

Simulación de fluidos en medios porosos deformables



Carlos Baquero Muñoz
Trabajo de fin del grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Introducción

Todas las obras de ingeniería civil se apoyan sobre el suelo de una u otra forma, y muchas de ellas, además, utilizan la tierra como elemento de construcción para terraplenes, diques y rellenos en general; por lo que, en consecuencia, su estabilidad y comportamiento funcional y estético estarán determinados, entre otros factores, por el desempeño del material de asiento situado dentro de las profundidades de influencia de los esfuerzos que se generan, o por el del suelo utilizado para conformar los rellenos.

Si se sobrepasan los límites de la capacidad resistente del suelo o si, aún sin llegar a ellos, las deformaciones son considerables, se pueden producir esfuerzos secundarios en los miembros estructurales, quizás no tomados en consideración en el diseño, productores a su vez de deformaciones importantes, fisuras, grietas o desplomos que pueden producir, en casos extremos, el colapso de la obra o su inutilización y abandono.

En consecuencia, las condiciones del suelo como elemento de sustentación y construcción y las del cimiento como dispositivo de transición entre aquel y la supraestructura han de ser siempre observadas a través de una correcta investigación de mecánica de suelos. La Torre de Pisa es un claro ejemplo de un problema originado por deformaciones importantes.

En dicho estudio entra en juego la poroelasticidad. El término de poroelasticidad es el utilizado para describir la interacción entre el flujo de un fluido y la deformación de sólidos dentro de un medio poroso. Dicho medio o material poroso es un sólido, a menudo llamado matriz, impregnado por una red interconectada de poros o huecos lleno de un fluido ya sea líquido o gas.

¿ Y cómo se rige este comportamiento entre fluido y medio poroso ? Para ello observaremos la Ley de Darcy que describe las características del movimiento de líquidos a través de un medio poroso, la Ley de conservación de masas y la Ley de Hooke que establece que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo, para finalmente plantear el problema de Biot clásico que modela el movimiento de un fluido en un medio poroso deformable y lo haremos a través del método de diferencias finitas y comprobaremos que es válido probando su convergencia.

Índice general

Introducción	III
Summary	1
1. Problema físico	3
1.1. Teoría de la poroelasticidad	3
1.2. Ley de Darcy	3
1.2.1. Historia	3
1.2.2. Formulación	4
1.2.3. Validez de la Ley de Darcy	5
1.3. Ley de conservación de masas	6
1.4. Ecuación para el flujo en un medio poroso rígido	7
1.5. Medios deformables	8
1.5.1. Tensión	9
1.5.2. Ecuaciones de equilibrio	9
1.5.3. Deformación	9
1.5.4. Ley de Hooke	10
1.5.5. Parámetros elásticos	11
1.6. Poroelasticidad	13
1.6.1. Tensión efectiva	13
1.6.2. Gobierno de la ecuación para el flujo de una sola fase en un medio poroso deformable	13
2. Método de diferencias finitas	17
2.1. Aproximación de diferencias finitas	17
2.1.1. Serie de Taylor	17
2.1.2. Aproximación de la segunda derivada	18
2.2. Formulación de diferencias finitas para un problema unidimensional	19
2.2.1. Un esquema de diferencias finitas	19
2.2.2. Esquema consistente	20
3. Aplicación del método de diferencias finitas al problema de poroelasticidad unidimensional	23
3.1. Discretización por diferencias centrales	24
3.1.1. Malla y operadores	24
3.1.2. Aproximación totalmente discreta	25
3.1.3. Análisis de convergencia	27
Bibliografía	29

Summary

In this project we will introduce *Darcy's law*. Darcy's law is a constitutive equation, that describes the flow of a fluid through a porous medium. The law was formulated by Henry Darcy based on the results of experiments on the flow of water through beds of sand, forming the basis of hydrogeology, a branch of earth sciences. In the case of a current this gradient is related to the water level. In other words, this law shows that the water velocity between two points is proportional to the gradient of the state of energy between the two points.

Darcy in search of how to provide safe water his hometown developed an experiment to determine the characteristics of the filtering process. Thanks to this experiment we have the following formula:

$$Q = -k \frac{h_3 - h_4}{L} A$$

Where:

$$Q = \text{Flow in } \frac{m^3}{s}$$

L = Length in meters of the sample

κ = A constant know as Darcy's permeability coefficient, variable depending on the sample material, in m/s .

A = Area of the cross section of the sample in m^2 .

h_3 = Height above the reference plane reaching the water in a tube placed at the entrance of the filter layer.

h_4 = Height above the reference plane reaching the water in a tube placed at the exit of the filter layer.

Darcy discovers that the volumetric flow rate of water through the column, usually denoted by Q , is proportional to the difference between the hydraulic heads h_3 and h_4 , and the cross-sectional area A , and inversely proportional to the distance between the two points L .

Darcy's law can be extended to one-dimensional differential expression assuming that the associated points are sufficiently close. Taking the limit of the distance approaches zero Darcy's law is expressed as

$$q = -\kappa \frac{dh}{dz}$$

Darcy's law is valid in a saturated, continuous, homogeneous and isotropic medium when inertial forces are negligible.

Now that we know the law, we can use the finite difference method to model it mathematically. The finite difference method is a method used to calculate approximate solutions to differential equations using difference formulas to approximate derivatives. The domain is divided into space and time and approximations of the solution are calculated at points of space or time. The error between the numerical solution and the exact solution is determined by the error made by passing a differential operator to difference operator. This error is called *discretization error*.

In our work we will use the finite difference method for modeling the Biot's problem dealing Darcy's Law. We refer to the simple case of the one-dimensional problem

$$\begin{aligned} -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & x \in (0, l), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma p + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= q(x, t), & x \in (0, l), 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

with boundary and initial conditions given by

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} &= -u_0, & p = 0, \text{ if } x = 0, \\ u = 0, \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & \text{if } x = l, \\ \left(\gamma p + \frac{\partial u}{\partial x} \right) (x) &= 0, & \text{in } (0, l), t = 0. \end{aligned}$$

After adimensionalization with respect to the length l of the porous medium domain, the *Lamé stress constant* $\lambda + 2\mu$, the term u_0 , the permeability κ and the viscosity η , such that

$$x := \frac{x}{l}, \quad t := \frac{(\lambda + 2\mu)\kappa t}{\eta l^2}, \quad p := \frac{p}{u_0}, \quad u := \frac{(\lambda + 2\mu)u}{u_0 l},$$

the previous poroelastic problem becomes

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & x \in (0, l), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(ap + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= f(x, t), & x \in (0, l), 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -1, \quad p = 0, & & \text{if } x = 0, \\ u = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, & & \text{if } x = 1, \\ \left(ap + \frac{\partial u}{\partial x} \right) (x) &= 0, & \text{in } (0, 1), t = 0. \end{aligned}$$

Capítulo 1

Problema físico

1.1. Teoría de la poroelasticidad

El concepto de medio poroso originalmente emergió en mecánica de suelos y en particular en las obras de Karl von Terzaghi (1883-1963), padre de la mecánica de suelos. Sin embargo un concepto más general de un medio poroelástico es atribuido a Maurice Anthony Biot (1905-1985), un ingeniero belga-americano. El término de poroelasticidad es el utilizado para describir la interacción entre el flujo de fluido y la deformación de sólidos dentro de un medio poroso. Dicho medio o material poroso es un sólido, a menudo llamado matriz, impregnado por una red interconectada de poros o huecos lleno de un fluido: líquido o gas.

En una serie de publicaciones entre 1935 y 1957 Biot desarrolla la teoría de la poroelasticidad dinámica, conocida ahora como teoría de Biot, aportando un completo estudio del comportamiento mecánico de un medio poroelástico.

Muchas sustancias naturales, tales como las rocas, tejidos biológicos y materiales hechos por el hombre tales como espumas y cerámicas pueden ser considerados medios porosos.

1.2. Ley de Darcy

La **ley de Darcy experimental** (o Darcy) es una ley física, mecanicista y determinista que expresa, en base a experimentos, el flujo de un fluido a través de medios porosos (supuesto isotrópico). La circulación de este fluido entre dos puntos está determinado por la conductividad hidráulica del sustrato y el gradiente de presión del fluido. En el caso de una corriente este gradiente está relacionado con la altura del agua. En otras palabras, esta ley muestra que **"la velocidad del agua entre dos puntos es proporcional al gradiente del estado de energía entre los dos puntos"**.

