

Facultad de Educación

Universidad de Zaragoza

Grado en Magisterio en Educación Primaria

Trabajo Fin de Grado

CÁLCULO MENTAL EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Autor: Sonia Pregal Cabello

Director: Rafael Escolano Vizcarra

Junio de 2015



Universidad
Zaragoza

RESUMEN

Diversos estudios constatan que el cálculo mental se trabaja poco en las aulas de Educación Primaria dado que se prima el uso de los algoritmos escritos en detrimento de la enseñanza de técnicas de cálculo flexible entre las que destacan las estrategias de cálculo mental. Debido a este hecho, en este trabajo de final de grado nos vamos centrar en el estudio del cálculo mental mediante la enseñanza sistemática de estrategias de suma, resta, multiplicación y división de números naturales. La parte experimental de la propuesta de enseñanza se llevará a cabo en un aula de 5º de Educación Primaria del colegio San Agustín, ubicado en la ciudad de Zaragoza.

Palabras clave: cálculo mental, estrategias, algoritmo, enseñanza, número natural, suma, resta, multiplicación, división, Educación Primaria, sentido numérico.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	Pág. 5
CAPÍTULO I - MARCO TEÓRICO Pág. 7	
1. Pensamiento y Sentido Numérico	Pág. 7
2. Definición de cálculo mental	Pág. 10
3. El cálculo mental y el cálculo algorítmico	Pág. 11
4. Posicionamientos a favor de la enseñanza del cálculo mental en las aulas de Educación Primaria	Pág. 14
5. Principios metodológicos para el diseño de una propuesta de enseñanza del cálculo mental en Educación Primaria	Pág. 17
6. Metodología para la enseñanza del cálculo mental	Pág. 19
7. Objetivos de la enseñanza del cálculo mental en Ed. Primaria	Pág. 21
8. Contenidos para la enseñanza del cálculo mental	Pág. 22
8. 1. Sistematización de un conjunto de resultados	Pág. 22
8. 2. Construcción de procedimientos personales	Pág. 23
8. 3. Estrategias de cálculo mental	Pág. 25
9. Situación actual de la enseñanza del cálculo mental	Pág. 29
9.1. Análisis de los currícula de Ed. Primaria	Pág. 29
9.2. Análisis de un libro de texto	Pág. 32
CAPÍTULO II - MARCO EXPERIMENTAL Pág. 38	
1. Diseño de la propuesta de enseñanza	Pág. 38
2. Contexto de la experimentación	Pág. 39

3. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba inicial	Pág. 41
4. Sesiones de enseñanza	Pág. 45
4.1. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la suma	Pág. 46
4.2. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la resta	Pág. 50
4.3. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la multiplicación	Pág. 54
4.4. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la división	Pág. 60
5. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba final	Pág. 66
6. Estudio comparado entre la prueba inicial y final	Pág. 73
6.1. Estudio comparativo de cada una de las operaciones	Pág. 74
6.2. Estudio comparativo de cada una de los alumnos	Pág. 90
 CAPÍTULO III - CONCLUSIONES	Pág. 98
 BIBLIOGRAFÍA	Pág. 102
 ANEXOS	Pág. 104

INTRODUCCIÓN

El trabajo que se expone a continuación, es el último trabajo del grado de Magisterio en Educación Primaria y se desarrolla en torno al cálculo mental y su aplicación en el aula. Elegí este tema porque a día de hoy el cálculo mental es un contenido que mencionan explícitamente los currículos nacional y autonómico pero que está relegado a un segundo plano en las clases de matemáticas de Educación Primaria, cuestión ésta que ponen de manifiesto los investigadores desde hace años (Gómez, 1988; Ortega y otros, 2005).

La enseñanza del cálculo mental en las aulas es imprescindible si se desea incrementar la competencia matemática de los alumnos de Educación Primaria. En efecto, el cálculo mental contribuye poderosamente a la formación matemática de los alumnos porque:

- ayuda a profundizar en la comprensión de los números, puesto que los alumnos tienen que transformarlos haciendo uso de la descomposición polinómica decimal asociada a su representación decimal.
- colabora en la profundización de las estructuras numéricas, relacionando las operaciones entre sí y haciendo uso de sus propiedades. En el caso de los números naturales se ponen en juego las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y de la multiplicación, y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto de la suma.
- mejora la exactitud en los resultados y por tanto el rendimiento aritmético,
- ayuda a controlar el cálculo aproximado, y
- permite que los alumnos pongan en juego y verbalicen estrategias personales cálculo mental.

Además, de la finalidad formativa el cálculo mental contribuye a la finalidad funcional de las matemáticas por tratarse de un conocimiento importante en la vida diaria de los escolares y de cualquier ciudadano.

Por estas razones estudiamos, en este trabajo, el cálculo mental como contenido fundamental que contribuye al desarrollo del sentido numérico de las

personas. Nos vamos a ocupar de los fenómenos de enseñanza asociados al cálculo mental y vamos a diseñar, desarrollar y evaluar una propuesta parcial de enseñanza en un aula de 5º curso de Educación Primaria.

Los objetivos de este Trabajo Fin de Grado son:

- Delimitar el concepto matemático de cálculo mental de números naturales y contraponer este cálculo con los procedimientos escritos.
- Analizar la enseñanza del cálculo mental en las aulas de Educación Primaria a partir de dos fuentes documentales: el currículo oficial y las propuestas didácticas que realizan algunas editoriales de libros de texto.
- Diseñar, desarrollar y evaluar una propuesta parcial de enseñanza de estrategias de cálculo mental en 5º curso de Educación Primaria. Nuestro propósito es enseñar, de modo sistemático, estrategias de cálculo mental para las operaciones suma, resta, multiplicación y división de números naturales. Para evaluar la intervención realizamos una prueba inicial, antes de comenzar la intervención, y otra prueba final, después de realizar la intervención docente.

La memoria de este trabajo se organiza en tres capítulos:

- 1.** En el capítulo I se hace una reflexión a partir de fuentes bibliográficas sobre el cálculo mental, la relación entre éste y los algoritmos escritos, analizamos la situación actual de la enseñanza del cálculo mental en Educación Primaria, los principios metodológicos que articulan la propuesta de enseñanza y contenidos en un grupo natural de 5º curso de Educación Primaria.
- 2.** En el capítulo II se describe la investigación de campo. Utilizando las orientaciones metodológicas de varios autores se llevarán a cabo distintas pruebas de suma, resta, multiplicación y división que serán realizadas por los alumnos, recogiendo y analizando los datos obtenidos.
- 3.** En el capítulo III, se recogen las conclusiones de este trabajo.

CAPÍTULO I:

MARCO TEÓRICO

1. Pensamiento y Sentido Numérico.

Este trabajo se sitúa en la línea de investigación de Didáctica de las Matemáticas denominada Pensamiento Numérico y Algebraico que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social. Esta línea de investigación estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico y Castro, 1995; p. 167).

El marco conceptual en que se sitúa esta línea de investigación se sustenta en los siguientes principios: asume que la construcción del conocimiento matemático es un fenómeno social y cultural y que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad; centra su objeto de reflexión en el campo de las matemáticas que comienza con la aritmética escolar, avanza por los sistemas numéricos superiores y continúa con el estudio sistemático de las relaciones numéricas; tiene una orientación esencialmente curricular; el estudio de los errores y dificultades en la compresión de los escolares sobre los campos conceptuales reseñados es parte esencial de la tarea de análisis e interpretación que se lleva a cabo en esta línea de investigación. (Castro, Rico y Romero, 1997).

Desde esta línea de investigación Castro (2008, p.1) define Pensamiento Numérico como aquello que la mente puede hacer con los números. Dicho pensamiento estará más desarrollado cuantas más compleja sea la acción que realice el sujeto con los mismos. Pocas cosas abstractas nos son tan “familiares” como los números naturales en su estado más puro: 1, 2, 3, 4, 5,... No obstante, los cálculos con estos números pueden ser trabajosos, y llegar a obtener el número correcto puede ser difícil en multitud de ocasiones.

Según Castro (2008) el Pensamiento Numérico está estrechamente relacionado con otros constructos que permiten su desarrollo y le potencian, entre ellos se

encuentran: el Pensamiento Relacional, el Pensamiento Cuantitativo Flexible y, sobre todo, el Sentido Numérico.

Se dice que una persona *piensa relationalmente* cuando conecta ideas para extraer conclusiones. En el caso de que dicho pensamiento relacional se aplique a las matemáticas se hace factible la construcción de ideas matemáticas más complejas a partir de otras más simples. Una persona que resuelva correctamente la siguiente tarea de cálculo utilizará el pensamiento relacional:

“Sabiendo que $3 \times 37 = 111$ calcula mentalmente las siguientes multiplicaciones y explica cómo lo has hecho: 6×37 , 15×37 y 27×37 ”

Según Castro (2008) el *Pensamiento cuantitativo flexible* se refiere a la habilidad de pensar sobre situaciones cuantitativas de diversas formas y tomar en cada ocasión la que resulte más favorable. El pensamiento cuantitativo flexible proporciona soltura en el empleo de estrategias alternativas a las rutinas del cálculo escolar y da lugar a patrones de pensamiento originales en el contexto de la aritmética. El uso de estrategias de cálculo mental es un indicador del *Pensamiento cuantitativo flexible* y va a ser objeto de estudio en este Trabajo Fin de Grado. A modo de ejemplo el Pensamiento cuantitativo flexible se pone de manifiesto al operar 18×25 utilizando diferentes estrategias como:

- Descomponer el multiplicando o bien descomponer el multiplicador. En este último caso:

$$18 \times 25 = 18 \times (20 + 5) = (18 \times 20) + (18 \times 5) = 360 + 90 = 450$$

- Descomponer el multiplicando y el multiplicador. En el caso de descomponer el multiplicando y el multiplicador a la vez:

$$18 \times 25 = (10 + 8) \times (20 + 5) = (10 \times 20) + (10 \times 5) + (8 \times 20) + (8 \times 5)$$

- Completar un factor a la decena siguiente:

$$18 \times 25 = (20 - 2) \times 25 = (20 \times 25) - (2 \times 25)$$

- Compensar:

$$18 \times 25 = (18 : 2) \times (25 \times 2) = 9 \times 50$$

- Factorizar el multiplicando y/o multiplicador:

$$18 \times 25 = (2 \times 3 \times 3) \times (5 \times 5) = (2 \times 5) \times (3 \times 3 \times 5) = 10 \times 45$$

Desde la línea del Pensamiento Numérico y Algebraico, Gómez (2007) realiza una propuesta innovadora para la enseñanza del cálculo mental que denomina “cálculo flexible” y que plantea disminuir el énfasis tradicional sobre el cálculo escrito rígido, en favor de una combinación de cálculo variado: mental, estimado, con calculadora o con algoritmos estándar, según convenga al momento, a la situación y, al tamaño y características de los números involucrados. Más adelante, retomaremos y aplicaremos las atinadas sugerencias metodológicas de Gómez (2005, p. 24) en relación con la enseñanza de estrategias de cálculo mental en el aula:

“El cálculo mental es un dominio privilegiado para el trabajo colectivo en clase. Discutir acerca de las ventajas e inconvenientes de un método u otro, poner de relieve el significado o el trasfondo de los pasos que se siguen, traducirlos al lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis para unificar la descripción, la explicación, y el ejemplo, facilitar el uso de los hechos del sistema de numeración, y aplicar las propiedades y alteraciones invariantes de las cuatro operaciones, son tareas que ofrecen la posibilidad de un acercamiento del conocimiento y a la actividad matemática, con una fuerte presencia de aspectos motivadores y tal vez recreativos”.

Para Castro (2008) el *Sentido Numérico* es una forma especial de pensar sobre los números, no algorítmica, que conlleva una profunda comprensión de su naturaleza así como de las operaciones que se pueden realizar entre ellos. Se considera que esta forma de pensamiento está en estrecha relación con el pensamiento relacional y con el pensamiento cuantitativo flexible.

Una persona tiene *Sentido Numérico* cuando sabe cómo y cuándo usar los números; hace inferencias sobre valores numéricos apreciando los distintos niveles de exactitud donde aparecen; compone y descompone números cuando la situación lo requiere; utiliza los números en distintas representaciones de manera flexible, reconoce cuándo una representación es más útil que otra y sabe utilizarla; reconoce la magnitud de los números y hace juicios cuantitativos ajustados; conoce los efectos relativos de las operaciones sobre los números y percibe la razonabilidad de resultados y el orden de magnitud de los mismos; detecta errores aritméticos cometidos; utiliza referentes como hechos numéricos que modificados y adaptados proporcionan el resultado deseado; realiza cálculos mentales con gran facilidad utilizando en cada caso la estrategia adecuada; reconoce cuándo una estimación es apropiada para dar respuesta a una

situación planteada; opera con números de forma diferente a la repetición mecánica de los procesos que se tienen memorizados.

Según esto, el Sentido Numérico es un entramado complejo de capacidades numéricas muy importantes para la vida diaria de los ciudadanos pero, a la vez, difícil de conseguir. Desde los primeros niveles educativos, la enseñanza de las matemáticas debería ocuparse de desarrollar el sentido numérico de los escolares para convertirlos en ciudadanos numéricamente competentes.

Se observa que, entre los indicadores de Sentido Numérico, aparece “realizar cálculos mentales con gran facilidad utilizando en cada caso la estrategia adecuada”. El conocimiento y uso de estrategias de cálculo mental también es un indicador del *Pensamiento cuantitativo flexible* que acabamos de comentar. A los efectos de nuestro trabajo que se va a centrar en la enseñanza de las estrategias de cálculo mental consideramos el *Sentido Numérico* equivalente al Pensamiento Numérico y que, por lo tanto, abarca e incorpora las habilidades propias del *Pensamiento cuantitativo flexible* y que hemos ejemplificado anteriormente en el cálculo de multiplicación 18×25 .

En este trabajo vamos a diseñar, desarrollar e implementar una propuesta parcial de enseñanza en un aula de 5º curso de Educación Primaria que tiene como objetivo desarrollar el sentido numérico de los escolares a través de la aplicación de estrategias de cálculo mental adecuadas para operar números naturales.

2. Definición de cálculo mental.

Antiguamente, el cálculo mental ocupaba un lugar muy importante en las clases de matemáticas. Estaba relacionado con los cálculos memorizados, los que se realizaban de "cabeza", sin utilizar papel ni lápiz. Sin embargo, el objetivo principal era externo al cálculo mental ya que en el fondo lo único que se buscaba era su dominio para atacar, con garantías de éxito, el cálculo escrito. Más tarde, fue perdiendo peso hasta desaparecer o quedarse limitado a la memorización de las tablas de multiplicar. Sin embargo, la situación actual se caracteriza por la sobrevaloración de los algoritmos escritos y por la ausencia de enseñanza de estrategias de cálculo mental. Por este motivo es nuestro propósito de este trabajo abordar la enseñanza de estrategias de cálculo mental de modo sistemático.

El cálculo mental lo podemos definir como una manera de buscar caminos de resolución, compararlos, analizar los errores, validar los recursos nuevos y las soluciones obtenidas, apoyarse en propiedades y resultados para anticipar otros resultados, sistematizar y reorganizar relaciones y recursos, buscar explicaciones a las reglas elaboradas, etc. (De Marinis, 2008).

Bernardo Gómez (1988) caracteriza al cálculo mental de la siguiente manera: *es de cabeza; se puede hacer rápidamente; se apoya en un conjunto limitado de hechos numéricos; requiere ciertas habilidades: conteos, recolocaciones, compensaciones, descomposiciones, redistribuciones, etc., buscando sustituir o alterar los datos iniciales para trabajar con otros más cómodos, o más fáciles de calcular.* Este autor también considera la concentración, el hábito, la atención y el interés como factores determinantes para lograr resultados espectaculares. Además, hace una propuesta sobre el cálculo flexible con el que pretende *aprovechar la variedad de alternativas de cálculo disponibles, en un contexto de aprendizaje que supere la separación "escolar" entre las dos clases de conocimiento matemático, el procedimental y el conceptual* (Gómez, 2007). El objetivo de esta propuesta es desarrollar la capacidad y preparación para usar métodos alternativos de cálculo.

3. El cálculo mental y el cálculo algorítmico: dos mundos separados en la enseñanza.

A pesar de que existe un amplio consenso en incorporar el cálculo flexible como eje vertebrador de la enseñanza de la aritmética, educar a los alumnos con la capacidad de resolver los cálculos que se realizan en cualquier problema de Educación Primaria sin necesidad de acudir a los algoritmos escritos, éstos siguen monopolizando la práctica docente en las aulas. Como indican Barba y Calvo (2009, p. 68) los algoritmos escritos siguen siendo los contenidos organizadores del currículum. Es decir, por innovador que sea el proyecto educativo, la resta con llevadas se inicia en general en segundo de Primaria y la división por dos cifras es el regalo de Navidad de cuarto curso de Primaria.

Existen grandes diferencias entre el cálculo de algoritmos y el cálculo mental. Los cálculos algoritmizados están formados por una serie de reglas aplicables en un determinado orden, siempre del mismo modo sin importar los datos. Las operaciones de este tipo se caracterizan por usar un única técnica independientemente de cuáles sean

los números. Por el contrario, el cálculo mental según Parra (1994) es un *conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados*. Según esta definición, el cálculo mental se caracteriza por la utilización de diversas técnicas relacionadas con los números en cuestión.

La principal diferencia entre el cálculo algorítmico y el cálculo mental es la utilización de la misma técnica en el primero por lo que sólo requiere conocer sus pasos, y la utilización de varias técnicas para resolver un misma operación en el cálculo mental. Éste recurre a diferentes descomposiciones de los números basadas en propiedades de la numeración decimal y de las operaciones. Otra diferencia sería que en el cálculo mental, los números siguen considerándose en su globalidad mientras que en los algoritmos convencionales, se parte el número como si estuviera compuesto por cifras aisladas. El efecto negativo de descomponer el número en cifras es que se tiende a perder el sentido de cada una de las cifras.

Ambos cálculos recurren a conocimientos sobre resultados memorizados, a propiedades de la numeración y de las operaciones, pero lo hacen de manera diferente. Los algoritmos convencionales abarcan técnicas de cálculo valiosas por la facilidad que supone la automatización de ciertos mecanismos. Por otro lado, el cálculo mental construye relaciones que permiten un aprendizaje basado en la comprensión de los pasos que se llevan a cabo. Por lo tanto, el cálculo mental provoca la comprensión del funcionamiento de las propiedades de las operaciones relacionándolas con las características del sistema de numeración posicional y decimal.

Sancha (2011) compara el cálculo mental y escrito estableciendo una serie de diferencias y semejanzas. Las podemos observar en la siguiente tabla:

	Cálculo algoritmizado	Cálculo mental
Tipos de resultados	Exactos.	Exactos o aproximados.
Datos numéricicos (I)	Es independiente de ellos.	Depende de ellos pues, son analizados para determinar los caminos a seguir.
Datos numéricicos (II)	Considera sus cifras aisladas.	Lo considera de manera global.
Escritura de procedimientos	Es necesaria.	Es necesaria en muchos casos y muy conveniente en otros para explicitar la manera de pensar.
Propiedades de las operaciones	Una vez automatizados no es necesario tenerlas en cuenta.	Fundamentales en la elección de las estrategias. Las propiedades, en general, se traducen en estrategias de resolución.

Sobre la base del conocimiento conceptual que pone en juego la persona que realiza un cálculo mental que es muy diferente del que utiliza cuando realiza un cálculo algorítmico, Gómez (2007) alerta de la separación infructuosa entre los dos aspectos del conocimiento matemático: el conocimiento conceptual del estudiante y su conocimiento de los procedimientos rutinarios con símbolos y, como solución, propone un enfoque integrador en la enseñanza de la aritmética escolar donde haya espacio para tomar decisiones en relación con las diferentes opciones y métodos alternativos de cálculo. Para superar la separación “escolar” entre las dos clases de conocimiento matemático, el procedural y el conceptual, este investigador propone el cálculo flexible que consiste en trabajar en el aula distintos tipos de cálculo: mental, estimado, aproximado, escrito o con calculadora, según sea el tipo de problema a resolver.

Los docentes perciben que los alumnos poseen escaso conocimiento conceptual de los números y sus propiedades aunque utilicen correctamente los algoritmos escritos

y, por otra parte, les resulta difícil introducir en el aula estrategias de cálculo mental porque cuando los escolares conocen los algoritmos escritos tienden a utilizar éstos últimos cuando se les pide que operen mentalmente y se muestran reacios a admitir otras formas de operar a pesar de que sean conceptualmente muy valiosas como la descomposición de los números, el redondeo, la compensación, la commutación, la asociación o recolocación de números, etc.

4. Posicionamientos a favor de la enseñanza del cálculo mental en las aulas de Educación Primaria.

Muchos son los docentes e investigadores en Didáctica de las Matemáticas que abogan por la necesidad del cambio en la enseñanza de la aritmética escolar que consiste en integrar el cálculo mental y el cálculo de los algoritmos escritos.

La comunidad educativa se inclina, cada vez con mayor rotundidad, a recomendar la necesidad del trabajo en el aula del cálculo mental.

El informe Cockcroft (1982, pág. 92), señala: (...) "*Creemos que la decadencia del trabajo oral y mental en las clases de Matemáticas es consecuencia de la falta de reconocimiento de la importancia que el cálculo mental tiene en esta asignatura*".

National Council of Teachers of Mathematics (2003, pág.37), en el documento Principios y Estándares para la Educación matemática, recomienda: “*A medida que los niños de los niveles Pre-K-2 (5 a 8 años) van comprendiendo el significado de los números naturales y de las operaciones de adición y sustracción la enseñanza debería centrarse sobre estrategias de cálculo que desarrolleen la flexibilidad y la fluidez*”

B. Gómez (1988) está a favor de la implantación de este tipo de cálculo en el aula ya que el cálculo mental puede contribuir a la comprensión y sentido del número, puesto que su práctica implica el manejo de sumandos, factores, valores de posición, propiedades de las operaciones, etc. Además, su metodología puede dar una visión participativa de las Matemáticas.

En cuanto a efectos de aplicación en el aula, Gómez (1988) presenta las siguientes conclusiones:

- Los programas experimentales de enseñanza para el cálculo mental siempre producen un mayor avance en la habilidad para el cálculo que cuando se usan sólo los textos.
- La mayoría de los estudiantes usan en gran medida el método de columnas, los más hábiles en cálculo mental varían de método explorando y aprendiendo con la práctica.
- Existe una relación positiva entre la habilidad en cálculo mental y la habilidad general en Aritmética, compensación numérica, operaciones y propiedades.
- Recomiendan que el cálculo mental no se haga aisladamente sino integrado con el resto de los hechos aritméticos.

Sin embargo, docentes e investigadores son conscientes de las poderosas inercias al cambio que arrastra la larga tradición de la enseñanza de los algoritmos de cálculo escritos. En este sentido Barba y Calvo (2009, p. 69) recogen una frase de Lluís Segarra que resume de manera divertida la polémica de los algoritmos: “Solamente existen tres colectivos que actualmente dividen por dos cifras utilizando el algoritmo estándar de lápiz y papel: los niños que cursan cuarto de Primaria, los maestros de cuarto de Primaria cuando enseñan o corrigen las tareas de sus alumnos y los padres de los alumnos de cuarto de Primaria cuando les ayudan con esas tareas”.

Existen otras propuestas como la de "El Quinzel", un método de trabajo propuesto por los catalanes Lluis Segarra y David Barba que ofrece asesoramiento a los colegios y maestros.

