



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Desarrollo de una herramienta de
simulación de flujo granular

Anexos

Autor

Daniel Galindo Usón

Director

Javier Murillo Castarlenas

Escuela de Ingeniería y Arquitectura
2015



DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD

(Este documento debe acompañar al Trabajo Fin de Grado (TFG)/Trabajo Fin de Máster (TFM) cuando sea depositado para su evaluación).

D./D^a. Daniel Galindo Usón

con nº de DNI 77135793-A en aplicación de lo dispuesto en el art.

14 (Derechos de autor) del Acuerdo de 11 de septiembre de 2014, del Consejo de Gobierno, por el que se aprueba el Reglamento de los TFG y TFM de la Universidad de Zaragoza,

Declaro que el presente Trabajo de Fin de (Grado/Máster)
Grado _____, (Título del Trabajo)
Desarrollo de una herramienta de simulación de flujo granular

es de mi autoría y es original, no habiéndose utilizado fuente sin ser citada debidamente.

Zaragoza, a 6 de septiembre de 2015

Fdo: Daniel G. U.

Índice

| | |
|--|----|
| Anexo I. Resultados del estudio de la ecuación escalar y la ecuación de Burgers | 27 |
| AI.1 Ecuación escalar sin término fuente | 27 |
| AI.1.1 Solución aproximada al problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 > 0$ | 28 |
| AI.1.2 Solución aproximada al problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 < 0$ | 29 |
| AI.1.3 Casos numéricos de ecuación escalar sin término fuente | 29 |
| AI.2 Ecuación escalar con término fuente | 31 |
| AI.2.1 Solución aproximada al problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 > 0$ | 31 |
| AI.2.2 Solución aproximada al problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 < 0$ | 32 |
| AI.2.3 Control del paso del tiempo | 33 |
| AI.2.4 Esquema numérico ecuación escalar con término fuente..... | 33 |
| AI.2.5 Algoritmo aplicado para evitar valores negativos en la solución..... | 34 |
| AI.3 Ecuación de Burgers con término fuente | 35 |
| AI.3.1 Ondas de choque | 36 |
| AI.3.2 Rarefacciones | 36 |
| AI.3.3 Término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo del dominio..... | 37 |
| AI.3.1 Casos numéricos ecuación de Burgers con término fuente..... | 37 |
| Anexo II. Sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas..... | 41 |
| AII.1 Resultados del sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas con término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo..... | 41 |
| AII.2 Solución aproximada al problema de Riemann para el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas | 51 |
| AII.2.1 Solución aproximada al problema de Riemann para flujo subcrítico | 51 |
| AII.2.2 Solución aproximada al problema de Riemann para flujo supercrítico | 52 |
| Bibliografía..... | 55 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| FIGURA AI.1. Ecuación escalar sin término fuente. Volumen de control sobre una celda genérica. | 28 |
| FIGURA AI.2. Ecuación escalar sin término fuente. Solución problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 > 0$ | 28 |
| FIGURA AI.3. Ecuación escalar sin término fuente. Solución problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 < 0$ | 29 |
| FIGURA AI.4. Ecuación escalar . Solución numérica y exacta de los casos 1 y 2 para t=10s... 29 | |
| FIGURA AI.5. Ecuación escalar . Solución numérica y exacta de los casos 3 y 4 para t=10s... 30 | |
| FIGURA AI.6. Ecuación escalar . Solución numérica y exacta de los casos 5 y 6 para t=10s.... 30 | |

| | |
|---|----|
| FIGURA AI.7. Ecuación escalar Con término fuente. Volumen de control sobre una celda genérica..... | 31 |
| FIGURA AI.8. Ecuación escalar con término fuente. Solución problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 > 0$ | 32 |
| FIGURA AI.9. Ecuación escalar con término fuente. Solución problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 > 0$ | 32 |
| FIGURA AI.10. Control del paso de tiempo. Definición de $\Delta t * \gamma \Delta t **$ | 33 |
| FIGURA AI.11. Variación del flujo dentro de una celda del dominio. | 33 |
| FIGURA AI.12. Ecuación de Burgers con término fuente. Solución para $u_l > u_r$ | 36 |
| FIGURA AI.13. Ecuación de Burgers con término fuente. Solución para $u_R > u_L$ | 36 |
| FIGURA AI.14. Ecuación de Burgers con término fuente. Solución numérica del caso 1(izquierda) y caso 2(derecha) de la tabla AI.2 para $t = 15$ s. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-Δ-), y fondo del dominio z (—) | 38 |
| FIGURA AI.15. Ecuación de Burgers con término fuente. Solución numérica del caso 3(izquierda) y caso 4(derecha) de la tabla AI.2 para $t = 15$ s. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-Δ-), y fondo del dominio z (—) | 38 |
| FIGURA AI.16. Ecuación de Burgers con término fuente. Solución numérica del caso 5(izquierda) y caso 6(derecha) de la tabla AI.2 para $t = 15$ s. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-Δ-), y fondo del dominio z (—) | 39 |
| FIGURA AI.17. Ecuación de Burgers con término fuente. Solución numérica del caso 7(izquierda) y cas 8(derecha) de la tabla AI.2 para $t = 15$ s. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-Δ-), y fondo del dominio z (—) | 40 |
| FIGURA AII.1. Rotura de presa. Resultados del caso 1 de la tabla AII.1 para $t = 5$ s. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-▲-), y fondo del dominio z (—)..... | 42 |
| FIGURA AII.2. Rotura de presa. Resultados del caso 2 de la tabla AII.1 para $t = 5$ s. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-▲-), y fondo del dominio z (—)..... | 43 |
| FIGURA AII.3. Rotura de presa. Resultados del caso 3 de la tabla AII.1 para $t = 5$ s. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-▲-), y fondo del dominio z (—)..... | 44 |
| FIGURA AII.4. Rotura de presa. Resultados del caso 4 de la tabla AII.1 para $t = 5$ s. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-▲-), y fondo del dominio z (—)..... | 45 |
| FIGURA AII.5. Rotura de presa. Resultados del caso 5 de la tabla AII.1 para $t = 5$ s. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-▲-), y fondo del dominio z (—)..... | 46 |
| FIGURA AII.6. Rotura de presa. Resultados del caso 6 de la tabla AII.1 para $t = 5$ s. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-▲-), y fondo del dominio z (—)..... | 47 |

| | |
|---|----|
| FIGURA AII.7. Rotura de presa. Resultados del caso 7 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—) y s^c (—▲—), y fondo del dominio z (—). | 48 |
| FIGURA AII.8. Rotura de presa. Resultados del caso 8 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—), s^c (—▲—) y s^{cw} (—Δ—), y fondo del dominio z (—). | 48 |
| FIGURA AII.9. Rotura de presa. Resultados del caso 9 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—), s^c (—▲—) y s^{cw} (—Δ—), y fondo del dominio z (—). | 49 |
| FIGURA AII.10. Rotura de presa. Resultados del caso 10 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—), s^c (—▲—) y s^{cw} (—Δ—), y fondo del dominio z (—). | 50 |
| FIGURA AII.11. Rotura de presa. Resultados del caso 11 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta | 50 |
| (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—), s^c (—▲—) y s^{cw} (—Δ—), y fondo del dominio z (—). | 50 |
| FIGURA AII.12. Solución problema de Riemann para flujo subcrítico $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ | 52 |
| FIGURA AII.13. Solución problema de Riemann para flujo supercrítico $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $u > 0$ | 52 |
| FIGURA AII.14. Solución problema de Riemann para flujo supercrítico $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $u < 0$ | 53 |

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| TABLA A1.1. Parámetros de entrada para los casos numéricos de la ecuación escalar | 29 |
| TABLA AI.2. Parámetros de entrada para los casos numéricos de la ecuación de Burgers con término fuente | 37 |
| TABLA AII.1. Parámetros de entrada para los casos numéricos del sistema de ecuaciones de aguas poco profundas con término fuente debido únicamente a la presión ejercida sobre el fondo | 41 |

Anexo I. Resultados del estudio de la ecuación escalar y la ecuación de Burgers

En este anexo se recogen los resultados del estudio realizado a la ecuación escalar, con y sin término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo, y a la ecuación de Burgers con término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo.

El estudio de estas ecuaciones ha servido como paso previo a la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de las aguas poco profundas, que modela el comportamiento de un flujo granular.

Para la ecuación escalar sin término fuente, se ha implementado un código que ha permitido realizar casos numéricos para familiarizarse con la solución de problemas de Riemann, y para comprender la influencia del parámetro de estabilidad, CFL .

El estudio de la ecuación escalar con término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo ha permitido comprender, cómo el término fuente genera estados intermedios, u^* y u^{**} , en la solución. Esto ha permitido estudiar y desarrollar un código para resolver la ecuación de Burgers, que es un caso particular de la ecuación escalar con término fuente, como se explicará más adelante.

El estudio de la ecuación de Burgers ha sido de gran importancia como paso previo al estudio del sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas con término fuente, para comprender que es necesario aplicar controles a la herramienta de simulación, para evitar que en la solución aparezcan calados negativos, la fricción sea excesiva, o que el paso de tiempo sea excesivamente pequeño.

AI.1 Ecuación escalar sin término fuente

La ecuación escalar (AI.1) permite modelar la variación de una variable escalar, u , de un flujo en el espacio y en el tiempo. Para los casos estudiados, la variable u , representa la velocidad longitudinal promediada en z . El primer término de la ecuación es la derivada local de la velocidad, y representa la variación de la velocidad en el tiempo. El segundo término es la derivada convectiva del flujo estudiado, $f(u)$, el cual depende de la velocidad y representa la evolución del flujo en el espacio.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (AI.1)$$

Esta ecuación es diferencial no lineal en derivadas parciales, por lo que para poder obtener una solución aproximada, $\hat{u}(x, t)$, se le aplica una linealización de tipo Roe [13], definiendo un valor propio, $\tilde{\lambda}_{i+1/2}$, que representa la velocidad de propagación de una onda .

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \tilde{\lambda}_{i+1/2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = 0 \quad (AI.2)$$

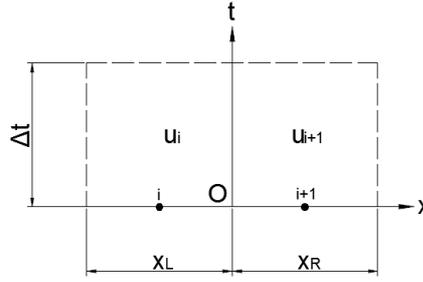


FIGURA AI.1. ECUACIÓN ESCALAR SIN TÉRMINO FUENTE. VOLUMEN DE CONTROL SOBRE UNA CELDA GENÉRICA.

Para resolver la ecuación se recurre al método de los volúmenes finitos [12]. El dominio del problema se divide en celdas computacionales, Ω_i , y se integra la ecuación (AI.2) para el volumen de control mostrado en la figura AI.1, llegando a la relación integral (AI.4).

$$\int_{x_L}^{x_R} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \tilde{\lambda}_{i+1/2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) dx dt = 0 \quad (AI.3)$$

$$\int_{x_L}^{x_R} \hat{u}(x, t = \Delta t) dx = (x_R u_{i+1} + x_L u_i) - \tilde{\lambda}_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i) \Delta t \quad (AI.4)$$

Para obtener el valor promediado de la velocidad, u_i^n , para cada celda que es lo que interesa, se aplica el teorema de Godunov [8], que se presenta en la siguiente expresión.

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \hat{u}(x, t = \Delta t) dx \quad (AI.5)$$

A continuación se presenta la solución aproximada al problema de Riemann, $\hat{u}(x, t)$, para la ecuación escalar sin término fuente, en función de si la velocidad de propagación de la onda, $\tilde{\lambda}_{i+1/2}$, es positiva o negativa.

AI.1.1 Solución aproximada al problema de Riemann para $\tilde{\lambda}_{i+1/2} \geq 0$

La solución aproximada se calcula mediante el método de Godunov, promediando el valor de la velocidad, u , entre las posiciones $x = 0$ y $x = \tilde{\lambda}_{i+1/2} \Delta t$, como se muestra en la figura AI.2. Un hecho derivado de la ausencia del término fuente es que no aparece un estado intermedio, u_{i+1}^* , en la solución.

$$\hat{u}(x, t) = \begin{cases} u_i & \text{if } x < 0 \\ u_i & \text{if } 0 < x < \tilde{\lambda}_{i+1/2} t \\ u_{i+1} & \text{if } x > \tilde{\lambda}_{i+1/2} t \end{cases} \quad (AI.6)$$

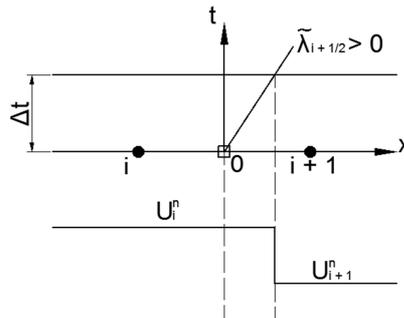


FIGURA AI.2. ECUACIÓN ESCALAR SIN TÉRMINO FUENTE. SOLUCIÓN PROBLEMA DE RIEMANN PARA $\tilde{\lambda}_{i+1/2} > 0$.

AI.1.2 Solución aproximada al problema de Riemann para $\tilde{\lambda}_{i+1/2} < 0$

En este caso, la solución se calcula aplicando el método de Godunov, entre las posiciones mostradas en la figura AI.3, que son $x = -\tilde{\lambda}_{i+1/2}\Delta t$ y $x = 0$. Del mismo modo, la ausencia del término fuente provoca que no aparezca un estado intermedio, u_{i+1}^{**} , en la solución.

$$\hat{u}(x, t) = \begin{cases} u_i & \text{if } x < \tilde{\lambda}_{i+1/2} t \\ u_{i+1} & \text{if } \tilde{\lambda}_{i+1/2} t < x < 0 \\ u_{i+1} & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (AI.7)$$

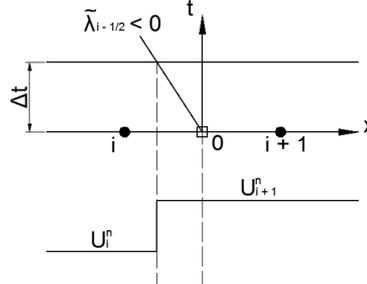


FIGURA AI.3. ECUACIÓN ESCALAR SIN TÉRMINO FUENTE. SOLUCIÓN PROBLEMA DE RIEMANN PARA $\tilde{\lambda}_{i+1/2} < 0$.

