



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Análisis y modelización de uniones
semirrígidas

ANEXOS

Autor/es

Asier Juan Alejandre

Director/es

José Manuel Lou Pina

Miguel Ángel Martínez Barca

EINA 2015

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS COMPUTACIONAL DE ESTRUCTURAS

4.1. INTRODUCCIÓN

Como ya se ha comentado en capítulos anteriores, el principal inconveniente que presenta el método de la rigidez descrito en la sección 3.6 (la aplicación de este método a estructuras articuladas presentada en la sección 2.6 puede considerarse un caso particular del método general) es que conduce a sistemas con un gran número de ecuaciones lineales cuya resolución conlleva una cantidad muy elevada de cálculos, por lo que su aplicación manual se limita a problemas con pocas barras y un grado de hiperestaticidad bajo. Sin embargo, su generalidad y simplicidad lo hacen particularmente atractivo para programarlo, es decir, elaborar un proceso sistemático que, con pocas variantes, sea capaz de resolver cualquier problema.

La aparición de las computadoras programables a mediados del siglo XX y su progresiva introducción en la industria durante su último tercio, permitieron aprovechar la ventaja que supone el carácter sistemático del método de la rigidez y, paulatinamente, hacer que el gran número de operaciones matemáticas necesarias dejase de ser un inconveniente a medida que la capacidad de cálculo a disposición de cualquier oficina técnica iba aumentando.

De esta forma, todos los métodos computacionales de análisis de estructuras que hoy en día están universalmente difundidos se basan en el método de la rigidez, diferenciándose casi exclusivamente en la forma en que introducen las relaciones de comportamiento en su formulación.

4.2. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ

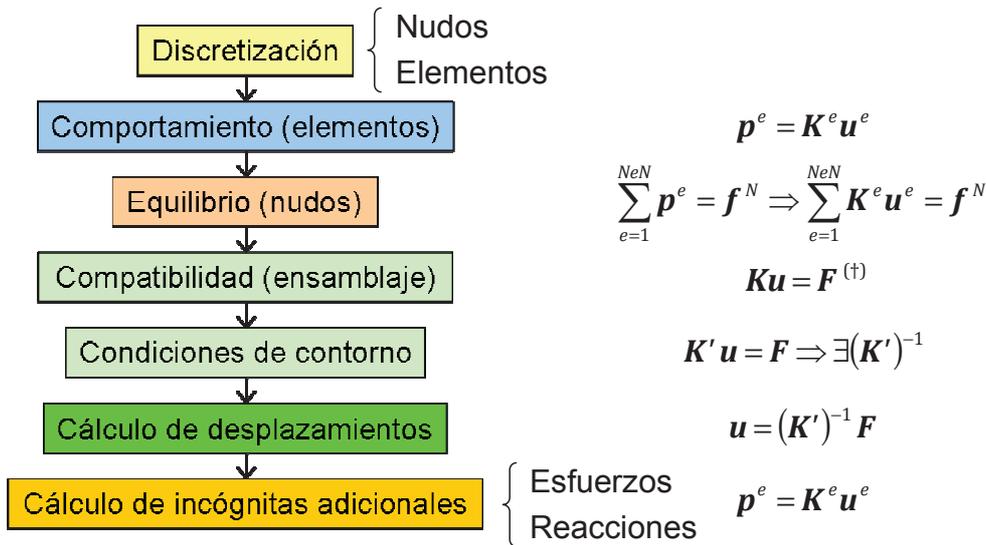
4.2.1. PLANTEAMIENTO Y PROCESO DE CÁLCULO

El *método directo de la rigidez* no es más que la sistematización del método de la rigidez para su tratamiento computacional. Esencialmente consiste en un proceso sistemático que, siguiendo el planteamiento en rigidez descrito en las secciones 2.6 y 3.6, permite calcular los desplazamientos de los nudos y, a partir de éstos, los esfuerzos en los extremos de las barras y las reacciones ejercidas por los apoyos. Las etapas fundamentales de este proceso son las siguientes:

- 1) Se formulan las ecuaciones de comportamiento en los elementos, definiendo las relaciones esfuerzos – desplazamientos.
- 2) A continuación se aplican las ecuaciones de equilibrio en los nudos de la estructura, estableciendo que la carga que actúa sobre cada nudo debe ser igual a la suma de los esfuerzos en los extremos de barras conectados al él.
- 3) Después se introducen las ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos, identificando los de los extremos de barras que coinciden en un mismo nudo, y se imponen las condiciones de apoyo de la estructura para impedir los movimientos como sólido rígido de la misma.

- 4) Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante, cuyas incógnitas son los desplazamientos de los nudos.
- 5) Por último, se calculan los esfuerzos en las barras sustituyendo los desplazamientos nodales en las ecuaciones de comportamiento y las reacciones sobre la estructura a partir de las ecuaciones de equilibrio en los apoyos.

De forma esquemática, el proceso es el siguiente:



(†) Hasta que no se impiden los movimientos como sólido rígido, el sistema tiene infinitas soluciones. La eliminación de esas incógnitas de valor conocido (condiciones de apoyo) permite invertir la matriz.

figura 4.1. Método directo de la rigidez

Si se compara el esquema de la figura 4.1 con el de la figura 1.18 se observa que en el método directo de la rigidez no se comienza aplicando las ecuaciones de compatibilidad para identificar los grados de libertad del problema, como se explicó al exponer el planteamiento general del método de la rigidez. Esta diferencia se debe a que el proceso sistemático que caracteriza a los métodos computacionales que se presentan en este capítulo exige plantear inicialmente las ecuaciones a nivel elemental para después relacionar las de unos elementos con otros en una operación denominada *ensamblaje* de la estructura. Dado que a nivel elemental los grados de libertad considerados son los de los dos nudos del elemento y estos son independientes entre sí, la compatibilidad entre grados de libertad no se puede introducir hasta el momento del mencionado ensamblaje.

Además de por el proceso descrito, el método directo de la rigidez se caracteriza por la adopción de una notación matricial¹ que puede verse en la parte derecha de la figura 4.1. El significado de los términos que aparecen en ella es el siguiente:

¹ Esta es una característica común de todos los métodos computacionales de cálculo de estructuras, lo que no ha impedido que tradicionalmente el método directo de la rigidez se haya conocido también como método de cálculo matricial.

- \mathbf{p}^e es el vector de esfuerzos de un elemento de la estructura,
- \mathbf{K}^e es la matriz de rigidez del elemento,
- \mathbf{u}^e es el vector de desplazamientos de los extremos del elemento,
- \mathbf{f}^N es el vector de fuerzas externas sobre un nudo de la estructura,
- \mathbf{F} es el vector de fuerzas externas sobre todos los nudos de la estructura,
- \mathbf{u} es el vector de desplazamientos de todos los nudos,
- \mathbf{K} es la matriz de rigidez global de la estructura y
- \mathbf{K}' la forma que adopta esta última al imponer las condiciones de contorno.

El empleo de la notación matricial presenta dos ventajas en el cálculo de estructuras. Desde un punto de vista teórico permite describir un método de cálculo de forma compacta, precisa y, al mismo tiempo, completamente general, lo que facilita el tratamiento de la teoría de estructuras como una disciplina unitaria, evitando que sus principios fundamentales puedan quedar ocultos por técnicas de cálculo o diferencias físicas entre estructuras. Por otra parte, desde un punto de vista práctico proporciona una base muy conveniente para su programación sistemática.

4.2.2. DISCRETIZACIÓN: ELEMENTOS, NUDOS Y GRADOS DE LIBERTAD

El método directo de la rigidez, como todos los métodos computacionales de análisis estructural, conduce a una solución discreta. Esto quiere decir que al final del proceso se obtienen los resultados (fundamentalmente desplazamientos y esfuerzos) en un conjunto de puntos seleccionados previamente. A partir de esta solución discreta, las expresiones de resistencia de materiales permiten obtener todas las variables del problema elástico en cualquier punto dando lugar a una solución continua.

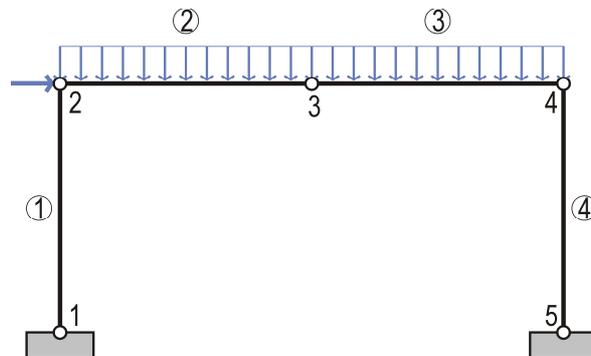


figura 4.2. Modelo discreto de un pórtico recto. Se muestra la numeración de nudos y elementos (inscrita en círculos). El nudo 3 permite calcular directamente la flecha en el centro del dintel.

Como ya se expuso en la sección 1.3, el proceso por el que se pasa de una estructura continua a un modelo discreto de la misma se denomina *discretización*. En el método directo de la rigidez este proceso consiste en escoger una serie de puntos de referencia, denominados *nudos*, cuyos desplazamientos (grados de libertad) serán las incógnitas esenciales del problema. El tramo de barra comprendido entre dos nudos constituye un *elemento*. De esta manera, la estructura se estudia utilizando un modelo formado por un conjunto de elementos, que vienen determinados por sus nudos y su *conectividad*: la ordenación sucesiva

de los nudos que permite orientar el elemento. Por su parte, cada nudo queda definido por sus coordenadas respecto de un sistema de referencia.

Aunque habitualmente los elementos coinciden con barras completas, de manera que los nudos se suelen identificar con las uniones de la estructura, a veces es conveniente localizar un nudo en un punto intermedio de una viga o un pilar, ya sea porque sobre él actúa una fuerza o un momento puntal o porque interesa obtener directamente el valor de los desplazamientos generalizados en él, como sucede en el modelo de la figura 4.2.

Así, el número de grados de libertad del problema dependerá tanto del tipo de estructura de que se trate como del nivel de detalle de la discretización realizada y será el producto del número de nudos del modelo discreto por el de grados de libertad de cada nudo, lo que depende de la tipología estructural:

$$N^{\circ} \text{ GdL} = N^{\circ} \text{ nudos} \times N^{\circ} \text{ GdL/nudo (Tipo de Estructura)}$$

A continuación se detallan los desplazamientos que deben considerarse en los nudos de los diferentes tipos de estructuras, así como los esfuerzos que deben tenerse en cuenta en cada caso.

4.2.2.1. ESFUERZOS Y GRADOS DE LIBERTAD EN ESTRUCTURAS PLANAS DE NUDOS ARTICULADOS

Para caracterizar el comportamiento de una barra articulada plana sólo es necesario conocer los desplazamientos de los nudos extremos en la dirección longitudinal de la barra, que determinan unívocamente el único esfuerzo existente en la barra: el axil.

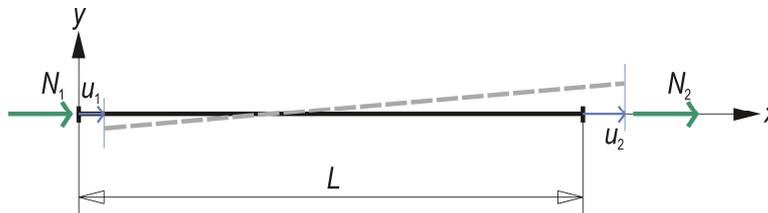


figura 4.3. Grados de libertad y esfuerzos en una barra de estructura articulada

Los grados de libertad que deben considerarse en un elemento de una estructura articulada plana son por tanto los desplazamientos longitudinales de sus dos extremos y los únicos esfuerzos significativos los axiles en ambos (que obviamente coincidirán, salvo en el signo, cuando la barra no esté cargada). Con ello, los vectores de esfuerzos y grados de libertad de un elemento de una estructura articulada plana son:

$$\mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

4.2.2.2. ESFUERZOS Y GRADOS DE LIBERTAD EN PÓRTICOS PLANOS

En una estructura de nudos rígidos plana, los desplazamientos a considerar en cada extremo son las componentes del desplazamiento en las direcciones longitudinal y transversal de la barra y el giro según el eje perpendicular a la estructura. Los esfuerzos que deben tenerse en cuenta en el equilibrio son el axil, el cortante y el momento flector en cada nudo. De esta forma, los vectores de esfuerzos y grados de libertad de un elemento de un pórtico plano son:

$$\mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} N_1 \\ V_{y1} \\ M_{z1} \\ N_2 \\ V_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

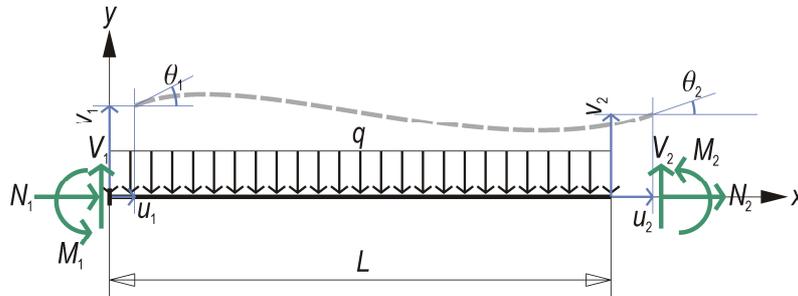


figura 4.4. Grados de libertad y esfuerzos en un elemento de pórtico plano

4.2.2.3. ESFUERZOS Y GRADOS DE LIBERTAD EN EMPARRILLADOS

Los emparrillados son estructuras planas con carga perpendicular a su plano. Los esfuerzos que intervienen en el equilibrio de los mismos son, por lo tanto, el cortante perpendicular al plano, el flector contenido en él y el momento torsor, mientras que los grados de libertad que deben considerarse en cada nudo son el desplazamiento perpendicular al plano de la estructura y las dos componentes del giro en el plano de la estructura, es decir:

$$\mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} V_{z1} \\ T_1 \\ M_{y1} \\ V_{z2} \\ T_2 \\ M_{y2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ \zeta_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

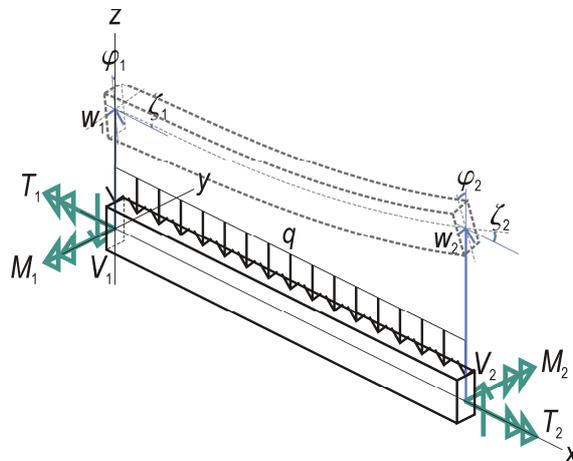


figura 4.5. Grados de libertad y esfuerzos en un elemento de emparrillado

4.2.2.4. ESFUERZOS Y GRADOS DE LIBERTAD EN ESTRUCTURAS ESPACIALES DE NUDOS ARTICULADOS

La situación es idéntica a la bidimensional, salvo porque tanto los esfuerzos axiales como los desplazamientos longitudinales de las barras deben orientarse en un sistema de referencia tridimensional.

$$\mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

4.2.2.5. ESFUERZOS Y GRADOS DE LIBERTAD EN ESTRUCTURAS ESPACIALES DE NUDOS RÍGIDOS

Éste es el caso más general que se puede presentar, siendo necesarias las tres componentes del desplazamiento y las tres del giro para determinar unívocamente el movimiento de un nudo o de la sección de una barra. De la misma manera, en las ecuaciones de equilibrio intervendrán los seis esfuerzos definidos para una barra: el axil, los dos cortantes, el torsor y los dos flectores. Los vectores de esfuerzos y grados de libertad incluyen por lo tanto todas las componentes que se encontraban en los casos anteriores:

$$\mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} N_1 \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_1 \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_2 \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_2 \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ \zeta_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \zeta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

4.2.3. SISTEMAS DE REFERENCIA Y COORDENADAS

En el método directo de la rigidez se trabaja con diferentes sistemas de referencia según en qué fase del proceso de la figura 4.1 se esté, eligiendo en cada momento el que resulte más favorable para plantear las ecuaciones correspondientes. Estos sistemas son los siguientes:

- Sistema de referencia global, utilizado para el establecimiento de las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad en los nudos en una referencia común.
- Sistemas de referencia elementales, que se emplean para definir de forma simple las ecuaciones de comportamiento de los elementos independientemente de la orientación particular de cada uno en la estructura. Los sistemas de referencia elementales utilizados en el método directo de la rigidez tienen el eje x coincidente con la directriz de la barra y con sentido positivo desde el nudo 1 al 2 según la conectividad del elemento.

Por su parte, los ejes y, z coinciden con los ejes principales de inercia de la sección y forman un triedro dextrógiro con el eje x . Este sistema de referencia se ha utilizado en el apartado 4.2.2 para expresar los vectores de esfuerzos y grados de libertad en cada tipo de estructura.

