar{c}} \quad (1.39)$$

con $\delta = (\delta_0, \delta_1)'$, quedando la serie libre del componente determinista como en (1.21) con la diferencia de que, en este caso, el vector δ se estima por OLS a partir de la regresión de $y^{\bar{c}}$ sobre $Z^{\bar{c}}$. Así, el siguiente lema ofrece algunos resultados asintóticos útiles para este escenario:

Lema 1.7. *Suponer el modelo que genera la serie de datos (1.1) con $d_t = \delta_0 + \delta_1 t$ y la observación inicial cumple la Condición 1.1. Entonces, bajo la hipótesis nula ($\rho = 1$), se tiene que*

- a) $\begin{cases} (\hat{\delta}_0 - \delta_0) \xrightarrow{d} v_1 \\ \sqrt{T}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \xrightarrow{d} a^{-1}\lambda W_1^* \end{cases}$
- b) $T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \lambda^2 \int_0^1 [V_{\bar{c}}^T(r)]^2 dr$
- c) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i}^2 \xrightarrow{p} \gamma(0) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- d) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \Delta \hat{v}_{t-j} \xrightarrow{p} \gamma(j-i) \quad \text{para } i < j, j = 2, 3, \dots, p$
- e) $T^{-3/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} = o_p(1) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- f) $T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} w_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{\bar{c}}^2 \gamma(0)) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- g) $T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} w_t \xrightarrow{d} \bar{W}^+$
- h) $T(\hat{\rho} - 1) = O_p(1)$

donde $V_{\bar{c}}^T = W(r) - r\{\nu W(1) + 3(1-\nu) \int sW(s)ds\}$ y $\nu = (1-\bar{c})/(1-\bar{c}+\bar{c}^2/3)$. También, $\bar{W}^+ = (1+\psi_1+\psi_2+\dots)\sigma_{\bar{c}}^2 \left\{ \int W(r)dW(r) + (W_1^*/a) \int r dW(r) \right\} + \Phi^*(1)\lambda^2(W_1^*/a) \left\{ \int W(r)dr + (W_1^*/2a) \right\}$ con $a = (1-\bar{c}+\bar{c}^2/3)$, $\Phi^*(1) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j^*$ y $W_1^* = \lambda\{(1-\bar{c})W(1) + \bar{c}^2 \int rW(r)dr\}$.

Prueba: ver Apéndice matemático.

La distribución asintótica bajo la hipótesis nula del numerador del estadístico de contraste MSB viene dada por el apartado b):

$$T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \lambda^2 \int_0^1 [V_{\bar{c}}^T(r)]^2 dr \quad (1.40)$$

En lo que respecta al comportamiento del denominador del estadístico MSB, se comienza analizando el estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo. Se parte del modelo (1.13), en donde: $\beta = (\phi_1^*, \dots, \phi_p^*, \phi^*)'$, $h_t = (\delta_1 - \hat{\delta}_1)$, $x_t' - \tilde{x}_t' = -(\delta_1 - \hat{\delta}_1), \dots, -(\delta_1 - \hat{\delta}_1), -[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)]$ y $w_t = \varepsilon_t - \phi^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)$. Notar que bajo la hipótesis nula ($\rho = 1$), $\phi^* = 0$. Los $p+1$ componentes del vector β se definen como en (1.26).

La teoría asintótica para el estimador autorregresivo de la varianza a largo viene dada en el siguiente lema:

Lema 1.8. *Sea el modelo generador como en Lema 1.7. Se tiene que*

- a) $\sqrt{T}(\hat{\beta}_p - \beta_p) \xrightarrow{d} \mathbf{V}^{-1}\mathbf{h}_1$

- b) $\hat{\sigma}_w^2 \xrightarrow{P} \sigma_\varepsilon^2$
c) $\hat{\lambda}_{AR}^2 \xrightarrow{P} \lambda^2$

Prueba: ver Apéndice matemático.

A continuación se presenta el resultado asintótico del estimador kernel construido a partir de la primera diferencia de los residuos del modelo, $\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2$.

Lema 1.9. *Sea el proceso que genera los datos el mismo que en el Lema 1.7. Bajo la hipótesis nula de raíz unitaria, se tiene que $\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2 \xrightarrow{P} \lambda^2$.*

Prueba: ver Apéndice matemático.

Comentario 1.7. En el supuesto de considerar una hipótesis alternativa local como la descrita en (1.4), el procedimiento de derivación de los resultados es similar al caso bajo la hipótesis nula porque el TFCL es similar.

Esta sección concluye con el análisis del comportamiento asintótico del estadístico de contraste MSB en un marco estacionario, esto es, bajo la hipótesis alternativa no local. Se parte del mismo proceso generador de datos definido en (1.1) con $d_t = \delta_0 + \delta_1 t$ y, en donde se satisface la condición inicial establecida en la Condición 1.1. El siguiente lema proporciona los resultados asintóticos básicos obtenidos para este marco.

Lema 1.10. *Suponer el modelo que genera los datos (1.1) con el componente determinista definido como $d_t = \delta_0 + \delta_1 t$ y que v_1 satisface la Condición 1.1. Asintóticamente, bajo la hipótesis alternativa $\rho_0 < 1$,*

- a) $\begin{cases} (\delta_0 - \hat{\delta}_0) \xrightarrow{d} \mathbf{m}_{\delta_0} \\ T(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \xrightarrow{d} \mathbf{m}_{\delta_1} \end{cases}$
b) $T^{-1} \sum \hat{v}_{t-i}^2 \xrightarrow{d} \gamma^*(0) + \mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \mathbf{m}_{\delta_1}^2/3 + \mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1}$ para $i = 1, 2, \dots, p$
c) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i}^2 \xrightarrow{P} \mathbf{b}^2 \gamma^*(0) + \gamma(0) - 2\mathbf{b} \gamma_{uv}(1)$ para $i = 1, 2, \dots, p$
d) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \Delta \hat{v}_{t-j} \xrightarrow{P} \mathbf{b}^2 \gamma^*(j-i) - \mathbf{b} \gamma_{uv}(j-i-1) - \mathbf{b} \gamma_{uv}(i-j-1) + \gamma(j-i)$ para $i < j$,
 $j = 2, 3, \dots, p$
e) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} \xrightarrow{d} -\mathbf{b} \gamma^*(i) + \gamma_{uv}(i-1)$ para $i = 1, 2, \dots, p$
f) $T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} w_t = o_p(1)$ para $i = 1, 2, \dots, p$
g) $T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} w_t \xrightarrow{d} \mathbf{b} \Phi^*(1)(\mathbf{m}_{\delta_0}^2 + (\mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1}/2) + \mathbf{m}_{\delta_1}^2/3)$
h) $\hat{\rho} \xrightarrow{d} \rho_\tau^*$

donde $\mathbf{m}_{\delta_0} = v_1 + ((\bar{c} - 1 - \bar{c}^2/2)/(1 + \bar{c}^2/3 - \bar{c}))v_T(1 - \bar{c})$ y $\mathbf{m}_{\delta_1} = v_T(1 - \bar{c})/(1 + \bar{c}^2/3 - \bar{c})$. La definición de ρ_τ^* se puede encontrar en el Apéndice matemático.

Prueba: ver Apéndice matemático.

Del apartado b) se deduce directamente que el numerador del MSB tiende a cero asintóticamente.

Ahora, se analiza el denominador del estadístico MSB. En primer lugar, se derivan los resultados asintóticos para el estimador autorregresivo de varianza a largo plazo. Para ello se plantea el

modelo (1.13) donde $h_t = (\delta_1 - \hat{\delta}_1)$, $\mathbf{x}'_t - \tilde{\mathbf{x}}'_t = (-(\delta_1 - \hat{\delta}_1), \dots, -(\delta_1 - \hat{\delta}_1), -[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)])$, $w_t = \varepsilon_t - \phi_0^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)$ y $\boldsymbol{\beta} = (\phi_1^*, \dots, \phi_p^*, \phi_0^*)'$. Los elementos del vector de coeficientes se definen en (1.28), por lo que no se cumple la identidad $\sum_{i=1}^p \phi_i^* = \sum_{i=1}^p \phi_i$. El lema siguiente presenta los resultados asintóticos para dicho estimador:

Lema 1.11. *Sea el modelo generador como en el Lema 1.10. Se tiene que*

$$a) \sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p - \boldsymbol{\beta}_p) \xrightarrow{d} \bar{\mathbf{C}}_{12} \mathbf{h}_4$$

$$b) \hat{\sigma}_w^2 \xrightarrow{d} \sigma_s^2$$

$$c) \hat{\lambda}_{AR}^2 \xrightarrow{p} \lambda_s^2$$

con $\sigma_s^2 \neq \sigma_\varepsilon^2$ y $\lambda_s^2 \neq \lambda^2$.

Prueba: ver Apéndice matemático.

Analizado el comportamiento del denominador cuando se emplea el estimador autorregresivo, se pasa a presentar el comportamiento del denominador cuando se utiliza el estimador kernel que asume la hipótesis nula de raíz unitaria en la construcción de los residuos. El lema que sigue recoge su resultado asintótico:

Lema 1.12. *Considere el proceso que genera los datos en el Lema 1.10. Entonces, $B_T \hat{\omega}_{\Delta\hat{\delta}}^2 \xrightarrow{p} 2\sigma_v^2 > 0$, siendo $B_T = o(T^{1/2})$, $\sigma_v^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{\infty} \rho_0^{i-j} \psi_j)^2 \sigma_\varepsilon^2$.*

Prueba: ver Apéndice matemático.

Combinando los resultados anteriores adecuadamente, se obtiene el comportamiento asintótico del estadístico de contraste MSB en los distintos escenarios contemplados en el análisis.

Teorema 1.2. *Suponer el modelo que genera los datos (1.1) con $d_t = \delta_0 + \delta_1 t$ y donde v_1 cumple la Condición 1.1. Entonces,*

a) bajo H_0 : $\rho = 1$, se tiene que

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int_0^1 [V_{\hat{c}}^T(r)]^2 dr \right\}^{1/2} \quad (1.41)$$

b) bajo $H_{1,c}$: $\rho_c = 1 + c/T$ con $c < 0$, se tiene que

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int [J_{c,\hat{c}}^T(r)]^2 dr \right\}^{1/2} \quad (1.42)$$

c) bajo H_1 : $\rho_0 < 1$, el contraste es consistente

$$MSB \xrightarrow{p} 0 \quad (1.43)$$

Prueba: ver Apéndice matemático.

Corolario 1.2. *Dado el proceso generador en (1.1) con $d_t = \delta_0$ y con v_1 que satisface la Condición 1.1. Entonces,*

a) bajo $H_0: \rho = 1$, se tiene que

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int [W(r)]^2 dr \right\}^{1/2} \quad (1.44)$$

b) bajo $H_{1,c}: \rho_c = 1 + c/T$, se tiene que

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int [J_c(r)]^2 dr \right\}^{1/2} \quad (1.45)$$

c) bajo $H_1: \rho_0 < 1$,

$$MSB \xrightarrow{p} 0 \quad (1.46)$$

el contraste es consistente.

Prueba: ver Apéndice matemático.

Comentario 1.8. Los resultados obtenidos en el Corolario 1.2 resultan de extender la teoría asintótica aplicada al modelo más amplio, al modelo restringido. Notar, además, que en ellos ya no ejerce influencia el parámetro fijo \bar{c} . La prueba formal de los mismos se omite del texto por ser directa.

Propiedades asintóticas del MSB sin elementos deterministas, M_0

Como se ha indicado anteriormente al comienzo del capítulo, en este apéndice vamos a presentar los resultados analíticos asintóticos derivados para el contraste MSB en el caso de que el modelo generador representado en (1.1) no contiene elementos deterministas ($M_0 : d_t = 0$). La estructura seguida es similar a la adoptada hasta ahora en el Capítulo 1, es decir, tras introducir el proceso generador de los datos, la serie objeto de estudio, el contraste de hipótesis y el estadístico asociado al contraste, derivaremos los resultados asintóticos bajo las hipótesis del contraste, comenzando con la hipótesis nula de raíz unitaria y siguiendo con la hipótesis alternativa estacionaria no local². En estos desarrollos, vuelven a ser imprescindibles los resultados proporcionados en las Proposiciones 1 y 2 del apéndice.

En primer lugar, hay que recordar que la no presencia de componente determinista en (1.1) implica que la serie libre de elementos deterministas es $\hat{v}_t = v_t$. El contraste de hipótesis planteado es igual que anteriormente:

$$H_0: \rho = 1 \quad \text{vs} \quad H_1: \rho < 1$$

El estadístico MSB se construye como en (1.8). Se siguen considerando los dos estimadores de la varianza a largo plazo: estimador autorregresivo y estimador kernel construido a partir de los residuos en los que se impone la hipótesis nula. Seguidamente, se presenta el lema que contiene algunos resultados asintóticos básicos para nuestros desarrollos del Modelo M_0 .

Lema 13. *Sea el proceso generador de datos (1.1) con $d_t = 0$ y con v_1 cumpliendo la Condición 1.1. Asintóticamente, bajo la hipótesis nula $\rho = 1$, se obtiene que*

- a) $T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \lambda^2 \int [W(r)]^2 dr$
- b) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i}^2 \xrightarrow{p} \gamma(0) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- c) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \Delta \hat{v}_{t-j} \xrightarrow{p} \gamma(j-i) \quad \text{para } i < j, j = 2, 3, \dots, p$
- d) $T^{-3/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} = o_p(1) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- e) $T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \varepsilon_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0)) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- f) $T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} \varepsilon_t \xrightarrow{d} \sigma_\varepsilon \lambda \int W(r) dW(r)$
- g) $T(\hat{\rho} - 1) = O_p(1)$

Prueba: *ver Apéndice matemático.*

²El comportamiento asintótico bajo la hipótesis alternativa local tiene un tratamiento similar al caso bajo la hipótesis nula. Esto se debe al TFCL que permite reemplazar los procesos $W(r)$ por $J_c(r)$. Como consecuencia de esto, los desarrollos se omiten por ser parecidos a los presentados bajo la hipótesis nula.

En concreto, el apartado a) del lema anterior nos proporciona la distribución asintótica del numerador del MSB,

$$T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \lambda^2 \int [W(r)]^2 dr \quad (1.47)$$

En cuanto al comportamiento asintótico del denominador del estadístico MSB, se toma en primer lugar el estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo. Partiendo del modelo (1.13) en donde $h_t = 0$, $\mathbf{x}'_t = \tilde{\mathbf{x}}'_t$, $w_t = \varepsilon_t$ y $\boldsymbol{\beta} = (\phi_1^*, \dots, \phi_p^*, \phi^*)'$, en donde los $p + 1$ elementos de este último vector de coeficientes son como en (1.26). En este caso, sí que se cumple la identidad $\sum_{i=1}^p \phi_i^* = \sum_{i=1}^p \phi_i$. Notar, además, que bajo H_0 se tiene $\phi^* = 0$.

La teoría asintótica para el estimador autorregresivo viene dada en el lema que sigue:

Lema 14. *Suponer el mismo modelo generador que en el Lema 13. Entonces,*

- a) $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p - \boldsymbol{\beta}_p) \xrightarrow{d} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{h}_1$
- b) $\hat{\sigma}_w^2 \xrightarrow{p} \sigma_\varepsilon^2$
- c) $\hat{\lambda}_{AR}^2 \xrightarrow{p} \lambda^2$

Prueba: ver Apéndice matemático.

Si consideramos ahora que el estimador kernel en el que se impone la hipótesis nula en los residuos reemplaza al estimador autorregresivo, el resultado asintótico lo proporciona el siguiente lema:

Lema 15. *Suponer el proceso generador de datos del Lema 13. Bajo la hipótesis nula, se tiene que $\hat{\omega}_{\Delta \hat{v}}^2 \xrightarrow{p} \lambda^2$.*

Prueba: ver Apéndice matemático.

Para finalizar este análisis, se asume ahora la hipótesis alternativa no local, $\rho_0 < 1$. El proceso que genera los datos es como en (1.1) con $d_t = 0$ y la observación inicial v_1 sigue cumpliendo la Condición 1.1. El siguiente lema presenta buena parte de los resultados asintóticos necesarios para el desarrollo completo del modelo:

Lema 16. *Suponer que el modelo que genera los datos es (1.1) con $d_t = 0$ y v_1 cumple la Condición 1.1. Entonces, bajo la hipótesis alternativa $\rho_0 < 1$,*

- a) $T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \xrightarrow{p} \gamma^*(0)$
- b) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i}^2 \xrightarrow{p} \mathbf{b}^2 \gamma^*(0) + \gamma(0) - 2\mathbf{b} \gamma_{uv}(1) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$
- c) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \Delta \hat{v}_{t-j} \xrightarrow{p} \mathbf{b}^2 \gamma^*(j-i) - \mathbf{b} \gamma_{uv}(j-i-1) - \mathbf{b} \gamma_{uv}(i-j-1) + \gamma(j-i) \quad \text{para } i < j, j = 2, 3, \dots, p$
- d) $T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} \xrightarrow{p} -\mathbf{b} \gamma^*(i) + \gamma_{uv}(i-1) \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, p$
- e) $T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \varepsilon_t = o_p(1) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p$

$$f) T^{-1/2} \sum \hat{v}_{t-1} \varepsilon_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0) \mathbf{b}^{-2})$$

$$g) \hat{\rho} \xrightarrow{p} \rho_0^*$$

Prueba: ver Apéndice matemático.

De los resultados anteriores, se deduce directamente que el numerador del estadístico MSB tiende a cero asintóticamente. Entonces, para que el contraste MSB sea consistente se requiere que el denominador del estadístico, o sea, el estimador de la varianza a largo plazo posea un límite en probabilidad finito. Esto es lo que se va a comprobar a continuación.

Suponer en primer lugar el estimador autorregresivo. Se parte del modelo de regresión (1.13) en donde $h_t = 0$, $\mathbf{x}'_t = \tilde{\mathbf{x}}'_t$, $w_t = \varepsilon_t$ y $\boldsymbol{\beta} = (\phi_1^*, \dots, \phi_p^*, \phi_0^*)'$, cuyos componentes son como en (1.28). La forma que adoptan estos últimos coeficientes no conduce al cumplimiento de la identidad $\sum_{i=1}^p \phi_i^* = \sum_{i=1}^p \phi_i$, como sucedía en el escenario anterior. Los resultados asintóticos para este estimador autorregresivo se muestran en el siguiente lema.

Lema 17. *Suponer un modelo que genera los datos como en el Lema 16. Entonces, bajo la hipótesis alternativa no local,*

$$a) \sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p - \boldsymbol{\beta}_p) \xrightarrow{d} \mathbf{C}_{12} \mathbf{h}_4$$

$$b) \hat{\sigma}_w^2 \xrightarrow{p} \sigma_\varepsilon^2$$

$$c) \hat{\lambda}_{AR}^2 \xrightarrow{p} \lambda_0^2$$

$$\text{con } \lambda_0^2 \neq \lambda^2.$$

Prueba: ver Apéndice matemático.

Cuando consideramos un estimador tipo kernel construido a partir de los residuos imponiendo la hipótesis nula en los mismos $(\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2)$, el resultado asintótico es el que sigue:

Lema 18. *Suponer el mismo proceso generador de datos del Lema 16, entonces bajo la hipótesis alternativa estacionaria no local, el estimador kernel tiene el siguiente límite en probabilidad: $B_T \hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2 \xrightarrow{p} 2\sigma_v^2 > 0$, en donde $B_T = o(T^{1/2})$ y $\sigma_v^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{\infty} \rho_0^{i-j} \psi_j)^2 \sigma_\varepsilon^2$.*

Prueba: ver Apéndice matemático.

Combinando adecuadamente los resultados anteriores, se obtiene el comportamiento asintótico del estadístico de contraste MSB que recoge el siguiente teorema:

Teorema 1.3. *Suponer el proceso generador de datos dado en (1.1) con $d_t = 0$ y v_1 satisface la Condición 1.1. Entonces,*

a) bajo $H_0: \rho = 1$, se tiene que

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int W(r)^2 dr \right\}^{1/2}$$

b) bajo $H_{1,c}: \rho_c = 1 + c/T$ con $c < 0$, se tiene que

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int J_c(r)^2 dr \right\}^{1/2}$$

c) bajo $H_1: \rho_0 < 1$,

$$MSB \xrightarrow{p} 0$$

el contraste es consistente.

Apéndice matemático

Proposición 1. Sean $\{v_t\}$ y $\{u_t\}$ generados en base a (1.1) en donde $\psi(L) = 1/(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)$ con L definido como el operador de retardos que aplicado a una variable cualquiera x queda, $Lx_t = x_{t-1}$. Entonces, (1.12) se cumple.

Prueba de la Proposición 1:

$$(1 - \rho L)v_t = u_t$$

$$u_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)} \varepsilon_t$$

Igualando ambas expresiones tenemos que

$$(v_t - \rho v_{t-1})(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) = \varepsilon_t$$

$$v_t = (\rho + \phi_1)v_{t-1} + (\phi_2 - \rho\phi_1)v_{t-2} + (\phi_3 - \rho\phi_2)v_{t-3} + \dots + (\phi_p - \rho\phi_{p-1})v_{t-p}$$

$$- \rho\phi_p v_{t-(p+1)} + \varepsilon_t + \rho\phi_p v_{t-p} - \rho\phi_p v_{t-p}$$

$$= (\rho + \phi_1)v_{t-1} + (\phi_2 - \rho\phi_1)v_{t-2} + (\phi_3 - \rho\phi_2)v_{t-3} + \dots + (\phi_p - \rho\phi_{p-1} - \rho\phi_p)v_{t-p}$$

$$- \rho\phi_p \Delta v_{t-p} + \varepsilon_t + (\phi_p - \rho\phi_{p-1} - \rho\phi_p)v_{t-(p-1)} - (\phi_p - \rho\phi_{p-1} - \rho\phi_p)v_{t-(p-1)}$$

$$= \dots$$

$$= (\rho + \phi_1 + \phi_2 + \dots - \rho\phi_1 - \rho\phi_2 - \dots)v_{t-1} + (-\phi_2 - \phi_3 - \dots + \rho\phi_1 + \dots)\Delta v_{t-1}$$

$$+ \dots + (\rho\phi_p)\Delta v_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$= (\rho + \phi_1 + \phi_2 + \dots - \rho\phi_1 - \rho\phi_2 - \dots)v_{t-1} + \phi_1^* \Delta v_{t-1} + \phi_2^* \Delta v_{t-2} + \dots + \phi_p^* \Delta v_{t-p}$$

$$+ \varepsilon_t$$

y, restando v_{t-1} a ambos lados se obtiene el resultado buscado. \square

Proposición 2. Sea $u_t = \psi(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, en donde $\sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_j| < \infty$ y ε_t es i.i.d.(0, σ_ε^2) con momento finito de cuarto orden. Definimos

$$\gamma(j) \equiv E[u_t u_{t-j}] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s \psi_{s+j} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda \equiv \sigma_\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = \sigma_\varepsilon \cdot \psi(1)$$

$$v_t \equiv u_1 + u_2 + \dots + u_t \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, T$$

siendo $v_0 \equiv 0$. Entonces,

- a) $T^{-1/2} \sum_{t=1}^T u_t \xrightarrow{d} \lambda W(1)$
- b) $T^{-1} \sum_{t=1}^T u_{t-i} u_{t-j} \xrightarrow{p} \gamma(|j-i|)$ para $j = 0, 1, 2, \dots$
- c) $T^{-1} \sum_{t=1}^T v_{t-1} u_{t-j} \xrightarrow{p} \begin{cases} (1/2)\{\lambda^2[W(1)]^2 - \gamma(0)\} & \text{para } j = 0 \\ (1/2)\{\lambda^2[W(1)]^2 - \gamma(0)\} + \gamma(0) + \gamma(1) + \gamma(2) + \dots + \gamma(j-1) & \text{para } j = 1, 2, \dots \end{cases}$
- d) $T^{-3/2} \sum_{t=1}^T v_{t-1} \xrightarrow{d} \lambda \int W(r) dr$
- e) $T^{-2} \sum_{t=1}^T v_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \lambda^2 \int [W(r)]^2 dr$
- f) $T^{-1/2} \sum_{t=1}^T u_{t-i} \varepsilon_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0))$ para $i = 1, 2, \dots$
- g) $T^{-1} \sum_{t=1}^T v_{t-1} \varepsilon_t \xrightarrow{d} \sigma_\varepsilon \lambda \int W(r) dW(r)$
- h) $T^{-5/2} \sum_{t=1}^T t v_{t-1} \xrightarrow{d} \lambda \int r W(r) dr$ para $i = 1, 2, \dots$
- i) $T^{-3/2} \sum_{t=1}^T t u_{t-i} \xrightarrow{d} \lambda \{W(1) - \int W(r) dr\}$ para $i = 1, 2, \dots$
- j) $T^{-(i+1)} \sum_{t=1}^T t^i \xrightarrow{p} 1/(i+1)$ para $i = 1, 2, \dots$

en donde el signo de la integral indica integración de 0 a 1 y $W(r)$ es un proceso de Wiener estándar. Para un tratamiento más detallado de los movimientos Brownianos en el contexto de las raíces unitarias ver Phillips y Solo (1992), Phillips (1987a), Hamilton (1994) y Patterson (2010), entre otros.

Prueba de la Proposición 2:

- a) Ver Hamilton (1994, Proposición 17.3.a).
- b) Ver Hamilton (1994, Proposición 17.3.c).
- c) Ver Hamilton (1994, Proposición 17.3.f).
- d) Ver Hamilton (1994, Proposición 17.3.h).
- e) Ver Hamilton (1994, Proposición 17.3.b).
- f) La prueba sigue directamente de aplicar el resultado de $\hat{\text{Íto}}$ a Hamilton (1994, Proposición 17.3.d).
- g) Ver Hamilton (1994, Proposición 17.3.i).
- h) Ver Hamilton (1994, Proposición 17.3.g).
- i) Ver Hamilton (1994, Proposición 17.3.k).

□

Prueba del Lema 1.1:

a) Se parte del siguiente modelo:

$$y = Z\boldsymbol{\delta} + v$$

con

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \end{bmatrix} \quad y \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_T \end{bmatrix}$$

El estimador OLS de $\boldsymbol{\delta}$ es

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = (Z'Z)^{-1}Z'y = \boldsymbol{\delta} + (Z'Z)^{-1}Z'v$$

Entonces, para obtener la distribución asintótica de dicho estimador $\hat{\boldsymbol{\delta}}$, es necesario ajustar la regresión anterior como se muestra a continuación:

$$(\hat{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{D}_1^{-1} \{ \mathbf{D}_1^{-1} (Z'Z) \mathbf{D}_1^{-1} \}^{-1} \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_2^{-1} (Z'v)$$

siendo

$$\mathbf{D}_1 \equiv \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_2 \equiv \begin{bmatrix} T^{3/2} & 0 \\ 0 & T^{5/2} \end{bmatrix}$$

Operando,

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\delta}) &= \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{-3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum^T 1 & \sum^T t \\ \sum^T t & \sum^T t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{-3/2} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T^{3/2} & 0 \\ 0 & T^{5/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-3/2} & 0 \\ 0 & T^{-5/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum^T v_t \\ \sum^T tv_t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} T^{-1} \sum^T 1 & T^{-2} \sum^T t \\ T^{-2} \sum^T t & T^{-3} \sum^T t^2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} T^{3/2} & 0 \\ 0 & T^{5/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-3/2} \sum^T v_t \\ T^{-5/2} \sum^T tv_t \end{bmatrix} \\ &\stackrel{d}{\rightarrow} \begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{-3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \int_0^1 W(r) \\ \lambda \int_0^1 rW(r) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \int_0^1 W(r) \\ \lambda \int_0^1 rW(r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2}(\hat{\delta}_0 - \delta_0) \\ \sqrt{T}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \lambda \{ 4 \int_0^1 W(r) - 6 \int_0^1 rW(r) \} \\ \lambda \{ -6 \int_0^1 W(r) + 12 \int_0^1 rW(r) \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda W^{\delta_0} \\ \lambda W^{\delta_1} \end{bmatrix}$$

b) Utilizando el resultado a) del presente lema y aplicando el Teorema de la Transformación Continua (*Continuous Mapping Theorem*, CMT), se tiene que

$$\begin{aligned} T^{-2} \sum_{t=1}^T \hat{v}_{t-1}^2 &= T^{-2} \sum (v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))^2 \\ &= T^{-1} \sum (T^{-1/2}v_{t-1} + T^{-1/2}(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + T^{-1/2}(\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))^2 \\ &\xrightarrow{d} \lambda^2 \int \left[W^\mu(r) - 12 \left(r - \frac{1}{2} \right) \int \left(s - \frac{1}{2} \right) W(s) ds \right]^2 dr \\ &= \lambda^2 \int [W^\tau(r)]^2 dr \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i}^2 &= T^{-1} \sum (\Delta v_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))^2 \\ &= T^{-1} \sum (u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))^2 \\ &= T^{-1} \sum u_{t-i}^2 + T^{-1}(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T + 2T^{-1}(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum u_{t-i} \\ &= T^{-1} \sum u_{t-i}^2 + o_p(1) \\ &\xrightarrow{p} \gamma(0) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

d)

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \Delta \hat{v}_{t-j} &= T^{-1} \sum \left((\Delta v_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)) (\Delta v_{t-j} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)) \right) \\ &= T^{-1} \sum \left((u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)) (u_{t-j} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)) \right) \\ &= T^{-1} \sum u_{t-i} u_{t-j} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum u_{t-i} \\ &\quad + T^{-1}(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum u_{t-j} + T^{-1}(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T \\ &= T^{-1} \sum u_{t-i} u_{t-j} + o_p(1) \\ &\xrightarrow{p} \gamma(j-i) \end{aligned}$$

para $i < j, j = 2, 3, \dots, p$.

e)

$$\begin{aligned}
 T^{-3/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} &= T^{-3/2} \sum ((\Delta v_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))(v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) \\
 &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))) \\
 &= T^{-3/2} \sum ((u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))(v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) \\
 &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))) \\
 &= T^{-3/2} \sum u_{t-i} v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-3/2} \sum u_{t-i} \\
 &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-3/2} \sum (t-1) u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-3/2} \sum v_{t-1} \\
 &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-3/2} (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-3/2} \sum (t-1) \\
 &= o_p(1)
 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

f)

$$\begin{aligned}
 T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} w_t &= T^{-1/2} \sum ((\Delta v_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))(\varepsilon_t - \phi^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) \\
 &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)))
 \end{aligned}$$

Recordar que $\Phi^*(1) = 1 - \sum_j^p \phi_j^*$ y que, bajo la hipótesis nula, $\phi^* = 0$. Por lo que,

$$\begin{aligned}
 T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} w_t &= T^{-1/2} \sum ((u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))(\varepsilon_t + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1))) \\
 &= T^{-1/2} \sum u_{t-i} \varepsilon_t + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1/2} \sum u_{t-i} \\
 &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1/2} \sum \varepsilon_t + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1/2} T \\
 &= T^{-1/2} \sum u_{t-i} \varepsilon_t + o_p(1) \\
 &\xrightarrow{d} N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0))
 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

g)

$$\begin{aligned}
 T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} w_t &= T^{-1} \sum (v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))(\varepsilon_t - \phi^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) \\
 &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1))
 \end{aligned}$$

Como $\phi^* = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} w_t &= T^{-1} \sum v_{t-1} \varepsilon_t + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-1} \sum \varepsilon_t \\
 &\quad + \Phi^*(1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} T + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum (t-1) \varepsilon_t \\
 &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 \Phi^*(1) T^{-1} \sum (t-1) \\
 &\stackrel{d}{\rightarrow} (1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots) \sigma_\varepsilon^2 \int W(r) dW(r) + \Phi^*(1) \lambda^2 W^{\delta_1} \int W(r) dr \\
 &\quad + (1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots) \sigma_\varepsilon^2 W(1) W^{\delta_0} + \Phi^*(1) \lambda^2 W^{\delta_0} W^{\delta_1} \\
 &\quad + (1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots) \sigma_\varepsilon^2 W^{\delta_1} \int r dW(r) + \lambda^2 \Phi^*(1) \frac{1}{2} [W(1)]^2 \\
 &= (1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots) \sigma_\varepsilon^2 \left\{ \int W(r) dW(r) + W^{\delta_0} W(1) \right. \\
 &\quad \left. + W^{\delta_1} \int r dW(r) \right\} + \Phi^*(1) \lambda^2 W^{\delta_1} \left\{ \int W(r) dr + W^{\delta_0} + \frac{W^{\delta_1}}{2} \right\} \\
 &= W^+
 \end{aligned}$$

h) Dado que

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_t &= v_t + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) t \\
 &= v_{t-1} + u_t + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) \\
 &= \hat{v}_{t-1} + u_t + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)
 \end{aligned}$$

se puede escribir entonces,

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= \frac{\sum \hat{v}_t \hat{v}_{t-1}}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} = \frac{\sum \hat{v}_{t-1}^2}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} + \frac{\sum \hat{v}_{t-1} u_t}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} + \frac{(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum \hat{v}_{t-1}}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} \\
 \hat{\rho} - 1 &= O_p(T^{-1})
 \end{aligned}$$

porque $\sum \hat{v}_{t-1}^2 = O_p(T^2)$, $\sum \hat{v}_{t-1} u_t = O_p(T)$ y $\sum \hat{v}_{t-1} = O_p(T^{3/2})$. □

Prueba del Lema 1.2:

a) De (1.13) se procede a estimar β :

$$(\hat{\beta} - \beta) = (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' w$$

y ajustando, se tiene que

$$\mathbf{\Upsilon}(\hat{\beta} - \beta) = \mathbf{\Upsilon}(\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \mathbf{\Upsilon} \mathbf{\Upsilon}^{-1} \tilde{X}' w$$

en donde $\mathbf{\Upsilon} = \text{diag}(\sqrt{T}, \sqrt{T}, \dots, \sqrt{T}, T)'$. Para la matriz $\mathbf{\Upsilon}^{-1}(\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{X}})\mathbf{\Upsilon}^{-1}$, los elementos del bloque superior izquierda $\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{X}}$ de dimensión $(p \times p)$ necesitan ser divididos por T , los primeros p elementos de la $(p+1)$ -ésima fila y $(p+1)$ -ésima columna por $T^{3/2}$ y, finalmente, el elemento correspondiente a la fila $(p+1)$, columna $(p+1)$ de $\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{X}}$ se divide por T^2 . Por lo tanto, utilizando los resultados del Lema 1.1, se obtiene que

$$\mathbf{\Upsilon}^{-1}(\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{X}})\mathbf{\Upsilon}^{-1} \xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(p-2) & 0 \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(p-3) & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \gamma(p-2) & \gamma(p-3) & \dots & \gamma(0) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^2 \int [W^\tau(r)]^2 dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{q}_0^\tau \end{bmatrix}$$

Al analizar el otro término, y se ve que

$$\mathbf{\Upsilon}^{-1}(\tilde{\mathbf{X}}'\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-1} w_t \\ T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-2} w_t \\ \vdots \\ T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-p} w_t \\ T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} w_t \end{bmatrix}$$

Notar que la distribución asintótica de cada uno de los p primeros componentes viene dada por el Lema 1.1.f), y por tanto, se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-1} w_t \\ T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-2} w_t \\ \vdots \\ T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-p} w_t \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathbf{h}_1$$

En cuanto al resultado asintótico para el término $p+1$,

$$T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} w_t \xrightarrow{d} \mathbf{h}_2$$

que coincide con el apartado g) del Lema 1.1. Entonces,

$$\mathbf{\Upsilon}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{q}_0^\tau \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{h}_1 \\ (\mathbf{q}_0^\tau)^{-1} \mathbf{h}_2 \end{bmatrix}$$

Particularizando en los p primeros componentes del vector $(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$, resulta que

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p - \boldsymbol{\beta}_p) = \sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1^* - \phi_1^* \\ \hat{\phi}_2^* - \phi_2^* \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p^* - \phi_p^* \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{h}_1$$

b) Definido el término de error w_t de acuerdo con el modelo objeto de análisis, y su residuo como:

$$\hat{w}_t = \Delta \hat{v}_t - \tilde{x}_t' \hat{\beta}$$

El estimador de la varianza puede escribirse:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_w^2 &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{w}_t^2 \\ &= T^{-1} \sum \left(\tilde{x}_t' \beta + w_t - \tilde{x}_t' \hat{\beta} \right)^2 \\ &= T^{-1} \sum \left(\tilde{x}_t' (\beta - \hat{\beta}) + w_t \right)^2 \end{aligned}$$

y, con simples manipulaciones, se llega a que

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_w^2 &= T^{-1} \sum \left((\phi_1^* - \hat{\phi}_1^*) \Delta \hat{v}_{t-1} + (\phi_2^* - \hat{\phi}_2^*) \Delta \hat{v}_{t-2} + \dots + (\phi_p^* - \hat{\phi}_p^*) \Delta \hat{v}_{t-p} \right. \\ &\quad \left. + (\phi^* - \hat{\phi}^*) \hat{v}_{t-1} + (\varepsilon_t - \phi^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)) \right)^2 \\ &= T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*)^2 \Delta \hat{v}_{t-i}^2 + (\phi^* - \hat{\phi}^*)^2 T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1}^2 + T^{-1} \sum \varepsilon_t^2 \\ &\quad + \phi^{*2} (\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 T^{-1} T + \phi^{*2} (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1)^2 + [\Phi^*(1)]^2 (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} T \\ &\quad + 2T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) \Delta \hat{v}_{t-i} \varepsilon_t - 2\phi^* (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) \Delta \hat{v}_{t-i} \\ &\quad - 2\phi^* (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) (t-1) \Delta \hat{v}_{t-i} + 2\Phi^*(1) (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) \Delta \hat{v}_{t-i} \\ &\quad + 2(\phi^* - \hat{\phi}^*) T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} \varepsilon_t - 2\phi^* (\phi^* - \hat{\phi}^*) (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} \\ &\quad - 2\phi^* (\phi^* - \hat{\phi}^*) (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum (t-1) \hat{v}_{t-1} + 2(\phi^* - \hat{\phi}^*) \Phi^*(1) (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} \\ &= T^{-1} \sum \varepsilon_t^2 + o_p(1) \end{aligned}$$

Al encontrarnos bajo la hipótesis nula de raíz unitaria, $\phi^* = 0$. Entonces, por el Lema 1.1 y el apartado a) del Lema 1.2, resulta

$$\hat{\sigma}_w^2 \xrightarrow{p} \sigma_\varepsilon^2$$

c) El resultado sigue porque, por un lado, el denominador del estimador autorregresivo de varianza a largo plazo converge en probabilidad así:

$$\frac{1}{(1 - \sum \hat{\phi}_i^*)^2} \xrightarrow{p} \frac{1}{(1 - \sum \phi_i^*)^2}$$

y, por otro, porque $\hat{\sigma}_w^2 \xrightarrow{p} \sigma_\varepsilon^2$. Combinando ambos se llega al resultado buscado.

$$\hat{\lambda}_{\text{AR}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_w^2}{(1 - \sum \hat{\phi}_i^*)^2} \xrightarrow{p} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - \sum \phi_i^*)^2} = \psi(1)^2 \sigma_\varepsilon^2 \equiv \lambda^2$$

□

Prueba del Lema 1.3: Teniendo en cuenta (1.24), se puede escribir el estimador kernel como

$$\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2 = T^{-1} \sum u_t^2 + 2 \sum \left(1 - \frac{j}{B_T + 1}\right) T^{-1} \sum u_{t-i} u_{t-j} + o_p(1)$$

La demostración general puede verse en Newey y West (1987).

□

Prueba del Lema 1.4:

a) Primero, se estima $\boldsymbol{\delta}$ por OLS:

$$(\hat{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\delta}) = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{v}$$

y, después, se ajusta la regresión anterior convenientemente y se obtiene:

$$\mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} (\hat{\delta}_0 - \delta_0) \\ (\hat{\delta}_1 - \delta_1) \end{bmatrix} = \mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} \sum^T 1 & \sum^T t \\ \sum^T t & \sum^T t^2 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^{-1} \begin{bmatrix} \sum^T v_t \\ \sum^T t v_t \end{bmatrix}$$

en donde

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}$$

Entonces, al introducir esta expresión en la ecuación anterior, se tiene que

$$\begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{\delta}_0 - \delta_0) \\ (\hat{\delta}_1 - \delta_1) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum^T 1 & \sum^T t \\ \sum^T t & \sum^T t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \right\}^{-1} \\ \cdot \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum^T v_t \\ \sum^T t v_t \end{bmatrix}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación converge a

$$\left\{ \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum^T 1 & \sum^T t \\ \sum^T t & \sum^T t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \right\}^{-1} \xrightarrow{p} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}$$

Notar que, en el segundo término $\{\mathbf{D}_1^{-1}(Z'v)\}$, el primer componente satisface

$$\begin{aligned} T^{-1/2} \sum^T v_t &= T^{-1/2} \sum [u_{t-1} + \rho_0 u_{t-2} + \dots] \\ &\stackrel{d}{\rightarrow} \lambda_u W(1)(1 + \rho_0 + \rho_0^2 + \dots) \\ &= \frac{\lambda_u W(1)}{(1 - \rho_0)} = \lambda_v W(1) \end{aligned}$$

por el TFCL, mientras el segundo elemento

$$\begin{aligned} T^{-1/2} \sum^T (t/T)v_t &\stackrel{d}{\rightarrow} \frac{\lambda_u}{(1 - \rho_0)} \left\{ W(1) - \int W(r)dr \right\} \\ &= \lambda_v \left\{ W(1) - \int W(r)dr \right\} \end{aligned}$$

que coincide con el apartado *i*) de la Proposición 2. Notar, además, que $\lambda_v = \lambda_u/(1 - \rho_0)$. Específicamente, su varianza se calcula así: $E[(tv_t)]^2 = (\lambda_v^2/3)$. Finalmente, la distribución asintótica resultante es:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{T}(\hat{\delta}_0 - \delta_0) \\ T^{3/2}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \end{bmatrix} \stackrel{d}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 6\lambda_v \int_0^1 W(r)dr - 2\lambda_v W(1) \\ 6\lambda_v W(1) - 12\lambda_v \int_0^1 W(r)dr \end{bmatrix}$$

- b) Del apartado anterior tomamos los órdenes de convergencia de $(\hat{\delta}_0 - \delta_0)$ and $(\hat{\delta}_1 - \delta_1)$ para escribir que

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1}^2 &= T^{-1} \sum (v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))^2 \\ &= T^{-1} \sum v_{t-1}^2 + T^{-1}(\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 T + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1)^2 \\ &\quad + 2T^{-1}(\delta_0 - \hat{\delta}_0) \sum v_{t-1} + 2(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1)v_{t-1} \\ &\quad + 2T^{-1}(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum (t-1) \\ &= T^{-1} \sum v_{t-1}^2 + o_p(1) \\ &\stackrel{p}{\rightarrow} \gamma^*(0) \end{aligned}$$

y, como consecuencia directa, se tiene que $T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \stackrel{p}{\rightarrow} 0$.

c)

$$\begin{aligned}
T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i}^2 &= T^{-1} \sum (\Delta \hat{v}_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))^2 \\
&= T^{-1} \sum ((\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))^2 \\
&= (\rho_0 - 1)^2 T^{-1} \sum v_{t-(i+1)}^2 + T^{-1} \sum u_{t-i}^2 + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} T \\
&\quad + 2(\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} u_{t-i} + 2(\rho_0 - 1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} \\
&\quad + 2(\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum u_{t-i} \\
&= (\rho_0 - 1)^2 T^{-1} \sum v_{t-(i+1)}^2 + T^{-1} \sum u_{t-i}^2 \\
&\quad + 2(\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} u_{t-i} + o_p(1) \\
&\stackrel{p}{\rightarrow} \mathbf{b}^2 \gamma^*(0) + \gamma(0) - 2\mathbf{b} \gamma_{uv}(1) \\
&= \gamma_{\Delta \hat{v}}(i)
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

d)

$$\begin{aligned}
T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \Delta \hat{v}_{t-j} &= T^{-1} \sum \left(((\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))((\rho_0 - 1)v_{t-(j+1)} \right. \\
&\quad \left. + u_{t-j} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)) \right) \\
&= (\rho_0 - 1)^2 T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} v_{t-(j+1)} + (\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} u_{t-j} \\
&\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} \\
&\quad + (\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(j+1)} u_{t-i} + T^{-1} \sum u_{t-i} u_{t-j} \\
&\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(j+1)} \\
&\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum u_{t-j} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} T \\
&= (\rho_0 - 1)^2 T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} v_{t-(j+1)} + (\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} u_{t-j} \\
&\quad + (\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(j+1)} u_{t-i} + T^{-1} \sum u_{t-i} u_{t-j} + o_p(1) \\
&\stackrel{p}{\rightarrow} \mathbf{b}^2 \gamma^*(j-i) - \mathbf{b} \gamma_{uv}(j-i-1) - \mathbf{b} \gamma_{uv}(i-j-1) + \gamma(j-i) \\
&= \gamma_{\Delta \hat{v}, \Delta \hat{v}}(j-i)
\end{aligned}$$

para $i < j, j = 2, 3, \dots, p$.

e)

$$\begin{aligned}
T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} &= T^{-1} \sum \left(((\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))(v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) \right. \\
&\quad \left. + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)) \right) \\
&= (\rho_0 - 1)T^{-1} \sum v_{t-(i+1)}v_{t-1} + (\rho_0 - 1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} \\
&\quad + (\rho_0 - 1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1)v_{t-(i+1)} + T^{-1} \sum v_{t-1}u_{t-i} \\
&\quad + (\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1} \sum u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1)u_{t-i} \\
&\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum v_{t-1} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1}T \\
&\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2T^{-1} \sum (t-1) \\
&= (\rho_0 - 1)T^{-1} \sum v_{t-(i+1)}v_{t-1} + T^{-1} \sum v_{t-1}u_{t-i} + o_p(1) \\
&\xrightarrow{p} -\mathbf{b}\gamma^*(i) + \gamma_{uv}(i-1) \\
&= \gamma_{\Delta \hat{v}, \hat{v}}(i-1)
\end{aligned}$$

para $i = 2, 3, \dots, p$.

f)

$$\begin{aligned}
T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} w_t &= T^{-1/2} \sum \left(((\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))(\varepsilon_t \right. \\
&\quad \left. - \phi_0^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)) \right) \\
&= (\rho_0 - 1)T^{-1/2} \sum v_{t-(i+1)}\varepsilon_t \\
&\quad - \phi_0^*(\rho_0 - 1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1/2} \sum v_{t-(i+1)} \\
&\quad - \phi_0^*(\delta_1 - \hat{\delta}_1)(\rho_0 - 1)T^{-1/2} \sum (t-1)v_{t-(i+1)} \\
&\quad + (\rho_0 - 1)\Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1/2} \sum v_{t-(i+1)} \\
&\quad + T^{-1/2} \sum u_{t-i}\varepsilon_t - \phi_0^*(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1/2} \sum u_{t-i} \\
&\quad - \phi_0^*(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1/2} \sum (t-1)u_{t-i} + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1/2} \sum u_{t-i} \\
&\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1/2} \sum \varepsilon_t - \phi_0^*(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1/2}T \\
&\quad - \phi_0^*(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2T^{-1/2} \sum (t-1) + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2T^{-1/2}T \\
&= o_p(1)
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$, porque el primer y quinto términos se cancelan asintóticamente y el resto de términos son $o_p(1)$.

g)

$$\begin{aligned}
 T^{-1/2} \sum \hat{v}_{t-1} w_t &= T^{-1/2} \sum \left((v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)) \varepsilon_t \right. \\
 &\quad \left. - \phi_0^* [(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \right) \\
 &= T^{-1/2} \sum v_{t-1} \varepsilon_t - \phi_0^* (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-1/2} \sum v_{t-1} \\
 &\quad - \phi_0^* (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1/2} \sum (t-1) v_{t-1} + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1/2} \sum v_{t-1} \\
 &\quad + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-1/2} \sum \varepsilon_t - \phi_0^* (\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 T^{-1/2} T \\
 &\quad - \phi_0^* (\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1/2} \sum (t-1) + \Phi^*(1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1/2} T \\
 &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1/2} \sum (t-1) \varepsilon_t - \phi_0^* (\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1/2} \sum (t-1) \\
 &\quad - \phi_0^* (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1/2} \sum (t-1)^2 + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1/2} \sum (t-1) \\
 &= T^{-1/2} \sum v_{t-1} \varepsilon_t + o_p(1) \\
 &\xrightarrow{d} N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0) \mathbf{b}^{-2}) = \mathbf{h}_4
 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

h) Partiendo de que la serie filtrada definida en (1.21) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_t &= v_t + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)t \\
 &= \rho_0 v_{t-1} + u_t + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)t + \rho_0 [(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] \\
 &\quad - \rho_0 [(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) - (\delta_1 - \hat{\delta}_1) \\
 &= \rho_0 \hat{v}_{t-1} + (1 - \rho_0) [(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + u_t + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)
 \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= \frac{\sum \hat{v}_{t-1} \hat{v}_t}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} \\
 &= \rho_0 + \frac{\sum \hat{v}_{t-1} u_t}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} + \frac{(1 - \rho_0)(\delta_0 - \hat{\delta}_0) \sum \hat{v}_{t-1}}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} + \frac{(1 - \rho_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum t \hat{v}_{t-1}}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} \\
 &\quad + \rho_0 \frac{(\delta_0 - \hat{\delta}_0) \sum \hat{v}_{t-1}}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} \\
 &\xrightarrow{p} \rho_0 + \frac{\gamma_{uv}(1)}{\gamma^*(0)} = \rho_0^*
 \end{aligned}$$

Cuando u_t sigue un proceso AR(1), podemos particularizar el resultado anterior como sigue

$$\hat{\rho} \xrightarrow{p} \rho_0 + \frac{\frac{\phi\gamma(0)}{(1-\phi\rho_0)}}{\frac{\gamma(0)(1+\rho_0\phi)}{(1-\rho_0\phi)(1-\rho_0^2)}} = \rho_0 + \frac{\phi(1-\rho_0^2)}{(1+\phi\rho_0)} = \rho_0^*$$

porque $\sum \hat{v}_{t-1}^2 = O_p(T)$, $(\delta_0 - \hat{\delta}_0) = O_p(T^{-1/2})$, $(\delta_1 - \hat{\delta}_1) = O_p(T^{-3/2})$, $\sum \hat{v}_{t-1} = O_p(T^{1/2})$, $\sum v_{t-1}u_t = O_p(T)$ y $\sum tv_t = O_p(T^{3/2})$.

□

Prueba del Lema 1.5:

a) Se estima β por OLS tal y como se presentó en la prueba del Lema 1.2 y se procede a ajustar de igual manera:

$$\mathbf{\Upsilon}_0(\hat{\beta} - \beta) = \mathbf{\Upsilon}_0(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\mathbf{\Upsilon}_0\mathbf{\Upsilon}_0^{-1}\tilde{X}'\mathbf{w}$$

en donde, la matriz $\mathbf{\Upsilon}_0 = \text{diag}(\sqrt{T}, \sqrt{T}, \dots, \sqrt{T}, \sqrt{T})'$. Utilizando los resultados derivados en el Lema 1.4, se obtiene que

$$\mathbf{\Upsilon}_0(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\mathbf{\Upsilon}_0 \xrightarrow{p} \Sigma_0 = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

con

$$\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} \gamma_{\Delta\hat{v}}(0) & \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(1) & \dots & \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(p-2) \\ \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(1) & \gamma_{\Delta\hat{v}}(0) & \dots & \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(p-3) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(p-2) & \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(p-3) & \dots & \gamma_{\Delta\hat{v}}(0) \end{bmatrix}$$

y

$$\Sigma_{12} = \begin{bmatrix} \gamma_{\Delta\hat{v},\hat{v}}(1) \\ \gamma_{\Delta\hat{v},\hat{v}}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{\Delta\hat{v},\hat{v}}(p-1) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21}'$$

$$\Sigma_{22} = \gamma^*(0)$$

Con respecto al segundo bloque de matrices, $\mathbf{\Upsilon}_0^{-1}(\tilde{X}'\mathbf{w})$, se ve que los p primeros elementos convergen a cero conforme $T \rightarrow \infty$ según el apartado *f*) del Lema 1.4; y el elemento $p+1$ se distribuye asintóticamente como dice el apartado *g*) del mismo lema. Sea esta matriz particionada:

$$\Sigma_0^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{C}_{11} = \Sigma_{11}^{-1}(\mathbf{I}_p + \Sigma_{12}\mathbf{C}_{22}\Sigma_{21})$, $\mathbf{C}_{12} = -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\mathbf{C}_{22}$, $\mathbf{C}_{21} = -\mathbf{C}_{22}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}$ y $\mathbf{C}_{22} = (\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})^{-1}$ siendo la matriz identidad $\mathbf{I}_p = (p \times p)$. Finalmente, utilizando un poco de álgebra, se obtiene la distribución asintótica de los p primeros elementos del vector $(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$.

b) Partiendo del Lema 1.2.b) y aplicando los resultados del Lema 1.4, se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_w^2 &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{w}_t^2 \\
&= T^{-1} \sum \left(\tilde{x}'_t \boldsymbol{\beta} + w_t - \tilde{x}'_t \hat{\boldsymbol{\beta}} \right)^2 \\
&= T^{-1} \sum \left(\tilde{x}'_t (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) + w_t \right)^2 \\
&= T^{-1} \sum \left((\phi_1^* - \hat{\phi}_1^*) \Delta \hat{v}_{t-1} + (\phi_2^* - \hat{\phi}_2^*) \Delta \hat{v}_{t-2} + \dots + (\phi_p^* - \hat{\phi}_p^*) \Delta \hat{v}_{t-p} \right. \\
&\quad \left. + (\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*) \hat{v}_{t-1} + (\varepsilon_t - \phi_0^* [(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)) \right)^2 \\
&= T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*)^2 \Delta \hat{v}_{t-i}^2 + (\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*)^2 T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1}^2 + T^{-1} \sum \varepsilon_t^2 \\
&\quad + \phi_0^{*2} (\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 T^{-1} T + \phi_0^{*2} (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1)^2 + [\Phi^*(1)]^2 (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} T \\
&\quad + 2T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) \Delta \hat{v}_{t-i} \varepsilon_t - 2\phi_0^* (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) \Delta \hat{v}_{t-i} \\
&\quad - 2\phi_0^* (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) (t-1) \Delta \hat{v}_{t-i} + 2\Phi^*(1) (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) \Delta \hat{v}_{t-i} \\
&\quad + 2(\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*) T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} \varepsilon_t - 2\phi_0^* (\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*) (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} \\
&\quad - 2\phi_0^* (\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*) (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum (t-1) \hat{v}_{t-1} + 2(\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*) \Phi^*(1) (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} \\
&= T^{-1} \sum \varepsilon_t^2 + o_p(1) \\
&\xrightarrow{p} \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

c) Entonces, del apartado a) anterior se deduce que el denominador del estimador de varianza a largo plazo no es consistente asintóticamente y, en su lugar, presenta el siguiente resultado asintótico:

$$1/(1 - \sum \hat{\phi}_i^*)^2 \xrightarrow{p} 1/(1 - \eta)^2$$

en donde, η denota el límite en probabilidad del sumatorio del bloque de los p primeros coeficientes estimados de $\boldsymbol{\beta}$. Combinando este resultado con el del apartado b) se llega a $\hat{\lambda}_{AR}^2 \xrightarrow{p} \lambda_0^2$, que es el resultado buscado.

□

Prueba del Lema 1.6: Sea el estimador kernel construido a partir de la primera diferencia de los residuos definidos en (1.9). Entonces, teniendo en cuenta (1.27) se puede extender Cai y Shintani (2006, Teorema 2) para obtener el resultado que buscamos. \square

Prueba del Teorema 1.1:

a) Combinando el apartado b) del Lema 1.1, que proporciona el resultado asintótico del numerador del estadístico, y el resultado dado en el Lema 1.2 o en el Lema 1.3, según sea el estimador empleado, se llega directamente a la distribución bajo la hipótesis nula de raíz unitaria del contraste MSB:

$$\text{MSB} \xrightarrow{d} \left\{ \int [W^\tau(r)]^2 dr \right\}^{1/2}$$

b) Teniendo en cuenta el TFCL se puede aplicar la teoría asintótica local de forma que el numerador del estadístico se distribuye ahora como

$$T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \lambda^2 \int [J_c^\tau(r)]^2 dr$$

En cuanto al comportamiento del denominador, se puede extender sin dificultad los resultados de los lemas 1.2 y 1.3, y obtener que el resultado de consistencia para ambos estimadores de la varianza a largo plazo. Finalmente, combinando estos resultados se llega a que el contraste MSB, bajo la hipótesis alternativa local, presenta la siguiente distribución asintótica:

$$\text{MSB} \xrightarrow{d} \left\{ \int [J_c^\tau(r)]^2 dr \right\}^{1/2}$$

c) En este caso, bajo la hipótesis alternativa no local, el contraste MSB es consistente por dos motivos: primero, porque el numerador tiende a cero como consecuencia del resultado b) del Lema 1.4 y segundo, porque el estimador de varianza a largo plazo, cualquiera que sea, converge a un valor constante como se puede ver en los lemas 1.5 y 1.6. Utilizando estos resultados se llega al resultado buscado:

$$\text{MSB} \xrightarrow{p} 0$$

\square

Prueba del Corolario 1.1: La particularización de los resultados obtenidos para el modelo amplio en el Teorema 1.1 es directa. Basta con tener en cuenta que, en este caso restringido, bajo la hipótesis nula, el TFCL que se aplica dice: $T^{-1/2} \hat{v}_{t-1} \xrightarrow{d} \lambda W^\mu(r)$, denotando $W^\mu(r)$ un proceso *demeaned* de Wiener; y, bajo la hipótesis alternativa local, el principio invariante es: $T^{-1/2} \hat{v}_{t-1} \xrightarrow{d} \lambda J_c^\mu(r)$ en donde, $J_c^\mu(r)$ es un proceso *demeaned* de Ornstein-Uhlenbeck. \square

Prueba del Lema 1.7:

a) En primer lugar, se va a estimar los coeficientes δ_0 y δ_1 por OLS a partir del modelo transformado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\hat{\delta}_0 - \delta_0) \\ (\hat{\delta}_1 - \delta_1) \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{c}}{T} & \cdots & -\frac{\bar{c}}{T} \\ 1 & 1 - \frac{\bar{c}}{T} & \cdots & 1 - \frac{\bar{c}}{T}(T-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\bar{c}}{T} & 1 - \frac{\bar{c}}{T} \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{\bar{c}}{T} & 1 - \frac{\bar{c}}{T}(T-1) \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{c}}{T} & \cdots & -\frac{\bar{c}}{T} \\ 1 & 1 - \frac{\bar{c}}{T} & \cdots & 1 - \frac{\bar{c}}{T}(T-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - \rho_{\bar{c}}v_1 \\ \vdots \\ v_T - \rho_{\bar{c}}v_{T-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\bar{c}^2}{T^2}(T-1) & 1 - \bar{c} + \frac{\bar{c}}{T} + \left(\frac{\bar{c}}{T}\right)^2 \sum t \\ 1 - \bar{c} + \frac{\bar{c}}{T} + \left(\frac{\bar{c}}{T}\right)^2 \sum t & \sum (1 - \frac{\bar{c}}{T}(t-1))^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} v_1 - \frac{\bar{c}}{T} \sum ((1 - \rho_{\bar{c}})v_{t-1} + u_t) \\ v_1 + \sum_{t=2}^T (v_t - \rho_{\bar{c}}v_{t-1}) - \frac{\bar{c}}{T} \sum_{t=2}^T (t-1)(v_t - \rho_{\bar{c}}v_{t-1}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ajustando la regresión de la estimación,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\hat{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\delta}) &= \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})^{-1}\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}}) \\ &= \{\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\bar{\mathbf{D}}^{-1}\}^{-1}\{\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}})\} \end{aligned}$$

en donde,

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{T} \end{bmatrix}$$

Utilizando el resultado *j*) de la Proposición 2, resulta que la primera matriz del lado derecho converge así: $\{\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\bar{\mathbf{D}}^{-1}\} \xrightarrow{p} \mathbf{Q}$ con $\mathbf{Q} = \text{diag}(1, a)$ siendo $a = (1 - \bar{c} + \bar{c}^2/3)$. En lo que respecta al ajuste de la segunda matriz de la derecha de la expresión, se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{c}}{T} & \cdots & -\frac{\bar{c}}{T} \\ 1 & 1 - \frac{\bar{c}}{T} & \cdots & 1 - \frac{\bar{c}}{T}(T-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - \rho_{\bar{c}}v_1 \\ \vdots \\ v_T - \rho_{\bar{c}}v_{T-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 - \frac{\bar{c}}{T} \sum ((1 - \rho_{\bar{c}})v_{t-1} + u_t) \\ T^{-1/2}v_1 + T^{-1/2} \sum (\Delta v_t - \frac{\bar{c}}{T}v_{t-1}) - T^{-1/2} \frac{\bar{c}}{T} \sum (t-1)(\Delta v_t - \frac{\bar{c}}{T}v_{t-1}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notar que, bajo la hipótesis nula de raíz unitaria, $\Delta v_t = u_t$, por lo que, los límites son como se indican a continuación:

$$\begin{aligned} v_1 - \bar{c}T^{-1} \sum ((1 - \rho_c)v_{t-1} + u_t) &= v_1 + o_p(1) \\ T^{-1/2}v_1 + T^{-1/2} \sum (\Delta v_t - \bar{c}T^{-1}v_{t-1}) - T^{-1/2}\bar{c}T^{-1} \sum (t-1) (\Delta v_t - \bar{c}T^{-1}v_{t-1}) \\ &\xrightarrow{d} \lambda \{(1 - \bar{c})W(1) + \bar{c}^2 \int rW(r)dr\} = \lambda W_1^* \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} (\hat{\delta}_0 - \delta_0) &\xrightarrow{d} v_1 \\ \sqrt{T}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) &\xrightarrow{d} a^{-1}\lambda W_1^* \end{aligned}$$

que es el resultado que buscábamos.

b) Procediendo de manera similar a la prueba del Lema 1.1.b), se tiene que

$$\begin{aligned} T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 &= T^{-2} \sum (v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))^2 \\ &= T^{-1} \sum (T^{-1/2}v_{t-1} + T^{-1/2}(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + T^{-1/2}(\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))^2 \\ &\xrightarrow{d} \lambda^2 \int \left[W(r) - r \left(\nu W(1) + 3(1 - \nu) \int sW(s)ds \right) \right]^2 dr \\ &= \lambda^2 \int [V_{\bar{c}}^r(r)]^2 dr \end{aligned}$$

donde $\nu = (1 - \bar{c})/(1 - \bar{c} + (\bar{c}^2/3))$.

c)

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i}^2 &= T^{-1} \sum (\Delta v_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))^2 \\ &= T^{-1} \sum (u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))^2 \\ &= T^{-1} \sum u_{t-i}^2 + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1}T + 2(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum u_{t-i} \\ &= T^{-1} \sum u_{t-i}^2 + o_p(1) \\ &\xrightarrow{p} \gamma(0) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

d) La prueba sigue como en el Lema 1.1.d).

e) Se procede de manera similar a la prueba del Lema 1.1.e).

f) La prueba sigue como en el Lema 1.1.f).

g) Primero de todo, recordemos que, bajo la hipótesis nula, $\phi^* = 0$. Así, procediendo como en Lema 1.1.g) y utilizando los resultados del apartado a), se tiene que

$$\begin{aligned}
 T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} w_t &= T^{-1} \sum (v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))(\varepsilon_t - \phi^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) \\
 &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)) \\
 &= T^{-1} \sum v_{t-1} \varepsilon_t + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-1} \sum \varepsilon_t \\
 &\quad + \Phi^*(1) T^{-1} (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0) T + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum (t-1) \varepsilon_t \\
 &\quad + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1) \\
 &\stackrel{d}{\rightarrow} (1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots) \sigma_\varepsilon^2 \int W(r) dW(r) + \Phi^*(1) a^{-1} \lambda^2 W_1^* \int W(r) dr \\
 &\quad + (1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots) \sigma_\varepsilon^2 a^{-1} W_1^* \int r dW(r) + \Phi^*(1) \frac{1}{2a^2} \lambda^2 [W_1^*]^2 \\
 &= (1 + \psi_1 + \psi_2 + \dots) \sigma_\varepsilon^2 \left\{ \int W(r) dW(r) + \frac{W_1^*}{a} \int r dW(r) \right\} \\
 &\quad + \Phi^*(1) \lambda^2 \frac{W_1^*}{a} \left\{ \int W(r) dr + \frac{W_1^*}{2a} \right\} \\
 &= \bar{W}^+
 \end{aligned}$$

h) El resultado se obtiene como en el Lema 1.1.h). □

Prueba del Lema 1.8:

- a) Utilizando los resultados obtenidos en el el Lema 1.7 y, siguiendo un procedimiento similar al desarrollado en el Lema 1.2.a), se obtiene el resultado que estábamos buscando.
- b) La prueba es similar a la del Lema 1.2.b), y se llega al resultado directamente con los resultados de los lemas 1.7 y 1.8.a).
- c) El resultado $\hat{\lambda}_{AR}^2 \xrightarrow{P} \lambda^2$ es consecuencia de los dos apartados anteriores. □

Prueba del Lema 1.9: Demostrado ya en la prueba del Lema 1.3, pero en este caso, se ha de tener en cuenta que $\Delta \hat{v}_t = u_t + o(1)$ junto con el Lema 1.7.a). □

Prueba del Lema 1.10:

- a) En este caso y, siguiendo un argumento similar al expuesto en el apartado a) del Lema 1.4, se obtiene el orden de convergencia de los elementos deterministas del modelo.