AI.1.3 Casos numéricos de ecuación escalar sin término fuente

Con el código implementado para resolver la ecuación escalar sin término fuente, se han realizado una serie de casos para verificar su correcto funcionamiento; comparando la solución numérica con la solución aproximada para cada caso. Los parámetros de entrada de cada caso se recogen en la tabla AI.1, de forma que la solución numérica de cada caso se ha calculado para diferentes valores del parámetro CFL, para ver sus efectos sobre la solución.

| Caso | $\tilde{\lambda}$ | u_L | u_R |
|------|-------------------|-------|-------|
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 2 |
| 5 | -1 | 1 | 2 |
| 6 | -1 | 2 | 1 |

TABLA AI.1. PARÁMETROS DE ENTRADA PARA LOS CASOS NUMÉRICOS DE LA ECUACIÓN ESCALAR

El número de celdas utilizado para resolver estos casos es de 100, con una distancia entre celdas de 1m, y un tiempo de simulación de 10 segundos. A continuación, se presentan las soluciones numéricas a los casos recogidos en la tabla AI.1.

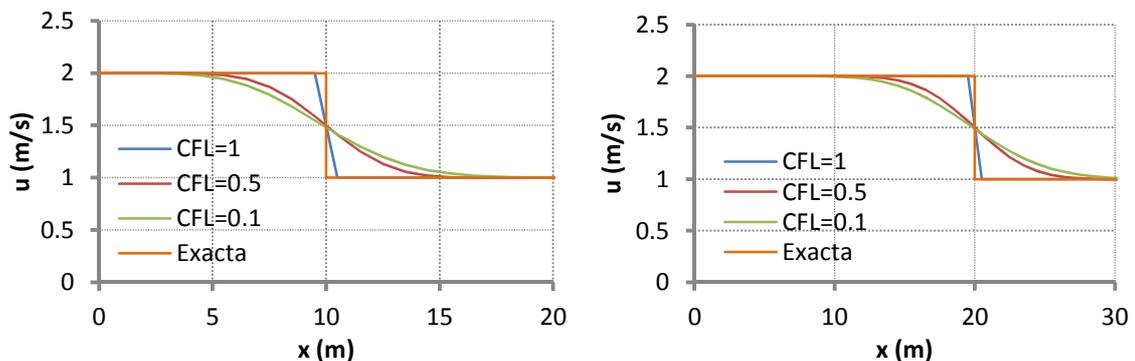


FIGURA AI.4. ECUACIÓN ESCALAR. SOLUCIÓN NUMÉRICA Y EXACTA DE LOS CASOS 1 Y 2 PARA T=10S.

Los resultados de los casos 1 y 2 representan ondas de choque, con la diferencia que la velocidad de propagación de onda del caso 2 es doble a la del caso 1, por lo que recorre el doble de espacio en el mismo tiempo. La influencia del parámetro CFL sigue la misma tendencia en ambos casos, de forma que cuanto más cercano sea a 1, más se asemeja a la solución aproximada; y si baja por debajo de 1 se suaviza la discontinuidad de la solución.

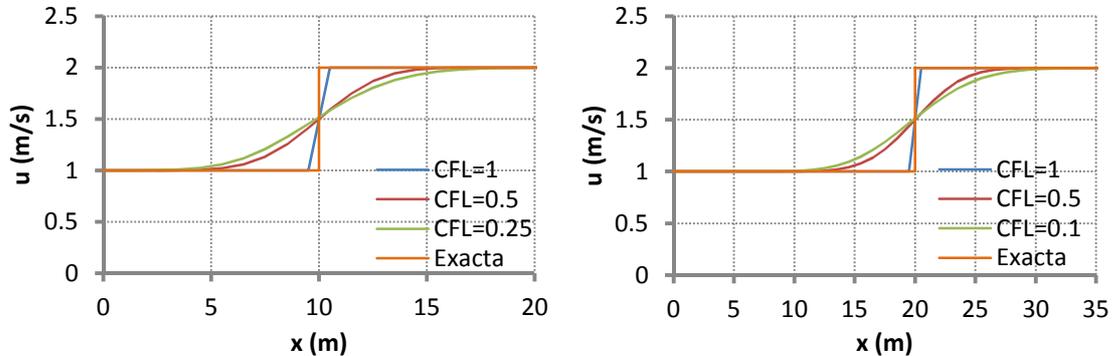


FIGURA AI.5. ECUACIÓN ESCALAR. SOLUCIÓN NUMÉRICA Y EXACTA DE LOS CASOS 3 Y 4 PARA T=10S.

Los resultados de los casos 3 y 4 son ondas de choque con la peculiaridad de que la discontinuidad en su velocidad pasa de ser de 1 m/s a 2 m/s. Además la onda del caso 4 recorre el doble de distancia para el mismo tiempo. La tendencia de la solución causada por la variación del CFL sigue siendo la misma que la de los casos 1 y 2.

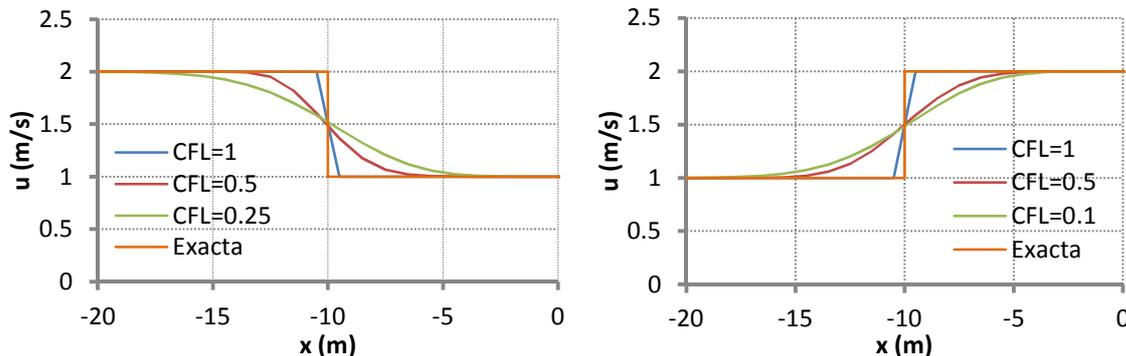


FIGURA AI.6. ECUACIÓN ESCALAR. SOLUCIÓN NUMÉRICA Y EXACTA DE LOS CASOS 5 Y 6 PARA T=10S.

Las ondas de los casos 5 y 6 viajan a la misma velocidad, y por lo tanto para el mismo tiempo recorren la misma distancia. La diferencia está en que la discontinuidad en la velocidad de la onda del caso 5 pasa de un valor de 1 m/s a 2 m/s, mientras que la del caso 6 pasa de tener un valor de 2 m/s a 1m/s; lo cual es debido a que las condiciones iniciales, u_L y u_R , eran contrarias. La influencia del CFL en la solución sigue la misma tendencia que en los casos anteriores.

AI.2 Ecuación escalar con término fuente

A la ecuación escalar se le añade un término fuente que modela la presión hidrostática ejercida sobre el fondo del dominio.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = s \quad (AI.8)$$

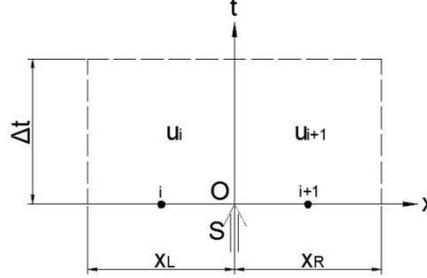


FIGURA AI.7. ECUACIÓN ESCALAR CON TÉRMINO FUENTE. VOLUMEN DE CONTROL SOBRE UNA CELDA GENÉRICA.

Nuevamente, se linealiza definiendo un valor propio, $\tilde{\lambda}_{i+1/2}$, se divide el dominio del problema en celdas computacionales, Ω_i , y se integra la ecuación (AI.9) para el volumen de control mostrado en la figura AI.7, llegando a la relación integral (AI.11).

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = s \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \tilde{\lambda}_{i+1/2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = s \quad (AI.9)$$

$$\int_{x_L}^{x_R} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \tilde{\lambda}_{i+1/2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) dx dt = \int_{x_L}^{x_R} \int_0^{\Delta t} s dx dt \quad (AI.10)$$

$$\int_{x_L}^{x_R} u(x, t = \Delta t) dx = (x_R u_{i+1} + x_L u_i) - [f_{i+1}(u_{i+1}) - f_i(u_i)] \Delta t - \Delta t \bar{s} \quad (AI.11)$$

Del mismo modo que antes el valor promediado de la velocidad, u_i^n , para cada celda, se obtiene aplicando el teorema de Godunov (AI.5) entre la posición de partida de la onda y la posición a la que ha llegado la onda tras un tiempo igual al paso de tiempo. La presencia del término fuente genera una discontinuidad en $x=0$, dando lugar a la aparición de estados intermedios, u_i^* y u_i^{**} , dependiendo de si la velocidad de propagación de la onda es positiva o negativa. La solución representa dos ondas de choque, una de ellas es estacionaria y esta fija en $x=0$, y la otra se propaga a una velocidad $\tilde{\lambda}_{i+1/2}$. A continuación se presenta la solución aproximada, $\hat{u}(x, t)$, en función del signo de la velocidad de propagación de onda, $\tilde{\lambda}_{i+1/2}$.

AI.2.1 Solución aproximada al problema de Riemann para $\tilde{\lambda}_{i+1/2} > 0$

Aplicando el teorema de Godunov se obtiene el valor promedio, u_{i+1}^* , que se observa en la figura AI.8. Definiendo $\theta_{i+1/2}$, y operando se llega a la expresión final del estado intermedio (AI.14). Finalmente en (AI.15) se recoge la solución.

$$u_{i+1}^* = u_i + \left(\frac{\bar{s}}{\tilde{\lambda}} \right)_{i+1/2} \quad (AI.12)$$

$$\theta_{i+1/2} = 1 - \frac{\bar{s}_{i+1/2}}{\delta f} \quad (AI.13)$$

$$u_{i+1}^* = u_{i+1} - (\theta \delta u)_{i+1/2} = u_i + \left(\frac{\bar{s}}{\tilde{\lambda}}\right)_{i+1/2} \quad (AI.14)$$

$$\hat{u}(x, t) = \begin{cases} u_i & x < 0 \\ u_{i+1}^* = u_{i+1} - (\theta \delta u)_{i+1/2} = u_i + \left(\frac{\bar{s}}{\tilde{\lambda}}\right)_{i+1/2} & 0 < x < \tilde{\lambda}_{i+1/2} t \\ u_{i+1} & x > \tilde{\lambda}_{i+1/2} t \end{cases} \quad (AI.15)$$

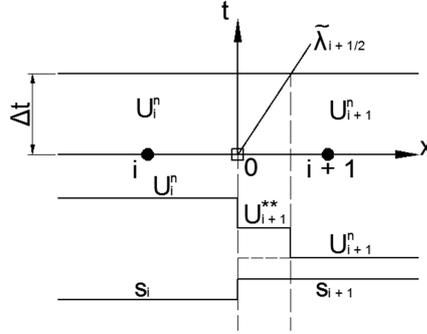


FIGURA AI.8. ECUACIÓN ESCALAR CON TÉRMINO FUENTE. SOLUCIÓN PROBLEMA DE RIEMANN PARA $\tilde{\lambda}_{i+1/2} > 0$.

AI.2.2 Solución aproximada al problema de Riemann para $\tilde{\lambda}_{i+1/2} < 0$

Aplicando el teorema de Godunov entre las posiciones, $x=0$ y $x = -\tilde{\lambda}_{i+1/2}\Delta t$, se obtiene el valor promedio, u_{i+1}^{**} , que se observa en la figura AI.9. Definiendo $\theta_{i+1/2}$, y operando se llega a la expresión final del estado intermedio (AI.17). Finalmente en (AI.18) se recoge la solución.

$$u_i^{**} = u_{i+1} - \left(\frac{\bar{s}}{\tilde{\lambda}}\right)_{i+1/2} \quad (AI.16)$$

$$u_i^{**} = u_i + (\theta \delta u)_{i+1/2} = u_{i+1} - \left(\frac{\bar{s}}{\tilde{\lambda}}\right)_{i+1/2} \quad (AI.17)$$

$$\hat{u}(x, t) = \begin{cases} u_i & x < \tilde{\lambda}_{i+1/2} t \\ u_i^{**} = u_i + (\theta \delta u)_{i+1/2} = u_{i+1} - \left(\frac{\bar{s}}{\tilde{\lambda}}\right)_{i+1/2} & \tilde{\lambda}_{i+1/2} t < x < 0 \\ u_{i+1} & x > 0 \end{cases} \quad (AI.18)$$

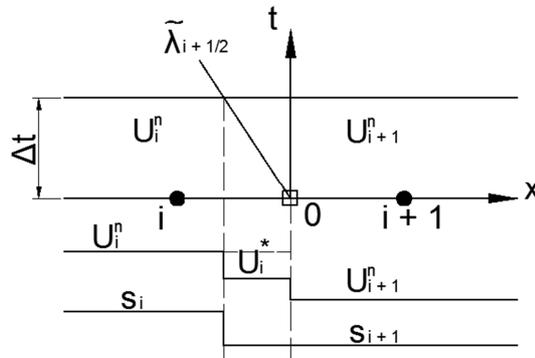


FIGURA AI.9. ECUACIÓN ESCALAR CON TÉRMINO FUENTE. SOLUCIÓN PROBLEMA DE RIEMANN PARA $\tilde{\lambda}_{i+1/2} < 0$.

AI.2.3 Control del paso del tiempo

Es necesario asegurar que el valor promedio de la variable, u_i^n , para cada celda, nunca sea negativo [12]. Esto se consigue asegurando que cada valor del estado intermedio de cada celda, u_i^* y u_i^{**} , sea positivo para un volumen de control marcado por la posición de partida de la onda y la posición que ha recorrido en un tiempo igual al paso de tiempo.

A la vista de las figura AI.10 se define, Δt^{**} , cuando $u_{i+1}^n \neq 0$ y $u_{i+1}^{**} < 0$, y Δt^* , cuando $u_i^n \neq 0$ y $u_i^* < 0$, se llega a las expresiones (AI.19) y (AI.20), eligiéndose el paso de tiempo según (AI.21).

