

# Trabajo Fin de Grado

Análisis y modelización de uniones  
semirrígidas

MEMORIA

Autor/es

Asier Juan Alejandre

Director/es

Jose Manuel Lou Pina

Miguel Ángel Martínez Barca



## RESUMEN

Desde el inicio de los primeros métodos de cálculo estructural hasta nuestros días se han realizado simplificaciones e idealizaciones que han permitido resolver de manera efectiva las necesidades constructivas de nuestro tiempo.

La idealización de las uniones metálicas como rígidas, articuladas o de rigidez constante en aplicación del “Método directo de la rigidez” es un ejemplo de ello, teniendo sin embargo todas ellas un comportamiento semirrígido definido por su curva Momento-Rotación, refiriéndose esta al giro relativo producido entre las partes unidas.

Se ha buscado en este trabajo aproximarse más al comportamiento real de un pórtico metálico de un vano y tres alturas teniendo en cuenta la verdadera rigidez de la uniones jácena-pilar resueltas mediante doble angular de asiento, considerada clásicamente como rígida.

Uno de los objetivos es comprobar la validez de esta consideración.

Para ello se ha cargado y resuelto el pórtico tipo mediante el método directo de la rigidez considerando estas uniones como rígidas y semirrígidas contrastando los resultados finales.

Esto se ha llevado a cabo adaptando una programación base en el entorno matemático Matlab, introduciendo la formulación para barras de nudos semirrígidos, creando un nuevo código que permita realizar el cálculo iterativo del que se precisa y mostrando los resultados y diagramas de esfuerzos finales.

Además se ha implementado la curva momento-rotación de la unión extraída tanto mediante la aproximación de potencias impares de Fry-Morris a las curvas experimentales como de la simulación numérica realizada en el entorno Abaqus, para comprobar así las diferencias en los resultados.

Para ello se ha tratado de recrear la unión y su comportamiento de forma que simulara fielmente su comportamiento frente a la aplicación de un momento puntual y extraer el giro relativo producido.

Los resultados finales muestran unos resultados muy próximos entre la consideración rígida y semirrígida según Fry-Morris que apoyan la validez de esta clásica consideración.

Así mismo nos encontramos también con similares resultados introduciendo la curva del modelo Fry-Morris frente a la obtenida por el modelo numérico dando validez a la simulación numérica en Abaqus si tomamos como válido el modelo de Fry-Morris.

Estos resultados aportan fuerza al cambio desde estas clásicas formas de operar hacia una metodología más realista en cuanto a las uniones se refiere, abriendo paso a una línea de trabajo para conseguir su implementación en los programas de uso comercial y llegar así a estar presente más allá del ámbito académico.

## INDICE

1.	INTRODUCCIÓN .....	1
2.	UNIONES .....	5
2.1	COMPORTAMIENTO Y CLASIFICACIÓN .....	5
2.2	UNIONES SEMIRRÍGIDAS.....	8
2.2.1	Definición y tipos .....	8
2.2.2	Curva Momento-Rotación .....	11
2.2.3	Matriz de rigidez [2] .....	13
3.	ABAQUS .....	17
3.1	INTRODUCCIÓN.....	17
3.2	PART.....	18
3.3	PROPERTY.....	21
3.4	LOAD .....	22
3.5	MESH.....	24
3.6	INTERACTION .....	24
3.7	VISUALIZATION .....	27
3.8	OBTENCIÓN DE LA CURVA MOMENTO ROTACIÓN .....	30
4.	MATLAB .....	34
4.1	INTRODUCCIÓN.....	34
4.2	PÓRTICO TIPO Y RESOLUCIÓN .....	35
4.3	PROGRAMACIÓN .....	40
5.	RESULTADOS.....	47
6.	CONCLUSIONES.....	53
ANEXO A	Análisis computacional de estructuras.....	55

INDICE DE FIGURAS

Figura 1 Rigidez rotacional .....	5
Figura 2 Unión rígida .....	6
Figura 3 Unión articulada .....	7
Figura 4 Unión con desplazamientos liberados.....	7
Figura 5 Unión elástica .....	8
Figura 6 Unión mediante angular simple al alma.....	10
Figura 7 Unión mediante doble angular al alma .....	10
Figura 8 Unión mediante doble angular al alma y doble angular de asiento .....	10
Figura 9 Unión mediante doble angular de asiento .....	11
Figura 10 Detalles del modelo Fry-Morris .....	12
Figura 11 Barra semirrígida para el “Método directo de rigidez” .....	14
Figura 12 Modelo en Abaqus .....	18
Figura 13 Tornillo-Tuerca .....	18
Figura 14 Angular .....	19
Figura 15 Pilar .....	19
Figura 16 Viga .....	20
Figura 17 Placa plana rígida.....	20
Figura 18 Tensión superior al límite elástico en angular.....	22
Figura 19 Placa rígida sobre sección de la viga.....	23
Figura 20 Condiciones de contorno sobre el pilar y momento sobre la placa rígida....	23
Figura 21 <i>Mallado</i> .....	24
Figura 22 Fallo de contacto .....	25
Figura 23 Detalle contacto 1.....	26
Figura 24 Detalle contacto 2.....	26
Figura 25 Tensiones y deformaciones 1 .....	27
Figura 26 Tensiones y deformaciones 2 .....	28
Figura 27 Tensiones y deformaciones 4 .....	29
Figura 28 Tensiones y deformaciones 5 .....	29
Figura 29 Detalle nodos para el cálculo de giros relativos.....	30
Figura 30 Trigonometría para el cálculo de giros relativos .....	31
Figura 31 Pórtico tipo .....	35
Figura 32 Esquema .....	36
Figura 33 Representación gráfica del modelo resolutivo.....	39
Figura 34 Pórtico tipo .....	48
Figura 35 Infografía de resultados.....	48
Figura 36 Diagrama de momentos Rígido vs Semirrígido Fry-Morris .....	51
Figura 37 Diagrama de momentos Fry-Morris VS Abaqus .....	52

INDICE DE ECUACIONES

Ecuación 1.....	12
Ecuación 2.....	14
Ecuación 3.....	14
Ecuación 4.....	15
Ecuación 5.....	15
Ecuación 6.....	15
Ecuación 7.....	15
Ecuación 8.....	15
Ecuación 9.....	15
Ecuación 10 .....	15
Ecuación 11 .....	15
Ecuación 12 .....	16
Ecuación 13 .....	16
Ecuación 14 .....	16
Ecuación 15 .....	16
Ecuación 16 .....	16
Ecuación 17 .....	31
Ecuación 18.....	31
Ecuación 19 .....	31
Ecuación 20.....	47

## 1. INTRODUCCIÓN

Usando el lenguaje matemático, valiéndonos de los principios físicos y analizando el mundo mediante la experimentación, hemos intentado durante siglos entender cómo funcionan las "cosas". El cálculo de estructuras, entendiendo como tal todo mecanismo físico resistente, no es una excepción, y el "Método directo de la rigidez" posee todas estas características.

Mediante el cálculo matricial y vectorial, el comportamiento de los materiales obtenido mediante experimentación y aplicando principios físicos como la conservación de la energía, trata de entender el funcionamiento de una tipología estructural concreta. Debido a la complejidad que gobierna todo realizamos simplificaciones que permiten abordar los problemas sin perder la validez de los resultados.

Entendiendo la rigidez de una unión como la relación entre el momento aplicado y el giro relativo que se produce entre las partes unidas, una de las simplificaciones utilizadas es idealizar para el cálculo las uniones como rígidas (rigidez infinita con un giro relativo entre las partes unidas igual a cero) o articuladas (rigidez nula con el giro liberado entre las partes). La validez del cálculo se asegura a la hora del montaje, donde la rigidez de las uniones instaladas debe aproximarse a las idealizaciones realizadas.

Sin embargo la rigidez real de cualquier unión es finita y lleva asociado un giro relativo entre sus partes que es función del momento aplicado.

En la práctica existen diferentes teorías para clasificar una unión para el cálculo, atendiendo a la resistencia, rigidez, capacidad de giro o una combinación de ellas compartiendo la idea fundamental de que la clasificación debe ser aquella que no conlleve diferencias significativas en los resultados obtenidos.

El problema de considerar la rigidez real de una unión para el cálculo está ligado a su carácter no lineal a diferencia de las uniones clásicas de rigidez constante.

Cualquier unión real solicitada a un momento flector lleva asociado un giro relativo entre las partes unidas debido a la deformación de los distintos elementos que forman la unión como consecuencia de la carga aplicada, los contactos entre partes, etc. Este giro modifica la geometría inicial de la unión y su rigidez.

Por lo tanto nos encontramos en una situación en la que la rigidez de nuestra unión varía en función de los esfuerzos aplicados sobre la misma. Este comportamiento se traslada a nivel global donde la rigidez de nuestra estructura es la relación entre la carga global aplicada y los desplazamientos sufridos por esta, y que depende de la rigidez de todas las partes que la forman incluidas las uniones.

Trabajar con estructuras de rigidez constante implica una relación proporcional entre la carga global aplicada y el desplazamiento sufrido. Al considerar la rigidez real de las uniones trasladamos este comportamiento no lineal a toda la estructura.

Si consideramos una estructura inicialmente descargada, sabemos que su rigidez depende de las rigideces de las partes que la forman. En el primer instante previo a la carga nos encontramos pues con una estructura con una rigidez determinada, en concreto igual a la pendiente de la curva momento-rotación de la unión para momento nulo.

Cuando aplicamos una carga  $Q$  a la estructura esta sufre un desplazamiento global  $U$  obtenido considerando la rigidez inicial de la estructura que provoca unos esfuerzos sobre sus distintas partes (uniones incluidas). Estos esfuerzos modifican la rigidez de las uniones y en consecuencia de la estructura, lo que se traduce en unos nuevos desplazamientos diferentes a los anteriormente calculados y en consecuencia un cambio en los esfuerzos internos que nuevamente modificarán la rigidez de las uniones.

Este hecho obliga a una solución iterativa de la estructura hasta que la solución en desplazamientos obtenida entre dos iteraciones consecutivas presente una diferencia por debajo de un valor (tolerancia) que habremos de determinar como válido.

Además, realizar el cálculo iterativo considerando la carga total de la estructura puede dar lugar a que nos encontremos dentro de la tolerancia marcada entre dos cálculos consecutivos, pero ambos se encuentren alejados de la solución real. Es por esto que el método obliga a una división de la carga en un número de incrementos determinados que aseguren la convergencia de la solución, donde el desplazamiento y esfuerzos finales habrán de calcularse como la suma de los obtenidos durante todos los escalones de carga.

Para ello debemos conocer el comportamiento de la unión para poder trabajar con ella, el cual, se puede obtener por distintos métodos. Algunos códigos para la construcción ya consideran este tipo de uniones obteniendo su comportamiento mediante la discretización de la unión en una serie de componentes mecánicos, lo cual agiliza y simplifica su obtención. Existen otras formas más precisas y consecuentemente más costosas tanto temporal como económicamente hablando, como son los ensayos experimentales y la simulación por elementos finitos, que han sido las utilizadas en este trabajo para la obtención de la curva momento-rotación de la unión.

Se han realizado numerosos experimentos para obtener la curva momento rotación de las uniones metálicas más comunes, lo que ha dado lugar a grandes bases de datos. Existen diferentes métodos para encontrar la expresión matemática de estas curvas que nos permite introducirlas en los cálculos. Desde aproximaciones lineales, bilineales, trilineales, no lineales, que dependen de factores físicos o con factores puramente matemáticos, todas tratan de captar lo más fielmente posible todas las curvas que nos ofrece una tipología de unión concreta.

En este caso hemos utilizado la aproximación mediante potencias impares planteada por Fry -Morris donde las constantes involucradas en su expresión dependen

de la tipología de unión así como de los parámetros geométricos más influyentes dentro de cada una.

Para la obtención de la curva mediante elementos finitos, se han aplicado momentos de distinto valor a la unión a considerar para el trabajo en el entorno “Abaqus” obteniendo para cada uno de ellos el giro relativo que se produce, obteniendo después los valores intermedios mediante interpolación lineal.

Para la modelización de la unión se han considerado las partes como sólidos tridimensionales y los contactos entre ellas de forma que simularan de forma correcta la deformación que se produce en la unión real. La carga se ha aplicado sobre una lámina rígida unida a la sección de la viga.

Uno de los objetivos principales de este trabajo se centra en considerar este tipo de uniones para el cálculo, utilizando para ello la rigidez real obtenida tanto por el método experimental como mediante simulación numérica como hemos visto anteriormente y observar las diferencias en los resultados obtenidos respecto a la clásica consideración de las uniones como rígidas o articuladas.

El caso concreto de estudio va a ser un pórtico de un vano y 3 alturas donde las uniones jácena-pilar se resuelven mediante unión atornillada de doble angular de asiento.

Resolviendo esta estructura considerando la unión como rígida y considerando su comportamiento real mediante el modelo de Fry-Morris se podrán comparar los resultados en esfuerzos y desplazamientos y verificar la validez de esta idealización. Además también se comprobará la precisión de la simulación numérica al comparar esta vez los resultados de esta estructura introduciendo el comportamiento real de la unión mediante el modelo de Fry-Morris y mediante la simulación numérica.

Para el cálculo estructural se ha utilizado el “Método directo de la rigidez”, ya que se trata de un método claro conceptualmente y especialmente adecuado para la programación.

Debido a que parte del trabajo se ha realizado en colaboración con el responsable de una oficina de cálculo estructural, ha sido posible utilizar una programación base creada por esta persona en el entorno matemático “Matlab”.

Esta programación básica del “Método directo de la rigidez” posibilitaba el cálculo de estructuras en dos dimensiones con las consideraciones clásicas para los nudos tanto de forma lineal como con teoría de segundo orden.

Ha sido tarea de este trabajo por lo tanto introducir la nueva tipología de nudo como opción estructural, adaptar o redefinir partes del código así como crear un nuevo núcleo para la resolución de la estructura debido a las nuevas necesidades que introducen estas uniones como vimos anteriormente. Se ha implementado además el código que permite la visualización de los diagramas de esfuerzos sobre las barras y sobre la estructura.

Este código ha permitido la resolución de la estructura mediante la consideración de unión rígida y semirrígida extrayendo su curva de comportamiento tanto para el modelo de Fry-Morris como para el modelo numérico en Abaqus.

### Objeto y alcance

El objetivo principal de este proyecto es la programación del “Método directo de la rigidez” en el entorno matemático “Matlab” que permita introducir el comportamiento semirrígido de las uniones.

Se pretende obtener este comportamiento tanto por el modelo de aproximación matemático de Fry-Morris como mediante la simulación en “Abaqus”.

Esto permitirá contrastar los resultados entre la clásica consideración de unión como rígida y como semirrígida al introducir su curva de comportamiento.

A su vez se pretende comprobar la potencia del modelado numérico para la simulación de uniones metálicas contrastando ahora los resultados entre dos cálculos con uniones semirrígidas, uno de ellos mediante el modelo numérico de Fry-Morris y el otro mediante la simulación en Abaqus

## 2. UNIONES

### 2.1 COMPORTAMIENTO Y CLASIFICACIÓN

Las uniones son los mecanismos resistentes mediante los cuales se unen distintas partes o elementos estructurales con el fin de transmitir los esfuerzos entre ellos.

Existen multitud de textos técnicos sobre la clasificación, descripción y cálculo de uniones de todo tipo como la soldada, atornillada, por adhesivos etc.

Entender el funcionamiento y calcular este elemento estructural lleva asociado grandes conocimientos sobre el comportamiento de los materiales, contactos entre ellos, técnicas operacionales y más que se encuentran recogidos en los códigos técnicos para la construcción.

No vamos a centrarnos en este aspecto ni en las partes y detalles que forman las uniones sino en ver su funcionamiento a nivel global estructuralmente hablando. En concreto vamos a centrarnos en las uniones metálicas atornilladas.

Al ser el “Método directo de la rigidez” la herramienta fundamental que se va a utilizar para este propósito, se van a describir los tipos fundamentales de unión desde el punto de vista de su rigidez y además, se comentarán brevemente los tipos de nudos estructurales existentes.

Igual que hablamos de rigidez de una barra como la relación entre los esfuerzos en sus nudos y los desplazamientos sufridos por estos, al hablar de la rigidez rotacional de una unión nos referimos a la relación entre el momento aplicado a la misma y el giro relativo que se produce entre las partes que la forman (Figura 1).

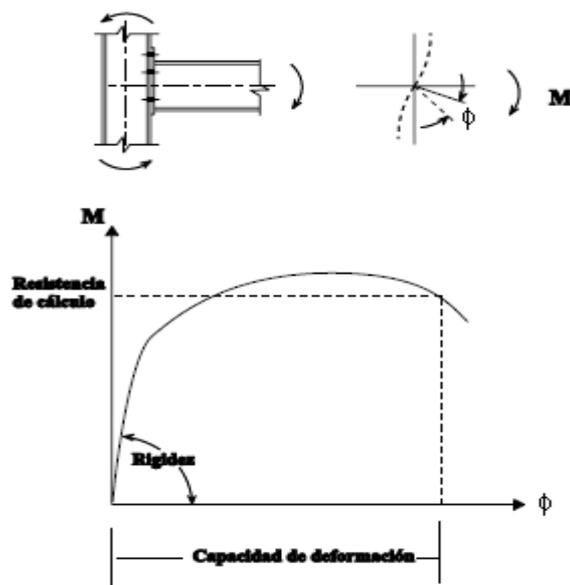


Figura 1 Rigidez rotacional

En el cálculo de estructuras se realizan idealizaciones a la hora de considerar estas rigideces para simplificar los cálculos. De esta forma los distintos tipos de uniones idealizadas atendiendo a la rigidez son los siguientes, donde además se añade la idea de nudo asociado con cada una de estas uniones que usaremos para el cálculo mediante el “Método directo de la Rigidez” (Anexo 1)

### **Uniones rígidas**

Una unión idealmente rígida es aquella que presenta giro relativo nulo entre las partes unidas independientemente del momento flector aplicado.

Idealizaremos un nudo como rígido, cuando los desplazamientos y giros de los nudos de las barras coincidentes sean iguales entre si e iguales al giro del nudo global de la estructura y el momento total sea igual a la suma de los momentos de cada nudo. Por lo tanto el ángulo formado entre las diferentes barras se mantiene constante, siendo el giro relativo entre las partes unidas igual a cero.(Figura 2)

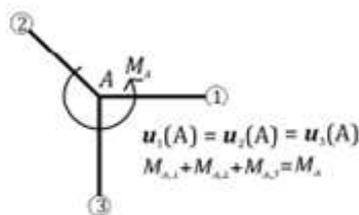


Figura 2 Unión rígida

### **Uniones articuladas**

Se considera como tal una unión para la cual se produciría un giro relativo infinito ante cualquier momento flector aplicado. Esto se traduce en una rigidez rotacional sin transmisión de momento entre las partes. Las partes pueden girar libremente sin generar momentos flectores sobre la otra.

Un nudo articulado compartirá desplazamientos con los nudos de las barras coincidentes pero el giro de cada uno de ellos puede ser diferente. El momento para cada nudo es igual a cero, y el ángulo entre las barras puede variar al ser el giro de cada nudo independiente.(Figura 3)

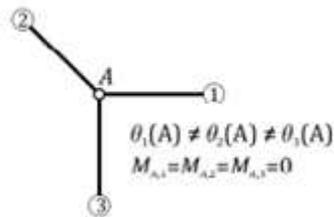


Figura 3 Unión articulada

### Uniones con desplazamientos liberados

Se trata de uniones de cualquier tipo donde alguno de los desplazamientos relativos entre sus partes ha sido liberado.

Un nudo de este tipo es aquel en el que una o más barras tienen condiciones distintas a las de las demás. Por ejemplo, una unión rígida donde una de las barras se une a ella mediante un nodo articulado, en este caso es el giro el desplazamiento liberado. Así, los desplazamientos y giros de las barras 1 y 3 son iguales, sufren el mismo giro manteniéndose el ángulo entre ellas constante y el momento en la unión es la suma de los momentos de los nudos de las dos barras, mientras el momento en el nudo de la barra 2 es cero y su giro totalmente independiente al de las otras dos barras y al del nudo global. Podría liberarse cualquier otro grado de libertad como el desplazamiento horizontal o vertical. (Figura 4)

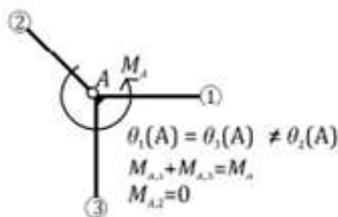


Figura 4 Unión con desplazamientos liberados

### Uniones elásticas

Donde la rigidez rotacional es constante, por lo que la relación entre el momento aplicado y giro relativo producido es proporcional.

Llamaremos nudo elástico a aquel al que se une alguna barra mediante este tipo de unión.

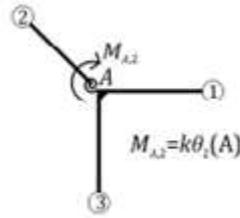


Figura 5 Unión elástica

## 2.2 UNIONES SEMIRRÍGIDAS

### 2.2.1 Definición y tipos

Todos los anteriores tipos de uniones estudiados son una simplificación para el cálculo, cuando realmente el comportamiento real de una unión se encuentra entre esos límites.

Una unión rígida como tal, donde el ángulo formado entre las distintas partes unidas (barras) se mantenga constante, es decir, que no se produzca ningún giro relativo, precisa de una rigidez infinita (deformación nula) que no puede lograrse en la realidad. Así como una articulación precisa de una rigidez nula también inexistente.

La validez del cálculo utilizando estas idealizaciones se consigue asegurando a la hora del montaje que por ejemplo una unión representada como rígida en el cálculo, posea una rigidez elevada de forma que esté acorde con la idealización realizada y la deformación que sufra no tenga efectos significativos sobre la distribución de esfuerzos final.

