Facultad de Educación Universidad de Zaragoza

Grado en Magisterio en Educación Primaria

Trabajo Fin de Grado

LA ENSEÑANZA DE LA FRACCIÓN EN 4º CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Autor: Jorge Reviriego Lara

Director: Rafael Escolano Vizcarra

Febrero de 2015

Contenido

RESUMEN:

Diversos estudios y evaluaciones han constatado una débil comprensión, por parte de los escolares, de los números racionales. Como exponemos en los primeros puntos del presente trabajo, mediante un estudio exploratorio en un curso natural de cuarto de Educación Primaria, estas limitaciones en la enseñanza del número racional son achacables a los obstáculos didácticos originados por la implementación de metodologías y procesos instructivos utilizados mediante los textos escolares en los que se prioriza, casi exclusivamente, el significado de la fracción como parte-todo.

En el estudio exploratorio realizado, durante la realización de las prácticas escolares III para la elaboración de este trabajo, analizamos mediante una prueba inicial la comprensión de la fracción de los escolares después de recibir la enseñanza de dicho contenido siguiendo el texto escolar. Tras las conclusiones de dicho análisis realizamos una propuesta didáctica alternativa para introducir la fracción en cuarto curso de Educación Primaria, la cual se fundamenta en el significado de la fracción como resultado de medida. En el presente trabajo exponemos cómo se realizó una intervención con dicha propuesta y los resultados obtenidos tras la realización de una prueba final, comparando los resultados de los escolares y por tanto su comprensión de la fracción, antes y después de la implementación de nuestra propuesta.

PALABRAS CLAVES: fracción, Educación Primaria, enseñanza, relación parte-todo, modelo de aprendizaje, significado de medida.

1. Introducción: El número racional positivo como objeto de enseñanza y objetivos del trabajo

La enseñanza de los números racionales junto con sus operaciones y aplicaciones es un contenido curricular importante de la aritmética en Enseñanza Primaria y socialmente útil para cualquier ciudadano. Sin embargo, las evaluaciones de diagnóstico realizadas en Educación Primaria y en Secundaria muestran resultados muy preocupantes sobre el estado de conocimientos referido a este conjunto numérico. Diversas investigaciones ponen de manifiesto que los estudiantes de todos los niveles educativos tienen grandes dificultades para resolver problemas en los que intervienen números racionales. Cuando el campo numérico queda acotado a los números naturales estas dificultades son menos patentes. Todo parece indicar que las razones de este fenómeno se encuentran en la complejidad de la propia estructura conceptual del número racional y sus diversos sistemas de representación. Sin embargo otra razón ajena a este motivo la podemos situar en las prácticas de enseñanza, cuestión ésta que será tratada posteriormente.

Para mostrar un ejemplo de esto presentamos a continuación, dos problemas con el porcentaje de aciertos obtenidos por escolares de cuarto curso de educación primaria en la evaluación de diagnóstico (MEC, 2010, p. 133 y p. 129)

6. (M006) El depósito de harina está casi vacío. Tan solo está ocupado un cuarto de su contenido. ¿Cuántos kg de harina deben pedir a la fábrica para llenar totalmente el depósito si en el interior quedan en estos momentos 330 kg?

A 330 kg.
B 660 kg.
C 990 kg.
D 1320 kg.

Bloque: Medida
Proceso: Conexión
Respuesta correcta: C
Puntuación: 617
Aciertos: 20,7%
Nivel: 4

1. (M057) **El dibujo representa la parcela de los conejos. En ciertas partes duermen y en el resto está la hierba de la que se alimentan. ¿Qué fracción de la parcela está ocupada por hierba?**

Bloque: Números y operaciones
Proceso: Conexión
Respuesta: Abierta
Puntuación: 637
Aciertos: 19,4%
Nivel: 4

Respuesta: ____________

Si reflexionamos en los porcentajes mostrados, respecto a la cantidad de alumnos que han resuelto exitosamente los problemas, un 20,7% en el primer problema y un 19,4% en el segundo, nos damos cuenta que nos referimos a menos de una cuarta parte de los alumnos que han tomado parte en la evaluación.

La estructura conceptual del número racional es mucho más compleja que la del número natural. Gairín (1999, p.3) lo justifica del siguiente modo:
"Una historia de más de 7.000 años y un proceso dialéctico de ensayos, interpretaciones, errores, desarrollos conceptuales y formalizaciones, han llevado a la configuración actual del concepto matemático de Número Racional (Benoit et al., 1992); concepto sin duda complejo puesto que recoge y sintetiza todos los aspectos considerados a lo largo de su proceso constructivo (Feferman, 1989).

Ahora bien, en los procesos habituales de enseñanza las ideas y conceptos numéricos se justifican y presentan en orden deductivo, sin que ello signifique que el alumno los organice y estructure cognitivamente de esta forma (Tall, 1991). Una construcción del concepto de número racional cognitivamente efectiva exige de un proceso lento de dominio e integración de nuevos significados, que se articulen con los dominios del campo numérico de los números naturales y de los números enteros. También supone la incorporación de nuevas especificidades simbólicas, operatorias, estructurales, relacionales y de representación, que hay que acomodar a una variedad de nuevos significados; igualmente hay que profundizar sobre las relaciones que se presentan entre los distintos sistemas de representación considerados. Además, se precisa de la comprensión en profundidad de una estructura algebraica diferente, la estructura de grupo multiplicativo, lo que implica dotar de significado *al inverso de un número; también es necesario comprender la noción topológica de densidad respecto del orden".*

La fenomenología del número racional resuelve los problemas que se le presentan a un ciudadano y que no puede afrontar con sus conocimientos del número natural. Mientras que el número natural da cuenta de la magnitud discreta cardinalidad, la fenomenología del número racional es más compleja dado que exige el dominio de diversos significados entre los que destaca la medida de magnitudes continuas.

Sirvan estos comentarios iniciales para constatar que la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los números racionales es mucho más compleja que la del número natural como consecuencia de una estructura topológica y algebraica más compleja y de la variedad de significados que sintetiza este conjunto numérico y de los sistemas de representación que simbolizan sus elementos.

Constatada la complejidad del número racional positivo nos cuestionamos si las dificultades de aprendizaje radican exclusivamente en la complejidad de estos números o si bien éstas tienen su origen en la práctica docente que se sigue en las aulas de Educación Primaria. Por concretar la cuestión: ¿la organización de la enseñanza del número racional positivo tiene en cuenta una fenomenología diferente de la del número natural? Con rotundidad podemos adelantar que la respuesta es negativa. A lo largo de este trabajo tendremos ocasión de razonar esta respuesta al abordar el análisis de la enseñanza de la fracción, que es el sistema de representación básico del número racional positivo, pero antes consideramos indispensable citar brevemente los **objetivos de este trabajo** los cuales son:

1) Analizar la enseñanza habitual de la fracción a través de la propuesta que realiza la editorial de libros de texto que utilizan los escolares de un grupo natural de clase de 4º curso de Educación Primaria.
2) Detectar las dificultades de comprensión asociadas a la fracción en un grupo natural de clase de 4º curso de Educación Primaria a partir del diseño y desarrollo de una prueba elaborada para evaluar la comprensión de los escolares.

3) Diseñar una propuesta alternativa de enseñanza de la fracción e implementar en un grupo natural de clase de 4º curso de Educación Primaria.
4) Evaluar los resultados de la intervención docente utilizando como instrumento una prueba análoga a la utilizada en el objetivo 2.

Dedicaremos cuatro **capítulos de la memoria** del trabajo para desarrollar cada uno de estos cuatro objetivos que acabamos de enunciar los cuales concretamos del siguiente modo:

- **Marco teórico**, que se sitúa en la Didáctica de las Matemáticas y que utiliza como herramientas conceptuales las nociones de sistema de representación, significado, comprensión y modelo de aprendizaje.
- **Análisis de la enseñanza habitual de la fracción en 4º curso de Educación Primaria,** curso en el que se inicia la enseñanza del número racional. Para ello nos preguntamos ¿Cómo se les presenta a los niños y a los docentes la fracción en los libros de texto y guías docentes? Y finalmente expondremos las limitaciones encontradas en la enseñanza de la fracción con el significado de la parte todo. (objetivo 1)
- **Estudio exploratorio de la comprensión de la fracción en un grupo natural de 4º curso de Educación Primaria,** a través de la realización de una prueba inicial. Estudiaremos las respuestas de los escolares ante dos problemas planteados para poner a prueba su comprensión a cerca del significado de la fracción. (objetivo 2)
- **Diseño y desarrollo de una propuesta alternativa de enseñanza de la fracción en un grupo natural de 4º curso de Educación Primaria.** Justificando el diseño de la propuesta ante la metodología de enseñanza que impera en el aula y la cual analizamos en el segundo apartado. También exponemos aquí como fue el desarrollo de dicha propuesta en el aula, estudiando y analizando las respuestas de los alumnos. (objetivo 3)
- **Evaluación de la Intervención docente en un grupo natural de 4º curso de Educación Primaria,** mediante la realización de una prueba escrita que pretende recoger datos para valorar si ha habido un cambio en la comprensión de la fracción,

por parte de los alumnos respecto a los datos obtenidos en la prueba inicial. (objetivo 4)

- **Conclusiones.**

2. Marco teórico

Este trabajo se sitúa en la línea de investigación de Didáctica de las Matemáticas denominada Pensamiento Numérico y Algebraico que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social. Esta línea de investigación estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico y Castro, 1995; p. 167).

El marco conceptual en que se sitúa esta línea de investigación se sustenta en los siguientes principios: asume que la construcción del conocimiento matemático es un fenómeno social y cultural y que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad; centra su objeto de reflexión en el campo de las matemáticas que comienza con la aritmética escolar, avanza por los sistemas numéricos superiores y continúa con el estudio sistemático de las relaciones numéricas; tiene una orientación esencialmente curricular; el estudio de los errores y dificultades en la compresión de los escolares sobre los campos conceptuales reseñados es parte esencial de la tarea de análisis e interpretación que se lleva a cabo en esta línea de investigación. (Castro, Rico y Romero, 1997).

El grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico estudia las familias de problemas que pertenecen a la fenomenología del sistema numérico, en nuestro caso el número racional positivo, y que le confieren significado; los sistemas de signos utilizados para representar conceptos y procedimientos; y las competencias cognitivas que sostienen un dominio significativo de las estructuras numéricas, de su desarrollo y mejora, junto con el diagnóstico y tratamiento de los errores y dificultades en la comprensión de los escolares sobre estas estructuras numéricas. Por este motivo las investigaciones dentro de este grupo abarcan tres ámbitos de actuación:

- La estructura numérica del Número Racional Positivo y los sistemas de representación asociados que son estudiados con la intención de organizar sistemas simbólicos de codificación, válidos para la expresión y comunicación de los conceptos y relaciones de una estructura numérica o algebraica y las interrelaciones entre tales sistemas;

- el campo de problemas asociado al sistema numérico de los Números Racionales Positivos, con el objetivo de estudiar los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos y cuestiones que admiten ser analizados mediante los conceptos y procedimientos que forman parte de una determinada estructura numérica, y
- la competencia en el uso del sistema numérico de los Números Racionales Positivos que hace referencia a las actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones propios de este conjunto numérico, es decir, la comprensión de los alumnos con la intención de mejorar la enseñanza de este sistema numérico.

En este trabajo vamos a focalizar nuestra atención en la notación fraccionaria que es el primer sistema de representación del Número Racional Positivo que se introduce a los escolares en cuarto cuso de Educación Primaria.

Para estudiar la fenomenología del Número Racional Positivo que da cuenta de los usos y funciones de este conjunto numérico nos servimos del análisis fenomenológico que es una herramienta conceptual ideada por Freudenthal (1983) que tiene por objeto la organización de la enseñanza de las matemáticas y que permite caracterizar el campo de problemas del Número Racional Positivo. Para otros investigadores, como Godino y Batanero (1994), caracterizar el campo de problemas supone encontrar los significados del Numero Racional Positivo, es decir, las prácticas asociadas al campo de problemas de las que emerge el Numero Racional Positivo en un momento dado.

En cuanto al tercer ámbito de actuación partimos del supuesto de una construcción del concepto de Número Racional Positivo cognitivamente efectiva que exige de un proceso lento de dominio e integración de los significados asociados a este conjunto numérico. La caracterización de los significados del número racional positivo, es decir, el estudio de los usos, contextos y problemas que históricamente resolvieron los números racionales aportan información relevante sobre la comprensión de los alumnos porque partimos del supuesto que la comprensión del número racional positivo exige del dominio coordinado de todos sus significados.

La fenomenología del Número Racional Positivo, es decir, los significados de este conjunto numérico resuelven los problemas que se le presentan a un ciudadano y que no podía afrontar con sus conocimientos del número natural. Esto exige que el ciudadano amplíe de forma notoria el mundo de las magnitudes que debe conocer, el mundo de las magnitudes mensurables; también se le exige saber interpretar las magnitudes que aparecen como resultado de las operaciones y, en suma, ejercer un control constante sobre unos números que han de interpretarse como expresiones de cantidades de magnitud.

A partir del análisis fenomenológico, Escolano (2007) identifica cinco significados del Número Racional Positivo: medida, cociente partitivo, razón, operador y cociente indicado. Los tres primeros significados surgen para resolver problemas asociados a necesidades humanas y sociales, mientras que los dos últimos tienen su origen en el desarrollo interno de las matemáticas. En el siguiente cuadro muestra las características de los cinco significados que pertenecen a la fenomenología histórica del número racional positivo:

<table>
<tr><th></th><th>Significado</th><th>Acción</th><th>Naturaleza de la acción</th></tr>
<tr><td rowspan="3">asociados al problema de la medida</td><td>Medida</td><td>Medir</td><td>Medida de una magnitud, con objetos tangibles</td></tr>
<tr><td>Cociente partitivo</td><td>Reparto igualitario y medir</td><td>Repartir, de forma igualitaria, una cantidad de magnitud continua. La acción puede ser física, gráfica o mental</td></tr>
<tr><td>Razón</td><td>Medir una cantidad con la unidad de otra magnitud</td><td>Idea mental, sin soporte físico, para construir la razón o magnitud intensiva, si se verifica la condición de proporcionalidad</td></tr>
<tr><td rowspan="2">desarrollo de las matemáticas</td><td>Operador</td><td>Uso funcional: operación simbólica
Uso descriptivo: como razón</td><td>Acción mental con objetos matemáticos contextualizados o formales</td></tr>
<tr><td>Cociente indicado</td><td>Operación simbólica: ecuación algebraica</td><td>Acción mental con objetos matemáticos formales</td></tr>
</table>

En primer lugar, los significados de *medida, cociente partitivo y razón* están vinculados a la fenomenología de la medida. En particular, el hecho de interpretar la razón como una forma singular de medida abre nuevas perspectivas en la enseñanza del número racional positivo al priorizar el trabajo con las magnitudes mensurables; en concreto, mediante la construcción, definición y estudio de la nueva magnitud que modeliza la razón.

En segundo lugar, esta clasificación establece una clara distinción entre los significados de cociente partitivo y de división indicado, dado que tienen distinto origen fenomenológico y porque también es distinta la perspectiva que ofrecen del número racional positivo. En efecto, mientras que el primero de ellos aborda un problema del mundo sensible, el reparto igualitario, que resolvió la antigua civilización egipcia a través de la suma de fracciones unitarias; el segundo de ellos tiene su origen en necesidades internas de las matemáticas como la búsqueda de una estructura numérica que garantiza la existencia de elemento simétrico de cualquier elemento, no nulo, para la operación multiplicación.

En tercer lugar, el significado de relación parte-todo que recogen las clasificaciones tradicionales queda fuera de la clasificación porque no pertenece a la fenomenología histórica del número racional. Estos autores sitúan la génesis del significado de relación parte-todo en las prácticas de enseñanza de la fracción: se trata de un método cómodo para introducir la fracción mediante un doble recuento de números naturales y la aplicación de un convenio establecido pero que provoca importantes obstáculos didácticos.

Además de estas herramientas conceptuales utilizamos la noción de modelo de aprendizaje propuesta por Gairín (1999) con una clara intención didáctica. La finalidad del modelo, que dada su intencionalidad didáctica le llamamos de aprendizaje, es la de crear condiciones adecuadas para que surja el conocimiento matemático, y su función es favorecer el razonamiento abstracto a partir de percepciones sensoriales. Así, en lo sucesivo nos referiremos al modelo de aprendizaje con el sentido que Gairín, (1999, pp. 15) otorga a los modelos de aprendizaje:

> *"Un entorno físico con el que se esquematiza y recrea una parte del mundo real, con variables bien definidas, estable frente a interacciones con el mundo exterior,*

y que permite las acciones de los sujetos".

El modelo, sobre todo en los primeros niveles educativos, juega un papel importante en la formación y aprehensión de los conceptos matemáticos a partir de las acciones de los escolares con objetos tangibles. Se trata de dotar a los alumnos de un material concreto y un entorno físico sobre los que puedan actuar y reflexionar para que, mediante esta interacción, avancen en la construcción del conocimiento cuyo aprendizaje se promueve.

En trabajos posteriores (Gairín, 2004; Escolano, 2007) utilizan modelos de aprendizaje para enseñar el Número Racional Positivo con cuatro variables o componentes diferenciadas:

- *una magnitud mensurable,* para que cualquier cantidad de la misma se exprese de forma numérica,
- *unos objetos*, en los que resulta perceptible la cantidad considerada de esa magnitud,
- *unas acciones*, que provoquen alteraciones en la cantidad de magnitud expresada en los objetos,
- *unas técnicas,* con las que se llevan a cabo las acciones

Es esencial que el modelo exprese alguna magnitud mensurable puesto que con la enseñanza se persigue representar unas relaciones entre cantidades de esa magnitud en términos de una acción. Los objetos resultan imprescindibles por cuanto permiten que, de forma tangible, se disponga de cantidades de magnitud susceptibles de transformaciones. La aparición de los conceptos se producirá como consecuencia de las relaciones que surgen de las acciones que realice el alumno sobre los objetos y que provoquen modificaciones de las cantidades. Según sea la técnica utilizada al efectuar la acción aparecerán diferentes sistemas de representación del Número Racional Positivo.

Dado que nuestro propósito es estudiar la comprensión de la notación fraccionaria en los alumnos de cuarto curso de Educación Primaria optamos por la acción de medir cantidades de magnitudes continuas.

Dentro de las magnitudes continuas proponemos priorizar el uso de la longitud frente a otras magnitudes mensurables, y ello porque la sencillez de la técnica de medida -desplazar la unidad sobre la longitud a medir-, permite al escolar dirigir sus esfuerzos a expresar el resultado de la medida; mientras que en el trabajo con otras magnitudes, como la capacidad o la masa, las dificultades técnicas de la medida acapararían toda la atención del escolar. Además, para que los niños trabajen con la longitud se pueden utilizar objetos como listones de madera y tiras de papel como unidad de medida que se manipulan con facilidad, que no crean problemas de limpieza, y que tienen un tacto agradable; mientras que el trabajo con otras magnitudes exige la manipulación de aparatos más complejos (como la balanza de dos platillos), o provocan problemas de limpieza (como en la medición de líquidos). Además de trabajar con la magnitud longitud parece razonable proponer tareas de medida con la magnitud superficie.

Una idea esencial para la comprensión de los números racionales es la del fraccionamiento o partición de la unidad en un número finito de partes iguales, por lo tanto, al elegir una magnitud para iniciar la enseñanza de las fracciones conviene aplicar el criterio de facilitar el fraccionamiento. En este sentido cabe decir que resulta sencillo el fraccionamiento de cualquier segmento en partes de igual longitud mientras que resulta más complejo el fraccionamiento de cantidades de capacidad o de masa, por eso proponemos priorizar el uso de la magnitud longitud.

Una vez que hemos optado por la acción de medir en primer lugar cantidades de las magnitudes longitud y superficie proponemos usar como técnica de medida la de crear subunidades arbitrarias que tengan la misma cantidad de magnitud. Esta técnica consiste en buscar un fraccionamiento de la unidad, es decir una subunidad, que posibilite la composición de la cantidad a medir mediante un determinado número de subunidades iguales creadas por dicho fraccionamiento.

Mediante esta técnica de medida la persona que mide se enfrenta ante un problema real, no escolar, que consiste en encontrar la subunidad que le permita cuantificar la cantidad de magnitud de un determinado objeto. Cuando la unidad de medida es mayor que la cantidad a medir deberá proceder por ensayo y error hasta encontrar un fraccionamiento adecuado de la unidad (subunidad).

En estas condiciones la fracción aparece como el sistema de representación que resuelve el problema de la medida: la fracción indica el resultado de la medida de una cantidad de magnitud. En efecto, el tamaño de la subunidad, que depende del número de partes iguales en que se ha fraccionado la unidad, viene reflejado en el denominador de la fracción; mientras que el número entero de subunidades que contiene la cantidad a medir se indica en el numerador de la fracción.

Una vez que hemos optado por la técnica de medir creando subunidades arbitrarias de la unidad para facilitar la gestión de los modelos de medida decidimos que las cantidades de magnitud que vayan a medir los escolares se elijan de modo que no sea necesario la realización de fraccionamientos muy finos de la unidad, porque la utilización de material manipulativo se torna compleja y porque el fenómeno de aproximación que comporta todo proceso de medida de magnitudes continuas puede dar lugar a medidas diferentes de una misma cantidad de magnitud.

En cuanto a los objetos que vayan a utilizar los escolares convendrá elegir aquellos que posean una cantidad de magnitud continua que posibilite el fraccionamiento en partes iguales y que, además, facilite la percepción visual de la cantidad de magnitud. En el caso de la magnitud longitud proponemos medir la cantidad de longitud que poseen diversos listones de madera y considerar como unidad de medida tiras de papel. En el modelo de medida de superficie los objetos que van a ser medidos son cartulinas de diferentes cantidades de magnitud y consideraremos como unidad cuadrados de papel reciclado de 20 centímetros de lado cuyo fraccionamiento, en partes iguales, se realiza con facilidad.

Estos modelos de aprendizaje han sido validados satisfactoriamente por Escolano (2007) con grupos de docencia de cuarto curso de Educación Primaria. La descripción e implementación de estos modelos de aprendizaje se detallará en el capítulo 5: Diseño y desarrollo de una propuesta alternativa de enseñanza de la fracción en un grupo natural de 4º curso de Educación Primaria.

3. Análisis de la enseñanza habitual de la fracción en 4º curso de Educación Primaria

En el marco teórico del presente trabajo hemos expuesto y definido de manera breve y concisa los distintos significados del número racional, que además han estado presentes en nuestro sistema educativo a lo largo de los dos últimos siglos (Escolano 2007). Podemos decir que en nuestro sistema educativo se ha entendido que hay diferentes formas de organización y secuenciación de la enseñanza del número racional en Educación Primaria.

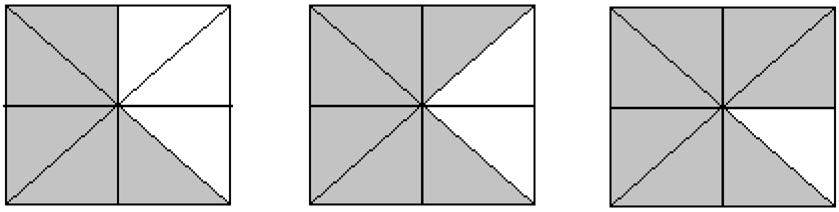
Actualmente en las aulas de primaria, concretamente en las de 4º curso de primaria, donde los alumnos escuchan por primera vez el concepto de fracción, predomina una metodología didáctica fundamentada en la fracción como relación parte todo. Es más este mismo significado es también utilizado para la introducción del número decimal como “otra forma” de escribir las fracciones decimales.

La relación parte-todo: surge en la primera mitad del siglo XX, es un recurso didáctico del que la práctica escolar se viene sirviendo, de forma exclusiva, desde la reforma de 1980 (Programas Renovados) para iniciar la enseñanza de la fracción a los escolares de Educación Primaria (Escolano 2004).

La realidad del sistema educativo español es que la enseñanza de la fracción se fundamenta prioritariamente en el significado de relación parte-todo (Morcote y flores, 2011). Tras esta afirmación nos cuestionamos: ¿por qué se prioriza su utilización? y ¿qué efectos provoca en el aprendiz? Las respuestas a estas preguntas las encontramos en la práctica docente, en la interpretación de las formas de presentación de las fracciones a través de los manuales escolares del sistema educativo español.

Bajo el significado de la relación parte-todo, en la introducción de la fracción a los escolares se les plantean ejercicios como el que exponemos a continuación, extraído del texto escolar del grupo natural de cuarto de Educación Primaria, en el que hemos realizado el estudio exploratorio para la realización del presente trabajo:

10. ¿Qué fracción representa cada dibujo?



La resolución de este tipo de ejercicios exige a los escolares realizar transferencias entre representaciones gráficas y representaciones simbólicas. El modo de actuación de los alumnos para resolver el ejercicio propuesto es el siguiente:

- En primer lugar el alumno debe interpretar, en la representación gráfica, aquellos aspectos que representan el "todo" y los que representan las partes destacadas.
- En segundo lugar el escolar debe ejecutar un doble recuento. Por un lado debe contar las partes iguales que forman el "todo" y por otro lado el de las partes pintadas o destacadas.
- Seguidamente a la realización del doble recuento, el alumno tiene que representar, de forma simbólica, el resultado de ambos recuentos. Para ello escribe debajo de una raya horizontal el resultado de contar el "todo" y encima de la misma raya el resultado de contar las partes pintadas o destacadas.

Este ejercicio mostrado y su consecuente modelo de resolución son representativos de lo que entendemos por la relación parte-todo: la relación simbólica que se establece entre dos números naturales a partir de una representación gráfica. De esta forma se dice que el denominador indica las partes existentes (el "todo") y el numerador las partes que se consideran (destacadas o pintadas con colores que las diferencien del resto).

Desde la perspectiva cognitiva de la fracción como significado parte-todo, mediante ejercicios como el expuesto, destacamos las siguientes características:

- La mayor parte del conocimiento se adquiere de forma visual. Abundan los gráficos en los ejercicios, por lo general figuras geométricas regulares (a veces representadas en forma de pizzas o tartas) en cuyo interior se dibujan X número de cuadraditos o triángulos iguales, que fraccionan en partes iguales dichas figuras, de los cuales se resaltan algunas partes mediante recursos gráficos.

- Se ignora la medida de magnitudes. A los escolares no se les muestra la existencia de un proceso de medida, debido a que en la instrucción acontecen los siguientes hechos:
    - Se omite u oculta la magnitud empleada. En los enunciados de los ejercicios se intuye el uso de la magnitud de superficie, pero no se hace mención de ella ya que la actividad se resuelve sin necesidad de medir ninguna cantidad de superficie, basta con realizar los recuentos para su resolución
    - No se define la unidad. El "todo" o la unidad no precisa que se muestre de forma explícita. Por este motivo las figuras geométricas regulares de las que antes hacíamos mención, suelen presentarse superpuestas y claramente diferenciadas según el atributo del color, de modo que el alumno no tiene necesidad de preocuparse por reconocer la unidad para resolver la tarea.
    - La igualdad de las cantidades de magnitud es irrelevante. A los escolares se les pide y explica que deben identificar el número de partes o porciones que conforman las figuras planas, por lo que el énfasis de la tarea se centra en la cardinalidad y no en la igualdad de las superficies de las partes o porciones que aparecen en el fraccionamiento.
- No es necesario utilizar números distintos de los naturales. Como exponíamos en líneas anteriores, la respuesta de los ejercicios se obtiene mediante un doble recuento y, por ese motivo, los escolares no encuentran la necesidad de introducir ninguna estructura numérica superior a la del número natural.
- La fracción es concebida por los alumnos como la relación simbólica de dos números naturales separados por una barra horizontal. No obstante dicha expresión simbólica no tiene entidad de número para los escolares, ya que la

entienden como una situación descriptiva. Podemos decir entonces que la fracción no tiene status de número.

- Finalmente exponemos que promueve un aprendizaje pasivo. La relación entre la parte y el todo presenta una situación estática entre cantidades de superficie, no hay situación problemática porque los ejercicios están preparados para asegurar el éxito de los alumnos.

Para terminar esta introducción sobre cómo se realiza la enseñanza de la fracción en Educación Primaria y proseguir con el análisis de la enseñanza habitual de la fracción en el cuarto curso de Educación Primaria, desarrollamos los siguientes puntos de este apartado del trabajo formulados a modo de pregunta: ¿cómo se les presenta a los niños la fracción en los libros de texto? y ¿cuáles son las limitaciones de la enseñanza de la fracción como relación parte-todo? Queremos exponer que la fracción como relación parte-todo no surge de las necesidades humanas a diferencia por ejemplo del significado de medida, puesto que la génesis histórica del número racional se encuentra en la medida de cantidades de magnitud –bien realizada directamente o bien realizada para expresar el resultado de un reparto-, o en la comparación de dos cantidades de magnitud, ya medidas, que da sentido a la idea de razón.

Por esa razón como ya exponíamos en la primeras líneas de este apartado, creemos que el origen de la relación parte-todo habría que situarlo en la práctica educativa, entre los recursos didácticos creados por necesidades del propio proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Según Escolano (2004) dos razones que justificarían la introducción y consolidación de este recurso didáctico son:

- Eludir el proceso de medida con objetos tangibles (dificultad del propio proceso de medida, gestión del aula por la utilización de material, control de la diversidad de resultados obtenidos, prioridad de la enseñanza del Sistema Métrico Decimal, etc.),
- Y abreviar los períodos de instrucción: el significado parte-todo permite una introducción rápida de la representación simbólica de la fracción y, además, con elevados niveles de éxito a corto plazo.

¿Cómo se les presenta a los niños la fracción en los libros de texto?

En el presente trabajo hemos seleccionado un grupo natural de alumnos de cuarto curso de Educación Primaria, para realizar nuestro estudio exploratorio, evaluando mediante una prueba inicial la comprensión del alumnado tras haber trabajado en clase, con la respectiva tutora y el libro escolar, el tema dedicado a la enseñanza de la fracción. Por este motivo, respondiendo a la pregunta que planteamos en el subtítulo, acontecemos a analizar el enfoque didáctico del tema dedicado a las fracciones en el libro escolar de cuarto curso de Educación Primaria de matemáticas de la editorial SM. Dicho libro está debidamente autorizado por el Ministerio de Educación y tiene una amplia implicación en centros escolares de toda España.

Puesto que se trata de un texto autorizado por el Sistema Educativo español, damos por hecho que atiende a las expectativas y recomendaciones de las autoridades educativas y, por tanto, que refleja con fidelidad el currículo oficial. Queremos recordar también que en el ámbito de la Educación Primaria, los textos escolares son un elemento básico y vertebrador para la instrucción, una guía y un recurso para facilitar la tarea de los maestros.

Las variables en las que nos centramos para analizar cómo se les presenta a los niños la fracción en el libro de texto son las siguientes:

- **Los contenidos**
- **Orientaciones metodológicas**
- **Significados que se construyen**
- **Resolución de problemas**

a) Los contenidos

En el libro de texto se presenta el siguiente cuadro-esquema, que recopila Los contenidos que se van a trabajar a lo largo del tema:

Contenidos		
• La fracción como representación de una partición. • Término de una fracción • Comparación de fracciones. • Fracción y unidad. • Fracción de un número.	• Lectura y escritura de fracciones. • Representación gráfica de fracciones. • Relación de una fracción con su lectura o su representación gráfica. • Identificación de los términos	• Valoración de la utilidad de las fracciones como expresión de una cantidad. • Reconocimiento del continuo uso de la fracción en la vida real. • Perseverancia y rigor en la búsqueda de soluciones.

• Resolución de problemas • Cálculo mental.	de una fracción. • Comparación y ordenación de fracciones. • Representación de la unidad por medio de fracciones. • Cálculo de la fracción complementaria. • Cálculo de la fracción de un número. • Elección de operaciones para resolver un problema. • Resta mental de 101, 201, 301, 401… a números de tres cifras	

Como podemos observar en la taba, el texto escolar, hace una clasificación de los contenidos a trabajar en el tema en tres columnas. Interpretamos tras la lectura de cada columna, que se trata de una clasificación de los contenidos a trabajar a los largo del tema en contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales. Mediante esta clasificación, la primera columna se corresponderían con los contenidos propiamente dichos que se van a trabajar a lo largo del tema; la segunda columna se correspondería con los contenidos procedimentales, que el alumno ha de adquirir al finalizar la instrucción del tema; y por último, en la tercera columna se recogen los contenidos actitudinales.

Tras la lectura de los contenidos expresados en el libro de texto mediante la tabla anterior y la lectura detallada y revisión del tema en la guía docente de la editorial, podemos decir que los objetivos fundamentales planteados por los autores del libro son los siguientes:

- ✓ Leer, escribir y representar fracciones.
- ✓ Comparar fracciones.
- ✓ Relacionar la fracción con la unidad
- ✓ Hallar la fracción de un número

A continuación y en relación a los contenidos expuestos en el texto escolar, nos parece apropiado mostrar los conocimientos previos, que se consideran desde la guía docente de la editorial:

3. *Conocimientos previos.*

Para que los alumnos comprendan el concepto de fracción es necesario que tengan bien asimilado el de división como reparto. Por otro lado, conviene que tengan afianzados los algoritmos de la multiplicación y de la división para realizar operaciones relacionadas con las fracciones como, por ejemplo, el cálculo de la fracción de un número. Por último, conviene ejercitar previamente la lectura y elaboración de esquemas gráficos y dibujos para representar distintos aspectos de la realidad

Podemos extraer, tras la lectura de los conocimientos previos, que los alumnos han de tener, según la guía docente de la editorial, que previamente a este tema se ha trabajado con los alumnos la división, con un significado de reparto. Este hecho nos puede hacer pensar que para la introducción de la fracción se va emplear un significado de reparto, pero como explicaremos más adelante no es el caso, ya que el texto se fundamenta en la relación parte-todo como instrumento didáctico.

b) Orientaciones metodológicas

El libro escolar presenta un formato común para todos los temas, por lo que todos tienen una estructura única siguiendo las tres pautas que citamos a continuación:

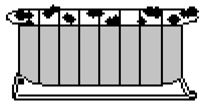
1º En las dos primeras páginas del tema aparece el título del mismo, en este caso, "Las fracciones" debajo del cual expone la ilustración de una situación, y un pequeño diálogo entre los personajes de la misma, seguido de unos enunciados, que sirven para introducir la utilidad del tema que se presentará seguidamente.

En las páginas siguientes, se presenta con un título el contenido conceptual a trabajar. Bajo ese título aparece el cuerpo central de la página bajo el epígrafe **Actívate**, que se dedica a presentar unos dibujos y un texto explicativo que hacen referencia al concepto que se va a plantear. Estos dibujos abarcan situaciones variadas con la intención de mostrar al alumno, que la idea de fracción, está presente en ámbitos de la vida cotidiana, aunque no siempre. A continuación mostramos un ejemplo:

1 Las fracciones

Activate

Después de jugar en la nieve, Tomás, Salva y Eva Vuelven a casa a merendar. Sí cada uno se come una porción, ¿qué fracción de bizcocho tomarán?



El bizcocho está dividido en 8 partes iguales. Cada parte es una fracción del bizcocho Podemos representar la cantidad de bizcocho que se han tomado de esta manera:

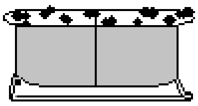
$$\frac{3}{8}$$

3 ← numerador: número de porciones que se comen

8 ← denominador: número total de porciones

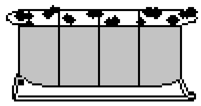
El número $\frac{3}{8}$ es una fracción.

Si dividimos el biscocho en 2 partes, cada parte es $\frac{1}{2}$.



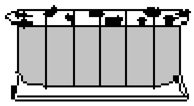
Se lee un medio

Si dividimos el biscocho en 4 partes, cada parte es $\frac{1}{4}$.



Se lee un cuarto

Si dividimos el biscocho en 6 partes, cada parte es $\frac{1}{6}$.



Se lee un sexto

Para leer una fracción, leemos primero el número del numerador y a continuación el del denominador de este modo

denominador	2	3	4	5	6	7	8	9
se lee	medio	tercio	cuarto	quinto	sexto	séptimo	octavo	noveno

✓ Tomarán tres octavos del bizcoccho

Como podemos observar en la imagen, a los alumnos se les expone una explicación detallada del concepto, acompañada de imágenes para fortalecer la comprensión, de manera que al alumno le baste con la lectura y observación para aprender el concepto expuesto. Prácticamente no se les cuestiona nada ni se les propone un ejercicio-problema, para que aprendan por descubrimiento.

2º En cada par de páginas se presenta un concepto o procedimiento distinto. El título que encabeza la página se corresponde con el conocimiento a enseñar. La estructura de cada página es siempre la misma de modo que ésta queda dividida en tres partes. En la primera parte presenta una situación problemática acompañada de un dibujo, con su correspondiente explicación detallada, como podemos apreciar en la imagen anterior, bajo el epígrafe **Actívate**.

En la segunda parte, bajo el epígrafe **Descubre**, se expone una definición, una explicación resumida del concepto, o un complemento a la explicación del epígrafe anterior. A continuación mostramos una imagen del epígrafe Descubre, que acontecería al epígrafe anterior:

> **Descubre**
>
> Los términos de una fracción son el numeradort el denominador

Por último en la tercera parte se propone un pequeño número de ejercicios de aplicación inmediata del concepto enseñado, bajo el epígrafe **Entrénate:**

> **Entrénate**
>
> 1. ¿Cómo se leen las fracciones?
>
> $\frac{1}{3}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{4}$

3º El tema dedica las cuatro últimas páginas a proponer ejercicios relacionados con todos los contenidos trabajados a lo largo del mismo. En esos ejercicios y problemas se ponen a prueba las nociones de fracción, de comparación de fracciones, de la relación de la fracción con la unidad y de la fracción de un número, que se corresponden con los contenidos fundamentales que, en opinión de los autores, deben conocer los alumnos de cuarto curso de primaria sobre las fracciones.