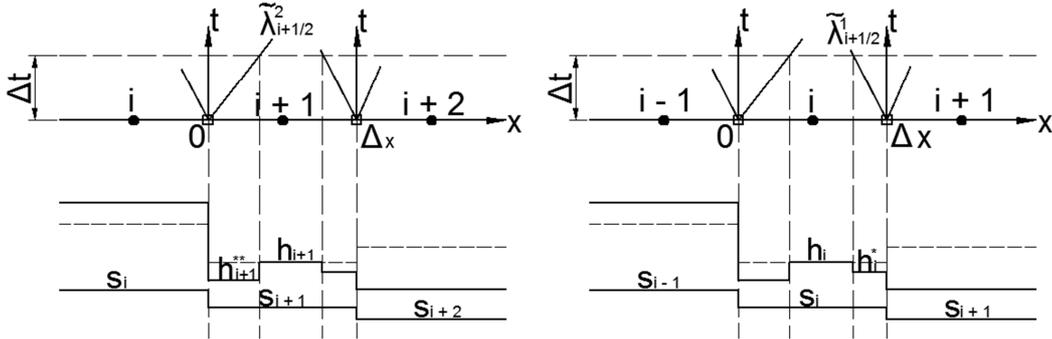


FIGURA AI.10. CONTROL DEL PASO DE TIEMPO. DEFINICIÓN DE Δt^* y Δt^{**} .

$$(\tilde{\lambda}_{i+1/2} \Delta t^{**})u_{i+1}^{**} + \left(\frac{1}{2}\Delta x - \tilde{\lambda}_{i+1/2}\Delta t^{**}\right)u_{i+1}^n \geq 0 \Rightarrow \Delta t^{**} = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\tilde{\lambda}_{i+1/2}} \frac{u_{i+1}^n}{|u_{i+1}^n - u_{i+1}^{**}|} \quad (AI.19)$$

$$(\tilde{\lambda}_{i+1/2} \Delta t^*)u_i^* + \left(\frac{1}{2}\Delta x - \tilde{\lambda}_{i+1/2}\Delta t^*\right)u_i^n \geq 0 \Rightarrow \Delta t^* = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\tilde{\lambda}_{i+1/2}} \frac{u_i^n}{|u_i^n - u_i^*|} \quad (AI.20)$$

$$\Delta t = \min(\Delta t^\lambda, \Delta t^*, \Delta t^{**}), \text{ con } \Delta t^\lambda = CFL \frac{\Delta x}{\max|\tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^2|} \quad (AI.21)$$

AI.2.4 Esquema numérico ecuación escalar con término fuente

Cada celda a resolver en la que ha sido dividido el dominio constituye un problema de Riemann [3], el cual puede resolverse con el esquema numérico que se expone a continuación, que proporciona el valor promedio actualizado de cada celda, u_i^{n+1} , como un promedio de las contribuciones de las variaciones del flujo, δM^\pm mostradas en la figura AI.11, aportadas por los problemas de Riemann de las celdas adyacentes a ella. En la obtención del esquema numérico se parte de (AI.22) y se opera hasta llegar al esquema numérico final (AI.25).

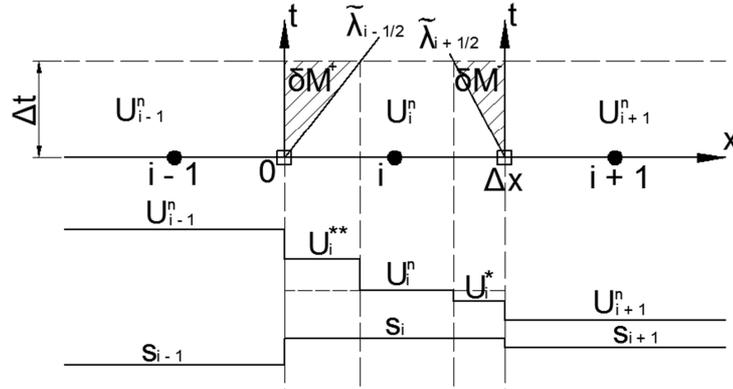


FIGURA AI.11. VARIACIÓN DEL FLUJO DENTRO DE UNA CELDA DEL DOMINIO.

$$u_i^{n+1} \Delta x = u_i^* (\tilde{\lambda}_{i-1/2} \Delta t) + u_i^n (\Delta x - \tilde{\lambda}_{i-1/2} \Delta t + \tilde{\lambda}_{i+1/2} \Delta t) - u_i^{**} (\tilde{\lambda}_{i+1/2} \Delta t) \quad (AI.22)$$

$$u_i^{n+1} \Delta x = u_i^n \Delta x + (u_i^* - u_i^n) (\tilde{\lambda}_{i-1/2} \Delta t) - (u_i^{**} - u_i^n) (\tilde{\lambda}_{i+1/2} \Delta t) \quad (AI.23)$$

$$u_i^{n+1} \Delta x = u_i^n \Delta x + [u_i^u - (\theta \delta u)_{i-1/2} - u_i^n] (\tilde{\lambda}_{i-1/2} \Delta t) - [u_i^u + (\theta \delta u)_{i+1/2} - u_i^n] (\tilde{\lambda}_{i+1/2} \Delta t) \quad (AI.24)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\delta M_{i+1/2}^- - \delta M_{i-1/2}^+] = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\tilde{\lambda}^- \theta \delta u)_{i+1/2} + (\tilde{\lambda}^+ \theta \delta u)_{i-1/2}] \quad (AI.25)$$

AI.2.5 Algoritmo aplicado para evitar valores negativos en la solución

Para los casos en los que una celda tiene valor de la variable escalar, u , no nulo y el de la celda siguiente es nulo, o viceversa, es necesario asegurar que dicho valor como mucho sea nulo, pero nunca sea negativo. Para ello se utiliza un algoritmo [12] el cual dependiendo del valor de la variable escalar y su estado intermedio (figura anterior), se ponen a cero o no, las contribuciones del flujo del esquema (AI.25), como se recoge a continuación.

$$\bullet \quad u_{i+1}^n = 0, u_{i+1}^{**} < 0 \Rightarrow \delta M_{i+1/2}^- = 0 \quad \delta M_{i+1/2}^+ = 0 \quad (AI.26)$$

$$\bullet \quad u_i^n = 0, U u_i^* < 0 \Rightarrow \delta M_{i+1/2}^- = 0 \quad \delta M_{i+1/2}^+ = 0 \quad (AI.27)$$

$$\bullet \quad \text{Otro caso} \Rightarrow \delta M_{i+1/2}^- = \sum_{m=1}^{N_\lambda} (\tilde{\lambda}^- \theta \alpha \tilde{e})^m \quad \delta M_{i+1/2}^+ = \sum_{m=1}^{N_\lambda} (\tilde{\lambda}^+ \theta \alpha \tilde{e})^m \quad (AI.28)$$

AI.3 Ecuación de Burgers con término fuente

Es una ecuación que se deriva de la ecuación escalar, imponiendo la condición (AI.29), de manera que la forma de la función que representa el flujo depende de la variable escalar u , en este caso es conocida. Además, incorpora un término fuente, s , que modela la presión hidrostática ejercida sobre el fondo del dominio. Dicha presión hidrostática es proporcional a la distancia existente a la superficie libre. Sustituyendo la expresión (AI.29) y la expresión del término fuente (AI.30), en la ecuación escalar, donde la coordenada z representa la altura del fondo del dominio, se obtiene la ecuación de Burgers [12] (AI.31).

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad (\text{AI. 29})$$

$$s = -u \frac{\partial z(x)}{\partial x} \quad (\text{AI. 30})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = -u \frac{\partial z(x)}{\partial x} \quad (\text{AI. 31})$$

La presencia del término fuente conduce a una discontinuidad en $x=0$, que provoca de nuevo la aparición de un estado intermedio, u_{i+1}^* , de la variable u . Este estado intermedio se puede calcular a partir de solución estacionaria de la ecuación de Burgers, para el volumen de control mostrado en la figura AI.7.

$$\int_{x_L}^{x_R} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} - s \right) dx dt = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx - \int s dx = 0 \quad (\text{AI. 32})$$

$$\int \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx = f(u^*) - f(u_L) \quad (\text{AI. 33})$$

$$\bar{s} = \int s dx = - \int \bar{u} \frac{\partial z}{\partial x} dx = - \frac{(u_i + u^*)}{2} \delta z \quad (\text{AI. 34})$$

Reagrupando los términos de la ecuación se obtiene (A.I.36), y operando se llega a la expresión final (AI.37) que permite calcular el estado intermedio, u^* .

$$f(u^*) - f(u_L) - \bar{s} = 0 \Rightarrow \frac{(u^* - u_L)(u^* + u_L)}{2} = \frac{-(u^* + u_L)}{2} \delta z \quad (\text{AI. 35})$$

$$u^* = u_L - \delta z = u_L - \frac{u_L \delta z}{u_L} = u_L \left(1 - \frac{\delta z}{u_L} \right) \quad (\text{AI. 36})$$

$$u^* = u_L \xi, \quad \text{con } \xi = 1 - \frac{\delta z}{u_L} \quad (\text{AI. 37})$$

La otra discontinuidad, moviéndose a una velocidad, a , debe satisfacer la condición de salto de Rankine-Hugoniot (RH) [12], recogida en la expresión (AI.38), que conlleva una velocidad de propagación de onda, a (AI.40).

$$(RH): f(u_R) - f(u^*) = a(u_R - u^*) \quad (\text{AI. 38})$$

$$\frac{u_R^2 - (u^*)^2}{2} = a(u_R - u^*) \Rightarrow \frac{(u_R - u^*)(u_R + u^*)}{2} = a(u_R - u^*) \quad (\text{AI. 39})$$

$$a = \frac{1}{2}(u_R + u^*) \quad (AI.40)$$

El paso de tiempo se controlará del mismo modo que en la ecuación escalar con término fuente y se aplicará el algoritmo expuesto en la sección AI.2.5 que asegura que en la solución no se obtengan valores promedio negativos de la variable u . A continuación se presentan las soluciones exactas a los problemas de Riemann para la ecuación de Burgers con término fuente atendiendo al tipo de ondas que pueden aparecer.

AI.3.1 Ondas de choque

Como se muestra en la figura AI.12, si la velocidad u_L es mayor a la velocidad u_R , la solución exacta al problema de Riemann son dos ondas de choque. Una de estas ondas permanece fija en $x=0$ y es generada por el término fuente, y la otra viaja con una velocidad de propagación, a . Ambas ondas quedan conectadas por el estado intermedio, u^* , según (AI.37).

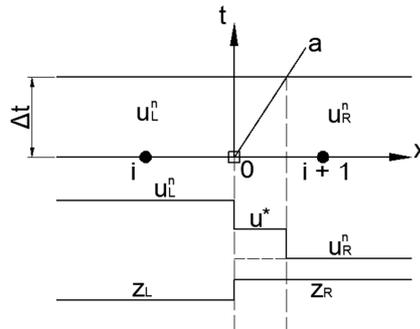


FIGURA AI.12. ECUACIÓN DE BURGERS CON TÉRMINO FUENTE. SOLUCIÓN PARA $u_L > u_R$.

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u^* = u_L \xi & x < at \\ u_R & x > at \end{cases} \quad (AI.41)$$

AI.3.2 Rarefacciones

Cuando la velocidad u_R , es mayor a u_L , se forma una rarefacción que forma un estado, u^* , debido a que la velocidad de propagación de onda cambia entre los estados intermedios, u_L^* y u_R^* . Por otro lado, la onda estacionaria fija en $x=0$ debida al término fuente sigue apareciendo. En la siguiente expresión se expone la solución exacta al problema de Riemann de la imagen AI.13.

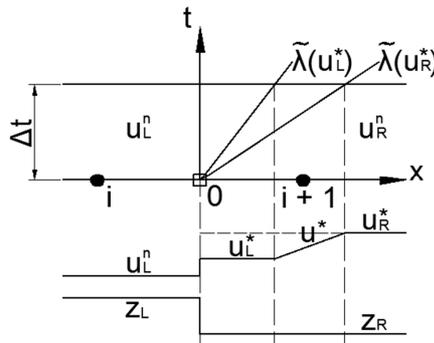


FIGURA AI.13. ECUACIÓN DE BURGERS CON TÉRMINO FUENTE. SOLUCIÓN PARA $u_R > u_L$.

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_L^* = u_L \xi & 0 < x < u_L^* t \\ u^* = \frac{x}{t} & u_L^* t < x < u_R t \\ u_R & x > u_R t \end{cases} \quad (AI.42)$$

AI.3.3 Término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo del dominio

No existe una única forma de implementar el término fuente. Se han tomado tres enfoques, los cuales se compararán entre sí posteriormente para ver con qué enfoque la solución numérica se acerca más a la exacta. Integrando el tercer término de la ecuación de Burgers, que representa el término fuente, se logra el equilibrio de la fuerza ejercida por la presión hidrostática sobre el fondo, obteniéndose el enfoque, s^a . En cambio, en los enfoques s^b y s^c , no se logra el equilibrio total. Dichos enfoques del término fuente se presentan a continuación.

$$S_{i+1/2}^a = -\frac{1}{2} (u_i + u_{i+1})(z_{i+1} - z_i) \quad (AI.43)$$

$$S_{i+1/2}^b = -u_{i+1}(z_{i+1} - z_i) \quad (AI.44)$$

$$S_{i+1/2}^c = -u_i(z_{i+1} - z_i) \quad (AI.45)$$

AI.3.1 Casos numéricos ecuación de Burgers con término fuente

Para comprobar que la ecuación de Burgers con término fuente se ha programado correctamente, se han realizado una serie de casos que simulan la rotura de una presa, cuya solución numérica será comparada con la solución exacta de dicha ecuación en esos casos.

Para el instante inicial ($t = 0s$) se tienen, en la tabla siguiente, los valores iniciales de los parámetros de entrada de la para cada uno de los casos resueltos. Para un instante de tiempo mayor a $t = 0s$, se produce la rotura de la pared de la presa (situada en la posición $x = 0m$), provocando un cambio de las condiciones del flujo a ambos lados de la misma.

Este cambio de condiciones en el flujo es lo que se ha simulado para un tiempo de 15 segundos y representado en las gráficas siguientes, en las cuales se comparan las soluciones numéricas obtenidas mediante la simulación según los diferentes enfoques del término fuente con la solución exacta.