Los objetivos de esta propuesta de "El Quinzel" son:

- Divertir con el uso de las matemáticas.
- Ofrecer posibilidades para que el alumno disfrute con ellas.
- Ofrecer asesoramiento matemático a colegios y maestros/as.
- Elaborar materiales, recursos y actividades para mejorar el aprendizaje de las matemáticas.

- Motivar al alumnado, a partir de sus propios avances y logros, para que siga aprendiendo matemáticas.

Además, esta propuesta consta de:

- Problemas graduados de cálculo global.
- Series de rapidez de cálculo mental.
- Tarjetas de rapidez de cálculo mental.
- Estimación numérica.
- Series de habilidades de cálculo.
- Series de cálculo analítico.

Otra propuesta es la de Jiménez (2010), que propone utilizar tablas de cálculo como método para trabajar el cálculo mental. Considera que estas tablas mejoran la rapidez del cálculo de operaciones aritméticas, algebraicas y situaciones matemáticas básicas. Es un método que pretende introducir de forma sistemática el cálculo mental en las clases de primaria y de secundaria. Se aplicará en clase con un tiempo reducido en el que quedarán registrados los resultados obtenidos por los alumnos los cuales serán de gran utilidad para el profesorado, el alumnado y sus familias. A este autor le preocupa la evolución de cada estudiante, y busca un método para recoger información de lo que han hecho.

Estas propuestas son muy interesantes a pesar de que se centran más en la rapidez de cálculo que en la enseñanza sistemática de estrategias de cálculo mental.

Existen otras propuestas para desarrollar el cálculo mental basado en la imagen mental del ábaco japonés. Este es el caso del programa ALOHA Mental Arithmetic cuyas estrategias de cálculo están asociadas a procedimientos de cálculo realizados sobre un ábaco en el que los números están descompuestos en diferentes órdenes de unidades y que nada tienen que ver con las estrategias de cálculo mental que propugnamos y que consisten en percibir y operar los números de modo global, atendiendo a las propiedades estructurales de las operaciones. Esta propuesta está muy alejada de la proponemos en este Trabajo Fin de Grado, de la de cálculo flexible de

Gómez (2007) o de la de calcular con números y no con dígitos que proponen Barba y Calvo (2015).

5. Principios metodológicos para el diseño de una propuesta de enseñanza del cálculo mental en Educación Primaria.

A la vista de las consideraciones realizadas en los apartados anteriores, la enseñanza del cálculo mental debería organizarse a partir de los siguientes principios metodológicos:

- Introducir los cálculos orales (mentales) antes que los algoritmos escritos. La introducción y ejercitación de los algoritmos de cálculo escrito anula otras formas de cálculo. Por este motivo el cálculo mental debe practicarse desde primer curso de Educación Primaria. Sabemos que los alumnos de primer curso son capaces de sumar números de dos cifras utilizando estrategias de cálculo mental antes de que reciban enseñanza del algoritmo escrito de la suma.
- Conceder más importancia a la enseñanza de estrategias del cálculo mental para desarrollar la capacidad para usar métodos alternativos de cálculo. Esto supone cierta capacidad para identificar las formas equivalentes de una expresión numérica y las alteraciones invariantes de una operación aritmética. También supone cierta preparación o habilidad para discriminar de entre todas las expresiones equivalentes y las alteraciones invariantes las que son relevantes para realizar el cálculo.
- Conceder menos importancia a la velocidad de cálculo o al uso de la memoria. Es cierto que los alumnos deben conocer los hechos numéricos para desarrollar estrategias de cálculo mental y saber recuperar relativamente pronto de la memoria los hechos numéricos. Se trata un requisito previo pero éste no debería ser el objetivo prioritario.
- Utilizar el sistema de representación horizontal en lugar del sistema de representación de columnas. El sistema de representación horizontal es más significativo porque deja ver aspectos sintácticos y semánticos que en el sistema de representación de columnas permanecen ocultos. Por ejemplo, la sintaxis del algoritmo tradicional de la suma de dos números donde los números se colocan en vertical no suele informar del conocimiento semántico que en este caso se trata de la

descomposición de los números en potencias de la base diez y en el agrupamientos decimales cuando la suma de cantidades de órdenes iguales excede o llega a diez. Por ejemplo, esto ocurre en la sintaxis del algoritmo tradicional de la suma de $58 + 19$. Ahora bien, un procedimiento de cálculo mental para esta operación lo podríamos escribir del siguiente modo:

$$58 + 19 = 58 + (20 - 1) = (58 + 20) - 1 = 78 - 1 = 77$$

En cambio, esta sintaxis sí que informa del conocimiento semántico puesto en juego: redondeo de 19 a 20 y asociación de términos.

- El docente debe favorecer que los alumnos expliciten y debatan las estrategias que han utilizado. Este hecho es esencial para promover avances en el sentido numérico de los alumnos.
- Trabajar el cálculo mental de modo sistemático en el tiempo. El trabajo del cálculo mental no se debe ejercitar en clases aisladas, sino que es necesario dedicarle un aprendizaje progresivo, una planificación de secuencias de enseñanza, de manera que los nuevos conocimientos que adquieran los alumnos puedan apoyarse en los que ya posee. Éstos deben identificar los nuevos conocimientos que van adquiriendo a lo largo de las actividades de cálculo mental y de las discusiones generadas a partir de ellas, de manera que genere una cierta automatización.
- Planificar de modo sistemático la introducción en el aula de estrategias de cálculo mental dando tiempo para que los alumnos que inicialmente no utilizan determinada estrategia puedan llegar a admitirla y usarla como consecuencia del resultado del debate suscitado en el aula referente a esa estrategia cuando perciben que otros compañeros del grupo clase la han utilizado con éxito y han dado razones de ella.
- Combinar el trabajo con números contextualizados en los que los alumnos tengan que poner en juego estrategias de cálculo mental para resolver problemas contextualizados. Por ejemplo: “Tengo 800 euros en billetes de 50 euros, ¿cuántos billetes tengo?” La resolución de problemas funcionales es fundamental en la enseñanza del cálculo mental. La única razón por la que no vamos a proponer resolver problemas en este trabajo es porque no disponemos de tiempo suficiente para realizar la intervención de aula.

6. Metodología para la enseñanza del cálculo mental.

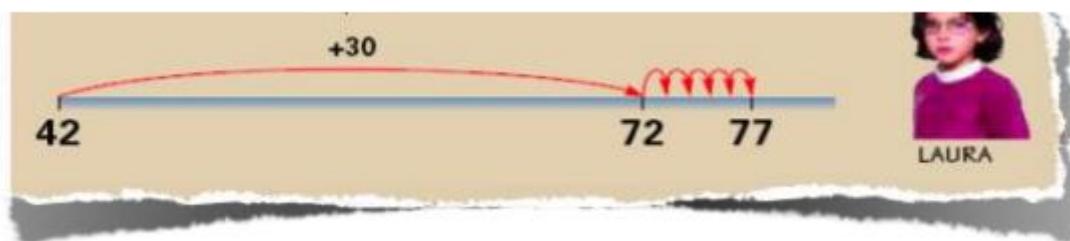
En este apartado presentamos algunas orientaciones didácticas para la enseñanza del cálculo mental en las aulas de Educación Primaria. Entre ellas encontramos:

- Es necesario que las estrategias que se propongan los descubran los alumnos. En esta línea el docente tiene que ingeníárselas para que el alumno descubra las reglas y procedimientos mentales más útiles y rápidos.

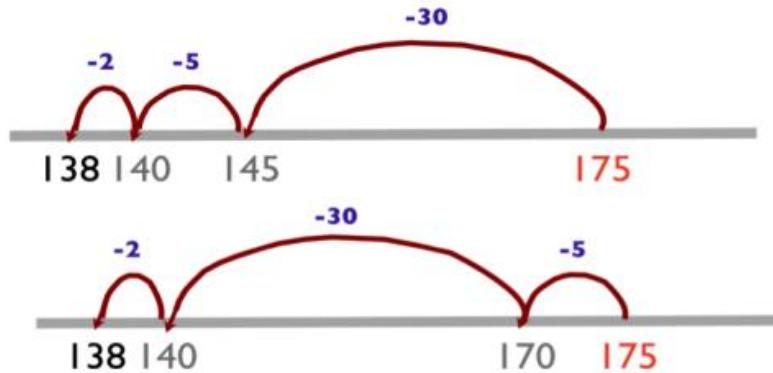
- La progresión de los ejercicios de cálculo mental debe estar relacionada con los niveles de conocimiento del alumno.

- Este tipo de cálculo se debe presentar bajo dos aspectos: visual y oral, puesto que ambos aportan facetas formativas diferentes y ambos contribuyen a la familiarización con nuestro sistema de numeración y con las operaciones. Por ejemplo, los autores Barba y Calvo (2009; pág. 4 y 5) proponen en las estrategias de la suma y de la resta, la utilización de la línea numérica:

$$42 + 35$$



$$175 - 37$$



- Es conveniente que los alumnos razonen los resultados delante de los compañeros, lo cual enriquecerá el aprendizaje, puesto que implica un intercambio de ideas y estrategias, así como la detección de los errores y sus causas.

- Es mejor enseñar el cálculo mental en un periodo largo de tiempo y con una variedad de contextos y aplicaciones en lugar de enseñarlo aisladamente.

- Conviene primar el uso de diferentes estrategias para realizar la operación antes que la rapidez en la contestación.

- Como se requiere gran concentración y tensión, cansa rápidamente a los alumnos, de forma que si se trabaja mucho tiempo, la atención disminuye y los resultados empeoran. Lo conveniente sería que las sesiones de cálculo mental fueran breves, variadas y alrededor de diez minutos al día, todos los días de la semana.

Es importante destacar que la enseñanza del cálculo se enmarca en las búsquedas, reflexiones, discusiones, argumentaciones, producción y análisis de escrituras matemáticas e identificación de nuevos conocimientos. Por ello, la intervención del docente es fundamental ya que debe explicitar y comparar los procedimientos para que los alumnos los analicen y expliquen.

Los avances en las estrategias del cálculo mental son beneficiosos para todos los alumnos, en especial para aquellos que tienen mayor dificultad ya que les permiten acceder a estrategias las cuales les facilitan el enfrentamiento a la operación, ya sea porque les abren diferentes posibilidades de solución o porque les permiten realizar anticipaciones y un control sobre las soluciones más convencionales.

Es necesario identificar los nuevos conocimientos que se van elaborando durante el desarrollo de las actividades de cálculo mental, y de las discusiones generadas a partir de ellas. Esto quiere decir que resulta necesario que aquellas estrategias que tienen un alcance más general, sean reconocidos por el docente y se desarrolle una práctica en torno a ellos que permita cierta automatización.

7. Objetivos de la enseñanza del cálculo mental en Educación Primaria.

Los objetivos propuestos para llevar a cabo el cálculo mental son los siguientes:

- Comprender que hay diferentes modos de trabajar con los números y que tan sólo tienen que escoger el más apropiado para cada cálculo. Esto implica no utilizar una única estrategia para resolver una operación, sino que se pueden utilizar varias y elegir la más adecuada según los componentes de la operación. Por ejemplo en la suma $75 + 49$, podemos utilizar la estrategia de completar a la siguiente decena pensando la operación como $75 + 50 - 1$, o, también podríamos compensar restándole 1 a 75 y sumándole 1 a 49 quedando la operación $74 + 50$. Ambas estrategias son adecuadas para hacer el cálculo de la operación, pudiendo elegir la que le resulte más cómoda al alumno.
- Adquirir la comprensión y sentido del número, lo cual proporciona versatilidad e independencia de procedimientos y ayuda en la reflexión para decidir y elegir. Durante la intervención docente, los alumnos serán conscientes de cómo "jugar con los números" para resolver las operaciones de una manera más sencilla y rápida, pudiendo determinar qué estrategia es la más adecuada para llevarla a cabo.
- Utilizar diferentes estrategias para realizar las operaciones, y explicar oralmente el proceso seguido en la realización de cálculos. Al tratarse de un proceso mental del que sólo conocemos el resultado del cálculo resulta muy difícil analizar lo que piensa el alumnos que realiza el cálculo. Para evaluar los procesos mentales les pediremos que expresen de forma oral qué estrategia han utilizado para la realización de la operación, por qué, qué otras diferentes formas existen para realizarla, etc.
- Justificar ante los demás el porqué de sus cálculos, lo que se traducirá en el intercambio de estrategias y en la detección de las causas de los errores. Al expresar oralmente las estrategias, el docente podrá observar

cuáles son las dificultades o problemas que les surgen a los alumnos en la utilización de estas estrategias y así poder establecer otro camino para intentar que los alumnos lleguen a reconocer, aceptar y aplicar nuevas estrategias.

8. Contenidos para la enseñanza del cálculo mental.

En el estudio sobre el cálculo mental vamos a tratar dos clases de conocimientos: la sistematización de un conjunto de resultados y la construcción de estrategias o procedimientos personales de cálculo mental.

8. 1. Sistematización de un conjunto de resultados.

Para que los alumnos puedan utilizar estrategias de cálculo mental necesitan conocimientos previos, es decir, que los alumnos puedan recuperar en la memoria o reconstruir de modo inmediato un repertorio de hechos numéricos referidos a la suma, resta, multiplicación y división. Sadovsky (2006, p. 16) plantea que un objetivo del cálculo mental es que los alumnos memoricen ciertos resultados o puedan recuperarlos fácilmente e insiste en que esta memorización debe apoyarse en la construcción e identificación previa de relaciones que tejan una red desde la cual sostenerla y darle sentido.

Esta investigadora detalla que el repertorio de cálculos debería ir incluyendo a lo largo del primer y segundo ciclo:

- Sumas de números de una cifra (por ejemplo, $5 + 5$; $5 + 6$) y restas asociadas a dichas sumas ($11 - 5$; $11 - 6$, etcétera).
- Identificación de descomposiciones aditivas del número 10 y de las restas asociadas a ellas; identificación de las descomposiciones aditivas del número 100 en números “redondos” y de las restas asociadas a ellas.
- Sumas de un número “redondo” de dos cifras más un número de una cifra, por ejemplo, $70 + 9$; restas vinculadas a dichas sumas, por ejemplo, $79 - 9$.
- Suma o resta de 10, 100 ó 1.000 a un número cualquiera.
- Suma o resta de un número “redondo” a un número cualquiera.

- Otras descomposiciones aditivas de los números vinculadas con la organización del sistema de numeración, por ejemplo, $2.000 + 500 + 40 + 6$; $800 + 7$; $200 + 19$, etc., restas vinculadas a ellas, por ejemplo, $4.271 - 271$; $384 - 80$, etcétera.
- Cálculos de complementos de un número cualquiera respecto de un número “redondo” a través del análisis de las escrituras numéricas, por ejemplo, cuánto es necesario sumarle a 578 para obtener 600.
- Los hechos numéricos de la tabla de la multiplicación y el uso de esos conocimientos para conocer el cociente y el resto de dividendos menores que 100 y divisores de una cifra.
- Multiplicación y división por 10, 100, 1.000, etcétera.
- Descomposiciones multiplicativas de las escrituras numéricas y cálculos asociados a ellas, por ejemplo, $3 \times 1.000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 8$; etcétera.
- Extensión de los conocimientos sobre la tabla de la multiplicación a multiplicaciones con números “redondos” de más de una cifra, por ejemplo. 40×30 ; 200×500 ; 2.000×60 ; etcétera.
- Extensión de los conocimientos sobre las divisiones a partir de los resultados de la tabla de la multiplicación y de la división por 10, 100, 1.000, etc., para resolver otras divisiones que involucran números “redondos” como dividendos y divisores.
- Identificación de múltiplos y divisores.

Entendemos que un objetivo de la enseñanza del cálculo mental es que los alumnos dominen un repertorio de hechos numéricos, y que sepan aplicar determinadas propiedades básicas de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para que estén en condiciones de progresar en la construcción de procedimientos personales o estrategias de cálculo mental.

8. 2. Construcción de procedimientos personales.

Por otro lado, la construcción de procedimientos personales permiten dar respuesta a la situación que Sadovsky (2006) denominada "cálculo pensado". No se

trata de procesos automatizados sino de los diferentes caminos que toman los alumnos a partir de sus decisiones durante la realización del cálculo. Estas decisiones están relacionadas con la comprensión de la tarea, las relaciones que se establecen y con el control de lo que sucede durante la realización del cálculo.

El cálculo mental pone a los estudiantes en situación de enfrentarse a los números, expresar un mismo número de diferentes formas. Por ejemplo, para calcular $276 : 12$ se pueden realizar diferentes descomposiciones, a saber:

Descomposición del dividendo:

$$276 : 12 = (240 + 36) : 12 = (240 : 12) + (36 : 12) = 20 + 3 = 23$$

Factorización del divisor:

$$276 : 12 = 276 : (2 \times 2 \times 3) = (276 : 2) : (2 \times 3) = 138 : (2 \times 3) = (138 : 2) : 3 = 69 : 3 = 23$$

Además, el cálculo mental es una buena herramienta para trabajar las diferentes propiedades de las operaciones. Por ejemplo, 9×8 , puede pensarse a partir de:

- a) pensar en que 8 es el doble de 4. Entonces: $9 \times 8 = 9 \times 4 \times 2 = 36 \times 2 = 72$
 - b) pensar que 8 es $5 + 3$. Entonces: $9 \times 8 = 9 \times 5 + 9 \times 3 = 45 + 27 = 72$
 - c) pensar que 9 es $5 + 4$. Entonces: $9 \times 8 = 5 \times 8 + 4 \times 8 = 40 + 32 = 72$
 - d) pensar que 9 es $10 - 1$. Entonces: $9 \times 8 = 10 \times 8 - 8 = 80 - 8 = 72$
 - e) pensar que 8 es $10 - 2$. Entonces: $9 \times 8 = 9 \times 10 - 9 \times 2 = 90 - 18 = 72$
- etcétera.

Así, la enseñanza del cálculo mental ofrece a los estudiantes la oportunidad de ser conscientes de que algunos cálculos son más fáciles que otros, y que es posible utilizarlos para resolver otros más difíciles. Por ejemplo, 24×12 puede pensarse como $24 \times 10 + 24 \times 2$. Así pues, utilizaremos las propiedades de las operaciones para resolverlas con mayor facilidad.

En definitiva, el cálculo mental proporciona la oportunidad de hacer funcionar las propiedades de las operaciones en relación con las características del sistema de numeración posicional y decimal. Por ello, permite una profundización en los conocimientos sobre las operaciones y sobre nuestro sistema de numeración.

8. 3. Estrategias de cálculo mental.

Las estrategias de cálculo mental con números naturales se fundamentan básicamente en la descomposición polinómica del número natural, es decir, en la comprensión del sistema de numeración, y en la aplicación de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y de la multiplicación, y en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. Adicionalmente, alguna estrategia multiplicativa necesita conceptualizar el número natural como producto de sus divisores, no necesariamente primos.

En cuanto a las estrategias para la **suma** y **resta** de número naturales podemos destacar las siguientes:

1. Suma de números naturales:

- Descomponer uno o los dos sumandos, como por ejemplo:

$$24 + 87 = (20 + 4) + (80 + 7) = (20 + 80) + (4 + 7) = 100 + 11 = 111$$

- Completar un sumando a la decena, centena o unidad de millar siguiente, como por ejemplo:

$$24 + 87 = 24 + (90 - 3) = (24 + 90) - 3 = 114 - 3 = 111$$

$$157 + 890 = 157 + (900 - 10) = 1057 - 10 = 1047$$

- Compensar: el número que se suma a un sumando se resta al otro sumando.

$$\text{Ejemplo: } 24 + 87 = (24 - 3) + (87 + 3) = 21 + 90 = 111$$

$$\text{Ejemplo: } 157 + 890 = (157 - 110) + (890 + 110) = 47 + 1000 = 1047$$

- Omitir ceros finales:

Ejemplo: Para sumar $750 + 250$, primero $75 + 25 = 100$ y después se añade un 0 a la derecha, dando como resultado 1000.

2. Resta de números naturales:

- Descomponer el minuendo y/o el sustraendo, como por ejemplo:

$$85 - 32 = (80 + 5) - (30 + 2) = (80 - 30) + (5 - 2) = 50 + 3 = 53$$

$$85 - 32 = 85 - (30 + 2) = (85 - 30) - 2 = 53$$

$$102 - 25 = 102 - (20 + 5) = 82 - 5 = 82 - 2 - 3 = 80 - 3 = 77$$

- Completar el sustraendo a la decena, centena o unidad de millar siguiente, como por ejemplo:

$$2000 - 89 = 2000 - (90 - 1) = (2000 - 90) + 1 = 1910 + 1 = 1911$$

$$2000 - 89 = 2000 - (100 - 11) = (2000 - 100) + 11 = 1900 + 11 = 1911$$

- Compensar: el número que se suma o se resta al minuendo se suma o se resta al sustraendo.

$$85 - 32 = (85 - 2) - (32 - 2) = 83 - 30 = 53$$

$$102 - 25 = (102 + 5) - (25 + 5) = 107 - 30 = 77$$

$$2000 - 89 = (2000 + 11) - (89 + 11) = 2011 - 100 = 1911$$

- Omitir ceros finales:

Ejemplo: Para restar 750 - 250, primero $75 - 25 = 50$ y después se añade un 0 a la derecha, dando como resultado 500.

- Convertir la resta en una suma. Es una estrategia todavía utilizada en algunas tiendas que consiste en buscar el número que hay que sumar al sustraendo hasta llegar al minuendo.

Ejemplo: Si se paga con un billete de 50 euros una compra de valor 32 euros, es posible que la persona que da el cambio diga: “ treinta y dos y 8 son cuarenta, y diez más, son cincuenta, aquí tiene los 18 euros”.

Con respecto a las estrategias para la **multiplicación** y **división** de números naturales podemos destacar las siguientes:

3. Multiplicación de números naturales.

- Descomponer el multiplicando o el multiplicador, como por ejemplo:

$$85 \times 9 = (80 + 5) \times 9 = (80 \times 9) + (5 \times 9) = 720 + 45 = 765$$

$$\begin{aligned}85 \times 18 &= 85 \times (10 + 8) = (85 \times 10) + (85 \times 8) = 850 + (170 \times 4) = \\&= 850 + (340 \times 2) = 850 + 680 = 850 + (650 + 30) = 1530\end{aligned}$$

- Completar el multiplicando o el multiplicador a la decena, centena o unidad de millar siguiente:

$$\begin{aligned}85 \times 9 &= 85 \times (10 - 1) = (85 \times 10) - 85 = 850 - 85 = 850 - (50 + 35) = \\&= (850 - 50) - 35 = 800 - 35 = 765\end{aligned}$$

- Compensar: el número por que se multiplica (o divide) el multiplicando divide (o multiplica) al multiplicador.

$$92 \times 25 = (92 : 2) \times (25 \times 2) = 46 \times 50 = (46 : 2) \times (50 \times 2) = 23 \times 100$$

- Omitir ceros finales.

Ejemplo: Para multiplicar 750×200 , primero se multiplica $75 \times 2 = 150$ y después se añaden tres ceros a la derecha, dando como resultado 150.000

- Otras estrategias particulares.

➤ **MULTIPLICAR POR 10 o POTENCIAS DE 10:** consiste en añadir a la derecha del multiplicando tantos ceros como tenga el multiplicador.