- c) Sistemas de referencia nodales, que facilitan la imposición de condiciones de apoyo particulares que restringen el movimiento en direcciones diferentes de las del sistema global.
- d) Sistemas de referencia geométrica, utilizados para describir más fácilmente la forma de la estructura o de alguna de sus partes (sistemas de coordenadas cilíndricas para bóvedas o silos, esféricas para cúpulas, sistemas cartesianos inclinados para tejados, etc.).

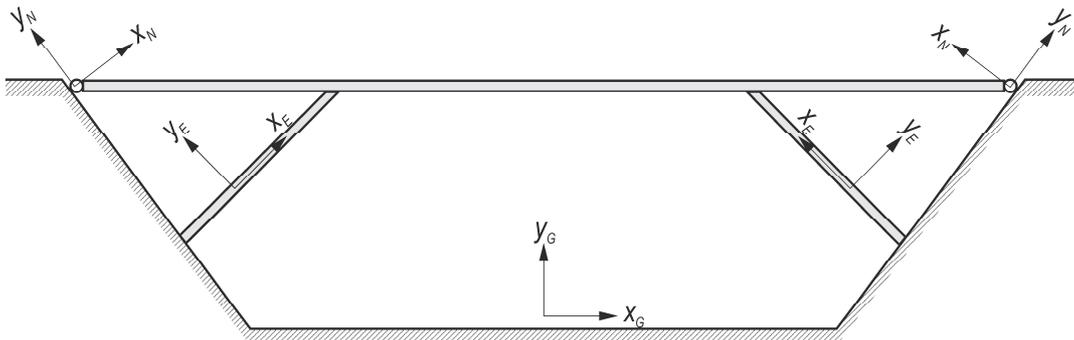


figura 4.6. Sistemas de referencia global, elementales y nodales en la estructura de un puente

El cambio de las coordenadas de un vector de un sistema de referencia (local) a otro (global) se realiza utilizando la matriz de cambio de base (rotación) R_N :

$$\mathbf{v}_G = R_N \mathbf{v}_L \Leftrightarrow \mathbf{v}_L = R_N^T \mathbf{v}_G \quad (4.2.6)$$

que para el caso general tridimensional es:

$$R_N = \begin{bmatrix} n_{1L}^{1G} & n_{2L}^{1G} & n_{3L}^{1G} \\ n_{1L}^{2G} & n_{2L}^{2G} & n_{3L}^{2G} \\ n_{1L}^{3G} & n_{2L}^{3G} & n_{3L}^{3G} \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

siendo n_{iL}^{jG} la componente del vector unitario en la dirección i local respecto de la coordenada j global. Para problemas bidimensionales en los que el eje z_L local coincide con el z_G global, como sucede en la figura 4.7, la matriz adopta la siguiente forma:

$$R_N = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

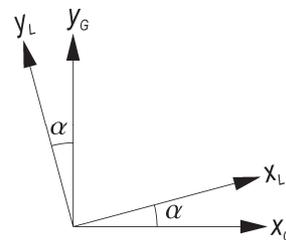


figura 4.7. Sistemas de referencia global (x_G, y_G) y local (x_L, y_L) para un problema plano

Para un vector que contenga los esfuerzos o grados de libertad de un elemento completo (dos nudos), el cambio de coordenadas se debe plantear

independiente y simultáneamente para la parte del vector correspondiente a cada nudo:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^e &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ u_{1G} &= \mathbf{R}_{1N} u_{1L} \\ u_{2G} &= \mathbf{R}_{2N} u_{2L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{u}_G^e = \mathbf{R} \mathbf{u}_L^e \equiv \begin{bmatrix} u_{1G} \\ u_{2G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1L} \\ u_{2L} \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

Aunque las matrices de cambio de coordenadas para cada extremo del elemento \mathbf{R}_{1N} y \mathbf{R}_{2N} pueden ser distintas, lo habitual es que sean iguales.

Finalmente, el cambio de coordenadas para una matriz cuadrada se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{R} \mathbf{K}_L \mathbf{R}^T \Leftrightarrow \mathbf{K}_L = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_G \mathbf{R} \quad (4.2.9)$$

siendo \mathbf{R} la matriz de cambio de coordenadas locales a globales para vectores de la misma dimensión que la matriz.

EJEMPLO 4.2-1

Obtener la matriz de cambio de coordenadas del sistema de referencia local al global para un elemento de una estructura articulada plana como el de la figura 4.8, cuya directriz forma un ángulo α con el eje x global.

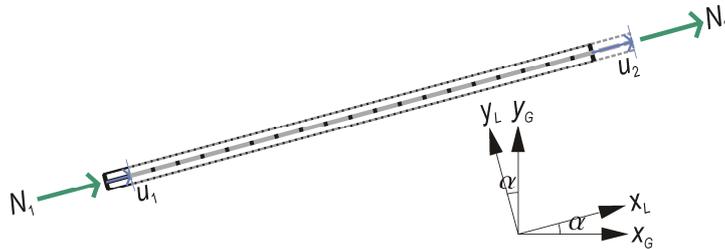


figura 4.8. Sistemas de referencia global y local para un elemento de una estructura articulada plana.

El desplazamiento longitudinal de cualquiera de los dos nudos, u , se puede expresar en el sistema de referencia global de la siguiente forma:

$$u_G = u \cos \alpha \qquad v_G = u \operatorname{sen} \alpha$$

siendo u_G y v_G respectivamente las componentes del desplazamiento u respecto de los ejes globales x_G e y_G . Particularizando las expresiones anteriores para cada nudo y se escriben todas en forma matricial queda:

$$\left. \begin{aligned} u_{1G} &= u_1 \cos \alpha \\ v_{1G} &= u_1 \operatorname{sen} \alpha \\ u_{2G} &= u_2 \cos \alpha \\ v_{2G} &= u_2 \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Si se relaciona ahora el resultado anterior con la expresión del cambio de coordenadas de un vector elemental $\mathbf{u}_G^e = \mathbf{R} \mathbf{u}_L^e$, se tiene que:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix}$$

4.3. PLANTEAMIENTO ELEMENTAL DEL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ

4.3.1. ECUACIONES DE COMPORTAMIENTO. MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL

Como se ha explicado previamente, la estructura se analiza mediante un modelo discreto de la misma formado por un conjunto de elementos, de los que cada uno puede ser de una tipología particular. De acuerdo con esta representación de la estructura, las relaciones de comportamiento entre esfuerzos y desplazamientos deben plantearse en cada elemento. En el método directo de la rigidez estas ecuaciones se escriben en forma matricial, en el sistema de referencia elemental, mediante la expresión general:

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (4.3.1)$$

donde:

- \mathbf{p}^e es el vector de esfuerzos del elemento,
- \mathbf{u}^e es el vector de desplazamientos (grados de libertad) del elemento y
- \mathbf{K}^e es la *matriz de rigidez elemental*.

La interpretación física de las componentes de esta última es inmediata sin más que particularizar la expresión (4.3.1) a un caso concreto. Así, la componente K_{ij} de la matriz corresponde al esfuerzo que se ejerce sobre el *i-ésimo* grado de libertad del elemento si se produce un desplazamiento unitario en el *j-ésimo* y se mantiene nulo el resto de los grados de libertad. Desde esta perspectiva es fácil determinar las componentes de la matriz de rigidez elemental para un elemento de cualquier tipología estructural: la *j-ésima* columna de la matriz de rigidez se obtiene calculando los esfuerzos que deben ejercerse sobre todos los grados de libertad del elemento para que el *j-ésimo* grado de libertad tome valor unitario y los demás se anulen.

Por la forma en la que se ha realizado la discretización, tanto el vector de esfuerzos como el de desplazamientos de un elemento tienen dimensión $2n$, siendo n el número de grados de libertad de cada nudo, de forma que las n primeras componentes del vector corresponden a los esfuerzos o grados de libertad del primer nudo y las n últimas a los del segundo. Por lo tanto, la matriz de rigidez elemental será siempre cuadrada y también de dimensión $2n \times 2n$. Teniendo esto en cuenta, es habitual dividir tanto los vectores como la matriz de rigidez elementales en dos y cuatro bloques respectivamente, agrupando en cada uno los términos correspondientes a cada nudo de acuerdo con la conectividad del elemento, de forma que la ecuación (4.3.1) se representa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^e \\ \mathbf{p}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^e \\ \mathbf{u}_2^e \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

donde los subíndices de cada bloque hacen referencia al nudo al que corresponde, en el caso de los vectores, o a los nudos que relaciona, en el de la matriz.

Además, la matriz de rigidez debe ser simétrica, ya que en virtud del *principio de reciprocidad* de Maxwell el esfuerzo que se produce en el grado de libertad *i* cuando se impone un desplazamiento unitario en *j* es el mismo que el que se produce en *j* cuando el desplazamiento se impone en *i*.

Por último, los elementos de la diagonal no pueden ser negativos ya que ello implicaría que la energía de deformación total (integrada por el producto de los esfuerzos por los desplazamientos correspondientes) que se produciría al imponer un desplazamiento unitario en un único grado de libertad sería negativa.

4.3.1.1. MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL EN ESTRUCTURAS ARTICULADAS

Un elemento de una estructura articulada está sometido únicamente a esfuerzo axial y su única deformación es el alargamiento o acortamiento, por lo que en el sistema de referencia elemental el único grado de libertad que debe considerarse es el desplazamiento en la dirección de la directriz.

Si se impone un desplazamiento positivo en el primer nudo del elemento manteniendo inmóvil el segundo, como se muestra en la parte izquierda de la figura 4.9, la barra queda sometida a una compresión de valor $\frac{EA}{L} u_1$, de forma que en el primer nudo el esfuerzo actúa en el sentido positivo del eje x mientras que en el segundo lo hace en el negativo.

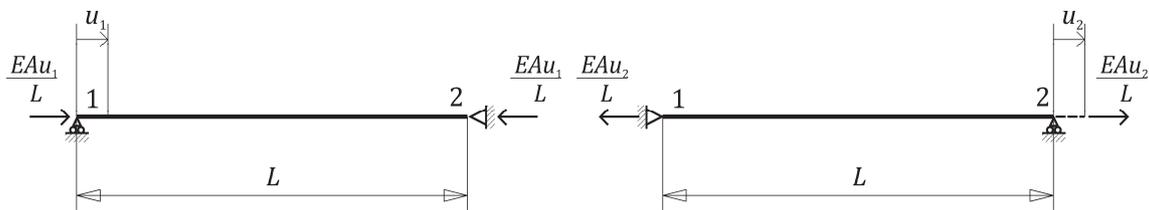


figura 4.9

Si el desplazamiento se impone en el segundo nudo, como se representa en la parte derecha de la misma figura 4.9, la barra queda sometida a una tracción $\frac{EA}{L} u_2$. En esta situación, el axil actúa en sentido negativo en el primer nudo y positivo en el segundo. Por lo tanto, los esfuerzos axiales en ambos extremos debidos a cualquier desplazamiento de los mismos y expresados en el sistema de referencia local del elemento son los siguientes:

$$N_1 = \frac{EA}{L} u_1 - \frac{EA}{L} u_2 \qquad N_2 = -\frac{EA}{L} u_1 + \frac{EA}{L} u_2 \qquad (4.3.3)$$

Si las expresiones anteriores se presentan en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (4.3.4)$$

de manera que, efectivamente, la primera columna de la matriz de rigidez contiene los esfuerzos que se producen en ambos extremos de la barra cuando se impone un desplazamiento unitario en el primer nudo, y la segunda columna coincide con los esfuerzos debidos a un desplazamiento unitario del segundo nudo.

La expresión (4.3.4) es la forma matricial de la ecuación de comportamiento (relación esfuerzo - desplazamiento) para un elemento de una estructura articulada en el sistema de referencia local del propio elemento. Sin embargo, para poder introducirla en las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de la estructura será preciso expresarla en el sistema de referencia global como se ha explicado en la sección 4.2.

En caso de que se trate de una estructura plana, en cada nudo hay que considerar dos grados de libertad (los desplazamientos a lo largo de dos ejes perpendiculares) y las fuerzas externas tendrán también dos componentes. En

estas condiciones, la matriz de rotación será la utilizada en el ejemplo 4.2-1 y, por lo tanto, las ecuaciones de comportamiento en forma matricial quedarán de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_G^e &= \mathbf{K}_G^e \mathbf{u}_G^e \Rightarrow \mathbf{R} \mathbf{p}_L^e = (\mathbf{R} \mathbf{K}_L^e \mathbf{R}^T) \mathbf{R} \mathbf{u}_L^e \\
 \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_N \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \mathbf{K}_G^e &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.3.5)
 \end{aligned}$$

Si la barra forma parte de una estructura espacial, entonces la matriz de cambio de coordenadas será:

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} n_{1L}^{1G} \\ n_{1L}^{2G} \\ n_{1L}^{3G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

siendo α , β y γ respectivamente los ángulos que forma la directriz del elemento (con la que se alinea el eje x_L local) con los ejes x_G, y_G, z_G globales, con lo que resulta:

$$\mathbf{K}_G^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma & -\cos \alpha \cos \gamma & -\cos \beta \cos \gamma & -\cos^2 \gamma \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \cos \gamma & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \gamma & -\cos \beta \cos \gamma & -\cos^2 \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

En este punto, conviene destacar que la dimensión de la matriz de rigidez elemental para estructuras articuladas depende del sistema de referencia en el que se exprese. Desde el punto de vista físico, cada nudo de un elemento de una estructura articulada tiene un único grado de libertad, que es su desplazamiento a lo largo de la directriz de la barra. Por esta razón la matriz de rigidez en coordenadas locales (4.3.4) es la misma tanto para una estructura plana como para una espacial y tiene dimensión 2×2 . Sin embargo, cuando la misma matriz se expresa respecto del sistema de referencia global en una estructura plana, en la que se consideran dos grados de libertad por nudo, cada uno de los cuatro bloques o submatrices en que se divide la matriz elemental de acuerdo con (4.3.2) es de dimensión 2×2 y, por lo tanto, la matriz de rigidez global (4.3.5) es 4×4 . Finalmente, si la estructura a la que pertenece el elemento es tridimensional cada nudo tiene tres grados de libertad, de manera que las submatrices son de dimensión 3×3 y la matriz global (4.3.7) 6×6 .

EJEMPLO 4.3-1

Calcular las matrices de rigidez de las barras de la estructura plana de la figura 4.10, tanto en el sistema de coordenadas local de cada barra como en el global, si la longitud L es de 2 m y las barras AB, BC y CD son tubos cuadrados #60.5 de acero, mientras que la AC y la BD son cables cuya sección tiene un área de 300 mm^2 .

Tomar para el módulo elástico del acero $E = 210\text{ GPa}$.

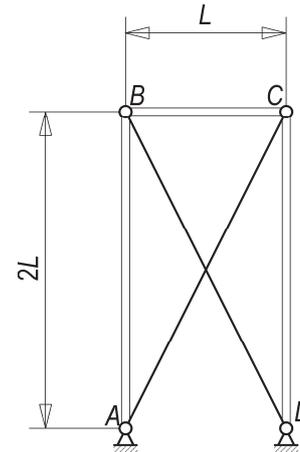


figura 4.10

El área de la sección de un tubo cuadrado #60.5 es de 1010 mm^2 , con lo que la rigidez de las barras AB y CD es:

$$\frac{EA}{L} = \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 1010 \cdot 10^{-6}}{4} = 53025 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

y sus matrices de rigidez en coordenadas locales resultan:

$$\mathbf{K}^{AB} = \mathbf{K}^{CD} = \begin{bmatrix} 53.03 & -53.03 \\ -53.03 & 53.03 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

Como el eje x de las barras AB y CD coincide con el eje y del sistema de referencia global, las matrices de rigidez en este último sistema de coordenadas quedan de la siguiente forma:

$$\mathbf{K}_G^{AB} = \mathbf{K}_G^{CD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 53.025 & 0 & -53.025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -53.025 & 0 & 53.025 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

A su vez, la matriz de rigidez de la barra BC, para la que el sistema de referencia local y global coinciden, se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{EA}{L} = \frac{210 \cdot 1010}{2} = 106050 \frac{\text{KN}}{\text{m}} \quad \mathbf{K}^{BC} = \begin{bmatrix} 106.05 & -106.05 \\ -106.05 & 106.05 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

$$\mathbf{K}_G^{BC} = \begin{bmatrix} 106.05 & 0 & -106.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -106.05 & 0 & 106.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

Por último, las matrices de rigidez de los cables AC y BD en coordenadas locales vienen dadas por:

$$\frac{EA}{L} = \frac{210 \cdot 300}{\sqrt{20}} = 14087 \frac{\text{KN}}{\text{m}} \quad \mathbf{K}^{AC} = \mathbf{K}^{BD} = \begin{bmatrix} 14.087 & -14.087 \\ -14.087 & 14.087 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

En este caso, la matriz de cambio de coordenadas para obtener las matrices de rigidez en el sistema de referencia global es:

$$R = \begin{bmatrix} R_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_N \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad R_N = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

siendo $\alpha = \arctg(2) = 63.435^\circ$ para la barra AC y $\alpha = -63.435^\circ$ para la BD, de manera que queda:

$$K_G^{AC} = RK^{AC}R^T = \begin{bmatrix} 0.447 & 0 \\ 0.894 & 0 \\ 0 & 0.447 \\ 0 & 0.894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.087 & -14.087 \\ -14.087 & 14.087 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 0.447 & 0.894 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.447 & 0.894 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.8174 & 5.6349 & -2.8174 & -5.6349 \\ 5.6349 & 11.270 & -5.6349 & -11.270 \\ -2.8174 & -5.6349 & 2.8174 & 5.6349 \\ -5.6349 & -11.270 & 5.6349 & 11.270 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \frac{KN}{m}$$

$$K_G^{BD} = RK^{BD}R^T = \begin{bmatrix} 0.447 & 0 \\ -0.894 & 0 \\ 0 & 0.447 \\ 0 & -0.894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.087 & -14.087 \\ -14.087 & 14.087 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 0.447 & -0.894 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.447 & -0.894 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.8174 & -5.6349 & -2.8174 & 5.6349 \\ -5.6349 & 11.270 & 5.6349 & -11.270 \\ -2.8174 & 5.6349 & 2.8174 & -5.6349 \\ 5.6349 & -11.270 & -5.6349 & 11.270 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \frac{KN}{m}$$

4.3.1.2. MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL EN PÓRTICOS PLANOS

Una barra de un pórtico plano está sometida, además de a tracción o compresión, a cortante y flexión y en cada nudo hay que considerar tres grados de libertad: las dos traslaciones y el giro en el plano. En consecuencia, para obtener la matriz de rigidez elemental habrá que considerar, junto con las dos situaciones representadas en la figura 4.9, las cuatro que se muestran en la figura 4.11, correspondientes a los desplazamientos transversales y los giros de ambos nudos del elemento.