El dominio tiene una dimensión de 100m y, en la tabla siguiente, como ya se ha comentado, se indican los parámetros necesarios para cada caso. Dichos parámetros son la velocidad a la izquierda y la derecha de la presa (u_L y u_R respectivamente), y la altura del fondo a los lados de la misma (z_L y z_R).

| Caso | u_L (m/s) | u_R (m/s) | z_L (m) | z_R (m) |
|------|-------------|-------------|-----------|-----------|
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0.5 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | -0.5 |
| 3 | 1 | 2 | 0.5 | 0 |
| 4 | 1 | 2 | 0 | 0.5 |
| 5 | 2 | 1 | 0 | 1.5 |
| 6 | 1 | 2 | 1.5 | 0 |
| 7 | 1 | 2 | 0 | 2 |
| 8 | 2 | 0 | 0 | 2.5 |

TABLA AI.2. PARÁMETROS DE ENTRADA PARA LOS CASOS NUMÉRICOS DE LA ECUACIÓN DE BURGERS CON TÉRMINO FUENTE

El parámetro CFL empleado para resolver estos casos tiene un valor de 1, mientras que el número de celdas utilizadas es 100, la distancia de separación entre las mismas es de 1m y el tiempo de simulación 15 segundos. A continuación se han representado las soluciones numéricas a los casos de la tabla anterior junto a sus respectivas soluciones exactas, obtenidas según (A1.41) y (A1.42).

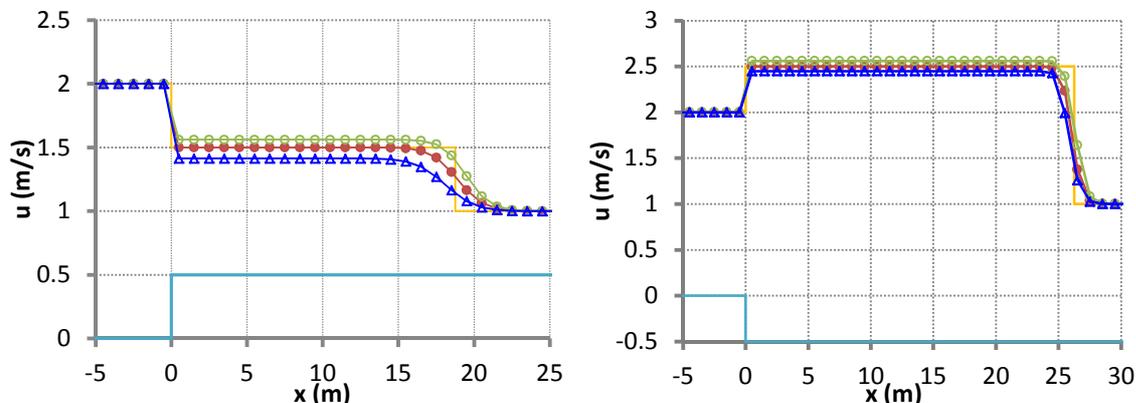


FIGURA A1.14. ECUACIÓN DE BURGERS CON TÉRMINO FUENTE. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL CASO 1(IZQUIERDA) Y CASO 2(DERECHA) DE LA TABLA A1.2 PARA T = 15 S. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES Sa (-●-), Sb (-○-) Y Sc (-△-), Y FONDO DEL DOMINIO Z(—).

En figura A1.14 se puede observar que para el caso 1 la solución representa dos ondas de choque propagándose. La primera de ellas se encuentra en la posición x igual a 0 y es originada por el término fuente, y la segunda de ellas se propaga a una velocidad de $a=1.25\text{m/s}$ (esta velocidad ha sido obtenida a partir de la expresión A1.40). Ambas ondas quedan conectadas por el estado intermedio $u^* = 1.5\text{m/s}$.

La solución del caso 2 representa nuevamente dos ondas de choque, una de las cuales se encuentra fija en x igual a 0 (debido al término fuente), mientras que la otra se propaga a una velocidad de 1.75m/s (calculada nuevamente a partir de la ecuación (A1.40), quedando conectadas ambas por el estado intermedio $u^* = 2.5\text{m/s}$.

Tanto en el caso 1 como en el caso 2, el enfoque del término fuente que más se aproxima a la solución exacta es el denominado S^a , mientras que el enfoque S^b sobreestima el valor de la solución y el S^c lo subestima.

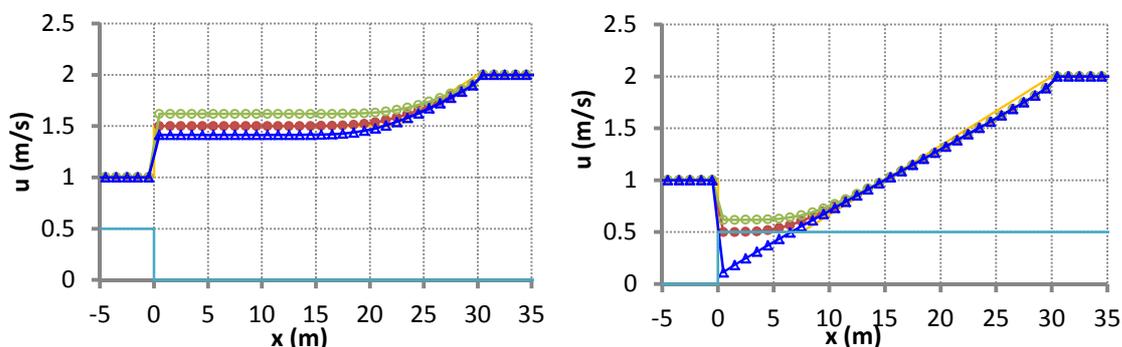


FIGURA A1.15. ECUACIÓN DE BURGERS CON TÉRMINO FUENTE. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL CASO 3(IZQUIERDA) Y CASO 4(DERECHA) DE LA TABLA A1.2 PARA T = 15S. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES Sa (-●-), Sb (-○-) Y Sc (-△-), Y FONDO DEL DOMINIO Z(—).

En los casos 3 y 4 (figura A1.15), aparecen ondas de rarefacción producidas por una mayor velocidad en la parte derecha del dominio que en su parte izquierda ($u_R > u_L$), por lo que la superficie libre del flujo se ve afectada por la diferencia de velocidad existente entre las

diferentes partículas de la superficie libre. Estas rarefacciones se pueden apreciar en las curvas de las gráficas anteriores. Para el caso 3, la rarefacción se encuentra entre las posiciones de $x = 23.25\text{m}$ y $x = 29.25\text{m}$, mientras que en el caso 4, dicha rarefacción está entre las posiciones $x = 8.5\text{m}$ y $x = 29.5\text{m}$.

Nuevamente, se tienen ondas de choque generadas por el término fuente en ambos casos (para $x = 0\text{m}$ en ambos). Respecto a los diferentes enfoques del término fuente, en estos casos se observa que, nuevamente, S^a es el enfoque que mejor adaptación a la solución exacta tiene, mientras que el enfoque S^b se aleja excesivamente de la solución exacta en el caso 4, por lo que no da una solución correcta.

En las gráficas siguientes se representan los resultados obtenidos para los casos 5 y 6.

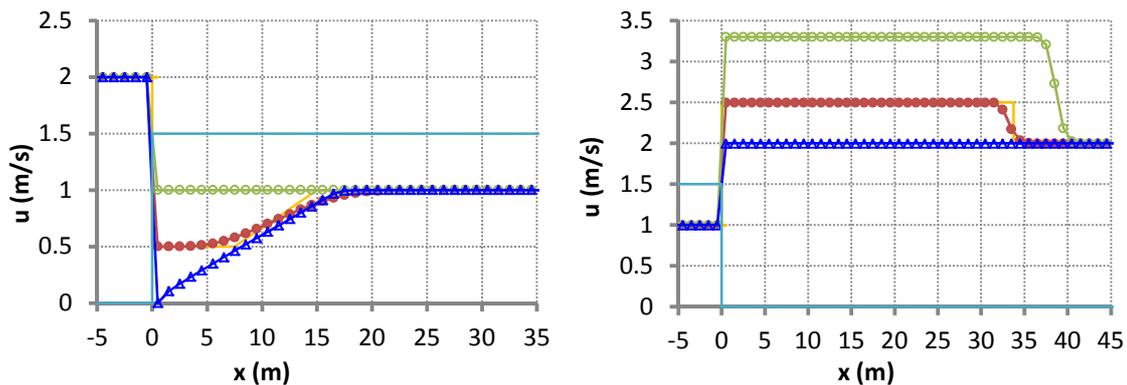


FIGURA AI.16. ECUACIÓN DE BURGERS CON TÉRMINO FUENTE. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL CASO 5(IZQUIERDA) Y CASO 6(DERECHA) DE LA TABLA AI.2 PARA $T = 15\text{s}$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES S^a (-●-), S^b (-○-) Y S^c (-△-), Y FONDO DEL DOMINIO Z (---).

Hasta ahora se ha comprobado que una velocidad a la derecha del dominio mayor que la velocidad en la parte izquierda del mismo provoca la aparición del fenómeno conocido como rarefacción. En estos casos se va a comprobar que no siempre ocurre lo mencionado anteriormente, ya que para la aparición de rarefacción hay otro factor que tiene influencia (además de la velocidad). Dicho factor es la altura del fondo, y por lo tanto el término fuente.

En el caso 5 se tiene una velocidad en la parte derecha del dominio menor que en la parte izquierda, por lo que deberían aparecer dos ondas de choque. Sin embargo, en la gráfica izquierda anterior se aprecia únicamente una onda de choque junto con una rarefacción. Esto se debe a que como la altura del fondo en la parte derecha del dominio es mayor que en la parte izquierda del mismo, el término fuente resultante es negativo (AI.43) lo cual implica un aumento de la velocidad que existía en la parte derecha del dominio, superando la velocidad inicial de la parte izquierda del mismo, provocando así el fenómeno de rarefacción.

Con respecto al caso 6, al observar que la velocidad en la parte derecha del dominio es mayor que la velocidad en la parte izquierda del mismo, es de esperar la aparición de una onda de rarefacción. Sin embargo, en la gráfica derecha anterior se observan dos ondas de choque y no hay presencia de rarefacción. Lo que ocurre en este caso es lo contrario a lo que se daba en el caso número 5, es decir, como el fondo en la parte derecha del dominio tiene menor altura que el fondo en la parte izquierda, el término fuente es positivo, lo que provoca una disminución de la velocidad del lado derecho del dominio por debajo de la velocidad de la parte izquierda, dando como resultado una onda de choque en lugar de una de rarefacción.

En estos casos (5 y 6), la geometría del fondo y las velocidades a ambos lados del dominio guardan la misma relación que lo que ocurría en los casos 1 y 3 respectivamente, pero en estos

últimos casos, la altura del fondo no afecta a la aparición o no de rarefacción, si no que se cumple lo que era de esperar debido a las velocidades a ambos lados del dominio. Esto se debe a que para estos casos, la diferencia de altura del fondo a ambos lados del dominio era de únicamente 0.5m, mientras que en los casos 5 y 6 (en los cuales la rarefacción se ve afectada por el suelo), dicha diferencia de alturas es de 1.5m, por lo que tiene una mayor importancia. Respecto a los diferentes posibles enfoques del término fuente, el que más se aproxima a la solución exacta es nuevamente S^a , mientras que S^b y S^c se alejan excesivamente de la misma.

Por último, se incluyen a continuación los resultados de los dos últimos casos.

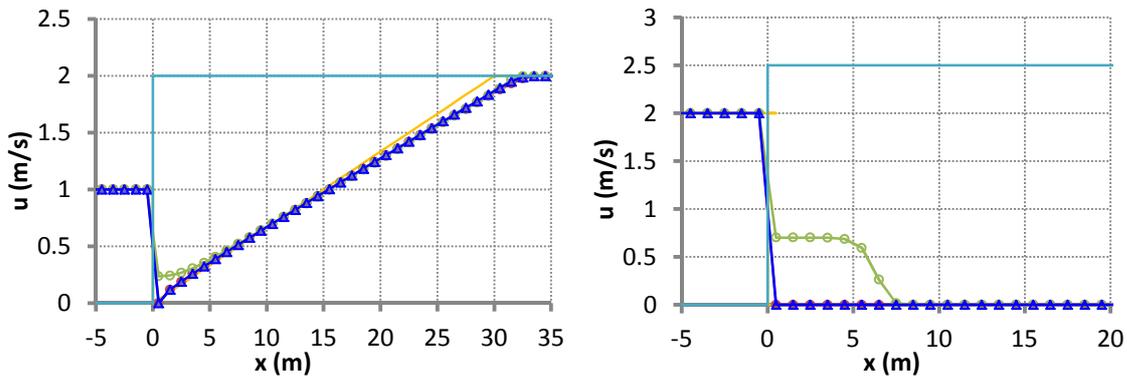


FIGURA AI.17. ECUACIÓN DE BURGERS CON TÉRMINO FUENTE. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL CASO 7(IZQUIERDA) Y CASO 8(DERECHA) DE LA TABLA AI.2 PARA $T = 15S$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES S^a (—●—), S^b (—○—) Y S^c (—△—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

Según la figura AI.17, se puede observar que para el caso 7 se produce una onda de choque y una de rarefacción, de acuerdo a lo comentado en los casos anteriores; mientras que en el caso 8 aparece una única onda de choque, debido a que la velocidad en la parte derecha del dominio es nula. En cuanto a los distintos enfoques estudiados para el término fuente, se puede observar que, nuevamente, el enfoque S^a se aproxima mucho a la solución exacta y además, que el enfoque S^c , proporciona un resultado muy similar al obtenido por el enfoque S^a .

Debido a lo observado en todos los casos anteriores, se puede concluir que la forma más apropiada para el término fuente es aquella en la que se calcula mediante el enfoque S^a , ya que es el enfoque que se aproxima en una mayor medida a la solución exacta de cada caso particular.

Anexo II. Sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas

Como ya se ha comentado en la memoria, en este anexo se presentan los resultados de los casos numéricos realizados sobre el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas, que únicamente incorpora el término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo. Adicionalmente, se presenta la solución aproximada al problema de Riemann para el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas, en función de si el flujo es subcrítico o supercrítico,

All.1 Resultados del sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas con término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo

En este estudio, los casos resueltos son casos de rotura de una presa, a ambos lados de la cual hay un fluido con distintas condiciones de velocidad y calado inicial, así como la altura del fondo. Dicha rotura de la presa se produce para un instante de tiempo inmediatamente posterior a $t = 0s$, la cual está situada en la posición $x = 0m$; y provoca el cambio de los parámetros presentes a ambos lados de la misma.

