



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

La multiplicación: comprensión y aprendizaje

Autora

Carmen Sol Gil Rubio

Directora

Azucena Lozano Roy

Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación. Campus de Huesca.

Año 2016

Índice

1. INTRODUCCIÓN	4
1.1. Justificación	5
1.2. Objetivos planteados para la realización del trabajo de fin de grado	9
1.3. Contextos	10
2. DIFICULTADES DEL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN EN EDUCACIÓN PRIMARIA	13
2.1. El sentido del número y el concepto de la multiplicación.	13
2.2. Dominio de la abstracción y referencias visuales y representativas.	15
2.3. Dificultad en la comprensión de la multiplicación.	16
2.4. Errores de cálculo en el algoritmo estándar de la multiplicación.	18
2.5. Dificultades según la resolución de situaciones problemáticas.	19
2.6. Dificultades en la memorización.	21
2.7. Falta del razonamiento sobre el cálculo mental.	22
2.8. Falta de comprensión del proceso cognitivo	23
3. FACTORES QUE INFLUYEN EN EL PROCESO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN	25
3.1. Factores externos que influyen en el aprendizaje de la multiplicación	26
3.2. Factores internos que influyen en el aprendizaje de la multiplicación	30
3.3. Factores genéticos que limitan el aprendizaje de la multiplicación.	34
4. PROPUESTA DIDÁCTICA	38
4.1. Objetivos generales del diseño de las actividades	41
4.2. Diseño de las actividades	42
5. CONCLUSIONES Y VALORACIÓN PERSONAL.	63
6. REFERENCIAS	65

La multiplicación: problemas en su aprendizaje y su entendimiento

- Elaborado por Carmen Sol Gil Rubio.
- Dirigido por Azucena Lozano Roy.
- Depositado para su defensa el 23 de Febrero de 2016.

Resumen

Las matemáticas no son una ciencia de memorización, si no de comprensión. Si no están establecidas las bases del significado o la comprensión de la multiplicación, se crea una falta de la interpretación del profesional sobre la comprensión del alumnado y en la enseñanza del algoritmo estándar, de manera automática y sin dar lugar al razonamiento, causando las dificultades en el aprendizaje de la multiplicación como consecuencia de una enseñanza basada en la memorización de las tablas de multiplicar. Se muestra la necesidad de estudiar las neurociencias, para entender las complicaciones del aprendizaje matemático, desde la genética hasta los factores intrínsecos y extrínsecos de los alumnos. Estas ciencias muestran los factores que entran en juego en el proceso de la resolución de problemas y del cálculo, dando importancia al razonamiento, la atención y la memoria de trabajo. Además se han estudiado factores genéticos que limitan considerablemente el aprendizaje de las matemáticas, así como la dislexia o el TDAH. Por último, he aportado el diseño de actividades que pueden dar la base que necesita el aprendizaje de la multiplicación, y la comprensión a través del mundo que rodea al niño, siguiendo una metodología activa a través de la manipulación de objetos y que puede dar solución a las dificultades expuestas en el trabajo.

Palabras clave

Comprensión, cognición, atención, motivación, memorización, manipulación.

1. INTRODUCCIÓN

Habitualmente se oye en la escuela que la multiplicación surge de las necesidades sociales de sumar una misma cantidad de manera reiterada un número de veces determinado, ya que su cálculo a través del recuento sería lento y pesado a causa del proceso que supone la serie de sumas. Aunque hay autores como José Antonio Fernández Bravo (2007) que indica que referirse a la multiplicación solo como una suma reiterada es un error muy común y desafortunado, ya que lleva a la confusión del alumnado sobre el conocimiento y el entendimiento de la multiplicación y con ello a la mala memorización de las tablas.

Los autores de los artículos que han sido recogidos para realizar este trabajo, coinciden en que un mal aprendizaje del concepto de la multiplicación, tanto en la comprensión de la operación como en la memorización de las tablas de multiplicar, causa dificultades en los aprendizajes de los niveles superiores, así como en el cálculo y en la resolución de problemas matemáticos. Si se presenta apoyos como una plantilla en la que aparecen las tablas de multiplicar, los niños son capaces de resolver los problemas, en el caso de que comprendan la estructura y contenido de las situaciones problemáticas. Ya que resolver el problema matemático significa comprender el significado de los datos y utilizar los recursos necesarios para llegar a su resolución. La memorización de las tablas de multiplicación se utiliza como estrategia para llegar a la solución. Si la base que el aprendizaje matemático es la comprensión, la manipulación y la experimentación, ¿por qué prestar tanta importancia a memorizar las tablas de multiplicar?

Nos planteamos enseñar experimentando y concebir el aprendizaje por descubrimiento, antes de llegar a la memorización de números que parecen no tener ningún sentido, ya que aparentemente se enseña el cálculo de las operaciones multiplicativas desde el conocimiento de las tablas de multiplicar y dejando de lado el significado de los números y el significado de la multiplicación.

En el caso de la realización del algoritmo estándar de la multiplicación, se enseña mediante estrategias memorizadas para hacer que los niños las recuerden más fácilmente, como poner asteriscos, eliminar ceros o aprender a calcular con las llevadas, que como estrategia para simplificar el cálculo es muy notable, pero no para entender el proceso. Y por ello se hace necesaria una enseñanza que posibilite la comprensión del algoritmo,

como la descomposición del número en sus unidades decimales, las unidades, las decenas o las centenas, y que otro número puede multiplicarlos por separado, aplicando la propiedad distributiva, sumando sus resultados en un último paso para conseguir la solución de dicha multiplicación. Ya que saber calcular y resolver problemas es la base fundamental en la que se establecerán los siguientes niveles educativos, se debería enseñar de manera significativa, consiguiendo que los niños no olviden lo aprendido y sobre todo de manera divertida.

Una de las consecuencias que se pueden observar a causa de una enseñanza basada en la memorización sin sentido, es la falta de motivación por el aprendizaje, ya que memorizar las tablas puede ser aburrido y repercutir en la falta de atención de los niños en el aprendizaje, en la falta de motivación y en el cese del interés por resolver problemas matemáticos. El mayor índice de logro del aprendizaje se consigue con una alta motivación por querer aprender, en el que todos los elementos que rodean al niño están activos y son desencadenantes en las expectativas y en el logro de sus metas. Además no todos los niños aprenden del mismo modo, porque cada niño tiene unas peculiaridades diferentes a las de los demás, no tienen el mismo desarrollo cerebral, y captan la realidad de una manera distinta, es decir, difieren a la hora de procesar la información, de sintetizarla, de organizarla, de encontrar las posibilidades de resolución, de planificar las ideas y de expresar el resultado, por lo cual, cada niño tiene una manera diferente y propia para aprender y memorizar.

Es por ello que se considera interesante investigar sobre las dificultades en el aprendizaje de la multiplicación y sobre sus causas, además de aportar ideas propias para dar una atención más adecuada a los niños, evitando las dificultades que se puedan encontrar en la enseñanza actual de la multiplicación, y dar sentido al aprendizaje heurístico y experimental.

1.1. Justificación

Según el informe PISA de 2012 (2013, pp 34-59), la puntuación media en matemáticas, de los países de la OCDE corresponde al nivel 3 de los 6 niveles que corresponden a dicha prueba, con una puntuación que oscila entre los 482 puntos y los 545 puntos.

España obtuvo una puntuación media de 484 puntos en matemáticas, poniéndose a 10 puntos por debajo de la OCDE y 5 puntos por debajo del promedio de la UE.

En España, el 24 % de los alumnos no alcanza el nivel 2, sabiendo responder a preguntas relacionadas con contextos conocidos, con los datos y las cuestiones muy definidas.

El informe PISA expone un análisis en torno a cuatro sub-áreas de contenido matemático (cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad, e incertidumbre y datos), y además se han evaluado tres procesos matemáticos (formular, emplear e interpretar).

En España se obtiene la mejor puntuación en la sub-área cantidad, mostrando puntuaciones similares en las sub-áreas de incertidumbre y datos, y de cambio y relaciones, y obteniendo la peor puntuación en la sub-área de espacio y forma. Este patrón se observa en la OCDE y en la UE.

En cuanto a los procesos de formular, emplear e interpretar, se observa que los alumnos de 15 años presentan más dificultades a la hora de formular e identificar los conceptos, que de interpretarlos y reflexionar sobre las soluciones.

Estas dificultades se deben a un aprendizaje memorístico, que deja de lado el aprendizaje basado en el razonamiento, la comprensión de las matemáticas y la propia experimentación. Si se profundizara más en la interpretación de los conceptos, en la creación de referencias visuales y en el sentido del número, los alumnos aprenderían a formular, identificar e interpretar los datos y las relaciones existentes entre los contenidos de los problemas y los algoritmos matemáticos.

Estas dificultades se muestran en otros lugares, como es el caso de México, dónde otros autores ven la necesidad de centrar el estudio profesional en una enseñanza dirigida a la comprensión de las matemáticas, al uso del razonamiento y a quitar la importancia aportada a la memorización, como indican Larrazolo Larrazolo, Backhoff y Tirado (2013). A pesar de que las leyes educativas transmiten la relevancia de enseñar una gran cantidad de contenidos, termina siendo más favorable la enseñanza de habilidades de razonamiento, comprensión y solución de problemas matemáticos en diferentes situaciones. Estos autores inciden en que las competencias matemáticas son muy importantes para el desarrollo de futuros profesionales, porque éstas permiten desarrollar procesos de razonamiento cuantitativo y lógico.

La multiplicación es un elemento muy importante en la vida de la educación matemática del alumno, ya que supone un “pico”¹ en el aprendizaje a causa de su dificultad y complicada comprensión. Sin embargo, se utiliza en todos los niveles superiores del aprendizaje.

Redondo (2011) expresa la dificultad e importancia de la multiplicación:

La multiplicación constituye un pico por la importante dificultad que supone para algunos alumnos y da inicio a su vez a una meseta porque es un contenido básico a partir del cual se construyen otros contenidos importantes. Pero no es un pico cualquiera, un alumno puede prescindir de otros supuestos picos matemáticos como el álgebra o la combinatoria, pero la no adquisición con soltura del automatismo de la multiplicación cercena en buena medida cualquier posibilidad de desarrollo matemático, e incluso de desenvolvimiento en su vida cotidiana. (p.17)

Las palabras de Redondo sobre la gran importancia que tienen el aprendizaje de la multiplicación y la dificultad que supone su aprendizaje, ha supuesto el convencimiento de esta realidad y la determinación de trabajar la multiplicación en el actual trabajo.

1.1.1. Concepto de multiplicación

La definición de multiplicar que se obtiene del diccionario de la Real Academia Española (2005) indica que es una operación, que consiste en encontrar un resultado a partir de la repetición de un número una cantidad determinada de veces, es decir, sumar tantas veces como un indique un número un valor dado: “Averiguar el resultado de sumar (un número) tantas veces como indica otro”. (p.947)

Cid, Escolano y Muñoz (2011) indican que la multiplicación es un medio para abreviar una suma de cantidades iguales de manera reiterada. Esta teoría sobre la multiplicación surge de la necesidad que tenían los hombres en la antigüedad, antes de usar las numeraciones escritas, de contar grandes cantidades de objetos que eran agrupados en

¹ *Pico* es la expresión que emplea Redondo (2011) en el artículo Picos y mesetas en los aprendizajes matemáticos en Educación Primaria: el caso de la multiplicación, para indicar que el contenido supone una gran dificultad en el aprendizaje, mientras que lo ya aprendido supone estado sin dificultades relevantes, a la que llama *meseta*.

conjuntos iguales. Para ello utilizaban objetos, partes del cuerpo, piedras u otros elementos que servían para representar agrupaciones iguales.

A pesar de ello, una suma reiterada implica varios conjuntos de elementos iguales que se suman de manera reiterada (8 grupos de 2 manzanas cada grupo), y la multiplicación presenta la diferencia de que implica varios elementos (8 cajas que contienen 2 manzanas cada una, es decir 2 manzanas por caja), implicando cajas y manzanas.

1.1.2. Usos de multiplicación

La multiplicación se utiliza en la vida cotidiana de una manera natural, para realizar acciones que necesitan de la medida de cantidades, así como la compra, las medidas de alimentos para cocinar, la organización del tiempo disponible de cada uno, etc., además del uso que se da a la multiplicación en la escuela, que se utiliza en la totalidad de los cursos de la vida académica de la educación obligatoria y la mayoría de los cursos restantes, y también en cualquier formación profesional posterior. Observando libros educativos de Educación Primaria, Educación secundaria y de Bachillerato se han distinguido diferentes usos de la multiplicación. Algunos de estos usos son:

- En el aprendizaje del algoritmo de la división, para reconocer los elementos que dividen, la cantidad que se reparte y los grupos iguales que quedan en el cociente.
- En las medidas, al comparar, diferentes unidades de medida, se hace necesario realizar un proceso de modificación para transformar una o varias unidades de medida en una misma unidad de medida.
- Proporcionalidad.
- El cálculo con fracciones.
- Aspectos geométricos, como el área de una superficie en unidades cuadradas, el volumen de un cuerpo geométrico en unidades cúbicas o representaciones en el plano.
- El cambio de unidad de medida decimal a otros como por ejemplo el sexagesimal.

En secundaria, el uso de la multiplicación es muy relevante, ya que los aprendizajes son mayores, por lo que el conocimiento de la misma es la base de una buena ejecución en el cálculo mental, por lo que se precisa una ejecución rápida y eficaz de este elemento. La multiplicación entre otros se utiliza en:

- Las variaciones, permutaciones y combinaciones.
- Las potencias son multiplicaciones y los polinomios con suma de elementos multiplicados.
- Las ecuaciones son la búsqueda de la incógnita que se encuentra multiplicando a distintos números y que se muestran como un polinomio igualado a 0.
- Las funciones.
- La estadística.

En bachillerato se utiliza en infinidad de situaciones y en muchas de las asignaturas que se cursan, así como física, química, mecánica, tecnología industrial, dibujo técnico..., dirigidas a los posteriores estudios superiores que los alumnos quieran estudiar como economía, geología, ingeniería, arquitectura, magisterio, etc.

A pesar de la importancia que conlleva el buen aprendizaje, en los primeros niveles se sintetiza con la memorización del algoritmo y de las tablas de multiplicar, y se actúa de manera secundaria ante la comprensión, experimentación y autovaloración del contenido del alumno. Sin embargo, para una persona adulta, es común cometer errores de multiplicación, así como perder mucho tiempo en el proceso de multiplicar, o mostrar dificultades con el cálculo de la multiplicación con decimales y de la división con decimales. Quizás sea relevante dar un poco más de tiempo al alumnado en el aprendizaje significativo de este elemento, para que los niños aprendan de verdad y no sigan cometiendo errores básicos de multiplicación, o no entiendan el procedimiento de algunas operaciones en los niveles superiores.

1.2. Objetivos planteados para la realización del trabajo de fin de grado

La enseñanza de la multiplicación no es exitosa al 100%, y se observa en las aulas que es un elemento difícil de comprender y de aprender, por lo que es necesario hacer una

investigación de las dificultades y de sus causas, además de aportar propuestas que ayuden a favorecer dicho aprendizaje.

Los objetivos que se plantean son:

- Análisis de las dificultades de aprendizaje que se plantean en la multiplicación.
- Encontrar las causas que provocan el fracaso del aprendizaje.
- Estudiar los procesos psicológicos que intervienen en el proceso del aprendizaje de la multiplicación.
- Determinar los trastornos que limitan el aprendizaje de la multiplicación.
- Propuesta de una metodología manipulativa y significativa.
- Propuestas de actividades que aporten una perspectiva de comprensión en el aprendizaje de la multiplicación.

1.3. Contextos

Nos referimos a contextos al modo de uso de la multiplicación en las matemáticas, dependiendo del significado de la multiplicación que se propone en el enunciado.