Primero, se plantea la regresión como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\hat{\delta}_0 - \delta_0) \\ (\hat{\delta}_1 - \delta_1) \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{c}}{T} & \cdots & -\frac{\bar{c}}{T} \\ 1 & 1 - \frac{\bar{c}}{T} & \cdots & 1 - \frac{\bar{c}}{T}(T-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\bar{c}}{T} & 1 - \frac{\bar{c}}{T} \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{\bar{c}}{T} & 1 - \frac{\bar{c}}{T}(T-1) \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - \rho_{\bar{c}}v_1 \\ \vdots \\ v_T - \rho_{\bar{c}}v_{T-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\bar{c}^2}{T^2}(T-1) & 1 - \bar{c} + \frac{\bar{c}}{T} + \left(\frac{\bar{c}}{T}\right)^2 \sum t \\ 1 - \bar{c} + \frac{\bar{c}}{T} + \left(\frac{\bar{c}}{T}\right)^2 \sum t & \sum (1 - \frac{\bar{c}}{T}(t-1))^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} v_1 + \left(-\frac{\bar{c}}{T}\right) \sum ((1 - \rho_{\bar{c}})v_{t-1} + u_t) \\ v_1 + \sum_{t=2}^T (v_t - \rho_{\bar{c}}v_{t-1}) - \frac{\bar{c}}{T} \sum_{t=2}^T (t-1)(v_t - \rho_{\bar{c}}v_{t-1}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se ajusta y queda,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_1(\hat{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\delta}) &= \bar{\mathbf{D}}_1(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})^{-1}\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}} \\ &= \{\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}}) \end{aligned}$$

con $\bar{\mathbf{D}}_1 = \text{diag}(1, T)$. Empleando algunos resultados asintóticos ya conocidos, se tiene que

$$\{\bar{\mathbf{D}}_1^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\}^{-1} \xrightarrow{p} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\bar{c}-1-\bar{c}^2/2}{1+\bar{c}^2/3-\bar{c}} \\ 0 & \frac{1}{1+\bar{c}^2/3-\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & g/a \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}$$

donde $g = (\bar{c} - 1 - \bar{c}^2/2)$. Con respecto a la otra matriz del lado derecho de la ecuación, $\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}}$, se observa que

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}} &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{c}}{T} & \cdots & -\frac{\bar{c}}{T} \\ 1 & 1 - \frac{\bar{c}}{T} & \cdots & 1 - \frac{\bar{c}}{T}(T-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - \rho_{\bar{c}}v_1 \\ \vdots \\ v_T - \rho_{\bar{c}}v_{T-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 - \bar{c}T^{-1} \sum (v_t - \rho_{\bar{c}}v_{t-1}) \\ v_1 + \sum (v_t - \rho_{\bar{c}}v_{t-1}) - \bar{c}T^{-1} \sum t(v_t - \rho_{\bar{c}}v_{t-1}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1(1 + \frac{\bar{c}}{T}) - \frac{\bar{c}}{T}v_T + \frac{\bar{c}^2}{T^2} \sum v_{t-1} \\ v_1 + (-v_1 + v_T) - \frac{\bar{c}}{T} \sum_2^T v_{t-1} - \frac{\bar{c}}{T}(-2v_1 + Tv_T - \sum_3^T v_{t-1}) + \frac{\bar{c}^2}{T^2} \sum_2^T tv_{t-1} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{d} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_T(1 - \bar{c}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\sum t\Delta v_t = Tv_T - 2v_1 - \sum_{t=3}^T v_{t-1}$ y que $\sum \Delta v_t = v_T - v_1$. Consecuentemente,

$$(\hat{\delta}_0 - \delta_0) \xrightarrow{d} v_1 + (g/a)v_T(1 - \bar{c}) = \mathbf{m}_{\delta_0}$$

$$T(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \xrightarrow{d} v_T(1 - \bar{c})a^{-1} = \mathbf{m}_{\delta_1}$$

b) A partir del resultado anterior, siguiendo un argumento similar al apartado b) del Lema 1.4, se tiene que:

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1}^2 &= T^{-1} \sum (v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))^2 \\ &= T^{-1} \sum v_{t-1}^2 + (\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 T^{-1}T + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1)^2 \\ &\quad + 2(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1} \sum v_{t-1} + 2(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1)v_{t-1} \\ &\quad + 2(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1) \\ &= T^{-1} \sum v_{t-1}^2 + (\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1)^2 \\ &\quad + 2(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1) + o_p(1) \\ &\xrightarrow{d} \gamma^*(0) + \mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \frac{\mathbf{m}_{\delta_1}^2}{3} + \mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1} \end{aligned}$$

c) Tomando los resultados del apartado a), procedemos de igual manera que en el apartado c) del Lema 1.4.

d) Al resultado se llega de la misma forma que en el Lema 1.4.d) teniendo en cuenta los resultados del apartado a) anterior.

e)

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} &= T^{-1} \sum \left(((\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))(v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) \right. \\ &\quad \left. + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)) \right) \\ &= (\rho_0 - 1)T^{-1} \sum v_{t-(i+1)}v_{t-1} + (\rho_0 - 1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} \\ &\quad + (\rho_0 - 1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1)v_{t-(i+1)} + T^{-1} \sum v_{t-1}u_{t-i} \\ &\quad + (\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1} \sum u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1)u_{t-i} \\ &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum v_{t-1} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1}T \\ &\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\rho_0 - 1)T^{-1} \sum v_{t-(i+1)}v_{t-1} + T^{-1} \sum v_{t-1}u_{t-i} \\
&\quad + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1) + o_p(1) \\
&\xrightarrow{d} -\mathbf{b}\gamma^*(i) + \gamma_{uv}(i-1) = \gamma_{\Delta\hat{v},\hat{v}}(i-1)
\end{aligned}$$

para $i = 2, 3, \dots, p$.

f) Considerando el apartado a) anterior y procediendo como en el Lema 1.4.f), se tiene

$$\begin{aligned}
T^{-1/2} \sum \Delta\hat{v}_{t-i}w_t &= T^{-1/2} \sum \left(((\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1))(\varepsilon_t \right. \\
&\quad \left. - \phi_0^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)) \right) \\
&= (\rho_0 - 1)T^{-1/2} \sum v_{t-(i+1)}\varepsilon_t \\
&\quad - \phi_0^*(\rho_0 - 1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1/2} \sum v_{t-(i+1)} \\
&\quad - \phi_0^*(\delta_1 - \hat{\delta}_1)(\rho_0 - 1)T^{-1/2} \sum (t-1)v_{t-(i+1)} \\
&\quad + (\rho_0 - 1)\Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1/2} \sum v_{t-(i+1)} \\
&\quad + T^{-1/2} \sum u_{t-i}\varepsilon_t - \phi_0^*(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1/2} \sum u_{t-i} \\
&\quad - \phi_0^*(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1/2} \sum (t-1)u_{t-i} \\
&\quad + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1/2} \sum u_{t-i} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1/2} \sum \varepsilon_t \\
&\quad - \phi_0^*(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1/2}T - \phi_0^*(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2T^{-1/2} \sum (t-1) \\
&\quad + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2T^{-1/2}T \\
&= o_p(1)
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$. Se ve directamente que los elementos primero y quinto se cancelan en el límite, al igual que sucede con los elementos segundo y sexto, tercero y séptimo. El resto de términos desaparecen asintóticamente por ser $o_p(1)$.

g) Conocidos los órdenes de probabilidad de los elementos deterministas en a), se procede como en el Lema 1.4.g) para obtener

$$\begin{aligned}
T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1}w_t &= T^{-1} \sum (v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))(\varepsilon_t \\
&\quad - \phi_0^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)) \\
&= T^{-1} \sum v_{t-1}\varepsilon_t - \phi_0^*(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1} \sum v_{t-1} \\
&\quad - \phi_0^*(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1)v_{t-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum v_{t-1} \\
& + (\delta_0 - \hat{\delta}_0)T^{-1} \sum \varepsilon_t - \phi_0^*(\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 T^{-1} T \\
& - \phi_0^*(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1) \\
& + \Phi^*(1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} T \\
& + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1)\varepsilon_t - \phi_0^*(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} T \\
& - \phi_0^*(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1)^2 + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} T \\
& = -\phi_0^*(\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 - \phi_0^*(\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)T^{-1} \sum (t-1) \\
& - \phi_0^*(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1)^2 + o_p(1) \\
& \xrightarrow{d} \mathbf{b}\Phi^*(1) \left(\mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \frac{\mathbf{m}_{\delta_0}\mathbf{m}_{\delta_1}}{2} + \frac{\mathbf{m}_{\delta_1}^2}{3} \right)
\end{aligned}$$

h) De forma similar al Lema 1.4.h) se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{\sum \hat{v}_{t-1}\hat{v}_t}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} \\
&= \rho_0 \frac{\sum \hat{v}_{t-1}^2}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} + \frac{\sum \hat{v}_{t-1}u_t}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} + \frac{(1-\rho_0)(\delta_0 - \hat{\delta}_0) \sum \hat{v}_{t-1}}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} + \frac{(1-\rho_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum tv_{t-1}}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} \\
&\quad + \rho_0 \frac{(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum \hat{v}_{t-1}}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} \\
&= \rho_0 + \frac{\sum v_{t-1}u_t + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) \sum u_t + (\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum (t-1)u_t}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} \\
&\quad + (1-\rho_0) \frac{(\delta_0 - \hat{\delta}_0) \sum v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 T + (\delta_0 - \hat{\delta}_0)(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum (t-1)}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} \\
&\quad + (1-\rho_0) \frac{(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum tv_{t-1} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0) \sum t + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 \sum t(t-1)}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} \\
&\quad + \rho_0 \frac{(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \sum v_{t-1} + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(\delta_0 - \hat{\delta}_0)T + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 \sum (t-1)}{\sum \hat{v}_{t-1}^2}
\end{aligned}$$

porque, en este caso, $\sum \hat{v}_{t-1}^2$ es $O_p(T)$; $\sum v_{t-1}$ es $O_p(T^{1/2})$; $(\delta_0 - \hat{\delta}_0)$ y $(\delta_1 - \hat{\delta}_1)$ son $O_p(1)$ y $O_p(T^{-1})$, respectivamente; $\sum u_t$ es $O_p(T^{1/2})$; y, $\sum tu_t$ y $\sum tv_{t-1}$ son $O_p(T^{3/2})$. Dividiendo la

expresión anterior por T , se puede escribir

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &\xrightarrow{d} \rho_0 + \frac{\gamma_{uv}(1)}{\gamma^*(0)} + (1 - \rho_0) \frac{\mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1} / 2}{\gamma^*(0)} + (1 - \rho_0) \frac{\mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1} / 2 + \mathbf{m}_{\delta_1}^2 / 3}{\gamma^*(0)} + \rho_0 \frac{\mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1}}{\gamma^*(0)} \\ &= \rho_0 + \frac{\gamma_{uv}(1)}{\gamma^*(0)} + \frac{(1 - \rho_0)}{\gamma^*(0)} \left(\mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1} + \frac{\mathbf{m}_{\delta_1}^2}{3} \right) + \rho_0 \frac{\mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1}}{\gamma^*(0)} \\ &= \rho_0 + \frac{\gamma_{uv}(1)}{\gamma^*(0)} + \frac{(1 - \rho_0)}{\gamma^*(0)} \left(\mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \frac{\mathbf{m}_{\delta_1}^2}{3} \right) + \rho_0 \frac{\mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1}}{\gamma^*(0)}\end{aligned}$$

y, si u_t sigue un proceso AR(1), entonces $\gamma_{uv}(1) = \phi\gamma(0)/(1 - \phi\rho_0)$ y $\gamma^*(0) = \gamma(0)(1 + \rho_0\phi)/((1 - \phi\rho_0)(1 - \rho_0^2))$ y, por lo tanto, resulta que

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &\xrightarrow{d} \rho_0 + \frac{\phi(1 - \rho_0^2)}{(1 + \rho_0\phi)} + \frac{(1 - \rho_0)}{\frac{\gamma(0)(1 + \rho_0\phi)}{(1 - \phi\rho_0)(1 - \rho_0^2)}} \left(\mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \frac{\mathbf{m}_{\delta_1}^2}{3} \right) - \rho_0 \frac{1}{\frac{\gamma(0)(1 + \rho_0\phi)}{(1 - \phi\rho_0)(1 - \rho_0^2)}} (\mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1}) \\ &= \rho_\tau^*\end{aligned}$$

□

Prueba del Lema 1.11:

a) En este caso, se procede como en el Lema 1.5 utilizando los resultados obtenidos recientemente y se escribe:

$$(\hat{\beta} - \beta) = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'w$$

Ajustando la regresión queda:

$$(\hat{\beta} - \beta) = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\mathbf{\Upsilon}_T\mathbf{\Upsilon}_T^{-1}\tilde{X}'w$$

con $\mathbf{\Upsilon}_T$ definida como antes. Así que, la primera matriz del lado derecho se comporta como se indica a continuación:

$$\{(\tilde{X}'\tilde{X})\mathbf{\Upsilon}_T^{-1}\}^{-1} \xrightarrow{d} \bar{\Sigma}_0^{-1}$$

con

$$\bar{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} \gamma_{\Delta\hat{v}}(0) & \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(1) & \cdots & \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(p-2) & \gamma_{\Delta\hat{v},\hat{v}}(1) \\ \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(1) & \gamma_{\Delta\hat{v}}(0) & \cdots & \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(p-3) & \gamma_{\Delta\hat{v},\hat{v}}(2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(p-2) & \gamma_{\Delta\hat{v},\Delta\hat{v}}(p-3) & \cdots & \gamma_{\Delta\hat{v}}(0) & \gamma_{\Delta\hat{v},\hat{v}}(p) \\ \gamma_{\Delta\hat{v},\hat{v}}(1) & \gamma_{\Delta\hat{v},\hat{v}}(2) & \cdots & \gamma_{\Delta\hat{v},\hat{v}}(p) & \{\gamma^*(0) + \mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \frac{\mathbf{m}_{\delta_1}^2}{3} + \mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1}\} \end{bmatrix}$$

En cuanto a la otra matriz del lado derecho, $\mathbf{\Upsilon}_T^{-1}(\tilde{X}'w)$, se ve que los p primeros elementos tienden a cero conforme $T \rightarrow \infty$. Y también, que el elemento $p + 1$ se distribuye según el apartado g) del Lema 1.10. Con un poco de álgebra matricial, se llega al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}(\hat{\beta}_p - \beta_p) &\xrightarrow{d} \bar{\mathbf{C}}_{12} \mathbf{h}_4 \\(\hat{\phi}_0^* - \phi_0^*) &\xrightarrow{d} \bar{\mathbf{C}}_{22} \mathbf{h}_4\end{aligned}$$

en donde $\bar{\mathbf{C}}_{12}$ y $\bar{\mathbf{C}}_{22}$ son elementos de la matriz inversa de $\bar{\mathbf{\Sigma}}_0$.

b) Considerando los resultados derivados en el Lema 1.10 así como el Lema 1.11.a), se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_w^2 &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{w}_t^2 \\&= T^{-1} \sum \left(\tilde{x}_t' \beta + w_t - \tilde{x}_t' \hat{\beta} \right)^2 \\&= T^{-1} \sum \left(\tilde{x}_t' (\beta - \hat{\beta}) + w_t \right)^2 \\&= T^{-1} \sum \left((\phi_1^* - \hat{\phi}_1^*) \Delta \hat{v}_{t-1} + (\phi_2^* - \hat{\phi}_2^*) \Delta \hat{v}_{t-2} + \dots + (\phi_p^* - \hat{\phi}_p^*) \Delta \hat{v}_{t-p} \right. \\&\quad \left. + (\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*) \hat{v}_{t-1} + (\varepsilon_t - \phi_0^*[(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1)] + \Phi^*(1)(\delta_1 - \hat{\delta}_1)) \right)^2 \\&= T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*)^2 \Delta \hat{v}_{t-i}^2 + (\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*)^2 T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1}^2 + T^{-1} \sum \varepsilon_t^2 + \phi_0^{*2} (\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 T^{-1} T \\&\quad + \phi_0^{*2} (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1)^2 + [\Phi^*(1)]^2 (\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} T + 2T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) \Delta \hat{v}_{t-i} \varepsilon_t \\&\quad - 2\phi_0^* (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) \Delta \hat{v}_{t-i} - 2\phi_0^* (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) (t-1) \Delta \hat{v}_{t-i} \\&\quad + 2\Phi^*(1) (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum_{i=1}^p (\phi_i^* - \hat{\phi}_i^*) \Delta \hat{v}_{t-i} + 2(\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*) T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} \varepsilon_t \\&\quad - 2\phi_0^* (\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*) (\delta_0 - \hat{\delta}_0) T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} - 2\phi_0^* (\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*) (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum (t-1) \hat{v}_{t-1} \\&\quad + 2(\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*) \Phi^*(1) (\delta_1 - \hat{\delta}_1) T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1}\end{aligned}$$

El primer término converge en probabilidad a cero y, el segundo, conforme $T \rightarrow \infty$,

$$(\phi_0^* - \hat{\phi}_0^*)^2 T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \bar{\mathbf{C}}_{22}^2 \mathbf{h}_4^2 \left(\gamma^*(0) + \mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \frac{\mathbf{m}_{\delta_1}^2}{3} + \mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1} \right)$$

por el Lema 1.10.b) y Lema 1.11.a). La convergencia en probabilidad del tercer elemento es directa. Los elementos cuarto y quinto,

$$\phi_0^{*2}(\delta_0 - \hat{\delta}_0)^2 T^{-1} T + \phi_0^{*2}(\delta_1 - \hat{\delta}_1)^2 T^{-1} \sum (t-1)^2 \xrightarrow{d} \mathbf{b}^2 [\Phi^*(1)]^2 (\mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \mathbf{m}_{\delta_1}^2)$$

por el apartado a) del Lema 1.10. El resto de términos convergen en probabilidad a cero por los lemas 1.10 y 1.11. Consecuentemente,

$$\hat{\sigma}_w^2 \xrightarrow{d} \sigma_s^2$$

en donde $\sigma_s^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \bar{\mathbf{C}}_{22}^2 \mathbf{h}_4^2 \left(\gamma^*(0) + \mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \frac{\mathbf{m}_{\delta_1}^2}{3} + \mathbf{m}_{\delta_0} \mathbf{m}_{\delta_1} \right) + \mathbf{b}^2 [\Phi^*(1)]^2 (\mathbf{m}_{\delta_0}^2 + \mathbf{m}_{\delta_1}^2)$.

- c) Combinando ambos resultados se puede afirmar finalmente que el estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo no es consistente en este marco no local, si no que converge a un valor constante:

$$\hat{\lambda}_{\text{AR}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_w^2}{(1 - \sum \hat{\phi}_i^*)^2} \xrightarrow{p} \frac{\sigma_s^2}{(1 - \eta)^2} = \lambda_s^2$$

□

Prueba del Lema 1.12: Demostrado ya en la prueba del Lema 1.6.

□

Prueba del Teorema 1.2:

- a) Obtenidas la distribución asintótica del numerador en el apartado b) del Lema 1.7 y, la consistencia del estimador de la varianza a largo plazo en los lemas Lema 1.8 y 1.9, se llega al resultado asintótico directamente.
- b) Aplicando la teoría asintótica local se obtiene la distribución del MSB de la misma forma que en el apartado anterior.
- c) La consistencia del contraste MSB se produce por dos motivos: primero, porque el numerador del estadístico MSB converge a cero por el Lema 1.10.b) y segundo, porque el estimador de la varianza a largo plazo, ya sea autorregresivo o kernel, presenta un límite en probabilidad finito como se ha mostrado en el Lema 1.11.c) y Lema 1.12.

□

Prueba del Corolario 1.2: Razonando de igual manera que en el Teorema 1.2, los resultados asintóticos siguen directamente.

□

Prueba del Lema 13:

- a) Utilizando el apartado f) de la Proposición 2, se tiene que

$$\begin{aligned} T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 &= T^{-2} \sum v_{t-1}^2 \\ &\xrightarrow{d} \lambda^2 \int [W(r)]^2 dr \end{aligned}$$

b) Primero, notar que, bajo la hipótesis nula,

$$\Delta \hat{v}_{t-i} = \Delta v_{t-i} = u_{t-i}$$

Entonces, por la Proposición 2.a), se llega a

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i}^2 &= T^{-1} \sum \Delta v_{t-i}^2 \\ &= T^{-1} \sum u_{t-i}^2 \\ &\xrightarrow{p} \gamma(0) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

c) De la Proposición 2.b), se obtiene que

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \Delta \hat{v}_{t-j} &= T^{-1} \sum \Delta v_{t-i} \Delta v_{t-j} \\ &= T^{-1} \sum u_{t-i} u_{t-j} \\ &\xrightarrow{p} \gamma(j-i) \end{aligned}$$

para $i < j, j = 2, 3, \dots, p$.

d) Se deduce a partir de la Proposición 2.d) que

$$\begin{aligned} T^{-3/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} &= T^{-3/2} \sum \Delta v_{t-i} v_{t-1} \\ &= T^{-3/2} \sum u_{t-i} v_{t-1} \\ &= o_p(1) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

e) Por el apartado g) de la Proposición 2,

$$\begin{aligned} T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \varepsilon_t &= T^{-1/2} \sum \Delta v_{t-i} \varepsilon_t \\ &= T^{-1/2} \sum u_{t-i} \varepsilon_t \\ &\xrightarrow{d} N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0)) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

f) Utilizando el apartado h) de la Proposición 2, se obtiene que

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \hat{v}_{t-1} \varepsilon_t &= T^{-1} \sum v_{t-1} \varepsilon_t \\ &\xrightarrow{d} \sigma_\varepsilon \lambda \int W(r) dW(r) \end{aligned}$$

g) Definidos $\hat{\rho}$ y \hat{v}_t como antes, entonces

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{v}_t \hat{v}_{t-1}}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} = \frac{\sum v_t v_{t-1}}{\sum v_{t-1}^2} = \frac{\sum v_{t-1}^2}{\sum v_{t-1}^2} + \frac{\sum v_{t-1} u_t}{\sum v_{t-1}^2}$$

$$\hat{\rho} - 1 = \frac{\sum v_{t-1} u_t}{\sum v_{t-1}^2} = \frac{O_p(T)}{O_p(T^2)} = O_p(T^{-1})$$

□

Prueba del Lema 14: Procediendo de manera similar a la prueba del Lema 1.2, se obtiene el resultado buscado.

En primer lugar se estima el vector de coeficientes β por OLS, teniendo en cuenta que, en este tipo de modelos, $\tilde{X} = X$ y $w = \varepsilon$. A continuación, se ajusta como se indica debajo:

$$\mathbf{r}(\hat{\beta} - \beta) = \mathbf{r}(X'X)^{-1} \mathbf{r} \mathbf{r}^{-1} X' \varepsilon$$

Se puede ver que la matriz primera del lado derecho de la ecuación queda como:

$$\{\mathbf{r}^{-1}(X'X)\mathbf{r}^{-1}\}$$

$$\xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(p-2) & 0 \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(p-3) & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \gamma(p-2) & \gamma(p-3) & \dots & \gamma(0) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^2 \int [W(r)]^2 dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{q}_0 \end{bmatrix}$$

Con relación al segundo término de ese lado de la ecuación, se puede ver que

$$\mathbf{r}^{-1}(X' \varepsilon) = \begin{bmatrix} T^{-1/2} \sum u_{t-1} \varepsilon_t \\ T^{-1/2} \sum u_{t-2} \varepsilon_t \\ \vdots \\ T^{-1/2} \sum u_{t-p+1} \varepsilon_t \\ T^{-1} \sum v_{t-1} \varepsilon_t \end{bmatrix}$$

Resulta que, los p primeros elementos son \sqrt{T} veces la media muestral de una mds que posee la siguiente matriz de varianzas y covarianzas:

$$E \begin{bmatrix} u_{t-1} \varepsilon_t \\ u_{t-2} \varepsilon_t \\ \vdots \\ u_{t-p+1} \varepsilon_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{t-1} \varepsilon_t & u_{t-2} \varepsilon_t & \dots & u_{t-p+1} \varepsilon_t \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(p-2) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(p-3) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma(p-2) & \gamma(p-3) & \dots & \gamma(0) \end{bmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}$$

Por tanto, se puede escribir

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2} \sum u_{t-1} \varepsilon_t \\ T^{-1/2} \sum u_{t-2} \varepsilon_t \\ \vdots \\ T^{-1/2} \sum u_{t-p+1} \varepsilon_t \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathbf{h}_1$$

Por su parte, la distribución asintótica del termino $p + 1$ de la matriz está dado por el resultado $h)$ de la Proposición 2. Combinando todos estos resultados que se acaban de derivar, se obtiene:

$$\Upsilon(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}' & \mathbf{q}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{q}_0^{-1} \mathbf{h}_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, particularizando en el bloque de los p primeros elementos del vector $(\hat{\beta} - \beta)$, se obtiene la siguiente distribución asintótica:

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1^* - \phi_1^* \\ \hat{\phi}_2^* - \phi_2^* \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p^* - \phi_p^* \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{h}_1$$

□

Prueba del Lema 15: El resultado sigue directamente de la prueba del Lema 1.3. □

Prueba del Lema 16:

a) Bajo la hipótesis alternativa estacionaria no local,

$$T^{-1} \sum \hat{v}_{t-i}^2 = T^{-1} \sum v_{t-i}^2 \xrightarrow{p} \gamma^*(0)$$

siendo la varianza a corto plazo del proceso $var(v_t) = \gamma^*(0)$. En lo que sigue, y como se ha comentado al comienzo de esta parte, se va a considerar que el proceso u_t es un proceso AR(1), aunque un supuesto más general también es válido. Entonces, se escribe la varianza del proceso en función de σ_ε^2

$$\gamma^*(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1 + \rho_0\phi)}{(1 - \phi^2)(1 - \phi\rho_0)(1 - \rho_0^2)}$$

o bien, en función de $\gamma(0)$

$$\gamma^*(0) = \frac{\gamma(0)(1 + \rho_0\phi)}{(1 - \phi\rho_0)(1 - \rho_0^2)}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$.

b) Asumiendo la hipótesis alternativa no local ($\rho_0 < 1$), el incremento del residuo retardado i periodos queda como sigue:

$$\Delta \hat{v}_{t-i} = \Delta v_{t-i} = (\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i}$$

Sea $\mathbf{b} = (1 - \rho_0)$ y $\gamma^*(0) = E(v_{t-i}^2)$, se tiene que

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i}^2 &= T^{-1} \sum ((\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i})^2 \\ &= (\rho_0 - 1)^2 T^{-1} \sum v_{t-(i+1)}^2 + T^{-1} \sum u_{t-i}^2 + 2(\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} u_{t-i} \\ &\xrightarrow{p} \mathbf{b}^2 \gamma^*(0) + \gamma(0) - 2\mathbf{b} \gamma_{vu}(1) \\ &= \gamma_{\Delta \hat{v}}(0) \end{aligned}$$

en donde $cov(v_{t-1}u_{t-i}) = \gamma_{uv}(i-1)$ para $i = 1, 2, \dots, p$. Particularmente,

$$\begin{aligned} E(v_{t-1}u_{t-i}) &= E[(u_{t-1} + \rho_0 u_{t-2} + \rho_0^2 u_{t-3} + \dots)u_{t-i}] \\ &= E(u_{t-1}u_{t-i}) + \rho_0 E(u_{t-2}u_{t-i}) + \rho_0^2 E(u_{t-3}u_{t-i}) + \dots \\ &= \gamma(1) + \rho_0 \gamma(2) + \rho_0^2 \gamma(3) + \dots \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$. Notar que, con $\gamma(j-i)$, denotamos la expresión general para las autocovarianzas, por lo que, $E(u_{t-i}u_{t-j})$ va a depender de la estructura que subyace en la perturbación del modelo. Entonces, y sin pérdida de generalidad, podemos establecer un valor máximo que llamamos $\gamma(k^*)$:

$$\gamma(1) + \rho_0 \gamma(2) + \dots \leq \gamma(k^*) + \rho_0 \gamma(k^*) + \dots + \rho_0^{(k-1)} \gamma(k^*) = \gamma(k^*) / (1 - \rho_0)$$

con $k = \max|j-i|$, de forma que, la suma de términos infinitos converge en el límite. Asimismo, la forma que presenta $\gamma_{uv}(1)$ depende de u_t y, por tanto, será necesario especificar el modelo que subyace en la perturbación en cada caso. Así que si, por ejemplo, u_t sigue un proceso AR(1): $\gamma_{\Delta \hat{v}}(0) = 2(-1 + \phi)\gamma(0)/(1 + \rho_0)(-1 + \phi\rho_0)$

c)

$$\begin{aligned} T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \Delta \hat{v}_{t-j} &= T^{-1} \sum \Delta v_{t-i} \Delta v_{t-j} \\ &= T^{-1} \sum ((\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i}) ((\rho_0 - 1)v_{t-(j+1)} + u_{t-j}) \\ &= (\rho_0 - 1)^2 T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} v_{t-(j+1)} + (\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(i+1)} u_{t-j} \\ &\quad + (\rho_0 - 1) T^{-1} \sum v_{t-(j+1)} u_{t-i} + T^{-1} \sum u_{t-i} u_{t-j} \\ &\xrightarrow{p} \mathbf{b}^2 \gamma^*(j-i) - \mathbf{b} \gamma_{uv}(j-i-1) - \mathbf{b} \gamma_{uv}(i-j-1) + \gamma(j-i) \\ &= \gamma_{\Delta \hat{v}, \Delta \hat{v}}(j-i) \end{aligned}$$

siendo $i < j, j = 2, 3, \dots, p$. La correspondiente particularización al caso anterior de $u_t \sim \text{AR}(1)$, sigue directamente de la misma forma que en el apartado b).

d)

$$\begin{aligned}
 T^{-1} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \hat{v}_{t-1} &= T^{-1} \sum ((\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i})v_{t-1} \\
 &= (\rho_0 - 1)T^{-1} \sum v_{t-(i+1)}v_{t-1} + T^{-1} \sum v_{t-1}u_{t-i} \\
 &\xrightarrow{p} -\mathbf{b}\gamma^*(i) + \gamma_{uv}(i-1) \\
 &= \gamma_{\Delta \hat{v}, \hat{v}}(i-1)
 \end{aligned}$$

para $i = 2, 3, \dots, p$.

e)

$$\begin{aligned}
 T^{-1/2} \sum \Delta \hat{v}_{t-i} \varepsilon_t &= T^{-1/2} \sum \Delta v_{t-i} \varepsilon_t \\
 &= T^{-1/2} \sum ((\rho_0 - 1)v_{t-(i+1)} + u_{t-i})\varepsilon_t \\
 &= (\rho_0 - 1)T^{-1/2} \sum v_{t-(i+1)}\varepsilon_t + T^{-1/2} \sum u_{t-i}\varepsilon_t \\
 &= o_p(1)
 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, p$. Notar que, como se ha apuntado en pruebas anteriores, ambos términos presentan la misma distribución límite y, por eso, se cancelan.

f)

$$\begin{aligned}
 T^{-1/2} \sum \hat{v}_{t-1} \varepsilon_t &= T^{-1/2} \sum [(u_{t-1} + \rho_0 u_{t-2} + \rho_0^2 u_{t-3} + \dots)\varepsilon_t] \\
 &\xrightarrow{d} N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0)) + \rho_0 N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0)) + \rho_0^2 N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0)) + \dots \\
 &= N\left(0, \sigma_\varepsilon^2 \frac{\gamma(0)}{(1 - \rho_0)^2}\right) \\
 &= N(0, \sigma_\varepsilon^2 \gamma(0) \mathbf{b}^{-2})
 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= \frac{\sum \hat{v}_t \hat{v}_{t-1}}{\sum \hat{v}_{t-1}^2} = \frac{\sum v_t v_{t-1}}{\sum v_{t-1}^2} = \rho_0 \frac{\sum v_{t-1}^2}{\sum v_{t-1}^2} + \frac{\sum v_{t-1} u_t}{\sum v_{t-1}^2} \\
 \hat{\rho} &= \rho_0 + \frac{\sum v_{t-1} u_t}{\sum v_{t-1}^2} \\
 &\xrightarrow{p} \rho_0 + \frac{T^{-1} \sum v_{t-1} u_t}{T^{-1} \sum v_{t-1}^2} \\
 &= \rho_0 + \frac{\gamma_{uv}(1)}{\gamma^*(0)} = \rho_0^*
 \end{aligned}$$

En concreto, cuando los errores siguen un proceso AR(1), resulta

$$\hat{\rho} \xrightarrow{p} \rho_0 + \frac{\frac{\phi\gamma(0)}{(1-\rho_0\phi)}}{\frac{\gamma(0)(1+\rho_0\phi)}{(1-\rho_0\phi)(1-\rho_0^2)}} = \rho_0 + \frac{\phi(1-\rho_0^2)}{(1+\rho_0\phi)} = \rho_0^*$$

□

Prueba del Lema 17:

a) En primer lugar, se estima β por OLS:

$$(\hat{\beta} - \beta) = (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

ajustando queda:

$$\Upsilon_0(\hat{\beta} - \beta) = \Upsilon_0(X'X)^{-1}\Upsilon_0\Upsilon_0^{-1}X'\varepsilon$$

en donde, Υ_0 se define como en la prueba del Lema 1.5. Entonces, utilizando los resultados asintóticos presentados en el Lema 16 se tiene que, el primer elemento del lado derecho de la regresión normalizada queda como sigue:

$$\Upsilon_0(X'X)^{-1}\Upsilon_0 \xrightarrow{p} \Sigma_0 = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Con respecto al otro término del lado derecho de la ecuación, tenemos por el Lema 16.f) que los p primeros elementos convergen a cero a medida que $T \rightarrow \infty$, mientras que el apartado g) del mismo lema, nos proporciona la distribución del elemento $p + 1$. Como Σ_0 es una matriz particionada, que no diagonal, es necesario calcular su inversa con un poco de álgebra de forma que:

$$\Sigma_0^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}$$

en donde $\mathbf{C}_{11} = \Sigma_{11}^{-1}(\mathbf{I}_p + \Sigma_{12}\mathbf{C}_{22}\Sigma_{21})$, $\mathbf{C}_{22} = (\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})^{-1}$, $\mathbf{C}_{12} = -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\mathbf{C}_{22}$, $\mathbf{C}_{21} = -\mathbf{C}_{22}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}$ con $\mathbf{I}_p =$ Matriz Identidad ($p \times p$). Finalmente, resulta directo ver que los p primeros elementos del vector $(\hat{\beta} - \beta)$ presentan la siguiente distribución asintótica:

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1^* - \phi_1^* \\ \hat{\phi}_2^* - \phi_2^* \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p^* - \phi_p^* \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \mathbf{C}_{12}\mathbf{h}_4$$

- b) Al resultado se llega de igual manera que en el apartado b) del Lema 1.5, teniendo en cuenta $w_t = \varepsilon_t$ y el Lema 16.
- c) Combinando los dos resultados anteriores y procediendo como en el apartado c) del Lema 1.5, se llega al resultado buscado.

□

Prueba del Lema 18: Demostrado ya en la prueba del Lema 1.6. □

Prueba del Teorema 1.3:

- a) Combinando, por un lado, la distribución del numerador del estadístico del MSB en el apartado *b)* del Lema 13 y, por otro, la consistencia del denominador de los lemas 14 y 15, se llega a la distribución asintótica del MSB bajo la hipótesis nula:

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int W(r)^2 dr \right\}^{1/2}$$

- b) Extendiendo el resultado anterior, gracias al TFCL, se llega a

$$MSB \xrightarrow{d} \left\{ \int J_c(r)^2 dr \right\}^{1/2}$$

- c) Combinando el resultado del Lema 16.*b)*, que implica que el numerador del estadístico MSB converge a cero asintóticamente, junto con los resultados obtenidos para el denominador del MSB en el Lema 17 y Lema 18, se llega a que, el MSB, bajo la hipótesis alternativa no local, es consistente

$$MSB \xrightarrow{p} 0$$

□

Capítulo 2

Un estudio de Monte Carlo para el análisis del contraste MSB

Resumen

En este segundo capítulo, se propone un estudio de Monte Carlo para evaluar las propiedades del contraste MSB en muestras finitas. En él, se va a prestar una especial atención al papel que tiene el estimador de varianza a largo plazo con relación a la tasa de rechazo de la hipótesis nula del estadístico de raíz unitaria. También, se comparan las propiedades de tamaño empírico y de potencia ajustada al tamaño de distintas versiones del MSB con una selección de otros contrastes de raíz unitaria que se encuentran en la literatura.

2.1 Introducción

En este capítulo, vamos a presentar los resultados obtenidos mediante técnicas de simulación de Monte Carlo para evaluar el comportamiento del contraste MSB en muestras finitas, teniendo en cuenta los resultados analíticos derivados en el capítulo anterior.

El objetivo es triple. Primero, calcular los puntos críticos de las diferentes versiones del contraste MSB. Segundo, comparar el comportamiento de estas versiones prestando atención a los elementos que entran en la definición del estadístico de contraste, poniendo especial énfasis en el estimador de la varianza a largo plazo que aparece en el denominador. Se trata de determinar cuáles son las mejores versiones para, dentro del tercer objetivo, comparar estas versiones con otros contrastes propuestos en la literatura para determinar si una serie tiene o no una raíz unitaria.

En lo que respecta a los puntos críticos, no hay mucho que añadir a lo realizado en Ng y Perron (2001). El objetivo de lo presentado en este capítulo es confirmar la coincidencia para, posteriormente, extender la forma de calcularlos a otras situaciones no contempladas en la literatura y que guardan relación con algunos desarrollos de capítulos posteriores de este trabajo.

El segundo objetivo es comparar distintos procedimientos de estimación prestando una atención especial a la varianza a largo plazo que aparece en el denominador. Como se ha visto en el capítulo anterior, cabe considerar dos tipos de estimadores de varianza a largo plazo: autorregresivo y kernel. La forma que adoptan ambos puede verse en (1.15) y (1.17), respectivamente. Dentro de este segundo tipo, distinguiremos nuevamente dos versiones atendiendo a la forma de los residuos utilizados para su construcción.

El principal problema asociado con el uso del estimador autorregresivo es la determinación del número de retardos a incluir en (1.16). Tradicionalmente, este problema se ha abordado utilizando la Razón de Verosimilitud o los criterios de información, como el AIC y el BIC¹. Pero, en el marco del contraste de raíz unitaria, estos criterios presentan algunos problemas y, por tanto, hay que pensar en modificaciones de los mismos. En esta línea, Ng y Perron (2001) introducen una modificación del criterio AIC, que llaman MAIC y, que fácilmente se puede extender al criterio BIC, MBIC. Posteriormente, Perron y Qu (2007) proponen una modificación que consiste en utilizar una combinación de dos métodos de estimación, OLS y GLS, para construir el criterio de selección MAIC. En concreto, el método OLS lo utilizan para eliminar el componente determinista de la serie de datos que se introduce en la regresión para seleccionar el número de retardos óptimo, en lugar de los datos GLS transformados como sugerían Ng y Perron inicialmente.

¹Ver Lütkepohl y Krätzig (2004).

En lo que respecta al estimador kernel, tres son los puntos de interés:

- (a) El tipo de residuos que se utilizan.
- (b) El tipo de ventana que pondera las autocovarianzas.
- (c) El parámetro *bandwidth*.

Como hemos avanzado antes, en este capítulo consideraremos de nuevo las tres alternativas de estimadores de varianza a largo plazo vistas en el Capítulo 1. Conviene recordar cómo hemos definido el estimador kernel en (1.17):

$$\hat{\omega}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 + 2 \sum_{j=1}^{B_T} \omega(j/B_T) T^{-1} \sum_{t=j+1}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-j}$$

construido a partir de los residuos \hat{u}_t , resultado de filtrar la serie libre del componente determinista aproximando un proceso autorregresivo de primer orden. Pero ésta no es la única opción contemplada en la literatura. Por ejemplo, en los trabajos dedicados a los contrastes de estacionariedad, el caso más notable es el KPSS propuesto en Kwiatkowski *et al.* (1992), se utiliza directamente el residuo destendenciado. La razón de este uso radica en que, bajo la hipótesis nula, este residuo es $O_p(1)$ por lo que el estimador que aparece en el denominador converge sin ningún tipo de normalización. Pero, los problemas surgen cuando se considera la hipótesis alternativa de raíz unitaria o cuando se contempla una hipótesis local del tipo $1 + cT^{-1}$. En estos casos, la elección del *bandwidth* es muy relevante, no así la de la ventana. Los estudios de Monte Carlo publicados mostraban que si se elegía un *bandwidth* con un orden $o(T)$ entonces, la hipótesis nula se rechazaba siempre si generaba los datos la alternativa. Sin embargo, con un *bandwidth* $O(T)$, el tamaño se controlaba bien incluso para valores próximos al valor bajo la alternativa. En cambio, la potencia era muy baja. Estos resultados se explicaban teniendo en cuenta que, en el primer caso, el estimador de la varianza a largo plazo era $O(T)$ y, en el segundo, era $O(T^2)$. La demostración analítica de estos resultados puede verse en Müller (2005). Si tenemos en cuenta que, bajo la hipótesis nula y alternativa local, el numerador es $O(T^2)$, eso explica que, en el primer caso, el KPSS fuera consistente pero con un tamaño demasiado grande y que, en el segundo caso, con un *bandwidth* de un orden similar al tamaño muestral, el tamaño resultara adecuado, no así la potencia. El reto era, por tanto, encontrar un estimador de la varianza a largo plazo que nos llevara a un contraste que controlara el tamaño y, al mismo tiempo, fuera consistente. Este fue el objetivo de Choi y Ahn (1999), Kurozumi (2002), Sul *et al.* (2005) y Kurozumi y Tanaka (2010) quienes exploran diversas alternativas para mejorar las propiedades de los contrastes de estacionariedad. En el trabajo de Carrion-i-Silvestre y Sansó (2006) encontramos la comparación de algunas de estas propuestas utilizando los contrastes KPSS y LMC de Leybourne y McCabe (1999) y, llegan a la conclusión de que la mejor alternativa es la propuesta por Sul *et al.* (2005).

¿Son útiles estos desarrollos para nuestro objetivo de comparar diferentes versiones del contraste MSB? No demasiado. Estos desarrollos nos muestran que, bajo la hipótesis nula de raíz unitaria o bajo una hipótesis alternativa local, el denominador precisa de una normalización de orden T o mayor, según sea el *bandwidth* elegido, por lo que, el MSB siempre tenderá a rechazar la hipótesis nula y el tamaño del contraste será muy grande. Por lo tanto, y descartando las anteriores alternativas, para el contraste MSB no queda otra opción que construir el estimador de la varianza a largo plazo en base a los residuos filtrados, o bien, imponiendo la hipótesis nula de raíz unitaria en tales residuos.

En la sección tercera, siguiendo las pautas del trabajo de Perron y Ng (1998), vamos a comparar los dos tipos de estimadores de varianza a largo plazo, utilizando primero una ratio que nos relaciona la estimación de la varianza a largo plazo con su verdadero valor (EVR) y, posteriormente, el error cuadrático medio (ECM), atendiendo según se requiera, a diferentes métodos de selección del número de retardos y diferentes *bandwidths*; así como, a distintos métodos para estimar el componente determinista de la serie. En la sección cuarta, comparamos las diferentes versiones del MSB considerando distintas combinaciones de método de estimación y estimador de la varianza a largo utilizado en su construcción. En la sección quinta, presentamos los resultados de la comparación entre la(s) mejor(es) versión(es) del MSB de la sección previa con otras propuestas disponibles en la literatura para contrastar la hipótesis nula de raíz unitaria. En la última sección, resumimos las conclusiones del capítulo.

2.2 Valores críticos

En esta sección, vamos a presentar los puntos críticos obtenidos para el estadístico MSB atendiendo a si la serie de datos ha sido destendenciada o no y al procedimiento empleado para destendenciar (OLS y GLS). Para ello, vamos a suponer que el proceso generador de datos es como sigue:

$$\begin{aligned}y_t &= d_t + v_t \\v_t &= \rho v_{t-1} + u_t \\(1 - \phi L)u_t &= (1 - \theta L)\varepsilon_t\end{aligned}$$

con $\rho = 1$, $v_0 = 0$ y, en donde, $\varepsilon_t \sim \text{iidN}(0, 1)$ se ha generado empleando la función *rndKMn* de GAUSS con semilla 290373. El componente determinista es $d_t = z_t' \delta$ con $z_t = (1, t, \dots, t^p)'$ y $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p)'$. Nosotros nos centramos en los tres casos más comunes en la literatura:

- i) No hay términos deterministas, M^0 con $d_t = 0$.
- ii) Un término constante M^μ con $d_t = \delta_0$.
- iii) Una constante y una tendencia lineal M^τ donde $d_t = \delta_0 + \delta_1 t$.

Entonces, a partir de las distribuciones asintóticas calculadas y presentadas en los teoremas 1.1 y 1.2 y en los corolarios 1.1 y 1.2, calculamos los puntos críticos que a continuación mostramos en la Tabla 2.1. Estos valores numéricos los hemos obtenido programando 50000 simulaciones para aproximar un proceso de Wiener mediante sumas parciales de la variable normal estándar con 5000 pasos. Todos los programas han sido diseñados en GAUSS versión 9.0.

La Tabla 2.1 que, a continuación presentamos, contiene los puntos críticos del MSB para los tres modelos contemplados: M^0 , M^μ , M^τ atendiendo al método utilizado para eliminar los elementos deterministas de la serie (GLS y OLS).

Tabla 2.1: Puntos críticos asintóticos del contraste MSB

N. significación (%)	M ⁰	
1 %	0.174	
5 %	0.233	
10 %	0.275	
	M ^μ	
	MSB _{GLS}	MSB _{OLS}
1 %	0.174	0.157
5 %	0.233	0.191
10 %	0.275	0.214
	M ^τ	
1 %	0.143	0.131
5 %	0.168	0.153
10 %	0.185	0.167

† Los valores que aparecen en la columna MSB_{GLS} pueden encontrarse en Ng y Perron (2001, Tabla 1), mientras que los que están en la columna MSB_{OLS}, para M^μ se pueden encontrar en Perron y Ng (1996). Los resultados del modelo M^τ difieren de los obtenidos en el artículo original de Stock porque éste se basó en el procedimiento de destendencialización propuesto por Bhargava. No obstante, en Perron y Ng (1996), podemos encontrar que, para este caso, obtienen un valor de 0.164.

†† Hemos considerado para el procedimiento GLS: $\bar{c} = -7.0$ ($p = 0$) y $\bar{c} = -13.5$ ($p = 1$).

2.3 Análisis del estimador de la varianza a largo plazo

En esta sección, se van a llevar a cabo una serie de experimentos de Monte Carlo con el objeto de evaluar la calidad de los estimadores de varianza a largo plazo: estimador autorregresivo y estimador kernel. Nuestro estudio, en línea con Perron y Ng (1998), lo amplía en el sentido de que considera por un lado, los criterios MIC de Ng y Perron (2001) en la construcción del estimador autorregresivo y, por otro, considera *bandwidths* alternativos a la hora de construir el estimador kernel. También, nuestro análisis reemplaza el criterio de sesgo por una ratio definida como el cociente entre la estimación de la varianza y el verdadero valor del parámetro que se denota por EVR.

El proceso que genera los datos es como sigue a continuación:

$$\begin{aligned}
 y_t &= d_t + v_t \\
 v_t &= \rho v_{t-1} + u_t \\
 (1 - \phi L)u_t &= (1 - \theta L)\varepsilon_t
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

con $d_t = z_t' \delta$, cuyos componentes se definen como en la sección anterior. Además, fijamos $\rho = 1$, $v_0 = 0$, y permitimos a la perturbación aleatoria u_t presentar algún tipo de estructura de dependencia:

$$\begin{cases}
 \text{i.i.d. :} & u_t = \varepsilon_t \\
 \text{AR(1) :} & u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t \\
 \text{MA(1) :} & u_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}
 \end{cases}$$

Los valores que vamos a considerar cuando el error sigue un proceso MA(1): $\theta = (-0.8, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 0.8)$. Cuando sigue un proceso AR(1): $\phi = (-0.8, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 0.8)$. Y, cuando la perturbación sea i.i.d, entonces $\theta = \phi = 0$. Notar, además, que $\varepsilon_t \sim \text{iidN}(0, 1)$, y se ha generado utilizando la función *rndKMn* de GAUSS con una semilla que controla la generación establecida en 290373. El nivel de significación prefijado es el 5%. Hemos utilizado tres tamaños muestrales: $T = (100, 250, 500)$. El número de simulaciones que hemos llevado a cabo en el ejercicio es de 10000.

Comenzamos el análisis con el estimador kernel, el cual construiremos a partir de dos tipos de residuos: en primer lugar, utilizaremos los residuos \hat{u}_t obtenidos de la regresión de la serie, libre de elementos deterministas, sobre ella misma retardada un periodo². Este estimador lo denotamos como $\hat{\omega}^2$. El segundo estimador kernel está basado en la primera diferencia de los residuos³ y lo denotamos por $\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2$.

La propia definición del estimador nos obliga a utilizar una función kernel (o de truncamiento). Nosotros escogemos la ventana de Bartlett⁴, que nos asegura la no negatividad de las autocovarianzas muestrales.

La función kernel depende por construcción de un parámetro *bandwidth*, que determina el número de autocovarianzas muestrales que vamos a computar y que suponemos es de orden $o(T^{1/2})$ satisfaciendo unas condiciones generales⁵. Este parámetro resulta de gran importancia y, por ello, en nuestro ejercicio, vamos a considerar dos alternativas⁶. Por un lado, consideraremos *bandwidths* con un orden $O(T^\delta)$ con $\delta = \{1/2, 1/3, 1/4\}$ y, por otro, el método de selección automática propuesto por Newey y West (1994), al que nos referiremos por el subíndice NW.

Nos centramos ahora en el estimador autorregresivo de densidad espectral, $\hat{\lambda}_{AR}^2$, definido en (1.15). Recordemos que, en este tipo de estimadores, aparece el problema de selección del número óptimo de retardos a incluir en la siguiente regresión:

$$\Delta\hat{v}_t = \sum_{t=j+1}^p \phi_j^* \Delta\hat{v}_{t-j} + \phi^* \hat{v}_{t-1} + w_t$$

En este experimento, consideraremos cuatro criterios de selección para determinar el número óptimo de retardos: AIC, BIC, MAIC y MBIC⁷.

²En el artículo Perron y Ng (1998), se considera un estimador kernel de varianza a largo plazo basado en los residuos de la regresión de la serie sobre la serie retardada un periodo y un término constante. Esta alternativa de eliminación indirecta de elementos deterministas de la serie lleva a resultados similares.

³En Patterson (2011, Sección 6.8.2) encontramos una breve referencia al tema.

⁴Diversos trabajos publicados sobre el tema aseguran que la utilización de una función o ventana distinta dentro de las disponibles en la literatura conduce a resultados cualitativamente parecidos. De hecho, los resultados aquí presentados también se han llevado a cabo empleando la ventana cuadrática espectral propuesta por Andrews (1991) -QS- pero se omiten de la exposición. No obstante, se encuentran disponibles bajo petición.

⁵Ver Andrews (1991).

⁶También se han programado las simulaciones para un rango de *bandwidths* fijo: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y los resultados se parecen a los que ilustran Perron y Ng (1998), por lo que no los presentamos aquí.

⁷Si comparamos nuestro estudio con el trabajo publicado por Perron y Ng (1998), como hemos advertido antes, nosotros lo ampliamos considerando dos criterios modificados que ellos mismos sugirieron más tarde en Ng y Perron (2001). De estos criterios, hasta la fecha, solo uno, el criterio MAIC, se ha empleado para construir diversos estadísticos de raíz unitaria y evaluar sus propiedades en términos de tamaño y potencia.

Atendiendo a la parte determinista del modelo, consideramos dos escenarios: que el modelo generador incluya una constante ($p = 0$) o bien, que incluya constante y tendencia ($p = 1$). Este enfoque extiende y completa claramente el trabajo de Perron y Ng (1998). En ambos casos, utilizamos dos métodos de estimación alternativos: OLS y GLS.

Los criterios que vamos a utilizar para determinar la calidad de las estimaciones de la varianza a largo plazo y, posteriormente, averiguar si existe o no relación con las propiedades en muestras finitas del MSB son: la ratio EVR y el ECM. El primero de ellos, lo definimos como:

$$\text{EVR} = \frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda^2} \quad (2.2)$$

donde $\bar{\lambda}^2$ representa el promedio de las estimaciones de la varianza a largo plazo, y λ^2 su verdadero valor bajo la hipótesis nula que, a su vez, depende del tipo de errores que forman parte del modelo generador. En particular, si los errores son i.i.d., entonces $\lambda^2 = \sigma_\varepsilon^2$, pero si la correlación serial la origina un proceso AR(1), $\lambda^2 = \sigma_\varepsilon^2/(1 - \phi)^2$, mientras que si la produce un proceso MA(1), $\lambda^2 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta)^2$.

Intuitivamente cabría deducir la siguiente relación entre el sesgo representado por la ratio EVR y el tamaño del contraste MSB: si $\text{EVR} > 1$, el estimador de la varianza a largo plazo sobreestima y conduce a un valor más pequeño del estadístico y lleva a aumentar la tasa de rechazo de la hipótesis nula, por lo que serán frecuentes las distorsiones por exceso de tamaño con respecto al valor nominal. Si $\text{EVR} < 1$, el estimador de la varianza a largo plazo subestima y el MSB se hace más grande, rechazando la hipótesis nula un menor número de veces. Esto se traduce en un tamaño del contraste MSB más pequeño que el nominal. Consecuentemente, cuando $\text{EVR} \cong 1$, el tamaño empírico del MSB se ajusta al valor nominal por lo que, cuanto más próximo está la ratio a la unidad, mejor es la estimación de la varianza a largo plazo que realizamos y más control tendrá el contraste del tamaño. En la siguiente sección, comprobaremos si se cumple esta pauta.

En términos de ECM, sin embargo, no podemos deducir una relación a priori tan evidente como la anterior, por lo que posponemos nuestros comentarios a la sección siguiente.

La Tabla 2.2 contiene la notación utilizada en esta sección para los distintos estimadores de la varianza a largo plazo y métodos de estimación.

La estructura de las tablas es la siguiente: una primera columna presenta el tamaño muestral utilizado; la segunda columna, el valor de $\{\phi, \theta\}$; la tercera, el verdadero valor de la varianza a largo plazo; y, las restantes columnas muestran los resultados de ratio o de error, según correspondan, de las diferentes versiones de los estimadores de varianza a largo plazo.

En primer lugar, presentamos las tablas 2.3 y 2.4 que contienen la ratio para los dos estimadores kernel ($\hat{\omega}^2$ y $\hat{\omega}_{\Delta\hat{\sigma}}^2$) con *bandwidths*: $O(T^{1/2})$, $O(T^{1/3})$, $O(T^{1/4})$ y NW, para los modelos $p = (0, 1)$, empleando dos métodos de estimación: OLS y GLS. Después, mostraremos las tablas 2.5 y 2.6 para el estimador autorregresivo, considerando los dos modelos anteriores, los criterios de selección (AIC, BIC, MAIC y MBIC) y tres procedimientos para construir dichos criterios (GLS, OLS y PQ).

En la Tabla 2.3, podemos ver que, para la mayoría de los casos, el estimador kernel $\hat{\omega}_{\Delta\hat{\sigma}}^2$ presenta una ratio más próxima a la unidad que el estimador $\hat{\omega}^2$. Esta diferencia se acentúa con coeficientes

Tabla 2.2: Notación utilizada en los experimentos de Monte Carlo

$\hat{\omega}^2$	Estimador kernel basado en los residuos filtrados
$\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2$	Estimador kernel asumiendo la H_0 de raíz unitaria
$\hat{\lambda}_{AR}^2$	Estimador autorregresivo
$\hat{\omega}^2(O(T^{1/2}))$	Estimador kernel con <i>bandwidth</i> $O(T^{1/2})$
$\hat{\omega}^2(O(T^{1/3}))$	Estimador kernel con <i>bandwidth</i> $O(T^{1/3})$
$\hat{\omega}^2(O(T^{1/4}))$	Estimador kernel con <i>bandwidth</i> $O(T^{1/4})$
$\hat{\omega}^2(NW)$	Estimador kernel que emplea el procedimiento automático de Newey y West (1994)
$\hat{\lambda}_{AR}^2(AIC)$	Estimador autorregresivo que emplea el criterio AIC
$\hat{\lambda}_{AR}^2(BIC)$	Estimador autorregresivo que emplea el criterio BIC
$\hat{\lambda}_{AR}^2(MAIC)$	Estimador autorregresivo que emplea el criterio MAIC como en Ng y Perron (2001)
$\hat{\lambda}_{AR}^2(MBIC)$	Estimador autorregresivo que emplea el criterio MBIC como en Ng y Perron (2001)
GLS	superíndice que indica que emplea el procedimiento de “cuasi-diferenciación” de Elliott <i>et al.</i> (1996)
OLS	superíndice que indica estimación por el método de mínimos cuadrados ordinarios
PQ	superíndice que indica que el criterio de selección se construye con la modificación de Perron y Qu (2007)

de autocorrelación elevados y negativos e independientemente de que los errores sean AR(1) o MA(1). Cuando este coeficiente de autocorrelación presenta signo positivo, la ratio EVR del estimador, que es menor que la unidad, tiende a 1 conforme el tamaño de la muestra aumenta y ϕ y θ tienden a la unidad.

También, podemos identificar una dependencia con el orden del *bandwidth* utilizado. En general, se puede afirmar que para el estimador $\hat{\omega}^2$ basado en GLS, los *bandwidths* $O(T^{1/4})$ y $O(T^{1/2})$ son los que proporcionan estimaciones de la varianza más próximas a su valor real para $\{\phi, \theta\} < 0$ y $\{\phi, \theta\} > 0$, respectivamente. En el caso $\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2$, el *bandwidth* $O(T^{1/2})$ es el que proporciona valores más ajustados. Los resultados que presentamos en la Tabla 2.4 para un modelo con constante y tendencia lineal, son similares a los descritos para el modelo con término constante.

Si nos centramos ahora en el estimador autorregresivo, observamos que los resultados expuestos en la Tabla 2.5 son similares con mínimas diferencias, situándose la mayoría de veces, próximos a 1. Particularizando en el método GLS, podemos observar que los valores producidos son mejores que los conseguidos por los otros dos métodos (OLS y PQ). No obstante, el método PQ, en muchas ocasiones, logra valores relativamente parecidos a los de GLS. En general, se puede afirmar que la ratio EVR está más próxima a 1 que la ratio de los estimadores kernel. Además, todo parece indicar que al criterio MAIC corresponde una ratio EVR más próxima a la unidad. Estos comentarios se pueden extender a los resultados que contiene la Tabla 2.6.

A continuación, pasaremos a comentar los resultados de ECM recogidos en las tablas 2.7 a 2.10, en las que suponemos la misma estructura que las anteriores.

En relación al estimador tipo kernel, en la Tabla 2.7, observamos que el ECM sigue una pauta decreciente a medida que el tamaño de la muestra aumenta, que se ve afectada por la velocidad de la tasa de convergencia del *bandwidth*, dado un tamaño muestral. Si se utiliza el estimador $\hat{\omega}^2$ basado en el procedimiento GLS, los resultados que produce son mejores que cuando utiliza OLS. En cuanto al *bandwidth*, observamos que cuando este estimador emplea un *bandwidth* de orden $O(T^{1/4})$ produce menor ECM. Pero si comparamos estos resultados con los del estimador $\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2$, se observa un mejor comportamiento de este último porque proporciona menores valores de ECM, lo que significa, que estima mejor la varianza a largo plazo. En este caso, el *bandwidth* de orden $O(T^{1/4})$ sigue siendo el que produce menor error. También se observa como al aumentar el tamaño de la muestra, el ECM tiende a 0 sin que influya significativamente el método de estimación considerado. La Tabla 2.8 ilustra los resultados del modelo con constante y tendencia lineal y, en ella, podemos observar un comportamiento similar al que acabamos de comentar.

Respecto al estimador autorregresivo, podemos ver en la Tabla 2.9 que, en general, el error producido cuando selecciona con el criterio MBIC, es más próximo a cero que en cualquiera de los dos estimadores kernel, exceptuando el caso en el que $T = 100$ y $\phi = 0.8$, en donde ambos estimadores kernel funcionan mejor. En ese caso, el estimador autorregresivo presenta una gran distorsión, especialmente cuando utiliza GLS. Se observa también que, al igual que sucedía con ambos estimadores kernel, cuanto mayor es el coeficiente de autocorrelación AR(1) o MA(1), mayor es la distorsión en el ECM. Como se podría esperar, a medida que el tamaño de la muestra crece, el error cuadrático medio disminuye. Estos comentarios se pueden extender, sin pérdida de generalidad, a los resultados mostrados en la Tabla 2.10 para el modelo con constante y tendencia ($p = 1$).

A la vista de los resultados de nuestro análisis, podemos extraer las siguientes conclusiones generales: primero, que el estimador $\hat{\lambda}_{AR}^2$ basado en el criterio MAIC presenta, en general, una ratio EVR más próxima a la unidad con desviaciones menos acusadas que cualquier otro estimador. Segundo, las versiones del estimador kernel basadas en los residuos bajo la hipótesis nula ($\hat{\omega}_{\Delta\hat{v}}^2$) proporcionan una ratio EVR menor que la obtenida por los estimadores autorregresivos, pero es más próxima a 1 que la conseguida por la versiones basadas en los residuos filtrados, $\hat{\omega}^2$. Tercero, cuando el modelo posee una constante y una tendencia, los resultados del estimador GLS y PQ son bastante similares. Cuarto, como se podía esperar en un principio, el ECM de ambas clases de estimadores de varianza tiende a 0 a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Y, finalmente, se puede ver como influye el tipo de dependencia temporal que subyace en los errores del PGD, ya que se observa como el ECM más próximo a cero viene producido por el estimador $\hat{\lambda}_{AR}^2$ (MBIC) cuando la autocorrelación es negativa, mientras que cuando la autocorrelación es positiva es entonces el $\hat{\omega}_{GLS, \Delta\hat{v}}^2(O(T^{1/4}))$, el que consigue un ECM más cercano a cero.

Esto nos permite recomendar la utilización en la práctica del estimador autorregresivo por las buenas propiedades de sus estimaciones en el sentido de que son, en la mayoría de situaciones, las más precisas (ratio EVR más cercana a la unidad) y fiables (ECM más próximo a cero).

Tabla 2.3: Ratio EVR de estimadores kernel ($p = 0$)

T	λ^2	$\hat{\omega}_{\text{GLS}}^2$				$\hat{\omega}_{\text{OLS}}^2$				$\hat{\omega}_{\text{GLS}, \Delta\hat{v}}^2$				$\hat{\omega}_{\text{OLS}, \Delta\hat{v}}^2$				
		$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	
100	ϕ	-0.8 0.31	9.57	6.51	4.81	9.80	11.68	7.94	6.05	11.75	1.44	2.37	1.50	1.49	1.44	2.37	1.50	1.49
		-0.5 0.44	2.24	1.84	1.73	2.07	2.98	2.39	2.20	2.68	1.11	1.25	1.28	1.18	1.11	1.25	1.28	1.18
		-0.2 0.69	1.29	1.22	1.21	1.25	1.73	1.58	1.54	1.61	1.02	1.06	1.09	1.03	1.02	1.06	1.09	1.03
		0.2 1.56	0.97	0.94	0.92	0.92	1.29	1.24	1.21	1.22	0.94	0.91	0.88	0.89	0.94	0.91	0.88	0.89
		0.5 4	0.83	0.76	0.71	0.77	1.12	1.04	0.98	1.04	0.85	0.75	0.68	0.79	0.85	0.75	0.68	0.79
	θ	0.8 25	0.57	0.43	0.36	0.55	0.84	0.69	0.62	0.78	0.60	0.41	0.34	0.58	0.60	0.41	0.34	0.58
		-0.8 0.04	50.08	32.15	28.24	47.16	48.50	33.16	29.33	45.36	4.94	8.29	10.79	4.22	4.94	8.29	10.79	4.22
		-0.5 0.25	3.93	3.04	2.93	3.60	4.99	3.80	3.56	4.46	1.38	1.71	1.96	1.44	1.38	1.71	1.96	1.44
		-0.2 0.64	1.36	1.28	1.28	1.32	1.82	1.65	1.62	1.70	1.04	1.10	1.14	1.05	1.04	1.10	1.14	1.05
		θ 1	1.08	1.06	1.05	1.05	1.45	1.37	1.35	1.37	0.98	0.98	0.99	0.95	0.98	0.98	0.99	0.95
		0.2 1.44	0.99	0.97	0.96	0.95	1.32	1.27	1.25	1.25	0.96	0.93	0.92	0.91	0.96	0.93	0.92	0.91
		0.5 2.25	0.94	0.93	0.91	0.89	1.25	1.22	1.19	1.18	0.94	0.90	0.88	0.88	0.94	0.90	0.88	0.88
0.8 3.24	0.93	0.92	0.90	0.88	1.24	1.20	1.18	1.17	0.93	0.89	0.86	0.87	0.93	0.89	0.86	0.87		
250	ϕ	-0.8 0.31	7.29	4.53	2.56	8.36	10.96	6.51	4.01	12.40	1.26	1.82	0.75	1.32	1.26	1.82	0.75	1.32
		-0.5 0.44	1.79	1.50	1.40	1.74	2.66	2.08	1.88	2.52	1.08	1.19	1.20	1.12	1.08	1.19	1.20	1.12
		-0.2 0.69	1.17	1.13	1.12	1.15	1.67	1.52	1.49	1.59	1.03	1.06	1.08	1.02	1.03	1.06	1.08	1.02
		0.2 1.56	0.97	0.94	0.92	0.93	1.34	1.29	1.25	1.28	0.97	0.94	0.91	0.93	0.97	0.94	0.91	0.93
		0.5 4	0.89	0.81	0.73	0.83	1.22	1.14	1.06	1.15	0.92	0.81	0.73	0.86	0.92	0.81	0.73	0.86
	θ	0.8 25	0.69	0.50	0.38	0.69	1.02	0.82	0.70	0.97	0.73	0.50	0.38	0.74	0.73	0.50	0.38	0.74
		-0.8 0.04	57.38	31.05	24.30	66.19	70.94	38.95	29.70	80.63	3.52	6.60	9.12	2.86	3.52	6.60	9.12	2.86
		-0.5 0.25	3.08	2.37	2.30	3.07	4.57	3.26	2.97	4.47	1.25	1.56	1.81	1.31	1.25	1.56	1.81	1.31
		-0.2 0.64	1.22	1.17	1.18	1.20	1.74	1.58	1.55	1.65	1.04	1.09	1.12	1.04	1.04	1.09	1.12	1.04
		θ 1	1.04	1.02	1.01	1.02	1.45	1.38	1.36	1.40	1.00	1.00	1.00	0.98	1.00	1.00	1.00	0.98
		0.2 1.44	0.99	0.97	0.95	0.95	1.36	1.31	1.28	1.31	0.98	0.96	0.94	0.95	0.98	0.96	0.94	0.95
		0.5 2.25	0.96	0.94	0.91	0.92	1.31	1.27	1.24	1.26	0.97	0.94	0.91	0.93	0.97	0.94	0.91	0.93
0.8 3.24	0.95	0.93	0.90	0.91	1.30	1.26	1.23	1.25	0.97	0.93	0.90	0.92	0.97	0.93	0.90	0.92		
500	ϕ	-0.8 0.31	5.77	3.03	3.51	6.93	9.38	4.73	4.66	11.31	1.20	1.24	2.45	1.23	1.20	1.24	2.45	1.23
		-0.5 0.44	1.57	1.34	1.37	1.54	2.36	1.85	1.81	2.28	1.06	1.15	1.26	1.09	1.06	1.15	1.26	1.09
		-0.2 0.69	1.12	1.09	1.10	1.11	1.59	1.47	1.45	1.53	1.02	1.05	1.07	1.02	1.02	1.05	1.07	1.02
		0.2 1.56	0.98	0.95	0.93	0.95	1.34	1.29	1.26	1.30	0.99	0.95	0.93	0.95	0.99	0.95	0.93	0.95
		0.5 4	0.92	0.84	0.76	0.87	1.25	1.17	1.09	1.19	0.94	0.85	0.77	0.89	0.94	0.85	0.77	0.89
	θ	0.8 25	0.78	0.56	0.43	0.78	1.10	0.88	0.75	1.07	0.81	0.56	0.43	0.81	0.81	0.56	0.43	0.81
		-0.8 0.04	57.66	26.93	21.27	74.90	82.04	37.79	28.30	105.69	2.79	5.53	8.04	2.31	2.79	5.53	8.04	2.31
		-0.5 0.25	2.56	1.98	2.02	2.62	3.98	2.75	2.62	4.08	1.18	1.45	1.70	1.24	1.18	1.45	1.70	1.24
		-0.2 0.64	1.16	1.12	1.14	1.14	1.64	1.50	1.50	1.58	1.03	1.07	1.11	1.04	1.03	1.07	1.11	1.04
		θ 1	1.03	1.01	1.01	1.01	1.43	1.36	1.35	1.39	1.00	1.00	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	0.99
		0.2 1.44	0.99	0.97	0.95	0.96	1.35	1.31	1.29	1.32	0.99	0.97	0.95	0.96	0.99	0.97	0.95	0.96
		0.5 2.25	0.97	0.95	0.92	0.94	1.32	1.28	1.25	1.28	0.98	0.95	0.92	0.95	0.98	0.95	0.92	0.95
0.8 3.24	0.96	0.94	0.91	0.93	1.31	1.27	1.24	1.27	0.98	0.94	0.91	0.95	0.98	0.94	0.91	0.95		

† En este caso, $T = \{100, 250, 500\}$, $k_{max} = \{6, 10, 14\}$ respectivamente. $k_{min} = 1$.

Tabla 2.4: Ratio EVR de estimadores kernel ($p = 1$)

T	λ^2	$\hat{\omega}_{\text{GLS}}^2$				$\hat{\omega}_{\text{OLS}}^2$				$\hat{\omega}_{\text{GLS}, \Delta \hat{\theta}}^2$				$\hat{\omega}_{\text{OLS}, \Delta \hat{\theta}}^2$					
		$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW		
100	ϕ	-0.8	0.31	13.21	8.73	6.71	13.30	13.08	9.07	7.10	12.99	1.34	2.32	1.46	1.34	1.35	2.32	1.47	1.35
		-0.5	0.44	3.00	2.29	2.06	2.71	3.22	2.53	2.27	2.93	1.01	1.20	1.25	1.04	1.02	1.20	1.25	1.05
		-0.2	0.69	1.45	1.29	1.25	1.33	1.60	1.44	1.39	1.47	0.92	1.01	1.05	0.92	0.93	1.01	1.05	0.93
		0.2	1.56	0.93	0.91	0.88	0.88	1.03	1.01	0.99	0.98	0.84	0.86	0.85	0.80	0.85	0.86	0.85	0.81
		0.5	4	0.76	0.71	0.65	0.71	0.84	0.80	0.75	0.78	0.75	0.70	0.64	0.70	0.76	0.70	0.65	0.71
	θ	0.8	25	0.50	0.37	0.31	0.48	0.56	0.45	0.39	0.53	0.50	0.36	0.30	0.49	0.51	0.37	0.30	0.49
		-0.8	0.04	45.69	32.05	28.52	42.50	37.49	29.33	26.84	34.76	4.83	8.24	10.74	3.91	4.84	8.25	10.75	3.96
		-0.5	0.25	5.21	3.85	3.51	4.69	5.36	4.12	3.76	4.87	1.28	1.66	1.93	1.22	1.29	1.67	1.93	1.24
		-0.2	0.64	1.55	1.37	1.33	1.42	1.71	1.53	1.47	1.57	0.94	1.05	1.10	0.94	0.95	1.05	1.10	0.95
		θ	1	<i>1.11</i>	<i>1.05</i>	<i>1.03</i>	<i>1.05</i>	<i>1.23</i>	<i>1.18</i>	<i>1.15</i>	<i>1.17</i>	<i>0.88</i>	<i>0.93</i>	<i>0.95</i>	<i>0.86</i>	<i>0.89</i>	<i>0.94</i>	<i>0.95</i>	<i>0.87</i>
		0.2	1.44	0.96	0.94	0.92	0.92	1.06	1.05	1.03	1.02	0.86	0.88	0.88	0.82	0.86	0.89	0.88	0.83
		0.5	2.25	0.89	0.88	0.86	0.85	0.98	0.98	0.96	0.94	0.84	0.85	0.84	0.79	0.85	0.86	0.84	0.80
		0.8	3.24	0.87	0.87	0.84	0.83	0.96	0.96	0.94	0.91	0.83	0.84	0.83	0.78	0.84	0.85	0.83	0.79
		250	ϕ	-0.8	0.31	13.25	7.47	4.58	15.25	14.96	8.62	5.47	16.77	1.20	1.80	0.73	1.21	1.20	1.80
-0.5	0.44			2.62	1.90	1.64	2.52	3.07	2.22	1.89	2.97	1.02	1.16	1.19	1.04	1.03	1.16	1.19	1.05
-0.2	0.69			1.37	1.21	1.17	1.29	1.58	1.38	1.32	1.47	0.97	1.03	1.06	0.96	0.97	1.03	1.07	0.97
0.2	1.56			0.98	0.94	0.91	0.94	1.11	1.07	1.04	1.06	0.91	0.91	0.89	0.88	0.92	0.92	0.90	0.88
0.5	4			0.87	0.79	0.71	0.81	0.97	0.91	0.83	0.91	0.86	0.79	0.71	0.80	0.86	0.79	0.71	0.81
θ	0.8		25	0.67	0.48	0.36	0.66	0.75	0.58	0.48	0.73	0.67	0.48	0.36	0.67	0.67	0.48	0.36	0.67
	-0.8		0.04	74.34	40.79	30.90	84.55	70.51	41.18	31.74	77.06	3.46	6.58	9.11	2.61	3.47	6.58	9.11	2.62
	-0.5		0.25	4.94	3.28	2.86	4.97	5.68	3.79	3.23	5.71	1.19	1.53	1.79	1.19	1.20	1.53	1.79	1.19
	-0.2		0.64	1.45	1.27	1.23	1.36	1.68	1.45	1.39	1.56	0.98	1.06	1.11	0.98	0.98	1.06	1.11	0.99
	θ		1	<i>1.11</i>	<i>1.04</i>	<i>1.02</i>	<i>1.07</i>	<i>1.27</i>	<i>1.19</i>	<i>1.16</i>	<i>1.21</i>	<i>0.94</i>	<i>0.97</i>	<i>0.98</i>	<i>0.92</i>	<i>0.94</i>	<i>0.97</i>	<i>0.98</i>	<i>0.92</i>
	0.2		1.44	1.00	0.97	0.94	0.97	1.13	1.10	1.07	1.09	0.92	0.93	0.92	0.89	0.93	0.93	0.92	0.89
	0.5		2.25	0.96	0.93	0.90	0.92	1.07	1.05	1.02	1.03	0.91	0.91	0.89	0.87	0.92	0.91	0.89	0.88
	0.8		3.24	0.94	0.92	0.89	0.90	1.05	1.04	1.01	1.01	0.91	0.90	0.88	0.87	0.91	0.90	0.88	0.87
	500		ϕ	-0.8	0.31	11.40	5.39	4.93	14.19	13.85	6.66	5.76	16.88	1.16	1.23	2.44	1.16	1.16	1.23
-0.5		0.44		2.26	1.62	1.54	2.24	2.76	1.92	1.78	2.75	1.02	1.13	1.25	1.05	1.03	1.13	1.25	1.05
-0.2		0.69		1.29	1.15	1.13	1.23	1.52	1.32	1.29	1.43	0.98	1.03	1.06	0.98	0.98	1.03	1.06	0.99
0.2		1.56		1.00	0.96	0.93	0.97	1.14	1.09	1.06	1.10	0.94	0.94	0.92	0.92	0.95	0.94	0.92	0.92
0.5		4		0.91	0.84	0.76	0.86	1.03	0.96	0.89	0.98	0.90	0.83	0.76	0.86	0.91	0.84	0.76	0.86
θ		0.8	25	0.76	0.55	0.42	0.76	0.87	0.67	0.55	0.85	0.77	0.55	0.42	0.77	0.77	0.55	0.42	0.77
		-0.8	0.04	92.43	42.11	30.99	119.56	97.87	46.32	34.02	122.13	2.75	5.52	8.03	2.10	2.75	5.52	8.03	2.10
		-0.5	0.25	4.29	2.69	2.45	4.60	5.22	3.20	2.82	5.63	1.14	1.44	1.69	1.17	1.14	1.44	1.69	1.17
		-0.2	0.64	1.35	1.19	1.18	1.29	1.60	1.37	1.34	1.50	0.99	1.06	1.10	1.00	0.99	1.06	1.10	1.00
		θ	1	<i>1.09</i>	<i>1.03</i>	<i>1.02</i>	<i>1.06</i>	<i>1.26</i>	<i>1.18</i>	<i>1.16</i>	<i>1.22</i>	<i>0.96</i>	<i>0.98</i>	<i>0.99</i>	<i>0.95</i>	<i>0.97</i>	<i>0.99</i>	<i>0.99</i>	<i>0.95</i>
		0.2	1.44	1.01	0.98	0.95	0.99	1.16	1.11	1.09	1.12	0.95	0.95	0.94	0.93	0.95	0.95	0.94	0.93
		0.5	2.25	0.98	0.95	0.92	0.95	1.11	1.08	1.05	1.07	0.94	0.93	0.91	0.91	0.95	0.94	0.91	0.91
		0.8	3.24	0.97	0.94	0.91	0.94	1.09	1.07	1.04	1.06	0.94	0.93	0.90	0.91	0.94	0.93	0.90	0.91

Tabla 2.5: Ratio EVR de estimadores autorregresivos ($p = 0$)

T		λ^2	$\hat{\lambda}_{\text{GLS, AR}}^2$				$\hat{\lambda}_{\text{OLS, AR}}^2$				$\hat{\lambda}_{\text{PQ, AR}}^2$			
			AIC	BIC	MAIC	MBIC	AIC	BIC	MAIC	MBIC	AIC	BIC	MAIC	MBIC
100	ϕ	-0.8 0.31	1.08	1.03	1.01	1.00	1.14	1.06	1.01	1.00	1.10	1.04	0.99	0.98
		-0.5 0.44	1.07	1.04	1.01	1.01	1.14	1.06	1.01	1.00	1.10	1.05	1.00	0.99
		-0.2 0.69	1.13	1.23	1.06	1.13	1.19	1.24	1.05	1.08	1.17	1.26	1.04	1.08
		0.2 1.56	1.05	0.93	0.98	0.84	1.11	0.95	0.96	0.79	1.09	0.95	0.96	0.79
		0.5 4	1.11	1.06	1.05	1.03	1.14	1.06	1.04	0.99	1.13	1.07	1.04	1.00
		0.8 25	1.38	1.29	1.27	1.11	1.25	1.11	1.08	1.06	1.42	1.16	1.25	1.10
	θ	-0.8 0.04	6.90	11.10	4.88	5.06	10.46	15.51	6.32	6.36	10.26	16.65	5.19	5.24
		-0.5 0.25	1.53	1.93	1.37	1.55	1.68	2.11	1.41	1.52	1.63	2.11	1.34	1.46
		-0.2 0.64	1.19	1.35	1.11	1.21	1.25	1.36	1.10	1.16	1.24	1.38	1.09	1.16
		θ 1	<i>1.05</i>	<i>1.00</i>	<i>0.99</i>	<i>0.97</i>	<i>1.08</i>	<i>0.99</i>	<i>0.97</i>	<i>0.95</i>	<i>1.08</i>	<i>1.00</i>	<i>0.97</i>	<i>0.96</i>
		0.2 1.44	1.08	0.97	1.01	0.87	1.13	0.99	0.98	0.82	1.11	0.99	0.98	0.83
		0.5 2.25	1.12	1.17	1.06	1.06	1.20	1.21	1.06	1.00	1.16	1.20	1.03	0.99
		0.8 3.24	1.07	1.16	1.02	0.98	1.16	1.25	1.05	0.95	1.09	1.19	0.99	0.92
		250	ϕ	-0.8 0.31	1.04	1.01	1.01	1.00	1.07	1.02	1.01	1.00	1.05	1.01
-0.5 0.44	1.04			1.01	1.01	1.00	1.08	1.02	1.01	1.00	1.06	1.01	1.00	0.99
-0.2 0.69	1.05			1.08	1.02	1.06	1.09	1.10	1.02	1.03	1.07	1.10	1.00	1.03
0.2 1.56	1.04			0.98	1.01	0.94	1.08	0.99	1.01	0.90	1.06	0.99	1.00	0.90
0.5 4	1.05			1.02	1.02	1.01	1.08	1.02	1.02	1.01	1.07	1.02	1.01	1.01
0.8 25	1.08			1.04	1.04	1.04	1.10	1.04	1.03	1.02	1.09	1.05	1.03	1.03
θ	-0.8 0.04		2.43	4.40	2.07	2.62	3.13	5.98	2.31	2.55	2.79	5.60	2.01	2.24
	-0.5 0.25		1.23	1.53	1.19	1.40	1.31	1.61	1.21	1.34	1.27	1.58	1.16	1.31
	-0.2 0.64		1.09	1.19	1.06	1.15	1.13	1.21	1.05	1.11	1.11	1.21	1.04	1.10
	θ 1		<i>1.03</i>	<i>1.00</i>	<i>1.00</i>	<i>0.99</i>	<i>1.05</i>	<i>0.99</i>	<i>0.99</i>	<i>0.98</i>	<i>1.05</i>	<i>1.00</i>	<i>0.99</i>	<i>0.98</i>
	0.2 1.44		1.06	1.03	1.03	0.98	1.10	1.04	1.03	0.93	1.08	1.04	1.01	0.93
	0.5 2.25		1.07	1.03	1.03	1.00	1.13	1.06	1.04	0.97	1.09	1.05	1.01	0.95
	0.8 3.24		1.09	1.10	1.06	1.03	1.19	1.18	1.11	1.00	1.11	1.13	1.04	0.96
	500		ϕ	-0.8 0.31	1.02	1.00	1.01	1.00	1.04	1.01	1.01	1.00	1.03	1.01
-0.5 0.44		1.02		1.00	1.01	1.00	1.04	1.01	1.01	1.00	1.03	1.01	1.00	1.00
-0.2 0.69		1.02		1.01	1.01	1.01	1.04	1.02	1.01	1.00	1.03	1.02	1.00	1.00
0.2 1.56		1.02		1.00	1.01	0.99	1.04	1.01	1.01	0.98	1.03	1.01	1.00	0.98
0.5 4		1.03		1.01	1.01	1.01	1.05	1.01	1.01	1.00	1.04	1.01	1.00	1.00
0.8 25		1.04		1.02	1.03	1.02	1.05	1.02	1.02	1.01	1.05	1.02	1.01	1.01
θ		-0.8 0.04	1.63	2.77	1.51	2.13	1.85	3.20	1.56	1.95	1.72	3.01	1.45	1.83
		-0.5 0.25	1.14	1.36	1.12	1.30	1.19	1.39	1.13	1.26	1.16	1.37	1.11	1.24
		-0.2 0.64	1.05	1.10	1.04	1.09	1.08	1.11	1.04	1.08	1.07	1.11	1.03	1.08
		θ 1	<i>1.01</i>	<i>1.00</i>	<i>1.00</i>	<i>1.00</i>	<i>1.03</i>	<i>1.00</i>	<i>1.00</i>	<i>0.99</i>	<i>1.03</i>	<i>1.00</i>	<i>1.00</i>	<i>0.99</i>
		0.2 1.44	1.04	1.06	1.03	1.04	1.06	1.06	1.03	1.02	1.05	1.06	1.02	1.01
		0.5 2.25	1.04	0.99	1.03	0.97	1.08	1.01	1.03	0.95	1.05	1.00	1.01	0.94
		0.8 3.24	1.07	1.05	1.05	1.02	1.15	1.10	1.09	1.00	1.08	1.06	1.04	0.97

† En este caso, $T = \{100, 250, 500\}$, $k_{max} = \{4, 8, 14\}$ respectivamente. $k_{min} = 1$.