La tarea a desarrollar en el estudio que se lleva a cabo en este apartado es la de obtener los parámetros resultantes después de la rotura de la presa, así como comparar dichos parámetros obtenidos a partir de soluciones numéricas proporcionadas por la herramienta de simulación con las soluciones exactas de dichos parámetros para cada caso.

| Caso | h_L (m) | h_R (m) | u_L (m/s) | u_R (m/s) | z_L (m) | z_R (m) |
|-------------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | 1 | 0.30179953 | 0 | 0 | 0 | 0.05 |
| 2 | 4 | 0.50537954 | 0.1 | 0 | 0 | 1.5 |
| 3 | 2.5 | 2.49977381 | 1.5 | 0 | 0 | 0.25 |
| 4 | 1.5 | 0.16664757 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| 5 | 1 | 0.04112267 | 0.2 | 0 | 0.25 | 0 |
| 6 | 0.6 | 0.02599708 | 0.35 | 0 | 1.2 | 0 |
| 7 | 1.1 | 0.49457729 | 4.9 | 6.5 | 0.2 | 0 |
| 8 | 1.5 | 0 | 2.2862 | 0 | 0 | 4 |
| 9 | 1.5 | 0 | 4.5 | 0 | 0 | 4 |
| 10 | 1.5 | 0 | -2.5 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1.5 | 0 | -5 | 0 | 0 | 1 |

TABLA AII.1. PARÁMETROS DE ENTRADA PARA LOS CASOS NUMÉRICOS DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS CON TÉRMINO FUENTE DEBIDO ÚNICAMENTE A LA PRESIÓN EJERCIDA SOBRE EL FONDO

En la tabla anterior se incluyen los valores iniciales de los parámetros correspondientes al calado (h), velocidad longitudinal en la dirección del eje x (u) y altura del fondo (z) empleados para resolver los 11 casos que se indican en la misma tabla, y cuyos resultados se incluyen a continuación. Dichos parámetros tienen diferente nomenclatura y valor inicial para la parte izquierda y derecha del dominio (L y R respectivamente). Esta nomenclatura con respecto a las zonas izquierda y derecha del dominio (L y R) es la que se ha empleado en todo este proyecto.

El tiempo de simulación de todos los casos resueltos en este apartado es de 5s. Adicionalmente, la dimensión del dominio es de 100m, mientras que los parámetros CFL y el número de celdas así como la distancia empleada entre ellas para resolver (Δx) tienen un valor de 1, 100 y 1m respectivamente. A continuación, se presentan todos los resultados a los casos recogidos en la tabla AII.1. En primer lugar, los resultados del caso 1 son los siguientes.

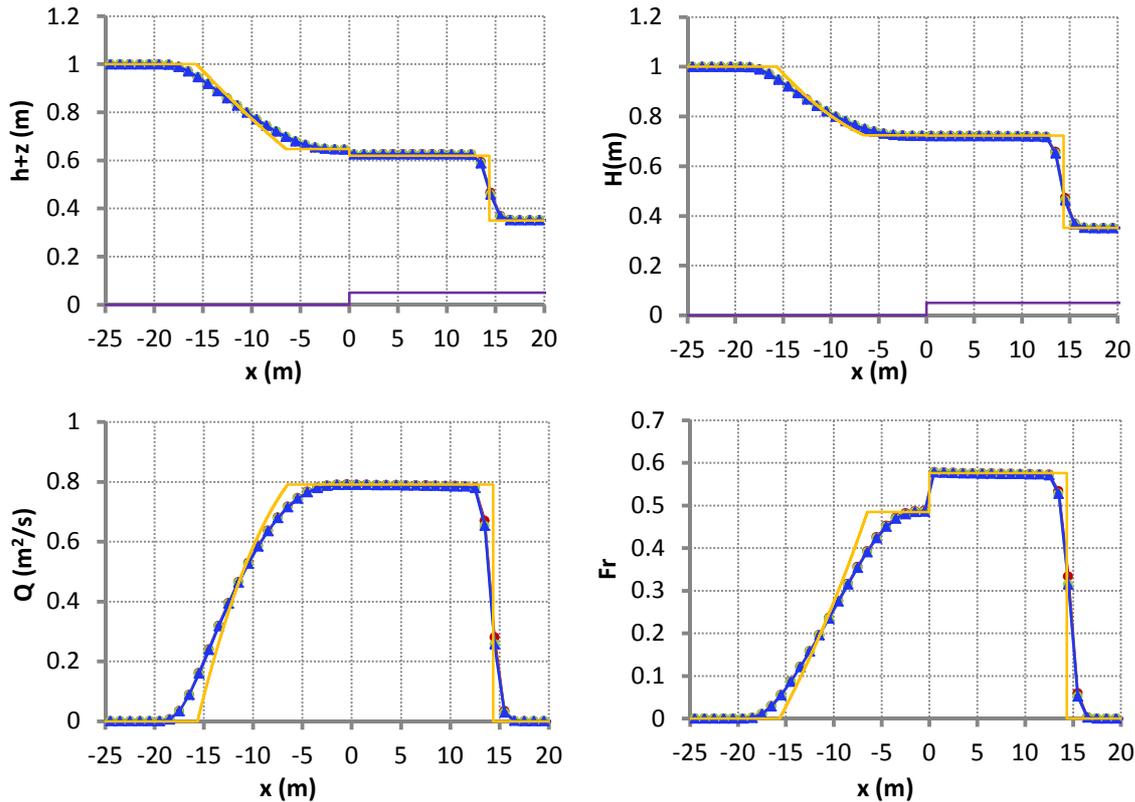


FIGURA AII.1. ROTURA DE PRESA. RESULTADOS DEL CASO 1 DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5S$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES Sa (—●—), Sb (—□—) Y Sc (—▲—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

Como se puede apreciar en la tercera gráfica de la figura AII.1, el caudal tiene unidades de m^2/s y no de m^3/s ya que la profundidad de las celdas en las cuales se ha dividido el dominio es unitaria.

En la primera gráfica de la figura AII:1 se representa la adición de la altura del fondo y el calado ($h + z$, en m), mientras que en la segunda se representa la energía total, es decir, la potencial debida a la altura del fondo y al calado más la energía cinética debida a la velocidad del flujo.

$$H (m) = h + z + \frac{u^2}{2g} \tag{AII.1}$$

Debido a lo anterior, se puede apreciar una diferencia entre las gráficas anteriores correspondientes a $h+z$ y a H , ya que en la zona en la cual el caudal aumenta, existe un aumento de velocidad y por lo tanto de la energía cinética, siendo de esta manera H mayor a $h+z$.

En la gráfica correspondiente a $h+z$, se puede observar una onda de rarefacción por el lado izquierdo del dominio, mientras que en la zona derecha del mismo aparece una onda de choque. Adicionalmente, existe la presencia de otra onda de choque ocasionada por la presencia de la diferencia de altura del fondo a ambos lados del dominio, por lo que se encuentra fija en $x = 0m$.

Con respecto al número de Froude, se puede observar que, en todo momento, el flujo es subcrítico ya que tiene un valor menor que 1. En la región en la cual se encuentra la onda de rarefacción, el número de Froude aumenta hasta alcanzar un valor de 0.5 debido a que el calado disminuye y a que la velocidad, \tilde{u} , aumenta. En la posición $x=0m$, el número de Froude aumenta a un valor de 0.6 debido a una disminución mayor del calado debido a la elevación del fondo.

Finalmente, en la posición que se da la segunda onda de choque ($x=15\text{m}$), disminuye a cero nuevamente debido a que la velocidad, \tilde{u} , es nula.

Respecto a los enfoques del término fuente, se observa que con todos ellos la solución numérica es muy similar a la exacta. El enfoque S^b , proporciona la misma solución que el S^c , quedando ambas soluciones superpuestas. A continuación se pasa a analizar los resultados del caso 2.

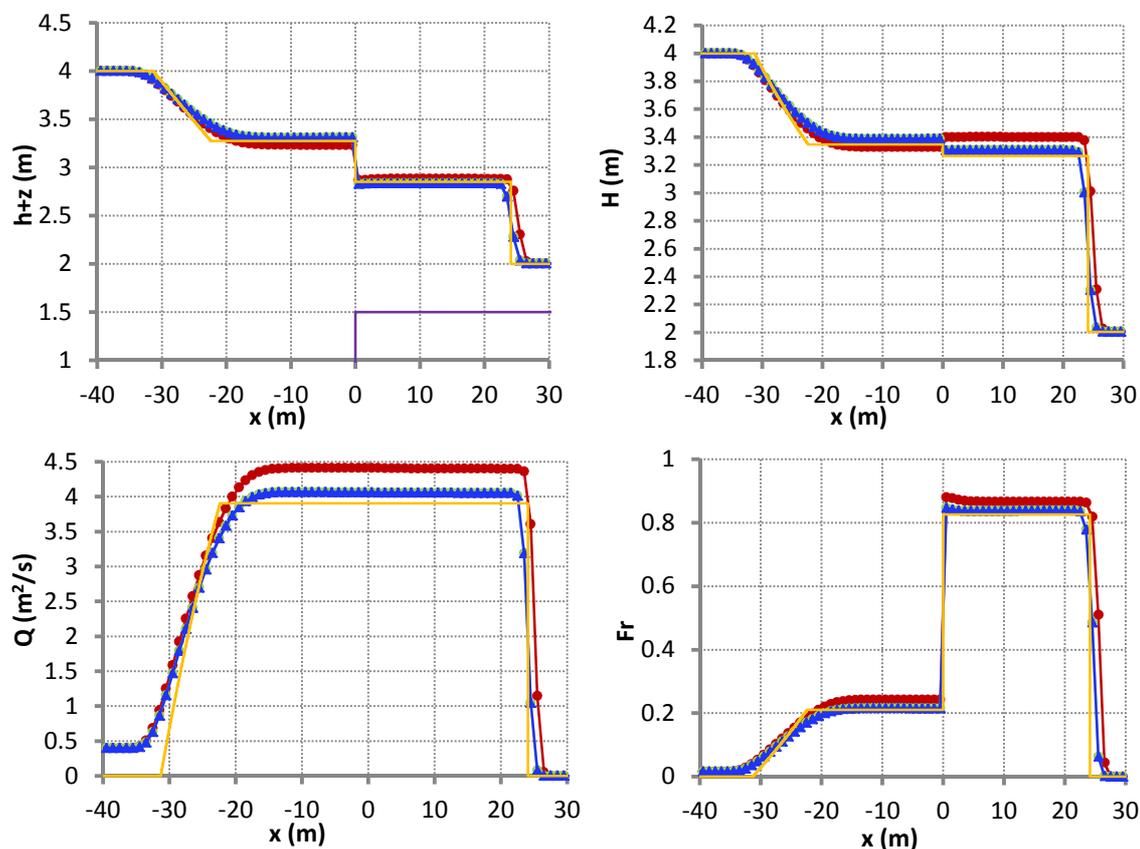


FIGURA AII.2. ROTURA DE PRESA. RESULTADOS DEL CASO 2 DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5\text{s}$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES S_a (—●—), S_b (—□—) Y S_c (—▲—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

El caso 2 consiste en una columna de agua a la izquierda del dominio que tiene una velocidad de 0.1 m/s . Dicha columna se encuentra con un elevación en el fondo de 1.5 m .

Como se puede apreciar en la primera gráfica de la figura AII.2, donde se representa el calado más la altura del fondo, se observa la presencia de una onda de rarefacción, la cual enlaza con la onda de choque originada por el término fuente en la posición $x=0\text{m}$. Esta onda de choque, a su vez, enlaza por su parte derecha con otra onda de choque que se propaga hacia la derecha del dominio.

Nuevamente se puede observar la influencia del caudal en la gráfica de la altura total, ya que, en las zonas en las cuales el caudal aumenta, hay un aumento de la altura total respecto a la altura debida únicamente a la altura del fondo y calado.

Se puede apreciar que el régimen de flujo es subcrítico de nuevo en todas las posiciones del eje x , ya que el número de Froude es menor a 1. Por otra parte, los enfoques más adecuados para el término fuente son los enfoques S^b y S^c . A continuación, se presentan los resultados del caso 3.

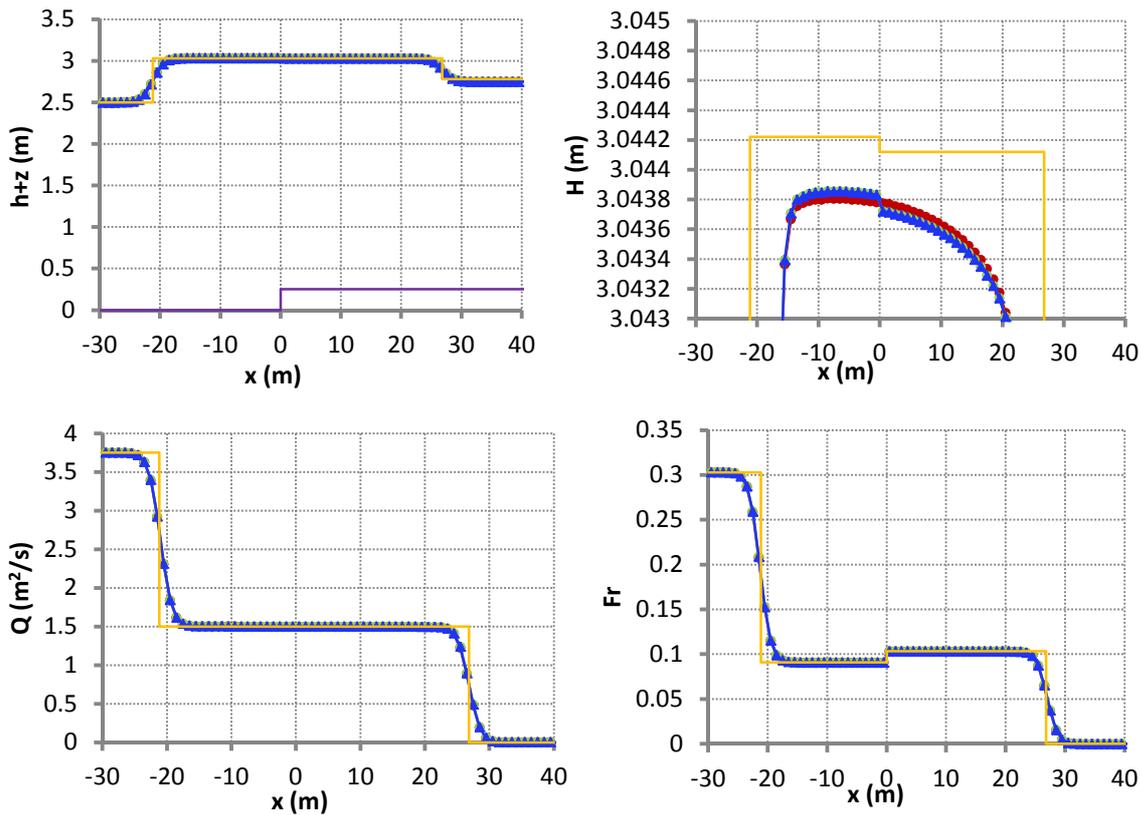


FIGURA AII.3. **ROTURA DE PRESA.** RESULTADOS DEL **CASO 3** DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5S$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES Sa (—●—), Sb (—□—) Y Sc (—▲—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

En el caso 3 se tiene inicialmente un calado muy similar a ambos lados del dominio, por lo que la variación de caudal en este caso es debida a la diferencia de velocidades a la izquierda y a la derecha de la presa en el instante de la rotura (en el lado izquierdo dicha velocidad es mayor que en el derecho).