Aguilar y Navarro (2000) indican que hay cuatro categorías multiplicativas, en las que se distinguen las dificultades de repetición de grupos, combinar con distintas posibilidades, y el empleo único de veces más y veces menos: isomorfismo de medidas, producto cartesiano, problemas escalares grandes y problemas escalares pequeños.

En las orientaciones didácticas para la enseñanza de la multiplicación de la Dirección General y educación. (2001) de Buenos Aires, se observan los siguientes contextos:

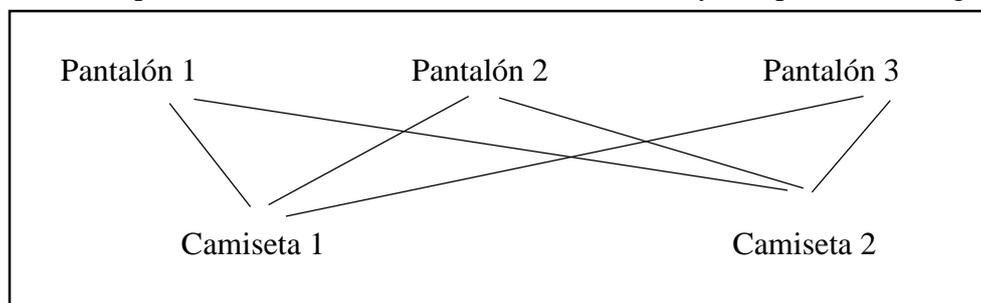
- Proporcionalidad o isomorfismo de medidas para Aguilar y Navarro (2000): la multiplicación de varios elementos tiene una constante que se mantiene siempre. En este tipo de problemas se pueden encontrar distintas situaciones, como el de comparación, el de estado o el de razón. Por ejemplo de problema de proporcionalidad con razón, en un enunciado que se proponga al alumno resolver el valor de 5 chicles conociendo el valor

de uno de ellos y que cada uno de ellos mantenga el mismo valor. La razón del problema es el valor por cada chicle.

En el caso de la comparación o problemas escalares según Aguilar y Navarro (2000): la multiplicación se presenta como número de veces más o menos de elementos iguales que un conjunto tiene más que otro. Un ejemplo es encontrar el resultado del total de bolas que hay en una caja, si ésta tiene 4 veces más bolas que otra caja que contiene 15 bolas.

- Organizaciones rectangulares: en las que la multiplicación se presenta mediante representaciones de hileras con el mismo número de elementos. Un ejemplo de este tipo de problemas es el de baldosas, de filas y columnas. Por ejemplo que se proponga resolver el número total de asientos que hay en un teatro indicando el número de filas y el número de asientos por fila.

- Combinatoria o multiplicación como producto cartesiano según Aguilar y Navarro (2000): en los que la multiplicación aparece cuando se combinan elementos de distintos conjuntos. Un ejemplo de este tipo de problemas resulta de la propuesta de encontrar las distintas formas posibles de vestirse teniendo dos camisetas y tres pantalones (figura 1).



(Figura 1: ejemplo de combinatoria)

Además el producto cartesiano puede aparecer como producto de medidas. Un ejemplo es resolver un problema en el que se pide el área de un rectángulo, conociendo la medida de sus lados.

- La multiplicación como objeto de estudio en sí misma: se trata de presentar la multiplicación como instrumento de reflexión de la multiplicación, mediante el análisis de las relaciones de los elementos que intervienen en la multiplicación. Comprender las distintas propiedades de la multiplicación (la propiedad distributiva, conmutativa,

asociativa, elemento neutro y sacar factor común), y analizar mediante la descomposición de números. Se pueden observar los ejemplos en la figura 2.

Distributiva: $85 \times 5 = (80 + 4) \times 5 = 80 \times 5 + 4 \times 5$
Conmutativa: $11 \times 5 = 5 \times 11$
Asociativa: $(11 \times 5) \times 2 = 11 \times (5 \times 2)$
Elemento neutro: $5 \times 1 = 5$
Sacar factor común: $11 \times 5 + 8 \times 5 = (11+8) \times 5$

(Figura 2: ejemplos de las propiedades de la multiplicación)

Además estos contextos pueden representarse para facilitar la comprensión del problema que se intenta resolver. Hay distintos modelos, como lineales, cardinales (se unen de forma repetida conjuntos con el mismo número de elementos), diagrama de flechas (combinatoria), funcionales (indicando cuales son los estados y cuál es el operador), de proporcionalidad, de medida o numéricos.

Como indican los Chamorro, Belmonte, Llinares, Ruiz y Vecino (2003), se debe comenzar desde problemas fáciles que resultan de problemas de isomorfismo de medidas, después con problemas de producto de medidas (calcular las combinaciones posibles) y finalmente con problemas con un espacio único de medidas en los que se compara las veces más o menos que una medida está contenida en otra (veces más).

Aguilar y Navarro (2000) proponen un programa en el que se utilizan tareas de búsqueda de objetos en diferentes escenarios, la señalización de los datos y la incógnita en los enunciados, uso de gráficos, comprobación para cerciorarse del proceso, láminas, repasos de los contenidos y la representación. Llamaron al programa PIPAEVSO (Programa Institucional de resolución de Problemas Aritméticos Escolares Verbales a una Sola Operación). A pesar de que los resultados son buenos, inciden en que es necesario un programa en el que se manipule, con el fin de crear experiencias más atractivas y motivadoras.

2. DIFICULTADES DEL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN EN EDUCACIÓN PRIMARIA

El concepto de multiplicación y división se entiende peor que el de suma y el de resta porque son conceptos diferentes de agrupaciones, y como se ha indicado anteriormente, la multiplicación supone un “pico”, a causa de su dificultad y su importancia en los niveles posteriores a su aprendizaje. Y para conocer las dificultades del aprendizaje de la multiplicación, ha sido necesario leer artículos de revistas matemáticas, dónde varios autores exponen su preocupación por el aprendizaje de la multiplicación, las dificultades que encuentran en el proceso de la enseñanza-aprendizaje y las actividades que ayudan a la comprensión de la multiplicación.

En la enseñanza de la multiplicación se utilizan poco las nuevas tecnologías, algo que Iglesias (2005) recurre a la importancia del uso de las tecnologías, como la calculadora y el ordenador, que les da valor como recurso necesario; y el cambio de perspectiva del profesor, que debe dinamizar la clase y dirigir el aprendizaje sin ser sólo un transmisor de información. Por lo tanto, el profesor debe diseñar clases de cálculo en las que se pueda experimentar y manipular objetos, además de utilizar las nuevas tecnologías. El autor incide en la necesidad del cambio de la enseñanza, porque la sociedad cambia constantemente y la educación debe enseñar en torno a los cambios que se producen, porque se educa al alumnado para que éste forme parte de esa sociedad cambiante.

2.1. El sentido del número y el concepto de la multiplicación.

Al comparar el algoritmo propio de la multiplicación con los algoritmos de la suma, se observa que necesitan maneras diferentes de recuento. La causa es que la multiplicación requiere de agrupaciones de un mismo elemento, que contienen la misma cantidad de unidades, por lo que las situaciones problemáticas y sus representaciones son diferentes. Redondo (2011) indica que existen dificultades importantes para establecer el concepto de la multiplicación porque supone una forma diferente de contar, y da lugar a la relevancia del dominio de la suma, porque es un elemento muy importante para el aprendizaje de la multiplicación.

Si los niños no piensan en el resultado de la multiplicación como un conjunto entero formado por un número de elementos que se repiten un número determinado de veces, los niños tendrán problemas para conseguir llegar al significado de la multiplicación.

Redondo (2011) indica que es un error usar el signo “X” porque puede dar confusión en el sentido del número de la multiplicación, ya que no es un signo en el que el alumno comprenda que se junten conjuntos iguales, por ello se deberían utilizar palabras como veces, conjuntos, de... Se puede observar las expresiones en la figura 3. Los autores Rocha y Merino (2009) piensan que las dificultades que se presentan en la multiplicación, son causadas por la falta de sentido que se le da a los números y lo que representan.

4 veces 7
4 conjuntos de 7 elementos

(Figura 3)

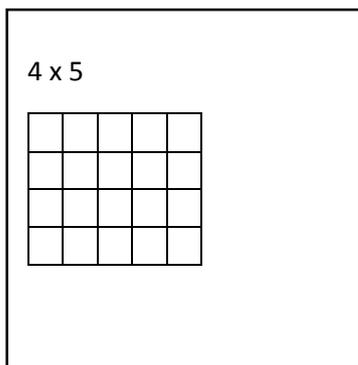
Por otro lado, se establece una confusión al enseñar al alumno el concepto de la multiplicación a través del significado de la suma, ya que la multiplicación y la suma no tienen el mismo significado. Fernández (2007, p.121) dice “... una suma no es una multiplicación. Mientras que en las situaciones sumativas sólo aparece un conjunto (manzanas y manzanas; peras y peras; estanterías y estanterías), en las situaciones en las que interviene la multiplicación aparecen dos conjuntos...”, al referirse a la multiplicación como una suma reiterada del mismo número, se confunde al alumno, ya que los signos que se escriben son diferentes (+ / x), y al realizar un cálculo de varias multiplicaciones, es difícil ver el número de veces que se suma un número ($4 \times 2 \times 5 \dots$), por lo que se debería de iniciar la enseñanza con palabras que acerquen al concepto idóneo, como sería al cambiar el signo x por la palabra veces (4 veces 2) o por la palabra “de” (4 conjuntos de 2 elementos).

Además si no se ven las operaciones como algo global, como un número y el sentido existente en él, es difícil conocer el sentido del número, como indican Arteaga y Guzmán (2005). Por lo que es necesario resolver problemas verbales y materiales manipulativos que facilitan el aprendizaje del sentido del número desde una perspectiva más global. Arteaga y Guzmán (2005) ven necesario la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, al finalizar la etapa de primaria, para captar el sentido de la multiplicación, aunque este sentido se puede enseñar desde los niveles básicos, dándole significado a los números como parte de un número que generaliza y engloba el proceso, es decir, desde lo global a lo analítico.

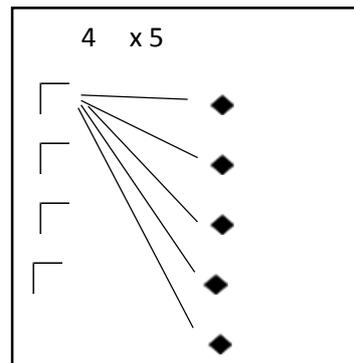
2.2. Dominio de la abstracción y referencias visuales y representativas.

Las representaciones de una multiplicación suelen ser mayores que las representaciones de la suma de los mismos elementos, porque hay un relevante aumento de elementos para contar.

Los niños entienden mejor la representación de combinaciones que la representación en forma de tabla, lo que hace que comprendan mejor la multiplicación y su uso sea más cómodo que el uso de representación en tabla, como indica Redondo (2011). La causa de esta comodidad se debe a que se visualiza de manera más rápida y clara las veces que un número se repite, mientras que en la representación en forma de tabla se visualiza peor y se necesita mucha concentración para contar los elementos situados en dos límites contiguos. En la figura 4 se puede ver la representación en forma de tabla y en la figura 5 la representación de combinación.



(Figura 4, representación en forma de tabla)



(Figura 5, representación de combinación)

Los niños no son capaces de representar las situaciones problemáticas cuando tienen dificultades en la coordinación espacial (organización por filas, columnas, seguir la dirección adecuada...), por lo que no consiguen relacionar el significado de la multiplicación de la situación con la representación visual.

Rocha y Merino (2009) aportan un modelo en el que se propone la comprensión del aprendizaje real de los alumnos, la identificación de las metodologías que favorecen este conocimiento y la contribución de materiales que facilitan dicho aprendizaje. El método que proponen se apoya en la creatividad y en el pensamiento crítico de los propios alumnos, de manera que ellos son los que analizan la situación y manifiestan la resolución a su manera. Su método se caracteriza por las representaciones de las situaciones

mediante materiales de escritura, recorte y pintura, y por la utilización de la representación de situaciones reales.

2.3. Dificultad en la comprensión de la multiplicación.

No es necesaria la memorización de las tablas de multiplicar, para comprender el significado de hacer una multiplicación, por lo que el problema viene en la falta de comprensión.

Ramírez y Castro (2014) exponen su preocupación por la metodología que se está llevando a cabo en las aulas de primaria, ya que no están adaptando la intención explícita. Los autores han hecho un estudio para observar los datos de la LOE o de varios informes educativos, como lo informes PISA o MEC, en los que se explica con rigurosidad lo importante en la competencia matemática, dando más valor a la comprensión que a la memorización. Por ello hay que considerar un enfoque cognitivo, que nos permita comprender los procesos por los que pasa la información dentro de la mente del alumno, desde la recepción de la estructura del cálculo, hasta la reorganización de los datos para poder resolver el problema. Para probar que la memorización de las tablas en los primeros niveles no es tan necesaria, y que el razonamiento es muy importante. La propuesta de los autores es la utilización de materiales manipulables para el aprendizaje de la multiplicación.

Las dificultades para comprender la multiplicación son la consecuencia de un aprendizaje que sigue una línea memorística, sin dejar analizar las relaciones que hay entre los números, de manera que no se usa la creatividad para experimentar, ni se usa la representación de situaciones reales, y tampoco se manipulan objetos para buscar la comprensión de la tarea.

Redondo (2011) dice que los niños cuentan los elementos de las agrupaciones de uno en uno porque no comprenden el significado de la multiplicación, y puede ser la causa de no utilizar las estrategias de análisis y de síntesis.

Fernández (2005) apoya la idea de que la aritmética y las matemáticas en general son ciencia, y como ciencia se debe aprender a través de la experimentación de situaciones y de la comprobación de los procesos. No importa tanto el resultado como la manera de llegar a él, y existen tantos caminos como mentes que los piensan.

Citando sus palabras:

Los sombríos avatares de los estereotipos que se representan normalmente en nuestras *sumisas* aulas. Los niños imitan sin saber por qué hacen lo que hacen o, por qué dicen lo que dicen. Cuando utilizan el algoritmo (*sumiso*), en muchas ocasiones, tardan más en obtener el resultado que si lo intentan por sus propios métodos –sus propios métodos, desde la corrección matemática, también son algoritmos respetables, y siempre *innovadores*–. Cuando a un niño que entiende lo que hay que hacer se le desafía convenientemente es capaz de crear originales formas de llegar al desenlace numérico. (Fernández, 2005, pp 23-24).

Gallardo, González y Quintanilla (2013) comentan la dificultad que hay en la cognición del alumno para comprender las propiedades distributiva, conmutativa y asociativa que implica la multiplicación. La causa es la falta de visualización y del de la falta del dominio de abstracción. Para comprender estos procesos, los alumnos deben analizar la operación de la multiplicación y crear distintos métodos de resolución.

- Los niños tienen dificultades para visualizar que la multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los sumandos. Se ejemplifica en la figura 6.

$$\begin{array}{l} 2 \times (3 + 5) = 2 \times 3 + 2 \times 5 \\ 2 \times (3 + 5) = 2 \times 8 = 16 \\ 2 \times 3 + 2 \times 5 = 6 + 10 = 16 \end{array}$$

(Figura 6)

- La propiedad conmutativa es complicada de comprender a causa de la variación del orden de los factores. Si los niños no crean las diferentes representaciones de los conjuntos, entonces no son capaces de visualizar la propiedad. Se ejemplifica en la figura 7.

$$2 \times 15 = 15 \times 2$$

(Figura 7)

- La propiedad asociativa comparte la característica de la anterior, por lo que se hace necesario una representación visual de las diferentes agrupaciones, para observar que el modo de agrupar los distintos factores no varía el producto. Se ejemplifica en la figura 8.