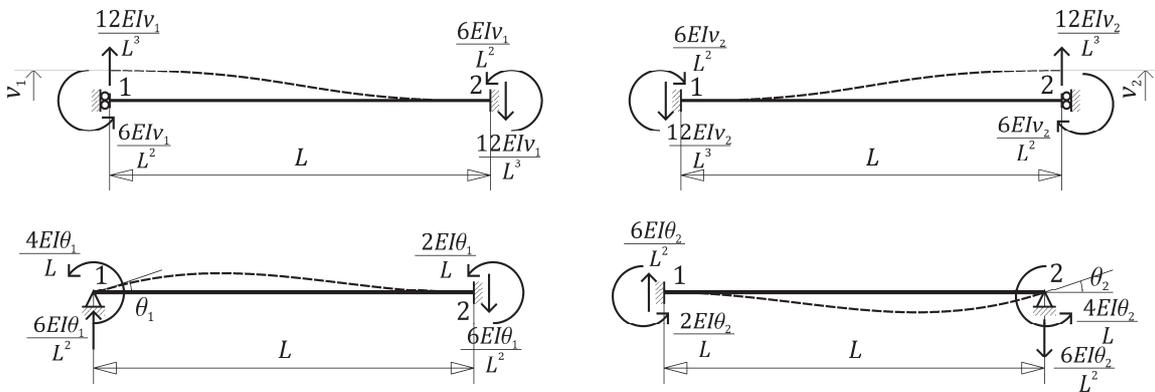


figura 4.11

Si se procede de la misma forma que se hizo para un elemento de una estructura articulada, colocando en cada columna los esfuerzos producidos por el

correspondiente desplazamiento o giro unitario según los diagramas de la figura 4.9 y la figura 4.11, se llega a la siguiente matriz de rigidez elemental en coordenadas locales:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

Para expresar la relación de comportamiento dada por (4.3.8) en el sistema de referencia global hay que efectuar el correspondiente cambio de coordenadas. En estructuras planas donde el eje perpendicular al plano es uno de los ejes principales de inercia de las secciones de las barras, éste se toma habitualmente como eje z local y se hace coincidir con el eje z global, de manera que el cambio de coordenadas queda de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} p_G^e &= K_G^e u_G^e \Rightarrow R p_L^e = (R K_L^e R^T) R u_L^e \\ R &= \begin{bmatrix} R_N & 0 \\ 0 & R_N \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad R_N = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.9)$$

En este caso, la matriz de rigidez elemental es de dimensión 6x6 tanto en coordenadas locales como globales.

EJEMPLO 4.3-2

Calcular la matriz de rigidez y el vector de esfuerzos de la viga de madera de la figura 4.12, tanto en el sistema de coordenadas local como en el global, si el módulo elástico del material es $E_w = 10 \text{ GPa}$.

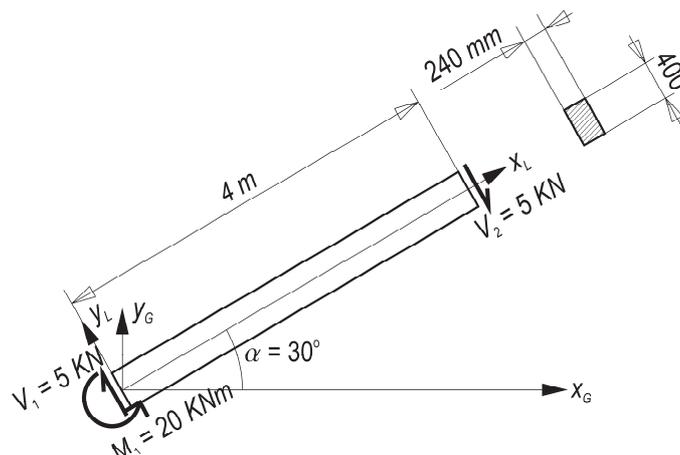


figura 4.12

El área y la inercia de la sección son, respectivamente:

$$A = 24 \cdot 40 = 480 \text{ cm}^2 \quad I_z = \frac{1}{12} 24 \cdot 40^3 = 128000 \text{ cm}^4$$

Con estos valores y el módulo elástico del material se puede calcular la matriz de rigidez de la barra en coordenadas locales a partir de la expresión general de (4.3.8), de forma que queda:

$$\frac{EA}{L} = \frac{10^7 \cdot 4.8 \cdot 10^{-2}}{4} = 2.4 \cdot 10^5 \frac{KN}{m} \quad \frac{12EI_z}{L^3} = \frac{12 \cdot 10^7 \cdot 1.28 \cdot 10^{-3}}{4^3} = 2.4 \cdot 10^3 \frac{KN}{m}$$

$$\frac{6EI_z}{L^2} = \frac{6 \cdot 10^7 \cdot 1.28 \cdot 10^{-3}}{4^2} = 4.8 \cdot 10^3 KN$$

$$\frac{4EI_z}{L} = \frac{4 \cdot 10^7 \cdot 1.28 \cdot 10^{-3}}{4} = 1.28 \cdot 10^4 KNm \quad \frac{2EI_z}{L} = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 1.28 \cdot 10^{-3}}{4} = 6.4 \cdot 10^3 KNm$$

y finalmente:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} 240 & 0 & 0 & -240 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 4.8 & 0 & -2.4 & 4.8 \\ 0 & 4.8 & 12.8 & 0 & -4.8 & 6.4 \\ -240 & 0 & 0 & 240 & 0 & 0 \\ 0 & -2.4 & -4.8 & 0 & 2.4 & -4.8 \\ 0 & 4.8 & 6.4 & 0 & -4.8 & 12.8 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

A su vez, a partir de los esfuerzos en los extremos de la barra que se muestran en la figura 4.12, el vector de esfuerzos elementales en coordenadas locales es:

$$\mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Para expresar la matriz de rigidez y el vector de esfuerzos en coordenadas globales es necesaria la matriz de cambio de coordenadas que, para un vector nodal, es:

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de la matriz anterior, el vector elemental de esfuerzos en coordenadas globales se calcula según:

$$\mathbf{p}_G^e = \mathbf{R} \mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^e \\ \mathbf{p}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.50 \\ -4.33 \\ 0 \\ -2.50 \\ 4.33 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Por último, la matriz de rigidez en coordenadas globales resulta:

$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{R} \mathbf{K}^e \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_N^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_N^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 180.60 & 102.88 & -2.40 & -180.60 & -102.88 & -2.40 \\ 102.88 & 61.80 & 4.16 & -102.88 & -61.80 & 4.16 \\ -2.40 & 4.16 & 12.80 & 2.40 & -4.16 & 6.40 \\ -180.60 & -102.88 & 2.40 & 180.60 & 102.88 & 2.40 \\ -102.88 & -61.80 & -4.16 & 102.88 & 61.80 & -4.16 \\ -2.40 & 4.16 & 6.40 & 2.40 & -4.16 & 12.80 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

4.3.1.3. MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL EN EMPARRILLADOS

Los esfuerzos que intervienen en el equilibrio de un emparrillado son el cortante perpendicular al plano, el momento flector contenido en él y el momento torsor. A su vez, los grados de libertad que definen su deformación son el desplazamiento perpendicular a la estructura (flecha) y los giros alrededor de los dos ejes contenidos en su plano (uno correspondiente a la flexión y otro a la torsión).

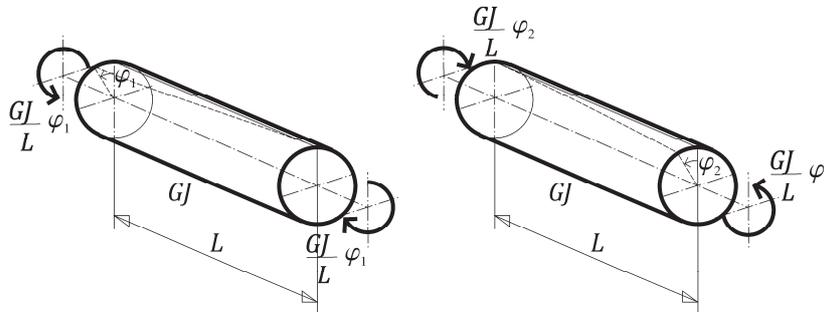


figura 4.13

Por lo tanto, a la hora de formular la matriz de rigidez elemental para una barra de emparrillado, además de las relaciones esfuerzo – desplazamiento recogidas en la figura 4.11 hay que tener en cuenta las correspondientes al giro de torsión alrededor de la directriz de la barra que se muestran en la figura 4.13. Si se impone un giro positivo en el primer nudo del elemento a la vez que se impide el del segundo, la barra queda sometida a una torsión de valor $\frac{GJ}{L} \varphi_1$, de forma que en el primer nudo el momento actúa en el sentido positivo del eje x mientras que en el segundo lo hace en el negativo. Si el giro se aplica en el segundo nudo y se impide en el primero, la situación es la inversa. De esta forma, los momentos torsores en ambos extremos de la barra debidos al giro de cualquiera de ellos vienen dados por:

$$T_1 = \frac{GJ}{L} \varphi_1 - \frac{GJ}{L} \varphi_2 \qquad T_2 = -\frac{GJ}{L} \varphi_1 + \frac{GJ}{L} \varphi_2 \qquad (4.3.10)$$

y en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \qquad (4.3.11)$$

Combinando los términos de torsión de (4.3.11) con los correspondientes al cortante y el flector, totalmente análogos (salvo por los signos) a los que se encuentran en un pórtico plano, se tiene la siguiente matriz de rigidez elemental en coordenadas locales:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ V_1 \\ T_2 \\ M_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \zeta_1 \\ w_1 \\ \varphi_2 \\ \zeta_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

Para expresar la matriz de rigidez en el sistema de referencia global, si el eje z_G global es perpendicular al plano en que se encuentra el emparrillado, la matriz de rotación que debe emplearse es la misma que para pórticos planos.

4.3.1.4. MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL EN ESTRUCTURAS ESPACIALES DE NUDOS RÍGIDOS

La estructura espacial de nudos rígidos es el caso más general que puede presentarse. En ella deben considerarse todos los esfuerzos y grados de libertad, de manera que en la matriz de rigidez de un elemento de este tipo de estructuras se encuentran combinadas las componentes de los casos particulares presentados en los apartados anteriores. Así, a partir de las ecuaciones (4.3.8) y (4.3.12) (la expresión (4.3.4) no es más que un caso particular de (4.3.8)) se obtiene la siguiente relación de comportamiento en coordenadas elementales:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_1 \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_2 \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_2 \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ \zeta_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \zeta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

Para obtener la matriz de rigidez global, en el caso de estructuras espaciales de nudos rígidos el cambio de coordenadas necesario es algo distinto, ya que tanto el vector de grados de libertad como el de esfuerzos tienen cuatro partes de dimensión 3: desplazamientos y giros (o esfuerzos y momentos) en cada nudo. De esta manera, el cambio de sistema de referencia resulta de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_G^e &= \mathbf{K}_G^e \mathbf{u}_G^e \Rightarrow \mathbf{R} \mathbf{p}_L^e = (\mathbf{R} \mathbf{K}_L^e \mathbf{R}^T) \mathbf{R} \mathbf{u}_L^e \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_N & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_N \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} n_{1L}^{1G} & n_{2L}^{1G} & n_{3L}^{1G} \\ n_{1L}^{2G} & n_{2L}^{2G} & n_{3L}^{2G} \\ n_{1L}^{3G} & n_{2L}^{3G} & n_{3L}^{3G} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.14)$$

En el caso general tridimensional, la matriz de rigidez elemental es de dimensión 12x12 tanto en coordenadas locales como globales.

4.3.2. ACCIONES SOBRE LOS ELEMENTOS

Las cargas (fuerzas y momentos) externas que actúan en los nudos de la estructura pueden introducirse directamente en las ecuaciones de equilibrio del esquema de la figura 4.1, dentro del vector de fuerzas nodales \mathbf{f}^N . Sin embargo, las estructuras están sometidas además a acciones ejercidas sobre los elementos que, lógicamente, también deben tenerse en cuenta en la formulación. Para hacer esto, lo habitual es considerar el problema original como la superposición de dos: uno con desplazamientos nodales nulos que incluya las fuerzas que actúan sobre los elementos y otro sin cargas elementales tal que, sumado al primero, dé como resultado la estructura original.

Sobre el primer sistema actúan todas las cargas elementales junto con las fuerzas y momentos necesarios para que todos los desplazamientos nodales sean nulos, lo que conduce a una deformada análoga a la que se produciría si todos los nudos estuviesen empotrados. Por esta razón, a los esfuerzos en extremos de barra que aparecen en este primer caso se les denomina *esfuerzos de empotramiento*.

En el segundo sistema, además de las cargas externas aplicadas directamente sobre los nudos, se introducen también las fuerzas nodales que equilibran a la resultante de todos los esfuerzos de empotramiento, que se denominan *fuerzas nodales equivalentes*.

Mientras los esfuerzos de empotramiento suelen calcularse en coordenadas locales, las fuerzas nodales equivalentes deben obtenerse en el sistema de referencia global para poder incluirlas en las ecuaciones de equilibrio de los nudos. Por esta razón la relación entre ambos vectores puede establecerse de la siguiente forma:

$$\mathbf{f}_{eq}^N = -\mathbf{R}\mathbf{p}_{emp}^e \quad (4.3.15)$$

siendo \mathbf{R} la matriz de cambio de coordenadas del sistema de referencia local al global.

Aplicando el principio de superposición, los desplazamientos nodales en el sistema original serán la suma de los que se producen en el primero y el segundo, es decir, los del segundo ya que los del primero son todos nulos.

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}_1^e + \mathbf{u}_2^e = \mathbf{u}_2^e \quad (4.3.16)$$

Los esfuerzos en extremos de barra se obtienen también sumando los que se producen en los dos sistemas en los que se ha descompuesto el problema original, lo que supone añadir a los calculados al resolver el sistema 2 los esfuerzos de empotramiento del sistema 1:

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{p}_{emp}^e + \mathbf{p}_2^e = \mathbf{p}_{emp}^e + \mathbf{K}_2^e \mathbf{u}_2^e \quad (4.3.17)$$

De esta forma, el problema de una estructura con acciones sobre sus barras queda reducido al cálculo de los esfuerzos de empotramiento y la resolución del sistema con cargas nodales.

