Facultad de Educación **Universidad de Zaragoza**

Grado en Magisterio en Educación Primaria

Trabajo Fin de Grado

UTILIZACIÓN DE GEOGEBRA EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA IMAGEN CONCEPTUAL DEL ROMBO EN 6º CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Autor: Ángel Lancis Fleta

Director: Alberto Arnal Bailera

Febrero de 2016

RESUMEN

Este Trabajo Fin de Grado es el resultado del análisis de una breve secuencia didáctica diseñada con GeoGebra con el objetivo de mejorar la construcción de la imagen conceptual del rombo en los alumnos de sexto curso de Educación Primaria del C.E.I.P. Hispanidad.

Partiendo de la importancia de las imágenes conceptuales, de las influencias negativas que producen las representaciones gráficas estereotipadas y de las teorías del desarrollo de dichas imágenes basadas en la presentación de ejemplos y contraejemplos, utilizamos GeoGebra para, aprovechando el potencial didáctico propio del Software de Geometría Dinámica, diseñar una secuencia de actividades que ayude a mejorar la construcción de la imagen conceptual del rombo.

Posteriormente, partiendo de las debilidades didácticas de la secuencia, tales como su brevedad, y su limitación en la institucionalización de los conocimientos, proponemos una nueva secuencia más extensa que integra los conceptos de cuadrilátero, paralelogramo, romboide, rombo, rectángulo y cuadrado desde un enfoque jerárquico y haciendo especial énfasis en la fase 5 de integración de Van Hiele.

Palabras clave: GeoGebra, imagen conceptual, rombo, estereotipos.

ABSTRACT

This Final Project Degree is the result of the analysis of a short teaching sequence designed with GeoGebra to improve the construction of the rhombus' concept image.

We use GeoGebra, taking advantage of its dynamic nature, to design a teaching sequence to build the rhombus' concept image. In this teaching sequence, we bear in mind the concept image´s importance and the negative influences of the stereotypical representations of the figures and the theories about the construction of such concept images through examples and counterexamples.

Subsequently, a new teaching sequence is designed based on the teaching weaknesses observed in the initial sequence, as its brevity and its limited synthesis of knowledge. The new sequence deals with the concepts of quadrilateral, parallelogram, rhombus, rhomboid, rectangle and square from a hierarchical approach and emphasizing on the Van Hiele´s integration phase.

Key words: GeoGebra, concept image, rhombus, stereotypes.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Este Trabajo Fin de Grado es una investigación que tiene como objetivo principal crear una secuencia didáctica útil en la construcción de la imagen conceptual del rombo y otros polígonos en los alumnos de sexto curso de Educación Primaria y evaluarla.

Para ello se elabora una secuencia didáctica de la mano del software de geometría dinámica (SGD), GeoGebra, en la que se trabaja el concepto de rombo. Por otro lado, se diseñan un pre-test y un pos-test para evaluar dicha secuencia didáctica.

Todo el diseño se justifica a través de un marco teórico de didáctica de la geometría, destacando la teoría de Van Hiele, la construcción de conceptos de Vinner y otras más concretas y estrechamente relacionadas con nuestro tema como la exposición a los ejemplos y contraejemplos necesarios de Ángel Gutiérrez y Adela Jaime, la exposición a representaciones gráficas no estereotipadas de Sara Scaglia y Susana Moriena…

Se pone especial atención en tres puntos, la influencia negativa que las representaciones gráficas estereotipadas causan en la imagen conceptual de los estudiantes, la importancia de una metodología de la enseñanza de conceptos geométricos basada en la presentación de numerosos ejemplos y contraejemplos para identificar y discriminar las propiedades relevantes e irrelevantes de los mismos y el potencial didáctico que posee el software de geometría dinámica GeoGebra para trabajar hacia nuestro objetivo.

El mundo virtual y las nuevas tecnologías avanzan a pasos agigantados y se implantan en nuestras vidas casi sin que nos demos cuenta. Prácticamente todas las familias españolas poseen como mínimo un ordenador conectado a internet, y la mayoría de los adultos poseen un Smartphone y el principal pasatiempo de los más pequeños son las tabletas inteligentes de todo tipo.

Es cierto que las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, conocidas como “las TIC”, tienen un potencial grandísimo en numerosos ámbitos, pero es muy importante hacer un uso adecuado de las mismas. La escuela tiene el deber de enseñar a utilizar correctamente las nuevas tecnologías.

Además la escuela no ha de convertirse en una burbuja ajena al resto; tiene que formar parte de la sociedad y adaptarse a sus demandas. Porque su principal objetivo es preparar ciudadanos para vivir en ella. Por ello hemos de aprovechar las oportunidades que se nos ofrecen para introducir las TIC en el aula, y enseñar buenas prácticas con ellas.

Se entiende GeoGebra como una oportunidad para introducir las TIC en el aula. Pues es un software joven, creado en 2001, que se encuentra en pleno desarrollo y está causando un gran impacto en la enseñanza de las matemáticas a nivel mundial. De hecho no es difícil prever que el software se vaya introduciendo cada vez más en las aulas españolas. Pues docentes e investigadores de todo el mundo manipulan y analizan el software y están implicados en su evolución. Así, las conferencias y proyectos que se realizan regularmente y los numerosos premios avalan el potencial didáctico del software.

Para alcanzar el objetivo principal, proponemos los siguientes objetivos secundarios. Aprovechamos para presentar la estructura del trabajo. Para ello clasificamos los objetivos con los contenidos de los capítulos:

Objetivo 1: Se estructura el trabajo en 5 capítulos considerando el capítulo actual “0” como introducción. El capítulo 1 responde al objetivo uno y consiste en la realización de una aproximación a la situación de la enseñanza-aprendizaje de los conceptos geométricos en Educación Primaria. En él construimos un marco teórico sobre el que trabajar. Para ello hacemos un análisis de la didáctica de las matemáticas en varias áreas. Exponemos una recopilación de las orientaciones metodológicas así como los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que propone el currículo de Aragón. Citamos los modelos de Van Hiele y Vinner. Investigamos sobre los prototipos y las representaciones gráficas estereotipadas. Por último relacionamos la didáctica de la geometría con los SGD y más concretamente con GeoGebra.

Objetivo 2: responde al capítulo 2 que subdividimos en, objetivo 2a: explorar las actividades que la red oferta y que pueden ser apropiadas para su aprovechamiento en el tercer ciclo de Educación Primaria y en objetivo 2b: diseñar actividades propias que complementen lo que la red ofrece. En este capítulo buscamos actividades en la web que puedan ser útiles para nuestra secuencia didáctica y comentamos otras que van en contra de ciertos principios didácticos estudiados. Destacamos los recursos proporcionados en la página web oficial de GeoGebra y los recursos proporcionados por el Proyecto Gauss accesibles en la página web del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF).

Posteriormente, elaboramos actividades ajustadas a nuestras necesidades y objetivos. Finalmente agrupamos todas las actividades consideradas válidas y las contextualizamos mediante la asignación de nivel, objetivos, orientaciones metodológicas y variantes o posibles adaptaciones.

Objetivo 3: responde al capítulo 3; diseño, intervención y evaluación de una experimentación con GeoGebra en el aula de 6º curso de Educación Primaria para contextualizar en la práctica lo conocido a través de la teoría. En él exponemos una breve investigación de carácter Pre-test – Test – Pos-test. Diseñamos una breve secuencia didáctica central (Test) con GeoGebra a partir de las actividades propuestas en el capítulo segundo con el objetivo principal de mejorar la imagen conceptual del rombo en los alumnos de sexto de Educación Primaria. Para verificar la validez de la misma diseñamos un test previo (Pre-test) y un test posterior (Pos-test) que se pueden observar en los anexos 1 y 2. Posteriormente se analiza la investigación realizada con 39 alumnos de sexto curso de primaria del C.E.I.P Hispanidad. Se contrastan conjeturas con resultados y se comparan los test.

Objetivo 4: responde al capítulo 3; extensión de las sesiones con GeoGebra hasta construir una secuencia didáctica más completa y mejor. Para finalizar el capítulo diseñamos una secuencia didáctica mejorada a partir de los resultados obtenidos en la experimentación. Finalmente, se agrupan y ordenan las conclusiones en el capítulo 4.

CAPÍTULO 1: MARCO TEÓRICO

Exponemos un marco teórico que va de lo general a lo concreto. En primer lugar exponemos una serie de ideas didácticas para el currículo de Aragón. Pasamos a las teorías más clásicas de la didáctica de la geometría, el modelo de Van Hiele y la adquisición de conceptos de Vinner. Posteriormente estudiamos los efectos de los prototipos y las representaciones gráficas estereotipadas a través de los autores Gutiérrez y Jaime, Moriena, Scaglia, Herskowitz y Matos. Por último investigamos acerca de la didáctica de la geometría a través del software de geometría dinámica (SGD) y más concretamente GeoGebra con los autores Mora, Sanchez, Rizo, Campistrous, Moriena, Scaglia y Gutiérrez.

1.1 CURRÍCULO DE ARAGÓN

Para el currículo de Aragón (Orden de 16 de junio de 2014), el eje vertebrador de la didáctica de las matemáticas son los procesos de resolución de problemas. Es principalmente porque se utilizan y se requieren muchas de las destrezas básicas durante dichas situaciones problemáticas como leer, planificar, establecer estrategias y procedimientos y revisarlos, modificar el plan si es necesario, comprobar la coherencia de la corrección y comunicar los resultados.

Algunas de las ideas didácticas que propone el currículo son las siguientes:

El trabajo en matemáticas está basado en la experiencia, y el aprendizaje parte de lo cercano. El currículo expone que las matemáticas se aprenden utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria. Además, es fundamental partir de los aprendizajes previos del alumno. Es de vital importancia para el currículo la utilización de recursos y materiales didácticos que puedan ser manipulados.

Es importante diferenciar la resolución de problemas de los ejercicios mecánicos. Cuando el alumno sabe cómo resolver una situación problemática y alcanza la solución a través de un algoritmo de cálculo automatizado, estamos ante un ejercicio de aplicación y no ante una situación de resolución de problemas. La automatización de estrategias y algoritmos, siendo importante, adquiere sentido sólo después de la comprensión a través de la manipulación real de objetos y situaciones, la verbalización de lo observado y su transcripción a lenguaje gráfico y simbólico.

La integración de las Tecnologías de la Información y Comunicación en esta etapa debe orientarse a su utilización como recurso habitual. Para ello es necesario utilizar actividades, en soporte digital, diseñadas con criterios didácticos y con múltiples alternativas pedagógicas. En este sentido, nosotros aprovechamos la oportunidad que nos brinda GeoGebra y elaboramos una secuencia didáctica basada en las TIC para sexto de Educación Primaria.

Los desafíos matemáticos y la pregunta (entendida como ejemplo y contraejemplo) deben ser los elementos motivadores para la adquisición del conocimiento matemático y el desarrollo del pensamiento lógico. En el diseño de nuestra secuencia didáctica elaboramos cautelosamente las preguntas relacionadas con las actividades. Por ejemplo, para mejorar la imagen conceptual que los alumnos tienen del rombo rompiendo con la representación estandarizada del mismo planteamos preguntas como:

-*¿Qué características de las figuras son importantes para que sean rombos?*

-*¿Cuáles no? (por ejemplo, el color).*

Preguntas que pretenden hacer que surjan ideas que permitan distinguir justificadamente aquellos ejemplos de rombos de los que no lo son.”

Objetivos, contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje: de los 7 objetivos que el área de matemáticas propone, uno va destinado a la geometría. Es el objetivo nº6 que dice:

> *Identificar formas geométricas del entorno escolar y la vida cotidiana y del entorno natural, arquitectónico y cultural aragonés, descubriendo y utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para interpretar la realidad.*

A continuación señalar los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para sexto curso de educación primaria en relación con los polígonos.

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE
• Formas planas y espaciales: figuras planas: elementos, relaciones y clasificación. • Clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos. Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados. Clasificación de los paralelepípedos. • Identificación y denominación de polígonos atendiendo al número de lados.	• Crit.MAT.4.2. Conocer las figuras planas; cuadrado, rectángulo, romboide, triangulo, trapecio y rombo. • Crit.MAT.4.4. Utilizar las propiedades de las figuras planas para resolver problemas	• Est.MAT.4.2.1. Clasifica triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos, identificando las relaciones entre sus lados y entre ángulos. • Est.MAT.4.2.2. Utiliza instrumentos de dibujo y aplicaciones informáticas para la construcción y exploración de formas geométricas de su entorno. • Est.MAT.4.4.1. Clasifica cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados.

Tabla 1. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para sexto de primaria en relación con los polígonos, del bloque de geometría, del área de matemáticas, de la Orden de 16 de junio del currículo de Aragón.

A continuación revisamos el trato que le se le da al concepto de rombo en el currículo en toda la etapa de Educación Primaria.

CURSOS	CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
4º	Clasificación y descripción triángulos y cuadriláteros atendiendo a sus lados y ángulos.	Crit.MAT.4.2. Conocer las figuras planas; cuadrado, rectángulo, triangulo, trapecio y rombo.
5º	Clasificación de triángulos atendiendo a sus ángulos y cuadriláteros según el paralelismo de sus lados.	Crit.MAT.4.2. Conocer las figuras planas; cuadrado, rectángulo, romboide, triangulo, trapecio y rombo.

6º	Clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos. Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados.	Crit.MAT.4.2. Conocer las figuras planas; cuadrado, rectángulo, romboide, triangulo, trapecio y rombo. Crit.MAT.4.3. Comprender el método de calcular el área de un paralelogramo, triángulo, trapecio, y rombo.

Tabla 2. Contenidos y criterios de evaluación del currículo que aluden al concepto de rombo durante la etapa de Educación Primaria.

Observamos que no es hasta cuarto curso cuando se introduce el concepto de rombo por primera vez. Tanto en cuarto como en quinto se proponen como criterios de evaluación conocer la figura plana rombo. En sexto, además, aparece el nuevo criterio de comprender el método de calcular su área.

1.2 DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

1.2.1 EL MODELO VAN HIELE

En el año 1957 los profesores holandeses Dian y Pierre Marie Van Hiele, leen simultáneamente sus tesis doctorales, en la universidad de Utrecht, y de ellas surge el modelo al que dan nombre. Modelo que todavía se tiene muy en cuenta en la actualidad y sigue resultando útil en el desarrollo de los currículos de enseñanza.

Según Corberán (1989), Van Hiele propone 5 niveles de conocimiento en Geometría, que se enumeran como: 0 o Visualización, 1 o Análisis, 2 o Deducción informal, 3 o Deducción formal y 4 o Rigor. Los Van Hiele exponen que sólo a través del respeto a la jerarquía de estos niveles es posible un aprendizaje correcto. Los estudiantes van progresando a través de los niveles en dicho orden. A nosotros, particularmente, sólo nos interesan los tres primeros niveles que son los que guardan relación con la educación primaria.

Los niveles de razonamiento son el nivel 1 (Reconocimiento). El razonamiento geométrico de este nivel se corresponde aproximadamente con los tres primeros cursos de primaria y se caracteriza porque los niños: Usan propiedades imprecisas de las figuras geométricas para describirlas o identificarlas. Suelen hacer referencia a prototipos visuales para caracterizar las figuras e incluyen atributos irrelevantes, normalmente de tipo físico o visual. Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades. Se limitan a describir el aspecto físico de las figuras. Aunque pueden identificar partes de una figura, no la analizan en términos de sus componentes. Pueden aprender vocabulario geométrico, identificar formas determinadas y, dada una figura, pueden reproducirla. Perciben las figuras como objetos individuales, es decir que los estudiantes no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase. Comparan y clasifican figuras geométricas basándose en su apariencia global. Por ejemplo, suelen utilizar expresiones como "*se parece a* ", "*tiene la forma de*", "es *cómo*", etc. No reconocen explícitamente como tales las propiedades de las figuras: Aunque los estudiantes de este nivel pueden reconocer algunas propiedades o elementos de una figura, éstas no juegan un papel apreciable en el reconocimiento de dicha figura ni piensan en las propiedades como características de una clase de figuras.

A continuación presentamos el nivel 2 (Análisis). El razonamiento geométrico de este nivel se corresponde aproximadamente con los tres últimos cursos de primaria y se caracteriza porque los niños: son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas. Pueden describir sus partes y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal, utilizando vocabulario apropiado para componentes y relaciones (por ejemplo, "lados opuestos", "los ángulos correspondientes son iguales", "las diagonales se cortan en el punto medio", etc.). Cuando se les pide que definan una figura, recitan una lista de propiedades necesarias para identificar la figura, en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes. Rechazan las definiciones dadas por el libro (o el profesor) en favor de las definiciones propias. Reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos. También pueden deducir propiedades generalizándolas a partir de la experimentación. Al comprobar la validez de una afirmación, tratan la geometría como si fuera una ciencia experimental: observan una variedad de figuras y sacan conclusiones generales sobre ellas. No son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades. No admiten la inclusión de clases entre diversas familias de figuras, por ejemplo de cuadriláteros. No son capaces de deducir unas propiedades de otras, porque perciben cada una de forma aislada y sin relación con las demás. Todavía no pueden explicar las relaciones entre las propiedades, no ven las relaciones lógicas entre clases de figuras. Observamos que los alumnos de primaria con los que hemos llevado a cabo la experimentación se encuentran en este nivel. Una de las razones que hemos observado es que no admiten la inclusión de clases entre familias, por ejemplo de cuadriláteros. Adjuntamos a continuación el ejercicio realizado por Javier sobre la tarea del rombo:

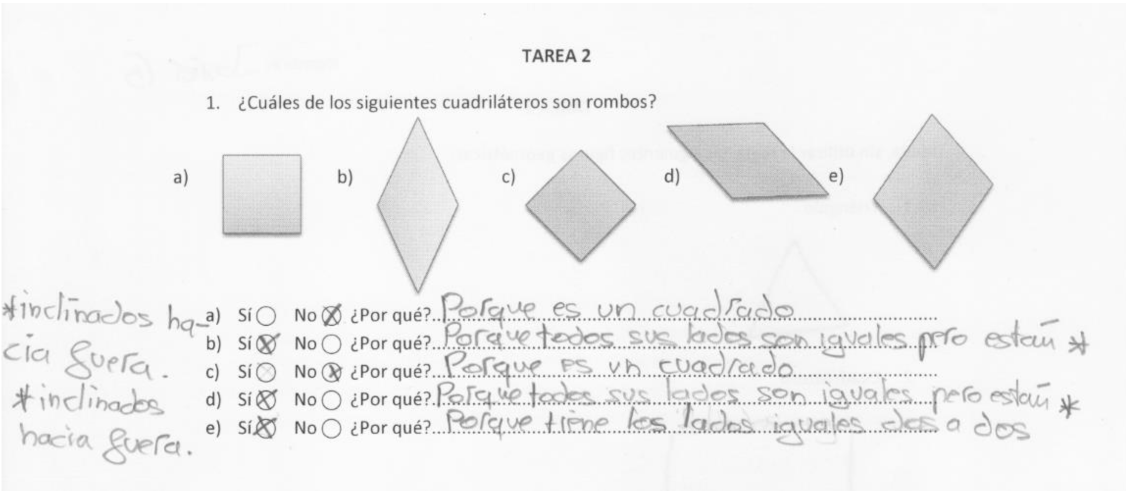


Imagen 1. Tarea de identificación sobre el rombo realizada por Javier que delata la no consideración del cuadrado como tipo particular de rombo.

Observamos como en los casos *a* y *c* (dibujos de cuadrados), Javier justifica que no son rombos basándose en que son cuadrados.

A continuación exponemos una imagen que presenta la clasificación jerárquica de los cuadriláteros por un lado y la clasificación particional por otro (Michael, 1994). La clasificación jerárquica entiende que todos los cuadriláteros con los lados opuestos paralelos son paralelogramos. Dentro hay un tipo de paralelogramos que por tener los lados iguales son rombos (el cuadrado cumple dicha necesidad) y dentro de los paralelogramos hay otro grupo en el que los ángulos miden 90 grados (el cuadrado cumple la propiedad). En esta clasificación se entiende el cuadrado como tipo particular de rectángulo y de rombo. Por otro lado encontramos la clasificación particional, en la que hay un grupo de polígonos de cuatro lados que poseen el nombre de cuadriláteros. Y estos se dividen en 4 subgrupos independientes que son paralelogramos, rectángulos, cuadrados y rombos:

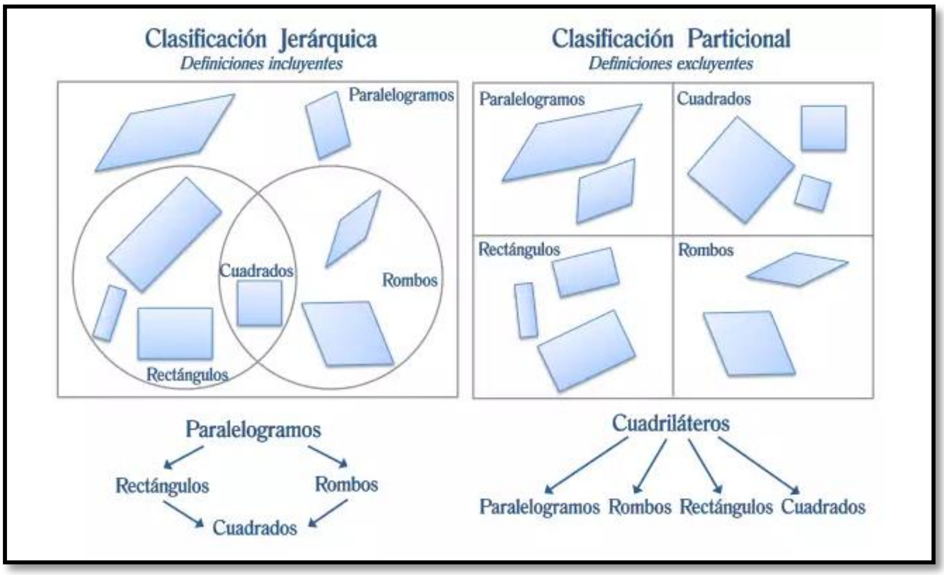


Imagen 2. Diferenciación entre la clasificación inclusiva y exclusiva de los cuadriláteros. (Michael, 1994, p. 12)

Por último presentamos el nivel 3 (Clasificación). El razonamiento geométrico de este nivel se corresponde aproximadamente con el primer ciclo de la secundaria obligatoria (puede extenderse a últimos cursos de primaria) y se caracteriza porque los niños: comienzan a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático: son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de deducir esas implicaciones (de un solo paso). Son capaces de realizar razonamientos deductivos informales, usando implícitamente reglas lógicas. Comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, pero no entienden la estructura de una demostración. Pueden entender una demostración explicada por el profesor o el libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos. Utilizan las representaciones físicas de las figuras más como una forma de verificar sus deducciones que como un medio para realizarlas. Pueden clasificar lógicamente diferentes familias de figuras a partir de propiedades suyas ya conocidas formuladas con precisión matemática. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación y sus demostraciones son de tipo informal. Comprenden el papel de las definiciones y pueden dar definiciones matemáticamente correctas. Pueden modificar definiciones y usar inmediatamente definiciones de conceptos nuevos. Son capaces de aceptar formas equivalentes de una definición. De acuerdo con estos niveles de razonamiento geométrico detectados en los niños, el objetivo de la enseñanza de la geometría en la educación primaria debería ser el de ayudar a los niños a pasar del nivel 1 al 2 y, en algún caso, incluso al nivel 3.

