

Formalismo geométrico de la Mecánica Cuántica y sus aplicaciones

Dinámica de tensores en sistemas abiertos markovianos

APÉNDICES

del

Trabajo de Fin de Grado realizado por

Adrián Franco Rubio

bajo la dirección de

Dr. Jesús Jerónimo Clemente Gallardo

Junio 2015



Índice general

A. Formalismo geométrico en la imagen de Schrödinger	2
A.1. Traduciendo a geometría	2
A.2. El espacio proyectivo	6
A.3. Aplicación momento	7
B. Guía de conceptos matemáticos	10
B.1. Variedades diferenciables	10
B.2. Espacios tangente y cotangente. Diferencial de una aplicación.	12
B.3. Campos vectoriales, 1-formas y tensores	13

Apéndice A

Formalismo geométrico en la imagen de Schrödinger

En el presente trabajo se ha empleado sólo una de las posibles formas de introducir un tratamiento geométrico en la Mecánica Cuántica. Es nuestro objetivo en este apéndice presentar, por completitud y para satisfacción del lector interesado, cómo la formulación geométrica se emplea también en la descripción de la Mecánica Cuántica *à la Schrödinger*, si bien lo haremos de una forma no exhaustiva. Para discusiones más en detalle, recomendamos las referencias [11][1][13][3][8].

A.1. Traduciendo a geometría

Nuestro objetivo al geometrizar el formalismo cuántico va a ser describir la dinámica de un sistema cuántico traduciendo las ecuaciones diferenciales en campos vectoriales sobre una variedad, por analogía con el procedimiento empleado en el formalismo geométrico de la Mecánica Clásica. Para hacerlo, en primer lugar hemos de transportar todas las estructuras con que contamos en la formulación tradicional de Schrödinger al dominio geométrico. Dichas estructuras son:

Un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H} , esto es, un espacio vectorial dotado de una forma hermítica o producto escalar, cuyos elementos representan los posibles estados de nuestro sistema¹.

En lo que sigue nos ocuparemos únicamente de aquellos sistemas con un número finito de niveles, esto es, aquellos para los que $\dim \mathcal{H} < \infty$.

Un álgebra de operadores sobre el espacio de Hilbert, dentro de la cual se hallan los operadores hermíticos, que representan las magnitudes físicas del sistema.

Una evolución temporal que nos permite hacer evolucionar en el tiempo los estados de \mathcal{H} .

En este caso está dictada por una ecuación diferencial, la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle$$

Para pasar al formalismo geométrico, lo primero que hacemos es interpretar el espacio de estados como una variedad diferenciable real $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$. Fijada una base $\{|e_j\rangle\}$ de \mathcal{H} , esta variedad tiene una

¹En realidad, la correspondencia entre los estados del sistema y los vectores del espacio de Hilbert no es unívoca: son los rayos o subespacios de dimensión 1 del espacio de Hilbert los que representan de manera biunívoca los estados del sistema. Este es un punto importante que discutiremos más adelante.

carta global única dada por las coordenadas en dicha base, con una pequeña salvedad: puesto que vamos a trabajar con variedades reales, habremos de considerar coordenadas independientes las partes real e imaginaria de cada una de las coordenadas complejas (realificación del espacio), de modo que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{\mathcal{Q}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M}_{\mathcal{Q}} &\longmapsto \mathbb{R}^{2n} \\ \sum_j (q_j + ip_j)|e_j\rangle &\longmapsto (q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)^t \end{aligned}$$

Por tratarse de un espacio vectorial sabemos que el espacio tangente a cada punto de esta variedad es otra copia de la misma variedad. Por ello el fibrado tangente a la variedad es de la forma $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}} \times \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$. Es sobre los campos vectoriales definidos sobre $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ sobre los que trasladaremos el resto de estructuras de \mathcal{H} . A cada $|\psi\rangle$ le podemos asociar un campo vectorial constante (omitimos los símbolos $|\cdot\rangle$ para abreviar):

$$X_{\psi}(\chi) = \psi \quad \forall \chi \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$$

Nota: Fíjese el lector en que por conveniencia hemos alterado la notación levemente frente a la usada en la memoria y el apéndice B. En todo este apéndice indicaremos el punto donde evaluamos los tensores entre paréntesis, en lugar de con un subíndice, salvo cuando empleemos el símbolo “evaluado en”, $|_p$.

El carácter complejo del espacio anterior se representa aquí dotando a la variedad de una estructura cuasicompleja, dada por el endomorfismo J , que es la traducción del endomorfismo “multiplicar por i ” definido sobre \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} J : \mathcal{M}_{\mathcal{Q}} &\longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{Q}} \\ \sum_j (q_j + ip_j)|e_j\rangle &\longmapsto \sum_j (-p_j + iq_j)|e_j\rangle \end{aligned}$$

Actuando sobre campos vectoriales J es un tensor 1-1:

$$\begin{aligned} J : \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) &\longmapsto \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) \\ X_{\psi} &\longmapsto JX_{\psi} = X_{J\psi} = X_{i|\psi\rangle} \end{aligned}$$

(Nótese que definiendo el valor de JX para todos los campos constantes tenemos definido JX para cualquier campo).