4.3.2.1. FUERZAS NODALES DEBIDAS A CARGAS SOBRE LAS BARRAS

Cuando una fuerza actúa distribuida a lo largo de una barra, los esfuerzos de empotramiento son sencillamente las reacciones que equilibran esa fuerza distribuida en una viga biempotrada que, para el caso de una fuerza distribuida uniformemente se muestran en la figura 4.14. En este caso el vector de esfuerzos de empotramiento, expresado en el sistema de referencia local, es:

$$\mathbf{p}_{emp}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (4.3.18)$$

y el vector de fuerzas nodales equivalentes, en coordenadas globales, se calcula según: $\mathbf{f}_{eq}^N = -\mathbf{R}\mathbf{p}_{emp}^e$ lo que, para una viga horizontal como la de la figura 4.14, da lugar a:

$$\mathbf{f}_{eq}^N = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (4.3.19)$$

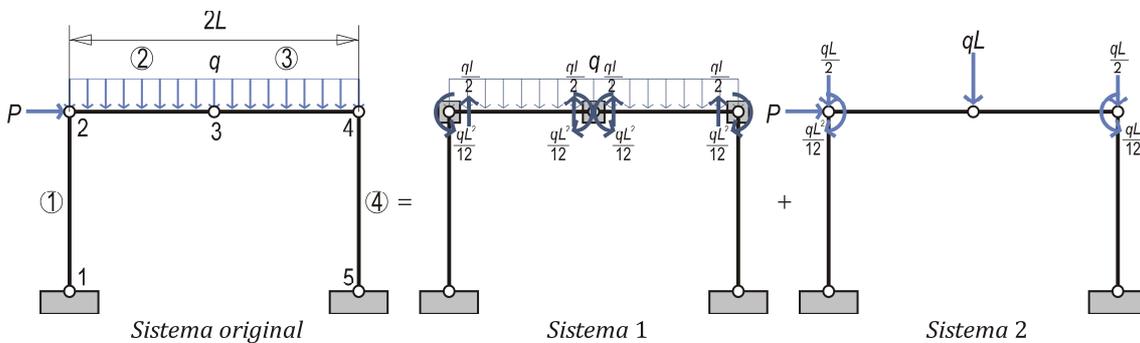


figura 4.14. Esfuerzos de empotramiento y cargas nodales equivalentes producidas por una carga uniformemente repartida sobre el dintel.

Si se trata de una carga de intensidad variable o bien de una carga concentrada, el cálculo de las fuerzas nodales equivalentes es totalmente análogo si bien en este último caso es preferible, desde el punto de vista de la programación del método, definir un nudo adicional en el punto donde actúa la fuerza o el momento.

4.3.2.2. FUERZAS NODALES DEBIDAS A DESPLAZAMIENTOS IMPUESTOS

En ocasiones los valores de algunos desplazamientos nodales se pueden conocer a priori: asentamientos de apoyos, defectos de ajuste en el montaje de un elemento, presencia de tensores que fijen la distancia entre dos puntos, etc. Estos desplazamientos nodales conocidos se pueden tratar de dos formas diferentes.

Por un lado se pueden introducir como una condición de contorno, tal como se explica en el apartado 4.4.2 de la sección siguiente.

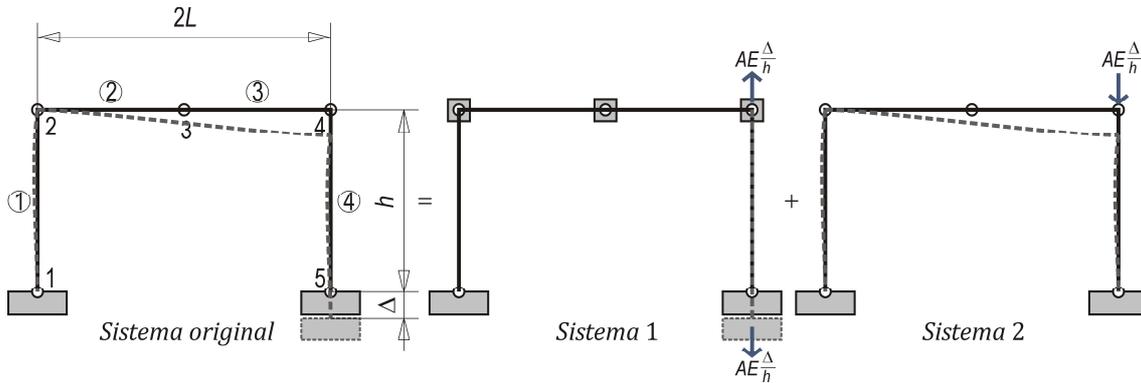


figura 4.15. Esfuerzos de empotramiento y cargas nodales equivalentes producidas por el asiento del apoyo derecho.

Por otro, también es posible descomponer el sistema original en dos más sencillos, como se ha expuesto para el problema de cargas aplicadas sobre las barras, calcular tanto los esfuerzos de empotramiento generados por el desplazamiento impuesto, considerando que el nudo en cuestión está fijo en su posición desplazada, como las fuerzas nodales equivalentes y aplicar el principio de superposición. Si se aplica este segundo método, los esfuerzos de empotramiento en los elementos cuyos nudos tienen desplazamientos conocidos serán entonces iguales a:

$$\mathbf{p}_{emp}^e = \mathbf{K}_L^e \Delta_L^e = \mathbf{K}_L^e \mathbf{R}^T \Delta_G^e = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_G^e \Delta_G^e \quad (4.3.20)$$

y las fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{f}_{eq}^N = -\mathbf{R} \mathbf{p}_{emp}^e = -\mathbf{K}_G^e \Delta_G^e \quad (4.3.21)$$

donde:

- Δ^e es el vector de desplazamientos impuestos en un elemento (en coordenadas locales o globales) y
- \mathbf{R} es, como en ocasiones anteriores, la matriz de cambio de coordenadas locales a globales.

Conviene recordar que en estructuras isostáticas los esfuerzos provocados por desplazamientos impuestos son siempre nulos.

Finalmente, para obtener los desplazamientos del sistema original, a diferencia del planteamiento general de la ecuación (4.3.16), se debe tener en cuenta que en este caso los desplazamientos del sistema 1 no son nulos y, por lo tanto, al resultado del sistema 2 hay que sumarle el valor de los desplazamientos impuestos.

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}_1^e + \mathbf{u}_2^e = \Delta^e + \mathbf{u}_2^e \quad (4.3.22)$$

4.3.2.3. FUERZAS NODALES DEBIDAS A INCREMENTOS DE TEMPERATURA

En el caso de que en una estructura se den variaciones de temperatura respecto a la de referencia en la que se considera establecida su geometría inicial, se producirán desplazamientos y, si es hiperestática, también esfuerzos.

Este problema se puede resolver de forma completamente análoga a la mostrada para los anteriores, descomponiendo el sistema original en uno con las

acciones térmicas y los desplazamientos impedidos y en otro con las acciones térmicas actuando en sentido opuesto y los nudos libres.

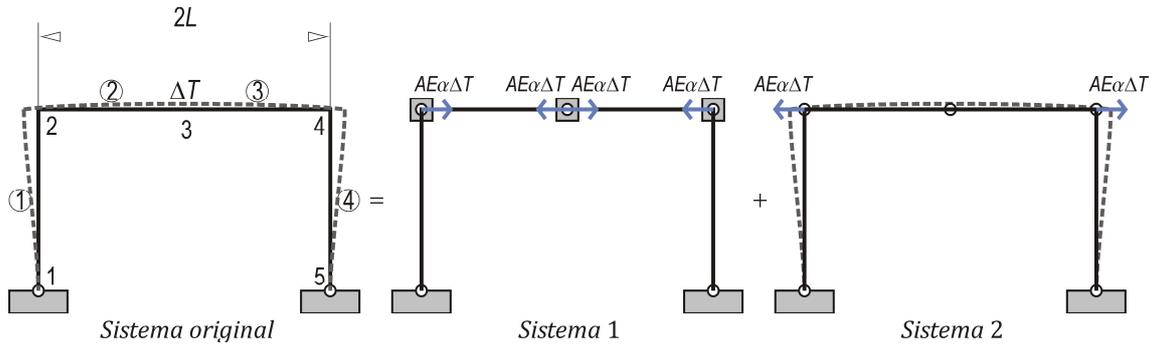


figura 4.16 Esfuerzos de empotramiento y cargas nodales equivalentes producidas por un incremento de temperatura uniforme en el dintel.

En el caso de que una barra sufra un incremento de temperatura uniforme ΔT , la deformación longitudinal producida por él será $\alpha\Delta T$, siendo α el coeficiente de dilatación del material. Si se restringen los desplazamientos de los nudos y la sección de la barra es A , se generará una compresión de valor $AE\alpha\Delta T$, con lo que los esfuerzos de empotramiento en una estructura plana serán:

$$\mathbf{p}_{emp}^e = \begin{bmatrix} AE\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ -AE\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.23)$$

y las fuerzas nodales equivalentes, como siempre: $\mathbf{f}_{eq}^N = -\mathbf{R}\mathbf{p}_{emp}^e$, de forma que para la viga horizontal de la figura 4.16 queda:

$$\mathbf{f}_{eq}^N = \begin{bmatrix} -AE\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ AE\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.24)$$

EJEMPLO 4.3-3

Calcular los vectores de esfuerzos de empotramiento (en coordenadas locales de cada barra) y de fuerzas nodales equivalentes (en coordenadas globales) para cada elemento del pórtico de la figura 4.17, si su pilar izquierdo sufre un incremento de temperatura ΔT y la cabeza del pilar derecho un desplazamiento lateral Δ producido por un tirante que no forma parte de la estructura analizada.

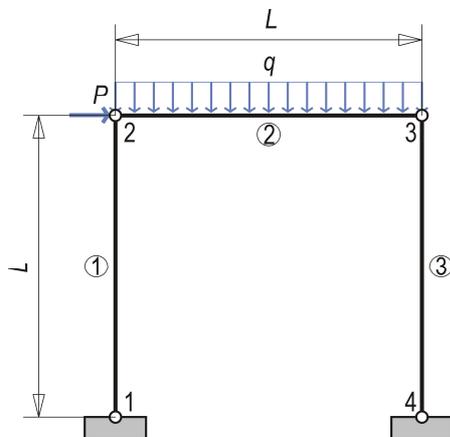


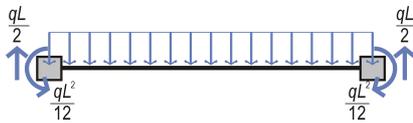
figura 4.17

El pilar izquierdo está sometido únicamente al efecto del incremento de temperatura ΔT . Si se considera el eje x local dirigido del nudo 1 al 2, en el primer nudo la reacción de



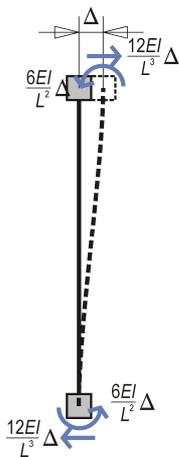
empotramiento es positiva y en el segundo negativa. Para expresar el vector de fuerzas nodales en coordenadas globales hay que tener en cuenta que la dirección vertical coincide con el eje y global. Teniendo todo esto en cuenta, resulta:

$$\mathbf{p}_{emp}^1 = \begin{bmatrix} AE\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ -AE\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_{eq}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{eq}^1 \\ \mathbf{f}_{eq}^2 \end{bmatrix} = -\mathbf{R}\mathbf{p}_{emp}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -AE\alpha\Delta T \\ 0 \\ 0 \\ AE\alpha\Delta T \\ 0 \end{bmatrix}$$



A su vez, el dintel está sometido tanto a la carga uniformemente distribuida que actúa directamente sobre él como al alargamiento que le produce el desplazamiento lateral de la cabeza del pilar derecho. En este caso los sistemas de referencia local y global coinciden, por lo que para calcular el vector de fuerzas nodales equivalentes basta con cambiar el signo del vector de esfuerzos de empotramiento:

$$\mathbf{p}_{emp}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} \Delta \\ \frac{1}{2} qL \\ \frac{1}{12} qL^2 \\ \frac{EA}{L} \Delta \\ \frac{1}{2} qL \\ -\frac{1}{12} qL^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_{eq}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{eq}^2 \\ \mathbf{f}_{eq}^3 \end{bmatrix} = -\mathbf{R}\mathbf{p}_{emp}^2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \Delta \\ -\frac{1}{2} qL \\ -\frac{1}{12} qL^2 \\ -\frac{EA}{L} \Delta \\ -\frac{1}{2} qL \\ \frac{1}{12} qL^2 \end{bmatrix}$$



Finalmente, sobre el pilar derecho sólo actúa la fuerza debida al desplazamiento lateral de su cabeza:

$$\mathbf{p}_{emp}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{12EI}{L^3} \Delta \\ \frac{6EI}{L^2} \Delta \\ 0 \\ -\frac{12EI}{L^3} \Delta \\ \frac{6EI}{L^2} \Delta \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_{eq}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{eq}^3 \\ \mathbf{f}_{eq}^4 \end{bmatrix} = -\mathbf{R}\mathbf{p}_{emp}^3 = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} \Delta \\ 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \Delta \\ \frac{12EI}{L^3} \Delta \\ 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \Delta \end{bmatrix}$$

Nótese que la carga puntual que actúa en la cabeza del pilar izquierdo no forma parte de ninguno de los vectores de cargas elementales, sino que deberá ser incluida directamente en el vector de fuerzas nodales cuando se realice el ensamblaje del problema, tal como se explica en la sección siguiente.

4.4. PLANTEAMIENTO GLOBAL DEL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ

4.4.1. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD. ENSAMBLAJE

En la sección anterior se determinaron las matrices de rigidez elementales, que relacionaban los esfuerzos y desplazamientos en los extremos de un elemento de cualquier tipología estructural. En coordenadas globales, estas ecuaciones de comportamiento quedaban de la siguiente forma:

$$\mathbf{p}_G^e = \mathbf{K}_G^e \mathbf{u}_G^e \quad (4.4.1)$$

adoptando, tanto los vectores de cargas (\mathbf{p}_G^e) y desplazamientos (\mathbf{u}_G^e) como la matriz de rigidez (\mathbf{K}_G^e) elementales, distintas formas en función de la tipología estructural de que se tratase.

Para formular el problema en su conjunto de acuerdo con el proceso esquematizado en la figura 4.1 también son necesarias las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio nodal.

Las ecuaciones de compatibilidad se traducen en la identificación de los grados de libertad (desplazamientos y giros) de los extremos de cada elemento con los de los nudos de la estructura, que son las incógnitas esenciales del problema.

A su vez, las ecuaciones de equilibrio consisten en igualar las fuerzas y momentos externos que actúan sobre cada nudo con los esfuerzos en los extremos de barras concurrentes en él:

$$\sum \mathbf{F}^N = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{f}^N - \sum_e \mathbf{p}_{i,G}^e = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{f}^N = \sum_e \mathbf{p}_{i,G}^e \quad (4.4.2)$$

siendo:

- \mathbf{f}^N las fuerzas exteriores sobre el nudo,
- $\mathbf{p}_{i,G}^e$ los bloques correspondientes al nudo de los vectores de esfuerzos de los elementos concurrentes en él ($i = 1$ ó 2) en coordenadas globales y
- NeN el número de elementos conectados al nudo.

Introduciendo las ecuaciones de comportamiento (4.4.1) en las de equilibrio (4.4.2) se obtiene una expresión de las ecuaciones de equilibrio en función de los grados de libertad de cada elemento:

$$\mathbf{f}^N = \sum_e \mathbf{p}_{i,G}^e = \sum_e \sum_{j=1}^2 \mathbf{K}_{ij,G}^e \mathbf{u}_{j,G}^e \quad (4.4.3)$$

e imponiendo finalmente las ecuaciones de compatibilidad se llega a una ecuación cuyas incógnitas son los grados de libertad nodales:

$$\mathbf{F}^{est} = \mathbf{K}^{est} \mathbf{u}^{est} \quad (4.4.4)$$

donde

- \mathbf{K}^{est} es la denominada *matriz de rigidez global* de la estructura,
- \mathbf{u}^{est} el *vector de desplazamientos global* de los nudos y
- \mathbf{F}^{est} el *vector de cargas global* de la estructura, que incluye tanto las acciones exteriores que actúan directamente sobre los nudos como las fuerzas nodales equivalentes a cargas sobre los elementos o desplazamientos impuestos.

Como ya se ha adelantado previamente, las ecuaciones de compatibilidad se introducen en el sistema identificando los grados de libertad de cada elemento con los de los nudos entre los que se encuentra, de manera que la matriz de rigidez K^{est} y el vector de cargas F^{est} se van construyendo respectivamente a partir de los bloques correspondientes de las matrices de rigidez y vectores de esfuerzos elementales K_G^e y p_G^e en un proceso denominado *ensamblaje*.

Como se muestra a continuación en el ejemplo 4.4-1, la matriz de rigidez global de la estructura tiene las siguientes propiedades:

- a) Es simétrica.
- b) La orientación de los elementos no influye en la forma final de la matriz.
- c) Se divide en submatrices, correspondientes cada una a un nudo de la estructura, que forman filas y columnas dentro de la matriz.
- d) Las submatrices de la diagonal principal son la suma de las submatrices correspondientes de los elementos concurrentes en cada nudo. Si el nudo en cuestión es el primero en la conectividad del elemento, se sumará la submatriz K_{11}^e de la matriz de rigidez elemental, de acuerdo con la notación de (4.3.2), y si es el segundo la K_{22}^e .
- e) Cada submatriz situada fuera de la diagonal principal coincide con una de las submatrices exteriores del elemento que une los nudos correspondientes, que vendrá determinada por la conectividad del elemento. Si los nudos no están unidos por ningún elemento, la submatriz de la matriz de rigidez global será nula.
- f) Los términos no nulos se agrupan normalmente en la proximidad de la diagonal de la matriz global.