Tras exponer las orientaciones metodológicas seguidas por el libro de texto extraemos las siguientes conclusiones al respecto:

- La editorial y los autores del libro optan por presentar los contenidos proponiendo inicialmente una situación problemática alusiva al concepto a introducir. En este sentido, podemos decir que el texto escolar intenta seguir los principios psicopedagógicos del constructivismo, según los cuales el aprendizaje debe construirse sobre los conocimientos previos del escolar. En estas condiciones el libro de texto se sirve de situaciones problemáticas para introducir conceptos y procedimientos. Sin embargo, la propia estructura del libro escolar es incompatible con esta metodología de enseñanza porque la necesidad de exponer los contenidos obliga a presentar inmediatamente la solución y explicación de la situación introductoria que plantea como problema. De este modo, vemos como el planteamiento constructivista desaparece, pues al alumno se le priva de todo el proceso reflexivo que demanda la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas. Es más, la propia presentación de una respuesta única empobrece el aprendizaje colectivo que se produce cuando un grupo de alumnos busca libremente la respuesta a una situación problemática, pues en este supuesto suelen aparecer enfoques y procesos de resolución que aportan distintas perspectivas del concepto a aprender.

- La metodología propuesta, se caracteriza por aportar un aprendizaje pasivo. El alumno adquiere los conocimientos solamente desde la percepción visual, y la lectura del texto, mientras que un aprendizaje activo exige que la observación esté precedida de la manipulación de objetos físicos, la reflexión sobre los resultados alcanzados y el contraste de ideas con otros compañeros y con el profesor **cuando los alumnos resuelven un problema que pertenece a la fenomenología histórica del concepto que se desea enseñar.**

c) Significados que se construyen

La fracción se introduce desde la relación parte-todo. Este significado es el que soporta toda la instrucción sobre las fracciones en tanto en cuanto que figura en la mayor parte de las situaciones en que se pone en juego el significado de fracción. Como exponíamos al principio de este capítulo del trabajo, se elude el significado de medida y bajo el dominio de la relación parte-todo, se introduce de manera rápida y con éxito a corto plazo el concepto de fracción.

No obstante en nuestro análisis de la guía docente hemos encontrado las siguientes definiciones respecto al concepto de fracción, denominador y numerador:

Vocabulario de la unidad

Palabras clave

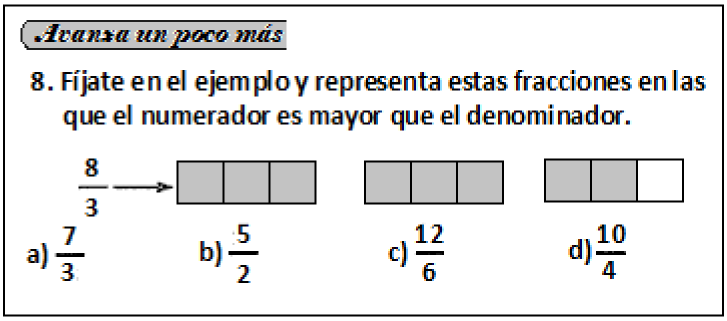
denominador: numero colocado en la parte inferior de una fracción que indica las partes iguales en que se divide la unidad.

fracción: número que expresa las partes que se toman de una unidad dividida en partes iguales.

numerador: número colocado en la parte superior de una fracción que indica el número de partes que se toman.

Tras la lectura de estas definiciones, podemos observar que están dadas, por supuesto, desde la relación parte todo. No obstante, nos cuestionamos según lo expresado en el libro de texto, ¿Qué diferencia hay entre el concepto de fracción y el concepto de numerador? Según las definiciones expuestas ambos son un número que expresan las partes que se toman. Prácticamente podemos decir que no hace distinción, ya que los autores del texto han utilizado la misma definición para ambos conceptos, hecho que consideramos como un importante error que no va a conseguir otra cosa más que confundir a los alumnos.

Finalmente queremos destacar como una observación llamativa, y un punto débil de la relación parte, que en el tema únicamente se dedica un único ejercicio a las fracciones impropias, de un total de cincuenta y cinco ejercicios, que componen el tema. Dicho ejercicio se plantea en el libro bajo el título “avanza un poco más”, lo que nos indica que se considera como una profundización (también podemos interpretar bajo ese nombre que recibe menos importancia ya que se considera algo más difícil o inusual). Este hecho lo atribuimos sin duda a que desde la relación parte-todo como recurso didáctico se descuida por completo la importancia de la fracción impropia. Podemos pensar que este descuido se debe a la complejidad de representación en contraste con las fracciones propias. Para comprender mejor esta explicación adjuntamos a continuación el único ejercicio del libro, dedicado a la fracción impropia y que es utilizado a la vez como objeto de explicación de la misma ya que en ningún otro apartado del texto escolar, se hace referencia ella.



Como podemos apreciar en la imagen, la explicación y representación de la fracción impropia queda exclusivamente limitada a un único ejemplo para poder realizar los enunciados propuestos. Cuando anteriormente nos referimos al descuido como causa de la dificultad de representación en contraste con las fracciones propias, lo que queremos decir es lo siguiente: los escolares, acostumbrados desde la relación parte-todo, representan las fracciones coloreando una cantidad concreta (el numerador) de cuadraditos o porciones pequeñas contenidos dentro de un rectángulo u otra figura geométrica regular más grande dividida en esos cuadros o porciones iguales (unidad). Cuando esa figura geométrica regular más grande no contiene el número de cuadraditos o porciones que tienen que marcar o colorear, el alumno ha de razonar que debe dibujar otra u otras unidades hasta que pueda colorear la cantidad indicada. Este razonamiento exige más esfuerzo y trabajo a los alumnos, que el simple acto de contar dentro de la unidad los cuadraditos a colorear y por tanto se les presenta como más difícil. Esto no supondría una dificultad si los alumnos supieran para qué cuentan cuadraditos. Los alumnos no realizan una actividad funcional que les conduzca al número racional, porque no realizan una actividad de medida de una cantidad e magnitud.

d) Resolución de problemas

Entendemos que los problemas juegan un doble papel en la educación matemática. Por una parte, constituyen la base sobre la que sustentar el aprendizaje de nuevos contenidos matemáticos, por cuanto sirven para plantear situaciones problemáticas cuya resolución exige poner en juego los conocimientos sobre los que se quiere instruir. Por otra parte, porque sirven para modelizar situaciones del mundo real aplicando los conocimientos, tanto conceptuales como procedimentales, adquiridos en el proceso instructivo.

Respecto a la primera de las utilidades de los problemas, al analizar el texto escolar hemos observado una clara y constante tendencia a iniciar la exposición de cualquier contenido proponiendo situaciones problemáticas, que consideramos inadecuadas porque la situación problemática que se plantea desde la relación parte todo no conduce a la aparición del número fraccionario toda vez que la actividad puede realizarse mediante un doble recuento de números naturales. A demás el texto escrito tiene unas claras limitaciones que invalidan la eficacia del recurso didáctico utilizado. En efecto, el texto escrito no tiene más opción que la de reflejar de inmediato la respuesta al problema propuesto; de este modo, al alumno se le priva realizar por sí mismo el proceso de resolución de dicho problema, lo que implica privarle de una construcción personal del conocimiento puesto en juego.

En estas condiciones el alumno realiza un aprendizaje pasivo, como ya exponíamos anteriormente, en tanto en cuanto las ideas matemáticas vienen dadas por el texto, no se deducen de sus propias reflexiones y actuaciones. Es más, el texto ofrece una única respuesta al problema, lo que conlleva que el aprendizaje queda limitado a una sola de las múltiples perspectivas que ofrecen los conceptos matemáticos. Además, este proceso también anula el aprendizaje colectivo, puesto que desaparecen las distintas respuestas que pueden aparecer cuando varios alumnos buscan la respuesta a un mismo problema, y también desaparece la posibilidad de que cada alumno puede argumentar sobre la bondad o falsedad de las respuestas que presentan otros compañeros.

Es posible que el libro de texto tenga que escribirse en la forma en la que está hecho. Ahora bien, teniendo en cuenta las consecuencias negativas que provoca, sería deseable que los autores sustituyesen la solución por una secuencia de preguntas o reflexiones que ayuden al alumno a encontrar dicha solución.

En lo que concierne a la utilización de los problemas para modelizar fenómenos físicos poniendo en juego los conocimientos adquiridos, hay que señalar que el libro analizado concede un papel secundario a este tipo de actividades. El trabajo de los alumnos se dirige fundamentalmente a la realización de ejercicios con la finalidad, se supone, de alcanzar destreza en el manejo de algoritmos. De hecho, de las actividades propuestas en el libro, más del 75% son ejercicios que consisten en una aplicación directa de los contenidos enseñados.

Por otra parte hay que destacar que los problemas propuestos están muy cercanos a la instrucción y, en consecuencia, se limitan a poner en juego los conocimientos recientemente introducidos. De este modo, los problemas no juegan un papel importante en la conexión entre distintos conceptos lo que provoca un aprendizaje de ideas matemáticas parceladas y aisladas. Es más, los problemas propuestos al final del tema, tienden a formular enunciados del mismo tipo de los que aparecen en cada uno de los epígrafes de que constatan el tema.

No observamos, por tanto, que los problemas propuestos sirvan para profundizar en los aspectos conceptuales utilizados en la presentación de los contenidos, ni para conectar distintos aspectos de un mismo concepto, ni para establecer relaciones entre distintos conceptos, por lo que los problemas planteados no difieren sustancialmente de los ejercicios pues se resuelven utilizando razonamientos análogos a los que utilizan los autores en los problemas que figuran al inicio de cada epígrafe.

¿Cuáles son las limitaciones de la enseñanza de la fracción con la relación de la parte todo?

Encontramos que el número racional como relación parte todo ofrece una fácil y rápida introducción, aunque esta presenta a su vez graves obstáculos de comprensión en los escolares. Esta rápida introducción se debe en gran medida a la presentación de enunciados, ejemplos y ejercicios en los que el alumno, que se enfrenta a ellos, solo ha de hacer un recuento de naturales a través de la aparición total de cuadros o quesitos más pequeños e iguales proporcionalmente contenidos dentro de un cuadrado, rectángulo o circunferencia más grande y seguidamente a ese recuento total diferenciar el número de cuadraditos o quesitos distinguidos por otro color o marca respecto el número total obtenido en el recuento inicial. Desde el punto de vista docente, podemos decir que es una manera sencilla, fácil y rápida de ofrecer a los alumnos un acercamiento al número racional y que se ajusta en tiempo y sesiones dedicadas a las programaciones y planificaciones impuestas. Sin embargo esa comodidad relativa, respecto a la facilidad, rapidez y puesta en práctica contiene unos puntos débiles que limitan la comprensión de los alumnos ocasionando, en lugar de un beneficio, desde el punto de vista didáctico, unos costes que perjudicaran a los alumnos en cursos futuros debido a un débil conocimiento del significado real del número racional. Es por esa razón que en las evaluaciones de diagnóstico y algunas investigaciones realizadas sobre los cursos de educación primaria e incluso secundaria se muestran resultados alarmantes que apuntan a una pobre comprensión de los contenidos y sus significados, en concreto nos referimos al número racional positivo. Aparecen así lo que Brousseau (1983) denomina obstáculos didácticos, o dificultades y errores originados por la forma de presentación o introducción de los conceptos matemáticos.

Algunas publicaciones e investigaciones como por ejemplo la realizada por Escolano y Gairín (2005) hacen referencia de forma especial a tres obstáculos relevantes en la construcción significativa de las fracciones por parte de los escolares derivados de la introducción de la fracción como relación de la parte todo. Esos tres obstáculos a los que hacen referencia son:

- La obstaculización en la formación de concepciones adecuadas.
- Obstaculización en la separación conceptual del número racional y del número natural.
- Obstaculización en la formación de ideas abstractas.

Por nuestra parte, para la realización del presente trabajo llevamos a cabo un estudio exploratorio a cerca de la comprensión de la fracción en un grupo natural de cuarto curso de educación primaria, el cual describiremos y explicaremos en el capítulo posterior. En los resultados de nuestra prueba inicial podemos observar los costes, en términos de comprensión, que atribuimos a la introducción del número racional como parte-todo. Parafraseando a Brousseau (1983) los obstáculos didácticos o dificultades y errores que se originan como consecuencia del modelo en que se presentan los conceptos matemáticos. Esos obstáculos didácticos que observamos son:

- Los alumnos **no reconocen las fracciones impropias**. Según los ejercicios que han realizado mediante la relación parte todo, les cuesta razonar la posibilidad de contar más partes o cuadritos de los contenidos en un cuadro de mayor tamaño. En las respuestas a los problemas que les hemos planteado, del total de alumnos que han optado por la resolución mediante gráficos, o que se han apoyado en dibujos, la mayoría no saben representar correctamente las fracciones impropias y en su lugar representan fracciones reciprocas. El alumno se crea la idea de que el número de partes que se toman deba ser menor o igual a las partes del "todo" eso justifica los errores de los alumnos al utilizar las representaciones de las fracciones reciprocas obtenidas en las pruebas que comentaremos más adelante.

- **Despreocupación de la unidad de medida.** Observamos en aquellos alumnos que han recurrido a la estrategia de resolución con gráficos en el *problema 1* (expuesto en el siguiente apartado del trabajo), que ninguno ha conservado la misma unidad en la representación de las dos fracciones. Según la relación parte todo, los alumnos comprenden que de un todo dividido en partes iguales, contamos un número determinado de porciones. Por esa razón ellos han representado dos barras de longitud de diferentes tamaños para cada fracción, en función del valor del número natural de los denominadores. Los alumnos al ver un denominador con número más grande que el de la otra fracción, además de interpretar que el todo estará dividido en más partes, interpretan que serán un todo distinto y de mayor tamaño al del denominador con un número más pequeño.
- Cuando los alumnos realizan las actividades propuestas desde la relación parte-todo no miden y en consecuencia **no perciben la fracción como resultado de una medida.** En la mayoría de respuestas expresadas en forma de fracción los alumnos responden que a/b es más largo, o que es más largo el de b/a, pero no indican la unidad de medida en la respuesta.
- No distinguen entre número racional y número natural. **Lo alumnos entienden que las fracciones se componen de dos números naturales**, los cuales surgen del recuento que efectúan tanto para distinguir las partes en la que se divide el "todo" como las partes que se toman. **No conciben la fracción como una nueva**

estructura numérica o ente numérico, de naturaleza distinta a la de los números naturales.

- Los alumnos entienden que **las relaciones y operaciones con las representaciones fraccionarias tienen el mismo significado que en los números naturales.** A la hora de establecer comparaciones entre dos fracciones, los alumnos se orientan por el valor y significado de los números naturales, he inventan reglas falsas justificadas en esa creencia. Extienden los significados y técnicas del número natural a la fracción, la cual, desde su concepción, no cambia de sentido.

4. Estudio exploratorio de la comprensión de la fracción en un grupo natural de 4º curso de Educación Primaria.

Para poner a prueba las limitaciones de la enseñanza de la fracción como la relación parte-todo y en consecuencia la metodología actual que impera en la enseñanza de la fracción en las aulas de primaria y en los libros de texto, hemos realizado una prueba de evaluación inicial en un aula de 4º curso de primaria, durante la realización de las prácticas escolares III, curso en el cual se introduce a los escolares por primera vez el concepto de la fracción.

Dicha prueba ha tenido lugar en el centro escolar de educación primaria del Colegio Agustinos Recoletos Romareda, en un aula compuesta por 25 alumnos. Debido a la temporalización del período de prácticas escolares III, accedimos al centro durante la finalización del segundo trimestre, y el inicio del tercero, período en el cual los escolares ya habían trabajado y finalizado la unidad correspondiente en su libro de texto al aprendizaje de la fracción.

Las **condiciones de partida** con las que nos encontramos para obtener información y realizar una intervención en el aula, que diese cuerpo al presente trabajo eran las siguientes:

- Los alumnos ya habían recibido enseñanza sobre la fracción bajo el significado de la parte todo.
- Según la evaluación de la respectiva unidad referida a las fracciones (mediante prueba escrita) realizada por la tutora, los resultados obtenidos por los escolares fueron bastante buenos obteniendo un porcentaje de aprobados superior al 76% de la clase.

- Cuando los alumnos realizaron la prueba para nuestro estudio exploratorio estaban recibiendo enseñanza del tema magnitudes y unidades de medida que está relacionado con los enunciados de los problemas que plantearíamos.

Los **objetivos de esta prueba inicial** se desprenden del *segundo objetivo general* del presente trabajo los cuales son:

- Detectar las dificultades de comprensión asociadas a la fracción.
- Observar las diferentes estrategias y dinámicas que ejecutan los alumnos para afrontar y resolver los problemas planteados.

Lo problemas propuestos, para poder analizar la comprensión de los escolares acerca de la fracción y las estrategias que llevaban a cabo así como su destreza en la resolución de los problemas, son:

<u>*Problema 1*</u>

"Tienes dos listones de madera. Uno mide 5/4 de metro y el otro mide 3/2 de metro"
¿Qué listón es más largo?

¿Cuánto es más largo uno que otro?

El planteamiento de este primer problema, el cual dista considerablemente de los modelos de problemas planteados en el libro de texto de los escolares, persigue los siguientes **objetivos**:

- Observar si los escolares conocen y comprenden las fracciones impropias (el numerador es mayor que el denominador)
- Observar si los escolares relacionan la magnitud de medida (la longitud) con él concepto de fracción.
- Observar si los escolares utilizan el concepto de equivalencia para ejecutar la comparación entre ambas fracciones.

Los **motivos** que nos llevan a considerar este enunciado como una buena propuesta para evaluar la comprensión del concepto de fracción que poseen los escolares son:

- **La utilización de fracciones impropias** para evaluar la interpretación y reacción de los alumnos acerca de ellas, teniendo en cuenta que desde la enseñanza de la fracción con la relación parte-todo es muy inusual y por tanto nos remitirá a la comprensión de los significados de numerador y denominador que tengan los alumnos.

- Debido al **poco uso o manejo de las fracciones impropias en el texto escolar**, para que los alumnos puedan resolver con éxito el problema planteado deben comprender los significados de numerador y denominador. Entendemos que el alumno ha de distinguir que el denominador indica el "todo" o la unidad, la cual ellos representan dibujando un rectángulo u otra figura geométrica regular divida en "*X*" cuadraditos o partes iguales y que el numerador indican las partes que se toman del "todo" o la unidad, el cual representan coloreando "*Y"* cuadraditos contenidos dentro de ese "todo" o unidad. Con esta concepción del numerador y del denominador derivada de la fracción como relación pare-todo nosotros nos preguntamos ¿sabrán razonar los alumnos que han de dibujar más de un "todo" o unidad para poder colorear un número "y" de cuadraditos que es mayor al número "X"? ¿Dibujaran una unidad o "todo" distinta a la indicada en la fracción del enunciado con la finalidad de poder colorear el número de cuadritos que se les indica? De ser así estaría representando otra fracción distinta lo que nos demostrará una débil comprensión del concepto de fracción.

- Las respuestas incorrectas no podrán ser achacables a la magnitud, ya que **la magnitud utilizada (la longitud) es conocida por los alumnos** a los que se realiza la prueba. Por este motivo no deberían encontrar problemas con la idea de comparar dos cantidades de magnitud. Si no responden correctamente entenderemos que la dificultad está ligada a la comprensión de la fracción.
- Para establecer la comparación entre los listones mencionados y así responder correctamente a la pregunta ¿Cuánto mide más uno que otro?, bien **necesitará utilizar el concepto de equivalencia** de fracciones o bien

tener una buena comprensión de la fracción como medida. Para que los alumnos puedan restar estas cantidades deberían expresarlas con respecto a la misma subunidad, por lo que en este caso, las dos cantidades tendrán que estar medidas con subunidades de longitud 1/4 de metro.

En resumen, podemos decir que con este primer ejercicio esperamos obtener una muestra de cómo se enfrentan los alumnos a un problema, totalmente lógico y común en la vida cotidiana, como es la comparación de cantidades de magnitud, que implican el uso del numero racional. Por otra parte en el libro de texto de los escolares solo hemos encontrado un ejercicio en el que aparezcan fracciones impropias y otros tres problemas relacionados con la comparación de fracciones (en uno de ellos aparece una fracción impropia), de los cuales dos de ellos emplean o remiten a magnitudes de medida, uno a superficie y otro a masa, dentro de la unidad dedicada a la enseñanza de las fracciones.

Desconocemos si esos ejercicios se realizaron y explicaron en el aula. Con los datos expuestos podemos esperar bastantes dificultades en su resolución por parte de los alumnos. Aunque por otro lado tras haber completado la unidad dedicada a este contenido y disponer de ejercicios muy similares aunque escasos se debería esperar de los alumnos que sean capaces de resolver dicho ejercicio con normalidad, ya que nuestro problema no recoge ningún contenido nuevo que no esté en el temario y que los alumnos no hayan visto con anterioridad. En caso de obtener unos resultados muy negativos deduciremos que se debe a una abundancia de puntos débiles en la metodología de enseñanza.

Problema 2

El depósito de gasolina de un coche está casi vació. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito si en el interior quedan en estos momentos 25L?

Este segundo ejercicio, se trata de una reformulación del problema M006[1] utilizado en la *Evaluación general de diagnóstico 2009* (MEC, 2010), cuyo problema original hemos

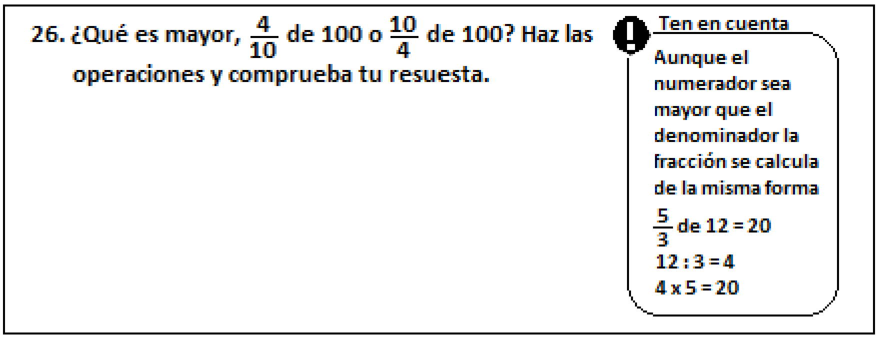
[1] (M006) El depósito de harina está casi vacío. Tan solo está ocupado un cuarto de su contenido. ¿Cuántos Kg de harina deben pedir a la fábrica para llenar totalmente el depósito si en el interior quedan en estos momentos 330Kg?

expuesto en la introducción del presente trabajo. Los datos obtenidos en la evaluación realizada por el ministerio a cerca de este problema reflejan un 20,7% de acierto en su resolución, dato que llamó nuestra atención de forma negativa. Nos parece adecuado plantearlo en esta prueba ya que se ajusta en gran medida a nuestros objetivos y que utiliza la expresión de una medida en forma de fracción. Además atendiendo a los puntos de partida de la realización de esta prueba, los alumnos ya habían trabajado la unidad dedicada a la medida de magnitudes en el momento de enfrentarse al problema.

Este segundo problema es más similar al tipo de enunciados con los que los alumnos están familiarizados en su libro de texto y en su cuaderno de ejercicios (cuaderno elaborado por el centro escolar). Con su propuesta perseguimos los siguientes **objetivos**:

- Comparar los datos expuestos en la Evaluación 2009 con los que obtendremos en este pequeño grupo de escolares.
- Observar como los alumnos interpretan la cantidad de magnitud de 1/4 del depósito de gasolina.

Por último tras exponer nuestra propuesta de prueba inicial, sus objetivos y los motivos, queremos destacar que en el aula los alumnos han resuelto ejercicios en los que tienen que calcular la fracción de un número, como en el siguiente:



26. ¿Qué es mayor, $\frac{4}{10}$ de 100 o $\frac{10}{4}$ de 100? Haz las operaciones y comprueba tu resuesta.

Ten en cuenta

Aunque el numerador sea mayor que el denominador la fracción se calcula de la misma forma

$\frac{5}{3}$ de 12 = 20

12 : 3 = 4

4 x 5 = 20

Como podemos apreciar en el dibujo, al igual que nuestro problema 1, aquí los alumnos tienen que comparar el tamaño de dos fracciones, salvo que en este ejercicio los datos que se ofrecen están descontextualizados (por lo que hablamos de ejercicio y no de problema), los alumnos no tienen que interpretar cantidades expresadas en forma de fracción. Sin embago en este ejercico los alumnos han ejercitado la técnica para calcular la fracción de un número, que pueden aplicar para resolver los problemas de nuestra prueba inicial. Este ejercicio se propone en el libro tras haber explicado dicha técnica, explicación que se recuerda a los alumnos al lado del enunciado, en el cuadro llamado “ten en cuenta”. El texto opta por enseñar técnicas operatorias en detrimento de conocimiento conceptual por que para comparar dos fracciones (4/10 y 10/4 en el caso que señala en el recuadro) no es necesario calcular la fracción de un número (100 en este caso) para comparar finalmente números naturales dado que el propio signifiado de la fracción permite justificar directamente que la fracción 10/4 es mayor que 4/10 sin necesidad de recurrir a técnicas operatorias.

Resultados de la prueba inicial

La realización de la prueba, transcurrió sin incidencia y según lo planificado, se les planteo a los alumnos que debían realizar los dos ejercicios en la ficha y que se ayudaran de la utilización de dibujos para representar el problema y resolverlo con mayor facilidad. No les pusimos límite de tiempo, no obstante emplearon para la prueba un tiempo aproximado de entre 15 y 30 minutos. Además les separamos las mesas a modo de examen para que lo resolvieran de forma individual, sin que sus respuestas pudieran estar condicionadas o influidas por la de otros compañeros.

RESULTADOS GLOBALES DELA PRUEBA INICAIL			
Problema 1 (Listones de madera)		Problema 2 (Depósito de gasolina)	
resueltos con éxito	mal resueltos	resueltos con éxito	mal resueltos
2/24 9%	22/24 91%	13/24 54%	11/24 46%

Como se puede apreciar en la tabla, los resultados del primer problema frente al segundo son muy diferentes. Sin profundizar ahora mismo en lo ocurrido en las resoluciones del primer y el segundo problema y si contrastamos el número de alumnos que han resultado exitosos, en ambos problemas, podemos afirmar que la comprensión del concepto de fracción de estos alumnos es muy débil. Podemos justificar que el primer problema, como hemos explicado en los motivos de su planteamiento, pone en juego los puntos débiles de la fracción con significado de relación parte-todo.

Si únicamente nos fijamos en el segundo problema, los resultados obtenidos no son tan bajos como en él primero. Refiriéndonos a los objetivos que nos planteábamos con este segundo problema, al comparar los resultados obtenidos aquí con los resultados del problema M006[2] apreciamos un 54% de acierto frente a un 20,7%. Claro está, esta comparación no es del todo fiable, ya que desconocemos la muestra de estudio, a la que se realizó el problema M006.

A continuación para exponer y analizar los resultados obtenidos, y así poder elaborar nuestras conclusiones e imágenes acerca de la comprensión de la fracción que tienen los escolares sugerimos observar las tablas que a continuación citamos y que se corresponden con los **anexos 1 y 2:**

Tabla de resultados de la prueba (Anexo I). En ella exponemos mediante un "B" y una "M" el éxito o fracaso en la resolución del problema de cada alumno, acompañado de unas observaciones sobre la resolución y las estrategias utilizadas.

Tablas comparativas de las distintas estrategias y aspectos relevantes, en la resolución de los alumnos en los problemas 1 y 2 (Anexo II). Para la elaboración de estas tablas hemos extraído de la corrección de las pruebas, aquellas estrategias utilizadas por todos los alumnos, y diferentes aspectos, como la ejecución de dicha estrategia, la referencia a la unidad de medida en el razonamiento o en las respuestas, sí razonan o no la respuesta o planteamiento, si han cometido errores de cálculo en las operaciones realizadas, y finalmente los resultados individuales de cada problema.

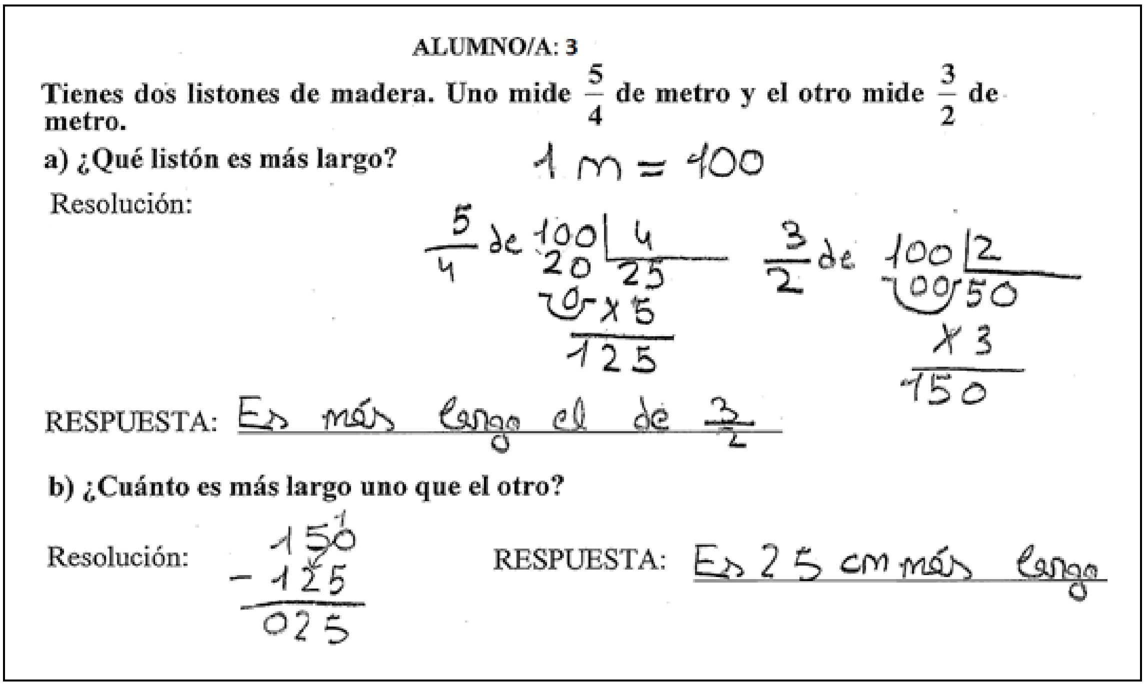
ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS AL RESOLVER EL PROBLEMA 1

Tras la exposición de las tablas con los resultados de los alumnos y las observaciones y recopilación de las estrategias utilizadas para afrontar los problemas, vemos conveniente mostrar aquellos ejercicios, que nos han parecido más destacados o representativos de los datos expuestos anteriormente en las tablas. Queremos mostrar a continuación lo que han

[2] Problema M006 en utilizado en la *Evaluación general de diagnóstico 2009* (MEC, 2010): El depósito de harina está casi vacío. Tan solo está ocupado un cuarto de su contenido. ¿Cuántos Kg de harina deben pedir a la fábrica para llenar totalmente el depósito si en el interior quedan en estos momentos 330Kg?

hecho los alumnos, sus razonamientos y la comprensión que demuestran respecto a las fracciones. Para ello exponemos en primer lugar las resoluciones más destacadas del problema 1 y después las del problema 2.

Casos más destacados del problema 1



ALUMNO/A: 3

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo? 1 m = 100

Resolución:

$\frac{5}{4}$ de 100 | 4 → 20, 25, 0; 25 × 5 = 125

$\frac{3}{2}$ de 100 | 2 → 00, 50; 50 × 3 = 150

RESPUESTA: Es más largo el de $\frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

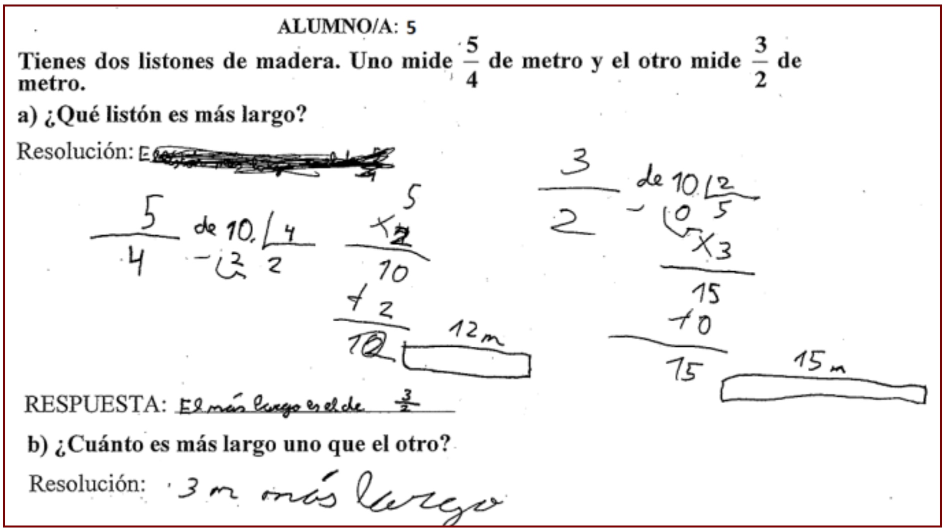
Resolución: 150 − 125 = 025

RESPUESTA: Es 25 cm más largo

El **alumno 3** resuelve el problema aplicando la técnica de la fracción de un número, aplicando la fracción a 100 cm., tras exponer la igualdad de un metro a cien centímetros (1m.=100Cm.). Esta ejecución del ejercicio también la ha hecho de la misma manera, el **alumno 1**. Ambos alumnos han resultado ser los únicos en resolver exitosamente este problema

Tras este primer comentario, y atendiendo a que estos dos alumnos son los dos únicos que han resuelto satisfactoriamente el problema, podemos percibir que el conocimiento conceptual que poseen los alumnos sobre la fracción es muy débil. Esta afirmación se apoya en el hecho de que los únicos alumnos que tienen éxito en su resolución, recurren a una técnica logarítmica (operatoria) basa en la regla de la fracción de una cantidad, en lugar de realizar una descomposición de las fracciones en impropias como cantidades de longitud que es un conocimiento conceptual más cercano a la idea de fracción y del cual los alumnos dan muestra de una escasa comprensión.

A continuación hemos decidido presentar las respuestas de los alumnos 4 y 5, seguidamente, ya que ambos realizan el mismo planteamiento para resolver el ejercicio, pero tienen errores distintos en la ejecución. Ambos alumnos responden correctamente a la Pregunta, ¿qué listón es más largo?, y sus estrategias no están mal encaminadas. Intentan demostrar su respuestas ejecutando la fracción de un número, en sus caso seleccionan el 10 a diferencia de los alumnos anteriores. Ninguno de los alumnos deja clara la elección del número, razonando como sería de esperar, en base a su elección, que un metro es igual a diez decímetros (1 m.=10 dm.), como hicieron los compañeros anteriores al establecer la equivalencia de 1 m.= 100 Cm. Sin embargo a los resultados de las fracciones de 10 que ambos obtienen le añaden la "m", para referirse a la magnitud de medida.



ALUMNO/A: 5

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:

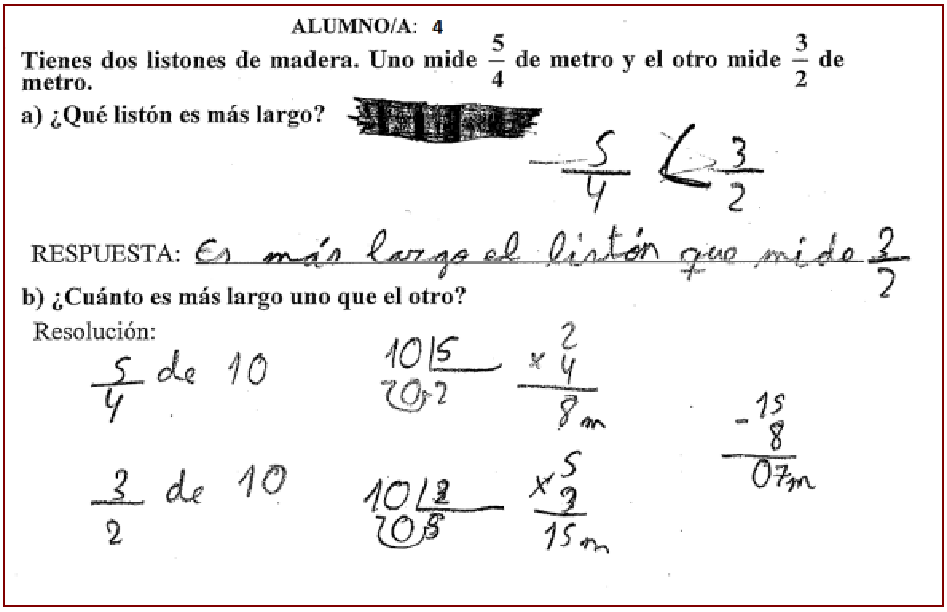
$\frac{5}{4}$ de 10 $\quad 10 \div 4 = 2 \quad 5 \times 2 = 10 \quad 10 + 2 = 12$ 12m

$\frac{3}{2}$ de 10 $\quad 10 \div 2 = 5 \quad 5 \times 3 = 15 \quad 15 + 10 = 15$ 15m

RESPUESTA: El más largo es el de $\frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: 3 m más largo



ALUMNO/A: 4

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo? [redacted]

$\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$

RESPUESTA: Es más largo el listón que mide $\frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

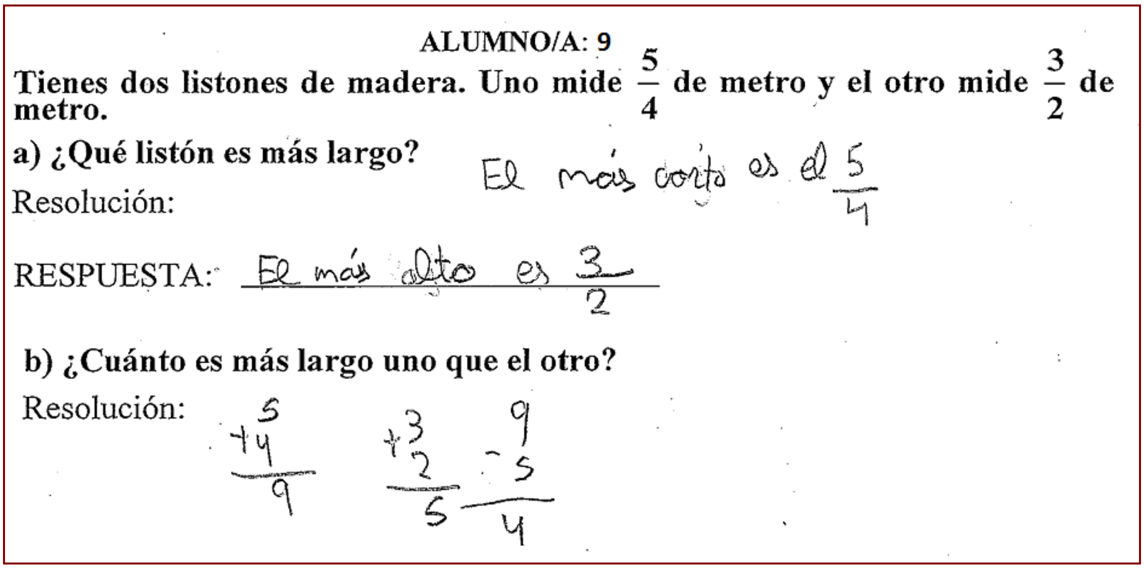
Resolución:

$\frac{5}{4}$ de 10 $\quad 10 \div 5 = 2 \quad 2 \times 4 = 8$m

$\frac{3}{2}$ de 10 $\quad 10 \div 2 = 5 \quad 5 \times 3 = 15$m

$15 - 8 = 07$m

Los dos alumnos cometen distintos errores en la aplicación de las operaciones. En el caso del ***alumno 4,*** su error reside en la aplicación de la fórmula de la fracción de un número aplicada en la primera fracción, ya que en lugar de dividir 10 ÷ 4 (el denominador), lo hace entre 5 (el numerador) y posteriormente multiplica el cociente por él denominador. Ese error podría significar que no tiene interiorizada la formula correctamente, pero esa hipótesis queda en duda cuando observamos que aplica, ahora sí, correctamente esa fórmula a la segunda fracción. En cualquier caso los alumnos 4 y 5 no comprenden que al aplicar las fracciones al número 10 están operando con decímetros en lugar de metros como erróneamente escriben.