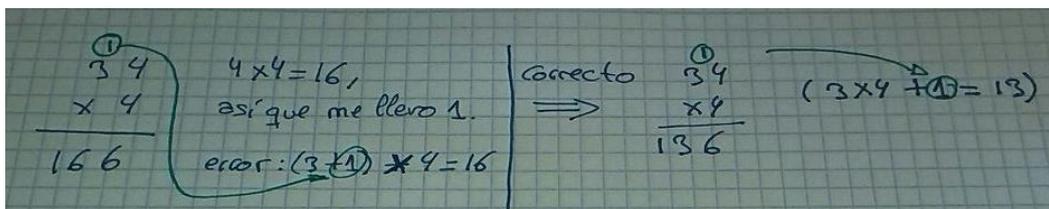
$(2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5)$
$(2 \times 3) \times 5 = 6 \times 5 = 30$
$2 \times (3 \times 5) = 2 \times 15 = 30$

(Figura 8)

2.4. Errores de cálculo en el algoritmo estándar de la multiplicación.

En los apuntes de la asignatura de Didáctica de Aritmética I del curso 2011-2012 de la facultad de Ciencias Humanas y de la Educación de Huesca, se encuentra un capítulo sobre la didáctica del número natural en educación primaria, creado por Cid, Escolano y Muñoz. Quienes describen los errores, que habitualmente se comete en la escritura del algoritmo estándar de la multiplicación:

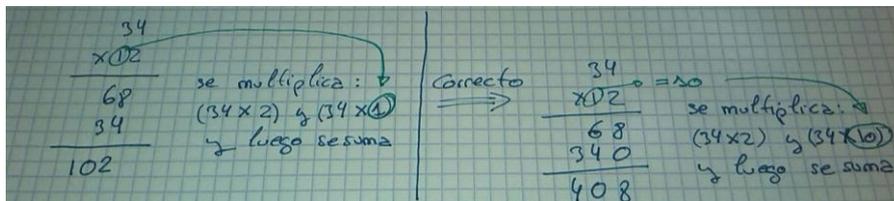
- Dar falsas respuestas a los resultados de las tablas de multiplicar (un ejemplo es multiplicar por el número 0, $0 \times 4 = 4$, al no entender que agrupan cuatro veces una cantidad nula, le atribuyen el significado de la suma).
- El olvido de las llevadas en el algoritmo de la multiplicación (apuntan la unidad del resultado sin sumar las decenas al siguiente resultado multiplicativo).
- Suman la llevada a la cifra siguiente y multiplican el resultado aditivo (en la multiplicación 34×4 , se sigue el proceso siguiente: $4 \times 4 = 16$ y me llevo una, $3 + 1 = 4$, entonces $4 \times 4 = 16$, por lo que el resultado es 166 en lugar de 136). Este proceso se puede observar en la figura 9.



(Figura 9)

- multiplicar por columnas (las unidades multiplican a las unidades y las decenas a las decenas).
- Las filas de los resultados se colocan de forma incorrecta (sin dejar el hueco en la segunda fila, dos huecos en la tercera..., por ejemplo, en la multiplicación $34 \times 12 = 68 + 34 = 102$, en lugar de multiplicar $34 \times 10 + 34 \times 2$ que daría el siguiente resultado: 68

+ 340 = 408, a causa de no entender realmente lo que están haciendo, al pensar que multiplican por 1 y no por 10, que es una decena). En la figura 10 se explica con un ejemplo.



(Figura 10)

- Hacen una mala gestión de ceros intermedios y de ceros finales, cometiendo el error de no contar con la multiplicación del cero por pensar que no tiene valor (al multiplicar 345 x 204, transforman la operación a 345 x 24 de manera inmediata, o en el caso de 345 x 240 la transforman a 345 x 24).

Por lo que se observa, los errores que se cometen en el algoritmo de la multiplicación, son errores de comprensión y no de memorización de las tablas, al no comprender que multiplican unidades, decenas, centenas, u otras unidades, entonces no realizan de manera correcta el algoritmo de la multiplicación. Al enseñar la multiplicación como algo nuevo, parece que lo aprendido anteriormente no tiene nada que ver, aunque no es cierto, porque no es otra cosa que una forma de contar cantidades grandes, sin cometer errores de conteo por su amplitud, además de no hacer constar la importancia de las diferentes unidades que comprende el sistema decimal.

En el caso del aprendizaje del concepto, la técnicas manipulativas y significativas resultan ser muy útiles, ya que así el algoritmo se aprende con facilidad, estableciendo una base sólida del aprendizaje, lo que nos da paso a dejar el aprendizaje por memorización en un segundo plano y mantener el aprendizaje significativo en el primer plano del aprendizaje matemático.

2.5. Dificultades según la resolución de situaciones problemáticas.

Cid et al (2011) inciden en la estructura semántica en las que se encuentran los datos de un problema, como consecuente del nivel de dificultad de comprensión y de resolución del problema, además de la situación en la que se encuentra la incógnita.

Estos autores describen cinco categorías dependiendo de la intención de los problemas:

- ERE (estado-razón-estado): es la estructura que los niños comprenden con mayor facilidad. En ésta intervienen dos estados, uno inicial y otro final, en el que la razón actúa como constante entre los dos estados. En la figura 11 hay un ejemplo:

Ejemplo: si yo tengo 3 paquetes (E1) y cada uno cuesta medio euro (R),
¿Cuánto cuestan los tres paquetes (E2)?.

(Figura 11)

- ECE (estado-comparación-estado): esta estructura también la comprenden con facilidad, ya que existen un estado inicial y otro final que se diferencian por el número de veces que es mayor uno de otro. En la figura 12 hay un ejemplo de situación ECE:

Ejemplo: si tú tienes 4 canicas y yo tengo 2 veces más canicas que tú ¿cuántas canicas tengo yo?

(Figura 12)

- EEE (estado-estado-estado): es la estructura de problemas de combinatoria, en la que hay dos estados que se combinan para dar el mayor número de posibilidades. Esta estructura es fácil de comprender como las dos anteriores, siempre y cuando la incógnita se encuentre en el estado combinado. En la figura 13 hay un ejemplo de situación EEE:

Ejemplo: si tengo 4 camisas y 2 pantalones, ¿de cuántas maneras distintas me puedo vestir?

(Figura 13)

- Las estructuras RRR (razón-razón-razón) y CCC (comparación-comparación-comparación) son las más complicadas de comprender, ya que se modifica varias veces la magnitud, o se observa que un número está comprendido un número de veces en otro, que a su vez la segunda cantidad está comprendida en una tercera. En la figura 14 hay un ejemplo de cada estructura:

Ejemplo de estructura RRR: hay 5 manzanas en una caja, y con 4 cajas se llena un estante de frutas, ¿cuántas manzanas hay en 1 estante?

Ejemplo de CCC: yo tengo 4 veces más canicas que Juan, y tú tienes 2 veces más canicas que yo, ¿cuántas veces más canicas tienes tú que Juan?

(Figura 14)

Los problemas de comprensión de las estructuras semánticas son debido a que los alumnos aprenden la resolución de situaciones de manera automática, sin poder experimentar dichas situaciones, y por eso cometen errores en la representación y la resolución de estos problemas.

Si el alumno no aprende a resolver problemas, la motivación por aprender puede descender, además de no trascender del ámbito escolar. Por lo que se hace necesario establecer una base sólida en el aprendizaje que esté centrarlo en las situaciones reales, para que estén relacionadas con los intereses de los alumnos y del entorno más cercano a ellos y poder conseguir un aprendizaje útil en la vida cotidiana.

Es necesario realizar un entrenamiento para conseguir el aprendizaje de la resolución de problemas, como indican Aguilar y Navarro (2000). La idea principal de los autores es crear un entrenamiento de habilidades de resolución, centrado en medidas de observación y generales, entrenar problemas de cambio, de combinación, de comparación, de igualación, de isomorfismo de medida y de producto cartesiano. Para ello, los autores se fundamentan en la psicología cognitiva, teniendo en cuenta la manipulación, los símbolos, los gráficos y la propia manifestación que fomenta el aprendizaje.

2.6. Dificultades en la memorización.

La memorización de las tablas de multiplicar se muestra como una gran dificultad de aprendizaje en los primeros niveles de primaria.

La mayor dificultad, para memorizar las tablas, radica en la falta de comprensión de las tablas de la multiplicación, como indica Redondo (2011). Porque la memorización supone el dominio del nivel de abstracción pero hay pocas referencias visuales que ayudarían a comprender el concepto de la multiplicación. Redondo (2011) dice que los niños no han desarrollado la memoria de trabajo porque tienen que memorizar algo que ellos no comprenden y no disponen de actividades manipulativas y atractivas, lo que hace que no aprendan bien las combinaciones numéricas más visuales y disminuya la atención necesaria para resolverlas.

Para este autor hay unas tablas más fáciles de aprender que otras, dependiendo de la facilidad de visualización de dichas tablas. Las más fáciles de visualizar son la del 1, 10,

2 y 5. La de 3, 4, 6, 8 y 9, son unas tablas que mantienen una cierta dificultad de visualización. Y por último, la del 7 es la más complicada. Por lo que incide que es necesario enseñar las tablas siguiendo un orden, de menor a mayor dificultad de visualización.

2.7. Falta del razonamiento sobre el cálculo mental.

El uso del cálculo mental supone el uso de estrategias propias del alumno para llegar al resultado de una manera rápida. Estas técnicas están caracterizadas por la manera de pensar de cada uno, y los errores que se cometen son propios de la manera de resolver mentalmente que tiene cada uno. Los alumnos cometen errores si no dominan las tablas, si no comprenden el significado de la multiplicación o si no conocen las propiedades de la multiplicación y la descomposición polinómica del número decimal, lo que hace que no se utilicen las relaciones entre los números.

Gómez especifica que existen tres tipos de fallos:

Cuando se enseña cálculo mental los estudiantes aprenden nuevos métodos, pero también incrementan el número de sus respuestas incorrectas (Gómez, 1995, b). Estas se pueden dividir en dos categorías básicas, según que la fuente de las mismas sea las condiciones con que se llevan a cabo las operaciones o la calidad del dominio de los conocimientos aritméticos. En la segunda categoría se distinguen tres subcategorías: una primera que agrupa los fallos basados en una memorización pobremente establecida de determinados hechos numéricos, una segunda que agrupa los fallos que se basan en la forma en que han sido aprendidas las reglas, y una tercera que se basa en una falta de análisis del efecto que las alteraciones en los datos produce en los resultados. (Gómez, 2005, p. 27)

Las dificultades del cálculo mental surgen cuando los niños aprenden un procedimiento único, como si fuera una fórmula mágica, memorística y sin razón.

La enseñanza de la multiplicación debe ser flexible y dejar ver las relaciones que se encuentran entre los números, como indica Fernández (2005). En la figura 15 aparece un ejemplo:

$$9 \times 7 = 10 \times 7 - 7$$

La tabla del 8 es el doble que la tabla del 4

La tabla del 6 es el doble que la tabla del 3

$$123 \times 98 = 123 \times 8 + 123 \times 90$$
$$123 \times 98 = 123 \times 100 - 123 \times 2$$

(Figura 15)

Uno de los factores que impiden un buen aprendizaje del cálculo mental puede ser la falta de posibilidad de éxito del cálculo mental, como indica Burón (1994), porque puede fomentar la propia creencia de que no se es capaz, de que si no se consigue se fracasa, la malas estrategias de aprendizaje y la creencias sobre la importancia de la actividad. Para evitar este sentimiento de ser incapaz, se deben crear metas que posibiliten el aprendizaje y metodologías que faciliten la comprensión.

2.8. Falta de comprensión del proceso cognitivo

Existe un problema en la interpretación del profesorado sobre la comprensión de los alumnos en el área de matemáticas, y para solventar el problema, se debe hacer un empleo de situaciones analíticas, en las que se observe la comprensión sobre los conceptos aprendidos, como indican Gallardo, González y Quintanilla (2013). Los autores citan “El empleo técnico se limita al establecimiento de las relaciones externas usuales entre los elementos básicos del algoritmo que hacen posible recorrer el procedimiento establecido en el sentido apropiado” (2013, p.74).

La idea de Gallardo et al (2013) está fundamentada en el dualismo entre dos orientaciones: una es la cognitiva, cuyo objetivo es establecer conexiones entre la realidad interna y la externa para evitar las dificultades vinculadas con la transición entre las dos realidades. Y otra orientación es la semiótica, cuyo objetivo es adecuar los entornos en los que se realiza la situación matemática para que facilite la interpretación, el análisis lingüístico y estructural del texto, que a su vez facilitan la comprensión y el sentido que debe captar el alumno. Esta orientación ayuda a encontrar las dificultades en la transición entre lo hablado y lo escrito.

Entre las dos orientaciones se pueden encontrar vínculos que dan lugar a la interpretación de la comprensión en dos dimensiones, la dimensión fenómeno-epistemológica y la dimensión Hermenéutica.

Para Gallardo et al (2013), la primera dimensión, la fenómeno-epistemológica, parte de ser consciente de no tener la posibilidad para observar la comprensión del alumno de manera directa, y que es muy importante obtener dicha información para conseguir un buen aprendizaje. Por lo que se necesitan estrategias centradas en las manifestaciones orales o escritas para poder interpretar la comprensión del alumno sobre la tarea y los conocimientos necesarios para realizar la tarea. Para realizar estos acercamientos, se necesitan actividades previas que aporten experiencias que faciliten la comprensión matemática. Y la segunda dimensión, la dimensión hermenéutica, parte de la interpretación de los rasgos de conocimiento que manifiesta el alumno de manera externa, mediante la comunicación. Se sigue el proceso desde la comprensión del alumno, hasta la interpretación de los rasgos de conocimiento.

La figura 16, recogida del artículo de Gallardo et al (2013, p73) explica de una manera clara la idea los autores, a pesar de que no sea una actividad destinada a educación primaria, debido a su dificultad:

Observa las siguientes variantes utilizadas para calcular 23×32 :

<i>Primera variante</i>	<i>Segunda variante</i>	<i>Tercera variante</i>
$\begin{array}{r} 23 \times \\ \underline{32} \\ 69 \\ \underline{46} \\ 736 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23 \times \\ \underline{32} \\ 64 \\ \underline{96} \\ 736 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23 \times \\ \underline{32} \\ 96 \\ \underline{64} \\ 736 \end{array}$

Y se les hace las siguientes cuestiones:

Pregunta 1: ¿Podrías decir qué se ha hecho en cada caso?

Pregunta 2: ¿Consideras estos procedimientos válidos o no? ¿Por qué?

Pregunta 3: ¿Qué razones matemáticas darías para justificar lo adecuado o inadecuado de estos métodos para multiplicar?

(Figura 16)

Con esta prueba se puede entender mejor el pensamiento del alumno, porque nos permite observar si el niño da importancia al algoritmo estándar, a los huecos, a las posiciones, a las propiedades como la conmutativa y la distributiva, a las llevadas, u otras.

Al realizar métodos de análisis del algoritmo de la multiplicación, que facilitan la comprensión del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos, se recoge la información necesaria para que el profesor tenga éxito en la enseñanza de la multiplicación.

3. FACTORES QUE INFLUYEN EN EL PROCESO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN

Este apartado trata de explicar los elementos que influyen en el aprendizaje de la multiplicación, ya sean externos al niño, o internos como las emociones, el procesamiento de la información o algunos factores genéticos que pueden limitar el aprendizaje de la multiplicación.

En el proceso del aprendizaje de cualquier materia, en este caso, de las matemáticas y concretamente de la multiplicación, influyen muchos elementos internos del propio alumno y externos a él, procedentes de las características ambientales de la escuela y de la familia.

Para conseguir una mejor comprensión del aprendizaje, es necesario acudir a las aportaciones de la psicología. Los pedagogos y psicólogos coinciden en la necesidad de aportar un ambiente en el que se motive al alumnado, que se eliminen las barreras que impiden aprender, ya sean psicológicas o físicas, y que se adecúen las tareas y los recursos al estilo del aprendizaje del niño. Con el fin de que el alumno, se vea a sí mismo, capaz de aprender el contenido de la materia sin problemas. Y puesto que el aprendizaje de la multiplicación se muestra como una tarea difícil en torno a la comprensión, a su proceso y su memorización, Es necesario acudir a las conclusiones de los psicopedagogos. Además de tener en cuenta las aportaciones desde la Didáctica de la aritmética, que muestra la evolución de los niños en la comprensión de las situaciones multiplicativas.