A su vez, el vector de cargas global también tiene algunas propiedades análogas a las anteriores:

- c2) Se divide en bloques, correspondientes cada uno a un nudo de la estructura, que forman filas dentro del vector.
- d2) Cada bloque es la suma de los bloques correspondientes de los elementos concurrentes en cada nudo. Si el nudo en cuestión es el primero en la conectividad del elemento, se sumará el bloque p_1^e del vector de cargas elemental, de acuerdo con la notación de (4.3.2), y si es el segundo el p_2^e .

Las propiedades d) y e) anteriores constituyen las reglas para realizar el ensamblaje de las matrices y vectores de cargas elementales, formando así la matriz de rigidez y el vector de cargas globales.

EJEMPLO 4.4-1

Plantear las ecuaciones globales de equilibrio del pórtico de la figura 4.18, en la que se muestra la discretización adoptada. La numeración de los elementos se ha inscrito en círculos para distinguirla de la de los nudos. Suponer conocidos todos los bloques (submatrices) de las matrices de rigidez elementales de cada barra.

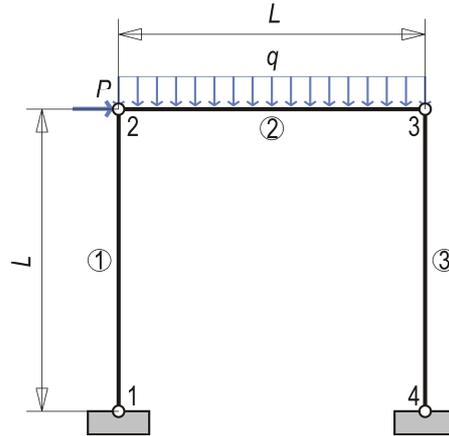


figura 4.18. Pórtico recto. Discretización y cargas

Si \mathbf{p}_n^e es el vector de esfuerzos en el extremo n del elemento e , las ecuaciones de equilibrio de cada nudo se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\text{Nudo 1: } \mathbf{p}_1^1 = \mathbf{r}_1 \qquad \text{Nudo 2: } \mathbf{p}_2^1 + \mathbf{p}_1^2 = \begin{bmatrix} P \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{Nudo 3: } \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \qquad \text{Nudo 4: } \mathbf{p}_2^3 = \mathbf{r}_4$$

siendo \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_4 respectivamente las reacciones en los nudos 1 y 4.

Las ecuaciones de comportamiento del elemento e del pórtico tienen la siguiente expresión general:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^e \\ \mathbf{u}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^e \\ \mathbf{p}_2^e \end{bmatrix}$$

Introduciendo estas ecuaciones de comportamiento en las de equilibrio resulta:

$$\mathbf{K}_{11}^1 \mathbf{u}_1^1 + \mathbf{K}_{12}^1 \mathbf{u}_2^1 = \mathbf{r}_1 \qquad \mathbf{K}_{21}^1 \mathbf{u}_1^1 + \mathbf{K}_{22}^1 \mathbf{u}_2^1 + \mathbf{K}_{11}^2 \mathbf{u}_1^2 + \mathbf{K}_{12}^2 \mathbf{u}_2^2 = \begin{bmatrix} P \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{21}^2 \mathbf{u}_1^2 + \mathbf{K}_{22}^2 \mathbf{u}_2^2 + \mathbf{K}_{11}^3 \mathbf{u}_1^3 + \mathbf{K}_{12}^3 \mathbf{u}_2^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{21}^3 \mathbf{u}_1^3 + \mathbf{K}_{22}^3 \mathbf{u}_2^3 = \mathbf{r}_4$$

Por su parte, las ecuaciones de compatibilidad en los nudos son:

$$\text{Nudo 1: } \mathbf{u}_1^1 = \mathbf{u}_1 \qquad \text{Nudo 2: } \mathbf{u}_2^1 = \mathbf{u}_1^2 = \mathbf{u}_2$$

$$\text{Nudo 3: } \mathbf{u}_2^2 = \mathbf{u}_1^3 = \mathbf{u}_3 \qquad \text{Nudo 4: } \mathbf{u}_2^3 = \mathbf{u}_4$$

donde \mathbf{u}_n^e es el vector de grados de libertad en el extremo n del elemento e , análogamente a lo establecido para los esfuerzos.

Sustituyendo las relaciones de compatibilidad en las ecuaciones de equilibrio queda:

$$\mathbf{K}_{11}^1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{12}^1 \mathbf{u}_2 = \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{K}_{21}^1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{22}^1 \mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{11}^2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{12}^2 \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} P \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{21}^2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{22}^2 \mathbf{u}_3 + \mathbf{K}_{11}^3 \mathbf{u}_3 + \mathbf{K}_{12}^3 \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{21}^3 \mathbf{u}_3 + \mathbf{K}_{22}^3 \mathbf{u}_4 = \mathbf{r}_4$$

y agrupando las expresiones anteriores en forma matricial resulta finalmente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{K}_{12}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^2 & \mathbf{K}_{22}^2 + \mathbf{K}_{11}^3 & \mathbf{K}_{12}^3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^3 & \mathbf{K}_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ P \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \mathbf{r}_4 \end{bmatrix}$$

4.4.2. IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE APOYO Y RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

La matriz de rigidez global de la estructura, formada a partir de las matrices de rigidez de cada elemento como se ha explicado en el apartado anterior, es singular (no tiene inversa) y, además, el vector de cargas global incluye las reacciones en los apoyos que son desconocidas, por lo que es imposible resolver el sistema de ecuaciones lineales (4.4.4).

La interpretación física de la singularidad de la matriz es que, al no haberse introducido todavía las restricciones al movimiento que imponen los apoyos de la estructura, existen infinitos desplazamientos posibles del sistema que se diferencian entre sí por movimientos de sólido rígido.

Desde el punto de vista de la organización de los datos del problema, algunos desplazamientos (aquellos relativos a los apoyos) no son incógnitas mientras que ciertas fuerzas externas (las reacciones) son desconocidas. Es conveniente por tanto reordenar el sistema de ecuaciones, y por consiguiente la matriz de rigidez, agrupando todas las incógnitas del vector de cargas y los datos contenidos en el de desplazamientos, para resolver posteriormente la parte del sistema de ecuaciones correspondiente a los desplazamientos desconocidos. Así, si se colocan las reacciones \mathbf{f}_R en la parte inferior del vector de cargas y los desplazamientos conocidos \mathbf{u}_R en la parte inferior del vector de desplazamientos queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{LL} & \mathbf{K}_{LR} \\ \mathbf{K}_{RL} & \mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_R \end{bmatrix} \quad (4.4.5)$$

y, dado que los desplazamientos contenidos en \mathbf{u}_R son conocidos, se pueden calcular todas las incógnitas del problema de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{K}_{LL}^{-1} (\mathbf{f}_L - \mathbf{K}_{LR} \mathbf{u}_R) \quad \mathbf{r} = \mathbf{K}_{RL} \mathbf{u}_L + \mathbf{K}_{RR} \mathbf{u}_R \quad (4.4.6)$$

El procedimiento expuesto es muy simple conceptualmente, pero no es la única alternativa posible para resolver el problema. De hecho, existen otras técnicas que plantean ciertas ventajas de cara a la programación del método directo de la rigidez. Una de las más utilizadas consiste en sustituir las ecuaciones de equilibrio correspondientes a los grados de libertad conocidos a priori por las propias condiciones de apoyo. Para hacer esto, cada fila de la matriz de rigidez correspondiente a un desplazamiento prescrito se modifica anulando todos sus términos salvo el de la diagonal, que se cambia por 1, a la vez que la componente del vector de cargas se sustituye por el valor del desplazamiento conocido (d). Para evitar la pérdida de simetría de la matriz de rigidez, se anula también la columna correspondiente de la matriz y se modifica todo el vector de cargas restándole el producto de la columna eliminada por el valor del desplazamiento conocido.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & 0 & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & 0 & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - K_{1i}d \\ f_2 - K_{2i}d \\ \vdots \\ d \\ \vdots \\ f_n - K_{ni}d \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

El sistema de ecuaciones (4.4.7) ya está determinado y puede resolverse para calcular los desplazamientos. Con posterioridad las reacciones se obtienen sumando todos los esfuerzos de los elementos que inciden en los apoyos, tal como se detalla en el apartado siguiente.

4.4.3. CÁLCULO DE VARIABLES SECUNDARIAS

4.4.3.1. ESFUERZOS

Una vez obtenidos los desplazamientos nodales, es posible obtener los esfuerzos en los extremos de la barra mediante las ecuaciones de comportamiento y, posteriormente, los esfuerzos en cualquier sección mediante las expresiones que proporciona la resistencia de materiales. En concreto, teniendo en cuenta que los esfuerzos convencionales de una barra (axil, cortantes, torsor y flectores) coinciden con el vector de esfuerzos en los extremos del elemento cuando éste se expresa en coordenadas locales, los mencionados esfuerzos se pueden calcular mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{p}_L^e = \mathbf{K}_L^e \mathbf{u}_L^e = \mathbf{K}_L^e \mathbf{R}^T \mathbf{u}_G^e \quad (4.4.8)$$

en la que todos los vectores y matrices son conocidos.

En las barras en las que existan cargas elementales se han de sumar además los esfuerzos de empotramiento tal como se detalló en 4.3.2.1, es decir:

$$\mathbf{p}_L^e = \mathbf{p}_{emp}^e + \mathbf{K}_L^e \mathbf{R}^T \mathbf{u}_G^e \quad (4.4.9)$$

4.4.3.2. REACCIONES

Tras calcular los esfuerzos en los extremos de todas las barras, las reacciones en los apoyos pueden obtenerse directamente de las ecuaciones de equilibrio en los nudos sobre los que se encuentran los apoyos:

$$\sum \mathbf{F}^N = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r}^N - \sum_e^{NeN} \mathbf{p}_{i,G}^e = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r}^N = \sum_e^{NeN} \mathbf{p}_{i,G}^e \quad (4.4.10)$$

siendo:

- r^N las fuerzas exteriores sobre el nudo (reacciones),
- $p_{i,G}^e$ los bloques correspondientes al nudo de los vectores de esfuerzos de los elementos concurrentes en él ($i = 1$ ó 2) en coordenadas globales y
- NeN el número de elementos conectados al nudo.

EJEMPLO 4.4-2

Calcular por el método directo de la rigidez los desplazamientos de los nudos de la estructura de la figura 4.19, para la que las matrices de rigidez elementales ya se calcularon en el ejemplo 4.3-1, si la carga P es de 10 kN.

Obtener también el valor de los esfuerzos en las barras y las reacciones en los apoyos

Utilizar la conectividad y la numeración de nudos y elementos mostrada en la figura.

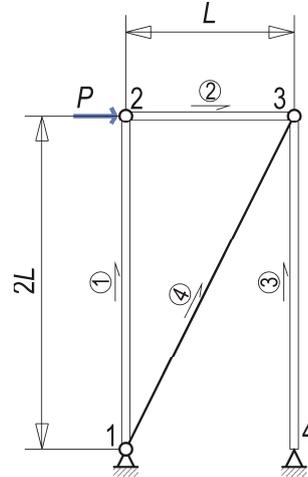


figura 4.19

De acuerdo con la numeración y la conectividad mostradas en la figura 4.19, el ensamblaje de las matrices de rigidez elementales para obtener la matriz de rigidez global de la estructura debe hacerse de la siguiente forma:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^4 & K_{12}^1 & K_{12}^4 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{21}^4 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{22}^4 + K_{22}^3 & K_{21}^3 \\ 0 & 0 & K_{12}^3 & K_{11}^3 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz y las cargas que actúan sobre la estructura, queda el siguiente problema:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^4 & K_{12}^1 & K_{12}^4 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{21}^4 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{22}^4 + K_{22}^3 & K_{21}^3 \\ 0 & 0 & K_{12}^3 & K_{11}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^1 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r^4 \end{bmatrix}$$

donde r^1 y r^4 son, respectivamente, las reacciones en los apoyos de los nudos 1 y 4. Si a continuación se imponen las condiciones de apoyo del problema resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{22}^4 + K_{22}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las submatrices de cada elemento por los valores obtenidos en el ejemplo 4.3-1 queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 106.05 & 0 & -106.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 53.025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -106.05 & 0 & 10.887 & 5.6349 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.6349 & 64.295 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \\ u_x^3 \\ u_y^3 \\ u_x^4 \\ u_y^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y resolviendo finalmente el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas resultante se llega a los siguientes desplazamientos de los nudos:

$$\mathbf{u}^2 = \begin{bmatrix} 4.398 \\ 0.0 \end{bmatrix} 10^{-3} m \quad \mathbf{u}^3 = \begin{bmatrix} 4.304 \\ -0.377 \end{bmatrix} 10^{-3} m$$

A partir de ellos se pueden calcular los esfuerzos en las barras mediante las ecuaciones de comportamiento elementales: $\mathbf{p}^e = \mathbf{R}^T \mathbf{p}_G^e = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_G^e \mathbf{u}^e$, donde \mathbf{R} es la matriz de cambio de coordenadas de cada barra, que se calculó en el ejemplo 4.3-1. De esta forma queda:

$$\mathbf{p}_G^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 53.025 & 0 & -53.025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -53.025 & 0 & 53.025 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.398 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

$$\mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

$$\mathbf{p}_G^2 = \begin{bmatrix} 106.05 & 0 & -106.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -106.05 & 0 & 106.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 4.398 \\ 0 \\ 4.304 \\ -0.377 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} KN$$

$$\mathbf{p}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} KN$$

$$\mathbf{p}_G^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 53.025 & 0 & -53.025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -53.025 & 0 & 53.025 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.304 \\ -0.377 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} KN$$

$$\mathbf{p}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \end{bmatrix} KN$$

$$p_G^4 = \begin{bmatrix} 2.8174 & 5.6349 & -2.8174 & -5.6349 \\ 5.6349 & 11.270 & -5.6349 & -11.270 \\ -2.8174 & -5.6349 & 2.8174 & 5.6349 \\ -5.6349 & -11.270 & 5.6349 & 11.270 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.304 \\ -0.377 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -20 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} KN$$

$$p^4 = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.894 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.447 & 0.894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22.36 \\ 22.36 \end{bmatrix} KN$$

Finalmente, las reacciones en los apoyos se obtienen de las ecuaciones de equilibrio en los nudos correspondientes:

$$r^1 = p_{G1}^1 + p_{G1}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -20 \end{bmatrix} \quad r^2 = p_{G1}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4.4-3

La estructura de madera de la figura 4.20 tiene que soportar una carga uniformemente repartida sobre la viga horizontal cuya intensidad es $q = 6KN/m$. La madera con la que está construida tiene un módulo elástico $E_w = 10GPa$ y las barras tienen $4m$ de longitud y una sección rectangular de $240mm$ de anchura y $400mm$ de canto.

Calcular por el método directo de la rigidez los desplazamientos de los nudos, los esfuerzos máximos en las barras y las reacciones en los apoyos.

Utilizar la conectividad y la numeración de nudos y elementos mostrada en la figura.