Esto ha servido durante décadas como forma de actuación ya que simplifica mucho los cálculos, si bien durante los últimos años tanto el Eurocódigo como el Código Técnico de la Edificación incluyen métodos para considerar el comportamiento real de las uniones. Para el caso del Eurocódigo, utiliza el método de los componentes donde discretiza la unión en una serie de elementos mecánicos que representan cada una de las partes de la unión y así poder simular su respuesta frente a una determinada sollicitación.

La rigidez de la unión no es constante como en el caso de las uniones elásticas, sino que sigue un comportamiento no lineal de manera que la unión va variando su rigidez conforme varía el momento aplicado. En concreto la rigidez de las uniones va disminuyendo conforme aumentan los esfuerzos, lo que podemos entender como una relajación de la misma comparable a la sufrida por un material elasto-plástico cuando entra en deformación plástica. Mediante experimentación, modelos numéricos, método de las componentes, etc; podemos obtener el comportamiento y la rigidez de las uniones.

En este caso hemos utilizado el comportamiento obtenido mediante experimentación así como mediante simulación por elementos finitos.

Durante años se han realizado numerosos ensayos de uniones de distintas tipologías, geometrías, materiales, etc. Ello ha llevado a la creación de grandes bases de datos con las curvas de comportamiento de numerosas uniones, más aún en el caso de uniones metálicas tan ampliamente utilizadas. Se trata de curvas donde se observa el giro relativo producido en la unión frente al momento aplicado.

Para cada tipología de unión existe una superposición de curvas momento-rotación donde cada una de ellas corresponde con unas características geométricas determinadas.

Si bien como hemos dicho toda unión en realidad es de tipo semirrígido, podemos considerarlas como articuladas o rígidas para nuestros cálculos si mediante estas consideraciones no se producen diferencias significativas en los resultados frente a un cálculo en el que sea introducido su comportamiento real.

Existen diversas formas de marcar los límites para los cuales clasificar una determinada unión de una u otra forma. En el caso concreto de uniones metálicas entre viga y pilar que vamos a estudiar en este trabajo estos límites pueden venir determinados por la relación entre las resistencias de las partes unidas, rigidez, capacidad rotacional etc.

Como ejemplo, el Eurocódigo realiza una clasificación independiente atendiendo a la rigidez o la resistencia.

Atendiendo a la rigidez realiza la clasificación mediante el cálculo de una variable adimensional en función de las propiedades de la unión así como del tipo de pórtico, diferenciando la localización de las uniones en el mismo y si se trata de un pórtico traslacional o intraslacional. Los valores límites de esta variable son aquellos que garantizan que la clasificación de una unión dentro de una tipología determinada no reduzca en más de un cinco por ciento la capacidad resistente de la estructura.

Las líneas rectas continuas marcan los límites marcados por el Eurocódigo para la clasificación de una unión como rígida o articulada.

Así, vemos como las uniones de angular simple (Figura 6) y doble al alma (Figura 7) se encuentran inicialmente en la zona intermedia (semirrígida), pero en cuanto aumenta la carga entran rápidamente en la zona inferior de la línea continua que marca el límite para las uniones semirrígidas. Estas uniones pueden clasificarse claramente como articuladas.

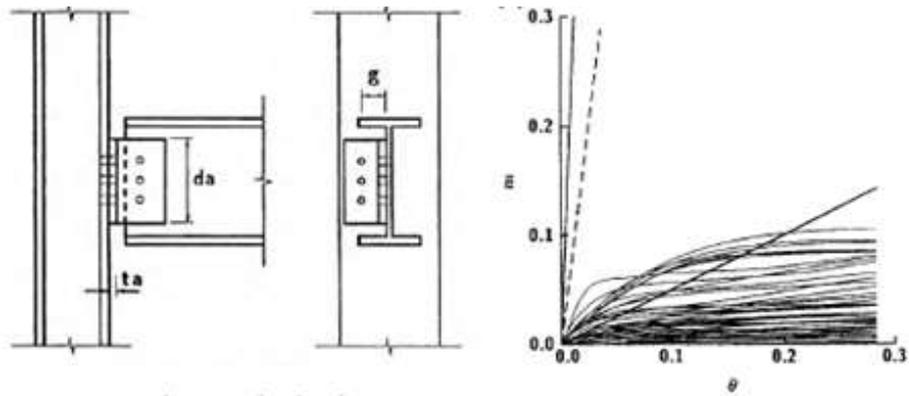


Figura 6 Unión mediante angular simple al alma

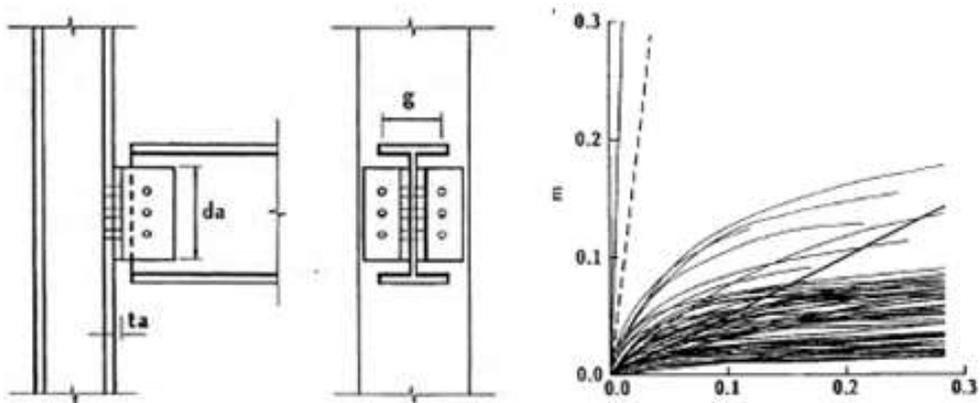


Figura 7 Unión mediante doble angular al alma

La unión con doble angular al alma y asiento superior e inferior (Figura 8), presenta un comportamiento rígido en el inicio y se adentra en la zona semirrígida al aumentar la carga. Esta unión se ha considerado rígida durante tiempo, siendo ahora clasificada como semirrígida.

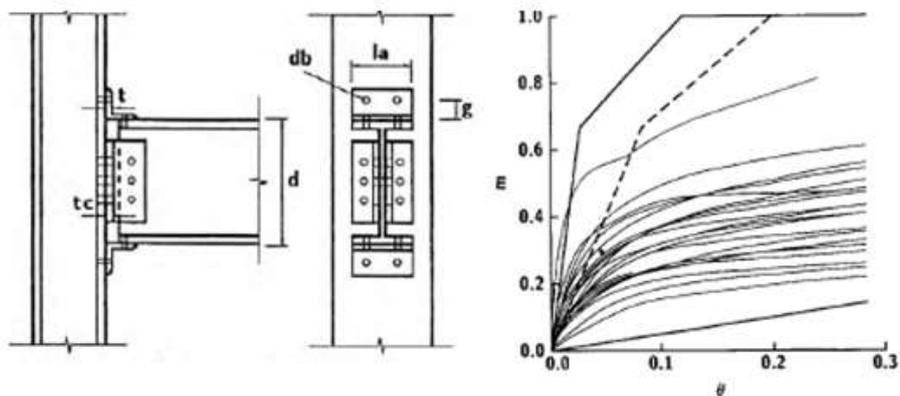


Figura 8 Unión mediante doble angular al alma y doble angular de asiento

Por último la unión con doble angular de asiento (Figura 9), también comienza en la zona rígida para pasar rápidamente todas las curvas a la zona semirrígida. Esta unión está claramente clasificada como semirrígida y es la unión seleccionada para el trabajo.

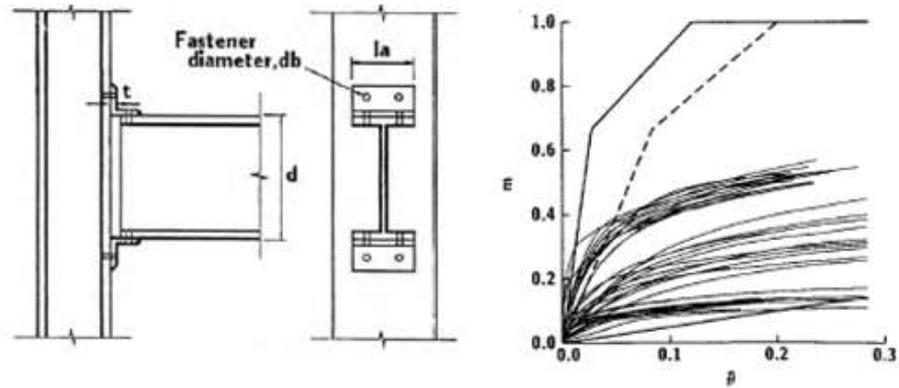
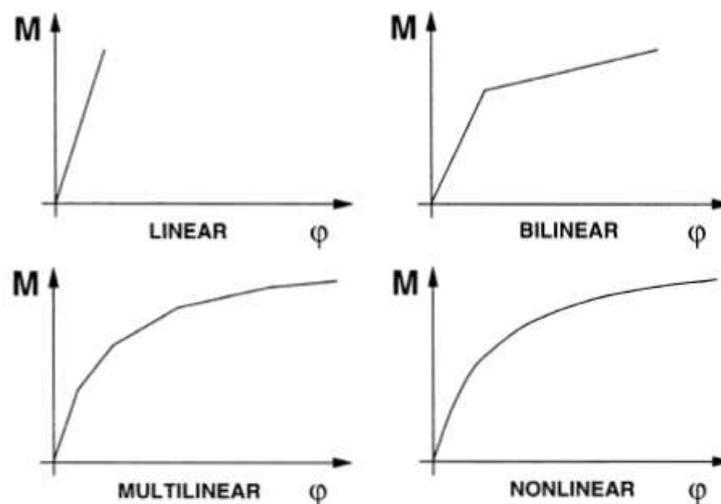


Figura 9 Unión mediante doble angular de asiento

### 2.2.2 Curva Momento-Rotación

Para introducir este comportamiento en nuestro cálculo, debemos obtener la expresión matemática de estas curvas experimentales para lo que existen numerosas aproximaciones como lineales, bilineales, trilineales, no lineales, que dependen de factores físicos o puramente matemáticos, etc. (Gráfica 1)



Gráfica 1 Aproximación curva Momento-Rotación

En este caso vamos a utilizar una aproximación no lineal, en concreto el modelo de potencias impares planteado por Fry Morris.

$$\theta = C_1(KM) + C_2(KM)^3 + C_3(KM)^5$$

Ecuación 1

$C_1, C_2$  Y  $C_3$  = Constantes que dependen del tipo de unión.

$\theta$  = Giro relativo

$M$  = Momento aplicado

$K$  = Constante que depende de las medidas de distintos parámetro geométricos de la unión.

Para este trabajo se ha optado por trabajar con uniones de doble angular de asiento, ya que la gran mayoría de las curvas de comportamiento experimentales de la unión se encuentran en la zona considerada como semirrígida (Figura 9).

En nuestro caso vamos a estudiar una unión entre una viga IPE-400 y un pilar HEB-200 mediante un angular de 12 mm de espesor y 180 mm de anchura unido mediante tornillos de 24 mm.

El modelo de Fry Morris para nuestra unión y su curva momento rotación es la siguiente, donde los datos geométricos están dados en milímetros y la curva momento rotación está expresada en KNm y radianes respectivamente.

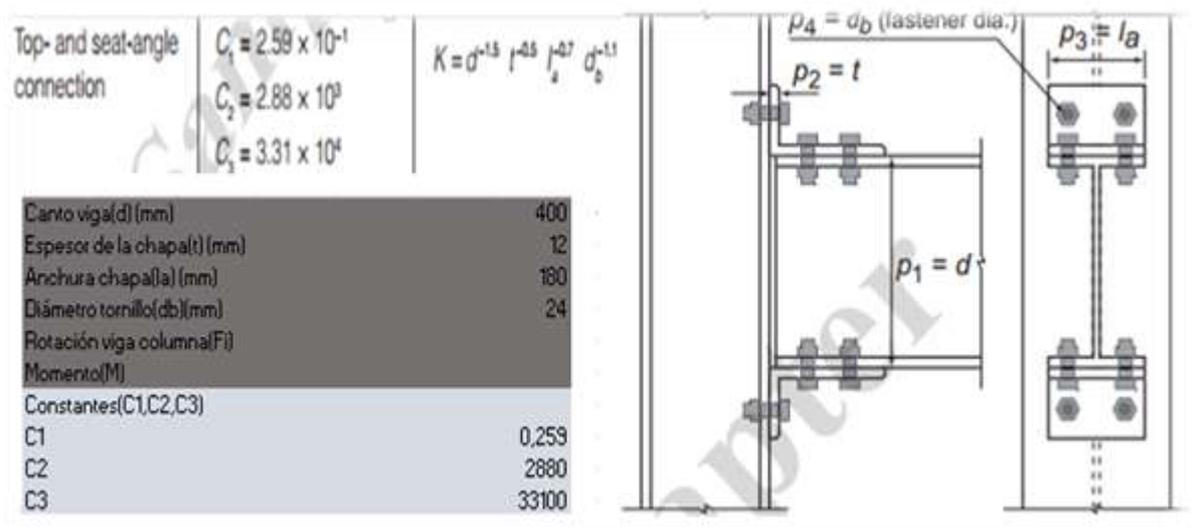
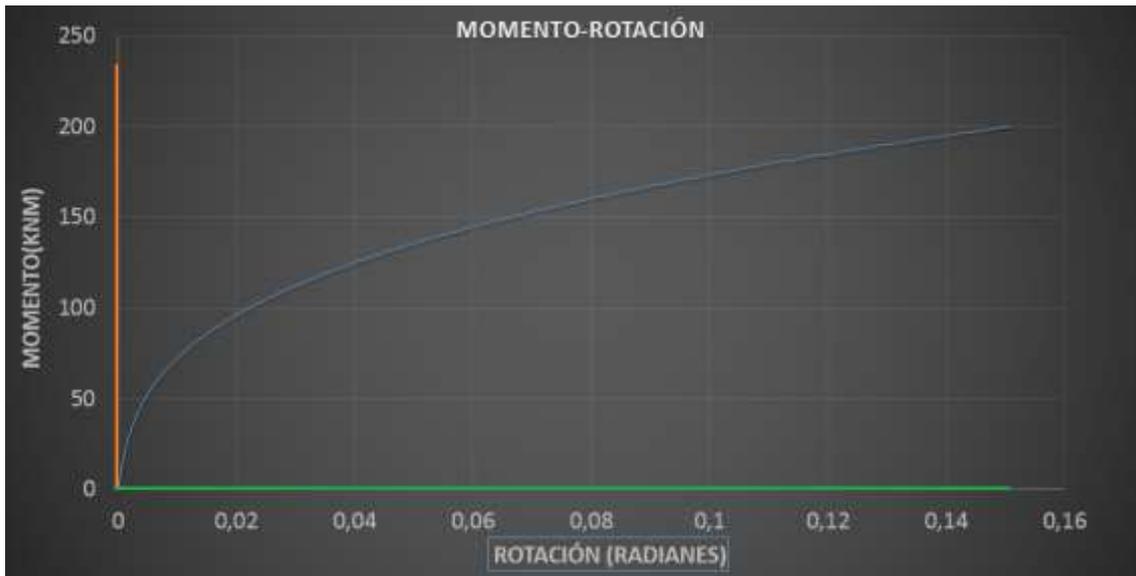


Figura 10 Detalles del modelo Fry-Morris

Como podemos observar en la Gráfica 2 la pendiente de la curva va decreciendo a medida que aumenta el momento aplicado, lo que se traduce en una relajación de la unión debido a la disminución de su rigidez. Podría dividirse la curva en un tramo inicial donde el comportamiento de la unión podría clasificarse como rígida, una parte final donde podríamos tratarla como articulada y el tramo intermedio con comportamiento semirrígido. En naranja y verde puede observarse lo que sería el comportamiento ideal para una unión rígida y articulada respectivamente.



Gráfica 2 Curvas momento rotación modelo Fry-Morris

De esta forma conocemos la expresión matemática de la curva de comportamiento de nuestra unión extraída de los experimentos realizados que nos servirá para implementar este comportamiento en los cálculos.

### 2.2.3 Matriz de rigidez [2]

En los casos anteriores, donde aparecía algún tipo de giro o desplazamiento liberado, no existía ninguna relación entre estos giros o desplazamientos en el nudo de la estructura con el de las barras, por lo que la adaptación de la matriz de rigidez debe hacerse por ejemplo imponiendo esfuerzos nulos asociados a grados de libertad liberados.(Anexo 1)

Para el caso de una barra con nudos semirrígidos, nos encontramos con un caso diferente ya que no se anula ningún esfuerzo como en los casos anteriores.

Si nos fijamos en la Figura 11 podemos observar cómo definimos los giros de los extremos de la barra, donde los subíndices 1 y 2 indican los giros absolutos de los nudos de la estructura, mientras los subíndices r1 y r2 indica los giros relativos producidos al considerar el comportamiento real de la unión.

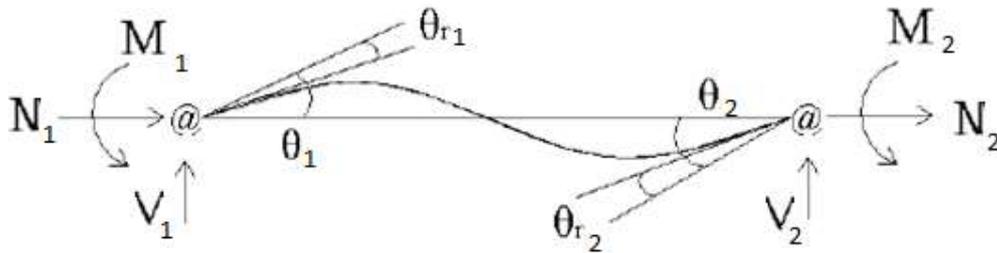


Figura 11 Barra semirrígida para el “Método directo de rigidez”

Por lo tanto, si consideramos la barra independientemente de los extremos, nos encontramos con un elemento sólido con sus secciones perpendiculares a la directriz que define la dirección de las mismas, con la longitud de esta de un orden superior a las *restantes experimentando un giro finito en sus extremos (Y1- Yr1)* donde ninguno de los esfuerzos son obligatoriamente cero ni existen desplazamientos liberados.

Nos encontramos así con que el comportamiento de esta barra en función del giro de sus extremos es igual al de una barra de nudos rígidos, solo que para expresar los esfuerzos en función de los desplazamientos de los nodos globales de la estructura debemos modificar la matriz de rigidez.

Para una barra de nudos rígidos los esfuerzos que aparecían en función del giro de sus extremos o nudos son los siguientes:

$$M_1 = \frac{4EI}{L} \theta_1 + \frac{2EI}{L} \theta_2 \quad M_2 = \frac{2EI}{L} \theta_1 + \frac{4EI}{L} \theta_2$$

Ecuación 2

$$V_1 = \frac{6EI}{L^2} \theta_1 + \frac{6EI}{L^2} \theta_2 \quad V_2 = -\frac{6EI}{L^2} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} \theta_2$$

Ecuación 3

Estos son los esfuerzos en los nudos de la barra en función de los giros experimentados por sus nudos, que a su vez coinciden con los de los nudos globales de la estructura. Partiendo de estas expresiones para los esfuerzos, en este caso los giros experimentados por los extremos de la barra son los giros globales del nudo menos el giro relativo de forma que:

$$\theta_1 = \theta_1 - \theta_{r1}$$

Ecuación 4

$$\theta_2 = \theta_2 - \theta_{r2}$$

Ecuación 5

Como ya vimos el comportamiento de las uniones semirrígidas venía definido por la curva momento rotación de la unión. Es decir, el giro relativo producido tenía una relación no lineal con el momento aplicado sobre la unión. Definimos los valores K1 y K2 como la relación entre el momento aplicado y el giro relativo producido

$$K_1 = \frac{M_1}{\theta_{r1}} \rightarrow \theta_{r1} = \frac{M_1}{k_1}$$

Ecuación 6

$$K_2 = \frac{M_2}{\theta_{r2}} \rightarrow \theta_{r2} = \frac{M_2}{k_2}$$

Ecuación 7

Introduciendo la nueva expresión para el giro en las ecuaciones para el momento flector:

$$M_1 = \frac{EI}{L} [4(\theta_1 - \theta_{r1}) + 2(\theta_2 - \theta_{r2})] \rightarrow M_1 = \frac{EI}{L} \left[ 4 \left( \theta_1 - \frac{M_1}{k_1} \right) + 2 \left( \theta_2 - \frac{M_2}{k_2} \right) \right]$$

Ecuación 8

$$M_2 = \frac{EI}{L} [2(\theta_1 - \theta_{r1}) + 4(\theta_2 - \theta_{r2})] \rightarrow M_2 = \frac{EI}{L} \left[ 2 \left( \theta_1 - \frac{M_1}{k_1} \right) + 4 \left( \theta_2 - \frac{M_2}{k_2} \right) \right]$$

Ecuación 9

Expresándolo en función del giro global para así poder introducirlo en el “Método directo de la rigidez” queda:

$$M_1 = \frac{EI}{L} (r_{ii}\theta_1 + r_{ij}\theta_2)$$

Ecuación 10

$$M_2 = \frac{EI}{L} (r_{ij}\theta_1 + r_{jj}\theta_2)$$

Ecuación 11

Donde:

$$r_{ii} = \frac{1}{k_R} \left( 4 + \frac{12EI}{Lk_B} \right)$$

Ecuación 12

$$r_{jj} = \frac{1}{k_R} \left( 4 + \frac{12EI}{Lk_A} \right)$$

Ecuación 13

$$r_{ij} = \frac{2}{k_R}$$

Ecuación 14

$$k_R = \left( 1 + \frac{4EI}{Lk_A} \right) \left( 1 + \frac{4EI}{Lk_B} \right) - \left( \frac{EI}{L} \right)^2 \left( \frac{4}{k_A k_B} \right)$$

Ecuación 15

La matriz de rigidez elemental queda así

$$[k]_i = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{-AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & (r_{ii} + 2r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^3} & (r_{ii} + r_{ij}) \frac{EI}{L^2} & 0 & -(r_{ii} + 2r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^3} & (r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^2} \\ 0 & (r_{ii} + r_{ij}) \frac{EI}{L^2} & r_{ii} \frac{EI}{L} & 0 & -(r_{ii} + r_{ij}) \frac{EI}{L^2} & r_{ij} \frac{EI}{L} \\ \frac{-AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -(r_{ii} + 2r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^3} & -(r_{ii} + r_{ij}) \frac{EI}{L^2} & 0 & (r_{ii} + 2r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^3} & -(r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^2} \\ 0 & (r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^2} & r_{ij} \frac{EI}{L} & 0 & -(r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^2} & r_{jj} \frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$

Ecuación 16

### 3. ABAQUS

#### 3.1 INTRODUCCIÓN

Para obtener la curva momento rotación de la unión mediante simulación, se ha modelado la misma unión para la cual se ha obtenido la expresión matemática mediante el modelo de Fry-Morris en el entorno de Abaqus.