Tabla 2.6: Ratio EVR de estimadores autorregresivos ($p = 1$)

T		λ^2	$\hat{\lambda}_{\text{GLS, AR}}^2$				$\hat{\lambda}_{\text{OLS, AR}}^2$				$\hat{\lambda}_{\text{PQ, AR}}^2$			
			AIC	BIC	MAIC	MBIC	AIC	BIC	MAIC	MBIC	AIC	BIC	MAIC	MBIC
100	ϕ	-0.8 0.31	1.20	1.08	0.99	0.98	1.30	1.11	1.00	0.99	1.23	1.09	0.98	0.98
		-0.5 0.44	1.20	1.08	0.99	0.99	1.30	1.12	1.00	1.00	1.23	1.10	0.99	0.99
		-0.2 0.69	1.23	1.25	1.01	1.02	1.34	1.25	1.02	1.02	1.28	1.27	1.01	1.02
		0.2 1.56	1.16	0.96	0.89	0.70	1.33	0.98	0.87	0.68	1.19	0.98	0.87	0.69
		0.5 4	1.19	1.06	0.99	0.92	1.31	1.07	0.99	0.88	1.22	1.07	0.99	0.89
	θ	0.8 25	1.34	1.07	0.99	0.97	4.62	1.05	0.96	0.95	1.37	1.08	0.99	0.97
		-0.8 0.04	12.58	17.83	7.04	7.05	19.31	20.42	9.21	9.24	16.59	21.45	7.92	7.96
		-0.5 0.25	1.84	2.30	1.43	1.48	2.03	2.50	1.52	1.55	1.97	2.52	1.45	1.48
		-0.2 0.64	1.29	1.36	1.07	1.10	1.39	1.37	1.08	1.10	1.34	1.39	1.07	1.09
		θ 1	1.12	0.98	0.93	0.92	1.27	0.98	0.92	0.91	1.15	0.99	0.93	0.92
		0.2 1.44	1.17	1.00	0.92	0.74	1.40	1.02	0.89	0.72	1.21	1.02	0.89	0.73
		0.5 2.25	1.27	1.25	1.02	0.90	1.39	1.30	1.03	0.85	1.31	1.28	1.01	0.85
		0.8 3.24	1.25	1.35	1.04	0.87	1.37	1.47	1.07	0.86	1.27	1.39	1.02	0.84
		250	ϕ	-0.8 0.31	1.09	1.02	0.99	0.99	1.14	1.03	0.99	0.99	1.11	1.02
-0.5 0.44	1.09			1.02	0.99	0.99	1.14	1.03	1.00	0.99	1.11	1.02	0.99	0.99
-0.2 0.69	1.10			1.10	1.00	1.01	1.14	1.12	1.00	1.00	1.12	1.12	0.99	1.00
0.2 1.56	1.09			0.99	0.99	0.83	1.13	0.99	0.98	0.80	1.11	0.99	0.98	0.80
0.5 4	1.09			1.02	1.00	0.99	1.13	1.02	0.99	0.99	1.11	1.02	0.99	0.99
θ	0.8 25		1.10	1.02	0.99	0.99	1.12	1.00	0.98	0.97	1.12	1.02	0.99	0.99
	-0.8 0.04		3.50	6.89	2.39	2.52	4.80	9.43	2.85	2.90	4.34	9.16	2.42	2.47
	-0.5 0.25		1.36	1.66	1.19	1.29	1.44	1.72	1.23	1.30	1.40	1.70	1.19	1.26
	-0.2 0.64		1.14	1.22	1.04	1.08	1.18	1.23	1.04	1.07	1.17	1.24	1.03	1.06
	θ 1		1.06	0.99	0.97	0.97	1.09	0.98	0.96	0.96	1.08	0.99	0.96	0.96
	0.2 1.44		1.11	1.04	1.01	0.87	1.15	1.05	1.00	0.83	1.13	1.05	1.00	0.83
	0.5 2.25		1.15	1.07	1.02	0.94	1.22	1.10	1.02	0.93	1.18	1.09	1.01	0.92
	0.8 3.24		1.24	1.21	1.11	0.94	1.36	1.28	1.15	0.93	1.26	1.23	1.09	0.91
	500		ϕ	-0.8 0.31	1.05	1.01	1.00	1.00	1.09	1.01	1.00	1.00	1.06	1.01
-0.5 0.44		1.05		1.01	1.00	1.00	1.07	1.01	1.00	1.00	1.06	1.01	0.99	0.99
-0.2 0.69		1.05		1.02	1.00	1.00	1.07	1.02	1.00	1.00	1.06	1.02	0.99	1.00
0.2 1.56		1.05		1.01	1.00	0.95	1.07	1.01	0.99	0.92	1.06	1.01	0.99	0.92
0.5 4		1.05		1.01	1.00	1.00	1.07	1.01	0.99	0.99	1.06	1.01	0.99	1.00
θ		0.8 25	1.05	1.01	1.00	1.00	1.06	1.00	0.99	0.99	1.06	1.01	0.99	1.00
		-0.8 0.04	1.95	3.41	1.55	1.85	2.26	4.03	1.65	1.83	2.09	3.78	1.51	1.69
		-0.5 0.25	1.21	1.41	1.12	1.23	1.27	1.45	1.14	1.22	1.23	1.43	1.12	1.20
		-0.2 0.64	1.09	1.12	1.03	1.07	1.11	1.12	1.03	1.06	1.10	1.12	1.03	1.06
		θ 1	1.03	0.99	0.98	0.98	1.05	0.99	0.98	0.98	1.05	0.99	0.98	0.98
		0.2 1.44	1.07	1.06	1.01	0.99	1.09	1.06	1.01	0.95	1.08	1.06	1.01	0.95
		0.5 2.25	1.09	1.02	1.02	0.93	1.13	1.03	1.03	0.92	1.10	1.02	1.01	0.92
		0.8 3.24	1.18	1.11	1.09	0.97	1.26	1.15	1.12	0.97	1.19	1.12	1.08	0.95

Tabla 2.7: ECM de estimadores kernel ($p = 0$)

T	λ^2	$\hat{\omega}_{\text{GLS}}^2$				$\hat{\omega}_{\text{OLS}}^2$				$\hat{\omega}_{\text{GLS}, \Delta\hat{\theta}}^2$				$\hat{\omega}_{\text{OLS}, \Delta\hat{\theta}}^2$				
		$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	
100	ϕ	-0.8 0.31	10.086	3.953	1.935	10.976	13.743	5.666	3.005	14.286	0.035	0.227	0.032	0.084	0.035	0.227	0.032	0.084
		-0.5 0.44	0.410	0.183	0.132	0.318	0.892	0.455	0.346	0.669	0.029	0.029	0.029	0.058	0.029	0.029	0.029	0.058
		-0.2 0.69	0.093	0.057	0.050	0.069	0.413	0.299	0.274	0.317	0.065	0.038	0.032	0.062	0.065	0.038	0.032	0.062
		0.2 1.56	0.288	0.181	0.151	0.236	1.110	0.885	0.792	0.866	0.324	0.185	0.155	0.287	0.324	0.185	0.155	0.287
		0.5 4	2.300	1.852	2.072	2.469	6.213	4.688	4.240	5.082	2.259	1.891	2.226	2.465	2.259	1.891	2.226	2.465
	0.8 25	162.890	225.637	267.720	174.591	212.838	209.440	225.805	190.497	150.129	232.604	283.116	159.567	150.129	232.604	283.116	159.567	
	θ	-0.8 0.04	4.194	1.655	1.251	3.783	3.933	1.739	1.335	3.483	0.026	0.090	0.051	0.051	0.026	0.090	0.051	0.051
		-0.5 0.25	0.654	0.302	0.259	0.516	1.087	0.533	0.441	0.836	0.019	0.040	0.066	0.053	0.019	0.040	0.066	0.053
		-0.2 0.64	0.099	0.062	0.057	0.077	0.404	0.290	0.269	0.314	0.056	0.036	0.034	0.059	0.056	0.036	0.034	0.059
		0 1	<i>0.115</i>	<i>0.074</i>	<i>0.061</i>	<i>0.082</i>	<i>0.551</i>	<i>0.441</i>	<i>0.404</i>	<i>0.435</i>	<i>0.132</i>	<i>0.072</i>	<i>0.056</i>	<i>0.110</i>	<i>0.132</i>	<i>0.072</i>	<i>0.056</i>	<i>0.110</i>
		0.2 1.44	0.241	0.152	0.124	0.189	0.977	0.789	0.714	0.767	0.275	0.153	0.123	0.237	0.275	0.153	0.123	0.237
		0.5 2.25	0.629	0.395	0.333	0.544	2.242	1.802	1.619	1.763	0.676	0.392	0.335	0.619	0.676	0.392	0.335	0.619
		0.8 3.24	1.334	0.840	0.717	1.195	4.583	3.673	3.293	3.627	1.407	0.827	0.723	1.321	1.407	0.827	0.723	1.321
	250	ϕ	-0.8 0.31	6.174	1.765	0.458	8.765	12.247	3.614	1.144	16.430	0.016	0.074	0.017	0.056	0.016	0.074	0.017
-0.5 0.44			0.196	0.071	0.042	0.180	0.641	0.289	0.203	0.561	0.019	0.015	0.015	0.034	0.019	0.015	0.015	0.034
-0.2 0.69			0.054	0.026	0.021	0.041	0.371	0.269	0.248	0.305	0.044	0.021	0.017	0.042	0.044	0.021	0.017	0.042
0.2 1.56			0.196	0.100	0.077	0.174	1.182	0.937	0.840	0.977	0.218	0.103	0.079	0.200	0.218	0.103	0.079	0.200
0.5 4			1.490	1.129	1.480	1.745	6.790	5.074	4.439	5.658	1.482	1.100	1.491	1.721	1.482	1.100	1.491	1.721
0.8 25		97.893	170.576	245.656	105.502	218.928	191.914	214.399	190.956	87.606	166.226	246.076	94.641	87.606	166.226	246.076	94.641	
θ		-0.8 0.04	5.917	1.641	0.953	8.057	8.253	2.409	1.367	10.791	0.011	0.051	0.109	0.023	0.011	0.051	0.109	0.023
		-0.5 0.25	0.386	0.146	0.119	0.399	0.905	0.354	0.265	0.894	0.010	0.023	0.045	0.030	0.010	0.023	0.045	0.030
		-0.2 0.64	0.054	0.028	0.025	0.043	0.351	0.251	0.234	0.291	0.038	0.020	0.018	0.038	0.038	0.020	0.018	0.038
		0 1	<i>0.078</i>	<i>0.039</i>	<i>0.027</i>	<i>0.060</i>	<i>0.558</i>	<i>0.443</i>	<i>0.408</i>	<i>0.467</i>	<i>0.089</i>	<i>0.040</i>	<i>0.027</i>	<i>0.077</i>	<i>0.089</i>	<i>0.040</i>	<i>0.027</i>	<i>0.077</i>
		0.2 1.44	0.165	0.082	0.059	0.140	1.031	0.826	0.750	0.858	0.185	0.085	0.061	0.165	0.185	0.085	0.061	0.165
		0.5 2.25	0.420	0.216	0.169	0.387	2.390	1.913	1.720	1.993	0.454	0.218	0.172	0.426	0.454	0.218	0.172	0.426
		0.8 3.24	0.885	0.460	0.371	0.838	4.891	3.911	3.507	4.077	0.943	0.462	0.375	0.899	0.943	0.462	0.375	0.899
500		ϕ	-0.8 0.31	3.789	0.667	0.725	6.187	8.858	1.716	1.453	13.826	0.010	0.009	0.210	0.038	0.010	0.009	0.210
	-0.5 0.44		0.110	0.034	0.033	0.108	0.443	0.192	0.176	0.418	0.013	0.010	0.017	0.022	0.013	0.010	0.017	0.022
	-0.2 0.69		0.036	0.015	0.012	0.029	0.306	0.228	0.219	0.264	0.031	0.013	0.010	0.030	0.031	0.013	0.010	0.030
	0.2 1.56		0.142	0.063	0.049	0.127	1.071	0.867	0.792	0.925	0.156	0.064	0.050	0.143	0.156	0.064	0.050	0.143
	0.5 4		1.040	0.741	1.080	1.233	6.292	4.791	4.216	5.390	1.049	0.712	1.060	1.238	1.049	0.712	1.060	1.238
	0.8 25	63.004	131.502	209.061	71.099	205.992	169.913	190.978	182.729	57.159	127.067	206.497	65.436	57.159	127.067	206.497	65.436	
	θ	-0.8 0.04	6.645	1.334	0.762	11.510	11.478	2.354	1.272	19.167	0.005	0.033	0.080	0.013	0.005	0.033	0.080	0.013
		-0.5 0.25	0.239	0.076	0.072	0.281	0.654	0.216	0.180	0.748	0.006	0.015	0.033	0.018	0.006	0.015	0.033	0.018
		-0.2 0.64	0.035	0.016	0.015	0.029	0.284	0.209	0.204	0.246	0.027	0.013	0.012	0.027	0.027	0.013	0.012	0.027
		0 1	<i>0.057</i>	<i>0.024</i>	<i>0.015</i>	<i>0.045</i>	<i>0.492</i>	<i>0.399</i>	<i>0.376</i>	<i>0.429</i>	<i>0.064</i>	<i>0.025</i>	<i>0.016</i>	<i>0.055</i>	<i>0.064</i>	<i>0.025</i>	<i>0.016</i>	<i>0.055</i>
		0.2 1.44	0.119	0.051	0.036	0.102	0.929	0.760	0.703	0.809	0.132	0.053	0.037	0.118	0.132	0.053	0.037	0.118
		0.5 2.25	0.300	0.135	0.108	0.280	2.172	1.775	1.624	1.890	0.324	0.136	0.108	0.303	0.324	0.136	0.108	0.303
		0.8 3.24	0.629	0.288	0.240	0.600	4.455	3.637	3.317	3.876	0.672	0.288	0.238	0.636	0.672	0.288	0.238	0.636

Tabla 2.8: ECM de estimadores kernel ($p = 1$)

T	λ^2	$\hat{\omega}_{GLS}^2$				$\hat{\omega}_{OLS}^2$				$\hat{\omega}_{GLS, \Delta \hat{\theta}}^2$				$\hat{\omega}_{OLS, \Delta \hat{\theta}}^2$					
		$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$	NW		
100	ϕ	-0.8 0.31	17.284	6.855	3.739	17.871	16.565	7.272	4.130	16.609	0.026	0.214	0.029	0.063	0.026	0.215	0.029	0.065	
		-0.5 0.44	0.908	0.384	0.255	0.697	1.089	0.524	0.360	0.851	0.024	0.024	0.025	0.060	0.024	0.024	0.025	0.058	
		-0.2 0.69	0.134	0.069	0.054	0.085	0.231	0.141	0.115	0.157	0.059	0.034	0.029	0.074	0.060	0.035	0.029	0.073	
		0.2 1.56	0.235	0.165	0.149	0.211	0.325	0.241	0.207	0.268	0.336	0.203	0.174	0.342	0.337	0.202	0.173	0.340	
		0.5 4	2.444	2.179	2.498	2.748	2.556	2.053	2.164	2.613	2.618	2.271	2.597	2.941	2.604	2.240	2.563	2.919	
	θ	0.8 25	196.747	263.065	306.102	207.825	179.034	223.783	258.094	189.943	194.463	267.144	312.675	204.505	191.687	264.456	310.267	201.615	
	-0.8 0.04	3.506	1.620	1.260	3.074	2.412	1.359	1.113	2.077	0.025	0.089	0.158	0.053	0.025	0.089	0.158	0.052		
	-0.5 0.25	1.200	0.545	0.422	0.946	1.279	0.647	0.505	1.020	0.013	0.036	0.062	0.044	0.014	0.036	0.062	0.046		
	-0.2 0.64	0.156	0.082	0.067	0.101	0.253	0.154	0.129	0.175	0.050	0.031	0.029	0.068	0.051	0.032	0.029	0.068		
	0 1	0.090	0.060	0.049	0.065	0.172	0.127	0.108	0.127	0.129	0.072	0.056	0.134	0.130	0.072	0.056	0.133		
	0.2 1.44	0.191	0.132	0.114	0.161	0.281	0.212	0.181	0.226	0.279	0.163	0.134	0.284	0.281	0.163	0.133	0.282		
	0.5 2.25	0.559	0.385	0.347	0.526	0.704	0.517	0.448	0.615	0.703	0.433	0.377	0.736	0.706	0.431	0.374	0.732		
	0.8 3.24	1.226	0.844	0.770	1.196	1.493	1.086	0.947	1.330	1.473	0.922	0.820	1.559	1.478	0.917	0.812	1.549		
	250	ϕ	-0.8 0.31	17.570	4.887	1.588	23.943	21.580	6.433	2.266	27.763	0.012	0.070	0.018	0.050	0.013	0.070	0.018	0.052
			-0.5 0.44	0.613	0.190	0.096	0.577	0.931	0.324	0.175	0.870	0.016	0.013	0.013	0.035	0.017	0.013	0.013	0.037
			-0.2 0.69	0.091	0.037	0.026	0.062	0.202	0.103	0.079	0.145	0.040	0.019	0.015	0.045	0.041	0.020	0.016	0.045
0.2 1.56			0.166	0.093	0.077	0.145	0.296	0.193	0.153	0.234	0.216	0.109	0.086	0.217	0.217	0.109	0.085	0.217	
0.5 4			1.471	1.207	1.603	1.746	1.880	1.278	1.337	1.861	1.581	1.246	1.632	1.882	1.578	1.234	1.619	1.864	
θ		0.8 25	106.420	181.595	257.238	113.249	98.913	141.002	197.569	104.977	105.538	182.111	258.812	112.343	104.381	180.812	257.711	111.013	
-0.8 0.04		8.947	2.609	1.467	11.732	8.101	2.648	1.540	9.874	0.010	0.051	0.108	0.021	0.010	0.051	0.108	0.021		
-0.5 0.25		1.098	0.363	0.234	1.157	1.468	0.518	0.328	1.521	0.008	0.021	0.043	0.027	0.008	0.021	0.043	0.028		
-0.2 0.64		0.106	0.044	0.032	0.074	0.220	0.111	0.086	0.160	0.034	0.018	0.017	0.041	0.034	0.018	0.017	0.041		
0 1		0.070	0.035	0.025	0.050	0.167	0.107	0.086	0.125	0.085	0.039	0.027	0.084	0.086	0.039	0.027	0.084		
0.2 1.44		0.138	0.075	0.057	0.113	0.261	0.173	0.139	0.203	0.182	0.088	0.064	0.180	0.182	0.088	0.064	0.180		
0.5 2.25		0.374	0.209	0.175	0.343	0.604	0.396	0.318	0.495	0.451	0.232	0.186	0.464	0.453	0.231	0.185	0.463		
0.8 3.24		0.804	0.455	0.390	0.768	1.249	0.813	0.655	1.043	0.942	0.494	0.409	0.981	0.945	0.492	0.406	0.977		
500		ϕ	-0.8 0.31	12.996	2.361	1.704	20.967	18.431	3.633	2.422	28.088	0.008	0.009	0.208	0.046	0.009	0.009	0.208	0.046
			-0.5 0.44	0.384	0.093	0.066	0.404	0.676	0.188	0.133	0.704	0.012	0.009	0.016	0.022	0.012	0.009	0.016	0.024
			-0.2 0.69	0.061	0.021	0.015	0.044	0.166	0.079	0.066	0.125	0.029	0.012	0.010	0.030	0.029	0.012	0.010	0.031
	0.2 1.56		0.125	0.060	0.048	0.109	0.287	0.180	0.145	0.231	0.153	0.067	0.053	0.149	0.154	0.067	0.053	0.150	
	0.5 4		1.016	0.763	1.119	1.215	1.687	1.044	1.044	1.587	1.083	0.781	1.131	1.291	1.085	0.776	1.125	1.294	
	θ	0.8 25	66.036	135.491	213.202	73.560	71.248	100.905	155.805	76.526	65.624	135.326	213.400	73.260	65.170	134.647	212.803	72.940	
	-0.8 0.04	14.033	2.842	1.500	23.597	15.397	3.363	1.781	24.200	0.005	0.033	0.080	0.011	0.005	0.033	0.080	0.012		
	-0.5 0.25	0.805	0.205	0.143	1.011	1.228	0.329	0.220	1.514	0.005	0.014	0.032	0.019	0.005	0.014	0.032	0.018		
	-0.2 0.64	0.070	0.025	0.020	0.051	0.177	0.082	0.070	0.134	0.025	0.012	0.011	0.028	0.025	0.012	0.011	0.028		
	0 1	0.054	0.023	0.015	0.040	0.158	0.096	0.081	0.124	0.061	0.024	0.016	0.057	0.062	0.025	0.016	0.058		
	0.2 1.44	0.105	0.048	0.035	0.086	0.254	0.162	0.132	0.204	0.129	0.054	0.039	0.123	0.130	0.054	0.039	0.123		
	0.5 2.25	0.274	0.131	0.109	0.248	0.575	0.366	0.297	0.477	0.318	0.142	0.115	0.317	0.320	0.142	0.114	0.321		
	0.8 3.24	0.582	0.283	0.244	0.546	1.176	0.746	0.606	0.991	0.661	0.302	0.255	0.672	0.665	0.302	0.253	0.670		

Tabla 2.9: ECM de estimadores autorregresivos ($p = 0$)

T		λ^2	$\hat{\lambda}_{\text{GLS, AR}}^2$				$\hat{\lambda}_{\text{OLS, AR}}^2$				$\hat{\lambda}_{\text{PQ, AR}}^2$			
			AIC	BIC	MAIC	MBIC	AIC	BIC	MAIC	MBIC	AIC	BIC	MAIC	MBIC
100	ϕ	-0.8 0.31	0.016	0.006	0.009	0.004	0.027	0.009	0.008	0.004	0.017	0.006	0.008	0.004
		-0.5 0.44	0.035	0.015	0.019	0.011	0.061	0.020	0.019	0.010	0.039	0.017	0.018	0.011
		-0.2 0.69	0.096	0.085	0.063	0.063	0.146	0.087	0.058	0.051	0.109	0.092	0.060	0.055
		0.2 1.56	0.623	0.417	0.449	0.373	0.871	0.455	0.435	0.369	0.681	0.422	0.425	0.360
		0.5 4	5.921	3.525	4.267	3.001	7.216	3.878	4.229	3.050	6.365	3.604	4.144	3.139
	θ	0.8 25	6.33E+04	6.27E+04	6.27E+04	400.642	1.53E+03	429.696	453.836	357.167	6.35E+04	472.741	6.27E+04	383.396
		-0.8 0.04	0.121	0.262	0.034	0.037	0.381	0.459	0.067	0.068	0.284	0.575	0.048	0.048
		-0.5 0.25	0.041	0.091	0.023	0.038	0.058	0.124	0.025	0.034	0.055	0.134	0.022	0.031
		-0.2 0.64	0.092	0.107	0.063	0.075	0.128	0.105	0.056	0.060	0.105	0.115	0.059	0.065
		θ 1	0.153	0.049	0.093	0.034	0.239	0.057	0.087	0.034	0.174	0.051	0.085	0.035
		0.2 1.44	0.500	0.343	0.360	0.281	0.686	0.376	0.353	0.276	0.537	0.351	0.346	0.269
		0.5 2.25	1.661	1.520	1.246	1.104	2.131	1.676	1.233	1.020	1.763	1.590	1.186	1.045
		0.8 3.24	3.872	5.233	3.043	2.737	5.096	6.603	3.271	2.421	4.182	5.448	2.968	2.420
		250	ϕ	-0.8 0.31	0.007	0.001	0.004	0.001	0.011	0.001	0.004	0.001	0.007	0.001
-0.5 0.44	0.016			0.003	0.010	0.004	0.026	0.004	0.010	0.004	0.018	0.004	0.009	0.004
-0.2 0.69	0.054			0.032	0.029	0.027	0.084	0.034	0.028	0.020	0.058	0.035	0.027	0.020
0.2 1.56	0.542			0.137	0.181	0.162	0.770	0.136	0.177	0.197	0.565	0.133	0.172	0.193
0.5 4	2.967			1.102	1.555	1.055	3.557	1.110	1.511	1.057	3.105	1.106	1.476	1.061
θ	0.8 25		193.365	122.564	144.129	119.844	263.083	122.001	139.437	117.295	203.615	123.308	137.192	118.726
	-0.8 0.04		0.006	0.031	0.003	0.006	0.015	0.069	0.004	0.005	0.012	0.067	0.002	0.004
	-0.5 0.25		0.011	0.029	0.009	0.019	0.016	0.035	0.009	0.015	0.013	0.033	0.008	0.013
	-0.2 0.64		0.045	0.044	0.028	0.036	0.069	0.049	0.026	0.026	0.050	0.051	0.026	0.027
	θ 1		0.121	0.012	0.047	0.012	0.196	0.012	0.044	0.013	0.132	0.012	0.043	0.013
	0.2 1.44		0.418	0.128	0.154	0.141	0.582	0.128	0.148	0.159	0.431	0.125	0.145	0.155
	0.5 2.25		1.414	0.542	0.612	0.444	1.833	0.586	0.601	0.398	1.471	0.564	0.557	0.399
	0.8 3.24		3.039	2.785	2.057	1.565	4.008	3.380	2.321	1.440	3.124	2.861	1.940	1.372
	500		ϕ	-0.8 0.31	0.003	0.001	0.003	0.001	0.004	0.001	0.003	0.001	0.004	0.001
-0.5 0.44		0.007		0.002	0.006	0.002	0.009	0.002	0.006	0.002	0.008	0.002	0.006	0.002
-0.2 0.69		0.020		0.008	0.017	0.008	0.026	0.008	0.017	0.006	0.021	0.008	0.017	0.006
0.2 1.56		0.119		0.049	0.103	0.056	0.155	0.049	0.099	0.073	0.128	0.048	0.098	0.072
0.5 4		1.035		0.503	0.921	0.502	1.327	0.512	0.876	0.505	1.118	0.509	0.866	0.506
θ		0.8 25	76.326	55.271	69.359	54.546	82.074	55.158	66.098	54.130	77.589	55.440	66.263	54.516
		-0.8 0.04	0.001	0.007	0.001	0.003	0.002	0.011	0.001	0.002	0.001	0.009	0.001	0.002
		-0.5 0.25	0.005	0.012	0.005	0.010	0.007	0.014	0.005	0.008	0.006	0.013	0.004	0.007
		-0.2 0.64	0.018	0.013	0.016	0.013	0.023	0.014	0.016	0.011	0.020	0.014	0.016	0.011
		θ 1	0.035	0.005	0.029	0.005	0.047	0.005	0.029	0.005	0.038	0.005	0.028	0.006
		0.2 1.44	0.107	0.055	0.094	0.060	0.136	0.055	0.090	0.073	0.112	0.054	0.088	0.072
		0.5 2.25	0.408	0.261	0.358	0.237	0.500	0.274	0.358	0.221	0.415	0.265	0.344	0.222
		0.8 3.24	1.457	1.037	1.292	0.891	1.939	1.193	1.479	0.828	1.535	1.057	1.268	0.807

Tabla 2.10: ECM de estimadores autorregresivos ($p = 1$)

T	λ^2		$\hat{\lambda}_{\text{GLS, AR}}^2$				$\hat{\lambda}_{\text{OLS, AR}}^2$				$\hat{\lambda}_{\text{PQ, AR}}^2$				
			AIC	BIC	MAIC	MBIC	AIC	BIC	MAIC	MBIC	AIC	BIC	MAIC	MBIC	
100	ϕ	-0.8	0.31	0.041	0.013	0.007	0.004	0.108	0.028	0.006	0.004	0.046	0.015	0.006	0.004
		-0.5	0.44	0.101	0.029	0.015	0.010	0.288	0.080	0.014	0.010	0.108	0.040	0.014	0.011
		-0.2	0.69	0.201	0.085	0.048	0.040	2.532	0.088	0.044	0.037	0.256	0.090	0.046	0.040
		0.2	1.56	1.260	0.538	0.468	0.382	91.662	0.628	0.485	0.383	1.368	0.557	0.468	0.372
		0.5	4	14.371	4.973	3.982	3.490	139.651	7.196	3.952	3.915	15.140	5.134	3.905	3.930
	0.8	25	1.50E+04	588.031	477.557	346.062	2.70E+07	649.806	466.801	363.298	1.53E+04	604.016	457.371	345.683	
	θ	-0.8	0.04	1.687	0.561	0.083	0.084	21.028	0.908	0.151	0.152	1.894	0.770	0.122	0.123
		-0.5	0.25	0.084	0.161	0.027	0.031	0.143	0.218	0.034	0.036	0.109	0.216	0.029	0.032
		-0.2	0.64	0.167	0.102	0.048	0.047	1.938	0.104	0.045	0.043	0.216	0.110	0.047	0.046
		θ	1	<i>0.382</i>	<i>0.084</i>	<i>0.079</i>	<i>0.037</i>	<i>38.527</i>	<i>0.112</i>	<i>0.074</i>	<i>0.037</i>	<i>0.439</i>	<i>0.094</i>	<i>0.074</i>	<i>0.037</i>
		0.2	1.44	0.989	0.434	0.368	0.265	201.375	0.493	0.370	0.262	1.085	0.445	0.358	0.254
		0.5	2.25	3.332	2.176	1.257	1.003	10.520	3.261	1.302	1.051	3.609	2.305	1.221	1.048
		0.8	3.24	6.870	8.852	3.437	2.140	14.079	12.715	3.798	2.087	7.340	9.346	3.304	2.078
	250	ϕ	-0.8	0.31	0.014	0.002	0.004	0.002	0.023	0.002	0.003	0.002	0.015	0.002	0.003
-0.5			0.44	0.033	0.004	0.009	0.004	0.056	0.004	0.008	0.004	0.038	0.004	0.008	0.004
-0.2			0.69	0.080	0.035	0.023	0.016	0.146	0.037	0.023	0.015	0.100	0.038	0.023	0.015
0.2			1.56	0.722	0.140	0.167	0.236	1.112	0.139	0.168	0.258	0.749	0.136	0.165	0.254
0.5			4	3.683	1.112	1.427	1.060	5.058	1.119	1.394	1.057	4.135	1.119	1.385	1.070
0.8		25	246.976	118.403	128.665	111.530	327.940	116.433	122.551	108.631	260.708	118.550	124.989	111.336	
θ		-0.8	0.04	0.021	0.093	0.005	0.005	0.049	0.176	0.009	0.009	0.040	0.181	0.005	0.006
		-0.5	0.25	0.020	0.040	0.009	0.012	0.026	0.046	0.010	0.012	0.022	0.044	0.009	0.011
		-0.2	0.64	0.066	0.051	0.023	0.021	0.098	0.053	0.023	0.019	0.072	0.056	0.023	0.020
		θ	1	<i>0.180</i>	<i>0.012</i>	<i>0.039</i>	<i>0.014</i>	<i>0.291</i>	<i>0.014</i>	<i>0.037</i>	<i>0.014</i>	<i>0.195</i>	<i>0.013</i>	<i>0.037</i>	<i>0.015</i>
		0.2	1.44	0.545	0.129	0.147	0.177	0.843	0.128	0.147	0.186	0.575	0.126	0.144	0.183
		0.5	2.25	1.913	0.625	0.582	0.362	2.863	0.684	0.566	0.343	2.012	0.649	0.540	0.348
		0.8	3.24	4.832	3.818	2.431	1.261	7.206	4.810	2.726	1.158	5.038	3.929	2.276	1.157
500		ϕ	-0.8	0.31	0.005	0.001	0.002	0.001	0.122	0.001	0.002	0.001	0.007	0.001	0.002
	-0.5		0.44	0.011	0.002	0.005	0.002	0.017	0.002	0.005	0.002	0.012	0.002	0.005	0.002
	-0.2		0.69	0.029	0.008	0.014	0.006	0.043	0.009	0.013	0.006	0.031	0.009	0.013	0.006
	0.2		1.56	0.167	0.049	0.087	0.092	0.269	0.049	0.080	0.118	0.185	0.049	0.081	0.117
	0.5		4	1.466	0.506	0.794	0.510	2.381	0.507	0.770	0.507	1.613	0.509	0.772	0.512
	0.8	25	90.249	54.269	65.378	52.992	116.838	53.515	62.693	51.884	96.149	54.431	63.730	52.877	
	θ	-0.8	0.04	0.002	0.013	0.001	0.002	0.004	0.021	0.001	0.002	0.003	0.018	0.001	0.001
		-0.5	0.25	0.007	0.015	0.005	0.007	0.068	0.017	0.005	0.006	0.009	0.016	0.005	0.006
		-0.2	0.64	0.025	0.015	0.015	0.010	0.037	0.016	0.013	0.010	0.028	0.016	0.013	0.010
		θ	1	<i>0.050</i>	<i>0.005</i>	<i>0.023</i>	<i>0.006</i>	<i>0.089</i>	<i>0.005</i>	<i>0.021</i>	<i>0.007</i>	<i>0.059</i>	<i>0.005</i>	<i>0.021</i>	<i>0.007</i>
		0.2	1.44	0.148	0.055	0.080	0.085	0.223	0.054	0.076	0.100	0.157	0.054	0.076	0.099
		0.5	2.25	0.562	0.279	0.354	0.213	0.830	0.295	0.345	0.198	0.593	0.284	0.331	0.201
		0.8	3.24	2.243	1.289	1.499	0.766	3.470	1.529	1.672	0.705	2.422	1.327	1.412	0.707

2.4 Análisis comparado del MSB

Una vez analizada la calidad de las estimaciones de los tres estimadores de varianza a largo plazo, el siguiente paso es evaluar el comportamiento del estadístico MSB utilizando estos estimadores. En concreto, en esta sección, examinaremos las propiedades de tamaño y potencia ajustada⁸ de distintas versiones del MSB para distintos tamaños de la muestra. Estas versiones difieren según el método empleado para eliminar los elementos deterministas de la serie y el estimador de varianza a largo plazo utilizado en la construcción del estadístico.

Consideraremos que la serie $\{y_t\}$ se ha generado a partir del siguiente proceso generador que es estándar en la literatura:

$$\begin{aligned} y_t &= d_t + v_t \\ v_t &= \rho_c v_{t-1} + u_t \end{aligned} \tag{2.3}$$

con $\rho_c = 1 + c/T$, $c < 0$ y $d_t = z_t' \boldsymbol{\delta}$ representa la parte determinista con z_t y $\boldsymbol{\delta}$ definidos como en la Sección 2.2. Esto nos permite centrar nuestro estudio en los dos modelos más comunes: M^μ que incluye un término constante ($p = 0$), y M^τ que incluye una tendencia lineal ($p = 1$). Así, vamos a considerar dos procedimientos para eliminar de la serie los elementos deterministas, en concreto, consideramos el procedimiento OLS y el procedimiento de “cuasi-diferenciación” GLS de Elliott *et al.* (1996). Asumiremos que el valor inicial es $v_0 = 0$, de manera que en nuestro análisis no valoramos otras opciones relacionadas con las condiciones iniciales pero, teniendo en cuenta a Harvey *et al.* (2009), el efecto de las condiciones iniciales puede afectar a nuestro estudio, especialmente, en cuanto a la potencia de los contrastes se refiere como se mostrará en los capítulos 3 y 4. Esto sucede porque, bajo la hipótesis alternativa estacionaria, la primera observación se trata de forma distinta al resto de observaciones de la serie. El término de error puede adoptar las siguientes estructuras de dependencia temporal:

$$\begin{cases} \text{i.i.d. :} & u_t = \varepsilon_t \\ \text{AR(1) :} & u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t \\ \text{MA(1) :} & u_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \end{cases}$$

Específicamente, tendremos en cuenta los siguientes valores cuando el error se distribuye como un proceso MA(1): $\theta = (-0.8, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 0.8)$ y cuando se distribuye como un proceso AR(1): $\phi = (-0.8, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 0.8)$. Notar, además, que cuando $\phi = \theta = 0$, el error es i.i.d.

Entonces, siguiendo la línea del Capítulo 1, consideraremos que las hipótesis alternativas locales son del tipo $\rho_c = 1 + c/T$, con la hipótesis nula como caso particular ($c = 0$). Así, evaluaremos la potencia ajustada al tamaño⁹ del modelo M^μ para $\rho_c = 0.93$ ($T = 100$), 0.972 ($T = 250$) y 0.986 ($T = 500$), mientras que para el modelo M^τ , $\rho_c = 0.865$ ($T = 100$), 0.946 ($T = 250$) y 0.973 ($T = 500$). El número de simulaciones realizado en GAUSS 9.0 ha sido de 10000.

⁸La potencia ajustada al tamaño se ha calculado a partir del punto crítico implícito a un nivel de significación del 5% para cada uno de los escenarios planteados.

⁹En esta sección, en aras de ser breves, solo vamos a presentar algunos de los resultados de todo el conjunto de simulaciones realizadas, las cuales consideran distintos tamaños del parámetro local c y tamaños de muestra T . En particular, exponemos los resultados correspondientes a $c = \bar{c}$ para distintos T de la forma que presentan Ng y Perron (2001). Los resultados que no aparecen son cualitativamente similares y no alteran las conclusiones extraídas en cuanto al comportamiento de los distintos estadísticos de contraste.

Las tablas, que a continuación presentamos, recogen los resultados correspondientes a las diferentes alternativas del MSB atendiendo a estos aspectos: método de estimación, estimador de varianza a largo plazo utilizado y *bandwidth* o criterio de selección del número de retardos, según corresponda. En la siguiente tabla¹⁰, mostramos la relación de contrastes que hemos examinado en nuestro ejercicio de Monte Carlo.

Tabla 2.11: Relación de versiones del estadístico MSB

		$\hat{\lambda}_{AR}^2$ (MAIC)		$\hat{\omega}_{\Delta\hat{\theta}}^2$		
		NP	PQ	$O(T^{1/2})$	$O(T^{1/3})$	$O(T^{1/4})$
GLS	MSB_{GLS}	MSB_{PQ}	$\overline{MSB}_{O(T^{1/2})}^{GLS}$	$\overline{MSB}_{O(T^{1/3})}^{GLS}$	$\overline{MSB}_{O(T^{1/4})}^{GLS}$	$\overline{MSB}_{NW}^{GLS}$
OLS	MSB_{OLS}		$\overline{MSB}_{O(T^{1/2})}^{OLS}$	$\overline{MSB}_{O(T^{1/3})}^{OLS}$	$\overline{MSB}_{O(T^{1/4})}^{OLS}$	$\overline{MSB}_{NW}^{OLS}$

[†] En la sección anterior concluíamos que el estimador autorregresivo producía, por lo general, resultados sin notables diferencias utilizando el criterio MAIC y MBIC. No obstante, teniendo presente la consideración que hacen en Perron y Ng (1998), hemos comprobado que, efectivamente, los resultados con ambos criterios son cualitativamente similares. Para simplificar nuestra presentación mostramos los resultados correspondientes al criterio MAIC.

^{††} El estimador autorregresivo de varianza a largo plazo se define y construye como indican Ng y Perron (2001).

^{†††} Seguimos a Perron y Qu (2007) en la modificación de la construcción del criterio MAIC.

Comenzamos con el análisis de la Tabla 2.12. En ella podemos ver, en primer lugar, como a medida que el tamaño muestral aumenta, el tamaño empírico de los diferentes contrastes tiende al valor nominal. Además, distinguimos una pauta creciente en el tamaño de los contrastes cuando $\{\phi, \theta\} \rightarrow 1$. También, observamos que las distorsiones en muestras pequeñas causadas por una alta autocorrelación en los errores se van reduciendo para muestras más grandes. Estas diferencias con respecto al nivel nominal son más importantes en las versiones que se basan en un estimador kernel, especialmente cuando el *bandwidth* se selecciona con el procedimiento de NW. Segundo, en términos generales, la versión MSB_{GLS} produce valores de tamaño empírico más próximos al 5% nominal que el resto de sus competidores, aunque puntualmente aparece alguna versión kernel que lo supera ligeramente. Nótese, además, que se puede establecer una relación directa entre ratio EVR del estimador de varianza a largo plazo y tamaño empírico del estadístico MSB. En este sentido, podemos concluir que una ratio EVR del estimador autorregresivo más próxima a la unidad implica que el tamaño empírico del estadístico MSB se ajusta más al nivel nominal.

En términos de potencia ajustada, la Tabla 2.13 nos indica que la versión MSB con el estimador $\hat{\omega}_{\Delta\hat{\theta}}^2$ y un *bandwidth* con $O(T^{1/4})$ es el que produce una potencia ajustada mayor que la del resto de contrastes. Téngase presente que cuando analizamos el ECM de los diferentes estimadores de la varianza a largo plazo, era precisamente este estimador el que proporcionaba un ECM más próximo a cero, por lo que podría pensarse en una relación entre una potencia ajustada mayor y un ECM más próximo a cero.

Si analizamos ahora el modelo que tiene una constante y tendencia lineal ($p = 1$), podemos ver que la inclusión de un nuevo elemento determinista no altera significativamente los resultados comentados para el modelo anterior. En las tablas 2.14 y 2.15 encontramos estos resultados.

¹⁰ Los resultados que corresponden al estimador $\hat{\omega}^2$ se omiten del texto porque podemos encontrar una muestra de los mismos en Patterson (2011, tablas 6.10a y 6.10b). No obstante, éstos se encuentran disponibles en un documento a parte bajo petición. Además, recordemos que en el análisis de la varianza a largo plazo de la sección anterior, concluíamos que se comportaba mejor el estimador $\hat{\omega}_{\Delta\hat{\theta}}^2$.

En términos de tamaño empírico, la Tabla 2.14 nos indica que, en general, el tamaño empírico producido por las versiones basadas en un estimador autorregresivo se aproximan más al tamaño nominal. En particular, son las versiones GLS y PQ las que proporcionan con mayor frecuencia tasas de rechazo de la hipótesis nula más cercanas al 5%. En cambio, las versiones basadas en el estimador kernel, por lo general, exhiben un tamaño empírico muy bajo excepto cuando los errores siguen un proceso MA(1) con $\theta = -0.8$, que presentan un tamaño excesivamente distorsionado, distorsión que aumenta con el tamaño de la muestra. El $\overline{\text{MSB}}_{\text{NW}}^{\text{GLS}}$ consigue controlar un poco más y presenta valores menos distorsionados que el resto de alternativas kernel.

A partir de los resultados de la Tabla 2.15, podemos decir en primer lugar que la potencia ajustada presenta una pauta creciente con el tamaño muestral y, en segundo lugar, que la versión $\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$ produce una potencia ajustada más alta que cualquier otra versión.

Las conclusiones que extraemos de esta sección son las siguientes:

1. Independientemente de la estructura determinista del proceso generador, el tamaño empírico que corresponde al MSB basado en el estimador autorregresivo y en los procedimientos GLS y PQ, dista menos del tamaño nominal establecido en el 5%, que el resto de procedimientos.
2. Podemos encontrar la siguiente pauta bien definida: si $\text{EVR} > 1$, es decir, si la varianza estimada es más grande que la verdadera y, como consecuencia, se producen valores más pequeños del estadístico MSB, entonces el número de veces que rechaza la hipótesis nula frente a la alternativa aumenta. Si $\text{EVR} < 1$, entonces, la estimación es más pequeña que el verdadero valor de la varianza a largo plazo y, como consecuencia, la tasa de rechazo disminuye porque el estadístico MSB toma valores más grandes. Recordemos que el MSB rechaza la hipótesis nula para valores pequeños del estadístico.
3. Los resultados de potencia ajustada al tamaño, mostrados en las tablas 2.13 y 2.15, indican que la versión $\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$, en la mayoría de ocasiones, alcanza una potencia ajustada al tamaño más alta, lo que se traduce en un buen *trade-off* entre tamaño y potencia ajustada en comparación con los exhibidos por los otros procedimientos considerados. También, observamos, por lo general, como las versiones que utilizan un estimador autorregresivo presentan un equilibrio tamaño potencia ajustada ligeramente inferior al caso anterior.
4. Cuando utilizamos en el MSB el estimador de la varianza a largo plazo que proporcionaba un ECM más próximo a cero, como sucede con el $\hat{\omega}_{\text{GLS}, \Delta \hat{v}}^2(O(T^{1/4}))$, el contraste MSB produce los valores de potencia ajustada más elevados de entre todas las versiones consideradas.

Tabla 2.12: Tamaño empírico de diferentes versiones del MSB[†]

TM		MSB _{GLS}	MSB _{OLS}	MSB _{PQ}	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/2})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/3})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{\text{NW}}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/2})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/3})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{\text{NW}}^{\text{OLS}}$	
100	ϕ	-0.8	0.012	0.002	0.012	0.022	0.112	0.123	0.017	0.001	0.048	0.060	0.010
		-0.5	0.032	0.017	0.032	0.012	0.054	0.076	0.014	0.001	0.026	0.045	0.008
		-0.2	0.050	0.031	0.051	0.014	0.044	0.053	0.008	0.001	0.018	0.029	0.003
		0.2	0.039	0.016	0.036	0.015	0.033	0.036	0.004	0.002	0.013	0.017	0.001
		0.5	0.064	0.044	0.065	0.012	0.019	0.016	0.004	0.001	0.006	0.006	0.001
	θ	0.8	0.090	0.067	0.091	0.007	0.003	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000	0.001
		-0.8	0.031	0.069	0.059	0.048	0.519	0.682	0.055	0.003	0.439	0.717	0.044
		-0.5	0.047	0.037	0.052	0.015	0.103	0.163	0.023	0.001	0.054	0.113	0.014
		-0.2	0.056	0.035	0.058	0.014	0.046	0.060	0.009	0.001	0.020	0.033	0.003
		0	<i>0.045</i>	<i>0.023</i>	<i>0.045</i>	<i>0.015</i>	<i>0.038</i>	<i>0.045</i>	<i>0.006</i>	<i>0.002</i>	<i>0.015</i>	<i>0.023</i>	<i>0.002</i>
		0.2	0.043	0.020	0.040	0.014	0.034	0.039	0.005	0.001	0.012	0.017	0.001
		0.5	0.057	0.038	0.055	0.014	0.031	0.034	0.004	0.002	0.013	0.016	0.001
		0.8	0.067	0.058	0.061	0.013	0.031	0.034	0.004	0.001	0.013	0.016	0.001
		250	ϕ	-0.8	0.025	0.012	0.025	0.043	0.129	0.215	0.035	0.016	0.122
-0.5	0.039			0.028	0.039	0.031	0.061	0.079	0.030	0.012	0.047	0.072	0.020
-0.2	0.045			0.035	0.045	0.026	0.048	0.058	0.024	0.013	0.037	0.046	0.014
0.2	0.049			0.041	0.048	0.026	0.037	0.037	0.022	0.013	0.029	0.030	0.010
0.5	0.050			0.039	0.049	0.021	0.021	0.016	0.016	0.009	0.013	0.009	0.005
θ	0.8		0.058	0.052	0.058	0.012	0.005	0.001	0.010	0.004	0.002	0.000	0.003
	-0.8		0.022	0.026	0.023	0.171	0.510	0.655	0.085	0.081	0.643	0.809	0.079
	-0.5		0.050	0.040	0.049	0.041	0.105	0.151	0.038	0.014	0.098	0.161	0.032
	-0.2		0.050	0.040	0.049	0.027	0.053	0.063	0.026	0.013	0.040	0.052	0.015
	0		<i>0.046</i>	<i>0.037</i>	<i>0.045</i>	<i>0.028</i>	<i>0.043</i>	<i>0.047</i>	<i>0.023</i>	<i>0.013</i>	<i>0.034</i>	<i>0.039</i>	<i>0.011</i>
	0.2		0.046	0.034	0.045	0.024	0.036	0.037	0.019	0.010	0.023	0.026	0.008
	0.5		0.047	0.044	0.046	0.026	0.034	0.035	0.021	0.012	0.025	0.026	0.010
	0.8		0.057	0.059	0.054	0.023	0.034	0.033	0.018	0.012	0.026	0.026	0.010
	500		ϕ	-0.8	0.037	0.029	0.037	0.049	0.116	0.142	0.054	0.037	0.129
-0.5		0.041		0.038	0.041	0.035	0.059	0.072	0.041	0.024	0.057	0.076	0.035
-0.2		0.044		0.042	0.044	0.032	0.046	0.052	0.036	0.019	0.044	0.053	0.028
0.2		0.049		0.044	0.049	0.034	0.041	0.038	0.033	0.019	0.032	0.033	0.023
0.5		0.049		0.048	0.048	0.029	0.028	0.023	0.026	0.020	0.022	0.015	0.019
θ		0.8	0.051	0.047	0.050	0.018	0.006	0.002	0.018	0.011	0.003	0.000	0.011
		-0.8	0.035	0.027	0.033	0.180	0.473	0.622	0.082	0.177	0.647	0.811	0.096
		-0.5	0.049	0.049	0.048	0.044	0.095	0.135	0.052	0.031	0.105	0.166	0.044
		-0.2	0.049	0.046	0.048	0.033	0.049	0.057	0.037	0.020	0.048	0.059	0.030
		0	<i>0.047</i>	<i>0.041</i>	<i>0.047</i>	<i>0.036</i>	<i>0.046</i>	<i>0.048</i>	<i>0.037</i>	<i>0.020</i>	<i>0.038</i>	<i>0.042</i>	<i>0.026</i>
		0.2	0.051	0.049	0.050	0.033	0.040	0.041	0.034	0.023	0.036	0.037	0.026
		0.5	0.049	0.045	0.048	0.030	0.038	0.038	0.031	0.019	0.033	0.034	0.022
		0.8	0.051	0.058	0.049	0.028	0.034	0.034	0.029	0.021	0.032	0.031	0.023

[†] En cursiva se representa el caso de errores i.i.d. Se emplea el criterio de selección MAIC con $k_{max} = \lfloor 12(T/100)^{1/4} \rfloor$ en donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la parte entera.

Tabla 2.13: Potencia ajustada al tamaño de diferentes versiones del MSB^u

TM		MSB _{GLS}	MSB _{OLS}	MSB _{PQ}	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/2})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/3})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{\text{NW}}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/2})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/3})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{\text{NW}}^{\text{OLS}}$	
100	ϕ	-0.8	0.341	0.245	0.354	0.359	0.425	0.430	0.164	0.186	0.277	0.285	0.104
		-0.5	0.395	0.289	0.407	0.405	0.459	0.459	0.210	0.211	0.289	0.305	0.123
		-0.2	0.382	0.283	0.388	0.370	0.441	0.465	0.227	0.209	0.318	0.335	0.132
		0.2	0.329	0.257	0.347	0.343	0.412	0.428	0.233	0.212	0.307	0.326	0.134
		0.5	0.320	0.251	0.322	0.332	0.388	0.404	0.249	0.233	0.297	0.306	0.149
		0.8	0.205	0.163	0.212	0.322	0.366	0.380	0.236	0.241	0.278	0.291	0.159
	θ	-0.8	0.308	0.187	0.268	0.331	0.414	0.406	0.094	0.077	0.144	0.180	0.060
		-0.5	0.339	0.228	0.339	0.415	0.465	0.466	0.188	0.187	0.266	0.300	0.105
		-0.2	0.378	0.279	0.386	0.371	0.446	0.467	0.224	0.208	0.320	0.336	0.130
		0	<i>0.401</i>	<i>0.318</i>	<i>0.414</i>	<i>0.351</i>	<i>0.424</i>	<i>0.442</i>	<i>0.229</i>	<i>0.209</i>	<i>0.305</i>	<i>0.320</i>	<i>0.133</i>
		0.2	0.329	0.259	0.347	0.349	0.413	0.418	0.238	0.218	0.298	0.314	0.136
		0.5	0.307	0.234	0.327	0.343	0.410	0.427	0.231	0.206	0.278	0.298	0.132
		0.8	0.239	0.152	0.252	0.354	0.394	0.403	0.244	0.202	0.268	0.280	0.129
		250	ϕ	-0.8	0.426	0.302	0.424	0.425	0.461	0.453	0.279	0.269	0.314
-0.5	0.454			0.316	0.453	0.418	0.469	0.470	0.317	0.294	0.331	0.344	0.201
-0.2	0.443			0.322	0.443	0.412	0.448	0.443	0.353	0.273	0.314	0.323	0.219
0.2	0.405			0.269	0.408	0.399	0.443	0.449	0.357	0.243	0.291	0.305	0.226
0.5	0.412			0.311	0.416	0.404	0.447	0.460	0.388	0.286	0.327	0.335	0.250
0.8	0.333			0.241	0.334	0.380	0.416	0.417	0.347	0.247	0.281	0.284	0.226
θ	-0.8		0.356	0.204	0.359	0.461	0.478	0.474	0.159	0.196	0.251	0.256	0.094
	-0.5		0.415	0.289	0.413	0.431	0.480	0.477	0.275	0.289	0.330	0.339	0.165
	-0.2		0.429	0.309	0.431	0.414	0.447	0.448	0.355	0.273	0.314	0.323	0.217
	0		<i>0.421</i>	<i>0.295</i>	<i>0.424</i>	<i>0.396</i>	<i>0.440</i>	<i>0.448</i>	<i>0.353</i>	<i>0.244</i>	<i>0.291</i>	<i>0.307</i>	<i>0.211</i>
	0.2		0.434	0.316	0.433	0.412	0.458	0.468	0.363	0.283	0.323	0.343	0.244
	0.5		0.401	0.262	0.400	0.393	0.430	0.438	0.360	0.244	0.286	0.299	0.217
	0.8		0.370	0.248	0.377	0.416	0.454	0.466	0.363	0.269	0.307	0.312	0.231
	500		ϕ	-0.8	0.437	0.309	0.436	0.420	0.451	0.449	0.341	0.275	0.304
-0.5		0.469		0.322	0.467	0.438	0.469	0.477	0.395	0.300	0.313	0.320	0.253
-0.2		0.452		0.319	0.461	0.426	0.465	0.469	0.428	0.295	0.315	0.323	0.284
0.2		0.432		0.322	0.434	0.416	0.443	0.448	0.419	0.302	0.323	0.324	0.300
0.5		0.434		0.299	0.437	0.414	0.446	0.448	0.426	0.279	0.306	0.309	0.276
0.8		0.406		0.307	0.406	0.410	0.436	0.438	0.402	0.292	0.312	0.320	0.292
θ		-0.8	0.379	0.245	0.383	0.458	0.469	0.479	0.179	0.257	0.280	0.281	0.106
		-0.5	0.454	0.295	0.456	0.455	0.481	0.488	0.318	0.301	0.312	0.320	0.208
		-0.2	0.442	0.313	0.444	0.427	0.469	0.470	0.420	0.295	0.315	0.323	0.275
		0	<i>0.442</i>	<i>0.327</i>	<i>0.441</i>	<i>0.415</i>	<i>0.442</i>	<i>0.450</i>	<i>0.406</i>	<i>0.303</i>	<i>0.323</i>	<i>0.325</i>	<i>0.297</i>
		0.2	0.435	0.305	0.435	0.417	0.440	0.438	0.418	0.279	0.306	0.311	0.275
		0.5	0.426	0.308	0.431	0.423	0.445	0.452	0.425	0.292	0.317	0.322	0.299
		0.8	0.427	0.285	0.431	0.445	0.466	0.468	0.433	0.289	0.317	0.324	0.283

Tabla 2.14: Tamaño empírico de diferentes versiones del MSB⁷

TM		MSB _{GLS}	MSB _{OLS}	MSB _{PQ}	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/2})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/3})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{\text{NW}}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/2})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/3})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{\text{NW}}^{\text{OLS}}$		
100	$\phi =$	-0.8	0.001	0.000	0.001	0.000	0.004	0.017	0.011	0.000	0.001	0.003	0.009	
		-0.5	0.014	0.010	0.015	0.000	0.006	0.028	0.005	0.000	0.002	0.013	0.005	
		-0.2	0.027	0.022	0.029	0.000	0.004	0.017	0.002	0.000	0.001	0.008	0.001	
		0.2	0.012	0.007	0.011	0.000	0.004	0.011	0.001	0.000	0.000	0.002	0.005	0.000
	$\theta =$	0.5	0.047	0.047	0.049	0.000	0.002	0.002	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000
		0.8	0.092	0.094	0.096	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
		-0.8	0.062	0.151	0.125	0.000	0.079	0.616	0.030	0.000	0.010	0.460	0.026	
		-0.5	0.037	0.044	0.048	0.000	0.010	0.081	0.013	0.000	0.002	0.043	0.012	
		-0.2	0.033	0.028	0.037	0.000	0.004	0.022	0.002	0.000	0.002	0.009	0.001	
		0	<i>0.022</i>	<i>0.015</i>	<i>0.024</i>	<i>0.000</i>	<i>0.005</i>	<i>0.015</i>	<i>0.001</i>	<i>0.000</i>	<i>0.002</i>	<i>0.008</i>	<i>0.001</i>	
		0.2	0.011	0.006	0.010	0.000	0.003	0.010	0.000	0.000	0.001	0.005	0.000	
		0.5	0.044	0.038	0.043	0.000	0.004	0.009	0.000	0.000	0.001	0.005	0.000	
	0.8	0.058	0.056	0.047	0.000	0.005	0.010	0.000	0.000	0.001	0.005	0.000		
	250	$\phi =$	-0.8	0.005	0.003	0.005	0.000	0.104	0.274	0.020	0.000	0.090	0.291	0.017
			-0.5	0.024	0.020	0.025	0.001	0.037	0.066	0.011	0.000	0.031	0.060	0.011
			-0.2	0.030	0.029	0.031	0.001	0.024	0.038	0.005	0.000	0.018	0.033	0.003
0.2			0.031	0.028	0.030	0.001	0.016	0.020	0.002	0.000	0.014	0.018	0.001	
$\theta =$		0.5	0.041	0.042	0.041	0.001	0.011	0.008	0.001	0.001	0.007	0.005	0.001	
		0.8	0.051	0.054	0.052	0.001	0.001	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	
		-0.8	0.015	0.037	0.022	0.000	0.636	0.866	0.060	0.000	0.691	0.928	0.059	
		-0.5	0.037	0.039	0.039	0.001	0.080	0.168	0.021	0.000	0.065	0.165	0.023	
		-0.2	0.036	0.036	0.037	0.001	0.025	0.044	0.006	0.000	0.020	0.039	0.005	
		0	<i>0.029</i>	<i>0.027</i>	<i>0.030</i>	<i>0.001</i>	<i>0.019</i>	<i>0.029</i>	<i>0.003</i>	<i>0.000</i>	<i>0.017</i>	<i>0.026</i>	<i>0.002</i>	
		0.2	0.034	0.032	0.033	0.001	0.020	0.024	0.001	0.001	0.015	0.022	0.001	
		0.5	0.037	0.035	0.036	0.001	0.015	0.019	0.002	0.000	0.014	0.016	0.001	
0.8		0.054	0.067	0.050	0.001	0.014	0.019	0.001	0.000	0.013	0.017	0.001		
500		$\phi =$	-0.8	0.018	0.013	0.018	0.013	0.130	0.182	0.036	0.007	0.137	0.198	0.037
			-0.5	0.032	0.030	0.031	0.007	0.047	0.073	0.025	0.006	0.048	0.079	0.025
			-0.2	0.037	0.036	0.037	0.009	0.034	0.045	0.017	0.006	0.034	0.046	0.016
	0.2		0.033	0.038	0.034	0.007	0.023	0.024	0.011	0.005	0.023	0.024	0.011	
	$\theta =$	0.5	0.042	0.045	0.042	0.008	0.015	0.011	0.010	0.005	0.014	0.009	0.007	
		0.8	0.039	0.044	0.039	0.004	0.002	0.000	0.005	0.003	0.002	0.000	0.004	
		-0.8	0.014	0.020	0.015	0.064	0.694	0.880	0.077	0.025	0.795	0.948	0.082	
		-0.5	0.040	0.042	0.041	0.009	0.095	0.175	0.035	0.006	0.102	0.200	0.038	
		-0.2	0.040	0.042	0.040	0.009	0.037	0.051	0.019	0.006	0.037	0.051	0.017	
		0	<i>0.032</i>	<i>0.032</i>	<i>0.032</i>	<i>0.008</i>	<i>0.026</i>	<i>0.033</i>	<i>0.014</i>	<i>0.006</i>	<i>0.028</i>	<i>0.034</i>	<i>0.013</i>	
		0.2	0.042	0.045	0.042	0.009	0.028	0.030	0.014	0.005	0.026	0.028	0.011	
		0.5	0.037	0.043	0.036	0.007	0.021	0.023	0.010	0.005	0.022	0.024	0.010	
	0.8	0.058	0.069	0.054	0.006	0.022	0.024	0.010	0.005	0.024	0.025	0.010		

Tabla 2.15: Potencia ajustada al tamaño de diferentes versiones del MSB⁷

TM		MSB _{GLS}	MSB _{OLS}	MSB _{PQ}	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/2})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/3})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{\text{NW}}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/2})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/3})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{OLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{\text{NW}}^{\text{OLS}}$	
100	$\phi =$	-0.8	0.303	0.263	0.324	0.216	0.424	0.436	0.085	0.105	0.294	0.315	0.067
		-0.5	0.354	0.293	0.366	0.205	0.395	0.455	0.108	0.084	0.292	0.333	0.075
		-0.2	0.374	0.334	0.393	0.202	0.411	0.469	0.115	0.094	0.299	0.365	0.081
		0.2	0.300	0.269	0.328	0.220	0.383	0.429	0.115	0.116	0.306	0.358	0.076
		0.5	0.267	0.202	0.259	0.238	0.400	0.428	0.125	0.145	0.320	0.350	0.077
	$\theta =$	0.8	0.120	0.099	0.122	0.228	0.336	0.355	0.120	0.151	0.276	0.310	0.082
		-0.8	0.354	0.265	0.305	0.150	0.296	0.350	0.058	0.040	0.112	0.164	0.048
		-0.5	0.297	0.247	0.288	0.191	0.392	0.448	0.086	0.067	0.263	0.310	0.062
		-0.2	0.373	0.324	0.377	0.201	0.413	0.470	0.111	0.091	0.292	0.365	0.078
		0	0.425	0.381	0.438	0.218	0.397	0.442	0.114	0.110	0.298	0.365	0.076
		0.2	0.325	0.291	0.348	0.224	0.410	0.443	0.119	0.120	0.317	0.355	0.082
		0.5	0.230	0.177	0.232	0.226	0.392	0.437	0.117	0.117	0.315	0.363	0.083
		0.8	0.150	0.125	0.180	0.204	0.369	0.407	0.114	0.115	0.285	0.335	0.078
		250	$\phi =$	-0.8	0.443	0.363	0.454	0.377	0.497	0.504	0.170	0.251	0.385
-0.5	0.454			0.386	0.458	0.361	0.473	0.500	0.199	0.247	0.387	0.408	0.146
-0.2	0.446			0.374	0.452	0.367	0.471	0.490	0.208	0.260	0.370	0.397	0.160
0.2	0.397			0.321	0.392	0.367	0.475	0.479	0.252	0.256	0.374	0.388	0.187
0.5	0.400			0.324	0.406	0.335	0.440	0.470	0.264	0.242	0.350	0.372	0.196
$\theta =$	0.8		0.277	0.242	0.282	0.336	0.402	0.413	0.286	0.263	0.345	0.354	0.214
	-0.8		0.326	0.246	0.314	0.381	0.506	0.487	0.084	0.119	0.290	0.305	0.068
	-0.5		0.363	0.307	0.368	0.374	0.479	0.508	0.147	0.227	0.386	0.403	0.110
	-0.2		0.428	0.362	0.433	0.367	0.475	0.491	0.200	0.260	0.369	0.399	0.149
	0		0.463	0.401	0.465	0.361	0.478	0.483	0.242	0.257	0.374	0.394	0.177
	0.2		0.388	0.301	0.387	0.340	0.455	0.476	0.246	0.242	0.358	0.381	0.174
	0.5		0.373	0.317	0.383	0.353	0.439	0.458	0.239	0.250	0.360	0.387	0.168
	0.8		0.317	0.249	0.324	0.373	0.473	0.490	0.263	0.253	0.376	0.400	0.180
	500		$\phi =$	-0.8	0.439	0.368	0.442	0.421	0.470	0.483	0.246	0.310	0.389
-0.5		0.465		0.382	0.467	0.436	0.482	0.500	0.294	0.326	0.390	0.407	0.216
-0.2		0.474		0.391	0.479	0.430	0.489	0.498	0.345	0.316	0.390	0.408	0.262
0.2		0.490		0.398	0.490	0.445	0.494	0.511	0.419	0.331	0.394	0.409	0.312
0.5		0.437		0.368	0.439	0.402	0.457	0.466	0.383	0.301	0.388	0.392	0.297
$\theta =$		0.8	0.408	0.341	0.407	0.412	0.465	0.479	0.402	0.326	0.386	0.388	0.323
		-0.8	0.377	0.275	0.376	0.451	0.497	0.499	0.103	0.255	0.350	0.355	0.080
		-0.5	0.432	0.345	0.432	0.430	0.486	0.504	0.204	0.324	0.397	0.409	0.150
		-0.2	0.460	0.393	0.463	0.431	0.492	0.497	0.333	0.316	0.392	0.408	0.246
		0	0.504	0.415	0.510	0.447	0.499	0.513	0.400	0.330	0.394	0.414	0.295
		0.2	0.457	0.371	0.453	0.405	0.461	0.467	0.368	0.303	0.392	0.398	0.282
		0.5	0.445	0.362	0.444	0.431	0.493	0.506	0.408	0.322	0.381	0.399	0.302
		0.8	0.372	0.289	0.378	0.397	0.464	0.486	0.379	0.304	0.387	0.387	0.304

2.5 Análisis comparado de los contrastes de raíz unitaria

En esta sección, llevamos a cabo un último ejercicio de simulación para comparar en términos de tamaño y potencia ajustada al tamaño, el comportamiento de varios contrastes propuestos en la literatura de los últimos años para determinar si la serie tiene o no una raíz unitaria. El objetivo es doble: primero, determinar la calidad de los resultados del MSB en relación con los contrastes de raíz unitaria más utilizados y, segundo, concluir, si es posible, cuál debería emplearse en la práctica.

Supongamos nuevamente el mismo proceso generador de datos que en la sección anterior que escribimos como:

$$y_t = d_t + v_t$$

$$v_t = \rho_c v_{t-1} + u_t$$

siendo $\rho_c = 1 + c/T$, $c < 0$, y el término perturbación pudiendo adoptar las siguientes estructuras de correlación:

$$\begin{cases} \text{i.i.d. :} & u_t = \varepsilon_t \\ \text{AR(1) :} & u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t \\ \text{MA(1) :} & u_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \end{cases}$$

en donde ε_t se ha generado como una variable iidN(0, 1) utilizando la función *rndKMn* de GAUSS, cuya semilla hemos fijado en 290373. La parte determinista viene representada por d_t y está definida como antes. También, suponemos que el valor inicial es $v_0 = 0$. Específicamente, los valores de los coeficientes de los modelos media-móvil y autorregresivo son respectivamente $\theta = (-0.8, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 0.8)$ y $\phi = (-0.8, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 0.8)$. Los tamaños muestrales considerados son $T = (100, 250, 500)$. En este caso vamos a evaluar la potencia ajustada local para los siguientes valores: cuando M^μ , entonces $\rho_c = 0.93$ ($T = 100$); $\rho_c = 0.972$ ($T = 250$) y $\rho_c = 0.986$ ($T = 500$) y, cuando M^τ , $\rho_c = 0.865$ ($T = 100$); $\rho_c = 0.946$ ($T = 250$) y $\rho_c = 0.973$ ($T = 500$). El nivel de significación del contraste se ha establecido en el 5%. Cada ejercicio consta de 10000 simulaciones que hemos programado en GAUSS 9.0.

La Tabla 2.16 detalla la relación de contrastes que van a formar parte de este estudio. Nos estaremos refiriendo con “**Versiones NP**” a los estadísticos de contraste contemplados en Ng y Perron

Tabla 2.16: Estadísticos utilizados en el estudio de Monte Carlo

Versiones NP	Versiones PQ	Versiones kernel
MZ_α^{GLS}	MZ_α^{PQ}	
MSB_{GLS}	MSB_{PQ}	$\overline{MSB}_{O(T^{1/2})}^{\text{GLS}}$ $\overline{MSB}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$
DF^{GLS}	DF^{PQ}	
P_T	P_T^{PQ}	
MP_T^{GLS}	MP_T^{PQ}	

[†] Los estadísticos MSB basados en el estimador kernel que consideramos son los que mejores propiedades han mostrado en la Sección 2.4.

(2001) basados en el estimador autorregresivo de varianza a largo plazo. Estos estadísticos utilizan el procedimiento GLS de Elliott *et al.* (1996) tanto para eliminar la parte determinista de la serie como para construir el criterio de selección MAIC. Por su parte, llamaremos “**Versiones PQ**” (o modificadas) a los estadísticos que emplean el método GLS de ERS para destendenciar y construyen el criterio MAIC siguiendo a Perron y Qu (2007). Finalmente, denotaremos a los estadísticos como “**Versiones kernel**” a los estadísticos MSB que reemplazan el estimador autorregresivo por el estimador kernel construido a partir de la primera diferencia de los residuos.

Comenzaremos analizando el modelo con constante. La Tabla 2.17 presenta los resultados de tamaño empírico de los contrastes y observamos como, a medida que la muestra aumenta, el tamaño de los contrastes tiende al 5% nominal, incluso en casos de autocorrelación alta en los errores del modelo. Si, por ejemplo, $\theta = -0.8$, las dos versiones del estadístico DF presentan una importante desviación de tamaño que contrasta con los resultados conservadores aunque aceptables del resto de contrastes, excepto por la versión kernel del MSB que funciona relativamente peor. Estas distorsiones en el tamaño disminuyen conforme aumenta T , pero en el caso del MSB que emplea el estimador kernel, esta caída se produce lentamente.