Ejemplo: $35 \times 100 = 3500$

➤ **MULTIPLICAR POR 2, 4 ó 8:** consiste en duplicar el multiplicando una, dos o tres veces consecutivas.

$$85 \times 8 = 85 \times (2 \times 2 \times 2) = (85 \times 2) \times 2 \times 2 = (170 \times 2) \times 2 = 340 \times 2 = 680$$

➤ **MULTIPLICAR POR 5:** consiste en multiplicar por 10 y dividir por 2.

$$85 \times 5 = 85 \times (10 : 2) = (85 \times 10) : 2 = 850 : 2 = 425$$

➤ **MULTIPLICAR POR 3:** consiste en duplicar y sumar el multiplicando.

$$85 \times 3 = 85 \times (2 + 1) = (85 \times 2) + 85 = 170 + 85 = 255$$

➤ **MULTIPLICAR POR 6:** consiste en multiplicar por 3 y después por 2.

$$85 \times 6 = 85 \times (3 \times 2) = (85 \times 3) \times 2 = 255 \times 2 = 510$$

- MULTIPLICAR POR 9: consiste en multiplicar por 10 y, después, restar el multiplicando.

$$85 \times 9 = 85 \times (10 - 1) = (85 \times 10) - 85 = 850 - 85 = 765$$

- MULTIPLICAR POR 15: consiste en multiplicar por 10 y después sumar la mitad del resultado anterior.

$$85 \times 15 = 85 \times (10 + 5) = (85 \times 10) + (85 \times 10) : 2 = 850 + 425 = 1275$$

4. División de números naturales.

- Descomponer el dividendo en sumandos que contengan el divisor, como por ejemplo:

$$132 : 12 = (120 : 12) + (12 : 12) = 10 + 1 = 11$$

$$216 : 9 = (180 + 36) : 9 = (180 : 9) + (36 : 9) = 20 + 4 = 24$$

- Factorizar el divisor (descomposición multiplicativa del divisor).

$$132 : 12 = 132 : (2 \times 6) = (132 : 2) : 6 = 66 : 6 = 11$$

$$216 : 9 = 216 : (3 \times 3) = (216 : 3) : 3 = 72 : 3 = (60 + 12) : 3 = 20 + 4 = 24$$

- Compensar: el número por que se multiplica (o divide) el dividendo multiplica (o divide) al divisor.

$$132 : 12 = (132 : 2) : (12 : 2) = 66 : 6 = 11$$

$$216 : 9 = (216 : 3) : (9 : 3) = 72 : 3 = 24$$

$$1250 : 25 = (1250 \times 4) : (25 \times 4) = 5000 : 100 = 50$$

- Convertir la división en una multiplicación.

Para calcular $132 : 12$ se procede a buscar un número que multiplicado por 12 se acerque a 132. El primer número elegido puede ser 10 porque $12 \times 10 = 120$.

Ahora queda por buscar un número que multiplicado por 12 de 12 =

$132 - 120$. Ese número es 1. Por lo tanto el cociente es $10 + 1 = 11$

- Otras estrategias particulares:

➤ DIVIDIR POR 10 o POTENCIAS DE 10: consiste en suprimir los ceros que están a la derecha del dividendo. Se suprimirán tantos como tenga el divisor, como por ejemplo:

$$3600 : 10 = 360$$

➤ DIVIDIR POR 5: consiste en multiplicar por 2 y dividir por 10, como por ejemplo:

$$85 : 5 = 85 : (10 : 2) = (85 \times 2) : 10 = 170 : 10 = 17$$

$$1250 : 5 = 1250 : (10 : 2) = (1250 \times 2) : 10 = 2500 : 10 = 250$$

9. Situación actual de la enseñanza del cálculo mental en Educación Primaria.

Nos proponemos abordar el análisis de las características más relevantes de la enseñanza del cálculo mental a partir de dos fuentes documentales: el currículo oficial de Educación Primaria y el análisis del libro de texto de la editorial que siguen los alumnos que participan en este estudio.

9.1. Análisis de los currícula de Educación Primaria.

El actual currículo nacional de Matemáticas en Educación Primaria de la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) plantea como objetivo educativo la alfabetización numérica e indica que el logro de este objetivo exige a los escolares competencias superiores, más allá del dominio los algoritmos de cálculo escrito:

“En la Educación Primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito. Para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, es necesario actuar con seguridad ante los números y las

cantidades, utilizarlos siempre que sea necesario e identificar las relaciones básicas que se dan entre ellos”. (MECD, BOE de 1 de marzo de 2014, p. 19386)

La elaboración y uso de estrategias de cálculo mental aparece como contenido en el currículo nacional dentro de un apartado denominado “cálculo” cuyos descriptores aparecen en el siguiente orden (MECD, BOE de 1 de marzo de 2014, pp. 19390-19391):

- Utilización de los algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división.
 - Automatización de los algoritmos.
 - Descomposición, de forma aditiva y de forma aditivo-multiplicativa.
 - Descomposición de números naturales atendiendo al valor posicional de sus cifras.
 - Construcción de series ascendentes y descendentes.
 - Construcción y memorización de las tablas de multiplicar.
 - Obtención de los primeros múltiplos de un número dado.
 - Obtención de todos los divisores de cualquier número menor que 100.
 - Descomposición de números decimales atendiendo al valor posicional de sus cifras.
 - Cálculo de tantos por ciento en situaciones reales.
 - Elaboración y uso de estrategias de cálculo mental.
 - Utilización de la calculadora.
- El documento oficial no indica pautas para la “elaboración y uso de estrategias de cálculo mental”. Sin embargo, el hecho de que presente el descriptor “automatización de los algoritmos” antes que el repertorio de contenidos que se consideran previos e imprescindibles para abordar la enseñanza de las estrategias de cálculo mental alerta de que la intención de los legisladores en materia educativa es priorizar el cálculo escrito frente al cálculo mental y convertir éste en subsidiario de aquél.

En el actual currículo aragonés de la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), en el apartado de orientaciones metodológicas, indica “es imprescindible, desde los primeros niveles de la etapa, el desarrollo de estrategias personales de estimación y cálculo mental, que, una vez automatizadas, se utilizarán

para la creación y práctica de algoritmos diversos para cada operación” (BOA de 20 de junio de 2014, p. 19542)

Como en el caso del Currículo Nacional nos tememos que cuando ambos documentos hablan de “estrategias personales de cálculo mental” están pensando en el conocimiento de los hechos numéricos de la suma y de la multiplicación, las clásicas tablas que los alumnos deben memorizar para que estén en condiciones de aplicar los algoritmos escritos.

En efecto, el criterio de evaluación del Bloque de Números para primer curso de Educación Primaria: “*Crt.MAT.2.8: Conocer y utilizar los algoritmos estándar de suma y resta de números naturales hasta la centena en la resolución de problemas en el entorno escolar y familiar*” se descompone en varios estándares de aprendizaje, uno de los cuales es: Est.MAT.2.8.12: Utiliza estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta en situaciones de la vida cotidiana.

Esto quiere decir que el documento oficial antepone, en primer curso, la enseñanza de los algoritmos escritos de la suma y de la resta a la enseñanza de estas operaciones mediante procedimientos del cálculo mental y que tan sólo considera como cálculo mental la memorización de los hechos numéricos que los alumnos deben recuperar de la memoria para aplicar con éxito los algoritmos escritos. Como en el currículo nacional, el cálculo mental se percibe como subsidiario del cálculo escrito.

En quinto curso persiste la confusión entre lo que el documento oficial llama estrategias personales y el conocimiento de los hechos numéricos (las tablas) y de descomposiciones aditivas y multiplicativas de los números que son necesarias para abordar la enseñanza de estrategias de cálculo mental. En efecto, podemos constatar cómo los estándares de aprendizajes referidos a contenidos de cálculo mental aparecen asociados al criterio de evaluación de los algoritmos escritos:

“*Crt.MAT.2.8: Conocer, utilizar y automatizar algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división en números naturales hasta el millón y decimales hasta las centésimas en contextos de resolución de problemas y en situaciones de la vida cotidiana*”. (BOA de 20 de junio de 2014, p. 19595)

La realidad es que tanto el currículo nacional como el autonómico no propone el aprendizaje de estrategias de cálculo mental, y es su lugar plantea la memorización de

las tablas de la suma y de la multiplicación y la descomposición de los números en potencias de la base decimal que son requisitos previos para aplicar los algoritmos escritos.

Tras el análisis de los currícula nacional y autonómico concluimos que no proponen la enseñanza de estrategias de cálculo mental dado que el documento oficial considera éstas de modo restrictivo como conocimientos previos para aplicar con éxito los algoritmo escritos de cálculo. Básicamente estos conocimientos se reducen a la memorización de las tablas de la multiplicación y a la descomposición de los números en potencias de la base. Nuestra propuesta de enseñanza de las estrategias de cálculo mental es mucho más ambiciosa y no es subsidiaria de los algoritmos escritos porque exige del dominio de las propiedades de las operaciones y del conocimiento y aplicación de estrategias como redondear, descomponer, factorizar o compensar para realizar cálculos sin apoyo escrito.

9.2. Análisis de un libro de texto.

Con respecto al libro de texto de la editorial SM que siguen los alumnos que participan en este estudio, podemos decir que se trabajan algunas estrategias a pesar de que no se enseñan de modo sistemático. Al final de cada tema aparece un apartado llamado “*Matemáticamente*” que ocupa una carilla de hoja en la que explican unas estrategias seguidas de 3 o 4 ejercicios para practicarlas. La intención de los autores es institucionalizar una determinada regla después de que ésta haya sido presentada y previamente ejercitada. Se trata de enseñar determinadas reglas que los alumnos no conjeturan. Por ejemplo en la página 148 del libro explica cómo multiplicar por 11 y por 101.

Después de esta explicación aparecen una serie de ejercicios. En uno de ellos aparecen una serie de multiplicaciones resueltas y deben corregir que errores aparecen. El siguiente ejercicio pregunta al alumno “*¿Se te ocurre una estrategia distinta para resolver las multiplicaciones anteriores?*”. Esta pregunta busca que el alumno verbalice la estrategia.

Al contrario de esta propuesta del libro de texto, nosotros no buscamos unas reglas fijas sino estrategias a partir del razonamiento de los alumnos. Además de esta cuestión fundamental de orden metodológico vamos a analizar otros aspectos

relacionados con el contenido matemático, que en el caso que nos ocupa, son las estrategias de cálculo mental.

Mostramos seguidamente las estrategias que enseña el libro de texto:

- El tema 1 comienza con la explicación de la estrategia de descomposición de los sumandos en una suma de números de tres cifras:

$$624 + 235 = 800 + 50 + 9 = 859$$

$$600 + 200 = 800$$

$$20 + 30 = 50$$

$$4 + 5 = 9$$

- El tema 2 presenta la estrategia de la descomposición de sumandos de tres cifras cuyos diferentes órdenes de unidades exceden de diez:

$$746 + 535 = 1200 + 70 + 11 = 1281$$

$$700 + 500 = 1200$$

$$40 + 30 = 70$$

$$6 + 5 = 11$$

- El tema 3 lo dedica a la resta trabajando la estrategia de convertir la resta en una suma proponiendo como ejemplo:

$$90 - 35 = 5 + 50 = 55$$

$$35 \rightarrow 40 \rightarrow 90$$

$$\begin{array}{r}
 + 5 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 55
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 + 50 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 55
 \end{array}$$

- En el tema 4 se trabaja la estrategia de descomposición del multiplicando en la operación de la multiplicación, proponiendo:

$$\begin{array}{r}
 231 \times 6 \\
 200 \times 6 + 30 \times 6 + 1 \times 6 \\
 1200 + 180 + 6 \\
 \hline
 1386
 \end{array}$$

- En cuanto al tema 5, se centra en la multiplicación trabajando la estrategia de aplicar la propiedad asociativa cuando el multiplicador es una decena completa, proponiendo:

$$64 \times 20 = 64 \times 2 \times 10 = 1280$$

$$\begin{array}{r}
 64 \longrightarrow 128 \longrightarrow 1280 \\
 \times 2 \qquad \times 10
 \end{array}$$

- El tema 6 está dedicado a la suma de números decimales proponiendo para ello la descomposición:

$$3,25 + 0,50$$

$$3 + 0 = 3$$

$$0,25 + 0,50 = 0,75$$

$$3 + 0,75 = 3,75$$

- En el tema 7 se trabaja la resta de números decimales presentando la misma estrategia que mostró en el tema 3:

$$7,50 - 2,70 = 0,3 + 4 + 0,5 = 4,80$$

$$\begin{array}{r}
 2,70 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 7,50 \\
 \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow \\
 0,30 \qquad 4 \qquad 0,50 \\
 \searrow \qquad \downarrow \qquad \swarrow \\
 4,80
 \end{array}$$

- En el tema 8 se presenta dos reglas para los casos particulares cuando el multiplicador sea 11 y 101.
- El tema 9 se centra en las multiplicaciones por 9 y 99. Para multiplicar por 9 muestra la estrategia de multiplicar por 10 y restar el multiplicando, y para multiplicar por 99 muestra la estrategia de multiplicar por 100 y restar el multiplicando, proponiendo:

$$\begin{array}{r}
 72 \times 9 \\
 72 \\
 \times 10 \quad \downarrow \\
 720 \\
 -72 \quad \downarrow \\
 648
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 72 \times 99 \\
 72 \\
 \times 100 \quad \downarrow \\
 7200 \\
 -72 \quad \downarrow \\
 7128
 \end{array}$$

- El tema 10 se centra en las multiplicaciones cuyos multiplicadores son 5 y 50. Cuando multiplicamos por 5, el libro propone multiplicar por 10 y dividir el resultado entre 2, y para multiplicar por 50, propone multiplicar por 100 y el resultado dividirlo entre 2.

$$\begin{array}{r}
 836 \times 5 \\
 836 \\
 \times 10 \quad \downarrow \\
 8360 \\
 : 2 \quad \downarrow \\
 4180
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 836 \times 50 \\
 836 \\
 \times 100 \quad \downarrow \\
 83600 \\
 : 2 \quad \downarrow \\
 41800
 \end{array}$$

- En el tema 11 propone multiplicaciones con el multiplicador 25 sugiriendo la estrategia de multiplicar por 100 el multiplicando y dividiendo el resultado dos veces entre dos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 836 & \times & 25 & & & \\
 836 & \longrightarrow & 83600 & \longrightarrow & 41800 & \longrightarrow & 20900 \\
 & \times 100 & & : 2 & & & : 2
 \end{array}$$

836×25 es la mitad de la mitad de 836×100

- El último tema del libro lo dedica a la división proponiendo dividir entre 5, es decir, trabajando la estrategia de multiplicar por 2 y dividir entre 10.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 840 & : & 5 & \\
 840 & \longrightarrow & 1680 & \longrightarrow & 168 \\
 & \times 2 & & : 10 &
 \end{array}$$

El libro de texto plantea la enseñanza de estrategias para casos particulares que son pertinentes como la de multiplicar por 5, 9, 11, 25, 50, 99 y 101, o bien la de dividir por 5. Sin embargo, no enseña el amplio abanico de estrategias de carácter general para la suma, resta, multiplicación y división de números naturales. El texto se limita a enseñar una única estrategia para la suma, resta y multiplicación, obviando la división, limitando unos de los objetivos del cálculo mental que es proporcionar a los alumnos versatilidad e independencia en el uso de estrategias de cálculo.

En el caso de la suma presenta en el tema 1 y 2 únicamente la estrategia de descomponer los sumandos en potencias de la base para después utilizar un procedimiento muy cercano al algoritmo escrito de la suma.

En el caso de la resta presenta, en el tema 3, la estrategia de convertir la suma en una resta obviando otras estrategias de carácter general. Posteriormente, aplica esta misma estrategia para restar números decimales.

La misma crítica puede hacerse cuando, en el tema 4, presenta una única estrategia para la multiplicación de naturales que consiste en descomponer el

multiplicando. Es evidente que existen otras estrategias adecuadas como factorizar el multiplicando o/y el multiplicador, omitir ceros del multiplicando o/y el multiplicador, o bien, compensar el multiplicando y el multiplicador, además de la que se presenta en el libro de texto.

A pesar de que el libro de texto no propone la enseña de las estrategias de cálculo mental de modo sistemático hay que convenir que hace mucho más de lo que propone el currículo nacional y autonómico que no orienta la enseñanza y que tiende a considerar el cálculo mental como subsidiario del cálculo escrito.

En estas condiciones podemos suponer que no hay una enseñanza explícita de las estrategias del cálculo mental en las aulas ya que la acción docente se concentra básicamente en la enseñanza de los algoritmos escritos.

CAPÍTULO II:

MARCO EXPERIMENTAL

1. Diseño de la propuesta de enseñanza.

Dadas las limitaciones que hemos constatado en la enseñanza actual de las estrategias de cálculo mental en las aulas de Educación Primaria nos proponemos en este Trabajo Fin de Grado diseñar, desarrollar y evaluar una propuesta de enseñanza de estrategias de cálculo mental para las operaciones suma, resta, multiplicación y división de números naturales en un aula de 5º curso de Educación Primaria.

Los objetivos, contenidos y metodología se han detallado en los apartados nº 6, 7 y 8 del capítulo I.

Hemos constatado que los alumnos del grupo-clase conocen las hechos numéricos de la suma y resta, y de la multiplicación y división, y además tienen una comprensión aceptable de la descomposición de los números como potencias de la base decimal. Por otra parte, los alumnos realizan semanalmente sesiones de cálculo mental mediante juegos matemáticos con ayuda de un programa de la pizarra digital para recordar los hechos numéricos en la clase primando la velocidad en la obtención del resultado del cálculo. Por todas estas razones y en aras a ganar tiempo para dedicarlo a la enseñanza de las estrategias de cálculo mental hemos optado por eludir sesiones específicas de enseñanza de lo que hemos llamado en el capítulo I “sistematización de un conjunto de resultados” y nos hemos centrado directamente en la enseñanza de las estrategias de cálculo mental.

En el siguiente cronograma podemos observar las actividades que se llevaron a cabo, el día de su realización y la duración de cada una de ellas.

Actividad	Día	Duración
- Prueba inicial. - Enseñanza de estrategias de la suma.	10/04/15	15 minutos 10 minutos
- Ficha nº 1 (suma). - Puesta en común.	13/04/15	5 minutos 10 minutos
- Recordatorio estrategias de la suma y enseñanza de estrategias de la resta. - Ficha nº 2 (suma y resta).	20/04/15	10 minutos 5 minutos
- Recordatorio estrategias de la resta y enseñanza de estrategias de la multiplicación. - Ficha nº 3 (resta y multiplicación).	27/04/15	15 minutos 10 minutos
- Recordatorio estrategias de la multiplicación y enseñanza de estrategias de la división. - Ficha nº 4 (multiplicación y división).	4/05/15	15 minutos 10 minutos
- Prueba final.	11/05/15	10 minutos

Durante la intervención se proporcionará a los alumnos un librillo en el que aparecen las estrategias que iremos trabajando relacionadas con la suma, resta, multiplicación y división. Cada una de estas estrategias va acompañada de diversos ejemplos para poder ver en la práctica cómo se aplican dichas estrategias. El objetivo de este librillo es que los alumnos lo trabajen los fines de semanas y así reflexionen sobre la utilización de estrategias y cómo "jugar con los números" de manera que las puedan aplicar a las pruebas que se hacen todos los lunes. Este librillo puede ser observado en el anexo 1.

2. Contexto de la experimentación.

La enseñanza de estrategias de cálculo mental se realizarán en un aula quinto curso formada por 24 alumnos del colegio San Agustín de la ciudad de Zaragoza de los cuales no hay ninguno con necesidad específica de apoyo educativo ni necesitan

adaptación curricular significativa. Hay dos alumnos extranjeros, uno de ellos procedente de Nigeria y el otro alumno de Ucrania, pero no tienen dificultades con el idioma ya que lo comprenden perfectamente por su larga estancia en este país. Se trata de una clase participativa y un grupo bastante cohesionado.

Los alumnos que se distraen con mayor facilidad y no prestan atención a las explicaciones de clase se sientan en las primeras filas y los compañeros que tienen al lado de la mesa suelen ser alumnos más atentos, que no hablan y que llevan al día la tarea. Con esto, lo que intenta conseguir la tutora es que los más despistados aprendan y tomen como ejemplo de trabajo a su compañero de al lado, ya que si lo ponemos al lado de otro alumno que es hablador y no presta atención a las explicaciones, ninguno de los dos aprenderán y despistarán al resto de la clase.

Los alumnos que presentan más dificultades para entender las explicaciones se sientan al lado de la mesa del profesor y así poder llamarles la atención y ayudarles con los ejercicios y tareas.

La mayoría de los alumnos siguen la clase y las explicaciones del profesor sin apenas problemas. Es una clase participativa, sin comportamientos disruptivos, con un buen nivel lector y en la que poseen más iniciativa las chicas.

Con respecto a las características sociales de los alumnos, se trata de una clase bastante unida aunque cada uno ya posee su grupo más cercano de amigos, y hay algún alumno que destaca por su liderazgo ante sus compañeros. Cada uno de ellos tiene su encargo y responsabilidad en clase creando un trabajo común entre todos para el bien de la clase. Normalmente cooperan en los juegos y tareas, los que terminan antes la tarea ayudan a los que van más retrasados y no hay discriminación hacia ningún compañero.

La clase de 5º B se trata de un grupo bastante cohesionado. Existe la cooperación entre los compañeros ayudándose mutuamente, cooperando con los que les cuesta más acabar las tareas, prestándose materiales que a algún compañero le falta, etc. Existe una buena relación entre todos los compañeros de manera que no se da ningún caso de aislamiento ni de discriminación. Puede darse algún pequeño conflicto entre los alumnos ya que algunos quieren imponer sus ideas y deseos ante los demás.

En cuanto a las características materiales y espaciales de la clase, ésta consta de la mesa de la profesora situada en una tarima (la cual está mirando a los pupitres de los alumnos) junto a una pequeña estantería donde se encuentran los libros, diccionarios y apuntes de la profesora. Las mesas de los niños están separadas y colocadas mirando hacia la pizarra y hacia la profesora, lo cual permite que haya amplios pasillos por los que puede pasar la profesora para atender a los alumnos y las dificultades que puedan presentar. Además, esta aula dispone de una gran pizarra y de una pizarra digital, la cual utilizan para hacer actividades interactivas. La pizarra digital se utiliza en todas las asignaturas, en concreto en matemáticas, el profesor, que es otro docente distinto de la tutora del grupo, la usa para explicar y ejemplificar aspectos relacionados con esta materia, y los alumnos para realizar actividades y juegos. Es un instrumento muy útil para trabajar con los alumnos ya que aprenden de una manera diferente que les ayuda a focalizar mejor los conceptos.

La distribución y utilización de materiales del aula es la siguiente: al fondo de la clase se localiza una estantería en la cual cada alumno tiene su lugar para colocar sus materiales, entre ellos sus cuadernos de trabajo y fichas. Estos cuadernos y fichas los cogen para hacer las actividades y una vez terminadas se colocan otra vez en su sitio. Así el profesor sabrá dónde acudir para corregir los ejercicios. También se encuentra un corcho en el que colocan los murales y dibujos que trabajan, los encargos de clase con las fotos de sus respectivos responsables (cada alumno tiene su encargo), los nombres de cada grupo cooperativo, los papeles que desempeña cada miembro de dicho grupo... Alrededor de la clase aparecen posters y cartulinas en las que explican las normas ortográficas, las normas de clase, los cumpleaños de cada alumno, frases en inglés, etc.

El aula dispone de perchas, de una estantería, la cual hace el papel de biblioteca y se encuentran libros de lectura los cuales son usados cuando los alumnos no han traído su propio libro de casa o cuando terminan antes la tarea pueden invertir ese tiempo en la lectura.

3. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba inicial.