El objetivo es simular lo más fielmente posible la deformación sufrida por la unión al aplicar un momento sobre la misma.

Se ha hecho uso de 9 de los módulos principales de los que dispone el programa:

Part: Modelado de las distintas partes que forman nuestra unión.

Property: Definición de los materiales y asignación a las distintas partes.

Assembly: Ensamblado de las distintas partes.

Step: Definición de las variables de salida y los intervalos de resolución.

Interaction: Aplicación de los contactos entre partes.

Load: Cargas y condiciones de contorno.

Mesh: Formulación y mallado.

Job: Creación del trabajo

Visualization: Visualización de resultados.

La simulación que queremos realizar constituye un problema tridimensional con un elevado número de grados de libertad y contactos entre partes.

Con el fin de reducir el coste computacional sin afectar de forma apreciable a los resultados, se han realizado algunas suposiciones y simplificaciones. Dado que nuestro objetivo es la obtención del campo de desplazamientos, todas estas medidas han sido efectuadas de manera que las deformaciones en el modelo representen fielmente las producidas durante los experimentos, y solo obviando aquellas que no tengan un efecto representativo sobre el resultado final. Los detalles de estas simplificaciones se verán durante los distintos apartados.

El problema principal del modelo se encuentra en los contactos ya que estos deben ser definidos previamente, lo que significa conocer de antemano donde y de qué manera van a producirse durante la simulación.

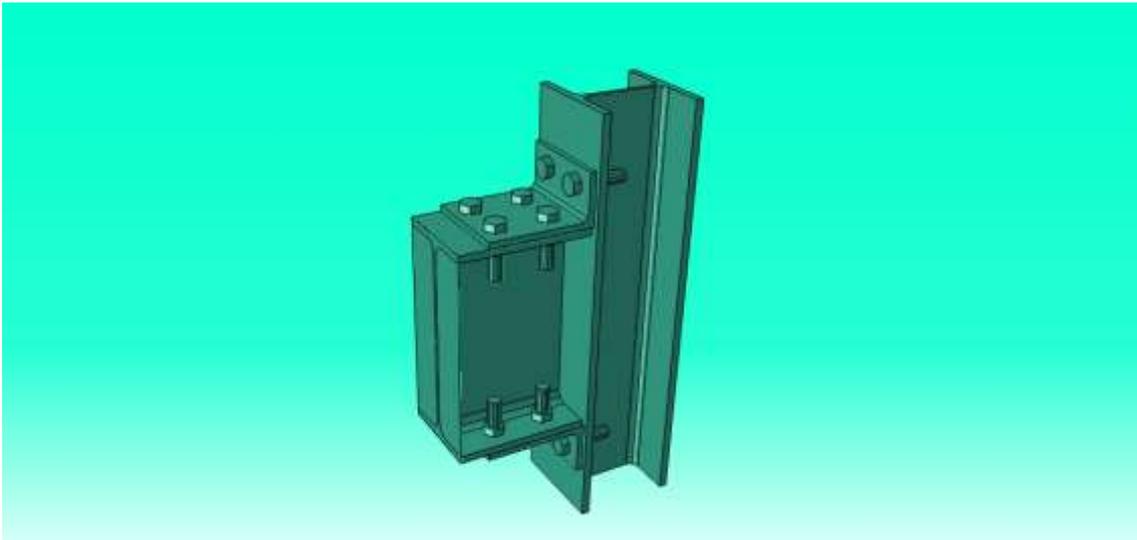


Figura 12 Modelo en Abaqus

### 3.2 PART

El modelo consta de 6 partes diferentes:

***Tornillos viga M 24X -8.8 y Tornillos pilar M 24X -8.8***

Conjunto tornillo-tuerca modelado como un sólido conjunto de vástago 24mm y longitud entre la cabeza del tornillo y cabeza de la tuerca de 25,5 mm en la viga y 27 mm en el pilar.

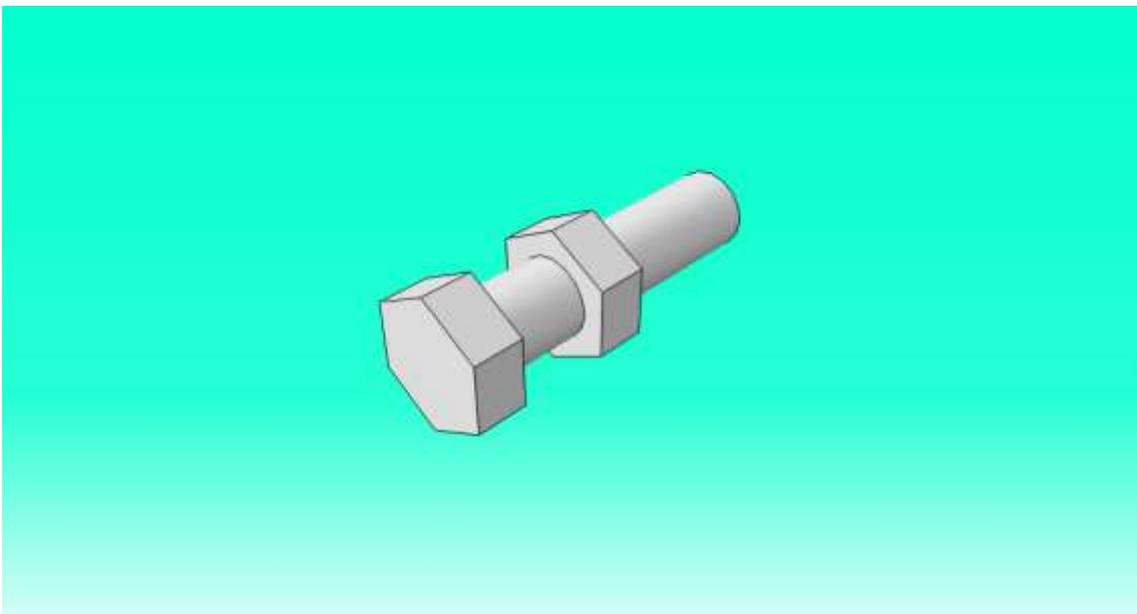


Figura 13 Tornillo-Tuerca

Angulares 180X12

Angular de 12 mm de espesor y 180 mm de largo.

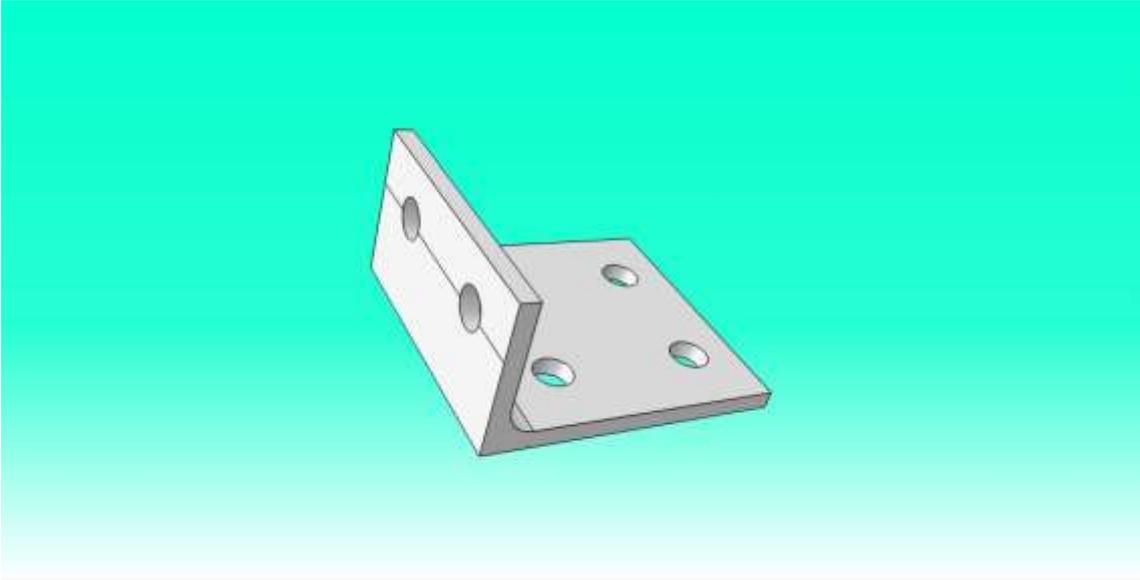


Figura 14 Angular

-Pilar HEB-200

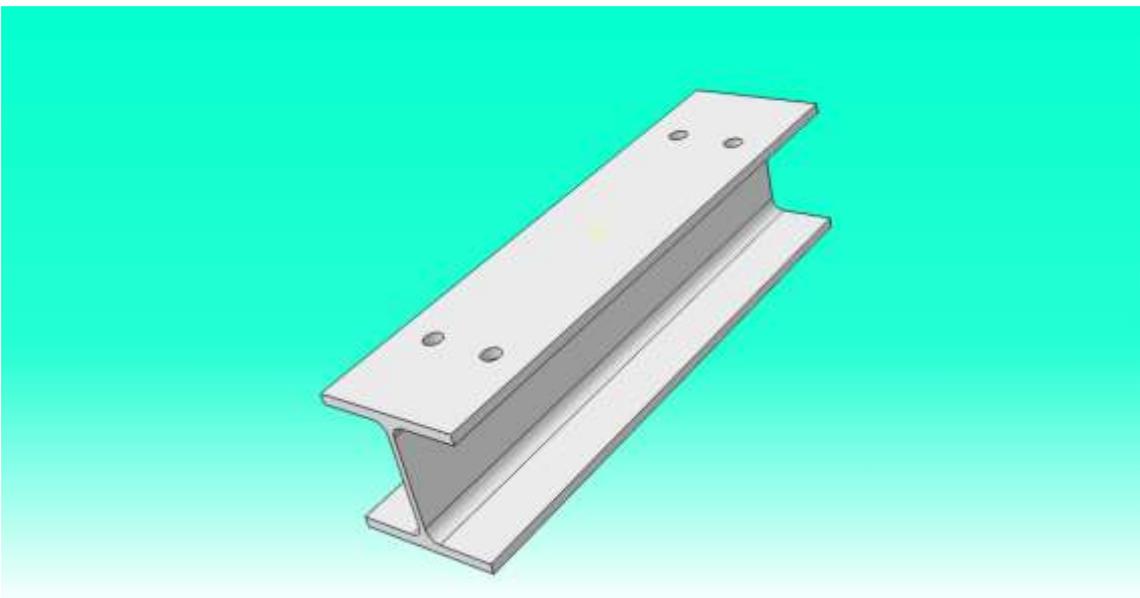


Figura 15 Pilar

Perfil normalizado para estructuras de acero con 4 taladrados de 26 mm para los Tornillos-Viga que unen los angulares con el Pilar.

-Viga IPE-400

Perfil normalizado para estructuras de acero con 8 taladrados de 26 mm para los Tornillos-Viga que unen los angulares con la Viga.

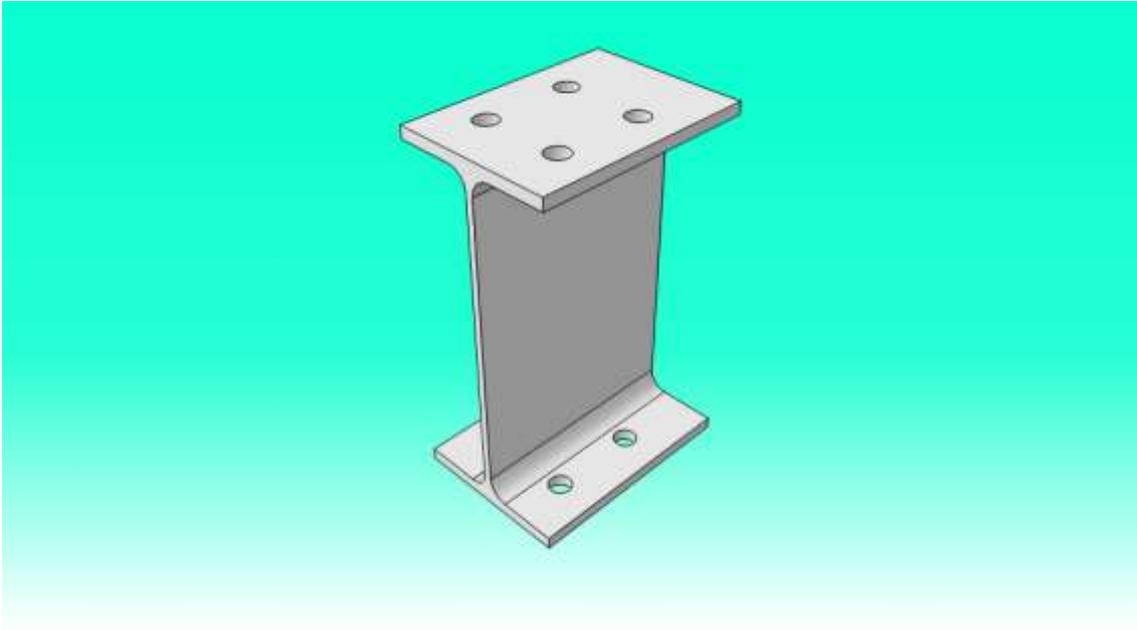


Figura 16 Viga

PLACA RÍGIDA

Elemento placa bidimensional rígida (Rigidez infinita) para la aplicación del momento puntual sobre la sección de la viga.

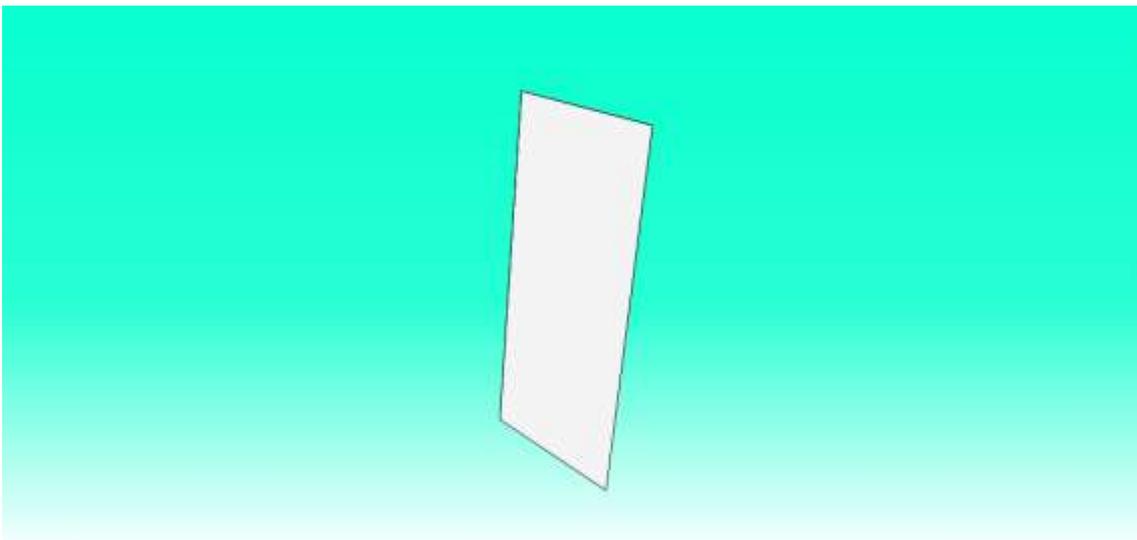


Figura 17 Placa plana rígida

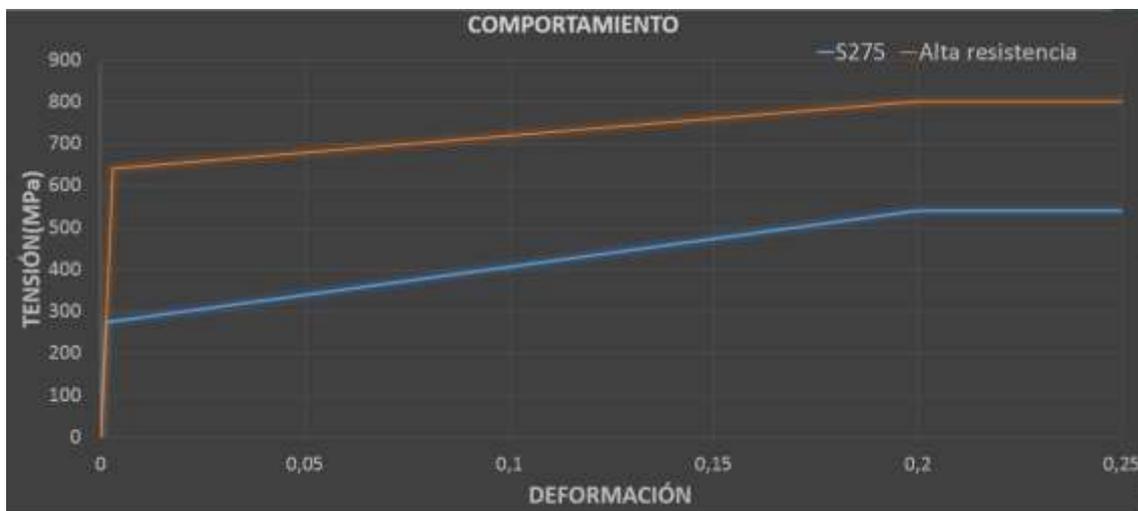
### 3.3 PROPERTY

En el apartado correspondiente a propiedades, se han definido dos materiales diferentes. Acero S275 con un límite elástico de 275 N/mm<sup>2</sup> (Mpa), módulo elástico (E) de 210.000 N/mm<sup>2</sup> y coeficiente de Poisson de 0,3 para la viga, el pilar y los angulares.

Acero de alta resistencia para tornillos de clase 8.8, límite elástico 640N/mm<sup>2</sup> (Mpa), módulo elástico (E) de 210.000 Mpa y coeficiente de Poisson de 0,3.

Además se han definido como materiales con comportamiento elasto-plástico, con un tramo inicial elástico hasta alcanzar el límite elástico, a partir del cual se ha supuesto comportamiento plástico con endurecimiento lineal por deformación hasta una tensión de

540 MPa para el acero S275 y 800Mpa para el acero de alta resistencia hasta una deformación del 20 % en los dos casos, a partir del cual se ha supuesto sin endurecimiento.



Gráfica 3 Curva de comportamiento acero S-275 y de alta resistencia en Abaqus

Esto se ha llevado a cabo después de comprobar en distintos modelos de prueba realizados que en la unión y sobre todo en los angulares se alcanzaba una tensión de Von Mises muy superior al límite elástico del material (275 MPa), que tenía como consecuencia una sobreestimación de la rigidez de la unión para cargas elevadas.

En la figura siguiente se puede observar el detalle de un modelo de prueba con comportamiento elástico donde se sobrepasa ampliamente el límite elástico en el angular.

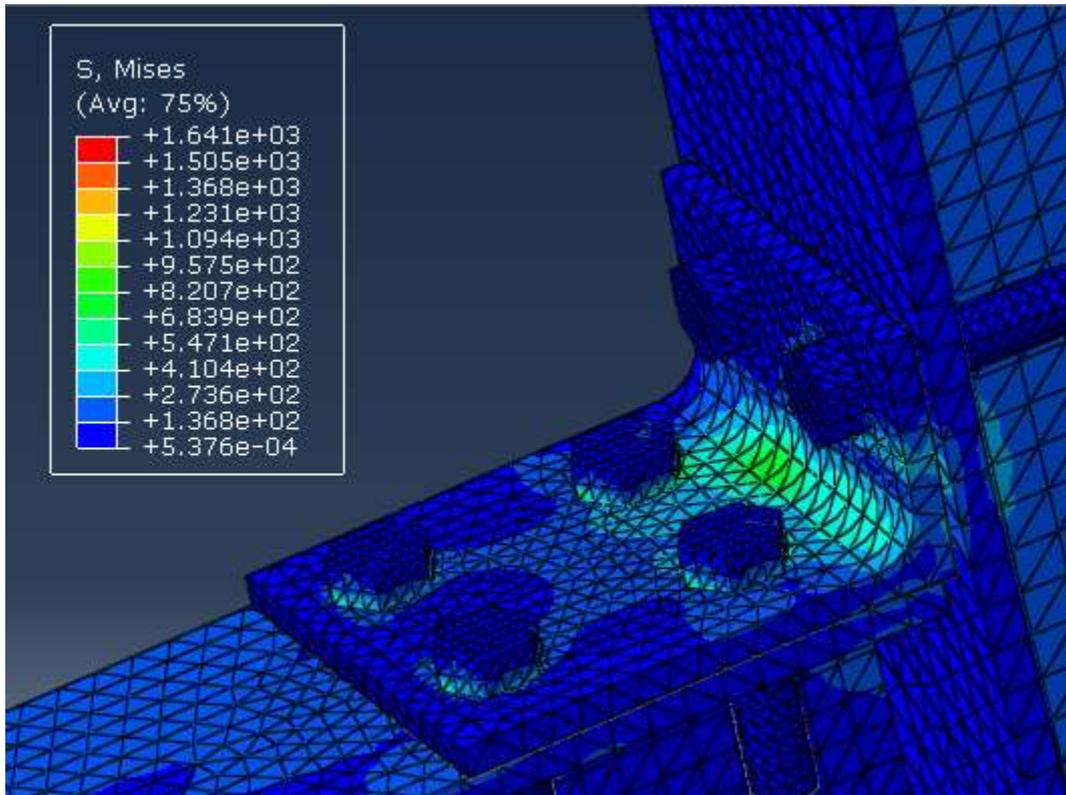


Figura 18 Tensión superior al límite elástico en angular

### 3.4 LOAD

La carga, en nuestro caso un momento puntual de sobre la sección de la viga, se ha aplicado sobre el nudo central de una placa plana rígida en contacto con la sección de la viga mediante la restricción “tie” (Figura 19).