En la gráfica de la figura AII.3 en la cual se representan la altura de fondo y el calado, se pueden observar dos ondas de choque, las cuales se propagan hacia la derecha, sin embargo, existe la presencia de una tercera onda de choque originada por el término fuente, la cual puede observarse únicamente en la gráfica correspondiente a la altura total. Esta última onda únicamente se puede apreciar en la segunda gráfica debido a que el calado por la izquierda y la derecha iniciales eran muy similares, por lo que su efecto se acrecenta con la presencia de la energía cinética.

En todo el dominio, el flujo es subcrítico y nuevamente, el número de Froude sigue la tendencia del caudal debido a la influencia de la velocidad en el cálculo de dicho número. Con respecto a los diferentes enfoques empleados para calcular el término fuente, todos ellos dan una solución cercana a la exacta. Seguidamente, se presentan los resultados correspondientes al caso 4.

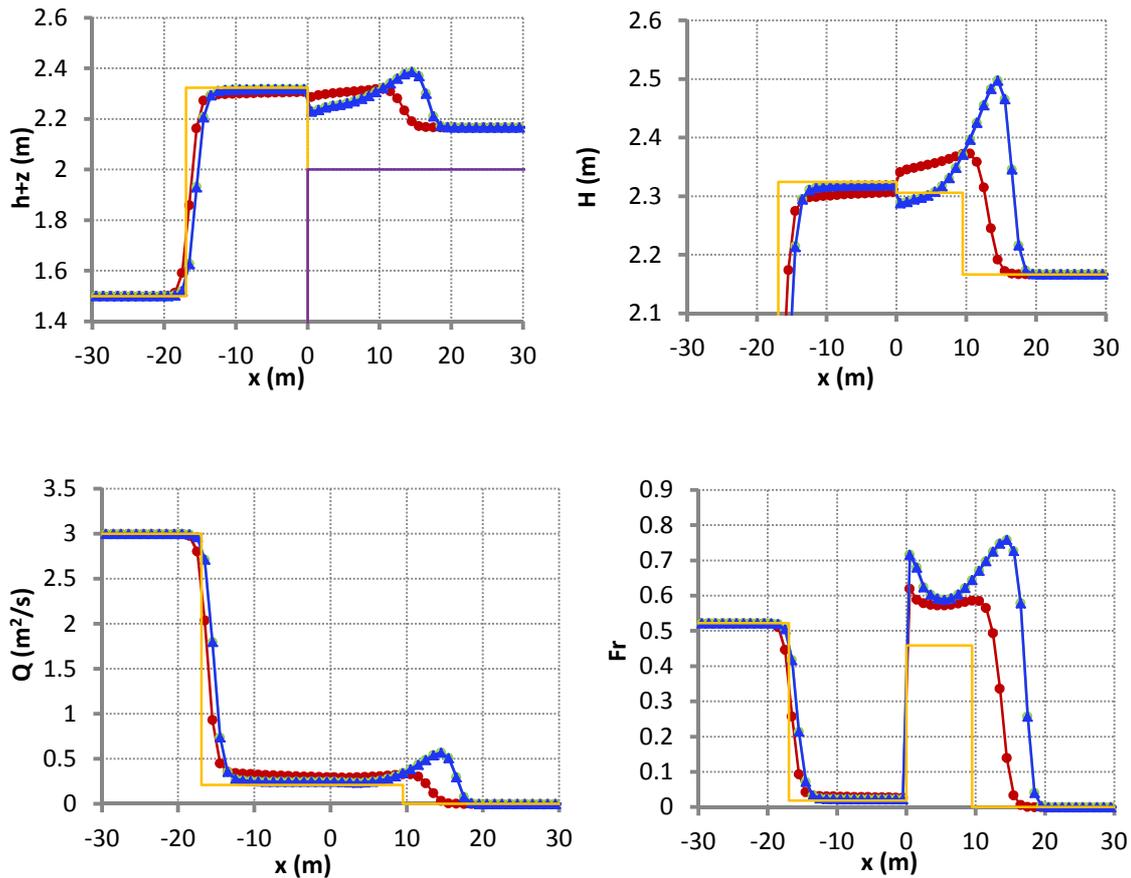


FIGURA AII.4. ROTURA DE PRESA. RESULTADOS DEL CASO 4 DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5S$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES Sa (●—), Sb (○—) Y Sc (▲—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

En el caso 4, una columna de agua de 1.5m con una velocidad de 2m/s, se encuentra con una elevación del fondo de 2m por la derecha del dominio y un calado casi nulo. Esto provoca una disipación de energía, la cual se puede apreciar en el escalón que se da para una posición de $x = 0m$ en la gráfica correspondiente a la altura total.

En la gráfica donde se representa el calado más la altura del fondo se observa la aparición de una onda de choque en la parte izquierda del dominio. Además, aparecen dos ondas más de choque, una de ellas para la posición $x=0m$ y otra en la parte derecha del dominio.

El enfoque s^c proporciona una solución errónea que se aleja de la exacta, mientras que el s^a da unos resultados cercanos a la solución exacta. A continuación, se incluyen los resultados pertenecientes al caso 5.

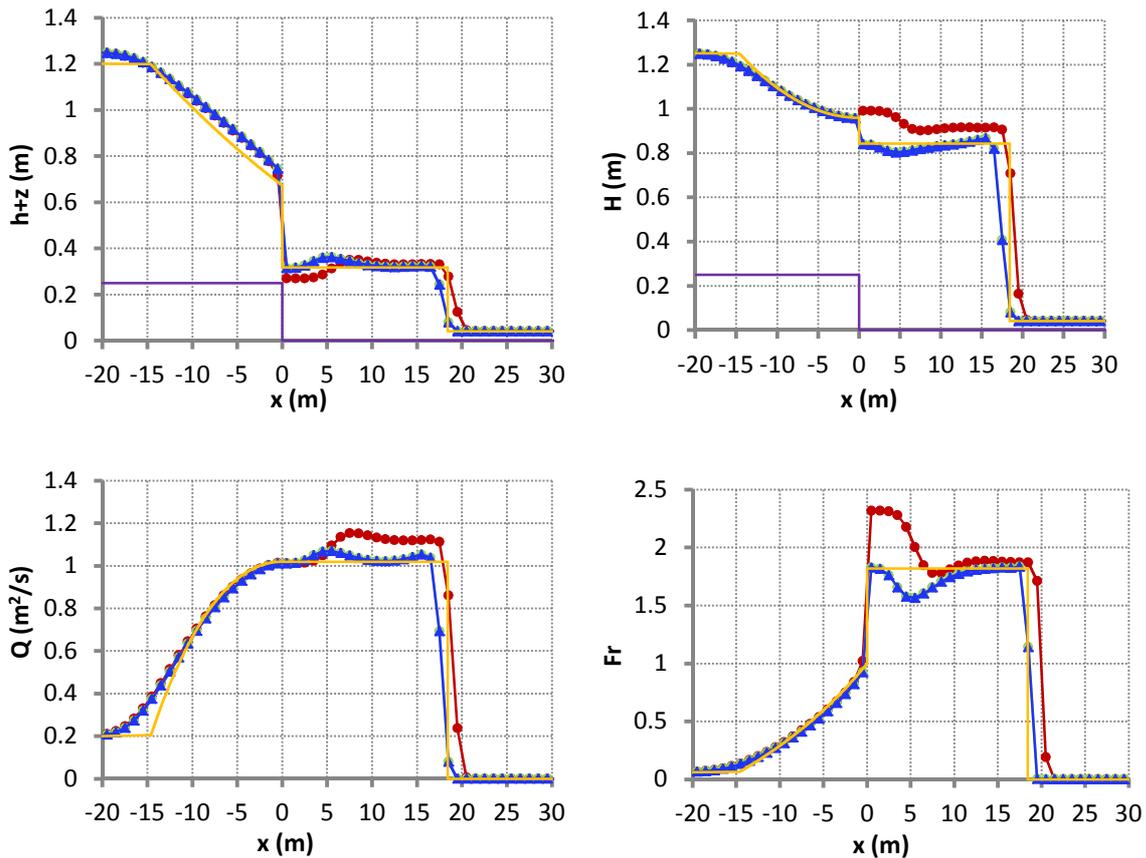


FIGURA AII.5. **ROTURA DE PRESA.** RESULTADOS DEL **CASO 5** DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5S$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES S_a (—●—), S_b (—○—) Y S_c (—▲—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

En el caso 5, una columna de agua de 1m con una velocidad de 0.2m/s se encuentra con una columna de agua casi nula y un fondo llano en la parte derecha del dominio.

En la gráfica donde se representa el calado más la altura del fondo se aprecia una onda de rarefacción a la izquierda del dominio, la cual está generada por el término fuente, y dos ondas de choque, todas ellas propagándose hacia la derecha. Para la posición $x=20m$ el calado es nulo, por lo cual el caudal es nulo, y por lo tanto la velocidad es también nula. Esto se debe a las condiciones iniciales que tenía el dominio, ya que a la derecha del mismo el calado era prácticamente nulo, y la velocidad era nula.

Como se observa en la gráfica donde se representa el número de Froude, en la parte izquierda del dominio el flujo es subcrítico, y este va aumentando hasta que en la posición de $x = 0$ pasa a ser supercrítico, hasta que para la posición $x=20m$ dicho número de Froude es 0, debido a que la velocidad y el calado son nulas. Con respecto a los diferentes enfoques del término fuente, el enfoque s^a sobrestima los valores de las variables resueltas, mientras que los enfoques s^b y s^c proporcionan el mismo resultado, y son los que dan una solución más cercana a la exacta. Los resultados del caso número 6 se presentan a continuación.

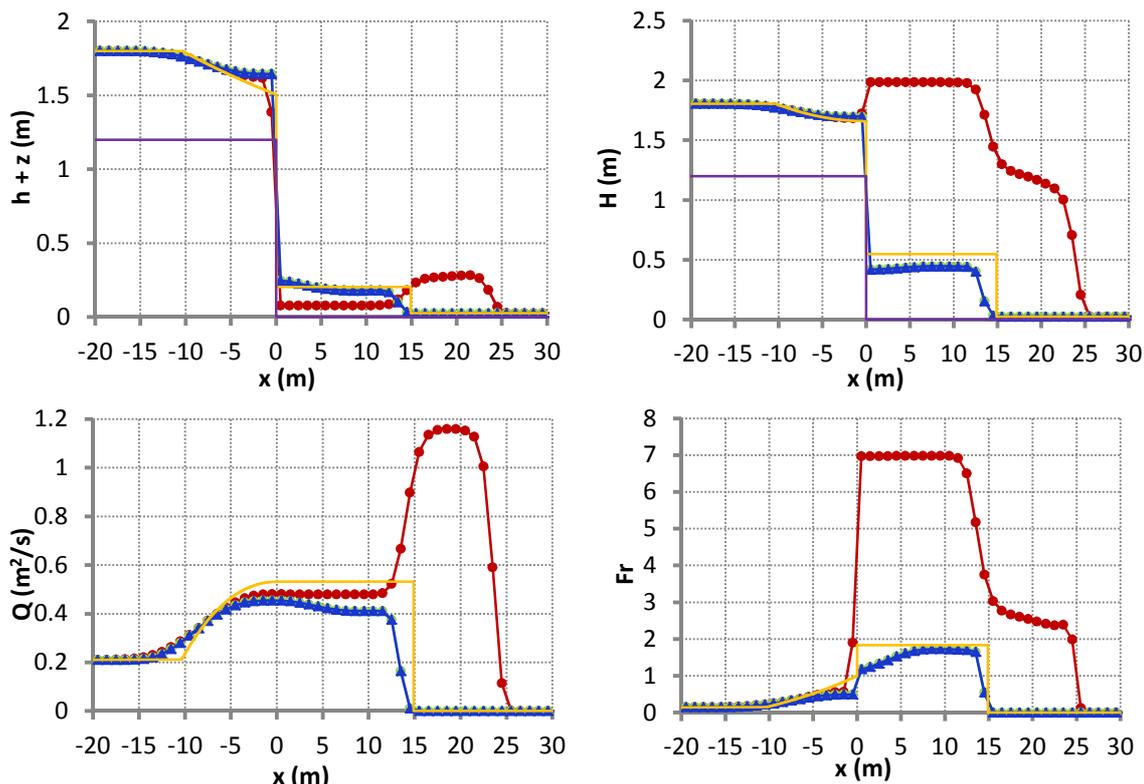
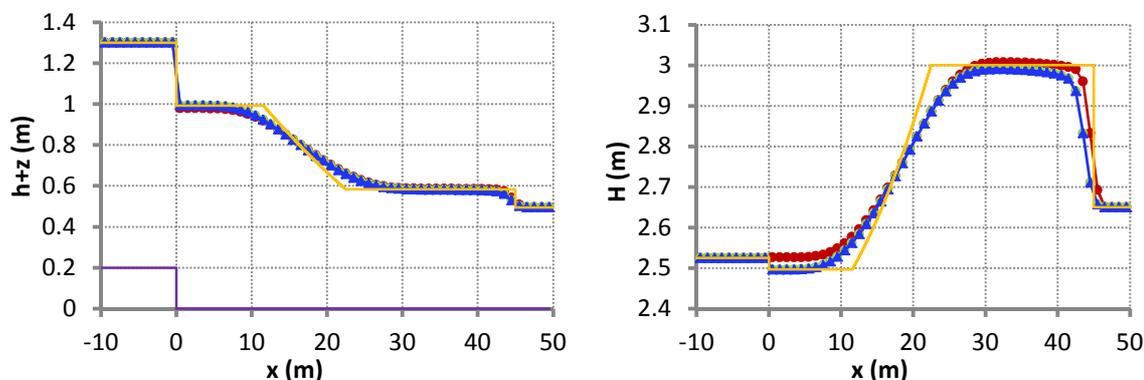


FIGURA AII.6. ROTURA DE PRESA. RESULTADOS DEL CASO 6 DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5S$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES Sa (—●—), Sb (—○—) Y Sc (—▲—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

El caso numérico 6 es muy similar al caso 5, causando una discontinuidad mayor para la posición $x=0$ en la gráfica donde se representa el calado más la altura debida al fondo. Esto es debido a que en la parte izquierda del dominio es mucho mayor que en el caso 5. Por otro lado, en la parte derecha del dominio se tiene un calado H mayor que en el caso 5.