En el modelo de Van Hiele (Corberán, 1989) se dan una serie de fases de aprendizaje las cuales se han de seguir para adquirir los conocimientos geométricos e ir pasando de un nivel a otro: en la fase 1 (encuesta/información), el profesor determina mediante el diálogo dos aspectos, el conocimiento previo del concepto a tratar y la dirección que tomará el estudio posteriormente. Se introduce el vocabulario específico del nivel que se trate. En la fase 2 (orientación dirigida), los estudiantes exploran de forma secuenciada el concepto a tratar a través de los materiales que les presenta el profesor. En la fase 3 (explicitación) los estudiantes expresan y comparten sus opiniones acerca de las estructuras observadas. El pape del profesor debe ser mínimo si quiere que el lenguaje del alumno sea apropiado a su nivel. En la fase 4 (orientación libre) el alumno se enfrenta a tareas con etapas que pueden concluirse a través de distintos procedimientos. Se busca la consolidación de los conocimientos aprendidos y su aplicación a situaciones nuevas aunque de similar estructura a las estudiadas previamente. En la fase 5 (integración) el estudiante revisa, unifica y sumariza los nuevos objetos y sus relaciones. No se presenta nada nuevo; es una síntesis o incluso revisión de los orígenes que dieron lugar a dicha síntesis. La organización de las actividades siguiendo estas fases promueve el avance hacia un nuevo nivel de conocimientos y prepara a los alumnos para repetir el proceso en un nivel inmediatamente superior.

1.2.2 MODELO DE ADQUISICIÓN DE CONCEPTOS DE VINNER

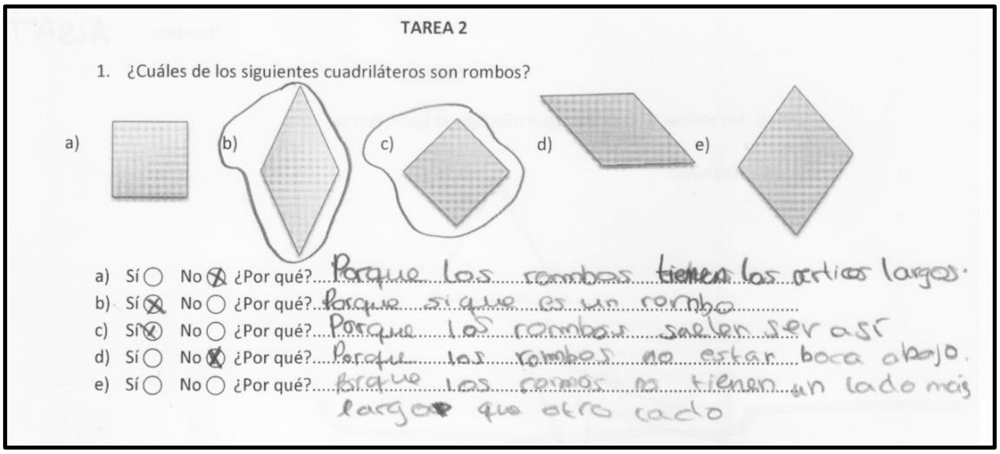
Por otro lado, estudiamos un modelo de enseñanza más concreto, aunque compatible con el modelo de Van Hiele y muy interesante en cuanto a la adquisición de los conceptos en geometría.

Vinner hace una diferenciación entre la definición del concepto y la imagen del concepto. Resumiendo la teoría de Vinner (Turégano, 2006) decimos que todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definiciones formales. Muchas de estas definiciones se presentan a los estudiantes más tarde o más temprano.

Sin embargo, el estudiante no necesariamente utiliza la definición cuando decide si un objeto matemático es un ejemplo o un contraejemplo del concepto, sino que, en la mayoría de los casos, toma una decisión basándose en la imagen del concepto.

Se entiende como imagen del concepto el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, pudiendo tratarse de una representación visual o bien de una serie de impresiones o experiencias. Es algo no verbal que se ha ido formando a lo largo de los años por medio de ejemplos y experiencias de todo tipo y que puede que contenga partes que no estén de acuerdo con la definición formal.

Por ejemplo, en nuestro trabajo, observamos que la mayoría de los niños utilizan la imagen del concepto en vez de la definición a la hora de identificar el rombo:


TAREA 2

1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

a) b) c) d) e)

a) Sí No ¿Por qué? Porque los rombos tienen los vertices largos.
b) Sí No ¿Por qué? Porque si que es un rombo
c) Sí No ¿Por qué? Porque los rombos suelen ser así
d) Sí No ¿Por qué? Porque los rombos no estan boca abajo.
e) Sí No ¿Por qué? Porque los rombos no tienen un lado más largo que otro lado

Imagen 3. Utilización de la imagen del concepto en lugar de la definición ante la identificación del rombo.

Observamos cómo Aisatu de sexto de Educación Primaria está comparando su imagen conceptual errónea con las representaciones de la tarea. Por ejemplo en el caso *a* entiende que el dibujo no representa un rombo porque no tiene "vértices largos".

Resumiendo a Vinner (Turégano, 2006) adquirir un concepto significa adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal y como éste está concebido por la comunidad matemática. En todo ejemplo de concepto podemos encontrar atributos relevantes, que son las propiedades que lo definen como tal concepto, y atributos irrelevantes, que son propiedades no necesarias a ese concepto y que permiten diferenciar unos ejemplos de otros.

Desde esta perspectiva, se debe comenzar presentando varios ejemplos y contraejemplos mediante los cuales los estudiantes se formen una imagen del concepto; si el concepto no es muy complicado, el profesor puede pedirles, incluso, que sugieran su propia definición. En nuestra secuencia didáctica presentamos ejemplos y contraejemplos para mejorar el concepto de rombo, por ejemplo en la actividad *Rombos mentirosos.* Además hacemos preguntas a los alumnos para evocar en los estudiantes las características relevantes e irrelevantes del concepto de rombo, por ejemplo las que hacemos para la actividad 1 de la hoja de preguntas *¿Qué características de las figuras son importantes para que sean rombos?, ¿Cuáles no son importantes? por ejemplo el color.*

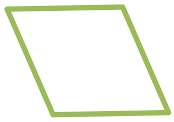
1.2.3 PROTOTIPOS Y REPRESENTACIONES GRÁFICAS ESTEREOTIPADAS

Según Gutiérrez & Jaime (2012) con frecuencia, estos ejemplos, que Vinner asegura que son necesarios para construir las imágenes de los conceptos, "son pocos y con alguna característica visual peculiar, convirtiéndose en prototipos pobres y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante puede comparar casos nuevos".

Por tanto se ha de ofrecer a los estudiantes mayor variedad de ejemplos, tratar de detectar los defectos de sus imágenes del concepto y hacer especial incidencia en los ejemplos directamente relacionados con esos errores.

Parafraseando a Moriena & Scaglia (2005) un prototipo de un concepto geométrico es un modelo que se utiliza como punto de referencia cognitivo y que suele estar construido por la utilización frecuente de representaciones gráficas estereotipadas. Ante la presencia de una representación gráfica de un concepto (un dibujo), los alumnos comparan esta representación con su prototipo. Cuando este prototipo es pobre (está construido por pocos ejemplos) los alumnos no reconocen dicha representación o simplemente la rechazan. Por ejemplo, en nuestra investigación con 39 estudiantes de sexto curso de Educación Primaria el 95% identifica correctamente el dibujo estereotipado del rombo mientras que el 65,5% identifica correctamente el dibujo no estereotipado del mismo.

Rombo estereotipado



Rombo no estereotipado

Un prototipo de un concepto se forma a partir de los sucesivos encuentros con representaciones gráficas (ejemplos). Un prototipo puede ser pobre por dos causas interrelacionadas, en primer lugar porque los ejemplos sean pocos y en segundo lugar porque los ejemplos se den de forma estereotipada.

Según Moriena & Scaglia (2005) estas representaciones estereotipadas son las que encontramos habitualmente. Es muy sencillo trazar un rombo a partir de sus diagonales perpendiculares, como también es más fácil dibujar un cuadrado, un rectángulo o un triángulo utilizando como guías los bordes horizontal y vertical de la hoja.

Moriena & Scaglia (2005) advierten de que la posición de una figura es irrelevante desde el punto de vista geométrico. Sin embargo, el alumno puede asumirla como una condición necesaria, ya que está presente en su esquema mental, y por tanto espera encontrarla en todas las representaciones gráficas.

Algunos atributos propios de ejemplos prototípicos mencionados por Hershkowitz (1989) son: la posición horizontal/vertical del ángulo recto del triángulo rectángulo, los cuatro lados y los cuatro ángulos iguales del cuadrado como ejemplo de cuadrilátero y para el concepto de altura, el atributo ha de estar dentro del triángulo.

Matos (1992) también habla sobre los efectos que las representaciones estereotipadas tienen sobre los prototipos. Algunas de las características que dichas representaciones estereotipadas tienen son: en primer lugar una posición preferida; pues los triángulos, cuadrados, rectángulos y paralelogramos tienen una base horizontal, en segundo lugar, simetría; pues no se reconocen triángulos obtusángulos con sus bases en un lado más pequeño, o un triángulo rectángulo se piensa como un medio triángulo y en tercer lugar, una forma equilibrada, pues muchos estudiantes no reconocen triángulos “delgados”, triángulos “puntiagudos” o cuadrados extremadamente pequeños.

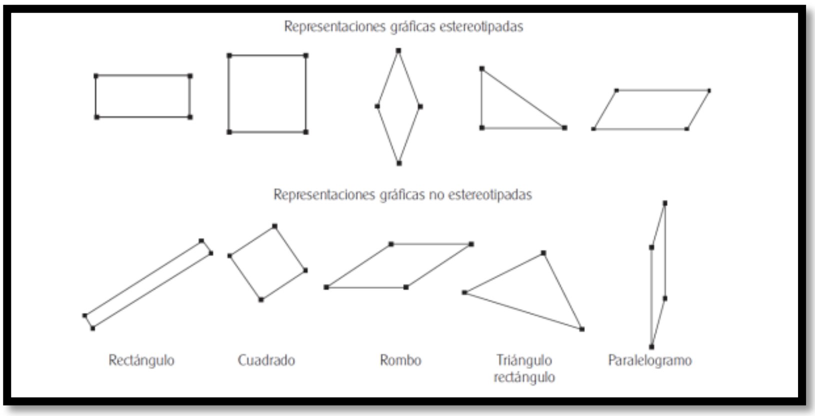


Imagen 4. Ejemplos de representaciones estereotipadas y no estereotipadas (Moriena & Scaglia, 2005, p. 115)

1.2.4 DIDÁCTICA Y GEOGEBRA

Muchos autores avalan la utilización del software de geometría dinámica (SGD) para la enseñanza de la geometría, sobre todo por su carácter dinámico y la posibilidad que ofrecen de presentar gran cantidad de ejemplos y contraejemplos de los conceptos fácilmente.

Según Moriena & Scaglia (2005) durante la enseñanza se debe proporcionar la oportunidad a los alumnos de elaborar prototipos que no estén influidos por características visuales irrelevantes desde el punto de vista matemático. Una forma de alcanzar este objetivo es evitar la utilización exclusiva de representaciones gráficas estereotipadas. Afirman estos autores que el uso de algún SGD para la enseñanza de la geometría podría ayudar en la elaboración de prototipos basados en características conceptuales relevantes.

En la misma dirección asegura Sánchez (1997) que el SGD ha abierto nuevas posibilidades para la geometría escolar. Su principal ventaja consiste en que las figuras dejan de ser estáticas y saltan del papel a la pantalla del ordenador. Ahora se nos presentan en forma de animaciones que permiten ser observadas desde distintos puntos de vista e incluso permiten interactuar con ellas al modificar ciertas condiciones en el diseño y analizar qué es lo que ocurre.

Según Rizo & Campistrous (2007) una concepción de enseñanza de la geometría desde un enfoque dinámico cambia la forma tradicional de trabajar la geometría en la que se presentan las figuras estáticas, y evita que el alumno construya en su imaginación la idea de figuras rígidas, que corresponden con una única forma de representación y que hacen que, en la práctica, el alumno siempre vea una figura, piense en el concepto que representa la figura y asocie sus propiedades a una figura concreta, perdiendo el nivel de generalidad que caracteriza a los conceptos geométricos.

Según Rizo & Campistrous (2007) la geometría dinámica permite aprovechar una de las estrategias heurísticas en la solución de problemas que difícilmente puede ser aprovechada en otros casos, que es la estrategia de "mover la figura". Es posible mover la figura y conservar ciertas propiedades y se puede conocer que es lo que ocurre al hacer variaciones. La geometría dinámica permite realizar esta estrategia heurística, ya recomendada por Polya en el año 1944, en su libro *How to solve it*, que de otra forma es casi imposible de realizar.

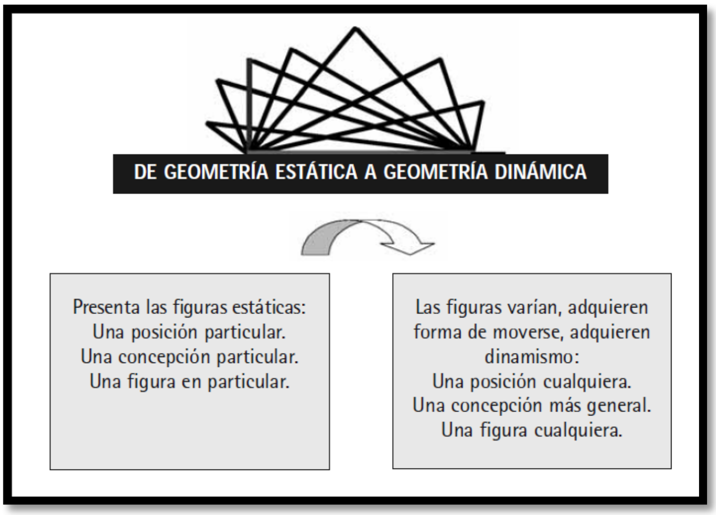


Imagen 5. Comparativa entre geometría estática y dinámica (Rizo & Campistrous, 2007, p. 63)

Para Morales, Marmolejo, & Locia (2014) resulta muy útil en su trabajo el SGD GeoGebra para favorecer la asimilación y fijación de conceptos geométricos. En la misma dirección señala López (2013) que los SGD permiten realizar construcciones geométricas dinámicas, en las que se puede experimentar con las figuras y comprobar las relaciones y propiedades que permanecen invariantes cuando las sometemos a movimientos: “El “arrastre” de los objetos *dragging* permite realizar generalizaciones y conjeturas que pueden comprobarse más fácilmente que con otros métodos tradicionales”. (López, 2013, p. 2)

De entre los numerosos SGD, algunos comerciales (*cabri, geometers' cinderella, sketchpad…)* y otros gratuitos (*reglaycompas, geogebra, carmetal...)* elegimos geogebra. Una de las razones principales es que casi todo su código es distribuido con licencia GPL, haciéndolo software libre y gratuito, está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas. Otra de las razones es su rápida y creciente expansión, desarrollo y evolución. Pues tras su creación fue ganando popularidad en todo el mundo y un gran número de voluntarios se fue sumando al proyecto desarrollando nuevas funcionalidades, materiales didácticos interactivos, traduciendo tanto el software como su documentación a decenas de idiomas y colaborando con nuevos usuarios a través del foro destinado para tal fin. En la actualidad, existe una comunidad de docentes, investigadores, desarrolladores de software, estudiantes y otras personas interesadas en la temática, que se nuclean en los distintos Institutos GeoGebra locales que articulan entre sí a través del Instituto GeoGebra Internacional.

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo, lo continuó en la Universidad de Atlantic, Florida, luego en la Universidad del Estado de Florida y en la actualidad, en la Universidad de Linz, Austria. Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo, por lo que puede ser usado también en física y otras disciplinas.

Según Gutiérrez (2009) GeoGebra es un programa de ordenador que pertenece al grupo de “software de geometría dinámica” (SGD). La principal característica del SGD es su dinamismo. Tiene la capacidad de mantener las propiedades matemáticas de una figura cuando, con el ratón, desplazamos sobre la pantalla los objetos (puntos, segmentos…) sobre los que hemos creado la figura. Es posible de recorrer de manera instantánea una infinidad de posibilidades en cuanto a posiciones y configuraciones diferentes de una representación geométrica, logrando una visión mucho más rica, interesante y atractiva que la que se puede obtener en el contexto tradicional de la pizarra o el papel.

En el contexto de la geometría dinámica hemos de comentar la distinción que se hace entre dos tipos de objetos cognitivos que se presentan durante el razonamiento geométrico: dibujo y figura; "el dibujo se refiere a la entidad material, mientras que la figura se refiere a un objeto teórico" (Laborde, 1993, p.49). Laborde hace especial énfasis en hacer esta distinción en el contexto de la geometría dinámica, donde la figura, entendida como concepto geométrico abstracto, es invariante cuando se le somete a la prueba de arrastre *dragging* mientras que un dibujo no lo es. En la misma dirección Guetiérrez (2006), otorga especial importancia a la distinción entre los conceptos de figura y dibujo, la cual es fundamental para entender y utilizar adecuadamente dichos software. Apuntar que dicha diferenciación viene propiciada por la posibilidad del SGD de "realizar construcciones mediante propiedades matemáticas que las caracterizan y que permanecen invariantes ante transformaciones de arrastre" (Gutiérrez, 2006, p.12)

En Gutiérrez (2006) se explica dicha distinción entre una figura y dibujo en el contexto del SGD. Una figura es un objeto matemático creado por el ordenador que está caracterizado por las propiedades matemáticas (no visuales) usadas en su construcción, y un dibujo es una representación particular de una figura en la pantalla del ordenador, es decir, un ejemplo de esa figura. En este sentido es típico que los estudiantes que inician el aprendizaje de un SGD construyan un cuadrado trazando cuatro segmentos verticales y horizontales de la misma longitud.

> "En este caso, la perpendicularidad de los lados no se obtiene por medios matemáticos (por ejemplo mediante el comando "recta perpendicular"), sino visuales. Además, la igualdad de los lados se obtiene midiendo sus longitudes y alargando los lados más cortos hasta ver las cuatro medidas iguales, lo cual también es un procedimiento visual. El resultado es que, cuando los estudiantes seleccionan un vértice de su cuadrado y lo arrastran, el polígono construido se deforma, pues los otros tres vértices se quedan fijos. (…) Una figura está bien construida si, al arrastrar cualquiera de sus elementos, ésta "no se deshace", es decir, conserva las características matemáticas que la definen" (Guetiérrez, 2006, p. 13)

Por lo tanto, la figura construida no es un cuadrado sino un cuadrilátero general, representada por un dibujo con forma de cuadrado.

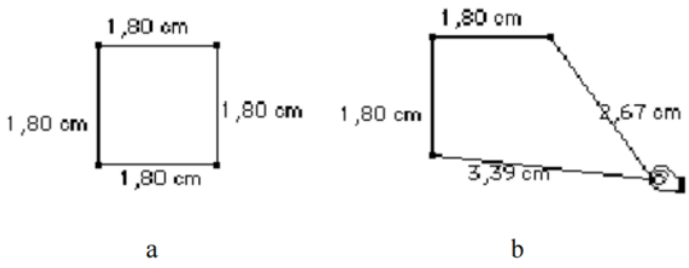


Imagen 6. Figura de cuadrado construida mediante medios visuales a través de un SGD. Observamos como al arrastrar un vértice no conserva las propiedades matemáticas que la definen.

CAPÍTULO 2: MARCO PRÁCTICO

El segundo capítulo de este Trabajo Fin de Grado incluye una serie de actividades con GeoGebra tanto provenientes de la web como de elaboración propia. Para ello hacemos en primer lugar una investigación sobre las páginas web que ofrecen recursos de GeoGebra que se adapten a nuestras necesidades. Analizamos los diferentes applets que proporcionan y analizamos los puntos fuertes y débiles que tienen. Todo ello para la consecución del objetivo 2a: explorar las actividades que la red oferta y que pueden ser apropiadas para su aprovechamiento en los distintos ciclos de Educación Primaria. En segundo lugar (objetivo 2b) elaboramos actividades propias para complementar la búsqueda Finalmente exponemos ordenadas todas las actividades que consideramos útiles en el diseño de la secuencia didáctica propuesta en el siguiente capítulo.

2.1 OBJETIVO 2A: REVISIÓN DE RECURSOS EN LA WEB

Existen varias opciones para buscar actividades de GeoGebra por la web. Destacar la página oficial de GeoGebra (http://tube.geogebra.org), los recursos proporcionados por el Proyecto Gauss en la página web del INTEF (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado, páginas web de autores particulares como Rafael Losada Liste (http://www.iespravia.com/rafa/rafa.htm), Manuel Sada Allo (http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/), José Antonio Mora Sanchez (http://jmora7.com/Arte/arte.htm) , Rafael Miranda (http://www.geometriadinamica.cl), Daniel Mentrard (http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/index.htm) y las páginas de los diferentes institutos de GeoGebra españoles.