Iniciamos este apartado con los elementos externos esenciales para el proceso y lo concluiré con los elementos internos, con las aportaciones de autores que unen elementos externos e internos, como es la atención y la motivación.

3.1. Factores externos que influyen en el aprendizaje de la multiplicación

Los elementos que se consideran externos al alumno, son los elementos que de una manera u otra, actúan de forma relevante ante el proceso del aprendizaje y de la actitud del alumno por querer aprender.

Como indica Burón (1994), el conductismo nos aporta experiencias buenas o malas, como respuesta a una acción, que se efectúa ante una situación determinada, con el fin de que se repita o se omita dicha acción. Es habitual utilizar el conductismo para que los alumnos tengan éxito en su aprendizaje académico, ya sea con el uso de premios como subir la nota, utilización de las actitudes del profesorado hacia el alumno, como gestos agradables y palabras que expresan felicitaciones por una conducta adecuada, la creación de actividades que les gustan a los alumnos, la recompensación con objetos premiados u la recompensación pública de unas notas excelentes. Aunque también se usa el castigo como fin de eliminar la conducta indeseable, así como quitar premios, añadir actividades repetitivas y aburridas, la publicación de una nota baja, la omisión de la atención del profesor u otros.

Javier Burón (1994) explica que el condicionamiento operante puede actuar en la intención del alumno, por hacer las cosas bien. Un ejemplo es aprender las tablas de multiplicar, porque al aprenderlas sabe que hay un premio, sin darse cuenta de la importancia que tiene la memorización de las tablas. Sin embargo, si las tablas no se aprenden porque el alumno no es capaz de memorizarlas, se puede crear un castigo continuo, que puede repercutir en el aprendizaje del proceso y en la comprensión del significado de la multiplicación. Enseñar a memorizar las tablas casi desde el principio del contenido es un error, que se comete muy a menudo, y que puede crear el abandono de la intención por aprender, porque puede hacer ver al alumno que no es capaz de aprenderlo, que es tonto y que no puede, como explica Burón (1994). Si el aprendizaje de la multiplicación se inicia en los primeros niveles de primaria y se tienen que tener aprendidas en los niveles medios, además de saber multiplicar con números decimales al finalizar la etapa, como indica la LOMCE de 1 de marzo de 2014 (2013). El alumno puede arrastrar este fracaso durante la educación de primaria, lo que iniciaría una indefensión aprendida (una actitud de no querer aprender porque no se vea capaz, aunque lo sea), y que no intente aprender la materia vinculada a las matemáticas en los niveles posteriores. Si se diera el caso de estar presente ante una indefensión aprendida, como indica Burón

(1994), el profesional debería actuar de manera inmediata, mediante actividades fáciles y de comprensión del significado de la multiplicación, que permitan al alumno probar que es capaz de llegar a la meta y que puede intentar realizar ese tipo de actividades, y poco a poco ir subiendo el nivel.

Este aspecto apoya la idea de iniciar el aprendizaje con la comprensión, dejar a un lado la memorización de las tablas, y centrarse en la comprensión y el proceso cognitivo. Ya que si los alumnos comprenden lo que hacen sin esfuerzo excesivo y sin memorizar series de números desde el principio, el aprendizaje posterior de las tablas será más exitoso, siempre y cuando se realice de manera motivadora y significativa, como sería la realización propia de la construcción de las tablas de multiplicar.

Otro aspecto que Javier Burón (1994) indica como elemento importante es el lugar de control. Explica que al bajar el rendimiento académico, el alumno siente vergüenza y culpabilidad por pensar que ha estudiado mal o ha estudiado poco. Pero si la causa del fracaso es exterior al alumno, éste atribuye su fracaso a componentes externos, y obtiene el resultado de no esforzarse, ya que el niño cree que no tiene el control de su aprendizaje.

Este elemento se puede relacionar de manera indirecta con el efecto Pigmalión del que habla Burón (1994). Si el profesor cree que el alumno puede conseguirlo y así lo demuestra, el alumno lo intentará, se esforzará por aprender, pero si ocurre lo contrario, el pensamiento del alumno tendrá dos vertientes, una se refiere al camino del yo no puedo y soy incapaz de resolver el problema, (luego el niño no lo intenta). Y la otra es culpar al profesor porque no confía en sus habilidades, (luego el niño no puede hacer nada ante eso).

Burón (1994) habla de estos factores como elementos intrínsecos del alumno, aunque el inicio de estos factores pueden ser externos, como marca el condicionamiento de Seligman (1975), y se explica bien con el experimento realizado con perros encerrados en recintos vallados. Al poner a los perros un límite inalcanzable, que no podían llegar a saltar, los perros aprendieron a soportar el dolor de los calambrazos que caracterizaban su recinto, y al bajar la valla, los animales no intentaban huir de su recinto porque creían que no podían saltar dicha valla. Comienza siendo un factor externo al animal y finalmente es un elemento interno, de su creencia en sí mismo. Por ello los profesionales

deben poner metas alcanzables y estimulantes, para que los alumnos no sientan la frustración de no poder alcanzar las metas del aprendizaje.

Según Peganos (2002) citado en Martínez (2005, p.12): “están...los métodos de enseñanza desarrollados cotidianamente en nuestras instituciones escolares en correspondencia con la visión que se tiene sobre la Matemática escolar”. Por lo que las creencias de los profesores pueden estar relacionados con el momento de organizar y desarrollar las actividades educativas matemáticas.

El efecto Pigmalión causado por el profesional, se puede dar de una manera similar en el núcleo familiar, en las expectativas que tengan los miembros de la familia sobre el aprendizaje del alumno y de la enseñanza del profesional. Además la familia es un elemento muy relevante, ya que al igual que la transmisión de los valores, también transmiten los conocimientos matemáticos desde una perspectiva diferente.

Además de todos estos factores, las leyes educativas que rigen la educación escolar del alumno forman parte de un marco social cambiante, y por tanto de una educación que se modifica para dar respuesta a esa sociedad cambiante. Por ello es necesario hacer modificaciones en la ley que se adecúen al estado de la sociedad y de las necesidades educativas. Por un lado la educación está condicionada por las nuevas tecnologías que dotan de información rápida y abundante, y por otro los gobernantes que cambian su propuesta de áreas y contenidos conforme a sus creencias. Estos elementos hacen que los profesionales tengan la necesidad, o deban actualizarse de manera continua, para adaptar el nuevo currículo, con la ampliación o aceleración de contenidos, para dar respuestas adaptadas a las necesidades e intereses del alumnado, y conseguir crear un ambiente productivo y motivacional.

La ley actual, Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, LOMCE, aporta datos de preocupación por los que se debe realizar un cambio:

Los resultados de 2011, difundidos por EUROSTAT (Statistical Office of the European Communities) en relación con los indicadores educativos de la Estrategia Europa 2020, destacan con claridad el abandono educativo temprano como una de las debilidades del sistema educativo español, al situar la tasa de abandono en el 26,5% en 2011, con tendencia al descenso pero muy lejos del valor medio europeo actual (13,5%) y del objetivo del 10% fijado para 2020. (LOMCE, p. 97861)

Algunas modificaciones observadas en la LOE (2006) y en la LOMCE (2014) en el aprendizaje de la multiplicación son:

- La descomposición multiplicativa de los números, la construcción y memorización de las tablas de multiplicar, y la utilización de los algoritmos estándar, en contextos de resolución de problemas, de suma, resta, multiplicación y división por una cifra.

Aparece en la LOE como contenido del segundo ciclo, que finaliza en el cuarto curso, y en la LOMCE aparece como estándar de aprendizaje en el tercer curso de primaria, por lo que se acelera un curso.

- La utilización de estrategias personales de cálculo mental en cálculos relativos a la multiplicación simple.

Aparece en la LOMCE en el tercer curso y en la LOE en el tercer ciclo de primaria.

Por lo que se observa un aumento y aceleración de contenidos en el área de matemáticas, como consecuencia de la necesidad de desarrollar el pensamiento científico y crítico. Es por ello que el uso de la comprensión y el razonamiento deben de enseñarse con prioridad, y por último debe de enseñarse la memorización, ya que a través de la memorización no se consigue un pensamiento crítico y científico, en cambio sí se puede conseguir con el razonamiento.

Cid et al (2011) indican que las situaciones multiplicativas de comparación resultan más difíciles de comprender que las aditivas, porque los niños tienden a reinterpretar las comparaciones multiplicativas como comparaciones aditivas.

La complicación de las situaciones viene dada por varios factores:

- La estructura semántica de las situaciones y de la posición de la incógnita (las más fáciles son las estructuras ERE, ECE y EEE, y las más difíciles son RRR y CCC). (ver en el epígrafe 2.5)
- El grado de contextualización, ya que los niños tienden a comprender mejor las situaciones cuanto más contextualizadas estén, teniendo más facilidad en las situaciones familiares y que se utiliza material manipulativo, y más dificultad en las hipotéticas no familiares y sin material presente en el aula.

- El tamaño de los datos, porque encuentras las situaciones más difíciles cuanto mayor son los datos.

3.2. Factores internos que influyen en el aprendizaje de la multiplicación

Cuando se habla de factores internos del alumno, se hace referencia a las características cerebrales, así como las estructuras cerebrales y neuronales. Y como la escuela recoge a todos los niños, sean cuales sean sus características y limitaciones, porque la educación actual es una educación inclusiva, debe plantearse la actualización de los docentes en torno al conocimiento de las neurociencias. Estas ciencias aportan estrategias novedosas que facilitan el proceso de la enseñanza-aprendizaje, desde la comprensión de las características de cada alumno.

Eddy Mogollón (2010) defiende la idea de un necesario aprendizaje neurocientífico por parte de los pedagogos, con el que puedan prever situaciones de ansiedad y miedo, poner remedio a las situaciones que aportan las experiencias que causan estas sensaciones y evitar el fracaso académico de los escolares de primaria, que se inicia con las situaciones de ansiedad y provocan la falta de atención, la disminución de motivación y la dificultad del procesamiento de la información. El autor expone que los niveles que se deben de trabajar con los alumnos son el nivel cognitivo, el semiótico, el lenguaje, la afectividad y la superación de las fobias de la asignatura.

Los alumnos reaccionan emocionalmente a los estímulos relacionados con las matemáticas y que generan una cierta tensión, como indica Martínez (2005).

Padrón dice (2005, p.12) “Tales reacciones están condicionadas por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de la Matemática y pueden ser automatizadas y solidificadas en actitudes y emociones que influyen en dichas creencias y contribuyen con su formación”.

La enseñanza de las matemáticas está interrelacionada con otras ciencias, por lo que llega a ser una enseñanza compleja, pero ambos campos se benefician mutuamente para facilitar el proceso del aprendizaje del alumno. Para ello es necesario hacer una breve apuntación sobre los elementos que contribuyen en la cognición, ya que se necesita un buen funcionamiento del sistema nervioso. En la figura 17 se observa la organización del cerebro.



(Figura 17, recuperada de: <http://psicopsi.com/Sistema-Nervioso-Equilibrio-y-emociones>)

Coelho, Fernández, Ribeiro y Perea (2006) indican que el sistema nervioso funciona a tres niveles (*niveles funcionales de Luria*): *el primer nivel*, que se encarga de las funciones básicas y primitivas, como la ordenación de los movimientos automáticos (el latir del corazón, la respiración...). Los elementos del primer nivel son *la atención* (ubicada en el tronco cerebral), y *las emociones* (ubicadas en la amígdala, en el sistema límbico). Ambos elementos son fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas, ya que si se produce un bloqueo en el sistema límbico, la información no llega al lóbulo frontal (zona dedicada al pensamiento y de razonamiento).

Las experiencias en el aula no deben causar ansiedad por no ser capaces de memorizar o de hacer cálculos de manera correcta, ya que se pueden generar situaciones en las que el cerebro del alumno impida el mantenimiento de la atención, a causa del miedo implícito en la situación. Mogollón (2010) indica que las emociones son muy importantes en el aprendizaje, porque estimulan las redes neuronales fomentando el aprendizaje. De manera que al existir una emoción intensa de alerta, la amígdala (que junto al hipocampo forma parte del sistema límbico), estimula la secreción de la hormona corticotropina y la secreción del cortisol, haciendo que disminuya momentáneamente la capacidad de la memoria, enfocándolo hacia los sentidos. Por ello la información no llega al lóbulo frontal y no se procesa la información ni se razona (evitando el aprendizaje y la memorización), porque la zona frontal queda bloqueada por el sistema límbico. Si esta emoción intensa es prolongada, causa estrés por el miedo, y se cometen errores debidos a la falta de memoria, la baja atención y la dificultad en el pensamiento de la información.

Mogollón (2010) indica que en el caso de que estos niveles de cortisol se mantengan elevados, se puede provocar un deterioro de las células cerebrales y con ello, por los que disminuye el rendimiento académico, el nivel de autoestima, la motivación y el

aprendizaje matemático. Por esto hay que evitar situaciones de vergüenza que incapaciten a los alumnos para aprender los contenidos, como es la memorización de elementos que no se comprenden.

Mogollón (2010) hace referencia a (Ledoux, 1996), quien indica que si la causa del estrés es muy relevante, puede crear una emoción traumática, que queda en la memoria y al recordar la causa, la amígdala se puede excitar y causar las sensaciones del momento traumático, creando un bloqueo del razonamiento y la atención.. Por lo que no se deben causar situaciones de estrés a causa de una mala memorización de las tablas de multiplicación.

Coelho et al (2006) indican no somos conscientes de todos los estímulos que captan los sentidos, así que *la atención* se centra en lo importante y discrimina el resto de los estímulos que recibimos. La atención puede ser atencional, de manera general activa del organismo. Un ejemplo es sentir cansancio o fatiga (controlado por el tronco funcional). Y otro tipo de atención es la selectiva, cuando nos mantenemos centrados en un estímulo durante un tiempo determinado, (es la atención que se debe conseguir ante las actividades de cálculo y de resolución de problemas), este proceso está controlado por el cerebro y no es automático.

Mogollón (2010) indica que el tallo cerebral y el sistema activador reticular ascendente “SARA” controlan los estados de alerta y vigilia, que activan la función atencional. Si la atención selectiva permanece de manera excesiva, la zona fronto-craneal y el córtex límbico inhiben la respuesta a estímulos posteriores, entonces el “SARA” actúa alterando el sistema respiratorio y cardiaco, con el fin de cesar la actividad. Por tanto, estas zonas dan acceso o limitan los estímulos sensoriales internos o externos.

Los neurotransmisores dopamina y norepinefina, actúan en la vigilia, la atención, la concentración, la memorización y la motivación. De manera que al activarse el neurotransmisor-dopamina en el mesencéfalo incide en varias áreas, el telencéfalo (activando la motilidad), el área estriado-tálamo (dando respuesta motora), el núcleo Accumbens (activando la emoción) y la corteza cerebral (en la toma de decisiones).

Mogollón (2010) hace otra referencia a Volkow, Wang, Fowler, Telang, Maynard y Logan, quienes indican que el uso de psico-estimulantes dopaminérgicos incrementan la atención y la motivación en las matemáticas. Mogollón (2010) indica también que la

dopamina se puede activar de forma natural entrenando la emoción y la motivación. Por otra parte, estos autores hicieron un estudio descubriendo que el nivel de dopamina, la motivación y la capacidad de alerta y de vigilia, descienden al privar el sueño. Si los niveles de dopamina son bajos, aumenta la fatiga y el mal funcionamiento del cerebro en las tareas cognitivas.

Mogollón (2010) incide en el TDAH como elemento que afecta la atención, alterando la cognición y causando una baja motivación. También indica que el núcleo Accumbens, causa la activación necesaria para la motivación, la concentración y la atención, y que el consumo de proteínas incrementa la atención por el contenido de aminoácidos, productores de norepinefrina y de dopamina.