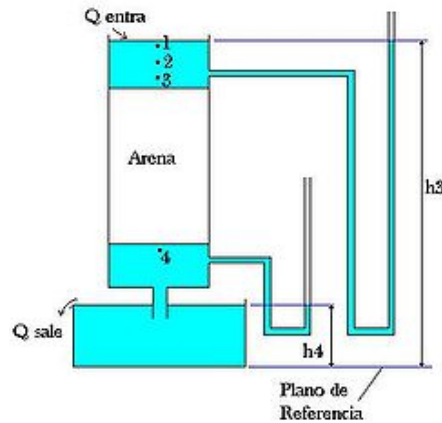
1.2.1. Historia

Esta ley fue establecida en **1855** por **Henry Darcy** después de haber llevado a cabo varios experimentos para determinar las leyes que gobiernan el flujo de agua a través de la arena. Un año después, en una segunda publicación, *Las fuentes públicas de la ciudad de Dijon*, Darcy, queriendo conocer el principio mecánico que gobernaba el flujo de agua en un sólido reutiliza esta ley para controlar y predecir el movimiento y la velocidad del agua en las tuberías y sistemas de energía de las fuentes de Dijon para producir agua potable. 150 años después, la ley de Darcy y sus derivados siguen desempeñando un papel importante en hidrogeología y en particular en el área de los sistemas hidráulicos subterráneos. Primero fue utilizada para evaluar las propiedades hidráulicas de diferentes tipos de sustratos, la tasa potencial del agua subterránea que fluye verticalmente a través del suelo o una capa geológica a, por ejemplo, una extracción de agua que nos gustaría saber a qué velocidad no

debería ser suministrado. Luego fue especialmente utilizada para determinar las áreas de alimentación (y posiblemente de protección) de las cuencas de agua subterránea.

1.2.2. Formulación

La Hidrogeología comienza en 1856 con la publicación del libro *Les Fontaines publiques de Dijon* por parte de Henry Darcy (Dijon, Francia, 10 de junio de 1803 - París, 2 de enero de 1858). Darcy en su busca de cómo abastecer de agua potable su ciudad natal realizó un experimento para determinar las características del proceso de filtrado que podemos observar en la siguiente imagen.



Donde tenemos que la **fórmula de Darcy** es la siguiente:

$$Q = -k \frac{h_3 - h_4}{L} A$$

Donde:

$$Q = \text{Caudal en } \frac{m^3}{s}$$

L = Longitud en metros de la muestra

κ = Una constante, actualmente conocida como coeficiente de permeabilidad de Darcy, variable en función del material de la muestra, en m/s

A = Área de la sección transversal de la muestra en m^2

h_3 = Altura, sobre el plano de referencia que alcanza el agua en un tubo colocado a la entrada de la capa filtrante

h_4 = Altura, sobre el plano de referencia que alcanza el agua en un tubo colocado a la salida de la capa filtrante.

Darcy descubre que la tasa de flujo volumétrico de agua a través de la columna, que normalmente llamaremos Q , es proporcional a la diferencia entre las cabezas hidráulicas h_3 y h_4 , y al área de sección A , e inversamente proporcional a la distancia entre los dos puntos L . El signo negativo de la ecuación es una convención debido a que el sentido del flujo es dirección hacia la cabeza hidráulica baja. Este coeficiente κ depende del medio poroso y el flujo de fluido a través de ella y que describe la facilidad con la que un fluido puede moverse a través de los espacios de poros. Se puede expresar como

$$\kappa = \frac{\kappa_1 \rho_f g}{\eta} \quad (1.1)$$

donde κ_1 es la permeabilidad del sólido que sólo depende de las propiedades de la matriz porosa con unidades en m^2 , η es la viscosidad dinámica del fluido en kg/ms , ρ_f es la densidad del fluido medido en kg/m^3 y g es la constante gravitacional medida en m/s^2 .

La tasa de flujo por área es definida por

$$q = \frac{Q}{A} = -\kappa \frac{h_4 - h_3}{L} \quad (1.2)$$

y tiene como dimensiones m/s . Démosnos cuenta que aunque tiene las mismas unidades que la velocidad no es la velocidad de flujo. Tener en cuenta que q es el volumen de fluido por unidad de superficie por unidad de tiempo, en donde el área está incluyendo tanto líquido y sólido. La carga hidráulica de un fluido h tiene dos componentes, la carga de elevación z , medido con respecto a una posición de referencia especificada, y un valor de la presión p , llamado carga de presión, $p/\rho_f g$, es decir, la carga hidráulica puede ser expresada como

$$h = z + \frac{p}{\rho_f g} \quad (1.3)$$

donde la presión p es una fuerza por área medida en kg/ms^2 .

La ley de Darcy se puede extender a una expresión diferencial unidimensional suponiendo que los puntos asociados estén suficientemente próximos. Tomando que el límite de la distancia tiende a cero la Ley de Darcy se expresa como

$$q = -\kappa \frac{dh}{dz} \quad (1.4)$$

Esta ecuación puede extenderse al caso tridimensional de la siguiente forma:

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad } h, \quad (1.5)$$

donde \mathbf{q} es llamada **velocidad de Darcy**. Combinando (1.1), (1.3) y (1.5) y asumiendo que ρ_f es constante, obtenemos la versión final de la ecuación de Darcy

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\eta} (\text{grad } p - \rho_f \mathbf{g}), \quad (1.6)$$

donde hemos introducido la aceleración gravitacional $\mathbf{g} = -g \text{ grad } z$.

1.2.3. Validez de la Ley de Darcy

La ley de Darcy es válida en un medio saturado, continuo, homogéneo e isótropo y cuando las fuerzas inerciales son despreciables.

La Ley de Darcy es una de las piezas fundamentales de la mecánica de los suelos. A partir de los trabajos iniciales de Darcy, un trabajo monumental para la época, muchos otros investigadores han analizado y puesto a prueba esta ley. A través de estos trabajos posteriores se ha podido determinar que mantiene su validez para la mayoría de los tipos de flujo de fluidos en los suelos. Para filtraciones de líquidos a velocidades muy elevadas y la de gases a velocidades muy bajas, la ley de Darcy deja de ser válida.

En el caso de agua circulando en suelos, existen evidencias abrumadoras en el sentido de verificar la Ley de Darcy para suelos como por ejemplo los limos. Para suelos de mayor permeabilidad, deberá determinarse experimentalmente la relación real entre el gradiente y la velocidad para cada suelo y porosidad estudiados.

1.3. Ley de conservación de masas

La ley de Darcy no es suficiente para resolver los problemas de flujo de agua subterránea. Observe que (1.6) nos dan tres ecuaciones con cuatro incógnitas, los tres componentes del vector \mathbf{q} y la presión p . Una cuarta ecuación será dada por la ecuación de continuidad basado en el principio de conservación de la masa. Tal principio establece que la masa no se ni crea ni se destruye.

En medios porosos, la porosidad, que se denota aquí por ϕ , es la fracción de espacio vacío disponible para el fluido y se define por la relación

$$\phi = \frac{V_v}{V_t} \quad (1.7)$$

donde V_v es el volumen de espacio vacío y V_t es el volumen total del material, también llamada *volumen aparente*, incluyendo tanto el volumen sólido y vacío. La porosidad es un valor que se encuentra entre 0 y 1 y mide la capacidad del sólido de almacenar fluido. Como fue comentado en la sección anterior, la velocidad de Darcy, \mathbf{q} es definida como el volumen de fluido por área y tiempo, incluyendo tanto fluido como matriz. El actual vector velocidad del fluido, que es denotado como v_f , es el volumen de fluido por área ocupado por tal fluido. Así pues, ambas velocidades están relacionadas por la ecuación

$$\mathbf{q} = \phi v_f \quad (1.8)$$

Introducida la definición anterior, podemos derivar la ecuación continua. Consideremos un cubo infinitesimal con dimensiones Δx_1 , Δx_2 y Δx_3 . La x -iésima componente del vector de flujo de masa es $\rho_f q_i$. La tasa de masa de fluido que recorre hacia el cubo a través de la superficie S_1^{in} durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ es

$$(\rho_f q_1)(x_1)(\Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t)$$

y la tasa de masa de fluido que recorre hacia fuera del cubo a través de la superficie S_1^{out} durante el mismo intervalo es

$$((\rho_f q_1)(x_1 + \Delta x_1) \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t)$$

Así, la diferencia entre la masa de fluido que sale y entra del cubo en la dirección de la coordenada x_1 es

$$((\rho_f q_1)(x_1 + \Delta x_1) - (\rho_f q_1)(x_1)) \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t$$

De forma análoga para x_2 y x_3 .