Para buscar actividades nos fijamos en algunos aspectos fundamentales: Queremos construir la imagen conceptual del rombo en alumnos de sexto de primaria. Son más interesantes las actividades enmarcadas en un contexto problemático, de desafío y pregunta para inducir a un aprendizaje significativo. Buscamos representaciones variadas que rompan con los dibujos estereotipados del rombo. Nos basamos en la metodología de presentación de ejemplos y contraejemplos.

> Los profesores deben dar la oportunidad a sus alumnos: - De comparar ejemplos y contraejemplos para identificar sus diferencias más significativas. La contraposición

> entre un ejemplo y un contraejemplo pondrá de relieve la existencia de una propiedad que tiene el ejemplo pero no el contraejemplo, y mostrará a los alumnos que se trata de una propiedad necesaria del concepto que están estudiando (Gutiérrez & Jaime, 2012, p. 65)

En primer lugar analizamos la página web oficial de GeoGebra dónde se encuentra la mayor fuente de applets del software. Aunque encontramos actualmente 380.382 recursos libres e interactivos resulta costoso de adaptar alguno a la Educación Primaria, porque en rara ocasión se dan indicaciones didácticas u orientaciones metodológicas. Además no suelen estar contextualizadas en niveles.

Hay multitud de recursos en los que se dan polígonos y se propone modificarlos para observar sus propiedades. Estas construcciones están bien para observar ejemplos del concepto. Sin embargo, no encontramos ningún Applet en el que se proponga un problema o se planteé una situación didáctica que presente una situación problemática real; sólo se exponen los polígonos y se proponen tareas del estilo “modifica los puntos y observa las propiedades”. Por lo que encontramos muchos recursos que habría que contextualizar en una situación didáctica para aprovechar su utilidad.

Por otro lado encontramos, desde un enfoque más didáctico, el Proyecto Gauss en la página web oficial del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF), que brinda al profesorado varios centenares de ítems didácticos y de applets de GeoGebra, que cubren todos los contenidos de matemáticas de Primaria y de Secundaria. Casi todos los ítems están dirigidos a los últimos cursos de Educación Primaria. La principal ventaja que tienen es que están clasificados por niveles, poseen un contexto de aprendizaje, proponen orientaciones didácticas y posibles preguntas para hacer durante y después de la tarea.

Una de las actividades que nos parece interesante se llama *Falsos cuadrados* (ítem creado por Rafael Losada Liste). Está propuesta para los cursos 5º y 6º de Educación Primaria y se dan como indicaciones metodológicas las siguientes: *mueve los vértices de cada cuadrado y después contesta a las preguntas. Sólo una de las figuras es un cuadrado auténtico. ¿Cuál? ¿Por qué las otras parecían cuadrados cuando no lo eran?* A continuación dos figuras que representan la primera impresión del Applet, y el resultado que se obtiene tras su manipulación:

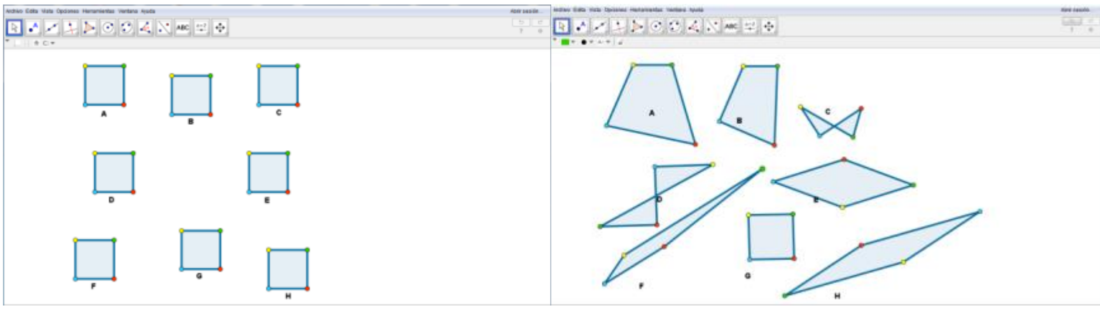


Imagen 7. Applet de inicial y modificado, Falsos cuadrados

Esta actividad nos parece muy interesante porque se utiliza el SGD para proporcionar ejemplos y contraejemplos del concepto de cuadrado. Que las representaciones se presenten de forma estereotipada puede parecer incoherente en este Trabajo Fin de Grado sin embargo, no es un problema porque estamos hablando de cuadrados que son falsos y sólo uno de ellos es verdadero, y han de manipularlos para descubrir cuál es. Por lo tanto todo lo que van a ver son contraejemplos del concepto excepto en la representación real en la que observarán diferentes ejemplos del cuadrado sin estereotipar.

La segunda pregunta está encaminada a diferenciar un cuadrado de un "no cuadrado" (un ejemplo de varios contraejemplos). Consideramos preguntas más correctas como: *¿Por qué has elegido ese cuadrado como verdadero?* o *¿Qué características tiene el cuadrado verdadero que no tenga el resto?* (tendentes a evocar las propiedades relevantes e irrelevantes del concepto). Otra posibilidad podría ser numerar las representaciones y preguntar por cada una individualmente. Por ejemplo: *La figura 3 ES / NO ES cuadrado porque… La figura 4 ES / NO ES cuadrado porque…*

Según Arnal & Guerrero (2015), quienes también utilizan y analizan la actividad *Cuadrados mentirosos* extraída del Proyecto Gauss, señalan que es matemáticamente limitada ya que proporciona ejemplos de cuadrados que pierden simultáneamente la igualdad de ángulos y lados pero no ofrece ninguno que pierda solo la igualdad de lados y sólo uno que pierde la igualdad de ángulos al arrastrar. Por lo tanto, tras su manipulación sólo aparece un rombo y ningún rectángulo.

Teniendo en cuenta las modificaciones consideramos *Cuadrados mentirosos* una actividad de GeoGebra muy útil que puede ayudar en la construcción del concepto de cuadrado mediante una metodología de comparación de ejemplos y contraejemplos y además presentando representaciones sin estereotipar. A continuación presentamos la actividad modificada en la ficha de actividad 3.

Encontramos otros applets interesantes en el apartado de construcciones sueltas propuestas por el Proyecto Gauss. Una de ellas se llama *vocabulario de los cuadriláteros* por Daniel Mentrard. Consiste en la presentación de un cuadrilátero no estereotipado en el cual se puede elegir señalar o no los conceptos de lados opuestos, consecutivos, ángulos opuestos, consecutivos y diagonales. Marcando y desmarcando las casillas se elige si se quieren ver dichos conceptos dibujados en el cuadrilátero que a su vez se puede girar, arrastrar y estirar permitiendo observar cómo cambia el conjunto de aspectos. Por todo ello consideramos este Applet útil para la introducción del cuadrilátero. A continuación presentamos el Applet con imágenes en la ficha de actividad 1.

Otro Applet de interés encontrado en el mismo montón de construcciones sueltas del Proyecto Gauss se llama *propiedades del paralelogramo* también por Daniel Mentrard. Es similar al Applet anterior, pero este se basa en el concepto de paralelogramo. Se presenta un cuadrilátero paralelogramo sin estereotipar y con los vértices destacados para ser estirado y modificado. Las medidas de lados y ángulos están expresadas en el dibujo y se adaptan a los cambios del paralelogramo. Se exponen la definición y algunas propiedades de los paralelogramos. Puede ser un Applet útil para la introducción a los paralelogramos. Presentamos el Applet con imágenes en la ficha de actividad 2.

Exponemos a continuación un Applet del mismo autor Daniel Mentrard, se llama *formas geométricas* y aunque no está contextualizada en ningún nivel, la proponemos para primer o segundo curso de primaria. El Applet expone un paisaje constituido por círculos, cuadrados y rectángulos. Consideramos negativo en esta actividad que Todos los rectángulos y triángulos se presentan estereotipados y no se pueden mover. Además se favorece la clasificación particional de los cuadriláteros.

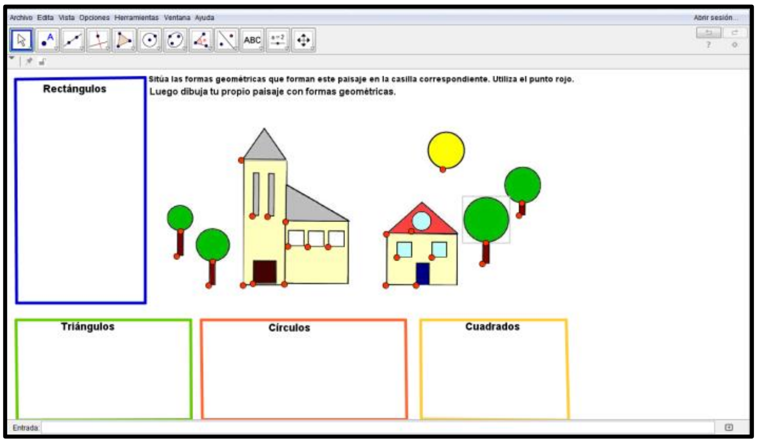


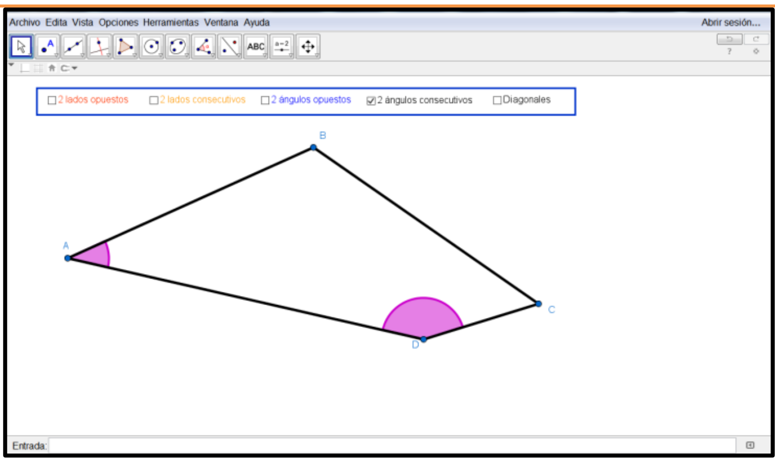
Imagen 8. Applet con limitaciones matemáticas; favorece la clasificación partitiva de los cuadriláteros y sus representaciones son estereotipadas.

2.2 OBJETIVO 2B: ACTIVIDADES CON GEOGEBRA

A continuación presentamos todas las actividades tanto encontradas en la web como de creación propia que consideremos útiles para trabajar los conceptos de cuadrilátero, paralelogramo, cuadrado y rombo desde un enfoque dinámico y jerárquico en el que se prima la presentación de numerosos ejemplos de cada concepto para aprender sus características irrelevantes y contraejemplos para aprender sus características relevantes. Presentamos todas las actividades agrupadas en fichas para facilitar su visualización y estudio.

Actividad 1

Vocabulario de cuadriláteros



Nivel

5º y 6º Educación Primaria

Objetivos didácticos

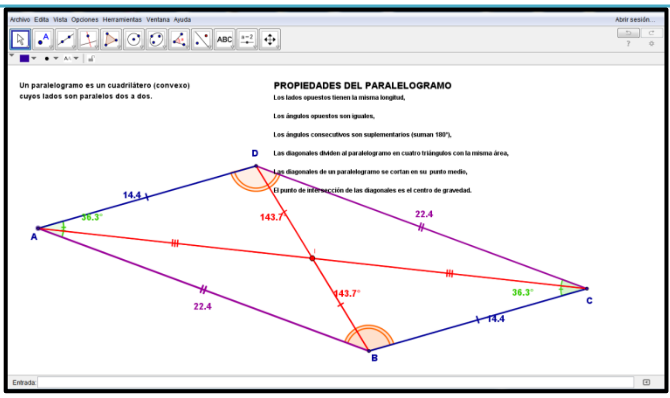
- Explorar los elementos de los cuadriláteros: lados opuestos y consecutivos, ángulos opuestos y consecutivos y diagonales.
- Mejorar el concepto de cuadrilátero presentando numerosos ejemplos no estereotipados

Orientaciones metodológicas

Lo que más interesa es que los alumnos modifiquen el cuadrilátero y marquen y desmarquen las diferentes pestañas. Una tarea que se puede encomendar es por ejemplo; modifica el cuadrilátero buscando algo en concreto (lados paralelos, ángulos opuestos…)

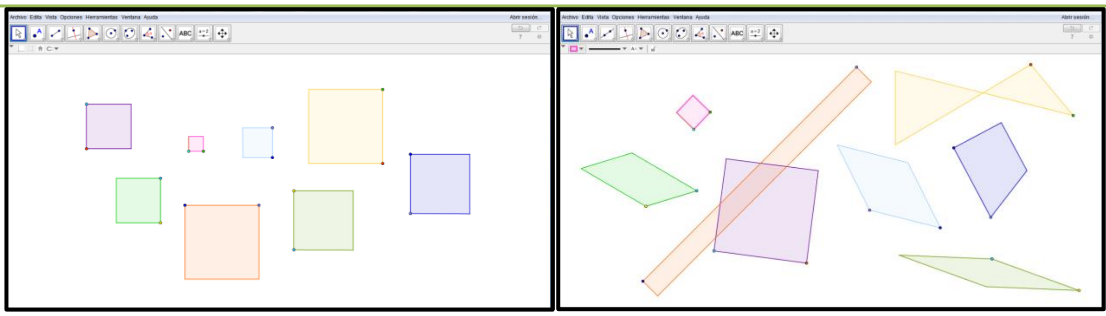
Fuente

El Applet ha sido extraído de los recursos proporcionados por el Proyecto Gauss y el autor es Daniel Mentrard.

Actividad 2
Propiedades del paralelogramo

Nivel 6º Educación Primaria
Objetivos didácticos -Conocer propiedades del paralelogramo: los lados opuestos tienen la misma longitud, los ángulos opuestos son iguales y las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto media. -Mejorar el concepto de paralelogramo a través de la presentación de numerosos ejemplos no estereotipados.
Orientaciones metodológicas Lo interesante del Applet es que los alumnos modifiquen el paralelogramo una y otra vez para obtener numerosos ejemplos del concepto. Las propiedades de los paralelogramos se enumeran a la derecha y la definición se presenta a la izquierda. Ya que se presentan propiedades del paralelogramo, se puede enfocar la tarea a identificar propiedades irrelevantes. Habría que pedir a los alumnos que manipulasen el paralelogramo mientras se fijan en las propiedades y hacer la pregunta *Pon atención en como el paralelogramo mantiene sus propiedades por mucho que lo deformes. ¿Qué características del paralelogramo cambian a deformarlo?* Utilizar después de la anterior actividad (manipulación – reflexión- recapitulación) propio de fase 5 de Van Hiele.
Fuente El Applet ha sido extraído de los recursos del Proyecto Gauss y ha sido creada por Daniel Mentrard.

Actividad 3

Cuadrados Mentirosos



Nivel de la Actividad

5º y 6º Educación Primaria

Objetivos didácticos

-Identificar las representaciones del cuadrado, rectángulo, rombo y romboide en diferentes posiciones.

-Mejorar la imagen conceptual que los alumnos tienen del concepto de cuadrado.

Orientaciones metodológicas

Los alumnos han de modificar las figuras. Arrastrando los vértices observarán diferentes modificaciones. Hay dos cuadrados bien construidos en lo que al arrastrar sus vértices cambiarán de dimensiones pero mantendrán las características necesarias. El resto de aparentes cuadrados pierden las características propias de los cuadrados formando un rectángulo, un romboide, dos rombos, un trapecio y dos cuadriláteros complejos.

Variantes o posibles adaptaciones a considerar

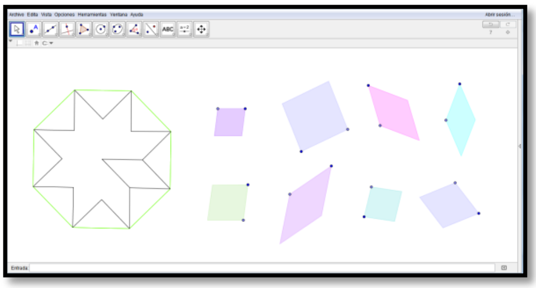
Transferirla a otro concepto geométrico. Por ejemplo, en el caso del triángulo rectángulo, se expondrían una serie de triángulos que aparentemente fueran rectángulos pero que algunos de ellos perdieran el ángulo recto tras su manipulación. Lo mismo para el concepto de rectángulo; en este caso presentaríamos una serie de paralelogramos con los ángulos aparentemente rectos (incluyendo la representación del cuadrado) y tras arrastrar los vértices de los aparentes rectángulos algunos perderían su igualdad de ángulos. Nosotros la hemos transferido al concepto de rombo y la hemos utilizado en nuestra secuencia didáctica; se llama Rombos mentirosos y responde a la actividad 7.

Fuente

La actividad ha sido modificada, sin embargo se ha extraído del Proyecto Gauss (INTEF) y el creador del Applet original es Rafael Losada Liste.

Actividad 6

Puzle de rombos 2



Nivel de la actividad

5º y 6º Primaria

Objetivos didácticos

-Mejorar la imagen conceptual que los alumnos tienen del rombo rompiendo con la representación estereotipada del mismo.

-Identificar la representación del rombo en diferentes posiciones, tamaño y forma.

Orientaciones metodológicas

Es un puzle similar al de las actividades 1 y 2. Se presentan los límites de una estrella de ocho puntas que ha de ser rellenada por los ocho rombos que aparecen a su lado.

Se ha de explicar cómo se mueven y transforman los rombos.

Es recomendable realizarla por parejas para que afronten mejor su dificultad así como para que comenten los resultados. Preguntas propuestas para después de la actividad son: *-Has cambiado el aspecto de los rombos, ¿ha dejado alguno de ser un rombo?, explica tu respuesta. -¿Qué características de las figuras son importantes para que sean rombos? -¿Cuáles no?*

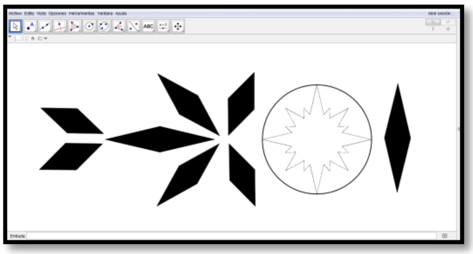
Variantes o posibles adaptaciones a considerar

En esta actividad se proponen ocho rombos como piezas que han de colocarse como si fueran pétalos en una flor como muestran los límites de un rombo dentro de la estrella colocado a modo de ejemplo. Sin embargo no sólo tiene una solución. Si se observa atentamente se puede completar la estrella utilizando cuatro rombos que se superpongan y que coincidan en centro con el centro de la estrella.

Otra variante podría ser retar a los alumnos a que lo prueben con menor número de rombos.

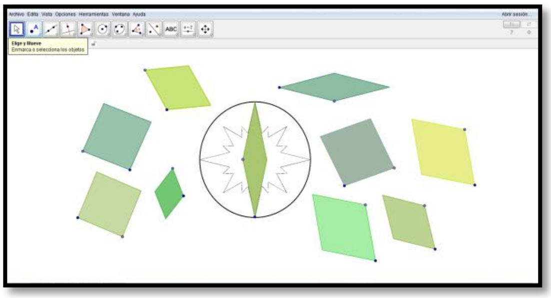
Fuente

Elaboración propia, http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2358229

Actividad 4
Puzle con rombos fijos

Nivel de la actividad: La actividad *Puzle con rombos fijos* está destinada para segundo y tercer ciclo. Para tercer ciclo sería muy sencilla pero serviría a modo de introducción tanto de GeoGebra como de la temática (el concepto de rombo).
Objetivos didácticos: **-**Identificar la representación del rombo en diferentes posiciones. -Mejorar la imagen conceptual que los alumnos tienen del rombo rompiendo con la representación estandarizada del mismo.
Orientaciones metodológicas: Los alumnos han de realizar el puzle de la estrella utilizando los ocho rombos negros que se presentan. Los rombos son fijos y se ajustan perfectamente al interior de la estrella sin necesidad de modificar su forma o tamaño. Simplemente han de mover su posición. Con la herramienta de translación han de pinchar en cada rombo y colocarlo en su nueva posición. Es una actividad de introducción a posteriores en las que tendrán que modificar el tamaño y forma de las figuras. Es una actividad muy sencilla que se puede utilizar a modo de introducción para familiarizarse con el uso de GeoGebra e introducir actividades posteriores con rombos modificables.
Variantes o posibles adaptaciones a considerar: Una forma de añadir dificultad a la actividad puede ser proporcionar movilidad a los rombos y presentarlos en diferentes formas y tamaños. En este caso los alumnos deberían manipular su forma y tamaño además de trasladarlos. Se observa en la actividad 5.
Fuente Elaboración propia, http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2410639

Actividad 5

Puzle con rombos móviles



Nivel de la actividad

5º y 6º de primaria.

Objetivos didácticos

-Mejorar la imagen conceptual que los alumnos tienen del rombo rompiendo con la representación estandarizada del mismo.

-Identificar la representación del rombo en diferentes posiciones, tamaño y forma**.**

Orientaciones metodológicas

Es el mismo puzle que el de la Actividad 1 pero en este caso se ha dado movilidad a los rombos y se han deformado.

Se ha de explicar a los alumnos que cada rombo tiene dos vértices coloreados que sirven para modificar su tamaño y forma.

Los alumnos deben manipular los rombos para que encajen en la estrella.

Esta actividad se puede hacer por parejas para afrontar mejor su dificultad.

Se puede indicar a los alumnos que las piezas de este puzle se pueden superponer.

Se pueden hacer las siguientes preguntas tras la actividad:

-Has cambiado el aspecto de los rombos, ¿ha dejado alguno de ser un rombo?, explica tu respuesta.