Tabla 2.17: Tamaño empírico de los contrastes de raíz unitaria M^{μ}

T		MZ_{α}^{GLS}	MZ_{α}^{PQ}	MSB_{GLS}	MSB_{PQ}	$\overline{MSB}_{O(T^{1/2})}^{GLS}$	$\overline{MSB}_{O(T^{1/4})}^{GLS}$	DF	DF ^{PQ}	P_T	P_T^{PQ}	MP_T^{GLS}	MP_T^{PQ}			
100	$\phi =$	-0.8	0.014	0.015	0.011	0.011	0.022	0.121	0.047	0.049	0.013	0.013	0.013	0.014		
		-0.5	0.037	0.039	0.034	0.035	0.014	0.014	0.081	0.049	0.051	0.030	0.031	0.035	0.036	
		-0.2	0.057	0.058	0.053	0.054	0.014	0.014	0.058	0.062	0.064	0.046	0.048	0.052	0.054	
		0.2	0.041	0.038	0.039	0.037	0.013	0.013	0.036	0.040	0.039	0.033	0.031	0.038	0.036	
		0.5	0.066	0.066	0.063	0.063	0.013	0.013	0.016	0.053	0.054	0.051	0.050	0.059	0.059	
		0.8	0.086	0.087	0.085	0.086	0.006	0.006	0.001	0.052	0.055	0.064	0.065	0.076	0.077	
	$\theta =$	-0.8	0.039	0.067	0.033	0.061	0.049	0.049	0.682	0.114	0.143	0.036	0.062	0.038	0.066	
		-0.5	0.059	0.064	0.052	0.057	0.018	0.018	0.164	0.076	0.080	0.050	0.053	0.056	0.060	
		-0.2	0.064	0.065	0.059	0.061	0.015	0.015	0.063	0.067	0.070	0.051	0.052	0.058	0.060	
		0	0.049	0.050	0.045	0.046	0.013	0.013	0.047	0.054	0.057	0.039	0.040	0.045	0.046	
		0.2	0.043	0.040	0.039	0.037	0.015	0.015	0.038	0.042	0.040	0.034	0.032	0.039	0.037	
		0.5	0.060	0.059	0.056	0.055	0.013	0.013	0.034	0.049	0.049	0.047	0.046	0.054	0.054	
	0.8	0.070	0.063	0.067	0.060	0.013	0.013	0.031	0.039	0.038	0.056	0.051	0.064	0.057		
	250	$\phi =$	-0.8	0.030	0.030	0.025	0.025	0.042	0.212	0.047	0.047	0.027	0.027	0.029	0.029	
			-0.5	0.045	0.044	0.040	0.040	0.029	0.029	0.082	0.047	0.046	0.038	0.038	0.041	0.040
			-0.2	0.051	0.050	0.047	0.046	0.029	0.029	0.058	0.050	0.049	0.045	0.044	0.047	0.047
0.2			0.051	0.050	0.046	0.045	0.024	0.024	0.035	0.047	0.046	0.043	0.043	0.047	0.046	
0.5			0.052	0.052	0.047	0.047	0.020	0.020	0.017	0.046	0.045	0.044	0.044	0.048	0.047	
0.8			0.059	0.058	0.057	0.056	0.012	0.012	0.001	0.046	0.046	0.048	0.048	0.052	0.051	
$\theta =$		-0.8	0.027	0.028	0.021	0.022	0.172	0.172	0.659	0.100	0.098	0.026	0.027	0.027	0.028	
		-0.5	0.056	0.055	0.049	0.049	0.039	0.039	0.155	0.061	0.060	0.048	0.047	0.052	0.051	
		-0.2	0.054	0.054	0.050	0.050	0.029	0.029	0.063	0.052	0.052	0.047	0.047	0.050	0.050	
		0	0.049	0.049	0.045	0.045	0.025	0.025	0.046	0.048	0.048	0.041	0.041	0.045	0.045	
		0.2	0.051	0.050	0.047	0.046	0.023	0.023	0.038	0.046	0.046	0.043	0.042	0.047	0.046	
		0.5	0.051	0.049	0.046	0.045	0.024	0.024	0.035	0.043	0.042	0.044	0.042	0.046	0.045	
0.8		0.061	0.058	0.057	0.054	0.024	0.024	0.032	0.041	0.040	0.051	0.048	0.055	0.052		
500		$\phi =$	-0.8	0.043	0.042	0.038	0.037	0.048	0.140	0.048	0.048	0.037	0.036	0.038	0.038	
			-0.5	0.047	0.046	0.044	0.043	0.037	0.037	0.073	0.045	0.045	0.041	0.041	0.043	0.042
			-0.2	0.051	0.051	0.047	0.046	0.034	0.034	0.055	0.048	0.048	0.044	0.043	0.046	0.046
	0.2		0.050	0.049	0.045	0.044	0.028	0.028	0.036	0.046	0.046	0.045	0.044	0.046	0.045	
	0.5		0.051	0.051	0.048	0.048	0.028	0.028	0.021	0.047	0.046	0.045	0.045	0.047	0.046	
	0.8		0.056	0.055	0.052	0.052	0.018	0.018	0.003	0.047	0.047	0.048	0.047	0.049	0.049	
	$\theta =$	-0.8	0.043	0.041	0.035	0.033	0.181	0.181	0.621	0.095	0.091	0.040	0.038	0.041	0.039	
		-0.5	0.056	0.055	0.051	0.050	0.046	0.046	0.139	0.056	0.055	0.048	0.048	0.050	0.049	
		-0.2	0.054	0.054	0.049	0.049	0.034	0.034	0.059	0.052	0.051	0.048	0.048	0.050	0.050	
		0	0.048	0.048	0.043	0.043	0.029	0.029	0.043	0.046	0.046	0.042	0.042	0.044	0.044	
		0.2	0.053	0.052	0.048	0.047	0.031	0.031	0.040	0.048	0.048	0.046	0.046	0.048	0.047	
		0.5	0.052	0.051	0.049	0.048	0.031	0.031	0.037	0.044	0.044	0.045	0.044	0.047	0.046	
	0.8	0.057	0.056	0.053	0.052	0.030	0.030	0.035	0.046	0.044	0.051	0.050	0.053	0.052		

El siguiente aspecto a tener en cuenta es conocer si la modificación propuesta por Perron y Qu (2007) mejora los resultados de tamaño de los contrastes y, en caso afirmativo, si aquella es sustancial o no. A la vista de los resultados expuestos diremos que, exceptuando las dos versiones del DF, el MSB (y el resto de estadísticos) se comporta de manera similar tanto si la autocorrelación de los errores proviene de un modelo AR(1) o MA(1). Coincidiendo con lo que afirmaban Perron y Qu, con errores AR(1) y coeficiente negativo, los estadísticos MSB, MZ_α , P_T y MP_T exhiben un tamaño empírico más conservador mientras que los DF se sitúan próximos al 5% nominal. Estos valores se aproximan al 5% conforme el tamaño muestral aumenta. Sin embargo, cuando los errores son MA(1), los estadísticos DF se distorsionan notablemente en comparación con el MSB y el resto de estadísticos, que se comportan de manera similar. Asimismo, en el caso $\theta = -0.8$ y $T = 100$, la modificación PQ produce un tamaño empírico más ajustado al nominal que la versión NP, pero cuando el número de observaciones crece o bien, ambas versiones funcionan parecido, o bien, ésta se ve superada por la versión NP.

Los resultados que ilustramos en la Tabla 2.18 para el modelo con constante y tendencia lineal M^T , nos indican que los estadísticos contemplados exhiben un comportamiento similar al exhibido en la anterior tabla. Por este motivo la discusión de los mismos se omite del texto.

Tabla 2.18: Tamaño empírico de los contrastes de raíz unitaria M^T

T		MZ_α^{GLS}	MZ_α^{PQ}	MSB_{GLS}	MSB_{PQ}	$\overline{MSB}_{O(T^{1/2})}^{GLS}$	$\overline{MSB}_{O(T^{1/4})}^{GLS}$	DF	DF ^{PQ}	P_T	P_T^{PQ}	MP_T^{GLS}	MP_T^{PQ}		
100	$\phi =$	-0.8	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.018	0.033	0.038	0.001	0.001	0.001		
		-0.5	0.013	0.014	0.013	0.014	0.000	0.027	0.039	0.043	0.014	0.015	0.013	0.014	
		-0.2	0.028	0.031	0.028	0.032	0.000	0.017	0.050	0.057	0.028	0.031	0.029	0.032	
		0.2	0.012	0.010	0.012	0.011	0.000	0.009	0.016	0.016	0.010	0.010	0.011	0.010	
		0.5	0.046	0.048	0.049	0.052	0.000	0.003	0.040	0.043	0.043	0.044	0.045	0.047	
		0.8	0.085	0.089	0.092	0.097	0.000	0.000	0.043	0.048	0.072	0.076	0.078	0.082	
		$\theta =$	-0.8	0.065	0.124	0.064	0.124	0.000	0.611	0.125	0.210	0.068	0.125	0.067	0.126
			-0.5	0.037	0.046	0.037	0.046	0.000	0.080	0.072	0.087	0.038	0.046	0.039	0.048
	-0.2		0.035	0.039	0.035	0.040	0.000	0.020	0.059	0.068	0.035	0.038	0.036	0.041	
	0		0.019	0.020	0.020	0.021	0.000	0.013	0.041	0.045	0.019	0.020	0.019	0.020	
	0.2		0.011	0.010	0.012	0.011	0.000	0.013	0.019	0.019	0.011	0.010	0.011	0.010	
	0.5		0.037	0.036	0.039	0.038	0.000	0.010	0.030	0.032	0.034	0.034	0.036	0.036	
	0.8		0.053	0.045	0.055	0.046	0.000	0.009	0.017	0.018	0.049	0.041	0.051	0.043	
	250		$\phi =$	-0.8	0.005	0.006	0.005	0.005	0.000	0.272	0.031	0.032	0.006	0.007	0.006
		-0.5		0.023	0.025	0.024	0.025	0.001	0.068	0.036	0.037	0.022	0.023	0.022	0.024
		-0.2		0.030	0.031	0.030	0.031	0.001	0.038	0.035	0.037	0.029	0.030	0.030	0.031
0.2		0.030		0.028	0.030	0.028	0.001	0.020	0.031	0.031	0.029	0.028	0.031	0.029	
0.5		0.038		0.039	0.039	0.040	0.001	0.008	0.036	0.038	0.037	0.038	0.039	0.040	
0.8		0.048		0.049	0.051	0.052	0.001	0.000	0.038	0.040	0.044	0.045	0.047	0.048	
$\theta =$		-0.8		0.016	0.023	0.015	0.022	0.000	0.866	0.083	0.095	0.017	0.024	0.017	0.024
		-0.5		0.033	0.036	0.033	0.036	0.001	0.167	0.048	0.052	0.033	0.035	0.034	0.036
		-0.2	0.035	0.036	0.035	0.037	0.001	0.043	0.042	0.044	0.035	0.036	0.036	0.037	
		0	0.029	0.029	0.029	0.030	0.001	0.028	0.036	0.037	0.027	0.028	0.028	0.029	
		0.2	0.032	0.031	0.033	0.032	0.001	0.023	0.033	0.033	0.032	0.031	0.033	0.032	
		0.5	0.033	0.033	0.035	0.034	0.001	0.020	0.028	0.027	0.034	0.033	0.035	0.034	
		0.8	0.059	0.053	0.060	0.054	0.002	0.021	0.025	0.025	0.057	0.051	0.059	0.053	
		500	$\phi =$	-0.8	0.017	0.017	0.017	0.017	0.012	0.176	0.038	0.038	0.018	0.018	0.018
-0.5				0.031	0.030	0.032	0.031	0.009	0.072	0.036	0.037	0.031	0.030	0.031	0.031
-0.2				0.034	0.034	0.034	0.034	0.009	0.046	0.037	0.037	0.034	0.035	0.035	0.035
0.2	0.038			0.038	0.038	0.038	0.008	0.025	0.037	0.037	0.037	0.037	0.037	0.037	
0.5	0.041			0.041	0.041	0.041	0.006	0.011	0.039	0.039	0.040	0.040	0.040	0.040	
0.8	0.046			0.046	0.047	0.047	0.003	0.000	0.041	0.041	0.044	0.044	0.045	0.045	
$\theta =$	-0.8			0.013	0.014	0.012	0.013	0.063	0.879	0.090	0.089	0.014	0.015	0.014	0.015
	-0.5			0.038	0.038	0.039	0.039	0.011	0.174	0.046	0.046	0.037	0.037	0.038	0.038
	-0.2		0.039	0.039	0.040	0.040	0.009	0.052	0.041	0.042	0.039	0.039	0.039	0.040	
	0		0.033	0.033	0.034	0.035	0.008	0.035	0.038	0.038	0.033	0.033	0.034	0.034	
	0.2		0.040	0.040	0.041	0.041	0.007	0.029	0.039	0.040	0.040	0.040	0.040	0.041	
	0.5		0.042	0.041	0.042	0.041	0.008	0.026	0.035	0.035	0.041	0.040	0.042	0.041	
	0.8		0.054	0.051	0.056	0.053	0.007	0.024	0.033	0.032	0.054	0.051	0.055	0.052	

La potencia ajustada al tamaño de los contrastes para el modelo con constante viene dada en la Tabla 2.19. Como era de esperar, un factor que tiene una influencia notable en los resultados es el tamaño muestral ya que a medida que aumenta, la potencia ajustada de los contrastes crece, disminuyendo la diferencia entre los valores correspondientes a coeficientes de autocorrelación extremos con respecto al caso ruido blanco.

En general, los valores más altos de potencia ajustada al tamaño corresponden a las dos versiones DF quedando el resto de los contrastes ligeramente por debajo; entre estos, el que presenta un mejor comportamiento es el $\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$.

Tabla 2.19: Potencia ajustada al tamaño de los contrastes de raíz unitaria M^μ

T		$\text{MZ}_\alpha^{\text{GLS}}$	$\text{MZ}_\alpha^{\text{PQ}}$	MSB_{GLS}	MSB_{PQ}	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/2})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$	DF	DF ^{PQ}	P_T	P_T^{PQ}	MP_T^{GLS}	MP_T^{PQ}		
100	$\phi =$	-0.8	0.366	0.376	0.339	0.350	0.364	0.436	0.437	0.422	0.387	0.380	0.368	0.379	
		-0.5	0.417	0.424	0.381	0.391	0.369	0.450	0.450	0.438	0.426	0.434	0.431	0.426	0.430
		-0.2	0.388	0.389	0.362	0.367	0.349	0.419	0.419	0.405	0.393	0.408	0.401	0.397	0.398
		0.2	0.361	0.374	0.329	0.340	0.350	0.423	0.423	0.399	0.406	0.380	0.393	0.374	0.379
		0.5	0.356	0.363	0.331	0.336	0.345	0.413	0.413	0.382	0.375	0.381	0.382	0.373	0.379
	$\theta =$	0.8	0.246	0.249	0.219	0.224	0.326	0.384	0.384	0.308	0.299	0.280	0.275	0.269	0.272
		-0.8	0.299	0.262	0.294	0.260	0.319	0.399	0.399	0.382	0.255	0.310	0.224	0.300	0.265
		-0.5	0.329	0.336	0.312	0.319	0.365	0.454	0.454	0.367	0.347	0.351	0.336	0.339	0.346
		-0.2	0.379	0.385	0.351	0.358	0.349	0.422	0.422	0.394	0.382	0.405	0.400	0.391	0.396
		0	<i>0.428</i>	<i>0.435</i>	<i>0.398</i>	<i>0.404</i>	<i>0.352</i>	<i>0.425</i>	<i>0.442</i>	<i>0.425</i>	<i>0.444</i>	<i>0.441</i>	<i>0.441</i>	<i>0.430</i>	<i>0.437</i>
		0.2	0.382	0.396	0.357	0.365	0.350	0.420	0.420	0.412	0.423	0.404	0.416	0.391	0.400
		0.5	0.348	0.355	0.328	0.334	0.357	0.428	0.428	0.381	0.377	0.378	0.381	0.362	0.369
		0.8	0.268	0.285	0.243	0.260	0.355	0.433	0.433	0.343	0.346	0.296	0.317	0.283	0.305
		250	$\phi =$	-0.8	0.449	0.450	0.435	0.438	0.426	0.453	0.462	0.464	0.455	0.459	0.453
-0.5	0.469			0.473	0.439	0.442	0.416	0.456	0.456	0.473	0.481	0.480	0.486	0.474	0.479
-0.2	0.451			0.454	0.422	0.428	0.397	0.447	0.447	0.455	0.456	0.457	0.462	0.453	0.459
0.2	0.445			0.443	0.423	0.422	0.409	0.457	0.457	0.458	0.458	0.458	0.461	0.453	0.450
0.5	0.449			0.452	0.427	0.430	0.416	0.455	0.455	0.462	0.465	0.460	0.462	0.455	0.459
$\theta =$	0.8		0.391	0.391	0.354	0.356	0.395	0.440	0.440	0.413	0.413	0.404	0.405	0.402	0.402
	-0.8		0.351	0.359	0.345	0.351	0.450	0.476	0.476	0.448	0.449	0.353	0.359	0.347	0.356
	-0.5		0.434	0.438	0.415	0.415	0.428	0.460	0.460	0.459	0.464	0.440	0.445	0.439	0.440
	-0.2		0.448	0.448	0.421	0.422	0.398	0.448	0.448	0.459	0.459	0.461	0.463	0.457	0.459
	0		<i>0.463</i>	<i>0.463</i>	<i>0.439</i>	<i>0.441</i>	<i>0.412</i>	<i>0.459</i>	<i>0.465</i>	<i>0.465</i>	<i>0.469</i>	<i>0.469</i>	<i>0.468</i>	<i>0.468</i>	<i>0.469</i>
	0.2		0.453	0.452	0.427	0.424	0.419	0.460	0.460	0.463	0.469	0.459	0.467	0.461	0.460
	0.5		0.434	0.441	0.414	0.416	0.417	0.461	0.461	0.447	0.456	0.449	0.459	0.444	0.450
	0.8		0.390	0.397	0.362	0.376	0.419	0.465	0.465	0.422	0.435	0.408	0.423	0.405	0.411
	500		$\phi =$	-0.8	0.462	0.461	0.441	0.440	0.431	0.450	0.472	0.475	0.476	0.479	0.475
-0.5		0.489		0.490	0.453	0.455	0.434	0.467	0.467	0.501	0.505	0.505	0.509	0.502	0.503
-0.2		0.460		0.463	0.443	0.447	0.423	0.453	0.453	0.468	0.470	0.472	0.476	0.469	0.471
0.2		0.475		0.477	0.457	0.460	0.432	0.476	0.476	0.476	0.480	0.477	0.480	0.477	0.478
0.5		0.466		0.466	0.443	0.445	0.434	0.460	0.460	0.473	0.477	0.470	0.474	0.471	0.473
$\theta =$		0.8	0.423	0.423	0.395	0.397	0.414	0.444	0.444	0.442	0.442	0.443	0.444	0.440	0.440
		-0.8	0.409	0.417	0.390	0.396	0.461	0.471	0.471	0.470	0.483	0.412	0.429	0.409	0.416
		-0.5	0.471	0.471	0.443	0.445	0.443	0.476	0.476	0.483	0.490	0.484	0.491	0.486	0.487
		-0.2	0.461	0.460	0.445	0.444	0.423	0.454	0.454	0.470	0.472	0.472	0.474	0.470	0.469
		0	<i>0.489</i>	<i>0.490</i>	<i>0.470</i>	<i>0.470</i>	<i>0.432</i>	<i>0.473</i>	<i>0.473</i>	<i>0.488</i>	<i>0.491</i>	<i>0.490</i>	<i>0.491</i>	<i>0.487</i>	<i>0.490</i>
		0.2	0.477	0.478	0.458	0.461	0.439	0.463	0.463	0.485	0.488	0.487	0.491	0.487	0.487
		0.5	0.453	0.453	0.429	0.430	0.422	0.457	0.457	0.469	0.474	0.473	0.480	0.470	0.472
		0.8	0.430	0.432	0.414	0.414	0.428	0.457	0.457	0.445	0.451	0.435	0.442	0.437	0.438

De nuevo, centramos nuestro interés en estudiar si la propuesta de Perron y Qu produce mejoras significativas en la potencia ajustada de los contrastes contemplados. En este sentido, los resultados no son concluyentes porque la respuesta depende del contraste considerado y del escenario analizado. Por ejemplo, cuando M^μ , las versiones modificadas del MSB (y del resto de contrastes) exhiben mejores valores de potencia, excepto en el caso con $T = 100$ para los estadísticos DF^{GLS} y P_T . Ahora bien, en el caso M^τ , Tabla 2.20, la versión modificada del DF produce potencias ligeramente menores que la versión sin modificar. Sin embargo, para el MSB y el resto

de los contrastes, sucede justo lo contrario, que con la modificación PQ se obtienen potencias ligeramente superiores.

Tabla 2.20: Potencia ajustada al tamaño de los contrastes de raíz unitaria M^T

T		MZ $_{\alpha}^{\text{GLS}}$	MZ $_{\alpha}^{\text{PQ}}$	MSB $_{\text{GLS}}$	MSB $_{\text{PQ}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/2})}^{\text{GLS}}$	$\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$	DF	DF $^{\text{PQ}}$	P $_{\text{T}}$	P $_{\text{T}}^{\text{PQ}}$	MP $_{\text{T}}^{\text{GLS}}$	MP $_{\text{T}}^{\text{PQ}}$		
100	$\phi =$	-0.8	0.304	0.316	0.294	0.310	0.203	0.421	0.386	0.364	0.308	0.297	0.301	0.318	
		-0.5	0.368	0.383	0.356	0.371	0.203	0.455	0.398	0.377	0.378	0.368	0.372	0.386	
		-0.2	0.376	0.381	0.368	0.373	0.209	0.439	0.372	0.343	0.387	0.371	0.378	0.382	
		0.2	0.324	0.345	0.303	0.321	0.222	0.428	0.391	0.395	0.340	0.356	0.332	0.353	
		0.5	0.269	0.262	0.258	0.247	0.231	0.415	0.295	0.281	0.283	0.277	0.279	0.270	
		0.8	0.138	0.138	0.123	0.126	0.235	0.359	0.205	0.190	0.155	0.149	0.153	0.154	
		$\theta =$	-0.8	0.343	0.302	0.343	0.301	0.138	0.318	0.355	0.212	0.345	0.228	0.343	0.302
			-0.5	0.292	0.303	0.285	0.299	0.193	0.451	0.317	0.275	0.301	0.272	0.299	0.307
	-0.2		0.361	0.365	0.356	0.359	0.207	0.441	0.351	0.320	0.373	0.353	0.363	0.367	
	0		<i>0.442</i>	<i>0.448</i>	<i>0.427</i>	<i>0.437</i>	<i>0.217</i>	<i>0.441</i>	<i>0.438</i>	<i>0.418</i>	<i>0.454</i>	<i>0.441</i>	<i>0.446</i>	<i>0.451</i>	
	0.2		0.341	0.362	0.327	0.349	0.220	0.434	0.404	0.401	0.363	0.374	0.350	0.373	
	0.5		0.262	0.257	0.246	0.242	0.225	0.418	0.312	0.301	0.277	0.276	0.271	0.264	
	0.8		0.169	0.203	0.162	0.192	0.235	0.432	0.290	0.285	0.188	0.215	0.180	0.208	
	250		$\phi =$	-0.8	0.451	0.458	0.443	0.452	0.386	0.506	0.474	0.467	0.449	0.445	0.447
		-0.5		0.453	0.453	0.447	0.451	0.365	0.487	0.456	0.449	0.457	0.453	0.455	0.460
		-0.2		0.447	0.450	0.442	0.445	0.356	0.487	0.450	0.440	0.449	0.445	0.449	0.453
0.2		0.406		0.405	0.394	0.395	0.367	0.484	0.424	0.427	0.419	0.427	0.416	0.413	
0.5		0.413		0.412	0.401	0.405	0.359	0.471	0.412	0.406	0.417	0.413	0.417	0.420	
0.8		0.303		0.305	0.293	0.295	0.328	0.428	0.324	0.316	0.315	0.311	0.315	0.315	
$\theta =$		-0.8		0.321	0.315	0.320	0.317	0.374	0.493	0.401	0.354	0.322	0.288	0.321	0.313
		-0.5		0.386	0.388	0.377	0.380	0.373	0.493	0.403	0.387	0.400	0.387	0.398	0.396
		-0.2	0.435	0.436	0.429	0.431	0.355	0.486	0.441	0.429	0.448	0.438	0.445	0.446	
		0	<i>0.473</i>	<i>0.477</i>	<i>0.467</i>	<i>0.472</i>	<i>0.373</i>	<i>0.482</i>	<i>0.472</i>	<i>0.465</i>	<i>0.479</i>	<i>0.472</i>	<i>0.473</i>	<i>0.478</i>	
		0.2	0.412	0.412	0.399	0.402	0.362	0.482	0.418	0.423	0.415	0.427	0.415	0.418	
		0.5	0.393	0.401	0.380	0.390	0.352	0.475	0.411	0.411	0.402	0.407	0.402	0.409	
		0.8	0.288	0.306	0.282	0.300	0.345	0.467	0.340	0.347	0.298	0.322	0.293	0.311	
		500	$\phi =$	-0.8	0.458	0.460	0.451	0.452	0.430	0.492	0.472	0.473	0.462	0.465	0.461
-0.5				0.483	0.488	0.478	0.482	0.432	0.502	0.491	0.491	0.493	0.494	0.487	0.491
-0.2				0.482	0.485	0.476	0.477	0.410	0.486	0.483	0.482	0.486	0.487	0.485	0.487
0.2	0.465			0.467	0.459	0.460	0.406	0.486	0.468	0.468	0.474	0.475	0.473	0.474	
0.5	0.459			0.460	0.453	0.454	0.404	0.479	0.462	0.460	0.461	0.461	0.458	0.460	
0.8	0.382			0.383	0.373	0.375	0.380	0.461	0.386	0.387	0.386	0.387	0.388	0.389	
$\theta =$	-0.8			0.376	0.377	0.375	0.374	0.458	0.508	0.457	0.453	0.374	0.372	0.372	0.374
	-0.5			0.454	0.454	0.445	0.446	0.441	0.507	0.463	0.461	0.457	0.457	0.457	0.457
	-0.2		0.466	0.469	0.461	0.464	0.411	0.486	0.466	0.464	0.468	0.468	0.468	0.468	
	0		<i>0.487</i>	<i>0.489</i>	<i>0.482</i>	<i>0.482</i>	<i>0.410</i>	<i>0.488</i>	<i>0.489</i>	<i>0.487</i>	<i>0.494</i>	<i>0.494</i>	<i>0.494</i>	<i>0.495</i>	
	0.2		0.462	0.462	0.457	0.458	0.410	0.485	0.466	0.463	0.465	0.464	0.465	0.465	
	0.5		0.433	0.436	0.426	0.428	0.399	0.486	0.437	0.442	0.435	0.442	0.434	0.437	
	0.8		0.385	0.388	0.381	0.383	0.411	0.486	0.405	0.412	0.391	0.404	0.388	0.394	

En definitiva, podemos concluir que:

1. En lo que respecta al tamaño empírico, el mejor comportamiento en términos de aproximación al valor nominal del 5% corresponde a las versiones del DF, excepto para el caso en que la perturbación sigue un proceso MA(1) con valor del parámetro $\theta = -0.8$. Dentro de los estadísticos MSB, el mejor comportamiento corresponde a aquellas versiones que emplean el estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo en lugar del estimador kernel, siendo los resultados muy similares los obtenidos cuando se utiliza el método GLS y PQ. Los otros contrastes, MZ $_{\alpha}$, P $_{\text{T}}$ y MP $_{\text{T}}$, tienen un ajuste al tamaño nominal similar a estas versiones del MSB. El peor comportamiento lo exhibe el criterio $\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$ ya que cuando la perturbación sigue un proceso AR(1), el tamaño es 0.121 para $\phi = -0.8$ y, a partir de ese valor, sigue una pauta decreciente hasta llegar a 0.001 para $\phi = 0.8$. Cuando la perturbación sigue un proceso MA(1), entonces el tamaño es de 0.682 para $\theta = -0.8$, se aproxima al 5% para $\theta = 0$ y luego se mantiene entorno al 3% para valores positivos del coeficiente media-móvil.

2. En términos de potencia ajustada al tamaño, a medida que el tamaño de la muestra crece la potencia exhibida por los contrastes aumenta. Podemos decir que la versión kernel $\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$ es la que proporciona una mayor potencia ajustada superando a las dos versiones del DF y a las de los contrastes basados en el estimador autorregresivo: MSB, MZ_α , P_T y MP_T . Por lo tanto, podemos decir que el contraste $\overline{\text{MSB}}_{O(T^{1/4})}^{\text{GLS}}$ es el que proporciona el mejor comportamiento en la potencia ajustada.

Entre la versión de NP y la modificada de PQ, encontramos pequeñas diferencias en el caso M^μ pero, en términos generales, esta segunda ofrece potencias mayores. Cuando M^τ , el MSB (en el resto de contrastes es similar) muestra mejores resultados en su versión PQ para la mayoría de las situaciones. No sucede así con los contrastes DF y P_T , para los que la versión NP se comporta mejor.

2.6 Conclusiones

En este capítulo nos hemos centrado en comparar el comportamiento de estimadores de varianza de largo plazo y estadísticos de contraste en un marco de muestras pequeñas mediante experimentos de Monte Carlo.

Del estudio realizado para comparar en términos de EVR y ECM cómo se comportan los estimadores autorregresivo y kernel de la varianza a largo plazo, podemos concluir que los resultados obtenidos parecen indicar que es el estimador autorregresivo construido en base al criterio de selección MAIC, el estimador que mejor se comporta en el sentido de que logra una mayor precisión en sus estimaciones con respecto al verdadero valor del parámetro. En lo que respecta al estimador kernel, la versión basada en las primeras diferencias de los residuos es la que mejor resultado obtiene al compararlo con el resto de versiones kernel pero sin superar los resultados del estimador autorregresivo anteriormente comentado. En términos de ECM, los resultados nos muestran que es el estimador autorregresivo basado en el criterio de selección MBIC el que consigue mejores resultados en el sentido de que exhibe menor error cuadrático medio. Por su parte, dentro de los estimadores kernel, vuelve a ser una versión del estimador kernel basado en la primera diferencia de los residuos GLS con un *bandwidth* $O(T^{1/4})$ el que mejor se comporta e incluso, en ocasiones, mejora los resultados del anterior estimador autorregresivo.

La comparación de los estadísticos se puede entender en dos fases. En una primera fase, el objetivo ha sido comparar el comportamiento en términos de tamaño empírico y potencia ajustada al tamaño de diferentes versiones del estadístico MSB en base a diferentes estimadores de varianza a largo plazo, métodos de destendencialización y criterios tanto de selección del número de retardos como del *bandwidth*. A la vista de los resultados obtenidos, podemos concluir que el estadístico que proporciona un tamaño empírico más próximo al 5% nominal es el estadístico MSB basado en el procedimiento GLS y en el estimador autorregresivo de varianza a largo plazo que emplea el criterio MAIC. Sin embargo, es el estadístico MSB basado en GLS y en el estimador kernel construido a partir de las primeras diferencias de los residuos y *bandwidth* $O(T^{1/4})$ es el que proporciona mayores valores de potencia ajustada al tamaño.

Esta contradicción se resuelve a favor de la versión primera ya que la versión kernel presenta tamaños empíricos muy heterogéneos y distorsionados según el proceso que subyace en el término de error del modelo.

El objetivo de la segunda fase ha consistido en comparar las dos mejores versiones del MSB de la etapa anterior con algunos de los contrastes analizados en la Introducción. Nuestros resultados nos permiten concluir que en términos de tamaño empírico, el mejor comportamiento corresponde al estadístico MSB basado en el procedimiento GLS y estimador autorregresivo que emplea el criterio MAIC. Del resto de estadísticos, destacan las dos versiones del estadístico DF_{GLS} y DF_{PQ} , el cual obtiene resultados similares pero se distorsiona notablemente cuando la perturbación del modelo sigue un proceso media-móvil de primer orden con $\theta = -0.8$. En términos de potencia ajustada al tamaño, las dos versiones del estadístico DF exhiben las potencias ajustadas más elevadas. Pero, ante la imposibilidad de conocer la estructura de autocorrelación que presenta la perturbación del modelo y, por lo tanto, de fijar un valor crítico del contraste para cada supuesto, esta ventaja no resulta aprovechable.

La evidencia proporcionada en este capítulo, nos permite recomendar para la práctica el uso de la versión MSB que utiliza el procedimiento de “cuasi-diferenciación” de Elliott *et al.* (1996) en los datos y el estimador autorregresivo de varianza a largo plazo basado en el criterio de selección MAIC debido a sus buenas propiedades tanto en términos de tamaño empírico como de potencia ajustada al tamaño en muestras finitas.

Capítulo 3

El contraste MSB y el tamaño de la observación inicial

Resumen

En este capítulo, se considera un supuesto diferente sobre la observación inicial, el supuesto no condicional que asume Elliott (1999). En este marco, se presenta una nueva modificación del estadístico MSB que se denota por MSB_{GLS2} . Este supuesto alternativo se diferencia del utilizado en el Capítulo 1 de la presente tesis en la consideración del valor inicial bajo la hipótesis alternativa de estacionariedad, el cual supone que éste se extrae de su distribución no condicionada. Nuestro objetivo se centra en derivar las distribuciones asintóticas locales y puntos críticos del nuevo estadístico así como de los estadísticos ya enunciados en el Capítulo 1, MSB_{OLS} y MSB_{GLS} , denominando este último ahora como MSB_{GLS1} . También, examinaremos mediante simulaciones de Monte Carlo sus propiedades en muestras pequeñas en términos de tamaño empírico y de potencia ajustada al tamaño.

3.1 Introducción

Como avanzamos en la introducción de esta tesis, nuestro estudio se centra en el estadístico MSB propuesto por Stock (1999). Así, habiendo llevado a cabo un completo análisis tanto analítico como de simulación de las propiedades asintóticas y en muestras finitas del MSB considerando el supuesto simplificador de que la observación inicial de la serie de datos es $O_p(1)$, bajo ambas hipótesis del contraste, en los capítulos 1 y 2; este capítulo lo dedicamos a abordar el problema que se nos plantea cuando existe una singularidad en el tamaño de la condición inicial. Analizaremos por tanto, los posibles efectos que sobre las propiedades del estadístico MSB tiene la implantación de esta nueva hipótesis en el modelo.

En la literatura, se ha verificado que existe una fuerte relación de dependencia entre la función de potencia del contraste y el tamaño de la observación inicial de la serie de datos. El objetivo perseguido es, por tanto, eliminar esta dependencia mediante la construcción de procedimientos de contraste cuya función de potencia sea lo más invariante posible a cambios en la condición inicial. Entre todas las propuestas, destacamos seguidamente las que, a nuestro juicio, han sobresalido por su calidad y trascendencia: Elliott (1999), Müller y Elliott (2003), Harvey y Leybourne (2005), Elliott y Müller (2006), Harvey y Leybourne (2006), Liu y Rodríguez (2006), Harvey *et al.* (2009, 2012).

Sin lugar a dudas, podemos calificar el trabajo de Elliott (1999) como el punto de partida para el enfoque alternativo a la consideración tradicional de asumir el valor cero para la condición inicial de la serie. Elliott en su trabajo, deriva una familia de contrastes eficientes asintóticamente¹ cuando la observación inicial se extrae de su distribución no condicional bajo la hipótesis alternativa estacionaria. En concreto, nos propone tres contrastes: Q_T , $CWSSE$ y DF_{GLSu} . Este último estadístico de contraste no es más que el estadístico de DF modificado por un procedimiento de transformación de los datos o “cuasi-diferenciación” de la clase GLS pero que se diferencia de éste, que fue propuesto originalmente en Elliott *et al.* (1996), en el tratamiento de la primera observación. Este método se ha probado que consigue importantes mejoras en los resultados de los contrastes cuando el valor inicial de la serie es pequeño, como se puede ver en Müller y Elliott (2003). A este procedimiento modificado lo denotaremos por $GLS2$ mientras que el método original pasa a llamarse $GLS1$.

¹Con anterioridad, Elliott *et al.* (1996) demostró que no existe ningún contraste uniformemente más potente e invariante en cualquier punto de la hipótesis alternativa.

Siguiendo el enfoque de Elliott (1999), Liu y Rodríguez (2006) derivan las propiedades asintóticas de algunos contrastes de raíz unitaria en el contexto de la existencia de una ruptura estructural en el modelo. También podemos observar en Harvey *et al.* (2009), abreviado HLT, cómo el supuesto planteado originalmente en el trabajo seminal de Elliott se puede ver como un caso particular (ver Condición 3).

Entonces, queda claro que, podemos identificar tres procedimientos de transformación de los datos previo a la eliminación de los elementos deterministas de la serie para la construcción del estadístico MSB. El primero de ellos es el procedimiento OLS, que ya explicamos en detalle en la primera parte del Capítulo 1; el segundo, que también detallamos en dicho capítulo, es el procedimiento GLS, pero que ahora pasaremos a denominar GLS1. El tercero es el procedimiento GLS2, que acabamos de comentar.

En este capítulo, vamos, por tanto, a emplear el método GLS2 para derivar las propiedades del estadístico MSB. Además, estudiaremos cuáles son los efectos en el estadístico cuando al seleccionar el proceso generador de los datos cometemos un error en la especificación de la hipótesis de la condición inicial.

El objetivo de este capítulo es, por tanto, analizar las consecuencias en las propiedades asintóticas y de muestras finitas del contraste de raíz unitaria MSB, cuando se cambia el supuesto tradicional sobre la condición inicial de la serie por la hipótesis no condicionada que establece Elliott (1999). La estructura del capítulo responde al objetivo que persigue. En la Sección 3.2, establecemos el marco de análisis, describiendo el modelo y enunciando las hipótesis en las que se va a basar nuestro estudio. En la Sección 3.3, dados dos procesos generadores de datos que se diferencian en el supuesto sobre la condición inicial de la serie, derivamos las respectivas distribuciones asintóticas locales de tres versiones del test MSB que se diferencian en el proceso empleado para filtrar la serie de datos. En la Sección 3.4, presentamos los resultados de nuestras simulaciones de Monte Carlo. La Sección 3.5 concluye. Las pruebas de los principales resultados se presentan en un apéndice matemático al final del capítulo.

3.2 Modelo e hipótesis

Supongamos, en primer lugar, el siguiente proceso generador de datos estándar en la literatura:

$$\begin{aligned} y_t &= d_t + v_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ v_t &= \rho_c v_{t-1} + u_t, \quad t = 2, \dots, T \end{aligned} \tag{3.1}$$

en donde $\rho_c = 1 + c/T$, $c < 0$, y d_t denota el componente determinista. En concreto, definimos con carácter general $d_t = z_t' \delta$ siendo $z_t = (1, t, \dots, t^p)'$ un vector de elementos deterministas y $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p)'$ su vector de coeficientes. En este capítulo, nos centramos en el caso en el que el proceso generador incluye un término constante y una tendencia lineal, denotado por el superíndice τ , de forma que el vector z_t queda como $z_t = (1, t)'$. Los resultados para el caso en el que el modelo generador posee un término constante o no contiene elementos deterministas se extienden directamente y, por ello, se omiten.

En nuestro modelo, consideramos que el término de error cumple la siguiente condición:

Condición 3.1. Se define el término de error $\{u_t\}$ como una secuencia de términos estocásticos que cumple las condiciones necesarias para ser un proceso lineal estable e invertible en ε_t : (a) $u_t = \psi(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ con $\psi(1)^2 > 0$ y $\sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_j| < \infty$. (b) El proceso estocástico $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y $E|\varepsilon_t|^\nu < k < \infty$ para algún $\nu \geq 4$.

Los parámetros de varianza a corto y largo plazo están representados por σ^2 y λ^2 respectivamente.

En este capítulo, nos centramos en el siguiente contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0: c = 0 \quad (\rho_c = 1) \\ H_{1,c}: c < 0 \quad (\rho_c = 1 + cT^{-1} < 1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

y establecemos la misma condición inicial que en Elliott (1999, Condición A):

Condición 3.2. Asumimos que la observación inicial v_0 es cero bajo la hipótesis nula de raíz unitaria ($c = 0$) y, por tanto, $v_1 = u_1$, y cuando nos encontramos bajo la hipótesis alternativa ($c < 0$), entonces v_1 tiene media cero y varianza $\sigma^2/(1 - \rho_c^2)$.

Comentario 3.1. En el caso de $c = 0$ en (3.1), la condición sobre el valor inicial no modifica las distribuciones asintóticas del contraste MSB presentadas en el Capítulo 1. Sin embargo, cuando nos encontramos bajo la hipótesis alternativa ($c < 0$), las distribuciones asintóticas presentan una dependencia en el parámetro ρ_c que no desaparece asintóticamente.

El estadístico MSB, que resuelve el contraste de hipótesis planteado, se define como:

$$\text{MSB} = \left(\frac{T^{-2} \sum_{t=2}^T \hat{v}_t^2}{\hat{\lambda}^2} \right)^{1/2} \tag{3.3}$$

con \hat{v}_t representando la serie libre de elementos deterministas, que se define como $\hat{v}_t = y_t - z_t' \hat{\delta}$ en donde $\hat{\delta}$ es un vector de estimadores de δ .

En este capítulo, vamos a considerar tres métodos o procedimientos de eliminación de los posibles elementos deterministas de la serie. En primer lugar, el procedimiento OLS estándar en la literatura y que ya hemos desarrollado en el Capítulo 1. En segundo lugar, y también desarrollado en el Capítulo 1, el procedimiento de “cuasi-diferenciación” de los datos propuesto en Elliott *et al.* (1996) que denominaremos GLS1. Este mecanismo consiste en aplicar una transformación a los datos antes de estimar los elementos deterministas por OLS. De esta forma, los vectores transformados quedan definidos como sigue:

$$\begin{aligned} y^{\bar{c}} &= (1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)y_t)', \quad t = 2, \dots, T \\ Z^{\bar{c}} &= (1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)z_t)', \quad z_t = (1, t)', \quad t = 2, \dots, T \end{aligned} \tag{3.4}$$

con $\rho_{\bar{c}} = 1 + \bar{c}/T$ dado un valor fijo $\bar{c} < 0$. En concreto, estos autores proponen $\bar{c} = -13.5$ para el modelo con constante y tendencia, y $\bar{c} = -7.0$, cuando el modelo posee un término constante.

El modelo transformado escrito en forma matricial queda como:

$$y^{\bar{c}} = Z^{\bar{c}}\delta + v^{\bar{c}} \quad (3.5)$$

En tercer lugar, consideramos el procedimiento de “cuasi-diferenciación” propuesto en Elliott (1999) que llamaremos GLS2. Este procedimiento supone transformar los datos antes de estimar la parte determinista por OLS, pero se diferencia del anterior en el tratamiento de la primera observación. En este caso, los vectores transformados se definen así:

$$\begin{aligned} y^{\bar{c}} &= ((1 - \rho_{\bar{c}}^2)^{1/2}y_1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)y_t)' , \quad t = 2, \dots, T \\ Z^{\bar{c}} &= ((1 - \rho_{\bar{c}}^2)^{1/2}z_1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)z_t)' , \quad z_t = (1, t)', \quad t = 2, \dots, T \end{aligned} \quad (3.6)$$

con $\rho_{\bar{c}}$ definido como en el procedimiento GLS1 anterior. Nosotros, en nuestras simulaciones, consideramos $\bar{c} = -13.5$ igual que para el procedimiento GLS1, de forma que obtenemos resultados que son equiparables para poder realizar comparaciones válidas. Si hubiéramos adoptado los valores que emplea Elliott, $\bar{c} = (-10, -15)$, las comparaciones no serían del todo apropiadas. Finalmente, el modelo transformado se escribe como en (3.5).

Todos los desarrollos que presentamos en la próxima sección, se basan en la siguiente condición:

Condición 3.3. Sea $\hat{\lambda}^2 \xrightarrow{P} \lambda^2$, bajo las hipótesis nula y alternativa del contraste.

3.3 Propiedades asintóticas del MSB

En esta sección, vamos a presentar los resultados analíticos derivados para tres versiones del estadístico MSB, que se diferencian en el procedimiento empleado para eliminar los elementos deterministas de la serie: MSB_{OLS}^{τ} , MSB_{GLS1}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} .

Suponemos dos procesos generadores de los datos que difieren únicamente en el supuesto adoptado sobre la condición inicial de la serie. Escribimos, en primer lugar, el proceso generador que denominamos PGD1:

$$\begin{aligned} y_t &= d_t + v_t \\ v_t &= \rho_c v_{t-1} + u_t, \quad v_1 = 0 \\ u_t &= \psi(L)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d.N}(0, 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

que satisface la hipótesis tradicional de valor inicial cero bajo la hipótesis nula ($c = 0$) y alternativa ($c < 0$). El segundo proceso, que llamaremos PGD2 y que cumple la Condición 3.2, lo escribimos así:

$$\begin{aligned} y_t &= d_t + v_t \\ v_t &= \rho_c v_{t-1} + u_t, \quad v_1 = \alpha \lambda T^{1/2} (-2c)^{-1/2} \\ u_t &= \psi(L)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d.N}(0, 1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

en donde α indica la escala implícita en la condición inicial, de forma que $v_1 = O(T^{1/2})$. En ambos procesos generadores, definimos el parámetro ρ_c como $\rho_c = 1 + cT^{-1}$ con $c < 0$.

A continuación, vamos a describir los casos que contemplamos en nuestro análisis.

Caso 1: Los datos se generan suponiendo el PGD1 y se emplea el procedimiento OLS para obtener la serie libre de elementos deterministas.

Caso 2: Los datos se generan en base al PGD1 y se aplica el procedimiento de transformación de los datos GLS1 de Elliott *et al.* (1996) para eliminar la parte determinista de la serie.

Caso 3: Los datos se generan con el PGD1 y se aplica el método de “cuasi-diferenciación” GLS2 de Elliott (1999) para filtrar la serie de elementos deterministas.

Caso 4: El modelo generador es PGD2 y se aplica el método OLS para eliminar los elementos deterministas de la serie.

Caso 5: El proceso que genera los datos es el proceso PGD2 y se utiliza el procedimiento GLS1 para filtrar la serie de la parte determinista.

Caso 6: Los datos se generan asumiendo PGD2 y se emplea el procedimiento GLS2.

Los dos teoremas que a continuación enunciamos recogen las distribuciones asintóticas locales² de los casos que acabamos de describir.

Teorema 3.1. *Sea $\{y_t\}$ generado como en PGD1 (3.7). Dado el resultado en el Lema 3.1, entonces, bajo $H_{1,c}$: $c < 0$, se tiene que*

Caso 1:

$$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau \xrightarrow{d} \left(\int [J_c^\tau(r)]^2 dr \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

en donde $J_c^\tau(r) = J_c^\mu(r) - 12(r - 1/2) \int (s - 1/2) J_c(r) dr$ con $J_c^\mu(r) = J_c(r) - \int J_c(r) dr$ con J_c un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Caso 2:

$$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau \xrightarrow{d} \left(\int [J_{c,\bar{c}}^\tau(r)]^2 dr \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

con $J_{c,\bar{c}}^\tau = J_c(r) - r(\bar{c}^* J_c(1) + 3(1 - \bar{c}^*) \int s J_c(r) dr)$ y donde $\bar{c}^* = (1 - \bar{c}) / (1 - \bar{c} + \bar{c}^2/3)$.

Caso 3:

$$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau \xrightarrow{d} \left(\int \bar{J}_{c,\bar{c}}^\tau(r)^2 dr \right)^{1/2} \quad (3.11)$$

²En el Capítulo 1, ya desarrollamos los casos 1 y 2 bajo la hipótesis nula y alternativa no local, sin embargo, no prestamos atención al análisis estacionario local ($H_{1,c}$). Los resultados que proporcionamos en este capítulo lo complementan en este sentido.

en donde $\bar{J}_{c,\bar{c}}^\tau(r) = J_c(r) - (\bar{c}^2 \int J_c(s)ds - \bar{c}J_c(1))(g_1 + r g_2) - ((1 - \bar{c})J_c(1) + \bar{c}^2 \int sJ_c(s)ds) (g_2 + r g_3) - [g_1 + r g_2]v_1(-2\bar{c})^{1/2}$. Los elementos g_1, g_2 y g_3 se definen en la prueba presentada en el Apéndice matemático al final del capítulo.

Prueba: ver Apéndice matemático.

Comentario 3.2. Observamos que la distribución asintótica local del test MSB_{GLS2}^τ depende de los parámetros locales c, \bar{c} y del valor inicial, v_1 , mientras que la del test MSB_{GLS1}^τ solo depende de c, \bar{c} .

Teorema 3.2. Sea $\{y_t\}$ generada como en PGD2 (3.8). Dado el resultado en el Lema 3.2, entonces, bajo $H_{1,c}$: $c < 0$, se tiene que

Caso 4:

$$MSB_{OLS}^\tau \xrightarrow{d} \left(\int M_c^\tau(r)^2 dr \right)^{1/2} \quad (3.12)$$

siendo $M_c^\tau(r) = M_c^\mu(r) - 12(r - 1/2) \int (s - 1/2)M_c(s)ds$ y $M_c^\mu(r) = M_c(r) - \int M_c(s)$ habiendo definido M_c en el Lema 3.1.

Caso 5:

$$MSB_{GLS1}^\tau \xrightarrow{d} \left(\int M_{c,\bar{c}}^\tau(r)^2 dr \right)^{1/2} \quad (3.13)$$

donde $M_{c,\bar{c}}^\tau(r) = M_c(r) - r(\bar{c}^* M_c(1) - 3(1 - \bar{c}^*) \int sM_c(s)ds)$ con $\bar{c}^* = (1 - \bar{c})/(1 + \bar{c}^2/3 - \bar{c})$.

Caso 6:

$$MSB_{GLS2}^\tau \xrightarrow{d} \left(\int \bar{M}_{c,\bar{c}}^\tau(r)^2 dr \right)^{1/2} \quad (3.14)$$

con $\bar{M}_{c,\bar{c}}^\tau(r) = M_c(r) - \bar{M}_{c,\bar{c}}^{\delta_0} - r\bar{M}_{c,\bar{c}}^{\delta_1}$ en donde $\bar{M}_{c,\bar{c}}^{\delta_0} = g_1(\bar{c}^2 \int M_c(s)ds - \bar{c}M_c(1)) + g_2((1 - \bar{c})M_c(1) + \bar{c}^2 \int sM_c(s)ds)$ y $\bar{M}_{c,\bar{c}}^{\delta_1} = g_2(\bar{c}^2 \int M_c(s)ds - \bar{c}M_c(1)) + g_3((1 - \bar{c})M_c(1) + \bar{c}^2 \int sM_c(s)ds)$. Los elementos g_1, g_2 y g_3 se definen en la prueba correspondiente ubicada en el Apéndice matemático al final del capítulo.

Prueba: ver Apéndice matemático.

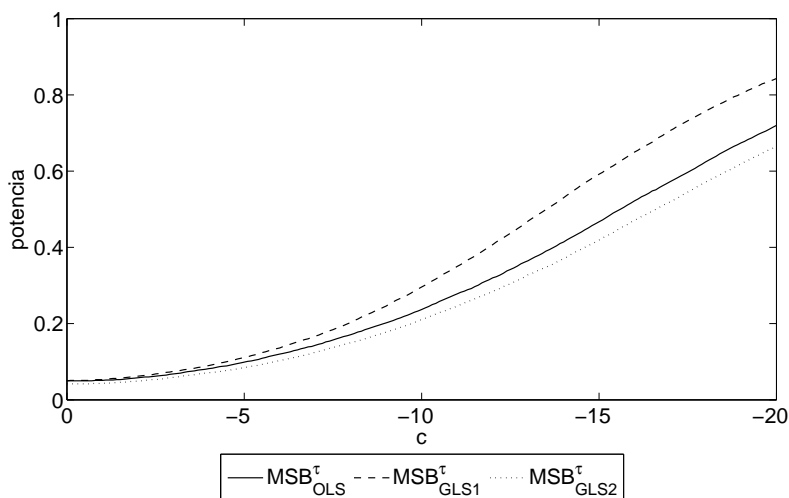
Comentario 3.3. Para el caso $c = 0$, el valor inicial es cero. Además, debido a que $J_c(s) \rightarrow W(s)$ y $M_c(s) \rightarrow W(s)$, con $W(s)$ un proceso de Wiener estándar, las distribuciones asintóticas de los contrastes MSB coinciden con las obtenidas en los teoremas 1.1 y 1.2 del Capítulo 1. La prueba se puede consultar en Phillips (1987b) y en el Lema 3.2, respectivamente.

Comentario 3.4. Las distribuciones asintóticas derivadas para las tres versiones del estadístico MSB corresponden al caso de que el proceso generador incluye un término constante y una tendencia lineal. Los resultados para el caso en el que, o bien, el proceso generador incluye solo un término constante, o bien, no incluye elementos deterministas, se derivan directamente suponiendo $z_t = 1$ y, por tanto, $y_t = v_t + \delta_0$ para el primero de los casos e $y_t = v_t$ para el segundo.

A continuación, caracterizamos numéricamente las distribuciones asintóticas locales de los tests MSB_{OLS}^{τ} , MSB_{GLS1}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} . Para ello, hemos utilizado simulaciones de Monte Carlo para aproximar un proceso de Wiener con una variable aleatoria estándar normal y 1000 pasos. Cada uno de los programas se ha basado en 20000 repeticiones. Además, hemos considerado los siguientes valores para $c = (-10, -15, -20)$ y $\alpha = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

En la Figura 4.1, mostramos el tamaño asintótico ($c = 0$) y la potencia asintótica local asegurando un nivel de significación nominal del 5% y suponiendo que el proceso generador es PGD1. Inmediatamente observamos que el tamaño asintótico producido por las versiones basadas en los procedimientos OLS y GLS1 es del 5%, mientras que, el producido por la versión GLS2 es ligeramente inferior (4.2%). En cuanto a la potencia asintótica, podemos confirmar que, a medida que c aumenta en valores absolutos, es decir, nos alejamos de la hipótesis nula, la potencia exhibida por los tres tests aumenta³. El test MSB_{GLS1}^{τ} es el que obtiene los valores de potencia más altos, seguido por el MSB_{OLS}^{τ} y el MSB_{GLS2}^{τ} . En este punto, es importante destacar que los menores valores de potencia que muestra el test MSB_{GLS2}^{τ} se deben al error cometido al seleccionar el procedimiento GLS2 conociendo que el modelo que genera los datos es PGD1. Pese al evidente error, no encontramos grandes diferencias entre las propiedades del test MSB_{GLS2}^{τ} y el MSB_{OLS}^{τ} .

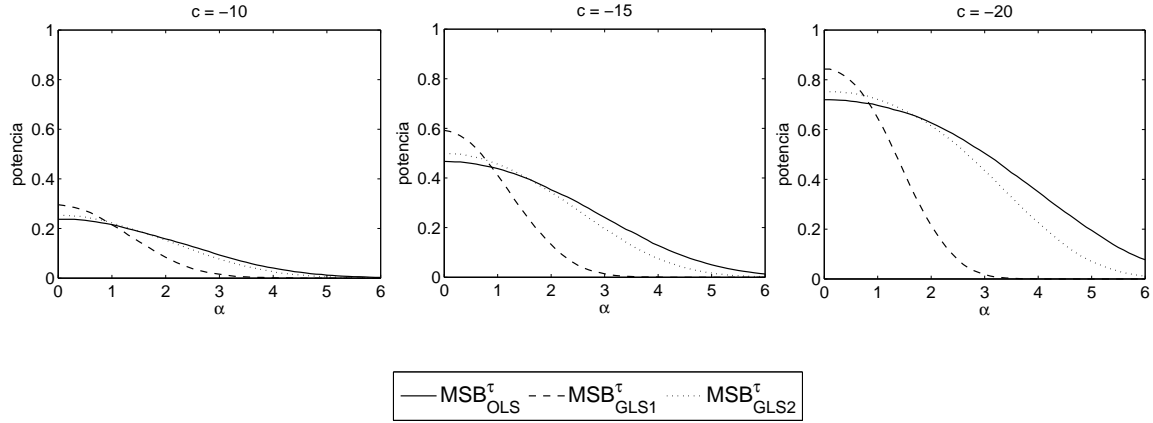
Figura 3.1: Tamaño asintótico y potencia asintótica local bajo PGD1



La Figura 3.2 nos muestra la potencia asintótica local para $c = (-10, -15, -20)$ suponiendo el modelo generador PGD2. En términos generales, podemos decir que, a medida que el valor inicial aumenta, la potencia de los tres tests disminuye. Esto pone de manifiesto una falta de robustez de los estadísticos que debe tenerse muy presente. En la figura, el test MSB_{GLS1}^{τ} consigue siempre de inicio la potencia más alta pero, por contra, la caída en la potencia que se produce a medida que α aumenta se da antes y de forma más acusada que en los otros dos tests. Por su parte, los tests MSB_{OLS}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} , exhiben un comportamiento muy parecido entre sí y una caída más suave en la potencia conforme α aumenta.

³Ver Tabla 3.16 y Tabla 3.17 en el Apéndice de tablas al final del capítulo.

Figura 3.2: Potencia asintótica local bajo PGD2



3.4 Simulaciones de Monte Carlo

En esta sección, examinamos cómo afecta el valor inicial a las propiedades en muestras pequeñas de los tres contrastes MSB introducidos en la sección anterior: MSB_{OLS}^{τ} , MSB_{GLS1}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} . Para ello realizaremos un estudio de Monte Carlo que describimos a continuación.

En primer lugar, conviene recordar que, por construcción, el estadístico MSB requiere emplear un estimador de la varianza a largo plazo. Nosotros hemos considerado el estimador autorregresivo basado en el criterio de información modificado MAIC construido como indican Perron y Qu (2007)⁴.

Partiendo del proceso generador (3.1), fijamos $\delta_0 = \delta_1 = 0$, sin pérdida de generalidad, y tenemos que:

$$y_t = v_t \tag{3.15}$$

$$v_t = \rho_c v_{t-1} + u_t$$

$$u_t = \begin{cases} \varepsilon_t \sim \text{i.i.d.N}(0, 1) \\ \phi u_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{AR}(1) \\ \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, & \text{MA}(1) \end{cases} \tag{3.16}$$

en donde, el valor inicial v_1 satisface la Condición 3.2, esto es, $v_1 = 0$, bajo la hipótesis nula ($c = 0$), y $v_1 = \alpha \lambda T^{1/2} (-2c)^{-1/2}$, bajo la alternativa local ($c < 0$), con λ el parámetro que denota

⁴En la literatura, podemos encontrar evidencia a cerca de cómo se comporta el estimador de varianza a largo plazo y los criterios de selección de retardos, cuando la condición inicial supone $v_1 = 0$. Por ejemplo, disponemos de los trabajos de Perron y Ng (1998), Ng y Perron (2001) y el Capítulo 2 de la presente tesis. Sin embargo, cuando $v_1 \neq 0$, las aportaciones en lo que respecta al estudio de los efectos cuando la condición inicial cambia, son escasas y, en vista de los resultados obtenidos hasta la fecha, parece un tema de investigación de gran interés para un futuro.

la raíz cuadrada de la varianza a largo plazo de u_t , y α el parámetro que controla la magnitud del valor inicial. Vamos a permitir que la perturbación del modelo se distribuya siguiendo un proceso i.i.d o un proceso autorregresivo de primer orden, AR(1), o un proceso media-móvil de primer orden, MA(1).

El término ε_t ha sido generado en GAUSS utilizando la función *rndKMn* con el valor 290373 como semilla que controla su generación. Hemos establecido el nivel de significación nominal en el 5% en todos los experimentos de Monte Carlo. Los valores de los parámetros que hemos considerado son: $\rho_c = (1, 0.99, 0.95, 0.9, 0.8)$, $\theta = (-0.8, -0.5, 0, 0.5, 0.8)$ y $\phi = (-0.8, -0.5, 0.5, 0.8)$. En todos los casos, hemos programado 20000 simulaciones.

3.4.1 Puntos críticos

Hemos obtenido los puntos críticos de los tres contrastes para un nivel de significación del 5% y distintos tamaños de muestra, incluido el punto crítico asintótico. El procedimiento de cálculo del punto crítico asintótico ha consistido en simular directamente las distribuciones asintóticas bajo la hipótesis nula de raíz unitaria ($c = 0$), empleando 5000 pasos para aproximar el proceso de Wiener estándar definido en $\mathcal{C}[0, 1]$ como el proceso de sumas parciales de variables aleatorias distribuidas como i.i.d.N(0, 1). Los puntos críticos para muestras finitas se han calculado simulando los estadísticos para los siguientes tamaños muestrales, $T = (50, 100, 250, 500)$. En todos los casos, hemos programado 50000 simulaciones. Los resultados se representan en la Tabla 3.1 para el caso M^r .

Tabla 3.1: Puntos críticos de MSB_{OLS}^r , MSB_{GLS1}^r y MSB_{GLS2}^r (5%)

T	MSB_{OLS}^r	MSB_{GLS1}^r	MSB_{GLS2}^r
50	0.169	0.190	0.204
100	0.158	0.182	0.198
250	0.152	0.178	0.195
500	0.149	0.175	0.192
∞	0.153	0.171	0.157

[†] En el cálculo de puntos críticos de muestras finitas, el número de retardos mínimo es cero y el número máximo es igual a $\lfloor 12(T/100)^{1/4} \rfloor$. También, se ha tomado $\bar{c} = -13.5$ para construir ambas versiones GLS en lugar de utilizar $\bar{c} = (-10, -15)$ como hace Elliott (1999) para la versión GLS2.

[‡] Los puntos críticos asintóticos se han calculado aproximando un proceso de Wiener mediante sumas parciales de una variable normal estándar generada a partir de la función *rndKMn* de GAUSS con 5000 pasos y 50000 simulaciones.

Comentario 3.5. Llegados a este punto, conviene recordar que los valores críticos de los tests MSB_{OLS}^r y MSB_{GLS1}^r han sido ya obtenidos en el Capítulo 2. Sin embargo, los puntos correspondientes al MSB_{GLS2}^r es la primera vez que aparecen.

3.4.2 Tamaño empírico

Para examinar las propiedades de los tests MSB_{OLS}^{τ} , MSB_{GLS1}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} en muestras pequeñas⁵, procederemos a calcular el tamaño empírico de los tests con los puntos críticos asintóticos de la Tabla 3.1 fijado un nivel de significación nominal del 5%. En este caso, solo contamos con un único proceso que genera los datos, ya que la hipótesis sobre la condición inicial de los datos no influye al situarnos en la hipótesis nula de raíz unitaria ($c = 0$). Entonces, suponemos que generamos $\{y_t\}$ con (3.7) que considera $v_1 = 0$ y, permitimos que el error adopte tres estructuras de autocorrelación diferentes: i.i.d, MA(1) o AR(1). Los valores considerados cuando el error sigue un proceso MA(1) son $\theta = (-0.8, -0.5, 0.5, 0.8)$ y cuando es AR(1), son $\phi = (-0.8, -0.5, 0.5, 0.8)$. Los resultados están recogidos en las tablas 3.2 y 3.3, respectivamente. En las simulaciones, hemos empleado el criterio MAIC, siguiendo a Perron y Qu (2007), para seleccionar el número de retardos k que hay que incluir en la regresión aumentada de DF, la cual es necesaria para calcular el estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo. También, hemos configurado que el valor de k se encuentre entre $k_{min} = 0$ y $k_{max} = \lfloor 12(T/100)^{1/4} \rfloor$ utilizando $\lfloor \cdot \rfloor$ para indicar que se trata de la parte entera. Los resultados se tabulan para tres tamaños muestrales, $T = (100, 250, 500)$. En cada uno de los ejercicios, hemos realizado 20000 simulaciones.

En términos generales, los resultados de tamaño empírico del contraste MSB_{GLS2}^{τ} se muestran un tanto más conservadores que los producidos por los otros dos tests. Si nos fijamos en la Tabla 3.2 cuando los errores del modelo se distribuyen como i.i.d., podemos decir que los tres tests MSB presentan un tamaño inferior al 5%, que se sitúa entre el 3% y 4%, pero que aumenta hacia el 5% cuando la muestra aumenta de tamaño. En este sentido, el test MSB_{GLS1}^{τ} se comporta mejor que los otros dos tests, ya que sus resultados se encuentran más próximos al nivel nominal.

Tabla 3.2: Tamaño empírico de MSB_{OLS}^{τ} , MSB_{GLS1}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} . $u_t \sim MA(1)$

T	θ	MSB_{OLS}^{τ}	MSB_{GLS1}^{τ}	MSB_{GLS2}^{τ}
100	-0.8	0.138	0.122	0.122
	-0.5	0.040	0.049	0.036
	0	0.012	0.026	0.013
	0.5	0.033	0.041	0.028
	0.8	0.050	0.047	0.036
250	-0.8	0.028	0.018	0.021
	-0.5	0.036	0.041	0.035
	0	0.026	0.035	0.027
	0.5	0.035	0.040	0.034
	0.8	0.062	0.055	0.055
500	-0.8	0.012	0.010	0.009
	-0.5	0.044	0.046	0.045
	0	0.037	0.041	0.037
	0.5	0.047	0.045	0.045
	0.8	0.065	0.057	0.061

† Basados en 20000 simulaciones y punto crítico asintótico al 5% calculado con 50000 simulaciones.

⁵Aunque los resultados de los dos primeros contrastes ya se han presentado previamente en el Capítulo 2, vamos a volver a incluirlos para poder compararlos con los del nuevo test MSB_{GLS2}^{τ} en los diversos escenarios contemplados.

En la misma tabla, analizamos qué sucede cuando los errores siguen un proceso media-móvil de primer orden. Observamos que, si el tamaño de la muestra es pequeño ($T = 100$) y $\theta < 0$, los tres tests presentan, en general, distorsiones en el tamaño significativas. Así, un incremento en el tamaño de la muestra hace que ese problema de sobredimensión en el tamaño pase a ser un problema de tamaño infradimensionado, incluso en el caso más extremo en el que $\theta = -0.8$. Por ejemplo, cuando $T = 100$, los tamaños exhibidos en la Tabla 3.2 son 13.8%, 12.2% y 12.2% respectivamente para MSB_{OLS}^{τ} , MSB_{GLS1}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} , que pasan a ser 1.2%, 1.0% y 0.9% cuando $T = 500$.

En presencia de errores que siguen un proceso autorregresivo de primer orden, $AR(1)$, los resultados de la Tabla 3.3 nos indican que, por lo general, el tamaño de los tests empeora a medida que el coeficiente autorregresivo $\phi > 0$ se aproxima a la unidad, especialmente en el caso del MSB_{GLS1}^{τ} y cuando el tamaño de la muestra es pequeño. Por ejemplo, con $\phi = 0.8$ y $T = 100$, el MSB_{GLS2}^{τ} es el test que presenta una menor distorsión (7.5%) en comparación con el test MSB_{GLS1}^{τ} (10.3)%. Cuando la muestra aumenta, por ejemplo $T = (250, 500)$, los tres tests alcanzan el 5% esperado teóricamente.

Tabla 3.3: Tamaño empírico de MSB_{OLS}^{τ} , MSB_{GLS1}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} . $u_t \sim AR(1)$

T	ϕ	MSB_{OLS}^{τ}	MSB_{GLS1}^{τ}	MSB_{GLS2}^{τ}
100	-0.8	0.001	0.001	0.001
	-0.5	0.008	0.016	0.008
	0.5	0.042	0.057	0.038
	0.8	0.090	0.103	0.075
250	-0.8	0.003	0.007	0.003
	-0.5	0.019	0.028	0.020
	0.5	0.041	0.048	0.040
	0.8	0.053	0.060	0.050
500	-0.8	0.014	0.021	0.015
	-0.5	0.033	0.037	0.033
	0.5	0.046	0.048	0.046
	0.8	0.051	0.052	0.049

† Basados en 20000 simulaciones y punto crítico asintótico al 5% calculado con 50000 simulaciones.

3.4.3 Potencia ajustada al tamaño

Ahora, examinaremos la potencia ajustada al tamaño de los tres contrastes MSB. Nuestras simulaciones se basan en los dos procesos generadores de datos contemplados: PGD1 (3.7) y PGD2 (3.8). En ambos procesos, fijamos $\delta_0 = \delta_1 = 0$, $\rho_c = (0.99, 0.98, 0.95, 0.9, 0.8)$, y consideramos que los errores pueden ser: i.i.d ($\theta = \phi = 0$), MA(1) en donde $\theta = (-0.8, -0.5, 0, 0.5, 0.8)$ o AR(1), con $\phi = (-0.8, -0.5, 0.5, 0.8)$. Para construir el estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo, seleccionamos el número de retardos k con el criterio modificado MAIC según Perron y Qu (2007). Los puntos críticos están corregidos por el tamaño de forma que los resultados que obtenemos son comparables entre sí. Hemos considerado tres tamaños de muestra, $T = (100, 250, 500)$. El número de simulaciones programadas en GAUSS ha sido 20000.

En primer lugar, analizaremos el caso en el que la serie y_t se ha generado utilizando el proceso PGD1 (3.7), que asume $v_1 = 0$. Las tablas 3.4 a 3.9 recogen los resultados obtenidos para los tres tests, considerando diferentes tamaños muestrales y estructuras de errores correlacionados. En particular, la Tabla 3.4 contiene los resultados cuando la muestra es pequeña ($T = 100$) y cuando los errores son i.i.d. o MA(1). Los resultados para $T = (250, 500)$ están recogidos respectivamente en las tablas 3.5 y 3.6.

En términos generales, podemos afirmar que cuando los errores son i.i.d ($\theta = \phi = 0$), los valores de potencia producidos por el test MSB_{GLS2}^τ son muy superiores a los conseguidos por los tests MSB_{OLS}^τ y MSB_{GLS1}^τ y, además, aumentan a medida que ρ_c se aleja de la unidad. Por ejemplo, cuando $\rho_c = 0.95$, el test MSB_{GLS2}^τ produce las siguientes potencias: 10.3 %, 36.1 %, 85.9 %; el test MSB_{GLS1}^τ , 2.2 %, 13.6 %, 61.7 % y, finalmente, el test MSB_{OLS}^τ produce 2.1 %, 10.8 %, 51.7 % para $T = (100, 250, 500)$, respectivamente.

Tabla 3.4: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 100$, $u_t \sim MA(1)$

ρ_c	θ	MSB_{OLS}^τ	MSB_{GLS1}^τ	MSB_{GLS2}^τ
0.99	-0.8	0.138	0.105	0.169
	-0.5	0.038	0.029	0.087
	0	0.010	0.010	0.053
	0.5	0.030	0.021	0.081
	0.8	0.043	0.025	0.090
0.98	-0.8	0.152	0.115	0.185
	-0.5	0.042	0.032	0.097
	0	0.012	0.011	0.059
	0.5	0.033	0.023	0.092
	0.8	0.045	0.027	0.095
0.95	-0.8	0.215	0.167	0.253
	-0.5	0.066	0.052	0.149
	0	0.021	0.022	0.103
	0.5	0.049	0.038	0.131
	0.8	0.058	0.037	0.129
0.9	-0.8	0.365	0.295	0.404
	-0.5	0.137	0.117	0.267
	0	0.065	0.069	0.250
	0.5	0.086	0.077	0.230
	0.8	0.086	0.067	0.205
0.8	-0.8	0.694	0.615	0.706
	-0.5	0.347	0.289	0.479
	0	0.317	0.341	0.643
	0.5	0.150	0.156	0.413
	0.8	0.180	0.165	0.383

Tabla 3.5: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 250$, $u_t \sim \text{MA}(1)$

ρ_c	θ	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$
0.99	-0.8	0.023	0.013	0.040
	-0.5	0.021	0.018	0.078
	θ	<i>0.013</i>	<i>0.014</i>	<i>0.066</i>
	0.5	0.021	0.019	0.074
	0.8	0.041	0.029	0.106
0.98	-0.8	0.036	0.019	0.057
	-0.5	0.033	0.031	0.119
	θ	<i>0.023</i>	<i>0.025</i>	<i>0.103</i>
	0.5	0.031	0.030	0.116
	0.8	0.060	0.045	0.151
0.95	-0.8	0.108	0.061	0.154
	-0.5	0.120	0.121	0.312
	θ	<i>0.108</i>	<i>0.136</i>	<i>0.361</i>
	0.5	0.114	0.129	0.334
	0.8	0.152	0.148	0.348
0.9	-0.8	0.344	0.206	0.376
	-0.5	0.380	0.351	0.614
	θ	<i>0.514</i>	<i>0.59</i>	<i>0.816</i>
	0.5	0.427	0.492	0.737
	0.8	0.390	0.418	0.658
0.8	-0.8	0.773	0.632	0.749
	-0.5	0.657	0.531	0.739
	θ	<i>0.842</i>	<i>0.832</i>	<i>0.904</i>
	0.5	0.815	0.821	0.898
	0.8	0.716	0.722	0.856

Si nos fijamos en el caso en el que los errores siguen un proceso $\text{MA}(1)$, nuevamente, es el estadístico $\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$ el que alcanza los valores de potencia más altos con independencia del signo del parámetro media-móvil ($\theta > 0$, $\theta < 0$). Por ejemplo, para $T = 500$ y $\rho_c = 0.90$, el estadístico $\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$ produce unas potencias ajustadas de 55.1% y 92.2% cuando $\theta = (-0.8, -0.5)$, respectivamente. También, observamos que el test $\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$ muestra una potencia ajustada más baja en el caso de interés $\theta < 0$ ($T = 500, \rho_c = 0.90, \theta = -0.8$: 24.7%) pero que se incrementa cuando $\theta > 0$ ($T = 500, \rho_c = 0.90, \theta = 0.8$: 88.4%). En general, al considerar una muestra más grande, la potencia de los contrastes crece tal y como podíamos esperar.

Tabla 3.6: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 500$, $u_t \sim \text{MA}(1)$

ρ_c	θ	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$
0.99	-0.8	0.008	0.005	0.026
	-0.5	0.028	0.028	0.114
	θ	<i>0.024</i>	<i>0.026</i>	<i>0.106</i>
	0.5	0.030	0.030	0.117
	0.8	0.048	0.040	0.143
0.98	-0.8	0.020	0.011	0.060
	-0.5	0.072	0.078	0.254
	θ	<i>0.063</i>	<i>0.079</i>	<i>0.252</i>
	0.5	0.074	0.086	0.258
	0.8	0.106	0.102	0.286

ρ_c	θ	MSB_{OLS}^τ	MSB_{GLS1}^τ	MSB_{GLS2}^τ
0.95	-0.8	0.148	0.080	0.255
	-0.5	0.423	0.443	0.751
	0	0.517	0.617	0.859
	0.5	0.455	0.544	0.807
	0.8	0.462	0.513	0.765
0.9	-0.8	0.529	0.247	0.551
	-0.5	0.800	0.723	0.922
	0	0.919	0.922	0.973
	0.5	0.907	0.922	0.973
	0.8	0.860	0.884	0.964
0.8	-0.8	0.880	0.641	0.798
	-0.5	0.900	0.717	0.929
	0	0.964	0.935	0.989
	0.5	0.965	0.955	0.991
	0.8	0.961	0.951	0.990

Las tablas 3.7 a 3.9 proporcionan los resultados cuando los errores siguen un proceso AR(1), y el tamaño muestral es 100, 250 y 500, respectivamente. Así, cuando la muestra es pequeña ($T = 100$), la Tabla 3.7 nos muestra como el test MSB_{GLS2}^τ exhibe los valores de potencia ajustada más elevados, que incluso llegan a duplicar los producidos por los tests MSB_{OLS}^τ y MSB_{GLS1}^τ . Por ejemplo, en la Tabla 3.7 con $\phi = 0.8$ y $\rho_c = 0.90$, el test MSB_{GLS2}^τ logra una potencia ajustada de 29.2% mientras que los otros dos contrastes apenas superan una potencia ajustada del 15%. En concreto, el test MSB_{OLS}^τ consigue solo un 14.2% y el test MSB_{GLS1}^τ , 12.5%. En general, podemos afirmar que el estadístico MSB_{GLS2}^τ se comporta mejor que las versiones OLS y GLS1, las cuales proporcionan unos valores de potencia ajustada al tamaño inferiores, especialmente, cuando la muestra es pequeña y $\phi < 0$. En muestras grandes, las diferencias entre el comportamiento del contraste MSB_{GLS2}^τ y el de los contrastes MSB_{GLS1}^τ y MSB_{OLS}^τ , persisten pero se reducen considerablemente. Esto lo podemos ver en la Tabla 3.9, cuando $\rho_c = 0.8$ y $\phi = 0.8$, en donde el test MSB_{GLS2}^τ produce una potencia ajustada de 98.3%, el test MSB_{GLS1}^τ de 95.2% y MSB_{OLS}^τ de 94.1%.