Coelho et al (2006) indican que *el segundo nivel funcional* se encarga de recoger la información procedente de los sentidos (la corteza cerebral: el lóbulo parietal recoge la información del tacto, el lóbulo occipital recoge la información visual y el lóbulo temporal recoge la información auditiva). Este nivel recibe, analiza y almacena la *información procedente de las sensaciones*. Para ello utiliza la percepción, encargada de organizar las sensaciones y de construir la información para dar sentido a los estímulos. Y el área de Wernicke, encargada de la comprensión del lenguaje, juntando la información procedente de dos canales y comprendiendo el lenguaje.

Todas las actividades matemáticas utilizan esta área como canal de comprensión de la comunicación escrita y oral.

Coelho et al (2006) indican que el *tercer nivel funcional* es la parte encargada del pensamiento abstracto, el razonamiento y el pensamiento (ubicado en la corteza central, que es la que da orden del movimiento), y la producción del lenguaje se encuentra en el área de Broca, situada en el lóbulo frontal.

El razonamiento es el mecanismo por el cual las personas procesan la información que perciben. Es decir, procesan el significado, ordenan la información, la comparan, la clasifican, la categorizan, la analizan y la sintetizan. Los psicólogos creen que existen unas realidades mentales diferentes a la percepción, que infieren cuando preguntan a un sujeto que verbalice en voz alta lo que piensa mientras resuelve un problema.

El aprendizaje se confunde con la memorización de contenidos, aunque se precisa de su almacenaje para poder utilizarlos y aprender de una manera significativa.

Mogollón (2011) indica que para Baddely la memoria de trabajo es un sistema que almacena y manipula la información para que el razonamiento, la comprensión y la resolución de problemas funcionen. Hay tres tipos de memoria, la memoria sensorial (que dura unos instantes), la memoria a corto plazo (memoria de trabajo) y la memoria a largo plazo que recoge datos sobre las experiencias personales y almacena los conocimientos generales. La memoria de largo plazo es la que se quiere que el niño consiga, sobre el aprendizaje de las matemáticas, con el fin de que no se olvide el proceso necesario para multiplicar, ni de las tablas de multiplicación. Sin embargo, para conseguir una memoria a largo plazo, es necesario tener experiencias positivas, manipulativas, procedimentales y semánticas. Por lo que es necesario incidir en la memoria episódica y en la de trabajo, para conseguir almacenar contenidos correctos en la memoria de largo plazo.

Mogollón (2011) coincide con Morgado, Baddely y Edín, quienes defienden la idea de que la memoria de trabajo se utiliza para tomar decisiones y solucionar problemas puntuales, y está estrechamente relacionada con los elementos neuronales, como la atención, la motivación, la emoción y la percepción.

Mogollón (2011) indica que la memoria de trabajo es necesaria para el recuerdo episódico, el cálculo y las actividades que precisen atención y comprensión.

Mogollón (2011) cita a Edín, quien piensa que un entrenamiento de los lóbulos frontales mejora la memorización, aunque no debe ser excesivo, porque puede provocar el estímulo de dopaminérgicos en la corteza cerebral, de manera que pueden dificultar la memorización en espacios de tiempo cortos.

3.3. Factores genéticos que limitan el aprendizaje de la multiplicación.

Son los factores que intervienen en el razonamiento, la memorización, la atención, la interpretación y la maduración cerebral, es decir, la existencia de alteraciones en los procesos evolutivos del desarrollo mental, (elementos mentales que por alguna razón no funcionan).

3.3.1. *La discalculia y la dificultad en la resolución de problemas:*

Romero y Lavigne (2005) definen las dificultades específicas en el aprendizaje de las matemáticas de la siguiente manera: “Las dificultades específicas del aprendizaje de las matemáticas las presentan alumnos de inteligencia normal pero que rinden por debajo de su capacidad en tareas de cálculo y solución de problemas” (Romero y Lavigne, 2005, p.75). Para estos autores, hay dos tipos de dificultades de las matemáticas, una es la discalculia (cuando se producen dificultades en el manejo de los números o en el cálculo aritmético, a causa de alteraciones cerebrales), y el otro tipo se refiere a las dificultades de solución de problemas matemáticos, (cuando se producen dificultades en la traducción, la integración, la planificación, el cálculo, la revisión y el control de la actividad).

Romero y Lavigne (2005) explican las dificultades en la memoria de trabajo de la siguiente manera (2005, 76): “En la realización de las tareas matemáticas, la memoria de trabajo se ve obligada a romper el principio de unidad de contenido (consiste en trabajar sólo con imágenes, o sólo con palabras, o sólo con números) y manejar contenidos diversos”, por lo que el alumno debe utilizar al mismo tiempo imágenes, palabras y reglas, representando todo ello en la memoria de trabajo.

Romero y Lavigne (2005) clasifican las dificultades del cálculo de la siguiente manera:

- Déficit de atención sostenida: la incapacidad de mantener la atención durante un periodo determinado de tiempo en el cálculo, lo que hace que se abandone la tarea con facilidad.
- Déficit en el uso de la memoria de trabajo: no se recuerda lo aprendido en un corto plazo de tiempo, como las reglas del cálculo o las tablas de multiplicar.
- Déficit en la elaboración y aplicación oportuna y eficaz de algoritmos y otros procedimientos de pensamiento: dificultades para comprender el cálculo de los algoritmos y su elaboración.
- Déficit en la automatización de las operaciones básicas: dificultad para utilizar y comprender las reglas de los algoritmos.
- Déficit de conocimientos numéricos: dificultades para relacionar unos números con otros.

Romero y Lavigne (2005) reflexionan y categorizan las dificultades en la resolución de problemas, mostrando las alteraciones en los procesos cognitivos implicados en la lectura: la organización, la planificación y la escritura. Y obteniendo la siguiente clasificación:

- Déficit en la comprensión del enunciado y su traducción al lenguaje matemático: dificultades para encontrar los datos y la incógnita.
- Déficit en la elaboración y aplicación de estrategias y procedimientos de pensamiento: dificultades en la organización de los datos y el uso del algoritmo adecuado para solucionar el problema.
- Déficit en la representación coherente en la memoria de trabajo de los componentes del problema: dificultades para crear una representación mental del problema.
- Déficit en la representación en la memoria de trabajo de un plan sistemático de solución: dificultad para encontrar el algoritmo necesario para resolver el problema.
- Déficit en la elaboración y aplicación de estrategias y procedimientos mentales para controlar y superar el proceso de realización del problema: dificultades de comprensión de las estrategias que se pueden utilizar.
- Déficit de conocimientos matemáticos específicos: no conocer los elementos matemáticos necesarios para resolver el problema.
- Déficit de metaconocimientos implicados en la solución de problemas: dificultades para controlar y regular los conocimientos necesarios para resolver el problema.

Romero y Lavigne (2005) inciden en diseñar y utilizar estrategias de entrenamiento de la memoria de trabajo, estrategias cognitivas (sobre la entrada, la elaboración y la salida de la información) y estrategias que mejoren la atención de los alumnos.

3.3.2. *La dislexia y la disgrafía:*

Angulo, Gonzalo, Luque, Rodríguez, Sánchez, Satorras y Vazquez (2010) explican la dislexia y la disgrafía como dificultades significativas en la lecto-escritura, en unas

condiciones de escolarización normal, existiendo un CI normal y la ausencia de déficits sensoriales y emocionales. Se dice dislexia en las dificultades de lectura y disgrafía en las de escritura.

Romero y Lavigne (2005) explican que si la discalculia se combina con dificultades para la lectura y la escritura (dislexia y disgrafía), la dificultad en las matemáticas aumenta, además de limitar la eficacia de la memoria de trabajo y disminuir la atención, de manera que dificulta la interpretación y la comprensión del cálculo y la resolución de problemas. Romero y Lavigne (2005) exponen que los niños con dislexia presentan a menudo dificultades en el aprendizaje de símbolos y de series de cifras, como las tablas de multiplicación, problemas en la memoria a corto plazo y de organización. Por ello se debe indagar en los problemas que subyacen en la dificultad, y plantear una metodología que ayude al alumno a aprender a multiplicar desde el razonamiento y la lógica implícita en el significado de la misma.

Si se presenta la memorización de las tablas como concepto de iniciación, los alumnos con dislexia presentarán más problemas que los demás niños en la memorización, ya que la dislexia, como expone Angulo et al (2010), se caracteriza por la distorsión de la lectura (entre otros por la rotación, la inversión, la repetición y la omisión de signos), o por poseer una lectura muy lenta e indecisa. Estos aspectos facilitan la equivocación de la memorización y el olvido de las tablas, y con ello se puede crear un ambiente que propicie a la no motivación y a la falta de atención por las actividades, haciendo que no sigan el ritmo de la clase y se presenten dificultades en el cálculo y en la resolución de problemas. Y si se presenta disgrafía, las características en el cálculo de las matemáticas y en la resolución de problemas son similares a los niños disléxicos. Como indica Angulo et al (2010) es muy común que los niños que tienen este problema tengan también dislexia, que a causa de la misma cometen errores en la escritura (errores en la reconversión fonema-grafema). Pero los niños que padecen dislexia suelen ser niños inteligentes y muy ingeniosos, buenos en las representaciones espaciales y gráficas, además de indagadores de resoluciones alternativas. Por esta razón se debe enseñar desde la comprensión, y antes de coger un lápiz y un papel hay que pensar y manipular objetos, experimentar con el entorno y encontrar cuestiones que activen los procesos cognitivos dedicados a la búsqueda de ideas y razonamiento.

3.3.3. *El TDAH:*

Este trastorno es un factor que incrementa las dificultades del cálculo y de la resolución de problemas. Romero y Lavigne (2005) explican el TDAH de la siguiente manera:

Este trastorno es intrínseco a la persona que lo padece, es decir, que es debido a una alteración neuropsicológica que provoca disfunciones en los mecanismos de Control Ejecutivo del Comportamiento, que afecta de modo directo a los procesos psicológicos de atención sostenida, memoria de trabajo, autorregulación de la motivación y el afecto, internalización del lenguaje y procesos de análisis y síntesis directamente implicados en las tareas de enseñanza-aprendizaje y adaptación escolar. (Romero y Lavigne, p. 92, 2005).

Romero y Lavigne (2005) explican las características de los niños con TDAH como niños que no prestan atención a la actividad, tienen falta de concentración para hacer las cosas y muestran dificultades para comprender los conceptos. Por lo que tienen dificultades para crear las conexiones neuronales vinculadas al aprendizaje matemático. Por otro lado, son impulsivos y nerviosos, lo que les causa cometer errores en la realización del algoritmo, porque no reflexionan las actividades y tienen problemas con la memorización de las tablas.

Las estrategias que se plantean para el tratamiento del sujeto son, entre otros, destinados a la mejora de la atención, de la memoria y del lenguaje. Además de la enseñanza de la auto-relajación.

4. PROPUESTA DIDÁCTICA

Las actividades que se plantean están destinadas al tercer curso de Educación Primaria, porque al finalizar el curso, los alumnos deben haber memorizado las tablas de multiplicar y saber realizar operaciones de multiplicación con números naturales, por lo que deben comprender el significado de la multiplicación y haber memorizado las tablas.

En la tabla 1 se exponen los contenidos recogidos en la LOMCE del tercer curso, relacionados con las dificultades en la resolución de problemas.

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
Crit.MAT.1.1. Expresar verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema.	Est.MAT.1.1.1. Comunica verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema de matemáticas en contextos del entorno escolar, familiar y de la vida cotidiana.
Crit.MAT.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas del entorno escolar y familiar y la vida cotidiana, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	Est.MAT.1.2.2. Utiliza estrategias básicas (experimentación, exploración, analogía, organización, codificación, división de un problema en partes...), y procesos de razonamiento siguiendo un orden en el trabajo y los pasos y procedimientos necesarios en la resolución de problemas del entorno escolar, familiar y de la vida cotidiana. Est.MAT.1.2.3. Reflexiona sobre el proceso llevado en la resolución de problemas relacionados con situaciones del entorno escolar, familiar y la vida cotidiana, revisa las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprueba la coherencia de las soluciones en el contexto de la situación y analiza de forma cooperativa otras estrategias de resolución.
Crit.MAT.1.4. Profundizar en problemas resueltos, planteados desde CMCT situaciones del entorno escolar y familiar y la vida cotidiana, respondiendo sobre la coherencia de la solución, buscando, con ayuda, otras formas de resolverlos o planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, etc.	Est.MAT.1.4.2. Inventa nuevos problemas, a partir de uno resuelto variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, conectándolo con la realidad, buscando otros contextos, etc.
Crit.MAT.1.6. Planificar y controlar las fases de método de trabajo científico en situaciones adecuadas al nivel.	Est.MAT.1.6.1. Practica algunas características del método científico en el tratamiento de situaciones problemáticas del entorno escolar, familiar y la vida cotidiana, siendo ordenado, y organizado en el registro de sus observaciones, datos y anotaciones, y la expresión de los procesos y resultados.
Crit.MAT.1.8. Conocer algunas características del método de trabajo científico en contextos de situaciones problemáticas a resolver.	Est.MAT.1.8.1. Elabora hipótesis sencillas apoyadas en argumentaciones basadas en la experiencia en situaciones problemáticas a resolver del entorno escolar, familiar y la vida cotidiana en contextos numéricos, geométricos o funcionales.

(Tabla 1)

En la tabla 2 se exponen los contenidos recogidos en la LOMCE del tercer curso, relacionados con el cálculo de la multiplicación Sin incluir los contenidos de la medida, la geometría u otros.

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
<p>Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6. Operar con los números aplicando las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (cálculo mental, tanteo), usando el más adecuado.</p>	<p>Est.MAT.2.6.1. Realiza sumas, restas y multiplicaciones con números naturales hasta la decena de millar.</p>
	<p>Est.MAT.2.6.2. Identifica y usa los términos propios de la multiplicación.</p>
	<p>Est.MAT.2.6.5. Aplica las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas.</p>
<p>Crt.MAT.2.8. Conocer, utilizar y automatizar algoritmos estándar de suma, resta y multiplicación de números naturales hasta la decena de millar en la resolución de problemas de situaciones cotidianas.</p>	<p>Est.MAT.2.8.1. Utiliza y automatiza algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación de números naturales hasta la decena de millar en la resolución de problemas de situaciones cotidianas.</p>
	<p>Est.MAT.2.8.3. Construye series numéricas (hasta la decena de mil), ascendentes y descendentes, de cadencias 2, 10, a partir de cualquier número y de cadencias 5 a partir de múltiplos de 5.</p>
	<p>Est.MAT.2.8.5. Construye y memoriza las tablas de multiplicar, utilizándolas para realizar cálculo mental.</p>
	<p>Est.MAT.2.8.6./Est.2.8.7 Calcula dobles y mitades.</p>
	<p>Est.MAT.2.8.12. Utiliza estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, multiplicación y división por una cifra, explicando de forma oral el procedimiento seguido.</p>

(Tabla 2)

Las actividades que se van a diseñar se dirigen a la mejora de las siguientes dificultades en el cálculo y la resolución de problemas:

- Dificultades en conocer el sentido del número y el concepto de la multiplicación.

- No hay perspectiva global del número.
- La multiplicación se aprende como una suma reiterada.
- Dificultades en el dominio de la abstracción porque no hay referencias visuales y representativas.
- No son capaces de representar situaciones problemáticas.
- Dificultades en la comprensión de la multiplicación.
- Aprenden desde la memorización.
- Dificultades en las propiedades de la multiplicación, como la distributiva, la conmutativa y la asociativa.
- Se olvidan de la llevada o se equivocan en el lugar de sumarla.
- Colocan mal las filas.
- Hacen una mala gestión de los ceros intermedios y finales.
- Dificultad en la resolución de problemas.
- No comprenden la incógnita, los datos o la estructura semántica implícita en el enunciado.
- No visualizan bien las tablas de multiplicar.
- Dificultad en el razonamiento del cálculo mental.
- No se comprenden las relaciones existentes entre las tablas de multiplicar.