ALUMNO/A: 9

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución: El más corto es el $\frac{5}{4}$

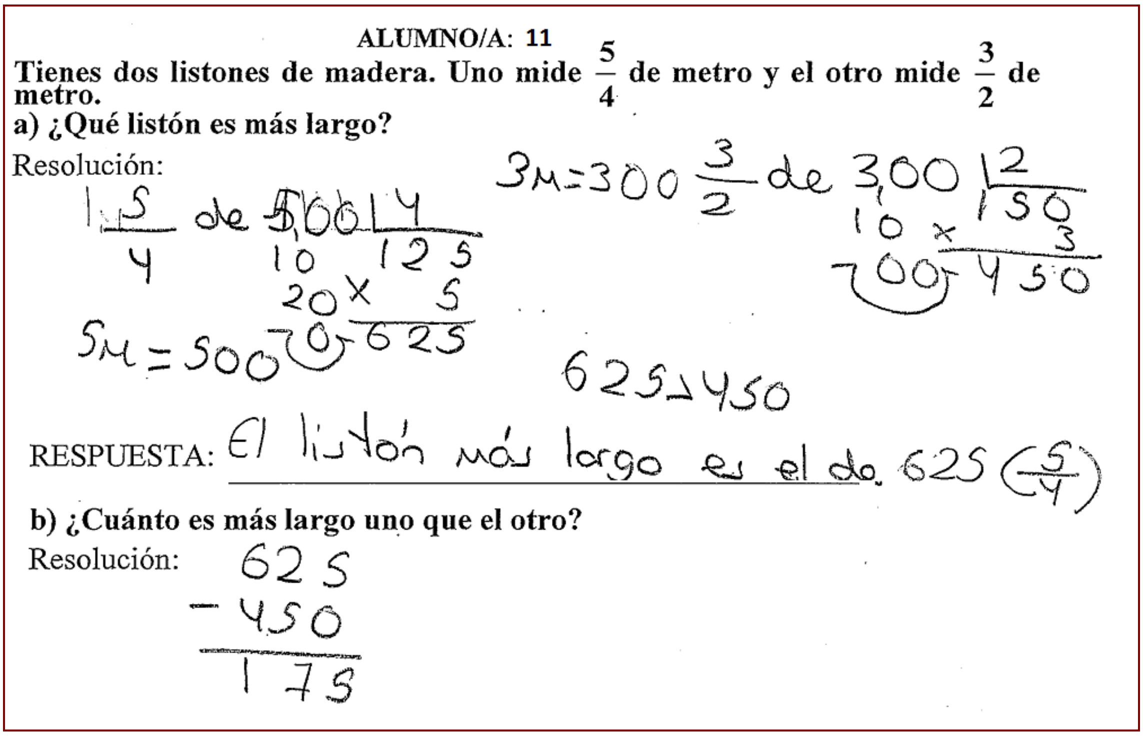
RESPUESTA: El más alto es $\frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: $\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ +2 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ -5 \\ \hline 4 \end{array}$

El **alumno 9** aplica una regla falsa, para justificar cuanto más largo es un listón que otro. La regla consiste en sumar los números que componen cada fracción y luego haya la diferencia entre ambas cantidades. Esta falsa regla que utiliza ha sido usada además por otro alumno, como podemos ver en la tabla de estrategias de resolución y aspectos relevantes del problema 1, expuesta en el anexo II.

Es curioso también en el ejercicio de este alumno, que nos responde correctamente qué listón es más corto y cual más largo a pesar de carecer de justificación o representación gráfica que avale su respuesta. Sin embargo al fijarnos en como justifica (con la falsa regla) la obtención de la diferencia de cantidad entre ambos listones, el alumno debería razonar según sus resultados en esta justificación que el primer listón es más largo. Esto nos lleva a deducir que la respuesta que anteriormente nos ha dado y que resulta ser la correcta, no es suya o no sabe justificarla.


ALUMNO/A: 11

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:

$\frac{5}{4}$ de 500 | 4 → 125; 125 × 5 = 625; 5M = 500

3M = 300; $\frac{3}{2}$ de 300 | 2 → 150; 150 × 3 = 450

625 > 450

RESPUESTA: El listón más largo es el de 625 ($\frac{5}{4}$)

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

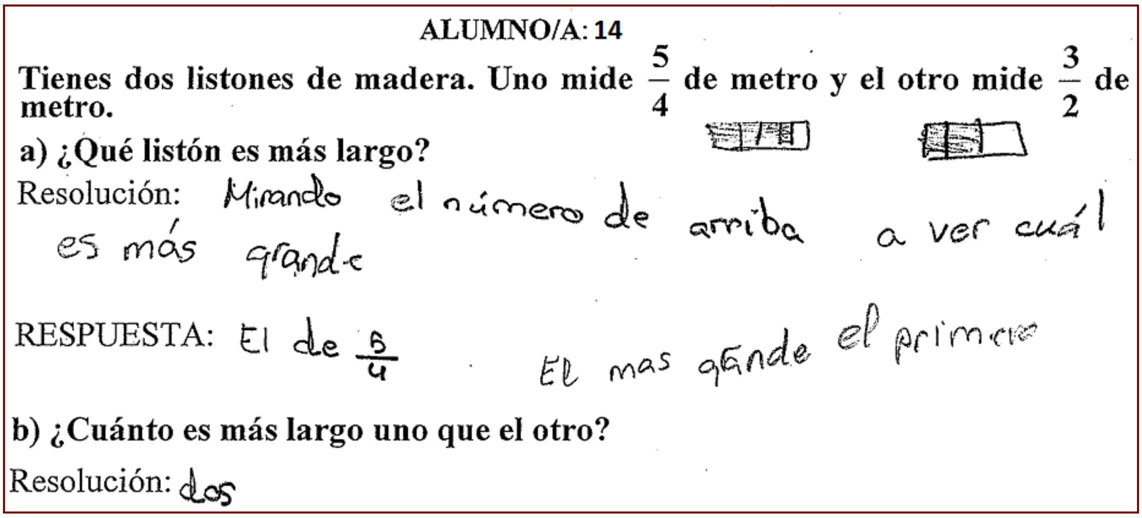
Resolución:

625 − 450 = 175

En esta ocasión, como en los tres primeros ejercicios expuestos, nos encontramos con otro alumno que ha intentado resolver el problema mediante la fracción de un número, pero en esta ocasión, no aplica la fracción de 10 o de 100, y lo que más nos sorprende es que utiliza dos números distintos para cada fracción. Esos dos números son el 500 para la primera fracción y 300 para la segunda. Este último hecho es el que puede resultar más extraño. Tras observar con atención la resolución del alumno extraemos la siguiente hipótesis:

- Al leer el enunciado el alumno ha interpretado que el numerador de cada fracción se relaciona con la unidad de medida indicada, el metro, interpretando 5 m. y 3 m. los cuales convierte en 500cm. y 300cm. Respectivamente. De hecho en la resolución justifica esa transformación escribiendo 5 m = 500 y 3 m = 300.

En resumen, el alumno no está considerando la misma unidad de medida para las dos cantidades. Además de confundirse con la unidad de medida señalada, hemos de añadir que el alumno no especifica las unidades de medida de las cantidades 500 y 300. Si lo comparamos con el **alumno 5 ó 4** cada uno de ellos a pesar de multiplicar por 10 o transformar en 10 el metro, siguen especificando posteriormente que trabajan con metros. Estos errores se deben a que la enseñanza de la fracción en el aula se realiza a espaldas de la medida de magnitudes.


ALUMNO/A: 14

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

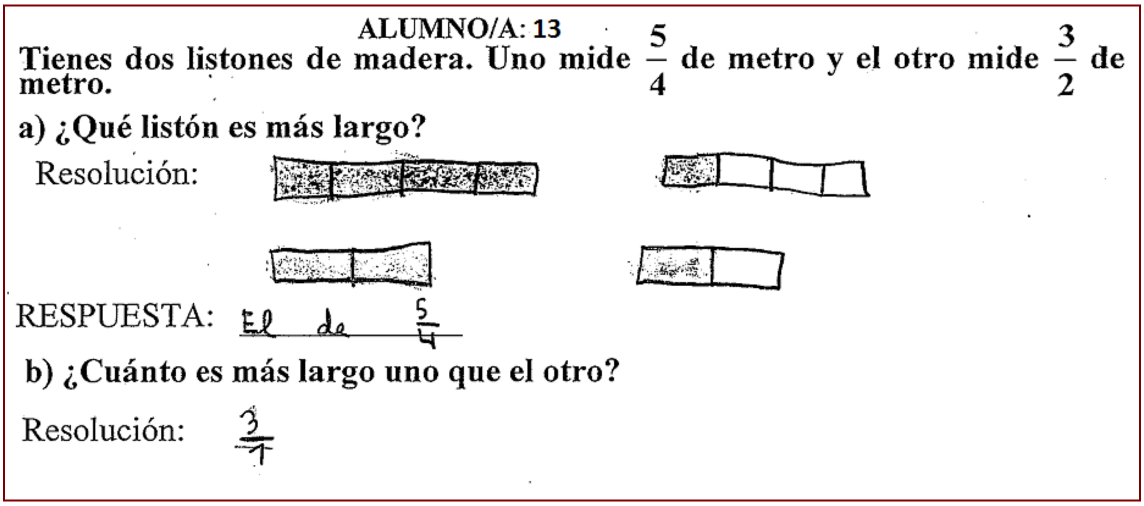
Resolución: Mirando el número de arriba a ver cuál es más grande

RESPUESTA: El de $\frac{5}{4}$ El mas gande el primero

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: dos

La resolución del **alumno 14** la destacamos especialmente por la invención y aplicación de una regla falsa que solo hemos observado en su ejercicio. Reescribiendo lo escrito por este alumno, "mirando el número de arriba a ver cuál es más grande", regla que traducimos como comparar los numeradores de ambas fracciones como si de números naturales se tratase. Además ha representado gráficamente las fracciones recíprocas.


ALUMNO/A: 13

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

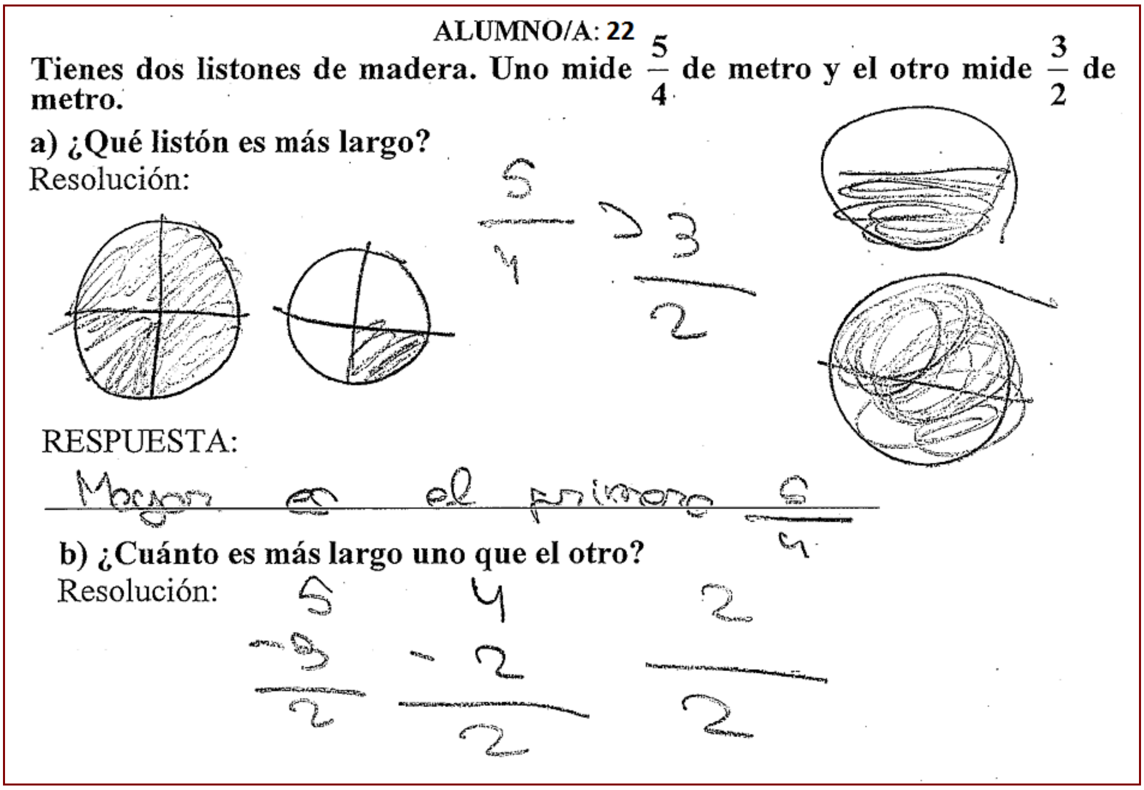
Resolución:

RESPUESTA: El de $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: $\frac{3}{1}$

Esta foto de la respuesta que nos da el **alumno 13** la exponemos para mostrar a uno de los cuatro alumnos, entre los quince que han optado por la estrategia de resolver o apoyarse gráficamente, que han representado correctamente las fracciones impropias. Ahora bien, el hecho de saber representar las fracciones por separado no le sirve para resolver con éxito el problema porque, como todos sus compañeros que han optado por esta estrategia y como apreciamos en la imagen, no utiliza el metro como unidad común de medida. Los otros once alumnos que han optado por esta estrategia han representado erróneamente las fracciones, dibujando fracciones reciprocas.


ALUMNO/A: 22

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:

$\frac{5}{4} > \frac{3}{2}$

RESPUESTA: Mayor es el primero $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución:

Queremos destacar con esta imagen como el **alumno 22** resuelve con gráficos, realizando una representación correcta de la fracción impropia, pero que no le sirve, al igual que anteriormente la **alumno 13**, para acertar en la comparación de fracciones porque no comprende el significado de la fracción como medida de cantidades de magnitud. Sin embargo destacamos su ejercicio al igual que del ***alumno 16***, porque son los únicos alumnos que han recurrido a la circunferencia como figura geométrica para dibujar las fracciones. Por un lado nos choca esta reacción ya que en el enunciado nos referimos a comparar longitudes, por lo que sería lógico que estos dos alumnos hubieran dibujado barras rectangulares como han hecho el resto de alumnos que han resuelto mediante gráficos o se han apoyado en ellos. Por otro lado atendiendo a la enseñanza de la fracción desde la relación parte-todo, se abusa mucho en los textos escolares y en las explicaciones de los docentes de los ejemplos de la fracción mediante el reparto de porciones de tarta o pizza, obviamente dibujadas mediante figuras geométricas circulares. Pensamos que ese abuso hace que los escolares piensen a la hora de representar fracciones en círculos divididos en porciones y la resolución de estos alumnos es un ejemplo de ello.

En este caso del ***alumno 22*** y en el del ***alumno 16*** aunque no está claro sí conservan o no la misma unidad en la representación de una fracción y otra, debido a la diferencia de tamaños entre los círculos y la respuesta errónea de la solución, sospechamos que no tienen en cuenta la conservación de la misma unidad y es por ello que no se percatan de la clara diferencia de cantidad apreciable en los dibujos.

Además los dos alumnos aplican una regla falsa para hallar la diferencia de medida. Esa regla falsa consiste, como podemos apreciar en el dibujo, en restar ambos numeradores y denominadores entre sí y con el resultado formar una nueva fracción que les indica la diferencia entre ambas. Esta falsa regla ha sido utilizada por siete alumnos. Tras este razonamiento sospechamos que se esconde la percepción y comprensión de los números naturales y la ignorancia de la fracción como medida de una cantidad de magnitud.

CONCLUSIONES TRAS EL ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA 1

Después de analizar los resultados obtenidos por los alumnos al resolver el problema 1 constatamos que:

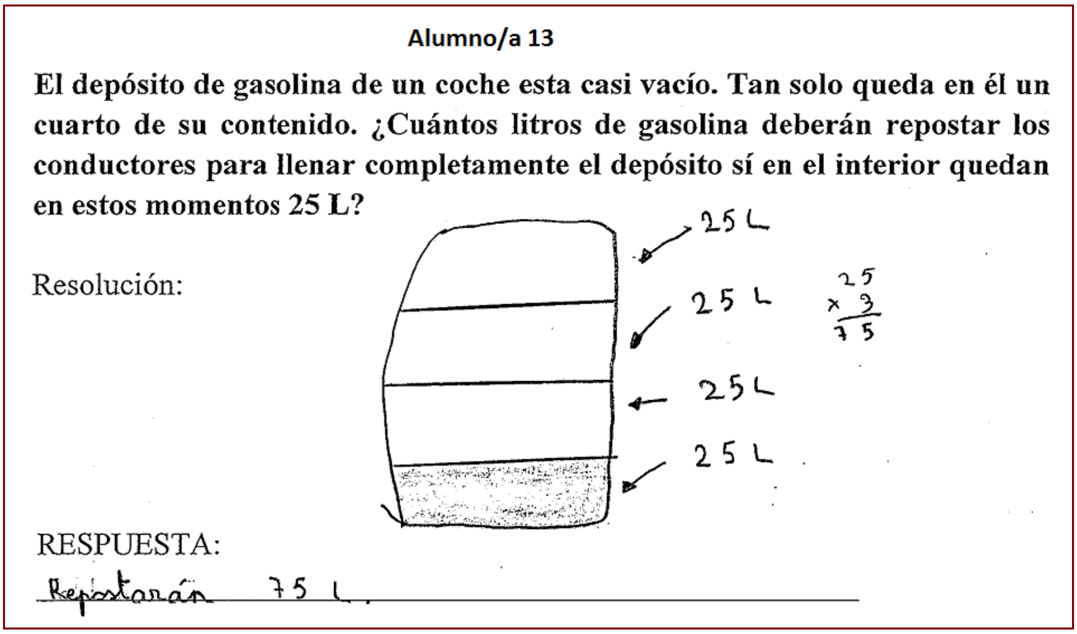
- Los dos únicos alumnos que han resuelto correctamente el problema han eludido el concepto de fracción. Se han tenido que servir de las conversiones del metro en 100 centímetros y después aplicar la técnica de la fracción de un número sobre la cantidad de longitud 100 centímetros. Ni siquiera estos dos alumnos han sido capaces de utilizar la representación fraccionaria para comparar dos cantidades muy elementales. En conclusión, el conocimiento conceptual de la fracción que poseen los escolares es muy bajo.

- Los alumnos no conectan la fracción con la medida de magnitudes. Esto se observa en las respuestas erróneas de los alumnos que utilizan la técnica de la fracción de un número cuando aplican esta regla sobre números distintos y en las interpretaciones erróneas de los números que surgen al aplicar la técnica de la fracción de un número. Tampoco conectan la fracción con la medida de magnitudes los alumnos que representan gráficamente las fracciones impropias. Los pocos alumnos que son capaces de representarlas correctamente no consiguen resolver el problema porque consideran como unidad (el metro) cantidades que poseen longitudes distintas.

- En ausencia de una comprensión funcional de la fracción los alumnos optan por aplicar reglas. En el mejor de los casos utilizan la fracción de un número con escaso éxito y, en otros muchos casos, reglas falsas que provienen de sus concepciones sobre los números naturales como, por ejemplo, que la fracción que tiene el numerador y el denominador más alto que otra es siempre mayor que ésta última.

- Los resultados obtenidos en la segunda parte del problema que indaga sobre la diferencia de cantidad de longitud de los dos listones son todavía peores que los obtenidos en la primera parte de problema. Ningún alumno utiliza la resta de fracciones y los únicos alumnos que responden correctamente a la pregunta se sirven de los números naturales para expresar la diferencia como 25 centímetros en lugar de 1/4 de metro. De nuevo se pone de manifiesto desconexión de la fracción con la medida de cantidades de magnitud.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS AL RESOLVER EL PROBLEMA 2



Alumno/a 13

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

25 L

25 L

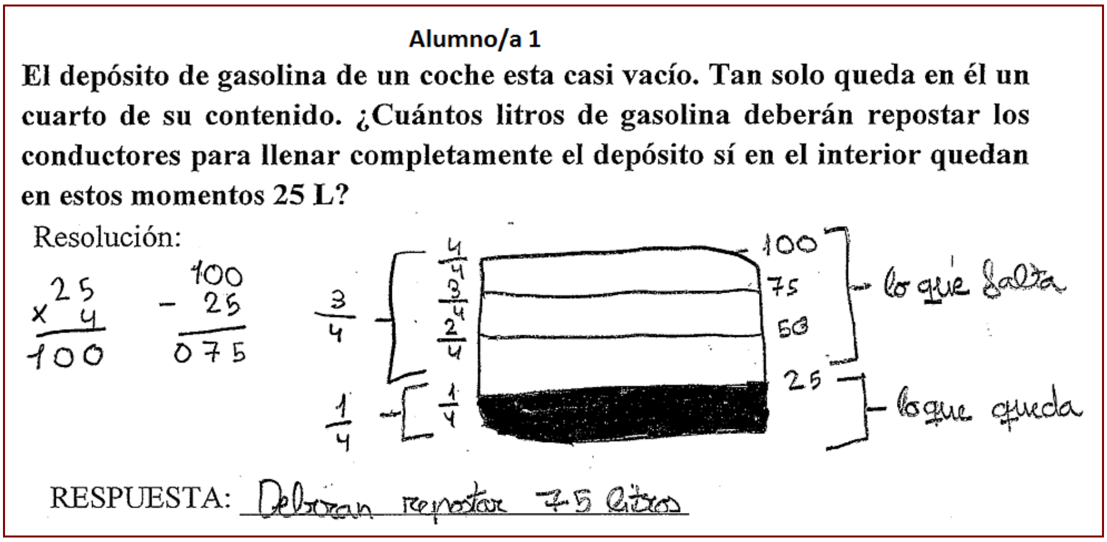
25 L

25 L

$25 \times 3 = 75$

RESPUESTA: Repostarán 75 L.

En este ejemplo de la mano del **alumno 13** observamos una buena comprensión de la fracción, resolviendo el problema mediante la representación de la fracción en forma de depósito. El alumno reconoce perfectamente el valor de 1/4 que se facilita en el enunciado, que son 25 litros y asume que cada parte en la que dividimos el depósito tienen el mismo valor (división en partes iguales de un todo) y que para obtener la cantidad que falta solo tendrá que sumar el valor de las tres partes vacías. Destacamos fundamentalmente este ejercicio, por la sencillez de la respuesta y la clara comprensión de la fracción que demuestra el alumno.



Alumno/a 1

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

$25 \times 4 = 100$

$100 - 25 = 075$

$\frac{3}{4}$ – $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$

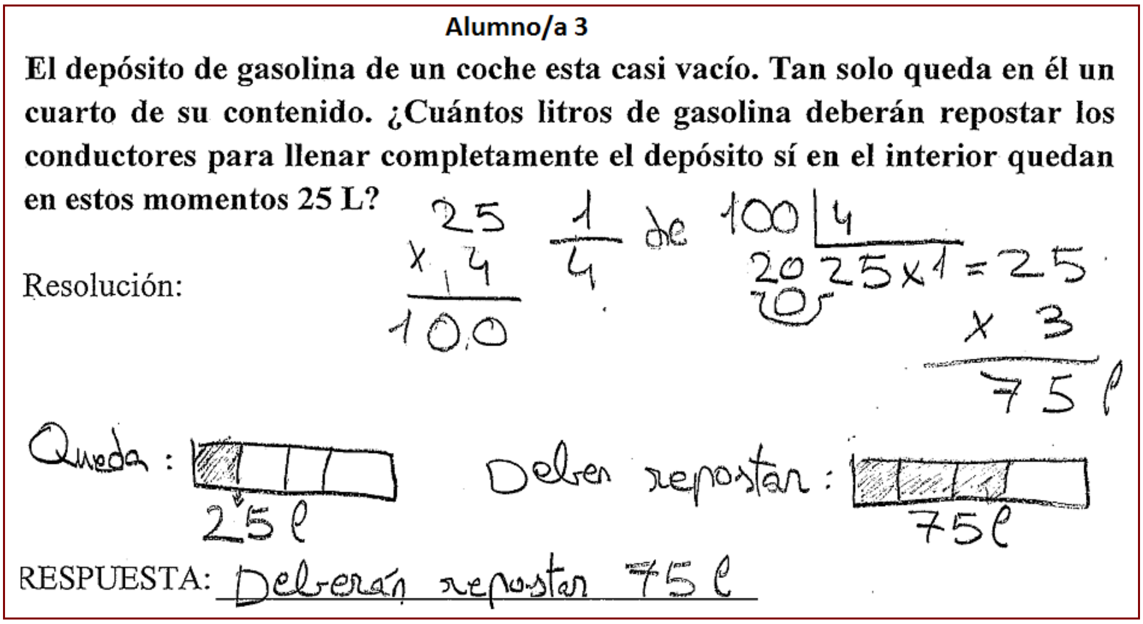
$\frac{1}{4}$ – $\frac{1}{4}$

100, 75, 50 – lo que falta

25 – lo que queda

RESPUESTA: Deberan repostar 75 litros

El **alumno 1** sin duda, como podemos contemplar en su resolución, muestra una perfecta comprensión de la fracción y de sus partes (numerador y denominador). Con una muy buena representación gráfica el alumno nos expone su correcta interpretación de los valores de 1/4 de litro, y además nos indica en el dibujo los valores de 2/4, 3/4 y 4/4 (la unidad, indicando el alumno la capacidad máxima del depósito).



Alumno/a 3

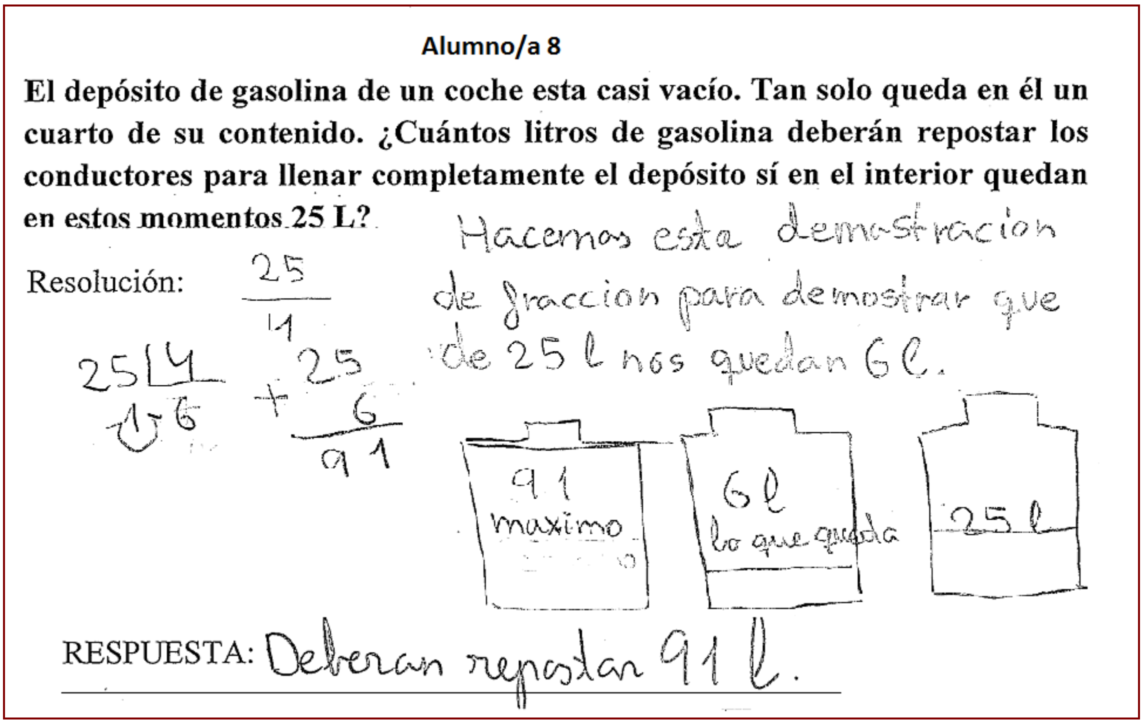
El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución: 25 × 4 = 100 $\frac{1}{4}$ de 100 | 4 20 0 25 × 1 = 25 × 3 = 75 l

Queda: 25 l Deben repostar: 75 l

RESPUESTA: Deberán repostar 75 l

Por su parte el **alumno 3** nos brinda con otra brillante resolución, pero a diferencia del **alumno 13**, recurre a la fracción de un número para resolver el ejercicio. Estrategia a la que han recurrido dieciocho alumnos, de los cuales catorce han aplicado la fracción de 100 y cuatro la fracción de 25. El enunciado del problema, ya nos da el valor de la fracción, por lo que el alumno procede a multiplicarlo por 4 (el denominador de la fracción). Este razonamiento nos indica que el alumno comprende que el denominador nos indica las partes iguales en las que está dividido el depósito, por lo que deduce que si 1/4 “de u” son 25L, la unidad entera serán 100L. Sin embargo nos llama la atención, que tras obtener el valor total de la unidad, el alumno resuelve la fracción de 1/4 de 100, siendo que ese valor ya se le daba en el enunciado y es el que él mismo ha usado para obtener el valor de la unidad. Tras obtener nuevamente el valor de 1/4 “de u” =25, lo multiplica por tres, que son las partes que quedan vacías en el depósito. Deducimos que extrae la idea de multiplicar 25 por 3 tras apoyarse en el claro grafico que ha dibujado. Destacamos también su dibujo por el hecho de representar gráficamente dos fracciones distintas, por un lado 1/4 (lo que le queda) y por otro 3/4 (lo que le falta para llenar el depósito).


Alumno/a 8

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución: $\frac{25}{4}$

Hacemos esta demostración de fraccion para demostrar que de 25 l nos quedan 6 l.

25 | 4
1 6

$$\begin{array}{r} 25 \\ + \; 6 \\ \hline 91 \end{array}$$

RESPUESTA: Deberan repostar 91 l.

El **alumno 8** como podemos contemplar no hace un buen razonamiento y acumula numerosos errores. En primer lugar apreciamos que el alumno no reconoce el valor de la fracción 1/4, que se le proporciona en el propio enunciado del problema y que se inventa la fracción 25/4. Seguidamente parece que intenta resolver el problema aplicando la fracción de una cantidad, pero ejecuta mal la formula, ya que se limita a dividir el numerador entre el denominador y posteriormente sumar 25 con el cociente de dicha división. Observando esta resolución también podemos pensar que ha intentado resolver el problema aplicando la fracción de 25.

Lo más destacable de la resolución de este alumno es la respuesta y la justificación que expresa por escrito y apoyándose en dibujos, que nos demuestran una enorme confusión. En sus dibujos en ningún momento representa un depósito dividido en cuatro partes iguales, sino que dibuja tres veces el mismo depósito representado en el interior de cada uno distintas cantidades. A las preguntas del problema responde 91L el resultado obtenido en la última operación, pero que a la vez él interpreta en el dibujo como la capacidad máxima del depósito y en una primera respuesta que da antes de exponer el dibujo afirma que de 25L nos quedan 6L.

Alumno/a: 11

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

$\frac{25}{4}$ de 100 | 4

20 25

0 × 25

125

+ 50

625

RESPUESTA: Deberan poner 625 litros

En la respuesta del **alumno 11**, encontramos, un mal planteamiento del problema, ya que busca obtener el valor de la fracción de 100, sin darse cuenta de que ese valor ya se lo han facilitado en el enunciado. Además como había hecho el **alumno 8**, este alumno también se inventa la fracción 25/4, por lo que a partir de ese error es muy difícil que el alumno pudiera autocorregir su planteamiento como hizo el **alumno 3.**

Alumno/a 25

El depósito de gasolina de un coche está casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

$\frac{1}{4}$ de 25 | 4

5 5

× 1

5

RESPUESTA: La respuesta es 5

La respuesta del **alumno 25** la destacamos para exponer visualmente uno de los cuatro casos que han aplicado la fracción de 25 y que por tanto demuestran un error de comprensión al no razonar que los 25L del enunciado representan el valor de la fracción 1/4. Además si profundizamos en su respuesta observamos otros errores, como un resto erróneo en la división realizada y el no razonamiento de tener que calcular 3/4 del depósito, ya que simplemente calcula la fracción de 1/4 de 25 y nos da ese resultado como respuesta.

CONCLUSIONES TRAS EL ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA 2

Después de analizar los resultados obtenidos por los alumnos al resolver el problema 2 y mostrar algunas de las respuestas más destacadas, constatamos que:

- Aproximadamente la mitad de los alumnos saben resolver el problema.
- Los alumnos que se apoyan en gráficos reconstruyen el "todo" o capacidad del depósito de gasolina a partir del conocimiento de que en la cuarta parte de la capacidad del depósito hay 25 litros de gasolina.
- Los alumnos que se apoyan en gráficos obtienen mejores resultados que los que utilizan únicamente la técnica de la fracción de una cantidad. Además, la mayoría de los alumnos que utilizan la técnica de la fracción de un número yerran.

<u>Conclusiones de la prueba inicial.</u>

Los datos obtenidos en esta prueba inicial, como hemos visto en las tablas, nos muestran una enorme diferencia entre los resultados de ambos problemas. La diferencia de dificultad entre un problema y otro reside en la débil comprensión de los alumnos acerca de la fracción, ya que el problema 1 pone en juego más puntos débiles de la metodología de enseñanza de la fracción desde la relación parte-todo, que el problema 2. Es por este motivo que obtenemos un 91% de fracaso en el primer problema, frente a un 46% del segundo. Pero si pensamos en un 46% de fracaso como un pequeño triunfo, ya que implica que más de la mitad de los alumnos lo resolvieron exitosamente, no hemos de descuidar que sigue siendo una cifra muy elevada, que podríamos considerar prácticamente que representa a la mitad de alumnos de un grupo de primaria. No obstante recordemos, que antes de la realización de la prueba ya habían trabajado los contenidos expuestos en ella con la tutora y hacía poco tiempo que habían sido evaluados de dicha unidad, por lo que un 46% de fracaso en el segundo problema sigue siendo un resultado deficiente.

Observamos que los alumnos perciben la fracción desconectada de la medida de cantidades de magnitud y que en ausencia de una comprensión funcional de la fracción los alumnos optan por aplicar reglas operatorias con escaso éxito.

5. Diseño y desarrollo de una propuesta alternativa de enseñanza de la fracción en un grupo natural de 4º curso de Educación Primaria.

Tras el análisis de la enseñanza actual de la fracción, a través de la propuesta didáctica de un libro de texto y de la prueba inicial realizada en el grupo natural de 4º curso de primaria, describimos en este capítulo una propuesta parcial para la enseñanza de la fracción, con una metodología y forma de ejecución muy distinta a la expuesta en líneas anteriores. Dicha propuesta va a ser desarrollada y evaluada en el mismo grupo natural de 4º curso de primaria del Colegio Romareda, en el que hemos realizado dicho análisis.