Esta enseñanza comenzó pasando a los alumnos una prueba inicial el día 10 de abril a las 9.00 horas sin haber recibido ningún tipo de enseñanza acerca de las estrategias de cálculo mental. Esta prueba estaba formada por 15 operaciones de sumas,

restas, multiplicaciones y divisiones, y al lado de cada operación había una serie de estrategias las cuales deberían marcar los alumnos en caso de haberlas utilizado para resolver la operación. El tiempo para su realización fue de 15 minutos. El modelo de la prueba inicial y la tabla con la recogida de datos se muestran en el anexo 2.

La prueba se realizó según lo previsto. Antes de comenzarla, se avisó a los alumnos de que no podían escribir las operaciones y que sólo debían escribir el resultado en el recuadro que aparecía al lado de la operación. Todos los alumnos, excepto tres, concluyeron la prueba en menos de 15 minutos sobrándoles tiempo. Además, en las pruebas que se llevarán a cabo en clase sobre el cálculo mental no se premiará la rapidez en el resultado de las operaciones, sino la utilización y comprensión de varias estrategias para su realización.

Después de la prueba inicial, se hizo un pequeño debate acerca de cómo habían resuelto las operaciones los alumnos centrándonos en las operaciones de suma para poder trabajar las estrategias en relación a ésta y así los alumnos poder utilizarlas en la siguiente prueba destinada a la suma. En este debate pudimos observar si algún alumno había utilizado alguna estrategia que hiciera reflexionar al resto de sus compañeros o si no había utilizado ninguna ya que no habían recibido una enseñanza previa.

Lo esencial y prioritario de esta prueba inicial es poder verbalizar diferentes estrategias que se pueden llevar a cabo, sugiriendo el profesor alguna de ellas para ayudar a los alumnos a comunicarlas para que otros compañeros suyos las acepten y sean capaces de aplicarlas a otras operaciones.

El objetivo de esta prueba inicial es hacer conocer una serie de estrategias relacionadas con la suma, resta, multiplicación y división, que los alumnos empiecen a ser conscientes cómo podemos "jugar con los números" para obtener de una manera más sencilla y rápida el resultado.

Los resultados de esta primera prueba inicial fue que la mayoría de los alumnos no utilizaron ninguna estrategia para resolver las operaciones, es decir que pensaron los números en vertical para su resolución.

En cambio, algunos alumnos sí que utilizaron estrategias de la **suma** como quitar ceros y descomponer uno de los sumandos. Por ejemplo:

250 + 150

- *He quitado los ceros finales. He sumado 25 + 15 y he añadido un cero al resultado.*
- *He sumado 200 + 100 y después 50 + 50. He descompuesto.*

47 + 43

- *He descompuesto 47 como 40 + 7, y 43 como 40 + 3, y he sumado.*

En cuanto a las estrategias de la **resta**, utilizaron algunas como:

800 - 350

- *He descompuesto 350 como 300 + 50 para restar primero $800 - 300 = 500$ y a este resultado quitarle 50 quedando $500 - 50 = 450$.*
- *He quitado los ceros restando $80 - 35 = 45$ y al resultado le he añadido el 0 que había quitado quedando como resultado 450.*

También utilizaron alguna estrategia de la **multiplicación**:

27 x 5

- *He multiplicado $27 \times 10 = 270$ y después he dividido el resultado entre 2 quedando $270 : 2 = 135$.*

25 x 6

- *He multiplicado primero $25 \times 2 = 50$ y este resultado lo he multiplicado por 3 quedando $50 \times 3 = 150$.*

Una estrategia utilizada por pocos alumnos con respecto a la **división** fue:

230 : 5

- *He dividido $230 : 10 = 23$ y después el resultado lo he multiplicado por 2, quedando $23 \times 2 = 46$.*

En las operaciones de suma es donde los alumnos más estrategias han utilizado, ya que los alumnos las consideran más fáciles de aplicar que las otras relacionadas con la resta, multiplicación y división.

Con respecto a la estrategias de la resta, los alumnos no han utilizado la de compensar y completar el minuendo o sustraendo a la decena/centena siguiente.

En cuanto a la multiplicación, los alumnos no han utilizado las estrategias de descomposición de algunos de los factores, compensación, o algunas estrategias específicas como cuando el multiplicador es 15 o es 9.

Con respecto a la división, no han utilizado las estrategias de descomponer el dividendo o el divisor ni la de compensación.

Los alumnos no han utilizado ninguna de estas estrategias ya que no las conocen y las consideran difíciles de aplicar. Al no haber recibido una enseñanza previa de las estrategias no las saben utilizar ni poner en práctica.

Los aspectos positivos que podemos sacar de esta prueba inicial es que las dos terceras partes de la clase cometen menos de 2 errores al realizar los cálculos. Estos datos los podemos observar en la tabla que aparece a continuación.

En la siguiente tabla, podemos observar el número de estudiantes centrandonos en el número de fallos de las 15 operaciones.

<u>Prueba inicial</u>	<u>Nº de estudiantes</u>	<u>Porcentaje</u>
Ningún fallo	4	17%
1 fallo	4	17%
2 fallos	8	33%
Más de 2 fallos	8	33%

Además, la operación en la que los alumnos tuvieron más fallos fue 120×15 con 13 fallos, seguidas de cerca por $224 : 8$ y por $180 : 12$.

Todos los alumnos terminaron la prueba antes de tiempo, siendo el más rápido un alumno que tardó 5 minutos en su realización y que no utilizó ninguna estrategia.

Otro aspecto importante para destacar es que varios alumnos a la hora de escribir el resultado de la división, tenían problemas en el orden de los números. Por ejemplo:

- un alumno escribió $180 : 12 = 51$ en lugar de $180 : 12 = 15$, y
- otro alumno escribió $230 : 5 = 64$ en lugar de $230 : 5 = 46$.

Esto puede ser debido a que el alumno piensa mentalmente la división hecha con la caja y va apuntando los números del cociente pero sin tener en cuenta el orden de éste. Entendemos que estos errores son debidos a la exigencia de operar mentalmente sin la ayuda del soporte escrito.

En resumen, los alumnos desconocen las estrategias de cálculo mental referidas a las cuatro operaciones básicas. Dentro de la escasez de estrategias son más proclives a utilizarlas para calcular sumas. En cuanto al éxito al operar mentalmente los alumnos obtienen mejores resultados cuando operan sumas y restas que cuando operan multiplicaciones y divisiones.

4. Sesiones de enseñanza.

Tras la prueba inicial, comenzaremos con las sesiones de enseñanza de las diferentes estrategias. Cada lunes se realizará una prueba con su correspondiente explicación y puesta en común de las estrategias utilizadas. Cada prueba estará destinada en primer lugar a la suma, continuando con la resta, multiplicación y división.

La metodología que se llevará a cabo será:

- Comenzaremos la sesión con una pequeña explicación de las estrategias correspondientes a las operaciones de la ficha que se pasará. El profesor las presentará en la pizarra como apoyo visual, mediante un ejercicio resuelto. Con el objetivo de que los alumnos comprendan el desarrollo de las estrategias y las propiedades de las que se hace uso.
- Durante la explicación, se les irá formulando preguntas a los alumnos tales como "¿Cómo resolverías esta operación sin pensarla en vertical? ¿Qué estrategia utilizarías para resolver esta operación? ¿Qué estrategia elegirías para realizar la operación?".
- Después de la explicación, se pasará la prueba correspondiente de la que los alumnos dispondrán de un tiempo en concreto para su resolución.
- Una vez terminada la prueba, si se dispone de tiempo, se hará una pequeña puesta en común en la que el maestro pondrá en la pizarra ejemplos de la prueba que acaban de realizar los alumnos y les preguntará cómo la han realizado y si

han utilizado alguna estrategia. De esta forma, los alumnos reflexionaran sobre la manera en la que se pueden realizar las operaciones y podrán ver tanto ellos como el profesor los pensamientos que ponen en juego.

A la hora de presentar este proceso de enseñanza-aprendizaje, es necesario que el alumno descubra las reglas y procedimientos que le muestra el profesor, antes de practicarlos. Además, el profesor debe respetar la originalidad de las estrategias propuestas por los alumnos, que expuestas al resto de la clase, pueden ser más fácilmente asimiladas por encontrarse el resto de alumnos en similares condiciones cognitivas y de conocimientos. Por otro lado, el intercambio de ideas y estrategias en la corrección de los ejercicios que se propongan incide para que los alumnos justifiquen ante los demás el porqué de sus cálculos, lo que se traducirá en el intercambio de estrategias y en la detección de las causas de los errores.

4.1. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la suma.

Esta prueba se llevó a cabo el día 13 de abril a las 10.00 horas.

Antes de la prueba, se hizo un pequeño recordatorio de las estrategias vistas en la prueba inicial. En este recordatorio, participaron los alumnos comentando cómo resolverían las distintas operaciones escritas en la pizarra como ejemplos. Seguidamente se les dieron 5 minutos para realizar la prueba de la suma que constaba de 10 operaciones con sus respectivas estrategias para marcar la que utilicen para la resolución. La prueba de la suma y la tabla con la recogida de datos se muestran en el anexo 3.

Terminada la prueba, se llevó a cabo un pequeño debate de unos 10 minutos, en el que se escribieron varias operaciones de la prueba en la pizarra y se preguntó cómo las habían resuelto. Es preferible hacer este debate cuando terminen la prueba ya que los alumnos lo tienen más reciente.

Las opiniones e ideas de los alumnos nos servirán para saber qué estrategias son las más usadas y preferidas por ellos, y en cuáles tienen más dificultades a la hora de ejecutarlas. Además, con esto conseguimos que los alumnos sean conscientes de que no existe una única forma de sumar o única estrategia que aplicar, sino que tenemos varias opciones a elegir.

Como conclusiones de esta prueba de la suma obtenemos que sólo cuatro estudiantes no utilizaron ninguna estrategia. Llama la atención que después de una única intervención docente más del 80% ha pasado a utilizar estrategias de cálculo mental para la suma siendo que prácticamente ningún alumno había utilizado estrategias en la prueba inicial.

Las estrategias más utilizadas fueron la de quitar ceros y compensar. Otros alumnos utilizaron varias veces las estrategias de descomponer y completar decenas (redondear). Por otra parte, en cuanto al rendimiento de los alumnos al operar correctamente las sumas podemos decir que la tasa de éxito es muy alta.

Es importante resaltar que en la operación $47 + 43$, un alumno preguntó que si podía compensar sumando 3 a 47 y restando 3 a 43 ya que buscaba la decena, y no utilizar la estrategia que aparecía escrita en la hoja de restar a 47 y sumar 2 a 43 buscando dobles. Fue una buena intervención ya que así se dio cuenta de que una misma operación la podemos resolver de distintas maneras buscando la que sea más cómoda para nosotros.

Las estrategias utilizadas al calcular **47 + 43** son:

Estrategias/ errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He descompuesto 47 como $40 + 7$, y 43 como $40 + 3$, y he sumado.	8	34%
He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble.	3	12%
He pensado los números en vertical y he sumado.	12	54%
Errores.	1	4%

Un alumno ha utilizado una estrategia diferente a las que aparecían en la ficha:

- *He sumado 3 a 47 y le he quitado 3 a 43. He compensado.* En este caso el alumno ha buscado la decena 50 y no ha utilizado la estrategia que estaba escrita en la prueba (he sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble).

Las estrategias utilizadas al calcular **39 + 24** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He buscado completar decenas.	8	33%
He pensado los números en vertical y he sumado.	15	63%
Errores.	1	4%

Un alumno ha utilizado una estrategia diferente a las que aparecían en la ficha:

- *He descompuesto 39 en 30 + 9 y 24 en 20 + 4. He sumado 30 + 20 y después 9 + 4.*

Las estrategias utilizadas al calcular **199 + 57** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He completado un sumando a la centena siguiente.	4	17%
He pensado los números en vertical y he sumado.	19	79%
Errores.	1	4%

Un alumno ha utilizado una estrategia diferente a las que aparecían en la ficha:

- *He sumado 1 a 199 y he restado 1 a 57. He compensado.*

Las estrategias utilizadas al calcular **77 + 73** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He descompuesto 77 como 70 + 7, y 73 como 70 + 3, y he sumado.	4	17%
He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar el doble.	4	17%
He pensado los números en vertical y he sumado.	14	58%
Errores.	0	0%

Dos alumnos han comentado una estrategia diferente a las que aparecían en la ficha:

- *He añadido 3 a 77 y me ha dado 80. Después a 80 le he sumado el otro sumando 73. A ese resultado le he restado 3.*

$$77 + 73 = (80 - 3) + 73 = (80 + 73) - 3 = 153 - 3 = 150$$

La operación en la que los alumnos tuvieron más fallos fue $1250 + 350$ con 3 fallos.

La estrategia menos utilizada ha sido la de buscar dobles ya que los alumnos la consideran más difícil comparado con el resto de estrategias, ya que piensan que es más fácil completar uno de los sumandos a una decena completa o compensar de manera que alcancen una decena completa y no dobles.

Hemos de indicar que el rendimiento de los alumnos al operar correctamente las sumas indica que la tasa de éxito es muy alta.

En la siguiente tabla, podemos observar el número de estudiantes centrándonos en el número de fallos de las operaciones.

<u>Prueba de la suma</u>	<u>Nº de estudiantes</u>	<u>Porcentaje</u>
Ningún fallo	17	71%
1 fallo	7	29%
2 fallos	0	0%
Más de 2 fallos	0	0%

Para finalizar, más del 80% ha pasado a utilizar estrategias de cálculo mental para la suma siendo que prácticamente ningún alumno había utilizado estrategias en la prueba inicial.

En cuanto al rendimiento en las tareas de cálculo, los alumnos obtienen tasas de éxito muy elevadas cuando suman números naturales.

4.2. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la resta.

La segunda sesión centrada en la resta se realizó el día 20 de abril a las 10.00 horas. Antes de la prueba, se hizo un recordatorio de las estrategias de suma mediante ejemplos de operaciones de la ficha hecha anteriormente. En este recordatorio participaron los alumnos comentando cómo resolvieron las operaciones y sugiriendo diferentes formas para su cálculo. Llama la atención que las estrategias de la suma fueron muy bien acogidas por los alumnos.

Después del recordatorio se procedió a la explicación de las diferentes estrategias de la resta que se pueden utilizar y de las diferencias que existen entre las estrategias de redondear y compensar de la suma y la resta. En esta explicación participaron los alumnos comentando cómo resolverían las distintas operaciones que pusimos en la pizarra como ejemplos. Seguidamente se les dieron 5 minutos para realizar la segunda ficha que consta de 10 operaciones con sus respectivas estrategias para marcar la que utilicen para la resolución. De estas 10 operaciones, 4 eran sumas. La prueba de la resta y la tabla con la recogida de datos se muestra en el anexo 4.

Como conclusiones de esta prueba obtenemos que cuatro estudiantes no utilizaron ninguna estrategia en ninguna operación de suma y resta, y que la mayoría de los estudiantes en las operaciones de suma utilizaron estrategias siendo sólo 6 alumnos que no utilizaron ninguna estrategia de suma en los cálculos.

Las estrategias más utilizadas fueron la de quitar ceros y la de descomponer. Otra estrategia muy usada fue la de completar a la decena. Se observa como los alumnos asumen mejor las estrategias de la suma que las de la resta.

Ejemplos de aportaciones de los alumnos en esta ficha de la resta:

Las estrategias utilizadas al calcular **600 - 250** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He omitido los ceros finales.	10	42%
He descompuesto el sustraendo como $200 + 50$.	7	29%
He pensado los números en vertical y he restado.	7	29%
Errores.	5	21%

Las estrategias utilizadas al calcular **108 - 59** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He completado el sustraendo (59) a la siguiente decena.	5	22%
He sumado 1 al minuendo y al sustraendo.	3	12%
He descompuesto el sustraendo como $50 + 9$.	3	12%
He pensado los números en vertical y he restado.	13	54%
Errores.	4	17%

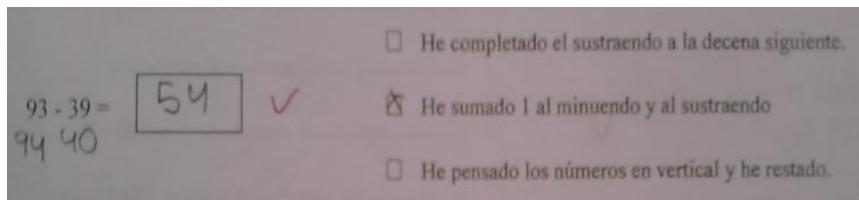
Las estrategias utilizadas al calcular **90 - 41** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He descompuesto el sustraendo (41) como $40 + 1$.	5	21%
He restado 1 al minuendo y sustraendo.	4	17%
He pensado los números en vertical y he restado.	15	62%
Errores.	2	8%

Las estrategias utilizadas al calcular **93 - 39** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He completado el sustraendo a la decena siguiente.	7	29%
He sumado 1 al minuendo y al sustraendo.	4	17%
He pensado los números en vertical y he restado.	13	54%
Errores.	6	25%

La estrategia de compensar, la podemos ver reflejada en la operación realizada por esta alumna.



La estrategia menos utilizada por los alumnos fue la de compensar. Por ejemplo en la operación 93 - 39, los alumnos prefirieron completar el sustraendo a la decena siguiente en lugar de compensar sumando 1 al minuendo y al sustraendo. Los estudiantes consideran más fácil o aceptan mejor la estrategia de compensar en las operaciones de suma que en las de resta.

En cuanto a las operaciones de suma:

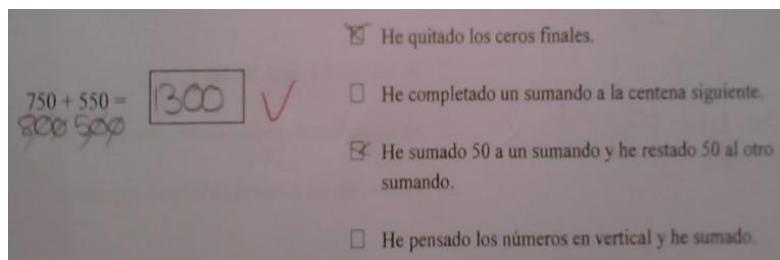
Las estrategias utilizadas al calcular **149 + 151** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He sumado 1 a 149 y he restado 1 a 151.	16	67%
He pensado los números en vertical y he sumado.	8	33%
Errores.	2	8%

Las estrategias utilizadas al calcular **750 + 550** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He quitado los ceros finales.	8	33%
He completado un sumando a la centena siguiente.	3	12%
He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.	5	22%
He pensado los números en vertical y he sumado.	8	33%
Errores.	0	0%

La utilización de las estrategias de compensar y quitar ceros las podemos ver reflejada en esta operación:



Un alumno ha utilizado otra estrategia diferente de las que aparecen en la ficha, y esta estrategia ha sido la de descomponer:

- *He sumado $700 + 500 = 1200$, y he sumado $50 + 50 = 100$. Finalmente, he sumado ambos resultados quedando $1200 + 100 = 1300$.*

Las estrategias utilizadas al calcular **699 + 66** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He completado un sumando a la centena siguiente.	9	37%
He pensado los números en vertical y he sumado.	15	63%
Errores.	2	8%

En esta prueba hubo más errores de cálculo que en la de la suma.

En la siguiente tabla, podemos observar el número de estudiantes centrandonos en el número de fallos de las operaciones.

Prueba de la resta	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	4	18%
1 fallo	5	22%
2 fallos	6	25%
Más de 2 fallos	8	34%

La operación en la que los alumnos tuvieron más fallos fue $430 - 99$ con 13 fallos. Con este dato informamos de que de los 13 que han errado hay 6 alumnos que han intentado aplicar una estrategia diferente de la reproducir mentalmente el algoritmo escrito y han errado. De estos 6 alumnos, 5 han intentado aplicar la estrategia completar un sumando a la centena siguiente.

Comparando la tabla de la prueba de la suma con la de la resta podemos observar que los alumnos cometieron más fallos en esta última. Ocho alumnos cometieron más de 2 fallos en la 2^a prueba de la resta siendo que en la 1^a prueba de la suma ningún alumno cometió más de 2 fallos.

Por ello, observamos que los alumnos tienen más facilidad a la hora de entender y aplicar con más éxito las estrategias de la suma en comparación con las de la resta.

En resumen, hay más errores de cálculo cuando restan que cuando suman. En cuanto a los errores al intentar aplicar determinadas estrategias, en la prueba de la suma sólo hubo 2 alumnos que realizaron mal alguna operación utilizando estrategias en comparación con la prueba de la resta en la que hubo 13 alumnos que realizaron erróneamente alguna operación utilizando estrategias.

4.3. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la multiplicación.

La tercera sesión centrada en la multiplicación se realizó el día 27 de abril a las 10.00 horas. Antes de la prueba, se hizo un recordatorio de las estrategias de la resta mediante ejemplos de operaciones de la ficha hecha anteriormente. En este recordatorio participaron los alumnos comentando cómo resolvieron ellos las operaciones y

sugiriendo diferentes formas para su resolución. Entre los ejemplos que se escribieron en la pizarra están:

80 – 31

- *Descomponer el 31 como 30 + 1, y restar $80 - 30 = 50 - 1 = 49$.*
- *Utilizar la compensación restándole a ambos números 1 quedando $79 - 30 = 49$.*

600 – 230

- *Quitar ceros de manera que nos quedara $60 - 23 = 37$ y a ese resultado le añadimos el cero quitado quedando 370 como resultado.*
- *Descomponer 200 como $200 + 30$, quedando $600 - 200 - 30$.*

Antes de comenzar con la explicación de las estrategias de la multiplicación, les pregunté que cuando el multiplicador es 5, por ejemplo en la operación 54×5 , qué estrategia podrían utilizar en lugar de multiplicar directamente por 5, y un alumno propuso primero multiplicar 54 por 10 y el resultado dividirlo por 2. Esta era la estrategia que iba a explicar y gracias a la aportación del alumno, éste hizo reflexionar a sus compañeros. En cuanto a la estrategia de multiplicar por 6, les pregunté a los niños qué multiplicación podemos pensar que nos dé como resultado 6 y pensaron en 2×3 . A partir de ahí les expliqué que la estrategia consiste en multiplicar primero por 2 el número dado y luego el resultado por 3, en lugar de multiplicar directamente por 6. En cuanto a otra estrategia que podemos realizar cuando tenemos como multiplicador 6 es la multiplicar por 5 y al resultado sumarle el multiplicando. Esta estrategia al ser un poco más compleja los alumnos no la utilizaron ya que preferían utilizar la primera de descomponer el 6 como 2×3 .

La estrategia de multiplicar por 15 tampoco fue muy usada por los alumnos ya que consideraban algo más complicado multiplicar por 10 y al resultado sumarle su mitad. Cuando aparece como multiplicador 15, los alumnos piensan en resolverla pensado en el algoritmo escrito.

La estrategia de multiplicar por 25 tampoco fue de las más usadas aunque su realización sea más sencilla ya que consiste en multiplicar 100 y dividir entre 4. Posiblemente los alumnos no la utilizan por la aparición de números grandes.

Además la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma causa dificultades a los alumnos. Tendríamos que haber enseñado esta propiedad con materiales pero no lo hicimos por falta de tiempo en la experimentación.

En la prueba de la multiplicación las estrategias más utilizadas fueron la de descomponer el multiplicando o el multiplicador, la de compensar, al igual que en las pruebas anteriores, y la estrategia de multiplicar por 5 y la de multiplicar por 6 (2×3).

Después de la explicación, se les dieron 10 minutos para realizar la tercera ficha que consta de 10 operaciones con sus respectivas estrategias para marcar la que utilicen para la resolución. De estas 10 operaciones, 2 eran restas. La prueba de la multiplicación y la tabla con la recogida de datos se muestran en el anexo 5.