El cambio de masa del fluido $m = \rho_f n$ en el cubo durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ es

$$((\rho_f \phi)(t + \Delta t) - (\rho_f \phi)(t)) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

y el caudal de masa total añadido o eliminado debido a una densidad fuente $f(x,t)$ durante ese tiempo es

$$(\rho_f f) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t$$

La ley de conservación de masas afirma que la masa es una cantidad conservada a nivel local, la diferencia entre la entrada y salida de la masa en el cubo debe ser igual a la variación total de la masa:

$$\begin{aligned} & ((\rho_f \phi)(t + \Delta t) - (\rho_f \phi)(t)) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \\ & - (\rho_f q_1)(x_1 + \Delta x_1) - (\rho_f q_1)(x_1) \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t \\ & - (\rho_f q_1)(x_2 + \Delta x_2) - (\rho_f q_1)(x_2) \Delta x_1 \Delta x_3 \Delta t \\ & - (\rho_f q_3)(x_3 + \Delta x_3) - (\rho_f q_3)(x_3) (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta t) + \rho_f f \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t \end{aligned}$$

Dividiendo esta ecuación por $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta t$, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{((\rho_f \phi)(t + \Delta t) - (\rho_f \phi)(t))}{\Delta t} = & - \frac{(\rho_f q_1)(x_1 + \Delta x_1) - (\rho_f q_1)(x_1)}{\Delta x_1} \\ & - \frac{(\rho_f q_2)(x_2 + \Delta x_2) - (\rho_f q_2)(x_2)}{\Delta x_2} - \frac{(\rho_f q_3)(x_3 + \Delta x_3) - (\rho_f q_3)(x_3)}{\Delta x_3} + \rho_f f \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x_i \rightarrow 0$, $i=1,2,3$ y $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos la ecuación de conservación de masas

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho_f q) = \rho_f f \quad (1.9)$$

1.4. Ecuación para el flujo en un medio poroso rígido

Primero recordemos que la derivada temporal de una variable arbitraria ρ de material con respecto al movimiento de un punto material con una velocidad v se define como

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v \cdot \text{grad } \rho \quad (1.10)$$

Esto es llamado derivada de Lagrange. La siguiente identidad nos será útil

$$\text{div}(\rho v) = v \cdot \text{grad } \rho + \rho \text{div } v$$

Un flujo es incompresible si la derivada de tiempo material de la densidad es cero. Usando la ecuación de continuidad tal declaración es equivalente a una divergencia nula de la velocidad del flujo. Deduzcamos ahora la ecuación que gobierna el flujo de un fluido. Sustituyendo en (1.6) en (1.9)

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} - \text{div} \left(\rho_f \frac{\kappa}{\eta} (\text{grad } p - \rho_f g) \right) = \rho_f f \quad (1.11)$$

Para un fluido incompresible, y suponiendo que la porosidad es independiente del tiempo, la ecuación se reduce a

$$-\text{div} \left(\frac{\kappa}{\eta} (\nabla p - \rho_f g) \right) = f,$$

que es una ecuación para una incógnita, y el sistema puede ser resuelto. Sin embargo, en el caso general, el problema no puede resolverse sin ser combinada con la ecuación de estado. Tenemos que considerar la posible compresión tanto del fluido y la matriz sólida. Teniendo en cuenta que el primer término en el lado izquierdo de (1.11)

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} = \phi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

implica la compresibilidad del fluido $\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$ y la compresibilidad del medio poroso $\frac{\partial \phi}{\partial t}$. El primero conduce a posibles cambios en la densidad del fluido y la segunda lleva a posibles cambios en la porosidad. Con este fin, se introduce un estado desde la ecuación del fluido en condiciones isotérmicas,

$$\rho_f = \rho_f^0 e^{c_f(p - p^0)}, \quad (1.12)$$

donde c_f es el coeficiente de compresibilidad del fluido, y ρ_f^0 que es la densidad del fluido en la presión de referencia p^0 . La diferenciación con respecto al tiempo en ambos lados de (1.23) da como resultado

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = c_f \rho_f \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.13)$$

A partir de (1.12), observamos que este coeficiente puede definirse como

$$c_f = \frac{1}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dp},$$

que establece cómo cambiará la densidad si la presión del fluido se cambia por otra cierta cantidad.

También introducimos el concepto de coeficiente de compresibilidad c_s del sólido, definido como

$$c_s = \frac{d\phi}{dp} \quad (1.14)$$

Usando la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = c_s \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.15)$$

Definiendo el coeficiente de compresibilidad total c_t como $c_t = c_s + \phi c_f$ y sustituyendo (1.13) y (1.15) en (1.11) vemos que

$$\rho_f c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \text{div} \left(\rho_f \frac{\kappa}{\eta} (\text{grad} p - \rho_f g) \right) = \rho_f f, \quad (1.16)$$

que es una ecuación parabólica con sólo una incógnita, la presión, y donde ρ_f es dada por la fórmula (1.12).

En la práctica, a menudo se supone que los cambios espaciales en la densidad se pueden despreciar. Bajo este supuesto, (1.16) se puede reescribir como

$$c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \text{div} \left(\rho_f \frac{\kappa}{\eta} (\text{grad} p - \rho_f g) \right) = f \quad (1.17)$$

1.5. Medios deformables

La elasticidad es la capacidad de los materiales para resistir y recuperarse de deformaciones creadas por fuerzas externas. Los dos conceptos básicos de la teoría de la elasticidad son la tensión y la deformación. La tensión es una magnitud física que representa las fuerzas internas que surgen en un cuerpo deforme para equilibrar las fuerzas externas. A su vez, la deformación es el cambio en el tamaño o forma de un cuerpo debido a esfuerzos internos producidos por una o más fuerzas aplicadas sobre el mismo o la ocurrencia de dilatación térmica. La ley de Hooke describe las relaciones lineales de tensión y deformación.

1.5.1. Tensión

Consideremos un cuerpo sometido a un conjunto arbitrario de fuerzas externas. Podemos dividir este cuerpo en dos partes: A y B por un plano que pasa por un punto O dado dentro del cuerpo. Tengamos en cuenta que el plano únicamente puede ser identificado por su unidad normal \mathbf{n} . La acción que la parte B ejerce sobre la parte A está representada por una fuerza resultante \mathbf{f} . Entonces, el *vector de tensión* \mathbf{t} es la relación de la fuerza resultante f por el área de la sección transversal a :

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{f}}{a}$$

1.5.2. Ecuaciones de equilibrio

Hasta ahora hemos hablado sólo sobre las fuerzas de superficie que actúan sobre una superficie de un cuerpo. Pero puede haber fuerzas del cuerpo que actúen sobre cada partícula del cuerpo. Ejemplos de estas fuerzas son la gravedad, las fuerzas magnéticas o las fuerzas inerciales. Para que un cuerpo sobre el que se ejerce una presión permanezca en reposo es necesario que todas las fuerzas que actúen sobre él se anulen entre sí. Este requisito conduce a las ecuaciones de equilibrio. Considere un cubo infinitesimal. Las fuerzas que actúan sobre este cuerpo son fuerzas normales σ a lo largo de las tres direcciones. Manipulándolas un poco y denotando \mathbf{f} al vector de las componentes de las fuerzas del cuerpo por unidad de volumen llegamos a la ecuación de equilibrio.

$$\text{div}\sigma + \mathbf{f} = 0. \quad (1.18)$$

1.5.3. Deformación

Consideremos un cuerpo donde identificamos un punto P y denotamos su localización dentro del cuerpo por $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$. Cuando se aplica una carga externa al cuerpo, el punto P se desplazará a una nueva ubicación $\mathbf{x}'=(x'_1, x'_2, x'_3)$. El vector que conecta la ubicación \mathbf{x} inicial y la final ubicación final \mathbf{x}' se denomina vector de desplazamiento $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad u_1 = x_1 - x'_1, \quad u_2 = x_2 - x'_2, \quad u_3 = x_3 - x'_3 \quad (1.19)$$

En general, el desplazamiento puede variar de punto a punto, de modo que cada componente (u_1, u_2, u_3) también puede variar con las tres coordenadas de ubicación x_1, x_2, x_3 . Además del desplazamiento de la deformación también se cuantifica por una cepa, que es esencialmente una medida del desplazamiento relativo. Considere un cuerpo rectangular de dos dimensiones bajo carga. En el límite cuando $\Delta x_1 \rightarrow 0$, definimos la deformación en el punto x_1 como la derivada espacial del desplazamiento:

$$\epsilon_1 = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + \Delta x_1) - u_1(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (1.20)$$

La deformación es llamada *deformación normal* en la x_1 -dirección. De forma similar, las tensiones normales en las x_2 y x_3 -direcciones pueden ser definidas como

$$\epsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \epsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (1.21)$$

Esto demuestra que después de la deformación el cuerpo no sólo se mueve, sino que también cambia su forma. Este tipo de deformación se llama deformación cortante y puede ser medida por el

cambio del ángulo entre dos líneas inicialmente ortogonales. Específicamente, la deformación cortante ϵ_{12} se define como un medio del cambio del ángulo originalmente formado por dos líneas paralelas a las direcciones x_1 y x_2 :

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (1.22)$$

Para pequeñas deformaciones, los ángulos α y β son calculados de la siguiente forma

$$\alpha \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \beta \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Por lo tanto, la deformación cortante es igual a

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (1.23)$$

La deformación cortante ϵ_{12} es igual a la media de la derivada parcial del desplazamiento en la dirección x_1 con respecto a x_2 y la derivada parcial del desplazamiento en la dirección x_2 con respecto a x_1 . Por esta definición, una deformación cortante ϵ_{21} es igual a ϵ_{12} . Similarmente, tenemos

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \quad \epsilon_{31} = \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (1.24)$$

Entonces,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

El tensor deformación puede escribirse como

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad } \mathbf{u}^T), \quad (1.25)$$

donde $\text{grad } \mathbf{u}$ es el gradiente desplazamiento.