El hecho de que los alumnos ya hubieran trabajado la fracción con la tutora siguiendo el libro de texto y basando la enseñanza de la fracción desde la relación parte-todo, fundamentalmente con la realización de ejercicios de representación de fracciones, nos facilitaba tras la previa planificación de la prueba inicial, confirmar y extraer los puntos débiles de dicha metodología. Pero nuestro objetivo no es realizar una crítica destructiva de la forma de enseñanza de la fracción en dicha escuela, por el contrario pretendemos realizar una crítica constructiva, proponiendo una propuesta innovadora que contenga más puntos fuertes que débiles y que por tanto aumente la comprensión de la representación fraccionaria. Con esa premisa y bajo la influencia de los métodos de enseñanza en aritmética trabajados y aprendidos durante la formación para maestro de primaria, pretendemos ofrecer una reflexión acerca de la importancia y el beneficio de introducir nuevas metodologías y recursos en la enseñanza aritmética en las aulas de primaria.

En esta propuesta de enseñanza partimos de la fracción como el resultado de medida de cantidades de magnitud continuas. Pretendemos que los alumnos aprendan la fracción a través de la resolución de problemas prácticos y manipulativos contextualizados en situaciones reales y lo más cercanas posibles a la realidad.

Las matemáticas no han de ser enseñadas en la escuela como algo abstracto, ya que en nuestra vida cotidiana nos rodeamos y beneficiamos de ellas. La enseñanza de las matemáticas ha de adoptar un enfoque manipulativo y lúdico que procure una interacción lúdica entre contenido teórico y alumno. Esto los conseguimos mediante la enseñanza de la fracción como significado de medida, la cual surge de las necesidades humanas para medir magnitudes continúas.

OBJETIVOS Y CONCRECCIÓN DEL MODELO DE APRENDIZAJE

Nuestra propuesta para la introducción de la fracción a escolares de Educación Primaria se fundamenta en los siguientes objetivos:

- **Eludir las deficiencias de comprensión que genera la enseñanza de la fracción desde la relación parte-todo**, que hemos expuesto en los apartados anteriores.

- **Favorecer la construcción de concepciones adecuadas de la fracción.** Los escolares se enfrentan bajo esta propuesta a un proceso instructivo que se fundamenta en la medida de cantidades de magnitud. De esta forma dispondrán de un mundo de objetos físicos y reales en los que justificar los resultados matemáticos obtenidos.

- **Establecer una separación conceptual entre los números naturales y racionales.** Como expusimos en las deficiencias del modelo de la fracción como relación parte-todo, al recurrir al recuento numérico como estrategia de representación de la fracción, los escolares están muy inmersos en la idea del número natural. Con esta propuesta se favorece una ruptura entre la idea de número natural y de número racional a partir de sus diferentes usos: contar y medir son actividades diferentes, que exigen técnicas y estrategias distintas. En consecuencia la representación de los números naturales y los números racionales, no es la misma y las relaciones y operaciones entre ellos también tienen significados distintos, y también son distintos los algoritmos de cálculo que se utilizan en los campos numéricos.

- **Facilitar la construcción de ideas abstractas.** A través de la fracción como resultado de medida, los escolares disponen de una herramienta que, mediante la interacción con el mundo de los objetos, les facilita la construcción mental de la representación fraccionaria y les permite la evaluación semántica de cualquier expresión simbólica en la que aparezcan números racionales.

Por este motivo la propuesta se fundamenta en la noción de modelo de aprendizaje entendida como un entorno físico con el que se esquematiza y recrea una parte del mundo real, con variables bien definidas, a saber:

a) Magnitudes medibles: Utilizamos la de superficie. La utilización de esta magnitud se justifica con su presencia en los currículos oficiales y porque facilita a los escolares la obtención de resultados de la medida. También sería recomendable la de longitud que debería ser la primera magnitud a trabajar. No obstante, dado que los alumnos de 4º curso, a los que nos dirigimos, ya han recibido enseñanza de la fracción y que disponemos de poco tiempo para realizar la intervención en el aula decidimos centrarnos únicamente en la magnitud de superficie dado que los objetos a trabajar con ésta última magnitud requieren menor tiempo de gestión que los listones y tiras de papel que se utilizan en la medida de cantidades de longitud.
b) Objetos en los que resulta perceptible una cantidad de magnitud: En relación con nuestra magnitud seleccionada, la superficie, decidimos utilizar como objetos unos manteles de papel cortados a partir de folios de DIN A3 y unos folios de tamaño 20x20 cm., a los cuales nos referimos como servilletas, que utilizamos como unidad.
c) Acciones realizadas sobre el objeto: Se propone a los escolares la medida de superficie de diferentes manteles, utilizando las servilletas como unidad y referencia de medida.
d) La técnica elegida para realizar la acción es la de medir en una sola fase: Consiste en fraccionar la unidad de medida con la finalidad de crear una subunidad que

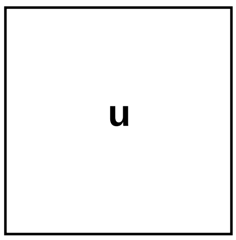
esté contenida un número entero de veces en la cantidad a medir. De este modo aparece la fracción como medida de la cantidad de superficie.

Para entender mejor la técnica elegida, “medir en un sola fase”, a continuación procedemos a una explicación detallada de la misma. Siguiendo las recomendaciones de Escolano (2007) optamos por la técnica de medir creando subunidades arbitrarias que tengan la misma cantidad de magnitud que consiste en buscar un fraccionamiento de la unidad, es decir una subunidad, que posibilite la composición de la cantidad a medir mediante un determinado número de subunidades iguales creadas por dicho fraccionamiento.

En estas condiciones la fracción aparece como el sistema de representación que resuelve el problema de la medida: la fracción indica el resultado de la medida de una cantidad de magnitud. En efecto, el tamaño de la subunidad, que depende del número de partes iguales en que se ha fraccionado la unidad, viene reflejado en el denominador de la fracción; mientras que el número entero de subunidades que contiene la cantidad a medir se indica en el numerador de la fracción.

Para detallar esta técnica de medida nos servimos de los apuntes de la asignatura Didáctica de la Aritmética II del Grado en Magisterio en Educación Primaria en que se presenta el siguiente problema o tarea de medida de una cantidad de superficie:

Sabiendo que la unidad de superficie es:



Calcular la superficie de la siguiente figura:

La respuesta a la tarea no es evidente porque nos encontramos ante un problema cuya solución no es inmediata puesto que, ahora, el resolutor debe tomar decisiones y proceder, por ensayo y error, del siguiente modo:

1. Es evidente que la superficie a medir no contiene un número entero de veces la unidad de medida “u”; por tanto, hay que decidir sobre el tamaño de una nueva unidad de medida que, necesariamente, ha de ser una parte alícuota de la unidad “u”. Pero, ¿cuál es esa parte o subunidad?, ¿la mitad de u, la tercera parte de u,..?; no queda otra opción que construir tal subunidad y comprobar que está contenida un número entero de veces en la superficie a medir.
2. Una vez finalizado el proceso, hay que expresar el resultado de la medida. Y este resultado dependerá de la técnica utilizada en el proceso de medida: habrá que mencionar la subunidad o subunidades utilizadas y el tamaño de éstas respecto a la unidad “u”. En consecuencia, pueden aparecer distintas formas de expresar el resultado de la medida, como 4/9 de u, 1/3 + 1/9 de u, 8/18 de u…
3. Si se desea que aparezca la representación fraccionaria habrá que convenir que para comunicar el resultado de la medida deben ser todas las subunidades del mismo tamaño. En este caso, la cantidad de superficie de la figura mide 4/9 de u. porque la cantidad de superficie se ve compuesta por 4 subunidades de superficie 1/9 de u.

Una vez que hemos optado por la técnica de medir creando subunidades arbitrarias de la unidad para facilitar la gestión de los modelos de medida decidimos que las cantidades de magnitud que vayan a medir los escolares se elijan de modo que no sea necesario la realización de fraccionamientos muy finos de la unidad, porque la utilización de material manipulativo se torna compleja y porque el fenómeno de aproximación que comporta todo proceso de medida de magnitudes continuas puede dar lugar a medidas diferentes de una misma cantidad de magnitud.

De acuerdo con Escolano (2007) desechamos otras posibles técnicas de medida como la de crear subunidades sistemáticas que tengan distinta cantidad de magnitud dado que esta técnica lleva a la aparición del número decimal si el proceso de medida se realiza en fases, en la primera de las cuales la unidad se fracciona en diez partes iguales, y volviendo a fraccionar la primera subunidad en diez partes iguales en el caso de que con esa subunidad no se logre realizar la medida; y proseguir realizando sucesivas fases hasta efectuar la medida. Esta técnica es compleja para los escolares de Educación Primaria que se inician en la enseñanza del número racional positivo porque se hace intervenir aspectos esenciales del sistema de numeración como el principio del valor relativo de las cifras que indican las cantidades de cada subunidad involucradas en el proceso de medida.

Por otra parte, la introducción de la notación decimal en los momentos iniciales de la enseñanza del número racional positivo puede crear obstáculos didácticos a los escolares al identificar las estructuras numéricas del racional y del natural. En efecto, la enseñanza del número decimal asociada al Sistema Métrico Decimal, justificada por razones de utilidad social, y en la que se exaltan las analogías con los procedimientos de cálculo de naturales propicia en los alumnos concepciones erróneas como pensar que los números decimales no son necesarios si se realiza un cambio de unidad adecuado, o interpretar que los números decimales indican otra forma de simbolizar los números naturales.

Todas estas razones expuestas desaconsejan introducir el número decimal como agregación de subunidades decimales a partir de un proceso de medida en el momento inicial de la enseñanza del número racional. Sin embargo, consideramos importante utilizar esta técnica en una fase de enseñanza posterior cuando los escolares conozcan la fracción y el número decimal como el resultado de un reparto igualitario aunque éste no sea un objetivo de este trabajo fin de grado.

Planificación de la propuesta de enseñanza

En nuestra planificación inicial de la intervención a realizar, habíamos preparado un guión de actividades para realizar en varias sesiones (4 ó 5), sin determinar el número exacto de las mismas hasta exponer la propuesta a la tutora del grupo-clase, en las que trabajaríamos con los alumnos según este modelo de aprendizaje. A través de la realización de unas situaciones problemáticas que los alumnos tendrían que resolver en grupos de 4.

Por supuesto y de acuerdo con lo expuesto anteriormente, en nuestro guión para las sesiones estaba previsto realizar las siguientes actividades o tareas:

1) Tarea: "Os doy un mantel y tenéis que medir la superficie del mantel (espacio plano que ocupa)". A los alumnos (distribuidos por grupos) sólo se les proporcionará el mantel cuya cantidad de superficie deben medir (comienzan con un mantel muy sencillo que mide 3/2 unidades cuadradas de 20x20 cm)

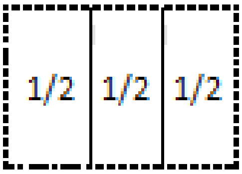
   Mantel 1
   (3/2)

   Seguidamente a la presentación y entrega del mantel 1 el maestro debe establecer un debate y preguntar a los alumnos: ¿qué vamos a medir? Con esta pregunta queremos consensuar que la magnitud a trabajar es la superficie y no otra. Seguidamente preguntaremos ¿qué necesitamos para medir? Se espera que los alumnos mencionen ideas como "usar una regla". El profesor debe reconducir las ideas de los alumnos proponiendo utilizar unidades de medida cuadradas (denominadas servilletas durante la actividad) y les da a cada grupo varias unidades de medida de superficie.

   Servilleta
   (20x20
   cm)

   Los alumnos intentarán medir el mantel superponiendo las unidades encima del mantel a medir (si no surgiera esta iniciativa es deber del maestro incitarla). Se darán cuenta de que el mantel mide más de una unidad y menos de dos. Tal vez necesiten que el profesor les anime a FRACCIONAR la unidad. El primer fraccionamiento que se les va a ocurrir es el doblado de la unidad por la mitad. Nos interesa observar si los alumnos utilizan la idea de PARTIR o FRACCIONAR la unidad en DOS PARTES IGUALES.

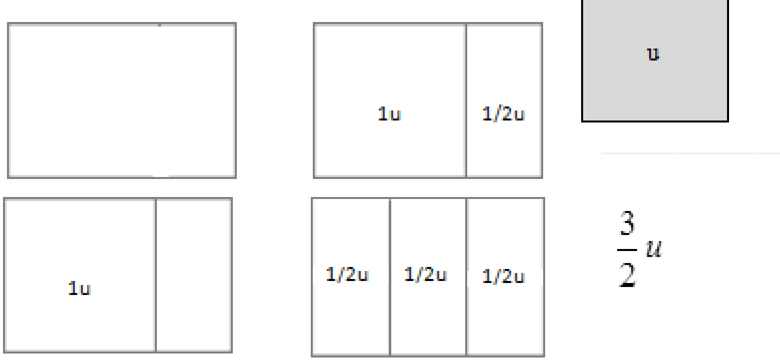
En el momento de expresar el resultado de la medida de la cantidad de superficie del mantel los alumnos darán como respuesta “una unidad y media”. Esta respuesta es correcta pero el profesor les animará a que expresen la medida con PARTES IGUALES DE LA UNIDAD. Estas partes iguales las llamaremos SUBUNIDADES.



Para escribir con números el resultado de la medida utilizaremos las fracciones unitarias que conocen. Las dos partes iguales reciben el nombre de SUBUNIDAD DE LONGITUD 1/2 DE LA UNIDAD. Y se lee "un medio de unidad" o “media unidad”.

El profesor pregunta a los alumnos que digan cómo ven ahora la cantidad de superficie con la esperanza de que expresen ideas como “hay 3 trozos (subunidades) de media servilleta”. En este momento el profesor puede institucionalizar la fracción 3/2 *u.*, diciendo “que hemos necesitado fraccionar la unidad en 2 partes iguales para medir” para verbalizar, así, el significado del denominador, y “que hemos necesitado colocar 3 subunidades para cubrir la cantidad de superficie” para verbalizar el significado del numerador.

Tarea 1



Tras haber introducido el fraccionamiento y partición, además de la técnica de medir en una sola fase con la tarea anterior (muy dirigida y guiada por el tutor) ahora es el momento de que los alumnos se enfrenten de manera más autónoma a la tarea de medir superficies de manteles con otras formas y cantidades de superficie. Las siguientes tareas consistirán en medir distintos manteles y rellenar una ficha (titulada: Tarjeta de evaluación de la tarea) que adjuntamos en el anexo V. A continuación trascribimos las preguntas y los datos que han de rellenar los alumnos en dicha ficha, tras la resolución de cada tarea, para favorecer la reflexión e interiorización de los contenidos que se trabajan:

1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

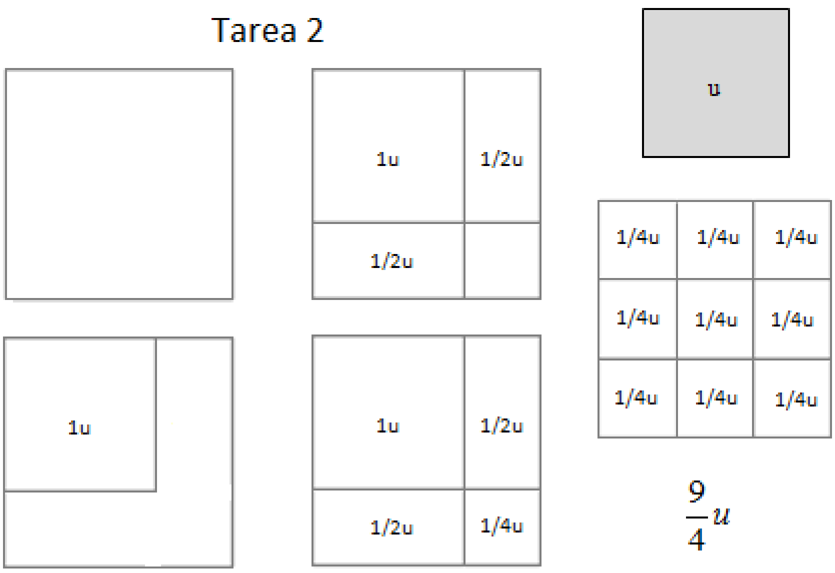
2º. Escribe cómo se lee la superficie del mantel:

3º. Has fraccionado la unidad en __________ partes iguales.

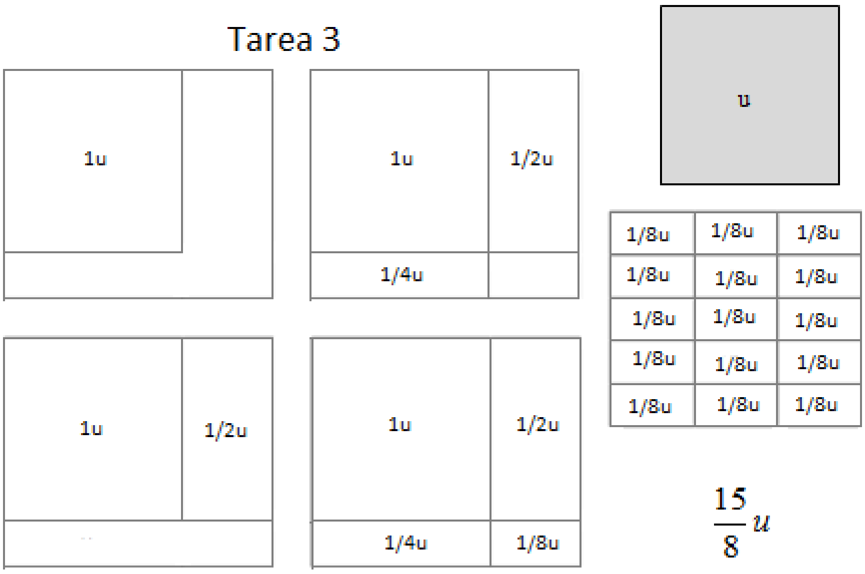
4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

5º. ¿Qué indica el denominador de la fracción?

2) Tarea 2: Les proponemos a los grupos la tarea de medir la cantidad de superficie de un mantel cuadrado (9/4 *u.*). Cada grupo tras conseguir medir el mantel deberán mostrárselo al profesor, para que este compruebe cómo lo han hecho, y que del mismo modo que habían hecho en el mantel anterior, verbalicen el significado del numerador y denominador, rellenando además la ficha correspondiente.

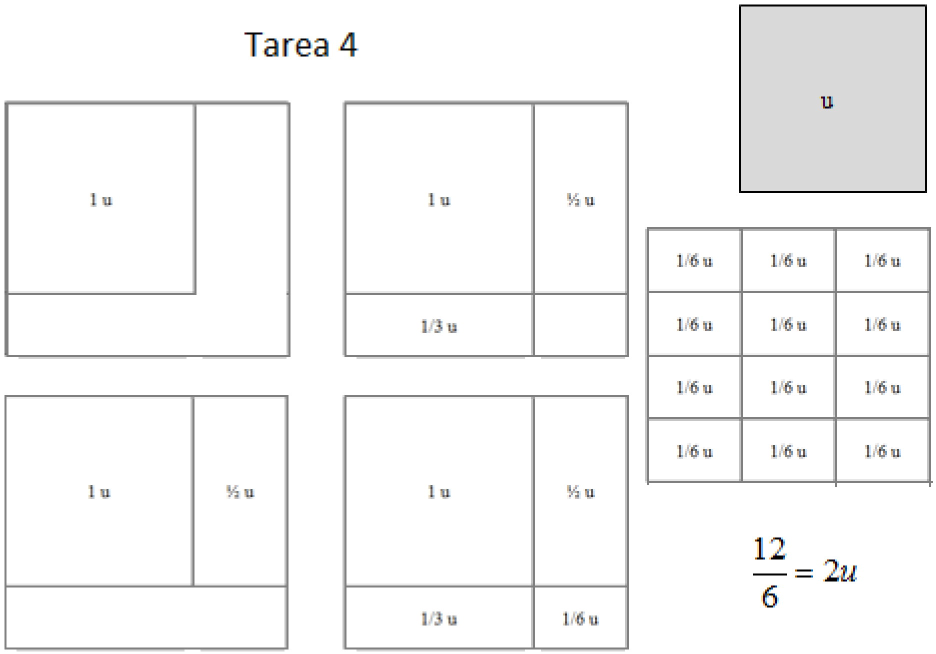


3) Tarea 3: Les proponemos a los grupos la tarea de medir la cantidad de superficie de un mantel de (15/8 *u.*). Cada grupo tras conseguir medir el mantel deberán mostrárselo al profesor, para que este compruebe cómo lo han hecho, y que del mismo modo que habían hecho en el mantel anterior, verbalicen el significado del numerador y denominador, rellenando además la ficha correspondiente.



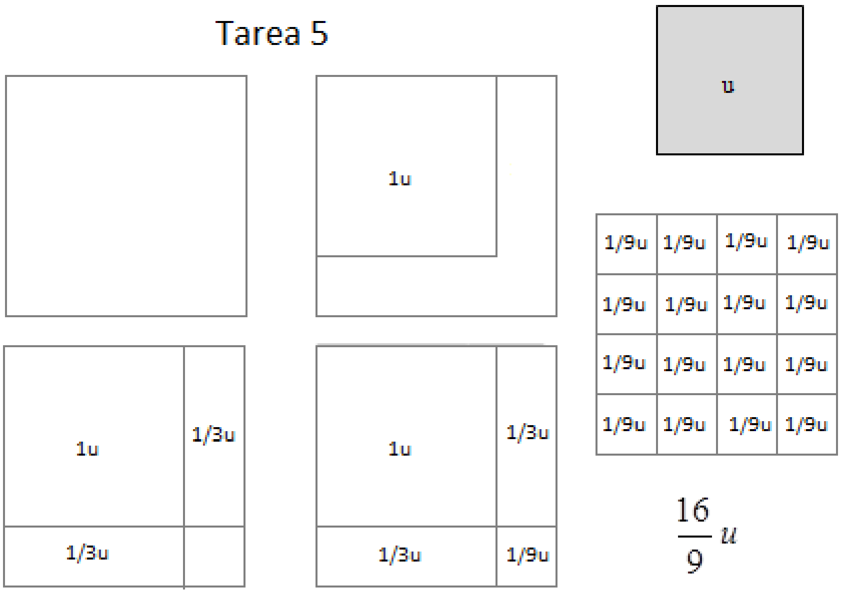
4) Tarea 4: Les proponemos a los grupos la tarea de medir la cantidad de superficie de un mantel de (12/6 *u.*) que equivale a 2 *u*. Cada grupo tras conseguir medir el mantel deberán mostrárselo al profesor, para que este compruebe cómo lo han hecho, y que del mismo modo que habían hecho en el mantel anterior, verbalicen el significado del numerador y denominador, rellenando además la ficha correspondiente. En esta ocasión es posible que realizar la tarea les cueste más ya que para poder medir este mantel, deberán fraccionar la unidad en tres partes iguales. Si lo alumnos no consiguen caer en esta idea, el profesor deberá estar alerta para proponerla ya que de no ser así puede que los alumnos no caigan en ella y se frustren.

Tarea 4



5) Tarea 5: Les proponemos a los grupos la tarea de medir la cantidad de superficie de un mantel de (16/9 *u.*). Cada grupo tras conseguir medir el mantel deberán mostrárselo al profesor, para que este compruebe cómo lo han hecho, y que del mismo modo que habían hecho en el mantel anterior, verbalicen el significado del numerador y denominador, rellenando además la ficha correspondiente.

Tarea 5



El desarrollo de la propuesta en la clase

Previo a la ejecución de la intervención en el aula, realizamos una exposición de la propuesta y de las actividades implicadas en ella a la tutora del grupo, con la intención de conseguir su autorización para ejecutarla en el aula. Tras su exposición y la petición de cinco sesiones para llevarla a cabo nos encontramos con ciertas dificultades con las que no contábamos.

La tutora no pudo facilitarnos las horas solicitadas para impartir las sesiones planificadas (un total de 5 horas). El motivo de la negativa se debió a la planificación y programación de los contenidos que tenía que impartir, avanzando en ellos al mismo ritmo y tiempo que los otros grupos del mismo curso y concluir las lecciones programadas en las fechas previstas en la programación de ciclo para finalizar el curso con la totalidad del temario previsto enseñado. Esto sumado a que el número de sesiones solicitadas se correspondían con la enseñanza de un contenido el cual ya había sido trabajado y evaluado en el grupo previamente a nuestra llegada al centro ocasionó la negativa de la tutora, la cual expuso que ceder cinco sesiones de clase más la perdida de otras sesiones con motivos de días festivos y fiestas y actividades propias del centro la retrasarían demasiado en cuanto a la programación establecida. Finalmente la tutora nos cedió una hora del área de inglés y el profesor de religión nos cedió su sesión (de treinta minutos de duración) anterior a esa hora de inglés cedida por la tutora, con lo que tuvimos que adaptar nuestra intervención y propuesta a una única sesión de un una hora y media.

Tras conocer la respuesta de la tutora y del maestro de religión, que nos facilitaban hacer en una única sesión de una hora y media, lo que teníamos previsto hacer en cuatro sesiones para el desarrollo de las tareas y una quinta sesión de reflexión e interiorización de los contenidos trabajados durante las cuatro sesiones anteriores (sesiones de 50 minutos), decidimos modificar nuestra intervención adaptándonos al tiempo disponible, de la siguiente forma:

- En primer lugar decidimos seguir el guión de las tareas previsto, realizando todas las que se pudieran dentro del tiempo disponible, trabajando como ya habíamos dicho en grupos de trabajo, finalmente compuestos por 5 alumnos por grupo, formando un total de 5 grupos.

- En segundo lugar, decidimos mantener el mismo ritmo de resolución para todos los grupos en la ejecución de la tarea 1, imponiendo una fuerte dirección y metodología guiada por parte del tutor para ofrecer la misma explicación a todos los alumnos por igual. Estimando un tiempo de entre 15 y 20 minutos para ello.

- En tercer lugar, a partir de la realización de la tarea 1 decidimos ir repartiendo las tareas siguientes a cada grupo respetando los distintos ritmos de trabajo entre ellos, ya que dábamos por hecho que habría grupos que irían más rápidos que otros y que habría tareas que les costarían más que otras, come era el caso de las tareas 4 y 5 respecto de las anteriores. Debido a la limitación del tiempo lo que nos interesaba es que cada grupo llegase hasta la tarea que le diera tiempo. Eso sí supervisando yo mismo la ejecución y las respuestas de las mismas, así como favoreciendo la reflexión e interiorización de los contenidos que se trabajan.

- En cuarto lugar y último, para favorecer que los alumnos pudieran hacer el máximo de las tareas posibles, decidimos repartir las fichas a rellenar ("Tarjeta de evaluación de la tarea") en los últimos 30 minutos, para que su cumplimentación les privase del menor tiempo posible, haciendo esa tarea de forma oral ante el maestro, y para recopilar por escrito la resolución de las últimas o última tarea a la que habrían llegado cada grupo, intentando conseguir así que al menos todos los grupos llegaran a finalizar la tarea 4.

Finalmente tras adaptarnos a las circunstancias surgidas, podemos decir que la intervención se desarrolló según lo previsto, a pesar de la dificultad de trabajar en un tiempo muy limitado, ya que hubiera sido más beneficioso para los alumnos haber trabajado a un ritmo más relajado y haber realizado la totalidad de las tareas en varios días favoreciendo así la interiorización de los contenidos trabajados y la posibilidad de proponer más tareas. De los cinco grupos de trabajo formados, 4 grupos finalizaron la totalidad de las tareas, recopilando dos de ellos mediante la tarjeta de evaluación la resolución de la tarea 4 y 5, mientras que los otros dos grupos solo recopilaron por escrito la tarea 5. El quinto grupo no entregó la tarjeta de evaluación de la tarea debido a que al agotarse el tiempo de la sesión, aún no habían finalizado la tarea 4.

Un dato a destacar en el funcionamiento de la sesión para favorecer la motivación y participación de los alumnos, así como para favorecer un ritmo intenso de trabajo por parte de los grupos y que de este modo se consiguieran resolver el máximo número de tares posibles, fue proponer tras la realización de la primera tarea el reto de ver quién era el grupo que conseguía medir más manteles. Este hecho hizo involucrarse a los alumnos a modo de juego, mostrando más interés por la ejecución de las tareas y participando todos los grupos a modo de competición entre ellos. De esta forma conseguimos un ritmo rápido de trabajo y captar la atención del alumnado.

La resolución de las tareas aconteció del siguiente modo:

Tarea 1 la realizamos repartiendo el primer mantel de 3/2 *u.* a cada grupo, para que todos los grupos lo tuvieran delante, al igual que las respectivas unidades (servilletas), y de manera colectiva entre todos los grupos y mediante un diálogo dirigido por el profesor, resolver la tarea de medir este mantel haciendo hincapié en el proceso y la técnica de medir, al igual que en la verbalización del resultado y el significado del numerador y el denominador. A esta terea que resolvieron todos los grupos bajo mi dirección, al mismo ritmo, se le dedicó un tiempo aproximado de 20 minutos. La ejecución de esta tarea procedió sin incidentes, ni dificultades de comprensión por parte del alumnado, como teníamos previsto en la planificación inicial de la propuesta. Hemos de comentar que en dicha tarea fue de gran ayuda la intervención y colaboración del maestro de religión, que además de cedernos su sesión de treinta minutos, colaboró en la distribución y organización tanto de los grupos de trabajo como de los materiales y la atención a las dudas de los alumnos, durante esos primeros treinta minutos.

Los alumnos respondieron según lo previsto en la planificación, en el momento en que el pregunté ¿qué necesitamos para medir el mantel?, algunos alumnos sacaron y mostraron sus reglas. Tras la reconducción y mi propuesta de medir mediante la utilización de unidades cuadradas, aunque en un primer momento las caras de los alumnos fueron de asombro, estos respondieron de forma rápida cubriendo la totalidad del mantel con las unidades y fue uno de los alumnos el primero en proponer el fraccionamiento de la unidad. Este alumno respondió en seguida que el mantel medía un cuadrado y medio. Con este comportamiento por parte del alumnado fue fácil avanzar según lo planificado.

Los alumnos sólo mostraron desconcierto y cierta confusión a la hora de utilizar verbalmente el concepto de subunidades, ya que ellos se referían a las subunidades como cachos, porciones o partes iguales surgidas de dividir o repartir las servilletas en trozos iguales.

Tarea 2: A partir de esta tarea el trabajo de los alumnos fue totalmente autónomo y cada grupo trabajaba por libre siguiendo su ritmo de trabajo. Todos los grupos resolvieron sin dificultad la medición de superficie, del mantel (9/4 *u.)* que en esta tarea se les presentaba. Tras descubrir el tamaño de la subunidad para cubrir la superficie del mantel, los alumnos me llamaban para mostrarme la superficie del mantel cubierta con las unidades y subunidades empleadas. Para asegurarme de que los alumnos comprendieran lo que habían hecho procedía a realizar las siguientes preguntas: ¿con qué fracción escribiríamos la superficie del mantel?, ¿en cuántas partes iguales has fraccionado la unidad? ¿Qué indica el numerador de la fracción? ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Si los alumnos no respondían correctamente de forma oral a las preguntas, les orientaba y les animaba a repetir la operación de medir o a contar el número total de las subunidades empleadas para cubrir la superficie y el número de partes iguales en las que habían fraccionado o repartido la unidad, favoreciendo el debate dentro de los miembros del grupo y que los alumnos que lo habían entendido o supieran fueran los que los explicasen al resto de los compañeros de grupo. No se les entregó a ningún grupo el mantel de la tarea siguiente hasta que no supieron responder y verbalizar correctamente las respuestas a las preguntas.

Tarea 3: La resolución de esta tarea consistente en medir el mantel de 15/8 *u.* trascurrió de la misma manera que la tarea anterior y sin ningún incidente a destacar. Todos los grupos realizaron esta actividad y fácilmente descubrieron y cayeron en la idea de fraccionar la unidad en ocho partes iguales, para poder cubrir la totalidad de la superficie. La dinámica en eta tarea fue la misma que en la anterior y que en las posteriores tareas, los grupos resolvían la tarea, me llamaban y esperaban a que les supervisara y de forma oral razonaban y respondían las preguntas anteriormente citadas.

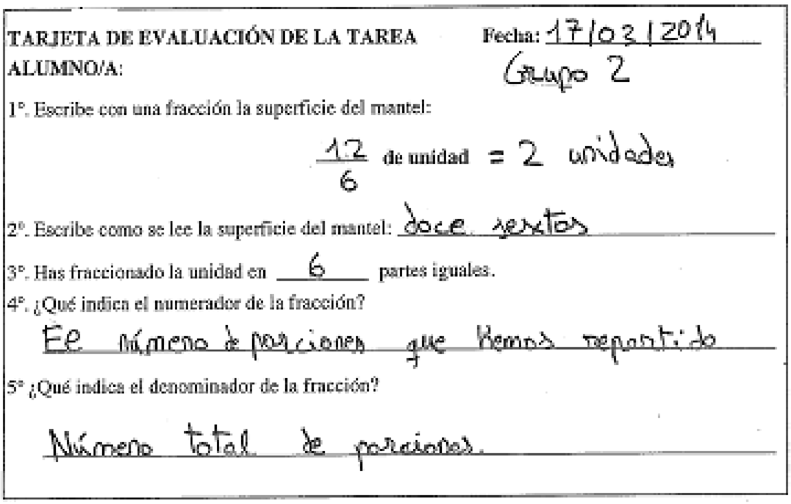
Tarea 4: Cuando los dos grupos más avanzados llegaron a esta tarea, aun disponíamos de unos 40 minutos aproximadamente para finalizar la sesión, dándoles a estos grupos la tarjeta de evaluación de la tarea para recopilar las respuestas por escrito. A esta tarea llegaron todos los grupos, pero sólo cuatro la finalizaron dentro del tiempo de la sesión y pudieron avanzar a la siguiente y última tarea. Al grupo que no consiguió resolverla por sí mismo, antes de la finalización de la sesión, como ya he expuesto anteriormente, le tuve que asistir dándoles la clave para resolver la medida de la superficie del mantel de 12/6 *u.*= 2*u.* y que resolvieron oralmente respondiéndome a las respuestas que les formulaba.

Esta fue sin duda la tarea que más costó, en general, de resolver por parte los alumnos, debido que ya no les servía la estrategia de ir fraccionando la unidad en medias partes, cuartos u octavos de u. Todas esas estrategias utilizadas en las tareas anteriores, derivadas de la idea de ir fraccionando por la mitad la subunidad obtenida hasta encontrar aquella que se ajustase al espacio que les quedara por cubrir, y que les habían garantizado el éxito anteriormente, ya no les servían. Para poder medir con éxito la superficie de este mantel tenían que recurrir a tercios de unidad, es decir a fraccionar en tres partes iguales la unidad. Esta idea es más costosa de que surja tan rápida y espontáneamente por parte de los alumnos, como lo hacía la idea de fraccionar en mitades, debido a una mayor complejidad manipulativa para doblar la unidad cuadrada de papel en tres partes iguales.

Fue necesaria mi intervención en todos los grupos a excepción de en uno, para sugerir esa idea de fraccionar la unidad en tres partes iguales, o sugerir como hacerlo manipulativamente y la idea de que 12/6 *u.* son 2 unidades enteras. Hubo un grupo (el grupo 1) en el que uno de los miembros llegó a esas ideas por si solo, ejecutándolas correctamente y fue quien se encargó de explicarlas y mostrarlas a sus compañeros de grupo.

Los dos grupos más avanzados, los primeros en llegar a esta tarea además de responder oralmente al maestro las preguntas anteriormente citadas, también rellenaron por escrito la tarjeta de evaluación de esta tarea. A continuación expondremos las imágenes de las respuestas escritas por dos alumnos al cumplimentar las tarjetas de evaluación de la tarea. Hemos de comentar que puesto que trabajaban en grupo, a pesar de que cada alumno rellenaba su ficha personal, todos los miembros de un mismo grupo respondían lo mismo en cada apartado de la tarjeta de evaluación. También debemos destacar que en todas las tareas no les entregaba el mantel de la tarea siguiente hasta que no respondían de forma acertada las preguntas orales y verbalizaban correctamente el significado de numerador y denominador.

Imágenes de las respuestas escritas de dos grupos a la resolución de esta tarea 4:



TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 17/03/2014

ALUMNO/A: Grupo 2

1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{12}{6}$ de unidad = 2 unidades

2º. Escribe como se lee la superficie del mantel: doce sextos

3º. Has fraccionado la unidad en 6 partes iguales.

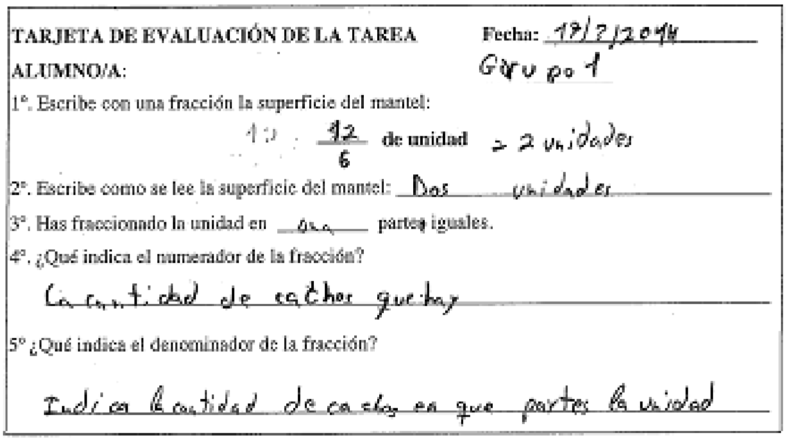
4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

El número de porciones que hemos repartido

5º ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Número total de porciones.

Los miembros del grupo 2 como podemos apreciar en la imagen responden correctamente a las tres primeras preguntas. Sin embargo a las preguntas 4 y 5 que consisten en expresar por escrito la verbalización que le hacían de forma oral acerca del significado del numerador y el denominador, no son correctas. Las respuestas a estas preguntas, que los alumnos si daban correctamente de forma oral, eran y deben ser por escrito “el número de subunidades o partes iguales de la unidad que hemos utilizado para cubrir la cantidad de superficie del mantel” y “el número de partes iguales o subunidades en que hemos fraccionado la unidad”, respectivamente.