Tabla 3.7: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 100$, $u_t \sim AR(1)$

ρ_c	ϕ	MSB_{OLS}^τ	MSB_{GLS1}^τ	MSB_{GLS2}^τ
0.99	-0.8	0.000	0.000	0.003
	-0.5	0.007	0.006	0.034
	0.5	0.039	0.029	0.103
	0.8	0.084	0.062	0.159
0.98	-0.8	0.000	0.000	0.003
	-0.5	0.008	0.006	0.038
	0.5	0.043	0.033	0.115
	0.8	0.087	0.065	0.168
0.95	-0.8	0.001	0.001	0.005
	-0.5	0.014	0.013	0.065
	0.5	0.065	0.055	0.170
	0.8	0.103	0.082	0.209

ρ_c	ϕ	MSB_{OLS}^τ	MSB_{GLS1}^τ	MSB_{GLS2}^τ
0.9	-0.8	0.002	0.001	0.015
	-0.5	0.037	0.034	0.156
	0.5	0.122	0.115	0.289
	0.8	0.142	0.125	0.292
0.8	-0.8	0.007	0.007	0.062
	-0.5	0.167	0.161	0.439
	0.5	0.192	0.199	0.387
	0.8	0.225	0.214	0.433

Tabla 3.8: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 250$, $u_t \sim \text{AR}(1)$

ρ_c	ϕ	MSB_{OLS}^τ	MSB_{GLS1}^τ	MSB_{GLS2}^τ
0.99	-0.8	0.001	0.001	0.013
	-0.5	0.009	0.010	0.053
	0.5	0.024	0.023	0.088
	0.8	0.032	0.029	0.101
0.98	-0.8	0.001	0.002	0.022
	-0.5	0.016	0.018	0.083
	0.5	0.039	0.038	0.136
	0.8	0.046	0.045	0.144
0.95	-0.8	0.007	0.014	0.098
	-0.5	0.076	0.095	0.298
	0.5	0.146	0.168	0.386
	0.8	0.131	0.144	0.345
0.9	-0.8	0.073	0.117	0.405
	-0.5	0.396	0.434	0.726
	0.5	0.489	0.562	0.780
	0.8	0.343	0.395	0.646
0.8	-0.8	0.410	0.400	0.642
	-0.5	0.751	0.700	0.837
	0.5	0.816	0.832	0.905
	0.8	0.652	0.711	0.858

Tabla 3.9: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD1. $T = 500$, $u_t \sim \text{AR}(1)$

ρ_c	ϕ	MSB_{OLS}^τ	MSB_{GLS1}^τ	MSB_{GLS2}^τ
0.99	-0.8	0.005	0.008	0.050
	-0.5	0.019	0.022	0.095
	0.5	0.032	0.032	0.120
	0.8	0.034	0.035	0.124
0.98	-0.8	0.016	0.027	0.132
	-0.5	0.053	0.066	0.226
	0.5	0.081	0.092	0.271
	0.8	0.081	0.089	0.259
0.95	-0.8	0.209	0.298	0.661
	-0.5	0.449	0.527	0.817

ρ_c	ϕ	MSB_{OLS}^τ	MSB_{GLS1}^τ	MSB_{GLS2}^τ
	0.5	0.504	0.601	0.838
	0.8	0.405	0.489	0.753
0.9	-0.8	0.717	0.701	0.874
	-0.5	0.879	0.862	0.955
	0.5	0.909	0.930	0.974
	0.8	0.827	0.877	0.956
0.8	-0.8	0.792	0.690	0.862
	-0.5	0.933	0.851	0.967
	0.5	0.964	0.962	0.992
	0.8	0.941	0.952	0.983

Pasamos a suponer que la serie y_t ha sido generada de acuerdo al proceso PGD2 (3.8), que considera, bajo la hipótesis alternativa, $v_1 = \alpha\lambda T^{1/2}(-2c)^{-1/2}$ como en Müller y Elliott (2003) y Elliott y Müller (2006). Para examinar el efecto de un cambio en el valor inicial, hemos considerado el siguiente conjunto de valores del parámetro que controla la magnitud del valor inicial, $\alpha = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Debido a las distorsiones de tamaño empírico exhibidas por los tests en las tablas 3.2 y 3.3, calcularemos la potencia ajustada al tamaño para poder realizar posteriormente comparaciones válidas entre los tests. Los resultados de todos los casos analizados se recogen en las tablas 3.10 a 3.15.

Examinando el caso más sencillo, en el que el error se distribuye como i.i.d ($\theta = 0$), observamos en la Tabla 3.10 que, cuando la muestra es pequeña tal que $T = 100$, y $\rho_c = 0.99$, el test MSB_{GLS2}^τ exhibe una potencia superior a la producida por los tests MSB_{OLS}^τ y MSB_{GLS1}^τ y, además, es relativamente estable a cambios en los distintos valores iniciales, situándose en el 5%. Los tests MSB_{GLS1}^τ y MSB_{OLS}^τ presentan una potencia que apenas supera el 1.1%. A medida que el ρ_c se aleja de la vecindad de la unidad, se pone de manifiesto una relación inversa entre potencia y tamaño del valor inicial que hace disminuir la potencia de los contrastes a medida que la magnitud del valor inicial aumenta. Por ejemplo, con $\rho_c = 0.9$, la potencia del MSB_{GLS2}^τ inicialmente es la más elevada 25.5%, pero decrece hasta anularse a medida que α crece. Esto mismo les sucede a los tests MSB_{OLS}^τ y MSB_{GLS1}^τ . Por lo tanto, podemos afirmar que ninguno de los tres tests analizados en este caso presenta una potencia robusta e invariante a cambios en el valor inicial. Dejando a un lado la falta de robustez de los tres contrastes, podemos concluir que el contraste MSB_{GLS2}^τ produce valores de potencia ajustada que son superiores a los de los otros dos tests contemplados, especialmente, cuando el tamaño de la observación inicial es pequeña. Este resultado va en línea con el argumento que emplea Müller y Elliott (2003) para justificar la utilización del procedimiento GLS2, en el que destaca su buen comportamiento cuando el valor inicial es pequeño. Este problema de hundimiento de la potencia ajustada persiste aun cuando consideramos tamaños de muestra más grandes. Las tablas 3.11 y 3.12 muestran estos resultados.

Consideramos la Tabla 3.10, que contiene los resultados correspondientes al caso en el que una estructura media-móvil de primer orden subyace en los errores del modelo. Cuando la muestra es pequeña ($T = 100$) y $\theta < 0$, inmediatamente observamos que se produce una disminución de la potencia ajustada de los tests al aumentar α . Esta caída es más acentuada en los tests MSB_{OLS}^τ y MSB_{GLS1}^τ que en el MSB_{GLS2}^τ . Por su parte, el test MSB_{GLS2}^τ produce valores de

potencia ajustada superiores a los de los otros dos tests. Por ejemplo, con $\rho_c = 0.95$ y $\theta = -0.8$, la potencia del test es 70.7%. Cuando $\theta > 0$, observamos que, para valores de ρ_c próximos a la unidad, las potencias exhibidas por los tests, pese a ser muy bajas, apenas se ven influenciadas por el valor inicial y, por tanto, resultan menos sensibles al efecto del valor inicial. Esta afirmación debe ser tomada con cautela puesto que, si nos fijamos bien, los valores de potencia ajustada son excesivamente bajos en todo el rango de valores de α . Por ejemplo, cuando $\rho_c = 0.99$ y $\theta = -0.8$, el test $\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$ produce una potencia ajustada relativamente estable entorno al 4.2%, el $\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$ en el 2.5% y el $\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$ en el 9%. Sin embargo, conforme ρ_c se aleja de la unidad, el problema de una potencia que disminuye cuando aumenta α vuelve a estar presente, aunque de manera menos acusada. En este caso, los tests $\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$ y $\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$ son los que menos se ven afectados. El test $\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$ sigue presentando una notable sensibilidad al tamaño del valor inicial.

Tabla 3.10: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 100$. $u_t \sim \text{MA}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$		<hr/>						
$\theta = -0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.140	0.129	0.095	0.056	0.027	0.011	0.004
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.106	0.098	0.071	0.039	0.017	0.006	0.002
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.171	0.157	0.118	0.070	0.034	0.015	0.005
$\theta = -0.5$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.038	0.037	0.037	0.032	0.027	0.022	0.017
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.029	0.027	0.026	0.023	0.019	0.015	0.011
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.088	0.086	0.082	0.075	0.064	0.051	0.038
$\theta = 0$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.010	0.009	0.010	0.011	0.010	0.009	0.009
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.010	0.010	0.010	0.009	0.010	0.009	0.009
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.053	0.053	0.052	0.051	0.050	0.048	0.044
$\theta = 0.5$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.030	0.029	0.029	0.030	0.030	0.029	0.028
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.021	0.020	0.021	0.021	0.020	0.021	0.019
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.080	0.083	0.083	0.081	0.080	0.078	0.075
$\theta = 0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.043	0.042	0.043	0.043	0.042	0.043	0.042
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.024
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.090	0.089	0.090	0.091	0.089	0.089	0.088
$\rho_c = 0.95$		<hr/>						
$\theta = -0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.207	0.085	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.176	0.047	0.001	0.000	0.000	0.001	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.255	0.096	0.005	0.000	0.001	0.001	0.001
$\theta = -0.5$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.066	0.051	0.021	0.004	0.001	0.001	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.055	0.036	0.009	0.001	0.000	0.000	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.149	0.113	0.044	0.010	0.001	0.001	0.002
$\theta = 0$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.022	0.020	0.016	0.009	0.005	0.002	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.022	0.020	0.014	0.006	0.002	0.001	0.000
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.105	0.096	0.070	0.042	0.021	0.009	0.003
$\theta = 0.5$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.050	0.049	0.043	0.036	0.028	0.019	0.013
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.039	0.036	0.031	0.022	0.015	0.009	0.005
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.133	0.130	0.115	0.097	0.078	0.054	0.037
$\theta = 0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.058	0.058	0.055	0.050	0.045	0.036	0.032
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.037	0.035	0.032	0.027	0.021	0.014	0.011
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.128	0.127	0.117	0.104	0.091	0.073	0.059

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.90$								
$\theta = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.343	0.174	0.020	0.001	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.325	0.089	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.404	0.176	0.012	0.000	0.000	0.000	0.000
$\theta = -0.5$	MSB_{OLS}^T	0.139	0.103	0.039	0.007	0.002	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.132	0.059	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.274	0.199	0.067	0.009	0.001	0.000	0.000
$\theta = 0$	MSB_{OLS}^T	0.066	0.057	0.034	0.015	0.005	0.001	0.001
	MSB_{GLS1}^T	0.073	0.054	0.023	0.005	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.255	0.224	0.147	0.069	0.023	0.005	0.001
$\theta = 0.5$	MSB_{OLS}^T	0.087	0.083	0.074	0.061	0.045	0.029	0.017
	MSB_{GLS1}^T	0.079	0.070	0.048	0.026	0.012	0.003	0.001
	MSB_{GLS2}^T	0.234	0.224	0.195	0.151	0.108	0.068	0.039
$\theta = 0.8$	MSB_{OLS}^T	0.089	0.088	0.081	0.070	0.061	0.049	0.039
	MSB_{GLS1}^T	0.068	0.064	0.049	0.030	0.017	0.009	0.004
	MSB_{GLS2}^T	0.208	0.200	0.179	0.150	0.115	0.083	0.057
$\rho = 0.80$								
$\theta = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.667	0.528	0.238	0.062	0.014	0.004	0.001
	MSB_{GLS1}^T	0.659	0.382	0.087	0.007	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.707	0.507	0.170	0.019	0.001	0.000	0.000
$\theta = -0.5$	MSB_{OLS}^T	0.346	0.306	0.197	0.092	0.035	0.017	0.008
	MSB_{GLS1}^T	0.349	0.174	0.027	0.003	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.499	0.405	0.220	0.072	0.013	0.001	0.000
$\theta = 0$	MSB_{OLS}^T	0.327	0.300	0.219	0.123	0.049	0.016	0.007
	MSB_{GLS1}^T	0.378	0.276	0.093	0.011	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.655	0.618	0.513	0.347	0.168	0.053	0.009
$\theta = 0.5$	MSB_{OLS}^T	0.155	0.149	0.135	0.115	0.092	0.070	0.053
	MSB_{GLS1}^T	0.165	0.135	0.074	0.028	0.007	0.001	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.422	0.400	0.347	0.271	0.197	0.131	0.080
$\theta = 0.8$	MSB_{OLS}^T	0.183	0.178	0.168	0.156	0.140	0.121	0.103
	MSB_{GLS1}^T	0.175	0.149	0.092	0.044	0.016	0.004	0.001
	MSB_{GLS2}^T	0.389	0.378	0.341	0.289	0.226	0.168	0.115

En muestras más grandes ($T = 250, 500$), los resultados recogidos en las tablas 3.11 y 3.12 exhiben el patrón descrito antes, con la diferencia de que los valores de potencia ajustada son más grandes por efecto de un mayor tamaño muestral. En este caso, no existe robustez en los resultados, como sucedía en muestras pequeñas. Ahora, conforme aumenta el valor inicial, la potencia disminuye como en el caso de $\theta < 0$.

Tabla 3.11: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 250$. $u_t \sim MA(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\theta = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.023	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.013	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.039	0.017	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\theta = -0.5$	MSB_{OLS}^T	0.020	0.017	0.011	0.005	0.002	0.001	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.018	0.014	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.076	0.065	0.042	0.019	0.007	0.002	0.000
$\theta = 0$	MSB_{OLS}^T	0.013	0.012	0.010	0.009	0.006	0.004	0.002
	MSB_{GLS1}^T	0.013	0.013	0.011	0.008	0.005	0.004	0.002
	MSB_{GLS2}^T	0.065	0.059	0.052	0.042	0.034	0.023	0.015
$\theta = 0.5$	MSB_{OLS}^T	0.020	0.020	0.018	0.016	0.014	0.012	0.009
	MSB_{GLS1}^T	0.019	0.017	0.015	0.013	0.011	0.009	0.007
	MSB_{GLS2}^T	0.073	0.072	0.069	0.062	0.056	0.048	0.040
$\theta = 0.8$	MSB_{OLS}^T	0.041	0.041	0.038	0.036	0.034	0.032	0.028
	MSB_{GLS1}^T	0.028	0.027	0.026	0.024	0.021	0.020	0.016
	MSB_{GLS2}^T	0.105	0.104	0.100	0.095	0.087	0.079	0.071
$\rho_c = 0.95$								
$\theta = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.099	0.031	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.086	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.160	0.028	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\theta = -0.5$	MSB_{OLS}^T	0.119	0.080	0.024	0.004	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.136	0.029	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.317	0.219	0.060	0.005	0.000	0.000	0.000
$\theta = 0$	MSB_{OLS}^T	0.107	0.093	0.057	0.025	0.008	0.002	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.137	0.089	0.024	0.003	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.363	0.325	0.232	0.113	0.037	0.008	0.001
$\theta = 0.5$	MSB_{OLS}^T	0.113	0.107	0.090	0.067	0.046	0.027	0.014
	MSB_{GLS1}^T	0.128	0.106	0.059	0.022	0.006	0.001	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.334	0.321	0.276	0.211	0.143	0.083	0.044
$\theta = 0.8$	MSB_{OLS}^T	0.152	0.147	0.136	0.119	0.099	0.078	0.056
	MSB_{GLS1}^T	0.144	0.128	0.085	0.045	0.017	0.005	0.001
	MSB_{GLS2}^T	0.347	0.334	0.307	0.259	0.208	0.157	0.109
$\rho_c = 0.90$								
$\theta = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.329	0.231	0.069	0.009	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.310	0.026	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.407	0.172	0.020	0.001	0.000	0.000	0.000
$\theta = -0.5$	MSB_{OLS}^T	0.378	0.334	0.218	0.093	0.023	0.004	0.001
	MSB_{GLS1}^T	0.429	0.099	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.626	0.530	0.303	0.093	0.011	0.000	0.000
$\theta = 0$	MSB_{OLS}^T	0.514	0.490	0.421	0.316	0.189	0.079	0.023
	MSB_{GLS1}^T	0.614	0.441	0.116	0.006	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.818	0.799	0.731	0.604	0.412	0.199	0.051
$\theta = 0.5$	MSB_{OLS}^T	0.425	0.418	0.393	0.349	0.295	0.232	0.170
	MSB_{GLS1}^T	0.499	0.410	0.216	0.065	0.009	0.001	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.739	0.727	0.690	0.624	0.533	0.419	0.300
$\theta = 0.8$	MSB_{OLS}^T	0.389	0.384	0.370	0.347	0.317	0.283	0.246
	MSB_{GLS1}^T	0.420	0.354	0.211	0.086	0.020	0.003	0.001
	MSB_{GLS2}^T	0.658	0.648	0.614	0.562	0.494	0.414	0.327
$\rho_c = 0.80$								
$\theta = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.764	0.728	0.607	0.428	0.258	0.131	0.058
	MSB_{GLS1}^T	0.740	0.447	0.204	0.045	0.006	0.000	0.000

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\theta = -0.5$	MSB_{GLS2}^{τ}	0.773	0.628	0.380	0.142	0.028	0.003	0.000
	MSB_{OLS}^{τ}	0.657	0.649	0.617	0.565	0.483	0.374	0.250
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.668	0.297	0.028	0.000	0.000	0.000	0.000
$\theta = 0$	MSB_{GLS2}^{τ}	0.762	0.694	0.545	0.370	0.196	0.080	0.020
	MSB_{OLS}^{τ}	0.841	0.838	0.831	0.820	0.800	0.771	0.723
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.858	0.778	0.554	0.161	0.002	0.000	0.000
$\theta = 0.5$	MSB_{GLS2}^{τ}	0.907	0.899	0.873	0.836	0.787	0.723	0.644
	MSB_{OLS}^{τ}	0.814	0.813	0.808	0.800	0.788	0.771	0.749
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.837	0.784	0.592	0.272	0.051	0.003	0.000
$\theta = 0.8$	MSB_{GLS2}^{τ}	0.900	0.894	0.880	0.857	0.827	0.790	0.741
	MSB_{OLS}^{τ}	0.715	0.713	0.708	0.701	0.693	0.680	0.662
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.746	0.665	0.454	0.201	0.048	0.004	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.857	0.850	0.831	0.799	0.757	0.703	0.638

Tabla 3.12: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 500$. $u_t \sim MA(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\theta = -0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.027	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\theta = -0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.028	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.031	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.118	0.078	0.024	0.003	0.000	0.000	0.000
$\theta = 0$	MSB_{OLS}^{τ}	0.024	0.020	0.013	0.008	0.003	0.001	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.027	0.022	0.012	0.006	0.001	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.108	0.095	0.070	0.041	0.020	0.007	0.002
$\theta = 0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.029	0.026	0.022	0.016	0.012	0.008	0.004
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.032	0.029	0.020	0.015	0.009	0.005	0.002
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.120	0.116	0.100	0.082	0.059	0.039	0.023
$\theta = 0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.047	0.046	0.042	0.036	0.029	0.023	0.017
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.041	0.039	0.033	0.025	0.018	0.012	0.007
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.146	0.142	0.132	0.115	0.096	0.074	0.054
$\rho_c = 0.95$								
$\theta = -0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.139	0.067	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.152	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.286	0.058	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
$\theta = -0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.420	0.361	0.207	0.061	0.008	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.529	0.079	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.761	0.668	0.394	0.092	0.004	0.000	0.000
$\theta = 0$	MSB_{OLS}^{τ}	0.515	0.491	0.423	0.313	0.190	0.084	0.026
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.651	0.440	0.095	0.004	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.864	0.845	0.783	0.658	0.453	0.218	0.058
$\theta = 0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.454	0.444	0.415	0.368	0.309	0.239	0.171
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.568	0.461	0.232	0.061	0.007	0.000	0.000

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\theta = 0.8$	MSB_{GLS2}^T	0.814	0.803	0.773	0.714	0.623	0.504	0.368
	MSB_{OLS}^T	0.460	0.454	0.437	0.410	0.374	0.334	0.289
	MSB_{GLS1}^T	0.529	0.455	0.277	0.111	0.027	0.004	0.001
	MSB_{GLS2}^T	0.772	0.764	0.739	0.695	0.630	0.553	0.461
$\rho_c = 0.90$								
$\theta = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.519	0.463	0.324	0.160	0.044	0.006	0.001
	MSB_{GLS1}^T	0.498	0.013	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.627	0.289	0.066	0.007	0.000	0.000	0.000
$\theta = -0.5$	MSB_{OLS}^T	0.799	0.791	0.760	0.694	0.570	0.390	0.190
	MSB_{GLS1}^T	0.844	0.328	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.930	0.888	0.771	0.591	0.334	0.104	0.012
$\theta = 0$	MSB_{OLS}^T	0.918	0.917	0.913	0.905	0.892	0.870	0.830
	MSB_{GLS1}^T	0.941	0.865	0.578	0.084	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.975	0.972	0.960	0.939	0.910	0.869	0.806
$\theta = 0.5$	MSB_{OLS}^T	0.906	0.905	0.902	0.896	0.887	0.874	0.857
	MSB_{GLS1}^T	0.934	0.886	0.710	0.345	0.058	0.003	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.974	0.972	0.967	0.956	0.939	0.917	0.890
$\theta = 0.8$	MSB_{OLS}^T	0.859	0.859	0.855	0.849	0.842	0.830	0.816
	MSB_{GLS1}^T	0.898	0.836	0.629	0.316	0.082	0.010	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.966	0.963	0.957	0.945	0.925	0.895	0.855
$\rho_c = 0.80$								
$\theta = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.880	0.873	0.847	0.808	0.748	0.672	0.582
	MSB_{GLS1}^T	0.820	0.480	0.309	0.162	0.052	0.016	0.002
	MSB_{GLS2}^T	0.856	0.692	0.528	0.356	0.194	0.073	0.017
$\theta = -0.5$	MSB_{OLS}^T	0.900	0.896	0.890	0.881	0.869	0.855	0.835
	MSB_{GLS1}^T	0.900	0.478	0.073	0.002	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.950	0.893	0.752	0.622	0.494	0.362	0.237
$\theta = 0$	MSB_{OLS}^T	0.963	0.963	0.963	0.961	0.959	0.956	0.952
	MSB_{GLS1}^T	0.971	0.873	0.708	0.516	0.231	0.001	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.991	0.987	0.971	0.937	0.895	0.853	0.812
$\theta = 0.5$	MSB_{OLS}^T	0.965	0.964	0.964	0.963	0.963	0.962	0.959
	MSB_{GLS1}^T	0.974	0.923	0.806	0.677	0.443	0.088	0.002
	MSB_{GLS2}^T	0.992	0.991	0.986	0.972	0.950	0.922	0.894
$\theta = 0.8$	MSB_{OLS}^T	0.961	0.960	0.960	0.959	0.959	0.958	0.957
	MSB_{GLS1}^T	0.970	0.922	0.765	0.548	0.263	0.057	0.003
	MSB_{GLS2}^T	0.992	0.991	0.986	0.978	0.962	0.935	0.897

Analizamos qué sucede cuando la perturbación aleatoria sigue un proceso autorregresivo de primer orden, AR(1). De acuerdo a los resultados de la Tabla 3.13, podemos decir que, cuando la muestra es pequeña ($T = 100$) y ρ_c está muy próximo a la unidad, los tests MSB_{OLS}^T y MSB_{GLS1}^T presentan potencias inferiores a las producidas por el MSB_{GLS2}^T , sin importar si el coeficiente de autocorrelación positivo es más o menos elevado, $\phi = (0.5, 0.8)$. A medida que ρ_c se va alejando de la unidad, como podríamos esperar, la potencia de los tests aumenta alcanzando, para el caso más extremo ($\phi = 0.8$), valores próximos al 50%. Por ejemplo, el MSB_{GLS2}^T llega al 43.4%. Sin embargo, podemos identificar, en todos ellos, la existencia de una relación inversa entre potencia

y tamaño del valor inicial (α), siendo más acentuada en la versión GLS1. Cuando $\phi < 0$, los tres tests muestran potencias muy bajas. Podemos concluir, por tanto, que en muestras pequeñas, ninguno de los tests posee un comportamiento robusto a cambios en el valor inicial.

Tabla 3.13: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 100$. $u_t \sim \text{AR}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\phi = -0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002
$\phi = -0.5$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.007	0.007	0.007	0.006	0.007	0.006	0.005
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.005	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	0.004
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.034	0.033	0.033	0.030	0.028	0.025	0.022
$\phi = 0.5$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.039	0.038	0.039	0.040	0.040	0.039	0.039
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.029	0.030	0.029	0.030	0.030	0.030	0.029
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.104	0.104	0.105	0.104	0.103	0.102	0.101
$\phi = 0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084	0.083
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.062	0.062	0.062	0.063	0.063	0.063	0.063
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.159	0.159	0.159	0.159	0.159	0.160	0.159
$\rho_c = 0.95$								
$\phi = -0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.000	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.006	0.004	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
$\phi = -0.5$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.014	0.012	0.006	0.002	0.001	0.001	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.013	0.009	0.003	0.001	0.000	0.001	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.067	0.054	0.028	0.009	0.002	0.001	0.001
$\phi = 0.5$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.066	0.064	0.061	0.056	0.047	0.039	0.031
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.055	0.053	0.048	0.041	0.034	0.025	0.018
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.170	0.166	0.158	0.141	0.122	0.103	0.083
$\phi = 0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.103	0.102	0.101	0.098	0.096	0.092	0.089
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.082	0.082	0.080	0.077	0.075	0.072	0.069
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.208	0.208	0.207	0.205	0.199	0.193	0.187
$\rho_c = 0.90$								
$\phi = -0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.016	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
$\phi = -0.5$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.038	0.029	0.011	0.003	0.002	0.001	0.001
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.039	0.020	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.163	0.121	0.047	0.008	0.001	0.000	0.000
$\phi = 0.5$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.123	0.121	0.110	0.096	0.078	0.059	0.040
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.116	0.110	0.089	0.063	0.039	0.021	0.010
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.290	0.284	0.265	0.232	0.193	0.149	0.111
$\phi = 0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.142	0.142	0.140	0.136	0.129	0.120	0.111
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.125	0.124	0.118	0.112	0.103	0.093	0.080
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.292	0.291	0.287	0.280	0.271	0.258	0.243
$\rho_c = 0.80$								
$\phi = -0.8$	$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau$	0.007	0.007	0.004	0.005	0.006	0.004	0.002
	$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau$	0.011	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^\tau$	0.070	0.044	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\phi = -0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.173	0.144	0.081	0.032	0.013	0.010	0.007
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.202	0.086	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.460	0.382	0.210	0.062	0.009	0.000	0.000
$\phi = 0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.194	0.190	0.177	0.163	0.143	0.121	0.095
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.204	0.186	0.142	0.090	0.048	0.021	0.008
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.389	0.384	0.360	0.327	0.287	0.243	0.200
$\phi = 0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.226	0.224	0.219	0.210	0.199	0.185	0.169
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.214	0.209	0.195	0.175	0.149	0.121	0.092
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.434	0.430	0.424	0.409	0.393	0.373	0.349

Al aumentar el tamaño de la muestra, como podemos ver en las tablas 3.14 y 3.15, independientemente del signo del coeficiente ϕ , de lo próximo que está el parámetro ρ_c respecto a la unidad o de la magnitud del valor inicial, el contraste MSB_{GLS2}^{τ} produce valores de potencia ajustada superiores a los que producen los otros dos tests. El test MSB_{GLS1}^{τ} , por su parte, sufre una caída más acentuada de la potencia ajustada más acusado que cualquiera de los otros dos tests al incrementarse α . La evidencia de nuestros resultados nos permite concluir que la potencia ajustada de los contrastes analizados no es robusta cuando se produce un cambio en el valor inicial de la serie.

Tabla 3.14: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 250$. $u_t \sim \text{AR}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\phi = -0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.012	0.010	0.007	0.004	0.002	0.001	0.000
$\phi = -0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.009	0.007	0.007	0.004	0.002	0.001	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.009	0.009	0.006	0.004	0.002	0.001	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.052	0.045	0.036	0.023	0.013	0.005	0.002
$\phi = 0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.023	0.024	0.022	0.020	0.018	0.017	0.017
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.023	0.022	0.021	0.019	0.017	0.015	0.013
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.086	0.085	0.082	0.077	0.073	0.067	0.061
$\phi = 0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.031	0.031	0.031	0.030	0.031	0.030	0.030
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.028	0.028	0.027	0.028	0.027	0.026	0.026
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.101	0.100	0.100	0.099	0.098	0.096	0.094
$\rho_c = 0.95$								
$\phi = -0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.007	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.015	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.099	0.056	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000
$\phi = -0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.075	0.053	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.100	0.037	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.300	0.230	0.090	0.014	0.001	0.000	0.000
$\phi = 0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.145	0.140	0.126	0.107	0.084	0.060	0.042
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.164	0.148	0.108	0.063	0.032	0.012	0.004
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.385	0.376	0.347	0.304	0.252	0.193	0.140

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\phi = 0.8$	MSB_{OLS}^T	0.130	0.129	0.127	0.123	0.119	0.111	0.103
	MSB_{GLS1}^T	0.140	0.138	0.131	0.120	0.107	0.092	0.076
	MSB_{GLS2}^T	0.342	0.339	0.335	0.327	0.317	0.305	0.289
$\rho_c = 0.90$								
$\phi = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.071	0.052	0.020	0.003	0.001	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.150	0.018	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.412	0.322	0.121	0.013	0.000	0.000	0.000
$\phi = -0.5$	MSB_{OLS}^T	0.391	0.348	0.235	0.101	0.025	0.004	0.001
	MSB_{GLS1}^T	0.492	0.187	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.731	0.678	0.498	0.234	0.041	0.003	0.000
$\phi = 0.5$	MSB_{OLS}^T	0.487	0.481	0.465	0.436	0.398	0.354	0.297
	MSB_{GLS1}^T	0.557	0.510	0.376	0.215	0.090	0.026	0.005
	MSB_{GLS2}^T	0.779	0.772	0.754	0.721	0.674	0.610	0.536
$\phi = 0.8$	MSB_{OLS}^T	0.339	0.338	0.334	0.329	0.322	0.312	0.301
	MSB_{GLS1}^T	0.387	0.379	0.353	0.316	0.269	0.217	0.169
	MSB_{GLS2}^T	0.645	0.641	0.638	0.631	0.618	0.603	0.585
$\rho_c = 0.80$								
$\phi = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.408	0.387	0.326	0.232	0.134	0.062	0.030
	MSB_{GLS1}^T	0.515	0.178	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.655	0.607	0.495	0.328	0.130	0.018	0.001
$\phi = -0.5$	MSB_{OLS}^T	0.750	0.743	0.723	0.686	0.614	0.501	0.339
	MSB_{GLS1}^T	0.777	0.562	0.074	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.846	0.820	0.753	0.652	0.525	0.353	0.146
$\phi = 0.5$	MSB_{OLS}^T	0.815	0.814	0.809	0.803	0.795	0.784	0.769
	MSB_{GLS1}^T	0.842	0.805	0.693	0.518	0.298	0.114	0.024
	MSB_{GLS2}^T	0.906	0.902	0.894	0.883	0.863	0.841	0.811
$\phi = 0.8$	MSB_{OLS}^T	0.649	0.648	0.646	0.642	0.639	0.632	0.624
	MSB_{GLS1}^T	0.706	0.691	0.648	0.584	0.496	0.396	0.291
	MSB_{GLS2}^T	0.857	0.856	0.852	0.848	0.841	0.832	0.821

Tabla 3.15: Potencia ajustada al tamaño bajo PGD2. $T = 500$. $u_t \sim \text{AR}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\phi = -0.8$	MSB_{OLS}^T	0.004	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.008	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.052	0.034	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000
$\phi = -0.5$	MSB_{OLS}^T	0.018	0.014	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^T	0.023	0.014	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^T	0.097	0.074	0.037	0.010	0.002	0.000	0.000
$\phi = 0.5$	MSB_{OLS}^T	0.031	0.030	0.027	0.023	0.018	0.014	0.010
	MSB_{GLS1}^T	0.034	0.032	0.028	0.021	0.016	0.011	0.007
	MSB_{GLS2}^T	0.122	0.120	0.111	0.096	0.082	0.067	0.049

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\phi = 0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.034	0.034	0.033	0.031	0.031	0.029	0.028
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.037	0.036	0.034	0.033	0.031	0.029	0.027
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.126	0.125	0.124	0.122	0.119	0.116	0.111
$\rho_c = 0.95$								
$\phi = -0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.207	0.161	0.064	0.010	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.365	0.047	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.674	0.578	0.293	0.039	0.000	0.000	0.000
$\phi = -0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.447	0.397	0.265	0.114	0.024	0.002	0.000
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.591	0.206	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.825	0.776	0.603	0.291	0.049	0.001	0.000
$\phi = 0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.503	0.497	0.480	0.450	0.412	0.363	0.308
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.620	0.557	0.408	0.224	0.081	0.020	0.003
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.841	0.837	0.822	0.793	0.751	0.694	0.619
$\phi = 0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.403	0.401	0.398	0.392	0.386	0.377	0.366
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.501	0.492	0.463	0.419	0.361	0.300	0.232
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.758	0.758	0.753	0.747	0.738	0.728	0.715
$\rho_c = 0.90$								
$\phi = -0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.715	0.704	0.656	0.553	0.366	0.151	0.031
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.789	0.378	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.881	0.851	0.774	0.643	0.386	0.067	0.001
$\phi = -0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.878	0.876	0.861	0.830	0.771	0.645	0.433
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.911	0.689	0.053	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.959	0.947	0.908	0.846	0.745	0.555	0.228
$\phi = 0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.908	0.907	0.906	0.903	0.900	0.894	0.888
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.936	0.911	0.832	0.667	0.409	0.153	0.028
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.974	0.973	0.970	0.965	0.956	0.945	0.932
$\phi = 0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.825	0.825	0.826	0.824	0.822	0.820	0.816
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.883	0.875	0.851	0.810	0.747	0.660	0.562
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.957	0.957	0.956	0.955	0.953	0.950	0.947
$\rho_c = 0.80$								
$\phi = -0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.792	0.792	0.790	0.787	0.778	0.763	0.739
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.811	0.539	0.129	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.883	0.830	0.736	0.650	0.566	0.477	0.375
$\phi = -0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.934	0.933	0.928	0.923	0.915	0.909	0.9
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.942	0.722	0.427	0.014	0.000	0.000	0.000
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.974	0.956	0.890	0.815	0.745	0.674	0.599
$\phi = 0.5$	MSB_{OLS}^{τ}	0.964	0.963	0.964	0.964	0.962	0.962	0.962
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.974	0.946	0.865	0.764	0.640	0.476	0.254
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.993	0.992	0.990	0.983	0.972	0.958	0.939
$\phi = 0.8$	MSB_{OLS}^{τ}	0.941	0.941	0.941	0.940	0.940	0.940	0.940
	MSB_{GLS1}^{τ}	0.956	0.949	0.932	0.900	0.856	0.798	0.717
	MSB_{GLS2}^{τ}	0.983	0.983	0.982	0.981	0.979	0.978	0.975

3.5 Conclusiones

En este capítulo, hemos analizado las propiedades del estadístico MSB cuando se adopta la condición inicial considerada en el trabajo seminal de Elliott (1999). La nueva versión del MSB, que surge como resultado de aplicar el procedimiento de “cuasi-diferenciación” de los datos propuesto por Elliott, la hemos denominado MSB_{GLS2}^{τ} . Este contraste modificado se distingue del contraste MSB_{GLS1}^{τ} basado en el procedimiento de transformación de los datos, propuesto en Elliott *et al.* (1996), en el tratamiento de la primera observación.

En un marco estacionario local, $c < 0$, hemos derivado las distribuciones asintóticas del test MSB_{GLS2}^{τ} , así como, las de los tests MSB_{OLS}^{τ} y MSB_{GLS1}^{τ} , asumiendo dos procesos generadores de los datos. Algunas de estas distribuciones asintóticas locales, así como sus pruebas formales, son aportaciones de la tesis porque no se encuentran en la literatura. Mediante simulaciones de Monte Carlo, hemos descrito numéricamente estas distribuciones asintóticas y hemos identificado que existe una relación inversa entre la potencia de los contrastes y el tamaño del valor inicial, que hace disminuir la potencia al aumentar el valor inicial cuando nos encontramos con valores de la alternativa local muy próximos a la unidad.

Del análisis llevado a cabo de las propiedades en muestras pequeñas, podemos concluir que el nuevo test MSB_{GLS2}^{τ} presenta un tamaño empírico más conservador cuando los errores del modelo son i.i.d o siguen un proceso AR(1). Cuando los errores siguen un proceso MA(1), el test presenta un tamaño más liberal que, en términos generales, logra situarse en los niveles de tamaño del contraste MSB_{GLS1}^{τ} . Con la intención de comparar nuestra modificación del MSB, MSB_{GLS2}^{τ} , con las otras dos existentes, calculamos la potencia ajustada al tamaño de cada uno de los tests en distintos escenarios con algún tipo de autocorrelación. De esta forma, al corregir por el tamaño, obtenemos valores de potencia que son equiparables entre sí. En términos generales, podemos afirmar que el contraste MSB_{GLS2}^{τ} posee una potencia ajustada superior a la de los otros dos contrastes contemplados, especialmente, en los casos que más interés tienen en la literatura, $\phi > 0$ y $\theta < 0$.

A la vista de nuestros resultados de Monte Carlo, podemos concluir que el test MSB_{GLS2}^{τ} proporciona, en la mayoría de situaciones, valores de potencia ajustada superiores a los de los otros dos contrastes considerados, independientemente del proceso que subyace en los datos, PGD1 o PGD2. Sin embargo, no consigue eliminar la relación inversa que existe entre la potencia del test y el tamaño del valor inicial. Por este motivo, creemos necesario proseguir la investigación hasta encontrar una modificación del test MSB que sí que lo sea.

Apéndice matemático

A lo largo de este apéndice, vamos a utilizar dos resultados básicos que representamos en los dos siguientes lemas:

Lema 3.1. *Sea el proceso v_t generado en (3.7) y $v_1 = 0$. Dado que u_t cumple la Condición 3.1. Entonces, bajo $H_{1,c}$, se tiene que*

$$T^{-1/2}v_{[Ts]} \xrightarrow{d} \lambda J_c(s)$$

en donde $[\cdot]$ denota la parte entera, J_c es un proceso Ornstein-Uhlenbeck definido a partir de la ecuación estocástica diferencial $dJ_c(r) = cJ_c(r)dr + dW(r)$ con la condición inicial $J_c(0) = 0$.

Prueba del Lema 3.1: La prueba aparece en Phillips (1987b). □

Lema 3.2. *Sea el proceso v_t generado en (3.7) y v_1 satisface la Condición 3.2. Dado que u_t satisface la Condición 3.1. Entonces, bajo $H_{1,c}$, se tiene que*

$$\begin{aligned} T^{-1/2}(v_{[Ts]} - v_1) &\xrightarrow{d} \lambda [J_c(s) + (e^{cs} - 1)\xi] \\ &= \lambda M_c(s) \end{aligned}$$

con $[\cdot]$ indicando la parte entera y $J_c(r)$ un proceso de Ornstein-Uhlenbeck y $\xi \sim N(0, (-2c)^{-1})$. El término λ^2 denota la varianza a largo plazo de u_t .

Prueba del Lema 3.2: La prueba aparece en Elliott (1999). □

Prueba del Teorema 3.1: En lo que sigue, es necesario tener presente el resultado del Lema 3.1. Además, suponemos que $\hat{\lambda}^2$ cumple la Condición 3.3. Para llevar a cabo la prueba de este teorema, hemos de considerar el proceso generador de datos PGD1 definido en (3.7) en donde $v_1 = u_1$ bajo la hipótesis nula y alternativa local.

Caso 1: Primero, escribimos el modelo en forma matricial:

$$y = Z\delta + v$$

con

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_T)'$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_T)'$$

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_T)'$$

$$\delta = (\delta_0, \delta_1)'$$

siendo $z_t = (1, t)'$ para $t = 2, \dots, T$. El estimador OLS determinista es, por tanto,

$$\hat{\delta} = (Z'Z)^{-1}Z'y = \delta + (Z'Z)^{-1}Z'v$$

Debemos ajustar esta regresión como sigue para obtener la distribución del estimador $\hat{\delta}$

$$(\hat{\delta} - \delta) = \mathbf{D}_1^{-1} \{ \mathbf{D}_1^{-1} (Z'Z) \mathbf{D}_1^{-1} \}^{-1} \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_2^{-1} (Z'v)$$

donde

$$\mathbf{D}_1 \equiv \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_2 \equiv \begin{bmatrix} T^{3/2} & 0 \\ 0 & T^{5/2} \end{bmatrix}$$

Operando, se tiene que

$$\begin{aligned} (\hat{\delta} - \delta) &= \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{-3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum^T 1 & \sum^T t \\ \sum^T t & \sum^T t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{-3/2} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T^{3/2} & 0 \\ 0 & T^{5/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-3/2} & 0 \\ 0 & T^{-5/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum^T v_t \\ \sum^T tv_t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} T^{-1} \sum^T 1 & T^{-2} \sum^T t \\ T^{-2} \sum^T t & T^{-3} \sum^T t^2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} T^{3/2} & 0 \\ 0 & T^{5/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-3/2} \sum^T v_t \\ T^{-5/2} \sum^T tv_t \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{d} \begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{-3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \int J_c(r) \\ \lambda \int r J_c(r) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \int J_c(r) \\ \lambda \int r J_c(r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

utilizando “ \xrightarrow{d} ” para indicar convergencia en distribución de una secuencia de variables aleatorias reales o de funciones continuas de las variables de la sucesión. La distribución asintótica del estimador OLS de elementos deterministas viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T^{-1/2}(\hat{\delta}_0 - \delta_0) \\ \sqrt{T}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \end{bmatrix} &\xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \lambda \{ 4 \int J_c(r) - 6 \int r J_c(r) \} \\ \lambda \{ -6 \int J_c(r) + 12 \int r J_c(r) \} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda J_c^{\delta_0} \\ \lambda J_c^{\delta_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tomando estos resultados y aplicando el Teorema de la Transformación Continua (abreviado por su siglas en inglés CMT, *Continuous Mapping Theorem*) en base al Teorema Funcional Central del Límite (TFCL) recogido en el Lema 3.1, obtenemos la distribución

asintótica local del numerador del estadístico MSB:

$$\begin{aligned}
 T^{-2} \sum_{t=1}^T \hat{v}_{t-1}^2 &= T^{-2} \sum (v_{t-1} + (\delta_0 - \hat{\delta}_0) + (\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))^2 \\
 &= T^{-1} \sum (T^{-1/2}v_{t-1} + T^{-1/2}(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + T^{-1/2}(\delta_1 - \hat{\delta}_1)(t-1))^2 \\
 &\xrightarrow{d} \lambda^2 \int \left[J_c(r) + \left(-4 \int J_c(s) ds + 6 \int r J_c(s) ds \right) \right. \\
 &\quad \left. + r \left(6 \int J_c(s) ds - 12 \int s J_c(s) ds \right) \right]^2 dr \\
 &= \lambda^2 \int \left[J_c^\mu(r) - 12 \left(r - \frac{1}{2} \right) \int \left(s - \frac{1}{2} \right) J_c(s) ds \right]^2 dr \\
 &= \lambda^2 \int [J_c^\tau(r)]^2 dr.
 \end{aligned}$$

Con el estimador de la varianza a largo plazo consistente, llegamos al resultado que buscábamos:

$$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau \xrightarrow{d} \left(\int [J_c^\tau(r)]^2 dr \right)^{1/2}$$

que es el resultado en el apartado b) del Teorema 1.1.

Caso 2: Empezamos definiendo los vectores transformados resultantes de aplicar el procedimiento de “cuasi-diferenciación” GLS1 como

$$\mathbf{y}^{\bar{c}} = (\mathbf{y}_1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)\mathbf{y}_t)'$$

$$\mathbf{Z}^{\bar{c}} = (\mathbf{z}_1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)\mathbf{z}_t)'$$

con $\mathbf{z}_t = (1, t)'$ y $t = 2, \dots, T$. El modelo queda entonces como $\mathbf{y}^{\bar{c}} = \mathbf{Z}^{\bar{c}} \delta + \mathbf{v}^{\bar{c}}$. Estimamos δ por OLS:

$$\hat{\delta} = (\mathbf{Z}^{\bar{c}'} \mathbf{Z}^{\bar{c}})^{-1} \mathbf{Z}^{\bar{c}'} \mathbf{y}^{\bar{c}}$$

Desarrollando la expresión anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
 [\hat{\delta} - \delta] &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & (1 - \rho_{\bar{c}}) & \cdots & (1 - \rho_{\bar{c}}) \\ 1 & 2 - \rho_{\bar{c}} & \cdots & T - \rho_{\bar{c}}(T-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (1 - \rho_{\bar{c}}) & 2 - \rho_{\bar{c}} \\ \vdots & \vdots \\ (1 - \rho_{\bar{c}}) & T - \rho_{\bar{c}}(T-1) \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
 &\quad \begin{bmatrix} 1 & (1 - \rho_{\bar{c}}) & \cdots & (1 - \rho_{\bar{c}}) \\ 1 & 2 - \rho_{\bar{c}} & \cdots & T - \rho_{\bar{c}}(T-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - \rho_{\bar{c}}v_1 \\ \vdots \\ v_T - \rho_{\bar{c}}v_{T-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + (1 - \rho_{\bar{c}})^2(T - 1) & 1 + (1 - \rho_{\bar{c}}) \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)t \\ 1 + (1 - \rho_{\bar{c}}) \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)t & 1 + \sum^T \left((1 - \rho_{\bar{c}}L)t \right)^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} v_1 + (1 - \rho_{\bar{c}}) \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)v_t \\ v_1 + \sum^T \left((1 - \rho_{\bar{c}}L)t(1 - \rho_{\bar{c}}L)v_t \right) \end{bmatrix}$$

Ajustando la regresión debidamente, podemos escribir

$$\mathbf{D}(\hat{\delta} - \delta) = \mathbf{D}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}}) \\ = \{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\mathbf{D}^{-1}\}^{-1}\{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}})\}$$

en donde,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{T} \end{bmatrix}$$

Observamos que el primer bloque converge a

$$\{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\mathbf{D}^{-1}\} \xrightarrow{p} \mathbf{Q}$$

con \xrightarrow{p} para indicar convergencia en probabilidad y, en donde,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \bar{c} + \frac{\bar{c}^2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Es directo ver el resultado, ya que los elementos de la diagonal principal convergen como sigue:

$$1 + (1 - \rho_{\bar{c}})^2(T - 1) = 1 + o(1) \\ 1 + \sum^T \left((1 - \rho_{\bar{c}}L)t \right)^2 \xrightarrow{p} 1 + \bar{c}^2/3 - \bar{c}$$

y los elementos de la diagonal secundaria se hacen cero. Ahora, nos centramos en el segundo bloque de elementos, $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}})$:

$$\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{1/2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & (1 - \rho_{\bar{c}}) & \cdots & (1 - \rho_{\bar{c}}) \\ 1 & 2 - \rho_{\bar{c}} & \cdots & T - \rho_{\bar{c}}(T - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - \rho_{\bar{c}}v_1 \\ \vdots \\ v_T - \rho_{\bar{c}}v_{T-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 + (1 - \rho_{\bar{c}}) \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)v_t \\ v_1 + \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)t(1 - \rho_{\bar{c}}L)v_t \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} v_1 + (-\bar{c}/T) \sum^T \Delta v_t + (-\bar{c}/T)^2 \sum^T v_{t-1} \\ T^{-1/2} v_1 + \sum^T \left(\left((1 - \rho_{\bar{c}})t + \rho_{\bar{c}} \right) \left(\Delta v_t + (1 - \rho_{\bar{c}})v_{t-1} \right) \right) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{aligned} &v_1 - \bar{c}T^{-1}v_T + \bar{c}^2T^{-2} \sum^T v_{t-1} \\ &T^{-1/2}v_1 - \bar{c}T^{-3/2}(Tv_T - \sum^T v_{t-1}) + \bar{c}^2T^{-5/2} \sum^T tv_{t-1} \\ &+ T^{-1/2}v_T + \bar{c}T^{-3/2}v_T - \bar{c}T^{-3/2} \sum^T v_{t-1} - \bar{c}^2T^{-5/2} \sum^T v_{t-1} \end{aligned} \right]$$

Nos damos cuenta que, mientras el elemento $\{1, 1\}$ es $(\hat{\delta}_0 - \delta_0) = v_1 + o_p(1)$, el elemento $\{2, 1\}$ converge en distribución a un proceso funcional que denominaremos $\lambda J_{c,\bar{c}}^{\delta_1}$ definido como $J_{c,\bar{c}}^{\delta_1} = (1 - \bar{c})J_c(1) + \bar{c}^2 \int s J_c(s) ds$. Así, podemos escribir

$$T^{1/2}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \xrightarrow{d} a^{-1} J_{c,\bar{c}}^{\delta_1}$$

con $a = (1 - \bar{c} + \bar{c}^2/3)$. Combinando los resultados anteriores y aplicando el TFCL se tiene que la distribución asintótica local del numerador del MSB está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} T^{-2} \sum \hat{v}_{t-1}^2 &= T^{-1} \sum \left(T^{-1/2}v_{t-1} + T^{-1/2}(\delta_0 - \hat{\delta}_0) + T^{1/2}(\delta_1 - \hat{\delta}_1) \frac{(t-1)}{T} \right)^2 \\ &\xrightarrow{d} \lambda^2 \int [J_{c,\bar{c}}^\tau(r)]^2 dr \end{aligned}$$

definiendo $J_{c,\bar{c}}^\tau = J_c(r) - r \{ \bar{c}^* J_c(1) + 3(1 - \bar{c}^*) \int s J_c(r) dr \}$ en donde $\bar{c}^* = (1 - \bar{c}) / (1 - \bar{c} + \bar{c}^2/3)$.

Suponiendo un estimador de la varianza a largo plazo consistente, a partir de los resultados anteriores y utilizando el CMT, obtenemos la distribución asintótica local del contraste MSB:

$$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^\tau \xrightarrow{d} \left(\int [J_{c,\bar{c}}^\tau(r)]^2 dr \right)^{1/2}$$

Caso 3: En este caso, podemos interpretar que esta prueba corresponde al caso en el que cometemos un error de especificación en el sentido que, habiendo generado los datos con el proceso PGD1 utilizamos el contraste MSB_{GLS2} , que ha sido diseñado cuando el modelo que genera los datos es PGD2. Comenzamos definiendo los vectores transformados GLS2 como:

$$\begin{aligned} y^{\bar{c}} &= [(1 - \rho_{\bar{c}}^2)^{1/2}y_1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)y_t]' \\ Z^{\bar{c}} &= [(1 - \rho_{\bar{c}}^2)^{1/2}z_1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)z_t]' \end{aligned}$$

con $z_t = (1, t)'$ y para $t = 2, \dots, T$. Nótese que la única diferencia con respecto a los vectores del procedimiento GLS1 es el tratamiento de la primera observación.

Escribimos el modelo transformado como:

$$y^{\bar{c}} = Z^{\bar{c}}\delta + v^{\bar{c}}$$

y, estimamos δ por OLS:

$$\hat{\delta} = (Z^{\bar{c}'}Z^{\bar{c}})^{-1}Z^{\bar{c}'}y^{\bar{c}}$$

En este caso, la matriz que consideramos para ajustar la regresión anterior es:

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{T} \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces la siguiente regresión:

$$[\hat{\delta} - \delta] = \bar{\mathbf{D}}^{-1} \{ \bar{\mathbf{D}}^{-1} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z}^c) \bar{\mathbf{D}}^{-1} \}^{-1} \bar{\mathbf{D}}^{-1} (\mathbf{Z}' \mathbf{v}^c)$$

Examinando individualmente los elementos de la expresión anterior, tenemos que el primer elemento del lado derecho de la ecuación converge como:

$$\begin{aligned} \{ \bar{\mathbf{D}}^{-1} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z}^c) \bar{\mathbf{D}}^{-1} \} &\xrightarrow{p} \begin{bmatrix} \bar{c}^2 - 2\bar{c} & \bar{c}^2/2 - \bar{c} \\ \bar{c}^2/2 - \bar{c} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \\ &= \bar{\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

En este caso,

$$(\mathbf{Z}' \mathbf{Z}^c) = \begin{bmatrix} (1 - \rho_{\bar{c}}^2) + (-\bar{c}/T)^2(T-1) & (1 - \rho_{\bar{c}}^2) + (-\bar{c}/T) \sum_{t=2}^T (t - \rho_{\bar{c}}(t-1)) \\ (1 - \rho_{\bar{c}}^2) + (-\bar{c}/T) \sum_{t=2}^T (t - \rho_{\bar{c}}(t-1)) & (1 - \rho_{\bar{c}}^2) + \sum_{t=2}^T (t - \rho_{\bar{c}}(t-1))^2 \end{bmatrix}$$

y, al ajustar cada término, obtenemos

$$\begin{aligned} T(1 - \rho_{\bar{c}}^2) + (-\bar{c}/T)^2(T-1) &\xrightarrow{p} \bar{c}^2 - 2\bar{c} \\ (1 - \rho_{\bar{c}}^2) + (-\bar{c}/T) \sum_{t=2}^T (t - \rho_{\bar{c}}(t-1)) &\xrightarrow{p} \bar{c}^2/2 - \bar{c} \\ T^{-1}(1 - \rho_{\bar{c}}^2) + \sum_{t=2}^T (t - \rho_{\bar{c}}(t-1))^2 &\xrightarrow{p} 1 + \bar{c}^2/3 - \bar{c} \equiv \mathbf{a} \end{aligned}$$

Para calcular la inversa de la matriz no diagonal $\bar{\mathbf{Q}}$, denotamos el determinante de la matriz $|\bar{\mathbf{Q}}|$ y definimos la matriz inversa como

$$\bar{\mathbf{Q}}^{-1} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & g_3 \end{bmatrix}$$

en donde,

$$\begin{aligned} g_1 &= (1 + \bar{c}^2/3 - \bar{c})/|\bar{\mathbf{Q}}| \\ g_2 &= -(\bar{c}^2/2 - \bar{c})/|\bar{\mathbf{Q}}| \\ g_3 &= (\bar{c}^2 - 2\bar{c})/|\bar{\mathbf{Q}}| \end{aligned}$$

Utilizando algo de álgebra llegamos a

$$\bar{\mathbf{Q}}^{-1} = \frac{2}{\bar{c}^2 - 6\bar{c} + 12} \begin{bmatrix} \frac{2(\bar{c}^2 + 3 - 3\bar{c})}{\bar{c}^2 - 2\bar{c}} & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4(\bar{c}^2 - 3\bar{c} + 3)}{\bar{c}(\bar{c} - 2)(\bar{c}^2 - 6\bar{c} + 12)} & -\frac{6}{(\bar{c}^2 - 6\bar{c} + 12)} \\ -\frac{6}{(\bar{c}^2 - 6\bar{c} + 12)} & \frac{12}{(\bar{c}^2 - 6\bar{c} + 12)} \end{bmatrix}$$

que difiere de la matriz inversa presentada en Elliott y Müller (2006) y Harvey *et al.* (2009), la cual coincide con la derivada en Ng y Perron (2001, Teorema 1).

La distribución del segundo bloque, sigue a continuación:

$$\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{Z}\bar{c}'\mathbf{v}\bar{c}) \xrightarrow{d} \bar{H}$$

en donde,

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \lambda\{\bar{c}^2 \int J_c(r)dr - \bar{c}J_c(1)\} \\ \lambda\{(1 - \bar{c})J_c(1) + \bar{c}^2 \int rJ_c(r)dr\} \end{bmatrix}$$

El proceso detallado se expone a continuación:

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{Z}\bar{c}'\mathbf{v}\bar{c}) \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{1/2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (1 - \rho_{\bar{c}}^2)^{1/2} & (1 - \rho_{\bar{c}}) & \cdots & (1 - \rho_{\bar{c}}) \\ (1 - \rho_{\bar{c}}^2)^{1/2} & 2 - \rho_{\bar{c}} & \cdots & T - \rho_{\bar{c}}(T - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - \rho_{\bar{c}}v_1 \\ \vdots \\ v_T - \rho_{\bar{c}}v_{T-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{T}(1 - \rho_{\bar{c}}^2)^{1/2}v_1 + (1 - \rho_{\bar{c}})T^{1/2} \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)v_t \\ (1 - \rho_{\bar{c}}^2)^{1/2}T^{-1/2}v_1 + T^{-1/2} \sum^T \left((1 - \rho_{\bar{c}}L)t(1 - \rho_{\bar{c}}L)v_t \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El elemento $\{1, 1\}$ presenta la siguiente distribución:

$$v_1(-2\bar{c})^{1/2} - \lambda \left\{ \bar{c}J_c(1) - \bar{c}^2 \int J_c(r)dr \right\}$$

por su parte, el elemento $\{2, 1\}$ converge en distribución a la siguiente expresión:

$$\lambda \left\{ (1 - \bar{c})J_c(1) + \bar{c}^2 \int rJ_c(r)dr \right\}$$

Juntando ambos resultados, obtenemos la distribución de los estimadores de los elementos deterministas como:

$$\bar{\mathbf{D}}(\hat{\delta} - \delta) \xrightarrow{d} \bar{Q}^{-1}\bar{H}$$

y, en particular,

$$\begin{aligned} & T^{-1/2}(\hat{\delta}_0 - \delta_0) \xrightarrow{d} g_1\bar{H}_1 + g_2\bar{H}_2 \\ &= g_1v_1(-2\bar{c})^{1/2} + g_1\lambda \left(\bar{c}^2 \int J_c(r)dr - \bar{c}J_c(1) \right) \\ &+ g_2\lambda \left((1 - \bar{c})J_c(1) + \bar{c}^2 \int rJ_c(r)dr \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{T}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) &\xrightarrow{d} g_2\bar{H}_1 + g_3\bar{H}_2 \\ &= g_2v_1(-2\bar{c})^{1/2} + g_2\lambda \left(\bar{c}^2 \int J_c(r)dr - \bar{c}J_c(1) \right) \\ &\quad + g_3\lambda \left((1 - \bar{c})J_c(1) + \bar{c}^2 \int rJ_c(r)dr \right) \end{aligned}$$

Finalmente, combinando los resultados anteriores obtenemos la convergencia en el límite de la serie destendenciada, bajo la hipótesis alternativa local:

$$\begin{aligned} T^{-1/2}\hat{v}_t &= T^{-1/2}v_t - T^{-1/2}(\hat{\delta}_0 - \delta_0) - [rT]T^{-1/2}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \\ &\xrightarrow{d} \lambda \left\{ J_c(r) - \left(\bar{c}^2 \int J_c(s)ds - \bar{c}J_c(1) \right) [g_1 + r g_2] \right. \\ &\quad \left. - \left((1 - \bar{c})J_c(1) + \bar{c}^2 \int sJ_c(s)ds \right) [g_2 + r g_3] \right\} - [g_1 + r g_2]v_1(-2\bar{c})^{1/2} \\ &= \bar{J}_{c,\bar{c}}^r(r) \end{aligned}$$

El resultado que buscamos se obtiene directamente al aplicar el CMT al resultado anterior:

$$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^r \xrightarrow{d} \left(\int \bar{J}_{c,\bar{c}}^r(r)^2 dr \right)^{1/2}$$

□

Prueba del Teorema 3.2:

Para la prueba del teorema, consideramos el TFCL no condicionado representado en el Lema 3.2.

Caso 4: Partimos de los mismos estimadores OLS de δ vistos en el Caso 1 y, escribimos:

$$[\hat{\delta} - \delta - Lv_1] = (Z'Z)^{-1}[Z'v - (Z'Z)Lv_1]$$

con $\delta = (\delta_0, \delta_1)'$, $L = [1, 0]'$, $Z = (z_1, z_2, \dots, z_T)'$ con $z_t = (1, t)'$ y $v = (v_1, v_2, \dots, v_T)'$. Ajustamos la expresión con las matrices $\mathbf{D}_1 = \text{diag}(T^{1/2}, T^{3/2})$ y $\mathbf{D}_2 = \text{diag}(T^{3/2}, T^{5/2})$, y tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1[\hat{\delta} - \delta - Lv_1] &= \mathbf{D}_1(Z'Z)^{-1}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2^{-1}[Z'v - (Z'Z)Lv_1] \\ &= \{\mathbf{D}_1^{-1}(Z'Z)\mathbf{D}_1^{-1}\}^{-1}\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{D}_2\{\mathbf{D}_2^{-1}[Z'v - (Z'Z)Lv_1]\} \end{aligned}$$

Analizando por partes, consideramos el primer elemento:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{D}_1^{-1}(Z'Z)\mathbf{D}_1^{-1}\} &= \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{T} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum^T 1 & \sum^T t \\ \sum^T t & \sum^T t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{T} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix}^{-1} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1} \sum^T 1 & T^{-2} \sum^T t \\ T^{-2} \sum^T t & T^{-3} \sum^T t^2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} = Q \end{aligned}$$

Es directo ver que:

$$\mathbf{D}_1(Z'Z)^{-1}\mathbf{D}_1 = \{\mathbf{D}_1^{-1}(Z'Z)\mathbf{D}_1^{-1}\}^{-1} \rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$$

Consideremos el segundo elemento:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2^{-1}[Z'v - (Z'Z)Lv_1] &= \begin{bmatrix} T^{3/2} & 0 \\ 0 & T^{5/2} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \sum^T v_t \\ \sum^T tv_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum^T 1 & \sum^T t \\ \sum^T t & \sum^T t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 \right\} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-3/2} \sum^T (v_t - v_1) \\ T^{-5/2} \sum^T t(v_t - v_1) \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \lambda \int M_c(s) ds \\ \lambda \int s M_c(s) ds \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en donde $M_c(s)$ ha sido definido en el Lema 3.2. A partir de los resultados anteriores, con algo de álgebra matricial, se obtiene directamente su distribución asintótica local como:

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2}(\hat{\delta}_0 - \delta_0 - v_1) \\ \sqrt{T}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \lambda M_c^{\delta_0} \\ \lambda M_c^{\delta_1} \end{bmatrix}$$

con $M_c^{\delta_0} = \{4 \int M_c(s) ds - 6 \int s M_c(s) ds\}$ y $M_c^{\delta_1} = \{-6 \int M_c(s) ds + 12 \int s M_c(s) ds\}$.

Utilizando el resultado de arriba y el TFCL no condicionado, se tiene que:

$$\begin{aligned} T^{-1/2}\hat{v}_t &= T^{-1/2}(v_t - v_1) - T^{-1/2}(\hat{\delta}_0 - \delta_0 - v_1) - rT^{1/2}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \\ &\xrightarrow{d} \lambda M_c(r) - 4\lambda \int M_c(s) ds + 6\lambda \int s M_c(s) ds + 6r\lambda \int M_c(s) ds \\ &\quad - 12r\lambda \int s M_c(s) ds \\ &= \lambda \left\{ M_c^\mu(r) - 12 \left(r - \frac{1}{2} \right) \int \left(s - \frac{1}{2} \right) M_c(s) ds \right\} \\ &= \lambda M_c^r(r) \end{aligned}$$

en donde $M_c^\mu(r) = M_c(r) - \int M_c(s)$.

Si aplicamos el CMT, el numerador del estadístico MSB se distribuye asintóticamente en un contexto local como:

$$T^{-2} \sum^T \hat{v}_t^2 \xrightarrow{d} \lambda^2 \int M_c^\tau(r)^2 dr$$

La distribución asintótica local del contraste sigue directamente:

$$\text{MSB}_{\text{OLS}}^\tau \xrightarrow{d} \left(\int M_c^\tau(r)^2 dr \right)^{1/2}$$

Caso 5: Este resultado se puede interpretar como el efecto que tiene, en el comportamiento asintótico local del MSB_{GLS1} , especificar erróneamente el modelo generador PGD2 en lugar del PGD1. Así, definimos los vectores de los datos transformados según el procedimiento GLS1 como:

$$\mathbf{y}^{\bar{c}} = ((y_1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)y_t)')$$

$$\mathbf{Z}^{\bar{c}} = ((z_1, (1 - \rho_{\bar{c}}L)z_t)')$$

con $z_t = (1, t)'$ y para $t = 2, \dots, T$. El modelo transformado se escribe como $\mathbf{y}^{\bar{c}} = \delta \mathbf{Z}^{\bar{c}} + \mathbf{v}^{\bar{c}}$. Estimando por OLS, escribimos:

$$[\hat{\delta} - \delta - Lv_1] = [\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}}]^{-1}[\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}} - (\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})Lv_1],$$

ajustando con la matriz $\mathbf{D} = \text{diag}(1, \sqrt{T})$, se tiene que:

$$[\hat{\delta} - \delta - Lv_1] = \mathbf{D}^{-1} \left\{ \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\mathbf{D}^{-1} \right\}^{-1} \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}} - (\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})Lv_1]$$

Considerando el primer término:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\mathbf{D}^{-1} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 - \rho_{\bar{c}} & \cdots & 1 - \rho_{\bar{c}} \\ 1 & 2 - \rho_{\bar{c}} & \cdots & T - \rho_{\bar{c}}(T - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 - \rho_{\bar{c}} & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 - \rho_{\bar{c}} & T - \rho_{\bar{c}}(T - 1) & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1/2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + (1 - \rho_{\bar{c}})^2(T - 1) & 1 + (1 - \rho_{\bar{c}}) \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)t \\ 1 + (1 - \rho_{\bar{c}}) \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)t & 1 + \sum^T ((1 - \rho_{\bar{c}}L)t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1/2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + (-\bar{c}/T)^2(T - 1) \\ T^{-1/2} \left\{ 1 + (-\bar{c}/T)^2 \sum^T t + (-\bar{c}/T)(T - 1)\rho_{\bar{c}} \right\} \\ T^{-1/2} \left\{ 1 + (-\bar{c}/T)^2 \sum^T t + (-\bar{c}/T)(T - 1)\rho_{\bar{c}} \right\} \\ T^{-1} \left\{ 1 + (1 - \rho_{\bar{c}})^2 \sum^T t^2 + T\rho_{\bar{c}}^2 + 2\rho_{\bar{c}}(1 - \rho_{\bar{c}}) \sum^T t \right\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\left\{ \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\mathbf{D}^{-1} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{a} = 1 - \bar{c} + \bar{c}^2/3$, y teniendo en cuenta que $(1 - \rho_{\bar{c}}L)t = (1 - \rho_{\bar{c}})t + \rho_{\bar{c}}$. Por lo tanto, se sigue directamente

$$\left\{ \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\mathbf{D}^{-1} \right\}^{-1} \rightarrow \mathbf{Q}^{-1}$$

El segundo elemento queda como:

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}^{-1} \left\{ \mathbf{Z}^{\bar{c}'} \mathbf{v}^{\bar{c}} - (\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})L\mathbf{v}_1 \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1/2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 - \rho_{\bar{c}} & \cdots & 1 - \rho_{\bar{c}} \\ 1 & 2 - \rho_{\bar{c}} & \cdots & T - \rho_{\bar{c}}(T - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - \rho_{\bar{c}}v_1 \\ \vdots \\ v_T - \rho_{\bar{c}}v_{T-1} \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. - \begin{bmatrix} 1 + (1 - \rho_{\bar{c}})^2(T - 1) & 1 + (1 - \rho_{\bar{c}}) \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)t \\ 1 + (1 - \rho_{\bar{c}}) \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)t & 1 + \sum^T ((1 - \rho_{\bar{c}}L)t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 \right\} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 + (1 - \rho_{\bar{c}}) \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)v_t - v_1 - (1 - \rho_{\bar{c}})^2 \sum^T v_1 \\ T^{-1/2} \left\{ v_1 + \sum^T (1 - \rho_{\bar{c}}L)t(1 - \rho_{\bar{c}}L)v_t - v_1 + (1 - \rho_{\bar{c}})^2 \sum^T tv_1 + (1 - \rho_{\bar{c}})\rho_{\bar{c}} \sum^T v_1 \right\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en donde,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\bar{c}T^{-1}(v_T - v_1) + \bar{c}^2T^{-2} \sum^T (v_t - v_1) = o_p(1) \\ \eta_2 &= T^{-1/2}v_1 - \bar{c}T^{-3/2} \left(T(v_T - v_1) - \sum^T (v_{t-1} - v_1) \right) + T^{-1/2}(v_T - v_1) \\ & \quad + \bar{c}T^{-3/2}(v_T - v_1) + \bar{c}^2T^{-5/2} \sum^T tv_{t-1} - \bar{c}T^{-3/2} \sum^T v_{t-1} - \bar{c}^2T^{-5/2} \sum^T v_{t-1} - T^{-1/2}v_1 \\ & \quad - \bar{c}^2T^{-5/2} \sum^T tv_1 - \bar{c}T^{-3/2} \sum^T v_1 - \bar{c}^2T^{-5/2} \sum^T v_1 \\ &= (1 - \bar{c})T^{-1/2}(v_T - v_1) + \bar{c}^2T^{-5/2} \sum^T (v_{t-1} - v_1) + o_p(1) \end{aligned}$$

La distribución de este segundo elemento viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{D}^{-1} \left\{ \mathbf{Z}^{\bar{c}'} \mathbf{v}^{\bar{c}} - (\mathbf{Z}^{\bar{c}'} \mathbf{Z}^{\bar{c}}) L v_1 \right\} \xrightarrow{d} R$$

con

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \left((1 - \bar{c}) M_c(1) + \bar{c}^2 \int s M_c(s) ds \right) \end{bmatrix}$$

A partir de los resultados anteriores, escribimos la siguiente distribución asintótica local:

$$\mathbf{D}[\hat{\delta} - \delta - L v_1] \xrightarrow{d} Q^{-1} R$$

en particular,

$$(\hat{\delta}_0 - \delta_0 - v_1) \xrightarrow{p} 0$$

$$\sqrt{T}(\hat{\delta}_1 - \delta_1) \xrightarrow{d} \lambda M_{c, \bar{c}}^{\delta_1}$$

con $M_{c, \bar{c}}^{\delta_1} = ((1 - \bar{c}) M_c(1) + \bar{c}^2 \int s M_c(s) ds) / (1 + \bar{c}^2/3 - \bar{c})$.

Combinando los resultados anteriores y aplicando el resultado del Lema 3.2, se llega directamente al siguiente resultado asintótico local:

$$\begin{aligned} T^{-1/2} \hat{v}_t &= T^{-1/2} (v_t - v_1) - [rT] T^{-1/2} (\hat{\delta}_1 - \delta_1) \\ &\Rightarrow \lambda M_c(r) - r \lambda M_{c, \bar{c}}^{\delta_1} \\ &= \lambda \left\{ M_c(r) - r \left(\bar{c}^* M_c(1) - 3(1 - \bar{c}^*) \int s M_c(s) ds \right) \right\} \\ &= \lambda M_{c, \bar{c}}^r(r) \end{aligned}$$

en donde $\bar{c}^* := (1 - \bar{c}) / (1 + \bar{c}^2/3 - \bar{c})$.