1.5.4. Ley de Hooke

El estado tensión-deformación de un medio deformable es caracterizado por las seis componentes de la tensión $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$ y las seis componentes de la deformación $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}$. Entonces, es lógico asumir que hay una conexión entre ellas, que puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= f_1(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}), \\ \sigma_2 &= f_2(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}), \\ \sigma_3 &= f_3(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}), \\ \sigma_{12} &= f_4(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}), \\ \sigma_{23} &= f_5(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}), \\ \sigma_{31} &= f_6(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Expandiendo estas ecuaciones en una serie de Taylor y quedándonos sólo los términos de primer orden, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 + c_{13}\varepsilon_3 + c_{14}\varepsilon_{12} + c_{15}\varepsilon_{23} + c_{16}\varepsilon_{31}, \\
 \sigma_2 &= c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 + c_{23}\varepsilon_3 + c_{24}\varepsilon_{12} + c_{25}\varepsilon_{23} + c_{26}\varepsilon_{31}, \\
 \sigma_3 &= c_{31}\varepsilon_1 + c_{32}\varepsilon_2 + c_{33}\varepsilon_3 + c_{34}\varepsilon_{12} + c_{35}\varepsilon_{23} + c_{36}\varepsilon_{31}, \\
 \sigma_{12} &= c_{41}\varepsilon_1 + c_{42}\varepsilon_2 + c_{43}\varepsilon_3 + c_{44}\varepsilon_{12} + c_{45}\varepsilon_{23} + c_{46}\varepsilon_{31}, \\
 \sigma_{23} &= c_{51}\varepsilon_1 + c_{52}\varepsilon_2 + c_{53}\varepsilon_3 + c_{54}\varepsilon_{12} + c_{55}\varepsilon_{23} + c_{56}\varepsilon_{31}, \\
 \sigma_{31} &= c_{61}\varepsilon_1 + c_{62}\varepsilon_2 + c_{63}\varepsilon_3 + c_{64}\varepsilon_{12} + c_{65}\varepsilon_{23} + c_{66}\varepsilon_{31}
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Aquí, tenemos treinta y seis coeficientes c_{ij} llamados módulos elásticos.

En la teoría de la elasticidad lineal normalmente se trabaja con materiales homogéneos e isotrópicos. Si un material es homogéneo, su comportamiento elástico no varía espacialmente, y entonces todos los módulos elásticos son constantes. Además, si las propiedades elásticas del material son las mismas en todas las direcciones, el material es llamado isotrópico. Por otro lado, si no lo es, será llamado anisotrópico.

El comportamiento elástico de materiales isotrópicos puede ser con descrito dos módulos elásticos λ y μ conocidos como *parámetros de Lamé* y así las relaciones tensión-deformación se simplifican de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= 2\mu\varepsilon_1 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\
 \sigma_2 &= 2\mu\varepsilon_2 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\
 \sigma_3 &= 2\mu\varepsilon_3 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\
 \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \\
 \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}, \\
 \sigma_{31} &= 2\mu\varepsilon_{31}.
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Estas ecuaciones son llamadas como *Ley de Hooke* y pueden escribirse en forma matricial como

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\varepsilon_v\mathbf{I}. \tag{1.29}$$

donde \mathbf{I} es el tensor identidad y ε_v la deformación volumétrica:

$$\varepsilon_v = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{div } \mathbf{u}$$

Tengamos en cuenta que el parámetro μ también se conoce como el módulo de corte o módulo de rigidez. Además, se discuten otros parámetros elásticos que pueden ser utilizados para describir el estado de tensión-deformación de los materiales.

1.5.5. Parámetros elásticos

En primer lugar, considerar el estado de tensión uniaxial cuando un cuerpo isotrópico se carga de manera uniforme en la x_1 dirección, es decir, $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$. Entonces, de las ecuaciones (1.28), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \lambda\varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_1 &= \sigma_1 \\
 \lambda\varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_2 &= 0 \\
 \lambda\varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Resumiendo estas ecuaciones, obtenemos

$$\varepsilon_v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\sigma_1 \tag{1.31}$$

Si sustituimos esta ecuación en la primera de las obtenidas anteriormente en (1.30) llegamos a que

$$\sigma_1 = \frac{\mu(3\lambda + 2G)}{\lambda + \mu} \varepsilon_1 = E\varepsilon_1, \quad (1.32)$$

donde E es el *módulo de Young* que caracteriza la rigidez de un material:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (1.33)$$

La segunda y tercera ecuación de (1.30) dan

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\lambda}{2\mu} \varepsilon_v = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_1 = -\nu \varepsilon_1 \quad (1.34)$$

Aquí, ν es el *ratio de Poisson*:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (1.35)$$

El *ratio de Poisson* es una medida de la expansión lateral relativa a la compresión longitudinal. Los *parámetros de Lamé* se pueden expresar a través de E y ν :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Ahora, consideremos un cuerpo isótropo bajo carga uniforme, donde $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = f$, $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$. Tomando en cuenta estas consideraciones, la ecuación (1.41) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_1 &= f, \\ \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_2 &= f, \\ \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_3 &= f \end{aligned}$$

Juntando estas ecuaciones, obtenemos

$$f = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon_v = K\varepsilon_v = \frac{1}{c} \varepsilon_v$$

Aquí, K es el **módulo bulk**, c es la **compresibilidad de bulk**:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad c = \frac{1}{K} \quad (1.36)$$

Notemos que de los cinco parámetros elásticos sólo dos son independientes, es decir, si conocemos dos parámetros los otros pueden ser fácilmente determinados.

1.6. Poroelasticidad

1.6.1. Tensión efectiva

Hay tres maneras en que puede aparecer un cambio de volumen de un medio poroso: por compresión del fluido, por compresión de los granos y por un reordenamiento de los granos. Los dos primeros mecanismos son controlados por la compresibilidad del fluido y sólido, respectivamente. El tercer mecanismo está relacionado con el principio de la tensión efectiva. La tensión total se realiza en parte por el fluido y en parte por la estructura del suelo. La parte de la tensión total que no se realiza por el fluido se llama la tensión efectiva, y de hecho esta es la tensión aplicada a los granos del medio poroso. Por lo tanto, la reorganización de los granos del suelo es causada por los cambios en la tensión efectiva y no por cambios en la tensión total. Por lo tanto, la tensión total σ se puede dividir en la suma de la tensión efectiva, por lo general denotada por σ' y la presión total es

$$\sigma = \sigma' + \alpha p \mathbf{I},$$

donde α es el *coeficiente de Biot*, asumido como $\alpha = 1 - c_s/c_m$, donde c_m es la compresibilidad del medio poroso.

1.6.2. Gobierno de la ecuación para el flujo de una sola fase en un medio poroso deformable

En esta sección, el gobierno de la circulación de fluido a través de un medio poroso deformable se deriva de la teoría de mezclas (Bowen). En esta teoría, se supone que cada punto está ocupado por los constituyentes de la mezcla. Un medio poroso saturado por un fluido puede entonces ser considerado como una mezcla de dos componentes, una fase sólida que representa los granos del suelo, y una fase fluida que representa el fluido que llena los huecos del medio poroso. Consideremos ahora la ecuación de conservación de la masa para cada fase.

La ecuación de conservación de la masa para la fase sólida se puede escribir en ausencia de términos fuente como

$$\frac{\partial((1-\phi)\rho_s)}{\partial t} + \text{div}((1-\phi)\rho_s v_s) = 0, \quad (1.37)$$

donde ϕ es la porosidad y ρ_s y v_s son la densidad y la velocidad del sólido respectivamente. La ecuación de la conservación de masas para el fluido ya fue extraída en una anterior sección y puede ser escrita en ausencia de términos fuente como

$$\frac{\partial(\phi\rho_f)}{\partial t} + \text{div}(\phi\rho_f v_f) = 0, \quad (1.38)$$

donde ρ_f y v_f son la densidad y velocidad del fluido respectivamente. La velocidad de Darcy \mathbf{q} fue escrita en términos de la velocidad del fluido relativa al sólido. Entonces, en este caso de un medio poroso deformable, la velocidad del sólido tiene que estar tenida en cuenta, y como consecuencia dicha expresión para la velocidad de Darcy ahora tiene que ser:

$$\mathbf{q} = \phi(v_f - v_s) \quad (1.39)$$

Percatémonos que la relación (1.9) es un caso particular de la fórmula (1.39) para un medio poroso rígido, es decir, cuando $v_s=0$.