-¿Qué características de las figuras son importantes para que sean rombos?

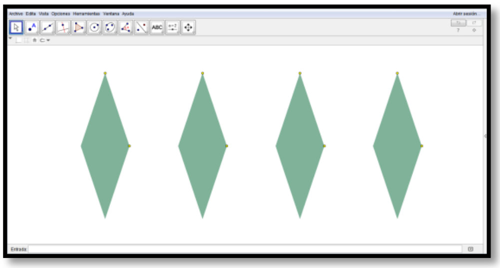
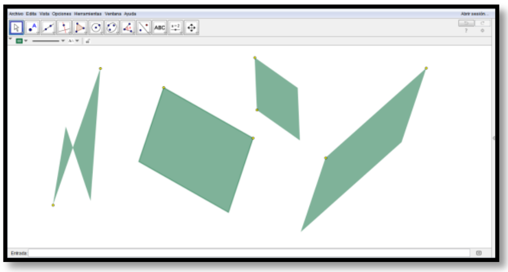
-¿Cuáles no?

Fuente

Elaboración propia, http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2358311

Actividad 7

Rombos mentirosos

Nivel

5º y 6º de Educación Primaria

Objetivos didácticos

-Mejorar la imagen conceptual que los alumnos tienen del rombo rompiendo con la representación estereotipada del mismo.

-Identificar la representación del rombo en diferentes posiciones, tamaño y forma.

-Identificar y reconocer y diferenciar ejemplos y contraejemplos del concepto de rombo.

Orientaciones metodológicas

Para afrontar esta actividad los alumnos han de estar familiarizados con GeoGebra. Deben conocer al menos que los polígonos se pueden deformar pinchando y arrastrando en sus vértices coloreados.

Se presentan cuatro aparentes rombos a los alumnos entre los cuáles solo hay uno verdadero (que al modificarse siempre mantiene sus condiciones necesarias de rombo).

Observamos que es el que ocupa el tercer lugar.

Es recomendable realizar la actividad por parejas para que intercambien opiniones y comenten resultados.

Como propuesta a la par de la actividad se propone explicar en cada caso por qué el rombo es verdadero o falso: *El rombo nº1 es verdadero / falso porque…………………………El rombo nº2 es verdadero / falso porque…………………………(etc.)*

Variantes o posibles adaptaciones a considerar

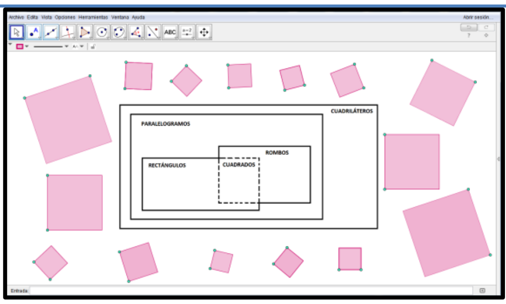
Es interesante tener en cuenta que esta actividad se puede transferir a otros conceptos, como el triángulo rectángulo, cuadrilátero, cuadrado,

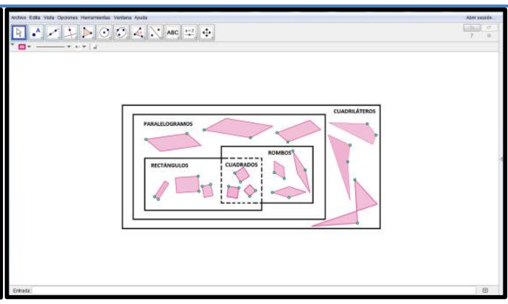
Fuente

Elaboración propia, http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2410783

Actividad 8

Clasificación inclusiva de cuadriláteros





Nivel

5º y 6º curso de primaria.

Objetivos

-Estudiar Las propiedades de los diferentes cuadriláteros a través de la comparación entre las propiedades de los diferentes tipos de cuadriláteros.

-Comprender el significado de la clasificación inclusiva de los cuadriláteros.

Orientaciones metodológicas

Se les presentan a los alumnos quince aparentes cuadrados que deben colocar en el cuadro clasificatorio según sus propiedades. Antes de comenzar la actividad los alumnos han de conocer las propiedades de los conceptos. También se recomienda haber trabajado previamente el significado del cuadro de clasificación inclusiva de los cuadriláteros.

Variantes

Se puede hacer más sencilla la actividad aplicándola solamente para los conceptos de cuadrilátero y paralelogramo, eliminando los rectángulos y rombos y modificando el cuadro clasificatorio.

Otra opción es mantener el cuadro clasificatorio pero descargar polígonos y presentar uno o dos para cada bloque.

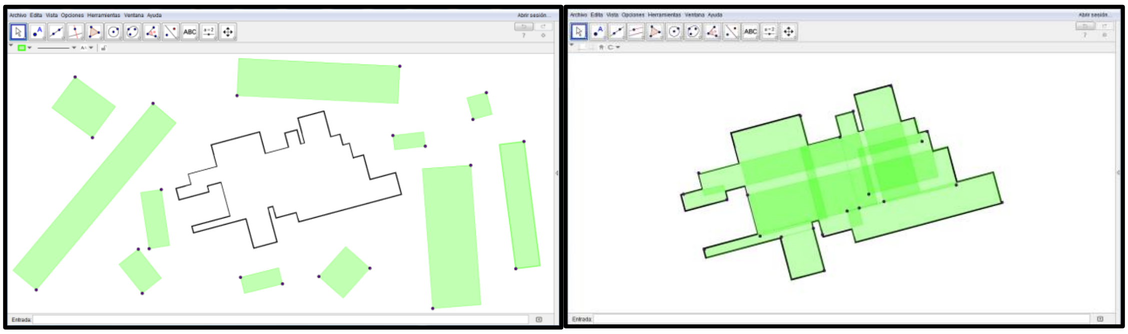
Otra adaptación para aumentar considerablemente la dificultad podría ser presentar numerados y con preguntas tipo “haz una lista con los cuadriláteros, otra con los rombos… *¿por qué aparecen algunos en dos listas? ¿tiene algo que ver con la clasificación jerárquica de los cuadriláteros?*

Fuente de extracción

Elaboración propia

Actividad 9

Rectángulos locos



Nivel

5º y 6º de primaria

Objetivos

- Mejorar la imagen conceptual del rectángulo a través de la presentación de numerosos ejemplos

Orientaciones metodológicas

Los alumnos tienen que completar un puzle con las piezas verdes que son rectángulos. Lo que interesa es que volteen y modifiquen los rectángulos para eliminen del concepto la posición horizontal y vertical necesaria de los lados del rectángulo.

Variante

Una modificación a considerar para añadir dificultad es añadir más piezas que no fueran rectángulos.

Fuente

Elaboración propia

CAPÍTULO 3: DISEÑO Y ANÁLISIS DE LA INTERVENCIÓN

A continuación presentamos el capítulo más extenso e importante de este Trabajo Fin de Grado. Consiste en la presentación del diseño, experimentación y análisis de una intervención de carácter investigador para un total de 39 alumnos de sexto de Educación Primaria del C.E.I.P. Hispanidad.

La intervención consta de tres partes; la más importante consiste en una secuencia didáctica con actividades de GeoGebra[1] que tiene el objetivo de mejorar el concepto del rombo en los alumnos de sexto de primaria. Las otras dos partes de la intervención son un pre-test para analizar la situación de los alumnos con respecto al concepto de rombo y un pos-test para evaluar la validez de nuestra secuencia. En ambos test añadimos los conceptos de cuadrilátero y triángulo rectángulo porque entendemos las influencia de los estereotipos como un problema global que afecta a todas las representaciones y que una vez solucionado en un concepto concreto como el rombo, se pueda transferir a otros.

Tras la ordenación, análisis meticuloso e interpretación de los datos obtenidos proponemos una nueva secuencia mejorada basándonos en los puntos fuertes y débiles de secuencia inicial.

3.1 CONTEXTUALIZACIÓN Y DISEÑO DE LAS SESIONES

La intervención se lleva a cabo en el colegio zaragozano C.E.I.P. Hispanidad que fue creado en 1984 y en la actualidad cuenta con 450 alumnos/as, 150 de Educación Infantil (3-6 años) y 300 de Educación Primaria (6-12 años).

Situado en la calle Océano Atlántico s/n., en el distrito Municipal VIII, que abarca la zona del Parque Hispanidad, barrios Oliver y Valdefierro.

[1] La secuencia con GeoGebra cuenta con tres actividades de elaboración propia que se encuentran en un libro de GeoGebra llamado *Hispanidad.* Los applets con los que se llevan a cabo las actividades se llaman *Puzle con rombos, Puzle con rombos 2 y Rombos mentirosos* y se encuentran entre los recursos proporcionados en la web oficial de GeoGebra bajo el link http://www.geogebra.org/material/simple/id/2358243.

Está ubicado en el Parque Hispanidad, enclavado en una verdadera zona escolar, ya que limita con tres centros escolares públicos: la escuela infantil “La Inmaculada”, y los institutos de Educación Secundaria “Ramón Pignatelli” y “Los Enlaces”. En esta situación, el colegio público Hispanidad fomenta la coordinación con estos centros ya que la mayoría de sus alumnos/as pasa por ellos en las diferentes etapas educativas.

La experimentación se lleva a cabo con los alumnos de 6º curso de Educación Primaria. El colegio posee dos vías “A” y “B” en las que estudian 21 y 20 alumnos respectivamente por cada una. La intervención se hace a los dos a una totalidad de 39 sujetos.

3.1.1 ELECCIÓN DE ACTIVIDADES

Para elegir las actividades correctamente hemos de partir de los conocimientos previos del alumno. Para ello investigamos sobre los libros de matemáticas que nuestros alumnos han utilizado durante la educación primaria ya que es un recurso fundamental empleado en la enseñanza. Sabemos que actualmente, todos los cursos del centro utilizan los libros de la editorial Santillana durante toda la etapa. A continuación estudiamos el trato que se le da al concepto de rombo en cada curso en los libros de Santillana que hemos encontrado.

No es hasta cuarto curso de primaria cuando se presenta el concepto de rombo por primera vez en el currículo de la etapa. Estudiamos la unidad de los polígonos del libro *Matemáticas 4* de la editorial Santillana de la serie Comunidad Entre Amigos. Se introducen por primera vez los conceptos de paralelogramo representado mediante el dibujo de un rectángulo estereotipado, rombo y romboide también en su forma estereotipada. Debajo del dibujo de rombo aparece un recuadro informativo que expresa de forma implícita la definición del rombo pues dice “el rombo tiene los cuadro lados iguales” y no se explicita si eso es la definición o si son simplemente una lista de características propias de este objeto. Los rombos que se presentan en la unidad son todos estereotipados; encontramos 8 rombos de los cuales 3 son cuadrados y el resto son rombos estereotipados. Por otro lado, observamos que, aunque las definiciones dadas son jerárquicas, se favorece la clasificación particional de los cuadriláteros debido a la forma de presentar la información; insertamos a continuación una captura que lo muestra.

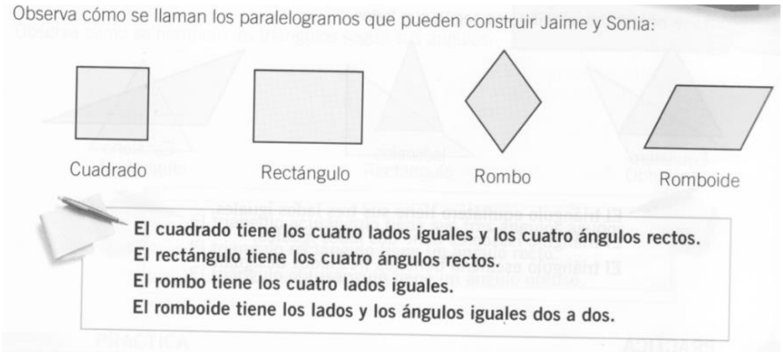


Imagen 9. Presentación de la información en forma particional pero con definiciones jerárquicas y figuras estereotipadas de los cuadriláteros. 4º primaria. Santillana. Entre amigos. P. 133

Continuamos con el quinto curso de educación primaria. Estudiamos el libro *Matemáticas 5* de la editorial Santillana y de la serie Comunidad Entre Amigos. Analizamos la unidad 8 llamada en esta ocasión *Figuras planas. Simetría.* Se presenta un formato diferente al del curso anterior para presentar los diferentes tipos de paralelogramos. La definición del rombo sigue siendo implícita y se sigue favoreciendo la clasificación particional de los cuadriláteros. En cuanto a la presentación de rombos, encontramos 11 rombos en toda la unidad de los cuales 6 son cuadrados y el resto son representaciones estereotipadas de rombo. Insertamos a continuación la imagen que muestra el nuevo formato de la presentación de los paralelogramos.

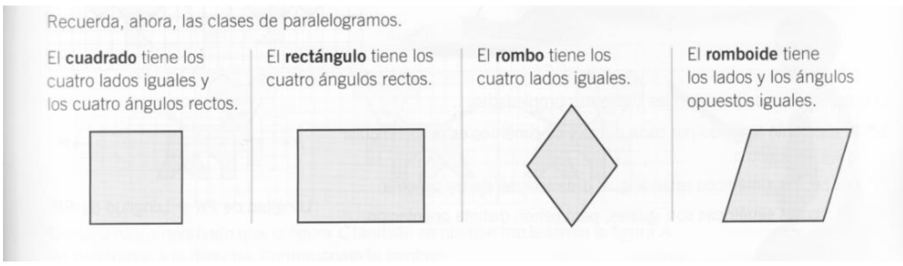


Imagen 10. Presentación particional y estereotipada de los cuadriláteros. 5º Primaria. Santillana. Entre amigos. P. 95

Continuamos con sexto curso en el que nuestros alumnos aún no han trabajado la unidad de las figuras planas a estas alturas del curso. Sin embargo insertamos la captura correspondiente a la presentación de los paralelogramos utilizada en el libro *Matemáticas 6* de Santillana de la serie Comunidad Entre Amigos y observamos de nuevo la presentación estereotipada de las figuras y la clasificación particional de los cuadriláteros.

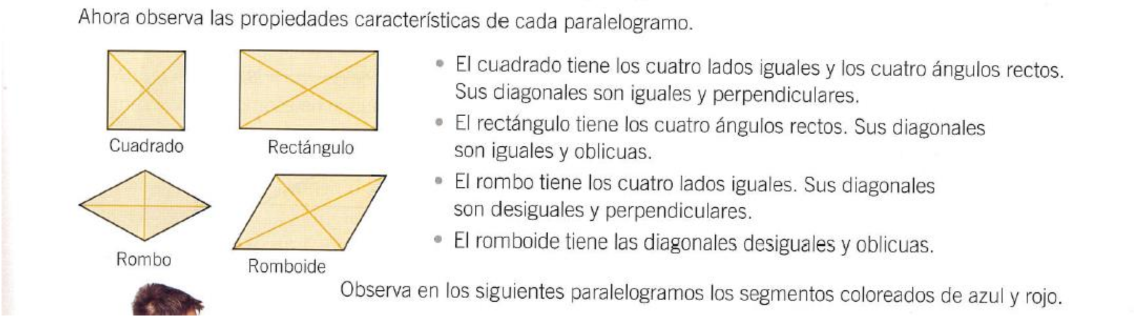


Imagen 11. Presentación estereotipada y particional de los cuadriláteros. 6º Santillana. Entre Amigos. P. 77

Tras la revisión anterior conjeturamos que los alumnos tienen una imagen conceptual del rombo pobre, con muy pocos ejemplos y con muy poca reflexión sobre los mismos. Por lo tanto cuando consideramos normal que cuanto construyan un rombo dibujen uno estereotipado y cuando identifiquen un rombo tengan dificultades con los que no se presenten dibujados en su forma estereotipada.

Por ello, para la elección de actividades, tenemos muy en cuenta importancia de las imágenes conceptuales:

> Todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definiciones formales. Muchas de estas definiciones se presentan a los estudiantes más tarde o más temprano. Pero el estudiante no necesariamente utiliza la definición cuando decide si un objeto matemático es un ejemplo o un contraejemplo del concepto, sino que, en la mayoría de los casos, toma una decisión basándose en la imagen del concepto, que es el conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre del concepto, pudiendo tratarse de una representación visual o bien de una serie de impresiones o experiencias. Es, por tanto, algo no verbal, que se ha ido formando a lo largo de los años por medio de experiencias de todo tipo y que puede que contenga partes que no estén de acuerdo con la definición formal o con otras de la propia imagen. (Turégano, 2006, p. 38)

Hemos aprendido que los alumnos acuden a su imagen conceptual cuando se enfrentan a un problema de construcción o identificación de los polígonos. Hemos seleccionado las actividades teniendo en cuenta la importancia de que dichas imágenes conceptuales sean buenas. Concretamente, hemos seleccionado las actividades para mejorar la imagen conceptual del rombo.

También ha estado influida nuestra selección de actividades por autores como Gutiérrez & Jaime (2012) para quienes el problema al construir imágenes conceptuales es que los ejemplos dados suelen ser pocos y estandarizados. Además suelen tener características peculiares que son irrelevantes para la definición del concepto pero que se asumen como relevantes. Así como Moriena & Scaglia (2005) para quienes las representaciones gráficas estereotipadas de los conceptos también son una gran barrera didáctica.

Decidimos llevar a cabo una intervención de carácter investigador. Nos proponemos llevar a cabo una secuencia didáctica para sexto curso de Educación Primaria capaz de mejorar la construcción de la imagen conceptual del rombo. Para ello decidimos decantarnos por el software de geometría dinámica GeoGebra por su potencial didáctico en la presentación de ejemplos y contraejemplos, por su facilidad de uso y por su licencia libre que lo hace gratuito.

Esta intervención de carácter investigador consiste en una breve pero profunda experimentación de tres sesiones en la que se pretende corroborar la influencia negativa de las representaciones gráficas estereotipadas en los alumnos de 6º curso de Educación Primaria con un pre-test (sesión 1), proporcionar los recursos necesarios para eliminar los errores característicos de dichas estereotipaciones con una secuencia didáctica, con un test (sesión 2) y evaluar un posible progreso con un pos-test (sesión 3).

A continuación presentamos las 3 sesiones en el mismo orden en que se llevarán a cabo en la intervención. En primer lugar describimos el pre-test, en segundo lugar describimos la sesión 2 que corresponde con nuestra secuencia didáctica y en tercer lugar el pos-test. Pre-test y Pos-test son prácticamente iguales con la diferencia de que hemos descargado las dos tareas del pos-test.

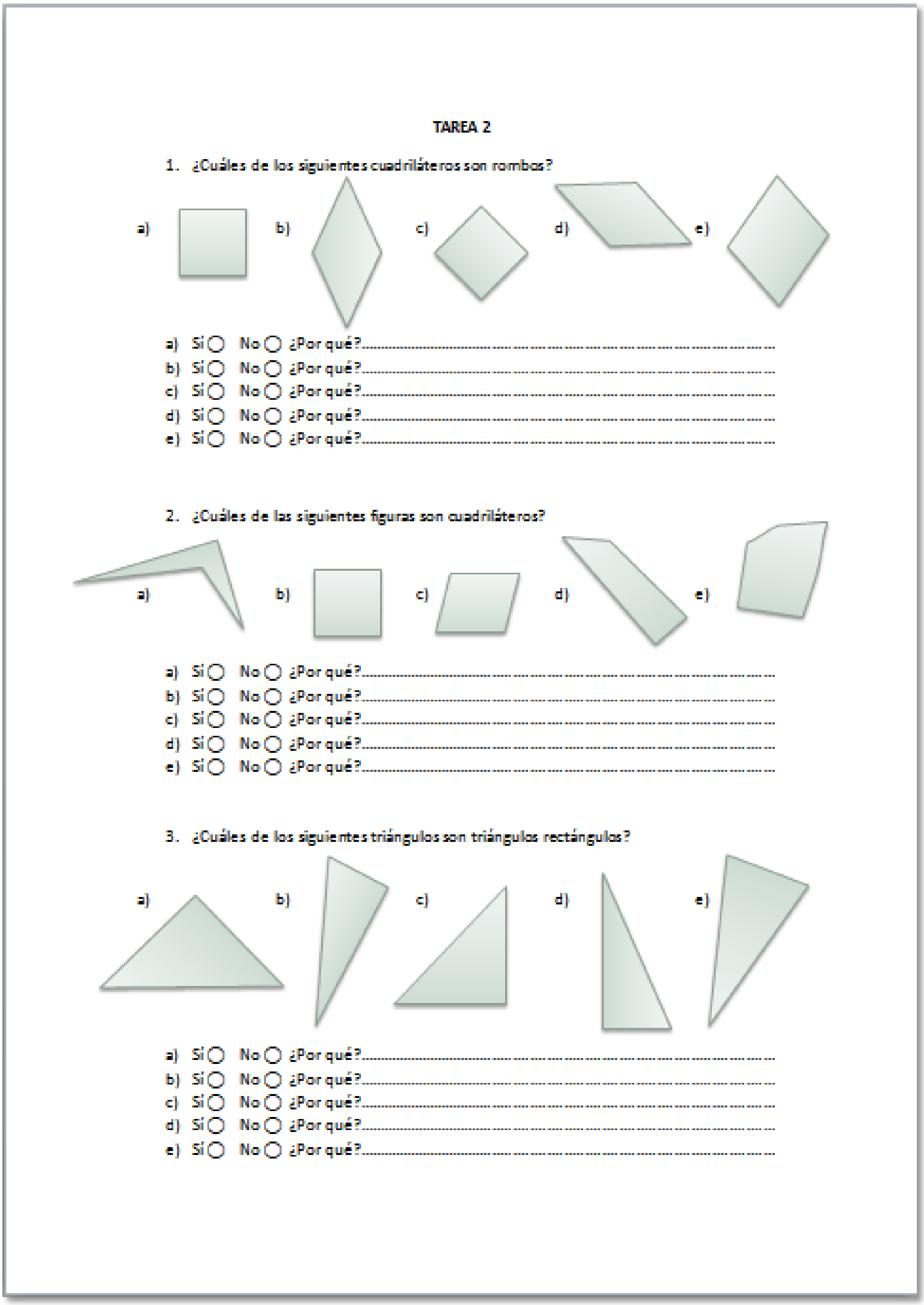
3.1.2 SESIÓN 1 PRE-TEST

Consta de dos partes, por un lado, una tarea de construcción de polígonos y por otro, una tarea de identificación de polígonos[2]. Ambas tareas están diseñadas para mostrar las influencias provocadas por la continua exposición a los alumnos, en este caso, de sexto de primaria de las representaciones gráficas estereotipadas de los polígonos. Además

[2] Los ejercicios propuestos han sido extraídos y adaptados de la tarea sobre rombos (cuadro 4) que proponen Moriena y Scaglia en su trabajo de investigación Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *EDUCACICIÓN MATEMÁTICA, 15*(1), 5-19. Publicado en abril 2003

también van a ser útiles para mostrarnos la situación de los alumnos con respecto al concepto de rombo y las estrategias que utilizan al enfrentarse a su construcción e identificación (comparan con su imagen conceptual o utilizan la definición).