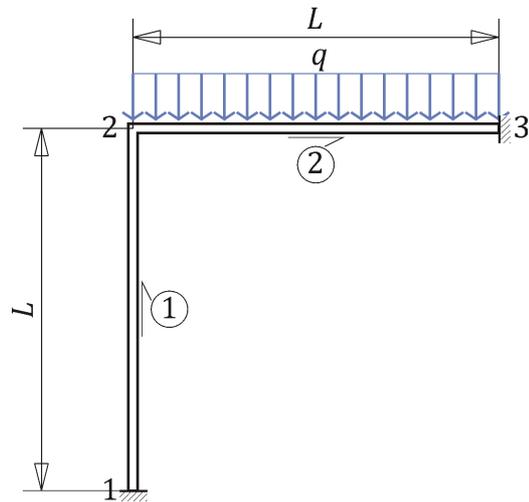


figura 4.20

Al tener la misma sección y longitud, las matrices de rigidez en coordenadas locales de las dos barras de la estructura son iguales y de acuerdo con la fórmula (4.3.8), si se expresan todas las magnitudes en KN y m , valen:

$$K^1 = K^2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 & 0 & 0 & -240 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 4.8 & 0 & -2.4 & 4.8 \\ 0 & 4.8 & 12.8 & 0 & -4.8 & 6.4 \\ -240 & 0 & 0 & 240 & 0 & 0 \\ 0 & -2.4 & -4.8 & 0 & 2.4 & -4.8 \\ 0 & 4.8 & 6.4 & 0 & -4.8 & 12.8 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Ensamblando las dos matrices de rigidez elementales, referidas al sistema de coordenadas global, se obtiene la de la estructura completa:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{22}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

Como el elemento 2 está sometido a una carga uniformemente repartida, hay que calcular su vector de esfuerzos de empotramiento para, a partir de él, determinar los vectores de fuerzas nodales equivalentes y ensamblarlos también para formar el vector de fuerzas externas de la estructura:

$$\mathbf{p}_{emp}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \text{ KN} \\ 8 \text{ KNm} \\ 0 \\ 12 \text{ KN} \\ -8 \text{ KNm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{f}_{eq}^2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{p}_{emp,1}^2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ 0 \\ -12 \text{ KN} \\ -8 \text{ KNm} \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

Si a continuación se imponen las condiciones de apoyo sobre el sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura: $\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$, queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{eq}^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

donde la submatriz \mathbf{K}_{22}^1 debe expresarse en el sistema de coordenadas global:

$$\mathbf{K}_{22,G}^1 = \mathbf{R}_N \mathbf{K}_{22}^1 \mathbf{R}_N^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 240 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & -4.8 \\ 0 & -4.8 & 12.8 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & 0 & 4.8 \\ 0 & 240 & 0 \\ 4.8 & -4.8 & 12.8 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

de forma que el sistema de ecuaciones resulta ser finalmente el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 242.4 & 0 & 4.8 \\ \mathbf{0} & 0 & 242.4 & 4.8 \\ 4.8 & 4.8 & 25.6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \\ \theta_z^2 \\ \mathbf{u}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ -12 \text{ KN} \\ -8 \text{ KNm} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (c)$$

Desarrollando y resolviendo el sistema (c) se calculan los desplazamientos del nudo 2:

$$\begin{cases} (242.4u_x^2 + 4.8\theta_z^2) \cdot 10^3 = 0 & \Rightarrow u_x^2 = -\frac{4800}{242400} \theta_z^2 \\ (242.4u_y^2 + 4.8\theta_z^2) \cdot 10^3 = -12 \text{ KN} & \Rightarrow u_y^2 = -\frac{12}{242400} - \frac{4800}{242400} \theta_z^2 \\ (4.8u_x^2 + 4.8u_y^2 + 25.6\theta_z^2) \cdot 10^3 = -8 \text{ KNm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{4800^2}{242400} \theta_z^2 - \frac{57600}{242400} - \frac{4800^2}{242400} \theta_z^2 + 25600 \theta_z^2 = -8 \Rightarrow \theta_z^2 = -3.0549 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$u_x^2 = 6.0492 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$u_y^2 = -4.3456 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Una vez conocidos los desplazamientos de todos los nudos ($\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^3 = \mathbf{0}$), los esfuerzos en los extremos de las barras pueden obtenerse multiplicándolos por las matrices de rigidez elementales en los correspondientes sistemas de referencia locales y sumando en el segundo elemento (que está cargado) el vector de esfuerzos de empotramiento:

$$\mathbf{u}^{e1} = \mathbf{R}^T \mathbf{u}_G^{e1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_N^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{N1} \\ \mathbf{u}^{N2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^{e2} = \mathbf{u}_G^{e2} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{N2} \\ \mathbf{u}^{N3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{u}^{e1} &\Rightarrow \begin{bmatrix} N_1^1 \\ V_1^1 \\ M_1^1 \\ N_2^1 \\ V_2^1 \\ M_2^1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4.3456 \cdot 10^{-5} m \\ -6.0492 \cdot 10^{-6} m \\ -3.0549 \cdot 10^{-4} rad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.429 KN \\ 1.4518 KN \\ -1.9261 KNm \\ -10.429 KN \\ -1.4518 KN \\ -3.8812 KNm \end{bmatrix} \\
 \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_{emp}^2 + \mathbf{K}^2 \mathbf{u}^{e2} &\Rightarrow \begin{bmatrix} N_1^2 \\ V_1^2 \\ M_1^2 \\ N_2^2 \\ V_2^2 \\ M_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 KN \\ 8 KNm \\ 0 \\ 12 KN \\ -8 KNm \end{bmatrix} + \mathbf{K}^2 \begin{bmatrix} 6.0492 \cdot 10^{-6} m \\ -4.3456 \cdot 10^{-5} m \\ -3.0549 \cdot 10^{-4} rad \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4518 KN \\ 10.429 KN \\ 3.8812 KNm \\ -1.4518 KN \\ 13.571 KN \\ -10.164 KNm \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sin embargo, en una estructura de nudos rígidos la información de los esfuerzos en los extremos de las barras no es suficiente para determinar si resiste o no las cargas a las que está sometida, ya que los valores máximos no tienen por qué darse en estos puntos. Por lo tanto es necesario analizar el equilibrio de cada elemento para obtener el valor de los esfuerzos en cualquier sección.

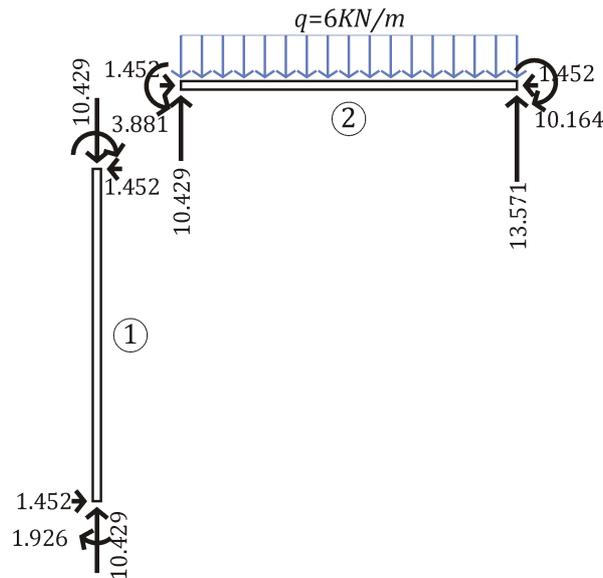


figura 4.21

En la figura 4.21 se muestra el diagrama de sólido libre de los dos elementos de la estructura, del que se deduce inmediatamente que, en el elemento 1, los esfuerzos axil y cortante son constantes al estar la barra descargada:

$$N^1 = -10.429 KN \quad V_y^1 = 1.452 KN$$

y el momento flector varía linealmente:

$$M_z^1(x) = 1.926 - 1.452x \text{ KNm}$$

Por su parte, en el elemento 2 el axil es también constante:

$$N^2 = -1.452 KN$$

mientras que, al estar sometida la barra a una carga uniformemente distribuida de 6KN/m, el cortante y el flector varían de forma lineal y parabólica respectivamente:

$$V_y^2(x) = -10.429 + 6x \text{ KN} \quad M_z^2(x) = -3.881 + 10.429x - \frac{1}{2}6x^2 \text{ KNm}$$

de forma que el máximo valor positivo del momento flector se da en la sección situada en $x = 10.429/6 = 1.738\text{ m}$ y vale:

$$M_{z,máx}^2 = -3.881 + 10.429 \cdot 1.738 - 3 \cdot 1.738^2 = 5.183\text{ KNm}$$

A partir de las ecuaciones anteriores se obtienen los diagramas de esfuerzos representados en la figura 4.22.

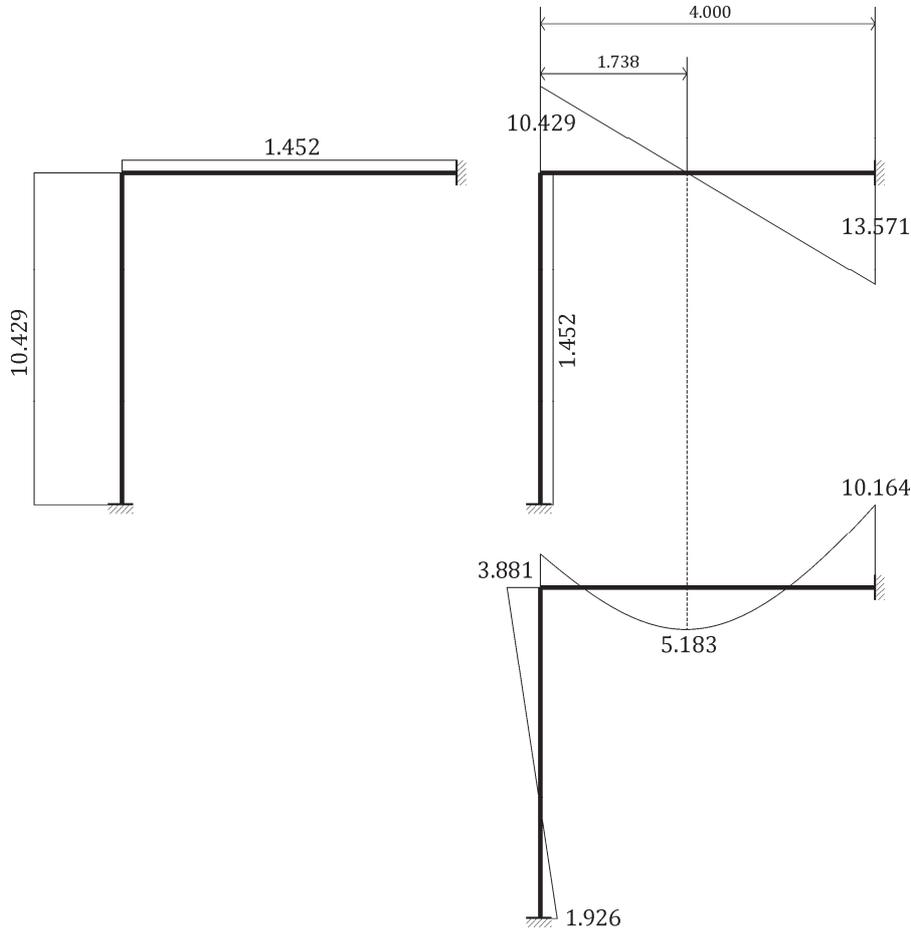


figura 4.22

Finalmente, las reacciones son iguales a los esfuerzos de cada elemento en los extremos correspondientes a los nudos empotrados, expresados en coordenadas globales:

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{p}_{1,G}^1 = \begin{bmatrix} V_1^1 \\ N_1^1 \\ M_z^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4518\text{ KN} \\ 10.429\text{ KN} \\ -1.9261\text{ KNm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{p}_{2,G}^2 = \begin{bmatrix} N_2^2 \\ V_2^2 \\ M_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4518\text{ KN} \\ 13.571\text{ KN} \\ -10.164\text{ KNm} \end{bmatrix}$$

4.5. ASPECTOS AVANZADOS DEL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ

En esta sección se describen algunos aspectos del método directo de la rigidez que, sin formar parte del núcleo esencial del mismo, se aplican con la frecuencia suficiente como para que resulte necesario describirlos para poder aplicar el método a la mayoría de los problemas estructurales habituales.

En el primer apartado se describe el tratamiento de nudos en los que algunas barras están unidas rígidamente y otras no (articulaciones y uniones flexibles, principalmente), que consiste en modificar la matriz de rigidez de los elementos conectados al nudo. En el segundo se muestra como introducir las condiciones de contorno correspondientes a apoyos flexibles y no concordantes, para lo que hay que modificar la matriz de rigidez global de la estructura.

4.5.1. UNIONES ESPECIALES. CONDENSACIÓN ESTÁTICA

4.5.1.1. DESPLAZAMIENTOS LIBERADOS

Como ya se expuso en el capítulo 1, es posible que las barras unidas en un nudo tengan desplazamientos liberados, es decir, que haya grados de libertad de alguna barra que no coincidan con los del nudo, como sucede con el giro del extremo de una barra que se conecta mediante una articulación a una unión rígida entre otros elementos.

En este caso aparecen incógnitas adicionales, ya que los desplazamientos liberados deben calcularse independientemente de los del resto de los elementos conectados al nudo. Como contrapartida, para que las barras con desplazamientos liberados se encuentren en equilibrio con el resto de la estructura (i.e. para que no se produzcan desplazamientos como sólido rígido) los esfuerzos asociados a esos grados de libertad deben ser nulos. Además, como los desplazamientos adicionales

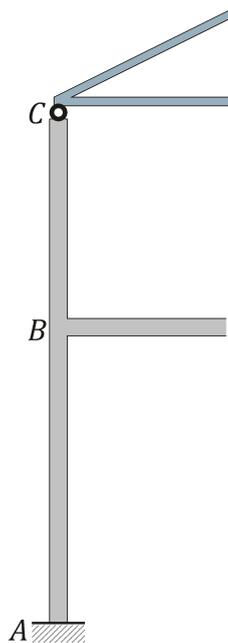


figura 4.23

sólo aparecen en las ecuaciones de comportamiento de su elemento, pueden determinarse imponiendo la condición de esfuerzo nulo. A este proceso se le denomina *condensación estática*, puesto que permite *condensar* (eliminar) ciertos grados de libertad mediante ecuaciones de equilibrio *estático*.

Tomando la estructura de la figura 4.23 como ejemplo, las ecuaciones de comportamiento una barra cualquiera del pórtico pueden expresarse en forma matricial según (4.3.8):

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Imponiendo la condición de momento flector nulo en la rótula del extremo final de la barra BC, es decir:

$$M_2 = \frac{6EI}{L^2} v_1 + \frac{2EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} v_2 + \frac{4EI}{L} \theta_2 = 0 \quad (4.5.1)$$

es posible relacionar el giro de ese punto (que es el desplazamiento liberado en este caso) con los demás grados de libertad del elemento:

$$\theta_2 = -\frac{3}{2L} v_1 - \frac{1}{2} \theta_1 + \frac{3}{2L} v_2 \quad (4.5.2)$$

Sustituyendo el resultado (4.5.2) en las demás ecuaciones de comportamiento, se obtiene finalmente una nueva matriz de rigidez elemental con un grado de libertad menos, de manera que el único grado de libertad que queda en el problema global es el giro del nudo:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.5.3)$$

Para mantener la sistemática del método directo de la rigidez, la matriz elemental se completa con una fila y una columna de ceros correspondientes al grado de libertad eliminado, de forma que queda:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.5.4)$$



figura 4.24

Si la barra tuviese más de un desplazamiento liberado, como sucede en el caso de la figura 4.24 en la que tanto el giro del extremo A como el desplazamiento vertical del B son independientes de los de los nudos, el procedimiento anterior podría generalizarse de la siguiente manera: en primer lugar se reordena el sistema de ecuaciones, de forma que en el vector de grados de libertad todos los desplazamientos liberados queden agrupados:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RL} \\ \mathbf{K}_{LR} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} \quad (4.5.5)$$

A continuación se despejan los desplazamientos liberados (\mathbf{u}_L):

$$\mathbf{u}_L = -\mathbf{K}_{LL}^{-1}(\mathbf{K}_{LR}\mathbf{u}_R) \quad (4.5.6)$$

y se sustituyen en las ecuaciones correspondientes a los esfuerzos asociados al resto de los grados de libertad (\mathbf{f}_R):

$$\mathbf{f}_R = \mathbf{K}_{RR}\mathbf{u}_R + \mathbf{K}_{RL}\mathbf{u}_L = (\mathbf{K}_{RR} - \mathbf{K}_{RL}\mathbf{K}_{LL}^{-1}\mathbf{K}_{LR})\mathbf{u}_R = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_R \quad (4.5.7)$$

de forma que finalmente las ecuaciones de comportamiento y la matriz de rigidez del elemento quedan como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} \quad (4.5.8)$$

EJEMPLO 4.5-1

Calcular cómo varían los desplazamientos y los esfuerzos en la estructura del ejemplo 4.4-3 si se introduce una articulación en el nudo 2 de la misma, tal como se muestra en la figura 4.25.

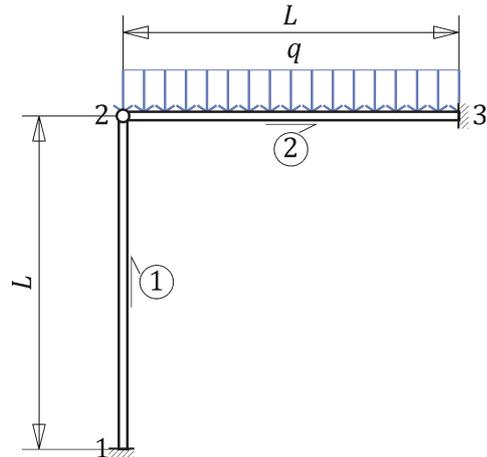


figura 4.25

Para analizar esta estructura por el método directo de la rigidez, es necesario eliminar por condensación estática el giro del extremo correspondiente de una de las dos barras que se unen en el nudo 2. Así, el grado de libertad θ_2^2 que quedará en el sistema de ecuaciones de equilibrio de la estructura será el giro del extremo de la otra barra.