Teniendo en cuenta la derivada de tiempo material para la fase sólida,

$$\frac{D_s \rho_s}{Dt} = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + v_s \cdot \text{grad} \rho_s,$$

la ecuación de balance de masa (1.37) puede reescribirse como

$$\frac{D_s((1-\phi)\rho_s)}{Dt} + (1-\phi)\rho_s \operatorname{div} v_s = 0 \quad (1.40)$$

Si asumimos incompresibilidad de los granos sólidos,

$$\frac{D_s \rho_s}{Dt} = 0,$$

que es una suposición común en mecánica de suelos, una ecuación de balance de masa simplificada es obtenida,

$$\frac{D_s \phi}{Dt} = (1-\phi) \operatorname{div} v_s = (1-\phi) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u, \quad (1.41)$$

donde u es el vector desplazamiento del sólido. Siguiendo el mismo procedimiento con la ecuación de balance de masa de fluido (1.38), y escribiendo la velocidad del fluido como $v_f = (v_f - v_s) + v_s$, tenemos que

$$\frac{D_s(\phi \rho_f)}{Dt} + \phi \rho_f \operatorname{div} v_s + \operatorname{div}(\phi \rho_f (v_f - v_s)) = 0,$$

o,

$$\phi \frac{D_s \rho_f}{Dt} + \rho_f \frac{D_s \phi}{Dt} + \phi \rho_f \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f q) = 0 \quad (1.42)$$

Usando (1.41), la ecuación precedente es escrita como

$$\phi \frac{D_s \rho_f}{Dt} + \rho_f \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f q) = 0.$$

Aplicando la ley de Darcy, obviando términos expresando el producto de una velocidad y un gradiente de un escalar, y considerando que el fluido tiene un coeficiente de compresibilidad c_f , finalmente llegamos a la ecuación

$$\phi \rho_f c_f \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{\rho_f \kappa}{\mu_f} (\operatorname{grad} p - \rho_f g) \right) = 0 \quad (1.43)$$

Sin embargo, en algunos materiales la compresibilidad de los granos tiene que ser tenida en cuenta. En estos casos, la ecuación de masa balanceada escrita de forma más general es

$$\rho_s \frac{D_s \phi}{Dt} = (1-\phi) \frac{D_s \rho_s}{Dt} + (1-\phi) \rho_s \operatorname{div} v_s \quad (1.44)$$

Asumimos la siguiente dependencia de la densidad del sólido con respecto al total isotrópico estrés y la presión del fluido (Verruijt),

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{c_s \rho_s}{1-\phi} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \phi \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

Entonces, si de nuevo obviamos términos expresando el producto de una velocidad y un gradiente de un escalar, la ecuación (1.44) queda escrita como

$$\frac{D_s \phi}{Dt} = c_s \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \phi \frac{\partial p}{\partial t} \right) + (1-\phi) \operatorname{div} v_s \quad (1.45)$$

Sustituyendo el derivado de material de la porosidad en la ecuación, obtenemos que

$$\phi \frac{D_s \rho_f}{Dt} + \rho_f c_s \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \rho_f \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div}(\rho_f q) = 0$$

Debido a que la tensión total isotrópico es $\sigma = \sigma' + \alpha p$, con α el coeficiente de Biot constante $\alpha = 1 - c_s/c_m$, y la tensión isotrópica efectiva está relacionada al volumen deformado por la expresión $\sigma' = -\varepsilon/c_m$, donde c_m es la compresibilidad del medio poroso, se sigue que la ecuación precedente puede ser escrita finalmente como

$$(\phi c_f + (\alpha - \phi) c_s) \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div} q = 0$$

Aquí, de nuevo asumimos que los cambios espaciales en la densidad pueden despreciarse.

Capítulo 2

Método de diferencias finitas

2.1. Aproximación de diferencias finitas

Existen diferentes métodos para resolver Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), entre ellos se encuentra el **Método de las Diferencias Finitas** (MDF). El método de las diferencias finitas es un método utilizado para calcular de manera aproximada las soluciones a las ecuaciones diferenciales usando fórmulas en diferencias para aproximar derivadas. El dominio se divide en espacio y en tiempo y aproximaciones de la solución se calculan en los puntos de espacio o de tiempo. El error entre la solución numérica y la solución exacta se determina por el error que se comete al pasar de un operador diferencial a un operador de diferencias. Este error se denomina *error de discretización* o de truncamiento. El término error de truncamiento refleja el hecho de que una parte finita de una serie de Taylor se utiliza en la aproximación.

Para buscar simplicidad, consideraremos sólo el caso unidimensional. El concepto principal detrás de cualquier esquema de diferencias finitas está relacionado con la definición de la derivada de una función suave u en un punto $x \in R$:

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

y al hecho de que cuando h tiende a 0, el cociente en el lado derecho proporciona una "buena" aproximación de la derivada. En otras palabras, h debe ser lo suficientemente pequeña para obtener una buena aproximación. Queda por indicar qué es exactamente una buena aproximación, en qué sentido. En realidad, la aproximación es buena cuando el error cometido en esta aproximación (es decir, cuando la sustitución de la derivada por el cociente diferencial) tiende hacia cero cuando h tiende a cero. Si la función u es suficientemente suave en un entorno de x , es posible cuantificar este error utilizando una expansión de Taylor.

2.1.1. Serie de Taylor

Supongamos que la función u es C^2 continua en un entorno de x . Para algún $h > 0$ tenemos que

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x+h_1) \quad (2.1)$$

donde h_1 es un número entre 0 y h . Para el tratamiento de los problemas, es conveniente conservar sólo los dos primeros términos de la expresión anterior:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + O(h^2)$$

donde el término $O(h^2)$ indica que el error de aproximación es proporcional a h^2 . De la ecuación precedente, deducimos que existe una constante $C > 0$ tal que para $h > 0$ suficientemente pequeño

tenemos:

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch, \quad C = \sup_{y \in [x, x+h_0]} \frac{|u''(y)|}{2}, \quad (2.2)$$

para $h \leq h_0$ ($h_0 > 0$ dado). El error cometido reemplazando la derivada $u'(x)$ por el cociente diferencial es de orden h . La aproximación es conocida como *aproximación hacia delante de u'* . Más generalmente, definimos una aproximación de orden p de la derivada.

Definición 2.1.1. *La aproximación de la derivada u' en el punto x es de orden p ($p > 0$) si existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que el error entre la derivada y la aproximación está acotado por Ch^p (es decir, es exactamente una $O(h^p)$)*

Del mismo modo, podemos definir la *aproximación hacia atrás de u' en el punto x* como:

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + O(h^2).$$

Obviamente, otras aproximaciones pueden ser consideradas. Con el fin de mejorar la precisión de la aproximación, definimos una aproximación consistente, llamada *aproximación central*, tomando en cuenta los puntos $x-h$ y $x+h$. Supongamos que la función u es tres veces diferenciable en un entorno de x :

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\xi^+) \\ u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(\xi^-) \end{aligned}$$

donde $\xi^+ \in (x, x+h)$ y $\xi^- \in (x-h, x)$. Restando estas dos expresiones se obtiene, gracias al teorema del valor intermedio:

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi)$$

donde ξ es un punto de $(x-h, x+h)$. Entonces, para todo $h \in (0, h_0)$, tenemos la siguiente acotación del error aproximado:

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| \leq Ch^2, \quad C = \sup_{y \in [x-h_0, x+h_0]} \frac{|u^{(3)}(y)|}{6}.$$

Esto define una segunda aproximación consistente para u' .

Observación 2.1.2. *El orden de la aproximación se relaciona con la regularidad de la función u . Si u es C^2 continua, entonces la aproximación es consistente en el orden uno solamente.*

2.1.2. Aproximación de la segunda derivada

Lema 2.1.3. *Supongamos que u es una C^4 continua función en un intervalo $[x-h_0, x+h_0]$, $h_0 > 0$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que para toda $h \in (0, h_0)$, tenemos:*

$$\left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq Ch^2. \quad (2.3)$$

El cociente diferencial $\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x)$ es una consistente aproximación de segundo orden de la segunda derivada $u''(x)$ de u en un punto x .

Demostración. Usamos el desarrollo de Taylor hasta términos de orden cuatro para obtener:

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi^+) \\ u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi^+) \end{aligned}$$

donde $\xi^+ \in (x, x+h)$ y $\xi^- \in (x-h, x)$. Como anteriormente, el Teorema del valor medio nos permite escribir:

$$\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi),$$

donde $\xi \in (x-h, x+h)$. Así, deducimos la relación (6.2) con la constante

$$C = \sup_{y \in [x-h_0, x+h_0]} \frac{|u^{(4)}(y)|}{12}.$$

□

Observación 2.1.4. *Del mismo modo, la estimación del error depende de la regularidad de la función de u . Si u es C^3 continua, entonces el error es sólo del orden h .*

2.2. Formulación de diferencias finitas para un problema unidimensional

Consideremos un dominio acotado $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ y $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ solución del problema no homogéneo de Dirichlet:

$$D \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde c y f son dos funciones dadas, definidas en $\bar{\Omega}$, $c \geq 0$.