Se ha adoptado esta solución con la idea de que al encontrarse la carga aplicada sobre una sección que no experimenta deformación, se consigue aplicar el esfuerzo de forma proporcional sobre toda la sección, evitando así una zona con una alta concentración de tensiones y deformaciones alrededor del punto de aplicación del momento, circunstancia que no se corresponde con la realidad, donde no nos encontramos con esta carga aplicada directamente sobre este punto de la sección de la viga, sino que el momento va asociado a toda la sección de la viga y es generado mediante una distribución de tensiones sobre la misma.

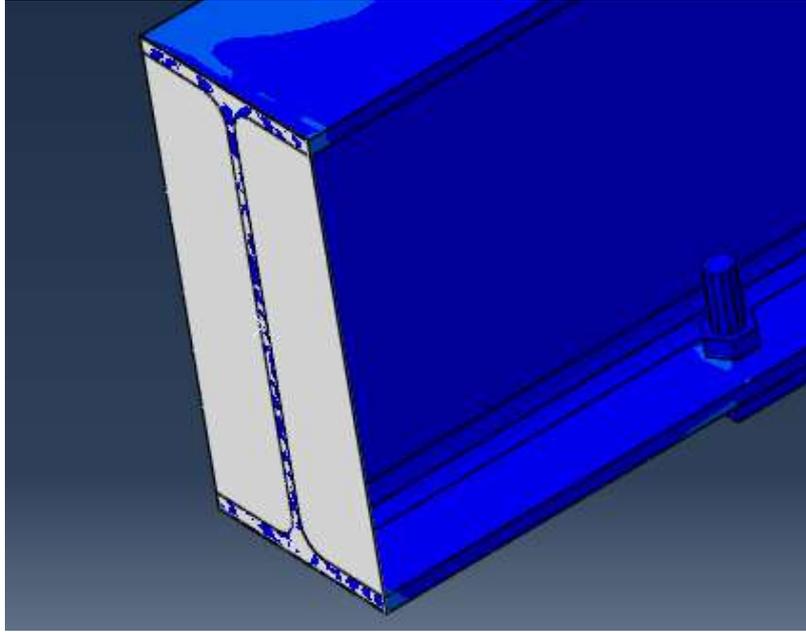


Figura 19 Placa rígida sobre sección de la viga

Como condiciones de contorno se han impedido los desplazamientos de los nudos de las secciones superior e inferior del pilar al aplicar una carga de 200KNm sobre el punto central de la placa rígida bicuadrada (Figura 20).:

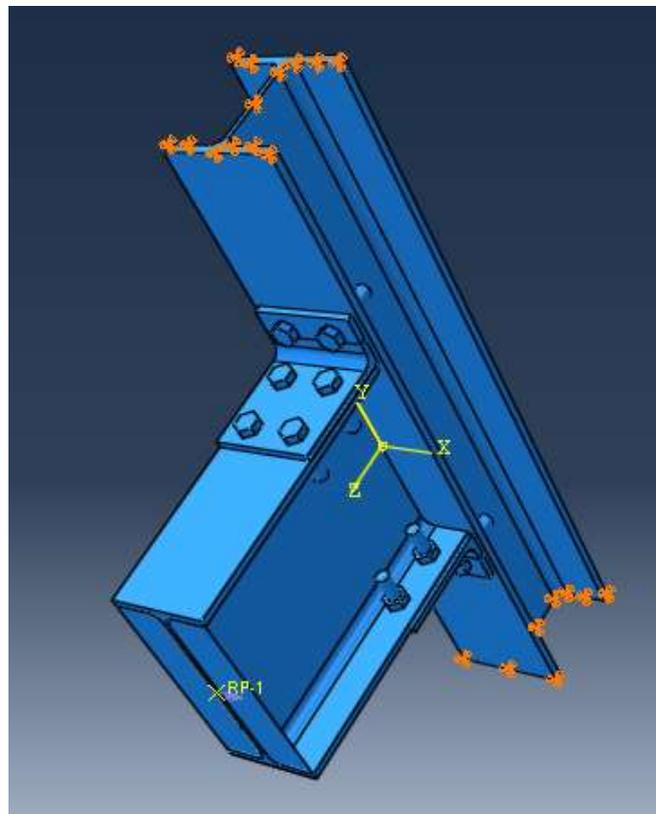


Figura 20 Condiciones de contorno sobre el pilar y momento sobre la placa rígida

### 3.5 MESH

Para el mallado, se ha intentado obtener un mallado uniforme que mejore los resultados. Debido al elevado número de contactos se han utilizado elementos tetraédricos y formulación de segundo orden.

Se ha aplicado una malla más fina sobre los angulares y tornillos ya que es en estas partes donde se necesita mayor precisión al ser los responsables principales de las deformaciones sufridas por la unión.

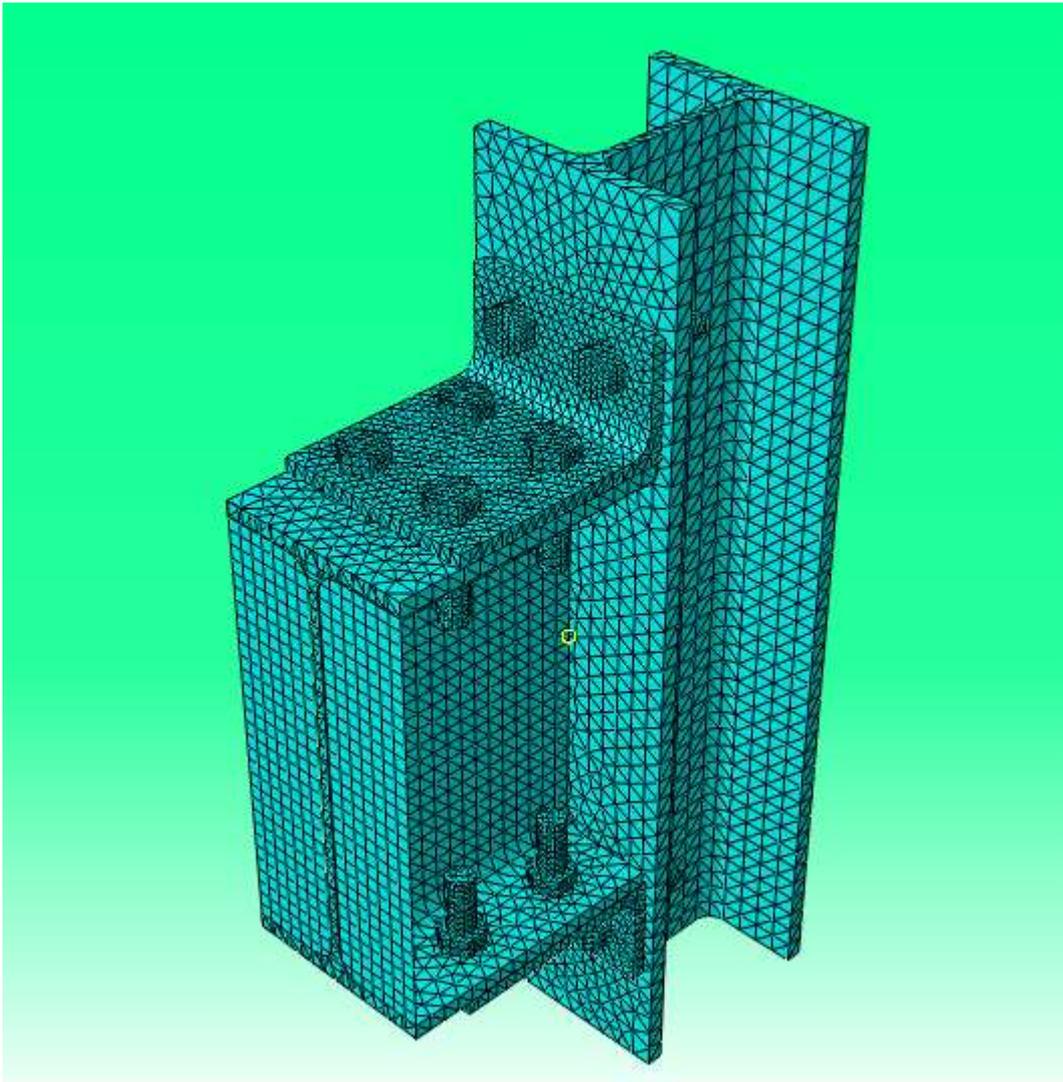


Figura 21 *Mallado*

### 3.6 INTERACTION

Los contactos del modelo han de ser definidos de manera previa, lo que supone conocer de antemano donde y de que manera van a producirse. En nuestro caso podemos extraer esta información del modelo experimental. Por otra parte, en caso de no haber definido correctamente alguno de ellos, se puede observar durante la

simulación donde puede verse que era necesario definir un contacto entre la parte superior del angular inferior y el pilar, mientras la parte inferior se separa del mismo siendo innecesario por lo tanto definir un contacto

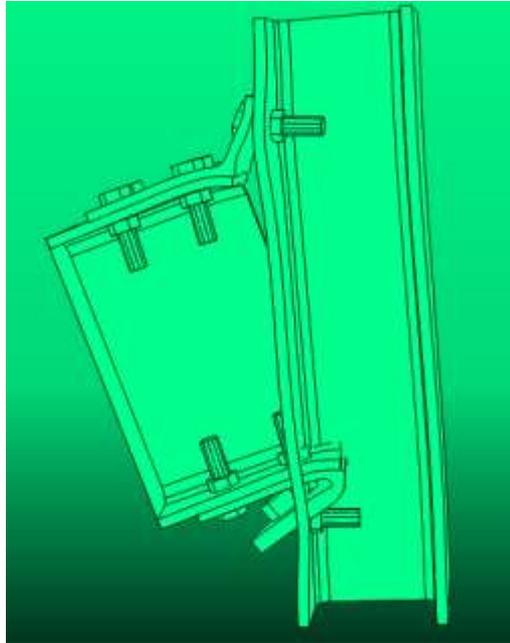


Figura 22 Fallo de contacto

### CONSTRAINT-TIE

Restricción que permite un mallado distinto para las superficies en contacto e imposibilita los desplazamientos relativos de las mismas durante toda la simulación.

Se ha aplicado este contacto entre la parte tornillos-tuerca y cualquier otra parte de la unión. Esta suposición ha sido tomada debido a que el desplazamiento relativo en el contacto de los tornillos con otras superficies es de valor despreciable y tiene unos efectos poco significativos en la deformación de la unión.

### CONTACTO PERSONALIZADO

Se ha definido con un comportamiento tangencial sin fricción y un comportamiento normal "Hard" con endurecimiento por defecto y permitiendo la separación de las superficies después de haberse producido contacto.

Se ha aplicado este contacto entre los angulares y la viga despreciando así la fuerza de rozamiento que pueda darse debido al apriete de los tornillos, despreciando así la resistencia que pueda aportar esta fuerza y permitiendo su desplazamiento relativo en el plano de contacto hasta cargar a los tornillos tangencialmente.

Este contacto también ha sido aplicado al contacto entre angulares y pilar, si bien solo se ha aplicado sobre una parte de esta superficie. Esa decisión se ha tomado

después de observar como durante la deformación existía una zona de estos que cumplían con las características de este contacto, mientras otras se distanciaban sin producirse contacto. Para aplicar diferentes contactos sobre una misma superficie (angulares), se ha realizado una partición sobre la misma.

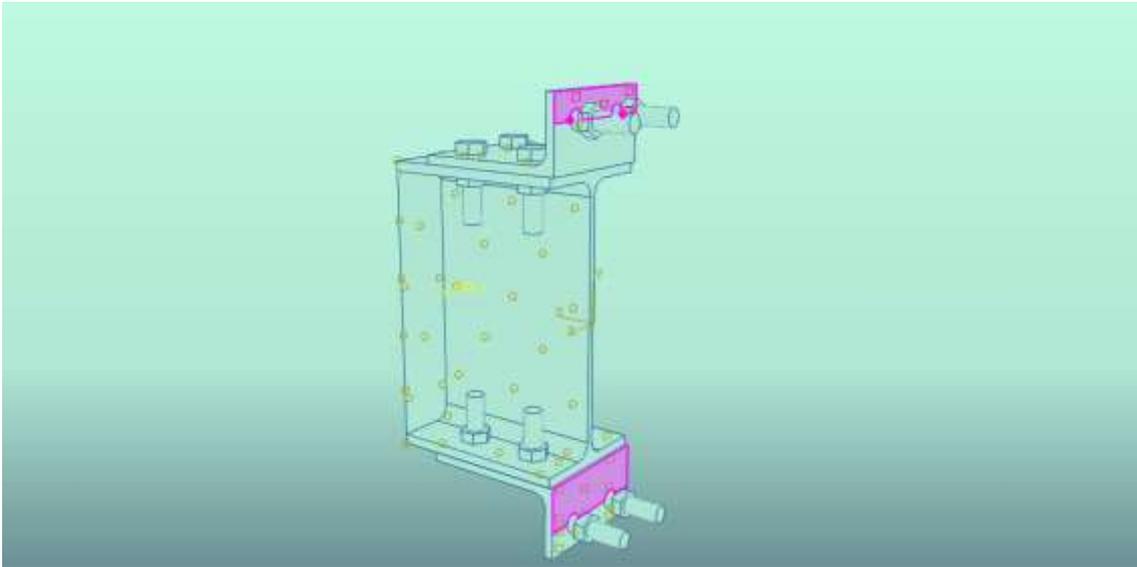


Figura 23 Detalle contacto 1

Sin embargo, a la cara inferior de la partición del angular superior y a la inferior de la partición del angular inferior no se les ha aplicado ninguna condición de contacto ya que se ha observado durante las deformaciones que pierden el contacto desde el inicio de la simulación.

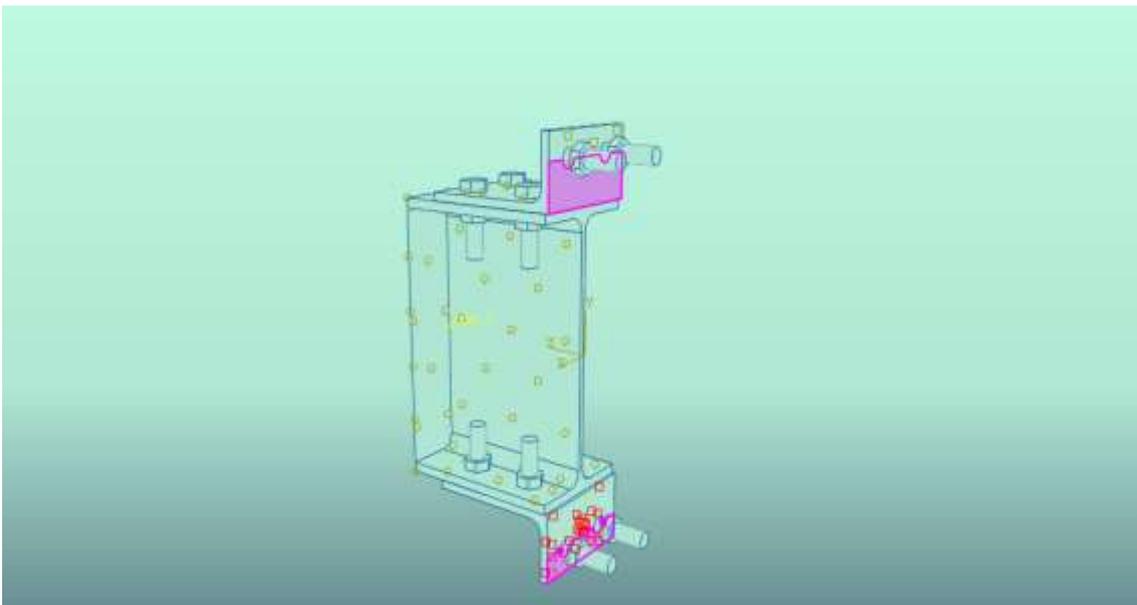


Figura 24 Detalle contacto 2

### 3.7 VISUALIZATION

En este apartado se muestran los resultados de la simulación. Vamos a ver las deformaciones y tensiones generadas en el modelo para los distintos pasos de carga.

#### Step time=0.2412 (48.24 KNm)

Se observa que el angular aún están trabajando en límite elástico.(Figura 25)

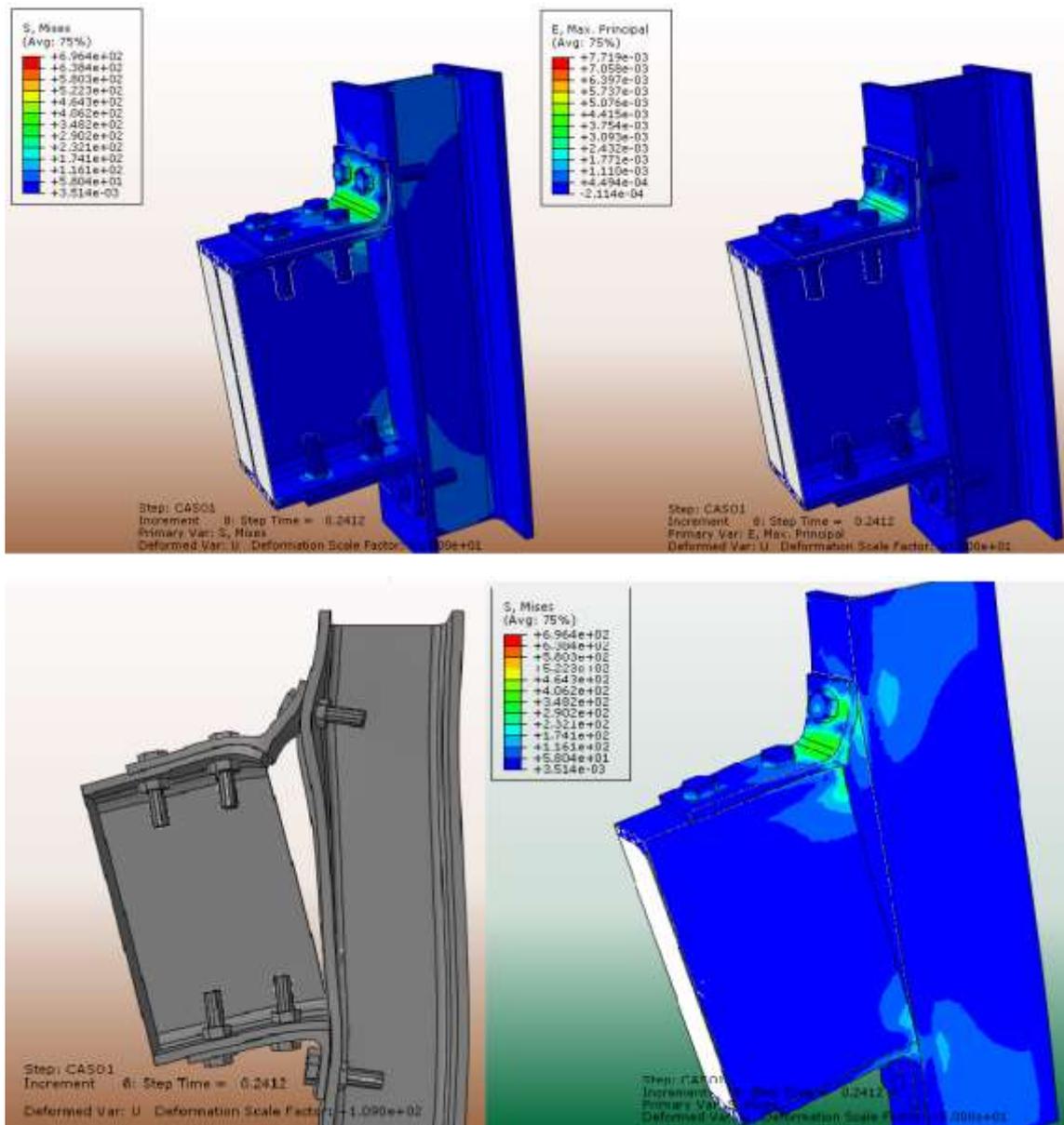


Figura 25 Tensiones y deformaciones 1

**Step time=0.2912 (58.24 KNm)**

Prácticamente todo el angular está plastificado (Figura 26)