El resultado que buscamos sigue directamente de aplicar el CMT al resultado anterior:

$$\text{MSB}_{\text{GLS1}}^r \xrightarrow{d} \left(\int M_{c, \bar{c}}^r(r)^2 dr \right)^{1/2}$$

Caso 6: En primer lugar, definimos los vectores transformados GLS2 como en el Caso 3:

$$\mathbf{y}^{\bar{c}} = \left((1 - \rho_{\bar{c}}^2)^{1/2} y_1, (1 - \rho_{\bar{c}} L) y_t \right)'$$

$$\mathbf{Z}^{\bar{c}} = \left((1 - \rho_{\bar{c}}^2)^{1/2} z_1, (1 - \rho_{\bar{c}} L) z_t \right)'$$

con $z_t = (1, t)'$ para $t = 2, \dots, T$. Escribimos el modelo como:

$$\mathbf{y}^{\bar{c}} = \mathbf{Z}^{\bar{c}} \delta + \mathbf{v}^{\bar{c}}$$

y, estimamos el componente determinista δ por OLS, por lo que:

$$\hat{\delta} = (\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})^{-1}\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{y}^{\bar{c}}$$

$$\hat{\delta} - \delta - Lv_1 = (\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})^{-1} \left[\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}} - (\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})Lv_1 \right]$$

en este caso, la matriz utilizada para ajustar la regresión anterior es $\bar{\mathbf{D}} = \text{diag}(T^{-1/2}, T^{1/2})$ y, queda como

$$[\hat{\delta} - \delta - Lv_1] = \bar{\mathbf{D}}^{-1} \{ \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\bar{\mathbf{D}}^{-1} \}^{-1} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \left[\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}} - (\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})Lv_1 \right]$$

Examinando individualmente los elementos de la expresión anterior, tenemos que el primer elemento del lado derecho de la ecuación presenta el mismo limite en probabilidad que en el Caso 3 de la prueba del Teorema 3.1. Entonces, $\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\bar{\mathbf{D}}^{-1} \xrightarrow{p} \bar{Q}$ y, por tanto,

$$\left\{ \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})\bar{\mathbf{D}}^{-1} \right\}^{-1} \xrightarrow{p} \bar{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 & g_3 \end{bmatrix}$$

Recordemos que los elementos g_1, g_2, g_3 se definían respectivamente como:

$$g_1 = (1 + \bar{c}^2/3 - \bar{c})/|\bar{Q}|$$

$$g_2 = -(\bar{c}^2/2 - \bar{c})/|\bar{Q}|$$

$$g_3 = (\bar{c}^2 - 2\bar{c})/|\bar{Q}|$$

en donde $|\bar{Q}|$ representaba el determinante de la matriz \bar{Q} . Con algo de álgebra obteníamos que:

$$\bar{Q}^{-1} = \frac{2}{\bar{c}^2 - 6\bar{c} + 12} \begin{bmatrix} \frac{2(\bar{c}^2 + 3 - 3\bar{c})}{\bar{c}^2 - 2\bar{c}} & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4(\bar{c}^2 - 3\bar{c} + 3)}{\bar{c}(\bar{c} - 2)(\bar{c}^2 - 6\bar{c} + 12)} & -\frac{6}{(\bar{c}^2 - 6\bar{c} + 12)} \\ -\frac{6}{(\bar{c}^2 - 6\bar{c} + 12)} & \frac{12}{(\bar{c}^2 - 6\bar{c} + 12)} \end{bmatrix}$$

En cuanto al segundo elemento del lado derecho:

$$\bar{\mathbf{D}}^{-1}[\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{v}^{\bar{c}} - (\mathbf{Z}^{\bar{c}'}\mathbf{Z}^{\bar{c}})Lv_1] = \begin{bmatrix} \sqrt{T}h_{1,c,\bar{c}} \\ T^{-1/2}h_{2,c,\bar{c}} \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \lambda\bar{R}$$

Teniendo en cuenta $(1 - \rho_{\bar{c}}L)v_t = \Delta v_t + (1 - \rho_{\bar{c}})v_{t-1}$, el primer elemento del vector se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \sqrt{T}h_{1,c,\bar{c}} &= \sqrt{T} \left\{ (1 - \rho_{\bar{c}}^2)v_1 + (1 - \rho_{\bar{c}}) \sum (1 - \rho_{\bar{c}}L)v_t - (1 - \rho_{\bar{c}}^2)v_1 - (T - 1)(1 - \rho_{\bar{c}})^2v_1 \right\} \\ &= -\bar{c}/T^{-1/2} \sum \Delta v_t + (-\bar{c}/T)^2 T^{1/2} \sum v_{t-1} - T^{1/2}(T - 1)(-\bar{c}/T)^2 v_1 \\ &= -\bar{c}T^{-1/2}(v_T - v_1) + \bar{c}^2 T^{-3/2} \sum (v_{t-1} - v_1) - \bar{c}^2 T^{-1/2}v_1 \\ &\xrightarrow{d} \lambda \left[\bar{c}^2 \int M_c(s)ds - \bar{c}M_c(1) \right] + o_p(1) \end{aligned}$$

que coincide con el resultado de Elliott (1999). Además, considerando $(1 - \rho_{\bar{c}}L)t = (1 - \rho_{\bar{c}})t + \rho_{\bar{c}}$ y $\sum_{t=2}^T t\Delta v_t = T(v_T - v_1) - \sum_{t=2}^T (v_{t-1} - v_1)$, el segundo elemento queda así:

$$\begin{aligned} T^{-1/2}h_{2,c,\bar{c}} &= T^{-1/2} \left\{ (1 - \rho_{\bar{c}}^2)v_1 + (-\bar{c}/T) \sum t\Delta v_t + (\bar{c}/T)^2 \sum tv_{t-1} + \sum \Delta v_t \right. \\ &\quad + (\bar{c}/T) \sum \Delta v_t - (\bar{c}/T) \sum v_{t-1} - (\bar{c}/T)^2 \sum v_{t-1} - ((-2\bar{c}/T) - (\bar{c}/T)^2 \\ &\quad \left. + \bar{c}^2 T^{-2} \sum t - \bar{c}/T(T-1) - (\bar{c}/T)^2(T-1)) v_1 \right\} \\ &= (1 - \bar{c})T^{-1/2}(v_T - v_1) + \bar{c}^2 T^{-5/2} \sum t(v_{t-1} - v_1) + o_p(1) \\ &\xrightarrow{d} \lambda \left[(1 - \bar{c})M_c(1) + \bar{c}^2 \int sM_c(s)ds \right] \end{aligned}$$

Finalmente, podemos escribir

$$\bar{\mathbf{D}}(\hat{\delta} - \delta - Lv_1) \xrightarrow{d} \bar{Q}^{-1}\bar{R} \equiv \begin{bmatrix} \lambda \bar{M}_{c,\bar{c}}^{\delta_0} \\ \lambda \bar{M}_{c,\bar{c}}^{\delta_1} \end{bmatrix}$$

en donde $\bar{M}_{c,\bar{c}}^{\delta_0} = g_1(\bar{c}^2 \int M_c(s)ds - \bar{c}M_c(1)) + g_2((1 - \bar{c})M_c(1) + \bar{c}^2 \int sM_c(s)ds)$ y $\bar{M}_{c,\bar{c}}^{\delta_1} = g_2(\bar{c}^2 \int M_c(s)ds - \bar{c}M_c(1)) + g_3((1 - \bar{c})M_c(1) + \bar{c}^2 \int sM_c(s)ds)$.

La serie libre de elementos deterministas converge bajo la hipótesis local, como se expresa a continuación:

$$\begin{aligned} T^{-1/2}\hat{v}_t &\xrightarrow{d} \lambda \left(M_c(r) - \bar{M}_{c,\bar{c}}^{\delta_0} - r\bar{M}_{c,\bar{c}}^{\delta_1} \right) \\ &= \lambda \bar{M}_{c,\bar{c}}^{\tau}(r) \end{aligned}$$

Si combinamos los resultados previos y aplicamos el CMT, llegamos al resultado que estamos buscando:

$$\text{MSB}_{\text{GLS2}}^{\tau} \xrightarrow{d} \left(\int \bar{M}_{c,\bar{c}}^{\tau}(r)^2 dr \right)^{1/2}$$

□

Apéndice de tablas

Tabla 3.16: Tamaño asintótico y potencia asintótica local de MSB_{OLS}^{τ} , MSB_{GLS1}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} bajo PGD1

c	MSB_{OLS}^{τ}	MSB_{GLS1}^{τ}	MSB_{GLS2}^{τ}
0	0.050	0.050	0.042
0.1	0.050	0.051	0.042
0.2	0.050	0.051	0.042
0.3	0.050	0.051	0.042
0.4	0.050	0.051	0.042
0.5	0.050	0.051	0.042
0.6	0.050	0.051	0.042
0.7	0.050	0.052	0.043
0.8	0.051	0.053	0.043
0.9	0.051	0.053	0.043
1	0.051	0.053	0.043
1.1	0.052	0.054	0.044
1.2	0.052	0.055	0.044
1.3	0.052	0.056	0.045
1.4	0.053	0.056	0.045
1.5	0.053	0.057	0.046
1.6	0.054	0.058	0.046
1.7	0.055	0.059	0.047
1.8	0.056	0.060	0.048
1.9	0.057	0.061	0.049
2	0.058	0.062	0.049
2.1	0.059	0.063	0.050
2.2	0.060	0.064	0.051
2.3	0.060	0.065	0.052
2.4	0.061	0.066	0.053
2.5	0.062	0.068	0.053
2.6	0.063	0.069	0.054
2.7	0.064	0.070	0.055
2.8	0.065	0.072	0.057
2.9	0.067	0.073	0.058
3	0.068	0.075	0.059
3.1	0.069	0.076	0.060
3.2	0.070	0.077	0.061
3.3	0.072	0.079	0.063
3.4	0.074	0.080	0.064
3.5	0.075	0.081	0.065
3.6	0.076	0.083	0.066
3.7	0.078	0.085	0.068
3.8	0.079	0.086	0.069
3.9	0.080	0.088	0.070
4	0.082	0.090	0.071
4.1	0.083	0.092	0.072
4.2	0.085	0.094	0.073
4.3	0.087	0.097	0.074
4.4	0.088	0.098	0.076
4.5	0.089	0.100	0.077
4.6	0.091	0.102	0.078
4.7	0.093	0.104	0.080
4.8	0.095	0.107	0.081
4.9	0.097	0.109	0.083
5	0.099	0.111	0.085
5.1	0.101	0.113	0.086
5.2	0.102	0.116	0.088

c	MSB_{OLS}^{τ}	MSB_{GLS1}^{τ}	MSB_{GLS2}^{τ}
5.3	0.104	0.118	0.089
5.4	0.106	0.121	0.091
5.5	0.109	0.124	0.093
5.6	0.111	0.126	0.095
5.7	0.114	0.129	0.097
5.8	0.116	0.131	0.099
5.9	0.118	0.134	0.101
6	0.120	0.136	0.103
6.1	0.122	0.140	0.105
6.2	0.124	0.143	0.107
6.3	0.126	0.146	0.109
6.4	0.129	0.149	0.111
6.5	0.131	0.152	0.113
6.6	0.134	0.155	0.115
6.7	0.136	0.158	0.117
6.8	0.139	0.160	0.119
6.9	0.140	0.164	0.122
7	0.143	0.167	0.125
7.1	0.146	0.170	0.127
7.2	0.148	0.174	0.130
7.3	0.152	0.178	0.132
7.4	0.154	0.181	0.135
7.5	0.157	0.184	0.137
7.6	0.160	0.188	0.140
7.7	0.163	0.191	0.142
7.8	0.166	0.195	0.145
7.9	0.168	0.199	0.147
8	0.171	0.203	0.150
8.1	0.174	0.208	0.152
8.2	0.178	0.212	0.155
8.3	0.180	0.217	0.157
8.4	0.184	0.221	0.160
8.5	0.187	0.225	0.163
8.6	0.190	0.229	0.166
8.7	0.193	0.234	0.169
8.8	0.196	0.237	0.172
8.9	0.199	0.242	0.174
9	0.202	0.246	0.178
9.1	0.205	0.252	0.181
9.2	0.208	0.257	0.183
9.3	0.212	0.262	0.187
9.4	0.215	0.266	0.190
9.5	0.219	0.270	0.193
9.6	0.222	0.275	0.196
9.7	0.226	0.280	0.199
9.8	0.230	0.286	0.203
9.9	0.233	0.291	0.207
10	0.237	0.296	0.211
10.1	0.241	0.301	0.214
10.2	0.245	0.306	0.218
10.3	0.250	0.312	0.221
10.4	0.253	0.317	0.225
10.5	0.258	0.323	0.229
10.6	0.262	0.329	0.232
10.7	0.266	0.334	0.235
10.8	0.270	0.339	0.239
10.9	0.274	0.344	0.242
11	0.278	0.350	0.246
11.1	0.282	0.355	0.250
11.2	0.285	0.361	0.254
11.3	0.289	0.367	0.258
11.4	0.292	0.372	0.261
11.5	0.297	0.377	0.265
11.6	0.301	0.383	0.269
11.7	0.307	0.389	0.273

c	MSB _{OLS} ^τ	MSB _{GLS1} ^τ	MSB _{GLS2} ^τ
11.8	0.311	0.395	0.276
11.9	0.315	0.401	0.280
12	0.320	0.407	0.284
12.1	0.323	0.414	0.289
12.2	0.327	0.420	0.292
12.3	0.332	0.425	0.297
12.4	0.338	0.431	0.301
12.5	0.342	0.437	0.304
12.6	0.346	0.442	0.309
12.7	0.351	0.449	0.313
12.8	0.357	0.455	0.318
12.9	0.361	0.461	0.322
13	0.365	0.469	0.328
13.1	0.370	0.475	0.331
13.2	0.375	0.481	0.336
13.3	0.379	0.487	0.340
13.4	0.384	0.493	0.344
13.5	0.390	0.499	0.348
13.6	0.394	0.505	0.352
13.7	0.399	0.511	0.356
13.8	0.404	0.517	0.361
13.9	0.410	0.524	0.366
14	0.414	0.530	0.370
14.1	0.420	0.537	0.375
14.2	0.425	0.543	0.381
14.3	0.430	0.550	0.386
14.4	0.435	0.556	0.391
14.5	0.440	0.563	0.395
14.6	0.446	0.569	0.400
14.7	0.451	0.575	0.405
14.8	0.457	0.581	0.409
14.9	0.462	0.585	0.414
15	0.467	0.592	0.419
15.1	0.472	0.597	0.425
15.2	0.478	0.604	0.429
15.3	0.484	0.609	0.434
15.4	0.490	0.614	0.439
15.5	0.495	0.620	0.445
15.6	0.500	0.626	0.450
15.7	0.505	0.632	0.456
15.8	0.511	0.638	0.460
15.9	0.516	0.645	0.466
16	0.522	0.650	0.471
16.1	0.527	0.655	0.476
16.2	0.533	0.661	0.481
16.3	0.537	0.666	0.485
16.4	0.542	0.671	0.490
16.5	0.548	0.676	0.495
16.6	0.551	0.684	0.500
16.7	0.557	0.689	0.505
16.8	0.562	0.694	0.510
16.9	0.567	0.701	0.515
17	0.572	0.706	0.519
17.1	0.577	0.711	0.524
17.2	0.582	0.717	0.528
17.3	0.587	0.722	0.535
17.4	0.592	0.727	0.540
17.5	0.597	0.732	0.545
17.6	0.602	0.737	0.550
17.7	0.607	0.742	0.555
17.8	0.613	0.747	0.561
17.9	0.618	0.752	0.566
18	0.624	0.757	0.571
18.1	0.629	0.762	0.576
18.2	0.634	0.767	0.581

c	MSB_{OLS}^{τ}	MSB_{GLS1}^{τ}	MSB_{GLS2}^{τ}
18.3	0.639	0.772	0.585
18.4	0.645	0.776	0.590
18.5	0.650	0.780	0.595
18.6	0.655	0.785	0.600
18.7	0.660	0.790	0.604
18.8	0.665	0.795	0.609
18.9	0.669	0.798	0.614
19	0.674	0.803	0.619
19.1	0.678	0.807	0.624
19.2	0.683	0.812	0.628
19.3	0.687	0.816	0.633
19.4	0.692	0.820	0.638
19.5	0.697	0.824	0.642
19.6	0.701	0.829	0.647
19.7	0.705	0.832	0.652
19.8	0.710	0.836	0.656
19.9	0.715	0.839	0.660
20	0.720	0.843	0.664

Tabla 3.17: Potencia asintótica local de MSB_{OLS}^{τ} , MSB_{GLS1}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} bajo PGD2

c	α	MSB_{OLS}^{τ}	MSB_{GLS1}^{τ}	MSB_{GLS2}^{τ}
-10	0	0.237	0.296	0.254
-10	0.1	0.237	0.293	0.253
-10	0.2	0.237	0.289	0.252
-10	0.3	0.237	0.285	0.250
-10	0.4	0.235	0.279	0.249
-10	0.5	0.233	0.272	0.246
-10	0.6	0.230	0.264	0.242
-10	0.7	0.227	0.253	0.238
-10	0.8	0.223	0.241	0.234
-10	0.9	0.220	0.228	0.229
-10	1	0.216	0.215	0.223
-10	1.1	0.211	0.203	0.216
-10	1.2	0.205	0.190	0.209
-10	1.3	0.199	0.174	0.203
-10	1.4	0.194	0.162	0.196
-10	1.5	0.188	0.148	0.189
-10	1.6	0.183	0.135	0.183
-10	1.7	0.176	0.122	0.176
-10	1.8	0.171	0.108	0.168
-10	1.9	0.164	0.096	0.160
-10	2	0.158	0.084	0.153
-10	2.1	0.153	0.074	0.145
-10	2.2	0.146	0.063	0.137
-10	2.3	0.140	0.054	0.130
-10	2.4	0.134	0.046	0.121
-10	2.5	0.127	0.038	0.114
-10	2.6	0.121	0.032	0.106
-10	2.7	0.114	0.027	0.098
-10	2.8	0.108	0.022	0.091
-10	2.9	0.100	0.019	0.084
-10	3	0.093	0.016	0.077
-10	3.1	0.087	0.013	0.070
-10	3.2	0.081	0.010	0.064
-10	3.3	0.075	0.007	0.058
-10	3.4	0.069	0.006	0.053
-10	3.5	0.064	0.005	0.047
-10	3.6	0.058	0.004	0.043
-10	3.7	0.053	0.003	0.038
-10	3.8	0.049	0.003	0.034
-10	3.9	0.044	0.002	0.030

c	α	MSB_{OLS}^{τ}	MSB_{GLS1}^{τ}	MSB_{GLS2}^{τ}
-10	4	0.041	0.001	0.026
-10	4.1	0.037	0.001	0.021
-10	4.2	0.033	0.001	0.019
-10	4.3	0.030	0.001	0.017
-10	4.4	0.026	0.001	0.014
-10	4.5	0.024	0.000	0.013
-10	4.6	0.021	0.000	0.011
-10	4.7	0.018	0.000	0.009
-10	4.8	0.016	0.000	0.008
-10	4.9	0.015	0.000	0.006
-10	5	0.012	0.000	0.005
-10	5.1	0.011	0.000	0.005
-10	5.2	0.009	0.000	0.004
-10	5.3	0.008	0.000	0.004
-10	5.4	0.007	0.000	0.003
-10	5.5	0.006	0.000	0.002
-10	5.6	0.006	0.000	0.002
-10	5.7	0.005	0.000	0.002
-10	5.8	0.004	0.000	0.001
-10	5.9	0.003	0.000	0.001
-10	6	0.003	0.000	0.001
-15	0	0.467	0.592	0.498
-15	0.1	0.466	0.588	0.498
-15	0.2	0.465	0.581	0.497
-15	0.3	0.465	0.570	0.496
-15	0.4	0.462	0.556	0.492
-15	0.5	0.459	0.540	0.487
-15	0.6	0.456	0.519	0.483
-15	0.7	0.451	0.495	0.478
-15	0.8	0.447	0.467	0.471
-15	0.9	0.443	0.440	0.463
-15	1	0.438	0.411	0.456
-15	1.1	0.432	0.381	0.447
-15	1.2	0.424	0.350	0.438
-15	1.3	0.418	0.317	0.428
-15	1.4	0.410	0.287	0.417
-15	1.5	0.402	0.259	0.406
-15	1.6	0.394	0.230	0.394
-15	1.7	0.384	0.202	0.381
-15	1.8	0.374	0.179	0.367
-15	1.9	0.364	0.154	0.355
-15	2	0.352	0.132	0.343
-15	2.1	0.343	0.110	0.328
-15	2.2	0.333	0.092	0.315
-15	2.3	0.324	0.076	0.300
-15	2.4	0.313	0.061	0.285
-15	2.5	0.302	0.048	0.270
-15	2.6	0.289	0.038	0.255
-15	2.7	0.278	0.030	0.239
-15	2.8	0.265	0.023	0.225
-15	2.9	0.253	0.019	0.210
-15	3	0.241	0.014	0.195
-15	3.1	0.229	0.010	0.183
-15	3.2	0.218	0.007	0.169
-15	3.3	0.205	0.005	0.156
-15	3.4	0.193	0.004	0.141
-15	3.5	0.184	0.003	0.128
-15	3.6	0.173	0.002	0.116
-15	3.7	0.161	0.001	0.105
-15	3.8	0.150	0.001	0.095
-15	3.9	0.137	0.001	0.084
-15	4	0.128	0.001	0.075
-15	4.1	0.119	0.000	0.067
-15	4.2	0.109	0.000	0.059
-15	4.3	0.100	0.000	0.052

c	α	MSB_{OLS}^{τ}	MSB_{GLS1}^{τ}	MSB_{GLS2}^{τ}
-15	4.4	0.092	0.000	0.045
-15	4.5	0.084	0.000	0.039
-15	4.6	0.076	0.000	0.033
-15	4.7	0.069	0.000	0.028
-15	4.8	0.063	0.000	0.024
-15	4.9	0.056	0.000	0.020
-15	5	0.050	0.000	0.017
-15	5.1	0.045	0.000	0.014
-15	5.2	0.040	0.000	0.012
-15	5.3	0.035	0.000	0.009
-15	5.4	0.031	0.000	0.007
-15	5.5	0.027	0.000	0.006
-15	5.6	0.024	0.000	0.005
-15	5.7	0.021	0.000	0.004
-15	5.8	0.018	0.000	0.003
-15	5.9	0.015	0.000	0.003
-15	6	0.013	0.000	0.002
-20	0	0.720	0.843	0.753
-20	0.1	0.720	0.843	0.752
-20	0.2	0.719	0.837	0.752
-20	0.3	0.718	0.826	0.751
-20	0.4	0.717	0.813	0.748
-20	0.5	0.714	0.795	0.747
-20	0.6	0.712	0.775	0.743
-20	0.7	0.708	0.748	0.739
-20	0.8	0.705	0.718	0.735
-20	0.9	0.703	0.684	0.728
-20	1	0.697	0.646	0.721
-20	1.1	0.692	0.607	0.714
-20	1.2	0.687	0.563	0.706
-20	1.3	0.680	0.517	0.697
-20	1.4	0.675	0.472	0.687
-20	1.5	0.669	0.425	0.676
-20	1.6	0.662	0.377	0.666
-20	1.7	0.655	0.333	0.654
-20	1.8	0.646	0.292	0.643
-20	1.9	0.637	0.251	0.630
-20	2	0.627	0.215	0.615
-20	2.1	0.617	0.182	0.601
-20	2.2	0.606	0.151	0.585
-20	2.3	0.595	0.122	0.569
-20	2.4	0.584	0.099	0.552
-20	2.5	0.571	0.077	0.535
-20	2.6	0.559	0.058	0.516
-20	2.7	0.545	0.044	0.495
-20	2.8	0.531	0.033	0.476
-20	2.9	0.519	0.025	0.456
-20	3	0.505	0.018	0.435
-20	3.1	0.491	0.012	0.415
-20	3.2	0.477	0.008	0.394
-20	3.3	0.460	0.006	0.371
-20	3.4	0.444	0.004	0.350
-20	3.5	0.427	0.003	0.329
-20	3.6	0.413	0.002	0.307
-20	3.7	0.397	0.001	0.286
-20	3.8	0.382	0.001	0.265
-20	3.9	0.366	0.001	0.245
-20	4	0.350	0.000	0.227
-20	4.1	0.334	0.000	0.208
-20	4.2	0.316	0.000	0.189
-20	4.3	0.300	0.000	0.171
-20	4.4	0.285	0.000	0.153
-20	4.5	0.269	0.000	0.136
-20	4.6	0.255	0.000	0.120
-20	4.7	0.239	0.000	0.106

c	α	MSB_{OLS}^{τ}	MSB_{GLS1}^{τ}	MSB_{GLS2}^{τ}
-20	4.8	0.223	0.000	0.092
-20	4.9	0.208	0.000	0.081
-20	5	0.195	0.000	0.070
-20	5.1	0.181	0.000	0.061
-20	5.2	0.167	0.000	0.053
-20	5.3	0.153	0.000	0.044
-20	5.4	0.139	0.000	0.038
-20	5.5	0.126	0.000	0.031
-20	5.6	0.116	0.000	0.025
-20	5.7	0.104	0.000	0.021
-20	5.8	0.095	0.000	0.017
-20	5.9	0.085	0.000	0.014
-20	6	0.077	0.000	0.011

Capítulo 4

Una versión robusta al valor inicial del estadístico de contraste MSB

Resumen

En el Capítulo 3 hemos analizado en profundidad las propiedades asintóticas y de muestras finitas de tres versiones del contraste de raíz unitaria MSB, que se diferenciaban básicamente en el procedimiento empleado para eliminar los elementos deterministas de la serie. Extraíamos dos conclusiones principales: primero, que la nueva versión MSB_{GLS2}^7 produce por lo general potencias superiores a las de los otros dos contrastes y, segundo, que pese a haber incrementado sustancialmente la potencia del test, no se ha solucionado el problema del hundimiento de la potencia al incrementar el tamaño del valor inicial. En este capítulo, por tanto, nos centramos en desarrollar una nueva versión del MSB basada en un nuevo mecanismo de transformación de los datos que permite al test obtener potencias elevadas y relativamente robustas a cambios en la magnitud del valor inicial. Vamos a derivar las distribuciones asintóticas del nuevo test MSB en un marco local y presentaremos sistemáticamente los resultados de simulación obtenidos mediante técnicas de Monte Carlo. Finalizaremos el capítulo, poniendo en relación las propiedades del nuevo contraste MSB con las de una selección de los contrastes más robustos y que mayor atención han tenido.

4.1 Introducción

Como se ha visto en el capítulo anterior, el valor de la condición inicial afecta significativamente a la potencia de las tres versiones del contraste MSB consideradas en dicho capítulo. En concreto, se ha demostrado que conforme la magnitud del valor inicial crece la potencia va decreciendo hasta llegar a cero.

Aunque para el contraste MSB lo que se ha visto en el Capítulo 3 es nuevo, resultados similares se han obtenido para otros contrastes en la literatura. Para el contraste puntual óptimo (un elemento de la envolvente) Elliott (1999), Müller y Elliott (2003) y Elliott y Müller (2006) derivan los resultados tras especificar una distribución de probabilidad para el valor inicial; demuestran que si la varianza de esa distribución a priori es finita entonces la función de potencia tiene la pauta decreciente comentada; pero que si la varianza se hace grande y tiende a infinito, entonces la pauta se torna creciente.

Por su parte, Harvey y Leybourne (2005, 2006) y Harvey *et al.* (2009) estudian la influencia de la observación inicial sobre la potencia de dos versiones del contraste de Dickey-Fuller ampliado (abreviado DF de aquí en adelante). Las dos versiones son el resultado de la forma adoptada para eliminar los elementos deterministas: OLS y GLS. Llamaremos a estas dos versiones: DF_{OLS} y DF_{GLS} .

Un hecho relevante que condiciona las propuestas de estos autores, que luego comentaremos, es que cuando el valor inicial es pequeño, la potencia del contraste DF_{GLS} supera a la del DF_{OLS} , mientras que, cuando el tamaño de la observación inicial se hace grande, la potencia del DF_{OLS} crece y supera a la del DF_{GLS} , la cual va decreciendo con el valor inicial hasta llegar a cero.

El objetivo, por tanto, en las dos corrientes comentadas, es encontrar un contraste que tenga una potencia alta y que, al mismo tiempo, dicha potencia no se vea afectada por el tamaño del valor inicial; es decir, que sea robusto respecto a ese tamaño.

Este capítulo persigue entonces un objetivo en la misma dirección: encontrar una versión del test MSB que tenga una potencia relativamente alta y que sea robusta al tamaño del valor inicial. La propuesta se basa en una idea simple: tratar de eliminar de cada observación la influencia del valor inicial suponiendo un valor del parámetro de interés bajo la hipótesis alternativa local.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la Sección 4.2, hacemos una revisión de las propuestas de contrastes robustos que se han hecho dentro de las dos corrientes comentadas. En la Sección 4.3, se define la nueva versión del contraste MSB que se propone, y se derivan analíticamente sus propiedades asintóticas bajo la hipótesis alternativa local. A partir de éstas, caracterizamos numéricamente las distribuciones asintóticas mediante simulaciones de Monte Carlo y las comparamos con aquellas de los contrastes MSB_{OLS}^{τ} , MSB_{GLS1}^{τ} y MSB_{GLS2}^{τ} , derivadas en el capítulo anterior. Utilizando métodos de Monte Carlo, en la Sección 4.4, se estudia la potencia ajustada al tamaño en muestras finitas de la nueva versión del MSB. En la Sección 4.5, la comparación se hace con las propuestas comentadas en la Sección 4.2. Por último, las conclusiones se recogen en la Sección 4.6.

4.2 Revisión de la literatura

Hemos hablado de dos grandes corrientes que se han seguido para analizar el efecto sobre la potencia de los contrastes de un cambio en la observación inicial y para definir un contraste que sea robusto respecto a ese tamaño del valor inicial. La primera corriente está basada en el contraste puntual óptimo y la segunda en la utilización de diferentes versiones del contraste DF.

La primera corriente arranca en Elliott (1999), el cual extiende la metodología de Elliott *et al.* (1996) y muestra que no existe un contraste que asintóticamente sea el uniformemente más potente. En su artículo seminal, Elliott propone, por un lado, un nuevo contraste basado en un estimador simétrico ponderado, que en el límite tiene una potencia óptima en algún punto de la hipótesis alternativa y casi óptimo en cualquier otro punto; y, por el otro, deriva una familia de contrastes para la cual, la envolvente de máxima potencia que se puede alcanzar empleando este tipo de modelos alternativos es inferior a la que se puede obtener considerando los modelos de Elliott *et al.* (1996).

Este trabajo se extiende en Müller y Elliott (2003) y Elliott y Müller (2006). Su propuesta es un contraste de la razón de verosimilitud tras elegir un valor concreto del parámetro de interés bajo la hipótesis alternativa local. Lo que distingue la propuesta de estos autores es que en ella asumen una distribución de probabilidad a priori para el valor inicial cuya varianza depende de un parámetro κ .

El trabajo de Müller y Elliott (2003) propone una familia de contrastes óptimos que maximizan un criterio de potencia caracterizado por ser un promedio ponderado con respecto a la observación inicial que es de orden $O(T^{1/2})$. En este trabajo, demuestran que esta familia de contrastes óptimos posee una estrecha relación con los contrastes de raíz unitaria más utilizados, ya sea porque son miembros de ella o porque existe cierta relación con algún miembro de ella (a lo que denominan “casi optimalidad”). Estas relaciones vienen caracterizadas por unas ponderaciones implícitas que varían dependiendo de la observación inicial y de la propia construcción del contraste. La principal conclusión que se puede extraer de este trabajo es que los resultados atractivos de la metodología propuesta invitan a utilizar este nuevo estadístico que es asintóticamente óptimo $Q(\bar{c}, \kappa)$ y, que nosotros denominamos ME. Este test depende de dos parámetros:

\bar{c} , que elige el valor concreto bajo la hipótesis alternativa y, κ , que se utiliza para definir la varianza. Müller y Elliott (2003) derivan la distribución asintótica de este contraste en su Teorema 3 y demuestran que cuando κ toma un valor finito la potencia decrece con el tamaño del valor inicial, mientras que si $\kappa \rightarrow \infty$ entonces la potencia cambia a una pauta creciente.

Para evitar esta dependencia, Elliott y Müller (2006) demuestran que es posible encontrar un valor de κ , que depende de \bar{c} , para el que el contraste $Q(\bar{c}, \kappa)$ se hace robusto respecto al valor inicial. En concreto, para un modelo con constante y tendencia lineal, el valor de κ que hace que el contraste $Q(\bar{c}, \kappa)$ sea robusto es $\kappa_* = 3.968$. En lo que sigue, denotamos este contraste $Q(\bar{c}, \kappa_*)$ como EM. Concluyen su trabajo diciendo que los investigadores aplicados no pueden obviar la influencia de la condición inicial en la potencia de los contrastes de raíz unitaria y, sugieren la utilización del contraste que ellos desarrollan por el funcionamiento estable cuando falta información sobre la magnitud de la observación inicial.

Como ya se ha indicado, la segunda corriente abarca una serie de estrategias en las que se combina el contraste DF_{OLS} con otros contrastes. La razón de que el contraste DF_{OLS} tenga un papel pivotal se debe a que, como ya hemos indicado, aunque su potencia es baja cuando el valor inicial es pequeño, cuando este valor se va haciendo grande, la potencia del DF_{OLS} crece también y no sigue la pauta decreciente comentada para la mayor parte de los otros contrastes.

Harvey y Leybourne (2005) proponen un contraste que es un promedio de los contrastes DF_{OLS} y DF_{GLS} . La ponderación es una función exponencial (los autores destacan que puede ser de otro tipo) de la desviación de la primera observación respecto a una tendencia lineal estimada. Pese a que esta estimación no es consistente, los autores comentan las razones que justifican su uso. El resultado es un contraste que mejora la baja potencia del DF_{OLS} cuando el valor inicial es pequeño, pero que es robusto e incluso muestra una pauta creciente de su potencia cuando el tamaño de la observación inicial se hace mayor. En lo que sigue, nos referimos a este contraste por HL₀₅.

Harvey y Leybourne (2006) proponen promediar el contraste DF_{OLS} y el contraste puntual óptimo $Q(\bar{c}, \kappa_*)$ de Elliott y Müller (2006). La forma de ponderar es similar a la comentada anteriormente y se llega a un contraste con una potencia similar a la del contraste-promedio anterior. A este contraste, lo denominamos HL₀₆.

Por último, Harvey *et al.* (2009) proponen combinar los contrastes DF_{OLS} y DF_{GLS} pero no promediando, sino utilizando una estrategia que llaman “unión de rechazos”. En primer lugar, se contrasta la hipótesis nula utilizando el contraste DF_{GLS} (1ª etapa), y si la hipótesis nula no se rechaza, entonces se contrasta esa hipótesis utilizando el contraste DF_{OLS} (2ª etapa). La hipótesis nula es rechazada si H_0 se rechaza en cualquiera de las dos etapas; en otro caso se mantiene. Un aspecto importante del proceso resultante es que el tamaño empírico es mayor que el tamaño teórico adoptado, por lo que proponen modificar los puntos críticos mediante un ejercicio de simulación. El contraste resultante mejora la potencia del contraste DF_{OLS} cuando el valor inicial es pequeño y evita la pauta decreciente cuando ese tamaño se va haciendo grande. A lo largo de este documento, nos referiremos a este contraste como UR_{SA}.

Por lo tanto, tenemos cuatro propuestas de contrastes con una potencia razonable y que son relativamente robustos respecto al tamaño del valor inicial. Este capítulo está dedicado a derivar las propiedades de una quinta propuesta, basada en el uso del contraste MSB, y compararla con las cuatro comentadas.

4.3 Una versión robusta del estadístico de contraste MSB

En este trabajo, se considera el siguiente modelo general:

$$\begin{aligned} y_t &= d_t + v_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ v_t &= \rho_c v_{t-1} + u_t, \quad t = 2, 3, \dots, T \end{aligned} \tag{4.1}$$

en donde $\rho_c = 1 - cT^{-1}$, $c > 0$, y $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. La serie observada y_t se puede descomponer en una parte determinista y un componente estocástico. En (4.1), la parte determinista viene representada por $d_t = z_t' \delta_t$ siendo $z_t = (1, t, \dots, t^p)'$ el vector de elementos deterministas y $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p)'$. En este capítulo vamos a considerar el caso en el que $z_t = (1, t)'$, esto es, el modelo generador contiene un elemento constante y una tendencia lineal. El parámetro α se utiliza para representar la magnitud del valor inicial y λ se define en la condición que se presenta a continuación. Nuevamente, los resultados para el caso en el que el modelo no incluyera el término de la tendencia lineal se derivan como una extensión directa de los resultados que presentamos a continuación.

En este modelo, el término de error satisface la misma condición que en los capítulos precedentes:

Condición 4.1. *Se define el término de error $\{u_t\}$ como una secuencia de términos estocásticos que cumple las condiciones necesarias para ser un proceso lineal estable e invertible en ε_t : (a) $u_t = \psi(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ con $\psi(1)^2 > 0$ y $\sum_{j=0}^{\infty} j|\psi_j| < \infty$. (b) El proceso estocástico $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y $E|\varepsilon_t|^\nu < k < \infty$ para algún $\nu \geq 4$.*

Los parámetros de varianza a corto y largo plazo están representados por σ^2 y λ^2 , respectivamente.

Comentario 4.1. Este supuesto implica que el término de error es un proceso lineal estándar en la literatura como se puede ver en Müller y Elliott (2003) y Elliott y Müller (2006), entre otros.

Condición 4.2. *Sea el valor inicial v_1 generado a partir de $v_1 = \alpha(\lambda^2/(1 - \rho_c^2))^{1/2}$ siendo $\rho_c = 1 - c/T$, $c > 0$. Bajo la hipótesis nula ($c = 0$), consideramos $v_1 = 0$ como en la hipótesis asumida, por ejemplo, en Müller y Elliott (2003).*

Comentario 4.2. El supuesto establecido para la primera observación v_1 es consistente con el análisis llevado a cabo, entre otros, en Müller y Elliott (2003) y Harvey *et al.* (2012).

Vamos a plantear el siguiente contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 : c &= 0 \quad (\rho_c = 1) \\ H_{1,c} : c &> 0 \quad (\rho_c = 1 - cT^{-1} < 1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nuestra propuesta se centra en un contexto alternativo local ($c > 0$) y parte del siguiente modelo, que escribimos en forma matricial:

$$y = Z\delta + v \tag{4.3}$$

en donde,

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \xi_2 + \rho_c^1 v_1 \\ \vdots \\ \xi_T + \rho_c^{T-1} v_1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

cuyo elemento t-ésimo queda como:

$$v_t = \xi_t + F_c(t)v_1 \quad (4.5)$$

con $\xi_t = \sum_{j=2}^t \rho_c^{j-2} u_{t-j+2}$ y $F_c(t) = \rho_c^{t-1}$ para $t = 1, 2, \dots, T$. En forma matricial,

$$v = \xi + F_c v_1 \quad (4.6)$$

En la expresión anterior, se ve como tanto el valor inicial v_1 como el parámetro local c influyen en el proceso. Nuestro objetivo es, por tanto, eliminar la influencia de dicho valor inicial y trabajar con un elemento que posee una distribución ya conocida. El escenario ideal es en el que se conoce el parámetro local c y, por tanto, F_c , y en donde eliminar la influencia del componente inicial se consigue restando la observación inicial en la expresión anterior quedando la serie transformada como:

$$\begin{aligned} y_t^* &= z_t' \delta + v_t - F_c(t)y_1 = z_t' \delta + \xi_t + F_c(t)v_1 - F_c(t)(z_1' \delta + v_1) \\ &= z_t' \delta + \xi_t + F_c(t)v_1 - F_c(t)z_1' \delta - F_c(t)v_1 \\ &= (z_t' - F_c(t)z_1') \delta + \xi_t \end{aligned} \quad (4.7)$$

Sin embargo, en la práctica no se conoce F_c , y sólo se puede realizar una aproximación mediante $F_{\bar{c}} = \rho_{\bar{c}}^{t-1}$. La serie transformada queda entonces como $y_t^* = y_t - F_{\bar{c}}(t)y_1$ para $t = 1, 2, \dots, T$. Para llegar al estadístico MSB, se va a definir:

$$\begin{aligned} \hat{v}^* &= My^* \\ &= M(Z\delta + v - F_{\bar{c}}y_1) \\ &= \xi - Z(Z'Z)^{-1}Z'\xi + [F_c - F_{\bar{c}}]v_1 - Z(Z'Z)^{-1}Z'[F_c - F_{\bar{c}}]v_1 \\ &\quad - F_{\bar{c}}z_1'\delta + Z(Z'Z)^{-1}Z'F_{\bar{c}}z_1'\delta \end{aligned} \quad (4.8)$$

en donde $M = I_T - Z(Z'Z)^{-1}Z'$ con I_T la matriz identidad. Más detalles del procedimiento de transformación se pueden encontrar en el Apéndice matemático.

El estadístico del contraste MSB, para el caso en el que el modelo (4.1) contiene un elemento constante y una tendencia lineal, se define como:

$$\text{NMSB}_{\bar{c}}^T = \left(\frac{T^{-2} \sum (\hat{v}_t^*)^2}{\hat{\lambda}^2} \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

en donde \hat{v}_t^* representa la serie de datos transformada sin elementos deterministas y $\hat{\lambda}^2$ denota el estimador de la varianza a largo plazo, que en los desarrollos que siguen, se supone que cumple la siguiente condición:

Condición 4.3. Bajo la hipótesis nula ($c = 0$) y alternativa local ($c > 0$), $\hat{\lambda}^2 \xrightarrow{P} \lambda^2$.

El teorema que a continuación se enuncia, establece la distribución asintótica local para el nuevo estadístico MSB:

Teorema 4.1. Sea $\{y_t\}$ generada de acuerdo a (4.1) y Condición 4.2. Bajo $H_{1,c}$, utilizando el resultado del Lema 4.1, se tiene que

$$\text{NMSB}_{\bar{c}}^{\tau} \xrightarrow{d} \left(\int [N_c^{\tau}(r)]^2 dr \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

en donde $N_c^{\tau}(r) = J_c^{\tau}(r) + \alpha\lambda(2c)^{-1/2}G_{c,\bar{c}}^{\tau}(r)$, $J_c^{\tau}(r) = J_c^{\mu}(r) - 12(s-1/2) \int (r-1/2)J_c(r)dr$, $J_c^{\mu}(r) = J_c(r) - \int J_c(r)dr$, $G_{c,\bar{c}}^{\tau}(r) = G_c^{\mu}(r) - 12(s-1/2) \int (r-1/2)G_c(r)dr$, $G_c^{\mu}(r) = G_c(r) - \int G_c(r)dr$. Además, J_c define un proceso Ornstein-Uhlenbeck y $G_c(s) = (e^{-cs} - e^{-\bar{c}s})$.

Prueba: ver Apéndice matemático.

Comentario 4.3. Inmediatamente se observa que la distribución obtenida depende de los siguiente parámetros: α , c , \bar{c} y λ , en donde α indica la escala implícita de la condición inicial, c es el parámetro de localización local de raíz unitaria, \bar{c} es un parámetro que suponemos constante y fijo, y λ es la raíz cuadrada de la varianza a largo plazo (λ^2).

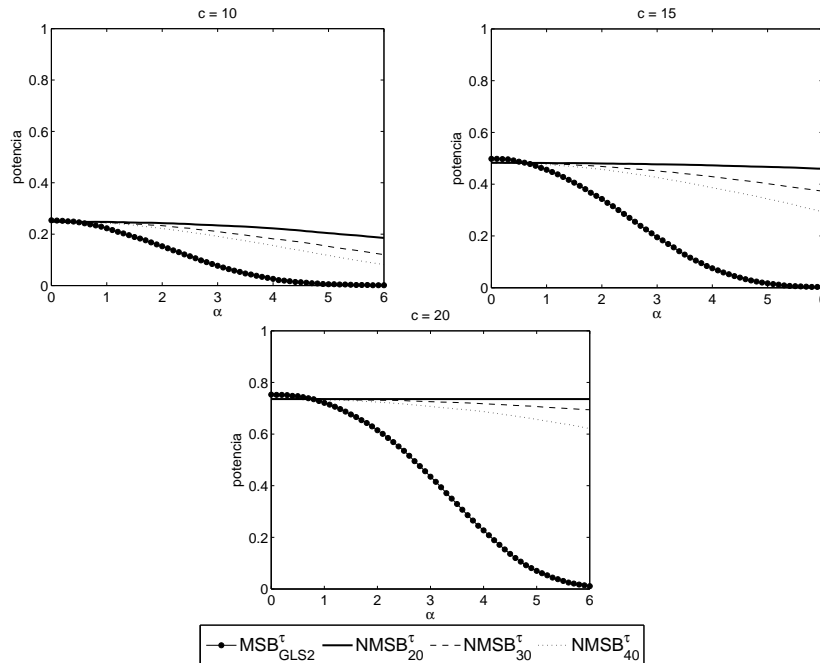
Comentario 4.4. Para el caso $c = 0$, la distribución asintótica del contraste NMSB coincide con la enunciada en el apartado a) del Teorema 1.1, porque $G_c \rightarrow 0$ y $J_c \rightarrow W$, en donde, W denota un proceso de Wiener estándar¹.

La Figura 4.1 ilustra numéricamente la distribución local de las diferentes versiones del contraste NMSB que difieren en el parámetro \bar{c} empleado²: NMSB_{20}^{τ} , NMSB_{30}^{τ} y NMSB_{40}^{τ} así como la del contraste $\text{MSB}_{\text{GLS2}}^{\tau}$. Estas distribuciones se han caracterizado utilizando simulaciones de Monte Carlo en la que se ha aproximado un proceso de Wiener con una variable aleatoria estándar normal y 1000 pasos. Nuestros programas se han basado en 20000 simulaciones. Los valores que hemos considerado son $c = (10, 15, 20)$ y $\alpha = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Como se puede ver en dicha figura, en términos generales, la relación inversa entre potencia del test y tamaño del valor inicial tiende a desaparecer para el nuevo contraste NMSB, a medida que c se hace más grande. En particular, observamos que el test NMSB_{20}^{τ} produce una curva de potencia muy poco sensible a cambios en el tamaño del valor inicial y que, además, gana robustez a medida que c aumenta, como podíamos esperar en un principio. Si comparamos ésta con las curvas de potencia de los contrastes NMSB_{30}^{τ} y NMSB_{40}^{τ} , así como con la del test $\text{MSB}_{\text{GLS2}}^{\tau}$, se ve que la versión basada en $\bar{c} = 20$ mejora sustancialmente el resultado del contraste. Por ejemplo, en el caso que $c = 15$ ($\rho_c = 0.985$), pese a que el test $\text{MSB}_{\text{GLS2}}^{\tau}$ muestra una potencia más elevada en el origen, la curva de potencia del NMSB_{20}^{τ} es relativamente más plana en todo el rango de valores de α . Por su parte, el contraste $\text{MSB}_{\text{GLS2}}^{\tau}$ presenta un decrecimiento claro desde el punto de origen. En el caso $c = 20$ ($\rho_c = 0.98$), el test $\text{MSB}_{\text{GLS2}}^{\tau}$ vuelve a producir una mayor potencia en el origen, pero sigue presentando una caída a medida que α aumenta. En cambio, la potencia que produce el nuevo test NMSB_{20}^{τ} es completamente robusta a cambios en el valor inicial. Los

¹La distribución correspondiente al modelo que contiene un elemento constante se deriva directamente y, por ello, se omite de la demostración.

²De las simulaciones realizadas a parte, podemos concluir que los resultados son similares a partir de $\bar{c} \geq 40$.

Figura 4.1: Potencia asintótica local de NMSB y MSB_{GLS2} 

otros dos tests, NMSB_{30}^{τ} y NMSB_{40}^{τ} , presentan unas curvas de potencia que, aún presentando una ligera caída con α , mejoran en términos de robustez la del $\text{MSB}_{\text{GLS2}}^{\tau}$.

Finalmente, podemos identificar una relación directa entre el valor elegido de \bar{c} y el del parámetro local c que consiste en que la potencia producida por el test disminuye siempre que $|\bar{c} - c| > 0$ al aumentar α . Por este motivo y, como nuestro interés se centra en el marco local, consideramos $\bar{c} = (20, 30, 40)$, aunque somos conscientes de la necesidad de encontrar, si es posible, un valor óptimo de \bar{c} que minimice esa diferencia y maximice la potencia del test.

4.4 Simulaciones de Monte Carlo en muestras pequeñas

En la sección anterior, hemos visto que la potencia asintótica del contraste NMSB es razonable y relativamente robusta a cambios en el tamaño del valor inicial de la serie. En esta sección, vamos a emplear simulaciones de Monte Carlo para evaluar cómo se ven afectadas las propiedades del contraste en muestras pequeñas cuando se producen cambios en el valor inicial.

Consideramos el modelo generador definido en (4.1) en el cual fijamos $\delta_0 = \delta_1 = 0$ sin pérdida de generalidad³. Los valores analizados son $\rho_c = (0.99, 0.95, 0.90, 0.80)$. Además, vamos a considerar que la perturbación $\{u_t\}$ del modelo presenta la siguiente estructura de autocorrelación:

$$(1 + \phi L)u_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t \quad (4.11)$$

³Tanto el contraste MSB como el NMSB son numéricamente independientes del valor de estos parámetros.

con L indicando el operador de retardos $Lx_t = x_{t-1}$ y, en donde, hemos considerado los siguientes valores para el caso en el que el error siga un proceso MA(1), $\theta = (-0.8, -0.5, 0, 0.5, 0.8)$, y cuando siga un proceso AR(1), $\phi = (-0.8, -0.5, 0.5, 0.8)$. El caso i.i.d se obtiene fijando $\theta = \phi = 0$. El término ε_t se ha generado mediante la función *rndKMn* de GAUSS con la semilla establecida en 290373 para controlar su generación. Hemos fijado el nivel de significación nominal en el 5% en todas nuestras simulaciones. Todos los programas se han basado en 20000 repeticiones. Los resultados se han tabulado para tres tamaños de muestra, $T = 100, 250, 500$.

En nuestro estudio, hemos considerado el estimador autorregresivo de densidad espectral para estima el parámetro de varianza a largo plazo, definido en (1.15) y que está basado en el criterio de selección modificado MAIC construido como en Perron y Qu (2007). El número de retardos k seleccionados se sitúa entre $k_{min} = 0$ y $k_{max} = \lfloor 12(T/100)^{1/4} \rfloor$ con $\lfloor \cdot \rfloor$ denotando la parte entera.

La elección del criterio MAIC se apoya en primer lugar, en el hecho demostrado de que la utilización del procedimiento OLS para construir la regresión aumentada de Dickey-Fuller no produce sesgo y, por consiguiente, funciona mejor que los procedimientos GLS1 de Elliott *et al.* (1996) y GLS2 de Elliott (1999)⁴.

Para el caso $c = 0$, los puntos críticos y tamaño empírico de estos tres estadísticos, coinciden con los puntos críticos y tamaño empírico obtenidos para el contraste MSB_{OLS}^{τ} y que mostramos en la Sección 2.2. Por esta razón, y en aras de ser breves, omitimos los resultados. Esto, a nuestro juicio, supone una ventaja añadida ya que dejamos inalteradas las propiedades de la versión original del test MSB: tamaño empírico relativamente controlado con menores distorsiones en presencia de errores MA(1) y AR(1), especialmente en los casos de interés, $\theta < 0$ y $\phi > 0$. En el caso de errores i.i.d, el contraste muestra un tamaño conservador (inferior al 5% nominal fijado de antemano).

4.4.1 Potencia ajustada al tamaño

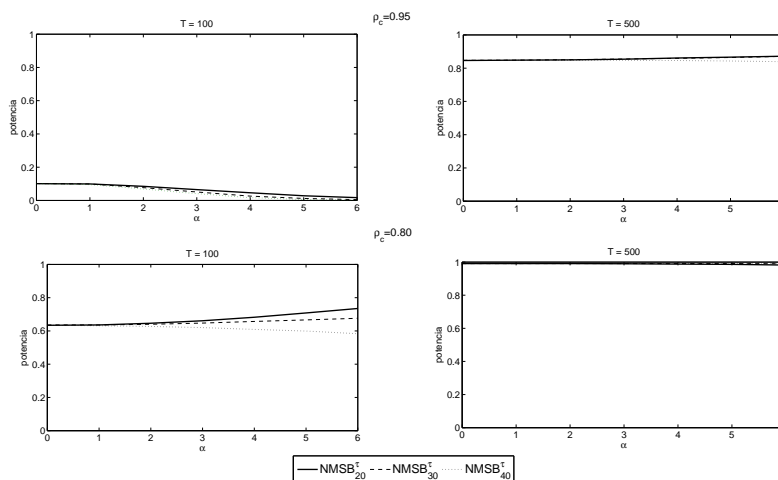
A continuación, se va a examinar el comportamiento en muestras pequeñas de los contrastes $NMSB_{20}^{\tau}$, $NMSB_{30}^{\tau}$ y $NMSB_{40}^{\tau}$ cuando el tamaño de la observación inicial cambia. Siguiendo la configuración de los experimentos descrita al comienzo de la presente sección, vamos a calcular la potencia ajustada al tamaño de los tres contrastes empleando los puntos críticos corregidos de manera que los resultados podrán compararse entre sí.

Para una mejor comprensión de los resultados obtenidos, se van a presentar los casos más relevantes del estudio en las figuras Figura 4.2 a Figura 4.6. En ellas se muestran los casos que corresponden a los tamaños $T = (100, 500)$ y $\rho_c = (0.95, 0.80)$ cuando los errores siguen un proceso media-móvil de primer orden con $\theta = (-0.8, -0.5, 0.5, 0.8)$, y un proceso autorregresivo de primer orden con $\phi = (-0.8, -0.5, 0.5, 0.8)$. No obstante, adjuntamos las tablas que contienen todo el conjunto de resultados de nuestros experimentos en el Apéndice de tablas.

⁴En el artículo de Perron y Qu (2007) solo consideran los criterios OLS y GLS1 ya que suponen la condición inicial cero. Nosotros, hemos ampliado este ejercicio y hemos considerado también el criterio GLS2 tanto bajo la condición inicial cero como bajo la condición inicial enunciada en Condición 4.2. Los resultados no se presentan en esta tesis puesto que se alejan del objetivo que ésta persigue. No obstante, podemos decir que los resultados obtenidos con GLS2 en ninguno de los casos mejoran los producidos por OLS.

El caso en el que los errores no presentan autocorrelación se ilustra en la Figura 4.2. En ella, se ve en general que, a medida que ρ_c se aleja de la unidad, la potencia ajustada al tamaño de los tres tests aumenta. El estadístico NMSB_{20}^T consigue en la mayoría de casos una potencia ajustada más elevada para todo el rango de α . En términos de robustez, la curva de los tres tests se hace menos sensible al tamaño de la observación inicial a medida que la muestra incrementa su tamaño. El estadístico NMSB_{20}^T exhibe por lo general el comportamiento más robusto, aunque hay situaciones en las que otra versión del NMSB compite con él, como sucede por ejemplo, con $T = 100$ y $\rho_c = 0.80$, en donde la versión del estadístico NMSB_{30}^T logra una curva de potencia ajustada relativamente más plana con respecto a α .

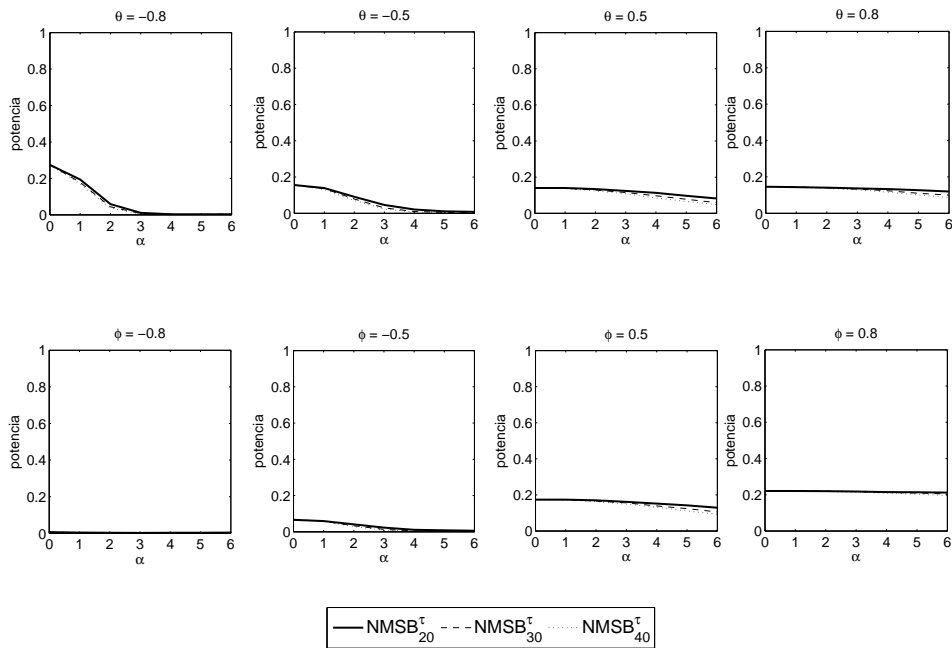
Figura 4.2: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. Errores i.i.d



En la Figura 4.3 se ilustran los resultados para el caso en el que los errores están autocorrelacionados, la muestra es de tamaño $T = 100$ y el parámetro c se sitúa muy próximo a la unidad, $\rho_c = 0.95$. En el panel superior de gráficos, se ve el comportamiento de los tres estadísticos NMSB cuando los errores siguen un proceso MA(1) y, en el panel inferior, cuando siguen un proceso AR(1). En el primer caso, queda claro que el test NMSB_{20}^T exhibe la mayor potencia en todas las situaciones contempladas y para todo α . En el caso de interés en el que $\theta < 0$, los tres estadísticos proporcionan una potencia que decrece a medida que α aumenta, pero que tiende a suavizarse cuando el parámetro media-móvil cambia de signo $\theta > 0$. Así, cuando el coeficiente media-móvil es positivo, $\theta > 0$, el decrecimiento es menos acusado, en especial en el NMSB_{20}^T , como se ve por ejemplo, en $\theta = 0.8$ donde NMSB_{20}^T produce la curva de potencia más estable y, por lo tanto, más robusta ya que está comprendida entre 14.6% y 12.0%.

Cuando un proceso AR(1) subyace en los errores del modelo, panel inferior de la misma figura, se observa como en el caso que mayor interés despierta en la literatura, $\phi > 0$, los tres tests proporcionan un comportamiento similar con una buena potencia y relativamente robusta, destacando nuevamente el test NMSB_{20}^T por ser el que produce la potencia ajustada más alta y robusta con respecto a α de los tres tests. Por ejemplo, en el caso extremo $\phi = 0.8$, el test NMSB_{20}^T muestra una curva de potencia ajustada casi plana con respecto a α mientras que los otros dos tests exhiben una curva que decrece con el valor inicial. Sin embargo, con $\phi < 0$, la potencia ajustada de los tres estadísticos es baja y, además, presentan un patrón que disminuye con α .

Figura 4.3: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. MA(1)-AR(1). $\rho_c = 0.95$, $T = 100$



Si se considera un tamaño de muestra más grande, $T = 500$, lo primero que se observa en la Figura 4.4 es que las potencias ajustadas exhibidas por los tres estadísticos NMSB son más elevadas que las de la figura anterior, como se podría esperar en un principio. En ambos paneles de gráficos, se ve como para los casos que más interés centran en la literatura ($\theta < 0$ y $\phi > 0$), los tres tests exhiben similares valores de potencia ajustada al tamaño con una cierta tendencia creciente con respecto al tamaño de α .

La Figura 4.5 ilustra el comportamiento de los tres estadísticos cuando la muestra es pequeña ($T = 100$) y el parámetro autorregresivo está alejado de la unidad, $\rho_c = 0.8$. En ella se observa que, cuando los errores son MA(1) y $\theta < 0$, la curva del test $NMSB_{20}^{\tau}$ va por encima de las otras dos curvas y se muestra menos sensible ante un aumento de α . Por ejemplo, con $\theta = -0.8$, la curva de potencia ajustada al tamaño del $NMSB_{20}^{\tau}$ es casi plana respecto a α con valores próximos al 80% mientras que las curvas de los otros dos decrecen al aumentar el valor inicial. Cuando $\theta > 0$ los tres tests proporcionan potencias que aumentan ligeramente con el valor inicial. El test $NMSB_{20}^{\tau}$ es el que presenta potencias ajustadas más elevadas.

Si se analiza el caso en el que los errores son AR(1), cuando $\phi > 0$ el test $NMSB_{20}^{\tau}$ muestra un comportamiento ligeramente creciente con α pero que tiende a estabilizarse conforme $\phi \rightarrow 1$ como se ve en la figura que recoge el caso extremo de $\phi = 0.8$ para el cual el incremento en la potencia es tan solo del 0.9% en todo el rango de α . Cuando $\phi < 0$, la potencia ha aumentado sustancialmente con respecto a las potencias casi despreciables obtenidas en la Figura 4.3. En este caso, la curva del test $NMSB_{40}^{\tau}$ parece ser la más plana con respecto a α , pero también la que ofrece valores menores. Por su parte, los estadísticos $NMSB_{20}^{\tau}$ y $NMSB_{30}^{\tau}$ muestran unas curvas de potencia con valores más elevados con una tendencia creciente al incrementar el tamaño del valor inicial. En concreto, es el test NMSB basado en $\bar{c} = 20$, el que proporciona los valores más altos.

Figura 4.4: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. MA(1)-AR(1). $\rho_c = 0.95$, $T = 500$

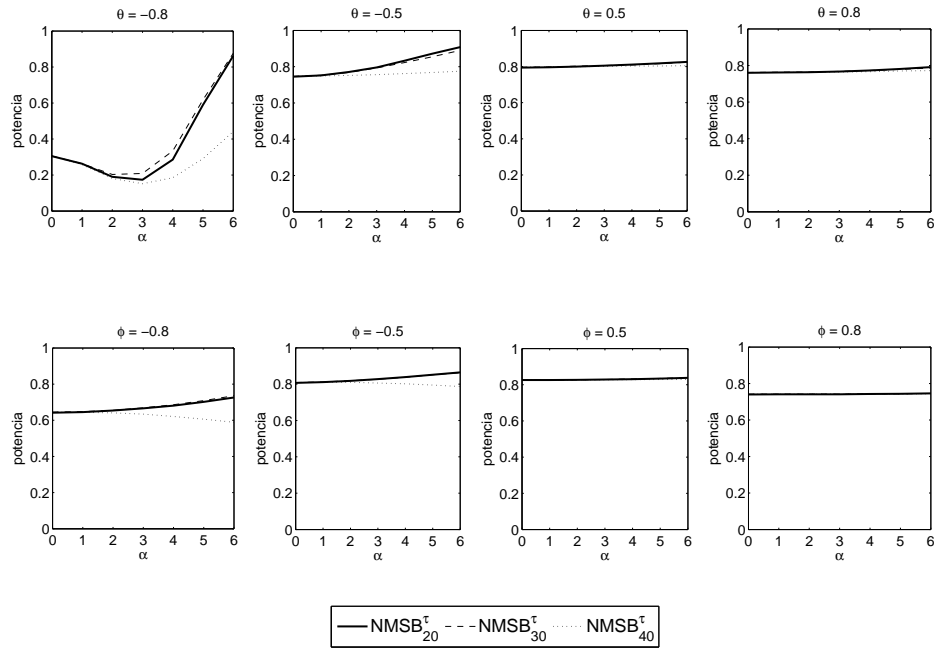


Figura 4.5: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. MA(1)-AR(1). $\rho_c = 0.80$, $T = 100$

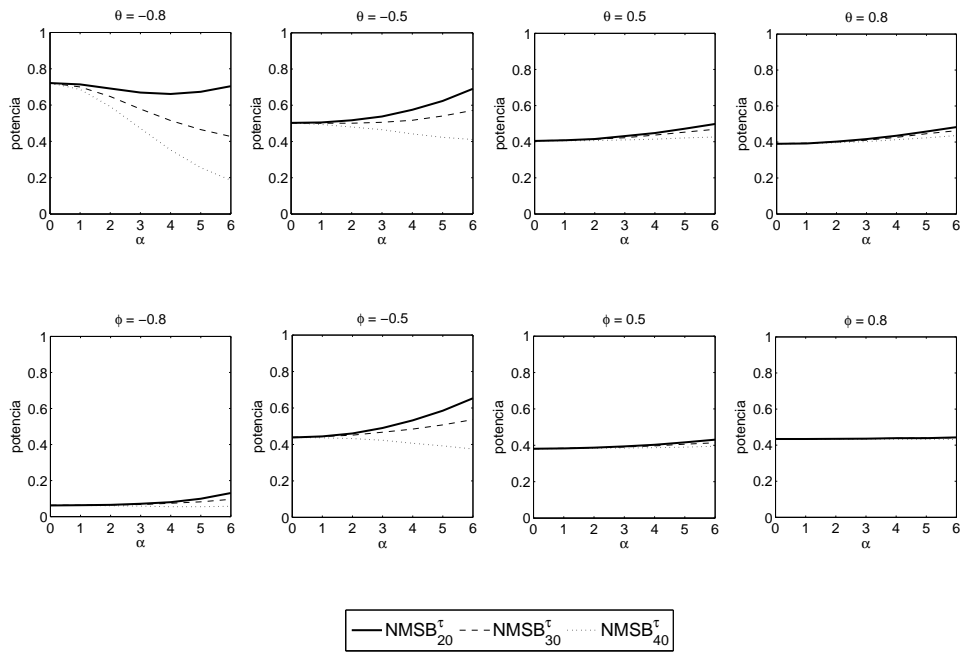
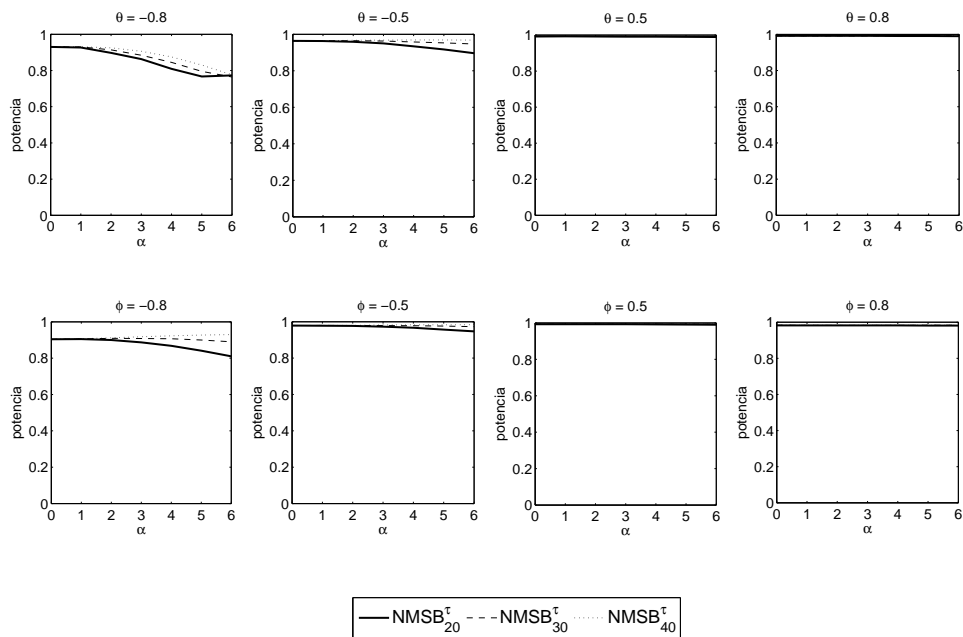


Figura 4.6: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. MA(1)-AR(1). $\rho_c = 0.80$, $T = 500$



Finalmente, la Figura 4.6 representa el caso en el que $\rho_c = 0.80$ y $T = 500$. En todos los paneles, las potencias ajustadas de los tres estadísticos son superiores a las representadas en la Figura 4.5. Todas ellas, además, muestran un comportamiento mucho más estable con relación al tamaño del valor inicial (α) que el exhibido cuando la muestra era pequeña. Viendo los gráficos de la presente figura, se puede afirmar que, independientemente del tipo de autocorrelación exhibida en los errores del modelo, así como de la magnitud del valor inicial, los tres estadísticos exhiben potencias con diferencias mínimas entre sí y muy próximas al 100 %.

A la vista de los resultados expuestos recientemente, se puede concluir que el estadístico NMSB_{20}^{τ} es, en la mayoría de situaciones, el que proporciona una potencia ajustada relativamente más estable con respecto al valor inicial y más elevada que la de las otras dos versiones del estadístico analizadas.

4.5 Comparaciones con otros contrastes de raíz unitaria

En esta sección, se va a comparar la calidad de nuestra propuesta con relación a las contribuciones más destacadas en términos de robustez con respecto al valor inicial que existen en la literatura. Se va a analizar la potencia asintótica local de nuestro test NMSB_{20}^{τ} con la del contraste de raíz unitaria de Harvey y Leybourne (2005), denotado HL_{05} ; de Elliott y Müller (2006), como EM ; de Harvey y Leybourne (2006), HL_{06} ; y de Harvey *et al.* (2009), como UR_{SA} .

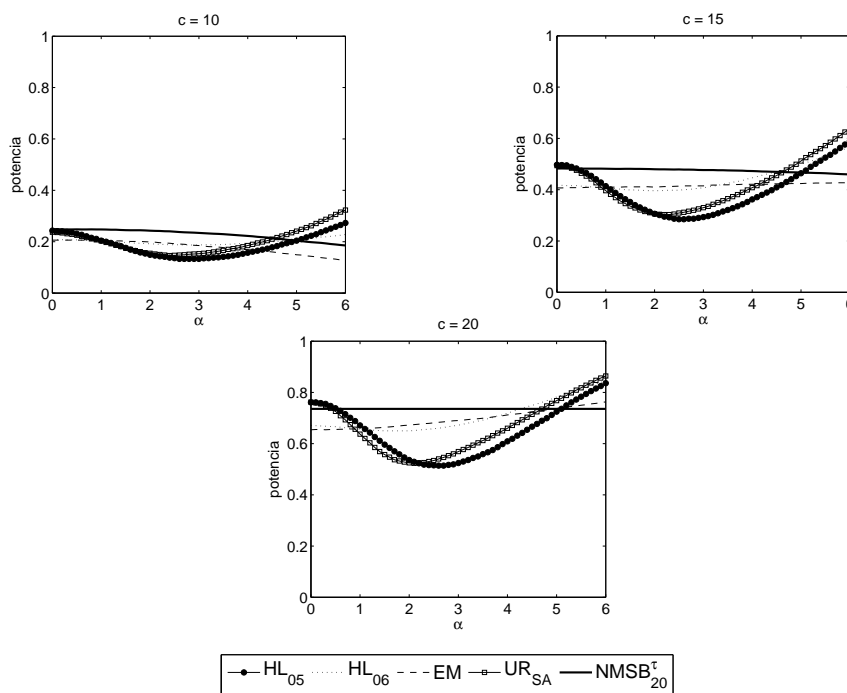
La Figura 4.7 ilustra las curvas de potencia asintótica local de estos cinco contrastes. En los tres casos que se presentan, $c = (10, 15, 20)$, se pueden distinguir dos familias que cuentan con distinto grado de robustez dependiendo de la relación potencia del test y tamaño del valor inicial.

En el caso $c = 10$, la familia más robusta la integran los contrastes NMSB_{20}^T y EM. En particular, se ve que el NMSB_{20}^T produce la potencia asintótica más alta de origen, que además es la más robusta ante cambios en la tamaño del valor inicial α si la comparamos con las demás curvas de potencia. El contraste EM, por su parte, exhibe un comportamiento bastante parecido al de nuestro estadístico pero con potencias inferiores. Los estadísticos HL_{05} , HL_{06} y UR_{SA} componen la segunda familia caracterizada por exhibir un valle en la potencia en valores intermedios de α . El test HL_{06} es el que menos sufre este contratiempo. Además, cuando α es muy grande, los contrastes HL_{05} y UR_{SA} producen las potencias más altas debido a que se han construido, como ya hemos dicho, aprovechando el comportamiento del test DF_{OLS} que incrementa su potencia para valores de α grandes.

Las curvas representadas en el figura anterior para $c = 15$ indican que los contrastes HL_{05} y UR_{SA} producen una potencia ligeramente superior a la de nuestro contraste NMSB_{20}^T para valores iniciales pequeños. Sin embargo, siguen sufriendo un valle en la potencia para valores intermedios de α . El test HL_{06} mantiene su comportamiento creciente a medida que α aumenta. El test NMSB_{20}^T exhibe la curva de potencia más robusta respecto a α , superando la del estadístico EM.

En el último caso, en el que $c = 20$, se observa cómo los contrastes continúan exhibiendo comportamientos similares a los mostrados en los dos casos anteriores. Nuevamente, destaca el comportamiento del estadístico NMSB_{20}^T ya que la curva de potencia asintótica local se muestra casi completamente plana respecto a α y con valores de potencia aceptables. Aunque no se muestran en el texto, nuestros resultados indican que con valores de c superiores, la robustez de nuestro test se mantiene invariante.

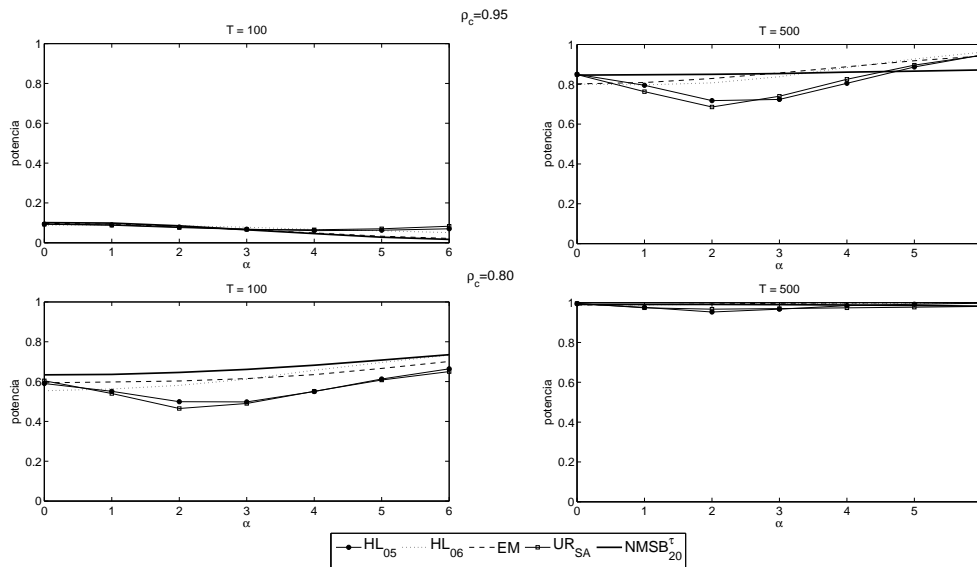
Figura 4.7: Potencia asintótica local de HL_{05} , HL_{06} , EM, UR_{SA} y NMSB_{20}^T



Para comparar las propiedades de los tests en muestras finitas, se ha simulado la potencia ajustada al tamaño de los mismos suponiendo tres tamaños muestrales $T = (100, 250, 500)$. El modelo generador de los datos es como en la sección anterior y se permite que los errores presenten distintas estructuras de autocorrelación (i.i.d, MA(1) y AR(1)). Los resultados se han basado en 20000 simulaciones. Los valores considerados en nuestros experimentos son $\rho_c = (0.99, 0.95, 0.9, 0.8)$, $\theta = (-0.8, -0.5, 0, 0.5, 0.8)$ y $\phi = (-0.8, -0.5, 0.5, 0.8)$. En aras de la brevedad y buscando una mejor comprensión de los resultados obtenidos, se decide ilustrar los casos más relevantes del estudio en las figuras que a continuación se presentan. Los valores que se van a mostrar en dichas figuras son $T = (100, 500)$, $\rho_c = (0.95, 0.80)$, $\theta = (-0.8, -0.5, 0, 0.5, 0.8)$ para el caso de errores MA(1) y $\phi = (-0.8, -0.5, 0.5, 0.8)$ cuando los errores sigue un proceso AR(1). No obstante, todo el conjunto de resultados se pueden consultar en las tablas contenidas en el Apéndice de tablas al final del capítulo.