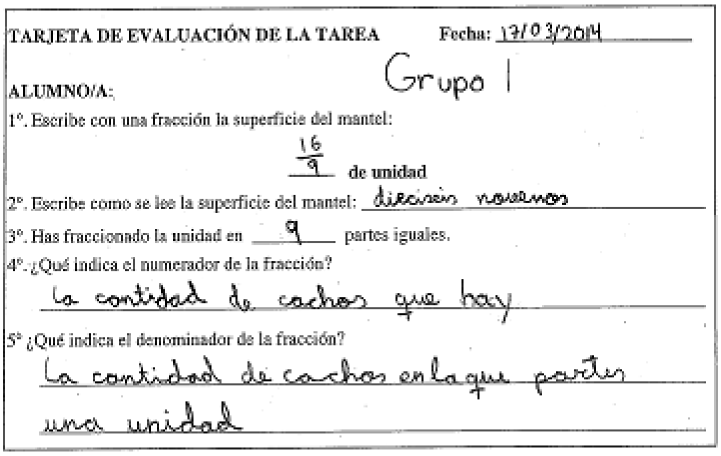

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 17/7/2014
ALUMNO/A: Grupo 1
1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:
$\frac{12}{6}$ de unidad = 2 unidades
2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: Dos unidades
3°. Has fraccionado la unidad en una partes iguales.
4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?
La cantidad de cachos que hay
5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?
Indica la cantidad de cachos en que partes la unidad

En el grupo 1 sucede algo distinto a lo que veíamos en la respuesta del grupo 2. De la misma forma que en el grupo 2, las respuestas que daban oralmente mientras me explicaban como habían resulto la tarea y contestaban a mis preguntas eran totalmente acertadas de forma oral. Pero al expresarlas por escrito encontramos lo que podemos ver en la imagen. Responden correctamente a la pregunta 1 y en la pregunta 2 en lugar de escribir doce sextos, escriben dos unidades, demostrando que interpretan que 12/6 es lo mismo que decir dos unidades. Hasta aquí podemos decir que hacen un buen razonamiento. Sin embargo en la pregunta 3 responden que han fraccionado la unidad en “una partes iguales” esta respuesta la atribuimos a un error a la hora de expresarse por escrito y que debido a realizar las tareas lo más rápido posible para finalizarlas todas, el cabecilla de grupo escribiera esa respuesta por error sin razonar, y el resto la copiasen.

Las respuestas escritas a las preguntas 4 y 5 son imprecisas pero muestran un buen nivel de comprensión. Así podemos leer: “la cantidad de cachos que hay”, refiriéndose al número total de subunidades con las que cubren toda la cantidad de superficie del mantel (numerador) y “Indican la cantidad de cachos en que partes la unidad”, esta última respuesta, referida al significado del denominador sí que podríamos decir que es más acertada, aunque para darla totalmente como válida deberían haber expresado “…la cantidad de cachos <u>iguales</u> en que partes la unidad”.

Tarea 5: En esta tarea en la que los alumnos se enfrentaban a medir un mantel de 16/9 *u.* se encontraron con las mismas dificultades que en la tarea anterior, ya no les bastaba con fraccionar la unidad en mitades y seguidamente la subunidad originada, de volver a fraccionarla por la mitad, obteniendo así un cuarto… Al igual que en el mantel anterior necesitaban fraccionar la unidad en tercios, para finalmente llegar a la subunidad de 1/9 de u. Tuve que aconsejar nuevamente esta idea a casi la totalidad de los grupos. Esta tarea fue completada por cuatro de los grupos, los cuales rellenaron la tarjeta de evaluación correspondiente a esta tarea. A continuación mostraremos una imagen de una de las fichas con las respuestas de cada uno de los grupos.

Imágenes de las respuestas escritas de los grupos a la resolución de esta tarea 5:



TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 17/03/2014

ALUMNO/A: Grupo 1

1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ de unidad

2º. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciseis novenos

3º. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

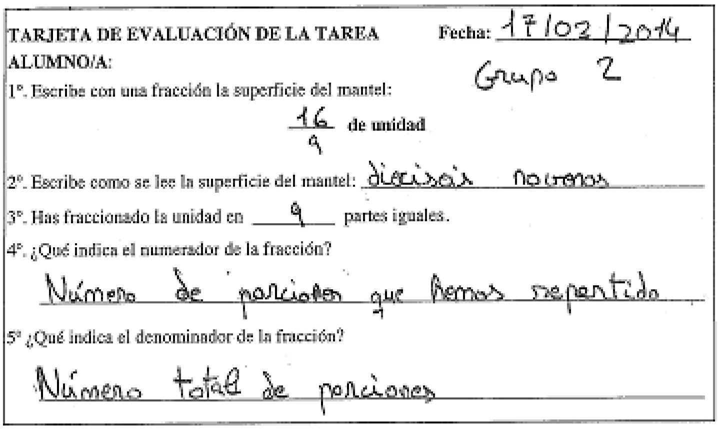
4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

la contidad de cachos que hay

5º ¿Qué indica el denominador de la fracción?

La cantidad de cachos en la que parten una unidad

Como podemos observar en las repuestas del **grupo 1** a las preguntas 4 y 5, la respuesta a la pregunta 4 no acaba de ser correcta ya que no especifican usando su lenguaje, “las cantidad de cachos <u>iguales</u> que hay <u>para cubrir toda la superficie del mantel</u>”. Sin embargo la respuesta a la pregunta 5 aunque no es del todo correcta ya que no especifican que los “cachos en los que parten la unidad son iguales”, es una respuesta más acertada.



TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 17/02/2014

ALUMNO/A: Grupo 2

1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ de unidad

2º. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciseis novenos

3º. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

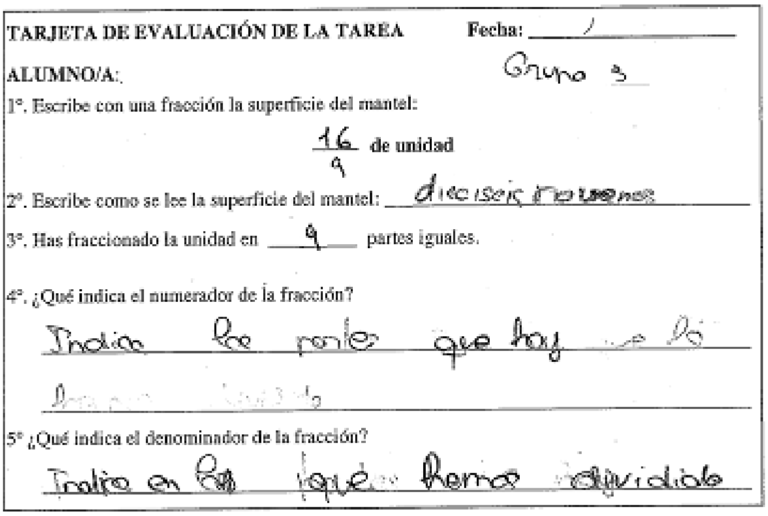
4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Número de porciones que hemos repartido

5º ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Número total de porciones

El **grupo 2** por su parte comete un error de expresión muy parecido al del grupo 1 al responder a la pregunta 4. Los miembros de este grupo responden que el numerador indica el número de porciones que hemos repartido, pero no especifican, que sean iguales y que son para cubrir la cantidad de superficie del mantel. Respecto a la respuesta que dan a la pregunta 5, esta es todavía más inexacta ya que contestan “el número total de porciones”. Pero cuando respondían oralmente no descuidaban decir que el denominador indica el número de porciones iguales en las que dividían la unidad.


TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: /

ALUMNO/A: Grupo 3

1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

16/9 de unidad

2º. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciséis novenos

3º. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

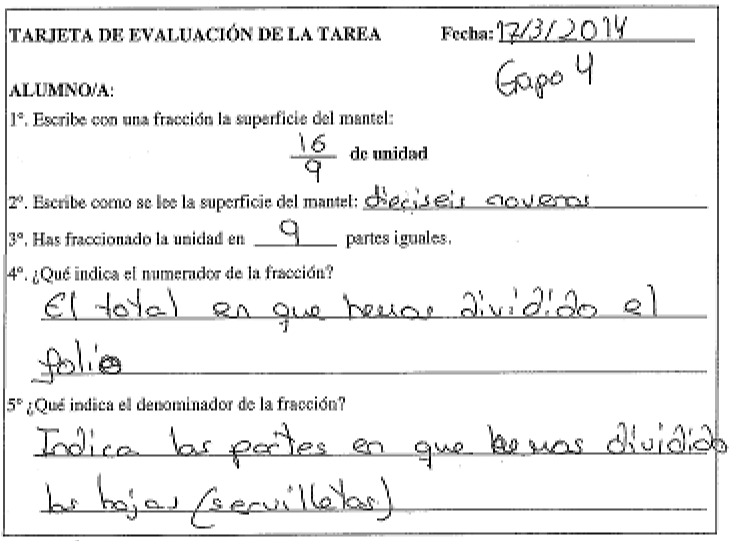
4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Indica las partes que hay en lo [illegible]

5º ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica en las que hemos dividido

El **grupo 3** responde de modo muy impreciso a las preguntas 4 y 5. No obstante a pesar de que en las tarjetas de evaluación, las respuestas de este grupo sean tan imprecisas y poco claras, hemos de tener en cuenta que rellenaron las fichas justo al finalizar el tiempo de la sesión, con las prisas de querer irse y de tener que entregarme las fichas, lo que pudo ocasionar que escribieran lo primero que se les ocurriera sin razonar o reparar en lo que escribían.


TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 17/3/2014

Grupo 4

ALUMNO/A:

1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ de unidad

2º. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciseis novenos

3º. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

El total en que hemos dividido el folio

5º ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica las partes en que hemos dividido las hojas (servilletas)

Finalmente el **grupo 4** es sin duda el que muestra unas respuestas más coherentes, aunque también poco precisas. En la respuesta a la pregunta 4, responde que el numerador indica el total en que hemos dividido el folio, refiriéndose con el nombre de folio al mantel a medir. Esta respuesta está mal expresada ya que en ningún momento dividieron el mantel, simplemente lo cubrieron con subunidades. En su repuesta a la pregunta 5 responden que el denominador indica las partes en que han dividido las hojas, refiriéndose a las unidades (las cuales llamábamos también como servilletas). Esta respuesta es mucho más acertada, pero les sigue faltando especificar igual que los otros grupos, que las partes, cachos o porciones son iguales.

Tras observar las repuestas expresadas por escrito de los alumnos, podemos pensar que los significados de numerador y denominador no les han quedado claros a los alumnos, aunque volvemos a insistir en que sí los explicaban correctamente de forma oral al exponer la resolución de las tareas al maestro.

En general podemos decir que las respuestas expresadas por escrito por los alumnos, en todos los grupos pueden sugerir ideas poco claras y precisas incluso incorrectas, pero no debemos olvidarnos del poco tiempo dispuesto para la realización de la intervención y la falta de tiempo por mi parte como maestro de poder supervisar todas las fichas redactadas por parte de los alumnos en los últimos 40 minutos de la sesión, antes de que me las entregaran, además de seguir supervisando la ejecución de las tareas de todos los grupos y que razonasen oralmente todo lo que habían realizado. Como ya decíamos en el apartado anterior, una hora y media de sesión es poco tiempo para poder realizar todas las tareas dedicándoles un tiempo de reflexión e interiorización como se pretendía en la planificación inicial, avanzando todos los grupos a un mismo ritmo y debatiendo entre todo el grupo-clase las respuestas de las medidas realizadas en clase.

Conclusiones tras la realización de la intervención y observación de los datos recopilados.

El hecho de no poder contar con más tiempo para realizar la intervención fue una limitación muy importante a tener en cuenta ya que de haberla realizado en varias sesiones distribuidas, hubiéramos dado más tiempo a los alumnos para realizar las tareas con más tranquilidad, de una forma más relajada permitiendo interiorizar mejor lo que están haciendo y viendo, y dejando reposar las ideas. El hecho de proponerles la resolución de las tareas a modo de competición fue favorable en el sentido de que captó la atención de los alumnos he hizo que participarán muy activamente completando cuatro de los cinco grupos todas las tareas programadas. No obstante este modo de realizar las tareas a modo de competición también pudo ocasionar negativamente que los alumnos expresaran por escrito respuestas rápidas, alejadas o cercanas a lo que expresaban de forma oral al responder a mis preguntas.

A pesar de los comentarios anteriores respecto el tiempo, también consideramos que el trabajo realizado en la sesión no cayó en saco roto ya que como veremos en los resultados de las pruebas de avaluación final, que exponemos en el punto siguiente del presente trabajo, si observamos indicios de mejoría y mejor comprensión respecto a las deficiencias de comprensión de la fracción encontradas en la prueba inicial.

6. Evaluación de los resultados de la intervención docente en un grupo natural de 4º curso de Educación Primaria.

Finalmente concluiríamos el presente estudio exploratorio con una **prueba final**, con el objetivo de contrastar los datos obtenidos en la prueba inicial y observar y analizar si ha habido una mejora o cambio en la comprensión de la fracción por parte de los alumnos tras la realización de nuestra propuesta en el aula. Para ello, y ya una vez habíamos contemplado las dificultades de los escolares en el aula, en el momento de resolver la prueba inicial y las actividades, decidimos plantear los siguientes problemas:

Problema 3	Problema 4
Tienes dos barras de metal, una mide 4/3 de metro y la otra 5/4 de metro. ¿Qué barra es más larga? ¿Cuánto es más larga una que la otra?	Lucas bebe una botella de agua 3/2 de litro y Mini otra de 5/4 de litro. ¿Quién de los dos bebe más agua? ¿Cuánto bebe más uno que otro?

Como se puede contemplar ambos problemas son muy similares entre ellos excepto por pequeñas diferencias y a la vez son una reformulación del *problema 1* utilizado en la anterior prueba. Mientras los alumnos se enfrentaban a ella pudimos apreciar gran desconcierto para resolver el primer problema. Uno de los motivos argumentados por la tutora del grupo, antes de la realización de la misma prueba inicial, fue que los alumnos no sabrían resolver ese ejercicio debido a que no habían realizado ejercicios similares en el aula, a pesar de que como hemos expuesto anteriormente en, el texto escolar se les facilitaban estrategias (fracción de una cantidad y representar fracciones impropias), que podrían ayudar a resolverlo. Con el *Problema 2* los alumnos se mostraban más confiados y seguros en su ejecución. En este caso la tutora del grupo lo asociaba al trabajo en clase de ejercicios muy similares y de estar trabajando en el momento en el que se les realizo el estudio la unidad referida a la medida.

En base a estas apreciaciones, los resultados observados en la prueba inicial y los motivos y objetivos con los que justificábamos anteriormente el planteamiento del *Problema*

1, para estudiar la comprensión de la fracción por parte de los escolares, decidimos plantear una reformulación del mismo para evaluar si tras nuestra intervención se habría producido un cambio o mejora en la comprensión de la fracción. Es así como dimos origen a los *Problemas 3 y 4*. Otro dato que hace a estos ejercicios relevantes para el estudio es tener en cuenta que nuestra propuesta de enseñanza de la fracción gira en torno al significado de medida, por ello lo problemas se enfocan desde la comparación de dos medidas de magnitud expresadas en forma de fracción.

A continuación nos parece apropiado mostrar en la siguiente tabla una comparativa de las diferencias entre los Problemas 1, 3 y 4 que nos permitirá una mejor comparación y explicación a los diferentes resultados o razonamientos obtenidos en los tres ejercicios.

Problema 1	Problema 3	Problema 4
"Tienes dos listones de madera. Uno mide 5/4 de metro y el otro mide 3/2 de metro" ***¿Qué listón es más largo? ¿Cuánto es más largo uno que otro?***	***Tienes dos barras de metal, una mide 4/3 de metro y la otra 5/4 de metro.*** ***¿Qué barra es más larga?*** ***¿Cuánto es más larga una que la otra?***	***Lucas bebe una botella de agua 3/2 de litro y Mini otra de 5/4 de litro.*** ***¿Quién de los dos bebe más agua?*** ***¿Cuánto bebe más uno que otro?***
- La magnitud utilizada es la **longitud**. - Ambos denominadores son múltiplos de 2 por lo que es fácil establecer una idea de equivalencia entre ellos. -	- La magnitud utilizada es la **longitud**. - Los denominadores no guardan ninguna relación entre ellos por lo que la diferencia de tamaño no se relaciona mediante una idea de equivalencia.	- La magnitud utilizada es la **capacidad**. - Ambos denominadores son múltiplos de 2 por lo que es fácil establecer una idea de equivalencia entre ellos. - Utilización de las mismas cantidades que en el problema 1
Resuelto previamente a nuestra intervención	Resueltos tras nuestra intervención	

Resultados de una evaluación posterior a la realización de las sesiones de enseñanza.

La realización de la prueba de evaluación tras la sesión de enseñanza de la fracción desde el significado de medida, transcurrió sin incidencias, según lo planificado, (varios días después de haber realizado la sesión), se les planteóa los alumnos que debían realizar dos ejercicios en la ficha entregada y que se ayudaran de la utilización de dibujos para representar el problema y resolverlo con mayor facilidad. Al igual que en la prueba inicial, no les pusimos límite de tiempo, no obstante emplearon para la prueba un tiempo aproximado de entre 15 y 30 minutos. Además les volvimos a separar las mesas a modo de examen para que lo resolvieran de forma individual, sin que sus repuestas pudieran estar condicionadas o influidas por la de otros compañeros, igual que hicimos en la prueba inicial.

RESULTADOS GLOBALES DELA PRUEBA FINAL			
Problema 3 (Barras de metal)		**Problema 4 (Botellas de agua)**	
Resueltos con éxito	**Mal resueltos**	**Resueltos con éxito**	**Mal resueltos**
12/25	**13/25**	**9/25**	**16/25**
48%	**52%**	**36%**	**64%**

En un primer vistazo a la tabla, podemos pensar que los resultados siguen siendo bajos aunque también era muy ambicioso esperar que tras una simple hora y media de enseñanza, los resultados positivos se disparasen milagrosamente. Sin embargo observamos que los resultados de los dos problemas que conforman la prueba final (problemas 3 y 4) son muy similares, aunque este hecho se explica con la semejanza de ambos ejercicios.

Como compararemos más adelante pese a unos bajos resultados, ya que todavía más de la mitad del grupo continua errando, el número de alumnos que han resuelto con éxito el problema, se ha incrementado respecto a los resultados del problema 1 (2/24 alumnos, un 9% lo resolvieron exitosamente frente a un 91%, 22/24) realizado en la prueba inicial lo que nos muestra indicios de mejora.

De la misma forma que hicimos en la prueba inicial, no nos basta con saber el número total de alumnos que han resuelto exitosamente, y el número de aquellos que no han resuelto correctamente. Necesitamos observar los razonamientos y las respuestas de los alumnos individualmente para apreciar el nivel de comprensión de la fracción de los escolares en ese momento. Necesitamos saber por qué erran y cómo. De esta forma juzgaremos el valor de la sesión realizada y si les ha servido a los escolares para comprender mejor la fracción y suplir las lagunas conceptuales de la enseñanza bajo la relación parte-todo.

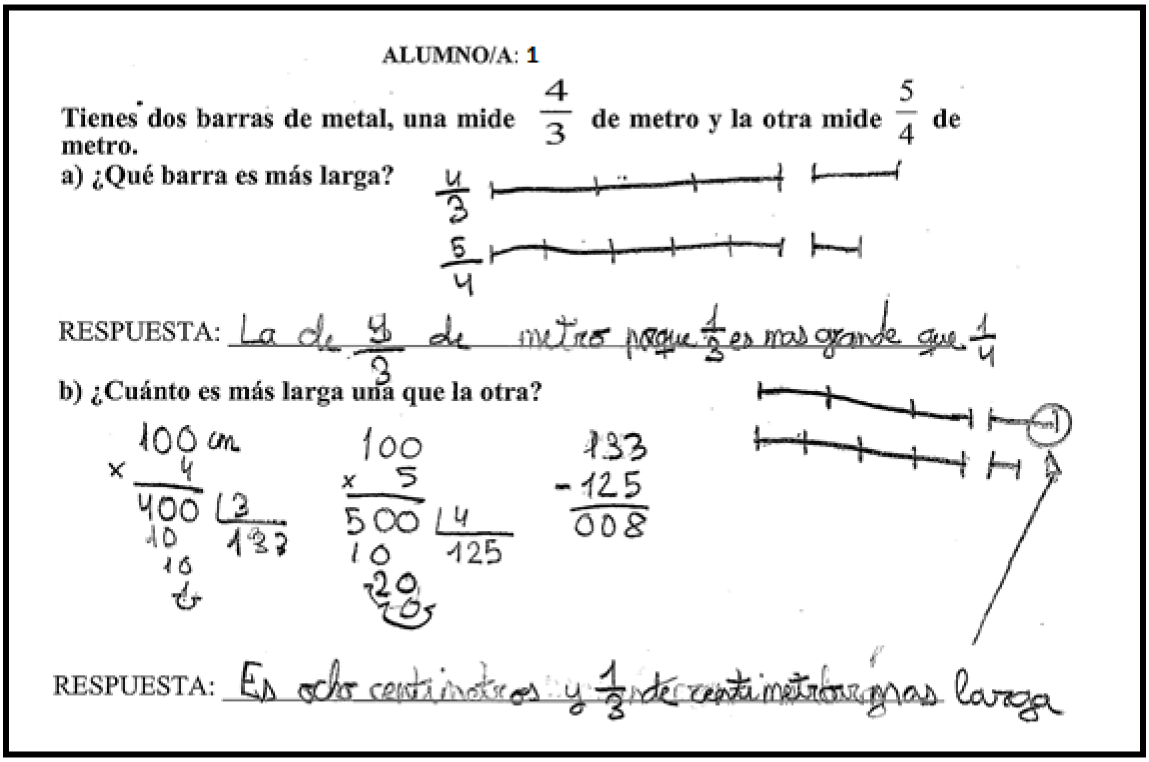
A continuación para exponer y analizar los resultados obtenidos, y así poder elaborar nuestras conclusiones e imágenes acerca de la comprensión de la fracción que tienen los escolares tras la sesión impartida desde el significado de fracción como resultado de medida, sugerimos observar las tablas que a continuación citamos y que se corresponden con los anexos III y IV:

Tabla de resultados de la prueba de evaluación (Anexo III). En ella exponemos mediante un "B" y una "M" el éxito o fracaso en la resolución del problema, acompañado de unas observaciones sobre la resolución y la estrategia utilizada por cada alumno.

Tablas comparativas de las distintas estrategias y aspectos relevantes, en la resolución de los alumnos en los problemas 3 y 4 (Anexo IV). Para la elaboración de estas tablas hemos extraído de la corrección de las pruebas, aquellas estrategias utilizadas por todos los alumnos, y diferentes aspectos, como la ejecución de dicha estrategia, la referencia a la unidad de medida en el razonamiento o en las respuestas, sí razonan o no la respuesta o planteamiento, si han cometido errores de cálculo u en las operaciones realizadas, y finalmente los resultados individuales de cada problema.

Tras la exposición de las tablas con los resultados de los alumnos y las observaciones y recopilación de las estrategias utilizadas para afrontar los problemas, vemos conveniente, como ya hicimos anteriormente con los resultados de la prueba inicial, mostrar aquellos ejercicios, que nos han parecido más destacados y representativos de los datos expuestos anteriormente en las tablas. Queremos mostrar a continuación lo que han hecho los alumnos, sus nuevos razonamientos y la comprensión que demuestran respecto a las fracciones. Para ello exponemos en primer lugar las resoluciones más destacadas del problema 3 y después las del problema 4.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS AL RESOLVER EL PROBLEMA 3



ALUMNO/A: 1

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

RESPUESTA: La de $\frac{4}{3}$ de metro porque $\frac{1}{3}$ es mas grande que $\frac{1}{4}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

100 cm × 4 = 400 ; 400 : 3 = 133

100 × 5 = 500 ; 500 : 4 = 125

133 − 125 = 008

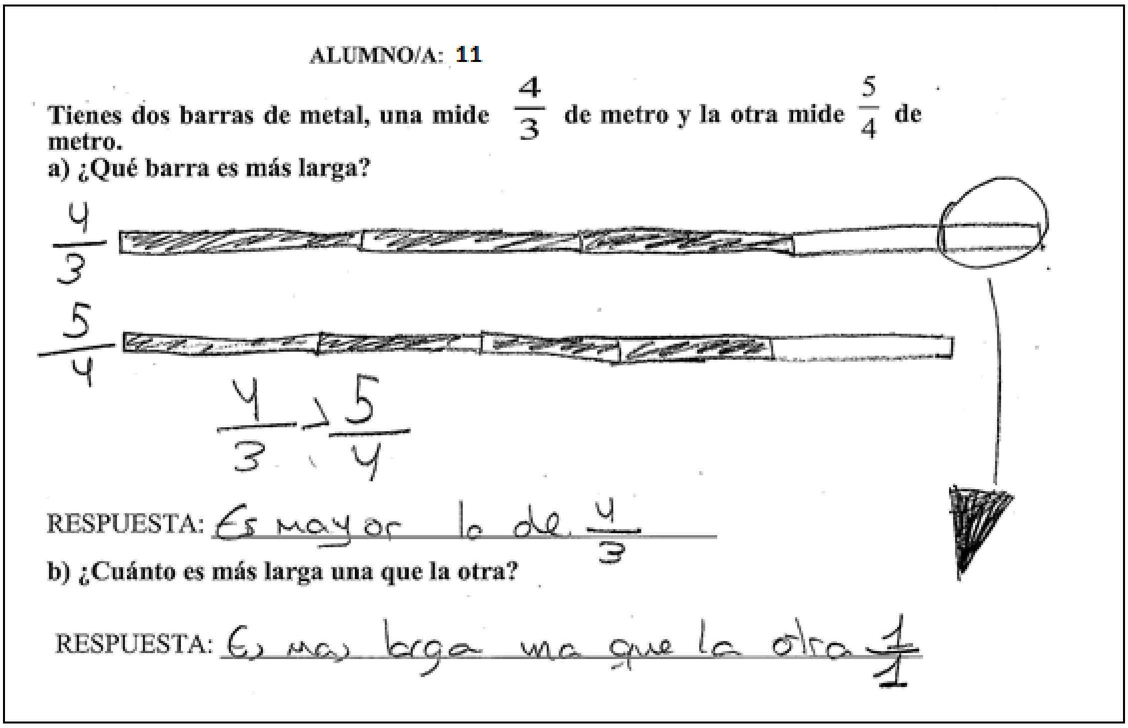
RESPUESTA: Es ocho centimetros y $\frac{1}{3}$ de centimetro mas larga

En la respuesta del **alumno 1,** uno de los dos alumnos que resolvió exitosamente el *Problema 1* y cuya respuesta a dicho ejercicio también resaltamos en el apartado dedicado al análisis de los resultados de la prueba inicial, observábamos que sigue empleando la misma estrategia de aplicar la fracción de un número, pero esta vez recurre a ella como apoyo y no como única estrategia o respuesta.

En primer lugar realiza la comparación mediante gráficos recurriendo a la dinámica y razonamiento ejecutado en la sesión de intervención. El alumno dibuja dos líneas, conservando la misma longitud, que hacen referencia a un metro y cada una la fracciona en las subunidades que nos indican las fracciones (en la representación de la segunda barra se equivoca, divide la unidad en 5 partes y no en 4, pero el error lo corregirá en un segundo dibujo que ejecuta en la segunda pregunta del problema). Seguidamente, al lado de cada línea dibuja una nueva línea representando el tamaño de las subunidades que faltan, para completar el número total de subunidades (indicados en el numerador) que cubren la longitud de las barras. En dicha representación gráfica se aprecia claramente que barra es más larga, y el alumno lo reconoce y lo expone respondiendo lo siguiente al primer interrogante del problema: “*La de 4/3 de metro porque 1/3 es más grande que un 1/4”* En su respuesta el alumno demuestra que no solo ha apreciado cual es la más larga, sino que además nos dice el porqué es más larga. Nos demuestra que reconoce y diferencia el tamaño de la subunidad o partes en las que fracciona un metro, que además ha representado correctamente.

Finalmente para responder al segundo interrogante del problema, recurre a apoyarse en la fracción de una cantidad, para obtener la diferencia de longitud de ambas barras en cm y expresándola mediante un número natural. No obstante vuelve a realizar un dibujo, esta vez totalmente correcto, en el cual rodea con un círculo las diferencias de longitud entre ambas barras. Su respuesta a este interrogante es la siguiente: *“Es ocho centímetros y 1/3 de centímetro más larga”*

Concluimos el análisis de la respuesta de este alumno, diciendo que apreciamos en ella una clara influencia de los conocimientos y razonamientos de la fracción como significado de medida, trabajados en una única sesión de una hora y media. Podríamos afirmar que el aprendizaje de dicha sesión fue significativo para este alumno



ALUMNO/A: 11

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3}$

$\frac{5}{4}$

$\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es mayor la de $\frac{4}{3}$

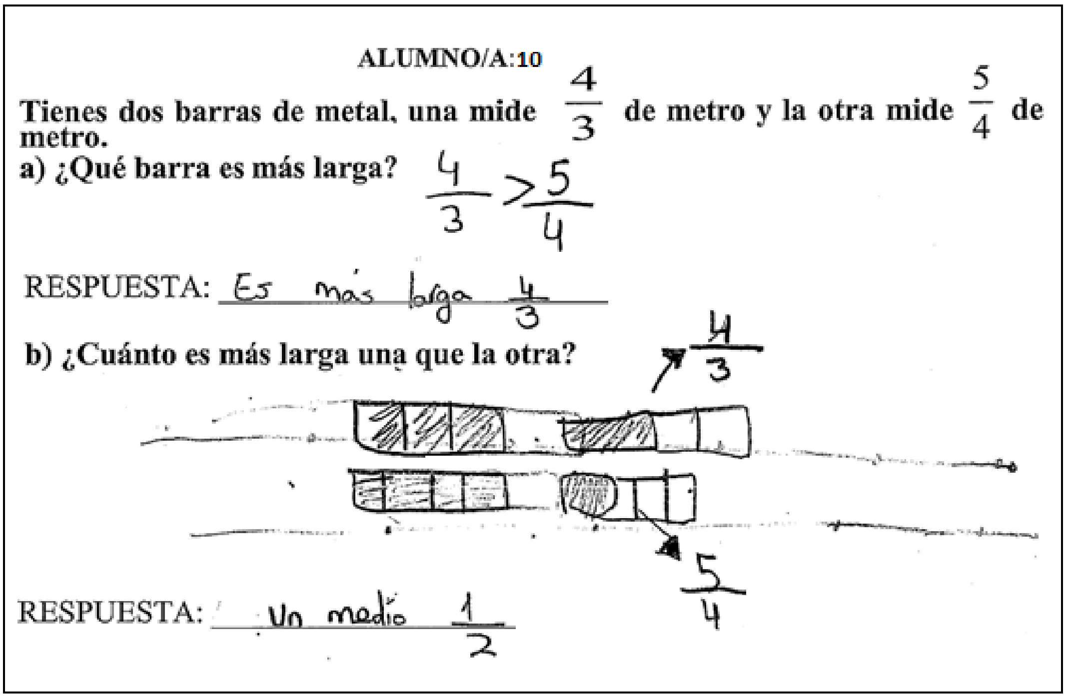
b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

RESPUESTA: Es mas larga una que la otra $\frac{1}{1}$

Por su parte el **alumno 11,** que resolvió incorrectamente el problema 1 en la prueba inicial, tras equivocarse aplicando la estrategia de la fracción de una cantidad, en esta ocasión recurre a la representación gráfica estrategia que aplica correctamente.

Puesto que el alumno 11 no se apoyó ni utilizó ninguna representación gráfica en la prueba inicial, para la resolución del problema 1, desconocemos si antes de la sesión de intervención sabía representar correctamente las fracciones impropias y en caso de saber hacerlo, si dicha representación le serviría para responder correctamente al problema. Sin embargo en su respuesta y método de resolución en el problema 3 notamos la influencia de las actividades de medida realizadas en la sesión de intervención. La alumna dibuja ambas barras, marcando con color en su interior la supuesta unidad, 1 metro fraccionado en el número de partes que indican los denominadores de cada fracción, quedando en blanco las subunidades o partes necesarias para completar la medida de las barras. A demás apreciamos que la alumna identifica la cantidad de longitud que marca la diferencia entre ambas barras, ya que la rodea con un círculo, el cual relaciona mediante una flecha con la respuesta del segundo interrogante del problema, a pesar de que la fracción utilizada (1/1) para designar dicha cantidad es incorrecta.

Teniendo en cuenta que a ningún alumno se le reveló el resultado de la prueba inicial, ni se le hicieron correcciones al respecto, el **alumno 11** modifica totalmente su forma de resolver y afrontar el problema 3, frente a la forma en que abordo el problema 1 en la prueba inicial, ya que no se apoya en el fracción de una cantidad para buscar una respuesta. Por este motivo concluimos el comentario de la respuesta de este alumno con la apreciación de una notable influencia de la sesión realizada.



ALUMNO/A:10

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga? $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$

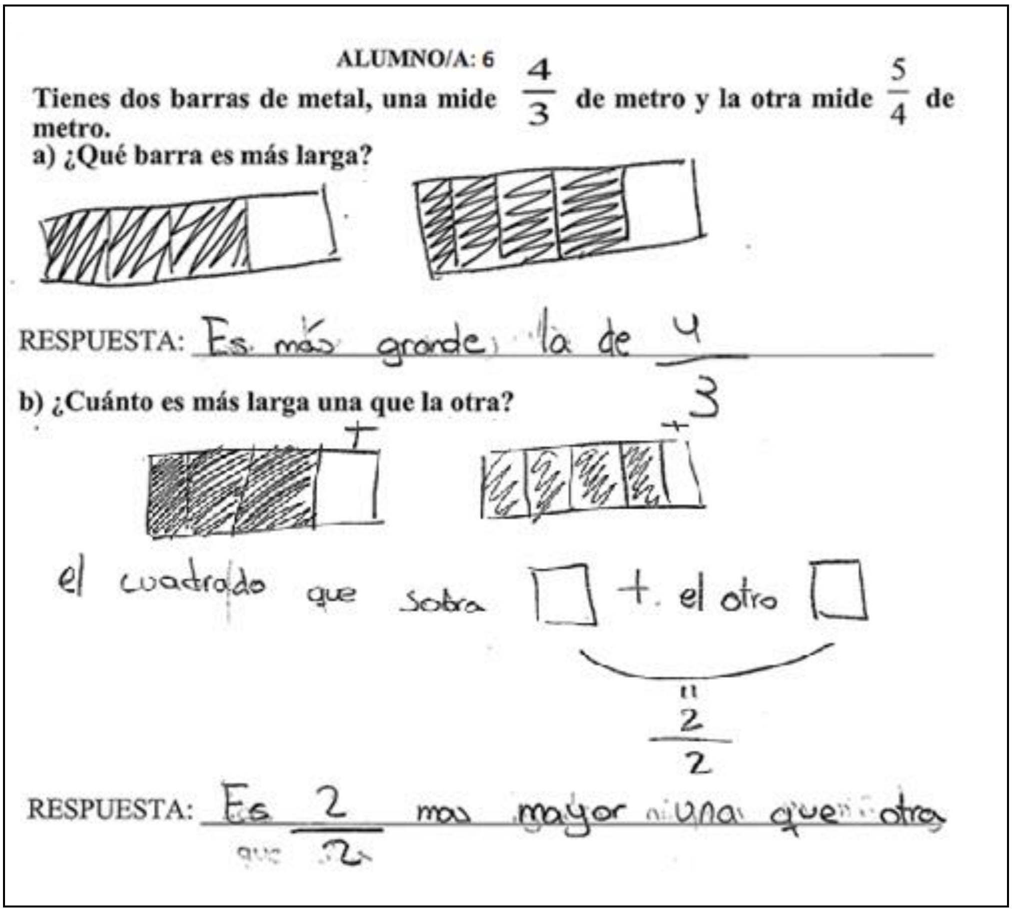
RESPUESTA: Es más larga $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

RESPUESTA: Un medio $\frac{1}{2}$

El **alumno 10**, por su parte muestra una evolución similar al **alumno 11** ya que en la prueba inicial, resolviendo el *Problema* 1, no recurría a la representación ni a ninguna otra estrategia razonada o reconocida, simplemente aparentaba fundamentar su respuesta en la comparación de los números que conformaban los numeradores de la fracción. Nada que ver con esto tiene que ver lo que nos muestra, ahora, en su respuesta y resolución al *Problema 3*. Como podemos apreciar en la imagen ahora recurre a la representación gráfica de la fracciones, que aunque no es la más clara, en ella si se aprecia la conservación del tamaño de la unidad y la diferencia de tamaño en las subunidades.

Podemos concluir en el ejemplo de este a alumno, que ha pasado de no saber cómo resolver el ejercicio, planteado en la prueba inicial, guiándose a por la comparación de los numeradores o denominadores como si fueran números naturales (idea totalmente equivocada al tratarse de la comparación de fracciones), a utilizar una estrategia de comparación mediante una representación gráfica, conservando el tamaño de la unidad de referencia e identificando el valor de los denominadores, en el problema de la prueba final.