La otra estructura que teníamos sobre \mathcal{H} es la estructura hermítica. Si estuviéramos trabajando con $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ como variedad compleja, el producto escalar se traduciría en un tensor holomorfo h tal que

$$\begin{aligned} h : \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) &\longmapsto \text{Hol}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) \\ (X_{\psi_1}, X_{\psi_2}) &\longmapsto h(X_{\psi_1}, X_{\psi_2}) = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \end{aligned}$$

Sin embargo nuestra variedad es real, así que de nuevo hemos de descomponer en parte real e imaginaria resultando dos tensores:

$$\begin{aligned} g : \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) &\longmapsto C_{\infty}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) \\ (X_{\psi_1}, X_{\psi_2}) &\longmapsto g(X_{\psi_1}, X_{\psi_2}) = \operatorname{Re}\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega : \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) &\longmapsto C_{\infty}(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) \\ (X_{\psi_1}, X_{\psi_2}) &\longmapsto \omega(X_{\psi_1}, X_{\psi_2}) = \operatorname{Im}\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \end{aligned}$$

Si la base que empleamos es ortonormal, podemos expresar estos tensores como:

$$g = dq_j \otimes dq_j + dp_j \otimes dp_j$$

$$\omega = dq_j \otimes dp_j - dp_j \otimes dq_j =: dq_j \wedge dp_j$$

donde se sobreentiende la suma en j . Así pues hemos completado una “traducción”:

$$(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle) \longleftrightarrow (\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}, J, g, \omega)$$

Además podemos comprobar que se da la siguiente relación de compatibilidad entre los tensores:

$$g(X, Y) = \omega(X, JY)$$

Con todo esto $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ queda dotada de una llamada **estructura Kähler**.

El siguiente objeto de la traducción son los operadores lineales sobre \mathcal{H} . A cada uno de ellos le vamos a asociar una función cuadrática:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow f_A : \mathcal{M}_{\mathcal{Q}} \longmapsto \mathbb{C} \\ \psi &\longmapsto \frac{1}{2} \langle \psi | A \psi \rangle \end{aligned}$$

Notemos que si A representa un observable, $A^\dagger = A$ y por ende $f_A(\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}) \subseteq \mathbb{R}$.

Nos centramos ahora en traducir las estructuras algebraicas que vimos en el capítulo 2 que teníamos definidas en el conjunto de los observables. La primera es la estructura de álgebra de Lie con el conmutador:

$$[A, B]_- = -i(AB - BA)$$

Veamos en qué se traduce esta estructura cuando pasamos a funciones:

$$\begin{aligned} f_{[A, B]_-}(\psi) &= f_{-i(AB - BA)}(\psi) = -\frac{i}{2} (\langle \psi | AB \psi \rangle - \langle \psi | BA \psi \rangle) = -\frac{i}{2} (\langle A \psi | B \psi \rangle - \langle B \psi | A \psi \rangle) = \\ &= -\frac{i}{2} \left(\langle A \psi | B \psi \rangle - \overline{\langle A \psi | B \psi \rangle} \right) = \operatorname{Im} \langle A \psi | B \psi \rangle = \omega(X_{A\psi}, X_{B\psi}) = \Omega(df_A, df_B) \end{aligned}$$

donde Ω es el bivector de Poisson asociado a la 2-forma simpléctica ω . Del mismo modo podemos trabajar con la estructura de Jordan asociada al anticonmutador:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$$

La conclusión es que su acción la representa el bivector G asociado a la 2-forma g :

$$f_{2A \circ B} = G(df_A, df_B)$$

Por último, la estructura del producto asociativo (punto a punto) se puede trasladar si pensamos en expresarlo a través de las otras dos estructuras:

$$AB = A \circ B + \frac{i}{2}[A, B]_- \longrightarrow f_{AB} = \frac{1}{2}G(df_A, df_B) + \frac{i}{2}\Omega(df_A, df_B) =: f_A * f_B$$

Notemos que el producto $*$ definido por la acción de estos tensores es asociativo pero no es conmutativo, ni local, ni nos mantiene en los reales (al igual que el producto asociativo de operadores nos saca del conjunto de los hermíticos).

Por último, pasamos a dar una evolución temporal que traduzca la ecuación de Schrödinger. En este caso, lo que habremos de buscar es un campo vectorial cuyas curvas integrales den lugar a la evolución del sistema. La ecuación que cumple dicho campo, que llamamos X_{f_H} y que sustituye a la de Schrödinger es análoga a la que, en Mecánica Clásica, proporciona el campo hamiltoniano que determina la dinámica:

$$i_{X_{f_H}}\omega = df_H$$

donde H es el operador hamiltoniano, y $i_{X_{f_H}}\omega$ representa la contracción interna del campo vectorial X_{f_H} y la 2-forma ω para dar una 1-forma definida por

$$i_{X_{f_H}}\omega(Y) = \omega(X_{f_H}, Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}_Q)$$