El caso más sencillo, en el que los errores no presentan autocorrelación, se ilustra en la Figura 4.8. En ella, podemos agrupar los estadísticos por el grado de robustez que presentan sus curvas de potencia ajustada con respecto al tamaño del valor inicial. Así, por un lado, tenemos los estadísticos $NMSB_{20}^*$, EM y HL_{06} que son los más robustos y, por el otro, los estadísticos HL_{05} y UR_{SA} , que exhiben un valle en la potencia ajustada para valores de α intermedios. También se observa como a medida que el tamaño de la muestra se hace más grande y el parámetro autorregresivo ρ_c se aleja de la unidad, los valores de potencia se incrementan para todo α .

Figura 4.8: Potencia ajustada al tamaño. Errores i.i.d.

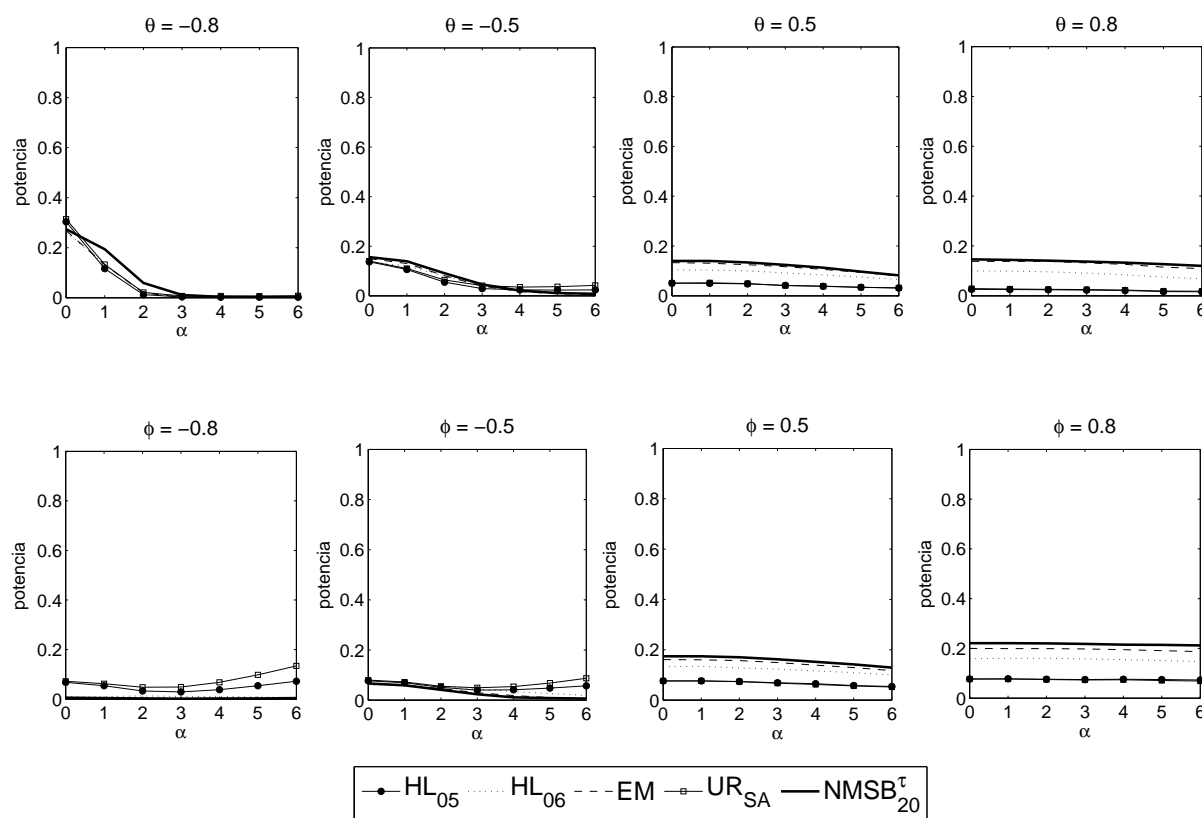


Las siguientes cuatro figuras ilustran los casos en los que los errores del modelo se distribuyen siguiendo un proceso MA(1) y AR(1). En cada una de ellas, se representa el caso MA(1) en el panel superior mientras que los gráficos correspondientes al caso AR(1) se ubican en el panel inferior. Como se ha dicho anteriormente, solo se presentan los resultados correspondientes a los tamaños muestrales $T = 100$ y $T = 500$ y para $\rho_c = 0.95$ y $\rho_c = 0.80$.

En la Figura 4.9, si se analiza el caso en el que los errores siguen un proceso MA(1) (panel superior de la figura), lo primero que se puede ver es que, cuando $\rho_c = 0.95$ y $\theta < 0$, todas

las curvas de potencia ajustada al tamaño muestran un decrecimiento a medida que el tamaño del valor inicial (α) aumenta. En particular, la potencia ajustada del test NMSB_{20}^{τ} se muestra superior a la del resto de tests para valores pequeños y medianos de α . Ahora bien, si $\theta > 0$, la curva de potencia del estadístico NMSB_{20}^{τ} siempre se sitúa por encima del resto, seguida de cerca por la del estadístico EM. Las potencias ajustadas de los demás tests son muy inferiores. Si comparamos el comportamiento de los tests con $\theta < 0$ y con $\theta > 0$, se distingue claramente como su comportamiento cambia: de mostrar un patrón decreciente a mostrar un patrón mucho más estable con respecto a α como se puede ver para $\theta = 0.8$ en los tests NMSB_{20}^{τ} y EM.

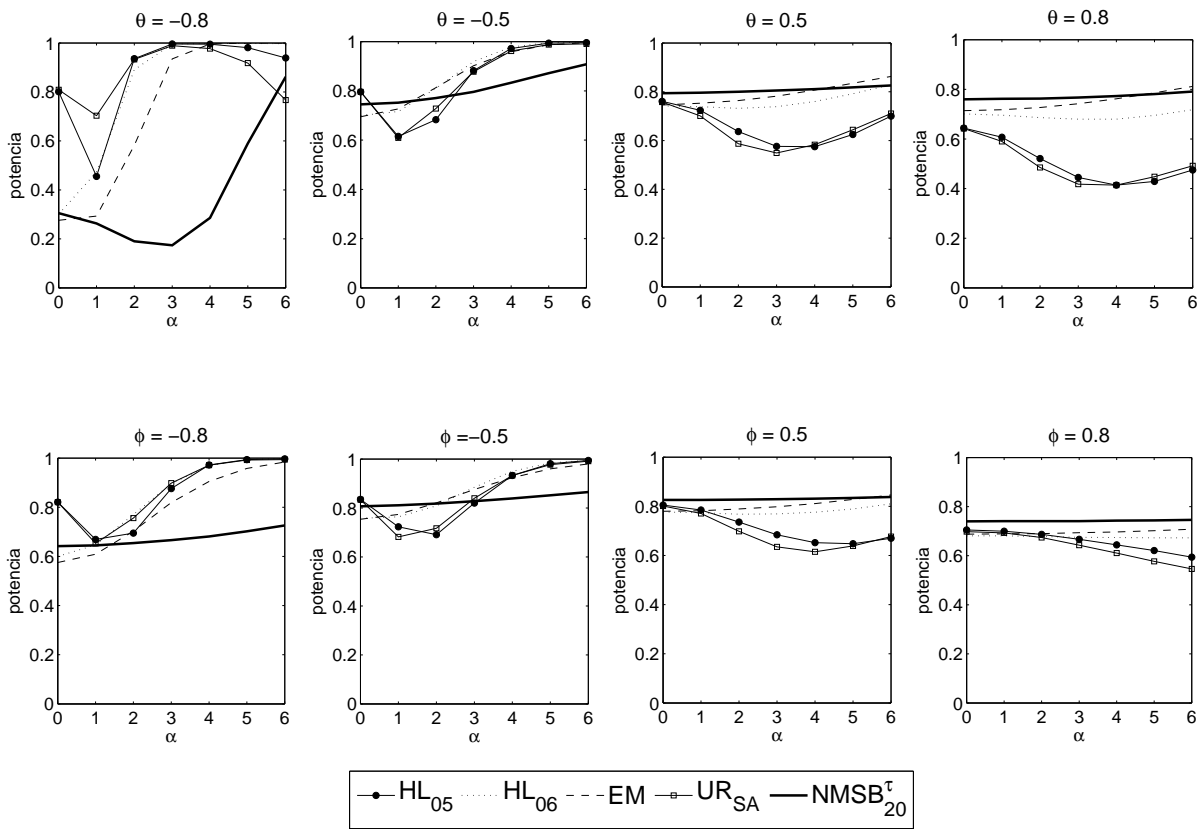
Figura 4.9: Potencia ajustada al tamaño. MA(1)-AR(1). $\rho_c = 0.95$, $T = 100$



En el caso de que los errores sigan un proceso autorregesivo (panel inferior de la misma figura) y $\phi > 0$, la curva de potencia ajustada del estadístico NMSB_{20}^{τ} es la que se muestra más robusta ante cualquier cambio en α , como se puede ver por ejemplo en el caso extremo $\phi = 0.8$. En cambio, cuando $\phi < 0$, dicho estadístico no presenta tan buen comportamiento y se ve superado por todos los demás, los cuales, pese a no ser robustos ofrecen valores de potencia más elevados. Por ejemplo, con $\phi = -0.5$, los tests HL_{05} y UR_{SA} muestran un valle en la potencia ajustada mientras que los demás tests exhiben una caída ante aumentos del tamaño del valor inicial.

Cuando se considera un tamaño muestral grande ($T = 500$), la Figura 4.10 muestra para el caso que despierta mayor interés en la literatura $\theta < 0$, que los tests HL_{05} y UR_{SA} presentan una potencia ajustada más alta que la de los tests NMSB_{20}^{τ} , HL_{06} y EM pero que no es robusta puesto que sufren de un valle en la potencia para valores intermedio de α . Cuando $\theta > 0$, el test NMSB_{20}^{τ} se comporta, en general, mejor que los demás estadísticos tal y como sucedía en

Figura 4.10: Potencia ajustada al tamaño. MA(1)-AR(1). $\rho_c = 0.95$, $T = 500$



muestras pequeñas. En el caso autorregresivo, el test $NMSB_{20}^{\tau}$ produce, en términos generales, la potencia ajustada al tamaño más alta y robusta con respecto a α seguido por el estadístico EM . Los tests HL_{05} y UR_{SA} exhiben un comportamiento decreciente a medida que se incrementa el valor inicial y el test HL_{06} muestra una curva de potencia ajustada que crece con α .

Visto qué sucede cuando ρ_c se sitúa en la vecindad de la unidad, pasamos a comentar qué ocurre cuando dicho parámetro se encuentra más alejado, en concreto, en $\rho_c = 0.80$. De la Figura 4.11, $T = 100$, se pueden extraer los siguientes comentarios. Primero, en el caso de interés $\theta < 0$, el nuevo test $NMSB_{20}^{\tau}$ produce la potencia ajustada al tamaño más elevada y robusta ante un cambio en la magnitud del valor inicial α . Incluso en el caso más extremo $\theta = -0.8$, la potencia ajustada del test $NMSB_{20}^{\tau}$ es superior a las demás. Esta situación se extiende para el caso $\theta > 0$. Sin embargo, cuando la muestra aumenta de tamaño ($T = 500$), la Figura 4.12 ilustra cómo nuestro estadístico se ve superado por los demás contrastes cuando $\theta < 0$. En el caso $\theta > 0$, los contrastes EM , HL_{05} y $NMSB_{20}^{\tau}$ son los más robustos al valor inicial y producen las potencias más altas. Por su parte, los tests HL_{06} y UR_{SA} sufren un hundimiento en valores intermedios del rango de α .

Volviendo a la Figura 4.11, al analizar los gráficos del panel inferior, se observa cómo, para el caso de interés $\phi > 0$, los valores más altos de potencia ajustada al tamaño son producidos por los contrastes $NMSB_{20}^{\tau}$ y EM . En términos de robustez, por ejemplo con $\phi = 0.8$, nuestra propuesta

es casi completamente estable a cambios en el tamaño del valor inicial a la vez que produce las potencias más elevadas. Sin embargo, cuando $\phi < 0$, los tests HL_{05} y UR_{SA} , aun sufriendo un valle en la potencia en valores intermedios de α , proporcionan para el resto de valores potencias superiores a los del resto de tests. Al considerar una muestra mayor, en la Figura 4.12, y como se podría esperar en un principio, los valores de potencia son superiores a los mostrados de la figura anterior. Además, se observa un comportamiento bastante similar. En particular, en el caso de interés $\phi > 0$, son los tests $NMSB_{20}^{\tau}$, EM y HL_{06} los que mejores potencias consiguen. Si bien se podría destacar aquí que, por ejemplo, cuando $\phi = 0.8$, el test más robusto y con potencia más alta en casi todo el rango de α es el test $NMSB_{20}^{\tau}$ seguido por el EM. En este caso, los tests HL_{05} y UR_{SA} presentan una notable caída en la potencia ajustada a medida que el valor inicial aumenta.

A la vista de los resultados expuestos en la presente sección, todo parece indicar que nuestro estadístico $NMSB_{20}^{\tau}$ compite favorablemente en la mayoría de situaciones contempladas con los estadísticos más robustos ya existentes. Especialmente, se ha visto como tanto en el caso i.i.d como en aquellas situaciones que más interés tienen en la literatura ($\theta < 0$ o $\phi > 0$), nuestra propuesta posee una mayor potencia ajustada al tamaño y exhibe una mayor robustez con respecto al tamaño del valor inicial.

Figura 4.11: Potencia ajustada al tamaño. MA(1)-AR(1). $\rho_c = 0.80$, $T = 100$

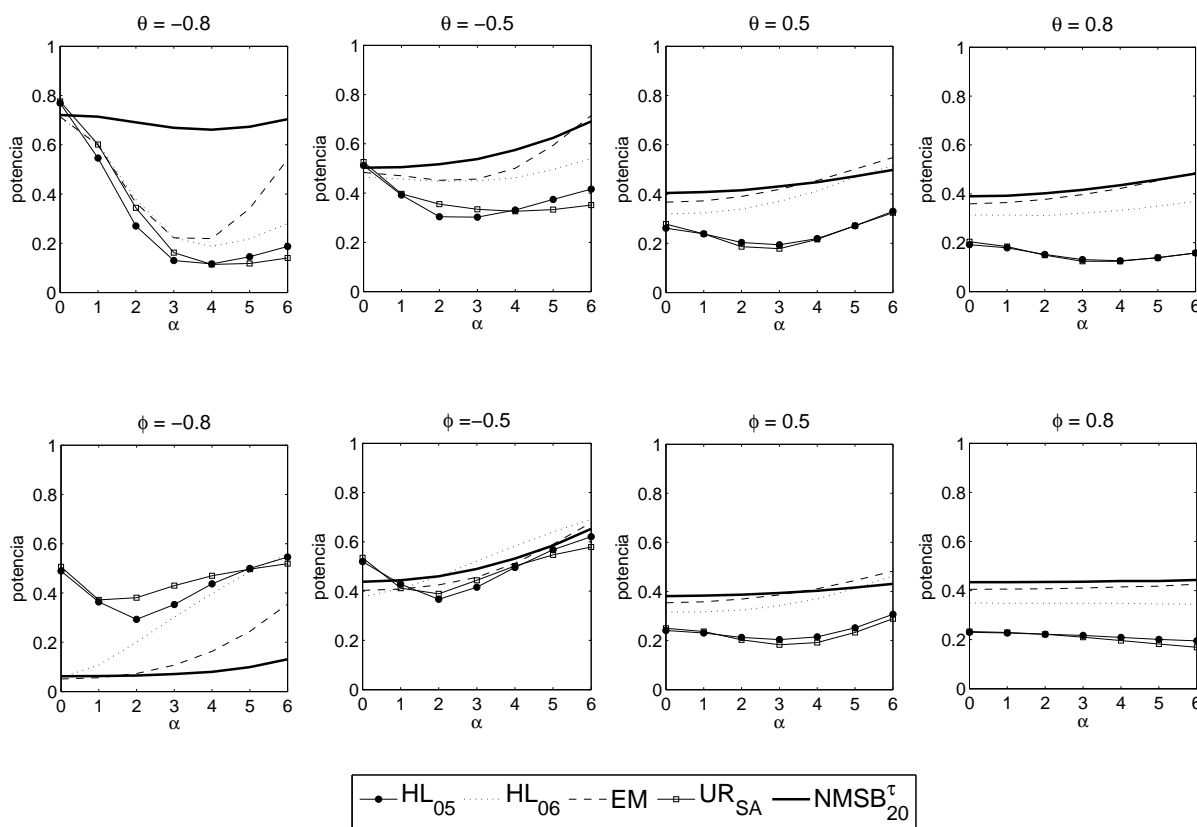
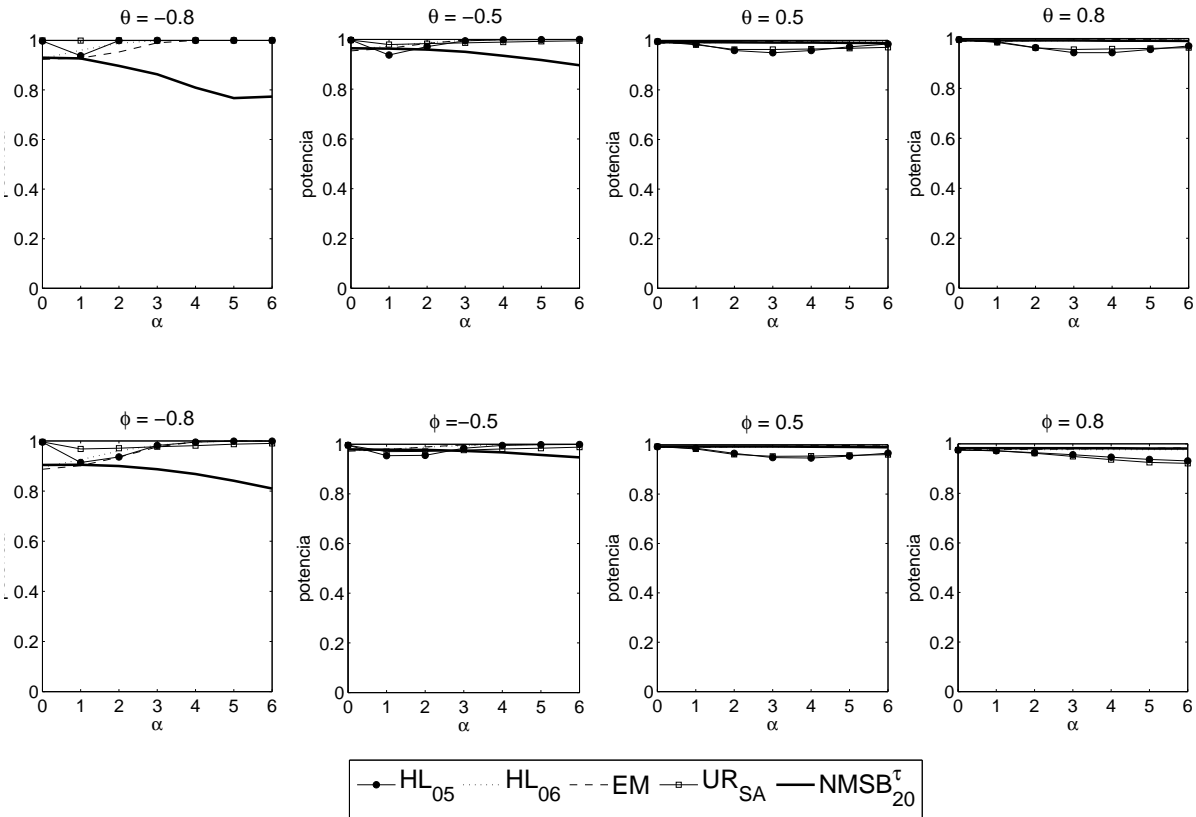


Figura 4.12: Potencia ajustada al tamaño. MA(1)-AR(1). $\rho_c = 0.80$, $T = 500$



4.6 Conclusiones

En este capítulo, se ha desarrollado una modificación para el contraste MSB de Stock (1999) para solucionar el problema de la caída en la potencia cuando se produce un aumento del tamaño de la observación inicial y que afecta a la mayoría de contrastes de raíz unitaria. Esta nueva versión se ha denominado NMSB.

En primer lugar, se ha ofrecido una visión panorámica de cómo se ha afrontado en la literatura el problema de esta relación inversa entre potencia y valor inicial, excepto para el estadístico DF_{OLS} . Así, una vez establecido el contexto en el que presentar nuestra propuesta, se han presentado las propiedades asintóticas locales de nuestro contraste NMSB para el caso en el que el modelo generador contiene un término constante y una tendencia lineal. El motivo de centrar nuestro interés en la hipótesis alternativa local se basa en el hecho de que la condición inicial no tiene ningún efecto bajo la hipótesis nula y sí bajo la alternativa.

A partir de nuestros desarrollos, se concluye que la modificación sugerida del MSB goza de algunas propiedades del estadístico original MSB. En concreto, mantiene los valores críticos y el tamaño empírico lo que, a nuestro juicio, supone una ventaja ya que, como se vio en el Capítulo 2, el estadístico MSB controlaba relativamente bien el tamaño en la mayoría de situaciones analizadas. La potencia asintótica local del test, que depende de un parámetro fijo $\bar{c} \in [20, 40]$, se muestra

relativamente robusta tanto para valores próximos como alejados de la hipótesis nula de raíz unitaria. En tales circunstancias, el estadístico NMSB_{20}^{τ} es el que muestra mejor comportamiento.

En muestras finitas, los resultados de simulación de la potencia ajustada al tamaño indican que el estadístico NMSB_{20}^{τ} exhibe, en la mayoría de ocasiones, una potencia ajustada más elevada y robusta que la de las versiones NMSB_{30}^{τ} y NMSB_{40}^{τ} . Además, cuando el parámetro local tiende a ser grande, nuestra propuesta es robusta al valor inicial con independencia del valor seleccionado de \bar{c} .

Finalmente, se ha realizado un ejercicio de comparación de nuestra propuesta con diversos contrastes, que poseen potencias robustas ante cambios en el tamaño del valor inicial. En términos de potencia asintótica local, hemos demostrado como las curvas del estadístico NMSB_{20}^{τ} siempre exhiben un mejor comportamiento que las del resto de contrastes contemplados en el estudio. En muestras finitas, los resultados expuestos parecen señalar que, para la mayoría de situaciones, el estadístico NMSB_{20}^{τ} proporciona mayores potencias ajustadas al tamaño y robustas que las de los demás estadísticos.

A la vista de los resultados expuestos, tanto asintóticos como de muestras finitas, podemos afirmar que nuestro contraste compite favorablemente con otros contrastes robustos y, por este motivo, consideramos que nuestra propuesta debería ser considerada como una buena alternativa a las ya existentes en la literatura.

Apéndice matemático

A lo largo de este apéndice, consideramos conveniente simplificar la notación utilizada en nuestras demostraciones de forma que representaremos $\int g(x)dx$ con el signo de integración denotando integración entre 0 y 1, simplemente como $\int g$, salvo que se indique lo contrario expresamente. El signo sumatorio $\sum_{t=1}^T x_t$ lo escribiremos como $\sum x_t$ salvo indicación expresa. Finalmente, los procesos funcionales no estándar definidos en el dominio $\mathcal{C}[0, 1]$, $J_c(r)$ -de Ornstein-Uhlenbeck- y $G_c(r)$ los representaremos como J_c y G_c respectivamente.

El siguiente lema recoge un resultado básico para poder derivar correctamente las distribuciones asintóticas del nuevo estadístico MSB.

Lema 4.1. *Sea (4.1) el modelo que genera los datos. La perturbación aleatoria satisface la Condición 4.1, y la observación inicial v_1 , la Condición 4.2. Entonces, bajo la hipótesis alternativa local $\rho_c = 1 - cT^{-1}$, $c > 0$, se tiene que*

$$T^{-1/2}\hat{v}_{[Ts]}^* \xrightarrow{d} \lambda N_c^\tau(s) \quad (4.12)$$

con $N_c^\tau = J_c^\tau + \alpha\lambda(2c)^{-1/2}G_{c,\bar{c}}^\tau$, $J_c^\tau = J_c^\mu - 12(s-1/2)\int(r-1/2)J_c(s)ds$, $J_c^\mu = J_c - \int J_c(s)ds$ y $J_c(s)$ define un proceso Ornstein-Uhlenbeck. También, $G_{c,\bar{c}}^\tau = G_c^\mu - 12(s-1/2)\int(r-1/2)G_c(s)ds$, $G_c^\mu = G_c - \int G_c(s)ds$ y $G_c = (e^{-cs} - e^{-\bar{c}s})$.

Prueba del Lema 4.1. En notación matricial, se escribe (4.1) como nuestro modelo que genera la serie de datos $\{y_t\}$:

$$y = Z\delta + v$$

Partiendo de $y^* = Z\delta + v - F_{\bar{c}}y_1$, se puede definir nuestra variable transformada como:

$$\begin{aligned} \hat{v}^* &= My^* \\ &= M(Z\delta + v - F_{\bar{c}}y_1) \\ &= Mv - MF_{\bar{c}}y_1 \\ &= Mv - MF_{\bar{c}}z_1'\delta - MF_{\bar{c}}v_1 \end{aligned}$$

siendo la matriz M igual a $M = I_T - Z(Z'Z)^{-1}Z'$ con I_T la matriz identidad. Recordemos que la matriz M se define como una matriz de elementos constantes, cuadrada de orden T que cumple las propiedades definidas en un modelo lineal general: (a) es simétrica, $M = M'$ (b) es idempotente, $MM = M$ (c) $\text{rango}(M) = \text{traza}(M) = T - k$ (d) $MZ = 0$. A continuación, vamos a definir los siguientes términos:

$$\begin{aligned} F_{\bar{c}} &= (1, \rho_{\bar{c}}, \rho_{\bar{c}}^2, \dots, \rho_{\bar{c}}^{T-1})' \\ F_c &= (1, \rho_c, \rho_c^2, \dots, \rho_c^{T-1})' \end{aligned}$$

Sustituyendo estos términos, podemos escribir el primer elemento de la expresión de arriba como:

$$\begin{aligned} M\mathbf{v} &= \mathbf{v} - Z(Z'Z)^{-1}Z'\mathbf{v} \\ &= \xi + F_c v_1 - Z(Z'Z)^{-1}Z'\xi - Z(Z'Z)^{-1}Z'F_c v_1 \end{aligned}$$

Introduciendo esta última expresión en la definición de la variable transformada obtenemos el resultado (4.8):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}^* &= \xi - Z(Z'Z)^{-1}Z'\xi + [F_c - F_{\bar{c}}]v_1 - Z(Z'Z)^{-1}Z'[F_c - F_{\bar{c}}]v_1 \\ &\quad - F_{\bar{c}} z_1' \delta + Z(Z'Z)^{-1}Z'F_{\bar{c}} z_1' \delta \end{aligned}$$

Si tomamos el término t -ésimo y lo multiplicamos por $T^{-1/2}$, obtenemos la distribución asintótica de la variable transformada:

$$\begin{aligned} T^{-1/2}\hat{\mathbf{v}}_t^* &= T^{-1/2}\xi_t - T^{-1/2}z_t'(Z'Z)^{-1}Z'\xi + T^{-1/2}v_1[F_c(t) - F_{\bar{c}}(t)] \\ &\quad - T^{-1/2}v_1 z_t'(Z'Z)^{-1}Z'[F_c - F_{\bar{c}}] - T^{-1/2}F_{\bar{c}}(t) z_1' \delta - T^{-1/2}z_t'(Z'Z)^{-1}Z'F_{\bar{c}} z_1' \delta \\ &\stackrel{d}{\rightarrow} \lambda J_c^r + \alpha \lambda (2c)^{-1/2} G_{c,\bar{c}}^r + o(1) \\ &= \lambda N_c^r \end{aligned}$$

donde J_c^r and $G_{c,\bar{c}}^r$ se definen a continuación. Analizando la expresión anterior elemento a elemento, tenemos que la distribución asintótica local de los dos primeros elementos se obtiene como se explica seguidamente. El primer elemento se distribuye asintóticamente como

$$T^{-1/2}\xi_t \stackrel{d}{\rightarrow} \lambda J_c$$

donde J_c es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck como en Phillips (1987b). El segundo elemento queda como

$$\begin{aligned} T^{-1/2}z_t'(Z'Z)^{-1}Z'\xi &= T^{-1/2} (1 \quad t)' D_1^{-1} (D_1^{-1}(Z'Z)D_1^{-1})^{-1} D_1^{-1} D_2 D_2^{-1} Z'\xi \\ &= T^{-1/2} (1 \quad Ts)' D_1^{-1} (D_1^{-1}(Z'Z)D_1^{-1})^{-1} \text{diag}(T, T) D_2^{-1} Z'\xi \\ &= (T^{-1/2} T^{1/2} s)' \text{diag}(T^{1/2}, T^{-1/2}) (D_1^{-1}(Z'Z)D_1^{-1})^{-1} D_2^{-1} Z'\xi \\ &\stackrel{d}{\rightarrow} (1 \quad s)' \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \int J_c \\ \lambda \int r J_c \end{bmatrix} \\ &= \left(4 \int J_c - 6 \int r J_c \right) + s \left(-6 \int J_c + 12 \int r J_c \right) \end{aligned}$$

donde hemos definido las matrices de ajuste como $D_1 = \text{diag}(T^{1/2}, T^{3/2})$ y $D_2 = \text{diag}(T^{3/2}, T^{5/2})$ respectivamente. Combinando ambos resultados anteriores con alguna manipulación, obtenemos

el resultado que buscábamos:

$$\begin{aligned} T^{-1/2} (\xi_t - z_t'(Z'Z)^{-1}Z'\xi) &\stackrel{d}{\rightarrow} \lambda \left\{ J_c^\mu - 12 \left(s - \frac{1}{2} \right) \int \left(r - \frac{1}{2} \right) J_c \right\} \\ &= \lambda J_c^r \end{aligned}$$

con $J_c^\mu = J_c - \int J_c$.

El límite del tercer término viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} T^{-1/2} v_1 [F_c(t) - F_{\bar{c}}(t)] &= T^{-1/2} \alpha \lambda T^{1/2} (2c)^{-1/2} (\rho_c^{t-1} - \rho_{\bar{c}}^{t-1}) \\ &\rightarrow \alpha \lambda (2c)^{-1/2} (e^{-cs} - e^{-\bar{c}s}) \end{aligned}$$

La distribución del cuarto término se sigue así:

$$\begin{aligned} &T^{-1/2} v_1 z_t'(Z'Z)^{-1} Z' [F_c - F_{\bar{c}}] \\ &= T^{-1/2} \alpha \lambda T^{1/2} (2c)^{-1/2} (1 \quad t)' D_1^{-1} (D_1^{-1} (Z'Z) D_1^{-1})^{-1} D_1^{-1} D_3 D_3^{-1} Z' [F_c - F_{\bar{c}}] \\ &= \alpha \lambda (2c)^{-1/2} (1 \quad Ts)' D_1^{-1} (D_1^{-1} (Z'Z) D_1^{-1})^{-1} \text{diag}(T^{1/2}, T^{1/2}) \left[\frac{T^{-1} \sum (\rho_c^{t-1} - \rho_{\bar{c}}^{t-1})}{T^{-2} \sum t (\rho_c^{t-1} - \rho_{\bar{c}}^{t-1})} \right] \\ &= \alpha \lambda (2c)^{-1/2} (T^{-1/2} \quad T^{-1/2} s)' (D_1^{-1} (Z'Z) D_1^{-1})^{-1} \text{diag}(T^{1/2}, T^{1/2}) \left[\frac{T^{-1} \sum (\rho_c^{t-1} - \rho_{\bar{c}}^{t-1})}{T^{-2} \sum t (\rho_c^{t-1} - \rho_{\bar{c}}^{t-1})} \right] \\ &\stackrel{d}{\rightarrow} \alpha \lambda (2c)^{-1/2} (1 \quad s)' \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \left[\int \frac{e^{-cs} - e^{-\bar{c}s}}{r(e^{-cs} - e^{-\bar{c}s})} \right] \end{aligned}$$

donde la matriz de ajuste D_3 es igual a $D_3 = \text{diag}(T, T^2)$. Si combinamos los dos resultados derivados anteriormente, podemos escribir

$$\begin{aligned} &T^{-1/2} v_1 [F_c(t) - F_{\bar{c}}(t)] - T^{-1/2} v_1 z_t'(Z'Z)^{-1} Z' [F_c - F_{\bar{c}}] \\ &\stackrel{d}{\rightarrow} \alpha \lambda (2c)^{-1/2} \left[(e^{-cs} - e^{-\bar{c}s}) - 4 \int (e^{-cs} - e^{-\bar{c}s}) + 6 \int r(e^{-cs} - e^{-\bar{c}s}) \right. \\ &\quad \left. - s \left(-6 \int (e^{-cs} - e^{-\bar{c}s}) + 12 \int r(e^{-cs} - e^{-\bar{c}s}) \right) \right] \end{aligned}$$

utilizando algo de álgebra obtenemos

$$\begin{aligned} &= \alpha \lambda (2c)^{-1/2} G_{c,\bar{c}}^\mu - 12 \left(s - \frac{1}{2} \right) \int \left(r - \frac{1}{2} \right) (e^{-cs} - e^{-\bar{c}s}) \\ &= \alpha \lambda (2c)^{-1/2} G_{c,\bar{c}}^r \end{aligned}$$

donde es directo ver que $G_{c,\bar{c}}^\mu = (e^{-cs} - e^{-\bar{c}s}) - \int (e^{-cs} - e^{-\bar{c}s})$ y $G_{c,\bar{c}}^r = G_{c,\bar{c}}^\mu - 12 \left(s - \frac{1}{2} \right) \int (r - \frac{1}{2}) (e^{-cs} - e^{-\bar{c}s})$. Finalmente, podemos asegurar que los dos últimos términos de la ex-

presión se desvanecen asintóticamente, tal y como se puede comprobar a continuación:

$$T^{-1/2} F_{\bar{c}}(t) z_1' \delta = T^{-1/2} \rho_{\bar{c}}^{t-1} (1 \quad 1)' \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = o(1)$$

$$\begin{aligned} & T^{-1/2} z_t'(Z'Z)^{-1} Z' F_{\bar{c}} z_1' \delta \\ &= T^{-1/2} (1 \quad t)' D_1^{-1} (D_1^{-1} (Z'Z) D_1^{-1})^{-1} D_1^{-1} D_3 D_3^{-1} Z' F_{\bar{c}} (1 \quad 1)' \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \\ &= (T^{-1/2} \quad T^{-1/2} s)' D_1^{-1} (D_1^{-1} (Z'Z) D_1^{-1})^{-1} \text{diag}(T^{1/2}, T^{1/2}) \begin{bmatrix} T^{-1} \sum \rho_{\bar{c}}^{t-1} \\ T^{-2} \sum t \rho_{\bar{c}}^{t-1} \end{bmatrix} (\delta_0 + \delta_1) \\ &= (T^{-1/2} \quad s T^{-1/2})' (D_1^{-1} (Z'Z) D_1^{-1})^{-1} \begin{bmatrix} T^{-1} \sum \rho_{\bar{c}}^{t-1} \\ T^{-2} \sum t \rho_{\bar{c}}^{t-1} \end{bmatrix} (\delta_0 + \delta_1) \\ &= o(1) \end{aligned}$$

Si combinamos todos los resultados recientemente obtenidos y aplicamos el CMT, llegamos al resultado que queríamos probar en un principio:

$$T^{-2} \sum (\hat{v}_t^*)^2 \xrightarrow{d} \lambda^2 \int [N_c^\tau]^2$$

□

Prueba del Teorema 4.1. La distribución asintótica del numerador del estadístico NMSB sigue directamente al aplicar el CMT al resultado del Lema 4.1. Entonces, si combinamos el hecho de que el estimador de la varianza a largo plazo es consistente ($\hat{\lambda}^2 \xrightarrow{p} \lambda^2$) junto con la distribución del numerador del estadístico, llegamos directamente al resultado que queremos probar. □

Apéndice de tablas

En este apéndice se presentan todas las tablas que contienen los resultados referidos en el texto principal, a partir de los cuales se han realizado las figuras que previamente hemos mostrado.

Tabla 4.1: Potencia asintótica local del contraste NMSB

c	α	NMSB_{20}^{τ}	NMSB_{30}^{τ}	NMSB_{40}^{τ}
10	0	0.249	0.249	0.249
10	0.1	0.249	0.249	0.248
10	0.2	0.248	0.248	0.248
10	0.3	0.248	0.248	0.248
10	0.4	0.248	0.248	0.247
10	0.5	0.248	0.248	0.247
10	0.6	0.248	0.248	0.247
10	0.7	0.248	0.247	0.246
10	0.8	0.248	0.246	0.245
10	0.9	0.248	0.245	0.244
10	1	0.248	0.245	0.242
10	1.1	0.247	0.244	0.241
10	1.2	0.247	0.243	0.240
10	1.3	0.247	0.242	0.239
10	1.4	0.246	0.241	0.237
10	1.5	0.245	0.239	0.235
10	1.6	0.245	0.239	0.232
10	1.7	0.245	0.237	0.230
10	1.8	0.245	0.235	0.227
10	1.9	0.244	0.235	0.225
10	2	0.243	0.233	0.222
10	2.1	0.242	0.231	0.219
10	2.2	0.242	0.229	0.216
10	2.3	0.241	0.227	0.214
10	2.4	0.240	0.224	0.211
10	2.5	0.239	0.223	0.207
10	2.6	0.238	0.219	0.204
10	2.7	0.237	0.217	0.201
10	2.8	0.236	0.215	0.199
10	2.9	0.235	0.213	0.195
10	3	0.234	0.210	0.191
10	3.1	0.233	0.207	0.188
10	3.2	0.232	0.204	0.184
10	3.3	0.231	0.202	0.181
10	3.4	0.230	0.199	0.178
10	3.5	0.229	0.197	0.174
10	3.6	0.228	0.193	0.170
10	3.7	0.227	0.191	0.167
10	3.8	0.225	0.187	0.163
10	3.9	0.224	0.185	0.160
10	4	0.223	0.182	0.156
10	4.1	0.221	0.180	0.152
10	4.2	0.219	0.177	0.147
10	4.3	0.217	0.174	0.144

c	α	NMSB_{20}^{τ}	NMSB_{30}^{τ}	NMSB_{40}^{τ}
10	4.4	0.216	0.172	0.140
10	4.5	0.214	0.170	0.137
10	4.6	0.212	0.166	0.133
10	4.7	0.210	0.163	0.129
10	4.8	0.208	0.160	0.125
10	4.9	0.206	0.156	0.121
10	5	0.204	0.152	0.118
10	5.1	0.202	0.149	0.113
10	5.2	0.200	0.146	0.109
10	5.3	0.198	0.142	0.106
10	5.4	0.197	0.140	0.102
10	5.5	0.195	0.137	0.098
10	5.6	0.193	0.134	0.095
10	5.7	0.191	0.130	0.091
10	5.8	0.189	0.127	0.088
10	5.9	0.187	0.124	0.085
10	6	0.185	0.121	0.082
15	0	0.483	0.483	0.483
15	0.1	0.483	0.482	0.482
15	0.2	0.483	0.483	0.483
15	0.3	0.482	0.483	0.482
15	0.4	0.482	0.482	0.482
15	0.5	0.482	0.482	0.481
15	0.6	0.482	0.481	0.481
15	0.7	0.482	0.481	0.480
15	0.8	0.482	0.481	0.478
15	0.9	0.482	0.481	0.477
15	1	0.482	0.480	0.476
15	1.1	0.482	0.479	0.474
15	1.2	0.481	0.478	0.472
15	1.3	0.481	0.477	0.471
15	1.4	0.482	0.476	0.470
15	1.5	0.481	0.475	0.468
15	1.6	0.481	0.473	0.466
15	1.7	0.481	0.472	0.464
15	1.8	0.481	0.471	0.462
15	1.9	0.480	0.470	0.459
15	2	0.480	0.469	0.457
15	2.1	0.479	0.467	0.455
15	2.2	0.479	0.466	0.451
15	2.3	0.479	0.464	0.448
15	2.4	0.479	0.462	0.445
15	2.5	0.479	0.460	0.442
15	2.6	0.478	0.459	0.439
15	2.7	0.478	0.457	0.436
15	2.8	0.478	0.455	0.433
15	2.9	0.477	0.453	0.430
15	3	0.477	0.452	0.426
15	3.1	0.477	0.449	0.422
15	3.2	0.476	0.447	0.418
15	3.3	0.476	0.446	0.415
15	3.4	0.476	0.443	0.411
15	3.5	0.475	0.441	0.407
15	3.6	0.475	0.439	0.403
15	3.7	0.474	0.436	0.399
15	3.8	0.474	0.434	0.395
15	3.9	0.473	0.432	0.391

c	α	NMSB$_{20}^{\tau}$	NMSB$_{30}^{\tau}$	NMSB$_{40}^{\tau}$
15	4	0.473	0.429	0.387
15	4.1	0.472	0.426	0.382
15	4.2	0.471	0.424	0.378
15	4.3	0.471	0.421	0.374
15	4.4	0.470	0.418	0.370
15	4.5	0.470	0.416	0.366
15	4.6	0.469	0.413	0.362
15	4.7	0.468	0.411	0.357
15	4.8	0.468	0.408	0.353
15	4.9	0.468	0.405	0.348
15	5	0.467	0.402	0.343
15	5.1	0.466	0.399	0.339
15	5.2	0.466	0.396	0.334
15	5.3	0.465	0.393	0.330
15	5.4	0.465	0.390	0.325
15	5.5	0.464	0.387	0.320
15	5.6	0.463	0.384	0.313
15	5.7	0.462	0.382	0.308
15	5.8	0.461	0.379	0.304
15	5.9	0.460	0.376	0.298
15	6	0.460	0.373	0.293
20	0	0.736	0.736	0.736
20	0.1	0.736	0.736	0.736
20	0.2	0.736	0.736	0.735
20	0.3	0.736	0.735	0.735
20	0.4	0.736	0.736	0.736
20	0.5	0.736	0.736	0.736
20	0.6	0.736	0.735	0.735
20	0.7	0.736	0.735	0.734
20	0.8	0.736	0.735	0.734
20	0.9	0.736	0.735	0.733
20	1	0.736	0.735	0.732
20	1.1	0.736	0.734	0.732
20	1.2	0.736	0.734	0.731
20	1.3	0.736	0.734	0.731
20	1.4	0.736	0.733	0.730
20	1.5	0.736	0.733	0.730
20	1.6	0.736	0.732	0.729
20	1.7	0.736	0.732	0.728
20	1.8	0.736	0.732	0.726
20	1.9	0.736	0.732	0.725
20	2	0.736	0.731	0.724
20	2.1	0.736	0.731	0.723
20	2.2	0.736	0.731	0.721
20	2.3	0.736	0.731	0.720
20	2.4	0.736	0.731	0.718
20	2.5	0.736	0.730	0.717
20	2.6	0.736	0.729	0.715
20	2.7	0.736	0.728	0.713
20	2.8	0.736	0.727	0.711
20	2.9	0.736	0.726	0.709
20	3	0.736	0.725	0.707
20	3.1	0.736	0.725	0.705
20	3.2	0.736	0.724	0.703
20	3.3	0.736	0.724	0.701
20	3.4	0.736	0.723	0.699
20	3.5	0.736	0.722	0.697

c	α	NMSB_{20}^{τ}	NMSB_{30}^{τ}	NMSB_{40}^{τ}
20	3.6	0.736	0.721	0.695
20	3.7	0.736	0.721	0.694
20	3.8	0.736	0.720	0.692
20	3.9	0.736	0.719	0.689
20	4	0.736	0.717	0.687
20	4.1	0.736	0.716	0.684
20	4.2	0.736	0.715	0.681
20	4.3	0.736	0.714	0.679
20	4.4	0.736	0.713	0.675
20	4.5	0.736	0.712	0.673
20	4.6	0.736	0.711	0.670
20	4.7	0.736	0.710	0.666
20	4.8	0.736	0.709	0.664
20	4.9	0.736	0.708	0.660
20	5	0.736	0.707	0.657
20	5.1	0.736	0.705	0.653
20	5.2	0.736	0.703	0.650
20	5.3	0.736	0.702	0.647
20	5.4	0.736	0.701	0.643
20	5.5	0.736	0.700	0.640
20	5.6	0.736	0.699	0.637
20	5.7	0.736	0.698	0.633
20	5.8	0.736	0.696	0.630
20	5.9	0.736	0.695	0.625
20	6	0.736	0.694	0.621

Tabla 4.2: Potencia asintótica local de contrastes robustos

c	α	EM	HL₀₅	HL₀₆	UR_{SA}	NMSB_{20}^{τ}
10	0	0.206	0.243	0.207	0.237	0.249
10	0.1	0.206	0.241	0.208	0.236	0.249
10	0.2	0.206	0.240	0.208	0.234	0.248
10	0.3	0.206	0.238	0.207	0.231	0.248
10	0.4	0.206	0.236	0.207	0.229	0.248
10	0.5	0.206	0.231	0.207	0.225	0.248
10	0.6	0.206	0.227	0.206	0.221	0.248
10	0.7	0.206	0.221	0.205	0.216	0.248
10	0.8	0.206	0.215	0.204	0.211	0.248
10	0.9	0.205	0.211	0.203	0.207	0.248
10	1	0.204	0.204	0.202	0.203	0.248
10	1.1	0.203	0.200	0.200	0.197	0.247
10	1.2	0.203	0.195	0.199	0.192	0.247
10	1.3	0.203	0.188	0.198	0.186	0.247
10	1.4	0.203	0.183	0.197	0.181	0.246
10	1.5	0.202	0.176	0.197	0.175	0.245
10	1.6	0.201	0.169	0.196	0.170	0.245
10	1.7	0.201	0.164	0.194	0.165	0.245
10	1.8	0.201	0.158	0.194	0.161	0.245
10	1.9	0.200	0.154	0.193	0.157	0.244
10	2	0.199	0.149	0.192	0.155	0.243
10	2.1	0.198	0.146	0.191	0.152	0.242
10	2.2	0.196	0.143	0.190	0.150	0.242
10	2.3	0.195	0.141	0.189	0.148	0.241
10	2.4	0.194	0.138	0.188	0.146	0.240

c	α	EM	HL₀₅	HL₀₆	UR_{SA}	NMSB₂₀^{τ}
10	2.5	0.192	0.136	0.188	0.147	0.239
10	2.6	0.191	0.133	0.188	0.148	0.238
10	2.7	0.190	0.133	0.187	0.149	0.237
10	2.8	0.188	0.133	0.187	0.151	0.236
10	2.9	0.186	0.133	0.187	0.152	0.235
10	3	0.185	0.133	0.187	0.153	0.234
10	3.1	0.183	0.135	0.188	0.155	0.233
10	3.2	0.181	0.136	0.188	0.157	0.232
10	3.3	0.180	0.138	0.188	0.160	0.231
10	3.4	0.179	0.139	0.188	0.163	0.230
10	3.5	0.177	0.141	0.189	0.166	0.229
10	3.6	0.175	0.143	0.190	0.170	0.228
10	3.7	0.174	0.146	0.191	0.173	0.227
10	3.8	0.172	0.149	0.192	0.176	0.225
10	3.9	0.170	0.153	0.193	0.180	0.224
10	4	0.169	0.157	0.194	0.185	0.223
10	4.1	0.167	0.161	0.196	0.190	0.221
10	4.2	0.166	0.165	0.197	0.195	0.219
10	4.3	0.164	0.169	0.199	0.199	0.217
10	4.4	0.162	0.173	0.199	0.204	0.216
10	4.5	0.160	0.178	0.200	0.210	0.214
10	4.6	0.158	0.183	0.201	0.216	0.212
10	4.7	0.155	0.189	0.203	0.222	0.210
10	4.8	0.153	0.194	0.204	0.228	0.208
10	4.9	0.152	0.199	0.206	0.235	0.206
10	5	0.149	0.204	0.208	0.241	0.204
10	5.1	0.148	0.210	0.210	0.248	0.202
10	5.2	0.145	0.217	0.212	0.255	0.200
10	5.3	0.143	0.223	0.213	0.262	0.198
10	5.4	0.141	0.229	0.215	0.271	0.197
10	5.5	0.138	0.237	0.218	0.279	0.195
10	5.6	0.136	0.244	0.219	0.287	0.193
10	5.7	0.134	0.251	0.221	0.296	0.191
10	5.8	0.132	0.258	0.223	0.306	0.189
10	5.9	0.129	0.265	0.225	0.315	0.187
10	6	0.127	0.273	0.228	0.323	0.185
15	0	0.407	0.497	0.418	0.494	0.483
15	0.1	0.407	0.496	0.417	0.495	0.483
15	0.2	0.408	0.495	0.416	0.491	0.483
15	0.3	0.408	0.489	0.416	0.484	0.482
15	0.4	0.408	0.483	0.416	0.476	0.482
15	0.5	0.408	0.474	0.414	0.464	0.482
15	0.6	0.409	0.465	0.413	0.453	0.482
15	0.7	0.410	0.454	0.411	0.442	0.482
15	0.8	0.409	0.441	0.410	0.427	0.482
15	0.9	0.410	0.428	0.408	0.410	0.482
15	1	0.410	0.414	0.407	0.396	0.482
15	1.1	0.410	0.401	0.405	0.382	0.482
15	1.2	0.410	0.388	0.404	0.369	0.481
15	1.3	0.410	0.375	0.402	0.356	0.481
15	1.4	0.411	0.363	0.400	0.346	0.482
15	1.5	0.411	0.352	0.399	0.336	0.481
15	1.6	0.411	0.340	0.399	0.329	0.481
15	1.7	0.411	0.331	0.398	0.321	0.481
15	1.8	0.412	0.322	0.397	0.315	0.481

c	α	EM	HL₀₅	HL₀₆	UR_{SA}	NMSB₂₀^{τ}
15	1.9	0.411	0.314	0.396	0.310	0.480
15	2	0.410	0.306	0.396	0.306	0.480
15	2.1	0.411	0.301	0.396	0.304	0.479
15	2.2	0.412	0.295	0.397	0.303	0.479
15	2.3	0.412	0.292	0.398	0.303	0.479
15	2.4	0.413	0.287	0.398	0.305	0.479
15	2.5	0.414	0.285	0.398	0.309	0.479
15	2.6	0.415	0.285	0.400	0.312	0.478
15	2.7	0.415	0.287	0.401	0.316	0.478
15	2.8	0.415	0.287	0.403	0.320	0.478
15	2.9	0.415	0.290	0.406	0.325	0.477
15	3	0.415	0.293	0.407	0.330	0.477
15	3.1	0.417	0.297	0.411	0.335	0.477
15	3.2	0.418	0.302	0.414	0.343	0.476
15	3.3	0.418	0.308	0.417	0.350	0.476
15	3.4	0.419	0.315	0.421	0.357	0.476
15	3.5	0.419	0.321	0.425	0.365	0.475
15	3.6	0.420	0.328	0.429	0.373	0.475
15	3.7	0.420	0.335	0.432	0.381	0.474
15	3.8	0.421	0.343	0.436	0.390	0.474
15	3.9	0.421	0.352	0.442	0.399	0.473
15	4	0.421	0.362	0.446	0.408	0.473
15	4.1	0.421	0.371	0.451	0.416	0.472
15	4.2	0.421	0.380	0.456	0.426	0.471
15	4.3	0.421	0.389	0.461	0.436	0.471
15	4.4	0.423	0.398	0.466	0.446	0.470
15	4.5	0.423	0.409	0.470	0.455	0.470
15	4.6	0.423	0.418	0.476	0.466	0.469
15	4.7	0.423	0.430	0.481	0.477	0.468
15	4.8	0.424	0.441	0.486	0.488	0.468
15	4.9	0.424	0.453	0.492	0.499	0.468
15	5	0.424	0.464	0.499	0.512	0.467
15	5.1	0.425	0.475	0.505	0.525	0.466
15	5.2	0.425	0.489	0.511	0.537	0.466
15	5.3	0.426	0.501	0.517	0.549	0.465
15	5.4	0.426	0.513	0.525	0.560	0.465
15	5.5	0.426	0.525	0.532	0.572	0.464
15	5.6	0.426	0.536	0.539	0.585	0.463
15	5.7	0.427	0.549	0.545	0.598	0.462
15	5.8	0.427	0.563	0.553	0.611	0.461
15	5.9	0.427	0.576	0.559	0.625	0.460
15	6	0.427	0.589	0.565	0.637	0.460
20	0	0.654	0.761	0.671	0.762	0.736
20	0.1	0.655	0.761	0.670	0.759	0.736
20	0.2	0.655	0.758	0.669	0.755	0.736
20	0.3	0.654	0.755	0.668	0.748	0.736
20	0.4	0.655	0.747	0.667	0.738	0.736
20	0.5	0.655	0.738	0.666	0.726	0.736
20	0.6	0.656	0.728	0.664	0.709	0.736
20	0.7	0.656	0.715	0.662	0.693	0.736
20	0.8	0.657	0.701	0.660	0.674	0.736
20	0.9	0.657	0.688	0.657	0.656	0.736
20	1	0.658	0.671	0.656	0.637	0.736
20	1.1	0.659	0.657	0.654	0.620	0.736
20	1.2	0.661	0.643	0.653	0.603	0.736

c	α	EM	HL₀₅	HL₀₆	UR_{SA}	NMSB₂₀^{τ}
20	1.3	0.661	0.626	0.652	0.585	0.736
20	1.4	0.662	0.611	0.651	0.569	0.736
20	1.5	0.664	0.596	0.650	0.557	0.736
20	1.6	0.665	0.583	0.650	0.547	0.736
20	1.7	0.667	0.570	0.650	0.537	0.736
20	1.8	0.669	0.558	0.650	0.532	0.736
20	1.9	0.671	0.546	0.650	0.528	0.736
20	2	0.672	0.536	0.650	0.525	0.736
20	2.1	0.674	0.529	0.651	0.523	0.736
20	2.2	0.676	0.523	0.653	0.525	0.736
20	2.3	0.678	0.518	0.655	0.526	0.736
20	2.4	0.679	0.516	0.656	0.530	0.736
20	2.5	0.681	0.515	0.658	0.534	0.736
20	2.6	0.683	0.514	0.660	0.540	0.736
20	2.7	0.685	0.514	0.663	0.546	0.736
20	2.8	0.687	0.517	0.666	0.553	0.736
20	2.9	0.689	0.519	0.669	0.560	0.736
20	3	0.690	0.524	0.672	0.569	0.736
20	3.1	0.692	0.530	0.676	0.577	0.736
20	3.2	0.694	0.536	0.680	0.585	0.736
20	3.3	0.696	0.544	0.684	0.594	0.736
20	3.4	0.697	0.550	0.688	0.603	0.736
20	3.5	0.699	0.559	0.692	0.612	0.736
20	3.6	0.701	0.566	0.697	0.621	0.736
20	3.7	0.704	0.575	0.702	0.631	0.736
20	3.8	0.706	0.586	0.708	0.641	0.736
20	3.9	0.709	0.598	0.712	0.650	0.736
20	4	0.712	0.609	0.719	0.660	0.736
20	4.1	0.714	0.619	0.725	0.671	0.736
20	4.2	0.716	0.631	0.732	0.682	0.736
20	4.3	0.718	0.642	0.738	0.693	0.736
20	4.4	0.721	0.654	0.744	0.703	0.736
20	4.5	0.724	0.666	0.749	0.714	0.736
20	4.6	0.727	0.677	0.755	0.724	0.736
20	4.7	0.729	0.689	0.761	0.735	0.736
20	4.8	0.732	0.699	0.768	0.747	0.736
20	4.9	0.735	0.712	0.774	0.757	0.736
20	5	0.737	0.725	0.782	0.768	0.736
20	5.1	0.740	0.736	0.788	0.777	0.736
20	5.2	0.743	0.749	0.795	0.788	0.736
20	5.3	0.745	0.761	0.802	0.798	0.736
20	5.4	0.747	0.772	0.808	0.809	0.736
20	5.5	0.750	0.783	0.815	0.818	0.736
20	5.6	0.752	0.794	0.821	0.828	0.736
20	5.7	0.755	0.805	0.827	0.837	0.736
20	5.8	0.757	0.815	0.833	0.847	0.736
20	5.9	0.760	0.825	0.839	0.856	0.736
20	6	0.763	0.836	0.844	0.864	0.736

Tabla 4.3: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 100$. $u_t \sim \text{MA}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.194	0.073	0.026	0.008	0.003	0.001	0.000
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.195	0.081	0.036	0.012	0.004	0.001	0.000
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.194	0.088	0.041	0.018	0.006	0.002	0.001
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.096	0.026	0.006	0.004	0.002	0.002	0.001
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.096	0.028	0.007	0.006	0.004	0.003	0.002
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.096	0.030	0.006	0.007	0.007	0.005	0.003
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.053	0.028	0.007	0.003	0.003	0.002	0.001
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.053	0.026	0.004	0.002	0.003	0.003	0.002
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.053	0.024	0.002	0.002	0.003	0.003	0.003
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.090	0.075	0.042	0.018	0.010	0.007	0.006
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.090	0.074	0.039	0.015	0.007	0.006	0.006
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.090	0.073	0.037	0.013	0.006	0.006	0.006
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.108	0.098	0.077	0.060	0.045	0.035	0.030
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.108	0.097	0.073	0.053	0.040	0.032	0.028
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.108	0.096	0.072	0.049	0.036	0.030	0.025
$\rho_c = 0.95$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.274	0.194	0.059	0.011	0.003	0.003	0.003
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.275	0.178	0.044	0.007	0.002	0.002	0.004
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.274	0.170	0.037	0.004	0.002	0.002	0.003
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.156	0.139	0.091	0.046	0.021	0.011	0.008
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.156	0.136	0.079	0.030	0.010	0.005	0.006
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.156	0.131	0.071	0.023	0.007	0.004	0.005
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.101	0.099	0.085	0.065	0.046	0.028	0.017
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.102	0.099	0.077	0.051	0.026	0.012	0.005
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.101	0.095	0.069	0.041	0.017	0.006	0.003
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.140	0.140	0.134	0.124	0.113	0.097	0.082
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.140	0.139	0.129	0.115	0.097	0.078	0.059
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.140	0.137	0.124	0.108	0.085	0.066	0.048
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.146	0.144	0.141	0.137	0.133	0.127	0.120
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.146	0.145	0.139	0.133	0.124	0.110	0.100
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.145	0.143	0.137	0.129	0.116	0.101	0.087
$\rho_c = 0.90$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.420	0.356	0.238	0.142	0.084	0.067	0.078
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.421	0.332	0.172	0.065	0.021	0.007	0.004
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.420	0.317	0.137	0.037	0.007	0.002	0.001
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.276	0.270	0.245	0.220	0.203	0.198	0.211
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.277	0.263	0.222	0.164	0.113	0.076	0.051
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.276	0.258	0.198	0.123	0.066	0.031	0.015
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.241	0.239	0.239	0.235	0.231	0.222	0.211
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.242	0.238	0.226	0.203	0.175	0.146	0.115
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.241	0.233	0.211	0.176	0.136	0.095	0.062
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.234	0.237	0.237	0.240	0.243	0.244	0.250
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.235	0.238	0.234	0.229	0.223	0.213	0.203
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.234	0.234	0.228	0.217	0.203	0.184	0.167
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.219	0.218	0.221	0.227	0.235	0.240	0.246
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.220	0.219	0.220	0.220	0.221	0.220	0.218
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.219	0.216	0.216	0.213	0.207	0.201	0.192

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.80$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.721	0.714	0.691	0.669	0.661	0.673	0.704
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.721	0.700	0.647	0.578	0.515	0.465	0.427
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.721	0.686	0.592	0.472	0.353	0.255	0.186
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.503	0.505	0.517	0.538	0.575	0.624	0.691
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.503	0.501	0.501	0.506	0.517	0.541	0.572
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.503	0.494	0.480	0.465	0.442	0.423	0.411
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.634	0.636	0.646	0.661	0.682	0.708	0.735
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.636	0.636	0.640	0.647	0.657	0.666	0.676
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.634	0.631	0.627	0.620	0.609	0.599	0.583
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.404	0.408	0.415	0.431	0.448	0.472	0.498
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.406	0.408	0.414	0.422	0.437	0.453	0.469
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.404	0.405	0.406	0.410	0.414	0.421	0.426
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.390	0.392	0.402	0.416	0.435	0.458	0.483
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.391	0.394	0.401	0.410	0.426	0.446	0.463
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.389	0.392	0.396	0.402	0.413	0.423	0.436

Tabla 4.4: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 250$. $u_t \sim \text{MA}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.050	0.012	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.050	0.013	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.050	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.080	0.046	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.080	0.045	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.080	0.046	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.064	0.055	0.033	0.014	0.004	0.001	0.000
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.064	0.053	0.029	0.010	0.002	0.000	0.000
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.064	0.053	0.027	0.009	0.002	0.000	0.000
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.076	0.072	0.059	0.041	0.025	0.014	0.005
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.076	0.071	0.058	0.039	0.022	0.011	0.004
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.076	0.071	0.058	0.039	0.022	0.011	0.005
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.116	0.112	0.103	0.088	0.070	0.050	0.035
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.116	0.113	0.102	0.085	0.067	0.047	0.032
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.116	0.112	0.101	0.085	0.066	0.048	0.033
$\rho_c = 0.95$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.179	0.120	0.051	0.030	0.055	0.166	0.354
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.179	0.108	0.032	0.008	0.007	0.008	0.009
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.179	0.101	0.022	0.003	0.001	0.001	0.000
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.308	0.303	0.288	0.274	0.278	0.301	0.340
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.308	0.296	0.256	0.210	0.169	0.134	0.105
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.308	0.289	0.230	0.163	0.102	0.058	0.032
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.345	0.344	0.340	0.338	0.334	0.329	0.324
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.345	0.338	0.329	0.311	0.287	0.258	0.227
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.345	0.334	0.317	0.288	0.248	0.201	0.157

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.325	0.325	0.325	0.324	0.324	0.326	0.328
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.325	0.323	0.319	0.312	0.305	0.293	0.282
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.325	0.321	0.315	0.303	0.285	0.266	0.246
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.352	0.348	0.348	0.348	0.351	0.353	0.357
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.351	0.347	0.344	0.342	0.339	0.335	0.331
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.351	0.346	0.340	0.335	0.328	0.319	0.308
$\rho_c = 0.90$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.445	0.431	0.364	0.311	0.310	0.381	0.511
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.445	0.415	0.348	0.305	0.310	0.384	0.518
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.445	0.400	0.309	0.236	0.201	0.212	0.269
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.621	0.628	0.653	0.690	0.741	0.800	0.862
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.620	0.623	0.645	0.677	0.718	0.771	0.829
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.620	0.621	0.631	0.645	0.664	0.687	0.718
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.806	0.808	0.813	0.822	0.831	0.846	0.859
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.806	0.807	0.811	0.818	0.828	0.839	0.852
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.806	0.806	0.807	0.809	0.812	0.814	0.817
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.724	0.726	0.731	0.740	0.751	0.764	0.780
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.724	0.726	0.732	0.738	0.748	0.760	0.772
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.724	0.726	0.730	0.734	0.739	0.746	0.751
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.653	0.655	0.658	0.667	0.679	0.692	0.707
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.652	0.654	0.657	0.665	0.674	0.686	0.698
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.652	0.653	0.656	0.661	0.666	0.675	0.683
$\rho_c = 0.80$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.811	0.814	0.753	0.613	0.447	0.326	0.263
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.811	0.820	0.811	0.767	0.686	0.574	0.462
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.811	0.817	0.819	0.809	0.797	0.776	0.751
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.776	0.783	0.795	0.801	0.800	0.790	0.770
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.776	0.783	0.801	0.823	0.841	0.857	0.869
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.776	0.782	0.799	0.821	0.844	0.864	0.881
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.908	0.910	0.914	0.919	0.925	0.929	0.932
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.908	0.911	0.915	0.923	0.930	0.939	0.947
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.908	0.911	0.915	0.922	0.930	0.938	0.948
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.901	0.902	0.903	0.907	0.912	0.917	0.921
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.901	0.902	0.905	0.910	0.914	0.920	0.927
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.901	0.901	0.904	0.909	0.914	0.920	0.928
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.860	0.860	0.862	0.865	0.871	0.875	0.879
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.859	0.860	0.862	0.867	0.873	0.880	0.887
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.859	0.860	0.862	0.867	0.874	0.880	0.888

Tabla 4.5: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 500$. $u_t \sim \text{MA}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.032	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.032	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.032	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.118	0.096	0.053	0.018	0.005	0.001	0.000
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.119	0.092	0.044	0.010	0.001	0.000	0.000
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.119	0.090	0.039	0.008	0.001	0.000	0.000
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.106	0.100	0.087	0.069	0.049	0.030	0.016
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.107	0.099	0.081	0.059	0.036	0.017	0.007
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.107	0.098	0.079	0.054	0.030	0.012	0.004
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.121	0.118	0.112	0.100	0.086	0.071	0.056
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.121	0.120	0.109	0.095	0.079	0.060	0.044
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.121	0.119	0.108	0.092	0.074	0.055	0.036
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.151	0.150	0.142	0.136	0.125	0.112	0.097
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.152	0.150	0.143	0.133	0.120	0.103	0.088
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.152	0.150	0.143	0.132	0.116	0.099	0.081
$\rho_c = 0.95$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.305	0.263	0.190	0.174	0.286	0.590	0.862
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.306	0.263	0.203	0.209	0.334	0.618	0.876
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.306	0.258	0.181	0.152	0.185	0.291	0.442
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.745	0.752	0.771	0.796	0.833	0.872	0.908
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.747	0.753	0.768	0.793	0.823	0.855	0.890
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.747	0.749	0.752	0.756	0.762	0.768	0.775
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.846	0.848	0.850	0.854	0.861	0.866	0.872
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.847	0.848	0.851	0.855	0.859	0.864	0.871
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.847	0.848	0.847	0.847	0.846	0.843	0.839
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.794	0.796	0.800	0.805	0.811	0.818	0.826
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.796	0.798	0.802	0.806	0.809	0.816	0.824
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.796	0.799	0.799	0.801	0.803	0.803	0.805
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.760	0.762	0.763	0.767	0.773	0.781	0.791
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.762	0.763	0.764	0.768	0.773	0.779	0.786
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.762	0.762	0.763	0.764	0.766	0.770	0.772
$\rho_c = 0.90$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.699	0.691	0.630	0.533	0.428	0.315	0.208
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.699	0.696	0.685	0.660	0.644	0.643	0.658
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.700	0.696	0.694	0.707	0.740	0.791	0.845
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.931	0.933	0.939	0.943	0.946	0.945	0.938
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.931	0.934	0.944	0.956	0.967	0.976	0.983
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.932	0.935	0.945	0.958	0.971	0.981	0.990
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.975	0.974	0.976	0.977	0.980	0.980	0.982
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.975	0.975	0.977	0.980	0.983	0.986	0.988
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.975	0.975	0.978	0.980	0.984	0.987	0.989
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.973	0.973	0.973	0.974	0.974	0.976	0.977
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.973	0.973	0.974	0.975	0.977	0.979	0.981
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.973	0.973	0.974	0.975	0.978	0.980	0.982
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.964	0.964	0.965	0.965	0.966	0.967	0.969
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.964	0.965	0.965	0.967	0.968	0.971	0.973
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.964	0.965	0.965	0.967	0.969	0.971	0.974
$\rho_c = 0.80$								
$\theta = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.930	0.927	0.897	0.863	0.809	0.767	0.773
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.930	0.930	0.914	0.884	0.845	0.795	0.764
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.930	0.931	0.925	0.906	0.875	0.830	0.776

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\theta = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.964	0.963	0.959	0.950	0.934	0.917	0.896
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.964	0.964	0.965	0.963	0.958	0.953	0.947
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.964	0.965	0.967	0.968	0.969	0.969	0.968
$\theta = 0$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.991	0.991	0.991	0.990	0.988	0.986	0.982
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.990
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.991	0.991	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993
$\theta = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.992	0.993	0.992	0.991	0.991	0.990	0.989
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.993	0.993	0.993	0.993	0.992	0.992	0.992
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993
$\theta = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.992	0.992	0.992	0.992	0.991	0.991	0.990
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993

Tabla 4.6: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 100$. $u_t \sim \text{AR}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$		<hr/>						
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.003	0.003	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.003	0.002	0.004	0.004	0.003	0.003	0.002
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.003	0.001	0.003	0.005	0.005	0.004	0.003
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.036	0.011	0.004	0.003	0.002	0.002	0.002
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.036	0.009	0.004	0.004	0.003	0.002	0.002
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.036	0.008	0.003	0.003	0.004	0.004	0.003
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.110	0.098	0.070	0.038	0.018	0.008	0.005
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.111	0.097	0.066	0.033	0.014	0.007	0.005
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.110	0.096	0.065	0.034	0.013	0.006	0.004
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.174	0.171	0.164	0.148	0.131	0.112	0.091
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.175	0.171	0.162	0.146	0.126	0.107	0.086
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.174	0.171	0.161	0.145	0.126	0.107	0.087
$\rho_c = 0.95$		<hr/>						
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.006	0.004	0.003	0.002	0.003	0.003	0.004
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.006	0.004	0.002	0.001	0.002	0.003	0.004
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.006	0.004	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.066	0.059	0.041	0.023	0.011	0.008	0.006
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.067	0.058	0.033	0.013	0.005	0.004	0.004
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.066	0.057	0.029	0.009	0.003	0.002	0.003
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.174	0.174	0.170	0.162	0.152	0.142	0.129
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.175	0.174	0.166	0.156	0.139	0.124	0.106
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.174	0.172	0.163	0.149	0.131	0.111	0.093
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.221	0.221	0.220	0.218	0.215	0.214	0.212
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.222	0.221	0.220	0.217	0.213	0.210	0.204
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.221	0.221	0.218	0.213	0.210	0.203	0.196
$\rho_c = 0.90$		<hr/>						
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.014	0.015	0.012	0.011	0.012	0.015	0.020
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.015	0.014	0.010	0.008	0.006	0.005	0.005
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.014	0.014	0.009	0.005	0.003	0.002	0.002

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.157	0.153	0.146	0.137	0.130	0.128	0.127
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.158	0.149	0.131	0.104	0.077	0.052	0.036
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.157	0.145	0.116	0.077	0.043	0.023	0.011
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.288	0.289	0.289	0.290	0.292	0.294	0.295
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.290	0.289	0.287	0.284	0.277	0.271	0.263
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.288	0.287	0.283	0.275	0.263	0.249	0.233
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.300	0.300	0.300	0.300	0.299	0.300	0.302
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.301	0.301	0.299	0.298	0.297	0.296	0.293
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.299	0.299	0.297	0.294	0.292	0.289	0.284
$\rho_c = 0.80$								
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.062	0.063	0.065	0.071	0.080	0.099	0.131
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.063	0.063	0.065	0.067	0.074	0.082	0.096
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.062	0.062	0.060	0.058	0.055	0.055	0.057
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.438	0.444	0.460	0.490	0.532	0.585	0.653
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.440	0.443	0.451	0.467	0.484	0.507	0.536
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.438	0.436	0.432	0.423	0.406	0.392	0.375
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.381	0.383	0.387	0.394	0.403	0.416	0.431
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.381	0.384	0.387	0.391	0.397	0.406	0.414
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.380	0.382	0.384	0.385	0.387	0.390	0.395
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.434	0.434	0.435	0.436	0.439	0.439	0.443
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.435	0.435	0.436	0.436	0.438	0.440	0.441
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.433	0.434	0.434	0.433	0.433	0.433	0.432

Tabla 4.7: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 250$. $u_t \sim \text{AR}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.012	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.012	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.012	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.052	0.035	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.052	0.034	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.052	0.034	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.090	0.085	0.076	0.064	0.049	0.034	0.022
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.089	0.086	0.075	0.060	0.044	0.029	0.018
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.089	0.085	0.074	0.059	0.043	0.028	0.017
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.105	0.104	0.102	0.100	0.096	0.091	0.084
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.105	0.105	0.103	0.099	0.094	0.089	0.082
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.105	0.105	0.103	0.098	0.094	0.088	0.081
$\rho_c = 0.95$								
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.088	0.086	0.078	0.074	0.070	0.073	0.083
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.088	0.082	0.068	0.051	0.037	0.027	0.020
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.088	0.080	0.058	0.036	0.020	0.010	0.005
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.285	0.281	0.276	0.269	0.263	0.257	0.258
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.285	0.275	0.254	0.222	0.183	0.145	0.113
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.285	0.271	0.235	0.182	0.128	0.081	0.047

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.372	0.373	0.373	0.373	0.373	0.375	0.376
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.372	0.372	0.370	0.367	0.361	0.354	0.347
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.372	0.372	0.366	0.358	0.349	0.336	0.319
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.336	0.335	0.334	0.335	0.335	0.336	0.337
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.336	0.334	0.334	0.334	0.334	0.333	0.333
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.336	0.334	0.333	0.333	0.331	0.330	0.328
$\rho_c = 0.90$								
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.383	0.384	0.392	0.404	0.424	0.459	0.506
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.382	0.384	0.392	0.409	0.434	0.471	0.518
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.382	0.383	0.382	0.379	0.378	0.377	0.381
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.714	0.719	0.734	0.755	0.782	0.814	0.847
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.713	0.719	0.731	0.751	0.773	0.802	0.833
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.713	0.717	0.723	0.728	0.734	0.740	0.745
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.766	0.767	0.770	0.776	0.782	0.789	0.798
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.765	0.767	0.770	0.773	0.777	0.784	0.791
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.765	0.766	0.768	0.769	0.772	0.776	0.779
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.632	0.633	0.633	0.634	0.636	0.639	0.641
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.632	0.632	0.634	0.635	0.635	0.636	0.639
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.632	0.632	0.633	0.633	0.633	0.634	0.634
$\rho_c = 0.80$								
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.656	0.659	0.664	0.666	0.658	0.635	0.599
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.656	0.663	0.680	0.705	0.731	0.751	0.769
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.656	0.662	0.682	0.711	0.741	0.771	0.798
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.848	0.852	0.860	0.870	0.877	0.879	0.877
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.848	0.852	0.865	0.881	0.896	0.910	0.923
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.848	0.852	0.864	0.880	0.897	0.912	0.926
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.906	0.905	0.907	0.910	0.914	0.917	0.921
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.905	0.905	0.908	0.911	0.915	0.918	0.924
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.905	0.905	0.908	0.910	0.914	0.918	0.924
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.849	0.850	0.849	0.850	0.852	0.854	0.855
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.849	0.850	0.850	0.852	0.854	0.856	0.859
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.849	0.850	0.850	0.852	0.854	0.857	0.860