2.2.1. Un esquema de diferencias finitas

Supongamos que las funciones c y f son al menos $c \in C^0(\Omega)$. El problema es entonces encontrar $u_h \in \mathbb{R}^N$, tal que $u_i \approx u(x_i)$, para todo $i \in 1, \dots, N$ (siendo x_i la división que hacemos del dominio), donde u es la solución del problema (2.4). Introducimos la aproximación de la derivada de segundo orden por el coeficiente diferencial, consideramos seguidamente el siguiente problema discreto:

$$D_h \begin{cases} -\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j), & j \in 1, \dots, N \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases} \quad (2.5)$$

El problema D ha sido discretizado por un método de diferencias finitas en base a un esquema centrado en tres puntos para la derivada de segundo orden. El problema (2.4) se puede escribir en forma matricial como:

$$A_h u_h = b_h$$

donde A_h es la matriz tridiagonal definida como:

$$A_h = A_h^0 + \begin{pmatrix} c(x_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c(x_2) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c(x_{N-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c(x_N) \end{pmatrix}$$

con

$$A_h^0 = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \vdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

La cuestión planteada por esta formulación está relacionada con la existencia de una solución. En otras palabras, tenemos que determinar si la matriz A_h es invertible o no. La respuesta viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Supongamos $c \geq 0$. Entonces, la matriz A_h es simétrica definida positiva.*

Demostración. Podemos observar que A_h es simétrica. Consideremos el vector $v = (v_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$. Como $c \geq 0$, tenemos:

$$v^t A_h v = v^t A_h^{(0)} v + \sum_{i=1}^N c(x_i) v_i^2 \geq v^t A_h^{(0)} v,$$

y el problema se resume a mostrar que $A_h^{(0)}$ es definida positiva. Notemos que:

$h^2 v^t A_h v = x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + \dots + (x_{N-1} - x_N)^2 + x_N^2$, y entonces $v^t A_h v \geq 0$. Además, si $v^t A_h v = 0$ entonces todos los términos $x_{i+1} - x_i = x_1 = x_N = 0$. Entonces, concluimos que todos los $x_i = 0$ y el resultado se demuestra. □

Podemos resumir el concepto de diferencias finitas para el problema (2.4) en la tabla siguiente:

Teoría (continua)	Diferencias finitas (discreto)
Dominio $\Omega = (0, 1)$	$I_N = 0, \frac{1}{N+1}, \dots, 1$
Incógnita $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u \in C^2(\Omega)$	$u_h = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$
Condiciones $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$	$u_0 = \alpha, u_{N+1} = \beta$
Ecuación $-u'' + cu = f$	$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j)$

2.2.2. Esquema consistente

La fórmula utilizada en los esquemas numéricos resulta de una aproximación de la ecuación usando una expansión de Taylor. La noción de coherencia y de exactitud ayuda a entender qué tan bien un esquema numérico se aproxima a una ecuación. Se introduce una definición formal de la consistencia que se puede utilizar para cualquier ecuación diferencial parcial definida en un dominio Ω y denotada

$$(Lu)(x) = f(x),$$

donde L denota un operador diferencial. La notación (Lu) indica que la ecuación depende de u y en sus derivadas en cualquier punto x . Un esquema numérico puede ser escrito, para cada índice j , en una forma más abstracta como:

$$(L_h u)(x_j) = f(x_j), \quad \text{para todo } j \in 1, \dots, N.$$

Por ejemplo, en el problema de contorno (2.4), el operador L es:

$$(Lu)(x) = -u''(x) + c(x)u(x),$$

y el problema se puede escribir de la siguiente forma: encontrar $u \in C^2(\Omega)$ tal que

$$(Lu)(x) = f(x), \text{ para todo } x \in \Omega. \quad (2.6)$$

Definimos el operador L_h por:

$$-\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2} + c(x_j)u(x_j), \quad j \in 1, \dots, N$$

y el problema discreto (2.4) puede ser formulado como: encontrar u tal que

$$(L_h u)(x_j) = f(x_j), \quad \text{para todo } j \in 1, \dots, N. \quad (2.7)$$

Definición 2.2.2. Un esquema de diferencias finitas se dice que es consistente con la ecuación diferencial parcial que representa, si para cualquier solución suficientemente suave u de esta ecuación, el error del esquema, correspondiente al vector $\varepsilon_h \in \mathbb{R}^N$ cuyos componentes se definen como:

$$(\varepsilon_h)_j = (L_h u)(x_j) - f(x_j), \quad \text{para todo } j \in 1, \dots, N \quad (2.8)$$

tiende uniformemente hacia cero con respecto a x , cuando h tiende a cero, es decir si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon_h\|_\infty = 0$$

Además, si existe una constante $C > 0$, independiente de u y de sus derivadas, tal que, para todo $h \in (0, h_0)$ ($h_0 > 0$ dado) tenemos:

$$\|\varepsilon_h\| \leq Ch^p,$$

con $p > 0$, entonces se dice que el esquema es precisamente de orden p para la norma $\|\cdot\|$.

La definición establece que el error de discretización se define mediante la aplicación del operador de diferencia L_h a la solución exacta u . Esto significa que un esquema coherente implica que la solución exacta casi resuelve el problema discreto.

Lema 2.2.3. Supongamos que $u \in C^4(\Omega)$. Entonces, el esquema numérico (2.5) es consistente y de segundo orden para la norma $\|\cdot\|$.

Demostración. Usando el hecho de que $-u'' + cu = f$ y si suponemos que $u \in C^4(\Omega)$, tenemos que

$$\varepsilon_h(x_j) = -\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2} + c(x_j)u(x_j) + f(x_j) = -u(x_j) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_j) + c(x_j)u(x_j) + f(x_j) = \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_j).$$

donde cada $\xi_j \in (x_{j-1}, x_{j+1})$. Entonces, tenemos que:

$$\|\varepsilon_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in \Omega} |u^{(4)}(y)|,$$

y el resultado se cumple. □

Observación 2.2.4. Ya que la dimensión espacial N está relacionado con h por la relación $h(N+1) = 1$, tenemos:

$$\|\varepsilon_n\|_1 = O(h), \quad \|\varepsilon_h\|_2 = O(h^{3/2}).$$

El error de consistencia es un primer paso para el análisis del error de convergencia del método de aproximación. Sin embargo, no es suficiente para analizar un esquema numérico. Para ello necesitamos de la estabilidad. Imaginemos que perturbamos f para convertirla en una $\hat{f} = f + \varepsilon_h$, resultando en una perturbación de la solución discreta $\hat{u}_h = L_h^{-1} \hat{f}_h$. Usando normas podemos medir el ratio de perturbación

$$\frac{\|\hat{u}_h - u_h\|}{\|\hat{f}_h - f_h\|} = \frac{\|L_h^{-1} \varepsilon_h\|}{\|\varepsilon_h\|}$$

Definición 2.2.5. Definimos la estabilidad constante C_h , que es nuestra medida cuantitativa medida para la estabilidad, como el máximo valor que el anterior ratio puede alcanzar para cualquier perturbación ε_h . En otras palabras, la estabilidad constante es la norma del operador L_h^{-1} .

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{\|L_h^{-1} \varepsilon_h\|}{\|\varepsilon_h\|} = \|L_h^{-1}\|$$

Teorema 2.2.6. Supongamos $c \geq 0$ y que la solución del problema D es de clase $C^{(4)}(\Omega)$. Entonces el esquema de diferencias finitas D_h es convergente de segundo orden para la norma $\|\cdot\|_\infty$. Por otra parte, si u y u_h son soluciones de (2.6) y (2.7), tenemos la siguiente aproximación:

$$\|u - u_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{x \in \Omega} |u^{(4)}(x)|.$$

Capítulo 3

Aplicación del método de diferencias finitas al problema de poroelasticidad unidimensional

Nos referimos al simple caso de un problema unidimensional

$$\begin{aligned} -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & x \in (0, l), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma p + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= q(x, t), & x \in (0, l), 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (3.1)$$

con condiciones iniciales y de contorno

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} &= -u_0, & p = 0, \text{ si } x = 0, \\ u = 0, \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & \text{si } x = l, \\ \left(\gamma p + \frac{\partial u}{\partial x} \right) (x) &= 0, & \text{en } (0, l), t = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Después de adimensionalizar con respecto a la longitud l del medio poroso, la *constante de Lamé* de tensión $\lambda + 2\mu$, el término u_0 , la permeabilidad κ y de la viscosidad η , de la siguiente manera

$$x := \frac{x}{l}, \quad t := \frac{(\lambda + 2\mu)\kappa t}{\eta l^2}, \quad p := \frac{p}{u_0}, \quad u := \frac{(\lambda + 2\mu)u}{u_0 l},$$

el problema poroelástico anterior se convierte en

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & x \in (0, l), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(ap + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= f(x, t), & x \in (0, l), 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -1, \quad p &= 0, & \text{si } x = 0, \\ u = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & \text{si } x = 1, \\ \left(ap + \frac{\partial u}{\partial x} \right) (x) &= 0, & \text{en } (0, 1), t = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $f(x, t) = \alpha g(x, t)$ es un término fuente de escalado y $a = \gamma(\lambda + 2\mu)$. Por conveniencia en la formulación teórica, haciendo $\hat{u}(x, t) = u(x, t) + x - 1$ transformamos el problema previo en un problema con condiciones de contorno homogéneas y condiciones iniciales $(ap + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x})(x, 0) = 1, \text{ en } (0, 1)$.