Para condensar estáticamente el giro del segundo nudo (el superior) del primer elemento hay que imponer que el momento en ese punto debe ser nulo y, con esa condición, relacionar el giro que se quiere eliminar con los demás grados de libertad del elemento:

$$M_2^{e1} = \frac{6EI}{L^2} v_1^{e1} + \frac{2EI}{L} \theta_1^{e1} - \frac{6EI}{L^2} v_2^{e1} + \frac{4EI}{L} \theta_2^{e1} = 0 \Rightarrow \theta_2^{e1} = -\frac{3}{2L} v_1^{e1} - \frac{1}{2} \theta_1^{e1} + \frac{3}{2L} v_2^{e1} \quad (a)$$

Introduciendo la relación anterior en las ecuaciones de comportamiento del elemento 1 se modifica su matriz de rigidez como se ha explicado en 4.5.1.1, mientras que la del 2 mantiene su forma general dada por la fórmula (4.3.8). De esta forma las matrices de rigidez de ambos elementos, en el sistema de referencia local de cada uno y expresando todas las magnitudes en KN y m, quedan así:

$$K^1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 & 0 & 0 & -240 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 2.4 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 2.4 & 9.6 & 0 & -2.4 & 0 \\ -240 & 0 & 0 & 240 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & -2.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \quad (b)$$

$$K^2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 & 0 & 0 & -240 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 4.8 & 0 & -2.4 & 4.8 \\ 0 & 4.8 & 12.8 & 0 & -4.8 & 6.4 \\ -240 & 0 & 0 & 240 & 0 & 0 \\ 0 & -2.4 & -4.8 & 0 & 2.4 & -4.8 \\ 0 & 4.8 & 6.4 & 0 & -4.8 & 12.8 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Por su parte, al haber condensado el grado de libertad del elemento 1, que está descargado, el vector de esfuerzos de empotramiento del elemento 2 no sufre ninguna modificación y queda igual que el utilizado en el ejemplo 4.4-3.

$$\mathbf{p}_{emp}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 KN \\ 8 KNm \\ 0 \\ 12 KN \\ -8 KNm \end{bmatrix}$$

El ensamblaje de las matrices de rigidez y los vectores de cargas elementales, y la posterior imposición de las condiciones de empotramiento en los nudos 1 y 3, conducen a un sistema de ecuaciones que, en su forma general, es idéntico al planteado en el ejemplo 4.4-3:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{eq}^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Únicamente hay que modificar los términos afectados por el proceso de condensación estática de la matriz del elemento 1 que, nuevamente, debe expresarse en el sistema de coordenadas global:

$$\mathbf{K}_{22,G}^1 = \mathbf{R}_N \mathbf{K}_{22}^1 \mathbf{R}_N^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de forma que el sistema de ecuaciones del problema resulta ser el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{3EI}{L^3} + \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \mathbf{0} & 0 & \frac{6EI}{L^2} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}_x^2 \\ \mathbf{u}_y^2 \\ \theta_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}qL \\ -\frac{1}{12}qL^2 \end{bmatrix} \quad (c)$$

Desarrollando y resolviendo el sistema de ecuaciones (c):

$$\begin{cases} \left(\frac{EA}{L} + \frac{3EI}{L^3}\right)u_x^2 = 0 \\ \left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L}\right)u_y^2 + \frac{6EI}{L^2}\theta_z^2 = -\frac{1}{2}qL \\ \frac{6EI}{L^2}u_y^2 + \frac{4EI}{L}\theta_z^2 = -\frac{1}{12}qL^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L}\right)u_y^2 + \frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{qL^2}{48EI} - \frac{3}{2L}u_y^2\right) = -\frac{1}{2}qL \\ \theta_z^2 = -\frac{qL^2}{48EI} - \frac{3}{2L}u_y^2 \end{cases}$$

se obtienen los siguientes resultados:

$$u_x^2 = 0 \quad u_y^2 = -\frac{\frac{3}{8}qL}{\frac{3EI}{L^3} + \frac{EA}{L}} = -3.741 \cdot 10^{-5} m$$

$$\theta_z^2 = -\frac{qL^3}{48EI} + \frac{\frac{9}{16}q}{\frac{3EI}{L^3} + \frac{EA}{L}} = -6.110 \cdot 10^{-4} rad$$

donde θ_z^2 es el giro del nudo inicial del elemento 2 (θ_1^{e2}) puesto que el del elemento 1 se había condensado. Para calcularlo ahora hay que sustituir en la ecuación (a) los desplazamientos nodales ya conocidos, de manera que resulta ser nulo:

$$\theta_2^{e1} = -\frac{3}{2L}v_1^{e1} - \frac{1}{2}\theta_1^{e1} + \frac{3}{2L}v_2^{e1} = -\frac{3}{2L}u_x^1 - \frac{1}{2}\theta_z^1 + \frac{3}{2L}u_x^2 = 0$$

Como en el ejemplo 4.4-3, los esfuerzos en los extremos de las barras se calculan multiplicando las matrices de rigidez elementales (b) por los desplazamientos de los nodos en los sistemas de referencia locales y sumando los esfuerzos de empotramiento en el elemento 2:

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{u}^{e1} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_1^1 \\ V_1^1 \\ M_1^1 \\ N_2^1 \\ V_2^1 \\ M_2^1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.741 \cdot 10^{-5} m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.9776 KN \\ 0 \\ 0 \\ -8.9776 KN \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_{emp}^2 + \mathbf{K}^2 \mathbf{u}^{e2} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_1^2 \\ V_1^2 \\ M_1^2 \\ N_2^2 \\ V_2^2 \\ M_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 KN \\ 8 KNm \\ 0 \\ 12 KN \\ -8 KNm \end{bmatrix} + \mathbf{K}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -3.741 \cdot 10^{-5} m \\ -6.110 \cdot 10^{-4} rad \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.9776 KN \\ 0 \\ 0 \\ 15.022 KN \\ -12.090 KNm \end{bmatrix}$$

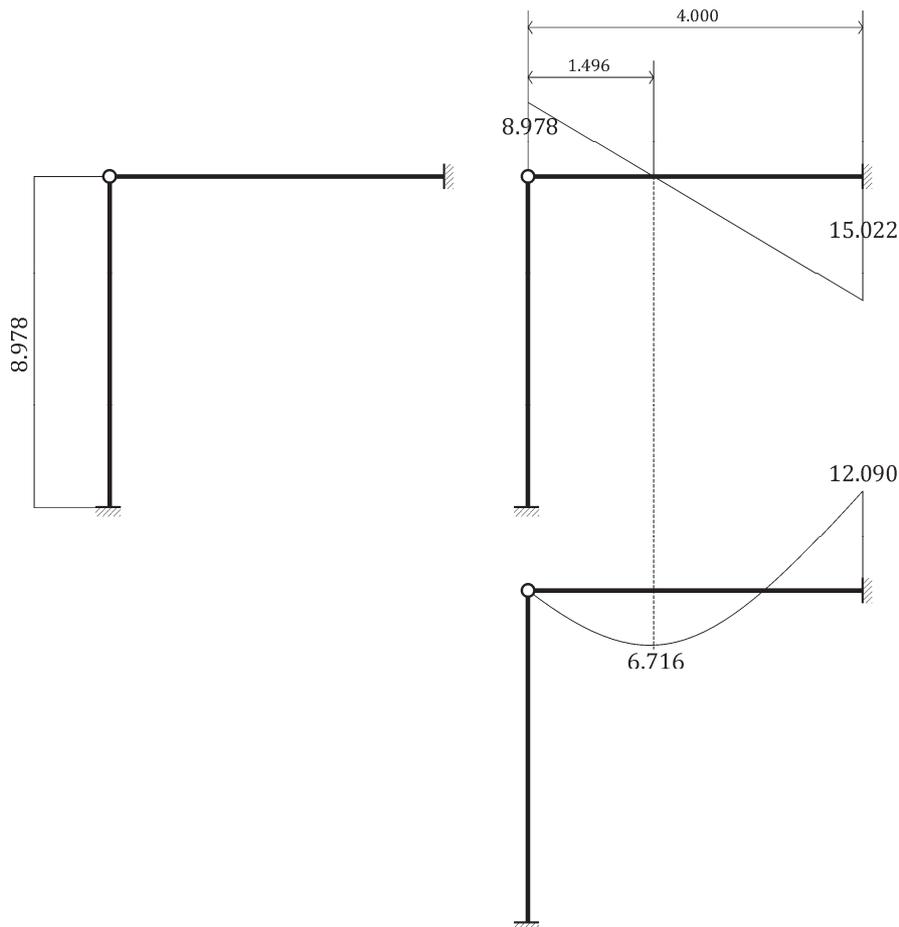


figura 4.26

En este caso, el cortante y el flector de la primera barra son nulos y su axil constante, mientras que en el segundo elemento el axil es también nulo y el cortante y el flector varían respectivamente según:

$$V_y^2 = -8.9776 + 6x \text{ KN} \quad M_z^2 = 8.9776x - \frac{1}{2}6x^2 \text{ KNm}$$

de forma que el máximo valor positivo del momento flector se da en la sección situada en $x = 8.9776/6 = 1.496 \text{ m}$ y vale:

$$M_{z,máx}^2 = 8.9776 \cdot 1.496 - 3 \cdot 1.496^2 = 6.716 \text{ KNm}$$

Los diagramas de esfuerzos resultantes se muestran en la figura 4.26.

A continuación se va a resolver nuevamente el problema pero eliminando ahora por condensación estática el giro del primer nudo (el izquierdo) del segundo elemento, que está cargado. Por lo tanto, el vector de esfuerzos elementales debe calcularse teniendo en cuenta los esfuerzos de empotramiento de acuerdo con la fórmula (4.4.9) y la condición de momento nulo en el extremo inicial queda ahora así:

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_{emp}^2 + \mathbf{K}^2 \mathbf{u}^{e2} \Rightarrow M_1^2 = \frac{1}{12}qL^2 + \frac{6EI}{L^2}v_1^{e2} + \frac{4EI}{L}\theta_1^{e2} - \frac{6EI}{L^2}v_2^{e2} + \frac{2EI}{L}\theta_2^{e2} = 0$$

Despejando el giro del extremo izquierdo de la igualdad anterior resulta:

$$\theta_1^{e2} = -\frac{qL^3}{48EI} - \frac{3}{2L}v_1^{e2} - \frac{1}{2}\theta_2^{e2} + \frac{3}{2L}v_2^{e2} \quad (d)$$

Si se sustituye esta expresión del giro en las ecuaciones de comportamiento del segundo elemento se obtienen los siguientes esfuerzos:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2}qL + \frac{12EI}{L^3}v_1 + \frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{qL^3}{48EI} - \frac{3}{2L}v_1 - \frac{1}{2}\theta_2 + \frac{3}{2L}v_2\right) - \frac{12EI}{L^3}v_2 + \frac{6EI}{L^2}\theta_2 = \\ &= \frac{3}{8}qL + \frac{3EI}{L^3}v_1 - \frac{3EI}{L^3}v_2 + \frac{3EI}{L^2}\theta_2 \\ V_2 &= \frac{1}{2}qL - \frac{12EI}{L^3}v_1 - \frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{qL^3}{48EI} - \frac{3}{2L}v_1 - \frac{1}{2}\theta_2 + \frac{3}{2L}v_2\right) + \frac{12EI}{L^3}v_2 - \frac{6EI}{L^2}\theta_2 = \\ &= \frac{5}{8}qL + \frac{3EI}{L^3}v_1 + \frac{3EI}{L^3}v_2 - \frac{3EI}{L^2}\theta_2 \\ M_2 &= -\frac{1}{12}qL^2 + \frac{6EI}{L^2}v_1 + \frac{2EI}{L}\left(-\frac{qL^3}{48EI} - \frac{3}{2L}v_1 - \frac{1}{2}\theta_2 + \frac{3}{2L}v_2\right) - \frac{6EI}{L^2}v_2 + \frac{4EI}{L}\theta_2 = \\ &= -\frac{1}{8}qL^2 + \frac{3EI}{L^2}v_1 - \frac{3EI}{L^2}v_2 + \frac{3EI}{L}\theta_2 \end{aligned}$$

y reescribiendo estas ecuaciones en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} N_1^2 \\ V_1^2 \\ M_1^2 \\ N_2^2 \\ V_2^2 \\ M_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{8}qL \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{8}qL \\ -\frac{1}{8}qL^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{e2} \\ v_1^{e2} \\ \theta_1^{e2} \\ u_2^{e2} \\ v_2^{e2} \\ \theta_2^{e2} \end{bmatrix} \quad (e)$$

Comparando las ecuaciones (e) y (4.4.9), se comprueba que el vector de esfuerzos de empotramiento queda también modificado por el proceso de condensación estática y viene dado por las reacciones en una viga con carga uniformemente distribuida que tenga su extremo inicial apoyado (articulado) y su extremo final empotrado, de manera que ahora la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes del segundo elemento resultan ser, respectivamente:

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 & 0 & 0 & -240 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & -0.6 & 2.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -240 & 0 & 0 & 240 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0.6 & -2.4 \\ 0 & 2.4 & 0 & 0 & -2.4 & 9.6 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \quad (f^2)$$

$$\mathbf{f}_{eq}^{N,2} = -\mathbf{p}_{emp}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{8}qL \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{8}qL \\ \frac{1}{8}qL^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9KN \\ 0 \\ 0 \\ -15KN \\ 12KNm \end{bmatrix}$$

mientras que la matriz de rigidez del elemento 1 es la que mantiene ahora la forma general dada por (4.3.8):

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 & 0 & 0 & -240 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 4.8 & 0 & -2.4 & 4.8 \\ 0 & 4.8 & 12.8 & 0 & -4.8 & 6.4 \\ -240 & 0 & 0 & 240 & 0 & 0 \\ 0 & -2.4 & -4.8 & 0 & 2.4 & -4.8 \\ 0 & 4.8 & 6.4 & 0 & -4.8 & 12.8 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ (f1)}$$

Ensamblando las matrices de rigidez y los vectores de cargas e imponiendo nuevamente las condiciones de apoyo se llega ahora a este sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{eq}^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{EA}{L} + \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}_x^2 \\ \mathbf{u}_y^2 \\ \theta_z^2 \\ \mathbf{u}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{3}{8}qL \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ (g)}$$

De la segunda ecuación de (g) se obtiene directamente u_y^2 y con la tercera se puede poner u_x^2 en función de θ_z^2 :

$$\begin{cases} \left(\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3}\right)u_x^2 + \frac{6EI}{L^2}\theta_z^2 = 0 \\ \left(\frac{3EI}{L^3} + \frac{EA}{L}\right)u_y^2 = -\frac{3}{8}qL \Rightarrow u_y^2 = -\frac{\frac{3}{8}qL}{\frac{3EI}{L^3} + \frac{EA}{L}} = -3.741 \cdot 10^{-5} m \\ \frac{6EI}{L^2}u_x^2 + \frac{4EI}{L}\theta_z^2 = 0 \Rightarrow u_x^2 = -\frac{2L}{3}\theta_z^2 \end{cases}$$

de forma que introduciendo este último resultado en la primera ecuación se calculan u_x^2 y θ_z^2 :

$$-\left(\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3}\right)\frac{2L}{3}\theta_z^2 + \frac{6EI}{L^2}\theta_z^2 = 0 \Rightarrow \theta_z^2 = 0 = u_x^2$$

En esta ocasión es el giro del segundo nudo del elemento 1 (θ_2^{e1}) el que se calcula directamente al resolver el sistema de ecuaciones y, para calcular el del elemento 2, hay que sustituir en la ecuación (d) el resto de los desplazamientos conocidos:

$$\begin{aligned} \theta_1^{e2} &= -\frac{qL^3}{48EI} - \frac{3}{2L}v_1^{e2} - \frac{1}{2}\theta_2^{e2} + \frac{3}{2L}v_2^{e2} = -\frac{qL^3}{48EI} - \frac{3}{2L}u_y^2 - \frac{1}{2}\theta_z^3 + \frac{3}{2L}u_y^3 = -\frac{qL^3}{48EI} + \frac{3}{2L}\frac{\frac{3}{8}qL}{\frac{3EI}{L^3} + \frac{EA}{L}} \\ &\Rightarrow \theta_1^{e2} = -\frac{qL^3}{48EI} + \frac{\frac{9}{16}q}{\frac{3EI}{L^3} + \frac{EA}{L}} = -6.111 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned}$$

Nótese que, como cabía esperar, los resultados obtenidos tanto para los desplazamientos como para los giros de ambos elementos en el nudo 2 son los mismos con independencia de cuál haya sido el grado de libertad condensado para resolver el problema.

Finalmente, para determinar los esfuerzos en los extremos de las barras hay que volver a multiplicar las matrices de rigidez elementales (f) por los correspondientes desplazamientos nodales (en coordenadas locales) y, en el caso del segundo elemento, añadir los esfuerzos de empotramiento de la ecuación (e), con lo que también se llega a los mismos resultados obtenidos al aplicar la condensación estática al primer elemento:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{u}^{e1} &\Rightarrow \begin{bmatrix} N_1^1 \\ V_1^1 \\ M_1^1 \\ N_2^1 \\ V_2^1 \\ M_2^1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.741 \cdot 10^{-5} m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.9776 KN \\ 0 \\ 0 \\ -8.9776 KN \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_{emp}^2 + \mathbf{K}^2 \mathbf{u}^{e2} &\Rightarrow \begin{bmatrix} N_1^2 \\ V_1^2 \\ M_1^2 \\ N_2^2 \\ V_2^2 \\ M_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 KN \\ 0 \\ 0 \\ 15 KN \\ -12 KNm \end{bmatrix} + \mathbf{K}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -3.741 \cdot 10^{-5} m \\ -6.110 \cdot 10^{-4} rad \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.9776 KN \\ 0 \\ 0 \\ 15.022 KN \\ -12.090 KNm \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4.5.1.2. UNIONES FLEXIBLES

En una unión flexible se da una situación similar a la de un nudo con desplazamientos liberados. En este caso también se producen en algunas barras desplazamientos distintos de los del nudo al que están unidas, pero ahora el esfuerzo asociado al grado de libertad independiente no es nulo sino proporcional al valor del desplazamiento. La manera de tratar estas uniones en el método directo de la rigidez es análoga a la de los nudos con desplazamientos liberados: eliminar los grados de libertad independientes mediante condensación estática.