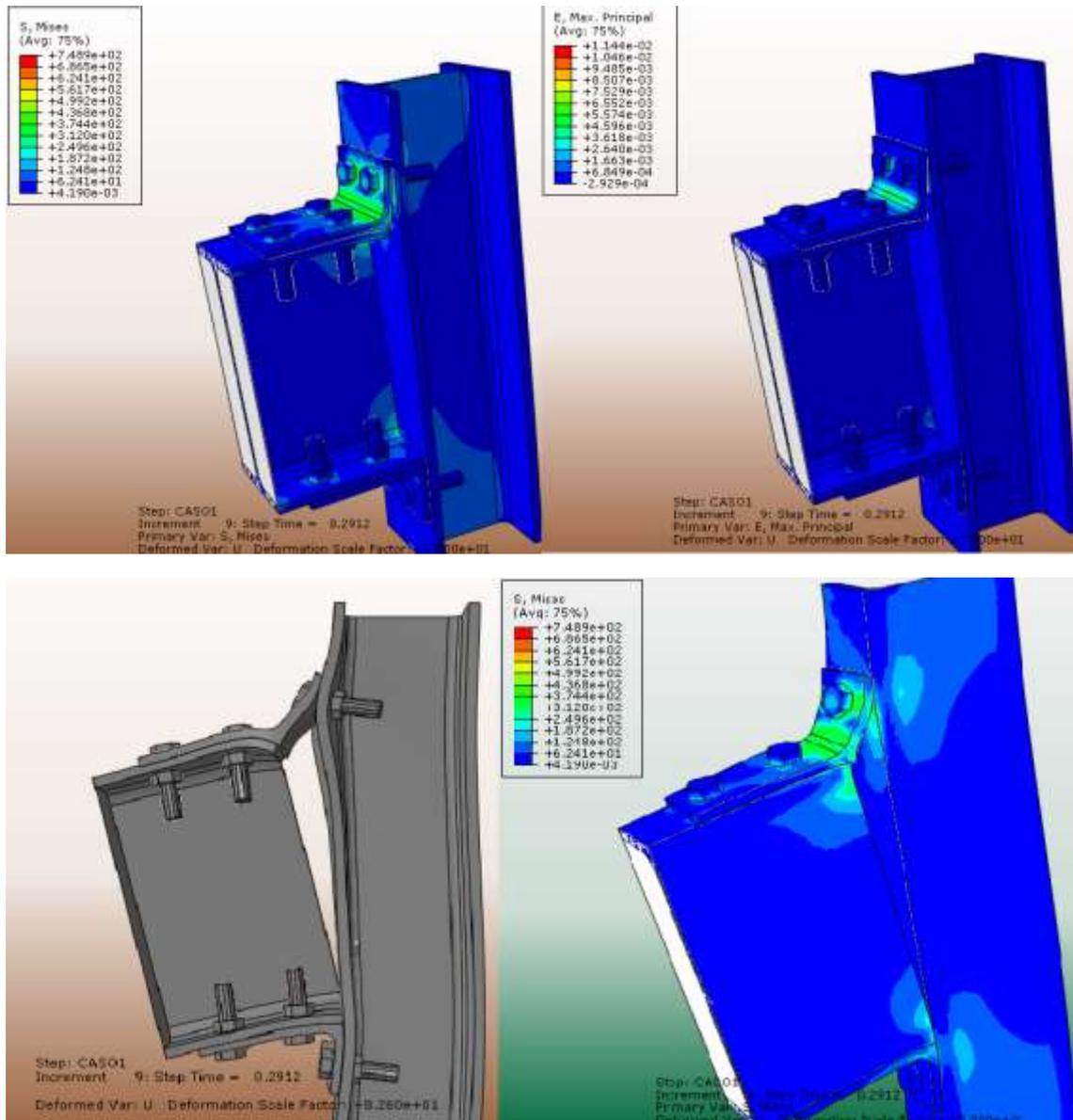


Figura 26 Tensiones y deformaciones 2

**Step time=0.3912 (78.24 KNm)**

El angular está completamente plastificado y las deformaciones aumentan en mayor grado.(Figura 28)

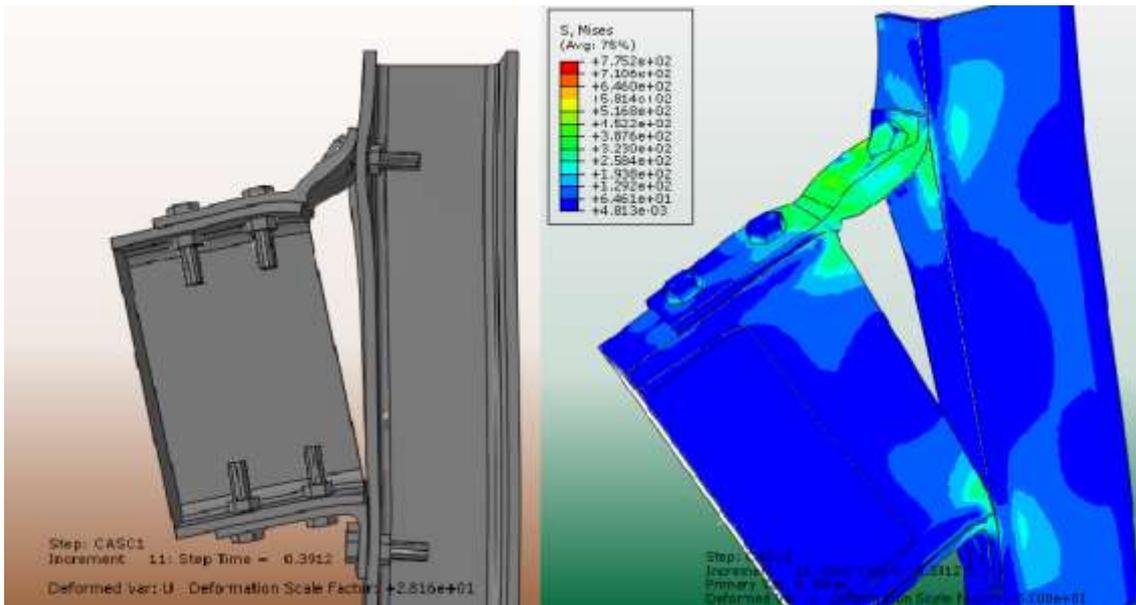


Figura 27 Tensiones y deformaciones 4

**Step time=0.4412 (88.24KNm)**

El angular está completamente plastificado y las deformaciones aumentan en mayor grado acercándonos ya a la simplificación realizada de unión articulada para valores altos de carga.

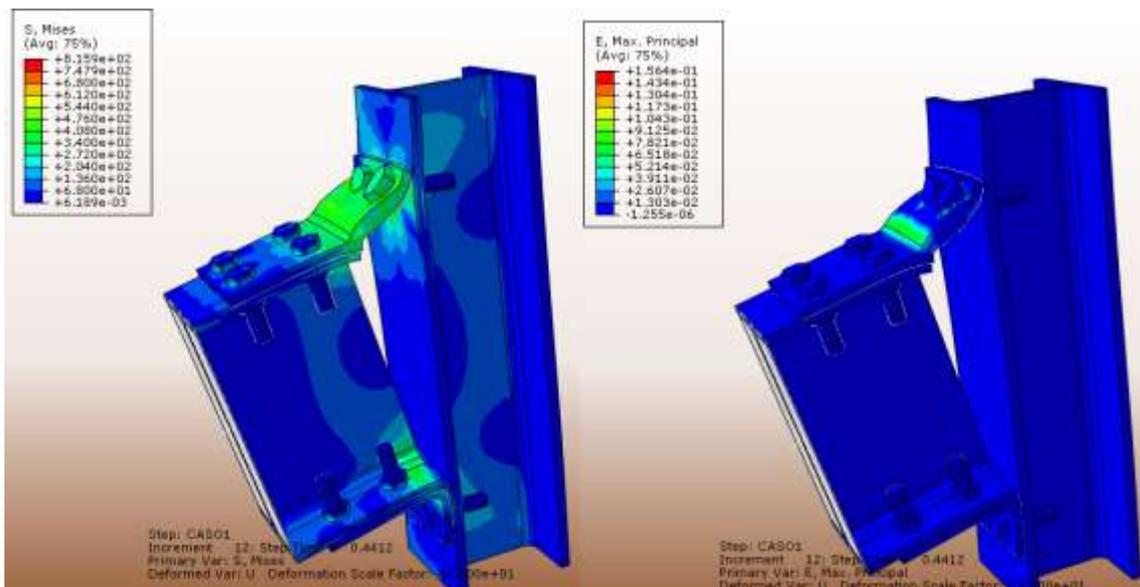


Figura 28 Tensiones y deformaciones 5

### 3.8 OBTENCIÓN DE LA CURVA MOMENTO ROTACIÓN

Para la obtención de la curva momento-rotación del modelo numérico, se ha calculado el giro relativo entre la viga y el pilar mediante la aplicación de razones trigonométricas.

Se han tomado como referencia 4 nodos del modelo, dos de ellos para representar el eje central de la viga, y otros dos para la cara del pilar.

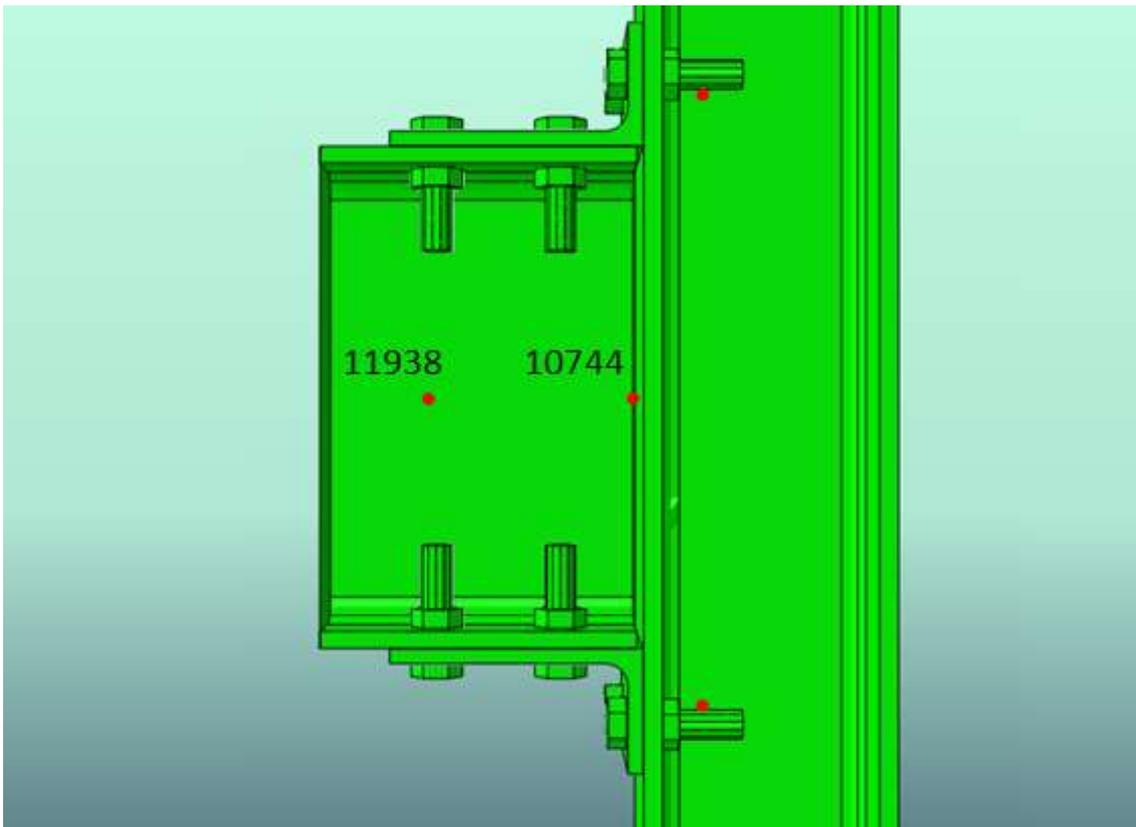


Figura 29 Detalle nodos para el cálculo de giros relativos

Mediante el comando “Query information-Distance”, se seleccionan para cada incremento de carga los 4 nodos elegidos para obtener sus desplazamientos.

El giro del pilar es despreciable frente al giro de la viga, por lo que no se ha incluido en los cálculos.

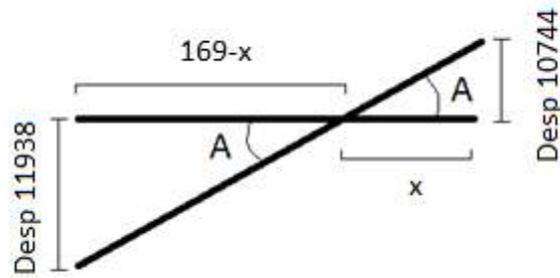


Figura 30 Trigonometría para el cálculo de giros relativos

$$\tan A = \frac{\text{Desp}11938}{(169,11 - x)} = \frac{\text{Desp} 10744}{x}$$

Ecuación 17

$$x = \frac{\text{Desp} 10744 \times 169,11}{\text{Desp} 10744 + \text{Desp} 11938}$$

Ecuación 18

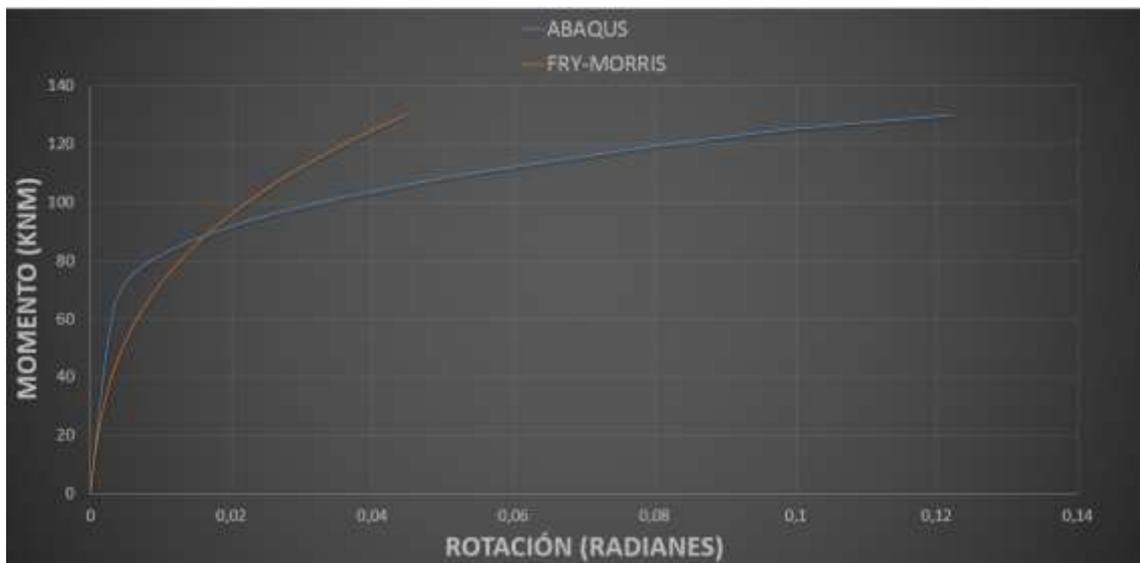
$$\tan A = \frac{\text{Desp} 10744}{x}$$

Ecuación 19

Los datos se han organizado en Excel para crear la gráfica momento-rotación y obtener la función de aproximación a la curva. (Tabla 1)

Desp 11938(mm)	Desp 10744(mm)	Momento(KNm)	Y Abaqus(Radianes)	Y Fry- Morris(Radianes)	% Diferencia
0,0000	0,0000	0	0	0	0
0,0096	0,0056	2	8,98E-05	9,45E-05	4,96
0,0192	0,0112	4	1,80E-04	1,90E-04	5,31
0,0336	0,0196	7	3,15E-04	3,36E-04	6,43
0,0553	0,0321	11,4	5,17E-04	5,64E-04	8,29
0,0877	0,0510	18,25	8,20E-04	9,67E-04	15,16
0,1360	0,0789	28,25	1,27E-03	1,73E-03	26,36
0,1860	0,1065	38,25	1,73E-03	2,78E-03	37,75
0,2444	0,1345	48,25	2,24E-03	4,23E-03	47,06
0,3238	0,1645	58,25	2,89E-03	6,19E-03	53,37
0,4708	0,1988	68,25	3,96E-03	8,76E-03	54,81
1,0015	0,2638	78,25	7,48E-03	1,20E-02	37,90
2,2412	0,4368	88,25	1,58E-02	1,62E-02	2,01
4,1911	0,7506	98,25	2,92E-02	2,12E-02	37,80
7,1342	1,2495	108,25	4,95E-02	2,73E-02	81,58
10,9853	1,9391	118,24	7,63E-02	3,45E-02	121,06
12,0760	2,1359	120,75	8,38E-02	3,65E-02	129,67
13,2619	2,3469	123,24	9,20E-02	3,86E-02	138,59
14,5500	2,5700	125,74	1,01E-01	4,07E-02	147,67
16,2940	2,8770	128,25	1,13E-01	4,30E-02	162,64
17,0120	3,0070	129,25	1,18E-01	4,39E-02	168,39
17,6910	3,1297	130,25	1,22E-01	4,48E-02	173,16

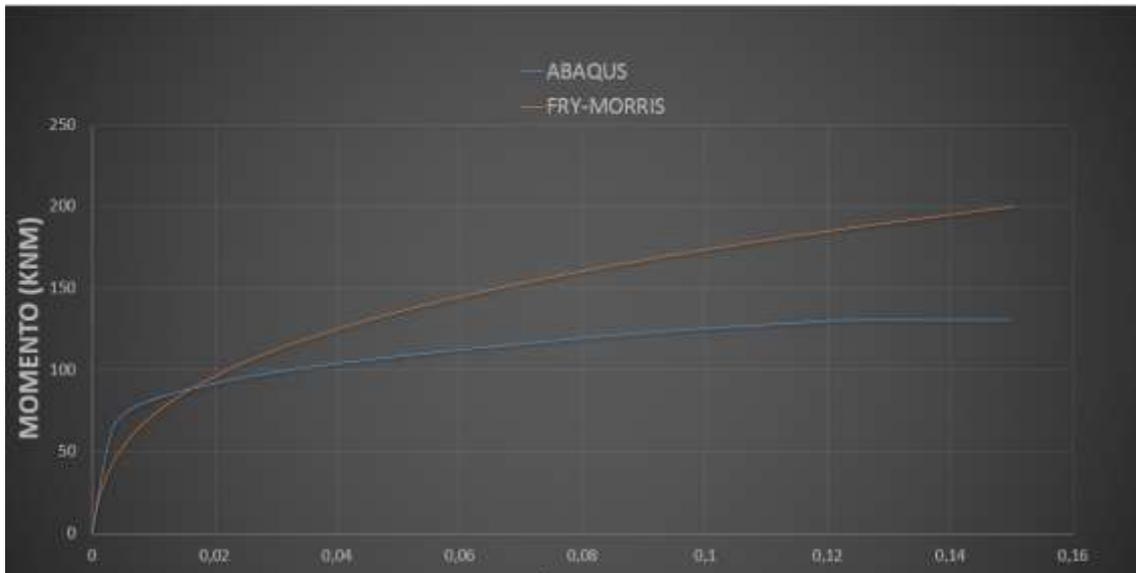
Tabla 1 Resumen giros relativos



Gráfica 4 Curvas momento rotación modelo Fry-Morris vs Abqus(1).

Se observa como la rigidez de la unión disminuye más rápidamente en el modelo numérico. (Gráfica 4)

Se ha supuesto un comportamiento con rigidez nula (articulado) a partir del último escalón de carga analizado (130,25 KNm) cuando los giros producidos aumentaban cada vez más ante menores aumentos de carga, apareciendo problemas de convergencia. (Gráfica 5)



Gráfica 5 Curvas momento rotación modelo Fry-Morris vs Abaqus (2)

Las curvas presentan una menor diferencia para valores bajos de carga, que coincide con el tramo donde nos encontramos en comportamiento elástico. Debido a las simplificaciones adoptadas así como a las diferencias ya comentadas entre el experimento y el modelo numérico, las mayores diferencias comienzan en el inicio de las primeras plastificaciones.

Para la obtención de las rotaciones de los momentos intermedios se ha desarrollado un código en Matlab de manera que se interpola linealmente entre el valor superior e inferior conocidos

## 4. MATLAB

### 4.1 INTRODUCCIÓN

Matlab es un software matemático para ordenador. Su principal característica es que el programa trabaja todos los datos con carácter matricial, lo que lo hace especialmente idóneo para programar el Método directo de la rigidez.

Para el desarrollo del trabajo se ha utilizado una programación base que consta de un núcleo principal o cuerpo del programa y una serie de funciones a la cuales se recurre a lo largo del núcleo.

El programa base estaba diseñado para calcular mediante el método directo de la rigidez estructuras en dos dimensiones con barras de nudos rígido-rígido, rígido-articulado, articulado-rígido y articulado-articulado.

Además permitía introducir cargas distribuidas sobre las barras, incrementos de temperatura y desplazamientos impuestos con la posibilidad de realizar un cálculo tanto elástico como de segundo orden.

Todas las variables del problema se introducen de forma manual (Coordenadas de los nudos, Longitudes barras, Área de las barras, etc), definiendo una serie de vectores y matrices.

Por lo tanto mi aportación al programa ha sido introducir el comportamiento de las barras de nudos semirrígido-semirrígido y redefinir la estructura principal del programa para adaptarlo al nuevo método de cálculo necesario debido a la no linealidad introducida.

Las funciones y variables usadas en el programa están explicadas mediante comentarios en la propia programación, de manera que ayuda al seguimiento del proceso seguido.

La estructura que vamos a analizar se trata de un pórtico plano de un vano y tres alturas donde las vigas están unidas a los pilares mediante doble angular de asiento, unión en la cual se va a introducir el comportamiento real.