4.1. Objetivos generales del diseño de las actividades.

Los objetivos que se plantean pretenden disminuir o eliminar las dificultades que se han estudiado anteriormente.

- a) Aprendizaje del concepto de la multiplicación desde la comprensión, dando significado al número y a la cantidad que representa.

- b) Creación de representaciones manipulativas de la multiplicación.
- c) Aprender a resolver problemas desde una perspectiva manipulativa, experimental y significativa.
- d) Comprensión del algoritmo de la multiplicación y de la posibilidad de relaciones que existen en el cálculo.
- e) Mantenimiento de la atención y la motivación de los alumnos en las tareas implicadas en la multiplicación.
- f) Aprendizaje de las tablas de multiplicación desde la construcción propia de las mismas.
- g) Entrenamiento de habilidades cognitivas en el proceso de la multiplicación, como el razonamiento, la comprensión, la representación, el pensamiento crítico y la creatividad.

4.2. Diseño de las actividades.

El diseño tiene la finalidad de eliminar dificultades en el aprendizaje de la multiplicación, vistas en el apartado de dificultades, y que se pueden encontrar, a diario, en las aulas escolares de educación de primaria. Aunque en este trabajo no quedará expuesto su resultado, a causa de ser un trabajo teórico que indaga en las dificultades encontradas en el aprendizaje de la multiplicación, y su práctica podría ser posterior a la realización de dicho trabajo, en el caso de que los profesionales decidan poner estas actividades en práctica.

Los bloques de actividades diseñadas se van a dividir según las dificultades encontradas de la multiplicación:

- Conocimiento del sentido del número y el concepto de la multiplicación.
- Comprensión de la existencia de la multiplicación en la realidad del entorno cercano.
- Representación y resolución de las situaciones problemáticas multiplicativas, mediante el uso de las propias estrategias de los alumnos y de las referencias manuales.

- Entendimiento del enunciado de situaciones problemáticas multiplicativas.
- Comprensión de la multiplicación.
- Comprensión, cálculo y análisis del algoritmo de la multiplicación.
- Construcción y aprendizaje de las tablas de multiplicar.
- Razonamiento en el cálculo mental.

4.2.1. 1ª Bloque de actividades: Conocimiento del sentido del número y el concepto de la multiplicación.

Estas tareas se van a centrar en el aprendizaje del significado de la multiplicación, sin necesidad de calcular y con el uso de objetos que se puedan manipular. Ya que los materiales aportan un carácter lúdico y educativo en el que los niños tienen la posibilidad de experimentar y de aprender desde la comprensión.

Se pretende que los niños lleguen al conocimiento del número y el concepto de la multiplicación desde la propia experimentación con los materiales manipulables y que aprendan la multiplicación sin realizar sumas reiteradas de un mismo número. De esta manera pueden ver la multiplicación como algo global, mediante referencias visuales y representativas que ayudan a comprender el significado de la multiplicación.

a) Actividad 1: Hacer agrupaciones cuadradas y rectangulares.

La actividad consiste en hacer formaciones cuadradas y rectangulares en las que los niños puedan cambiar sus dimensiones fácilmente.

Los materiales que se utilizan son:

- Piezas de 1x1 de varios colores y una pieza plana con los salientes para encajar las piezas 1x1, y con dimensiones 20x20 (figura 18).



(Figura 18 recogida de: <http://orca-alce.blogspot.com.es/2012/06/simetria-con-lego.html>)

Se escenifica que se crean cofres que hay que rellenarlos con piedras preciosas (cada pieza de 1x1 es una piedra preciosa), y después se dibujan los cofres construidos en el cuaderno indicando las dimensiones y calculando, mediante un recuento, la cantidad de piedras preciosas contenidas en el cofre. El ejemplo se observa en la figura 19.



(Figura 19)

La dificultad aumenta con el aumento de las dimensiones.

b) Actividad 2: Regletas Cuisenaire.

Las regletas posibilitan la comparación entre las medidas y realizar multiplicaciones a través de la manipulación.

El material que se utiliza es:

- Las regletas están hechas de diferentes colores y de medidas, en las que cada color representa una cantidad determinada de centímetros (blanco = 1cm, rojo = 2cm, verde claro = 3cm, rosa = 4cm, amarillo = 5cm, verde oscuro = 6cm, negro = 7cm, marrón = 8cm, azul = 9cm y rojo = 10cm). En la figura 20 se observan las regletas Cuisenaire.



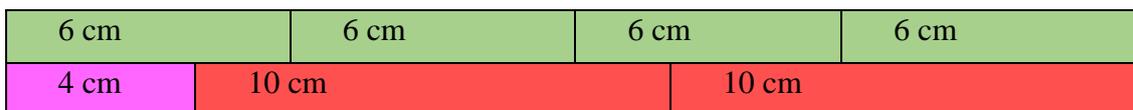
(Figura 20 recogido de: <https://seeducansolos.wordpress.com/2011/07/11/que-son-las-regletas-de-cuisenaire/>)

Se escenifica la creación de trenes que tienen la misma dimensión, pero que son el resultado de una multiplicación, a pesar de que un tren debe tener regletas iguales y el

otro parte de las regletas de 10 cm y la regleta que se necesite sumar para que dé el mismo resultado.

Ejemplo: $4 \times 6 = 4$ veces 6

Se debe crear un tren que resulte de 4 veces 6 (4 regletas de 6 cm / a regletas de color verde oscuro) y luego, a su lado se debe crear un tren que contenga todas las regletas posibles de 10 cm, de color rojo y la que se necesite para que mida lo mismo que las 4 regletas de color verde oscuro. En la figura 21 se observan los trenes formados.



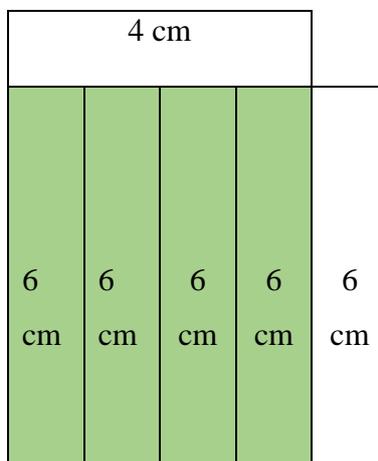
(Figura 21)

Una vez que se han creado los trenes, los niños tienen que sumar las 2 decenas y el 4 para saber que 4 veces 6 es 24.

Otra escenificación con las regletas es la de crear el área de un rectángulo de 4×6 . Para ello se simula el montaje de una chocolatina con barritas de Kit-Kat. Y su realización comienza poniendo una barrita de 4 cm como medida del largo y otra de 6 cm como medida de la altura, para rellenar posteriormente el hueco entre las dos medidas con barritas iguales, con el fin de que formen un rectángulo.

Ejemplo: $4 \times 6 = 4$ veces 6.

Se forman los lados del rectángulo midiéndolos con una barrita de 4 cm y otra de 6 cm. En la figura 22 se observa el proceso.

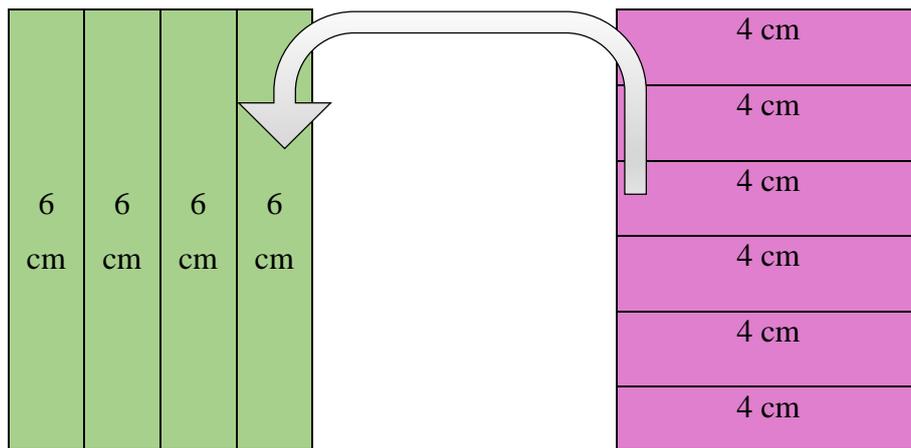


(Figura 22)

Después se separan regletas utilizadas para medir la altura y la largura y se utilizan las regletas de 6cm que han cubierto el rectángulo. Las 4 barritas de 6 cm se ponen en una línea recta y se comparan con las regletas de 10 cm más la regleta que falte para igualar a la línea de 4 regletas de 6 cm.

Y por último, otra escenificación con las regletas es la de crear un suelo y una alfombra de la misma medida pero con regletas diferentes. La condición es que todas las regletas del suelo deben ser iguales entre ellas y las de la alfombra también tienen la misma condición. Al terminar de hacer el montaje, se cogen las regletas que simulan la alfombra y se comparan con regletas de 10 cm como en la escenificación anterior.

Ejemplo: $4 \times 6 = 4 \text{ veces } 6$. Se crea el suelo con 4 regletas de 6 cm formando un rectángulo como en la tarea anterior. Al tener hecho el rectángulo, éste se cubre con regletas de 4cm, que simulan la alfombra del suelo. En la figura 23 se observa el proceso.



(Figura 23)

Y al montarlo se mide el sobresuelo, figura 24:

4 cm	4 cm	4 cm	4 cm	4 cm	4 cm
4 cm	10 cm		10 cm		

(Figura 24)

4.2.2. 2º Bloque de actividades: *Comprensión de la existencia de la multiplicación en la realidad del entorno cercano.*

Las actividades van a tratar sobre los elementos que rodean a los niños, para conseguir que los alumnos comprendan que cualquier aspecto de la vida diaria se puede cuantificar

a través de la multiplicación, y que es un aspecto incluido en la realidad que rodea a los alumnos.

c) Actividad 3: Hacer agrupaciones con la medida de los elementos del patio.

Se trata de medir elementos con agrupaciones de la cantidad de medida de otros elementos (como los pasos), y el patio del colegio es un entorno muy conocido para los niños.

Materiales:

- Plano que simule un patio de un colegio con árboles que rodean el patio.
- Plano que simule un campo de fútbol que simule el campo del patio.
- Regletas Cuisenaire.

Los alumnos deben observar las características del patio y del colegio desde el patio del colegio:

- Las dimensiones de los campos de juego, como el campo de fútbol o el de baloncesto, con la cantidad de porterías que caben en un largo.

Ejemplo: con un plano del campo de fútbol, deben comparar la portería con las regletas Cuisenaire con el fin de encontrar la regleta que tiene la misma medida que una portería en el plano. Después tienen que poner regletas iguales para comparar la portería con las dimensiones, para saber cuántas porterías caben en los lados, en la diagonal... indicando que un lado son un número determinado de veces una portería.

- La cantidad de pasos comprendidos en el perímetro del patio utilizando una referencia, como los árboles que hay en él.

Ejemplo: Si cuentan 15 pasos de un árbol a otro y éstos forman un rectángulo que contiene 20 árboles. Entonces los niños deben de calcular la distancia del recorrido completo mediante la multiplicación.

d) Actividad 4: Observar la multiplicación contenida en un juego de comprar alimentos.

Consiste en conocer la multiplicación contenida en la compra de los productos.

Material:

- Folletos de propaganda de supermercados, en los que se pueda visualizar el precio de los productos.
- Monedas que simulen el dinero real.

Se forman dos equipos, uno será el de vendedores y otro será el de compradores. Cada vendedor expone los folletos que contienen sus productos para que los compradores compren sus productos. Entonces por cada compra que se realice, el vendedor tiene que pedir la cantidad correcta, que será un múltiplo del valor de un producto. Los jugadores turnan sus puestos en cada compra que se realiza.

Los niños van apuntando los productos que se compran y el valor total de esta manera:

Cada pimiento cuesta 2 monedas, si cojo 4 pimientos, pagaré 4 veces 2 monedas, en total se paga 8 monedas.

e) Actividad 5: El juego de empapelar paredes.

Se trata de tapar las paredes de una caja con trozos de papel de regalo iguales (rectángulos). Cada trozo contiene las dimensiones lineales en centímetros enteros, por lo que podrán calcular la superficie del papel y las dimensiones de la caja sabiendo las medidas en cm de cada trozo de papel.

Ejemplo: con 20 trozos de papel hay que empapelar las paredes interiores de una caja de zapatos. Cada trozo de papel mide 5 cm de base y 10 cm de altura. Con estas medidas tienen que calcular el perímetro del rectángulo que simula el suelo de la caja y la superficie del papel que se utiliza para cubrir las paredes interiores de la caja.

Para saber cuánto es el perímetro del rectángulo que simula el suelo tienen que cubrir las paredes interiores con los trozos (pudiendo experimentar, ya que las dimensiones de los trozos posibilita el recubrimiento de varias formas diferentes, colocándolos de forma vertical, horizontal o de ambas formas) y alinear los lados que tocan el suelo en una línea recta y comparar la línea con las regletas Cuisenaire. Obteniendo la medida de 10 regletas de 10 cm.

Para saber el valor del área, tienen que poner los trozos alineados como se indica en el párrafo anterior, obteniendo un rectángulo que contiene todos los trozos y se observa que todos los trozos son iguales, por lo que al conocer la superficie de un trozo, se podrá conocer la superficie del rectángulo que contiene 20 trozos es 20 veces más grande que un trozo. Para calcular un trozo, se utilizan las regletas Cuisenaire recubriendo el trozo y formando el mismo rectángulo (por ejemplo 5 regletas de 10 cm), para saber que cada trozo contiene 50 cm cuadrados. Finalmente se pueden sumar los trozos para llegar al resultado del área que es de 1000 cm cuadrados.

4.2.3. 3º Bloque de actividades: Entendimiento de los enunciados, y representación y resolución de las situaciones problemáticas multiplicativas, mediante el uso de las propias estrategias de los alumnos y de las referencias manuales.

Este bloque trabaja el entendimiento de los enunciados de las situaciones problemáticas junto a su representación y resolución, porque el material manipulable permite comprender mejor la situación, los datos implicados y la incógnita que se pide en el problema.

Este bloque intenta desarrollar la capacidad de resolver los problemas, utilizando las propias estrategias de cada uno, sin necesidad de aprender el algoritmo de la multiplicación, aportando la posibilidad de trabajar diferentes representaciones y referencias visuales. Que les ayudarán a comprender las relaciones la multiplicación con los contextos multiplicativos y a visualizar los diferentes contextos de multiplicación como la proporcionalidad, las organizaciones rectangulares o la multiplicación como producto cartesiano.

f) Actividad 6: Uso de objetos al alcance de la mano para comprender los enunciados y resolver las situaciones problemáticas.

Estas actividades ayudan a comprender la incógnita, los datos y la estructura semántica explícita en el enunciado, además de fomentar las referencias visuales y facilitar la resolución de los problemas. Las actividades deben empezar siendo sencillas, en este caso se comienza con un problema sencillo de isomorfismo de medidas. Para su realización se requiere el uso de material que representen los elementos del enunciado.

- “Si Pepe tiene tres bolsas de canicas, y en cada bolsa tiene cinco canicas, ¿Cuántas canicas tiene Pepe?”

Para esta realizar esta actividad se ha seguido el criterio de Dickson, Brown y Gibson (1991), que coinciden en que el aprendizaje de la multiplicación se debe representar como una agrupación de elementos, en los que cada conjunto debe diferenciarse para mejorar la comprensión de la multiplicación.

Material:

- Piezas lego 1x1.

Los niños utilizarán piezas de lego 1x1 para hacer 3 grupos con 5 bolitas, los grupos serán resultaran ser tres torres de 5 fichas de lego que las unirán en forma de una hilera y podrán hacer el recuento ($5+5+5=15$). En la figura 25 se observa la formación de conjuntos.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(Figura 25)

La actividad se puede complicar si se propone a los niños una nueva incógnita y se incluyen algunos datos, como: si 5 canicas pesan 2 kilos, ¿cuánto pesarán 15 canicas?