Comprobemos que el campo que cumple esta condición efectivamente nos da la evolución de Schrödinger. Para ello, hacemos

$$\omega(X_{f_H}, X_\psi) = i_{X_{f_H}}\omega(X_\psi) = df_H(X_\psi)$$

Trabajamos ahora el miembro derecho de la ecuación, evaluando en un punto concreto χ :

$$\begin{aligned} df_H(X_\psi) \Big|_\chi &= X_\psi \Big|_\chi (f_H) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_H(\chi + t\psi) - f_H(\chi)}{t} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \chi + t\psi | H\chi + tH\psi \rangle - \langle \chi | H\chi \rangle}{t} = \\ &= \frac{\langle H\chi | \psi \rangle + \langle \psi | H\chi \rangle}{2} = \text{Re}\langle H\chi | \psi \rangle = g(X_{H\chi}, X_\psi) = -\omega(JX_{H\chi}, X_\psi) = \\ &= \omega(X_{-JH\chi}, X_\psi) \end{aligned}$$

Consecuentemente, el campo vectorial dado por

$$X_{f_H}(\chi) = -JH\chi$$

es solución de la ecuación propuesta para la dinámica, y si lo examinamos de cerca vemos que efectivamente representa la ecuación de Schrödinger cuando tomamos $\hbar = 1$:

$$\frac{d}{dt}|\chi\rangle = -iH|\chi\rangle$$

A.2. El espacio proyectivo

Un aspecto que hasta ahora no hemos tenido en cuenta en nuestra formulación geométrica es el hecho de que vectores del espacio de Hilbert que sean proporcionales representan el mismo estado. Podemos establecer así una relación de equivalencia

$$\psi \sim \psi' \iff \psi' = \lambda\psi \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

y quedarnos con el conjunto de las clases, que es el espacio proyectivo, el verdadero conjunto de estados del sistema. Vamos a tratar de hacer lo mismo en nuestra variedad $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$. En ella tenemos dos campos vectoriales que representan la multiplicación por números reales (**campo de dilataciones**, Δ) y la multiplicación por una fase compleja (**campo de rotaciones**, Γ):

$$\Delta = q_j \frac{\partial}{\partial q_j} + p_j \frac{\partial}{\partial p_j} \quad \Gamma = q_j \frac{\partial}{\partial p_j} - p_j \frac{\partial}{\partial q_j}$$

Éstos son los campos asociados a los endomorfismos identidad (la exponencial de cuyos múltiplos reales corresponden a las dilataciones en el espacio vectorial: $\psi \rightarrow e^\lambda|\psi\rangle$) y “multiplicar por i ” (la exponencial de cuyos múltiplos reales corresponde a los cambios de fase $\psi \rightarrow e^{i\lambda}|\psi\rangle$). En consecuencia tenemos también $\Gamma = J(\Delta)$. Estos dos campos definen una distribución en nuestra variedad. Dar una **distribución** sobre $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ es dar, en cada punto, un subespacio del espacio tangente en dicho punto. En nuestro caso particular los dos campos cierran un álgebra de Lie de dimensión finita puesto que

$$[\Delta, \Gamma] = 0$$

Existe un resultado (Teorema de Frobenius) por el cual esta última condición implica que la distribución resultante es integrable y por tanto define una foliación de la variedad. Podemos pues pasar al espacio proyectivo, en el que están identificados todos los puntos conectados por curvas integrales de los mencionados campos. Nos queda una proyección

$$\pi : \mathcal{M}_{\mathcal{Q}} \rightarrow P$$

que nos gustaría ser capaces de usar para trasladar al espacio proyectivo toda la estructura tensorial que hemos desarrollado en $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$. Lo que podremos pasar al proyectivo son los tensores contravariantes G, Ω por medio de un *pushforward*, no los covariantes (para los cuales lo que estaría bien definido es un *pullback*). Y esto será siempre y cuando dichos tensores sean π -proyectables, para lo que es condición necesaria que coincida el *pushforward* del tensor desde todos los puntos que son equivalentes en $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$, y que π lleva por ende al mismo punto del proyectivo. Comprobamos que

$$\mathcal{L}_{\Gamma}G = 0 \quad \mathcal{L}_{\Gamma}\Omega = 0$$

de modo que por parte de los puntos que sólo difieran en una fase no vamos a encontrar problemas. No sucede lo mismo lamentablemente, en el caso los puntos que difieren “en módulo”, pues

$$\mathcal{L}_{\Delta}G = -2G \quad \mathcal{L}_{\Delta}\Omega = -2\Omega$$

De modo que ahora nos preguntamos, ¿podemos multiplicar nuestros tensores por una función de manera que sean proyectables? La respuesta es sí, redefiniendo los tensores de la siguiente

manera:

$$G_P(\psi) = \langle \psi | \psi \rangle G(\psi) \quad \Omega_P(\psi) = \langle \psi | \psi \rangle \Omega(\psi)$$

Estos tensores ahora sí cumplen

$$\mathcal{L}_\Delta G_P = 0 \quad \mathcal{L}_\Delta \Omega_P = 0$$

Es más, tal y como estamos proyectando, es claro que podemos redefinir estos tensores sumándoles cualquier tensor que la proyección $T_\pi : T\mathcal{M}_Q \otimes T\mathcal{M}_Q \mapsto TP \otimes TP$ vaya a anular, sin que dejen de ser por ello proyectables:

$$\begin{aligned} G_P &= \langle \psi | \psi \rangle G - \Gamma \otimes \Gamma - \Delta \otimes \Delta \\ \Omega_P &= \langle \psi | \psi \rangle \Omega + \Gamma \otimes \Delta - \Gamma \otimes \Delta \end{aligned}$$