## 4.2 PÓRTICO TIPO Y RESOLUCIÓN

La geometría y datos de la estructura son los siguientes:

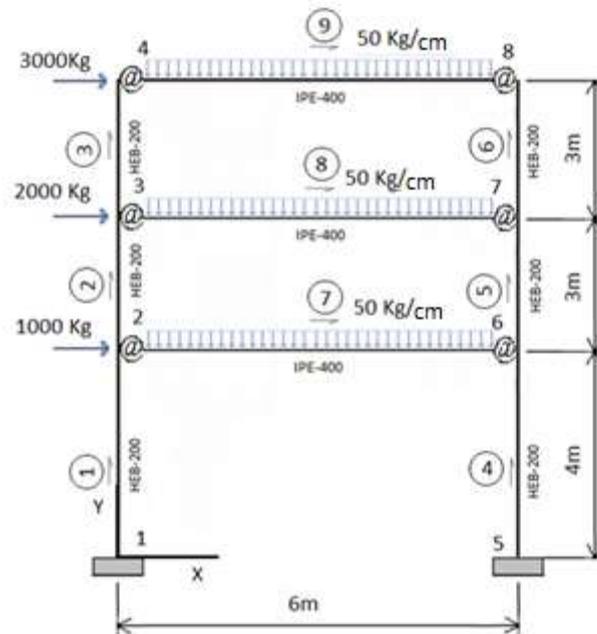
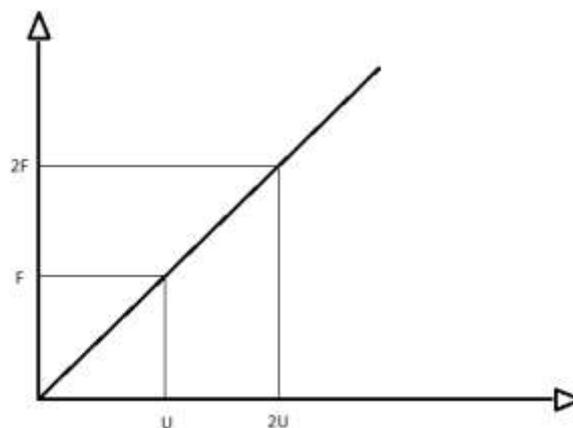


Figura 31 Pórtico tipo

En una estructura, trabajando en la zona elástica lineal del material, despreciando los efectos de segundo orden. Esto significa que si multiplicas el vector de cargas global de la estructura ( $F$ ) por un factor determinado, la solución en desplazamientos queda también multiplicada. (Gráfica 6)



Gráfica 6 Relación Carga-Desplazamiento estructura con comportamiento lineal

En nuestro caso debido tanto a la no linealidad geométrica debida a los efectos de segundo orden como al carácter no lineal del comportamiento de las uniones semirrígidas, nos encontramos con una estructura con un comportamiento no lineal entre las cargas y los desplazamientos.

En el caso proporcional, la rigidez de la estructura es constante debido a que lo es la rigidez de cada uno de los elementos y uniones que la forman. Ahora, la matriz de rigidez de las barras y por lo tanto de la estructura varía en función de los esfuerzos a los que están sometidas. En concreto, la rigidez de las barras dependen de los axiles a los que están sometidas al considerar los efectos de segundo orden en la estructura, y de los momentos ya que la uniones de las barras ahora sufren un giro relativo en función de estos que afectan a la rigidez de la misma.

Nos encontramos en un caso en el la solución de una ecuación es función de la propia solución. (Figura 32)

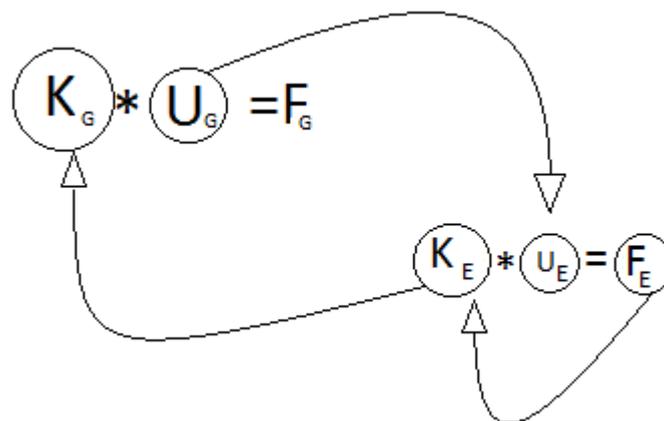


Figura 32 Esquema

Debido a esto, para alcanzar la solución debemos llevar a cabo un proceso iterativo en el que vamos a aplicar una serie de cargas incrementales dentro de las cuales realizaremos diversas iteraciones hasta alcanzar la convergencia.

$K$ = Matriz de rigidez de la estructura.

$k$  = Matriz de rigidez elemental.

$F$ = Vector de cargas de la estructura.

$f$ = Vector de esfuerzos en barra.

$U$ = Vector de desplazamientos de la estructura.  $u$ = Vector desplazamientos en barra.

Los siguientes pasos pueden verse reflejados en el dibujo continuo facilitando así la explicación. En el ejemplo gráfico se han realizado únicamente dos escalones de carga.

- 1) Dividimos la carga de la estructura en un número determinado de incrementos( $n$ ) y determinamos la tolerancia válida para el cálculo.

- 2) Aplicamos el primer incremento de carga ( $F/n$ ) y resolvemos el sistema  $K*U=F$  suponiendo la rigidez inicial de la estructura como si de una estructura de nudos rígidos se tratara.
- 3) Con los desplazamientos obtenidos ( $U$ ) calculamos los esfuerzos en las barras resolviendo el sistema  $k*u=f$  donde la rigidez de las barras será la que se ha utilizado para obtener estos desplazamientos ( $U$ ).
- 4) Con los esfuerzos acumulados obtenidos en las barras ( $f$ ), actualizamos la rigidez elemental de las barras ( $k$ ) y en consecuencia de la estructura ( $K$ ) y volvemos a resolver el sistema  $K*U=(F/n)$ .
- 5) Con los nuevos desplazamientos obtenidos calculamos la diferencia entre desplazamientos consecutivos ( $U(i+1)-U(i)$ ).
- 6) Comprobamos si esta diferencia se encuentra dentro de nuestra tolerancia marcada.

$$[U(i+1)-U(i)] < \text{Tolerancia}$$

No → 3)

Sí → 7)

- 7) Con los últimos desplazamientos obtenidos ( $U$ ) calculamos los esfuerzos en las barras resolviendo el sistema  $k*u=f$  donde la rigidez de las barras será la utilizada para obtener estos desplazamientos ( $U$ ), utilizando  $f$  actualizamos las rigideces de las barras ( $k$ ) y en consecuencia de la estructura ( $K$ ) y en este caso anotamos los desplazamientos ( $U$ ) y esfuerzos en las barras ( $f$ ) obtenidos.

¿Se han completado todos los escalones de carga?

No → 8)

Sí → 9)

- 8) Aplicamos un nuevo incremento de carga y con la última rigidez obtenida resolvemos el sistema  $K*U=F$  y volvemos al punto 3.
- 9) La solución en esfuerzos y desplazamientos será la suma de todos los obtenidos y anotados en el punto 7.

La precisión en la solución dependerá tanto del número de saltos de carga realizados así como de la tolerancia que marquemos como válida.

La solución exacta se alcanzaría realizando un número infinito de saltos de carga asumiendo una tolerancia igual a cero, lo que equivale

La desviación total de los resultados que llamaremos residuo total será la diferencia entre el resultado real y el calculado.

Además la tolerancia que definamos será aquella que nosotros consideremos como de valor despreciable para nuestra solución, y en este caso la definimos como la diferencia entre los desplazamientos obtenidos dentro de un escalón de carga para dos iteraciones consecutivas

.

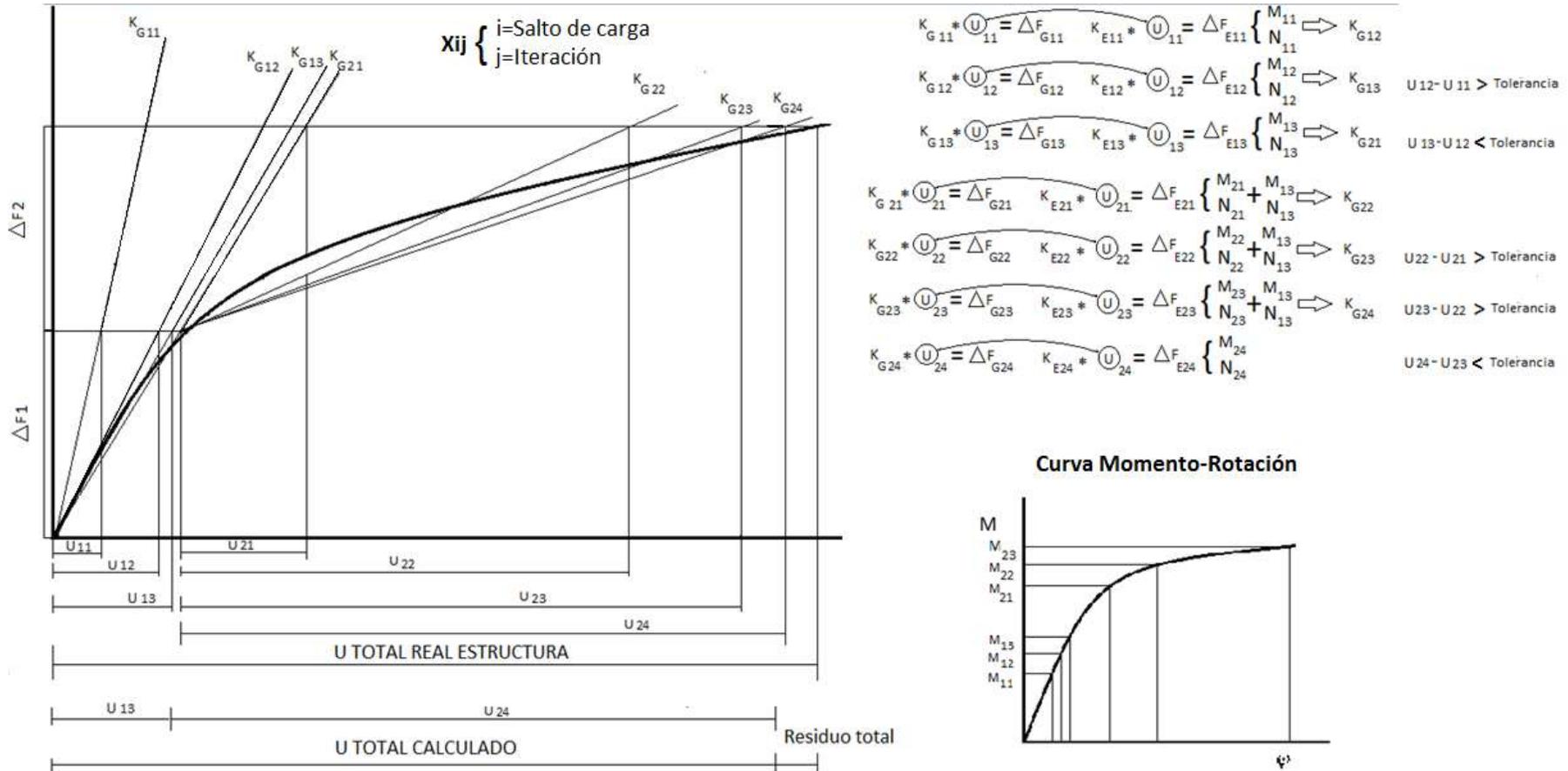


Figura 33 Representación gráfica del modelo resolutor

### 4.3 PROGRAMACIÓN

En esta parte se muestra el código de programación que se ha utilizado para la resolución de la estructura.

Se muestra el núcleo principal del programa donde cada una de sus partes está explicada mediante comentarios escritos en la propia programación. Se ha incluido la salida o output de distintas variables del programa de forma conjunta con el código para permitir una clara visualización de los datos ayudando al seguimiento del proceso.

Además, también se han añadido y explicado las funciones del programa con mayor relevancia para el trabajo, obviando así la explicación detallada de aquellas que no aportan nada de interés.

De forma general el programa tiene la siguiente estructura:

- 1) DEFINICIÓN Y CÁLCULO DE VARIABLES Y DATOS DEL PROBLEMA
  - Datos del material utilizado
  - Propiedades geométricas de nuestra estructura (Nº de barras, Nº de nudos, Coordenadas nodales, Longitud de las barras, etc.)
  - Definición de variables que determinan nuestro problema (Grados de libertad, Restricciones etc.)
  - Cargas sobre nuestra estructura
- 2) NÚCLEO DE CÁLCULO
- 3) PRESENTACIÓN DE RESULTADOS
  - Esfueros y reacciones
  - Diagramas de esfuerzos

```

1 - clear all;
2 - clc;
3 % GEOMETRIA Y PROPIEDADES DE LA ESTRUCTURA
4 n=6; % N° de nodos de la estructura
5 b=9; % N° de barras de la estructura
6 me=2141404.004; % Modulo de elasticidad del acero (en kg/cm2)
7 fy=2804.22; % Limite elastico del material S375(Kg/cm2)
8 Tipo Analisis=4; % Tipo de analisis (1:Nodos clasicos lineal, 2:Nodos clasicos 2° orden, 4:Nodos semi con 2 orden)
9 % MATRIZ DE COORDENADAS NODALES
10 mcn=zeros(n,2); % Matriz de dimension n*2
11 mcn(1,1)=0; % coordenada x del nodo 1 (en cm)
12 mcn(1,2)=0; % coordenada y del nodo 1 (en cm)
13
14 mcn(2,1)=0; % coordenada x del nodo 2 (en cm)
15 mcn(2,2)=400; % coordenada y del nodo 2 (en cm)
16
17 mcn(3,1)=0; % coordenada x del nodo 3 (en cm)
18 mcn(3,2)=700; % coordenada y del nodo 3 (en cm)
19
20 mcn(4,1)=0; % coordenada x del nodo 4 (en cm)
21 mcn(4,2)=1000; % coordenada y del nodo 4 (en cm)
22
23 mcn(5,1)=600; % coordenada x del nodo 5 (en cm)
24 mcn(5,2)=0; % coordenada y del nodo 5 (en cm)
25
26 mcn(6,1)=600; % coordenada x del nodo 6 (en cm)
27 mcn(6,2)=400; % coordenada y del nodo 6 (en cm)
28
29 mcn(7,1)=600; % coordenada x del nodo 7 (en cm)
30 mcn(7,2)=700; % coordenada y del nodo 7 (en cm)
31
32 mcn(8,1)=600; % coordenada x del nodo 8 (en cm)
33 mcn(8,2)=1000; % coordenada y del nodo 8 (en cm)
34 disp('Matriz de coordenadas nodales (X, Y): ')
35 mcn

```

Matriz de coordenadas nodales (X, Y):

```

mcn =
     0     0
     0    400
     0    700
     0   1000
   600     0
   600    400
   600    700
   600   1000

```

```

39 % MATRIZ DE CONECTIVIDAD DE BARRAS----Introducir manualmente el nodo inicial y final de cada barra.
40 mconecbarras=zeros(b,2); % Matriz de dimension b*2
41 mconecbarras(1,1)=1; % nodo 1 de la barra 1
42 mconecbarras(1,2)=2; % nodo 2 de la barra 1
43
44 mconecbarras(2,1)=2; % nodo 1 de la barra 2
45 mconecbarras(2,2)=3; % nodo 3 de la barra 2
46
47 mconecbarras(3,1)=3; % nodo 1 de la barra 3
48 mconecbarras(3,2)=4; % nodo 4 de la barra 3
49
50 mconecbarras(4,1)=5; % nodo 1 de la barra 4
51 mconecbarras(4,2)=6; % nodo 2 de la barra 4
52
53 mconecbarras(5,1)=6; % nodo 1 de la barra 5
54 mconecbarras(5,2)=7; % nodo 3 de la barra 5
55
56 mconecbarras(6,1)=7; % nodo 1 de la barra 6
57 mconecbarras(6,2)=8; % nodo 4 de la barra 6
58
59 mconecbarras(7,1)=2; % nodo 1 de la barra 7
60 mconecbarras(7,2)=6; % nodo 2 de la barra 7
61
62 mconecbarras(8,1)=3; % nodo 1 de la barra 8
63 mconecbarras(8,2)=7; % nodo 3 de la barra 8
64
65 mconecbarras(9,1)=4; % nodo 1 de la barra 9
66 mconecbarras(9,2)=8; % nodo 4 de la barra 9
67
68 disp('Matriz de conectividad entre barras (i, j): ')
69 mconecbarras

```

Matriz de conectividad entre barras (i, j):

```

mconecbarras =
     1     2
     2     3
     3     4
     5     6
     6     7
     7     8
     2     6
     3     7
     4     8

```

```

74 % VECTOR DE TIPOS DE BARRA
75
76 VecTipBar=zeros(b,1); % Vector de dimension b*1
77 % Definimos manualmente el tipo de nodos de cada una de las barras
78 % (1 = rig-rig ; 2 = rig-art ; 3 = art-rig ; 4 = art-art ; 5 = sem-sem)
79 VecTipBar(1)=1; % Barra 1 (rig-rig)
80 VecTipBar(2)=1; % Barra 2 (rig-rig)
81 VecTipBar(3)=1; % Barra 3 (rig-rig)
82 VecTipBar(4)=1; % Barra 4 (rig-rig)
83 VecTipBar(5)=1; % Barra 5 (rig-rig)
84 VecTipBar(6)=1; % Barra 6 (rig-rig)
85 VecTipBar(7)=5; % Barra 7 (sem-sem)
86 VecTipBar(8)=5; % Barra 8 (sem-sem)
87 VecTipBar(9)=5; % Barra 9 (sem-sem)
88 % disp('Vector tipos de barras: ')

```

Vector tipos de barras:

```

VecTipBar =
     1
     1
     1
     1
     1
     1
     5
     5
     5

```

```

94 % VECTOR DE AREAS DE BARRA
95
96 areabarras=zeros(b,1); % Vector de dimension b*1
97 areabarras(1)=78.1; % area de la barra 1 (en cm^2) HEB-200
98 areabarras(2)=78.1; % area de la barra 2 (en cm^2) HEB-200
99 areabarras(3)=78.1; % area de la barra 3 (en cm^2) HEB-200
100 areabarras(4)=78.1; % area de la barra 4 (en cm^2) HEB-200
101 areabarras(5)=78.1; % area de la barra 5 (en cm^2) HEB-200
102 areabarras(6)=78.1; % area de la barra 6 (en cm^2) HEB-200
103 areabarras(7)=84.5; % area de la barra 7 (en cm^2) IPE-400
104 areabarras(8)=84.5; % area de la barra 8 (en cm^2) IPE-400
105 areabarras(9)=84.5; % area de la barra 9 (en cm^2) IPE-400
106 % disp('Vector areas de barras: ')
107 % disp('Vector areas de barras: ')
108 areabarras

```

areabarras =

```

     78.1
     78.1
     78.1
     78.1
     78.1
     78.1
     78.1
     84.5
     84.5
     84.5

```

```

110 % VECTOR DE INERCIAS DE BARRA
111
112 inerciabarras=zeros(b,1); % Vector de dimension b*1
113 inerciabarras(1)=5696; % inercia de la barra 1 (en cm^4) HEB-200
114 inerciabarras(2)=5696; % inercia de la barra 2 (en cm^4) HEB-200
115 inerciabarras(3)=5696; % inercia de la barra 3 (en cm^4) HEB-200
116 inerciabarras(4)=5696; % inercia de la barra 4 (en cm^4) HEB-200
117 inerciabarras(5)=5696; % inercia de la barra 5 (en cm^4) HEB-200
118 inerciabarras(6)=5696; % inercia de la barra 6 (en cm^4) HEB-200
119 inerciabarras(7)=23130; % inercia de la barra 7 (en cm^4) IPE-400
120 inerciabarras(8)=23130; % inercia de la barra 8 (en cm^4) IPE-400
121 inerciabarras(9)=23130; % inercia de la barra 9 (en cm^4) IPE-400
122 % disp('Vector inercias de barras: ')
123 inerciabarras