ALUMNO/A: 6

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

RESPUESTA: Es más grande la de $\frac{4}{3}$

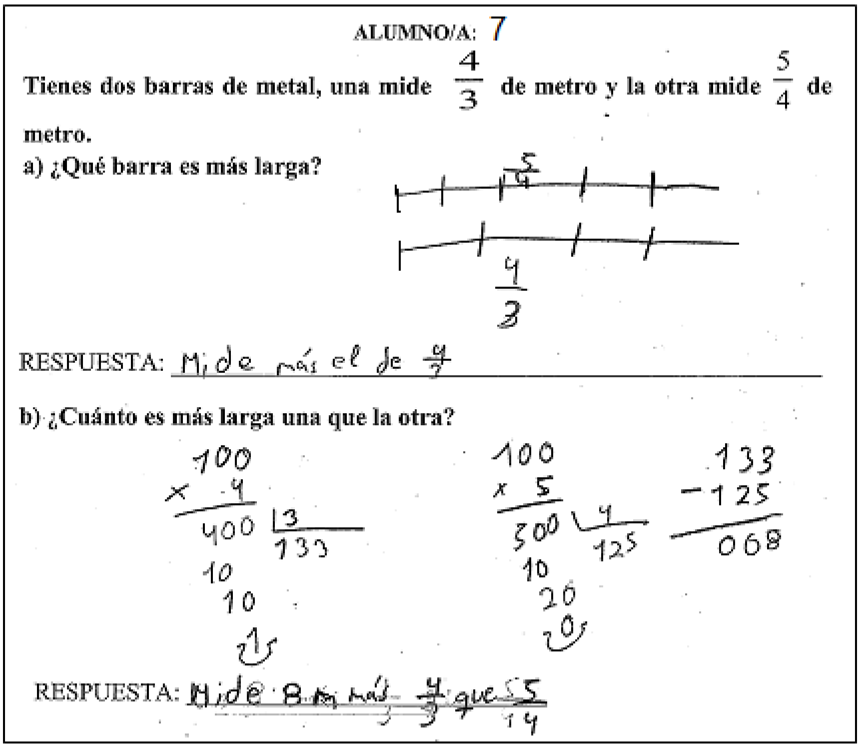
b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

el cuadrado que sobra □ + el otro □ = $\frac{2}{2}$

RESPUESTA: Es $\frac{2}{2}$ mas mayor una que otra

En la respuesta del **alumno 6** como podemos ver responde de forma correcta a la primera pregunta, y de hecho podemos afirmar que resuelve correctamente el problema mediante le representación de gráficos. A primera vista parece que ha representado las fracciones reciprocas, pero si nos fijamos bien en los dibujos apreciamos que las parte coloreada de cada barra, representan la unidad, y que están fraccionadas den en partes iguales, la cuales podemos apreciar que son más grandes las referidas a tercios, que a cuartos. Si nos fijamos bien además podremos distinguir que las partes no coloreadas de cada dibujo, en verdad representan el 1/3 y 1/4 , respectivamente que completan la medida de las barras junto a la unidad.

Hemos de destacar también que este alumno, en la resolución del *Problema1* de la prueba inicial había recurrido también a la estrategia de representar gráficamente, aunque en esa ocasión dibujó fracciones reciprocas y no conservó la misma unidad en la representación de los dos listones. Ahora como podemos ver tras nuestra intervención ha modificado su forma de ejecución, representado correctamente de manera gráfica el problema. Sin embargo el razonamiento equivoco y la respuesta errónea dada a la segunda pregunta del problema nos muestran que no sabe diferenciar la cantidad que hace que la barra de 4/3 se más larga que la de 5/4, aunque insistimos en que sí ha resuelto correctamente de manera gráfica el problema, lo que podemos considerar también como un indicio de mejoría.



ALUMNO/A: 7

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

RESPUESTA: Mide más el de $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

RESPUESTA: Mide 8 más $\frac{4}{3}$ que $\frac{5}{4}$

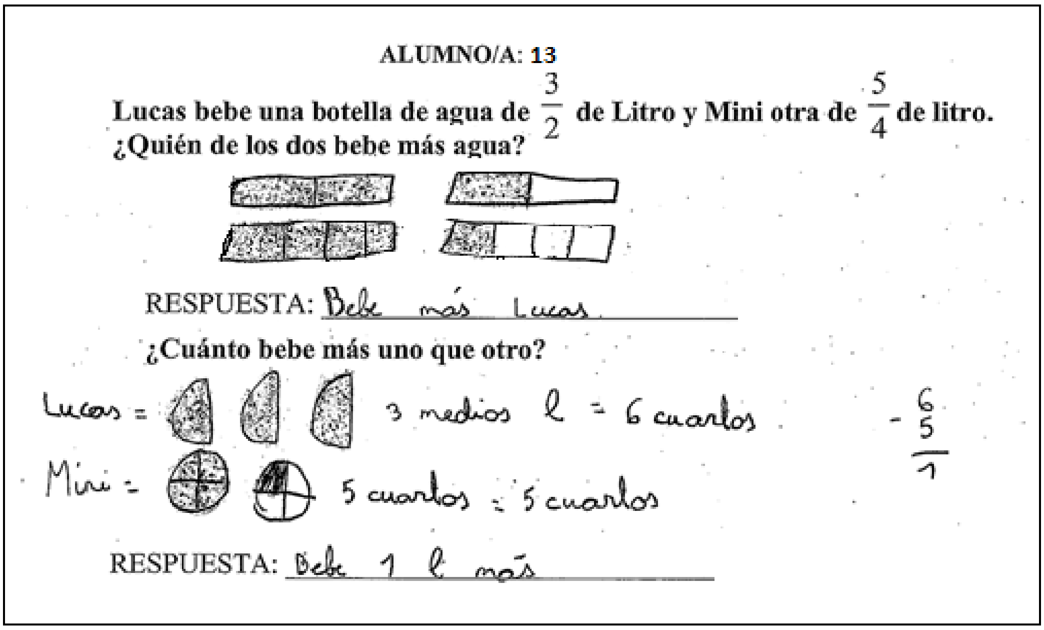
El **alumno 7**, como podemos contemplar en la su respuesta, realiza una representación gráfica correcta de cada barra, en la que se puede contemplar dentro, la unidad de referencia marcada, fraccionada en cada caso en sus respectivas subunidades. Además el alumno tras haber representado gráficamente la respuesta del problema, en la segunda presunta, para extraer la diferencia de medida, recurre a la estrategia de fracción de un número para expresar mediante la representación de un número natural dicha cantidad, y así reafirmar su respuesta.

Hemos de destacar en la evolución de este alumno que, al igual que muchos otros de sus compañeros, en la resolución del *Problema 1* de la evaluación inicial erró al intentar resolver gráficamente el problema, ya que demostró no saber representar gráficamente las fracciones impropias, y además no conservaba la misma unidad en ambos dibujos. Ahora, tras la sesión de intervención realizada, podemos decir que se ha producido un cambio.

Finalmente, a pesar de no mostrar las imágenes debido a que se repiten resoluciones, razonamientos y mejorías respecto a las respuestas del *problema 1* y del *problema 3,* en los alumnos 12, 14, 16, y 24, recomendamos echar un vistazo a las tablas de los anexos en donde se pueden comparar los cambios y la evolución de las estrategias de los alumnos.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS AL RESOLVER EL PROBLEMA 4

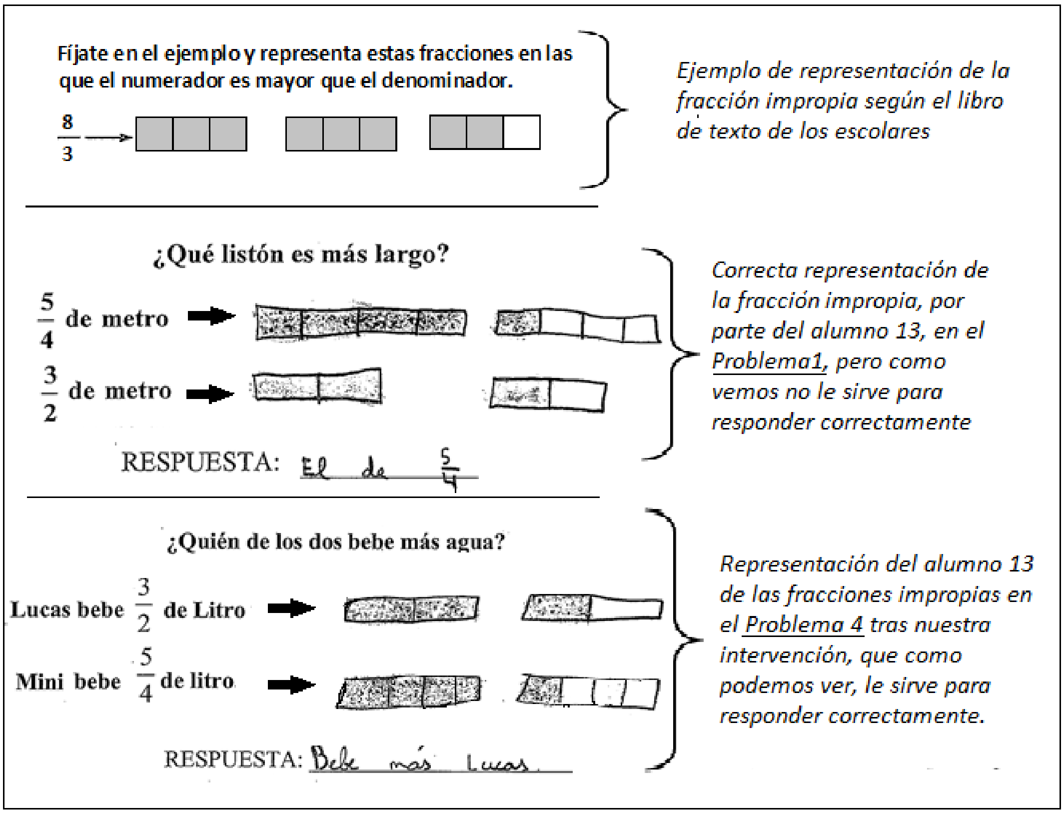
Antes de adentrarnos en el análisis de las respuestas de los alumnos en la resolución del problema 4, queremos destacar que algunas de las respuestas más destacadas en la mejoría respecto de la resolución del *Problema 1,* frente a este, debido a la semejanza entre el *Problema 3* y el *Problema 4*, muchas de esas respuestas merecen el mismo comentario y la misma conclusión que algunas de las que ya hemos citados anteriormente en el análisis del *Problema 3*, en algunos casos coincidiendo incluso el alumno autor de la respuesta como son el caso de los alumnos 1, 7 ó 10. Por esa razón a continuación analizamos exclusivamente aquellas respuestas que han presentado una evolución y mejoría respecto al resultado obtenido frente al *Problema 1.*que distan bastante las analizadas anteriormente en el *Problema 3*. Esas respuestas son:



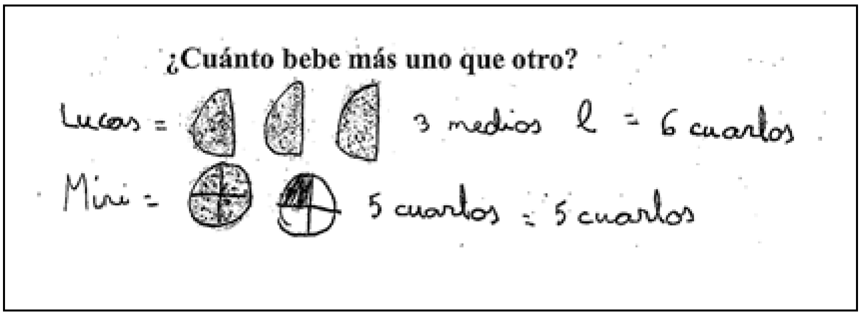
Destacamos la respuesta del **alumno 13,** debido a las dos representaciones gráficas realizadas, para responder correctamente a la pregunta.

En la primera representación, como podemos obsevar, el alumno hace dos dibujos utilizando formas rectagulares para representar las fracciones. En el lado izquierdo apreciamos lo que simbolizaría la unidad fraccionada en las partes iguales que indican los denominadores de las corespondientes fraciones, pintanda por completo. En el lado derecho, vuelve a dibujar de nuevo la unidad fraccionada en las partes iguales que indican los denominadores, pero esta vez solo aparecen coloreadas las partes o subunides necesarias (1/2 y 1/4 respectivamente), para completar el número de partes o subunidades con el que el alumno representa el numerador de las fracciones.

Hemos de resaltar en esta representación, tras nuestra intervención, que es igual a la que proponia el libro de texto de los escolares para representar las fracciones impropias, pero únicamente a nivel gráfico, ya que como hemos comentado anteriormente en el libro de texto no hacen ninguna referencia a la fracción como medida. Para entender mejor este último comentario así como la evolución del alumno exponemos la siguiente imagen:



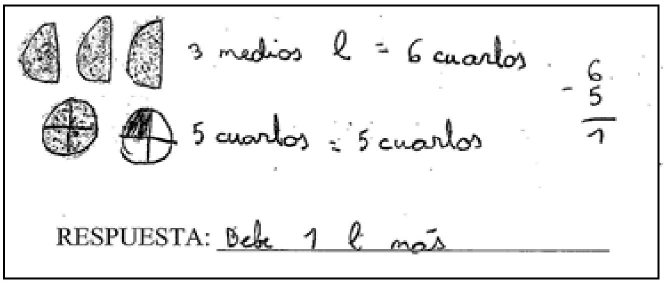
Siguiendo con el cometario respecto a la resolución **del alumno 13** en el *Problema 3,* decíamos que hacía dos representaciones. La primera ya la hemos visto en la imagen anterior y la segunda es la siguiente:



Como observamos para responder a la segunda pregunta del problema este alumno nos sorprende con la representación gráfica que exponemos arriba de estas líneas. Es el único alumno que ha respondido de esta manera. Ha vuelto a representar las fracciones impropias pero esta vez de forma diferente, ha cambiado la forma rectangular por la circunferencia. Como vemos en este dibujo cuando representa la cantidad de agua que bebe Lucas, ya no dibuja dos unidades, una fraccionada en dos partes iguales, totalmente coloreada, y otra unidad también fraccionada en dos partes iguales, pero en esta ocasión coloreando solo una de ella. Lo que ha hecho el alumno ha sido dibujara tres subunidades de tamaño 1/2 (medias circunferencias) a las que el propio alumno denomina como 3 medios.

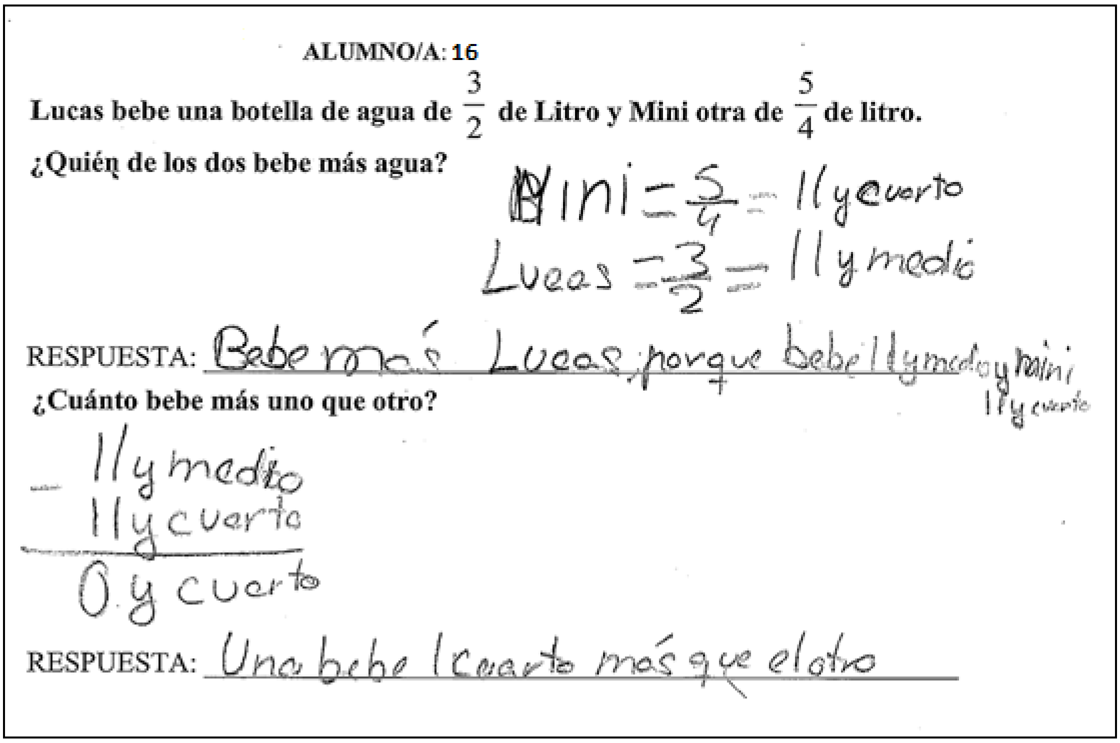
Cuando representa la cantidad que bebe Mini, dibujando la unidad (en forma de circunferencia,) dos veces, fraccionada en cuatro partes iguales y colorea las cuatro porciones de la primera circunferencia y una única porción (1/4) de la segunda. Tras el dibujo de la cantidad que bebe cada niño, con su respectiva denominación, 3 medios y 5 cuartos, respectivamente, el alumno establece la siguiente igualdad:

3medios = 6 cuartos



Como podemos ver en la imagen y en la igualdad que hemos transcrito en letras grades arriba de la misma, el alumno usa la idea de equivalencia. Seguidamente resta seis menos cinco obteniendo 1 como resultado y respuesta. Pero como apreciamos en la imagen el alumno parece no caer en la cuenta de que el número 1 obtenido de la resta de 6 cuarto y 5 cuarto es un cuarto y por ello expresa como respuesta: *"bebe 1l. más"* Este error puede estar relacionada con la influencia de pensar en números naturales.

Finalmente y para concluir el comentario de la respuesta de este alumno, queremos destacar el hecho de que haya llegado por sí mismo a la idea de equivalencia, la cual no introducimos en nuestra intervención de forma directa, pero que tampoco la hemos visto explicada en el texto escolar. Además constatamos que este alumno tiene una buena comprensión de la fracción con significado de medida como consecuencia de la implementación de nuestra breve propuesta de enseñanza.



ALUMNO/A: 16

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

Mini $= \frac{5}{4} =$ 1l y cuarto

Lucas $= \frac{3}{2} =$ 1l y medio

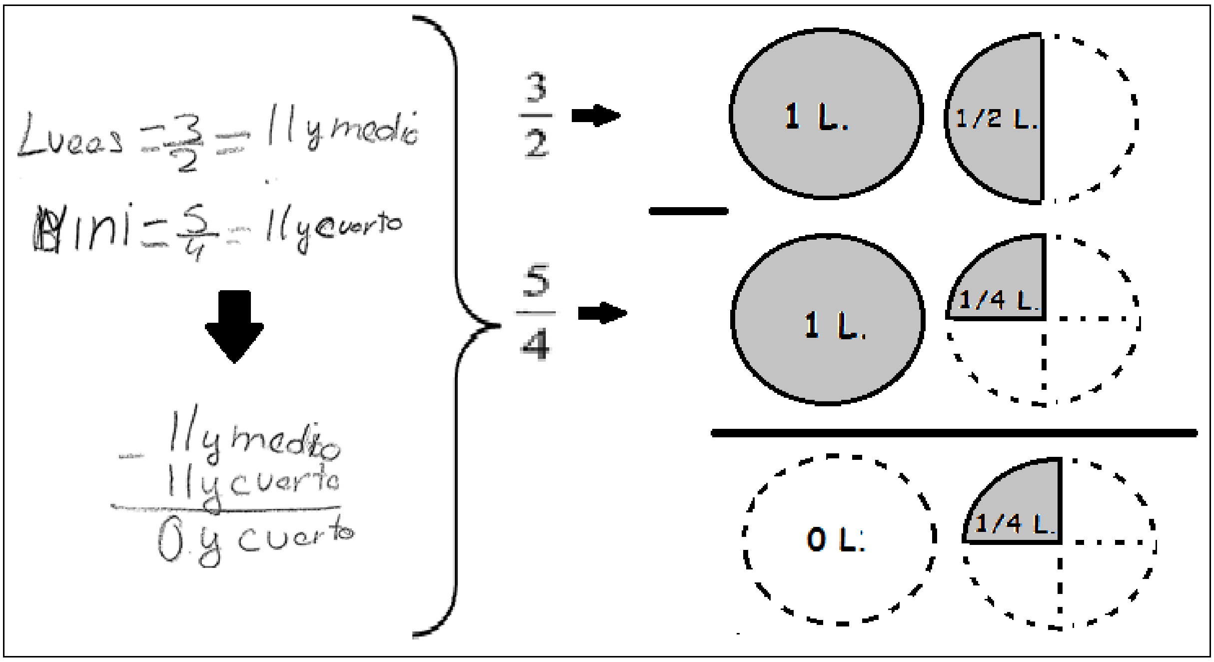
RESPUESTA: Bebe más Lucas, porque bebe 1l y medio y mini 1l y cuarto

¿Cuánto bebe más uno que otro?

− 1l y medio
1l y cuarto
0 y cuarto

RESPUESTA: Uno bebe 1 cuarto más que el otro

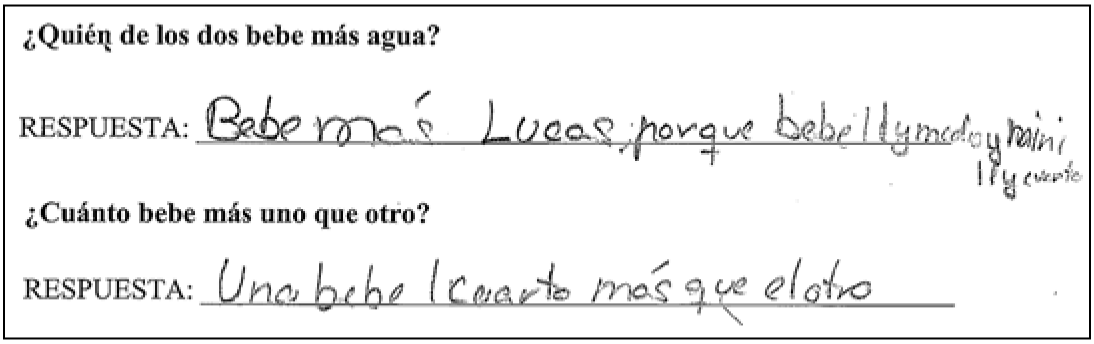
El **alumno 16** nos sorprende también con una resolución única y totalmente distinta a las que habíamos visto hasta hora. Prácticamente podemos decir que el alumno representa de forma escrita las fracciones. Es difícil de explicar por escrito la interpretación de la repuesta de este alumno, por ello presentamos el siguiente dibujo para simbolizar la construcción que el alumno pudo elaborar en su cabeza, y que en lugar de expresar mediante el dibujo de circunferencias o barras fraccionadas, representó escribiendo que ***5/4= 1l. y cuarto*** y ***3/2= 1l. y medio:***



Con este dibujo que hemos realizado pretendemos interpretar la respuesta y el razonamiento del alumno. Recordamos que este alumno fue uno de los dos alumnos que en la resolución del *Problema 1*, representaron gráficamente las fracciones utilizando circunferencias, por esa razón hemos utilizado circunferencias en nuestro dibujo de la posible interpretación mental del alumno, aunque en aquella ocasión pese a representar correctamente la fracción impropia, sus dibujos no le sirvieron para responder con éxito al problema. En este aspecto podemos decir que su caso se parece mucho al del alumno 13 comentado anteriormente.

Otro detalle interesante a comentar sobre la respuesta del alumno, que la relacionaría directamente con nuestra intervención, es que el alumno al establecer las igualdades de: *5/4 (de litro)= 1l. y cuarto* y *3/2 (de litro)= 1l. y medio*, está utilizando la unidad de capacidad (el L.) y además lee la fracción interpretando que tenemos una unidad de litro entera en ambas cantidades y que tenemos una segundad unidad la cual hemos fraccionado en cuartos y medios respectivamente. No queremos ocultar tampoco, que en el momento de realizar la prueba final los alumnos estaban trabajando la unidad del libro de texto referida a la magnitud de capacidad, factor que también pudo haber influido.

Queremos destacar también que el **alumno 16** responde correctamente y de forma muy lógica a las dos preguntas que plantea el problema, las cuales exponemos a continuación, demostrando en este problema que interpreta correctamente las fracciones y entiende su significado, y que aplica la idea de equivalencia:


¿Quién de los dos bebe más agua?

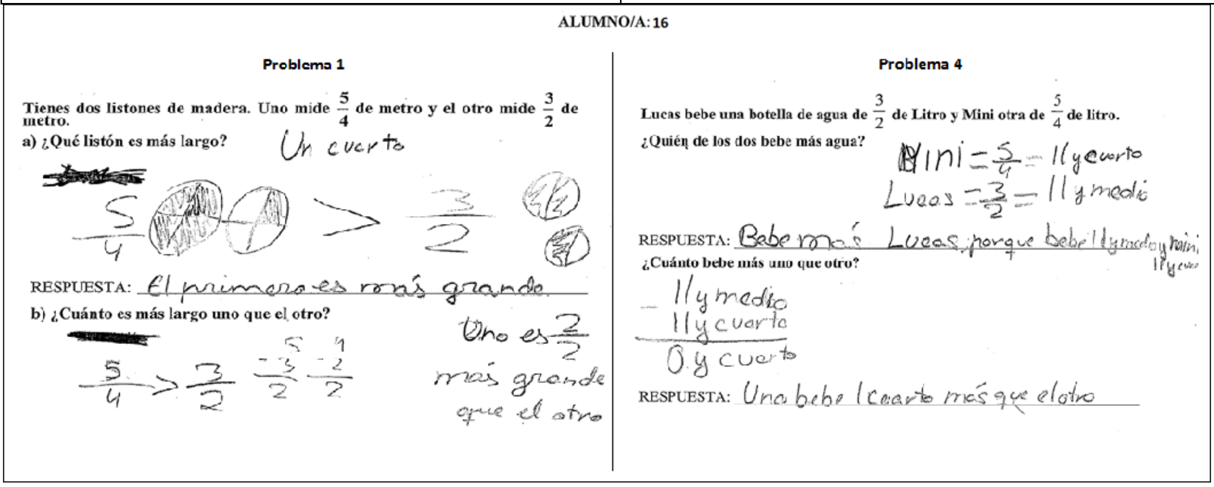
RESPUESTA: Bebe más Lucas, porque bebe 1l y medio y Mini 1l y cuarto

¿Cuánto bebe más uno que otro?

RESPUESTA: Una bebe 1 cuarto más que el otro

Es posible someter a debate si nuestra intervención ha influido o no en este alumno, para que resuelva como hemos visto en la imagen el *Problema 4*, por eso mismo queremos recordar que en la prueba inicial su respuesta y razonamientos fueron erróneos y distan mucho de asemejarse a lo que acabamos de ver, ya que no tenía relacionadas la idea de fracción con la de resultado de una medida. Por esa razón exponemos a continuación una imagen que contiene su repuesta tanto al *Problema* 1 como al *Problema 4*, para que podamos apreciar la evolución y cambión de razonamiento del alumno, tras la realización de nuestra propuesta:

Antes de nuestra intervención	Después de nuestra intervención



Conclusiones de la prueba final.

Los datos obtenidos en esta prueba final, como hemos visto en las tablas, nos muestran de nuevo que el grupo-clase aún sigue teniendo un pobre concepto de la fracción. No obstante y tras el análisis de los resultados de la prueba final hemos de decir que percibimos una evolución positiva frente a los datos obtenidos y analizados en la evaluación inicial. Ahora los alumnos no solo asocian la fracción a la idea de la parte de un todo, sino, que además también han interiorizado una relación entre la fracción y la acción de medir cantidades de magnitud. Esta relación, que la han demostrado también muchos de los alumnos que no han resuelto satisfactoriamente los *problemas 3 y 4,* la percibimos en acciones de los escolares como la representaciones gráficas, la conservación de la unidad en la representación y comparación de los dibujos, el no recurrir como única estrategia al uso de técnicas operatorias (fracción de un numero) e incluso establecer la idea de equivalencia.

Tras la sesión y los resultados de la prueba final, también resaltamos según los razonamientos analizados en los ejercicios de los alumnos, una mejor comprensión de los significados del numerador y del denominador, como veíamos en el análisis de respuestas tan claras como las del **alumno 1** a los *Problemas 3 y 4,* el **alumno 11** en el *problema 3* y los **alumnos 13 y 16** en el *Problema 4*

Como exponíamos en la introducción del capítulo 5 del presente trabajo, pretendíamos diseñar y poner en práctica una propuesta didáctica de la enseñanza de la fracción, que eludiera los puntos débiles de la enseñanza tradicional de la fracción desde la relación parte-todo. Por los motivos ya explicados anteriormente, no dispusimos del tiempo deseado para ejecutar nuestra propuesta, ajustándonos al escaso tiempo facilitado. Tras analizar la prueba final para contrastar los resultados obtenidos con los de la prueba inicial, nos encontramos con los siguientes datos:

COMPARACIÓN DE RESULTADOS ENTRE LA PRUEBA INICIAL Y LA PRUEBA FINAL					
RESULTADOS GLOBALES DELA PRUEBA INICAIL		RESULTADOS GLOBALES DELA PRUEBA DE EVALUACIÓN			
Problema 1 (Listones de madera)		Problema 3 (Barras de metal)		Problema 4 (Botellas de agua)	
BIEN	MAL	BIEN	MAL	BIEN	MAL
2/24	22/24	12/25	13/25	9/25	16/25
9%	91%	48%	52%	36%	64%

La pregunta que nos sugiere la visualización de la tabla con los resultados entre ambas pruebas es ¿qué hubiera sucedido sin en lugar de disponer de una única sesión de un hora y media de tiempo, hubiéramos impartido más sesiones bajo la dinámica y metodología de nuestra propuesta? Respaldándonos en los datos obtenidos en el presente trabajo y en el trabajo y la experimentación realizada por Escolano 2007, y la puesta en práctica anteriormente de esta misma propuesta, en un grupo de sexto curso de Primaria, para repasar y fortalecer el concepto de fracción, durante la realización de las Practicas Escolares II, podemos conjeturar que hubiéramos obtenido unos resultados mejores.

Conclusiones después del análisis de la prueba final

Después de analizar los resultados obtenidos por los alumnos al resolver los problemas de la prueba final y mostrar algunas de las respuestas más destacadas, constatamos que:

- Las acciones de medida realizadas durante la implementación de la propuesta ha permitido a los alumnos obtener mejores porcentajes de éxito si se comparan con los obtenidos en el *Problema 1*.

- Los alumnos influenciados por la nueva propuesta han comprendido la representación de la fracción como resultado de una cantidad de magnitud. Este hecho, junto con las acciones de medir, constatan que comprenden y representan mejor las fracciones impropias, cuestión imposible de abordar desde la relación parte-todo.

- La gran mayoría de los alumnos ha resuelto el problema acudiendo principalmente a la estrategia de representar gráficamente las fracciones, eludiendo muchos de los errores que contemplábamos en el análisis del *Problema 1*. Se ha incrementado el número de representaciones correctas. En estas representaciones, además es muy notable la diferenciación o señalización de la unidad de medida.

- En la comparación de las fracciones y los dibujos también apreciamos la utilización o conservación de la misma unidad en ambas fracciones, ya que como exponíamos en el las conclusiones del análisis del *Problema 1*, en este, aunque representaban correctamente ambas fracciones, la unidad de ambas era un 1 m., sin embargo los alumnos expresaban en sus dibujos distintas longitudes guiándose por el tamaño de los números naturales. Ahora podemos decir que más de la mitad de los alumnos no han cometido ese error. Los alumnos ha mejorado su comprensión de la unidad de medida, lo que les permite usarla con propiedad para medir cantidades de magnitud.

- Podemos concluir que después de nuestra intervención la percepción del significado de la fracción como medida ha aumentado considerablemente.

7. Conclusiones del trabajo.

1. Consideramos que los objetivos de este trabajo fin de grado se han alcanzado por cuanto nos han permitido lo siguiente:

1.1 Realizar una revisión teórica de la enseñanza inicial del concepto de fracción en Educación Primaria a partir de la lectura de trabajos de investigación realizados, fundamentalmente, desde la línea de Pensamiento Numérico y Algebráico.

1.2 Analizar la enseñanza habitual de la fracción tomando como referencia estudios de investigación y el análisis la propuesta didáctica de una editorial de libros de texto de 4º curso para constatar que toda la introducción de este concepto se sustenta prioritariamente en la relación parte-todo.

1.3 Constatar con un grupo natural de 4º curso de Educación Primaria las dificultades de comprensión de la fracción que investigadores como Gairín y Escolano (2005) vinculan a la priorización de la enseña de la fracción desde la relación parte-todo y a la ausencia de otros significados como el de medida de cantidades de magnitudes continuas que es coherente con la génesis histórica de este concepto matemático. Para ello se han analizado en profundidad las respuestas de los escolares de 4º curso cuando se han enfrentado a la resolución de dos problemas que constituyen la prueba inicial.

1.4 Diseñar, implementar y analizar una propuesta parcial de enseñanza de la fracción en un grupo natural de 4º curso de un Colegio concertado de la ciudad de Zaragoza.

1.5 Analizar los resultados obtendidos por los alumnos del grupo natural que después de haber recibido enseñanza de la fracción se enfrentan a la resolución de dos problemas que constituyen la prueba final.

2. Como consecuencia de los análisis efectuados sobre las producciones de los estudiantes constatamos que es factible una propuesta didáctica alternativa a la tradicional enseñanza sustentada en la relación parte-todo. En efecto, nuestra breve

experimentación avala los resultados de Escolano (2007) sobre la viabilidad de una propuesta didáctica de la fracción fundamentada en la medida de cantidades de magnitud continuas.

3. Las respuestas que dan los alumnos a las tareas propuestas indican la desaparición de obstáculos didácticos que, como hemos manifestado, se producen si en la instrucción se utiliza la relación parte-todo: las fracciones propias e impropias tienen el mismo estatus como expresión de cantidades de magnitud; las fracciones son entes numéricos asociados a la medida y la unidad de medida juega un papel esencial para interpretar las fracciones. Además, los alumnos perciben que la fenomenología asociada a la fracción difiere sustancialmente de la del número natural. Para los alumnos la fracción surge como una necesidad para dar respuesta a problemas en los que los números naturales se muestran insuficientes, situaciones en las que el resultado de la medida no puede expresarse con un número natural.

4. Al analizar los resultados obtenidos por los alumnos en la prueba final concluimos que tras nuestra intervención los alumnos mejoran su comprensión de la fracción considerablemente porque aumenta la tasa de éxito cuando resuelven problemas de comparación de fracciones impropias y porque utilizan representaciones gráficas apropiadas para representar las fracciones como consecuencia a que perciben con nitidez la unidad de medida. En efecto, podemos afirmar que los alumnos que intervienen en las fases experimentales desarrollan ideas adecuadas de la fracción como resultado de una medida cuando interactúan con distintos sistemas de representación (manipulativos, gráficos y verbales).

5. Hemos presentado una propuesta que en la fase experimental ha mostrado más ventajas que inconveniente respecto a la enseñanza tradicional; queda el desafío de que otras investigaciones confirmen la incidencia de dicha propuesta en un incremento de la comprensión de los escolares y, caso de ser así, queda el reto de formar a los profesores para que enseñen de forma diferente a como aprendieron.

8. Bibliografía.

- BROUSSEAU, G.(1983) *Problemas en la enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales.* Universidad de Córdoba, Argentina

- CASTRO, E., RICO, L. y ROMERO, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15, 3*, pp. 361-371

- ESCOLANO, R. (2004). "Presencia histórica de la fracción en los libros de texto del sistema educativo español". Comunicación presentada al Grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. La Coruña, 10 al 13 de septiembre de 2004.

- ESCOLANO, R. y GAIRIN, J,M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión, Nº 1* (Abril, 2005) Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)

- ESCOLANO, R. (2007) Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

- FREUDHENTAL, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Reidel Publishing Company. Dordrecht. Holland

- GAIRIN, J. M. (1999). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

- GAIRIN, J. M. (2001). "Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción". Aula. Revista de Enseñanza e Investigación Educativa, VOL. 10, pág. 41-64

- GAIRIN, J. M. (2004). Números racionales. Modelos y significados. En: Rico, L. (Edit): *El número, agente integrador del conocimiento*. (pp. 99-124). Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

- GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), pp. 325-355

- MEC (2010). ÍTEMS LIBERADOS, EVALUACIONES DE EDUCACIÓN PRIMARIA. Versión 1.0. Evaluación general de diagnóstico 2009. Educación Primaria. Cuarto curso. SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL. DIRECCIÓN GENERAL DE EVALUACIÓN Y COOPERACIÓN TERRITORIAL. Instituto de Evaluación. Madrid.

- MORCOTE, O. Y FLORES, P. (2001). “Análisis del conocimiento didáctico sobre las fracciones en un texto escolar de 1º de ESO”. En: BERENGUER, J., COBO, B. y NAVAS, J. (Edits.): Investigación en el aula de matemáticas. Retos de la educación matemática del siglo XXI**.** Facultad de Ciencias de la Educación de Granada.

- PEÑA ROMANO, M. (2012).”Conecta 2.0, matemáticas, 4 Educación Primaria. 2º trimestre” Madrid, ED. SM.

- RICO, L. y CASTRO, E. (1995). Pensamiento numérico en Educación Secundaria Obligatoria. *Aspectos didácticos de Matemáticas, 5.* Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Zaragoza.