La ventaja que tiene esta asignación es que proporciona cierta coherencia a la construcción, ya que si calculamos las 2-formas asociada a los bivectores G_P y Ω_P tenemos:

$$g_P = \frac{g}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\hat{\Delta} \otimes \hat{\Delta}}{\langle \psi | \psi \rangle^2} - \frac{\hat{\Gamma} \otimes \hat{\Gamma}}{\langle \psi | \psi \rangle^2} \quad \omega_P = \frac{\omega}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\hat{\Delta} \wedge \hat{\Gamma}}{\langle \psi | \psi \rangle^2}$$

donde $\hat{\Delta} = g(\Delta, \cdot)$, $\hat{\Gamma} = g(\Gamma, \cdot)$ son las 1-formas asociadas a los campos vectoriales Δ y Γ . Precisamente g_P y ω_P son el resultado de hacer el *pullback* de las estructuras covariantes sobre P asociadas a las contravariantes $T_\pi(G_P), T_\pi(\Omega_P)$. Con los tensores que hemos trasladado, el espacio proyectivo se ve dotado de una estructura Kähler $(P, T_\pi(G_P), T_\pi(\Omega_P))$.

En el caso de las funciones asociadas a operadores, para hacerlas proyectables hay que hacer un ajuste similar. Definimos

$$\begin{aligned} e_A : \mathcal{M}_Q &\mapsto \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto \frac{\langle \psi | A \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \end{aligned}$$

Ahora podemos trabajar en el proyectivo como hemos venido haciendo en la variedad original. En particular tenemos

$$\begin{aligned} G_p(de_A, de_B) &= e_{\frac{1}{2}(AB+BA)} - e_A e_B \\ \Omega_p(de_A, de_B) &= e_{[A,B]_-} \end{aligned}$$

Nótese que de la primera de las expresiones anteriores:

$$G_p(de_A, de_B) = e_{A^2} - e_A^2 = \Delta A$$

A.3. Aplicación momento

Para terminar, vamos a ver cómo se relacionan la construcción que presentamos en este apéndice con la que hemos empleado en la memoria principal. Con lo que hemos visto arriba somos capaces de asignarle a cada operador hermítico A una función definida sobre la variedad \mathcal{M}_Q . Así pues,

podemos definir

$$F : i\mathfrak{u} \times \mathcal{M}_{\mathcal{Q}} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(A, \psi) \longmapsto f_A(\psi) = \frac{1}{2} \langle \psi | A \psi \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|A)$$

Si en esta función fijamos el segundo argumento, $F_{\psi}(A) = F(A, \psi)$, el resultado es una aplicación lineal de $i\mathfrak{u}$ en \mathbb{R} , esto es, un elemento de $(i\mathfrak{u})^*$. De modo que podemos definir la **aplicación momento**

$$\mu : \mathcal{M}_{\mathcal{Q}} \longmapsto (i\mathfrak{u})^*$$

$$\psi \longmapsto F_{\psi}$$

De hecho, podemos repetir todo el proceso empleando \mathcal{P} , el espacio proyectivo, en lugar de $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$. En ese caso la primera aplicación queda

$$E : i\mathfrak{u} \times \mathcal{P} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(A, [\psi]) \longmapsto e_A(\psi) = \frac{\langle \psi | A \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \text{tr} \left(\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle \psi | \psi \rangle} A \right)$$

y la aplicación momento queda:

$$\tilde{\mu} : \mathcal{P} \longmapsto (i\mathfrak{u})^*$$

$$[\psi] \longmapsto E_{[\psi]}$$

Esta aplicación es inyectiva, y compuesta con el isomorfismo $\varphi : (i\mathfrak{u})^* \longmapsto i\mathfrak{u}$ nos da una inyección de \mathcal{P} en $i\mathfrak{u}$, cuya imagen es el conjunto de estados puros, esto es, la frontera del conjunto de matrices densidad:

$$\mathcal{P} \longmapsto (i\mathfrak{u})^*$$

$$[\psi] \longmapsto \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

De hecho si la restringimos a su imagen, la aplicación momento

$$\tilde{\mu} : \mathcal{P} \longmapsto \text{Im}_{\tilde{\mu}}(\mathcal{P})$$

es un difeomorfismo, que nos permite realizar, por ejemplo, el *pullback* de funciones

$$\tilde{\mu}^* : C^{\infty}(i\mathfrak{u}) \longmapsto C^{\infty}(\mathcal{P})$$

$$f \longmapsto \tilde{\mu}^*(f)([\psi]) = f(\tilde{\mu}([\psi]))$$

Sea $A \in i\mathfrak{u}$. Entonces ya hemos visto que podemos tomar la función \hat{A} asociada a A definida en $(i\mathfrak{u})^*$ interpretándolo como un elemento del bidual, $\hat{A}(\xi) = (\xi, A)$. Se comprueba entonces que el *pullback* de esta función es:

$$\tilde{\mu}^*(\hat{A}) = e_A$$

La aplicación momento nos proporciona la conexión entre la formulación empleada en el capítulo 2 (que podríamos llamar de Heisenberg) y la de Schrödinger que hemos resumido en este apéndice. En efecto, la inyectividad de $\tilde{\mu}$ nos va a permitir pasar tensores del espacio proyectivo a $\text{Im}_{\tilde{\mu}}(\mathcal{P}) \subset \mathfrak{u}^*$ por *pushforward*:

$$\tilde{\mu}_* : T\mathcal{P} \otimes T\mathcal{P} \longmapsto T(i\mathfrak{u})^* \otimes T(i\mathfrak{u})^*$$