Tabla 4.8: Potencia ajustada al tamaño del NMSB. $T = 500$. $u_t \sim \text{AR}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.050	0.040	0.021	0.007	0.001	0.000	0.000
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.050	0.038	0.016	0.003	0.000	0.000	0.000
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.050	0.037	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.095	0.083	0.059	0.033	0.012	0.003	0.001
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.096	0.081	0.052	0.022	0.005	0.001	0.000
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.096	0.079	0.048	0.017	0.003	0.000	0.000
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.122	0.119	0.114	0.108	0.101	0.090	0.079
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.122	0.120	0.113	0.106	0.095	0.083	0.070
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.122	0.120	0.113	0.104	0.091	0.078	0.064

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.127	0.126	0.126	0.125	0.123	0.122	0.119
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.128	0.127	0.126	0.125	0.123	0.121	0.118
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.128	0.127	0.126	0.124	0.122	0.120	0.117
$\rho_c = 0.95$								
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.642	0.645	0.654	0.666	0.681	0.702	0.726
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.645	0.648	0.655	0.669	0.686	0.709	0.736
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.645	0.644	0.641	0.634	0.621	0.606	0.589
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.807	0.811	0.818	0.828	0.839	0.852	0.865
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.809	0.812	0.819	0.827	0.838	0.852	0.863
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.809	0.810	0.810	0.806	0.802	0.795	0.787
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.826	0.826	0.827	0.829	0.831	0.834	0.838
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.826	0.826	0.827	0.829	0.832	0.835	0.839
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.827	0.827	0.827	0.827	0.828	0.829	0.829
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.740	0.741	0.741	0.741	0.743	0.744	0.746
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.742	0.742	0.742	0.742	0.744	0.744	0.746
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.742	0.742	0.742	0.743	0.743	0.743	0.744
$\rho_c = 0.90$								
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.881	0.885	0.893	0.898	0.899	0.893	0.877
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.882	0.888	0.903	0.919	0.936	0.950	0.961
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.882	0.888	0.904	0.921	0.940	0.957	0.970
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.958	0.959	0.963	0.966	0.968	0.970	0.970
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.959	0.961	0.966	0.972	0.978	0.983	0.988
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.959	0.961	0.967	0.973	0.980	0.985	0.990
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.973	0.973	0.974	0.974	0.974	0.975	0.976
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.977	0.978
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.977	0.979
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.954	0.953	0.953	0.954	0.954	0.955	0.955
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.954	0.954	0.954	0.954	0.955	0.956	0.957
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.954	0.954	0.954	0.954	0.955	0.956	0.956
$\rho_c = 0.80$								
$\phi = -0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.904	0.905	0.900	0.887	0.868	0.841	0.810
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.904	0.906	0.909	0.908	0.907	0.900	0.890
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.904	0.907	0.912	0.918	0.923	0.927	0.930
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.979	0.978	0.977	0.973	0.967	0.957	0.947
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.979	0.980	0.979	0.979	0.978	0.976	0.973
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.979	0.980	0.980	0.982	0.983	0.983	0.984
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.993	0.993	0.993	0.993	0.992	0.991	0.990
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.993	0.993	0.993	0.994	0.994	0.994	0.994
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^{\tau}$	0.982	0.982	0.982	0.982	0.982	0.981	0.981
	NMSB $_{30}^{\tau}$	0.983	0.982	0.982	0.982	0.982	0.983	0.983
	NMSB $_{40}^{\tau}$	0.983	0.983	0.982	0.983	0.983	0.983	0.983

Tabla 4.9: Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 100$. $u_t \sim \text{MA}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.201	0.185	0.138	0.084	0.041	0.017	0.006
	HL ₀₆	0.190	0.176	0.134	0.084	0.044	0.020	0.007
	EM	0.193	0.179	0.136	0.085	0.045	0.020	0.008
	UR _{SA}	0.210	0.194	0.147	0.090	0.045	0.020	0.007
	NMSB ₂₀ ⁷	0.194	0.073	0.026	0.008	0.003	0.001	0.000
$\theta = -0.5$	HL ₀₅	0.080	0.079	0.075	0.067	0.057	0.045	0.035
	HL ₀₆	0.087	0.085	0.083	0.077	0.065	0.055	0.043
	EM	0.095	0.093	0.090	0.082	0.071	0.060	0.047
	UR _{SA}	0.083	0.082	0.079	0.069	0.060	0.048	0.038
	NMSB ₂₀ ⁷	0.096	0.026	0.006	0.004	0.002	0.002	0.001
$\theta = 0$	HL ₀₅	0.051	0.052	0.052	0.053	0.051	0.049	0.047
	HL ₀₆	0.052	0.051	0.052	0.053	0.051	0.049	0.048
	EM	0.052	0.052	0.052	0.051	0.050	0.049	0.048
	UR _{SA}	0.051	0.052	0.051	0.052	0.051	0.048	0.046
	NMSB ₂₀ ⁷	0.053	0.028	0.007	0.003	0.003	0.002	0.001
$\theta = 0.5$	HL ₀₅	0.032	0.032	0.031	0.031	0.031	0.029	0.028
	HL ₀₆	0.065	0.067	0.067	0.066	0.066	0.065	0.063
	EM	0.084	0.085	0.085	0.085	0.083	0.082	0.080
	UR _{SA}	0.032	0.031	0.032	0.032	0.032	0.031	0.029
	NMSB ₂₀ ⁷	0.090	0.075	0.042	0.018	0.010	0.007	0.006
$\theta = 0.8$	HL ₀₅	0.015	0.015	0.014	0.015	0.014	0.014	0.015
	HL ₀₆	0.069	0.068	0.069	0.067	0.068	0.068	0.068
	EM	0.101	0.100	0.102	0.102	0.101	0.101	0.100
	UR _{SA}	0.016	0.016	0.016	0.017	0.016	0.016	0.016
	NMSB ₂₀ ⁷	0.108	0.098	0.077	0.060	0.045	0.035	0.030
$\rho_c = 0.95$								
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.304	0.116	0.012	0.003	0.002	0.002	0.002
	HL ₀₆	0.262	0.133	0.021	0.002	0.001	0.000	0.000
	EM	0.268	0.132	0.019	0.002	0.001	0.002	0.002
	UR _{SA}	0.314	0.133	0.021	0.007	0.007	0.006	0.008
	NMSB ₂₀ ⁵	0.274	0.194	0.059	0.011	0.003	0.003	0.003
$\theta = -0.5$	HL ₀₅	0.137	0.106	0.055	0.029	0.024	0.023	0.024
	HL ₀₆	0.137	0.120	0.079	0.045	0.024	0.013	0.008
	EM	0.150	0.130	0.081	0.039	0.017	0.008	0.005
	UR _{SA}	0.140	0.110	0.064	0.041	0.035	0.037	0.042
	NMSB ₂₀ ⁷	0.156	0.139	0.091	0.046	0.021	0.011	0.008
$\theta = 0$	HL ₀₅	0.094	0.090	0.079	0.068	0.061	0.063	0.070
	HL ₀₆	0.088	0.090	0.085	0.078	0.067	0.060	0.051
	EM	0.097	0.094	0.082	0.066	0.049	0.033	0.022
	UR _{SA}	0.093	0.088	0.076	0.067	0.065	0.070	0.083
	NMSB ₂₀ ⁷	0.101	0.099	0.085	0.065	0.046	0.028	0.017
$\theta = 0.5$	HL ₀₅	0.051	0.050	0.048	0.042	0.038	0.034	0.031
	HL ₀₆	0.104	0.103	0.100	0.092	0.084	0.075	0.066
	EM	0.133	0.131	0.125	0.117	0.106	0.094	0.080
	UR _{SA}	0.051	0.052	0.049	0.041	0.039	0.034	0.032
	NMSB ₂₀ ⁷	0.140	0.140	0.134	0.124	0.113	0.097	0.082
$\theta = 0.8$	HL ₀₅	0.026	0.025	0.024	0.023	0.021	0.017	0.016
	HL ₀₆	0.100	0.099	0.096	0.091	0.084	0.075	0.068
	EM	0.138	0.138	0.138	0.132	0.126	0.115	0.109

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
	UR _{SA}	0.029	0.027	0.026	0.025	0.023	0.019	0.018
	NMSB ₂₀ ^T	0.146	0.144	0.141	0.137	0.133	0.127	0.120
$\rho_c = 0.90$								
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.480	0.209	0.045	0.033	0.068	0.132	0.209
	HL ₀₆	0.405	0.254	0.078	0.033	0.031	0.041	0.051
	EM	0.412	0.249	0.069	0.024	0.015	0.012	0.009
	UR _{SA}	0.492	0.249	0.086	0.071	0.110	0.173	0.245
	NMSB ₂₀ ^T	0.420	0.356	0.238	0.142	0.084	0.067	0.078
$\theta = -0.5$	HL ₀₅	0.260	0.186	0.114	0.107	0.143	0.205	0.287
	HL ₀₆	0.241	0.228	0.189	0.161	0.151	0.154	0.167
	EM	0.258	0.240	0.184	0.130	0.093	0.068	0.049
	UR _{SA}	0.270	0.192	0.139	0.139	0.171	0.233	0.314
	NMSB ₂₀ ^T	0.276	0.270	0.245	0.220	0.203	0.198	0.211
$\theta = 0$	HL ₀₅	0.218	0.202	0.171	0.163	0.189	0.240	0.314
	HL ₀₆	0.193	0.198	0.202	0.208	0.223	0.239	0.260
	EM	0.216	0.214	0.199	0.177	0.156	0.132	0.110
	UR _{SA}	0.222	0.196	0.160	0.161	0.198	0.259	0.340
	NMSB ₂₀ ^T	0.241	0.239	0.239	0.235	0.231	0.222	0.211
$\theta = 0.5$	HL ₀₅	0.103	0.097	0.086	0.078	0.079	0.085	0.096
	HL ₀₆	0.177	0.179	0.176	0.176	0.176	0.179	0.180
	EM	0.215	0.217	0.218	0.218	0.214	0.207	0.200
	UR _{SA}	0.106	0.099	0.083	0.076	0.078	0.087	0.099
	NMSB ₂₀ ^T	0.234	0.237	0.237	0.240	0.243	0.244	0.250
$\theta = 0.8$	HL ₀₅	0.058	0.057	0.049	0.042	0.038	0.037	0.040
	HL ₀₆	0.161	0.158	0.153	0.150	0.145	0.138	0.135
	EM	0.204	0.203	0.204	0.207	0.208	0.210	0.211
	UR _{SA}	0.061	0.059	0.051	0.043	0.039	0.040	0.044
	NMSB ₂₀ ^T	0.219	0.218	0.221	0.227	0.235	0.240	0.246
$\rho_c = 0.80$								
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.769	0.546	0.270	0.130	0.116	0.145	0.187
	HL ₀₆	0.709	0.605	0.377	0.222	0.187	0.218	0.280
	EM	0.714	0.598	0.364	0.222	0.219	0.341	0.541
	UR _{SA}	0.776	0.601	0.344	0.162	0.114	0.118	0.140
	NMSB ₂₀ ^T	0.721	0.714	0.691	0.669	0.661	0.673	0.704
$\theta = -0.5$	HL ₀₅	0.512	0.392	0.304	0.302	0.331	0.374	0.416
	HL ₀₆	0.465	0.457	0.448	0.450	0.462	0.496	0.540
	EM	0.484	0.470	0.452	0.457	0.501	0.594	0.715
	UR _{SA}	0.526	0.397	0.355	0.334	0.326	0.333	0.351
	NMSB ₂₀ ^T	0.503	0.505	0.517	0.538	0.575	0.624	0.691
$\theta = 0$	HL ₀₅	0.590	0.551	0.499	0.498	0.550	0.613	0.664
	HL ₀₆	0.554	0.563	0.581	0.612	0.657	0.696	0.733
	EM	0.594	0.598	0.603	0.615	0.635	0.666	0.701
	UR _{SA}	0.604	0.540	0.465	0.490	0.551	0.608	0.650
	NMSB ₂₀ ^T	0.634	0.636	0.646	0.661	0.682	0.708	0.735
$\theta = 0.5$	HL ₀₅	0.261	0.238	0.203	0.194	0.219	0.271	0.330
	HL ₀₆	0.319	0.323	0.339	0.370	0.413	0.467	0.516
	EM	0.367	0.372	0.390	0.419	0.455	0.501	0.548
	UR _{SA}	0.278	0.238	0.186	0.178	0.216	0.271	0.324
	NMSB ₂₀ ^T	0.404	0.408	0.415	0.431	0.448	0.472	0.498

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\theta = 0.8$	HL ₀₅	0.192	0.179	0.152	0.131	0.126	0.138	0.158
	HL ₀₆	0.313	0.313	0.311	0.321	0.332	0.349	0.369
	EM	0.359	0.364	0.377	0.397	0.422	0.454	0.487
	UR _{SA}	0.204	0.184	0.149	0.124	0.124	0.139	0.158
	NMSB ₂₀ ^T	0.390	0.392	0.402	0.416	0.435	0.458	0.483

Tabla 4.10: Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 250$. $u_t \sim \text{MA}(1)$

		α						
$\rho_c = 0.99$		0	1	2	3	4	5	6
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.099	0.045	0.008	0.002	0.001	0.000	0.000
	HL ₀₆	0.052	0.029	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000
	EM	0.047	0.025	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	UR _{SA}	0.110	0.059	0.018	0.006	0.003	0.001	0.000
	NMSB ₂₀ ^T	0.050	0.012	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\theta = -0.5$	HL ₀₅	0.075	0.066	0.046	0.029	0.021	0.015	0.012
	HL ₀₆	0.073	0.067	0.052	0.035	0.022	0.013	0.008
	EM	0.076	0.069	0.051	0.034	0.020	0.009	0.004
	UR _{SA}	0.077	0.070	0.052	0.036	0.029	0.022	0.019
	NMSB ₂₀ ^T	0.080	0.046	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000
$\theta = 0$	HL ₀₅	0.062	0.057	0.053	0.048	0.042	0.037	0.033
	HL ₀₆	0.061	0.057	0.056	0.050	0.045	0.039	0.033
	EM	0.062	0.059	0.055	0.048	0.042	0.035	0.027
	UR _{SA}	0.061	0.057	0.053	0.049	0.044	0.040	0.039
	NMSB ₂₀ ^T	0.064	0.055	0.033	0.014	0.004	0.001	0.000
$\theta = 0.5$	HL ₀₅	0.042	0.042	0.041	0.037	0.034	0.031	0.028
	HL ₀₆	0.062	0.061	0.059	0.057	0.053	0.049	0.044
	EM	0.072	0.071	0.069	0.065	0.061	0.056	0.050
	UR _{SA}	0.043	0.044	0.042	0.039	0.036	0.034	0.032
	NMSB ₂₀ ^T	0.076	0.072	0.059	0.041	0.025	0.014	0.005
$\theta = 0.8$	HL ₀₅	0.032	0.032	0.031	0.029	0.027	0.025	0.023
	HL ₀₆	0.084	0.082	0.080	0.077	0.073	0.071	0.065
	EM	0.110	0.109	0.105	0.102	0.098	0.094	0.087
	UR _{SA}	0.033	0.034	0.032	0.032	0.029	0.028	0.026
	NMSB ₂₀ ^T	0.116	0.112	0.103	0.088	0.070	0.050	0.035
$\rho_c = 0.95$								
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.373	0.100	0.254	0.582	0.742	0.673	0.498
	HL ₀₆	0.169	0.132	0.151	0.309	0.464	0.503	0.426
	EM	0.163	0.096	0.053	0.081	0.118	0.135	0.144
	UR _{SA}	0.384	0.240	0.402	0.650	0.751	0.670	0.494
	NMSB ₂₀ ^T	0.179	0.120	0.051	0.030	0.055	0.166	0.354
$\theta = -0.5$	HL ₀₅	0.328	0.202	0.196	0.330	0.518	0.693	0.803
	HL ₀₆	0.265	0.260	0.282	0.348	0.445	0.535	0.606
	EM	0.272	0.268	0.257	0.251	0.246	0.238	0.226
	UR _{SA}	0.326	0.213	0.251	0.383	0.561	0.725	0.827
	NMSB ₂₀ ^T	0.308	0.303	0.288	0.274	0.278	0.301	0.340
$\theta = 0$	HL ₀₅	0.335	0.290	0.228	0.224	0.283	0.381	0.493
	HL ₀₆	0.286	0.283	0.286	0.303	0.341	0.388	0.442
	EM	0.299	0.297	0.297	0.292	0.284	0.275	0.263

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\theta = 0.5$	UR _{SA}	0.328	0.273	0.217	0.240	0.316	0.422	0.545
	NMSB ₂₀ ^T	0.345	0.344	0.340	0.338	0.334	0.329	0.324
	HL ₀₅	0.228	0.207	0.168	0.138	0.133	0.152	0.191
	HL ₀₆	0.261	0.257	0.249	0.242	0.244	0.257	0.279
	EM	0.284	0.285	0.288	0.285	0.285	0.288	0.290
	UR _{SA}	0.225	0.202	0.159	0.136	0.144	0.170	0.210
$\theta = 0.8$	NMSB ₂₀ ^T	0.325	0.325	0.325	0.324	0.324	0.326	0.328
	HL ₀₅	0.157	0.145	0.118	0.094	0.080	0.082	0.094
	HL ₀₆	0.278	0.270	0.259	0.246	0.239	0.238	0.239
	EM	0.313	0.312	0.313	0.315	0.322	0.330	0.334
	UR _{SA}	0.156	0.145	0.116	0.095	0.087	0.096	0.110
	NMSB ₂₀ ^T	0.352	0.348	0.348	0.348	0.351	0.353	0.357
$\rho_c = 0.90$								
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.691	0.336	0.556	0.847	0.915	0.878	0.810
	HL ₀₆	0.429	0.438	0.537	0.819	0.929	0.896	0.834
	EM	0.424	0.375	0.357	0.610	0.904	0.986	0.998
	UR _{SA}	0.703	0.555	0.655	0.811	0.876	0.859	0.795
	NMSB ₂₀ ^T	0.445	0.431	0.364	0.311	0.310	0.381	0.511
	$\theta = -0.5$	HL ₀₅	0.667	0.492	0.521	0.707	0.862	0.941
HL ₀₆		0.575	0.591	0.672	0.795	0.902	0.962	0.979
EM		0.579	0.601	0.679	0.801	0.909	0.970	0.992
UR _{SA}		0.673	0.508	0.585	0.709	0.826	0.906	0.943
NMSB ₂₀ ^T		0.621	0.628	0.653	0.690	0.741	0.800	0.862
$\theta = 0$		HL ₀₅	0.782	0.734	0.666	0.675	0.743	0.826
	HL ₀₆	0.753	0.750	0.760	0.792	0.835	0.882	0.924
	EM	0.764	0.769	0.789	0.818	0.856	0.896	0.929
	UR _{SA}	0.783	0.705	0.638	0.686	0.756	0.827	0.879
	NMSB ₂₀ ^T	0.806	0.808	0.813	0.822	0.831	0.846	0.859
	$\theta = 0.5$	HL ₀₅	0.638	0.600	0.523	0.470	0.477	0.527
HL ₀₆		0.654	0.654	0.652	0.662	0.683	0.717	0.758
EM		0.674	0.682	0.697	0.719	0.747	0.780	0.817
UR _{SA}		0.640	0.582	0.480	0.449	0.485	0.539	0.602
NMSB ₂₀ ^T		0.724	0.726	0.731	0.740	0.751	0.764	0.780
$\theta = 0.8$		HL ₀₅	0.464	0.427	0.354	0.293	0.274	0.291
	HL ₀₆	0.579	0.575	0.565	0.559	0.561	0.576	0.598
	EM	0.609	0.614	0.623	0.643	0.670	0.700	0.737
	UR _{SA}	0.464	0.418	0.328	0.283	0.281	0.310	0.347
	NMSB ₂₀ ^T	0.653	0.655	0.658	0.667	0.679	0.692	0.707
	$\rho_c = 0.80$							
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.917	0.728	0.761	0.849	0.898	0.915	0.915
	HL ₀₆	0.804	0.807	0.800	0.830	0.912	0.972	0.990
	EM	0.803	0.787	0.756	0.799	0.959	0.999	1.000
	UR _{SA}	0.925	0.855	0.825	0.796	0.781	0.782	0.776
	NMSB ₂₀ ^T	0.811	0.814	0.753	0.613	0.447	0.326	0.263
	$\theta = -0.5$	HL ₀₅	0.834	0.690	0.700	0.786	0.853	0.894
HL ₀₆		0.757	0.774	0.812	0.857	0.900	0.936	0.961
EM		0.757	0.773	0.826	0.911	0.981	1.000	1.000
UR _{SA}		0.839	0.732	0.747	0.769	0.790	0.814	0.829
NMSB ₂₀ ^T		0.776	0.783	0.795	0.801	0.800	0.790	0.770

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\theta = 0$	HL ₀₅	0.889	0.856	0.825	0.831	0.857	0.884	0.908
	HL ₀₆	0.894	0.892	0.896	0.906	0.918	0.930	0.943
	EM	0.897	0.902	0.916	0.937	0.964	0.985	0.996
	UR _{SA}	0.891	0.849	0.825	0.835	0.847	0.859	0.872
	NMSB ₂₀ ^T	0.908	0.910	0.914	0.919	0.925	0.929	0.932
$\theta = 0.5$	HL ₀₅	0.867	0.846	0.809	0.788	0.792	0.813	0.840
	HL ₀₆	0.883	0.881	0.880	0.884	0.891	0.901	0.912
	EM	0.888	0.891	0.900	0.913	0.930	0.950	0.969
	UR _{SA}	0.870	0.840	0.796	0.785	0.794	0.808	0.824
	NMSB ₂₀ ^T	0.901	0.902	0.903	0.907	0.912	0.917	0.921
$\theta = 0.8$	HL ₀₅	0.782	0.752	0.684	0.635	0.621	0.641	0.678
	HL ₀₆	0.830	0.827	0.823	0.825	0.831	0.840	0.851
	EM	0.838	0.841	0.851	0.867	0.885	0.910	0.934
	UR _{SA}	0.788	0.746	0.664	0.626	0.630	0.646	0.667
	NMSB ₂₀ ^T	0.860	0.860	0.862	0.865	0.871	0.875	0.879

Tabla 4.11: Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 500$. $u_t \sim \text{MA}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.132	0.031	0.033	0.036	0.037	0.030	0.018
	HL ₀₆	0.037	0.026	0.012	0.004	0.001	0.000	0.000
	EM	0.028	0.013	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
	UR _{SA}	0.141	0.071	0.067	0.087	0.122	0.128	0.086
	NMSB ₂₀ ^T	0.032	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$\theta = -0.5$	HL ₀₅	0.118	0.086	0.053	0.056	0.062	0.071	0.079
	HL ₀₆	0.108	0.093	0.069	0.051	0.034	0.024	0.013
	EM	0.109	0.093	0.062	0.033	0.016	0.006	0.001
	UR _{SA}	0.116	0.090	0.067	0.074	0.090	0.116	0.143
	NMSB ₂₀ ^T	0.118	0.096	0.053	0.018	0.005	0.001	0.000
$\theta = 0$	HL ₀₅	0.102	0.096	0.076	0.062	0.059	0.063	0.070
	HL ₀₆	0.096	0.091	0.083	0.075	0.067	0.059	0.052
	EM	0.098	0.091	0.083	0.069	0.055	0.041	0.027
	UR _{SA}	0.098	0.094	0.075	0.067	0.069	0.076	0.090
	NMSB ₂₀ ^T	0.106	0.100	0.087	0.069	0.049	0.030	0.016
$\theta = 0.5$	HL ₀₅	0.089	0.084	0.076	0.063	0.054	0.049	0.047
	HL ₀₆	0.104	0.101	0.095	0.088	0.079	0.070	0.063
	EM	0.114	0.112	0.105	0.096	0.085	0.073	0.062
	UR _{SA}	0.086	0.082	0.074	0.063	0.058	0.055	0.055
	NMSB ₂₀ ^T	0.121	0.118	0.112	0.100	0.086	0.071	0.056
$\theta = 0.8$	HL ₀₅	0.071	0.067	0.063	0.056	0.049	0.042	0.039
	HL ₀₆	0.121	0.120	0.115	0.105	0.098	0.089	0.079
	EM	0.141	0.139	0.136	0.129	0.120	0.110	0.099
	UR _{SA}	0.069	0.067	0.063	0.057	0.051	0.047	0.046
	NMSB ₂₀ ^T	0.151	0.150	0.142	0.136	0.125	0.112	0.097
$\rho_c = 0.95$								
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.801	0.455	0.936	0.996	0.995	0.981	0.939
	HL ₀₆	0.301	0.473	0.891	0.996	0.998	0.998	0.997

		α							
		0	1	2	3	4	5	6	
$\theta = -0.5$	EM	0.276	0.293	0.582	0.935	0.996	1.000	1.000	
	UR _{SA}	0.809	0.703	0.933	0.989	0.977	0.918	0.767	
	NMSB ₂₀ ^T	0.305	0.263	0.190	0.174	0.286	0.590	0.862	
	HL ₀₅	0.796	0.615	0.683	0.882	0.972	0.994	0.996	
	HL ₀₆	0.700	0.716	0.810	0.919	0.978	0.996	0.998	
	EM	0.695	0.727	0.813	0.902	0.959	0.987	0.996	
	UR _{SA}	0.796	0.609	0.728	0.878	0.962	0.988	0.991	
	NMSB ₂₀ ^T	0.745	0.752	0.771	0.796	0.833	0.872	0.908	
	HL ₀₅	0.850	0.795	0.718	0.724	0.805	0.887	0.947	
	HL ₀₆	0.801	0.797	0.807	0.838	0.884	0.927	0.961	
	EM	0.802	0.809	0.829	0.857	0.888	0.918	0.942	
	UR _{SA}	0.849	0.763	0.686	0.740	0.825	0.896	0.946	
NMSB ₂₀ ^T	0.846	0.848	0.850	0.854	0.861	0.866	0.872		
$\theta = 0$	HL ₀₅	0.761	0.724	0.637	0.576	0.575	0.625	0.700	
	HL ₀₆	0.742	0.739	0.732	0.739	0.760	0.792	0.829	
	EM	0.746	0.753	0.764	0.782	0.807	0.835	0.863	
	UR _{SA}	0.758	0.701	0.587	0.549	0.583	0.644	0.711	
	NMSB ₂₀ ^T	0.794	0.796	0.800	0.805	0.811	0.818	0.826	
	HL ₀₅	0.644	0.607	0.521	0.445	0.414	0.429	0.475	
$\theta = 0.8$	HL ₀₆	0.701	0.696	0.686	0.680	0.680	0.695	0.718	
	EM	0.714	0.718	0.727	0.742	0.762	0.786	0.812	
	UR _{SA}	0.642	0.590	0.485	0.418	0.414	0.448	0.492	
	NMSB ₂₀ ^T	0.760	0.762	0.763	0.767	0.773	0.781	0.791	
	$\rho_c = 0.90$								
	$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.986	0.779	0.988	0.999	1.000	1.000	1.000
HL ₀₆		0.686	0.826	0.969	1.000	1.000	1.000	1.000	
EM		0.670	0.711	0.877	0.998	1.000	1.000	1.000	
UR _{SA}		0.989	0.959	0.984	0.997	0.999	0.998	0.992	
NMSB ₂₀ ^T		0.699	0.691	0.630	0.533	0.428	0.315	0.208	
HL ₀₅		0.965	0.859	0.902	0.970	0.993	0.998	1.000	
$\theta = -0.5$	HL ₀₆	0.918	0.930	0.961	0.987	0.997	1.000	1.000	
	EM	0.915	0.932	0.972	0.997	1.000	1.000	1.000	
	UR _{SA}	0.966	0.883	0.915	0.952	0.977	0.991	0.997	
	NMSB ₂₀ ^T	0.931	0.933	0.939	0.943	0.946	0.945	0.938	
	HL ₀₅	0.969	0.944	0.920	0.931	0.954	0.974	0.988	
	HL ₀₆	0.967	0.967	0.967	0.974	0.982	0.989	0.995	
$\theta = 0$	EM	0.967	0.970	0.978	0.987	0.995	0.999	1.000	
	UR _{SA}	0.970	0.935	0.920	0.931	0.947	0.962	0.975	
	NMSB ₂₀ ^T	0.975	0.974	0.976	0.977	0.980	0.980	0.982	
	HL ₀₅	0.964	0.949	0.920	0.904	0.909	0.927	0.947	
	HL ₀₆	0.966	0.964	0.963	0.965	0.968	0.974	0.981	
	EM	0.966	0.966	0.970	0.977	0.985	0.990	0.995	
$\theta = 0.5$	UR _{SA}	0.965	0.944	0.908	0.900	0.911	0.924	0.937	
	NMSB ₂₀ ^T	0.973	0.973	0.973	0.974	0.974	0.976	0.977	
	HL ₀₅	0.943	0.921	0.872	0.832	0.818	0.832	0.862	
	HL ₀₆	0.949	0.949	0.946	0.947	0.951	0.956	0.962	
	EM	0.950	0.952	0.957	0.963	0.972	0.981	0.987	
	UR _{SA}	0.943	0.913	0.852	0.819	0.823	0.838	0.857	
NMSB ₂₀ ^T	0.964	0.964	0.965	0.965	0.966	0.967	0.969		

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.80$								
$\theta = -0.8$	HL ₀₅	0.997	0.938	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000
	HL ₀₆	0.926	0.960	0.988	0.999	1.000	1.000	1.000
	EM	0.923	0.929	0.953	0.990	1.000	1.000	1.000
	UR _{SA}	1.000	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000
	NMSB ₂₀ ^T	0.930	0.927	0.897	0.863	0.809	0.767	0.773
$\theta = -0.5$	HL ₀₅	0.997	0.937	0.971	0.994	0.998	0.999	1.000
	HL ₀₆	0.959	0.973	0.987	0.996	0.999	1.000	1.000
	EM	0.954	0.964	0.984	0.997	1.000	1.000	1.000
	UR _{SA}	0.997	0.979	0.983	0.986	0.989	0.992	0.994
	NMSB ₂₀ ^T	0.964	0.963	0.959	0.950	0.934	0.917	0.896
$\theta = 0$	HL ₀₅	0.995	0.976	0.953	0.967	0.985	0.992	0.997
	HL ₀₆	0.989	0.989	0.991	0.993	0.996	0.997	0.998
	EM	0.988	0.990	0.993	0.997	0.999	1.000	1.000
	UR _{SA}	0.996	0.974	0.967	0.970	0.974	0.977	0.981
	NMSB ₂₀ ^T	0.991	0.991	0.991	0.990	0.988	0.986	0.982
$\theta = 0.5$	HL ₀₅	0.995	0.985	0.959	0.950	0.959	0.974	0.985
	HL ₀₆	0.990	0.990	0.991	0.992	0.994	0.995	0.996
	EM	0.989	0.990	0.992	0.995	0.997	0.999	0.999
	UR _{SA}	0.995	0.982	0.963	0.963	0.965	0.968	0.972
	NMSB ₂₀ ^T	0.992	0.993	0.992	0.991	0.991	0.990	0.989
$\theta = 0.8$	HL ₀₅	0.995	0.987	0.963	0.943	0.943	0.956	0.970
	HL ₀₆	0.989	0.989	0.990	0.991	0.992	0.994	0.995
	EM	0.989	0.989	0.991	0.993	0.995	0.997	0.998
	UR _{SA}	0.995	0.984	0.962	0.956	0.958	0.960	0.963
	NMSB ₂₀ ^T	0.992	0.992	0.992	0.992	0.991	0.991	0.990

Tabla 4.12: Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 100$. $u_t \sim \text{AR}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\phi = -0.8$	HL ₀₅	0.036	0.035	0.034	0.031	0.027	0.022	0.019
	HL ₀₆	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.004	0.004
	EM	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
	UR _{SA}	0.040	0.040	0.039	0.037	0.032	0.027	0.023
	NMSB ₂₀ ^T	0.003	0.003	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
$\phi = -0.5$	HL ₀₅	0.043	0.043	0.042	0.040	0.036	0.032	0.028
	HL ₀₆	0.036	0.038	0.036	0.034	0.033	0.031	0.027
	EM	0.037	0.037	0.036	0.034	0.032	0.030	0.026
	UR _{SA}	0.045	0.044	0.044	0.042	0.039	0.035	0.030
	NMSB ₂₀ ^T	0.036	0.011	0.004	0.003	0.002	0.002	0.002
$\phi = 0.5$	HL ₀₅	0.045	0.046	0.046	0.046	0.045	0.045	0.045
	HL ₀₆	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.081	0.080
	EM	0.102	0.102	0.101	0.101	0.101	0.100	0.098
	UR _{SA}	0.045	0.046	0.046	0.046	0.046	0.046	0.045
	NMSB ₂₀ ^T	0.110	0.098	0.070	0.038	0.018	0.008	0.005
$\phi = 0.8$	HL ₀₅	0.049	0.049	0.049	0.049	0.049	0.049	0.049
	HL ₀₆	0.113	0.113	0.114	0.114	0.115	0.115	0.115
	EM	0.150	0.149	0.149	0.149	0.149	0.149	0.151

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
	UR _{SA}	0.049	0.048	0.048	0.047	0.047	0.047	0.047
	NMSB ₂₀ ^T	0.174	0.171	0.164	0.148	0.131	0.112	0.091
$\rho_c = 0.95$								
$\phi = -0.8$	HL ₀₅	0.068	0.054	0.033	0.029	0.038	0.054	0.072
	HL ₀₆	0.009	0.010	0.013	0.011	0.011	0.009	0.006
	EM	0.005	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.002
	UR _{SA}	0.072	0.062	0.048	0.049	0.068	0.098	0.134
	NMSB ₂₀ ^T	0.006	0.004	0.003	0.002	0.003	0.003	0.004
$\phi = -0.5$	HL ₀₅	0.077	0.069	0.051	0.040	0.041	0.048	0.057
	HL ₀₆	0.060	0.060	0.055	0.044	0.034	0.026	0.019
	EM	0.065	0.059	0.046	0.029	0.018	0.010	0.006
	UR _{SA}	0.080	0.072	0.055	0.049	0.054	0.068	0.087
	NMSB ₂₀ ^T	0.066	0.059	0.041	0.023	0.011	0.008	0.006
$\phi = 0.5$	HL ₀₅	0.076	0.076	0.074	0.069	0.065	0.058	0.054
	HL ₀₆	0.133	0.134	0.128	0.123	0.116	0.109	0.100
	EM	0.161	0.160	0.157	0.149	0.139	0.129	0.117
	UR _{SA}	0.076	0.076	0.073	0.067	0.062	0.056	0.052
	NMSB ₂₀ ^T	0.174	0.174	0.170	0.162	0.152	0.142	0.129
$\phi = 0.8$	HL ₀₅	0.077	0.078	0.076	0.075	0.076	0.075	0.073
	HL ₀₆	0.159	0.160	0.160	0.158	0.155	0.151	0.147
	EM	0.200	0.199	0.199	0.198	0.195	0.191	0.187
	UR _{SA}	0.077	0.077	0.075	0.073	0.074	0.071	0.069
	NMSB ₂₀ ^T	0.221	0.221	0.220	0.218	0.215	0.214	0.212
$\rho_c = 0.90$								
$\phi = -0.8$	HL ₀₅	0.171	0.114	0.081	0.124	0.226	0.385	0.556
	HL ₀₆	0.016	0.026	0.045	0.067	0.094	0.127	0.163
	EM	0.012	0.013	0.015	0.015	0.013	0.013	0.010
	UR _{SA}	0.180	0.126	0.126	0.189	0.309	0.477	0.647
	NMSB ₂₀ ^T	0.014	0.015	0.012	0.011	0.012	0.015	0.020
$\phi = -0.5$	HL ₀₅	0.187	0.148	0.113	0.136	0.199	0.297	0.414
	HL ₀₆	0.130	0.135	0.147	0.160	0.179	0.204	0.230
	EM	0.140	0.135	0.121	0.103	0.084	0.068	0.051
	UR _{SA}	0.194	0.147	0.126	0.163	0.233	0.340	0.465
	NMSB ₂₀ ^T	0.157	0.153	0.146	0.137	0.130	0.128	0.127
$\phi = 0.5$	HL ₀₅	0.142	0.140	0.131	0.121	0.113	0.113	0.117
	HL ₀₆	0.225	0.224	0.221	0.218	0.214	0.213	0.211
	EM	0.266	0.266	0.264	0.262	0.257	0.249	0.243
	UR _{SA}	0.143	0.141	0.128	0.114	0.104	0.104	0.108
	NMSB ₂₀ ^T	0.288	0.289	0.289	0.290	0.292	0.294	0.295
$\phi = 0.8$	HL ₀₅	0.127	0.127	0.127	0.124	0.121	0.118	0.113
	HL ₀₆	0.231	0.232	0.231	0.229	0.224	0.220	0.214
	EM	0.279	0.277	0.277	0.275	0.274	0.271	0.267
	UR _{SA}	0.126	0.127	0.124	0.120	0.116	0.111	0.106
	NMSB ₂₀ ^T	0.300	0.300	0.300	0.300	0.299	0.300	0.302
$\rho_c = 0.80$								
$\phi = -0.8$	HL ₀₅	0.489	0.364	0.293	0.353	0.437	0.500	0.546
	HL ₀₆	0.057	0.107	0.201	0.302	0.398	0.486	0.560
	EM	0.051	0.056	0.073	0.107	0.163	0.244	0.355
	UR _{SA}	0.506	0.372	0.381	0.430	0.470	0.497	0.519

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\phi = -0.5$	NMSB $_{20}^T$	0.062	0.063	0.065	0.071	0.080	0.099	0.131
	HL $_{05}$	0.520	0.428	0.367	0.416	0.496	0.568	0.621
	HL $_{06}$	0.377	0.410	0.459	0.522	0.583	0.640	0.691
	EM	0.403	0.408	0.425	0.456	0.513	0.590	0.678
	UR $_{SA}$	0.535	0.412	0.389	0.444	0.502	0.547	0.579
$\phi = 0.5$	NMSB $_{20}^T$	0.438	0.444	0.460	0.490	0.532	0.585	0.653
	HL $_{05}$	0.241	0.231	0.213	0.204	0.215	0.252	0.307
	HL $_{06}$	0.317	0.317	0.324	0.342	0.370	0.413	0.463
	EM	0.354	0.358	0.369	0.386	0.411	0.445	0.483
	UR $_{SA}$	0.250	0.237	0.203	0.183	0.192	0.233	0.289
$\phi = 0.8$	NMSB $_{20}^T$	0.381	0.383	0.387	0.394	0.403	0.416	0.431
	HL $_{05}$	0.230	0.227	0.222	0.217	0.209	0.201	0.195
	HL $_{06}$	0.350	0.348	0.348	0.348	0.348	0.346	0.344
	EM	0.405	0.406	0.407	0.410	0.415	0.418	0.426
	UR $_{SA}$	0.233	0.229	0.222	0.210	0.196	0.182	0.169
	NMSB $_{20}^T$	0.434	0.434	0.435	0.436	0.439	0.439	0.443

Tabla 4.13: Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 250$. $u_t \sim \text{AR}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$								
$\phi = -0.8$	HL $_{05}$	0.051	0.045	0.036	0.027	0.022	0.020	0.018
	HL $_{06}$	0.019	0.018	0.017	0.017	0.013	0.010	0.006
	EM	0.013	0.012	0.010	0.008	0.005	0.003	0.002
	UR $_{SA}$	0.054	0.049	0.043	0.036	0.033	0.031	0.031
	NMSB $_{20}^T$	0.012	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
$\phi = -0.5$	HL $_{05}$	0.057	0.051	0.044	0.036	0.031	0.025	0.022
	HL $_{06}$	0.050	0.047	0.043	0.037	0.030	0.022	0.016
	EM	0.051	0.047	0.041	0.032	0.024	0.015	0.009
	UR $_{SA}$	0.058	0.053	0.047	0.041	0.036	0.033	0.031
	NMSB $_{20}^T$	0.052	0.035	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000
$\phi = 0.5$	HL $_{05}$	0.059	0.058	0.056	0.056	0.052	0.051	0.048
	HL $_{06}$	0.074	0.073	0.073	0.069	0.068	0.067	0.062
	EM	0.084	0.082	0.080	0.077	0.075	0.072	0.067
	UR $_{SA}$	0.059	0.058	0.056	0.055	0.052	0.050	0.048
	NMSB $_{20}^T$	0.090	0.085	0.076	0.064	0.049	0.034	0.022
$\phi = 0.8$	HL $_{05}$	0.060	0.060	0.059	0.059	0.059	0.058	0.057
	HL $_{06}$	0.079	0.080	0.081	0.081	0.080	0.078	0.076
	EM	0.092	0.092	0.092	0.092	0.089	0.088	0.087
	UR $_{SA}$	0.058	0.058	0.058	0.058	0.057	0.056	0.055
	NMSB $_{20}^T$	0.105	0.104	0.102	0.100	0.096	0.091	0.084
$\rho_c = 0.95$								
$\phi = -0.8$	HL $_{05}$	0.296	0.186	0.177	0.331	0.558	0.757	0.872
	HL $_{06}$	0.082	0.111	0.172	0.264	0.383	0.498	0.595
	EM	0.067	0.074	0.087	0.103	0.117	0.120	0.117
	UR $_{SA}$	0.297	0.197	0.248	0.418	0.638	0.820	0.905
	NMSB $_{20}^T$	0.088	0.086	0.078	0.074	0.070	0.073	0.083
$\phi = -0.5$	HL $_{05}$	0.316	0.232	0.192	0.282	0.438	0.613	0.762
	HL $_{06}$	0.239	0.237	0.261	0.317	0.395	0.482	0.562

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\phi = 0.5$	EM	0.246	0.241	0.241	0.238	0.231	0.218	0.205
	UR _{SA}	0.312	0.219	0.220	0.329	0.487	0.667	0.812
	NMSB ₂₀ ^T	0.285	0.281	0.276	0.269	0.263	0.257	0.258
	HL ₀₅	0.292	0.278	0.249	0.214	0.193	0.187	0.194
	HL ₀₆	0.305	0.304	0.297	0.292	0.289	0.291	0.297
	EM	0.329	0.328	0.330	0.328	0.327	0.325	0.322
$\phi = 0.8$	UR _{SA}	0.285	0.269	0.232	0.198	0.183	0.185	0.200
	NMSB ₂₀ ^T	0.372	0.373	0.373	0.373	0.373	0.375	0.376
	HL ₀₅	0.234	0.232	0.227	0.219	0.211	0.200	0.189
	HL ₀₆	0.268	0.267	0.266	0.265	0.262	0.260	0.258
	EM	0.294	0.292	0.292	0.295	0.296	0.295	0.295
	UR _{SA}	0.229	0.225	0.218	0.209	0.199	0.186	0.174
NMSB ₂₀ ^T	0.336	0.335	0.334	0.335	0.335	0.336	0.337	
$\rho_c = 0.90$								
$\phi = -0.8$	HL ₀₅	0.712	0.564	0.565	0.738	0.880	0.947	0.974
	HL ₀₆	0.341	0.438	0.590	0.753	0.884	0.956	0.982
	EM	0.315	0.346	0.438	0.583	0.751	0.882	0.952
	UR _{SA}	0.717	0.567	0.648	0.774	0.872	0.929	0.959
	NMSB ₂₀ ^T	0.383	0.384	0.392	0.404	0.424	0.459	0.506
	$\phi = -0.5$	HL ₀₅	0.744	0.639	0.601	0.719	0.846	0.925
HL ₀₆		0.656	0.669	0.724	0.807	0.889	0.945	0.975
EM		0.663	0.682	0.730	0.804	0.881	0.939	0.972
UR _{SA}		0.746	0.610	0.630	0.741	0.839	0.905	0.941
NMSB ₂₀ ^T		0.714	0.719	0.734	0.755	0.782	0.814	0.847
$\phi = 0.5$		HL ₀₅	0.690	0.670	0.624	0.575	0.549	0.551
	HL ₀₆	0.704	0.701	0.699	0.701	0.708	0.723	0.746
	EM	0.722	0.726	0.734	0.746	0.763	0.783	0.805
	UR _{SA}	0.690	0.658	0.587	0.529	0.518	0.540	0.573
	NMSB ₂₀ ^T	0.766	0.767	0.770	0.776	0.782	0.789	0.798
	$\phi = 0.8$	HL ₀₅	0.524	0.519	0.508	0.488	0.468	0.447
HL ₀₆		0.556	0.554	0.552	0.548	0.548	0.547	0.547
EM		0.579	0.580	0.584	0.587	0.592	0.598	0.607
UR _{SA}		0.519	0.512	0.495	0.468	0.439	0.407	0.384
NMSB ₂₀ ^T		0.632	0.633	0.633	0.634	0.636	0.639	0.641
$\rho_c = 0.80$								
$\phi = -0.8$	HL ₀₅	0.835	0.728	0.713	0.779	0.841	0.885	0.912
	HL ₀₆	0.632	0.692	0.754	0.814	0.869	0.913	0.948
	EM	0.619	0.642	0.701	0.790	0.904	0.980	0.999
	UR _{SA}	0.839	0.759	0.770	0.790	0.810	0.828	0.841
	NMSB ₂₀ ^T	0.656	0.659	0.664	0.666	0.658	0.635	0.599
	$\phi = -0.5$	HL ₀₅	0.865	0.796	0.775	0.821	0.867	0.900
HL ₀₆		0.832	0.838	0.860	0.884	0.911	0.935	0.953
EM		0.833	0.844	0.877	0.929	0.978	0.997	1.000
UR _{SA}		0.868	0.797	0.797	0.815	0.834	0.850	0.864
NMSB ₂₀ ^T		0.848	0.852	0.860	0.870	0.877	0.879	0.877
$\phi = 0.5$		HL ₀₅	0.864	0.851	0.826	0.802	0.794	0.801
	HL ₀₆	0.886	0.884	0.882	0.884	0.888	0.895	0.904
	EM	0.892	0.894	0.899	0.909	0.922	0.937	0.954
	UR _{SA}	0.867	0.847	0.811	0.785	0.787	0.797	0.810
	NMSB ₂₀ ^T	0.906	0.905	0.907	0.910	0.914	0.917	0.921

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\phi = 0.8$	HL ₀₅	0.778	0.772	0.759	0.741	0.721	0.703	0.686
	HL ₀₆	0.806	0.806	0.805	0.804	0.804	0.805	0.809
	EM	0.821	0.822	0.825	0.831	0.837	0.846	0.855
	UR _{SA}	0.780	0.772	0.751	0.719	0.688	0.659	0.639
	NMSB ₂₀ ^T	0.849	0.850	0.849	0.850	0.852	0.854	0.855

Tabla 4.14: Potencia ajustada al tamaño de contrastes robustos. $T = 500$. $u_t \sim \text{AR}(1)$

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
$\rho_c = 0.99$		<hr/>						
$\phi = -0.8$	HL ₀₅	0.093	0.071	0.051	0.055	0.071	0.087	0.102
	HL ₀₆	0.053	0.051	0.048	0.042	0.034	0.025	0.016
	EM	0.046	0.042	0.031	0.019	0.011	0.005	0.002
	UR _{SA}	0.093	0.075	0.064	0.077	0.103	0.142	0.180
	NMSB ₂₀ ^T	0.050	0.040	0.021	0.007	0.001	0.000	0.000
$\phi = -0.5$	HL ₀₅	0.098	0.082	0.060	0.055	0.064	0.076	0.089
	HL ₀₆	0.087	0.079	0.069	0.058	0.048	0.038	0.029
	EM	0.088	0.079	0.064	0.043	0.026	0.014	0.007
	UR _{SA}	0.095	0.082	0.065	0.066	0.083	0.107	0.139
	NMSB ₂₀ ^T	0.095	0.083	0.059	0.033	0.012	0.003	0.001
$\phi = 0.5$	HL ₀₅	0.102	0.101	0.094	0.084	0.076	0.067	0.061
	HL ₀₆	0.107	0.107	0.103	0.095	0.091	0.087	0.081
	EM	0.112	0.112	0.108	0.100	0.096	0.089	0.081
	UR _{SA}	0.098	0.096	0.091	0.083	0.075	0.069	0.065
	NMSB ₂₀ ^T	0.122	0.119	0.114	0.108	0.101	0.090	0.079
$\phi = 0.8$	HL ₀₅	0.099	0.099	0.099	0.097	0.095	0.091	0.088
	HL ₀₆	0.109	0.109	0.107	0.105	0.105	0.103	0.102
	EM	0.115	0.115	0.114	0.113	0.111	0.111	0.109
	UR _{SA}	0.095	0.094	0.094	0.094	0.092	0.088	0.085
	NMSB ₂₀ ^T	0.127	0.126	0.126	0.125	0.123	0.122	0.119
$\rho_c = 0.95$		<hr/>						
$\phi = -0.8$	HL ₀₅	0.821	0.669	0.695	0.876	0.972	0.994	0.997
	HL ₀₆	0.600	0.647	0.770	0.896	0.970	0.994	0.998
	EM	0.575	0.609	0.703	0.819	0.905	0.958	0.984
	UR _{SA}	0.821	0.653	0.756	0.898	0.971	0.992	0.994
	NMSB ₂₀ ^T	0.642	0.645	0.654	0.666	0.681	0.702	0.726
$\phi = -0.5$	HL ₀₅	0.835	0.723	0.691	0.820	0.933	0.981	0.994
	HL ₀₆	0.758	0.764	0.809	0.885	0.950	0.984	0.995
	EM	0.754	0.774	0.821	0.876	0.924	0.960	0.980
	UR _{SA}	0.834	0.682	0.717	0.840	0.933	0.977	0.991
	NMSB ₂₀ ^T	0.807	0.811	0.818	0.828	0.839	0.852	0.865
$\phi = 0.5$	HL ₀₅	0.805	0.785	0.736	0.684	0.652	0.648	0.670
	HL ₀₆	0.777	0.774	0.768	0.769	0.776	0.789	0.810
	EM	0.780	0.782	0.789	0.798	0.811	0.828	0.846
	UR _{SA}	0.801	0.771	0.698	0.635	0.615	0.639	0.677
	NMSB ₂₀ ^T	0.826	0.826	0.827	0.829	0.831	0.834	0.838
$\phi = 0.8$	HL ₀₅	0.705	0.700	0.687	0.667	0.644	0.621	0.594
	HL ₀₆	0.681	0.681	0.678	0.675	0.674	0.673	0.673
	EM	0.688	0.689	0.690	0.694	0.697	0.702	0.708

		α						
		0	1	2	3	4	5	6
	UR _{SA}	0.698	0.693	0.674	0.643	0.611	0.577	0.546
	NMSB ₂₀ ^T	0.740	0.741	0.741	0.741	0.743	0.744	0.746
$\rho_c = 0.90$								
$\phi = -0.8$	HL ₀₅	0.957	0.875	0.891	0.957	0.988	0.997	0.999
	HL ₀₆	0.867	0.894	0.937	0.975	0.993	0.999	1.000
	EM	0.858	0.883	0.934	0.983	0.999	1.000	1.000
	UR _{SA}	0.959	0.889	0.912	0.948	0.973	0.990	0.996
	NMSB ₂₀ ^T	0.881	0.885	0.893	0.898	0.899	0.893	0.877
$\phi = -0.5$	HL ₀₅	0.965	0.914	0.911	0.954	0.982	0.995	0.998
	HL ₀₆	0.949	0.952	0.965	0.980	0.992	0.998	0.999
	EM	0.948	0.957	0.977	0.994	0.999	1.000	1.000
	UR _{SA}	0.967	0.909	0.920	0.944	0.967	0.983	0.992
	NMSB ₂₀ ^T	0.958	0.959	0.963	0.966	0.968	0.970	0.970
$\phi = 0.5$	HL ₀₅	0.959	0.952	0.932	0.915	0.908	0.912	0.924
	HL ₀₆	0.964	0.963	0.962	0.964	0.966	0.969	0.973
	EM	0.965	0.966	0.969	0.974	0.979	0.983	0.990
	UR _{SA}	0.961	0.950	0.922	0.904	0.904	0.911	0.921
	NMSB ₂₀ ^T	0.973	0.973	0.974	0.974	0.974	0.975	0.976
$\phi = 0.8$	HL ₀₅	0.934	0.931	0.924	0.916	0.905	0.894	0.884
	HL ₀₆	0.938	0.938	0.937	0.935	0.934	0.934	0.935
	EM	0.940	0.940	0.940	0.943	0.945	0.947	0.950
	UR _{SA}	0.935	0.931	0.920	0.906	0.886	0.869	0.855
	NMSB ₂₀ ^T	0.954	0.953	0.953	0.954	0.954	0.955	0.955
$\rho_c = 0.80$								
$\phi = -0.8$	HL ₀₅	0.995	0.914	0.936	0.982	0.995	0.999	0.999
	HL ₀₆	0.895	0.925	0.960	0.983	0.995	0.999	1.000
	EM	0.887	0.901	0.935	0.976	0.997	1.000	1.000
	UR _{SA}	0.996	0.968	0.971	0.977	0.981	0.987	0.990
	NMSB ₂₀ ^T	0.904	0.905	0.900	0.887	0.868	0.841	0.810
$\phi = -0.5$	HL ₀₅	0.996	0.954	0.955	0.984	0.995	0.998	0.999
	HL ₀₆	0.973	0.980	0.988	0.994	0.997	0.999	1.000
	EM	0.972	0.978	0.989	0.997	1.000	1.000	1.000
	UR _{SA}	0.996	0.970	0.971	0.976	0.981	0.984	0.988
	NMSB ₂₀ ^T	0.979	0.978	0.977	0.973	0.967	0.957	0.947
$\phi = 0.5$	HL ₀₅	0.992	0.986	0.965	0.948	0.946	0.954	0.966
	HL ₀₆	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.993	0.995
	EM	0.990	0.990	0.992	0.994	0.996	0.997	0.999
	UR _{SA}	0.993	0.983	0.961	0.953	0.954	0.957	0.960
	NMSB ₂₀ ^T	0.993	0.993	0.993	0.993	0.992	0.991	0.990
$\phi = 0.8$	HL ₀₅	0.975	0.972	0.964	0.956	0.946	0.937	0.931
	HL ₀₆	0.977	0.977	0.976	0.976	0.976	0.976	0.976
	EM	0.977	0.978	0.978	0.979	0.980	0.982	0.984
	UR _{SA}	0.975	0.972	0.962	0.949	0.936	0.925	0.921
	NMSB ₂₀ ^T	0.982	0.982	0.982	0.982	0.982	0.981	0.981

Conclusión final

Como hemos indicado en la Introducción, esta tesis se ha elaborado pensando en dos objetivos. En primer lugar, derivar las propiedades del contraste MSB propuesto por Stock (1999), tanto asintóticas como con muestras finitas adoptando un marco amplio. El segundo de los objetivos ha sido analizar la dependencia del contraste MSB respecto al tamaño de la observación inicial y derivar una versión del mismo que sea robusta ante variaciones en ese tamaño.

El estudio de las propiedades del contraste se ha realizado en los capítulos 1 y 2. En el primero, se han derivado las propiedades asintóticas y, en el segundo, utilizando técnicas de Monte Carlo, se han estudiado las propiedades del contraste en muestras finitas.

La estructura que hemos seguido en el Capítulo 1 responde, en primer lugar, al tratamiento que se ha hecho de los elementos deterministas y, en segundo lugar, a la forma que adopta la hipótesis bajo la cual se han derivado los resultados. Aunque buena parte de los resultados contenidos en este capítulo ya han sido derivados previamente en otros trabajos, cabría destacar dos cosas. En primer lugar, el carácter exhaustivo de los resultados obtenidos; es habitual encontrar trabajos en los que se derivan las propiedades asintóticas del contraste MSB bajo la hipótesis nula o bajo una hipótesis alternativa local. Pero no es tan frecuente encontrar dichos resultados para una hipótesis alternativa no local; en esta tesis se han obtenido estos resultados y se ha demostrado la consistencia del contraste. La segunda cuestión a destacar es el tratamiento unificado que se ha hecho a lo largo de las diferentes secciones del capítulo, de la derivación de las propiedades del estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo. Partiendo del modelo en incrementos del término de error del modelo original, se ha reespecificado en términos de los incrementos estimados, definiendo la correspondiente perturbación del modelo. Esta reespecificación ha permitido derivar las propiedades del estimador autorregresivo en todos los casos considerados a lo largo del capítulo.

El Capítulo 2, tras derivar los valores críticos asintóticos, lo hemos dedicado a comparar estimadores y contrastes en un marco de muestras finitas utilizando técnicas de Monte Carlo. En primer lugar, hemos comparado diferentes estimadores de la varianza a largo plazo. En segundo lugar, hemos comparado diferentes versiones del contraste MSB. Y, en tercer lugar, hemos comparado el mejor MSB con otros contrastes vistos en la Introducción.

Para comparar las versiones de los dos estimadores de la varianza a largo plazo, autorregresivo y kernel, los criterios utilizados han sido el EVR y el ECM. El primero, lo hemos definido como el cociente entre el promedio de las estimaciones de un estimador en las diferentes simulaciones y el verdadero valor, y el segundo es el error cuadrático medio. Las principales conclusiones a las que hemos llegado son las siguientes:

- Tomando el criterio EVR parece claro que el estimador autorregresivo, basado en el criterio MAIC, es el que mejor comportamiento demuestra, en el sentido de lograr mayor proximidad al verdadero valor. Dentro de los estimadores kernel, los que se basan en la primera

diferencia de los residuos proporcionan un mejor resultado que los estimadores basados en los residuos filtrados.

- En lo que respecta al ECM, también es el estimador autorregresivo el que proporciona mejores resultados, pero en este caso utilizando el MBIC. Un hecho a destacar es que cuando la autocorrelación es muy negativa, el estimador kernel basado en las primeras diferencias de los residuos GLS con un *bandwidth* $O(T^{1/4})$ en algunos casos supera a la versión del estimador autorregresivo comentada.

El segundo de los objetivos en este Capítulo 2 ha sido comparar diferentes versiones del contraste MSB. Las principales conclusiones que hemos obtenido son las siguientes:

- En lo que respecta al tamaño, el contraste que más se aproxima al tipo nominal del 5% es la versión GLS que utiliza el estimador autorregresivo para aproximar la varianza a largo plazo junto con el criterio de selección MAIC.
- Sin embargo, es la versión GLS que utiliza el estimador kernel con un *bandwidth* $O(T^{1/4})$ la que logra una potencia ajustada mayor.

Esta aparente contradicción se resuelve a favor de la primera versión porque la versión basada en el estimador kernel presenta tamaños muy heterogéneos según el proceso supuesto para la perturbación aleatoria. Eso significa que tendríamos que determinar para cada supuesto para la perturbación un valor crítico diferente, lo cual es inviable porque cuando estamos ante datos reales no sabríamos qué valor crítico utilizar. Por lo tanto, la conclusión a la que hemos llegado es que la mejor versión del contraste MSB es la basada en la transformación GLS con el estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo que emplea el criterio de selección MAIC para determinar el número de retardos que debemos incluir en la regresión aumentada de Dickey-Fuller.

Por último, hemos comparado las dos mejores versiones del MSB con algunos de los contrastes analizados en la Introducción.

Las conclusiones que hemos obtenido son las siguientes:

- En lo que respecta al tamaño, el mejor comportamiento corresponde a la versión del MSB basada en GLS y con el estimador autorregresivo de la varianza a largo plazo. El comportamiento de las dos versiones del DF, DF_{GLS} y DF_{PQ} , es similar, excepto cuando el parámetros de medias móviles se aproxima a -1 (por ejemplo, $\theta = -0.8$), para el que el tamaño se hace muy grande.
- Las dos versiones del estadístico DF anteriores proporcionan la mayor potencia ajustada de entre todos los estadísticos contemplados en el estudio. Pero, como ya hemos comentado, esta ventaja no es aprovechable porque antes de aplicar el contraste necesitaríamos saber la estructura autorregresiva de la perturbación aleatoria para fijar en cada caso el valor crítico correspondiente.

Por lo tanto, a la vista de los resultados obtenidos en este capítulo, nuestra recomendación es utilizar aquella versión del MSB que se basa en el procedimiento GLS de Elliott *et al.* (1996)

y que estima la varianza a largo plazo con el estimador autorregresivo basado en el criterio de selección MAIC.

En el Capítulo 3, hemos analizado las consecuencias de cambios en el tamaño de la observación inicial sobre las propiedades de las versiones del contraste MSB, adoptando dos tipos de procesos generadores de datos que difieren en el supuesto sobre la condición inicial de la serie. Por un lado, hemos considerado el proceso generador de datos tradicional asumido en el Capítulo 1 y, por otro, el proceso generador propuesto en Elliott (1999). Los principales resultados obtenidos en este capítulo son los siguientes:

- Siguiendo la sugerencia de Elliott, hemos definido una nueva versión del contraste MSB transformando la primera observación de las variables que entran en la definición del estadístico.
- Bajo el nuevo proceso generador de datos, hemos derivado la distribución asintótica de las versiones, OLS y GLS, estudiadas en los dos capítulos anteriores. También hemos derivado la distribución asintótica de la nueva versión definida en este Capítulo 3, bajo los dos procesos generadores.
- Tras simular la potencia asintótica y obtener el comportamiento en muestras finitas, la conclusión a la que hemos llegado es que la potencia de las tres versiones del contraste MSB decrece, en algunos casos de forma drástica, conforme el tamaño de la observación inicial crece. Dentro de esta pauta general, el nuevo contraste definido en este capítulo es el que muestra mejor comportamiento.

El Capítulo 4 lo hemos dedicado a definir una nueva versión del contraste MSB que sea robusta ante cambios en el tamaño de la observación inicial y a compararla con otros cuatro contrastes disponibles en la literatura que también son robustos. El hecho que nos ha guiado en la definición de la versión robusta ha sido que, adoptando el proceso generador propuesto por Elliott (1999), se ve que todas las observaciones del proceso se ven afectadas por el diferente tamaño de la observación inicial, aunque con una ponderación diferente. Este hecho nos hizo pensar que habría que transformar todas las observaciones del proceso y no solo la primera como proponía Elliott, y que había que hacerlo con una ponderación diferente para cada una de las observaciones. De esta idea arranca la propuesta. Los principales resultados obtenidos han sido los siguientes:

- Hemos definido una nueva versión del contraste MSB, el NMSB, basada en la transformación de todas las observaciones del proceso restándoles la primera observación ponderada según sea la observación.
- Hemos derivado la distribución asintótica de esta nueva versión y, tras simular la potencia asintótica y obtener resultados para muestras finitas, ha quedado claro que el nuevo contraste es robusto a los cambios en el tamaño de la observación inicial.
- Por último, hemos comparado esta nueva versión con los otros cuatro contrastes robustos comentados en la Introducción. La conclusión a la que hemos llegado es que el nuevo contraste definido en este capítulo compite favorablemente con los otros contrastes robustos propuestos en la literatura.

Como se ha podido observar a lo largo de los presentes capítulos, en los que se ha desarrollado un análisis exhaustivo del criterio MSB, algunos temas requieren de una mayor atención y, que por tiempo y espacio, no se han podido desarrollar en ellos, pero que marcan las líneas de investigación futura en diversos campos.

Así, en primera instancia, sería interesante examinar si la modificación propuesta para el test MSB en el Capítulo 4 también es de aplicabilidad a otros contrastes como el de Dickey-Fuller. El objetivo trataría de ver si se consigue o no un test con valores de potencia robustos al valor inicial y elevados, ya que se ha comprobado que es la principal desventaja de estos contrastes en Econometría Aplicada.

Una segunda línea de investigación, también relacionada con el Capítulo 4, sería evaluar los efectos que una ruptura en la serie tendría sobre las propiedades del nuevo test NMSB. En este tema se podría abordar de diversas formas dependiendo la naturaleza del cambio, si éste se conoce o es desconocido o si sólo existe un cambio o varios o cuando se produce el cambio, si al principio de la serie temporal, en el medio o al final. Estrechamente relacionado con esta vía, se podría pensar en investigar los efectos sobre el comportamiento del nuevo NMSB cuando se comete un error de especificación en la fecha del cambio estructural. Todas estas situaciones ya han sido estudiadas en la literatura para otros contrastes pero no para el nuestro. Una aplicación empírica apoyaría los resultados encontrados.

Una tercera extensión del trabajo sería la consideración del criterio NMSB en un ámbito multivariante de forma que, se pueda analizar la posible presencia de cointegración entre las variables. También, se podría extender dicho análisis a los datos de panel como se ha realizado en la literatura con el test original MSB como por ejemplo, en Bai y Carrion-i-Silvestre (2009).

Una cuarta vía de investigación abierta consistiría en ver si se puede extender el análisis del nuevo NMSB a cuando se desea contrastar un orden de integración superior a uno, es decir, si la serie es $I(2)$ frente a $I(1)$. Una aplicación práctica reforzaría los resultados teóricos.

Una quinta línea abierta de investigación trataría de ver si se puede evaluar la influencia del valor inicial en el test NMSB cuando se desea contrastar si la serie está fraccionalmente integrada esto es, si la serie es $FI(d_0)$ frente a $FI(d_1)$ con $d_0 > d_1$.

Por último, se podría pensar en una aplicación empírica de nuestra nueva metodología a series reales y comprobar la robustez de sus resultados, por ejemplo, considerando el conjunto de datos de Nelsson y Plosser (1982) de forma que, se puedan observar las diferencias con los resultados obtenidos en el artículo original cuando cambia la primera observación de la serie.

Bibliografía

- Andrews, D. (1991). «Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation». *Econometrica*, **59(3)**, pp. 817–858.
- Aznar, A. (1989). *Econometric Model Selection: A New Approach*. volumen 16 de *Advanced Studies in Theoretical and Applied Econometrics*. Kluwer Academic Publishers.
- Aznar, A. M., A. y García-Olaverri, C. (2002). «The role of simplicity in an econometric model selection process». En: A. Zellner; H.A. Keuzenkamp y M. McAleer (Eds.), *Simplicity, inference and modelling*, capítulo 12.
- Bai, J. y Carrion-i-Silvestre, J. (2009). «Structural Change, Common Stochastic Trends, and Unit Roots in Panel Data». *The Review of Economic Studies*, **76(2)**, pp. 471–501.
- Bhargava, A. (1986). «On the Theory of Testing for Unit Roots in Observed Time Series». *Review of Economic Studies*, **53(3)**, pp. 369–84.
- Box, G. y Jenkins, G. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. volumen 1. San Francisco: Holden-Day.
- Box, G. y Jenkins, G. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. volumen 2. San Francisco: Holden-Day.
- Cai, Y. y Shintani, M. (2006). «On the alternative long-run variance ratio test for a unit root». *Econometric Theory*, **22**, pp. 347–372.
- Carrion-i-Silvestre, J. y Sansó, A. (2006). «A guide to the computation of stationarity tests». *Empirical Economics*, **31(2)**, pp. 433–448.
- Choi, I. y Ahn, B. (1999). «Testing the null of stationarity for multiple time series». *Journal of Econometrics*, **88(1)**, pp. 41–77.
- Dickey, D. y Fuller, W. (1979). «Distribution of the estimators for autorregressive time series with a unit root». *Journal of the American Statistical Association*, **74(366)**, pp. 427–431.
- Diebold, F. (1999). «The Past, Present, and Future of Macroeconomic Forecasting». En: F.X. Diebold y G.D. Rudebusch (Eds.), *Business Cycles: Durations, Dynamics and Forecasting*, Princeton University Press.
- Elliott, G. (1999). «Efficient Tests for a Unit Root When the Initial Observation is Drawn from Its Unconditional Distribution». *International Economic Review*, **40(3)**, pp. 767–783.
- Elliott, G. y Müller, U. (2006). «Minimizing the impact of the initial condition on testing for unit roots». *Journal of Econometrics*, **135**, pp. 285–310.
- Elliott, G.; Rothenberg, T. y Stock, J. (1996). «Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root». *Econometrica*, **64(4)**, pp. 813–36.

- Engle, R. y Granger, C. (1987). «Co-integration and error-correction: Representation, estimation and testing». *Econometrica*, **(55)**, pp. 251–276.
- Granger, C. y Newbold, P. (1974). «Spurious Regression in Econometrics». *Journal of Econometrics*, **(2)**, pp. 111–120.
- Haldrup, N. y Jansson, M. (2006). «Improving size and power in unit root testing». En: T.C. Mills y K. Patterson (Eds.), *Palgrave Handbook of Econometrics.*, volumen 1 de *Econometric Theory*. Palgrave Macmillan.
- Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Harvey, D. y Leybourne, S. (2005). «On testing for unit roots and the initial observation». *Econometrics Journal*, **8(1)**, pp. 97–111.
- Harvey, D. y Leybourne, S. (2006). «Power of a Unit-Root Test and the Initial Condition». *Journal of Time Series Analysis*, **27(5)**, pp. 739–752.
- Harvey, D.; Leybourne, S. y Taylor, A. (2009). «Unit Root Testing In Practice: Dealing With Uncertainty Over The Trend And Initial Condition». *Econometric Theory*, **25**, pp. 587–636.
- Harvey, D.; Leybourne, S. y Taylor, A. (2012). «Testing for unit roots in the presence of uncertainty over both the trend and initial condition». *Journal of Econometrics*, **169(2)**, pp. 188–195.
- Johansen, S. (2006). *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. volumen 11. Oxford University Press.
- Kurozumi, E. (2002). «Testing for stationarity with a break». *Journal of Econometrics*, **108(1)**, pp. 63–99.
- Kurozumi, E. y Tanaka, S. (2010). «Reducing the size distortion of the KPSS test». *Journal of Time Series Analysis*, **31(6)**, pp. 415–426.
- Kwiatkowski, D.; Phillips, P.; Schmidt, P. y Shin, Y. (1992). «Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how sure are we that economic time series have a unit root?». *Journal of Econometrics*, **54(1-3)**, pp. 159–178.
- Leybourne, S. y McCabe, B. (1999). «Modified Stationarity Tests with Data-Dependent Model-Selection Rules». *Journal of Business & Economic Statistics*, **17(2)**, pp. 64–70.
- Liu, H. y Rodríguez, G. (2006). «Unit root tests and structural change when the initial observation is drawn from its unconditional distribution». *Econometrics Journal*, **9(2)**, pp. 225–251.
- Lütkepohl, H. y Krätzig, M. (2004). *Applied time series econometrics*. Themes in modern econometrics. Cambridge Univ. Press, Cambridge [u.a.].
- Maddala, G. y Kim, I. (1998). *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*. Cambridge University Press.
- Müller, U. (2005). «Size and Power of test for stationarity in highly autocorrelated time series». *Journal of Econometrics*, **128(2)**, pp. 195–213.

- Müller, U. y Elliott, G. (2003). «Tests for unit root and the initial condition.» *Econometrica*, **71**, pp. 1269–1286.
- Nelsson, C. y Plosser, C. (1982). «Trends and random walks in macroeconomic time series. Some Evidence and Implications.» *Journal of Monetary Economics*, **10**, pp. 139–162.
- Newey, W. y West, K. (1987). «A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix.» *Econometrica*, **55**, pp. 703–708.
- Newey, W. y West, K. (1994). «Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation.» *Review of Economic Studies*, **61**(4), pp. 631–53.
- Ng, S. y Perron, P. (2001). «Lag length selection and the construction of unit root tests with good size and power.» *Econometrica*, **69**, pp. 1519–1554.
- Patterson, K. (2010). *A primer on unit root testing*. Palgrave Texts in Econometrics. Palgrave Macmillan.
- Patterson, K. (2011). *Unit Root Tests in Time Series Volume 1: Key Concepts and Problems*. Palgrave Texts in Econometrics. Palgrave Macmillan.
- Perron, P. y Ng, S. (1996). «Useful Modifications to Some Unit Root Tests with Dependent Errors and Their Local Asymptotic Properties.» *Review of Economic Studies*, **63**(3), pp. 435–63.
- Perron, P. y Ng, S. (1998). «An Autoregressive Spectral Density Estimator At Frequency Zero For Nonstationarity Tests.» *Econometric Theory*, **14**(05), pp. 560–603.
- Perron, P. y Qu, Z. (2007). «A simple modification to improve the finite sample properties of Ng and Perron's unit root tests.» *Economics Letters*, **94**(1), pp. 12–19.
- Phillips, P. (1987a). «Time series regressions with unit roots.» *Econometrica*, **55**, pp. 277–301.
- Phillips, P. (1987b). «Towards a unified asymptotic theory for autoregression.» *Biometrika*, **74**(3), pp. 535–47.
- Phillips, P. y Perron, P. (1988). «Testing for a Unit Root in Time Series Regression.» *Biometrika*, **75**(2), pp. 335–46.
- Phillips, P. y Solo, V. (1992). «Asymptotics for linear processes.» *Annual Statistics*, **20**, pp. 971–1001.
- Phillips, P. y Xiao, Z. (1998). «A Primer on Unit Root Testing.» *Journal of Economic Surveys*, **12**(5), pp. 423–69.
- Sargan, J. y Bhargava, A. (1983). «Testing for Residuals from Least Squares Regression for Being Generated by the Gaussian Random Walk.» *Econometrica*, **51**(153–174).
- Sims, C. (1980). «Macroeconomic and Reality.» *Econometrica*, **48**, pp. 1–48.
- Stock, J. (1999). «A class of Tests for Integration and Cointegration.» En: Robert F. Engle y Halbert White (Eds.), *Cointegration, Causality, and Forecasting: Festschrift in Honour of Clive W. J. Granger*, capítulo 6, pp. 135–167. Oxford University Press.

- Stock, J. y Watson, M. (1988). «Testing for Common Trends». *Journal of the American Statistical Association*, **83**, pp. 1097–1107.
- Sul, D.; Phillips, P. y Choi, C. (2005). «Prewhitening Bias in HAC Estimation». *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **67**, pp. 517–546.