El enfoque s^a del término fuente proporciona una solución errónea, ya que sobrestima los valores de las variables respecto a la solución exacta. Sin embargo, los enfoques s^b y s^c dan la misma solución, la cual es buena y muy cercana a la exacta.

Seguidamente, se presentan los resultados del caso 7.



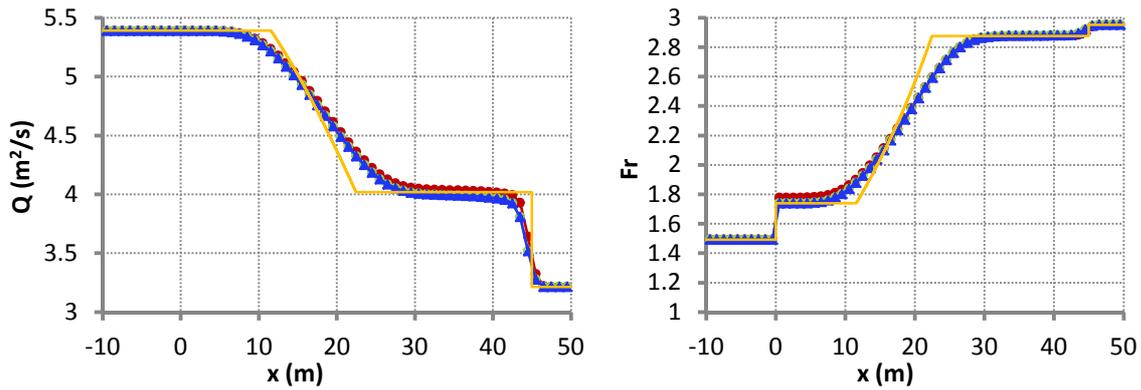


FIGURA AII.7. ROTURA DE PRESA. RESULTADOS DEL CASO 7 DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5S$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES Sa (—●—), Sb (—○—) Y Sc (—▲—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

La solución que se obtiene es una onda de choque que se propaga desde la parte izquierda del dominio hacia la derecha en régimen supercrítico. Debido a que el flujo es supercrítico en todo el dominio, la velocidad u aumenta de forma muy notable, lo cual se aprecia en la gráfica donde se representa la altura total.

Respecto a la gráfica donde se representa el caudal, se puede observar que en la zona del dominio donde se produce la rarefacción, el caudal disminuye de forma muy notable. Con respecto a los diferentes enfoques con los que se puede modelar el término fuente, se puede decir que todos ellos proporcionan una solución numérica muy similar a la exacta.

A continuación, se incluyen los resultados obtenidos para el caso número 8.

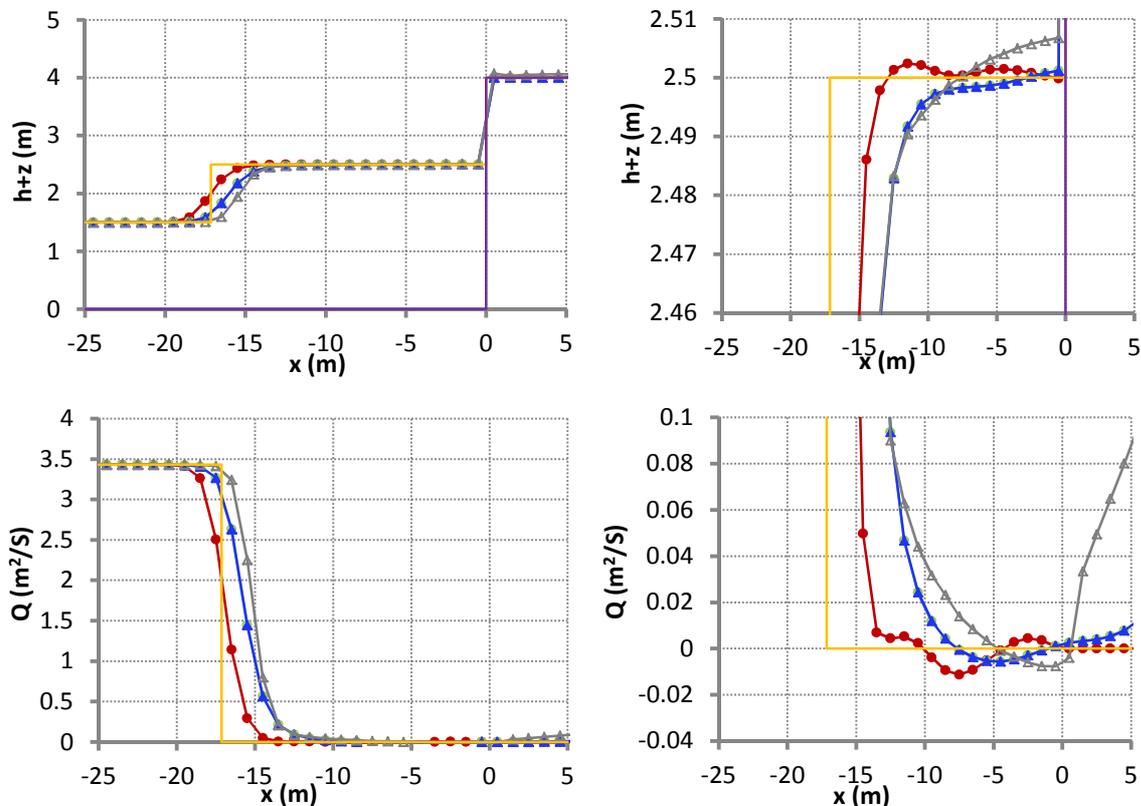


FIGURA AII.8. ROTURA DE PRESA. RESULTADOS DEL CASO 8 DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5S$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES Sa (—●—), Sb (—○—), Sc (—▲—) Y Scw (—△—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

En este caso, se dan condiciones de flujo subcrítico en el que se propaga una onda de choque, la cual rebota sobre el fondo de la parte derecha del dominio. Este fenómeno es producido debido que en calado inicial de la parte derecha del dominio es nulo, y a que la altura del fondo es muy elevada (igual a 4m). En este caso se observa que el enfoque S^a , es el que más se asemeja a la solución exacta mientras que los demás enfoques proporcionan resultados cercanos a la exacta.

A continuación, se representan las gráficas con los resultados correspondientes al caso 9.

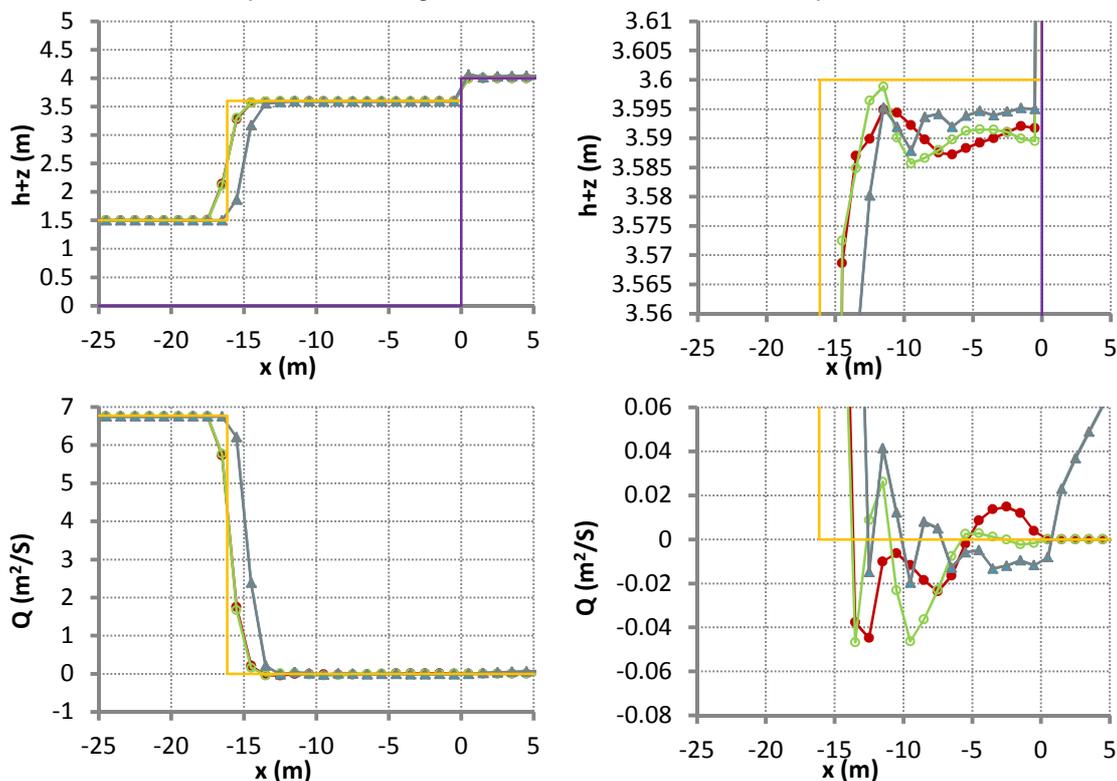
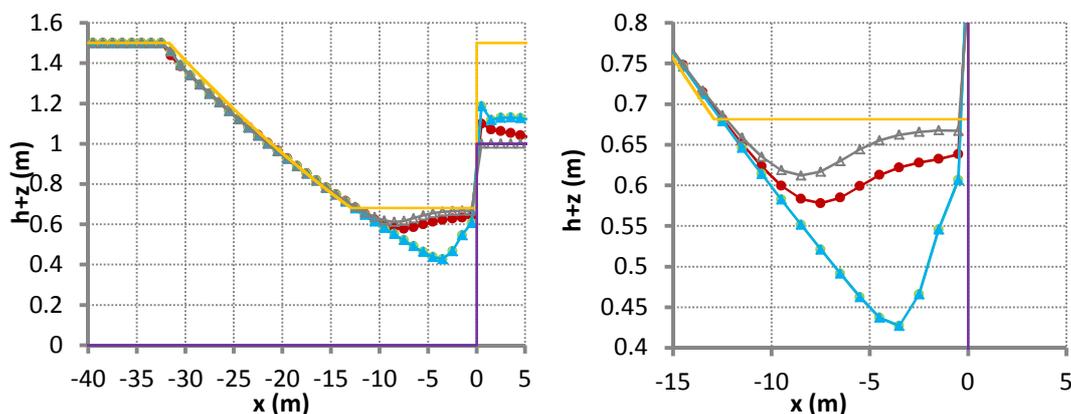


FIGURA AII.9. ROTURA DE PRESA. RESULTADOS DEL CASO 9 DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5$ S. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES S^a (—●—), S^b (—○—), S^c (—▲—) Y S^{cw} (—△—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

Los resultados obtenidos para el caso 9 son los mismos que para el caso 8, con la diferencia de que el calado obtenido es mayor en el caso 9 y que el flujo se presenta en régimen supercrítico ya que la velocidad inicial por la izquierda del dominio es más elevada que para el caso 8 (4.5m/s frente a los 2.2862m/s del caso 8).

A continuación, se incluyen los resultados obtenidos para el caso número 10.



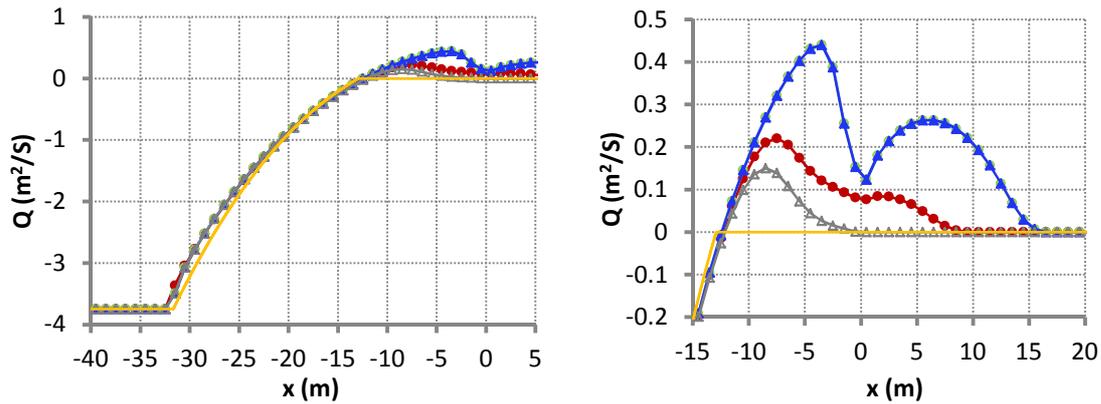


FIGURA AII.10. ROTURA DE PRESA. RESULTADOS DEL CASO 10 DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5S$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES Sa (—●—), Sb (—○—), Sc (—▲—) Y Scw (—△—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

La solución obtenida en este caso es una onda de rarefacción que conecta con un estado intermedio. Dicha onda de rarefacción se propaga en condiciones de flujo subcrítico y se ha originado por las condiciones iniciales del dominio. Dichas condiciones iniciales eran que el calado por la parte de la izquierda del dominio era positivo, mientras que por la derecha era nulo, y además la velocidad por la parte izquierda era negativa.