Así que lo aplicamos al tensor antisimétrico de la estructura Kähler que hemos definido en el espacio proyectivo:

$$\tilde{\mu}_*(\Omega_{\mathcal{P}})(d\hat{A}, d\hat{B}) = \Omega_{\mathcal{P}}(\tilde{\mu}^*(\hat{A}), \tilde{\mu}^*(\hat{B})) = \Omega_{\mathcal{P}}(de_A, de_B) = e_{-i(AB-BA)}$$

En un punto concreto $\rho_\psi = \tilde{\mu}([\psi]) = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$ de $\text{Im}_{\tilde{\mu}}(\mathcal{P})$ esto queda

$$\tilde{\mu}_*(\Omega_{\mathcal{P}})|_{\rho_\psi}(d\hat{A}, d\hat{B}) = e_{-i(AB-BA)}([\psi]) = (\rho_\psi, -i(AB-BA)) = \Lambda_{\rho_\psi}(d\hat{A}, d\hat{B})$$

Así pues,

$$\tilde{\mu}_*(\Omega_{\mathcal{P}}) = \Lambda|_{\text{Im}_{\tilde{\mu}}(\mathcal{P})}$$

y hemos obtenido el tensor antisimétrico Λ sobre $(i\mathfrak{u})^*$ a partir del también antisimétrico $\Omega_{\mathcal{P}}$, resultando la conexión entre ambos formalismos. Análogamente se procedería con los dos tensores simétricos.

Apéndice B

Guía de conceptos matemáticos

Este apéndice pretende asistir al lector poco familiarizado con la geometría diferencial para que pueda seguir el texto de esta memoria sin excesivo esfuerzo por su parte. Presentamos pues en él los conceptos básicos de dicha rama de las matemáticas. No buscaremos tanto la explicación rigurosa y detallada en las definiciones como que el lector disponga de una referencia rápida de algunas ideas clave de geometría diferencial.

B.1. Variedades diferenciables

El objeto matemático básico que necesitamos para trabajar en geometría diferencial es una **variedad diferenciable**. En el espacio euclídeo \mathbb{R}^n sabemos trabajar con funciones, decir si son diferenciables y en definitiva emplear todas las herramientas del cálculo diferencial. Una variedad diferenciable generaliza estos espacios permitiendo pasar a hacer cálculo sobre otros objetos, como por ejemplo superficies como la esfera. Para conseguirlo necesitamos que estas superficies sean “parecidas” a \mathbb{R}^n , al menos localmente. Este parecido nos lo da la noción de carta:

Definición B.1. *Dado M espacio topológico, y p un punto del mismo, una **carta n -dimensional en p** es un par (U, ϕ) con U entorno abierto de p en M y $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo (aplicación continua y con inversa continua).*

Básicamente, una carta nos permite parametrizar el entorno U de un punto de la variedad con n parámetros. Las funciones coordenadas de la carta son entonces $x_i = \pi_i \circ \phi$ con $\pi_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$ las proyecciones canónicas. Con lo que tenemos hasta ahora podemos definir lo que es una variedad topológica:

Definición B.2. *Una **variedad topológica** de dimensión n es un espacio topológico¹ M tal que para cada $p \in M$ existe una carta n -dimensional en p .*

La incorporación de la diferenciabilidad nos lleva al concepto de variedad diferenciable.

Definición B.3. *Un **atlas C^k** sobre un espacio topológico M es una familia de cartas (U_α, ϕ_α) sobre M tales que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la aplicación*

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

¹Técnicamente hablando, el espacio ha de ser además un espacio de Hausdorff y cumplir el segundo axioma de numerabilidad

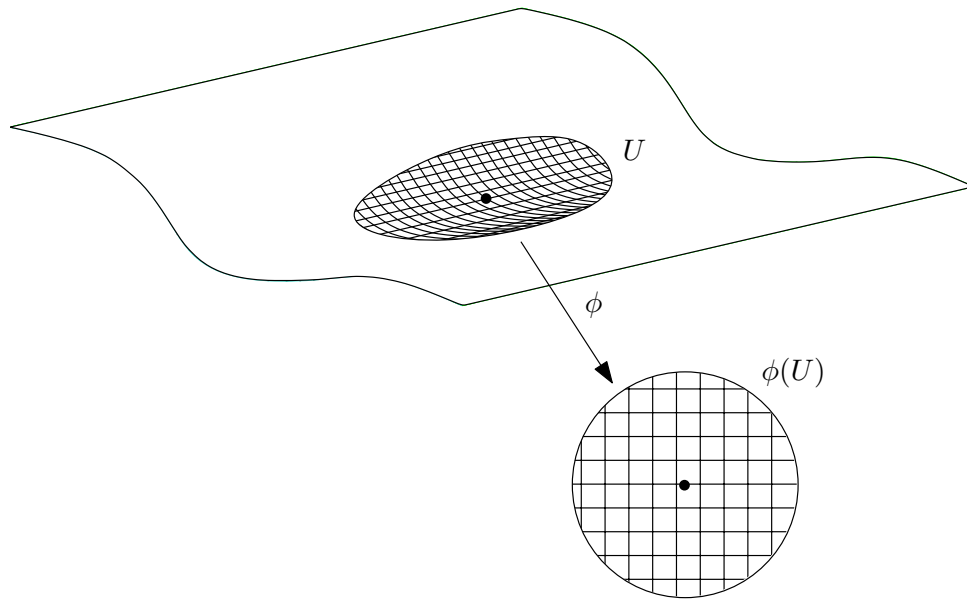


Figura B.1: Concepto de carta n -dimensional.

es un difeomorfismo de clase C^k (biyección C^k con inversa C^k). Diremos que un atlas es **maximal** si no está contenido en uno mayor.