En la tarea de construcción se explicita con un enunciado *Dibuja, sin utilizar la regla, las siguientes figuras geométricas: triángulo, cuadrilátero, rombo, triángulo rectángulo, cuadrado, rectángulo y triángulo isósceles.* En la tarea de identificación se han de discriminar, de entre cinco dibujos, los rombos, cuadriláteros y triángulos rectángulos verdaderos y falsos; observamos la hoja física en la siguiente imagen:



TAREA 2

1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

a) b) c) d) e)

a) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
b) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
c) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
d) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
e) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...

2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son cuadriláteros?

a) b) c) d) e)

a) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
b) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
c) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
d) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
e) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...

3. ¿Cuáles de los siguientes triángulos son triángulos rectángulos?

a) b) c) d) e)

a) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
b) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
c) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
d) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...
e) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...

Imagen 12. Pre-test. Tarea de identificación

Justificación y conjeturas de la tarea de construcción

En este test de construcción de polígonos se prevé que los alumnos van a dibujar las figuras de forma estereotipada, de la forma estándar que aparece en libros de texto, escuela y resto de su entorno. Exponemos a continuación nuestras conjeturas sustentadas en investigaciones como Hershkowitz (1989), Matos (1992) y Moriena & Scaglia (2005).

En la construcción del triángulo, dibujarán un triángulo isósceles con un lado desigual más pequeño y horizontal, o un triángulo equilátero, pero siempre con un lado horizontal. Para el cuadrilátero conjeturamos que se dibujará el prototipo "ideal", (un cuadrado o un rectángulo) con ángulos rectos y con lados paralelos a los bordes horizontal y vertical de la hoja respectivamente, seguramente dibujen un cuadrado o un rectángulo. Para el rombo esperamos encontrar el típico rombo estereotipado con una diagonal más larga paralela al borde vertical de la hoja y la otra diagonal más corta paralela al borde horizontal. El ángulo del triángulo rectángulo estará guiado por los márgenes de la hoja. El cuadrado se asentará sobre un lado horizontal. El rectángulo se dibujará con dos lados más largos paralelos al borde horizontal del papel y otros dos lados más cortos paralelos al borde vertical. Y el triángulo isósceles se dibujará con un lado más corto paralelo al borde horizontal. En cuanto a las dimensiones de las construcciones conjeturamos que no serán extremas, ni grandes ni pequeñas, estarán proporcionadas con el espacio que dejamos en la hoja.

Justificación y explicación de la tarea de identificación

A continuación justificamos las preguntas de la tarea de identificación y establecemos conjeturas. Del mismo modo que en la tarea de construcción pretendemos observar la influencia de las representaciones gráficas estereotipadas, en este caso, en la identificación de figuras. Por lo que prevemos que se tenga preferencia en identificar los ejemplos estereotipados y que se den problemas en identificar los no estereotipados.

Para la cuestión 1 *¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?* se presentan dos rombos en la posición estereotipada, con sus diagonales paralelas respectivamente a los bordes horizontal y vertical del papel (figuras *b* y *c*) y otros dos se presentan sin estereotipar con un lado horizontal (*a* y *d*). Conjeturamos que los alumnos identificarán los primeros sin problemas y tendrán más dificultades en la identificación de los segundos. Añadir también que las figuras *a* y *c* son congruentes ya que *a* ha sido rotada para obtener *b* y lo mismo ocurre con las figuras *b* y *d*. La figura *e* es la única que no es un rombo pero se ha colocado en la posición estereotipada del mismo por lo que se puede conjeturar que habrá sujetos que lo identifiquen como tal.

Para la cuestión 2 *¿Cuáles de las siguientes figuras son cuadriláteros?* Conjeturamos dificultades para identificar el cuadrilátero *a* porque es convexo lo que lo hace "raro" (y sin estereotipar). No prevemos dificultades para reconocer los cuadriláteros b y c porque corresponden a las representaciones gráficas estereotipadas. Se pueden dar casos de error en el caso *d* que también se representa sin estereotipar. Y no esperamos dificultades en el cado *e* que no es un cuadrilátero.

Para la cuestión 3 *¿Cuáles de los siguientes triángulos son triángulos rectángulos? s*e presentan dos triángulos rectángulos de forma estereotipada *c* y *d* los cuales se prevé su identificación sin problemas. Se presentan por otro lado otros dos triángulos rectángulos sin estereotipar *a* y *b* en los cuales se prevén porcentajes de aciertos más bajos. Añadir que las figuras *a* y *c* son congruentes ya que a ha sido rotada para obtener *b* y lo mismo ocurre con las figuras *b* y *d*. La figura *e* es un triángulo isósceles.

3.1.3 SESIÓN 2 TEST. SECUENCIA DIDÁCTICA CON GEOGEBRA

Las actividades seleccionadas para la sesión principal *Test* corresponden con las actividades 4, 6, y 7 propuestas en el capítulo 2, *Puzle con rombos fijos, Puzle de rombos 2* y *Rombos mentirosos*.

Construimos con estas tres actividades una secuencia didáctica de dificultad progresiva con la que conseguir los objetivos didácticos que perseguimos: Mejorar la imagen conceptual que los alumnos tienen del rombo y romper con las representaciones estereotipadas de la figura.

La sesión comienza con una breve introducción verbal en la que el investigador explica que se va a trabajar sobre el concepto de rombo y que se va a utilizar un software llamado GeoGebra para ello. Esta introducción de sesión corresponde con la fase 1 de Van Hiele (encuesta/información), en la que el profesor determina mediante el diálogo dos aspectos, el conocimiento previo del concepto a tratar y la dirección que tomará el estudio posteriormente. Se introduce el vocabulario específico del nivel que se trate. Después de la introducción se da paso a la realización de las actividades.

La primera actividad *Puzle con rombos fijos* es muy sencilla y de introducción. Los alumnos, por parejas, tienen que construir un puzle con las piezas que se presentan. Las piezas son rombos y tienen la particularidad de que son fijos lo que quiere decir que se pueden trasladar pero no se pueden rotar, estirar y encoger. Esta particularidad facilita la actividad y la convierte en una actividad de introducción tanto al concepto como a GeoGebra. Durante este proceso de actuación frente a la actividad se presenta la fase 2 de Van Hiele (orientación dirigida) en la que los estudiantes exploran de forma secuenciada el concepto a tratar a través de los materiales que les presenta el profesor. Tras mover las piezas a su lugar correspondiente los alumnos han de contestar por parejas a las preguntas que se proporcionan en la hoja de preguntas. *¿Qué características de las figuras son importantes para que sean rombos?* y *¿Cuáles no son importantes?* (fase 3 de explicitación en la que los estudiantes expresan y comparten sus opiniones acerca de las estructuras observadas). Señalar que El papel del profesor debe ser mínimo para que el lenguaje del alumno sea apropiado a su nivel y debe limitarse a repreguntar o rehacer el enunciado de las preguntas para favorecer las intervenciones de los alumnos.

A continuación se presenta la segunda actividad de la sesión *Puzle de rombos 2,* que resulta bastante más compleja. Sigue siendo un puzle en el que se proporcionan rombos como piezas pero en este caso se otorga a los rombos la posibilidad de modificar su forma y dimensiones. Modificar las piezas hasta que encajen en la estrella no es tarea fácil si no sabes la técnica concreta, y requiere de muchas modificaciones de los rombos (que se traducen en ejemplos del concepto). Esta actividad forma parte de la fase 4 de Van Hiele (orientación libre) en la que el alumno se enfrenta a tareas con etapas que pueden concluirse a través de distintos procedimientos (las piezas se rotan y se modifican). Se busca la consolidación de los conocimientos aprendidos y su aplicación a situaciones nuevas aunque de similar estructura a las estudiadas previamente. Tras completar el puzle se han de contestar la siguiente pregunta: *Habéis cambiado el aspecto de los rombos, ¿ha dejado alguno de ser un rombo? Explicad vuestra respuesta.*

Para finalizar, se lleva a cabo la actividad *Rombos mentirosos* con la que se enriquece la secuencia didáctica ya que se introducen los contraejemplos. Serrano (2001) considera adecuado que los estudiantes sean los constructores de sus propias definiciones de los conceptos. Para ello hay que proporcionarles una larga batería de ejemplos y contraejemplos para cada uno de los conceptos a definir. Más recientemente podemos leer ideas análogas:

> Una presentación cuidada de ejemplos y contraejemplos a los estudiantes les ayudará a formar una mejor imagen conceptual y a discriminar con eficacia los ejemplos de los contraejemplos. (Gutiérrez & Jaime, 2012, p. 65)

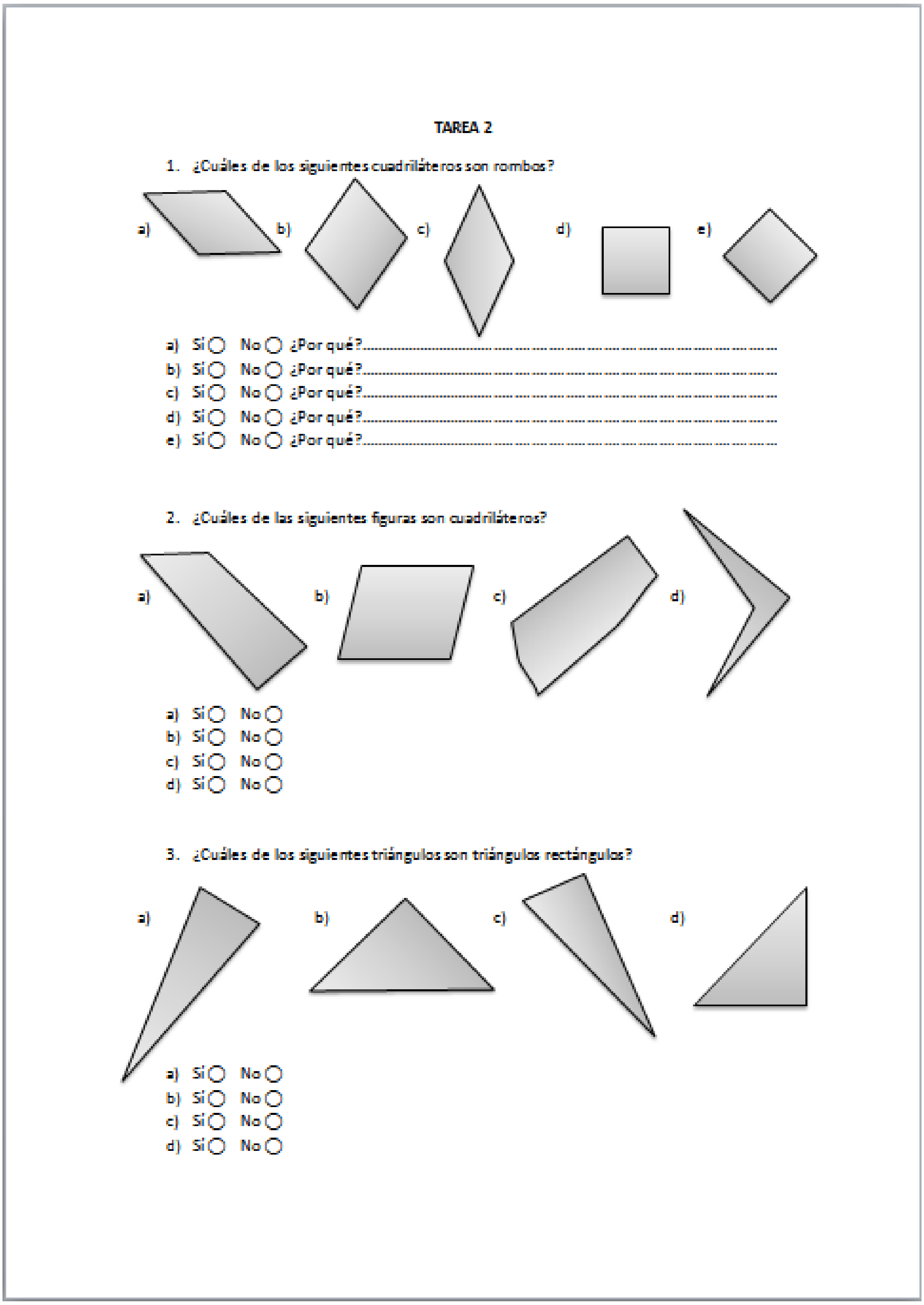
La tarea de los alumnos en la tercera actividad consiste en manipular las cuatro figuras y decidir cuál de ellas es el único rombo verdadero (ejemplo del concepto) e identificar cuáles son rombos mentirosos (contraejemplos) además de justificar cada elección rellenando el siguiente apartado:

El rombo nº1 es verdadero / falso porque……………………………………………………………
El rombo nº2 es verdadero / falso porque……………………………………………………………
El rombo nº3 es verdadero / falso porque……………………………………………………………
El rombo nº4 es verdadero / falso porque……………………………………………………………

En esta última actividad comienza la fase 5 (integración) de Van Hiele en la que el estudiante revisa, unifica y sumariza los nuevos conceptos y sus relaciones. No se presenta nada nuevo; es una síntesis o incluso revisión de los orígenes que dieron lugar a dicha síntesis. El carácter investigador de la secuencia didáctica limita la quinta fase de integración del concepto. En una secuencia no experimental, se deberían proveer a los alumnos de mayor número de indicaciones del profesor para ayudar a asentar y sintetizar los conocimientos.

3.1.4 SESIÓN 3 POS-TEST

El Pos-test ha de ser lo más parecido posible al pre-test. Por ello, simplemente se han descargado las tareas. Se han sustraído algunos dibujos en la tarea de construcción y se han quitado figuras en la parte de identificación. También se ha quitado la necesidad de justificar las respuestas referentes a los conceptos de cuadrilátero y triángulo rectángulo, dirigiendo el foco de atención a las respuestas del ejercicio de identificación de rombos. Además, se han modificado el tamaño y la posición de las figuras con el fin de presentar las tareas con un nuevo aspecto. En la tarea de construcción se piden los dibujos de cuadrado, rombo, rectángulo y cuadrilátero. Y presentamos a continuación una captura de la tarea de identificación modificada:



TAREA 2

1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

a) b) c) d) e)

a) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...

b) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...

c) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...

d) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...

e) Sí ◯ No ◯ ¿Por qué?...

2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son cuadriláteros?

a) b) c) d)

a) Sí ◯ No ◯

b) Sí ◯ No ◯

c) Sí ◯ No ◯

d) Sí ◯ No ◯

3. ¿Cuáles de los siguientes triángulos son triángulos rectángulos?

a) b) c) d)

a) Sí ◯ No ◯

b) Sí ◯ No ◯

c) Sí ◯ No ◯

d) Sí ◯ No ◯

Imagen 13. Pos-test. Tarea de identificación

3.1.5 TEMPORALIZACIÓN Y METODOLOGÍA

La duración prevista del pre-test es de 22 minutos, la duración de la sesión prevista es de 45 minutos y la duración del pos-test es de 17 minutos. Hay una variación entre la intervención en un grupo y otro. En el grupo A se realiza el pos-test de manera inmediata mientras que en el grupo B se realiza una semana después. Con esta variación podremos analizar si los efectos del test perduran o son olvidados rápidamente.

Los test previo y posterior son de carácter individual mientras que la actividad central (el test) se realiza por parejas pues para superar la fase 3 (explicitación) los estudiantes han de expresar y compartir sus opiniones acerca de las estructuras observadas.

El rol del profesor tanto en el pre como en el pos-test adquiere una actitud pasiva pues e carácter investigador de ambos test no requiere dar indicaciones porque el objetivo es conseguir las ideas que los alumnos tienen sobre estos polígonos y en concreto del rombo sin ser adulteradas con indicaciones o aclaraciones del profesor. Sin embargo, durante la actividad con GeoGebra el profesor asume un rol activo que interactúa con los alumnos. En primer lugar da las pautas necesarias que los alumnos necesitan para realizar las actividades, posteriormente les deja trabajar libremente con las aplicaciones de GeoGebra. Y finalmente, el profesor va pasando por las mesas e interactuando con los alumnos intenta, mediante el diálogo, que afloren las ideas matemáticas a las que se pretenden llegar (fase 5 de integración de Van Hiele).

3.2 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA EXPERIMENTACIÓN

A continuación exponemos la descripción y análisis de la intervención. Para ello, diferenciamos tres partes. En primer lugar exponemos el análisis de la situación previa. Para ello utilizamos la herramienta pre-test con la que obtenemos datos del comportamiento de los alumnos frente a las tareas de construcción e identificación de polígonos. En segundo lugar exponemos nuestra actuación, constituida por una breve secuencia didáctica de la mano del SGD trabajado, GeoGebra. Finalmente exponemos el análisis de la situación tras la actuación. Para ello utilizamos la herramienta pos-test con la que obtenemos datos del comportamiento de los alumnos frente a las mismas tareas de construcción e identificación anteriores con la diferencia en este caso de las posibles influencias ejercidas por nuestra actuación. En el análisis de la tarea de identificación nos ceñimos al concepto del rombo que es el que trabajamos con nuestra actuación. Más adelante analizamos las situaciones de los conceptos de cuadrilátero y triángulo rectángulo más brevemente.

3.2.1 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN PREVIA

En la siguiente tabla exponemos los datos recogidos en la tarea de construcción del pre-test.

	DIBUJOS ESTEREOTIPADOS	DIBUJOS NO ESTEREOTIPADOS	DIBUJOS ERRÓNEOS
TRIÁNGULO	100%	-	-
CUADRILÁTERO	72%	28%	-
ROMBO	100%	-	-
TRIÁNGULO RECTÁNGULO	79,5%	2,5%	18%
CUADRADO	100%	-	-
RECTÁNGULO	91,5%	-	8,5%
TRIÁNGULO ISÓSCELES	59,5%	7,5%	23%

Tabla 3. Recopilación de los datos de la tarea de construcción en el pre-test.

Todos los alumnos han entendido la actividad y casi todos han dado respuestas aunque estereotipadas, correctas. Se observan dificultades matemáticas en las construcciones del triángulo rectángulo y en el triángulo isósceles y algunos casos aislados de errores en la del rectángulo.

Contrastando los datos obtenidos con las conjeturas previas se observa un acierto casi absoluto y podemos decir que las construcciones de los polígonos de los alumnos de 6º curso de Educación Primaria están fuertemente influenciadas por las representaciones gráficas estereotipadas. Todos los alumnos dibujan los conceptos de cuadrado, rombo y triángulo en su forma más estereotipada, mientras la mayoría de ellos también lo hace para el resto de conceptos propuestos, rectángulo, triángulo isósceles y triángulo rectángulo. A continuación analizamos la tarea de identificación del pre-test a través de la siguiente tabla.

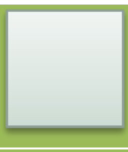
CASO	RESPUESTA CORRECTA	RESPUESTA INCORRECTA	NO RESPONDE
A) 	7,5%	92,5%	-
B) 	95%	2,5%	2,5%
C) 	64%	36%	-
D) 	66,5%	31%	2,5%
E) 	25,5%	72%	2,5%

Tabla 4. Obtención y ordenación de los datos obtenidos en la tarea de identificación del pre-test

El caso A) Dibujo de cuadrado no estereotipado, recibe 92,5% de respuestas erróneas pues la mayoría de los alumnos lo concibe como un cuadrado y no lo admite como rombo lo que se ajusta a nuestra predicción.

El caso B) Dibujo de rombo estereotipado. Con un porcentaje de 95% de respuestas correctas obtiene casi mayoría absoluta de identificación correcta lo que coincide con nuestra predicción. No tanto el caso C) Dibujo de cuadrado dispuesto “en forma de rombo” el cual obtiene un 64% de respuestas correctas y un 36 % de respuestas erróneas. Pues conjeturábamos un número de respuestas correctas similar a las del rombo del caso B). La mayor parte de las respuestas erróneas se justifican diciendo que “no es un rombo sino un cuadrado girado”. Aunque la posición del dibujo guarde relación con la representación estereotipada del rombo, es un cuadrado, y numerosos alumnos no lo admiten como rombo.

Para el caso D) Dibujo de rombo no estereotipado conjeturamos más respuestas erróneas que correctas pues al estar presentado en una posición poco común pensamos que lo identificarían más como romboide o simplemente no lo identificarían. Sin embargo ha recibido un 66,5 % de respuestas correctas mostrando que más de la mitad de los alumnos reconocen un rombo "tumbado" como ejemplo del mismo.

Para el caso E) Dibujo de "no rombo" conjeturamos altos niveles de respuestas erróneas pues el dibujo está representado en forma estereotipada de rombo y pensamos que lo identificarían equívocamente como tal. Y así ha sido; se ha considerado como rombo en un 72% de casos con el predominio de justificaciones del tipo: *Sí, porque tiene la forma de un rombo* (María).

A continuación analizamos las respuestas obtenidas en el ejercicio de identificación de los rombos. Para ello creamos una tabla que agrupa los datos y los compara. Para ello dividimos las respuestas en cuatro bloques, *comparación con la imagen conceptual-correctas, comparación con la imagen conceptual-incorrectas, utilización de la definición-correctas y utilización de la definición- incorrectas.* Para precisar el análisis proponemos categorías comunes dentro de cada bloque.