Como conclusiones de esta prueba obtenemos que siete estudiantes no utilizaron ninguna estrategia en ninguna operación, y que la mayoría de los estudiantes en las operaciones de resta utilizaron estrategias siendo sólo ocho alumnos los que no utilizaron ninguna de las estrategias de la resta diferente del algoritmo escrito.

En cuanto a las operaciones de **resta**:

Las estrategias utilizadas al calcular **700 – 330** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He omitido los ceros finales.	5	21%
He descompuesto el sustraendo como $300 + 30$.	9	37%
He pensado los números en vertical y he restado.	10	42%
Errores.	3	12%

Las estrategias utilizadas al calcular **90 – 41** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He descompuesto el sustraendo (41) como $40 + 1$.	8	33%
He restado 1 al minuendo y sustraendo.	8	33%
He pensado los números en vertical y he restado.	8	33%
Errores.	4	17%

Con respecto a las operaciones de **multiplicación**:

Las estrategias utilizadas al calcular **34 x 5** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He multiplicado 34 por 10 y después he dividido por 2.	9	38%
He descompuesto el multiplicando 34, como $30 + 4$.	1	4%
He pensado los números en vertical y he multiplicado.	14	58%
Errores.	0	0%

Las estrategias utilizadas al calcular **25 x 6** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He multiplicado 25 por 5 y he sumado al resultado 25.	5	21%
Multiplico 25 por 2 y después multiplico por 3.	6	25%
He pensado los números en vertical y he multiplicado.	13	54%
Errores.	0	0%

Las estrategias utilizadas al calcular **12 x 25** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He dividido 12 entre 2 y he multiplicado 25 por 2. He compensado.	5	21%
He descompuesto 12 como 6×2 y 25 como 5×5 .	4	17%
He pensado los números en vertical y he multiplicado.	13	54%
Errores.	6	25%

Dos alumnos han utilizado estrategias diferentes a las que aparecían en la prueba:

- *He multiplicado 12×100 , y después lo he dividido entre 4.*
- *He multiplicado $12 \times 5 = 60$ y he dividido $25 : 5 = 5$, ambos resultados los he multiplicado $60 \times 5 = 300$. He compensado.*

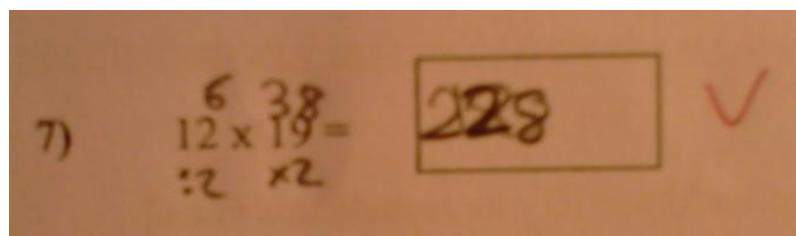
5) $\begin{array}{r} 60 \\ 12 \times 25 \\ \hline 5 \end{array} = 300 \quad \checkmark$

Las estrategias utilizadas al calcular **12 x 19** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He multiplicado 12×20 y después he quitado 12.	6	25%
He multiplicado 19 por 10 y después he sumado 19×2 .	5	21%
He pensado los números en vertical y he multiplicado.	13	54%
Errores.	6	25%

Una alumno ha propuesto una estrategia diferente que no aparecía en la ficha para la resolución de la operación:

- *He dividido $12 : 2 = 6$, y he multiplicado $19 \times 2 = 38$, ambos resultados los he multiplicado $38 \times 6 = 228$. He compensado.*



Podemos decir que los alumnos han mejorado con respecto al uso de estrategias de la resta ya que en esta prueba podemos observar como 17 alumnos utilizaron estrategias. Con respecto a la prueba de la resta, fueron 11 alumnos los que utilizaron estrategias para resolver las operaciones de resta. Por tanto ha habido un aumento de número de alumnos en la utilización de estrategias de la resta.

En la siguiente tabla, podemos observar el número de estudiantes centrandonos en el número de fallos de las operaciones.

<u>Prueba de la multiplicación</u>	<u>Nº de estudiantes</u>	<u>Porcentaje</u>
Ningún fallo	3	12%
1 fallo	11	46%
2 fallos	4	17%
Más de 2 fallos	6	25%

La operación en la que los alumnos tuvieron más fallos fue 24×15 con 11 fallos. Esto es debido al ser una multiplicación con números de dos cifras que los alumnos se confunden con las llevadas al pensarla con el algoritmo escrito.

Además en esta misma operación ha habido 7 alumnos que han intentado aplicar una estrategia diferente de la de reproducir mentalmente el algoritmo escrito y han errado. Cuatro alumnos utilizaron la estrategia de descomponer el multiplicador como $10 + 5$ y 3 alumnos utilizaron la estrategia de multiplicar 24 por 10, el resultado dividirlo por 2 y después sumar. Por otro lado ninguno de ellos ha utilizado la estrategia de descomponer 24 como 12×2 y 15 como 5×3 .

Llama la atención que en esta prueba el rendimiento de los alumnos es más alto cuando multiplican que cuando restan, siendo que la multiplicación es una operación más difícil de realizar cuando los alumnos utilizan el algoritmo escrito.

En resumen, según se avanza en la enseñanza los alumnos son más proclives a utilizar estrategias. Esto se ha puesto de manifiesto en las pruebas en las que hay restas. Sin embargo, hay que decir que la frecuencia en el uso de estrategias de la multiplicación es inferior que en el caso de la resta. Parece ser que los alumnos, a pesar de comprender las estrategias, eluden utilizarlas porque no se sienten seguros y, en estas condiciones, tienden a utilizar el algoritmo escrito.

La tasa de éxito que obtienen los alumnos cuando multiplican es superior que cuando restan, es decir, los alumnos cometen más errores cuando restan que cuando multiplican a pesar de que utilicen más estrategias novedosas cuando restan que cuando multiplican.

4.4. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la división.

La cuarta sesión centrada en la división se realizó el día 4 de mayo a las 10.00 horas. Antes de la prueba, se hizo un recordatorio de las estrategias de la multiplicación mediante ejemplos de operaciones de la ficha hecha anteriormente. En este recordatorio participaron los alumnos comentando cómo resolvieron ellos las operaciones y sugiriendo diferentes formas para su resolución. Entre los ejemplos que se escribieron en la pizarra están:

$$\mathbf{35 \times 9}$$

- *He descompuesto el multiplicando 35 como 30 + 5 y he multiplicado ambos números por 9 de manera que $(30 \times 9) + (5 \times 9) = 270 + 45 = 315$.*
- *He completado el 9 a la decena siguiente de manera que 35 lo multiplican por 10 y al resultado le restan 35.*

Se sugirió a los alumnos que podían descomponer el multiplicador 9 en una multiplicación, dando éstos como respuesta 3×3 . A continuación, se escribió en la pizarra $35 \times (3 \times 3)$ explicando que no importaba el orden para resolver la multiplicación ya que no alteraba el producto. Con esto se pretendía mostrar a los alumnos la propiedad asociativa y que no hay una única estrategia para resolver las

operaciones sino que tenemos varias opciones para elegir la que nos parezca más sencilla o fácil de aplicar.

También se les preguntó si recordaban cómo se compensaba en la multiplicación recordando la de la suma y la de resta. Respondieron que a un factor se le multiplica una cantidad y al otro se le divide esa misma cantidad. Como ejemplo en la pizarra se escribió:

$$35 \times 6$$

- *He multiplicado 35×2 y he dividido $6 : 2$, de manera que me ha quedado una multiplicación más fácil $70 \times 3 = 210$.*

A continuación, comenzamos con la explicación de las estrategias de la división.

Se comenzó escribiendo en la pizarra como ejemplo $320 : 5$, y se le preguntó a los alumnos que podíamos hacer con el divisor 5 recordando para ello la estrategia de la multiplicación cuando el multiplicador era 5. Un alumno sugirió que para resolver la división se podía dividir primero entre 10 y después multiplicar por 2. Esta era la estrategia que se iba a explicar y gracias a la aportación del alumno, éste hizo reflexionar a sus compañeros.

En cuanto a la estrategia de dividir por 8 se escribió como ejemplo en la pizarra $216 : 8$ y se les preguntó a los alumnos que número multiplicado por sí mismo una serie de veces nos daba como resultado 8, respondiendo que el número era el 2. A partir de ahí se explicó que 216 lo podemos dividir tres veces consecutivas entre dos, de manera que $216 : 8 = (216 : 2) : 4 = 108 : 4 = (108 : 2) : 2 = 54 : 2 = 27$.

Para resolver de otra manera esta misma operación se les preguntó a los alumnos si podían hacer algo con el dividendo 216, proponiendo varios alumnos la descomposición del dividendo en $200 + 16$ de manera que nos quede $(200 : 8) + (16 : 8) = 25 + 2 = 27$.

La estrategia de compensar en la división también fue bien aceptada por los alumnos pero no con tanto éxito como las compensaciones de las operaciones anteriores. Se les recordó cómo se compensaba en la suma, resta y multiplicación para que sugirieran cómo creían que se compensaba en la división, proponiendo varios alumnos dividir ambos términos por el mismo número, y la maestra completó la explicación diciendo que también se pueden multiplicar ambos términos por el mismo

número. Para trabajar esta estrategia se escribió en la pizarra $180 : 12$ de manera que pudieran ver los alumnos como la convertimos en una división más pequeña y fácil de resolver dividiendo ambos números entre 2. Otro ejemplo que fue escrito en la pizarra fue la operación $200 : 25$ y les propuse compensar multiplicando ambos números por 4. A continuación les pregunté por qué creían que multiplicaba por 4 y no por otro número, qué estaba buscando con esa multiplicación a lo que los alumnos respondieron que buscaba números enteros para tener una división más fácil quedándose $800 : 100$ y al quitar los ceros nos quedara como resultado 8.

La estrategia más utilizada por todos los alumnos fue la quitar ceros ya que es la que les enseñan en clase cuando aprender a hacer las divisiones.

Otra estrategia muy utilizada fue la de descomponer el dividendo. En cuanto a estrategias particulares, las más usadas acontecieron cuando el divisor era 5 y 8.

Después de la explicación, se les dieron 8 minutos para realizar la cuarta prueba que consta de 10 operaciones con sus respectivas estrategias para marcar aquellas que utilicen. De estas 10 operaciones, 2 eran multiplicaciones. La prueba de la división y la tabla con la recogida de datos se muestran en el anexo 6.

Como conclusiones de esta prueba obtenemos que cuatro estudiantes no utilizaron ninguna estrategia en ninguna operación, y que la mitad de los estudiantes, en las operaciones de multiplicación, utilizaron estrategias siendo 11 alumnos los que no utilizaron ninguna de ellas.

En cuanto a las operaciones de **multiplicación**:

Las estrategias utilizadas al calcular **94×9** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He multiplicado por 10 y he restado una vez el multiplicando (94).	5	21%
He descompuesto el multiplicando 94 como $90 + 4$.	6	25%
He pensado los números en vertical y he multiplicado.	13	54%
Errores.	0	0%

Las estrategias utilizadas al calcular **75 x 6** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He multiplicado 75 por 5 y he sumado al resultado 25.	6	25%
He multiplicado 75 por 2 y después he multiplicado por 3.	4	17%
He pensado los números en vertical y he multiplicado.	13	54%
Errores.	4	17%

Un alumno ha utilizado una estrategia que no aparecía en la ficha para la resolución de la operación:

- *He descompuesto 75 en 70 + 5 de manera que he multiplicado 70 x 6 y 5 x 6, sumando ambos resultados.*

Con respecto a las operaciones de división:

Las estrategias utilizadas al calcular **3600 : 100** son:

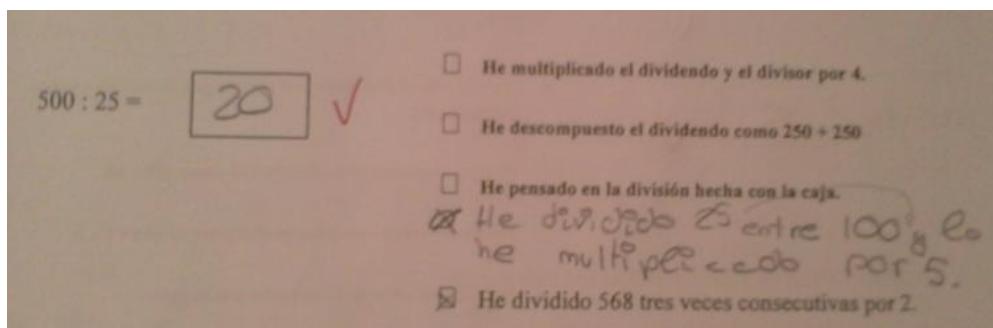
Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He quitado en el dividendo tantos ceros como tiene el divisor.	18	75%
He pensado en la división hecha con la caja.	6	25%
Errores.	1	4%

Las estrategias utilizadas al calcular **500 : 25** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He multiplicado el dividendo y el divisor por 4.	5	21%
He descompuesto el dividendo como 250 + 250.	6	25%
He pensado en la división hecha con la caja.	12	50%
Errores.	9	37%

Un alumno ha utilizado una estrategia diferente a las que aparecían en la ficha:

- *He dividido $100 : 25 = 4$ y he multiplicado $4 \times 5 = 20$.*



Las estrategias utilizadas al calcular **430 : 5** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He dividido 430 por 10 y después he multiplicado por 2.	9	38%
He descompuesto el dividendo 430 como $400 + 30$.	3	12%
He multiplicado el dividendo y el divisor por 2.	1	4%
He pensado en la división hecha con la caja.	11	46%
Errores.	3	12%

Las estrategias utilizadas al calcular **424 : 8** son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He dividido 424 tres veces consecutivas por 2.	6	25%
He descompuesto el dividendo (424) como $400 + 24$.	4	17%
He pensado en la división hecha con la caja.	14	58%
Errores.	5	21%

Las estrategias utilizadas al calcular $276 : 12$ son:

Estrategias / errores	Nº de respuestas	Porcentaje
He dividido el dividendo y el divisor por un mismo número (compensar).	4	17%
He descompuesto el dividendo 276 como $240 + 36$.	3	13%
He descompuesto en factores el divisor 12 como $2 \times 2 \times 3$.	2	8%
He pensado en la división hecha con la caja.	15	62%
Errores.	11	46%

La estrategia de compensar la podemos ver reflejada en la operación realizada por este alumno:

8) $276 : 12 =$ 23 ✓

- He dividido el dividendo y el divisor por un mismo número (compensar).
- He descompuesto el dividendo 276 como $240 + 36$.
- He descompuesto en factores el divisor 12 como $2 \times 2 \times 3$.
- He pensado en la división hecha con la caja.

Comparando las pruebas de la multiplicación y división, en la primera se utilizaron más estrategias que en la segunda lo que nos da a entender que los alumnos han asimilado mejor las estrategias de la multiplicación para llevarlas a la práctica.

En la siguiente tabla, podemos observar el número de estudiantes centrandonos en el número de fallos de las operaciones.

Prueba de la división	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	8	33%
1 fallo	4	17%
2 fallos	1	4%
Más de 2 fallos	11	46%

La operación en la que los alumnos tuvieron más fallos fue $276 : 12$ con 11 fallos.

El rendimiento de los alumnos cuando dividen es muy diferente del que han obtenido cuando multiplican. En efecto, el porcentaje de alumnos que no cometan ningún error en la división es mayor que los que hacen lo mismo cuando multiplican. Pero también el porcentaje de alumnos que cometan más de dos errores cuando dividen es mayor que los que hacen lo mismo cuando multiplican.

5. Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba final.

Esta enseñanza terminó pasando a los alumnos una prueba final el día 11 de mayo a las 9.00 horas sin haber recibido ningún tipo de recordatorio acerca de las estrategias de cálculo mental enseñadas en las sesiones pasadas. Esta prueba era la misma que la prueba inicial la cual estaba formada por 15 operaciones de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, y al lado de cada operación había una serie de estrategias las cuales deberían marcar los alumnos en caso de haberlas utilizado para realizar la operación. El tiempo para su realización fue de 10 minutos. El modelo de la prueba final y la tabla con la recogida de datos se muestran en el anexo 2.

Esta última prueba nos sirve para saber si los alumnos han evolucionado en la utilización de estrategias de cálculo mental gracias a las sesiones de explicación y con la práctica de las fichas anteriores, o no.

El proceso fue el siguiente: se repartió a los alumnos la ficha de la prueba final a sin ninguna explicación de las estrategias a utilizar, al igual que se hizo en la prueba inicial. Dispusieron de 10 minutos para su realización, 5 minutos menos que la prueba inicial. Gracias a esto podemos comprobar que los alumnos han sido más rápidos en la resolución de la ficha que la otra vez, aunque el factor tiempo no se tiene en cuenta en este trabajo.

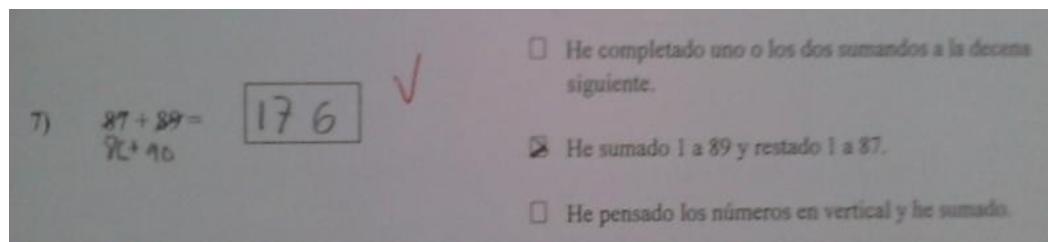
En cuanto al uso de estrategias, todos los alumnos utilizaron alguna estrategia para la realización de los cálculos. No hubo ningún alumno que no utilizara ninguna de ellas.

Se debe destacar que los alumnos no han mejorado en el cálculo pero sí en el uso de estrategias. A pesar de haber reducido en 5 minutos el tiempo de respuesta.

En cuanto a las estrategias que utilizaron para resolución de algunas operaciones de **suma** fueron:

$$87 + 89$$

- *He buscado el doble sumando 1 a 87 y restándole 1 a 89 de manera que me queda 88 + 88. Esta estrategia no aparecía en la ficha, la ha escrito el alumno.*



- *He compensado para buscar la decena completa restando 1 a 97 y sumándole 1 a 89, de manera que me queda 86 + 90.*

$$40 + 50 + 3 + 60$$

- *He quitado los ceros para sumar $4 + 5 + 6 = 15$ añadiendo al resultado un 0, 150. A 150 le he sumado la unidad que me quedaba resultado $150 + 3 = 153$. Esta estrategia no aparecía en la ficha añadiéndola el alumno.*
- *He buscado completar centenas sumando $40 + 60 = 100$ y a éste le he sumado 53 quedándose 153.*

$$250 + 150$$

- *He descompuesto los sumandos de manera que he sumado $200 + 100 = 300$, $50 + 50 = 100$. Finalmente he sumado los dos resultados quedándose 400 como resultado. Esta estrategia no aparecía en la ficha.*
- *He quitado los ceros finales.* Estrategia utilizada por la mayoría de los alumnos.
- *He compensado restándole al primer sumando 50 y al otro sumándole 50, quedándose $200 + 200 = 400$.*

47 + 43

- *He compensado para buscar decenas completas. Para ello he sumado 3 al primer sumando 47 y al segundo le restado 3 quedándome $50 + 40 = 90$. Esta estrategia no ha aparecido en la ficha.*

He descompuesto 47 como $40 + 7$, y 43 como $40 + 3$, y he sumado.

He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble.

He pensado los números en vertical y he sumado.

He compensado

- *He descompuesto los sumandos y así poder sumar $40 + 40 = 80$, y $7 + 3 = 10$. Finalmente, he sumado ambos resultados $80 + 10 = 90$. Esta estrategia ha sido utilizada por gran parte de los alumnos.*

Las estrategias más utilizadas por los alumnos en la resolución de las operaciones de suma fueron: omitir ceros, descomposición y compensar. La menos utilizada fue la estrategia de completar a la decena o centena (redondear) aunque también fue utilizada por varios alumnos.

Es importante saber que las estrategias que los alumnos consideran más fáciles de aplicar son las de la suma y son las que más utilizan en comparación con las otras operaciones. En general, han sido unas estrategias con la que los alumnos han obtenido tasas muy altas de rendimiento en el cálculo de sumas.

En cuanto a las estrategias utilizadas en la resta:

87 – 39

- *He completado el sustraendo 39 a la decena quedándose:*

$$87 - (40 - 1) = (87 - 40) + 1 = 47 + 1 = 48$$

He completado el sustraendo (39) a la siguiente decena.

He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.

He descompuesto el sustraendo como $30 + 9$.

He pensado los números en vertical y he restado.

- *He compensado sumando 1 al minuendo y al sustraendo.*
- *He descompuesto el sustraendo 39 como $30 + 9$ de manera que:*

$$87 - 30 - 9 = 57 - 9 = 48$$

800 - 350

- *He quitado los ceros finales para poder restar.* Estrategia utilizada por la mayoría de los alumnos.
- *He descompuesto el sustraendo como $300 + 50$ de manera que he restado $800 - 300 = 500$ y a este resultado le quitado 50 quedándome 450.*

320 - 99

- *He completado el sustraendo 99 a la centena siguiente de manera que $320 - (100 - 1) = (320 - 100) + 1 = 220 + 1 = 221$.* Es la estrategia más utilizada.
- *He compensado sumando una unidad al minuendo y otra al sustraendo.* Estrategia poco exitosa, solo utilizada por 3 alumnos.
- *He descompuesto el sustraendo como $90 + 9$ de manera que $320 - 90 - 9 = 230 - 9 = 221$.* Estrategia poco frecuente, solo utilizada por 3 alumnos.

Las estrategias más utilizadas en las operaciones de resta fueron: quitar los ceros finales, descomponer el sustraendo o minuendo y completar a la decena o centena siguiente. En cuanto a la estrategia de compensar fue menos utilizada por los alumnos ya que la consideran más difícil de aplicar en comparación con la estrategia de compensación de la suma.

En comparación con las estrategias de la suma, en las de la resta los alumnos han obtenido tasas de rendimiento en el cálculo más bajas que cuando las aplican para sumar.

Las estrategias utilizadas en la **multiplicación**:

27 x 5

- *He multiplicado 27 por 10 = 270 y el resultado lo he dividido entre 2 quedándome $270 : 2 = 135$. Estrategia utilizada por la mayoría de los alumnos.*
- *He descompuesto el multiplicando 27 como $20 + 7$ de manera que $20 \times 5 = 100$ y $5 \times 7 = 35$. Finalmente he sumado ambos resultados $100 + 35 = 135$. Esta estrategia ha sido menos utilizada por los alumnos, sólo por 4 de ellos.*

34 x 9

- *He multiplicado 34 por 10 = 340 y al resultado le he restado el multiplicando quedándome $340 - 34 = 306$. Esta estrategia ha sido utilizada por la mayoría de los alumnos.*
- *He descompuesto el multiplicando 34 como $30 + 4$ quedándose $30 \times 9 = 270$ y $9 \times 4 = 36$. Finalmente, he sumado ambos resultados $270 + 36 = 306$. Esta estrategia, en cambio, ha sido poco frecuente ya que sólo la han utilizado 4 alumnos.*

25 x 6

- *He multiplicado $25 \times 5 = 125$ y al resultado le he sumado 25 quedándose $125 + 25 = 150$. Esta estrategia ha sido poco utilizada por los alumnos.*
- *He multiplicado $25 \times 2 = 50$ y después el resultado por 3 quedándose $50 \times 3 = 150$. Esta estrategia ha sido utilizada por la mayoría de ellos.*

Las estrategias más utilizadas en la multiplicación fueron la de multiplicar por 5 (multiplicar por 10 y dividir entre 2), la de multiplicar por 6 (2×3), y la de multiplicar por 9 (multiplicar por 10 y restar el multiplicando). Los alumnos aceptaron rápidamente estas estrategias particulares asociando rápidamente el multiplicador 5 a multiplicar primero por 10 y después dividir entre 2, etc.