3.1. Discretización por diferencias centrales

3.1.1. Malla y operadores

Consideramos una malla uniforme en el intervalo $[0, 1]$, con tamaño de paso h :

$$\bar{\omega} = \{x_i | x_i = ih, \quad i = 0, \dots, N\}.$$

Definimos el espacio de Hilbert $H_{\bar{\omega}}$ de las funciones discretas $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)$ en la malla $\bar{\omega}$, con producto escalar y norma dados por

$$(u, v) = h \left(\frac{u_0 v_0 + u_N v_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i \right), \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

De una forma similar introducimos los espacios de Hilbert

$$H_{w^-} = \{u \in H_{w^-} | u_N = 0\}, \quad H_{w^+} = \{u \in H_{w^+} | u_0 = 0\},$$

con los productos escalares

$$(u, v)_{w^-} = h \left(\frac{u_0 v_0}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i \right), \quad (u, v)_{w^+} = h \left(\frac{u_N v_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i \right),$$

y las normas asociadas.

Usando la notación estándar de la teoría de los esquemas de diferencias, para las derivadas por la derecha, izquierda y centrales escribimos

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad u_{\bar{x}} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \quad u_{\bar{x}} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

y la segunda derivada es dada por la expresión

$$u_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Aproximamos el operador diferencial A por el operador de diferencias A definido en H_w^- por

$$(Au)_i = \begin{cases} -\frac{2}{h}(u_{\bar{x}})_i & i = 0, \\ -(u_{\bar{x}\bar{x}})_i & i = 1, \dots, N-1, \\ 0 & i = N. \end{cases}$$

Para $u, v \in H_w^-$ tenemos que $(Au, v)_w^- = (u, Av)_w^-$, es decir, A es un operador auto-adjunto en H_w^- . Además, $(Au, u)_w^- > 0 \forall u \in H_w^-$ excepto para $u=0$. Entonces, el operador en diferencias A es, como el operador diferencia A , auto-adjunto y definido positivo.

Introducimos los siguientes operadores G en H_w^+ y D en H_w^- que aproximan el gradiente y la divergencia G y D , respectivamente,

$$(Gp)_i = \begin{cases} (p_x)_i & i = 0, \\ (p_{\bar{x}})_i & i = 1, \dots, N-1, \\ 0 & i = N. \end{cases}$$

$$(Du)_i = \begin{cases} 0 & i = 0, \\ (u_{\bar{x}})_i & i = 1, \dots, N-1, \\ (u_{\bar{x}})_i & i = N. \end{cases}$$

Es fácil de ver que

$$(Gp, u)_w^- = -(p, Du)_w^+, \quad \forall (u, p) \in H_w^- \times H_w^+.$$

Definidos A, B, G y D llegamos al problema de Cauchy para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} Au + Gp &= 0 \\ \frac{d}{dt}(ap + Du) + Bp &= f(x, t), \quad x \in \bar{\omega} \end{aligned} \quad (3.4)$$

con condiciones iniciales

$$ap(0) + Du(0) = s.$$

3.1.2. Aproximación totalmente discreta

Vamos ahora a construir un esquema de diferencias para la aproximación de la solución (u, p) para el problema de Cauchy. Utilizamos una red uniforme para la discretización del tiempo con tamaño de paso $\tau > 0$. Sean $u^n \in H_w^-$ y $p^n \in H_w^+$ aproximaciones a $u(x, t_n)$ y $p(x, t_n)$, donde $t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, M, M\tau = T$.

Un esquema ponderado es dado por

$$Au^{n+1} + Gp^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.5)$$

$$a \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} + \frac{Du^{n+1} - Du^n}{\tau} + Bp_\sigma^{n+1} = f_\sigma^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.6)$$

con $p_\sigma^{n+1} = \sigma p^{n+1} + (1 - \sigma)p^n$ y $f_\sigma^{n+1}(x) = f(x, \sigma t_{n+1} + (1 - \sigma)t_n)$, y $0 \leq \sigma \leq 1$.

Bajo las condiciones estándar para σ , la estabilidad del sistema de diferencias mostrado puede ser establecida. Más precisamente, el siguiente resultado lo permite.

Proposición 3.1.1. *Para $\sigma \geq 1/2$ la solución del sistema de diferencias satisface la siguiente aproximación.*

$$\|u^{n+1}\|_A^2 + a\|p^{n+1}\|^2 \leq \|u^n\|_A^2 + a\|p^n\|^2 + \frac{\tau}{2}\|f_\sigma^{n+1}\|_{B^{-1}}^2. \quad (3.7)$$

Demostración. Introduzcamos la nueva función malla $u_\sigma^{n+1} = \sigma u^{n+1} + (1 - \sigma)u^n$. Tenemos para $0 \leq n \leq M-1$

$$\left(Au_\sigma^{n+1}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}\right) + \left(Gp_\sigma^{n+1}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}\right) = 0, \quad (3.8)$$

y

$$a \left(\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau}, p_\sigma^{n+1}\right) + \left(\frac{Du^{n+1} - Du^n}{\tau}, p_\sigma^{n+1}\right) + (Bp_\sigma^{n+1}, p_\sigma^{n+1}) = (f_\sigma^{n+1}, p_\sigma^{n+1}). \quad (3.9)$$

Sumando (3.8) y (3.9) obtenemos

$$\left(Au_\sigma^{n+1}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}\right) + a \left(\frac{p^{n+1} - p^n}{\tau}, p_\sigma^{n+1}\right) + (Bp_\sigma^{n+1}, p_\sigma^{n+1}) = (f_\sigma^{n+1}, p_\sigma^{n+1}).$$

y como $(f_\sigma^{n+1}, p_\sigma^{n+1}) \leq \|p_\sigma^{n+1}\|_B + 1/4\|f_\sigma^{n+1}\|_{B^{-1}}$, obtenemos que

$$(Au_\sigma^{n+1}, u^{n+1} - u^n) + a(p_\sigma^{n+1}, p_\sigma^{n+1} - p^n) \leq \tau/4\|f_\sigma^{n+1}\|_{B^{-1}}$$

Usando la identidad $\sigma\xi + (1 - \sigma)\zeta = 1/2(\xi + \zeta) + (\sigma - 1/2)(\xi - \zeta)$ en la expresión de U_σ^{n+1} y de p_σ^{n+1} , tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\|u^{n+1}\|_A^2 - \|u^n\|_A^2) + \frac{a}{2}(\|p^{n+1}\|^2 - \|p^n\|^2) \\ & + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)(\|u^{n+1} - u^n\|_A^2 + a\|p^{n+1} - p^n\|^2) \leq \frac{\tau}{2}\|f_\sigma^{n+1}\|_{B^{-1}}. \end{aligned}$$

y si $\sigma \geq 1/2$, se sigue lo propuesto en (3.7). \square

Para deducir los límites de error para el esquema de diferencias, aplicamos la metodología de análisis de los métodos de esquemas de diferencias finitas. Consideramos las ecuaciones en diferencias para el error en los desplazamientos y la presión $\delta u^n(x) = u^n(x) - u(x, t_n)$ y $\delta p^n(x) = p^n(x) - p(x, t_n)$, $x \in \bar{\omega}$, respectivamente,

$$A\delta u^{n+1} + G\delta p^{n+1} = \Psi_1^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1, \quad (3.10)$$

$$a \frac{\delta p^{n+1} - \delta p^n}{\tau} + \frac{D\delta u^{n+1} - D\delta u^n}{\tau} + B\delta p_\sigma^{n+1} = \Psi_2^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (3.11)$$

Los términos de la derecha de ambas ecuaciones son las aproximaciones del error del problema. Para ecuaciones suaves, tenemos

$$\begin{aligned} \Psi_1^{n+1}(x_i) &= -Au(x_i, t_{n+1}) - Gp(x_i, t_{n+1}) = O(h^{\alpha_1}), \\ \Psi_2^{n+1}(x_i) &= f_\sigma(x_i) - a \frac{p(x_i, t_{n+1}) - p(x_i, t_n)}{\tau} - \frac{Du(x_i, t_{n+1}) - D(x_i, t_n)}{\tau} \\ &\quad - B(\sigma p(x_i, t_{n+1}) + (1 - \sigma)p(x_i, t_{n+1})) = O(\tau^v + h^{\alpha_2}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $\alpha_1 = 1$ si $i = 0$ o $\alpha_1 = 2$ si $i \neq 0$, $\alpha_2 = 1$ si $i = N$ y $v = 2$ si $\sigma = 1/2$ o $v = 1$ si $\sigma \neq 1/2$. Con el objetivo de aplicar las ecuaciones del error en desplazamiento y presión para estimar δu^n y δp^n , $1 \leq n \leq M$, separamos el desplazamiento error $\delta u^n = \omega_1^n + \omega_2^n$, siendo $\omega_1^0 = 0$ y ω_1^n , $1 \leq n \leq M$, la solución de $A\omega_1^n = \Psi_1^n$.