		A)	B)	C)	D)	E)
	CATEGORÍAS					
Compara con imagen conceptual - correcto	FORMA ESTEREOTIPADA DE ROMBO		31%	13%	19%	2,5%
	COMPARACIÓN CON UN ROMBOIDE		2,5%	2,5%		2,5%
	COMPARACION CON UN ROMBO		10%	5%	5%	2,5%
	POSICIÓN IRRELEVANTE	2,5%				
Compara con imagen conceptual - erróneo	FORMA ESTEREOTIPADA DE ROMBO	13%		8%	2,5%	20%
	COMPARACIÓN CON UN ROMBOIDE		2,5%		13%	2,5%
	COMPARACION CON UN ROMBO					5%
	COMPARACIÓN CON UN CUADRADO	41%		13%	5%	2,5%
Utiliza la definición	LADOS IGUAES 2 A 2		2,5%	2,5%	2%	2%

- correcto	4 LADOS IGUALES	2,5%	8%	5%	2,5%	8,5%
	TIENE 4 VÉRTICES		2,5%	2,5%	2,5%	
	2 VERTICES IGUALES		2,5%			
	TIENE 4 LADOS				2,5%	
Utiliza la definición - erróneo	LADOS IGUALES 2 A 2					5%
	4 LADOS IGUALES	2,5%				2,5%
	TIENE 4 VÉRTICES	2,5%				
	TIENE 4 ÁNGULOS		2,5%			2,5%
Sin justificar		33%	36%	41%	41%	38%
Otros		3%		7,5%	5%	4%

Tabla 5. Clasificación en categorías de las respuestas dadas en la tarea de identificación de rombos en el pre-test.

	A)	B)	C)	D)	E)
					
Compara con imagen conceptual - correcto	2,5%	43,5%	20,5%	24%	7,5%
Compara con imagen conceptual - erróneo	54%	2,5%	21%	20,5%	30%
Utiliza la definición - correcto	2,5%	15,5%	10%	9,5%	10,5%
Utiliza la definición - erróneo	5%	2,5%	-	-	10%
Sin justificar	33%	36%	41%	41%	38%
Otros	3%	-	7,5%	5%	4%

Tabla 6. Agrupación de las categorías de la tabla anterior para facilitar la comparación de las categorías utilización de la definición y comparación la imagen.

Para hacer un análisis lo más ordenado posible exponemos a continuación una interpretación de cada uno de los casos individualmente:

Caso A) Dibujo de un cuadrado estereotipado. En primer lugar observar que los porcentajes de respuestas correctas justificadas son muy bajos. Tan sólo un 2,5% de las respuestas son correctas aludiendo a que la posición de la figura es irrelevante. Y otro 2,5% de respuestas correctas que aluden la igualdad de lados. Destacar la categoría *compara con su imagen conceptual-erróneo-comparación con un cuadrado* que obtiene 41% de las respuestas. Lo que quiere decir que en un 41% de los casos, los alumnos, además de seleccionar el dibujo como "no rombo" han justificado su respuesta asumiendo que el dibujo representa un cuadrado. Por otro lado, la categoría *compara con imagen conceptual-erróneo-forma estereotipada de rombo,* recibe un 13% del total de respuestas. Respuestas del tipo "No, porque no tiene la forma de rombo" que muestran la importancia de la imagen conceptual en la tarea de identificación. En tercer lugar destacar el alto porcentaje de respuestas sin justificar indicativo de desconocimiento del concepto.

Caso B) Dibujo de un rombo estereotipado. Observamos que los porcentajes de respuestas correctas justificadas son bastante altos lo que muestra una buena identificación de la figura. Destaca ante todas la categoría *compara con imagen conceptual-correcto-forma estereotipada de rombo,* que recibe un 31% de las respuestas totales. Respuestas del tipo "Sí, porque tiene la forma de rombo" son populares en el caso B. Lo que quiere decir que la mayoría posee el dibujo estereotipado de rombo en su imagen conceptual. Destacamos la categoría *utiliza la definición del concepto- correcto-4 lados iguales,* que agrupa 8% de las respuestas.

Caso C) Dibujo de un cuadrado en la posición estereotipada de rombo. Observamos que la categoría *compara con la imagen conceptual-correcto-forma estereotipada de rombo* agrupa el 13% de las respuestas. Lo que quiere decir que el ejemplo presentado en el caso C, aunque en menor medida que el caso B, también es reconocido como un rombo por su forma. Por otro lado la categoría *compara con imagen conceptual-erróneo-comparación con un cuadrado* obtiene otro 13% de las respuestas, menos que el 41% para el caso A, pero también indica que los alumnos no entienden el cuadrado como caso particular de rombo.

Caso D) Dibujo de rombo no estereotipado. Destacan las categorías *compara con la imagen-correcto-forma estereotipada* que agrupa un 19% de las respuestas y *comparación con la imagen-incorrecta- comparación con un romboide,* 13% de las respuestas. Como en los casos B y C predomina la alusión a la forma estereotipada de rombo.

Caso E) Dibujo de "No rombo". Predomina la categoría *compara con la imagen-erróneo-forma estereotipada de rombo* que agrupa el 20% de las respuestas. En esta categoría se agrupan respuestas del tipo “Sí porque tiene forma de rombo”, lo que muestra tanto la influencia negativa que tienen las representaciones estereotipadas, como el desconocimiento del concepto y de su definición. Por el lado contrario agrupamos 8,5% de las respuestas en la categoría *utiliza la definición-correcto-4 lados iguales,* muestra de unos cuantos casos que dan respuestas del tipo “No es rombo porque no tiene los 4 lados iguales”, indicativo de conocimiento del concepto y sus propiedades.

Destacamos las categorías tanto para las respuestas correctas y erróneas de *forma estereotipada de rombo* las cuales agrupan porcentajes de 15% (caso A), 31% (caso B), 13% y 8% (caso C), 15% (caso D) y 20% (caso E). Por lo que se convierte en la categoría más popular dentro de la *comparación con la imagen conceptual*. Destacar también la categoría *comparación con un cuadrado* para los casos A y C (dibujos de cuadrado). Y finalmente, la categoría aunque no muy popular, importante, *utilización de la definición-correctas-4 lados iguales* que aunque en pocas ocasiones se da en todos los casos, 2,5%, 8%, 5%, 2,5% y 8,5% respectivamente.

3.2.2 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA ACTUACIÓN CON GEOGEBRA

Nuestra secuencia didáctica con GeoGebra transcurre con fluidez. Sólo son necesarias unas breves indicaciones sobre la tarea a realizar y explicaciones sobre la utilización del SGD. Se realizan las actividades señaladas anteriormente y en el capítulo 2: *Puzle con rombos fijos*, *Puzle con rombos 2* y *Rombos mentirosos*. Para llevarlas a cabo los alumnos se colocan por parejas. Cada pareja tiene un Tablet PC y siguen las instrucciones del profesor. Las actividades se van desarrollando en paralelo a la hoja de preguntas propuestas para cada una de ellas. Cuando terminan cada tarea con GeoGebra tienen que completar las preguntas de la hoja física antes de pasar a la siguiente actividad con GeoGebra.

En primer lugar ingresan en la página oficial de GeoGebra. Buscan el libro de trabajo de elaboración propia llamado “*Hispanidad”* en el que se encuentran los tres applets: https://tube.geogebra.org/material/simple/id/2358243. Van completando las tres actividades mientras el profesor va pasando por las mesas resolviendo dudas y aportando las indicaciones precisas. La temporalización de la sesión se ajusta a la planeada. En algunos casos los alumnos terminan antes la tarea y se les manda realizar la actividad 5 (ver capítulo 2).

Destacamos puntos fuertes de la sesión como por ejemplo el no tener que descargar ni instalar el software en cada Tablet porque los recursos colgados en la web de GeoGebra permiten abrirse y ser manipulados desde la propia web. Un punto negativo como los Tablet PC. La pantalla de los mismos es demasiado pequeña lo que dificulta la visualización de los applets. En vez de ratón (idóneo e incluso fundamental para la utilización de GeoGebra), poseen un rectángulo táctil, y un lápiz para utilizarlo directamente en la pantalla táctil (no tan precisos como el ratón).

Sin embargo, no se observan dificultades matemáticas que impidan la realización de las actividades con GeoGebra. No tienen problemas para ejecutar los movimientos que requieren los applets, y todos terminan correctamente las actividades. Sin embargo en la hoja de preguntas que se realiza paralelamente a las actividades con GeoGebra sí se aprecian mejor las dificultades matemáticas existentes.

Se observan dificultades matemáticas en todas las preguntas porque no están acostumbrados a utilizar sus conocimientos previos, porque no tienen bien interiorizados los conceptos a los que refieren las preguntas… Muchas respuestas denotan falta de conocimiento del concepto de rombo.

Por otro lado observamos dificultades de expresión en la mayoría de los casos, aunque los alumnos se encuentran en el nivel 2 de Van Hiele (análisis) y utilizan un vocabulario apropiado para componentes y relaciones (por ejemplo, "lados opuestos", "lados iguales dos a dos", "las diagonales se cortan en el punto medio", etc.) los alumnos presentan errores de expresión lingüística; por ejemplo “No, porque no aunque lo aumentes va a seguir igual” (Irune y Marta).

A continuación analizamos la hoja de preguntas: ACTIVIDAD 1 *Puzle con rombos.* Proponemos las siguientes preguntas: *¿Qué características de las figuras son importantes para que sean rombos?* y *¿Cuáles no son importantes?,* en las que los alumnos tienen que pensar en las propiedades relevantes e irrelevantes de los rombos; con ello pretendemos favorecer un acercamiento a la definición del concepto. A la pregunta *¿Qué características de las figuras son importantes para que sean rombos?,* dan respuestas que aluden a la forma estereotipada de rombo como por ejemplo la que dan Irune y Marta, “Tiene un vértice arriba, otro abajo, otro a la derecha y otro a la izquierda” o la dada por Saif y Dylan, “Que tenga cuatro puntas que dos puntas sean más alargadas que las otras”. Observamos respuestas referentes a la igualdad de lados como la de Javier y Cristian, “Que tengan 4 lados iguales y no sea cuadrado” (excluyen al cuadrado) o la que dan Alae y Patricia, “Que tengan cuatro lados, 4 ángulos y 4 vértices. Que sea un cuadrado, que los lados sean iguales”.

Para la pregunta *¿Cuáles no son importantes?,* encontramos numerosas respuestas correctas referentes a características irrelevantes (circunstanciales) como el tamaño y la posición. Como por ejemplo la que dan Marta y Diego, “Que sean grandes o pequeños. Que estén girados”. O la que proporcionan Alae y Patricia “Su posición y su tamaño”. O “La anchura y la largura” por Fasely y Shyra. “Que sean más grandes o más pequeños” (tamaño). “La posición en la que estén” dicen Yasser y Cristina. “El tamaño, la colocación” dicen Adrián y Diego.

ACTIVIDAD 2 *Puzle con rombos 2.* Proponemos una pregunta paralela a la actividad con GeoGebra que dice lo siguiente: *Habéis cambiado el aspecto de los rombos, ¿ha dejado alguno de ser un rombo? Explicad vuestra respuesta.* Buscamos con ella que los alumnos piensen en las propiedades relevantes e irrelevantes del concepto de rombo. En la mayoría de los casos los alumnos responden que en ninguno de los casos, ningún rombo ha dejado de serlo por manipularlo y moverlo. Como la respuesta de Marta y Rodrigo “No, porque no importa de qué forma estén”, o la que aportan Selena y Lucía “No porque lo pongas como lo pongas en la dirección que sea no dejan de ser un rombo”, o Faseli y Shyra “No porque si lo giras o lo cambias de lado sigue siendo un rombo”. En este ejercicio todos los alumnos manipulan los rombos y hay momentos en los que los cuatro ángulos del cuadrilátero son rectos, y se nos presenta el cuadrado como tipo particular de rombo. Si tenemos en cuenta que en muchos casos los alumnos han manipulado los rombos llegando a visualizar en pantalla un cuadrado y que aseguran que los rombos no han dejado de serlo, entendemos que conciben el cuadrado como rombo, sin embargo cuando son preguntados explícitamente por ello lo rechazan. La clasificación particional de los cuadriláteros está demasiado impresa en la mente de los alumnos pues aunque observen que el cuadrado cumple las propiedades de rombo, lo rechazan como tal, y lo conciben como excepción.

Sin embargo, en algunos casos se repite el error de no incluir el cuadrado como tipo particular de rombo, pues algunas parejas responden a la pregunta anterior asintiendo: “Sí un cuadrado que lo hemos puesto en el centro” (Sara y Nerea). Observamos casos en los que se hace alusión a la forma estereotipada del rombo como por ejemplo Marko y Daniel que dicen, “No, porque todos tenían la forma del rombo”, o en la respuesta de Adrián y Diego “No porque siguen teniendo los lados iguales y aunque recto no sea un rombo si giras la cabeza sí que lo es”. Exceptuando en tres casos, los alumnos afirman que los rombos no han dejado de ser rombos, y aunque son conscientes de que al cambiarlos de posición y al modificar las dimensiones de los rombos van a seguir siéndolo porque sus propiedades relevantes se van a mantener, tienen muchas dificultades tanto para dar una justificación correcta como para expresar correctamente su justificación.

ACTIVIDAD 3 *Rombos mentirosos.* De las 4 representaciones del rombo que se presentan sólo guarda sus características relevantes al ser manipulado el rombo nº3. El resto pierde alguna de ellas. El primero pierde paralelismo entre sus lados opuestos e igualdad de lados, y el segundo y cuarto son paralelogramos que pierden la igualdad de lados. De los alumnos de sexto curso de primaria identifican correctamente las cuatro figuras 6 parejas de 20. Lo que equivale a un 30% de casos correctos. Traducimos estos datos en que la mayoría de los alumnos de sexto curso de educación primaria no tienen claro el concepto de rombo. Muchos de ellos no diferencian entre un romboide en posición estereotipada de rombo y un rombo.

Por otro lado sólo, en 2 de los 20 casos se concibe el rombo verdadero como falso y en ambos se justifica aludiendo a que al modificarse se puede formar un cuadrado: “No, porque cuando lo mueves se hace un cuadrado” (Arturo y María) y “Sí se puede hacer un cuadrado” (Ilías y Javier).

3.2.3 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN POSTERIOR

Continuamos el análisis presentando la situación posterior a nuestra actuación. Para ello mostramos los datos obtenidos a través del pos-test y los contrastamos con los obtenidos por el pre-test. Como señalamos anteriormente, en el grupo A se lleva a cabo un pos-test inmediato a 21 alumnos y en el grupo B se lleva a cabo un pos-test una semana después de la actuación. Por ello para el estudio de las tareas de construcción e identificación vamos a diferenciar 3 test (pre-test, pos-test inmediato, y pos-test no inmediato). Comenzamos con la tarea de construcción. Para ello elaboramos la siguiente tabla que agrupa y compara los datos de los tres test. En el pre-test se pedía la construcción de los conceptos cuadrilátero, cuadrado, rectángulo, rombo, triángulo, triángulo isósceles y triángulo equilátero. Para el pos-test, hemos quitado las construcciones de los tres triángulos por lo que en la siguiente tabla sólo se comparan los datos obtenidos en las construcciones del cuadrilátero, cuadrado, rombo y rectángulo:

TAREA DE CONSTRUCCIÓN	TEST	ESTEREOTIPADA	NO ESTEREOT.	ERRÓNEA
CUADRILÁTERO	Previo	72%	28%	-
	Post. Inmediato	86%	14%	-
	Posterior No I.	84%	16%	-
ROMBO	Previo	100%	-	-
	Post. Inmediato	100%	-	-
	Posterior No I.	100%	-	-
RECTÁNGULO	Previo	91,5	-	8.5%
	Post. Inmediato	100%	-	-
	Posterior No I.	89%	11%	-
CUADRADO	Previo	100%	-	-
	Post. Inmediato	100%	-	-
	Posterior No I.	100%	-	-

Tabla 7. Comparativa de la tarea de construcción entre los 3 test (previo, posterior inmediato y posterior no inmediato)

Observamos la popularidad de las construcciones estereotipadas frente las construcciones no estereotipadas de los conceptos en los tres test. En las construcciones del rombo y del cuadrado no se han dado variaciones, todas las construcciones de estos polígonos han sido estereotipadas. Observamos en el caso del cuadrilátero que se han reducido el número de construcciones estereotipadas, desde un 28% previo a la actuación a un 14 y 16% posteriores. En cuanto al rectángulo observamos que se han corregido algunos casos de error producidos en el test previo, y se ha registrado alguna construcción sin estereotipar.

Tras analizar la situación posterior a la actuación referente a la construcción del rombo continuamos con el estudio de la tarea de identificación del rombo. Para ello elaboramos una tabla que agrupa y compara los datos obtenidos en las tareas de identificación de los tres test. Recopilamos las respuestas en tres categorías *correctas*, *incorrectas* y *sin responder*:

Caso	TEST	Respuesta correcta	Respuesta incorrecta	No responde
A) 	Previo	7,5%	92,5%	-
	Post. Inmediato	24%	76%	-
	Posterior No I.	22%	78%	-
B) 	Previo	95%	2,5%	2,5%
	Post. Inmediato	95%	5%	-
	Posterior No I.	95%	5%	-
C) 	Previo	64%	36%	-
	Post. Inmediato	38%	62%	-
	Posterior No I.	44%	56%	
D) 	Previo	66,5%	31%	2,5%
	Post. Inmediato	81%	19%	-
	Posterior No I.	83,5	16,5%	
E) 	Previo	25,5%	72%	2,5%
	Post. Inmediato	47,5%	52,5%	-
	Posterior No I.	39%	61%	-

Tabla 8. Ordenación y comparación de los datos obtenidos en la tarea de identificación para los tres test en el rombo.

Caso A) Representación gráfica más estereotipada del cuadrado. Recibe unos porcentajes de 7,5% de respuestas correctas antes de la secuencia didáctica frente a 24 y 22% de respuestas correctas en los test posteriores. Los datos muestran que más alumnos han elegido la representación gráfica estereotipada del cuadrado como rombo tras la secuencia didáctica. Indica la integración del cuadrado como tipo particular de rombo por parte de algunos alumnos.

El caso C) Cuadrado en posición estereotipada de rombo. Recibe unos porcentajes de 68% de respuestas correctas en el test previo frente a unos porcentajes de 38 y 44% en los test posteriores. Estos datos muestran que esta representación se ha identificado más como cuadrado y menos como rombo tras la secuencia didáctica. Estos datos hacen que nos cuestionemos el progreso señalado anteriormente con el caso A de la integración del cuadrado como tipo particular de rombo. Pues los datos indican en primer lugar que en algunos casos se ha integrado el dibujo de cuadrado como tipo particular de rombo. Y en segundo lugar que se ha fortalecido la no inclusión del cuadrado como tipo particular de rombo. Tal contradicción entre el caso A y el caso C supone que nuestra actuación posee limitaciones didácticas.

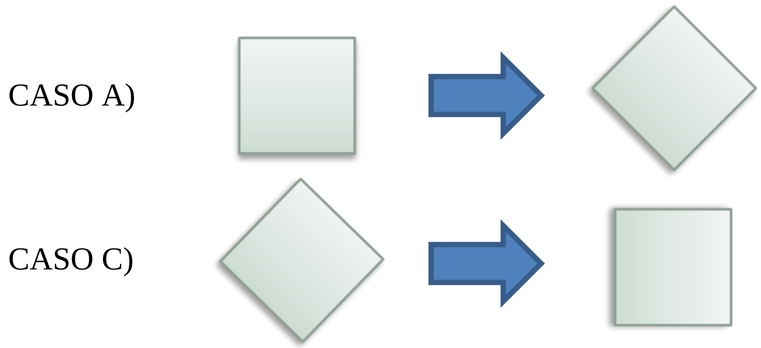


Imagen 13. Mientras el cuadrado estereotipado se gira y pasa a concebirse como rombo, el cuadrado en posición estereotipada de rombo se gira y pasa a entenderse como cuadrado.

En la imagen anterior exponemos nuestra teoría acerca del comportamiento de los alumnos. Tratan de forma independiente los casos A y C, sin identificar que ambos polígonos son iguales. En el caso A, los alumnos manipulan mentalmente el cuadrado girándolo y observan que "se forma un rombo", es por ello que en el pos-test más alumnos lo identifiquen como tal. En el caso C los alumnos realizarían el mismo giro de forma mental y observan que "se forma un cuadrado", y por ello lo identifican como tal. Les hemos pedido en las actividades con geogebra que giren las figuras, y eso es lo que los alumnos han hecho.

Caso B) Representación más estereotipada del rombo obtiene en los tres test el porcentaje de 95% de respuestas correctas. Es el porcentaje más alto de identificación correcta seguido del 83,5% de identificaciones correctas en el pos-test del caso D, indicativa de que la posición estereotipada en el rombo sigue siendo favorita para su identificación.

El caso D) Dibujo de un rombo “tumbado”, obtiene un porcentaje de respuestas correctas en el test previo de 66,5 % y en los test posteriores se obtienen porcentajes de 81 y 83,5 % respectivamente. En este caso sí que podemos afirmar que el factor irrelevante de la orientación del rombo se ha considerado como irrelevante en más ocasiones tras la secuencia didáctica.

El caso E) Dibujo de “no rombo” en forma estereotipada de rombo obtienen porcentajes de 25,5%, 47,5% y 39% de respuestas correctas respectivamente. Se observa que su identificación ha mejorado gracias a la secuencia didáctica. Por otro lado observamos que una semana después las respuestas correctas han disminuido en casi 10 puntos.