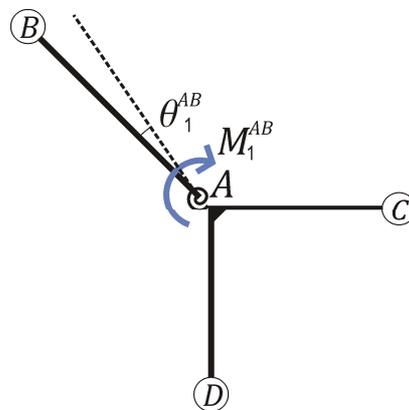


figura 4.27

En un caso como el mostrado en la figura 4.27, la ecuación de equilibrio estático es:

$$M_1 = \frac{6EI}{L^2} v_1 + \frac{4EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} v_2 + \frac{2EI}{L} \theta_2 = k\theta_1 \quad (4.5.9)$$

de manera que, si se pone el grado de libertad independiente en función del resto de los desplazamientos de la barra, resulta:

$$\theta_1 = \frac{1}{k - \frac{4EI}{L}} \left(\frac{6EI}{L^2} v_1 - \frac{6EI}{L^2} v_2 + \frac{2EI}{L} \theta_2 \right) \quad (4.5.10)$$

De forma más general, el procedimiento para modificar la matriz de rigidez del elemento sigue también los mismos pasos. En primer lugar, se reordena el sistema de ecuaciones para agrupar las correspondientes a los resortes elásticos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ \mathbf{f}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{Rk} \\ \mathbf{K}_{kR} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \quad (4.5.11)$$

Ahora los esfuerzos en los resortes son proporcionales a los desplazamientos que experimentan:

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{k} \mathbf{u}_k \quad (4.5.12)$$

siendo \mathbf{k} una matriz diagonal que contiene la rigidez de todos los resortes. A continuación se despeja el valor de los desplazamientos en los resortes:

$$\mathbf{u}_k = (\mathbf{k} - \mathbf{K}_{kk})^{-1} (\mathbf{K}_{kR} \mathbf{u}_R) \quad (4.5.13)$$

y se sustituyen en las ecuaciones correspondientes a los esfuerzos asociados al resto de los grados de libertad (\mathbf{f}_R), de forma que queda:

$$\mathbf{f}_R = \mathbf{K}_{RR} \mathbf{u}_R + \mathbf{K}_{Rk} \mathbf{u}_k = \left[\mathbf{K}_{RR} + \mathbf{K}_{Rk} (\mathbf{k} - \mathbf{K}_{kk})^{-1} \mathbf{K}_{kR} \right] \mathbf{u}_R = \hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_R \quad (4.5.14)$$

4.5.2. APOYOS ESPECIALES

4.5.2.1. APOYOS FLEXIBLES

Se denominan apoyos flexibles aquéllos en los que la reacción es proporcional al desplazamiento en el grado de libertad correspondiente. Este problema se puede tratar de dos formas alternativas. Una primera solución consiste en considerar que los elementos que descansan en el apoyo están conectados mediante una unión flexible e impedir normalmente el desplazamiento nodal, que ahora quedaría adscrito directamente al apoyo fijo. Otra, que da lugar a un procedimiento más sencillo, es introducir en el sistema de ecuaciones global de la estructura el valor conocido de la reacción. Por ejemplo, para un apoyo elástico como el de la figura 4.28, reordenando la matriz de rigidez del elemento AB queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{Rk} \\ \mathbf{K}_{kR} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_k \\ v_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ 0 \\ -kv_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.15)$$

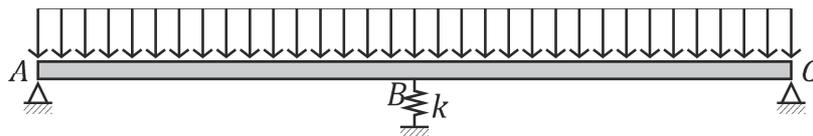


figura 4.28

Este método da lugar a la aparición de una incógnita en el segundo miembro de la ecuación. Sin embargo, la ecuación (4.5.15) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{Rk} \\ \mathbf{K}_{kR} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ u_k \\ v_k \\ \theta_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ -kv_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{Rk} & & \\ & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ \mathbf{K}_{kR} & K_{54} & K_{55} + k & K_{56} \\ & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ u_k \\ v_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.16)$$

de donde se deduce inmediatamente que el tratamiento de los apoyos flexibles se reduce a añadir la constante de rigidez del apoyo en la posición correspondiente de su grado de libertad en la matriz de rigidez global.

4.5.2.2. APOYOS NO CONCORDANTES

Se denomina apoyos no concordantes a aquellos que imponen una restricción al movimiento en una dirección que no coincide con el sistema global de coordenadas. El tratamiento de este tipo de apoyos consiste simplemente en plantear un cambio de coordenadas del vector de grados de libertad del nudo en cuestión desde el sistema de referencia global, en el que se expresa el sistema de ecuaciones de la estructura completa, al nodal en el que se conoce la condición de apoyo.

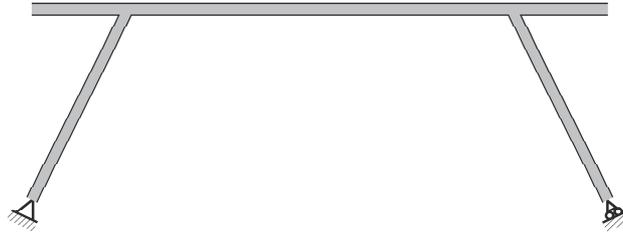


figura 4.29. Pórtico con los pilares inclinados. El apoyo derecho es no concordante.

Si, formalmente, se reordena el sistema de ecuaciones de la estructura (en la práctica se hace directamente sobre el sistema sin reordenar) éste queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GG} & \mathbf{K}_{GN} \\ \mathbf{K}_{NG} & \mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_G \\ \mathbf{u}_{NC,G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_G \\ \mathbf{f}_{NC,G} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{K}_{GG}\mathbf{u}_G + \mathbf{K}_{GN}\mathbf{u}_N = \mathbf{f}_G \\ \mathbf{K}_{NG}\mathbf{u}_G + \mathbf{K}_{NN}\mathbf{u}_{NC,G} = \mathbf{f}_{NC,G} \end{cases} \quad (4.5.17)$$

Realizando a continuación el mencionado cambio de coordenadas sobre el vector de grados de libertad del nudo con el apoyo no concordante y sus reacciones:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{GG}\mathbf{u}_G + \mathbf{K}_{GN}\mathbf{u}_N = \mathbf{f}_G \\ \mathbf{K}_{NG}\mathbf{u}_G + \mathbf{K}_{NN}\mathbf{R}_N\mathbf{u}_{NC,L} = \mathbf{R}_N\mathbf{f}_{NC,L} \Rightarrow \mathbf{R}_N^T\mathbf{K}_{NG}\mathbf{u}_G + \mathbf{R}_N^T\mathbf{K}_{NN}\mathbf{R}_N\mathbf{u}_{NC,L} = \mathbf{f}_{NC,L} \end{cases} \quad (4.5.18)$$

y reconstruyendo después el sistema de ecuaciones se llega a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GG} & \mathbf{K}_{GN} \\ \mathbf{R}_N^T\mathbf{K}_{NG} & \mathbf{R}_N^T\mathbf{K}_{NN}\mathbf{R}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_G \\ \mathbf{u}_{NC,L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_G \\ \mathbf{f}_{NC,L} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}_{est} \tilde{\mathbf{u}}_{est} = \tilde{\mathbf{F}}_{est} \quad (4.5.19)$$

donde la matriz de rigidez y los vectores modificados se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{est} = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{est} \mathbf{R} \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_{est} &= \mathbf{R} \mathbf{u}_{est} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{est} &= \mathbf{R} \mathbf{F}_{est} \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

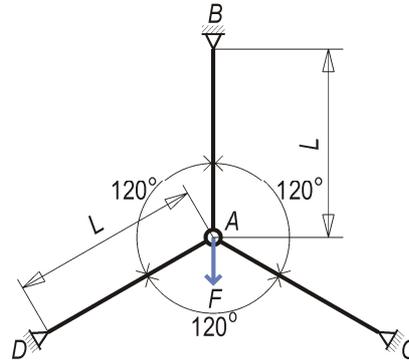
siendo la matriz de cambio de coordenadas:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_N \end{bmatrix} \quad (4.5.21)$$

4.6. EJERCICIOS

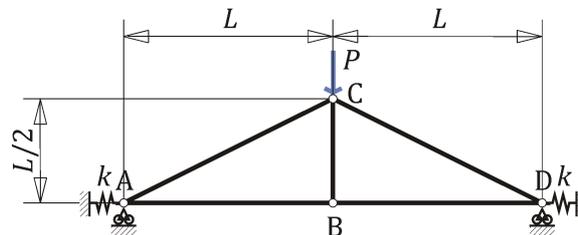
23. Calcular por el método directo de la rigidez los desplazamientos del nudo A y los esfuerzos en las tres barras de la estructura articulada mostrada en la figura de la derecha si la distancia L es de $1m$, la carga P de $100KN$ y las barras son tubos cuadrados #55.4 de acero, con un módulo elástico $E = 210GPa$.

¿Cómo se modifican los resultados anteriores si las barras AD y AC se calientan $25^{\circ}C$ y el coeficiente de dilatación del material es $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^{\circ}C^{-1}$?

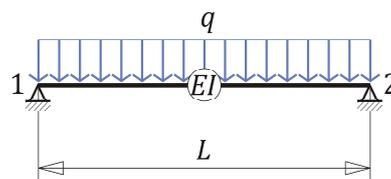
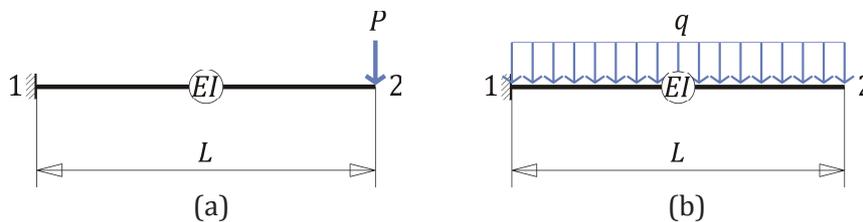


24. La cercha de madera representada en la siguiente figura debe soportar una carga de $100KN$ sobre la cumbrera y tiene una luz $2L = 10m$ y una altura de $2.5m$. Todas las barras tienen una sección rectangular de $24 \times 40cm$. La madera con la que se construye tiene un módulo elástico $E_w = 10GPa$. La rigidez lateral de los pilares sobre los que se apoya se representa mediante sendos apoyos elásticos horizontales cuya constante de rigidez es $k = 500KN/m$. Calcular por el método directo de la rigidez los desplazamientos de los nudos, los esfuerzos en las barras y las reacciones en los apoyos de la estructura.

Para realizar los cálculos tener en cuenta que el problema es simétrico.

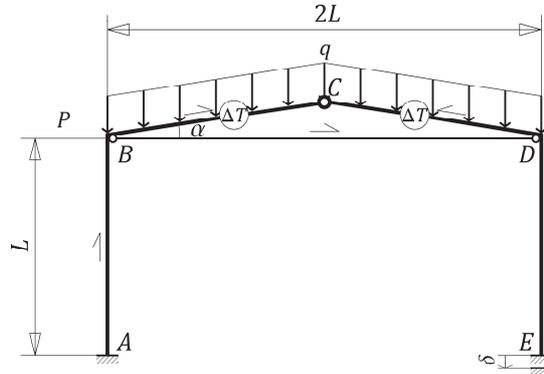


25. Calcular por el método directo de la rigidez los desplazamientos y los esfuerzos en los extremos de las siguientes vigas, si el módulo elástico de su material es E y la inercia de su sección I .



(c)

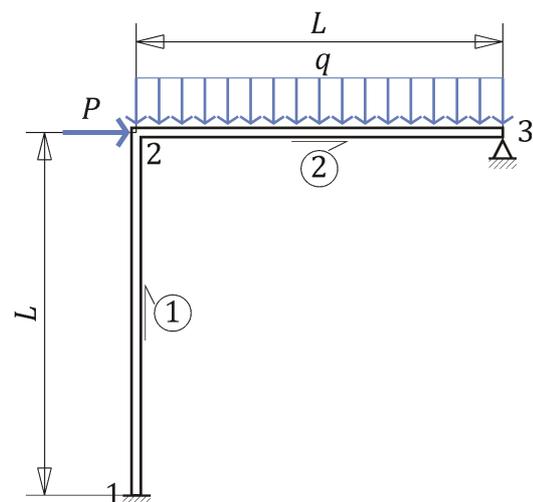
26. En el pórtico de la figura el nudo C es articulado, mientras que en los nudos B y D la barra horizontal se encuentra también articulada, pero las otras dos están rígidamente unidas entre sí. El dintel BCD sufre un incremento de temperatura ΔT y el apoyo E un asentamiento δ . Las flechas junto a cada barra van del nudo inicial al final del elemento, indicando su conectividad. El módulo elástico del material es E , su coeficiente de dilatación térmica α y el área y la inercia de todas las barras A e I respectivamente.



- Escribir las matrices de rigidez de todas las barras de la estructura, salvo la de aquellas cuya matriz de rigidez sea la de pórtico plano.
- Calcular el vector de fuerzas de empotramiento de todos los elementos que soporten acciones sobre ellos.
- Escribir la matriz de rigidez y el vector de cargas de la estructura completa. Para la matriz de rigidez basta con indicar como se ensamblarían las submatrices de cada elemento.
- Imponer las condiciones de contorno de la estructura, de forma que fuese posible calcular los desplazamientos de las uniones a partir del sistema de ecuaciones resultante.

27. Sobre la estructura de madera de la figura actúan una carga concentrada P de 30KN y una carga uniformemente repartida cuya intensidad es $q = 6\text{KN/m}$. La madera con la que está construida tiene un módulo elástico $E_w = 10\text{GPa}$ y las barras tienen 5m de longitud y una sección rectangular de 240mm de anchura y 480mm de canto.

Calcular por el método directo de la rigidez los desplazamientos de los nudos, los esfuerzos máximos en las barras y las reacciones en los apoyos.



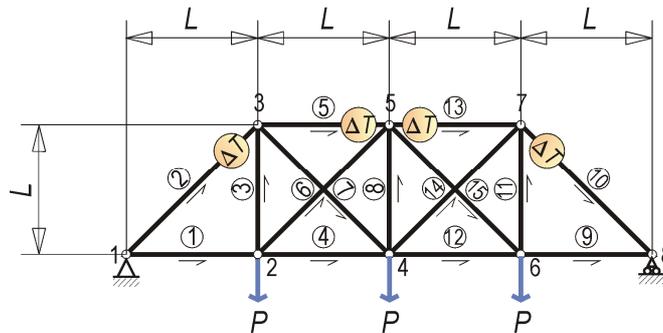
Utilizar la conectividad y la numeración de nudos y elementos mostrada en la figura.

28. Calcular por el método directo de la rigidez los desplazamientos de los nudos y los diagramas de esfuerzos de las barras de la estructura anterior si:

- el empotramiento del nudo 1 sufre un asiento de 5cm .
- a causa de un defecto de fabricación, la longitud del elemento 2 es de 3995mm .

29. Calcular por el método directo de la rigidez los desplazamientos de los nudos y los esfuerzos en todas las barras de la siguiente estructura articulada, si las barras del cordón superior sufren un incremento de temperatura de 40°C , la distancia L es de 1.5m y la carga P de 250KN . Los cordones están formados por dos perfiles UPN200 unidos por sus almas y los montantes y diagonales por dos perfiles angulares L50.6 que dan lugar a una sección en forma de T. El acero con el que se ha construido tiene un módulo elástico $E = 210\text{GPa}$ y un coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Para realizar los cálculos utilizar la numeración de nudos y elementos y la conectividad indicada en la figura y tener en cuenta que el problema es simétrico.



30. Calcular por el método directo de la rigidez los desplazamientos de los nudos y los diagramas de esfuerzos de las barras de un pórtico simple de nudos rígidos de 16m de luz y 8m de altura, sobre cuyo dintel actúan una carga uniformemente distribuida de intensidad $q = 12\text{KN/m}$ y una carga concentrada $P = 50\text{KN}$ situada en el centro del mismo. Los pilares tienen una sección HEB 300 y la viga una IPE 360, ambas de acero con un módulo elástico $E = 210\text{GPa}$.

Para realizar los cálculos utilizar la numeración de nudos y elementos y la conectividad indicada en la figura y tener en cuenta que el problema es simétrico.