```

inerciabarras =

```

     5696
     5696
     5696
     5696
     5696
     5696
    23130
    23130
    23130

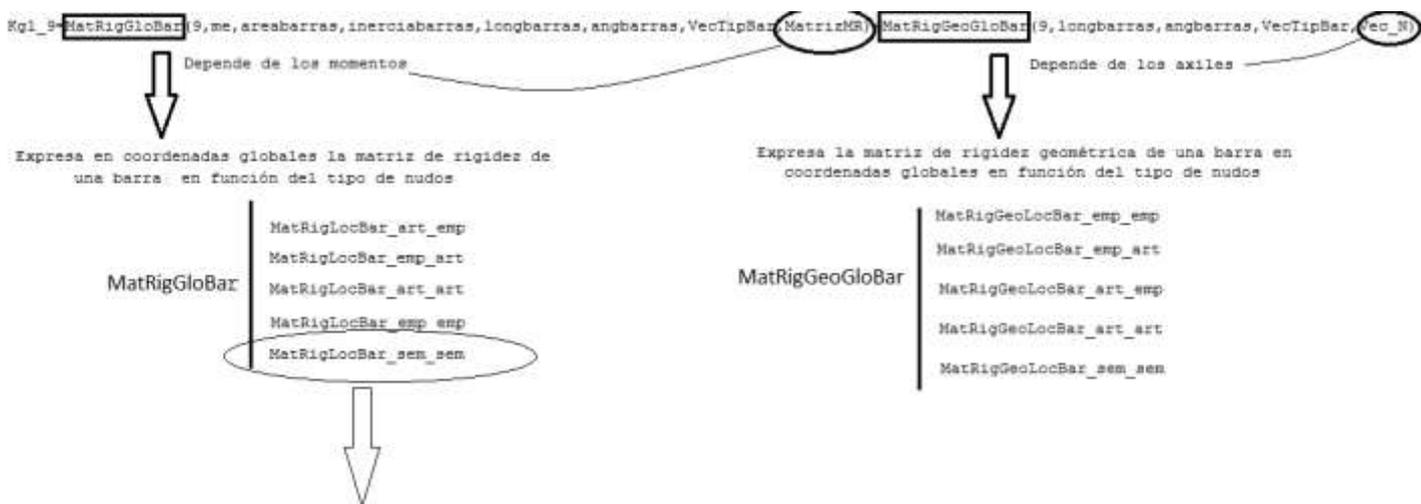
```



```

284 if Tipo_Analisis==4
285     num_salto_carga=1000;           % Definimos el número de saltos de carga
286     Delta_T=Delta_T/num_salto_carga; % Valor incremental de Delta_T
287     Vector_Q=Vector_Q/num_salto_carga; % Valor incremental de Vector_Q
288     FLL=FLL/num_salto_carga;       % Valor incremental de FLL
289     FRF=FRF/num_salto_carga;       % Valor incremental de FRF
290     tol=0.00001;                   % Marcamos la tolerancia
291     Vec_N=zeros(b,1);              % Vector de axiles acumulados
292     Vec_Nsinacumular=zeros(b,1);    % vector de axiles sin acumular(Producidos en cada incremento de carga)
293     MatrizMR=zeros(2,b);           % Matriz de momentos acumulados
294     MatrizMRsinacumular=zeros(2,b); % Matriz de momentos sin acumular(Producidos dentro de cada incremento de carga)
295     URR=[0;0;0;0;0;0];             % Vector de desplazamientos impuestos
296
297     Decumulado=zeros(nvar-nrest,1); % Vector de desplazamientos acumulados
298     UO=zeros(nvar-nrest,1);        % Vector de desplazamientos de la anterior iteracion dentro de un incremento de carga
299
300
301     Esfuerzostotalesbarra1=zeros(6,1); % Definimos el vector esfuerzos totales en barra.
302     Esfuerzostotalesbarra2=zeros(6,1);
303     Esfuerzostotalesbarra3=zeros(6,1);
304     Esfuerzostotalesbarra4=zeros(6,1);
305     Esfuerzostotalesbarra5=zeros(6,1);
306     Esfuerzostotalesbarra6=zeros(6,1);
307     Esfuerzostotalesbarra7=zeros(6,1);
308     Esfuerzostotalesbarra8=zeros(6,1);
309     Esfuerzostotalesbarra9=zeros(6,1);
310
311     Reacciones=zeros(nrest,1);
312     Reaccionestotales=zeros(nrest,1); % Definimos el vector de reacciones totales(acumuladas) y reacciones(sin acumular).
313     Reaccionestotalesnudo1=zeros(3,1);
314     Reaccionestotalesnudo3=zeros(3,1);
315
316
317 for i=1:num_salto_carga           % Entrada al bucle desde i=1 hasta alcanzar todos los saltos de carga
318
319     ee=1;                         %Parametro de control para comparar con la tolerancia
320     disp(['Salto de carga:',num2str(i)])
321
322     format long
323
324     UO=zeros(nvar-nrest,1);
325     MatrizMRsinacumular=zeros(2,b); % Cada vez que empezamos un salto de carga,al ser la primera iteración y no haber por tanto
326     Vec_Nsinacumular=zeros(b,1);    % una iteración previa,hacemos cero los valores de los datos de la última iteración
327
328     while ( ee>tol) % Entrada al bucle iterativo hasta que el parametro de control sea menor que la tolerancia
329         format long g
330
331         % Al empezar cada iteración modificamos la matriz de rigides introduciendo los momentos y axiles acumulados, ya que es en ese punto
332         % donde se encuentra nuestra estructura.Los esfuerzos utilizados serán todos los acumulados en los anteriores escalones de carga
333         % mas los obtenidos en la anterior iteración(MatrizMR y Vec_N)
334         Kgl_1=MatRigGloBar(1,me,areabarras,ineraciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar,MatrizMR)+MatRigGeoGloBar(1,longbarras,angbarras,VecTipBar,Vec_N);
335         Kgl_2=MatRigGloBar(2,me,areabarras,ineraciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar,MatrizMR)+MatRigGeoGloBar(2,longbarras,angbarras,VecTipBar,Vec_N);
336         Kgl_3=MatRigGloBar(3,me,areabarras,ineraciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar,MatrizMR)+MatRigGeoGloBar(3,longbarras,angbarras,VecTipBar,Vec_N);
337         Kgl_4=MatRigGloBar(4,me,areabarras,ineraciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar,MatrizMR)+MatRigGeoGloBar(4,longbarras,angbarras,VecTipBar,Vec_N);
338         Kgl_5=MatRigGloBar(5,me,areabarras,ineraciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar,MatrizMR)+MatRigGeoGloBar(5,longbarras,angbarras,VecTipBar,Vec_N);
339         Kgl_6=MatRigGloBar(6,me,areabarras,ineraciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar,MatrizMR)+MatRigGeoGloBar(6,longbarras,angbarras,VecTipBar,Vec_N);
340         Kgl_7=MatRigGloBar(7,me,areabarras,ineraciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar,MatrizMR)+MatRigGeoGloBar(7,longbarras,angbarras,VecTipBar,Vec_N);
341         Kgl_8=MatRigGloBar(8,me,areabarras,ineraciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar,MatrizMR)+MatRigGeoGloBar(8,longbarras,angbarras,VecTipBar,Vec_N);
342         Kgl_9=MatRigGloBar(9,me,areabarras,ineraciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar,MatrizMR)+MatRigGeoGloBar(9,longbarras,angbarras,VecTipBar,Vec_N);
343
344
345
346
347
348

```



```

1 function Klocalbarra=MatRigLocBar_sem(b,me,areabarras,inerciabarras,longbarras,MatrizMR) %Entre parentesis las variables introducidas en la funcion
2 % KLOCALBARRA nos proporciona la matriz de rigides local de la barra b de la estructura la cual es de nodos sem-sem
3
4 % KLOCALBARRA es el argumento de salida o output.
5
6
7 Ma=(MatrizMR(1,b))/10000; % Momento acumulado en el nudo 1 de la barra(Expresado en KN.m ya que la curva momento rotación esta en esas dimensiones)
8 Mb=(MatrizMR(2,b))/10000; % Momento acumulado en el nudo 2 de la barra.
9
10 Klocalbarra=zeros(6); % Matriz de dimensión 6 x 6.
11 A=areabarras(b)/10000; % Área de la barra en m²
12 E=me*100; % Módulo elástico en KN/m²
13 In=inerciabarras(b)/100000000; % Inercia de la sección en m⁴
14 L=longbarras(b)/100; % Longitud en metros
15
16
17 c1=0.259;
18 c2=2880; % Constantes de la curva momento-rotación que dependen del tipo de unión
19 c3=33100;
20
21 k=0.0001821; % Constante de la curva M-rotación que depende de los parámetro geométricos
22
23 GRa=c1*k*Ma+c2*(k*Ma)^3+c3*(k*Ma)^5; % Expresión matemática de la curva momento rotación
24 GRb=c1*k*Mb+c2*(k*Mb)^3+c3*(k*Mb)^5;
25 if (Ma && Mb)~=0 %Si los momentos son cero( estructura descargada), este valor para los
26 %parámetros que definen la curva son los correspondientes a una barra rig-rig.
27 %Los valores se obtienen dando va infinito a ka y kb en las expresiones de rii,r1j y rjj.
28
29 rii=4;
30 r1j=2;
31 rjj=4;
32 else
33 % Construimos la matriz de rigides de una barra de nudos sem-sem donde vemos que las componentes de la matriz depeden de los parámetro rii,r1j y rjj
34 % que a su vez dependen de los esfuerzos que hemos introducido del cálculo global
35 ka=Ma/GRa; % El significado y cálculo de este matriz esta explicado en el trabajo,aquí solo se expone como se ha introducido en Matlab.
36 kb=Mb/GRb;
37 KR=(1+4*E*In/(L*ka))*(1+4*E*In/(L*kb))-{(E*In/L)^2}*4/(ka*kb)};
38 rii=(4+12*E*In/(L*kb))/KR;
39 r1j=(4+12*E*In/(L*ka))/KR;
40 rjj=2/ER;
41 end
42 Klocalbarra(1,1)=(E*A/L);
43 Klocalbarra(2,2)=(rii+2*r1j+rjj)*E*In/L^3;
44 Klocalbarra(2,3)=(r1i+r1j)*E*In/L^2*100;
45 Klocalbarra(3,2)=(r1i+r1j)*E*In/L^2*100;
46 Klocalbarra(3,3)=(rii+E*In/L)*10000;
47 Klocalbarra(4,1)=-(E*A/L);
48 Klocalbarra(5,2)=-{(rii+2*r1j+rjj)*E*In/L^3;
49 Klocalbarra(5,3)=-{(r1i+r1j)*E*In/L^2*100;
50 Klocalbarra(6,2)=-{(r1j+r1j)*E*In/L^2*100;
51 Klocalbarra(6,3)=-{(r1j)*E*In/L)*10000;
52 Klocalbarra(1,4)=-(E*A/L);
53 Klocalbarra(2,5)=-{(rii+2*r1j+rjj)*E*In/L^3;
54 Klocalbarra(2,6)=-{(r1j+r1j)*E*In/L^2*100;
55 Klocalbarra(3,5)=-{(r1i+r1j)*E*In/L^2*100;
56 Klocalbarra(3,6)=-{(r1j)*E*In/L)*10000;
57 Klocalbarra(4,4)=(E*A/L);
58 Klocalbarra(5,5)=(rii+2*r1j+rjj)*E*In/L^3;
59 Klocalbarra(5,6)=-{(r1j+r1j)*E*In/L^2*100;
60 Klocalbarra(6,5)=-{(r1j+r1j)*E*In/L^2*100;
61 Klocalbarra(6,6)=-{(r1j)*E*In/L)*10000;

```

Klocalbarra 7 incremento de carga 1 Iteración 1						
301581.06	0	0	-301581.06	0	0	0
0	2751.70	825511.24	0	-2751.70	825511.24	0
0	825511.24	330204497.42	0	-825511.24	165102248.71	0
-301581.06	0	0	301581.06	0	0	0
0	-2751.70	-825511.24	0	2751.70	-825511.24	0
0	825511.24	165102248.71	0	-825511.24	330204497.42	0

Klocalbarra 7 incremento de carga 1 Iteración 2						
301581.06	0	0	-301581.06	0	0	0
0	820.25	246905.50	0	-820.25	245246.13	0
0	246905.50	120570563.71	0	-246905.50	27572736.66	0
-301581.06	0	0	301581.06	0	0	0
0	-820.25	-246905.50	0	820.25	-245246.13	0
0	245246.13	27572736.66	0	-245246.13	119574943.00	0

Klocalbarra 7 incremento de carga 1 Iteración 3						
301581.06	0	0	-301581.06	0	0	0
0	820.24	246903.96	0	-820.24	245241.88	0
0	246903.96	120570167.61	0	-246903.96	27572207.21	0
-301581.06	0	0	301581.06	0	0	0
0	-820.24	-246903.96	0	820.24	-245241.88	0
0	245241.88	27572207.21	0	-245241.88	119572918.69	0

VARIACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DESIDO A LOS  
 NUEVOS ESFUERZOS OBTENIDOS EN CADA ITERACIÓN

CONTINÚA EL NÚCLEO PRINCIPAL....

```

344 - K=[Kq1_1 Kq1_2 Kq1_3 Kq1_4 Kq1_5 Kq1_6 Kq1_7 Kq1_8 Kq1_9]; % Construir manualmente la matriz K
345
346 - KO=matriz_Kglob(K); % Matriz de rigidez global de la estructura.(Montaje manual a partir de las matrices elementales)
347
348 - KLL=matriz_KLL(KO,gdl);
349 - KLR=matriz_KLR(KO,gdl,num_rest);
350 - KRL=matriz_KRL(KO,gdl,num_rest);
351 - KRR=matriz_KRR(KO,num_rest);
352
353 - U=Vec_Despl_Mod(URR,FLL,KLL,KLR); % Vector de desplazamientos incremental para un salto de carga i dentro de una iteración.
354
355 - % Función que resuelve:
356 - NormaU=norm(U); % Norma euclidea del vector U
357 - NormaU0=norm(U0); % Norma euclidea del vector U0
358
359 - ee=NormaU-NormaU0; % Damos valor al parámetro de control de la tolerancia como la diferencia de la norma euclidea de los
360 % desplazamientos obtenidos entre dos iteraciones consecutivas(la actual y la anterior).
361
362 - U0=U; % Damos a U0 el valor de U para usarlo en la siguiente iteración.
363
364
365 - Reacciones=KRL*U+KRR*URR+FR; % Calculamos el vector incremental de reacciones dentro de la iteración usando U(Desplazamiento incremental)
366
367 % Aquí calculamos los vectores incrementales de esfuerzos en barras.Entre en la función Vec_Esf_Bar con el vector incremental
368 % de desplazamientos(U)el Vector incremental de cargas y la matriz de rigidez actualizada y resuelve K*u=f a nivel elemental
369
370
371 - Esfuerzos_barra_1=Vec_Esf_Bar(1,moonecharras,num_var,num_rest,Uacumulado,U,URR,me,areabarras,inerciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar ...
372 - N1=Esfuerzos_barra_1(5);
373
374 - Esfuerzos_barra_2=Vec_Esf_Bar(2,moonecharras,num_var,num_rest,Uacumulado,U,URR,me,areabarras,inerciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar ...
375 - N2=Esfuerzos_barra_2(5);
376 *
377 *
378 *
379 - Esfuerzos_barra_8=Vec_Esf_Bar(8,moonecharras,num_var,num_rest,Uacumulado,U,URR,me,areabarras,inerciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar ...
380 - N8=Esfuerzos_barra_8(5);
381
382 - Esfuerzos_barra_9=Vec_Esf_Bar(9,moonecharras,num_var,num_rest,Uacumulado,U,URR,me,areabarras,inerciabarras,longbarras,angbarras,VecTipBar ...
383 - N9=Esfuerzos_barra_9(5);
384
385
386 - MA1=Esfuerzos_barra_1(3,1); % Momento en el extremo A de la barra 1
387 - MB1=Esfuerzos_barra_1(6,1); % Momento en el extremo B de la barra 1
388 *
389 *
390 *
391 - MA9=Esfuerzos_barra_9(3,1); % Momento en el extremo A de la barra 9
392 - MB9=Esfuerzos_barra_9(6,1); % Momento en el extremo B de la barra 9
393

```

```

436 % Esta parte del programa sirve para que solo se haga efectiva la suma de los esfuerzos
437 % incrementales obtenidos a los esfuerzos acumulados una vez se acaba el bucle iterativo.
438 % Elimina los esfuerzos incrementales obtenidos en la anterior
439 % iteración antes de sumarlos los de la actual
440
441
442 - MatrizMR=MatrizMR-MatrizMRseinacumular;
443
444 - MatrizMRseinacumular=[MA1 MA2 MA3 MA4 MA5 MA6 MA7 MA8 MA9;MB1 MB2 MB3 MB4 MB5 MB6 MB7 MB8 MB9];
445
446 - MatrizMR=MatrizMR+MatrizMRseinacumular;
447 - Vec_N=(Vec_N)-(Vec_Nseinacumular);
448
449 - Vec_Nseinacumular(1)=N1;
450 - Vec_Nseinacumular(2)=N2;
451 - Vec_Nseinacumular(3)=N3;
452 - Vec_Nseinacumular(4)=N4;
453 - Vec_Nseinacumular(5)=N5;
454 - Vec_Nseinacumular(6)=N6;
455 - Vec_Nseinacumular(7)=N7;
456 - Vec_Nseinacumular(8)=N8;
457 - Vec_Nseinacumular(9)=N9;
458
459 - Vec_N=(Vec_N)+(Vec_Nseinacumular);
460

```

```

461 % Aquí terminatermina la iteración.Llegamos a este punto con un valor de ee que es la diferencia entre los desplazamientos de
462 % la anterior iteración y esta, y con un vectorde esfuerzos(M y E) acumulados con los que actualizar la rigidez.Si este valor
463 % de ee es menor que la tolerancia,saltamos a la siguiente parte, sino vuelve a realizar el bucle hasta cumplir la tolerancia
464
465 - end

```

```

447 % Cuando sale del bucle de iteraciones, se decir, cuando se ha alcanzado la convergencia dentro del incremento de carga,
448 % sumamos los esfuerzos en barras y reacciones incrementales a los acumulados. Lo mismo para los desplazamientos.
449
450 Esfuerzos totales barra1=Esfuerzos totales barra1+Esfuerzos_barra_1;
451 Esfuerzos totales barra2=Esfuerzos totales barra2+Esfuerzos_barra_2;
452 Esfuerzos totales barra3=Esfuerzos totales barra3+Esfuerzos_barra_3;
453 Esfuerzos totales barra4=Esfuerzos totales barra4+Esfuerzos_barra_4;
454 Esfuerzos totales barra5=Esfuerzos totales barra5+Esfuerzos_barra_5;
455 Esfuerzos totales barra6=Esfuerzos totales barra6+Esfuerzos_barra_6;
456 Esfuerzos totales barra7=Esfuerzos totales barra7+Esfuerzos_barra_7;
457 Esfuerzos totales barra8=Esfuerzos totales barra8+Esfuerzos_barra_8;
458 Esfuerzos totales barra9=Esfuerzos totales barra9+Esfuerzos_barra_9;
459 Reacciones totales=Reacciones totales+Reacciones;
460
461 Uacumulado=Uacumulado+U;
462 % Una vez realizados todos los incrementos de carga aquí termina la parte de cálculo de esfuerzos y desplazamientos
463
464 end % Al terminar el cálculo mostramos el vector
465 % de esfuerzos en barras finales, de reacciones totales
466 % y de desplazamientos acumulados
467
468 Esfuerzos totales barra1
469 Esfuerzos totales barra2
470 Esfuerzos totales barra3
471 Esfuerzos totales barra4
472 Esfuerzos totales barra5
473 Esfuerzos totales barra6
474 Esfuerzos totales barra7
475 Esfuerzos totales barra8
476 Esfuerzos totales barra9
477
478 Uacumulado
479
480 Reacciones totales nodo1=Reacciones totales(1:3,1)
481 Reacciones totales nodo2=Reacciones totales(4:6,1)
482
483 Decumulado = 2.9623486466231
484 -0.0943357532862501
485 -0.0110000617203328
486 5.68317878667432
487 -0.142778927046677
488 -0.00867517406150607
489 7.5965217448988
490 -0.147492886528987
491 -0.00953452982497144
492 2.9688613288152
493 -0.120919052988117
494 -0.00467187413280784
495 8.68621178854028
496 -0.180103281759872
497 -0.00536646883855394
498 7.57171826000625
499 -0.209203023766655
500 0.00208628837930527

```

Esfuerzos totales barra7 =

-1964.1016244128
12436.8964623893
261830.938394182
1964.1016244128
17563.4048378467
-1739601.47795724

Reacciones totales nodo1 =

-1576.46838910867
39442.6399024206
474630.46939313

Reacciones totales nodo2 =

-4428.83141089191
80557.3600975796
1062897.49533452

Decumulado =

2.9623486466231
-0.0943357532862501
-0.0110000617203328
5.68317878667432
-0.142778927046677
-0.00867517406150607
7.5965217448988
-0.147492886528987
-0.00953452982497144
2.9688613288152
-0.120919052988117
-0.00467187413280784
8.68621178854028
-0.180103281759872
-0.00536646883855394
7.57171826000625
-0.209203023766655
0.00208628837930527

```

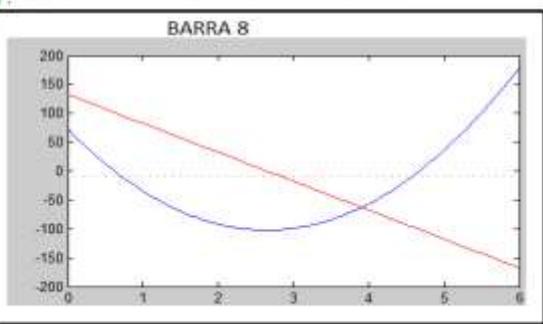
501 Vector_Q=Vector_Q*num_saltos_carga; % Devuélvome al vector de carga repartidas sobre las barras su valor absoluto para
502 % plantear el equilibrio a nivel elemental y obtener los diagramas de esfuerzos en cada barra
503
504 for i=1:b
505 x=0:l:longbarra(i)/100;
506 y=-((-Esfuerzos totales barra(3,1)/10000)+(Esfuerzos totales barra(2,1)/100*x)+(Vector_Q(i)*x.^2/2); % Ecuación del momento flexor
507 y2=-((-Esfuerzos totales barra(2,1)/100)-(Vector_Q(i)*x); % Ecuación del cortante
508 y3=(Esfuerzos totales barra(1,1)/100); % Axil
509 z=-((Esfuerzos totales barra(2,1)/100)/(Vector_Q(i)); % Coordenada x local para cortante nulo (MnAx)
510 Mn=-((-Esfuerzos totales barra(3,1)/10000)+(Esfuerzos totales barra(2,1)/100*x)+(Vector_Q(i)*x.^2/2); % Muestra el momento máximo en la viga (MnAx)
511
512 disp(['En la coordenada local x=',num2str(x)]);
513 disp('*****');
514
515 plot(x,y);
516 hold on;
517 plot(x,y3,'r');
518 plot(x,y2,'b');
519 hold off; % Desde i=1 hasta el número total de barras, obtiene y grafica la expresión para el momento (línea azul continua)
520 % el axil (línea roja continua) y el cortante (línea roja discontinua).
521
522 h=figure;
523 end
524
525 end

```

```

*****
Momento máximo en la barra8
M =
-102.681390061
En la coordenada local x=2.6457
*****

```



FIN DE LA PROGRAMACIÓN

## 5. RESULTADOS

Una vez hemos obtenido la curva momento-rotación de nuestra unión de forma experimental y mediante simulación, definido la matriz de rigidez para una barra de nudos semirrígidos, y habiendo creado la programación que nos permite resolver estructuras con cualquier clase de unión, vamos a obtener los esfuerzos, reacciones y desplazamientos de nuestra estructura propuesta.