En cambio, las estrategias menos utilizadas fueron las de descomponer el multiplicando o el multiplicador quizás porque las encuentran más difíciles a la hora de aplicarlas debido a la gestión de la propiedad distributiva.

Y, por último, las estrategias utilizadas en la **división**:

224 : 8

- *He dividido 224 tres veces consecutivas por 2.* Esta estrategia ha sido la mayor utilizada por los alumnos para la resolución de la operación.

10) $224 : 8 =$ ✓

He dividido 224 tres veces consecutivas por 2.
 He descompuesto el dividendo (224) como $160 + 64$.
 He buscado un número que multiplicado por 8 da 224.
 He pensado en división hecha con la caja.

- *He descompuesto 224 como $160 + 64$ de manera que $160 : 8 = 20$ y $64 : 8 = 8$. Finalmente he sumado ambos resultados $20 + 8 = 28$.* En cambio esta estrategia ha sido muy poco utilizada.

180 : 12

- *He compensado dividiendo el dividendo 180 y el divisor 12 por un mismo número, en este caso por 2, varias veces.*

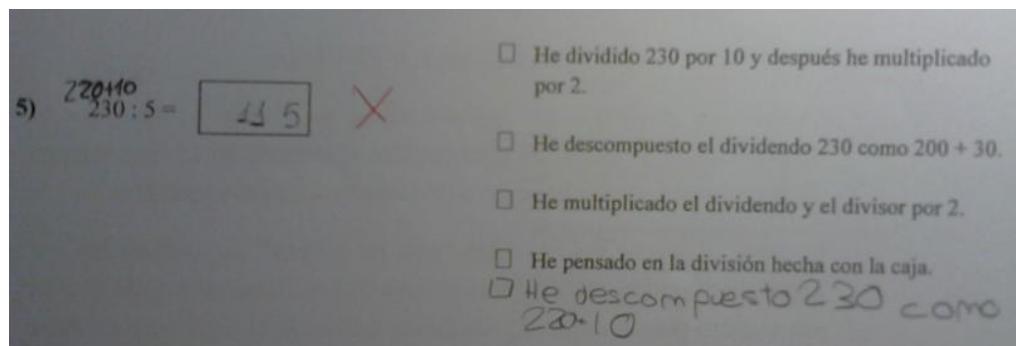
15) $180 : 12 =$ ✓

He dividido el dividendo y el divisor por un mismo número (compensar).
 He descompuesto el dividendo 180 como $120 + 60$.
 He descompuesto en factores el divisor 12 como 6×2 .
 He buscado un número que multiplicado por 12 da 180.
 He pensado en la división hecha con la caja.

- *He descompuesto en factores el divisor como 6×2 quedándome $180 : 6 = 30$ y el resultado lo he dividido entre 2 de manera que $30 : 2 = 15$.*
- *He descompuesto el dividendo 180 como $120 + 60$ de manera que $120 : 12 = 10$ y $60 : 12 = 5$. Finalmente he sumado ambos resultados $10 + 5 = 15$.*

230 : 5

- *He dividido 230 : 10 = 23 y el resultado lo he multiplicado por 2 quedándome $23 \times 2 = 46$. Estrategia utilizada por gran parte de los alumnos.*
- *He descompuesto 230 como $220 + 10$ quedándome $220 : 5 = 44$ y $10 : 5 = 2$. Finalmente he sumado ambos resultados $44 + 2 = 46$. Estrategia escrita por la alumna ya que no aparecía en la ficha.*



- *He compensado multiplicando el dividendo y el divisor por 2 quedándome $230 \times 2 = 460$ y $5 \times 2 = 10$. Finalmente he dividido ambos resultados $460 : 10 = 46$. Esta estrategia al aplicarla los alumnos yerran en el cálculo.*
- *He descompuesto el dividendo 230 como $200 + 30$ de manera que $200 : 5 = 40$ y $30 : 5 = 6$. Finalmente he sumado ambos resultados $40 + 6 = 46$. Estrategia poco utilizada por los alumnos.*

Una de las estrategias más utilizadas por los alumnos ha sido la de compensar. En cuanto a estrategias particulares, las más usadas han sido cuando el divisor era 8 y cuando era 5.

Al igual que en las estrategias de la multiplicación, la menos utilizada ha sido la de descomponer el dividendo quizás porque tienen que aplicar la propiedad distributiva.

Comparando las estrategias utilizadas en las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, las estrategias menos usadas por los alumnos fueron las de multiplicación quizás porque las encuentran más difíciles de aplicar prefiriendo utilizar el algoritmo escrito.

En la siguiente tabla, podemos observar el número de estudiantes centrándonos en el número de fallos de las operaciones.

Prueba final	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	2	8%
1 fallo	5	21%
2 fallos	6	25%
Más de 2 fallos	11	46%

La operación en la que los alumnos tuvieron más fallos fue 120×15 con 14 fallos, la misma operación que en la prueba inicial. Consideramos que esto ocurre porque se trata de una multiplicación formada por números de varias cifras y los alumnos se confunden con las llevadas al pensar en el algoritmo escrito.

6. Estudio comparado entre la prueba inicial y final.

Para realizar el estudio comparativo comentaremos el uso de estrategias y el rendimiento en el cálculo de cada operación. Para cada cálculo vamos a analizar si ha habido mejora en dos aspectos: la aplicación de estrategias diferentes del uso del algoritmo escrito y la tasa de éxito en la realización del cálculo.

Este estudio lo vamos a realizar en dos fases o etapas. En primer lugar vamos a estudiar estos dos aspectos analizando cada una de las 15 operaciones que componen la prueba. Y, en segundo lugar, vamos a analizar el comportamiento de cada uno de los alumnos que forman el grupo experimental.

6.1. Estudio comparativo de cada una de las operaciones.

1) $19 + 34 + 11$

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He buscado completar decenas.	6	25%	19	79%
He pensado los números en vertical y he sumado.	18	75%	5	21%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	23	96%	24	100%
Mal	1	4%	0	0%

En la prueba inicial, en la resolución de esta operación se cometió un fallo y sólo 6 alumnos utilizaron estrategias para resolverla. Con esto observamos que los alumnos resuelven la operación utilizando el algoritmo escrito. En comparación con la prueba final, los alumnos no cometieron ningún fallo en su utilización, y 19 alumnos utilizaron estrategias para su resolución. Por ello deducimos que los alumnos utilizan las estrategias exitosamente ya que han conseguido el resultado correcto.

De la información de las tablas se deduce que ha habido mejora en los dos aspectos que estamos analizando: la aplicación de estrategias diferentes del uso del algoritmo escrito y la realización del cálculo.

2) $250 + 150$

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He quitado los ceros finales.	6	25%	11	46%
He completado un sumando a la centena siguiente.	3	12%	2	8%
He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.	5	21%	9	38%
He pensado los números en vertical y he sumado.	10	42%	2	8%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	22	92%	23	96%
Mal	2	8%	1	4%

En la prueba inicial, dos alumnos resolvieron mal la operación y 13 alumnos utilizaron estrategias para su resolución, por lo que la mitad de la clase resolvió la operación utilizando el algoritmo escrito. En cambio, en la prueba final, sólo un alumno resolvió mal la operación utilizando una estrategia y 22 alumnos utilizaron alguna estrategia para resolver la operación. Además, dos alumnos resolvieron correctamente la operación sin utilizar ninguna estrategia.

3) 800 - 350

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He quitado los ceros finales.	3	12%	12	50%
He descompuesto el sustraendo como 300 + 50.	5	21%	6	25%
He pensado los números en vertical y he restado.	16	67%	6	25%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	22	92%	19	79%
Mal	2	8%	5	21%

En la prueba inicial, dos alumnos resolvieron erróneamente la operación los cuales no utilizaron ninguna estrategia para ello por lo que se confunden utilizando el algoritmo escrito, y 8 de ellos sí que utilizaron estrategias resolviéndola correctamente. Por el contrario, en la prueba final, 5 alumnos resolvieron mal la operación aplicando estrategias, y 18 de ellos utilizaron estrategias para resolverla. Al comparar observamos que en la prueba final se cometieron más fallos pero a la vez hubo más alumnos que prefirieron utilizar estrategias para llevar a cabo la operación en lugar de utilizar el algoritmo escrito.

4) 27×5

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He multiplicado 27 por 10 y después he dividido por 2.	3	12%	7	29%
He descompuesto el multiplicando 27, como $20 + 7$.	2	8%	4	17%
He pensado los números en vertical y he multiplicado.	19	79%	13	54%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	23	96%	24	100%
Mal	1	4%	0	0%

En la prueba inicial, sólo un alumno realizó mal la operación el cual la resolvió utilizando el algoritmo escrito, y 6 alumnos utilizaron estrategias consiguiendo resolver correctamente la operación. En cuanto a la prueba final, los alumnos no cometieron ningún error en su resolución y 10 de ellos utilizaron estrategias para resolverla, siendo, aun así, más de la mitad de la clase los cuales prefirieron utilizar el algoritmo escrito para llevarla a cabo.

5) $230 : 5$

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He dividido 230 por 10 y después he multiplicado por 2.	3	12%	6	25%
He descompuesto el dividendo 230 como $200 + 30$.	2	8%	5	21%
He multiplicado el dividendo y divisor por 2.	1	4%	2	8%
He pensado en la división hecha con la caja.	18	75%	11	46%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	20	83%	19	79%
Mal	4	17%	5	21%

En la prueba inicial, 4 alumnos resolvieron mal la operación de los cuales 2 utilizaron estrategias para su resolución. Por otro lado, hubo 6 alumnos que utilizaron estrategias para resolver la operación de los cuales 4 la resolvieron correctamente. En cuanto a la prueba final, 5 alumnos resolvieron incorrectamente la operación de los cuales 4 utilizaron estrategias para resolverla. El total de alumnos que usó estrategias fue de 13 personas de los cuales 3, aun utilizándolas, resolvieron mal la operación.

Los alumnos utilizan estrategias diferentes a la aplicación del algoritmo a pesar de que, en algunos casos, cometan errores al aplicarlas.

6) $40 + 50 + 3 + 60$

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He buscado completar centenas.	10	42%	14	58%
He pensado los números en vertical y he sumado.	14	58%	10	42%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	23	96%	22	92%
Mal	1	4%	2	8%

En la prueba inicial, sólo un alumno realizó mal la operación el cual utilizó el algoritmo escrito para su resolución. En cuanto al uso de estrategias, 10 alumnos las utilizaron exitosamente consiguiendo resolver la operación correctamente. Por otro lado, en la prueba final, 2 alumnos realizaron mal la operación habiendo uno de ellos que utilizó una estrategia diferente que la de pensar los números en vertical. El total de alumnos que utilizaron estrategias fue 14 de los cuales uno de ellos aplicó mal la estrategia resolviendo mal la operación.

En esta operación aumento el número de alumnos que se decantan por usar una estrategia diferente de la de pensar los números en vertical.

7) $87 + 89$

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He completado uno o los dos sumandos a la decena siguiente.	3	12%	3	12%
He sumado 1 a 89 y restado 1 a 87.	7	29%	13	54%
He pensado los números en vertical y he sumado.	14	59%	8	34%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	22	92%	22	92%
Mal	2	8%	2	8%

En la prueba inicial, hubo dos alumnos que realizan mal la operación utilizando, ambos, estrategias para resolverla. En cuanto al número total de estudiantes que utilizaron estrategias fueron 10. Por otro lado, en la prueba final, también hubo dos alumnos que realizaron mal la operación utilizando el algoritmo escrito. En cuanto a las estrategias, 16 alumnos las utilizaron consiguiendo resolver correctamente la operación.

En esta operación también observamos una gran mejora en la utilización de estrategias diferentes a la de pensar los números en vertical y sumar.

8) 320 - 99

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He completado el sustraendo (99) a la centena siguiente.	4	17%	9	38%
He sumado una unidad al minuendo y al sustraendo.	1	4%	3	12%
He descompuesto el sustraendo como 90 + 9.	1	4%	3	12%
He pensado los números en vertical y he restado.	18	75%	9	38%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	19	79%	15	63%
Mal	5	21%	9	37%

En la prueba inicial, hubo 5 alumnos los cuales resolvieron mal la operación habiendo 4 de ellos que se confundieron utilizando el algoritmo escrito. En cuanto al uso de estrategias, hubo 6 alumnos que las usaron siendo sólo uno de ellos el que utilizó mal la estrategia. Con respecto a la prueba final, hubo más errores que la inicial ya que 9 alumnos realizaron mal la operación habiendo 7 de ellos que la resolvieron incorrectamente utilizando estrategias. Por el contrario, hubo mayor número de alumnos que utilizaron estrategias, 15, y de éstos, hubo 7 que resolvieron mal la operación aun con la utilización de estrategias. Hubo alumnos que optaron por la estrategia de completar a 100 el sustraendo y que se confundieron al quitar una unidad en lugar de añadir la unidad que previamente habían quitado al restar 100 a 320.

9) 34×9

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He multiplicado por 10 y he restado una vez el multiplicando (34).	2	8%	6	25%
He descompuesto el multiplicando 34, como $30 + 4$.	2	8%	4	17%
He pensado los números en vertical y he multiplicado.	20	84%	14	58%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	23	96%	22	92%
Mal	1	4%	2	8%

En la prueba inicial, hubo sólo un alumno que realizó mal la operación confundiéndose al realizar el algoritmo escrito. En cuanto al uso de estrategias, hubo sólo 3 alumnos que las utilizaron resolviéndolas correctamente. Por otro lado, en la prueba final, dos alumnos resolvieron mal la operación utilizando el algoritmo escrito, y 10 estudiantes utilizaron estrategias resolviendo correctamente la operación.

La estrategia más utilizada por los alumnos en la prueba final fue la de multiplicar por 10 y restar el multiplicando 34. Esta estrategia fue utilizada por 6 alumnos y de éstos, 5 aplicaron bien la estrategia realizando bien el cálculo.

10) 224 : 8

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He dividido 224 tres veces consecutivas por 2.	0	0%	6	25%
He descompuesto el dividendo 224 como 160 + 64.	1	4%	5	21%
He buscado un número que multiplicado por 8 da 224.	1	4%	3	13%
He pensado en la división hecha con la caja.	22	92%	10	41%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	15	63%	14	58%
Mal	9	37%	10	42%

En la prueba inicial, 9 alumnos realizaron mal la operación confundiéndose con la utilización del algoritmo escrito. En el uso de estrategias, sólo hubo un alumno que las utilizó y resolvió correctamente la operación. En cuanto a la prueba final, 10 alumnos realizaron mal la operación de los cuales 5 utilizaron erróneamente el algoritmo escrito. Con respecto al uso de estrategias, 14 alumnos las utilizaron para llevar a cabo la operación y 5 de ellos la resolvieron mal.

La estrategia más utilizada por los alumnos en la prueba final fue la de dividir 224 tres veces consecutivas entre 2 siendo que esta estrategia no la utilizó ningún

alumno en la prueba inicial. En la prueba final fue utilizada por 6 alumnos y de éstos, 4 aplicaron bien la estrategia realizando bien el cálculo.

11) $47 + 43$

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He descompuesto 47 como $40 + 7$, y 43 como $40 + 3$.	6	25%	11	46%
He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble.	2	8%	3	12%
He pensado los números en vertical y he sumado.	16	67%	10	42%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	23	96%	23	96%
Mal	1	4%	1	4%

En la prueba inicial, sólo un alumno resolvió mal la operación confundiéndose al utilizar el algoritmo escrito. En el uso de estrategias, 7 alumnos las utilizaron aplicándolas correctamente en la obtención del resultado. En cuanto a la prueba final, hubo un único alumno que realizó mal la operación con la utilización del algoritmo escrito. Con respecto al uso de las estrategias, 14 alumnos las utilizaron resolviendo correctamente la operación.

En esta operación, también hay mejora en el uso de estrategias ya que se duplican los alumnos que las utilizan.

12) 87 - 39

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He completado el sustraendo (39) a la decena siguiente.	1	4%	4	17%
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.	3	13%	4	17%
He descompuesto el sustraendo como 30 + 9.	2	8%	5	20%
He pensado los números en vertical y he restado.	18	75%	11	46%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	20	83%	16	67%
Mal	4	17%	8	33%

En la prueba inicial, 4 alumnos realizaron mal la operación con la utilización del algoritmo escrito, y sólo 5 alumnos utilizaron otras estrategias para resolver la operación correctamente. En comparación con la prueba final, hubo más alumnos que resolvieron mal la operación, en concreto 8, de los cuales 3 se confundieron en la utilización del algoritmo escrito. En cuanto al uso de estrategias, 13 alumnos las utilizaron, de los cuales 4 la resolvieron mal aun aplicando estrategias.

Aquí también observamos una mejora en el uso de estrategias. En la prueba final, la estrategia más utilizada por los alumnos fue la de descomponer el sustraendo como 30 + 9. Fue utilizada por 5 alumnos realizando bien el cálculo. En cambio en la estrategia de completar el sustraendo a la decena siguiente, de 4 alumnos que la

utilizaron en la prueba final, los realizaron mal el cálculo y esto puede ser debido a la confusión de quitar una unidad en lugar de añadir la unidad que previamente habían quitado al restar.

13) 120×15

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He multiplicado 120 por 10, el resultado lo he dividido por 2 y después he sumado.	2	8%	3	13%
He descompuesto el multiplicador 15 como $10 + 5$.	3	13%	5	20%
He omitido el cero del multiplicando (120).	5	20%	2	8%
He pensado los números en vertical y he multiplicado.	14	59%	14	59%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	11	46%	10	41%
Mal	13	54%	14	59%

Esta operación fue en la que los alumnos cometieron más fallos tanto en la prueba inicial como en la final. Por un lado, en la prueba inicial, 13 alumnos realizaron mal esta operación siendo 8 de ellos los que se confundieron en la utilización del algoritmo escrito. En cuanto al uso de estrategias diferentes a las del algoritmo escrito, 10 alumnos las utilizaron, siendo 5 de ellos los que resolvieron mal la operación. Por otro lado, en la prueba final, 14 alumnos realizaron mal la operación, siendo 8 de ellos

los que se confundieron en la utilización del algoritmo escrito. Además, 11 alumnos fueron los que utilizaron estrategias para resolver la operación, siendo 6 de ellos los que resolvieron mal la operación.

Se trata del cálculo más difícil de la prueba. En este caso apenas se observan diferencias en el comportamiento de los alumnos en los dos aspectos que estamos analizando.

14) 25×6

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He multiplicado 25 por 5, y he sumado al resultado 25.	1	4%	6	25%
He multiplicado 25 por 2 y después he multiplicado por 3.	5	21%	5	21%
He pensado los números en vertical y he multiplicado.	18	75%	13	54%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	18	75%	24	100%
Mal	6	25%	0	0%

En la prueba inicial, 6 alumnos realizaron mal la operación siendo 4 de ellos los cuales se confundieron con la utilización del algoritmo escrito. En cuanto al uso de estrategias, 6 alumnos las utilizaron siendo 2 de ellos los cuales resolvieron erróneamente la operación. Con respecto a la prueba final, ninguno cometió ninguno fallo en la resolución de la operación y 11 niños utilizaron estrategias para resolverla correctamente.

Aquí hay una gran mejora de los dos aspectos que estamos analizando. Además, la estrategia novedosa con la que los alumnos han obtenido mejor rendimiento en la prueba final ha sido la de multiplicar 25 por 5, y después sumar al resultado 25.

15) $180 : 12$

Estrategia	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
He dividido el dividendo y el divisor por un mismo número (compensar).	1	4%	4	17%
He descompuesto el dividendo 180 como $120 + 60$.	1	4%	4	17%
He descompuesto en factores el divisor 12 como 6×2 .	1	4%	0	0%
He buscado un número que multiplicado por 12 da 180.	4	17%	3	13%
He pensado en la división hecha con la caja.	17	71%	13	53%

Realización del cálculo	Nº de alumnos Prueba inicial	Porcentaje Prueba Inicial	Nº de alumnos Prueba final	Porcentaje Prueba final
Bien	16	67%	14	58%
Mal	8	33%	10	42%

En la prueba inicial, 8 alumnos realizaron mal la operación siendo 7 de ellos los cuales se confundieron en la utilización del algoritmo escrito. Con respecto al uso de estrategias, 6 alumnos las utilizaron habiendo sólo un alumno el cuál la aplicó mal resolviendo erróneamente la operación. En cuanto a la prueba final, fueron 10 alumnos los que realizaron mal la operación siendo 8 de ellos los cuales se confundieron en la utilización del algoritmo escrito. En el uso de otras estrategias, 11 alumnos las utilizaron habiendo 2 de ellos que resolvieron mal la operación aun con la utilización de estrategias.

Este es otro cálculo que ha resultado difícil a los alumnos. No se detecta mejora en la prueba final. Al parecer los alumnos han sido reacios a utilizar estrategias diferentes a la de visualizar mentalmente la caja de la división y proceder según el algoritmo usual.

Comparando la prueba final con la prueba inicial, todos los alumnos han aumentado en el uso de estrategias diferentes del algoritmo para resolver todas los cálculos, como en el caso de 4 alumnos que utilizaron 15 estrategias para las 15 operaciones, es decir, hay cuatro estudiantes que optan por utilizar en la prueba final estrategias diferentes del algoritmo tradicional.

Además, comparando ambas pruebas, el porcentaje de aciertos es similar en las dos pruebas. Con respecto al uso de estrategias diferentes a la utilización del algoritmo escrito, ha habido una gran mejoría ya que en la prueba final ha aumentado su uso por parte de los alumnos por lo que podemos comprobar que las sesiones anteriores de explicación y las pruebas pasadas han servido de ayuda para asentar estas estrategias.

Es importante destacar que la multiplicación es la operación en la que los alumnos se aferran más al algoritmo tradicional posiblemente porque, en muchas ocasiones, tienen que poner en juego la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma que gestionan con dificultad.

Además, en esta prueba final hubo dos alumnos que escribieron los resultados de la división al revés al igual que se dio en la prueba inicial. Este caso se debe a que el alumno piensa mentalmente la división hecha con la caja y va apuntando los números del cociente pero sin tener en cuenta el orden de éste. Entendemos que estos errores son debidos a la exigencia de operar mentalmente sin la ayuda del soporte escrito.

6.2. Estudio comparativo de cada uno de los alumnos.

Para profundizar, vamos a realizar a continuación un seguimiento de los 24 alumnos para estudiar su evolución en el uso de estrategias y los aciertos que han obtenido.

En la siguiente tabla, utilizaremos un código de color para distinguir la evolución de cada alumno:

- El color azul representa los alumnos que han mejorado en el acierto de los cálculos.
- El color rojo representa a los alumnos que no han mejorado en el acierto de los cálculos.
- El color negro representa a los alumnos que han tenido el mismo comportamiento en la prueba inicial y final en cuanto a los dos aspectos que estamos evaluando: uso de estrategias diferentes a las del algoritmo y éxito en el cálculo.

La alumna número 15 no asiste a clase pero no la quitamos de la lista para no cambiar el número de lista al resto de alumnos.