Esta parte del error satisface la estimación

$$\|\omega_1^n\|_A \leq \|\Psi_1^n\|_{A^{-1}}, \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (3.13)$$

En esta situación, ω_2^n , y δp^n son la solución del problema

$$\begin{aligned} A\omega_2^{n+1} + G\delta p^{n+1} &= 0, \quad n = 0, \dots, M-1 \\ a \frac{\delta p^{n+1} - \delta p^n}{\tau} + \frac{D\omega_2^{n+1} - D\omega_2^n}{\tau} + B\delta p_\sigma^{n+1} &= \Psi_2^{n+1} - \frac{D\omega_1^{n+1} - D\omega_1^n}{\tau}, \quad n = 0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde el lado derecho de las ecuaciones es cero. Si $\sigma \geq 1/2$, por la proposición anterior obtenemos

$$\|w_2^{n+1}\|_A^2 + 1\|\delta p^{n+1}\|^2 \leq \|\omega_2^0\|_A^2 + a\|\delta p_h^0\|^2 + \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n \left(\|\Psi_2^{k+1}\|_{B^{-1}}^2 + \left\| \frac{D\omega_1^{k+1} - D\omega_1^k}{\tau} \right\|_{B^{-1}}^2 \right), \quad (3.15)$$

$$n = 0, \dots, M-1.$$

Por (3.14) y la desigualdad $\|\Psi_2^{k+1}\|_{B^{-1}} \leq C\|\Psi_2^{k+1}\|$, donde C es una constante independiente de los parámetros de discretización, obtenemos $\|\Psi_2^{k+1}\|_{B^{-1}} = O(\tau^v + h^{3/2})$.

Una estimación para $\|Ds^{k+1}\|_{B^{-1}}$, siendo $s^{k+1} = \frac{\omega_1^{k+1} - \omega_1^k}{\tau}$, es dada por el siguiente lema.

Lema 3.1.2. Con la notación precedente tenemos que

$$\|Ds^{n+1}\|_{B^{-1}}^2 \leq \frac{2}{\delta} \|s^{n+1}\|_A^2, \quad n = 0, \dots, M-1,$$

donde δ es el mínimo valor propio del operador B , y consecuentemente $Ds^{n+1} = O(\tau^v + h^{3/2})$, donde $v = 2$ si $\sigma = 1/2$ o $v = 1$ si $\sigma \neq 1/2$.

Demostración. Teniendo en cuenta que $B \geq \delta E$ (E denota el operador identidad, así $(Bp, p) \geq (\delta p, p)$, $\forall p \in H_w^+$)

$$\|Ds^{n+1}\|_{B^{-1}}^2 \leq \frac{1}{\delta} \|Ds^{n+1}\|^2$$

Ahora por la definición del operador D y A , con unos simples cálculos obtenemos

$$\|Ds^{n+1}\|^2 \leq 2\|s^{n+1}\|_A^2. \quad (3.16)$$

□

3.1.3. Análisis de convergencia

Proposición 3.1.3. Sean u^0 y p^0 $O(h^{3/2})$ aproximaciones de $u(x,0)$ y $p(x,0)$, donde $u(x,t)$ y $p(x,t)$ son soluciones suaves del problema continuo. Sean u^n y p^n las soluciones del problema de diferencias (3.5) y (3.6). Para $\sigma \geq 1/2$ la convergencia sostiene

$$\|u^{n+1} - u(\cdot, t_{n+1})\|_A + a\|p^{n+1} - p(\cdot, t_{n+1})\| = O(\tau^v + h^{3/2})$$

donde $v = 2$ si $\sigma = 1/2$ o $v = 1$ si $\sigma \neq 1/2$.

Demostración. Notemos que

$$\frac{1}{2}\|\delta u^{n+1}\|_A^2 + a\|\delta p^{n+1}\|^2 \leq \|\omega_1^{n+1}\|_A^2 + \|\omega_2^{n+1}\|_A^2 + a\|\delta p^{n+1}\|^2.$$

Si $\sigma \geq 1/2$, usando (3.13) y (3.15) tenemos

$$\frac{1}{2}\|\delta u^{n+1}\|_A^2 + a\|\delta p^{n+1}\|^2 \leq \|\omega_2^0\|_A^2 + a\|\delta p^0\|^2 + \|\psi_1^{n+1}\|_{A^{-1}}^2 + \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n \left(\|\psi_2^{k+1}\|_{B^{-1}}^2 + \frac{2}{\delta} \sum_{k=0}^n \left\| \frac{\psi_1^{n+1} - \psi_1^n}{\tau} \right\|_{A^{-1}}^2 \right)$$

y ahora es suficiente utilizar las estimaciones de orden para los errores de aproximación ψ_1^n , ψ_2^n y para el error inicial, para obtener el resultado. \square

De esta última proposición las propiedades de convergencia para desplazamientos en la A-norma y para presiones en la L_2 -norma discreta si $a \neq 0$ se siguen. Ahora consideremos la convergencia de los gradientes presión o equivalentemente la convergencia de la presión en la B-norma. De (3.5) y (3.6) tenemos

$$\tau \left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right\|_A^2 + a\tau \left\| \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} \right\|^2 + (Bp_\sigma^{n+1}, p^{n+1} - p^n) = (f_\sigma^{n+1}, p^{n+1} - p^n),$$

que proporciona la desigualdad

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \|u^{n+1} - u^n\|_A^2 + \frac{a}{\tau} \|p^{n+1} - p^n\|^2 + \frac{1}{2} (\|p^{n+1}\|_B^2 - \|p^n\|_B^2) \\ & + (\sigma - \frac{1}{2}) \|p^{n+1} - p^n\|_B^2 \leq \frac{1}{2\alpha} \|f_\sigma^{n+1}\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|p^{n+1} - p^n\|^2. \end{aligned}$$

En este caso $a \neq 0$ y $\sigma \geq 1/2$ tomando $\alpha = 2a/\tau$ tenemos

$$\|p^{n+1}\|_B^2 \leq \|p^n\|_B^2 + \frac{\tau}{2a} \|f_\sigma^{n+1}\|^2. \quad (3.17)$$

Proposición 3.1.4. Supongamos las mismas condiciones que en la proposición anterior. Para $a \neq 0$ y $\sigma \geq 1/2$ tenemos la estimación

$$\|p^n - p(\cdot, t_n)\|_B = O(\tau^v + h^{3/2}),$$

donde $v = 2$ si $\sigma = 1/2$ o $v = 1$ si $\sigma \neq 1/2$.

Demostración. Como $a \neq 0$, la estimación de (3.17) en el ecuación de error (3.14) da

$$\|\delta p^{n+1}\|_B^2 \leq \|\delta p^0\|_B^2 + \frac{\tau}{2a} \sum_{k=0}^n \left(\|\psi_2^{k+1}\|^2 + \left\| \frac{D\omega_1^{k+1} - D\omega_1^k}{\tau} \right\|^2 \right),$$

y por (3.16) y $\left\| \frac{\omega_1^{k+1} - \omega_1^k}{\tau} \right\|_{A^{-1}}$ tenemos que

$$\|\delta p^{n+1}\|_B^2 \leq \|\delta p^0\|_B^2 + \frac{\tau}{2a} \sum_{k=0}^n \left(\|\psi_2^{k+1}\|^2 + 2 \left\| \frac{\psi_1^{k+1} - \psi_1^k}{\tau} \right\|_{A^{-1}}^2 \right).$$

El resultado se sigue utilizando las estimaciones de orden para los errores de aproximación ψ_1^n y ψ_2^n y para el error inicial δp^0 . \square

En el incomprensible caso en el que $a = 0$, no tenemos resultado de convergencia para las aproximaciones de la presión tanto en la L^2 -norma y la B -norma. Para el caso contrario hemos probado la convergencia de método de diferencias finitas para el problema de porosidad unidimensional.

Bibliografía

- [1] .A.A Samarskii, *The theory of difference schemes*, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [2] .A.Meirmanov, *Mathematical Models for Poroelastic Flows*, Atlantic Press, 2014.
- [3] .E. Detournay, A.H.D. Cheng, *Fundamentals of poroelasticity, Analysis and Design Methods* , 1993.
- [4] .D.N. Arnold, *Stability, consistency, and convergence of numerical discretizations*, University of Minnesota, Minnesota, 1994.