A continuación continuamos con el estudio de las respuestas de la tarea de identificación del rombo. Proponemos la misma tabla que utilizamos para estudiar las respuestas de la situación previa pero en este caso incluimos las respuestas de los tres test:

		A)			B)			C)			D)			E)		
																
	CATEGORÍAS	PR	PSI	PSP	PR	PSI	PSP	PR	PSI	PSP	PR	PSI	PSP	PR	PSI	PSP
Compara con imagen conceptual - correcto	FORMA ESTEREOTIPADA DE ROMBO		5%	5%	31%	20%	33%	13%	5%	16%	19%	9,5%	22%	2,5%		11%
	POSICIÓN IRRELEVANTE	2,5%	23%	20%		14%	5%		5%	5%		11%	5%			
	COMPARACIÓN CON UN ROMBOIDE				2,5%			2,5%				5%	5%	2,5%		
	COMPARACION CON UN ROMBO				10%		-	5%			5%		5%	2,5%		
	COMPARACION CON CUADRILÁTERO														5%	
	COMPARACION CON UN CUADRADO									5%					4%	
Compara con imagen conceptual	FORMA ESTEREOTIPADA DE ROMBO	13%		5%				8%			2,5%		5%	20%	5%	16%
	POSICIÓN IRRELEVANTE														9,5%	

- erróneo	COMPARACIÓN CON UN ROMBOIDE				2,5%						13%	9,5%	5%	2,5%		
	COMPARACION CON UN ROMBO													5%		4%
	COMPARACIÓN CON UN CUADRADO	41%	30%	35%				13%	33%	39%	5%			2,5%		
Utiliza la definición - correcto	LADOS IGUAES 2 A 2				2,5%	9,5%	5%	2,5%			2%	9,5%		2%		
	4 LADOS IGUALES	2,5%	20%	10%	8%	29%	11%	5%	9,5%	5%	2,5%	9,5%	11%	8,5%	14%	5%
	TIENE 4 VÉRTICES				2,5%			2,5%	5%		2,5%					
	2 VERTICES IGUALES Y 2 DESIGUALES				2,5%											
	TIENE 4 LADOS						5%				2,5%	5%	5%			
Utiliza la definición - erróneo	LADOS IGUALES 2 A 2													5%	5%	
	4 LADOS IGUALES	2,5%							9,5%					2,5%		5%
	TIENE 4 VÉRTICES	2,5%													9,5%	
	TIENE 4 ÁNGULOS				2,5%									2,5%		5%
Sin justificar		33%	19%	18%	36%	20%	25%	41%	19%	19%	41%	21%	26%	38%	24%	27%
Otros / imprecisas		3%	3%	7%	-	7,5%	16%	7,5%	14%	11%	5%	19%	11%	4%	24%	27%

Tabla 9. Clasificación en categorías de las justificaciones dadas por los alumnos en la tarea de identificación de rombos. Comparativa de pre-test, pos-test inmediato y pos-test una semana después.

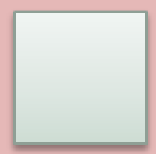
	A)			B)			C)			D)			E)		
															
Categorías	PR	**PSI**	**PSP**	PR	**PSI**	**PSP**	PR	**PSI**	**PSP**	PR	**PSI**	**PSP**	PR	**PSI**	**PSP**
Compara con imagen conceptual	56,5%	58%	65%	46%%	34%	38%	41,5%	43%	65%	44,5%	35%	47%	37,5%	23,5%	31%
Utiliza la definición	7,5%	20%	10%	18%	38,5%	21%	10%	24%	5%	9,5%	24%	16%	20,5%	28,5%	15%
Sin justificar	33%	19%	18%	36%	20%	25%	41%	19%	19%	41%	21%	26%	38%	24%	27%
Otros / imprecisas	3%	3%	7%	-	7,5%	16%	7,5%	14%	11%	5%	19%	11%	4%	24%	27%

Tabla 10. Reducción de la anterior que agrupa las categorías de la tarea de identificación de los rombos y permite comparar con mayor facilidad entre la comparación de la imagen conceptual y la utilización de la definición y a su vez entre los tres test.

Caso A) Dibujo de cuadrado estereotipado. Destacamos la categoría *compara con la imagen-posición irrelevante-correcta* que evoluciona de 2,5% en el test previo a 23% y 20% en los test posteriores. Respuestas del tipo, "Sí que es un rombo aunque no esté girado" indican que más alumnos consideran la posición como característica irrelevante, meramente circunstancial. Destacamos la categoría *comparación con la imagen-erróneo-comparación con un cuadrado* para la que los porcentajes evolucionan desde 41% en el test previo a 30% y 35% en los test posteriores. Observamos una pequeña evolución positiva hacia la concepción del cuadrado como tipo particular de rombo. Por último, destacamos la categoría *utilización de la imagen conceptual-4 lados iguales-correcto* que recibe los porcentajes 2,5%, 20% y 10% respectivamente indicando una evolución positiva hacia la definición del concepto. Señalar que los progresos se dan en mayor medida en el test inmediato que en el test una semana después

La concepción del caso A (dibujo de cuadrado estereotipado) mejora en todos los aspectos tras la actuación, se alude más a la posición irrelevante, se hace en menos ocasiones la comparación con un cuadrado y se alude en más ocasiones a la igualdad de sus 4 lados. Aunque los progresos también se mantienen una semana después, se obtienen resultados considerablemente peores.

Caso B) Dibujo estereotipado de rombo. Destacamos la categoría *comparación con la imagen-forma estereotipada-correcto* que recibe los porcentajes 31%, 20% y 33% respectivamente. Aunque parecidos, observamos una evolución positiva en unos cuantos alumnos que se pierde una semana después e incluso los alumnos aluden más a la forma estereotipada que en la situación previa a la actuación. Destacar la aparición de la posición irrelevante 14% (inmediato) y 5% (semana después) y la categoría de *utilización de la definición-correcto* que recibe 8%, 29% y 11%, mostrando una clara evolución en el test inmediato que se pierde una semana después.

La concepción del caso B (rombo estereotipado) también mejora tras la actuación, pues se alude en menor medida a su forma estereotipada y más a la posición irrelevante y además se evoluciona positivamente hacia la definición del concepto. Sin embargo dicho progreso no sólo no perdura una semana después sino que en algunos casos los resultados son peores que los de la situación previa.

Caso C) Dibujo de cuadrado en "posición de rombo". Destacamos la categoría *comparación con la imagen-comparación con un cuadrado-erróneo* que recibe 13%, 33% y 39% respectivamente. Al contrario que el Caso A que progresa hacia la inclusión del cuadrado como tipo particular de rombo, este caso evoluciona negativamente, hacia la exclusión del cuadrado como tipo de rombo.

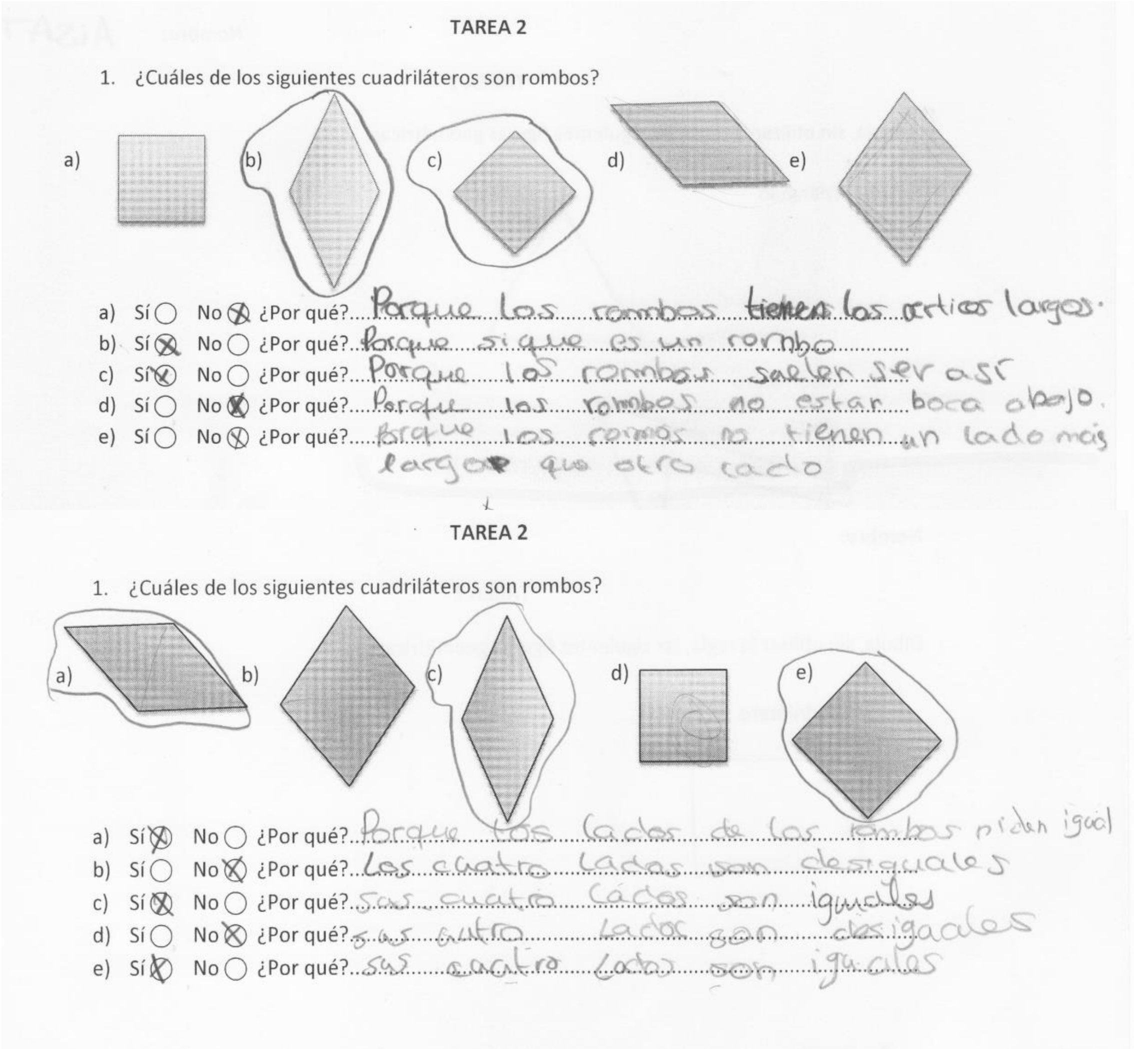
Caso D) Dibujo de rombo “tumbado”. Destacar la evolución de la forma estereotipada de rombo (19%, 9,5% y 22% respectivamente) en la que se observa una pequeña evolución positiva pero que se pierde una semana después. Destacar también la *utilización de la definición-correcta* (2,5%, 9,5% y 11% respectivamente) en la que señalamos un pequeño progreso hacia la utilización de la definición del concepto que perdura una semana después.

Por último estudiamos los datos obtenidos en el caso E) Contraejemplo de rombo colocado “en forma de rombo”. Para este caso destacamos la categoría *comparación con la imagen-posición estereotipada de rombo-erróneo* (respuestas del tipo, “Sí es rombo porque tiene la forma”) que recibe unos porcentajes de 20%, 5% y 16% respectivamente, que muestran una evolución positiva en el test inmediato que se desvanece tras una semana.

Como puntos positivos señalar que los datos obtenidos muestran una mejoría general en la concepción del rombo en los alumnos de sexto de primaria. Han disminuido las alusiones a la forma estereotipada de rombo, han aumentado las alusiones a la posición irrelevante de las figuras, ha aumentado la utilización correcta de la definición del concepto. Sin embargo, dichos progresos mencionados, no se mantienen en el tiempo y en algunos casos se pierden una semana después. Además, los datos obtenidos muestran que aunque haya ganado terreno la utilización de la definición en referencia a la situación previa a la actuación, los alumnos de sexto de primaria identifican los ejemplos haciendo comparaciones con sus imágenes conceptuales.

A continuación elegimos algunos casos particulares de alumnos y analizamos su evolución de forma individualizada. Observamos dos sujetos que evolucionan y la secuencia didáctica les ha resultado útil y dos casos en los que la evolución ha sido nula o negativa y nuestra actuación apenas les ha servido para mejorar su imagen conceptual de rombo.

AISATU


TAREA 2

1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

a) b) c) d) e)

a) Sí ◯ No ⊗ ¿Por qué? Porque los rombos tienen los [illegible] largos.
b) Sí ⊗ No ◯ ¿Por qué? Porque sí que es un rombo
c) Sí ⊗ No ◯ ¿Por qué? Porque los rombos suelen ser asi
d) Sí ◯ No ⊗ ¿Por qué? Porque los rombos no estan boca abajo.
e) Sí ◯ No ⊗ ¿Por qué? Porque los romos no tienen un lado más largo que otro lado

TAREA 2

1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

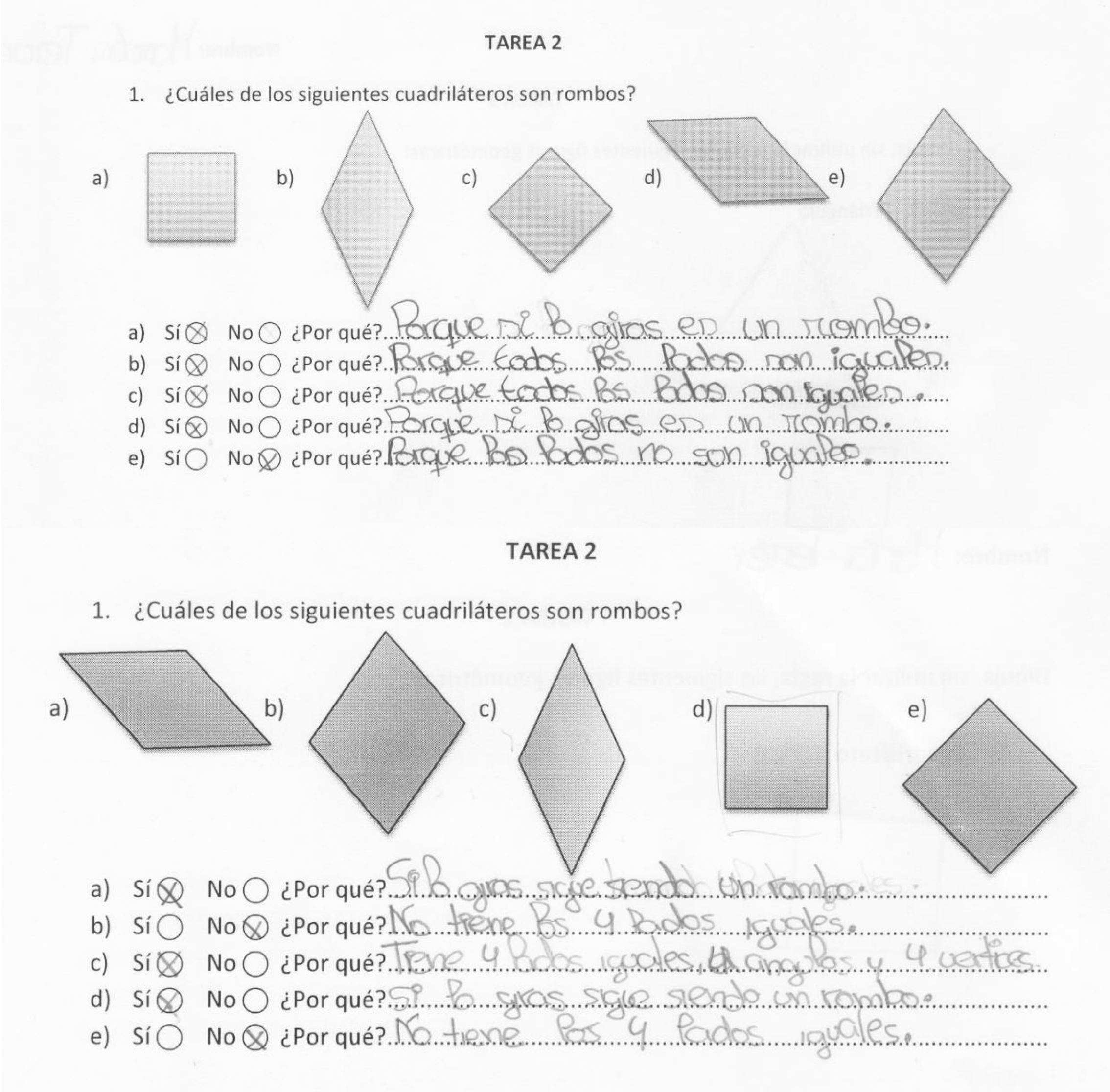
a) b) c) d) e)

a) Sí ⊗ No ◯ ¿Por qué? Porque los lados de los rombos miden igual
b) Sí ◯ No ⊗ ¿Por qué? Los cuatro lados son desiguales
c) Sí ⊗ No ◯ ¿Por qué? Sus cuatro lados son iguales
d) Sí ◯ No ⊗ ¿Por qué? sus cuatro lados son desiguales
e) Sí ⊗ No ◯ ¿Por qué? sus cuatro lados son iguales

Imagen 14. Comparación de respuestas entre pre-test y pos-test Aisatu.

Observamos que el sujeto evoluciona hacia la definición del concepto pues pasa de justificar las preguntas aludiendo a la forma estereotipada del rombo a justificarlas mediante la definición. Por ejemplo para el rombo estereotipado: De "Sí, porque sí que es un rombo" a "Sí, porque sus cuatro lados son iguales". Para el dibujo de cuadrado "en posición de rombo": de "Sí, porque los rombos suelen ser así" a "Sí, porque sus cuadro lados son iguales". O para el rombo sin estereotipar: de "No, porque los rombos no están bocabajo" a "Sí, porque los lados de los rombos miden igual"

MARTA



TAREA 2

1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

a) b) c) d) e)

a) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Porque si lo giras es un rombo.
b) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Porque todos los lados son iguales.
c) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Porque todos los lados son iguales.
d) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Porque si lo giras es un rombo.
e) Sí ○ No ⊗ ¿Por qué? Porque los lados no son iguales.

TAREA 2

1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

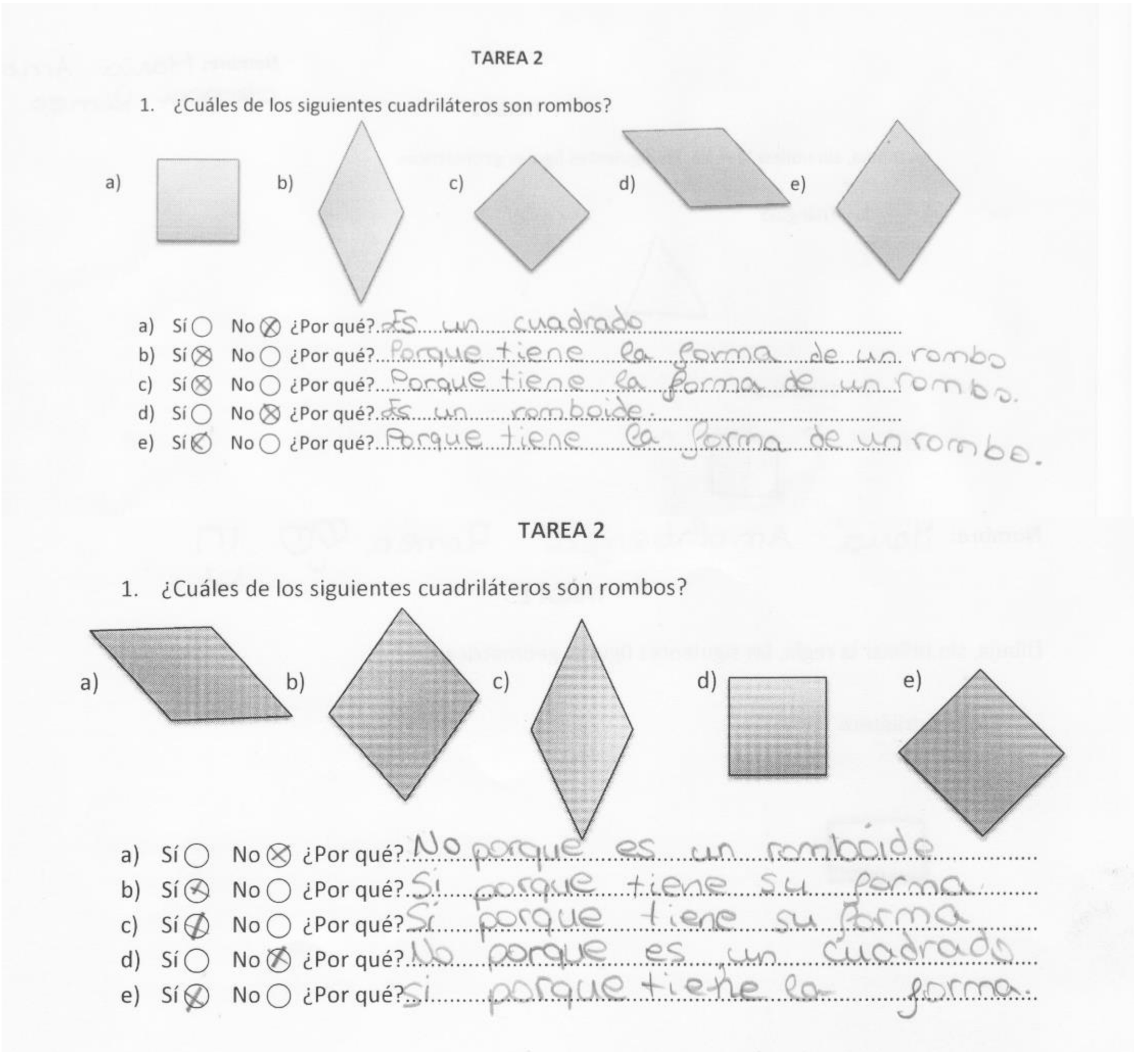
a) b) c) d) e)

a) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Si lo giras sigue siendo un rombo.
b) Sí ○ No ⊗ ¿Por qué? No tiene los 4 lados iguales.
c) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Tiene 4 lados iguales, 4 ángulos y 4 vértices.
d) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Si lo giras sigue siendo un rombo.
e) Sí ○ No ⊗ ¿Por qué? No tiene los 4 lados iguales.

Imagen 15. Comparación de respuestas entre pre-test y pos-test, Marta.