Dar un atlas sobre M es por tanto dar un conjunto de cartas compatibles en el sentido de que si se solapan podemos hacer la transición de una carta a otra de una manera suave (C^k). Así pues, definimos

Definición B.4. Una **variedad diferenciable** C^k un espacio topológico dotado de un atlas maximal C^k .

(De ahora en adelante trabajaremos con variedades C^∞ .)

Gracias a las cartas podemos trabajar como si estuviéramos en \mathbb{R}^n . Por ejemplo, diremos que una función $f : M \rightarrow N$ con M, N variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente es diferenciable en $p \in M$ si, dadas cartas (U, ϕ) de M en p y (V, ψ) de N en $f(p)$, la función $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\phi^{-1}(p)$.

Una **subvariedad** N de una variedad M es, sin ánimo de ser demasiado rigurosos aquí, un subconjunto $N \subset M$ sobre el que existe una estructura de variedad diferenciable inducida por la de M . Una **foliación** de una variedad M es una familia de subvariedades disjuntas de M cuya unión es M . Un ejemplo sencillo: el conjunto formado por una recta dada y todas sus rectas paralelas en un plano constituye una foliación de dicho plano.

Las aplicaciones entre variedades que respetan la estructura diferenciable se llaman difeomorfismos, igual que los de \mathbb{R}^n :

Definición B.5. Un **difeomorfismo** $F : M \rightarrow N$ es una biyección diferenciable cuya inversa es también diferenciable.

B.2. Espacios tangente y cotangente. Diferencial de una aplicación.

Queremos ahora definir algo similar a los vectores en un punto de \mathbb{R}^n sobre nuestra variedad. Esto nos vendrá bien para definir sobre ellas campos vectoriales que serán los que traduzcan las ecuaciones diferenciales.

Definición B.6. Llamamos **vector** en un punto $p \in M$ a toda aplicación lineal $v : C^\infty(p) \mapsto \mathbb{R}$ (donde $C^\infty(p)$ es el conjunto de las funciones reales sobre M que son infinitamente diferenciables en p) que cumple la regla de Leibniz:

$$v(f_1 f_2) = v(f_1) f_2(p) + f_1(p) v(f_2)$$

El conjunto $T_p M$ de los vectores tangentes en p a M se llama **espacio tangente en p a M** y es un espacio vectorial de dimensión igual a la de M como variedad diferenciable. La unión de los espacios tangentes a M en todos sus puntos se llama **fibrado tangente** y se denota

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

Imagine el lector una curva $\gamma(t)$ sobre M que pasa por p para $t = 0$, $\gamma(0) = p$. El vector tangente a $\gamma(t)$ en p es la aplicación lineal X_p que actúa sobre $f \in C^\infty(p)$ así:

$$X_p(f) = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) \right|_{t=0}$$

Puede verse que todos los vectores son de esta forma y de hecho existe una definición alternativa de vector en p como clase de equivalencia de curvas que en p tienen el mismo vector tangente, según la expresión que acabamos de dar. Una base de $T_p M$ asociada a una determinada carta viene dada por las parciales con respecto a las coordenadas de dicha carta:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$$

Para hallar las componentes de un vector dado en dicha base no hay más que evaluarlo sobre las funciones coordenadas:

$$X = \sum_{i=1}^n X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Los duales de los vectores van a jugar un papel muy importante también:

Definición B.7. Llamamos **espacio cotangente a M en p** al espacio $T_p^* M$ dual del espacio tangente $T_p M$. Sus elementos reciben el nombre de **covectores** o **vectores covariantes**. La unión de los espacios cotangentes a M en todos sus puntos se llama **fibrado cotangente** y se denota

$$T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

La base dual de la dada por $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \equiv \partial_i \right\}$ se denota dx_i , y por lo tanto tenemos:

$$dx_i(\partial_j) = \partial_j(x_i) = \delta_{ij}$$

Dado un difeomorfismo $F : M \rightarrow N$ podemos emplearlo para transportar vectores de M a N mediante la aplicación diferencial en un punto p , $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$. Dados $X_p \in T_p M, f \in C^\infty(F(p))$

$$[F_{*p}(X_p)]_{F(p)}(f) := X_p(f \circ F)$$

Es decir, el valor del vector en $T_{F(p)} N$ actuando sobre f se define como el del vector en $T_p M$ actuando sobre $f \circ F$ que ya es una función de $C^\infty(p)$.