	PRUEBA INCIAL			PRUEBA FINAL		
Alumno	Nº de cálculos en los que utiliza estrategias diferentes a la del algoritmo	Nº de aciertos en el cálculo cuando utiliza estrategias diferentes a la del algoritmo.	Nº de aciertos en el cálculo cuando usa el algoritmo escrito	Nº de cálculos en los que utiliza estrategias diferentes a la del algoritmo	Nº de aciertos en el cálculo cuando utiliza estrategias diferentes a la del algoritmo	Nº de aciertos en el cálculo cuando usa el algoritmo escrito
Nº 1	8	7	7	15	14	0
Nº 2	2	2	11	2	0	12
Nº 3	1	1	12	3	3	10
Nº 4	7	3	8	6	5	8
Nº 5	3	0	4	8	6	5
Nº 6	7	7	6	7	6	8
Nº 7	1	1	12	1	1	12
Nº 8	6	4	8	15	11	0
Nº 9	2	2	7	7	4	8

Nº 10	0	0	12	2	2	11
Nº 11	5	5	5	7	5	3
Nº 12	11	11	4	14	14	1
Nº 13	10	9	2	12	9	1
Nº 14	4	4	10	12	12	2
Nº 15*	0	0	0	0	0	0
Nº 16	8	4	6	15	13	0
Nº 17	8	7	6	8	6	3
Nº 18	0	0	15	7	4	6
Nº 19	0	0	15	3	3	11
Nº 20	3	3	11	13	12	0
Nº 21	0	0	14	14	14	1

Nº 22	2	2	10	6	5	4
Nº 23	14	12	1	15	9	0
Nº 24	0	0	15	7	6	8
Nº 25	4	4	9	12	11	2

Concluimos que ha habido una gran mejoría en cuanto a la frecuencia de uso de estrategias dado que en la prueba final los alumnos han aplicado más estrategias diferentes al algoritmo escrito que en la prueba inicial. Todos los alumnos, excepto el N° 4, optan por aplicar un número mayor de estrategias diferentes a las del algoritmo escrito en la prueba final que en la prueba inicial.

Atendiendo a la evolución de los cálculos acertados en la prueba inicial y en la prueba final observamos que hay:

- 12 alumnos que aciertan más cálculos en la prueba final que en la prueba inicial que están resaltados en color azul en la tabla anterior.
- 11 alumnos que aciertan menos cálculos en la prueba final que en la prueba inicial que están resaltados en color rojo en la tabla anterior, y
- un alumno (N° 7) que obtiene el mismo número de aciertos en las dos pruebas.

Para profundizar en las causas del éxito similar en cuanto a la realización de las operaciones entre la prueba inicial y final, vamos a estudiar el número de cálculos erróneos que realiza cada alumno como consecuencia de una mala utilización de estrategias diferentes a las del algoritmo y de los que se deben a la mala aplicación del algoritmo que mostramos en la siguiente tabla:

	PRUEBA INICIAL		PRUEBA FINAL	
Alumno	Errores al utilizar estrategias distintas del algoritmo	Errores al utilizar el algoritmo	Errores al utilizar estrategias distintas del algoritmo	Errores al utilizar el algoritmo
Nº 1	1	0	1	0
Nº 2	0	2	2	1
Nº 3	0	2	0	2
Nº 4	4	0	1	1
Nº 5	3	8	2	1

Nº 6	0	2	1	0
Nº 7	0	2	0	2
Nº 8	2	1	4	0
Nº 9	0	6	3	0
Nº 10	0	3	0	2
Nº 11	0	5	2	5
Nº 12	0	0	0	0
Nº 13	1	3	3	2
Nº 14	0	1	0	1
Nº 15*	0	0	0	0
Nº 16	4	1	2	0
Nº 17	1	1	2	4
Nº 18	0	0	3	2
Nº 19	0	0	0	2
Nº 20	0	2	1	2
Nº 21	0	1	0	0
Nº 22	0	3	1	5
Nº 23	2	0	6	0
Nº 24	0	0	1	0
Nº 25	0	2	1	1

Suma de cálculos erróneos	18	45	36	33
Número de cálculos ...	realizados con estrategias distintas del algoritmo en la prueba inicial	realizados con el algoritmo en la prueba inicial	realizados con estrategias distintas del algoritmo en la prueba final	realizados con el algoritmo en la prueba final
	106	254	211	149
Tasa de errores cometidos en los cálculos ...	17,0%	17,7%	17,1%	22,1%

Los resultados de la tabla comparativa de cálculos erróneos indica que los alumnos que utilizan estrategias diferentes a las del algoritmo en la prueba inicial y en la prueba final tienen el mismo rendimiento. Sin embargo, el rendimiento de los alumnos que utilizan los algoritmos escritos es inferior en la prueba final al cometer más errores al aplicar mentalmente los algoritmos escritos.

Analizando la evolución de cada alumno a partir de los datos de la tabla que discrimina a los alumnos mediante un código de colores concluimos que la mitad de los alumnos han obtenido mejores resultados al realizar los cálculos en la prueba final que en la prueba inicial. Conjeturamos que hay tres razones que justifican la no obtención de mayores tasas de éxito en la prueba final:

1º) El tiempo asignado para la realización de la prueba final fue inferior en 5 minutos a la de la prueba inicial.

2º) La inseguridad de los alumnos al aplicar estrategias de cálculo mental como consecuencia de que la intervención docente se ha realizado en un intervalo temporal corto. Cabe suponer que si la experimentación de aula hubiera sido más dilatada en el tiempo los resultados hubieran sido mejores.

3º) Los alumnos cometen errores cuando realizan cálculos mentalmente siguiendo las pautas del procedimiento escrito dado que en la prueba final el porcentaje

de errores al aplicar el algoritmo ha sido superior que el porcentaje de los cometidos cuando aplican otras estrategias de cálculo.

Además, encontramos algunos casos de alumnos que se muestran inseguros al utilizar estrategias de cálculo mental. Se le preguntó al alumno número 19, que termina siempre el primero las pruebas en el menor tiempo posible y teniendo todos los resultados correctos en casi todas las pruebas, porque no utilizaba ninguna estrategia y contestó porque no se fiaba de ellas ya que pensaba que utilizándolas no iba a tener tanto éxito en la prueba prefiriendo utilizar el método tradicional el cual le da más seguridad. Este alumno no usó ninguna estrategia en las pruebas realizadas excepto en la prueba final en la que utilizó 3 estrategias distintas del algoritmo aplicándolas correctamente en la resolución de la operación y confundiéndose en una de algoritmo escrito. Por otro lado, nos gustaría destacar que la alumna número 10 en concreto participa mucho en clase aportando ideas y estrategias para resolver las diferentes operaciones que se escriben en la pizarra durante las explicaciones. En cambio, ella nunca aplicó ninguna de las estrategias en las pruebas que realizó excepto en la prueba final en la que utilizó dos distintas del algoritmo aplicándolas correctamente para realizar los cálculos.

CAPÍTULO III:

Conclusiones

I. Consideramos que los objetivos de este trabajo fin de grado se han alcanzado por cuanto nos han permitido lo siguiente:

- 1) Realizar una revisión bibliográfica sobre el cálculo mental y otros procedimientos de cálculo que nos ha permitido delimitar el concepto matemático de cálculo mental de números naturales comparándolo con el cálculo escrito. Además, hemos tenido la oportunidad de analizar los resultados de los estudios que, desde la Didáctica de las Matemáticas, recomiendan una enseñanza del cálculo aritmético mediante procedimientos flexibles de cálculo que incorporan el cálculo mental, el cálculo escrito con números, antes que el cálculo con cifras, y el uso de la calculadora.

Constatamos y compartimos con los autores de estos estudios la recomendación de anteponer la enseñanza de las estrategias de cálculo mental a la de las técnicas escritas dado que la enseñanza de los algoritmos escritos tienden a la uniformidad de las respuestas de los alumnos al seguir unos pasos prefijados de antemano. Sin embargo, la enseñanza de las estrategias de cálculo mental sigue el camino contrario porque dan libertad al alumno para tomar la decisión que considere más adecuada y contribuyen a la comprensión y sentido del número, puesto que su práctica implica el manejo de las propiedades de las operaciones aritméticas y de los principios del sistema de numeración decimal.

- 2) Analizar la enseñanza del cálculo mental que se lleva a cabo en las aulas de Educación Primaria analizando el currículo oficial y las propuestas didácticas propone el libro de texto que llevan los alumnos de 5º curso del colegio San Agustín de Zaragoza. Por una parte, los currícula nacional y autonómico no proponen la enseñanza de estrategias de cálculo mental dado que el documento oficial considera éstas de modo restrictivo como conocimientos

previos para aplicar con éxito los algoritmos escritos de cálculo. Básicamente estos conocimientos se reducen a la memorización de las tablas de la multiplicación y a la descomposición de los números en potencias de la base que rige nuestro sistema de numeración decimal. Por otra parte, el análisis del libro de texto sugiere que no hay una enseñanza sistemática de las estrategias del cálculo mental en las aulas dado que focaliza la atención en la enseñanza de los algoritmos escritos.

- 3) Diseñar, desarrollar y evaluar una propuesta parcial de enseñanza de estrategias de cálculo mental en 5º curso de Educación Primaria, consiguiendo nuestro propósito de enseñar, de modo sistemático, estrategias de cálculo mental para las operaciones suma, resta, multiplicación y división de números naturales. Nuestra propuesta de enseñanza de las estrategias de cálculo mental no es subsidiaria de los algoritmos escritos porque exige del dominio de las propiedades de las operaciones y del conocimiento y aplicación de estrategias como redondear, descomponer, factorizar o compensar para realizar cálculos sin apoyo escrito.

Cabe destacar que el material elaborado es original y se ha diseñado para aplicarlo en este trabajo y se detalla en los anexos de esta memoria.

II. En cuanto a los resultados obtenidos en la fase experimental destacamos que:

- 4) La enseñanza desarrollada en el grupo natural de 5º curso de Educación Primaria es viable y se ha desarrollado según la planificación prevista que se indica en el capítulo II. 1.
- 5) La enseñanza sistemática de estrategias cálculo mental posibilita una metodología de aula coherente con el paradigma constructivista del aprendizaje. En efecto, un grupo de alumnos han descubierto, por sí mismos, y formulado de modo verbal diferentes estrategias de cálculo mental tal y como se indica en el capítulo II.4. Los alumnos han razonado los resultados obtenidos delante de los compañeros y de la profesora. Además, en la fase experimental se han seguido las pautas metodológicas indicadas en el capítulo I.6.

- 6) Los alumnos dan muestras de comprender las estrategias de cálculo mental porque tienden a utilizarlas en las pruebas intermedias y, particularmente, en la prueba final. Del estudio comparativo de las pruebas inicial y final se concluye que la frecuencia de aplicación de estrategias diferentes de los algoritmos escritos se ha elevado considerablemente cuando los alumnos han realizado los cálculos de la prueba final.
- 7) En cuanto a las estrategias que han sido mejor aceptadas por los alumnos debemos destacar las relacionadas con la suma: quitar ceros, compensar, redondear y descomponer, en comparación con el resto de operaciones de resta, multiplicación y división. En cambio, las estrategias relacionadas con la multiplicación han sido las menos usadas por los alumnos.
Por otro lado, las estrategias más utilizadas por los alumnos en las operaciones de resta han sido: quitar los ceros finales, descomponer el sustraendo o minuendo y completar a la decena o centena siguiente. Las estrategias más utilizadas por los alumnos en la multiplicación fueron de carácter local la de multiplicar por 5, por 6 y por 9. Finalmente, las estrategias más utilizadas en la división fueron la de compensar y otras de carácter local cuando el divisor es 5 o es 8.
- 8) En cuanto a la calidad del uso de las nuevas estrategias, es decir, los porcentajes de éxito al realizar los cálculos, observamos que los resultados no son tan espectaculares como en el caso de la frecuencia de uso de estrategias. Los alumnos obtienen rendimientos similares al comparar las tasa de éxito en la realización de los cálculos de la prueba inicial y de la prueba final.
Consideramos que este fenómeno puede justificarse por tres motivos:
- 1º) El tiempo asignado para la realización de la prueba final fue inferior en 5 minutos a la de la prueba inicial.
- 2º) La inseguridad de los alumnos a la hora de aplicar nuevas estrategias debido a que la intervención de aula se ha realizado en un período corto de tiempo.

3º) Los alumnos cometen errores cuando realizan los cálculos mentalmente siguiendo las pautas del procedimiento escrito dado que en la prueba final el porcentaje de errores al aplicar el algoritmo ha sido superior que el porcentaje de los cometidos cuando aplican otras estrategias de cálculo.

En efecto, hemos podido ver las dificultades que encuentran los alumnos a la hora de realizar mentalmente los cálculos, bien utilizando el algoritmo u otras estrategias de cálculo mental, o incluso percibir la inseguridad que éstos poseen ya que no se fían de la utilización de estrategias y prefieren realizar la operación pensándola como si estuvieran escribiendo el algoritmo.

Consideramos que para obtener mejores tasas de éxito en los cálculos aritméticos tendríamos que haberle dedicado más tiempo de intervención del que no hemos dispuesto y disponer de otras condiciones de enseñanza, en el sentido de que desde cursos anteriores, los alumnos hubieran desarrollado estrategias de cálculo mental antes de recibir enseñanza de los algoritmos escritos.

Por otro lado, al tutor de clase le pareció interesante la experimentación realizada mediante estas pruebas como una posible práctica para los cursos siguientes. No obstante, podemos concluir que la experiencia que se ha llevado a cabo en el aula ha sido satisfactoria ya que los alumnos mostraron interés y participaron en todo momento tanto respondiendo a las preguntas de la profesora como sugiriendo estrategias que se podrían aplicar. Finalmente, la gran mayoría de los alumnos aceptaron el uso de estas estrategias percibiéndolas como útiles para la realización de las operaciones de cálculo.

BIBLIOGRAFÍA

Barba, D. y Calvo, C. (2009). Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos. En “Elementos y razonamientos en la competencia matemática”. Cursos de verano de la UIMP de 2009. Santander.

Barba y Calvo (2015). Calcular con números y no con dígitos. Revista Suma, nº 78 (p. 73-81). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Badalona (Barcelona).

Castro E. (2008). Pensamiento numérico y educación matemática. En J.M. Cardeñoso y M Peñas. *Conferencia en XIV Jornadas de investigación en el aula de matemáticas*. (pp. 23-32). Granada.

Castro E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15, 3, pp. 361-371.

Cockcroft, W. H (1985) Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

De Marinis, S. (2008). Matemática. Cálculo mental con números naturales. Tercer ciclo de la escuela Primaria. Secretaría de Educación. Gobierno de la ciudad de Buenos Aires.

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN, UNIVERSIDAD, CULTURA Y DEPORTE DEL GOBIERNO DE ARAGÓN (2014). Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. BOA de 20 de junio de 2014.

Gómez Alfonso, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Gómez Alfonso, B. (2005). *La enseñanza del cálculo mental*. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Nº 4, de diciembre de 2005.

Gómez Alfonso, B. (2007). El cálculo flexible. Universidad de Valencia. España.

Jiménez, J. J (2010): Las tablas de cálculo: un método para trabajar el cálculo mental. Revista Sigma, nº 35. Departamento de Educación del Gobierno Vasco.

MECD (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). BOE núm. 295, de 10 de diciembre de 2013.

MECD (2013). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria de la LOMCE. BOE de 1 de marzo de 2014.

Ortega del Rincón, T., Ortiz Vallejo, M., Gómez Monge, D. (2005). *Cálculo Mental*. Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática Universidad de Valladolid.

Parra, C. (1994). *Cálculo mental en la escuela primaria*. Buenos Aires: Paidós.

Rico, L. y Castro E. (1995). Pensamiento numérico en Educación Secundaria Obligatoria. *Aspectos didácticos de Matemáticas*, 5. Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Zaragoza.

SAEM Thales (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla, SAEM Thales.

Sancha, I. (2011). Cálculo mental y algorítmico. Mejorar los aprendizajes. Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la provincia de Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2006). Cálculo mental con números naturales: apuntes para la enseñanza. Secretaría de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

ANEXOS

ANEXO 1: Librillo de estrategias de cálculo mental.

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA SUMAR
VAMOS A JUGAR CON LOS NÚMEROS PARA HACER SUMAS "DE CABEZA"

Descomponer uno o los dos sumandos:

$$26 + 34 = (20 + 6) + (30 + 4) = (20 + 30) + (6 + 4) = 50 + 10 = 60$$

Se puede pensar así:

26 es 20 más 6,

34 es 30 más 4,

20 y 30 son 50,

6 y 4 son 10,

50 y 10 son 60. La suma es 60.

Completar un sumando a la decena, centena o unidad de millar siguiente (Redondear):

$$46 + 19 = 46 + (20 - 1) = (46 + 20) - 1 = 66 - 1 = 65$$

Se puede pensar así:

A 19 le falta 1 para ser 20, a 46 le sumaré 20 y después le quitaré 1.

Lo voy a hacer:

46 más 20 es 66,

Como le he sumado 1 de más se lo quito ahora:

66 menos 1 es 65. La suma es 65.

Omitir ceros finales:

$$350 + 250 = 35 \times 10 + 25 \times 10 = (35 + 25) \times 10 = 60 \times 10 = 600$$

Se puede pensar así:

Sumaré 35 más 25 y después añadiré un cero a la derecha:

Como 35 más 25 es 60, el resultado de la suma es 600

Lo que suma a un sumando se lo quito al otro sumando (Compensar o dar y quitar lo mismo)

$$51 + 29 = (51 - 1) + (29 + 1) = 50 + 30 = 80$$

Se puede pensar así:

Como 51 le sobra 1 para ser 50 y a 29 le falta 1 para ser 30, voy a quitar 1 a 50 y a dar 1 a 29:

50 más 30 es 80. La suma es 65.

Otro ejemplo de “compensar”:

$$45 + 75 = (51 - 1) + (29 + 1) = 50 + 30 = 80$$

Se puede pensar así:

Como 45 le faltan 5 para ser 50 y a 75 le sobran 5 para ser 70, voy a añadir 5 a 45 y a quitar 5 a 75:

50 más 70 es 120. La suma es 120.

Cambiar el orden de los sumandos (Propiedad conmutativa)

$$6 + 29 = 29 + 6 = 35$$

Se puede pensar así:

Es como si a 29 le sumas 6, que son 35.

Asociar sumandos (Propiedad asociativa)

$$5 + 43 + 15 = (5 + 15) + 43 = 20 + 43 = 63$$

Se puede pensar así:

Como se que 5 más 15 son 20, sumaré primero estos sumandos y después le sumaré 43.

20 más 43 son 63. La suma es 63.

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA RESTAR
VAMOS A JUGAR CON LOS NÚMEROS PARA HACER RESTAS "DE CABEZA"

Completar el sustraendo a la decena siguiente (Redondear)

$$66 - 28 = 66 - 30 + 2 = 36 + 2 = 38$$

Se puede pensar así:

Como a 28 le faltan 2 para llegar a 30, restaré primero 30 y después sumaré 2

66 menos 30 son 36,

pero como he quitado "dos de más" se las tengo que sumar.

Entonces la resta es $36 + 2 = 38$.

Sumar o restar al minuendo y sustraendo el mismo número (Compensar):

$$46 - 19 = (46 + 1) + (19 + 1) = (47 - 20) = 27$$

Se puede pensar así:

Como a 19 le falta 1 para ser 20, sumaré uno a 46 y a 19, a la vez.

Lo voy a hacer:

$47 - 20 = 27$. La resta es 27.

Otro ejemplo de "compensar":

$$70 - 22 = (70 - 2) + (22 - 2) = 68 - 20 = 48$$

Se puede pensar así:

Como a 22 le sobran 2 para ser 20, restaré 2 a 70 y a 22, a la vez.

Lo voy a hacer:

$68 - 20 = 48$. La resta es 48.

Omitir ceros finales:

$$370 - 220 = 37 \times 10 - 22 \times 10 = (37 - 22) \times 10 = 15 \times 10 = 150$$

Se puede pensar así:

Restaré 37 menos 22 y después añadiré un cero a la derecha:

Como 37 menos 22 es 15, el resultado de la resta es 150

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA MULTIPLICAR

VAMOS A JUGAR CON LOS NÚMEROS PARA HACER

MULTIPLICACIONES "DE CABEZA"

Descomponer el multiplicando o el multiplicador:

- **Si descomponemos el multiplicando:**

$$35 \times 9 = (30 + 5) \times 9 = (30 \times 9) + (5 \times 9) = 270 + 45 = 315$$

Se puede pensar así:

El multiplicando 35 lo descompondré en $30 + 5$ y después, multiplicaré 30×9 y 5×9 , y sumaré.

30×9 es 270, y como 5×9 es 45, si sumo 270 y 45 el resultado es 315.

- **Si descomponemos el multiplicador:**

$$35 \times 12 = 35 \times (10 + 2) = (35 \times 10) + (35 \times 2) = 350 + 70 = 420$$

Se puede pensar así:

Pienso el multiplicador 9 como $10 - 1$, y después, multiplicaré 35 por 10 y al resultado le restaré 35.

Como 35×10 es 350, si a 350 le resto 35, el resultado es 315.

Completar el multiplicador a la decena siguiente:

$$35 \times 9 = 35 \times (10 - 1) = (35 \times 10) - (35 \times 1) = 350 - 35 = 315$$

Se puede pensar así:

Pienso el multiplicador 9 como $10 - 1$, y después, multiplicaré 35 por 10 y al resultado le restaré 35.

Como 35×10 es 350, si a 350 le resto 35, el resultado es 315.

Multiplicar uno de los factores por un número y dividir el otro factor por el mismo número (Compensar):

$$35 \times 12 = (35 \times 2) \times (12 : 2) = 70 \times 6 = 420$$

Se puede pensar así:

Si multiplico 35 por 2 obtengo una decena completa. Ahora tendré que dividir el otro factor (12) por 2.

Es como multiplicar 70×6 , que es 420.

Buscar factores 2 y 5 en el multiplicando y en el multiplicador:

$$35 \times 12 = (7 \times 5) \times (2 \times 6) = 7 \times (5 \times 2) \times 6 = 7 \times 6 \times 10 = 42 \times 10 = 420$$

Se puede pensar así:

Voy a buscar los factores 5 y 2 del multiplicando y del multiplicador. Como 35 es 7×5 y como 12 es 2×6 . Al multiplicar 5×2 hacen 10. Y como 7×6 es 42, el resultado es 420.

Otras estrategias particulares:

- **Multiplicar por 10, 100, ...**

Para multiplicar por 10 basta añadir un 0 a la derecha del multiplicando.

$$35 \times 10 = 350$$

Para multiplicar por 100 basta añadir dos ceros a la derecha del multiplicando.

$$35 \times 100 = 3500$$

- **Multiplicar por 5**

Para multiplicar un número por 5 basta con multiplicar el número por 10 y después dividir por 2.

$$35 \times 5 = 35 \times (10 : 2) = (35 \times 10) : 2 = 350 : 2 = 175$$

Pienso en 350 y después divido por 2, y el resultado es 175.

- **Multiplicar por 3**

Para multiplicar un número por 3 basta con multiplicar el número por 2 y al resultado sumarle el número.

$$35 \times 3 = 35 \times (2 + 1) = (35 \times 2) + 35 = 70 + 35 = 105$$

Primero duplico y sale 70, y después a 70 sumo 35. Y el resultado es 105.

- **Multiplicar por 6: multiplicar por 3 y después por 2.**

Para multiplicar un número por 6 basta con multiplicar el número por 2 y después por 3. En algunos casos es mejor multiplicar primero por 3 y después por 2.

$$35 \times 6 = 35 \times (2 \times 3) = (35 \times 2) \times 3 = 70 \times 3 = 210$$

Primero duplico y sale 70, y después multiplico 70 por 3. Y el resultado es 210.