Así pues, vamos a realizar el cálculo para el caso en el que todas las uniones entre viga y pilar sean idealmente rígidas, idealmente articuladas y semirrígidas. Los nudos que dividen los pilares se van a considerar rígidos en todas las suposiciones e igualmente los apoyos de la estructura serán empotramientos en todos los casos.

Se van a contrastar los resultados obtenidos mediante la clásica consideración de esta unión como rígida con la consideración de unión semirrígida mediante el modelo de Fry-Morris.

Se añaden los resultados para uniones articuladas como caso extremo de rigidez nula.

Por último se compararan los resultados entre los cálculos con uniones semirrígidas mediante el modelo de Fry-Morris y el modelo numérico.

En concreto compararemos los desplazamientos globales de la estructura, los esfuerzos máximos en las barras y reacciones, así como observar las redistribuciones de esfuerzos que se producen al cambiar la tipología de unión.

Dado que el objetivo de este trabajo no es dimensionar la estructura cumpliendo con las normativas vigentes, no se va a realizar ningún tipo de combinación de cargas y el coeficiente de aprovechamiento para cada barra se obtendrá como:

$$\frac{f_y}{\frac{|M_{\text{máx}}|}{I} \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{|N_{\text{máx}}|}{A}}$$

*Ecuación 20*

$f_y$ = Límite elástico

$I$ = Inercia

$A$ = Área

$h$ = Canto de la sección

Las unidades utilizadas para la comparativa son el Kg-cm, unidades con las que se trabaja en Matlab.

Límite elástico del acero S-275= 2750 Kg/cm<sup>2</sup>

A continuación se muestra la estructura y la infografía para leer los datos obtenidos.

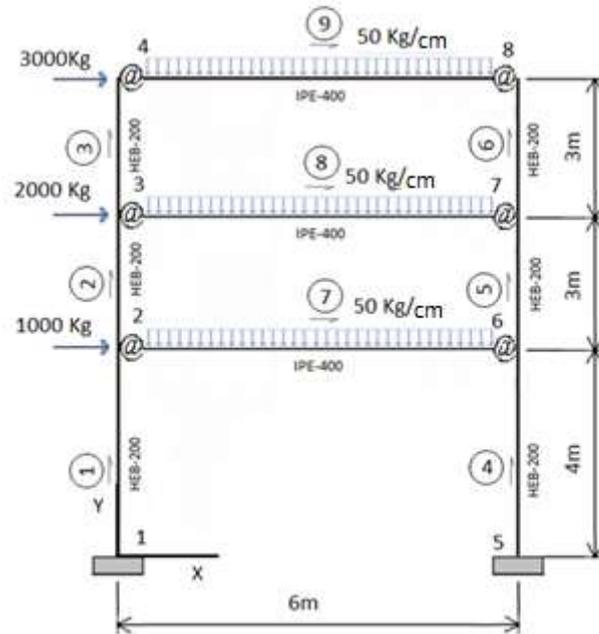


Figura 34 Pórtico tipo

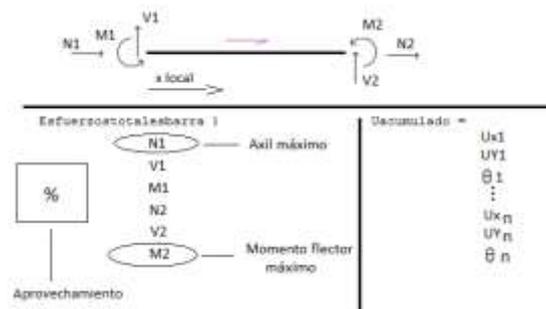


Figura 35 Infografía de resultados

**Modelo de nudos rígidos VS Modelo semirrígido Fry-Morris**

Con los 3 informes continuados, se puede observar claramente como la pérdida de rigidez por parte de las uniones repercute considerablemente en los desplazamientos obtenidos.

Disminuyendo la rigidez de las uniones se disminuye directamente la de la estructura, debido a la dependencia de la rigidez global de la de cada una de las partes que la forman.

Además, se muestra claramente la redistribución de esfuerzos que sufre la estructura. En cualquier estructura no isostática, el reparto de esfuerzos sobre la misma depende de la relación de rigideces entre sus partes. Al haber calculado la estructura con los mismos perfiles para las 3 tipología de uniones, manteniendo así la rigidez relativa entre todas las partes de la estructura a excepción de las uniones, se puede ver directamente el aumento de rigidez relativa que acumulan las barras conforme se pierde rigidez en la unión observando el aumento de esfuerzos que sufren.

El caso extremo queda representado por la estructura de nudos articulado, donde los momentos nulos en las uniones centrales tienen como consecuencia un elevado crecimiento de los esfuerzos en las barras. (Tabla 4)

PÓRTICO DE NUDOS RÍGIDOS			
<p>Esfuerzostotalesbarra1 =</p> <p>49,5 %</p> <p>39041.4376448222 1638.94631499868 -991970.502351326 -39041.4376448222 -1638.94631499868 198475.084966938</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra4 =</p> <p>82,9 %</p> <p>4961.03888900191 862058.893814388 -50938.8423551178 -4961.03888900191 527305.436439783</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra7 =</p> <p>51,4 %</p> <p>2098.23427136091 11331.4982984504 83108.4409975085 2098.23427136091 18067.3107015693 -1929534.83747813</p>	<p>Usoacumulado =</p> <p>1.73980899618877 -0.093424044979247 -0.09491139097807846 2.85963928113335 -0.142087305024604 -0.09319704301792191 3.24837427786439 -0.167466067292828 -0.00473481678610116 1.74884781188288 -0.12183078188644 0.00110146709795971 2.85937949460042 -0.100794905001946 0.000411782292407779 3.248322477092 -0.20822980004984 0.0025303480146947</p>
<p>Esfuerzostotalesbarra2 =</p> <p>30,6 %</p> <p>27129.7488444416 -1487.26895834833 -281082.548344441 -27129.7488444416 1487.26895834833 -142547.25046012</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra5 =</p> <p>78,9 %</p> <p>32871.2516535484 6487.26895834833 -396139.401238241 -32871.2516535484 -6487.26895834833 396718.248918222</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra8 =</p> <p>56,4 %</p> <p>100.50479060098 13980.6242213074 58060.736716422 -100.50479060098 17018.2137786024 -1792224.06048117</p>	<p>Reaccionestotalesnudo1 =</p> <p>-1638.94631499868 39041.4376448222 401570.502351326</p>
<p>Esfuerzostotalesbarra3 =</p> <p>42,5 %</p> <p>14148.124125054 -3348.76412766744 -438053.477468409 -14148.124125054 3348.76412766744 -542115.137359024</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra6 =</p> <p>75,9 %</p> <p>1481.875874944 8348.78412766744 83505.811742948 -1481.875874944 -8348.78412766744 1073507.10971894</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra9 =</p> <p>48 %</p> <p>6248.76412766744 14148.124125054 842333.137359024 -6248.76412766744 1581.875874944 -1075507.10971894</p>	<p>Reaccionestotalesnudo5 =</p> <p>-4381.0346800241 59988.8423551178 562058.893814389</p>
<p>H = -1499179.02622082</p> <p>En la coordenada local x=322.3625</p>			

Tabla 2 Resultados pórtico de nudos rígidos

PÓRTICO DE NUDOS SEMIRRÍGIDOS					
<p>Esfuerzostotalesbarra1 =</p> <p>61,4 %</p> <p>30462,4399024208 1876,4688910867 -474630,64839312 -30462,4399024206 -1876,4688910867 19485,2332167906</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra4 =</p> <p>91,4 %</p> <p>50557,3600974794 4423,5312089132 -762087,49533462 -50557,3600974796 -4423,5312089132 787976,3400921224</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra7 =</p> <p>57,4 %</p> <p>-1864,1016244128 12436,5954623588 261330,938394182 1864,1016244128 17869,4045374467 -179601,47798724</p>	<p>Desplazado =</p> <p>2,36234 -0,004335375 -0,01100006 5,683178 -0,1427709 -0,205670174 7,59663 -0,1678528 -0,209534529 2,948841 -0,1298130 -0,004671874 3,636611 -0,1901092 -0,205366449 7,371716 -0,2040030 0,002068288</p>		
<p>Esfuerzostotalesbarra2 =</p> <p>24,13 %</p> <p>-2706,0444400673 -1397,4332330412 -821024,169610931 -2706,0444400673 1397,4332330412 -93285,8738074867</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra5 =</p> <p>80 %</p> <p>-3299,9588999211 6387,6332330411 -701624,13705802 -3299,9588999211 -6387,6332330411 821079,081818606</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra8 =</p> <p>56,6 %</p> <p>-1095,64454787378 18236,8345285244 723129,062941305 1095,64454787378 14771,4650714796 -1796022,52684053</p>	<p>Reacciones totales nudos1 =</p> <p>-1276,4688910867 38442,6385024206 674630,66939312</p> <p>Reacciones totales nudos6 =</p> <p>-4423,5312089132 60557,3600974796 1062897,65533462</p>		
<p>Esfuerzostotalesbarra3 =</p> <p>51 %</p> <p>-13777,5095115429 -4402,2778031799 -629842,189134467 -13777,5095115429 4402,2778031799 -699607,648437688</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra6 =</p> <p>99 %</p> <p>-16222,4904664571 7402,2778031799 830149,23472192 -16222,4904664571 -7402,2778031799 -1432845,53023032</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra9 =</p> <p>48,2 %</p> <p>-7402,2778031799 19777,5095115429 699807,668878058 -7402,2778031799 16222,4904664571 -1432845,53023032</p>	<p>Reacciones totales nudos2 =</p> <p>-1276,4688910867 38442,6385024206 674630,66939312</p> <p>Reacciones totales nudos5 =</p> <p>-4423,5312089132 60557,3600974796 1062897,65533462</p>		

Tabla 3 Resultado pórtico de nudos semirrígidos Fry-Morris

PÓRTICO DE NUDOS ARTICULADOS					
<p>Esfuerzostotalesbarra1 =</p> <p>288 %</p> <p>35137,9916878661 798,518282122966 -4122646,534929756 -35137,9916878661 -798,518282122966 -3182268,15272161</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra4 =</p> <p>326 %</p> <p>-48662,0083124539 5240,48042783771 -7792191,96340186 -48662,0083124539 -5240,48042783771 -1995816,56294192</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra7 =</p> <p>70,9 %</p> <p>2242,30742046241 19000 0 2242,30742046241 19000 0 N = -2250000 En la coordenada local x=300</p>	<p>Desplazado =</p> <p>35,4527688562995 -0,107957440405193 -0,124009327817632 69,30462887488 -0,162079578849377 -0,168493000737798 120,910396033883 -0,188968706190591 -0,193369883956299 33,94025534724 -0,107297865464177 -0,11612270161368 69,3132454814142 -0,146002630266181 -0,162171213106155 120,878834916687 -0,187327202167045 -0,187887445018584</p>		
<p>Esfuerzostotalesbarra2 =</p> <p>115,8 %</p> <p>-30171,8448930504 -2022,78005828947 1463011,36420244 -30171,8448930508 2022,78005828947 -1184912,34931483</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra5 =</p> <p>235 %</p> <p>-2922,0530994942 7522,78005828947 -3169449,44660374 -2922,0530994942 -7522,78005828947 -389242,258863968</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra8 =</p> <p>70,8 %</p> <p>-1995,44896484682 18000 0 1995,44896484682 18000 0 N = -2250000 En la coordenada local x=300</p>	<p>Reacciones totales nudos1 =</p> <p>-736,519162142945 48137,3316878661 6182468,52439796</p> <p>Reacciones totales nudos6 =</p> <p>-5240,48042783771 44862,0083124539 6732121,96160186</p>		
<p>Esfuerzostotalesbarra3 =</p> <p>107,2 %</p> <p>-15119,1129738631 -8016,23201464639 107383,921814598 -15119,1129738639 8016,23201464639 -1568092,09640795</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra6 =</p> <p>98,8 %</p> <p>-14786,8876246367 9515,23201464675 1301460,50136789 -14786,8876246367 -9515,23201464675 -1640239,42682148</p>	<p>Esfuerzostotalesbarra9 =</p> <p>74 %</p> <p>-9515,23201464652 18000 0 -9515,23201464652 18000 0 N = -2250000 En la coordenada local x=300</p>	<p>Reacciones totales nudos2 =</p> <p>-736,519162142945 48137,3316878661 6182468,52439796</p> <p>Reacciones totales nudos5 =</p> <p>-5240,48042783771 44862,0083124539 6732121,96160186</p>		

Tabla 4 Resultados pórtico de nudos articulados

Además puede observarse la similitud en los diagramas de momentos para la consideración de la unión como rígida (Figura 36) en color rojo y como nudo semirrígido mediante el modelo de Fry-Morris (Figura 36) en color amarillo.

Las mayores diferencias en los diagramas se dan en la parte inferior de los pilares.

Esto es debido a que la pérdida de rigidez en los nudos en el modelo semirrígido repercute en

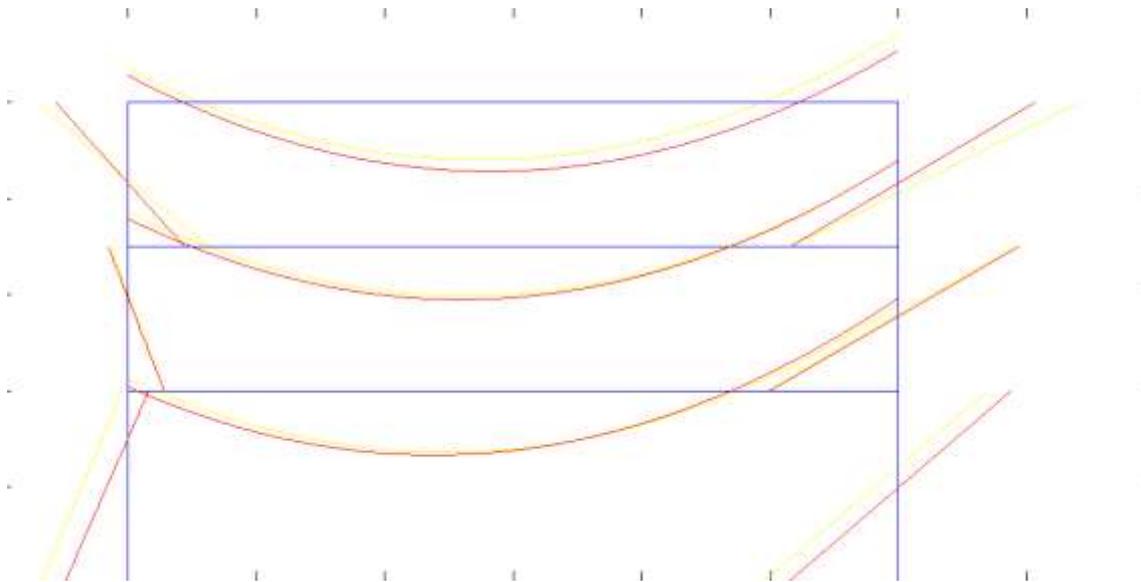


Figura 36 Diagrama de momentos Rígido vs Semirrígido Fry-Morris

El desplazamiento máximo en cabeza para el modelo de nudos rígidos es de 1.74 cm mientras que en el modelo semirrígido es de 2.96 cm, lo que supone un aumento del 71%

Además esta diferencia de desplazamientos en cabeza es responsable de que la mayor diferencia en el diagrama de momentos se de en la base de los pilares donde los efectos de segundo orden causados por estos desplazamientos tienen mayor relevancia.

#### **Modelo semirrígido Fry-Morris VS Modelo semirrígido Abaqus**

Se observa en la Figura 37 la redistribución de momentos en la estructura, donde el color amarillo corresponde con el modelo de Fry-Morris y el rojo con el modelo en Abaqus. Se aprecia una buena similitud excepto en algunas zonas concretas.

La falta de conocimiento detallado sobre todas las características que envuelven el ensayo hace que el modelo numérico no reproduzca al máximo las características de la unión.

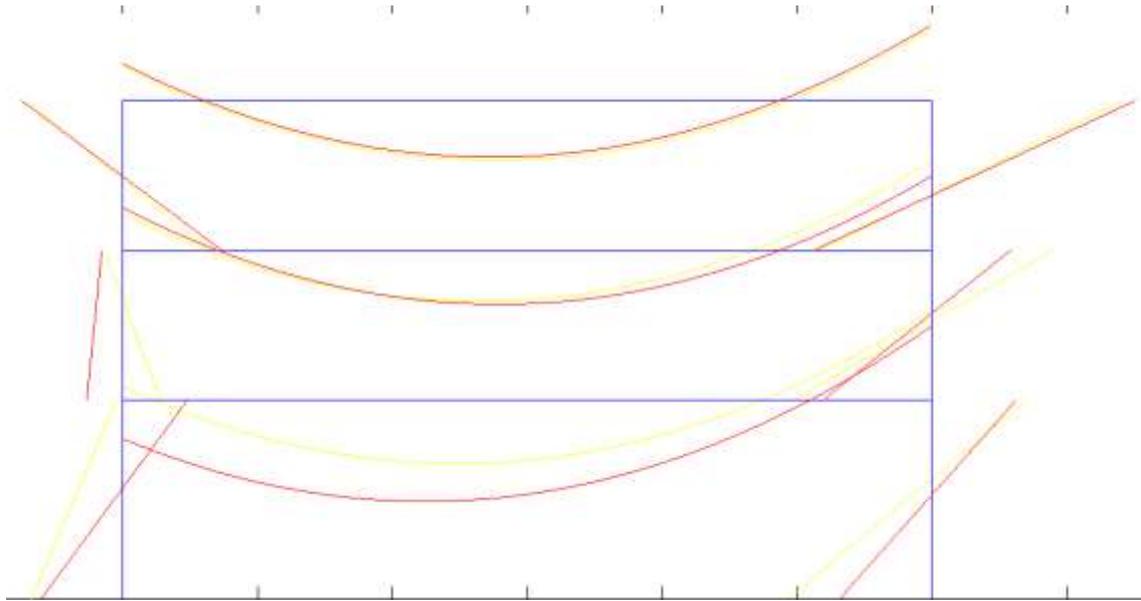


Figura 37 Diagrama de momentos Fry-Morris VS Abaqus

Los desplazamientos se reducen en un 50% de los 2,96 cm para el modelo de Fry-Morris a los 1,52 cm para el modelo de Abaqus.

La mayor rigidez inicial que presenta el modelo numérico es el responsable de esta diferencia final

## 6. CONCLUSIONES

Con los resultados obtenidos para los distintos modelos del pórtico ensayado puede observarse como la clásica idealización de nuestra unión como rígida, representa fielmente el comportamiento considerando la rigidez “real” de la unión.

Las mayores diferencias en los diagramas de momentos se dan en la zona inferior de los pilares ya que la pérdida de rigidez de las uniones tiene como consecuencia un aumento del 71% en los desplazamientos en cabeza de pilar que aumenta considerablemente los efectos de segundo orden.

Este hecho muestra cómo se deberá tener mayor precaución en suponer una unión como rígida cuando tratemos con estructuras traslacionales.

Si bien los criterios de seguridad que se adoptan durante el cálculo estructural cubren de manera holgada las diferencias que puedan producirse entre estas idealizaciones y la implementación de su comportamiento real siempre y cuando se asegure durante el montaje que la unión poseerá este comportamiento en servicio.

La simulación en Abaqus nos ha permitido comprobar la potencia del método numérico para simular uniones aun cuando no se disponía de un elevado detalle de las condiciones que envolvían el ensayo para el que se obtuvieron las curvas de aproximación de Fry-Morris.

Aun así los resultados han coincidido en buen grado aunque podría alcanzarse una mejor simulación conociendo de forma precisa todos los parámetros del suceso.

El problema de implementar estos comportamientos reales en el cálculo reside en el desconocimiento a priori de las uniones que van a instalarse en nuestra estructura.

Una más amplia base de datos de las curvas Momento-Rotación de uniones metálicas facilitaría la implementación de estas uniones en el cálculo

.Terminado el trabajo aparecen numerosas líneas de continuación como la mejora de la programación en Matlab para permitir un entorno más dinámico, mejores muestras de resultados por pantalla, aplicación de normativa, implementación de bases de datos para diferentes uniones etc.

En cuanto a la simulación numérica, tras observar las posibilidades que ofrece Abaqus, un estudio detallado de las características que hacen más precisa una simulación para diferentes uniones metálicas permitiría la obtención sistematizada de curvas Momento-Rotación que permitan crear extensas bases de datos facilitando así la implementación de estas uniones en el cálculo estructural.

### BIBLIOGRAFÍA

- [1] CABRERO, J. Nuevas propuestas para el diseño de pórticos y uniones semirrígidas de acero. 2006.
- [2] HAYALIOĞLU, M. Sedat; DEĞERTEKIN, S. Özgür; GÖRGÜN, Halil. Design of Semi-Rigid Planar Steel Frames According to Turkish Steel Design Code. *Sigma*, 2004, p. 2.
- [3] DÍAZ GÓMEZ, Concepción. Diseño optimo de uniones semirrígidas mediante simulación numérica y modelos kriging. 2010.
- [4] LÓPEZ, Manuel López. *Nuevas propuestas para determinar la rigidez y resistencia del componente E-stub en uniones tridimensionales*. 2013. Tesis Doctoral. Universidade da Coruña.
- [5] JUAN, Botella. Caracterización de uniones metálicas semirrígidas mediante análisis modal. 2013.
- [6] Abaqus 6.12 Abaqus/CAE User's manual
- [7] LI, Lanjing. MATLAB User Manual.