En base a esto, podemos definir también la aplicación codiferencial $F_p^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$, que nos permite transportar covectores de la variedad destino a la variedad origen (¡nótese que va en sentido inverso!), y que se define, dados $X_p \in T_p M, \omega_{F(p)} \in T_{F(p)}^* N$, como:

$$[F_p^*(\omega_{F(p)})](X_p) := \omega_{F(p)}[F_{*p}(X_p)]$$

B.3. Campos vectoriales, 1-formas y tensores

Definición B.8. Un *campo vectorial* X sobre una variedad diferenciable M es una función

$$X : M \rightarrow TM$$

que asocia a cada punto p un vector $X_p \in T_p M$ en dicho punto. El conjunto de campos vectoriales sobre M se denota $\mathfrak{X}(M)$.

Un ejemplo típico es el de un campo central, como puede ser el campo eléctrico de una carga puntual situada en el origen de \mathbb{R}^3 , que es proporcional a

$$X_p \propto \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{r^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

Al igual que los vectores tangentes, un campo vectorial puede actuar sobre una función, dando lugar en este caso a otra función que resulta sin más de la evaluación punto a punto:

$$[X(f)](p) = X_p(f)$$

Los campos vectoriales sirven para representar ecuaciones diferenciales sobre la variedad. Por ejemplo, las ecuaciones de Hamilton de la Mecánica Clásica. Si M es la variedad parametrizada por las coordenadas generalizadas q_j, p_j , entonces las ecuaciones

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

las traduce el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$X_p = \frac{\partial H}{\partial p_j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial p_j}$$

Las soluciones de la ecuación son a su vez curvas integrales del campo sobre la variedad:

Definición B.9. Diremos que $\gamma(t) : I \rightarrow M$ curva sobre M es una *curva integral* del campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ si para todo $t \in I$, $X_{\gamma(t)}$ es el vector tangente, como lo hemos definido

arriba a la curva en $\gamma(t)$, es decir si para toda $f \in C^\infty(\gamma(t))$

$$\left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right|_t = X_{\gamma(t)}(f)$$

El conmutador de campos vectoriales $[X, Y] = XY - YX$ es una operación cerrada en $\mathfrak{X}(M)$ y con él este espacio queda dotado de una estructura de álgebra de Lie: dicho conmutador es antisimétrico y cumple la identidad de Jacobi y es por ello un buen paréntesis de Lie, como los que vemos en el capítulo 2, que en ese caso son conmutadores de operadores lineales sobre espacios de Hilbert.

Igual que hemos definido campos de vectores, podemos definir campos de covectores, que reciben el nombre de 1-formas:

Definición B.10. Una **1-forma diferencial** en una variedad diferenciable M es una función

$$\omega : M \mapsto T^*M$$

que asocia a cada punto p un covector $\omega_p \in T_p^*M$ en dicho punto.

Dada una función $f \in C^\infty(M)$ podemos definir la 1-forma diferencial df como

$$(df)_p(X_p) = X_p(f)$$

Los vectores y covectores se pueden generalizar por medio del producto tensorial:

Definición B.11. Un **tensor de tipo** (r, s) en $p \in M$ es un elemento de

$$\underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_r \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_s$$

Sabemos que un covector ω_p actúa sobre un vector X_p para dar un número real $\omega_p(X_p)$. Podemos entonces interpretar que un vector X_p actúa sobre un covector ω_p para dar un número real que se denota $i_{X_p}(\omega_p) = \omega_p(X_p)$. Estamos pues identificando el espacio tangente en p con su bidual, el dual de su dual. La acción de los campos sobre las funciones encaja en esta categoría:

$$X_p(f) = df_p(X_p) = i_{X_p}(df_p)$$

Visto esto, podemos ver un tensor (r, s) T_p como un objeto que actúa sobre r covectores y s vectores para dar un número real:

$$T(X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s)$$

En particular un tensor $(1,0)$ es un vector y un tensor $(0,1)$ es un covector. Podemos definir un **campo tensorial** de manera análoga a los campos vectoriales y 1-formas. Las operaciones con campos tensoriales son análogas a las que hacemos con tensores en un punto, tomándolas en cada punto de la variedad.

Definición B.12. Dado un tensor T_p de tipo $(r,0)$ (llamado r veces contravariante), r covectores $\omega_1, \dots, \omega_r \in T_{F(p)}^*N$ y un difeomorfismo $F : M \mapsto N$ podemos definir el **pushforward** $F_{*p}T_p$

por F de manera análoga a como definimos la aplicación diferencial en p :

$$[F_{*p}T_p](\omega_1, \dots, \omega_s) = T_p(F_p^*(\omega_1), \dots, F_p^*(\omega_s))$$

El *pushforward* de un campo tensorial T r veces contravariante sobre M será por ende un campo tensorial F_*T r veces contravariante sobre N tal que evaluado en cada punto $F(p)$ nos da el *pushforward* de T_p :

$$[F_{*p}T]_{F(p)}(\omega_1, \dots, \omega_s) = T_p(F_p^*(\omega_1), \dots, F_p^*(\omega_s))$$