9. Anexos.

Índice de Anexos

Anexo I:. Tabla de resultados de la prueba inicial

	EVALUACIÓN INICIAL	
Alumnos	**Problema 1**	***Problema 2**
1	B, Resolución mediante la fracción de un número. (Aplica la fracción a 100 cm.)	B, Muestra una buena comprensión de la fracción. Con una muy buena representación gráfica.
2	*Este alumno no realizó la prueba en bajo nuestra supervisión por falta de asistencia a clase y sospechamos que la hizo con ayuda de alguien debido a la brillante resolución y razonamiento, que no demostrará en la ejecución de la evaluación final, por ello no la contabilizamos en los resultados obtenidos en esta prueba.*	
3	B, Resolución mediante la fracción de un número. (Aplica la fracción a 100 cm.)	B, Muestra una buena comprensión de la fracción, con una muy buena representación gráfica.
4	M, Reconoce cual es la fracción que expresa mayor cantidad pero no lo justifica correctamente, resuelve mediante una Fracción de 10 y no aplica bien la operación.	B, Muestra una buena comprensión de la fracción.
5	M Reconoce cual es la fracción que expresa mayor cantidad pero no lo justifica correctamente, resuelve mediante una Fracción de 10 y no aplica bien la operación.	M, No razona
6	M, Resuelve con gráficos pero dibuja fracciones reciprocas y no conserva la misma unidad.	M, Mal planteamiento.
7	M, Utiliza reglas falsas, compara numerador y denominador y resta ambos numeradores y denominadores entre sí y con el resultado forma una nueva fracción. A demás no representa correctamente la fracción impropia dibuja fracciones reciprocas y no conserva la misma unidad.	B, Muestra una buena comprensión de la fracción. Se apoya en un gráfico.
8	M, Muchos errores. A demás no representa correctamente la fracción impropia y no conserva la misma unidad.	M, Mal planteamiento.
9	M, Sin justificación Indica cual es la fracción con más cantidad de magnitud, pero aplica un regla falsa (suma los números que componen cada fracción y luego haya la diferencia entre ambas cantidades) para demostrar cuanto más largo es.	M, Mal planteamiento. Confunde la unidad.
10	M, Sin razonar.	B, Muestra una buena comprensión de la fracción. No se apoya en gráficos.
11	M, Intenta resolver mediante la fracción de un número, pero establece fracciones de un número distintas.	M, Mal planteamiento. Con técnicas de cálculo.
12	M, Resuelve con gráficos, no representa correctamente la fracción impropia (dibuja una fracción reciproca) y no conserva la misma	M, No responde.

	unidad.	
13	**M**, Resuelve con gráficos, representa correctamente la fracción impropia pero no conserva la misma unidad.	**B**, Muestra una buena comprensión de la fracción. Resuelve con gráficos.
14	**M**, utiliza una regala falsa, compara sólo los numeradores, además gráficamente dibuja fracciones reciprocas	**B**, Falta justificación. No se apoya en gráficos.
15	**M**, Resuelve con gráficos pero dibuja fracciones reciprocas y no conserva la misma unidad. (responde que son iguales)	**M**, Mal planteamiento.
16	**M**, Resuelve con gráficos, representa correctamente la fracción impropia aunque no está claro sí conserva la misma unidad (dibuja la unidad en forma circular), pero aplica regla falsa (resta ambos numeradores y denominadores entre sí y con el resultado forma una nueva fracción).	**B**, Muestra una buena comprensión de la fracción. No se apoya en gráficos.
17	**M**, Resuelve con gráficos pero dibuja fracciones reciprocas y no conserva la misma unidad. Utiliza reglas falsas, resta numeradores y denominadores (en un principio afirma que son iguales).	**M**, Mal planteamiento.
18	**M**, Resuelve con gráficos, representa correctamente la fracción impropia pero no conserva la misma unidad. Además aplica dos reglas falsas (compara los numeradores y denominadores de ambas fracciones como si fueran números naturales y para hallar la diferencia resta ambos numeradores y denominadores entre sí y con el resultado forma una nueva fracción).	**B**, Muestra una buena comprensión de la fracción. No se apoya en gráficos.
19	**M**, Resuelve con gráficos pero dibuja fracciones reciprocas y no conserva la unidad.	**B**, Falta justificación. No se apoya en gráficos.
20	**M**, Resuelve con gráficos pero dibuja fracciones reciprocas. No está claro si conserva la unidad. Además aplica una regla falsa (resta ambos numeradores y denominadores entre sí y con el resultado forma una nueva fracción)	**M**, Mal planteamiento. No se apoya en gráficos.
21	**M**, No razona y aplica una regla falsa (suma el numerador y el denominador de las fracciones y compara el resultado obtenido)	**B**, Resolución mediante fracción de un número. No se apoya en gráficos.
22	**M**, Resuelve con gráficos, representa correctamente la fracción impropia aunque no está claro sí conserva la misma unidad (dibuja la unidad en forma circular), pero aplica regla falsa (resta ambos numeradores y denominadores entre sí y con el resultado forma una nueva fracción).	**B**, Muestra una buena comprensión de la fracción. No se apoya en gráficos.

23	M, Resuelve con gráficos pero dibuja fracciones reciprocas.	B, Muestra una buena comprensión de la fracción. No se apoya en gráficos.
24	M, Resuelve con gráficos pero dibuja fracciones reciprocas.	M, Obtiene el resultado correcto pero no hace un buen razonamiento y plantea operaciones erróneas con errores en los resultados. Representa gráficamente la fracción pero no la usa de apoyo para resolver el ejercicio. Comprende la unidad.
25	M, No razona y utiliza un regla falsa resta ambos numeradores y denominadores entre sí y con el resultado forma una nueva fracción para indicar la diferencia entre ambas longitudes	M, Mal planteamiento. Intenta resolver mediante la fracción de un número. No se apoya en gráficos.
RESULTADOS	**2/24 B 20/24M** **9% 91%**	**13/24B 11/24M** **54% 46%**
B= Bien **M= Mal** **R= Regular**		

Anexo II: Tablas comparativas de las distintas estrategias y aspectos relevantes, en la resolución de los alumnos en cada problema (Prueba inicial).

PROBLEMA 1 (LISTONES DE MADERA)																										
ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN		**Alumnos**																								**Total de Alumnos**
		1	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	
Resolución mediante la fracción de un numero	Aplica fracciones de 100Cm	**X**	**X**																							**2/24**
	Aplica fracciones de 10			**X**	**X**																					**2/24**
	Aplica fracciones a otros números (300 y 500)										**X**															**1/24**
Resolución mediante representación o apoyo gráfico	Representa correctamente las fracciones impropias												**X**			**X**		**X**				**X**				**4/24**
	No representa las fracciones impropias (Fracciones reciprocas)					**X**	**X**	**X**				**X**		**X**	**X**		**X**		**X**	**X**			**X**	**X**		**11/24**
	No hace las gráficas con la misma unidad					**X**	**X**	**X**				**X**	**X**	**X**	**X**	**¿?**	**X**	**X**	**X**	**X**		**¿?**	**X**	**X**		**13/24**
Utilización de reglas falsas	Compara numeradores como si fueran nº naturales													**X**												**1/24**
	Comparan numeradores y denominadores						**X**											**X**								**2/24**
	Restan numeradores y denominadores entre sí						**X**									**X**	**X**	**X**		**X**		**X**			**X**	**7/24**
	Suman los números que componen la fracción y calculan la diferencia entre ambas cantidades								**X**												**X**					**2/24**
No razonan o no se reconoce estrategia									**X**	**X**											**X**				**X**	**4/24**
No aplican bien las operaciones o cometen errores de calculo				**X**	**X**																					**2/24**
Referencia a la unidad de medida en el razonamiento o en las respuestas	No indican la unidad de mediada en la respuesta					**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**20/20**
	Indican la unidad en cm.	**X**	**X**																							**2/24**
	Indican la unidad en m.			**X**	**X**																					**2/24**
Resultado de la prueba	Satisfactorio **(BIEN)**	**X**	**X**																							**2/24**
	No Satisfactorio **(MAL)**			**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**22/24**

PROBLEMA 2 (DEPOSITO DE GASOLINA)																										
ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN		**Alumnos**																								**Total de Alumnos**
		1	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	
Resolución mediante la fracción de un número (por fracción de 100)		**X**	**X**	**X**			**X**			**X**	**X**			**X**	(FRACC. DE 25)	**X**	(FRACC. DE 25)	**X**	**X**	(FRACC. DE 25)	**X**	**X**	**X**	**X**	(FRACC. DE 25)	14/24 4/24
Resolución mediante Representación o apoyo gráfico	Representa correctamente la fracción	**X**	**X**	**X**			**X**						**X**											**X**		**6/24**
	No representa correctamente				**X**	**X**		**X**				**X**														**4/24**
No razonan correctamente o no se reconoce estrategia					**X**	**X**		**X**	**X**		**X**				**X**		**X**			**X**				**X**		**9/24**
No aplican bien las operaciones o cometen errores de calculo								**X**																**X**		**2/24**
Referencia a la unidad de medida en el razonamiento o en las respuestas	No indican la unidad de mediada					**X**																			**X**	**2/24**
	Indican la unidad en litros	**X**	**X**	**X**			**X**	**X**	**X**	**X**	**X**		**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**		**21/24**
Resultado del problema	Satisfactorio (**BIEN**)	X	X	X			X			X			X	X		X		X	X		X	X	X			**13/24**
	No satisfactorio (**MAL**)				**X**	**X**		**X**	**X**		**X**	**X**			**X**		**X**			**X**				**X**	**X**	**11/24**

Anexo III: Tabla de resultados de la prueba final

	EVALUACIÓN FINAL	
Alumnos	**Problema 3**	**Problema 4**
1	B, Resolución mediante fracción de un número.	B, Resolución mediante fracción de un número.
2	M	M
3	B, Resolución mediante fracción de un número.	B, Resolución mediante fracción de un número.
4	B, Resolución mediante fracción de un número (fracción de 100).	M, no lo hace
5	M, Resolución mediante fracción de un número (fracción de 10).	M, Mal
6	M, Resolución con gráficos.	M, Resolución con gráficos.
7	M, Resolución mediante fracción de un número.	B, Resolución mediante fracción de un número.
8	M	M, sin razonar.
9	M, Resolución con gráficos.	M, sin razonar
10	B, Resolución con gráficos.	B, Resolución con gráficos.
11	B, Resolución con gráficos.	B, Resolución con gráficos.
12	B, Resolución mediante fracción de un número (fracción de 100)	B, Resolución mediante fracción de un número (fracción de 100).
13	B, Resolución con gráficos pero no utiliza la misma unidad.	B, Resolución con gráficos, utiliza la equivalencia de fracciones.
14	M, Uso de regla falsa, resta numeradores y denominadores.	M, No razona.
15	M, Resolución mediante fracción de un número, mal aplicada.	B, No razona
16	B, Resolución con gráficos.	B, descompone la fracción en unidad y otra fracción menor.
17	M, Resolución con gráficos, dibuja fracciones reciprocas.	M, Utiliza un regla falsa, resta numeradores y denominadores.
18	M, Resolución con gráficos, no dibuja las unidades del mismo tamaño.	B, Resolución con gráficos, pero no dibuja las unidades del mismo tamaño.
19	M, Resolución con gráficos, dibuja fracciones reciprocas.	M, Resolución con gráficos, dibuja fracciones recíprocas.
20	B, Resolución con gráficos, dibuja fracciones reciprocas.	B, Resolución con gráficos, dibuja fracciones reciprocas.
21	M, Resolución con gráficos, dibuja fracciones reciprocas.	B, No razona.
22	B, Resolución con gráficos.	B, Resolución con gráficos.
23	M, Resolución con gráficos, dibuja fracciones reciprocas.	B, No razona.
24	B, Resolución con gráficos.	M, Resolución con gráficos, dibuja

		fracciones reciprocas.
25	B, Resolución con gráficos erróneos.	B, No razona.
RESULTADOS	**12/25B 13/25M** **48% 52%**	**9/25B 15/25M** **36% 64%**
B= Bien **M= Mal**		

Anexo IV: Tablas comparativas de las distintas estrategias y aspectos relevantes, en la resolución de los alumnos en cada problema (prueba final).

PROBLEMA 3 (BARRAS DE METAL)																											
Estrategias de resolución		**Alumnos**																									**Total de Alumnos**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	
Resolución mediante la fracción de un numero	Aplica fracciones de 100Cm	X		X	X			X					X														5/25
	Aplica fracciones de 10					X										X											2/25
Resolución mediante representación o apoyo gráfico	Representa correctamente las fracciones impropias	x					X				X	X		X			X		X								6/25
	No representa las fracciones impropias (Fracciones reciprocas)		X					X	X	X			X		X			X		X	X	X	X	X	X	X	16/25
	No utilizan la misma unidad para ambas fracciones		X						X	X			X	X			X		X	X		X		X		X	11/25
	Utiliza la misma unidad en ambas fracciones	X					X	X			X	X			X			X			X		X		X		11/25
Utilización de reglas falsas	Resta numeradores de ambas fracciones entre sí													X													1/25
	Restan numeradores y denominadores entre sí		X						X						X				X		X						5/25
	Multiplica el numerador por el denominador en ambas fracciones y resta los resultados																								X		1/25
No razonan o no se reconoce estrategia																		X		X	X	X	X	X		X	7/25
No aplican bien las operaciones o cometen errores de calculo						X										X											2/25
Referencia a la unidad de medida en el razonamiento o en las respuestas	No indican la unidad de mediada en la respuesta						x		X	X	X	X	X	X	X		X		X	X	X	X	X	X		X	17/25
	Indican la unidad en cm.	X		X	X																						3/25
	Indican la unidad en m.		X			X		X																			3/25
	Indican la unidad en dm															X											1/25
Resultado de la prueba	Satisfactorio **(BIEN)**	X		X	X	X	X	X			X	X	X	X			X								X		**12/25**
	No satisfactorio **(MAL)**		x						X	X					X	X		X	X	X	X	X	X	X		X	**13/25**

PROBLEMA 4 (BOTELLAS DE AGUA)																											
Estrategias de resolución		**Alumnos**																									**Total de Alumnos**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	
Resolución mediante la fracción de un número (100 cl.)		X		X				X					X														**4/25**
Resolución mediante representación o apoyo gráfico	Representa correctamente las fracciones impropias	X						X			X			X					X								**4/25**
	No representa las fracciones impropias correctamente		X				X					X	X							X	X	X	X		X		**10/25**
	No utilizan la misma unidad para ambas fracciones						X					X	X						X	X	X	X	X				**9/25**
	Utiliza la misma unidad en ambas fracciones	X						X			X			X											X		**4/25**
Utilización de reglas falsas	Restan numeradores y denominadores entre sí		X				X												X		X						**4/25**
	Multiplica el numerador y el denominador de cada fracción y calcula la diferencia entre ambos resultados																								X		**1/25**
No razonan correctamente o no se reconoce estrategia					X	X			X	X		X			X	X	X					X	X	X		X	**13/25**
Referencia a la unidad de medida en el razonamiento o en las respuestas	No indican la unidad de mediada en la respuesta										X	X			X	X	X	X	X	X			X	x		X	**10/25**
	Indican la unidad en cl.	X		X																							**2/25**
	Indican la unidad en l.		X			X		X					X	X							X				X		**7/25**
Resultado del problema	Satisfactorio **(BIEN)**	X		X				X			X		X	X		X	X							X			**9/25**
	No satisfactorio **(MAL)**		X		X	X	X		X	X		X			X			X	X	X	X	X	X		X	X	**16/25**

Anexo V: Ficha de trabajo para la sesión

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha: _______________**

ALUMNO/A:____

1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

_____ **de unidad**

2º. Escribe como se lee la superficie del mantel:

____

3º. Has fraccionado la unidad en _________ partes iguales.

4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

____

____

____

5º ¿Qué indica el denominador de la fracción?

____

____

____

Anexo VI: Respuesta de los alumnos al problema 1 (Prueba inicial)

ALUMNO/A: 1

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución: El de $\frac{3}{2}$

$100 \div 4 = 25$ (resto 0) $\quad 25 \times 5 = 125$

$100 \div 2 = 50$ (resto 0) $\quad 50 \times 3 = 150$

RESPUESTA: El lìston de $\frac{3}{2}$ de metros

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: $150 - 125 = 025$

RESPUESTA: Es 25 cm mas largo

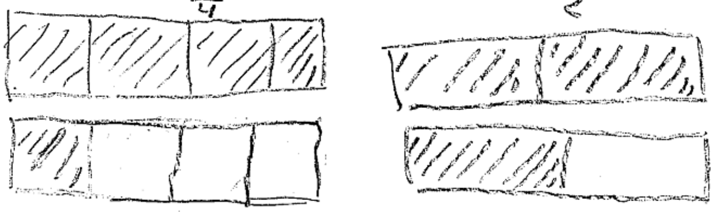
ALUMNO/A: 2

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:

$\frac{5}{4}$ $\frac{3}{2}$



$\frac{3}{2} \times 2 = \frac{6}{4}$ $\quad \frac{6}{4} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Mide mas el de $\frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: $\frac{6}{4} > \frac{5}{4}$ $\quad \frac{6-5}{4} = \frac{1}{4}$

RESPUESTA: $\frac{1}{4}$

ALUMNO/A: 3

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

1 m = 100

Resolución:

$\frac{5}{4}$ de 100 | 4 → 20, 0 → 25; 25 × 5 = 125

$\frac{3}{2}$ de 100 | 2 → 00 → 50; 50 × 3 = 150

RESPUESTA: Es más largo el de $\frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución:

$$\begin{array}{r} 150 \\ -\,125 \\ \hline 025 \end{array}$$

RESPUESTA: Es 25 cm más largo

ALUMNO/A: 4

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo? [redacted]

$$\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$$

RESPUESTA: Es más largo el listón que mide $\frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución:

$\frac{5}{4}$ de 10 — 10 | 5 → 0, 2; 2 × 4 = 8 m

$\frac{3}{2}$ de 10 — 10 | 2 → 0, 5; 5 × 3 = 15 m

$$\begin{array}{r} 15 \\ -\,8 \\ \hline 07\text{m} \end{array}$$

ALUMNO/A: 5

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución: ~~[illegible]~~

$\frac{5}{4}$ de $10 \,\underline{|\, 4}$; $-(2 \quad 2$

$5 \times 2 = 10$; $10 + 2 = 12$ — 12 m

$\frac{3}{2}$ de $10 \,\underline{|\, 2}$; $-(0 \quad 5$

$5 \times 3 = 15$; $15 + 0 = 15$ — 15 m

RESPUESTA: El más largo es el de $\frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

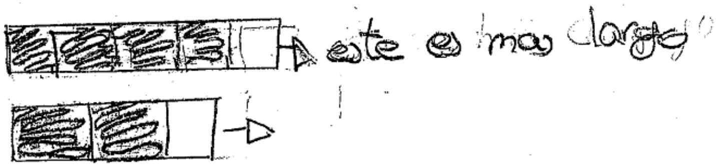
Resolución: 3 m más largo

ALUMNO/A: 6

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:



RESPUESTA El primero es el listón más largo

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

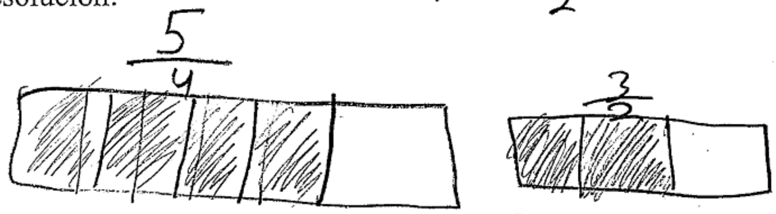
Resolución: ~~En~~ $\frac{2}{2}$ más largo uno que otro

ALUMNO/A: 7

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo? $\frac{5}{4} > \frac{3}{2}$ $5>3$ $4>2$

Resolución:



RESPUESTA: es mayor $\frac{5}{4}$ que $\frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: $\frac{5-3}{2}$ $\frac{4-2}{2}$ $\frac{2}{2}$

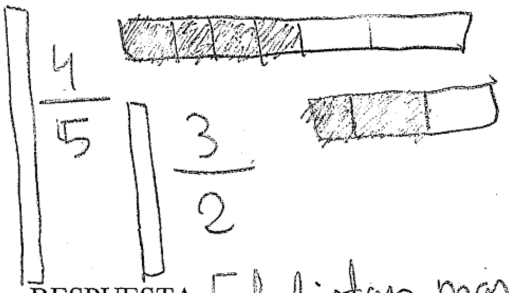
RESPUESTA: Es más largo $\frac{5}{4}$ por

ALUMNO/A: 8

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución: El liston mas la es el de $\frac{5}{4}$ cinco cuartos.



RESPUESTA: El liston mas larga es $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: Es dos cuartos mayor que el otro

RESPUESTA: $\frac{2}{4}$ + que el otro

ALUMNO/A: 9

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución: El más corto es el $\frac{5}{4}$

RESPUESTA: El más alto es $\frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: $\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 3 \\ +2 \\ \hline 5 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 9 \\ -5 \\ \hline 4 \end{array}$

ALUMNO/A: 10

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución: $\frac{5}{4} > \frac{3}{2}$

RESPUESTA: Es mas largo el listón de $\frac{5}{4}$ metros.

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: Es más largo uno que otro $\frac{2}{2}$

ALUMNO/A: 11

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:

$\frac{5}{4}$ de 5,00 | 4 → 10, 20, 0 → 125; 125 × 5 = 625

5M = 500

3M = 300 $\frac{3}{2}$ de 3,00 | 2 → 10, 00 → 150; 150 × 3 = 450

625 > 450

RESPUESTA: El listón más largo es el de 625 ($\frac{5}{4}$)

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución:

$$\begin{array}{r} 625 \\ -\,450 \\ \hline 175 \end{array}$$

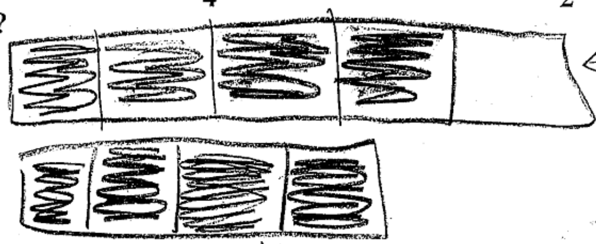
ALUMNO/A: 12

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:

$\frac{5}{4} > \frac{2}{3}$



← este es el más largo

RESPUESTA: Es más largo el de $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

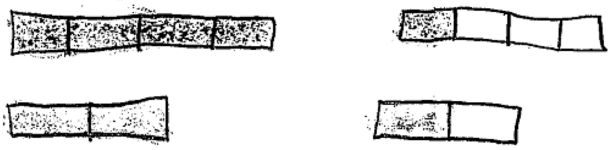
Resolución:

ALUMNO/A: 13

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:



RESPUESTA: El de $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: $\frac{3}{1}$

ALUMNO/A: 14

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución: Mirando el número de arriba a ver cuál es más grande

RESPUESTA: El de $\frac{5}{4}$ El mas gande el primero

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: dos

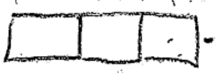
ALUMNO/A: 15

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:

[illegible] cuartos son may[illegible] [illegible] 2 [illegible].



RESPUESTA:

Los dos son iguales [illegible] dos quintos es mayor que tres medios.

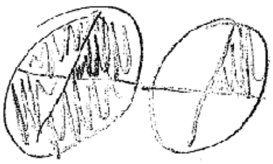
b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: Los dos son iguales.

ALUMNO/A: 16

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo? Un cuarto

$\frac{5}{4}$  $> \frac{3}{2}$ 

RESPUESTA: El primero es más grande

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

$\frac{5}{4} > \frac{3}{2}$ $\quad \frac{5-3}{2}$ $\quad \frac{4-2}{2}$

Uno es $\frac{2}{2}$ más grande que el otro

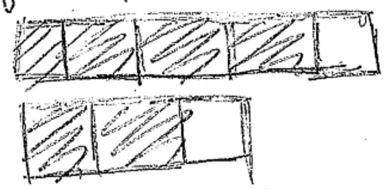
ALUMNO/A: 17

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Los dos son iguales.

Resolución: Los dos son iguales porque en los dos falta 1 para la unidad completa.



RESPUESTA: Los dos son iguales y tienen la misma cantidad

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

2.

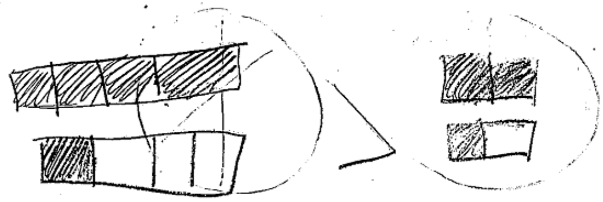
Resolución: del 5 al 3 hay dos.

ALUMNO/A: 18

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución: $\frac{5}{4} > \frac{3}{2}$



RESPUESTA: El listón más largo es el de $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: $-\begin{matrix}5\\ \frac{3}{2}\end{matrix}$ $\frac{4-2}{2}$ $\frac{2}{2}$

RESPUESTA: Uno es $\frac{2}{2}$ más largo que el otro

ALUMNO/A: 19

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:

RESPUESTA: El primero es el mas largo

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: $\frac{2}{2}$

RESPUESTA: dos medias

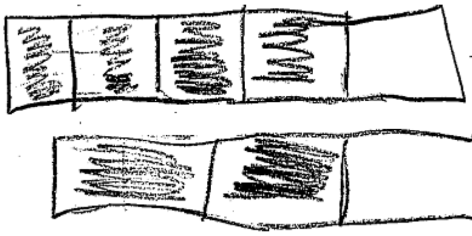
ALUMNO/A: 20

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:

$\frac{5}{4} > \frac{3}{2}$



$\frac{5}{4}$

$\frac{3}{2}$

RESPUESTA: Es más largo el que mide $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución:

$\begin{array}{r} 5 \\ -3 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ -2 \\ \hline 2 \end{array} \quad \frac{2}{2}$

ALUMNO/A: 21

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:

$\frac{5}{4} > \frac{3}{2}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución: 4 más largo

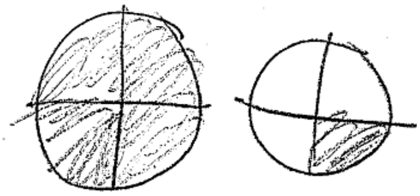
$\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ +2 \\ \hline 5 \end{array}$

ALUMNO/A: 22

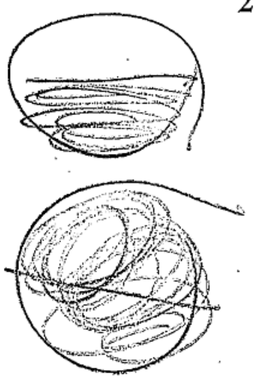
Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:



$\frac{5}{4} > \frac{3}{2}$



RESPUESTA: Mayor es el primero $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

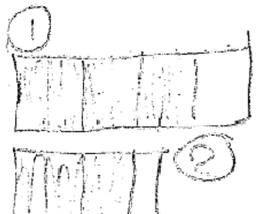
Resolución: $\frac{5-3}{2}$ $\frac{4-2}{2}$ $\frac{2}{2}$

ALUMNO/A: 23

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

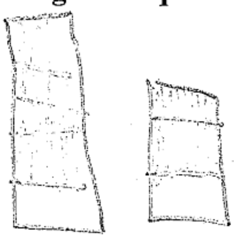
Resolución:



RESPUESTA: Es más largo el primero = 5/4

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución:

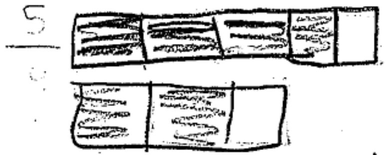


ALUMNO/A: 24

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución:



RESPUESTA: El primero es mas largo

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución:

2 cuartos

ALUMNO/A: 25

Tienes dos listones de madera. Uno mide $\frac{5}{4}$ de metro y el otro mide $\frac{3}{2}$ de metro.

a) ¿Qué listón es más largo?

Resolución: El más largo es el $\frac{5}{4}$

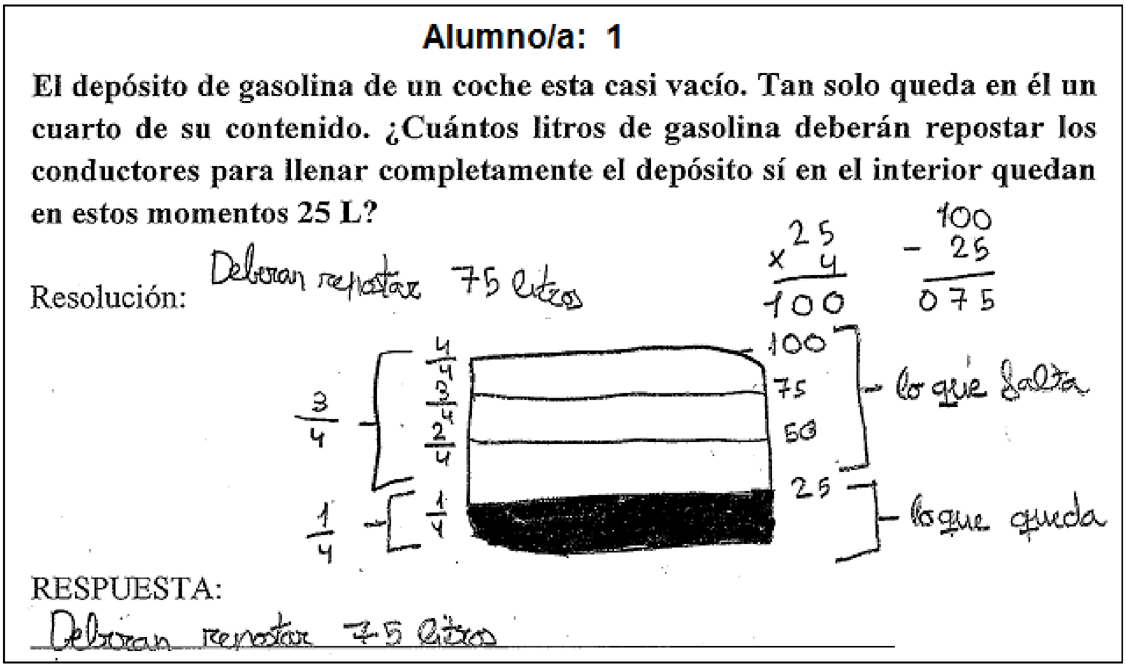
RESPUESTA: El largo es $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más largo uno que el otro?

Resolución:

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 3 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ - 2 \\ \hline 2 \end{array} - \frac{2}{2}$$

Anexo VII: Respuestas de los alumnos al Problema 2 (Prueba Inicial)



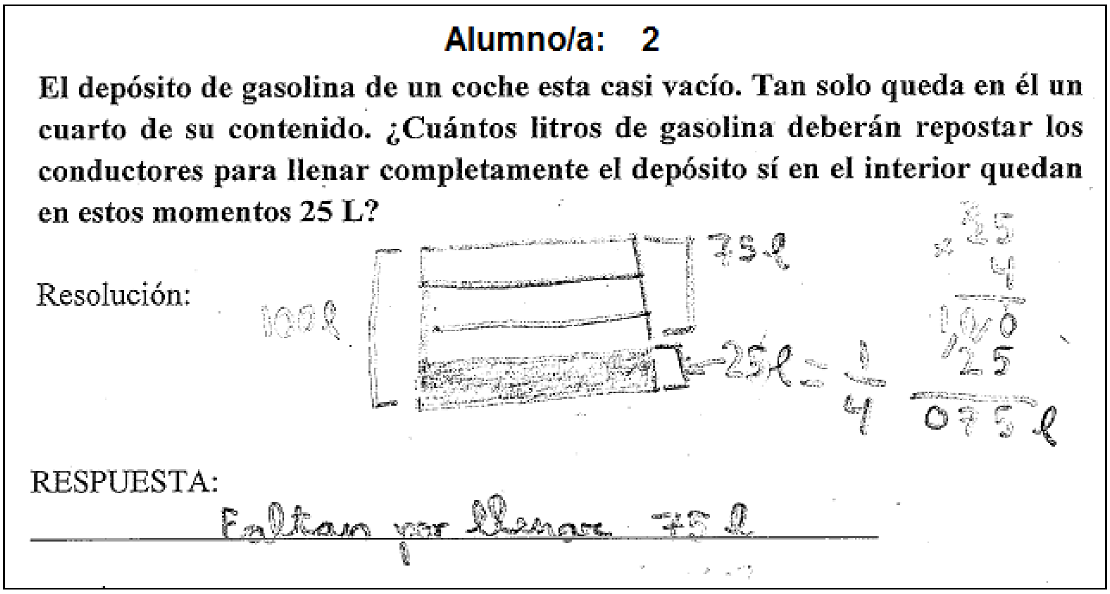
Alumno/a: 1

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución: Deberan repostar 75 litros

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 4 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ -\ 25 \\ \hline 075 \end{array}$$

RESPUESTA: Deberan repostar 75 litros



Alumno/a: 2

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 4 \\ \hline 100 \\ -\ 25 \\ \hline 075\ l \end{array}$$

RESPUESTA: Faltan por llenar 75 l

Alumno/a: 3

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

$25 \times 4 = 100$

$\frac{1}{4}$ de 100

$100 \mid 4$
$20 \quad 25$
0

$25 \times 1 = 25$

$25 \times 3 = 75$ l

Queda:  25 l

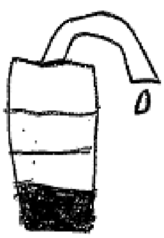
Deben repostar:  75 l

RESPUESTA:
Deberán repostar 75 l

Alumno/a: 4

El depósito de gasolina de un coche está casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:



$\frac{1}{4}$ de 100

$100 \mid 4$
$20 \quad 25$
0

$100 - 25 = 075$ l

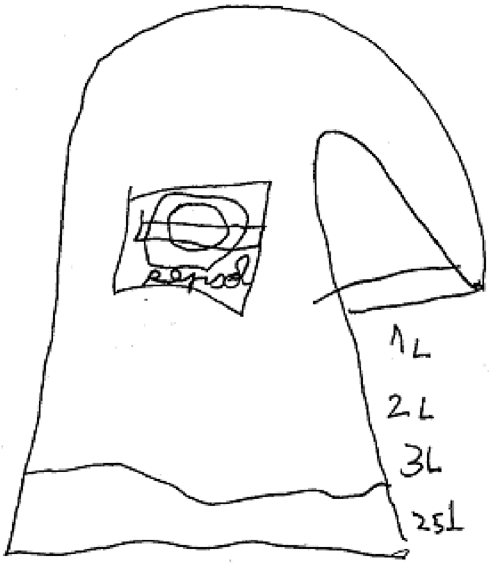
$25 \times 1 = 25$ l

RESPUESTA:
Deberán repostar 75 l.

Alumno/a: 5

El depósito de gasolina de un coche está casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

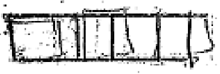
Resolución:

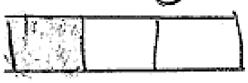


RESPUESTA: Quedan 25 L

Alumno/a: 6

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:  Deberan repostar $\frac{1}{3}$



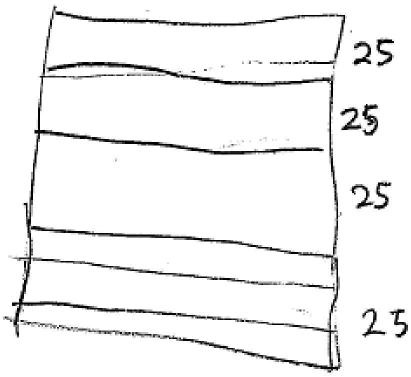
RESPUESTA: Deberan repostar 1

Alumno/a: 7

El depósito de gasolina de un coche está casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

$\frac{25}{4}$ de 100

Resolución:



$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 4 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ -\ 25 \\ \hline 075 \end{array}$$

De

RESPUESTA: Deberán depositrar 75 l

Alumno/a: 8

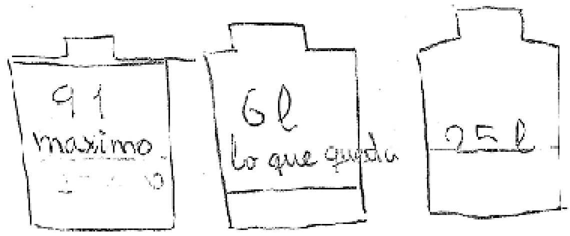
El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

$\frac{25}{4}$ Hacemos esta demostración de fraccion para demostrar que de 25 l nos quedan 6 l.

$$25 \,\underline{|4}\quad 1\ 6$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ +\ 6 \\ \hline 91 \end{array}$$



RESPUESTA: Deberan repostan 91 l.

Alumno/a: 9

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

$\frac{1}{4}$ $\quad 25 \times 3 = 75 \quad 75 - 25 = 50L$

Resolución:

RESPUESTA:

Quedan por llenar 50L

Alumno/a: 10

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución: $\frac{1}{4}$ $\frac{125}{100}$ $\quad 100 - 25 = 075 \quad \frac{75}{100}$

RESPUESTA: Deberan reposar 75 litros.

Alumno/a: 11

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

$\frac{25}{14}$ de 10,0 | 4

20 25

20 × 25

125

\+ 50

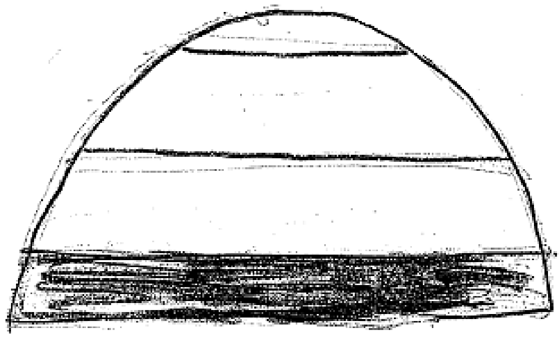
625

RESPUESTA: Deberan poner 625 litros

Alumno/a: 12

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

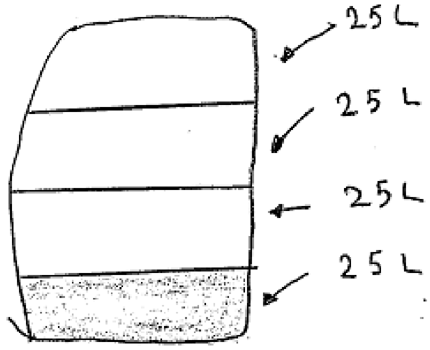


RESPUESTA:

Alumno/a: 13

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:



$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 3 \\ \hline 75 \end{array}$$

RESPUESTA:

Repostarán 75 L

Alumno/a: 14

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

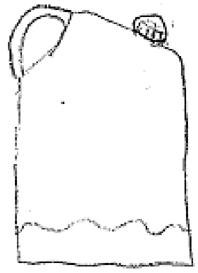
$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 3 \\ \hline 75 \\ +25 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ \hline 25 \end{array}$$

RESPUESTA: Quedan 75 L por llenar

Alumno/a: 15

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:



$\frac{1}{4}$ de 25 : 25 | 4 → 1 6

25x6=150

Le saltan 150 litros

RESPUESTA:

Le saltan 150 litros.