La actividad es más difícil porque se pasa de una medida (canicas) a otra distinta (kilos), por lo que se necesita encontrar la razón (kilo /canica).

Si cada grupo de canicas pesa 2 kilos, bastará con sumar 2 kilos por grupo. En la figura 26 se observa la relación entre kilos y conjunto de piezas.

2 kilos (5 canicas)	2 kilos (5 canicas)	2 kilos (5 canicas)
---------------------	---------------------	---------------------

(Figura 26)

g) Actividad 7: Situaciones problemáticas de combinatoria.

La actividad trata de visualizar las distintas combinaciones a través del uso de materiales que faciliten la rapidez de movimientos, para desarrollar la capacidad de crear representaciones mentales de las distintas posibilidades.

- *Para formar el uniforme de un equipo se dispone de 5 camisetas y de 3 pantalones distintos ¿Cuántas maneras diferentes hay de formar el equipaje?*

Materiales:

- Pizarra magnética.

- imanes redondos de distintos colores (rojo, azul, amarillo, verde, violeta, marrón, naranja y rosa).

Los niños deben crear las distintas combinaciones en la pizarra magnética. Cada elemento será un color y al final obtendrán cuantas posibilidades tiene cada elemento de combinarse con los elementos del otro conjunto de elementos.

Ejemplo: si los colores rojo, azul y amarillo representan los pantalones y los demás colores representan las camisetas, la pizarra (y si se hacen dibujos en los imanes de camisetas y pantalones, será más fácil distinguirlos).

Una de las maneras sería en forma de tabla y otra en forma de árbol colocando una agrupación debajo de otra. La figura 27 muestra la representación de esta combinatoria:

	Camiset a verde		Camiset a rosa		Camiset a marrón		Camiset a violeta		Camiset a naranja	
Pantalón rojo	Red	Green	Red	Pink	Red	Brown	Red	Purple	Red	Orange
Pantalón azul	Blue	Green	Blue	Pink	Blue	Brown	Blue	Purple	Blue	Orange
Pantalón amarillo	Yellow	Green	Yellow	Pink	Yellow	Brown	Yellow	Purple	Yellow	Orange

(Figura 27)

Una vez terminado, los niños podrían obtener el resultado a través del recuento de las distintas agrupaciones.

h) Actividad 8: Situaciones problemáticas con un espacio único de medidas.

Se trata de situaciones en el que la incógnita comparte el mismo campo de medidas que los datos (situaciones de veces más o veces menos mantienen el mismo campo de medidas).

- Si en un saco hay 5 canicas pero en otro hay 4 veces más canicas que en el primero, ¿cuántas canicas hay en el segundo?

Materiales:

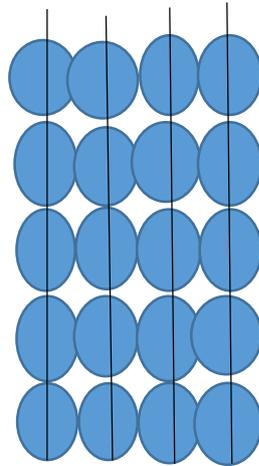
- Perlas Montessori (figura 28)



(Figura 28, imagen recuperada de:

<http://www.creciendoconmontessori.com/2013/07/relacion-cantidad-numero-con-perlas.html>)

Para esta actividad se utilizan las perlas Montessori porque facilitan el recuento, porque están unidas entre sí. Tan sólo habría que sacar cuatro agrupaciones de cinco perlas y hacer el recuento. En la figura 29 se muestra las agrupaciones:



(Figura 29)

4.2.4. 4ºBloque de actividades: Comprensión de la multiplicación y comprensión, cálculo y análisis del algoritmo de la multiplicación.

El algoritmo de la multiplicación se puede aprender de manera razonada mediante la utilización de materiales. Y la multiplicación se puede comprender mejor comprendiendo sus propiedades, la distributiva, la conmutativa y la asociativa.

Este bloque aporta facilidades de visualizar las relaciones multiplicativas como son la propiedad distributiva, la conmutativa, la asociativa, el elemento neutro o sacar factor

común. Además ayuda a visualizar el algoritmo estándar de la multiplicación mediante el uso de colores que distinguen las distintas unidades, con ello se pretende hacer conscientes a los alumnos de la existencia de ceros, de su valor, comprendiendo el valor de las llevadas.

i) Actividad 9: Observación de las propiedades de la multiplicación.

Material:

- Regletas Cousenaire.

Con este material se puede observar las propiedades de la siguiente manera:

- Propiedad conmutativa: en la que se puede ver que $(a \times b = b \times a)$

La actividad trata de multiplicar con las regletas dos números que al invertirlos den el mismo resultado. Un ejemplo es $6 \times 3 = 3 \times 6$ (6 veces 3 = 3 veces 6).

Donde se cogen 6 regletas de 3 cm formando una hilera y en la hilera de comparación las regletas de 10 cm que queden dentro de la solución y la regleta que sea necesaria para que las hileras queden igualadas (en este caso sería 1 regleta de 10 cm y una de 8 cm).

La suma de 10 más 8 da 18.

Por otro lado al coger 3 regletas de 6 cm, colocarlas en hilera y compararlas de la misma manera nos da 18 también, como se muestra en la figura 30:

3 cm	3 cm	3 cm	3 cm	3 cm	3 cm
6 cm		6 cm		6 cm	
8 cm			10 cm		

(Figura 30)

- Propiedad distributiva: en la que un número se puede descomponer y cada parte del número al ser multiplicado por el multiplicador y sumando sus resultados, dan el mismo resultado que la multiplicación del número entero por el multiplicador.

En el caso de 15×4 se unen regletas de 10 cm y de 5 cm para formar 15 cm, y se crea un recuadro con 15 y 4. Entonces se forman las hileras pertenecientes a 15×4 y se comparan con las decenas dando el resultado de 6 regletas de 10 cm, como se muestra en la figura 31. Luego se comparan dejando en un extremo de la hilera las regletas de 5 cm

y en el otro las de 10 cm para observar que $15 \times 4 = 10 \times 4 + 5 \times 4$, como se muestra en la figura 32.

10 cm + 5 cm		
10 cm	5 cm	4 cm
10 cm	5 cm	
10 cm	5 cm	
10 cm	5 cm	

(Figura 31)

10 cm	5	10 cm	5	10 cm	5	10 cm	5
10 cm							
10 cm	10 cm	10 cm	5	5	5	5	5

(Figura 32)

- Propiedad asociativa: en la que dos números que se multiplican entre sí y luego son multiplicados por otro número, da el mismo resultado que multiplicando el último número por cualquiera de los otros dos y después por el restante.

En el caso de $(2 \times 3) \times 4$

Primero se cogen 2 regletas de 3 cm y se compara la hilera con la regleta de 6 cm y después el resultado (6) se utiliza para coger 6 regletas de 4 cm y se compara esta hilera con las regletas de 10 cm y las que completen la hilera, dando como resultado 24.

Luego se hace lo mismo pero comenzando con 4×2 y luego multiplicando el resultado por 3 y comparando el resultado de la anterior con la nueva hilera, que resulta ser de la misma distancia. El proceso se observa en la figura 33.

Finalmente se vuelve a hacer comenzando con 3×4 y luego por 2.

3	3	6 cm	6 cm	6 cm	
2	2	2	2	8 cm	8 cm
4 cm	4 cm	4 cm	6 cm	6 cm	
4 cm	10 cm	10 cm			

(Figura 33)

- Elemento neutro: n número multiplicado por 1 da de resultado en número.

Un ejemplo: $5 \times 1 = 5$, y mediante el recuadro con las regletas, como muestra la figura 34:

5 cm	
5 cm	1 cm

(Figura 34)

- Sacar factor común: una suma de multiplicaciones en los que el multiplicador es el mismo número da el mismo resultado de que le multiplicador multiplique la suma de los restantes números. Es decir $a \times b + a \times c = a(b + c)$.

En el caso de $2 \times 4 + 2 \times 3$ se observaría haciendo recuadros y sumando los resultados, y finalmente comparando el resultado de la suma con la multiplicación de 2×7 . Las figuras 35, 36 y 37 muestran el proceso.

4 cm	
4 cm	2 cm
4 cm	

(Figura 35)

3 cm	
3 cm	2 cm
3 cm	

(Figura 36)

4 cm	4 cm	3 cm	3 cm
7 cm		7 cm	

(Figura 37)

j) *Actividad 10: Multiplicaciones de una cifra por varias cifras.*

Calcular una multiplicación de una cifra por un número con varias cifras, se puede aprender utilizando la propiedad distributiva, mediante la descomposición del número que contiene varias cifras. Para ello se han seguido las indicaciones de Dickson et al (1991) y de Kamii (1995), que defienden la descomposición de los números siguiendo el sistema decimal y el uso de la propiedad distributiva para el aprendizaje de la multiplicación.

- Ejemplo: multiplicar 52×8

Material:

- Bloques múltiples (representan la unidad, la decena y la centena). Se muestran en la figura 38.



(Figura 38, imagen recuperada de:
<http://didacticasmaticasesquisde.blogspot.com.es/>)

Se trata de multiplicar 52×8 , y para ello se va a descomponer el número 52 en $50 + 2$, por lo que la multiplicación que se realiza es $(50 + 2) \times 8$.

Para ello se utilizan las regletas necesarias para representar las multiplicaciones 8×50 y 8×2 . Se comienza representando 8 veces 2 regletas de 1 cm (figura 39)

									1
									2

(Figura 39)

Lo que el recuento nos da 16 piezas de 1cm y utilizando la comparación de unidades con decenas se obtiene 1 regleta de 10 cm y 6 regletas de 1 cm que se guardan para sumarlos al resultado de 8×50 .

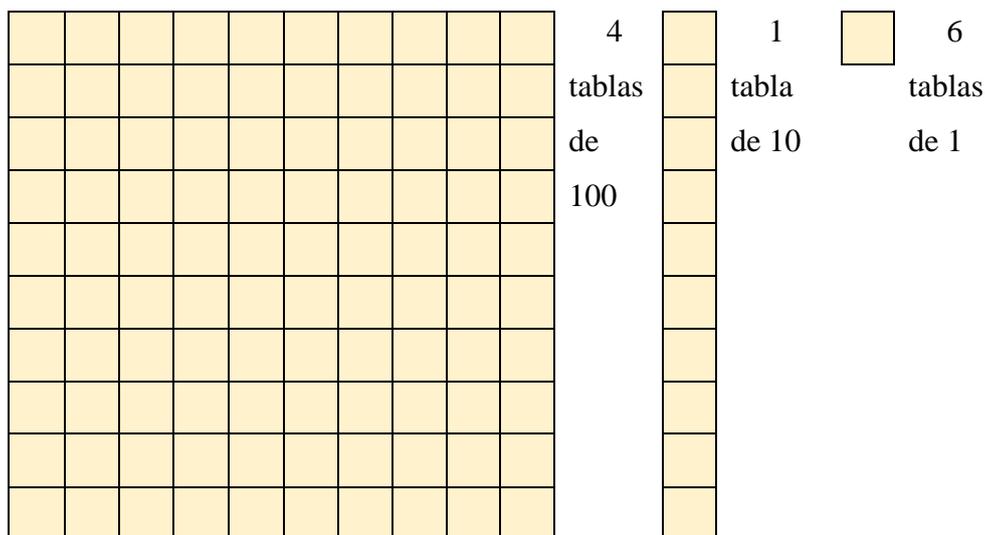
8 veces 5 regletas de 10 cm (figura 40)

					1
					2
					3
					4
					5
					6
					7
					8

(Figura 40)

En este caso se obtiene 40 regletas de 10 cm que se intercambian por 4 regletas de 10 cm cuadrados mediante el relleno de las tabletas de 100 unidades superponiendo las regletas de 10 cm.

Finalmente se obtienen en la mano 4 tabas de 100 unidades, una regleta de 10 cm y 6 regletas de 1 cm (figura 41):



(Figura 41)

k) *Actividad 11: Multiplicaciones de números con varias cifras.*

En este tipo de multiplicaciones, los niños suelen cometer errores entorno al olvido de los ceros. Para evitar estos errores en el aprendizaje se debe visualizar el cero como la representación de una cantidad decimal y no como la representación de nada.

Material:

- hojas plastificadas que contienen los números en varios colores (por ejemplo: las unidades en verde, las decenas en amarillo, las centenas en azul, las unidades de mil en naranja...). Las hojas se superponen para crear el número y se multiplica hoja por hoja.

Ejemplo: multiplicar 35 x 102. En este caso se obtiene, (figura 42):



(Figura 42)

Una vez colocados se comienza a multiplicar desde las unidades, cogiendo las hojas respectivas.

Comenzando la multiplicación con el 5, 5×2 se ven claramente las unidades (verde x verde) se ve en la figura 43.

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} = 10$$

(Figura 43)

Luego toca 0×5 , pero el cero representa un lugar en las decenas, lo que se visualiza y se respeta el hueco.

Y la última multiplicación con el 5 es 5 por 1 pero se observa que se refiere a 100 (figura 44).

$$\begin{array}{|c|} \hline 100 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} = 500$$

(Figura 44)

El resultado de $5 \times 102 =$	5	1	0
----------------------------------	---	---	---

(Figura 45)

Finalmente se hace lo mismo con el 3 que representa 30, por lo que se multiplica 30 por 2, por 0 y por 100 (figura 46).

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 30 \\ \hline \end{array} = 60$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 30 \\ \hline \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 100 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 30 \\ \hline \end{array} = 3000$$

$102 \times 30 =$	3	0	6	0
-------------------	---	---	---	---

(Figura 46)

Finalmente se suman los dos resultados $510 + 3060 = 3570$

Con este procedimiento se puede comprender mejor la llevada, ya que se concienza a los alumnos de la descomposición de los números en unidades del sistema decimal.

4.2.5. 5º Bloque de actividades: Construcción y aprendizaje de las tablas.

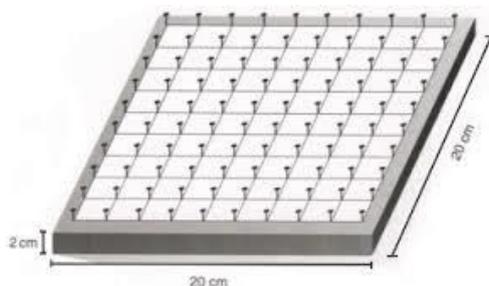
Lo que se pretende con este bloque es que los niños aprendan las tablas de multiplicar desde una perspectiva comprensiva, mediante la construcción de las tablas por los niños y entendiendo las relaciones existentes entre las tablas de multiplicar. La posibilidad de que los niños puedan construir las tablas antes de memorizarlas facilita a la visualización de las mismas y da lugar a fomentar el conocimiento y la memorización de las tablas.

1) *Actividad 12: Geoplano.*

Esta actividad sigue los criterios de memorización de Kamii, que propone utilizar las relaciones que existen entre los números para realizar el aprendizaje de las tablas de multiplicar. La actividad trata de utilizar el geoplano para observar las construcciones multiplicativas, ya que permite hacer recuentos.

Material:

- Geoplano (figura 47).
- Gomas de colores.