- **Multiplicar por 15**

Para multiplicar un número por 15 se multiplica el número por 10 y al resultado anterior se suma la mitad de éste.

$$\begin{aligned} 35 \times 15 &= 35 \times (10 + 5) = (35 \times 10) + (35 \times 5) = (35 \times 10) + (35 \times 10) : 2 = \\ &350 + 175 = 525 \end{aligned}$$

Pienso en 350 y a este número tengo que sumarle su mitad, que es 175.

El resultado es $350 + 175 = 525$

- **Multiplicar por 25**

Para multiplicar un número por 25 se multiplica el número por 100 y el resultado anterior se divide por 4.

$$\begin{aligned} 35 \times 25 &= 35 \times (100 : 4) = (35 \times 100) : 4 = 3500 : 4 = (3500 : 2) : 2 = \\ &= 1750 : 2 = 875 \end{aligned}$$

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA DIVIDIR
VAMOS A JUGAR CON LOS NÚMEROS PARA HACER DIVISIONES
"DE CABEZA"

Descomponer el dividendo en sumandos que contengan el divisor.

$$156 : 12 = (120 : 12) + (36 : 12) = 10 + 3 = 13$$

Se puede pensar así:

El dividendo 156 lo he descompuesto en la suma $120 + 36$, de manera que un sumando este contenido en el divisor.

Seguidamente, dividiremos los sumandos por el divisor 12.

$$120 : 12 = 10, \text{ y } 36 : 12 = 3. \text{ El resultado de la división es } 13.$$

Factorizar el divisor (descomponer el divisor en una multiplicación).

$$156 : 12 = 156 : (2 \times 6) = (156 : 2) : 6 = 78 : 6 = (78 : 2) : 3 = 39 : 3 = 13$$

Se puede pensar así:

El divisor 12 lo convierto en la multiplicación $2 \times 2 \times 3$.

A continuación, el dividendo 132 lo dividiré entre 2, el resultado entre 2 y después el resultado entre 3.

$$156 : 2 = 78; 78 : 2 = 39; \text{ y finalmente, } 39 : 3 = 13. \text{ El resultado es } 13.$$

Multiplicar o dividir el dividendo y el divisor por un mismo número (Compensar)

$$156 : 12 = (156 : 2) : (12 : 2) = 78 : 6 = (78 : 2) : (6 : 2) = 39 : 3 = 13$$

Se puede pensar así:

Buscaremos un número que divida al dividendo 156 y al divisor 12.

El número elegido ha sido el 2 ya que es múltiplo de ambos números.

$$156 : 2 = 78 \text{ y } 12 : 2 = 6$$

Para dividir $78 : 6$ volveré a dividir el dividendo y el divisor por 2 y obtendré la división $39 : 3$, cuyo resultado es 13.

- **Otro ejemplo de compensación:**

$$900 : 25 = (900 \times 4) : (25 \times 4) = 3600 : 100 = 36$$

Como sabemos que si multiplicamos 25 por 4 obtenemos 100, si multiplicamos el dividendo y divisor por 4 obtenemos la división $3600 : 100$

Otras estrategias particulares:

- **Dividir por 10, 100, ...**

Para dividir por 10, 100, ... basta suprimir los ceros que están a la derecha del dividendo. Se suprimirán tantos como ceros tenga el divisor.

$$3600 : 100 = 36$$

- **Dividir por 5**

Para dividir un número por 5 basta con multiplicar el número por 2 y después dividir el resultado por 10.

$$85 : 5 = 85 : (10 : 2) = (85 \times 2) : 10 = 170 : 10 = 17$$

He pensado que el número 5 es $10 : 2$

Primero multiplicaremos el dividendo 85 por 2 y el resultado lo he dividido por 10.

$$85 \times 2 = 170; \text{ y } 170 : 10 = 17. \text{ El resultado es 17.}$$

- **Otro ejemplo de la estrategia de "dividir por 5"**

$$365 : 5 = 365 : (10 : 2) = (365 \times 2) : 10 = 730 : 10 = 73$$

He pensado que el número 5 es $10 : 2$

Primero multiplicaremos el dividendo 365 por 2 y el resultado lo he dividido por 10.

$365 \times 2 = 730$; y $730 : 10 = 73$. El resultado es 73.

ANEXO 2: Modelo Prueba Inicial, Final y recogida de datos de ambas pruebas.

PRUEBA INICIAL/FINAL DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **15 minutos** para realizar el cálculo de 15 operaciones de suma, resta, multiplicación o división de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación**.
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo**. Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $19 + 34 + 11 =$

- He buscado completar decenas.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

2) $250 + 150 =$

- He quitado los ceros finales.
- He completado un sumando a la centena siguiente.
- He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

3) $800 - 350 =$

- He quitado los ceros finales.
- He descompuesto el sustraendo como $300 + 50$.
- He pensado los números en vertical y he restado.

4) $27 \times 5 =$

- He multiplicado 27 por 10 y después he dividido por 2.
- He descompuesto el multiplicando 27, como $20 + 7$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

5) $230 : 5 =$

- He dividido 230 por 10 y después he multiplicado por 2.
- He descompuesto el dividendo 230 como $200 + 30$.
- He multiplicado el dividendo y el divisor por 2.
- He pensado en la división hecha con la caja.

- He buscado completar centenas.
- 6)** $40 + 50 + 3 + 60 =$
- He pensado los números en vertical y he sumado.
- He completado uno o los dos sumandos a la decena siguiente.
- 7)** $87 + 89 =$
- He sumado 1 a 89 y restado 1 a 87.
- He pensado los números en vertical y he sumado.
- He completado el sustraendo (99) a la centena siguiente.
- 8)** $320 - 99 =$
- He sumado una unidad al minuendo y al sustraendo.
- He descompuesto el sustraendo como $90 + 9$.
- He pensado los números en vertical y he restado.
- He multiplicado por 10 y he restado una vez el multiplicando (34).
- 9)** $34 \times 9 =$
- He descompuesto el multiplicando 34 como $30 + 4$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.
- He dividido 224 tres veces consecutivas por 2.
- 10)** $224 : 8 =$
- He descompuesto el dividendo (224) como $160 + 64$.
- He buscado un número que multiplicado por 8 da 224.
- He pensado en división hecha con la caja.

11) $47 + 43 =$

- He descompuesto 47 como $40 + 7$, y 43 como $40 + 3$, y he sumado.
- He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

12) $87 - 39 =$

- He completado el sustraendo (39) a la siguiente decena.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He descompuesto el sustraendo como $30 + 9$.
- He pensado los números en vertical y he restado.

13) $120 \times 15 =$

- He multiplicado 120 por 10, el resultado lo he dividido por 2 y después he sumado.
- He descompuesto el multiplicador (15) como $10 + 5$.
- He omitido el cero del multiplicando (120).
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

14) $25 \times 6 =$

- He multiplicado 25 por 5 y he sumado al resultado 25.
- He multiplicado 25 por 2 y después he multiplicado por 3.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

15) $180 : 12 =$

- He dividido el dividendo y el divisor por un mismo número (compensar).
- He descompuesto el dividendo 180 como $120 + 60$.
- He descompuesto en factores el divisor 12 como 6×2 .
- He pensado en la división hecha con la caja.

Recogida de datos de la prueba inicial.

PRUEBA INICIAL:15

	columna1	columna2	columna3	columna4	columna5	columna6	columna7	columna8	columna9	columna10	columna11	columna12	columna13	columna14	columna15	columna16	columna17	columna18	columna19	columna20	columna21	columna22	columna23	columna24	columna25	Total op. correctas	Total Estrategias	Tiempo	
A. 1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	14	8	15'
A. 2	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	13	2	14'
A. 3	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	13	1	9'
A. 4	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	10	7	10'
A. 5	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4	3	11'
A. 6	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	13	7	10'
A. 7	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	13	1	8'
A. 8	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	13	6	15'
A. 9	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	9	2	12'
A. 10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	12	0	11'
A. 11	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	5	15'
A. 12	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15	11	7'
A. 13	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	11	10	11'
A. 14	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	14	4	10'
A. 15																													
A. 16	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	10	8	14'
A. 17	1	0	1	1*	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	13	8	12'
A. 18	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	15	0	9'
A. 19	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	15	0	5'
A. 20	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	14	3	14'
A. 21	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	14	0	9'
A. 22	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	12	2	11'	
A. 23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	13	14	11'
A. 24	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	15	0	9'
A. 25	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	13	4	13'
Total fallo	1	6	2	13	2	8	1	6	4	6	1	10	2	10	5	6	1	3	9	1	1	7	4	5	13	10	6	6	6

Operaciones: 1 bien resuelta

0 mal resuelta

Estrategias: 1 ha utilizado alguna estrategia que no era el algoritmo escrito.

O ha pensado en el algoritmo escrito.

* significa que el alumno ha utilizado una estrategia nueva que no aparecía en la ficha.

Mayor número de fallos en la operación número 13: 120×15

Segunda operación con más fallos la número 10: $224 \div 8$

Recogida de datos prueba final.

Prueba Final:10'

	1	1 E	2	2.E	3	3.E	4	4.E	5	5.E	6	6.E	7	7.E	8	8.E	9	9.E	10	10.E	11	11.E	12	12.E	13	13.E	14	14.E	15	15.E	Total op. correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	14	15	8'
A.2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	12	2	7'	
A.3	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	13	3	6'	
A.4	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	13	6	7'	
A.5	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	11	8	8'	
A.6	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	14	7	6'	
A.7	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	13	1	6'	
A.8	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	11	15	8'	
A.9	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	12	7	10'	
A.10	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	13	2	6'	
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8	7	10'	
A.12	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15	14	6'	
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	10	12	10'	
A.14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	14	12	6'		
A.15																												0	0				
A.16	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	15	10'	
A.17	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	9	8	6'	
A.18	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	10	7	8'		
A.19	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	14	3	7'		
A.20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	12	13	9'		
A.21	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15	14	6'	
A.22	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	9	6	8'		
A.23	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	15	8	8'	
A.24	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	14	7	8'	
A.25	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	13	12	10'	
Total fall	0	19	1	22	5	18	0	10	5	13	2	14	2	16	9	15	2	10	10	14	1	14	8	13	14	11	0	11	10	11			

Operaciones: 1 bien resuelta
0 mal resuelta

Estrategias: 1 ha utilizado alguna estrategia que no era el algoritmo escrito.
0 no han pensado en el algoritmo escrito.

* significa que el alumno ha utilizado una estrategia nueva que no aparece en la ficha.

Mayor número de fallos en la operación número 13: 120x15

Segunda operación con más fallos la número 10: 224 : 8 y número 15: 180 : 12

ANEXO 3: Modelo Prueba de la Suma y recogida de datos de la prueba.

FICHA NÚMERO 1

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **10 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de suma de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación**.
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo**. Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 1) $39 + 24 =$ He buscado completar decenas.
 He pensado los números en vertical y he sumado.
- 2) $450 + 250 =$ He quitado los ceros finales.
 He completado un sumando a la centena siguiente.
 He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.
 He pensado los números en vertical y he sumado.
- 3) $49 + 51 =$ He sumado 1 a 49 y restado 1 a 51.
 He pensado los números en vertical y he sumado.
- 4) $47 + 43 =$ He descompuesto 47 como $40 + 7$, y 43 como $40 + 3$, y he sumado.
 He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble.
 He pensado los números en vertical y he sumado.
- 5) $59 + 15 =$ He buscado completar decenas.
 He pensado los números en vertical y he sumado.

6) $81 + 79 =$

He completado uno o los dos sumandos a la decena siguiente.

He sumado 1 a 79 y restado 1 a 81.

He pensado los números en vertical y he sumado.

7) $199 + 57 =$

He completado un sumando a la centena siguiente.

He pensado los números en vertical y he sumado.

8) $77 + 73 =$

He descompuesto 77 como $70 + 7$, y 73 como $70 + 3$, y he sumado.

He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble.

He pensado los números en vertical y he sumado.

9) $27 + 23 =$

He descompuesto 27 como $20 + 7$, y 23 como $20 + 3$, y he sumado.

He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble.

He pensado los números en vertical y he sumado.

10) $1250 + 350 =$

He quitado los ceros finales.

He completado un sumando a la centena siguiente.

He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.

He pensado los números en vertical y he sumado.

Recogida de datos de la prueba de la suma.

Ficha 1: SUMA 5'

	1	1.E	2	2.E	3	3.E	4	4.E	5	5.E	6	6.E	7	7.E	8	8.E	9	9.E	10	10.E	Total op. correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	4'
A.2	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	9	0	4'
A.3	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	1	3'
A.4	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	1	2'
A.5	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	0	4'
A.6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	9	8	3'
A.7	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	9	1	4'
A.8	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	10	2	3'
A.9	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	9	7	4'
A.10	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	2	3'
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	9	5	5'
A.12	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	10	5	3'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	4'
A.14	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	10	7	2'
A.15																							
A.16	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	10	7	4'
A.17	1	1*	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	10	6	4'
A.18	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	9	2	4'
A.19	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	0	2'
A.20	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	0	3'
A.21	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	2	3'
A.22	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	1	4'
A.23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	3'
A.24	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	10	3	4'
A.25	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	9	3	4'
Total fallos	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	3	0			

Operaciones: 1 bien resuelta

0 mal resuelta

Estrategias: 1 ha utilizado alguna estrategia que no era el algoritmo escrito.

O ha pensado en el algoritmo escrito.

* significa que el alumno ha utilizado una estrategia nueva que no aparece en la ficha.

Mayor número de fallos en la operación número 10: 1250 + 350

ANEXO 4: Modelo Prueba de la Resta y recogida de datos de la prueba.

FICHA NÚMERO 2

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **7 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de suma y de resta de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación**.
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo**. Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $149 + 151 =$

- He sumado 1 a 149 y restado 1 a 151.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

2) $93 - 39 =$

- He completado el sustraendo a la decena siguiente.
- He sumado 1 al minuendo y al sustraendo
- He pensado los números en vertical y he restado.

3) $750 + 550 =$

- He quitado los ceros finales.
- He completado un sumando a la centena siguiente.
- He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

4) $600 - 250 =$

- He omitido los ceros finales.
- He descompuesto el sustraendo como $200 + 50$.
- He pensado los números en vertical y he restado.

5) $430 - 99 =$

- He completado el sustraendo (99) a la centena siguiente.
- He compensado para buscar una resta más fácil.
- He descompuesto el sustraendo como $90 + 9$.
- He pensado los números en vertical y he restado.

- 6) $699 + 66 =$ He completado un sumando a la centena siguiente.
 He pensado los números en vertical y he sumado.
- 7) $90 - 41 =$ He descompuesto el sustraendo (41) como 40 más 1.
 He restado 1 al minuendo y sustraendo.
 He pensado los números en vertical y he restado.
- 8) $108 - 59 =$ He completado el sustraendo (59) a la siguiente decena.
 He sumado 1 al minuendo y al sustraendo.
 He descompuesto el sustraendo como $50 + 9$.
 He pensado los números en vertical y he restado.
- 9) $700 - 330 =$ He omitido los ceros finales.
 He descompuesto el sustraendo como $300 + 30$.
 He pensado los números en vertical y he restado.
- 10) $1750 + 650 =$ He quitado los ceros finales.
 He completado un sumando a la centena siguiente
 He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.
 He pensado los números en vertical y he sumado.

Recogida de datos de la prueba de la resta.

Ficha 2: RESTA 5'

	1	1.E	2	2.E	3	3.E	4	4.E	5	5.E	6	6.E	7	7.E	8	8.E	9	9.E	10	10.E	Total op. correctas	Total Estrategias	Tiempo	
A.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	9	9	5'
A.2	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	8	1	5'
A.3	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	10	2	5'
A.4	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	8	3	5'
A.5	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	6	3	5'
A.6	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	8	3'
A.7	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	8	2	4'
A.8	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	7	9	5'
A.9	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	7	4	5'
A.10	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	9	0	5'
A.11	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	6	5	5'
A.12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	4'
A.13	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	6	9	5'
A.14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	10	9	3'
A.15																					0	0		
A.16	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	8	5'
A.17	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	7	7	5'
A.18	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	9	2	4'
A.19	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	10	0	3'
A.20	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	7	10	4'
A.21	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	9	5'
A.22	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	6	1	5'
A.23																					0	0		
A.24	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	9	4	4'
A.25	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	8	7	5'
Total fallo	2		6		0		5		13		2		2		4		5		6					

Operaciones: 1 bien resuelta
0 mal resuelta

Estrategias: 1 ha utilizado alguna estrategia que no era el algoritmo escrito.
0 ha pensado en el algoritmo escrito.

* significa que el alumno ha utilizado una estrategia nueva que no aparecía en la ficha.

Mayor número de fallos en la operación número 5: 430 - 99

ANEXO 5: Modelo Prueba de la Multiplicación y recogida de datos de la prueba.

FICHA NÚMERO 3

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **10 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de multiplicación y resta de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación**.
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo**. Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $34 \times 5 =$

- He multiplicado 34 por 10 y después he dividido por 2.
- He descompuesto el multiplicando 34, como $30 + 4$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

2) $47 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y he restado una vez el multiplicando (47).
- He descompuesto el multiplicando 47 como $40 + 7$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

3) $24 \times 15 =$

- He multiplicado 24 por 10, el resultado lo he dividido por 2 y después he sumado.
- He descompuesto el multiplicador (15) como $10 + 5$.
- He descompuesto 24 como 12×2 y 15 como 5×3 .
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

4) $57 \times 5 =$

- He multiplicado 57 por 10 y después he dividido por 2.
- He descompuesto el multiplicando 57, como $50 + 7$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

5) $12 \times 25 =$

He dividido 12 entre 2 y he multiplicado 25 por 2.
He compensado.

6) $34 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y he restado una vez el multiplicando (34).
- He descompuesto el multiplicando 34 como $30 + 4$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

7) $12 \times 19 =$

- He multiplicado 12 por 20 y después he quitado 12.
- He multiplicado 19 por 10 y después le he sumado 19×2
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

8) $25 \times 6 =$

- He multiplicado 25 por 5 y he sumado al resultado 25.
- He multiplicado 25 por 2 y después he multiplicado por 3.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

9) $90 - 41 =$

- He descompuesto el sustraendo (41) como 40 más 1.
- He restado 1 al minuendo y sustraendo.
- He pensado los números en vertical y he restado.

10) $700 - 330 =$

- He omitido los ceros finales.
- He descompuesto el sustraendo como $300 + 30$.
- He pensado los números en vertical y he restado.

Recogida de datos de la prueba de la multiplicación.

Ficha 3: MULTIPLICACIÓN 10'

	1	1.E	2	2.E	3	3.E	4	4.E	5	5.E	6	6.E	7	7.E	8	8.E	9	9.E	10	10.E	Total op. correctas	Total Estrategias	Tiempo	
A.1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	8	7
A.2	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	7	2	8'
A.3	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	9	0	7
A.4	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	7	0	6'
A.5	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	7	2	6'
A.6	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	8	4	6'
A.7	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	9	3	5'
A.8	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	5	10	7
A.9	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	9	4	9'
A.10	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	8	0	5'
A.11	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	10'
A.12	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	9	8	7
A.13	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	9	9	7
A.14	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	9	8	7
A.15																					0	0	0	
A.16	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	10	10'
A.17	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	8	3	7
A.18	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	9	0	7
A.19	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	9	0	4'
A.20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	9'
A.21	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	10	6	5'
A.22	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	7	0	6'
A.23	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	9	7
A.24	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	9	3	5'
A.25	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	8	6	9'
Total fallo	0		4		11		4		6		3		6		0		4		3					

Operaciones: 1 bien resuelta

0 mal resuelta

Estrategias: 1 ha utilizado alguna estrategia que no era el algoritmo escrito.

0 ha pensado en el algoritmo escrito.

* significa que el alumno ha utilizado una estrategia nueva que no aparecía en la ficha.

Mayor número de fallos en la operación número 3: 24X 15

ANEXO 6: Modelo Prueba de la División y recogida de datos de la prueba.

FICHA NÚMERO 4

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **10 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de división y multiplicación de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación**.
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo**. Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $430 : 5 =$

- He dividido 430 por 10 y después he multiplicado por 2.
- He descompuesto el dividendo 430 como $400 + 30$.
- He multiplicado el dividendo y el divisor por 2.
- He pensado en la división hecha con la caja.

2) $424 : 8 =$

- He dividido 424 tres veces consecutivas por 2.
- He descompuesto el dividendo (424) como $400 + 24$.
- He pensado en división hecha con la caja.

3) $180 : 12 =$

- He dividido el dividendo y el divisor por un mismo número (compensar).
- He descompuesto el dividendo 180 como $120 + 60$.
- He descompuesto en factores el divisor 12 como 6×2 .
- He pensado en la división hecha con la caja.

4) $3600 : 100 =$

- He quitado en el dividendo tanto ceros como tiene el divisor.
- He pensado en la división hecha con la caja.

5)

$94 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y he restado una vez el multiplicando (94).
- He descompuesto el multiplicando 94 como $90 + 4$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.
- He multiplicado 75 por 5 y he sumado al resultado 25.
- He multiplicado 75 por 2 y después he multiplicado por 3.
- He pensado los números en vertical y he multinicado.

6)

$75 \times 6 =$

7)

$375 : 15 =$

- He descompuesto el dividendo 375 como $300 + 75$.
- He multiplicado el dividendo y el divisor por 2.
- He dividido primero por 5 y después por 3.
- He pensado en la división hecha con la caja.

8)

$276 : 12 =$

- He dividido el dividendo y el divisor por un mismo número (compensar).
- He descompuesto el dividendo 276 como $240 + 36$.
- He descompuesto en factores el divisor 12 como $2 \times 2 \times 3$
- He pensado en la división hecha con la caja.

9)

$500 : 25 =$

- He multiplicado el dividendo y el divisor por 4.
- He descompuesto el dividendo como $250 + 250$
- He pensado en la división hecha con la caja.

- 10) $568 : 8 =$
- He dividido 568 tres veces consecutivas por 2.
 - He descompuesto el dividendo (568) como $560 + 8$.
 - He pensado en división hecha con la caja.

Recogida de datos de la prueba de la división.

Ficha 4: DIVISIÓN 8*

	1	1.E	2	2.E	3	3.E	4	4.E	5	5.E	6	6.E	7	7.E	8	8.E	9	9.E	10	10.E	Total op. correctas	Total Estrategias	Tiempo	
A.1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9	8	8'
A.2	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	6	2	8'
A.3	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	10	1	6'
A.4	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	9	2	4'
A.5	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	9	4	7'
A.6	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	6	6	6'
A.7	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	9	1	6'
A.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	7'
A.9	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	6	5	8'
A.10	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	10	1	8'
A.11	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	8'
A.12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	9	5'
A.13	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	4	6	8'
A.14	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	6	5	7'
A.15																					0	0	0	
A.16	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	5	9	8'
A.17	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	4	8'
A.18	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	10	0	6'
A.19	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	8	0	4'
A.20	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	9	8'
A.21	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	9	6'
A.22	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	7	0	7'
A.23	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	6	6	8'
A.24	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	10	1	4'
A.25	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	8	8'
Total fallas	3	5	6	1	0	4	9	11	9	7														

Operaciones: 1 bien resuelta
0 mal resuelta

Estrategias: 1 ha utilizado alguna estrategia que no era el algoritmo escrito.
0 ha pensado en el algoritmo escrito.

* significa que el alumno ha utilizado una estrategia nueva que no aparecía en la ficha.

Mayor número de fallos en la operación número 8: 276 : 12