Alumno/: 16

El depósito de gasolina de un coche está casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

$\frac{1}{4}$ de 100

Son 25 × 4 = 100

100 − 25 = 075

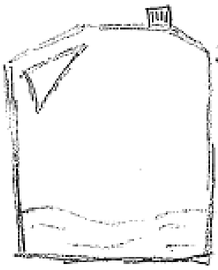
RESPUESTA:

Para llenar el depósito necesitamos 75 l.

Alumno/a: 17

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:



$\frac{1}{4}$ de $\frac{25}{c}$ = 25 : 4

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 6 \\ \hline 150 \end{array}$$

RESPUESTA:

Quedan 150 l. por llenar

Alumno/a: 18

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución: $\frac{1}{4}$ de 100 son

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 4 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ -\ 25 \\ \hline 075 \end{array}$$

RESPUESTA:

Deberán repostar 75 litros.

Alumno/a: 19

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 3 \\ \hline 75 \end{array} \qquad \frac{100}{25}$$

RESPUESTA:

Quedan 75 litros

Alumno/a: 20

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución: $\frac{1}{4}$ de 25

$$25 \,\underline{|4} \quad 6 \qquad \begin{array}{r} 6 \\ \times\ 1 \\ \hline 6 \end{array}$$

RESPUESTA: Deberán repostar 6 litros.

Alumno/a: 21

El depósito de gasolina de un coche está casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución: $\frac{1}{4}$ de $100 \,|\underline{4}$ 20 25 L

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 4 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ -\ 25 \\ \hline 75 \end{array}$$

$20 \times \frac{1}{25}$

RESPUESTA:
Quedan 75

Alumno/a: 22

El depósito de gasolina de un coche está casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución: $\frac{1}{4}$ de 100 es 25

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 4 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ -\ 25 \\ \hline 075\,L \end{array}$$

RESPUESTA:
Tendrán que repostar 75 litros

Alumno/a: 23

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución: $\frac{1}{4}$ de 100 es 25

$25 \times 4 = 100$

$100 - 25 = 075$

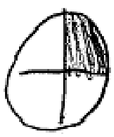
100 | 1
00 100

RESPUESTA: Necesitaran 075 litros para llenarla

Alumno/a: 24

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución:



$\frac{1}{4}$ de litro = 25   1 l = 100

$25 \times 4 = 100$

100 | 25
200 75

RESPUESTA:
Tiene que llenar 75 l

Alumno/a: 25

El depósito de gasolina de un coche esta casi vacío. Tan solo queda en él un cuarto de su contenido. ¿Cuántos litros de gasolina deberán repostar los conductores para llenar completamente el depósito sí en el interior quedan en estos momentos 25 L?

Resolución: $\frac{1}{4}$ de $\begin{array}{r|l} 25 & 4 \\ \hline 5 & 5 \end{array}$

$$\frac{\times 1}{5}$$

RESPUESTA: La respuesta es 5

Anexo VIII: Fichas de las tareas de los grupos durante la sesión de clase

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 17/3/2014

ALUMNO/A: 20 (Grupo 1)

Tarea 4

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{2}{1}$ de unidad $\frac{12}{6}$ = 2 unidades

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: Dos unidades

3°. Has fraccionado la unidad en 1 parte igual.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

La cantidad de cachos que hay

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica la cantidad de cachos en que partes la unidad.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA   Fecha: 17/3/2014

ALUMNO/A: 7 (Grupo 1)

Tarea 4

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

12 : $\frac{12}{6}$ de unidad = 2 unidades

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: Dos unidades

3°. Has fraccionado la unidad en seis partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

La cantidad de cachos que hay

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica la cantidad de cachos en que partes la unidad

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 17/03/2014

ALUMNO/A: 2 (Grupo 1)

Tarea 4

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$= \frac{12}{6}$ de unidad = 2 unidades

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: Dos unidades

3°. Has fraccionado la unidad en una partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

La cantidad de cachos que hay

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

La cantidad de cachos en la que partes una unidad

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17/03/2014

ALUMNO/A: 8 (Grupo 1)

Tarea 4

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{12}{6}$ **de unidad** = 2 unidades

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: Dos unidades

3°. Has fraccionado la unidad en una parte igual.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

La cantidad de cachos que hay.

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica la cantidad de cachos en que partes la unidad.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17/3/2014

ALUMNO/A: **1 (Grupo 1)**

Tarea 4

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$= \frac{12}{6}$ de unidad = 2 unidades

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: Dos unidades

3°. Has fraccionado la unidad en una parte igual.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

La cantidad de cachos que hay.

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

La cantidad de cachos en que partes la unidad.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 17/3/2014

ALUMNO/A: 20 (Grupo 1)

Tarea 5

1º. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2º. Escribe como se lee la superficie del mantel: Dieciséis novenos

3º. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4º. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Indica la cantidad de cachos que hay.

5º ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica la cantidad de cachos en que partes la unidad.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 17/3/2014

ALUMNO/A: 7 (Grupo 1)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciseis novenos.

3°. Has fraccionado la unidad en 19 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

La cantidad de partes que hay

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica la cantidad de cachos en que partes la unidad

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17/03/2014

ALUMNO/A: 2 (Grupo 1)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: diecisein novenos

3°. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

La cantidad de cachos que hay

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

La cantidad de cachos en la que partes una unidad

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17/03/14

ALUMNO/A: 8 (Grupo 1)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: Dieciseis novenos

3°. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Indica la cantidad de cachos que hay.

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica la cantidad de cachos que parten la unidad

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** [redacted] 17/3/2014

ALUMNO/A: 1 (Grupo 1)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciséis novenos

3°. Has fraccionado la unidad en ~~16~~ 9 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

La cantidad de cachos, [redacted] que hay.

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

La cantidad de cachos en que partes una unidad.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17 - 3 - 2014

ALUMNO/A: 13 (Grupo 2)

Tarea 4

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{12}{6}$ **de unidad** = 2 unidades

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: doce sextos

3°. Has fraccionado la unidad en 6 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Número de porciones en las que hemos reparti-do.

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Número total de porciones.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17/03/2014

ALUMNO/A: 3 (Grupo 2)

Tarea 4

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{12}{6}$ **de unidad** = 2 unidades

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: doce sextos

3°. Has fraccionado la unidad en 6 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Ee número de porciones que hemos repartido

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Número total de porciones.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17/03/2014

ALUMNO/A: 25 (Grupo 2)

Tarea 4

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{12}{6}$ **de unidad** = 2 unidades

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: doce sextos

3°. Has fraccionado la unidad en 6 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Número de porciones en que hemos repartido.

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Número total de porciones.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 7/03/2014

ALUMNO/A: 9 (Grupo 2)

Tarea 4

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{12}{6}$ de unidad = 2 unidades

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: doce sextos

3°. Has fraccionado la unidad en 6 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Número de porciones que hemos repartido

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Número total de porciones

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 12 / 02 / 2014

ALUMNO/A: 9 (Grupo 2)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciseis novenos

3°. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Número de porciones que hemos repartido

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Número total de porciones

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17/02/2014

ALUMNO/A: 3 (Grupo 2)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciseis novenos

3°. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Número de porciones que hemos repertido

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Número total de porciones

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17/03/2014

ALUMNO/A: 25 (Grupo 2)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciseis novenos

3°. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Número de porciones que hemos repartido

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Número total de porciones.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17 - 3 - 2014

ALUMNO/A: 13 (Grupo 2)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciséis novenos

3°. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Número de porciones en las que hemos repartido.

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Número total de porciones.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17/12/2.014

ALUMNO/A: 16 (Grupo 3)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciseis novenos

3°. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Indica las partes en las que se divide el denominador

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica los numeros que hay

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA Fecha: 17/03/2.014

ALUMNO/A: 21(Grupo 3)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ de unidad

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: dieciséis novenos

3°. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Indica las partes que hay o las que hemos dividido

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica los papeles que hay

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** 17/03/2014

ALUMNO/A: 18(Grupo 3)

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{16}{9}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: Dieciséis novenos

3°. Has fraccionado la unidad en 9 partes iguales.

4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Las partes que se cogen del denominador.

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indika las partes en qee hemos dividido la superficie.

TARJETA DE EVALUACIÓN DE LA TAREA **Fecha:** /

ALUMNO/A: **22 (Grupo 3)**

Tarea 5

1°. Escribe con una fracción la superficie del mantel:

$\frac{9}{4}$ **de unidad**

2°. Escribe como se lee la superficie del mantel: nueve cuartos

3°. Has fraccionado la unidad en $\frac{16}{8}$ partes iguales.

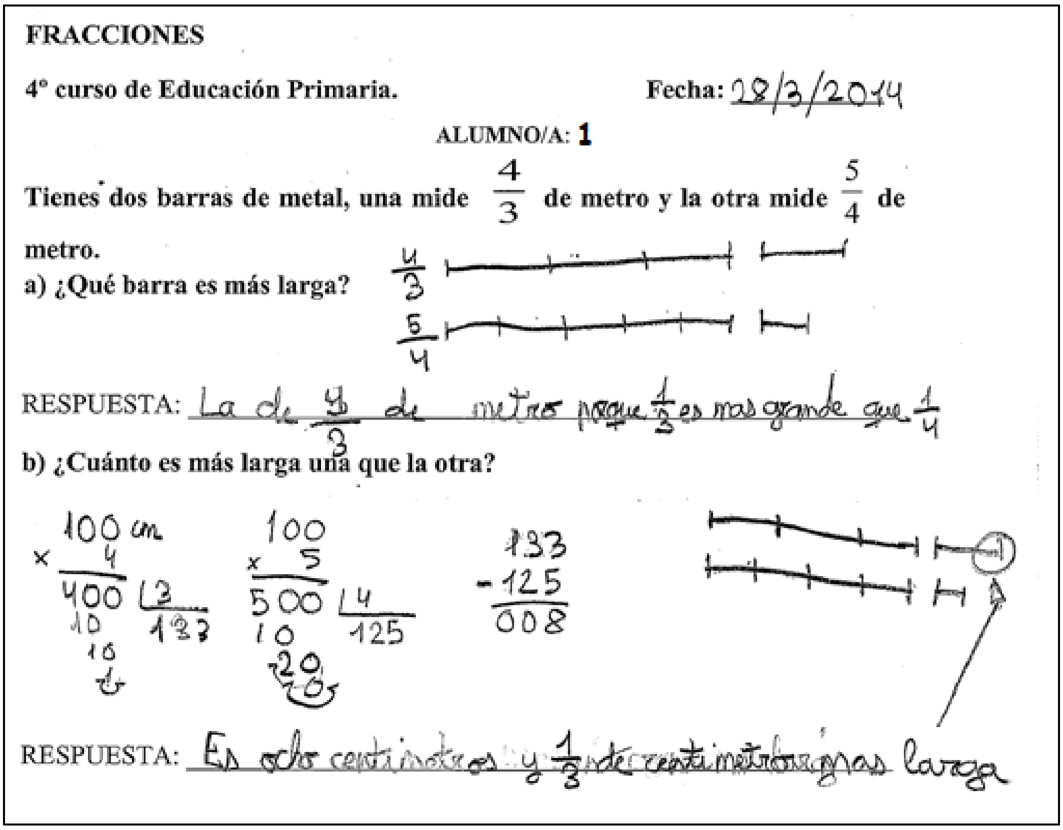
4°. ¿Qué indica el numerador de la fracción?

Indica las partes que hay en la [illegible]

5° ¿Qué indica el denominador de la fracción?

Indica en las [illegible] que hemos dividido

Anexo IX: Respuesta de los alumnos al Problema 3 (Prueba Final)



FRACCIONES

4° curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/3/2014

ALUMNO/A: **1**

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3}$

$\frac{5}{4}$

RESPUESTA: La de $\frac{4}{3}$ de metro porque $\frac{1}{3}$ es mas grande que $\frac{1}{4}$

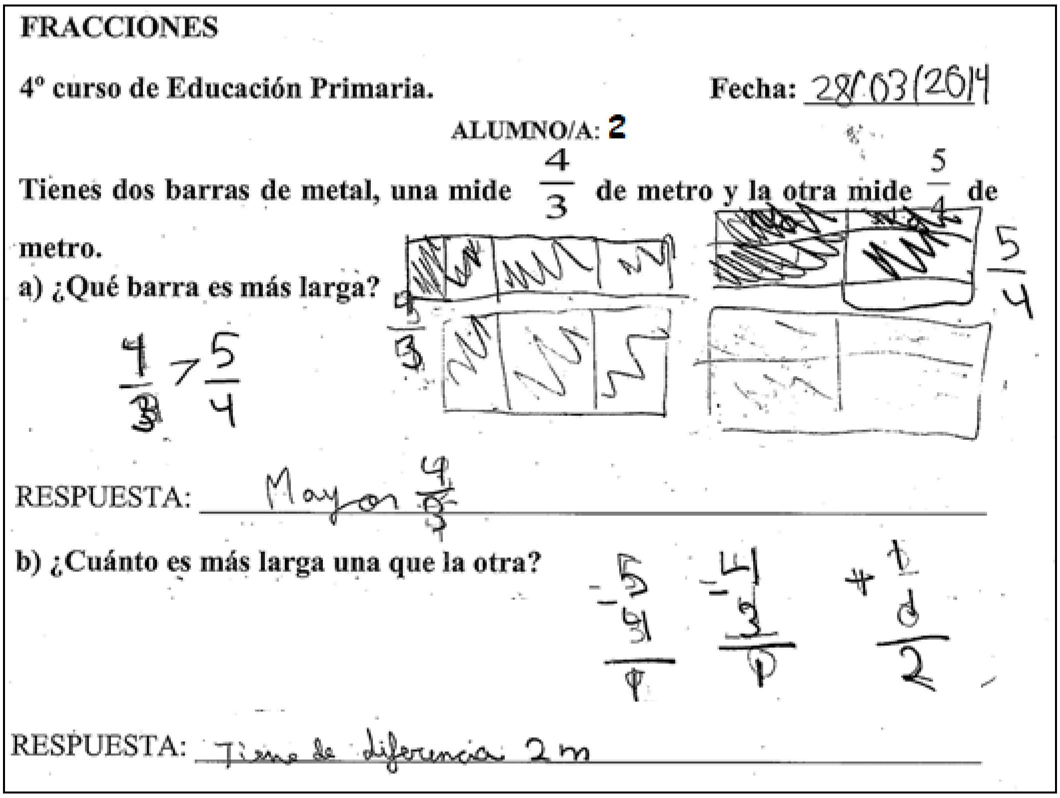
b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

100 cm × 4 = 400 ; 400 : 3 = 133

100 × 5 = 500 ; 500 : 4 = 125

133 − 125 = 008

RESPUESTA: Es ocho centimetros y $\frac{1}{3}$ de centimetro mas larga



FRACCIONES

4° curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: **2**

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$

$\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$

RESPUESTA: Mayor $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$\frac{5}{4} - \frac{4}{3} = \frac{1}{1}$ $\quad + \frac{1}{1} = 2$

RESPUESTA: Tiene de diferencia 2 m

FRACCIONES

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: 3

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga? 1 m = 100 cm

$\frac{4}{3}$ de 100 cm $100 \times 4 = 400$ $400 : 3 = 133$ cm

$\frac{5}{4}$ de 100 cm $100 \times 5 = 500$ $500 : 4 = 125$ cm

RESPUESTA: Es más largo lo de $\frac{4}{3}$.

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$133 - 125 = 008$

RESPUESTA: Es más larga por 8 cm

FRACCIONES

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ___________

ALUMNO/A: 4

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es más largo $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$100 \times 4 = 400$ $400 : 3 = 133$ $100 \times 5 = 500$ $500 : 4 = 125$

$133 - 125 = 008$

RESPUESTA: Es más larg por 8 cm

FRACCIONES

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A: 5

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3}$ de 10 ⌊3
12 3
×4
12
+1
13

$\frac{5}{4}$ de 10 ⌊4
2 2
×5
10
+2
12

RESPUESTA: la de $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

13 m 1 m
− 12 m
01 m

RESPUESTA: 1 m

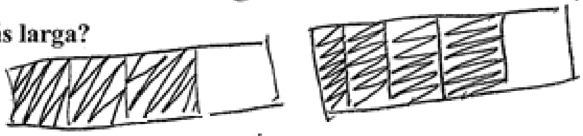
FRACCIONES

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A: 6

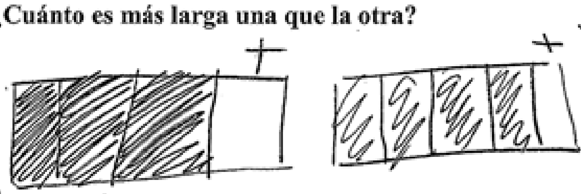
Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?



RESPUESTA: Es más grande la de $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?



el cuadrado que sobra □ + el otro □ = $\frac{2}{2}$

RESPUESTA: Es $\frac{2}{2}$ mas mayor una que otra

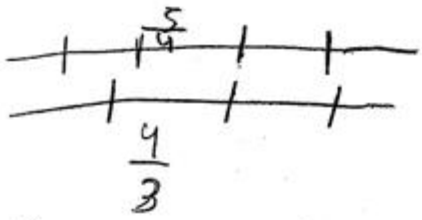
FRACCIONES

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/3/2014

ALUMNO/A: 7

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?



RESPUESTA: Mide más el de $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$100 \times 4 = 400$; $400 : 3 = 133$; 10, 10, 1

$100 \times 5 = 500$; $500 : 4 = 125$; 10, 20, 0

$133 - 125 = 068$

RESPUESTA: Mide 8 más $\frac{4}{3}$ que $\frac{5}{4}$

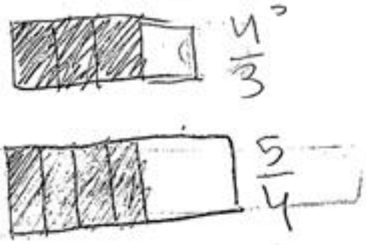
FRACCIONES

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: 8

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?



$\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: La de $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$5 - 4 = 1$ $\qquad$ $4 - 3 = 1$

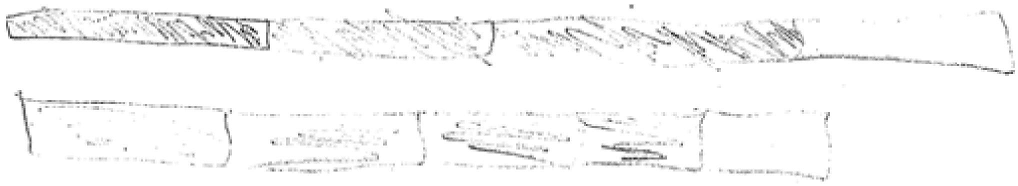
RESPUESTA: La de $\frac{5}{4}$ es un dos cuartos mayor

FRACCIONES
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: 9

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga? La más larga $\frac{4}{3}$



RESPUESTA: Los más larga es $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

RESPUESTA: Se llevan de diferencia $\frac{1}{2}$

FRACCIONES
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/3/14

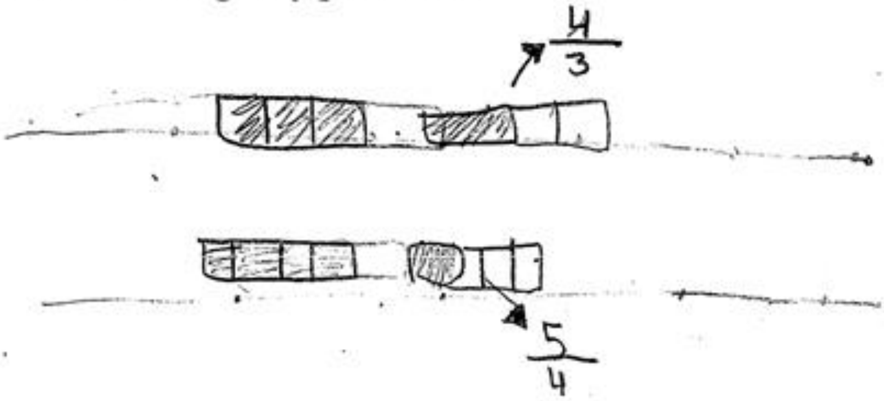
ALUMNO/A: 10

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga? $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es más larga $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?



RESPUESTA: Un medio $\frac{1}{2}$

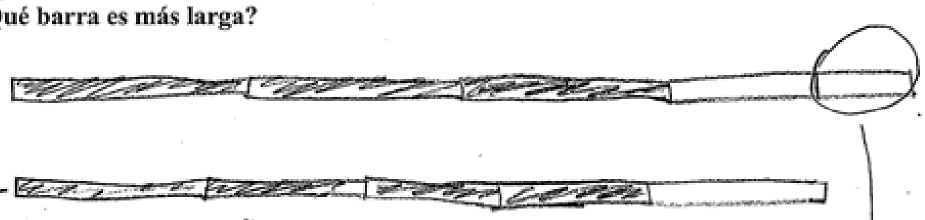
ALUMNO/A: 11

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3}$

$\frac{5}{4}$



$\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es mayor la de $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

RESPUESTA: Es más larga una que la otra $\frac{1}{1}$

FRACCIONES

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: 12

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es más larga la de $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$100 \times 4 = 400$; $400 \div 3 = 133$ (10, 10, 1)

$100 \times 5 = 500$; $500 \div 4 = 125$ (10, 20, 0)

$133 - 125 = 008$

RESPUESTA: La más larga es la de $133 = \frac{4}{3}$

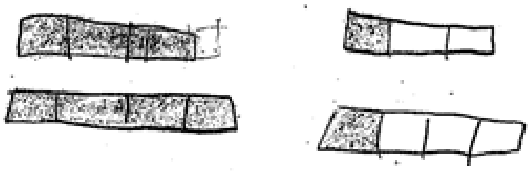
FRACCIONES

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28-3-2014

ALUMNO/A: **13**

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?



RESPUESTA: Es mayor la de $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$$\begin{array}{r} 5 \\ -4 \\ \hline 1 \end{array}$$

RESPUESTA: Es más larga por 1

FRACCIONES

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ___________

ALUMNO/A: **14**

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

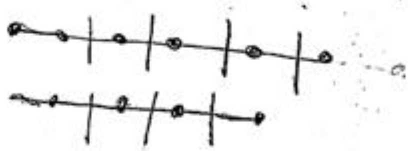
a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$

RESPUESTA: La segunda

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$



$$\begin{array}{r} 4 \\ -3 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ -4 \\ \hline 1 \end{array}$$

RESPUESTA: Iguales

FRACCIONES
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: **15**

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3}$ de 10 dm = $10 \times 3 = 30$

$\frac{5}{4}$ de 10 dm = $10 \times 4 = 40$

$30 : 4 = 7$ dm, resto 3

$40 : 5 = 8$ dm, resto 0

RESPUESTA: Es más larga la de $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$8 - 7 = 1$

RESPUESTA: Es mas larga por 1dm

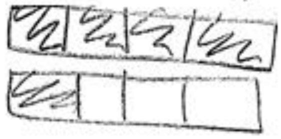
FRACCIONES
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/3/2014

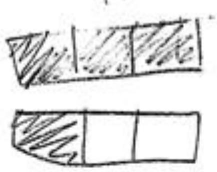
ALUMNO/A: **16**

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$





RESPUESTA: La más grande es $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

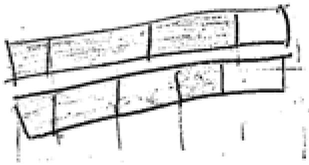
RESPUESTA: Una es más grande que la otra porque se llevan de diferencia $\frac{1}{2}$

FRACCIONES
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A: 17

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?



RESPUESTA: Es más grande la de $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$\frac{1}{2}$

RESPUESTA: La mayor dista de $\frac{4}{3}$ por $\frac{1}{2}$

FRACCIONES
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A 18

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$$\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$$

RESPUESTA: La de $\frac{4}{3}$.

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$$\begin{array}{r} 5 \\ -4 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ -3 \\ \hline 1 \end{array} = \frac{1}{1}$$

RESPUESTA: Es más larga una que la otra por $\frac{1}{1}$

FRACCIONES
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: 19

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$ Míde mas la de $\frac{5}{4}$

RESPUESTA: Mide mas La de $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$\frac{1}{2}$ Porque si se salee que $\frac{5}{4}$ es mayor que $\frac{4}{3}$ toa a solera $\frac{1}{2}$ y solera 1

RESPUESTA: Se diferencia de $\frac{1}{2}$

FRACCIONES
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/3/2014

ALUMNO/A: 20

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es más larga $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

$$\frac{5 - 4}{1} \quad \frac{4 - 3}{1} \quad \frac{1 + 1}{2}$$

RESPUESTA: 2 metros.

FRACCIONES
4° curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: **21**

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{5} < \frac{4}{3}$

RESPUESTA: Es más larga $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

RESPUESTA: Se diferencia de 1

FRACCIONES
4° curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/3/14

ALUMNO/A: **22**

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{5}{4} > \frac{4}{3}$

RESPUESTA: cuatro tercios $\frac{4}{3}$ es mayor

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

RESPUESTA: Se diferencia $\frac{1}{2}$

FRACCIONES
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: 23

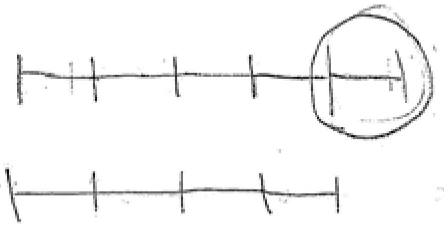
Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

$\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es más larga la de $\frac{5}{4}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?



RESPUESTA: ______

FRACCIONES
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/3/14

ALUMNO/A: 24

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

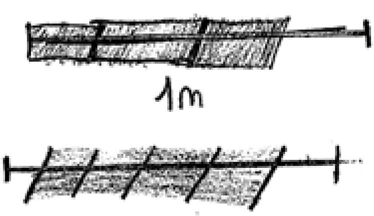
a) ¿Qué barra es más larga?

1m

$\frac{4}{3}$

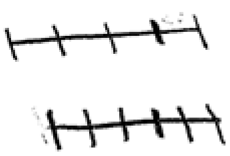
1m

$\frac{5}{4}$



RESPUESTA: Es mas larga la primera $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?



$\frac{4}{3} \times = 12$ $\quad$ $5 \times 4 = 20$ $\quad$ $20 - 12 = 08$

RESPUESTA: Es más larga por 8 cm

FRACCIONES

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: **25**

Tienes dos barras de metal, una mide $\frac{4}{3}$ de metro y la otra mide $\frac{5}{4}$ de metro.

a) ¿Qué barra es más larga?

RESPUESTA: La mas larga es $\frac{4}{3}$

b) ¿Cuánto es más larga una que la otra?

RESPUESTA: se lleva de diferencia $\frac{1}{2}$

Anexo X: Respuesta de los alumnos al Problema 4 (Prueba Final)

4º curso de Educación Primaria. Fecha: 28/03/2014

ALUMNO/A: **11**

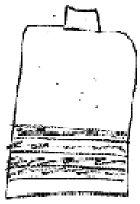
Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

$\frac{3}{2}$

$\frac{5}{4}$

$\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$



RESPUESTA: $\frac{3}{2}$ > $\frac{5}{4}$

¿Cuánto bebe más uno que otro?

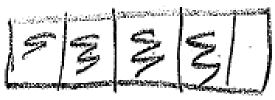
RESPUESTA: $\frac{2}{2}$

4º curso de Educación Primaria. Fecha: 28/03/14

ALUMNO/A: **12**

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?



RESPUESTA: Bebe más agua Lucas.

¿Cuánto bebe más uno que otro?

100 × 3 = 300

300 : 2 = 150 (resto 10, 00)

100 × 5 = 500

500 : 4 = 125 (resto 10, 20, 0)

150 − 125 = 025

RESPUESTA: Hay 025 l de diferencia

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A:

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro

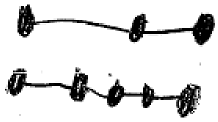
¿Quién de los dos bebe más agua?

$\frac{5}{4}$ $\frac{3}{2}$

RESPUESTA: Bebe mas Mini

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$\frac{2}{2}$ Sobrara la misma en el prime pero es mayor $\frac{5}{4}$ pero solo



$\frac{2}{2}$ y es mayor

RESPUESTA: es mayor $\frac{5}{4}$

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 08/2/2014

ALUMNO/A: 7

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

$\frac{3}{2}$ $\frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es más grande el de $\frac{3}{2}$ porque cada parte es más larga.

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$100 \times 3 = 300$; $300 : 2 = 150$

$100 \times 5 = 500$; $500 : 4 = 125$

$150 - 125 = 025$

RESPUESTA: Bebe 25 l más Lucas que Mini

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A: **17**

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

RESPUESTA: Los dos: lo mismo

¿Cuánto bebe más uno que otro?

LO MISMO

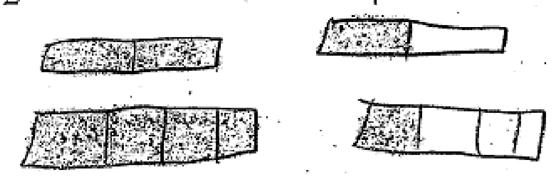
RESPUESTA: LO MISMO

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28 - 3 - 2014

ALUMNO/A: **13**

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?



RESPUESTA: Bebe más Lucas.

¿Cuánto bebe más uno que otro?

Lucas =  3 medios l = 6 cuartos

Mini =  5 cuartos = 5 cuartos

$$\begin{array}{r} 6 \\ -\ 5 \\ \hline 1 \end{array}$$

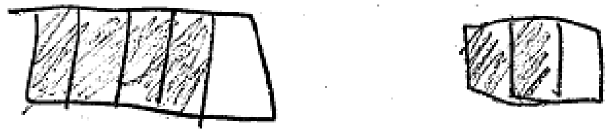
RESPUESTA: Bebe 1 l más

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A: **14**

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?



RESPUESTA: Míni

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$$\begin{array}{r} 5 \\ -3 \\ \hline 2 \end{array}$$

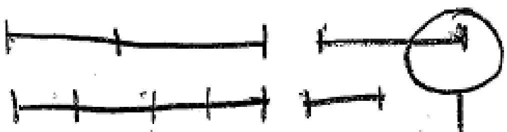
RESPUESTA: 1

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A: **1**

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?



RESPUESTA: Bebe mas agua Lucas

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$$\begin{array}{r} 100\,cl \\ \times\ 3 \\ \hline 300 \end{array} \quad 300 \div 2 = 150\ cl \qquad \begin{array}{r} 100 \\ \times\ 5 \\ \hline 500 \end{array} \quad 500 \div 4 = 125 \qquad \begin{array}{r} 150 \\ -125 \\ \hline 025 \end{array}$$

RESPUESTA: Bebe 25 cl mas

4º curso de Educación Primaria. Fecha: 28/3/2014

ALUMNO/A: **16**

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

Mini $= \frac{5}{4} =$ 1l y cuarto

Lucas $= \frac{3}{2} =$ 1l y medio

RESPUESTA: Bebe más Lucas, porque bebe 1l y medio y Mini 1l y cuarto

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$$\begin{array}{r} \text{1l y medio} \\ -\ \text{1l y cuarto} \\ \hline \text{0 y cuarto} \end{array}$$

RESPUESTA: Uno bebe 1 cuarto más que el otro

4º curso de Educación Primaria. Fecha: __________

ALUMNO/A:

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

$\frac{3}{2} < \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Minò con $\frac{5}{4}$ de litro

¿Cuánto bebe más uno que otro?

V

RESPUESTA: Veve $\frac{2}{4}$ más.

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A: 4

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

No tengo ni idea

RESPUESTA: ______________________________

¿Cuánto bebe más uno que otro?

RESPUESTA: ______________________________

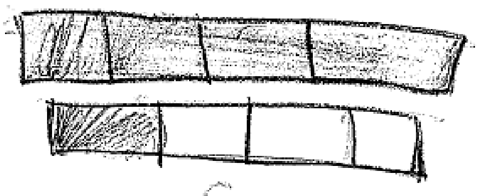
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: 18

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

$\frac{3}{2}$



$\frac{5}{4}$

RESPUESTA: Bebe más Lucas.

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$\frac{5-3}{2}$ $\frac{4-2}{2}$ $\frac{2}{2}$

RESPUESTA: Bebe más uno que otro $\frac{2}{2}$

4º curso de Educación Primaria. Fecha: 08/09/2014

ALUMNO/A: 23

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua? $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Bebe más agua Lucas

¿Cuánto bebe más uno que otro?

RESPUESTA: Un cuarto más

4º curso de Educación Primaria. Fecha: ____________

ALUMNO/A:

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua? $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: es mayor $\frac{3}{2}$

¿Cuánto bebe más uno que otro?

RESPUESTA: Es mayor el de liras porque las partes son más pequeñas,

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A:

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

$\frac{1}{2} + \frac{5}{4} = 14l$

RESPUESTA: $\frac{3}{2}$

¿Cuánto bebe más uno que otro?

RESPUESTA: 3l

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/3/14

ALUMNO/A: 10

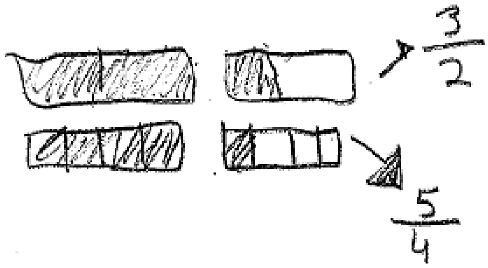
Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

$\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es mayor $\frac{3}{2}$

¿Cuánto bebe más uno que otro?



RESPUESTA: $\frac{2}{2}$ dós medios

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

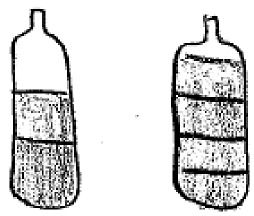
ALUMNO/A:

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

1l 1l

$\frac{3}{2}$



$\frac{5}{4}$

RESPUESTA: Bebe mas Lucas

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times\ 2 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \times\ 4 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 \\ -\ 6 \\ \hline 14 \end{array}$$

RESPUESTA: Lucas bebe 14 l. más

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A:

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

RESPUESTA: Bebe más Lucas

¿Cuánto bebe más uno que otro?

RESPUESTA: ____________

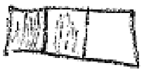
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: 21

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

$\frac{3}{2}$ $\frac{5}{4}$



RESPUESTA: Bebe más Lucas.

¿Cuánto bebe más uno que otro?

RESPUESTA: Se llevan de diferencia $\frac{2}{2}$

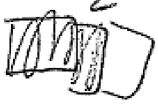
4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/3/14

ALUMNO/A: 22

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?

$\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$



RESPUESTA: Lucas bebe más

¿Cuánto bebe más uno que otro?

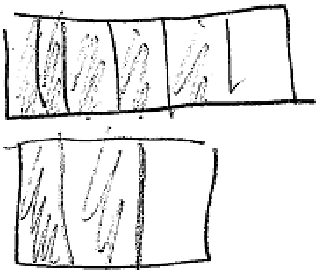
RESPUESTA: Se lleva de diferencia $\frac{2}{2}$

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A: 6

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua?



$$\frac{3}{2} < \frac{5}{4}$$

RESPUESTA: bebe mas mini

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{2}{2}$$

RESPUESTA: Bebe $\frac{2}{2}$ uno mas que otro

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A:

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua? $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es un $\frac{3}{2}$

¿Cuánto bebe más uno que otro?

RESPUESTA: Uno veve $\frac{2}{2}$ más que otro

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A:

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua? $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$

RESPUESTA: Es mayor $\frac{3}{2}$

¿Cuánto bebe más uno que otro?

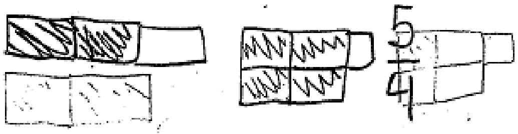
RESPUESTA: Uno bebe mas que otro $\frac{2}{2}$

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** 28/03/2014

ALUMNO/A: 2

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua? $\frac{3}{2}$



$\frac{5}{4}$

RESPUESTA: Bebe mas agua Lucas

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$$-\begin{array}{c}5\\ \frac{3}{2}\end{array} \qquad -\begin{array}{c}4\\ \frac{2}{2}\end{array} \qquad +\begin{array}{c}2\\ \frac{2}{4}\end{array}$$

RESPUESTA: Lucas bebe 4 l más

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A:

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua? $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$

 $\frac{3}{2}$

 $\frac{5}{4}$

RESPUESTA: Bebe más agua Lucas.

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$5 - 3 = 2$ $\quad 4 - 2 = 2 \quad 2 + 2 = 4$

RESPUESTA: 4 litros.

4º curso de Educación Primaria. **Fecha:** ____________

ALUMNO/A: 3

Lucas bebe una botella de agua de $\frac{3}{2}$ de Litro y Mini otra de $\frac{5}{4}$ de litro.

¿Quién de los dos bebe más agua? 1 l = 100 cl

$\frac{3}{2}$ de 100 cl $\quad 100 : 2 = 50$; $50 \times 3 = 150$ cl

$\frac{5}{4}$ de 100 cl $\quad 100 : 4 = 25$; $25 \times 5 = 125$ cl

RESPUESTA: Bebe más Lucas

¿Cuánto bebe más uno que otro?

$150 \text{ cl} - 125 \text{ cl} = 025 \text{ cl}$

RESPUESTA: Bebe más por 25 cl