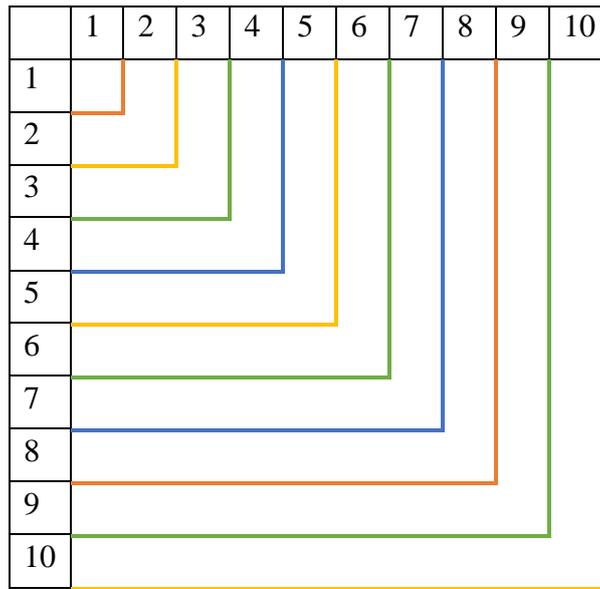


(Figura 47 recuperado de:

<http://miayudante.upn.mx/fichzon.html?rgrado=4&rconsul=&clec=33&zond=01&clavefich=FA41000>)

El geoplano permite aprender visualmente mediante la colocación de las gomas.

Para comenzar la actividad se buscan los cuadrados, ya que son números fáciles de visualizar (figura 48).



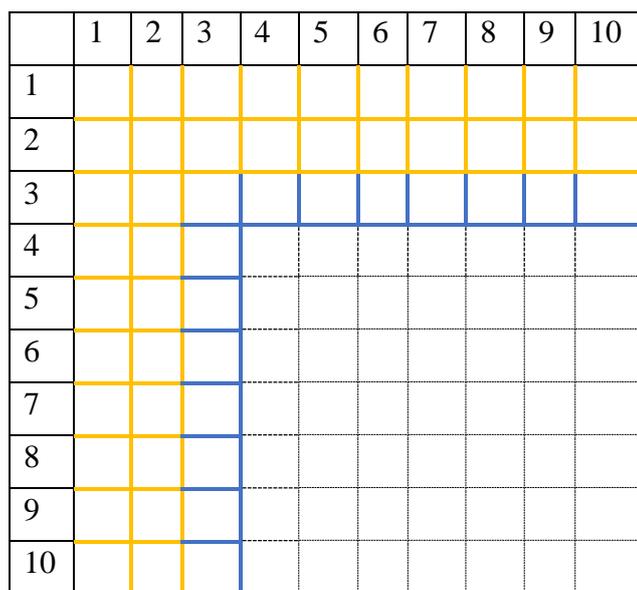
(Figura 48)

Contando los cuadrados que quedan recogido dentro de cada recuadro se observan los cuadrados de la figura 49:

$1 \times 1 = 1$ cuadrados	$4 \times 4 = 16$ cuadrados	$7 \times 7 = 49$ cuadrados
$2 \times 2 = 4$ cuadrados	$5 \times 5 = 25$ cuadrados	$8 \times 8 = 64$ cuadrados
$3 \times 3 = 9$ cuadrados	$6 \times 6 = 36$ cuadrados	$9 \times 9 = 81$ cuadrados

(Figura 49)

Se repite la tarea buscando las combinaciones de las tablas del 2 y del 3 (figura 50).



(Figura 50)

Conociendo que un número multiplicado por sí mismo se obtiene la tabla del 1 y junto a los dobles, los triples y los cuadrados los niños han aprendido más de la mitad de las combinaciones, quedando por aprender 25.

Una vez aprendidas estas tablas, es preferible aprender la del 5 para sacar las restantes con los números dobles y triples, exceptuando la tabla del 7.

La tabla del 5 es fácil de aprender porque enseguida se puede visualizar y se representa con facilidad. Los números que se cuentan terminan en 0 o en 5 lo que hace que se aprenda rápidamente.

Conociendo la tabla del dos y la del tres se pueden buscar números dobles y triples. Porque la tabla del 10 es doble que la del 5, la tabla del 4 es doble que la del 2 y la del 8 es doble que la del 4, y la tabla de 6 es el doble de la del 3 y la del 9 el triple de la del 3.

Doblando la tabla del 2, como se observa en la (figura 51), donde se muestra en sombreado los recuadros contados de las tablas aprendidas en la tarea anterior y en líneas coloreadas la tabla del 4 que es el doble de la del 2 y la tabla del 8 que es el doble de la del 4:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

(Figura 51)

Desde la tabla del tres (figura 52), donde se muestra en sombreado los recuadros contados de las tablas del 1, del 2 y del 3, y las líneas coloreadas que indican las tablas del 6 y del 9 como doble del 3 y triple del 3:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

(Figura 52)

Cuando se finaliza con los dobles y los triples, ya se han visto todas las combinatorias posibles porque la tabla del 7 se ha visto de manera indirecta desde el resto de las tablas, aunque sería conveniente reconstruirla.

4.2.6. 6º Bloque de actividades: Razonamiento en el cálculo mental.

Lo que se pretende con este bloque es que los niños encuentren relaciones entre las tablas de multiplicar, para realizar un cálculo mental más rápido y comprensivo. Ya que encontrar las relaciones ayuda a mejorar el razonamiento del cálculo mental y a comprender las relaciones existentes en las tablas de multiplicar.

m) Actividad 14: La búsqueda de las relaciones entre las multiplicaciones.

Materiales:

- Pizarra magnética.
- Imanes redondos de distintos colores.
- imanes alargado que representan la decena

Trata de buscar tablas que se relacionan entre sí, como la tabla del 2, la del 4 y la del 8, la del 3 y la del 6... Esta actividad desarrolla el razonamiento y el proceso de análisis que dan sentido a las tablas de multiplicación.

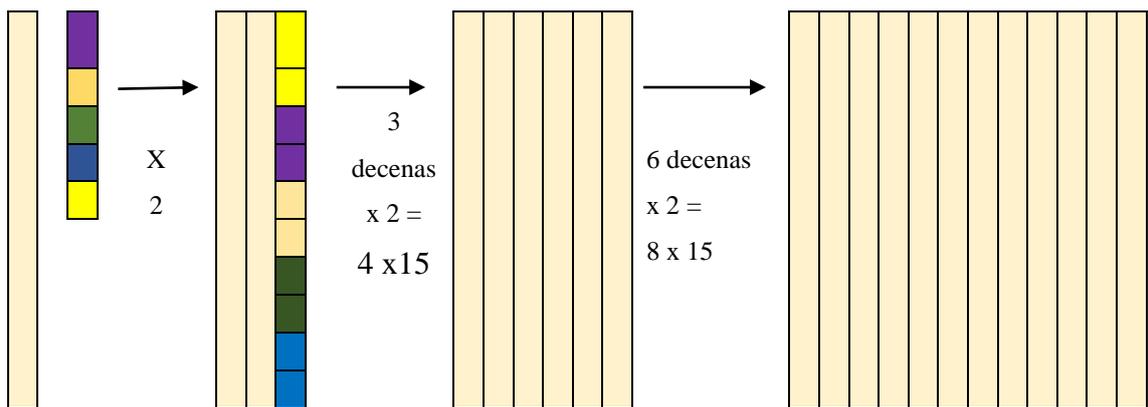
Los niños deben crear relaciones entre las tablas de multiplicar para desarrollar bien el cálculo mental.

Ejemplo: 8×15

Los niños deben comenzar desde el 2×15 porque $2 \times 2 = 4$ y $2 \times 4 = 8$, así que al obtener el resultado de 2×15 , se podrá obtener el resultado de 4×15 multiplicando $2 \times (2 \times 15)$ y finalmente el resultado de 8×15 multiplicando $2 \times (4 \times 15)$.

Así que se comienza transformando 2×15 en $2 \times (10 + 5)$. Entonces colocan 2 tiras alargadas en la pizarra y 10 imanes pequeños que los pueden cambiar por una tira alargada, obteniendo 3 tiras alargadas representando 3 decenas.

Una vez que se sabe el resultado de 2×15 , entonces se busca el doble que será 4×15 y finalmente el doble que será 8×15 (figura 53).



(Figura 53)

5. CONCLUSIONES Y VALORACIÓN PERSONAL.

Las matemáticas es un área educativa que hay que enseñar fomentando la comprensión, la creatividad en la resolución de problemas y en el cálculo de las operaciones, la búsqueda de relaciones internas en las operaciones, el razonamiento, la planificación y la reconstrucción de los resultados, enseñando al final la memorización. Las matemáticas tienen la característica de ser una materia de indagación y experimentación, en las que el interés es primordial para completar el aprendizaje.

Las dificultades que muestran los estudiantes de primaria, en torno a la multiplicación, que se han explicado en el trabajo, así como la falta de comprensión de las situaciones problemáticas, los errores en la realización del algoritmo estándar de la multiplicación y

la concepción del significado y del concepto que supone la multiplicación, se dan diariamente en las aulas de educación de primaria, de una manera habitual. Y sin embargo la metodología no cambia a causa de los cambios impuestos por leyes diseñadas por el gobierno. Además el profesorado debería actualizarse en torno a la psicología educativa y a las neurociencias para dar respuestas afines con las características de los alumnos, y concienciarse de la necesidad de establecer un cambio de la metodología, que enfoque la enseñanza hacia la comprensión y el pensamiento lógico. Si se enseña desde la comprensión, la experimentación y de una manera significativa y activa, los niños serán capaces de recordar lo aprendido.

Este tipo de actividades puede generar facilidades para los alumnos que tienen dificultades de aprendizaje como la discalculia, la dislexia, del TDAH, y la deficiencia intelectual. Los niños que tienen estos problemas, muestran dificultades en la memorización, por lo que pueden abandonar su aprendizaje obteniendo el fracaso. Por eso esta alternativa aporta la adaptación a las características del alumnado, centrándose en el significado de la multiplicación y en la elección de estrategias por los alumnos.

Los puntos fuertes de una metodología comprensiva son la mejora significativa del aprendizaje, en el que se establecen conexiones neuronales que implican alternativas a los procesos memorísticos tradicionales. En los métodos memorísticos tradicionales se limita, de manera relevante, el aprendizaje de los niños que tienen dificultades en el aprendizaje a partir de la memorización. Una metodología enfocada a la comprensión aporta una situación comprensiva y científica, en la que los niños son un elemento fundamental en la enseñanza, y que puede fomentar un buen aprendizaje duradero de las bases en el aprendizaje de la multiplicación.

La prospectiva de futuro del método es la posibilidad de la aplicación de este tipo de actividades en las aulas ordinarias, además de su realización en las aulas especiales, o en los centros especiales. Ya que a pesar de que se necesite emplear más tiempo en el aprendizaje comprensivo, una vez establecido dicho aprendizaje, los alumnos aprenden más rápido, y sin olvidar lo aprendido, lo que hace que los alumnos tengan más facilidad para comprender los contenidos de los niveles posteriores al aprendizaje de la multiplicación.

Es necesario que la escuela se replantee el método de enseñanza y deje que termine de nacer una metodología basada en el juego y la comprensión, dejando a un lado la memorización sin sentido, sin conocer el significado de los símbolos aprendidos.

6. REFERENCIAS

- Aguilar M. y Navarro J. I. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Revista de psicología General y Aplicada*. Nº 53, pp 63-83. Recogido de <http://dialnet.unirroja.es/>
- Angulo M. C., Gonzalo J., Luque J.L., Rodríguez M.P., Sánchez R., Satorras R. M. y Vázquez M. (2010). *Manual de atención al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo derivadas de dificultades específicas de aprendizaje: dislexia*. Conserjería de educación de la junta de Andalucía. Cúbica Multimedia, S.L. Capítulo 11. Recuperado de <http://www.juntadeandalucia.es/educacion/nav>
- Arteaga J. C. y Guzmán J. (2005). Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales de matemáticas. *Revista de educación matemática (Ed. Santillana)*. Volumen 17. Nº001, pp33-53.
- Chamorro M.C., Belmonte J.M., Llinares S., Ruiz L. y Verino F (2003). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid. Pearson education, S.A.
- Burón J. (1994). *Motivación y Aprendizaje*. Universidad de Deusto (instituto de las ciencias de educación), ediciones mensajero, S.A. Unipersonal. pp 35- 140.
- Cazares J. A., Castro E. y Rico L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo. Ediciones Universidad de Salamanca. pp. 19-39. Recuperado de <http://dialnet.uniroja.es/>
- Coelho L.A., Fernandes C., Ribeiro C., Perea M.V. (2006). El modelo de Alexander Romanovich Luria (revisitado) y su aplicación a la evaluación neuropsicológica. *Revista galego-portuguesa de psicología e educación*. Vol 13, Nºs 11-12, pp 155-194. Recuperado de <http://dialnet.uniroja.es/>
- Cid E., Escolano R. y Muñoz J.M. (2011). Apuntes de la clase de Didáctica de la aritmética I (Curso 2011-2012). Huesca. Tema 4, pp 125-170 (S.P.).
- Dickson L., Brown M. y Gibson O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Ciudad universitaria de Madrid. (Ministerio de educación y ciencia) Labor, S.A.

- Dirección General y educación. (2001). Buenos Aires. Orientaciones didácticas para la enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos de la EGB. Documento n°4. Recuperado de <http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/multiplicacion>.
- Fernández J. A. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Revista Unión*. N° 4, pp 31-46. Recogido en <http://fisem.org/web/union/>
- Fernández J. A. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica. *Revista iberoamericana de educación*. N° 43, pp 119-130. Recogido de <http://www.fisem.org/web/union/>
- Gallardo J., González J. M. y Quintanilla V.A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Revista Educación Matemática*, volumen 25. N°2, pp 61-88. Recuperado de <http://www.researchgate.net/>
- Gómez B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Revista Unión*. N° 4, pp 17-29. Recogido en <http://fisem.org/web/union/>
- Iglesias. J. M. (2005). Los algoritmos tradicionales y otros algoritmos. *Revista Unión*. N° 4, pp 47-49. Recogido en <http://fisem.org/web/union/>
- Larrazolo N., Backhoff E. y Tirado F. (2013). Habilidades de razonamiento matemático de estudiantes de educación media superior en México. *Revista Relime*. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/relime.htm>
- Ley Orgánica 126/2014, de 1 de marzo. LOMCE. Madrid: Boletín oficial del Estado (2013). Recuperado de <https://www.boe.es/boe/dias/2014/03/01/pdfs/BOE-A-2014-2222.pdf>
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre. LOMCE. Madrid: Boletín oficial del Estado (2013). Recuperado de https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2013-12886
- Ley Orgánica 2/2006, 8 de diciembre. LOE. Madrid. Boletín oficial del Estado. (2006) Recuperado de <http://www.boe.es/boe/dias/2006/12/08/pdfs/A43053-43102.pdf>

- Martínez O. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. *Paradigma*, XXIV (2), pp 7-34. Recuperado de <http://www2.scielo.org.ve/>
- Ministerio de educación, cultura y deporte (2013). Programa para la evaluación internacional de los alumnos, informe español. PISA 2012. Madrid. Volúmen I: Resultados y contexto, pp 34-59. Recuperado de www.mecd.gob.es/inee.
- Mogollón E. (2010). Aportes de las neurociencias para el desarrollo de estrategias de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Revista electrónica Educare Vol. XIV*. N° 2, pp 113-124, (2010). Recuperado de <http://dialnet.uniroja.es/>
- Ramírez M. y Castro C. (2014). Problemas de multiplicación y división en primer curso de Educación Primaria. *XV Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. pp 1-10.
- Redondo J. A. y Redondo J. L. (2011). Picos y mesetas en los aprendizajes matemáticos en Educación Primaria: El caso de la multiplicación. *Revista Suma*. N° 66, pp 17-26. Recuperado de <http://revistasuma.es/>
- Rocha M. I. y Alexandre H. (2009). Desenvolvimiento del sentido del número en la multiplicación, un estudio de caso de enseñanza de 7/8 años. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*. N°12, pp 103-134. Recuperado de <http://www.fisem.org/web/union/>
- Romero J. F. y Lavigne R. (2005). *Dificultades en el aprendizaje: unificación de criterios diagnósticos; tomo I: Definición, Características y tipos*. Conserjería de educación de la junta de Andalucía. Tecnographic, S.L. pp 51-106.
- Sánchez E. (1995). El aprendizaje de la lectura y sus problemas. Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar. Capítulo 7, pp 121-137. Recogido de <https://dialnet.unirioja.es/>