La solución proporcionada por el enfoque s^{cw} es el que más se acerca a la solución exacta, mientras que el resto de enfoques se alejan más de dicha solución exacta, como se puede observar en los detalles de las gráficas.

A continuación, se presentan los resultados del último caso (número 11).

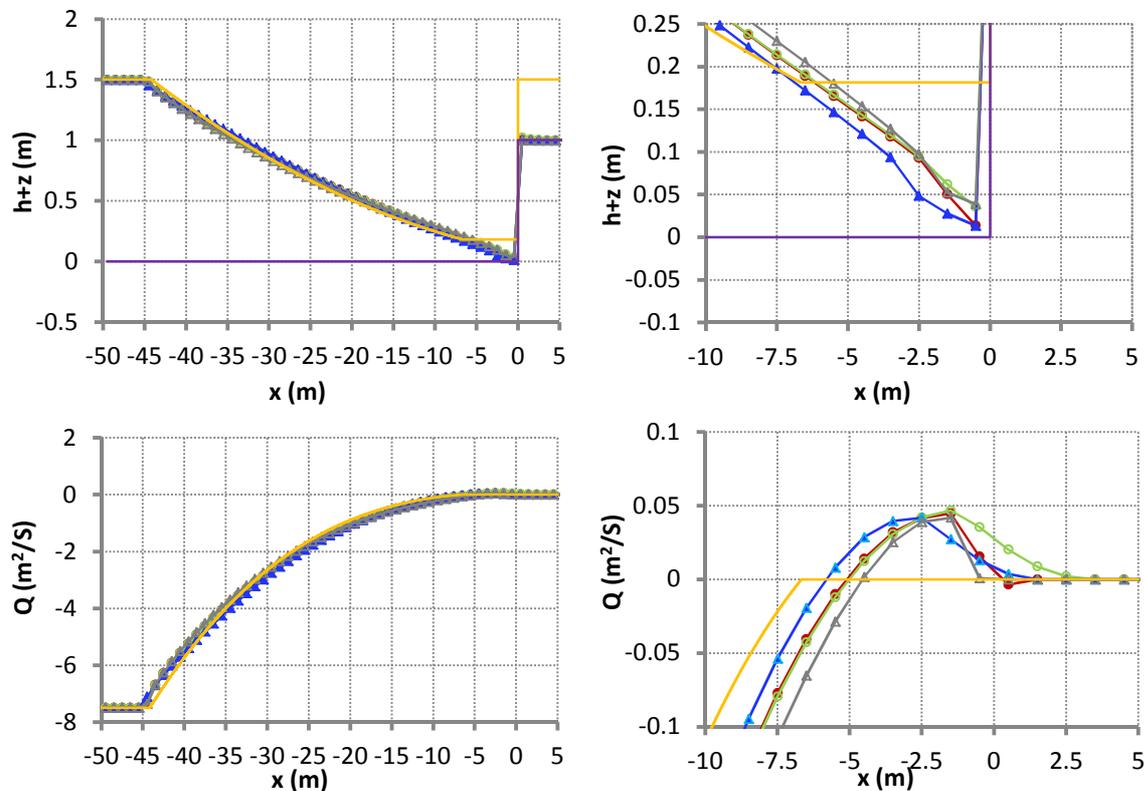


FIGURA AII.11. ROTURA DE PRESA. RESULTADOS DEL CASO 11 DE LA TABLA AII.1 PARA $T = 5S$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS UTILIZANDO LOS ENFOQUES Sa (—●—), Sb (—○—), Sc (—▲—) Y Scw (—△—), Y FONDO DEL DOMINIO Z (—).

Los resultados del caso 11 son muy similares a los del caso 10, pero en este caso la onda de rarefacción se propaga a una velocidad todavía mayor que en el caso anterior, en condición de flujo supercrítico, debido a que el módulo de la velocidad por la izquierda del dominio es mayor en este caso. Dicha velocidad tiene un sentido negativo, al igual que en el caso anterior. Todos los enfoques del término fuente han proporcionado una solución muy similar y a su vez, cercana a la solución exacta.

En los cuatro últimos casos, la variación del caudal y del calado en la posición $x=0$ es debida a que, en esta posición, el flujo se encuentra con el fondo seco (ya que el calado inicial es nulo), lo cual provoca una mayor resistencia al paso del flujo, con la correspondiente disminución de dichos parámetros en el enfoque en el cual se atiende a este fenómeno (S^{cw}).

All.2 Solución aproximada al problema de Riemann para el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas

Obtener la solución exacta al problema de Riemann para el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas resulta complicado. Para hacerlo se debe partir de las condiciones iniciales existentes en el dominio, y se deben obtener de forma individual los estados intermedios, U_i^* y U_{i+1}^{**} . El proceso para llegar a la solución exacta es diferente en cada caso, y puede llegar a ser muy complicado.

Es por ello, por lo que se calculan soluciones aproximadas a dicho problema [11], las cuales son diferentes si el flujo es subcrítico, o supercrítico. El tipo de flujo queda determinado por el signo de los valores propios, $\tilde{\lambda}^1$ y $\tilde{\lambda}^2$; de forma que si un valor propio es negativo y otro positivo, el flujo es subcrítico; y si los dos valores propios son positivos o negativos, el flujo es supercrítico.

Otra de determinar si el flujo es de un tipo u otro, es calcular el número de Froude, con los valores promedio de las variables del problema, tal y como se muestra en la siguiente expresión.

$$Fr = \frac{\tilde{u}}{\sqrt{g\tilde{h}}} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{c}} \quad (AII.2)$$

Por lo tanto, la solución aproximada al problema de Riemann queda determinada por los valores propios, $\tilde{\lambda}^1$ y $\tilde{\lambda}^2$, es decir, las velocidades de propagación de las ondas. La solución presenta tres ondas definidas por cuatro estados intermedios del vector, U . A continuación, se presentan las soluciones aproximadas en función del tipo de flujo.

All.2.1 Solución aproximada al problema de Riemann para flujo subcrítico

Como se ha comentado, si un valor propio es negativo y el otro positivo, el flujo será subcrítico. A continuación, se presenta la solución aproximada, tal y como se muestra en la figura All.12 para flujo subcrítico, $\tilde{U}(x, t)$, así como sus estados intermedios, U_i^* y U_{i+1}^{**} .

$$\tilde{U}(x, t) = \begin{cases} U_i^n & x - \tilde{\lambda}^1 t < 0 \\ U_i^* & x - \tilde{\lambda}^1 t < 0 \text{ y } x < 0 \\ U_{i+1}^{**} & x > 0 \text{ y } x - \tilde{\lambda}^2 t < 0 \\ U_{i+1}^n & x - \tilde{\lambda}^2 t > 0 \end{cases}, \text{ con } \tilde{\lambda}^1 \tilde{\lambda}^2 < 0 \quad (AII.3)$$

$$U_i^* = U_i^n + (\theta\alpha\tilde{e})_{i+1/2}^1 \quad U_{i+1}^{**} = U_{i+1}^n + (\theta\alpha\tilde{e})_{i+1/2}^2 \quad (AII.4)$$

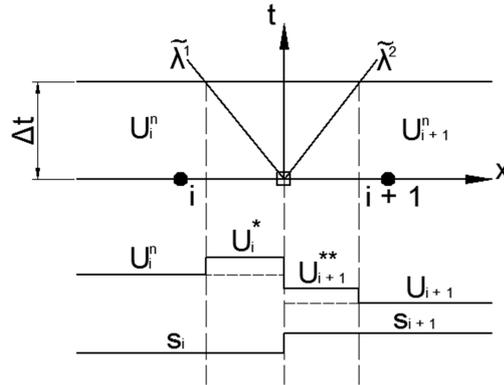


FIGURA AII.12. SOLUCIÓN PROBLEMA DE RIEMANN PARA FLUJO SUBCRÍTICO ($\tilde{\lambda}^1 \tilde{\lambda}^2 < 0$).

AII.2.2 Solución aproximada al problema de Riemann para flujo supercrítico

Para que el flujo sea supercrítico el signo de los dos valores propios deber ser el mismo, como ya se ha comentado. Esto implica que ambos valores propios deben ser positivos o negativos, por lo tanto se pueden dar dos casos, los cuales se muestran a continuación.

- **Ambos valores propios positivos ($\tilde{\lambda}^1 > 0$, $\tilde{\lambda}^2 > 0$)**

En el caso de que ambos valores propios sean positivos, la solución aproximada (figura AII.13), $\hat{U}(x, t)$, así como los estados intermedios, U_i^* y U_{i+1}^{**} , se calculan como se muestra en las siguientes expresiones.

$$\hat{U}(x, t) = \begin{cases} U_i^n & x < 0 \\ U_i^* & x > 0 \text{ y } x - \tilde{\lambda}^1 t < 0 \\ U_{i+1}^{**} & x - \tilde{\lambda}^1 t > 0 \text{ y } x - \tilde{\lambda}^2 t < 0 \\ U_{i+1}^n & x - \tilde{\lambda}^2 t > 0 \end{cases} \quad (AII.5)$$

$$U_i^* = U_{i+1}^{**} - (\theta\alpha\tilde{e})_{i+1/2}^1 \quad U_{i+1}^{**} = U_{i+1}^n + (\theta\alpha\tilde{e})_{i+1/2}^2 \quad (AII.6)$$

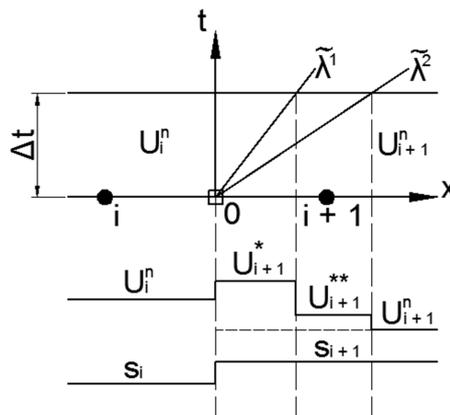


FIGURA AII.13. SOLUCIÓN PROBLEMA DE RIEMANN PARA FLUJO SUPERCRÍTICO ($\tilde{\lambda}^1 > 0$, $\tilde{\lambda}^2 > 0$ y $\tilde{u} > 0$).

- **Ambos valores propios negativos ($\tilde{\lambda}^1 < 0$, $\tilde{\lambda}^2 < 0$)**

Cuando ambos valores propios sean negativos, tal y como se muestra en la figura AII.14, la solución aproximada, $\hat{U}(x, t)$, así como los estados intermedios, U_i^* y U_{i+1}^{**} , se calculan como se muestra a continuación.

$$\widehat{U}(x, t) = \begin{cases} U_i^n & x - \tilde{\lambda}^1 t < 0 \\ U_i^* & x - \tilde{\lambda}^1 t > 0 \text{ y } x - \tilde{\lambda}^2 t < 0 \\ U_{i+1}^{**} & x - \tilde{\lambda}^2 t > 0 \text{ y } x < 0 \\ U_{i+1}^n & x - \tilde{\lambda}^2 t > 0 \end{cases} \quad (AI.7)$$

$$U_i^* = U_i^n + (\theta\alpha\tilde{e})_{i+1/2}^1 \quad U_{i+1}^{**} = U_i^n + (\theta\alpha\tilde{e})_{i+1/2}^2 \quad (AI.8)$$

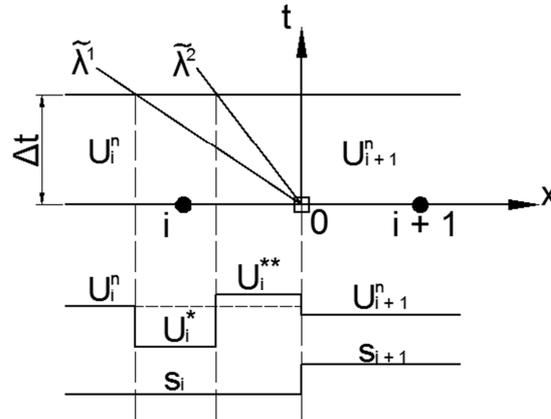


FIGURA AII.14. SOLUCIÓN PROBLEMA DE RIEMANN PARA FLUJO SUPERCRÍTICO ($\tilde{\lambda}^1 < 0$, $\tilde{\lambda}^2 < 0$ y $\tilde{u} < 0$).

Bibliografía

- [1] A. Mangeney, O. Roche, O. Hungr, N. Mangold, 795 G. Faccanoni, A. Lucas, J. of Geophysical research 115 (2010).
- [2] A. Ritter, Die Fortpflanzung der Wasserwelle, Vereine Deutscher Ingenieure Zeitschrift 36 (1892) 947–954.
- [3] E.F. Toro. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer, Berlin (1997).
- [4] E.F. Toro. Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows. Wiley, New York, (2001).
- [5] C.Juez, J.Murillo, P.García-Navarro. 2D simulation of granular flow over irregular steep slopes using global and local coordinates. Journal of computational physics 255 (2013) 166–204.
- [6] G. Watson, D.H. Peregrine, E.F. Toro, Numerical solution of the shallow water equations on a beach using the weighted average flux method (1992).
- [7] M.E. Vázquez-Cendón. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. Journal of Computational Physics 148, 497–498, 1999.
- [8] M.L. Muñoz, C.Parés. Sobre el método de Godunov para sistemas hiperbólicos no conservativos. XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. Sevilla, 24-28 septiembre 2007. Método de Godunov
- [9] J. Burguete, J. Murillo, P. García-Navarro. Time Step Restrictions For Well Balanced Shallow Water Solutions In Non-Zero Velocity Steady States. International Journal of Numerical Methods in Fluids 56, 661–686, 2008. Harte-Hyman entropy
- [10] J.Murillo, P.García-Navarro. Finite volumes for the simulation of unsteady shallow water flows. XVIII International conference of water resources (2010).
- [11] J.Murillo, P.García-Navarro. Wave Riemann description of friction terms in unsteady shallow flows: Application to water and mud/debris floods. Journal of computational physics 231 (2012) 1963-2001.
- [12] J.Murillo, P.García-Navarro. Weak solutions for partial differential equations with source terms: application to the shallow water equations (2009).
- [13] P.L. Roe. A basis for Upwind Differencing of the Two-Dimensional Unsteady Euler Equations. Numerical Methods in Fluid Dynamics, Vol II. Oxford University Press, Oxford, 1986.
- [14] R.F. Dressler, Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave, Int. Assoc. Sci. Hydrol. 3 (1954) 319–328.
- [15] White F.M (2008) Mecánica de fluidos. McGraw-Hill.