Definición B.13. Dado un tensor $T_{F(p)}$ de tipo $(0, s)$ (llamado s veces covariante), s vectores $X_1, \dots, X_s \in T_pM$ y un difeomorfismo $F : M \rightarrow N$ podemos definir el **pullback** $F_p^*T_{F(p)}$ por F de manera análoga a como definimos la aplicación codiferencial en p :

$$[F_p^*T_{F(p)}](X_1, \dots, X_s) = T_{F(p)}(F_{*p}(X_1), \dots, F_{*p}(X_s))$$

El *pullback* de un campo tensorial T s veces covariante sobre N será por ende un campo tensorial F^*T s veces covariante sobre M tal que evaluado en cada punto p nos da el *pullback* de $T_{F(p)}$:

$$[F_p^*T]_p(X_1, \dots, X_s) = T_{F(p)}(F_{*p}(X_1), \dots, F_{*p}(X_s))$$

Nótese que como antes los tensores contravariantes van de M a N (forward) y los covariantes al revés (back). Terminamos esta breve introducción definiendo la **derivada de Lie** de un tensor con respecto a un campo vectorial X . Ésta es básicamente una medida de cómo cambia el tensor a lo largo de las curvas integrales de dicho campo vectorial. Para un campo tensorial T que sea s veces covariante, se define su derivada de Lie respecto de X en un punto p como

$$\mathcal{L}_X(T)|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \left((\phi_t^*T)|_p - T|_p \right)$$

Es decir, la derivada de Lie compara T en un punto p con el *pullback* por ϕ_t de T , donde ϕ_t es el flujo de X , esto es el difeomorfismo de M en sí misma tal que $\phi_t(p) = \gamma(t)$ siendo γ la curva integral de X que en 0 pasa por p , $\gamma(0) = p$.

Por su parte, para un campo tensorial T que sea r veces contravariante, se define su derivada de Lie respecto de X en un punto p como

$$\mathcal{L}_X(T)|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \left(T|_p - (\phi_{*t}T)|_p \right)$$

Nótese que salvo por el cambio de signo, la definición es equivalente: comparamos el campo en p con el *pushforward* del mismo a ese mismo punto por el flujo del campo. En el caso particular de que T sea un campo vectorial, la derivada de Lie coincide con el conmutador de los campos vectoriales $\mathcal{L}_X(T) = [X, T]$, y en el caso de T un tensor r veces contravariante y totalmente antisimétrico (llamado un multivector), la expresión es la misma pero sustituyendo el conmutador por su generalización para multivectores, el paréntesis de Schouten $[\cdot, \cdot]_S$.

Bibliografía

- [1] Abhay Ashtekar and Troy A Schilling. Geometrical formulation of quantum mechanics. In *On Einstein's Path*, pages 23–65. Springer, 1999.
- [2] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford university press, 2002.
- [3] Dorje C Brody and Lane P Hughston. Geometric quantum mechanics. *Journal of geometry and physics*, 38(1):19–53, 2001.
- [4] José Fernando Cariñena, Jesús Clemente Gallardo, Jorge Alberto Jover Galtier, and Giuseppe Marmo. Open systems and geometric quantum mechanics: Examples. in preparation.
- [5] José Fernando Cariñena, Jesús Clemente-Gallardo, and Giuseppe Marmo. Geometrization of quantum mechanics. *Theoretical and Mathematical Physics*, 152(1):894 – 903, 2007.
- [6] Dariusz Chruściński, Paolo Facchi, Giuseppe Marmo, and Saverio Pascazio. The observables of a dissipative quantum system. *Open Systems & Information Dynamics*, 19(01):1250002, 2012.
- [7] Dariusz Chruscinski and Andrzej Jamiolkowski. *Geometric phases in classical and quantum mechanics*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] Jesús Clemente Gallardo. The geometrical formulation of quantum mechanics. *Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza.*, 67:51–103, 2012.
- [9] Fernando Falceto, Leonardo Ferro, Alberto Ibort, and Giuseppe Marmo. Reduction of lie-jordan banach algebras and quantum states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(1):015201, 2013.
- [10] Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski, and Ennackal Chandy George Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of n-level systems. *Journal of Mathematical Physics*, 17(5):821–825, 1976.
- [11] André Heslot. Quantum mechanics as a classical theory. *Physical Review D*, 31(6):1341, 1985.
- [12] Erdal İnönü and Eugene P Wigner. On the contraction of groups and their representations. In Arthur S. Wightman, editor, *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, volume A / 1 of *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, pages 488–502. Springer Berlin Heidelberg, 1993.

- [13] Thomas W B Kibble. Geometrization of quantum mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 65(2):189–201, 1979.
- [14] Andrzej Kossakowski. On quantum statistical mechanics of non-hamiltonian systems. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):247 – 274, 1972.
- [15] Karl Kraus, Arno Böhm, John D Dollard, and WH Wootters. States, effects, and operations fundamental notions of quantum theory. In *States, Effects, and Operations Fundamental Notions of Quantum Theory*, volume 190, 1983.
- [16] Goran Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 48(2):119–130, 1976.
- [17] Jerrold E Marsden and Tudor Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2013.
- [18] John Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Number 2. Princeton university press, 1955.
- [19] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [20] Ángel Rivas and Susana F Huelga. *Open Quantum Systems*. Springer, 2012.
- [21] Irving E Segal. Irreducible representations of operator algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53(2):73–88, 1947.
- [22] Irving E Segal. Postulates for general quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, pages 930–948, 1947.
- [23] Franco Strocchi. *An introduction to the mathematical structure of quantum mechanics: a short course for mathematicians*, volume 28. World Scientific, 2008.