El sujeto evoluciona desde una concepción del rombo en que la posición es relevante hacia una nueva concepción en no lo es. Podemos observarlo en la representación del cuadrado estereotipado: de “Sí, porque si lo giras es un rombo” (posición relevante) pasa a “Sí, si lo giras sigue siendo un rombo” (posición irrelevante). Observamos las mismas respuestas para la representación del rombo “tumbado”. En el resto de casos justifica sus respuestas mediante la definición de rombo (aludiendo a la igualdad de lados).

MARÍA



TAREA 2

1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

a) b) c) d) e)

a) Sí ○ No ⊗ ¿Por qué? Es un cuadrado

b) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Porque tiene la forma de un rombo

c) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Porque tiene la forma de un rombo.

d) Sí ○ No ⊗ ¿Por qué? Es un romboide.

e) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Porque tiene la forma de un rombo.

TAREA 2

1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?

a) b) c) d) e)

a) Sí ○ No ⊗ ¿Por qué? No porque es un romboide

b) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Si porque tiene su forma

c) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Sí porque tiene su forma

d) Sí ○ No ⊗ ¿Por qué? No porque es un cuadrado

e) Sí ⊗ No ○ ¿Por qué? Si porque tiete la forma.

Imagen 16. Comparación de respuestas entre pre-test y pos-test, María.

En este caso el sujeto justifica las respuestas prácticamente igual en el test previo que en el posterior por lo que asumimos que no ha habido evolución. Sigue aludiendo a la forma estereotipada de rombo en los tres casos posibles. La representación del rombo en la forma estereotipada de cuadrado sigue siendo un cuadrado. Y el rombo “tumbado” sigue siendo un romboide.

MARTA 2

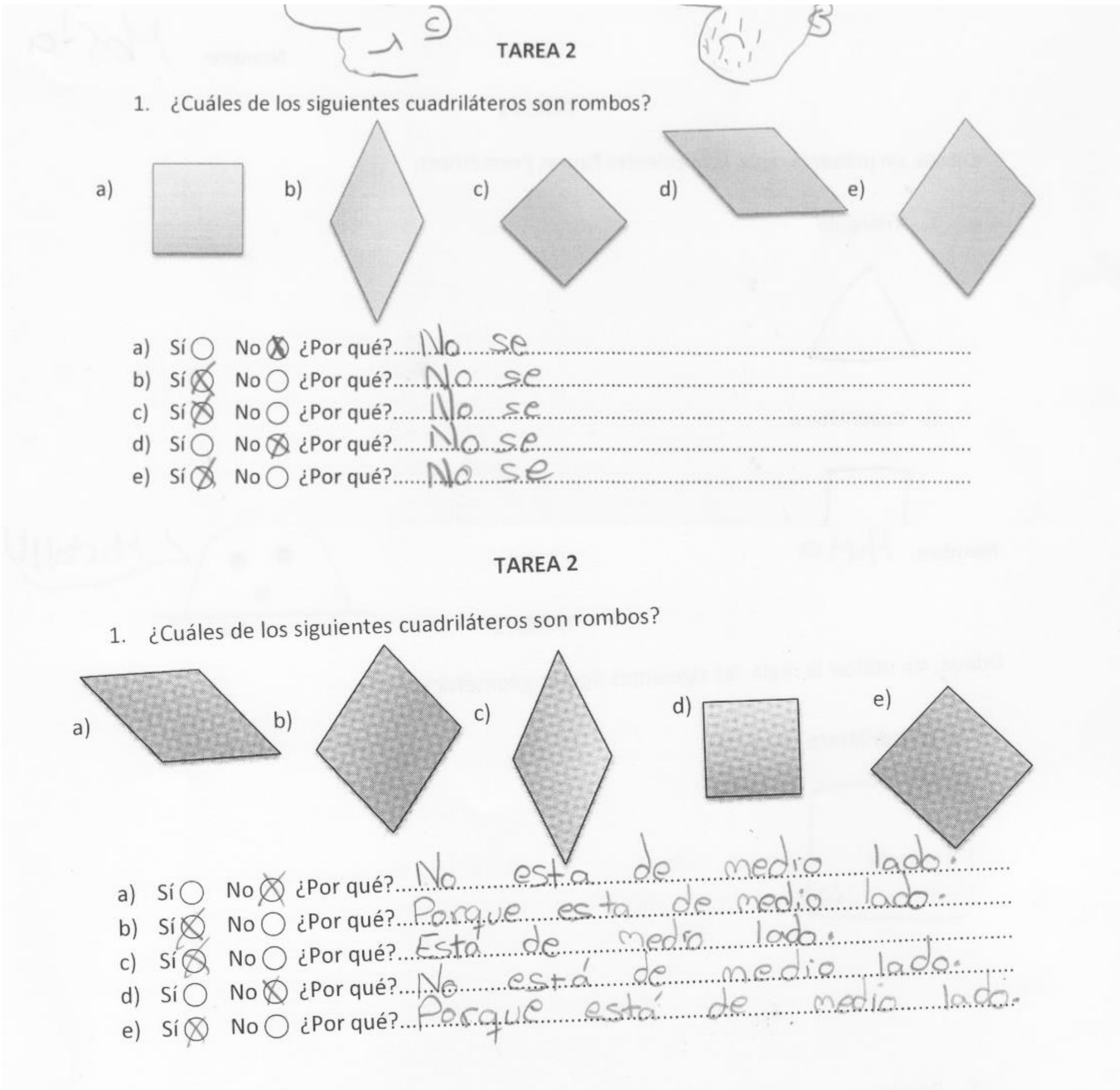


Imagen 17. Comparación de respuestas entre pre-test y pos-test, Marta 2.

Observamos que las respuestas evolucionan hacia la alusión estereotipada del rombo. En ambos test identifica como rombos los tres dibujos estereotipados (incluyendo el "no rombo"). El en primer test, no justifica la elección y en el segundo justifica todos los casos aludiendo a la forma estereotipada del rombo.

3.2.4 *ANÁLISIS DE LOS CONCEPTOS DE CUADRILÁTERO Y TRIÁNGULO RECTÁNGULO*

A continuación presentamos un estudio de la evolución de los conceptos de cuadrilátero y triángulo rectángulo. Son análisis más breves y menos profundos porque se basan en conceptos no trabajados en la secuencia didáctica. Sin embargo se han añadido para estudiar una posible transferencia de conocimientos desde unos conceptos a otros. Suponemos que los alumnos aprenden que hay características irrelevantes que son puramente circunstanciales como la posición y el tamaño en el concepto de rombo. En ese caso analizamos otros conceptos para comprobar si se han transferido los dichos conocimientos a otros conceptos sin ser trabajados. En el siguiente estudio procedemos presentando tablas comparativas de los tres test. En la siguiente tabla agrupamos, analizamos e interpretamos los datos obtenidos en la tarea de identificación de cuadriláteros.

CASO	TEST	RESPUESTA CORRECTA	RESPUESTA INCORRECTA	NO RESPONDE
 A)	1º	74%	23%	2,5%
	2º	57%	43 %	-
	3º	56%	44%	-
 B)	1º	90%	7,5%	2,5%
	2º	100%	-	-
	3º	100%	-	-
 C)	1º	64%	33,5%	2,5%
	2º	67%	33 %	-
	3º	78%	22%	-
 D)	1º	87,5%	5%	7,5%
	2º	95%	5%	-
	3º	100%	-	-

Tabla 11. Ordenación y comparación de los datos obtenidos en la tarea de identificación para los tres test en el cuadrilátero.

En primer lugar contrastamos nuestras conjeturas con los datos obtenidos en el pre-test. Para el caso A se preveía más respuestas erróneas que correctas pues presentamos un cuadrilátero sin estereotipar. Sin embargo recibe un 74% de respuestas correctas. Muestra de que los alumnos de 6º de Educación Primaria poseen una imagen conceptual del concepto de cuadrilátero bastante buena y que incluye ejemplos de cuadriláteros cóncavos.

Para el caso estereotipado B conjeturamos un porcentaje alto de respuestas correctas que se dan en un 90% de los casos. Lo que indica que aunque posean una imagen conceptual bastante completa del concepto de cuadrilátero prefieren identificar representaciones estereotipadas.

En el caso C conjeturamos más respuestas correctas que para el caso A pues consideramos este último menos estereotipado, y los resultados son 64% y 74% respectivamente. Ante nuestra conjetura desacertada, consideramos que los alumnos tienen más problemas cuando el cuadrilátero no es estereotipado y tiene lados anormalmente cortos como ocurre en el caso C.

Comparando los datos de los tres test concluimos que se ha mejorado en todos los casos la identificación de los distintos cuadriláteros exceptuando en el caso no estereotipado A en el que el porcentaje de respuestas correctas es menor tras la secuencia didáctica. Evoluciona desde un 74% de respuestas correctas antes de la secuencia didáctica a 56/57% después de la misma. Estamos hablando de 7 alumnos que consideraban el caso cóncavo A como cuadrilátero, no lo conciben como tal tras nuestra secuencia.

En la siguiente tabla agrupamos, analizamos e interpretamos los datos obtenidos en la tarea de identificación sobre el triángulo rectángulo.

Caso	TEST	Respuesta correcta	Respuesta incorrecta	No responde
 **A)**	1º	33,5%	61,5	5%
	2º	48%	52%	-
	3º	44,5%	50%	5,5%
 **B)**	1º	54%	41%	5%
	2º	52%	48 %	-
	3º	66,5%	28%	5,5%
 **C)**	1º	64%	31%	5%
	2º	62%	38%	-
	3º	72,5%	22%	5,5%
 **D)**	1º	61,5%	36%	2,5%
	2º	71%	29%	-
	3º	33,5%	66.5%	-

Tabla 12. Ordenación y comparación de los datos obtenidos en la tarea de identificación para los tres test en el triángulo rectángulo.

Comenzamos contrastando nuestras conjeturas con los resultados en el pre-test. Para el caso estereotipado *c* se acierta la predicción aunque se esperaba un porcentaje de respuestas correctas más alto que 64%. Acertamos las conjeturas propuestas para los triángulos rectángulos sin estereotipar *a* y *b* aunque esperábamos porcentajes de respuestas correctas más bajos que 33,5% y 54% respectivamente. Para el caso *d* que representa a un isósceles sin estereotipar, conjeturábamos más respuestas correctas que incorrectas y acertamos nuevamente al obtener 61,5% de respuestas correctas.

Observamos que los resultados mejoran en los casos *A*, *B* y *C*. Pero para el único triángulo no rectángulo *D*, las respuestas correctas bajan drásticamente de 61,5% a 33,5%. Frente a tales resultados observamos una creciente y generalizada apuesta por la afirmación. En todos los casos los alumnos han identificado más triángulos rectángulos tras la secuencia que antes de la secuencia. Desde mi punto de vista, sí les hemos dado a entender que la posición es irrelevante para la definición de los polígonos, pero en este caso no tenían clara la definición del concepto y los resultados se han traducido en un generalizado aumento de la identificación de triángulos rectángulos basándose en la no relevancia de la posición y pasando por alto la propiedad necesaria de poseer un ángulo recto.

3.3 SECUENCIA DIDÁCTICA CONSTRUIDA A PARTIR DE LA EXPERIMENTACIÓN

Se pueden elaborar secuencias didácticas como ésta pero transfiriendo nuestra idea a otros conceptos geométricos, como el concepto de cuadrilátero, paralelogramo, cuadrado, rectángulo y romboide.

Proponemos expandir la secuencia didáctica a varias sesiones. Pensamos que esta secuencia puede ser una porción de otra superior. En esta se trabaja únicamente el concepto de rombo de forma aislada, sin una introducción a los cuadriláteros ni a los paralelogramos.

Al respecto proponemos una secuencia más extensa y contextualizada en la que se trabajen los cuadriláteros desde un enfoque jerárquico y proporcionando numerosos ejemplos y contraejemplos. Por otro lado, ante la evolución contradictoria de la concepción del cuadrado como tipo particular de rombo propiciada por el giro como herramienta de identificación, señalamos la importancia de indicar a los estudiantes que la herramienta “giro” puede ser útil para visualizar más ejemplos de los conceptos pero no es esencial para la identificación, como la herramienta “arrastre”. Comenzamos con la presentación del concepto de cuadrilátero, para ello proponemos la actividad[3] 1 *Vocabulario de cuadriláteros*, cuando este concepto esté asimilado, pasaremos al concepto de paralelogramo, para lo que proponemos la actividad 2 *Propiedades del paralelogramo* (mediante esta actividad también se presenta el concepto de romboide) y cuando los concepto estén asimilados, pasamos al rombo, rectángulo y cuadrado. Fortalecemos el concepto de rombo con las actividades 4 *Puzle con rombos fijos,* 5 *Puzle con rombos móviles,* 6 *Puzle de rombos 2* y 7 *Rombos mentirosos.* Continuamos con una actividad dedicada al rectángulo, la actividad 9 *Rectángulos locos* y seguimos con la actividad 3 *Falsos cuadrados* para trabajar el concepto de cuadrado. Proponemos la actividad 8 *Clasificación inclusiva de cuadriláteros* para finalizar la secuencia y asimilar los conocimientos, a través de la cual observamos un montón de ejemplos y contraejemplos de los conceptos trabajados. Se trabajaba con todos los cuadriláteros estudiados juntos y se clasifican de forma jerárquica.

1. Sesión 1
    a. Actividad 1 *Vocabulario de cuadriláteros*
    b. Actividad 2 *Propiedades del paralelogramo*
2. Sesión 2
    a. Actividad 4 *Puzle con rombos fijos*
    b. Actividad 5 *Puzle con rombos móviles*
    c. Actividad 6 *Puzle de rombos 2*
    d. Actividad 7 *Rombos mentirosos*
3. Sesión 3
    a. Actividad 9 *Rectángulos* locos
    b. Actividad 3 *Falsos cuadrados*
    c. Actividad 8 *Clasificación inclusiva de cuadriláteros*

En gran parte la experimentación en el aula de nuestra secuencia nos ha permitido observar los puntos fuertes y débiles y proponer una mejorada. Como aspecto tecnológico nos hemos topado con un problema técnico que ha dificultado el desarrollo de las sesiones con GeoGebra. Hemos utilizado Tablet PC con pequeña pantalla y sin un ratón con el que manejar el cursor. En estas condiciones el manejo se vuelve tosco y

[3] Todas las actividades que proponemos están ordenadas y entabladas en el capítulo 2.

lento. Sugerimos utilizar GeoGebra en un ordenador con ratón externo para que el manejo del software sea correcto. No se recomienda utilizar pantallas táctiles que remplacen el ratón.

Respecto al problema referido del uso indebido de los giros como herramienta de identificación de figuras geométricas, la secuencia ampliada propone en las actividades 3 *Falsos cuadrados* y 8 *Clasificación inclusiva de cuadriláteros* varios ejemplos de figuras que no necesitan ser girados para ser identificados, además proponemos preguntar explícitamente en ambas actividades sobre qué acciones ha realizado el alumno para identificar la figura.

Ante la concepción aislada del cuadrado proponemos una secuencia preocupada constantemente por la clasificación jerárquica y se diseña una actividad específica para asimilar dicha clasificación. Pensamos que las aclaraciones del profesor en el momento preciso también son cruciales para cambiar su concepción, pues ha de ayudar a los alumnos a alcanzar la quinta fase de Van Hiele (integración) en la que el estudiante revisa, unifica y sumariza los nuevos objetos y sus relaciones. Un ejemplo de ello en la secuencia inicial hubiera sido, durante la segunda actividad *Puzle de rombos II* el profesor pasa mesa por mesa y mediante el diálogo ha de conducir a los alumnos hacia la clasificación jerárquica de los cuadriláteros ayudando a entender el cuadrado como rombo. El procedimiento a seguir tras llegar a ese conocimiento en todas las parejas, se ha de explicar en la pizarra, se ha de presentar el cuadrado también como tipo particular de rectángulo y se ha de realizar un esquema de la clasificación inclusiva de los cuadriláteros, por ejemplo.

Gracias a la implementación de la secuencia diseñamos la actividad 8 para cubrir esta dificultad. Además hemos tomado conciencia de que el profesor tiene que ayudar a los alumnos a dar saltos que no pueden dar los alumnos por ellos solos. Esta situación es una de ellas, ya que los alumnos comprenden los cuadriláteros de forma particional "desde siempre".

Hemos obtenido resultados positivos de la mejora del concepto pero que se desvanecen en el tiempo. Esto nos indica que la secuencia es demasiado corta y por ello proponemos su extensión de hasta 3 sesiones de 45' – 60'. Por otro lado los altos porcentajes de respuestas erróneas y sobre todo imprecisas, nos indica que los alumnos no han sintetizado los conocimientos. Ante ello tomamos conciencia de que el papel del profesor en la evocación de las ideas matemáticas es esencial.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES

4.1 CONCLUSIONES SOBRE EL ANÁLISIS DE ALGUNOS RECURSOS DE ENSEÑANZA DISPONIBLES, LIBRO DE TEXTO E INTERNET.

4.1.1 Los libros de matemáticas de la etapa de educación primaria favorecen la clasificación particional de los cuadriláteros y la construcción de una imagen conceptual del concepto de rombo pobre.

No es hasta cuarto curso de primaria cuando se presenta por primera vez el rombo de forma explícita. Se dan muy pocos ejemplos del concepto y todos ellos estereotipados. Se ofrece implícitamente la definición de rombo. Y, aunque la presentación de sus propiedades sea jerárquica, su representación gráfica favorece la clasificación particional. Observamos esta clasificación que hacen nuestros alumnos del cuadrilátero a través de la *Tabla 3* en la que predominan las representaciones estereotipadas entre los conceptos de cuadrado, rectángulo y rombo. Sin embargo, observamos que para el cuadrilátero algunos alumnos realizan un dibujo diferente, creemos que para distinguirlo del cuadrado o rectángulo. Del mismo modo, en los siguientes cursos de la etapa, el concepto de rombo sigue recibiendo el mismo trato, se presenta de forma estereotipada, en vez de ofrecerse su definición de forma explícita, se presenta una retahíla de propiedades del concepto y se sigue favoreciendo la clasificación particional de los cuadriláteros.

4.1.2 Las actividades encontradas en la web no suelen estar adaptadas a un nivel concreto, sino en general a “Primaria” o “Secundaria”.

Los recursos de GeoGebra ofrecidos en la web no se suelen presentar adaptados a un nivel concreto. Es cierto que casi todas las actividades se pueden adaptar a los diferentes niveles, pero no se dan orientaciones metodológicas ni posibles variantes para ello.

Sin embargo, señalar la excepción de los recursos proporcionados por el Proyecto Gauss desde la página web del INTEF en dónde, aunque enfocados para 5º, 6º de primaria y secundaria, los recursos se presentan con orientaciones metodológicas y están contextualizadas en niveles, aunque no se profundiza en la idea de que un mismo recurso podría ser utilizado en diversos niveles adaptando la metodología y el contexto matemático.

4.1.3 Los recursos de GeoGebra ofrecidos por la web poseen limitaciones didácticas centrándose exclusivamente en el recurso tecnológico.

En la misma dirección que la conclusión anterior señalamos que la mayor parte de las páginas web analizadas poseen gran cantidad de recursos pero no explicitan el contexto matemático en el que se insertarían. No hacen referencias a las definiciones de los objetos matemáticos necesarios para llevar a cabo la actividad, por ejemplo.

Consideramos que estas limitaciones didácticas de los recursos de GeoGebra ofrecidos en la web se deben entre otras razones, a la vida relativamente corta del software, y a que los recursos suelen ser obra de docentes particulares que trabajan libremente y no de entidades oficiales que utilicen el currículo como marco teórico.

4.1.4 Los alumnos de sexto curso de Educación Primaria prefieren las figuras estereotipadas tanto para afrontar tareas de construcción como de identificación de polígonos.

Los alumnos identifican mucho mejor los rombos representados en su forma estereotipada. Pues el rombo estereotipado se identifica como tal en el 95 % de los casos. Incluso se identifica en el 72 % de los casos como rombo el "no rombo" representado en forma estereotipada de rombo (ver *Tabla 4*).

En la misma dirección, los alumnos de sexto de educación primaria entienden que las características como el color, la posición o el tamaño son irrelevantes en el concepto de rombo, pero que aun así prefieren una posición y tamaño determinados a la hora de identificar o representar el concepto sin embargo, cuando son preguntados por ello, admiten que estas propiedades no son esenciales del rombo (ver actividad 2 con GeoGebra).

Explicamos este resultado porque es más fácil dibujar figuras estereotipadas; pues los bordes del papel sirven como guías, estamos totalmente rodeados de estas representaciones estereotipadas como muebles, baldosas, espejos, edificios, fachadas…

por lo que consideramos normal el predominio de las figuras estereotipadas en las imágenes conceptuales que los estudiantes poseen. Si además también se presentan las figuras estereotipadas en las aulas y en los libros de texto esta limitación matemática no se corrige sino que se refuerza.

4.1.5 Frente a esta limitación matemática que surge de la continua presentación de representaciones gráficas estereotipadas, apostamos por la figura del profesor y el SGD.

Dados los medios a su alcance anteriormente descritos, él es el encargado de presentar numerosos ejemplos diferentes de las figuras para ayudarles a construir una imagen conceptual más rica y completa. Además cuando las ideas están fuertemente impresas en la mente del alumno es muy difícil cambiarlas por ello se necesita la intervención del profesor en el momento preciso del proceso de enseñanza aprendizaje. Por otro lado somos conscientes de la existencia de materiales didácticos para presentar ejemplos y contraejemplos de las figuras como el geoplano o figuras físicas como recortes en papel para los polígonos y figuras con volumen para los cuerpos. Sin embargo apostamos en este caso por el SGD tanto por su facilidad de uso como por la motivación que conlleva y el potencial didáctico que posee.

4.2 CONCLUSIONES SOBRE LOS RESULTADOS OBTENIDOS TRAS LA INTERVENCIÓN DIDÁCTICA

4.2.1 Tras la intervención didáctica se consigue atenuar la preferencia de los alumnos por la comparación con la imagen conceptual frente a la definición a la hora de abordar tareas de construcción e identificación del rombo.

Corroboramos la idea citada por autores como Turuégano, Gutiérrez, Jaime, Moriena y Scaglia de la preferencia que los alumnos tienen por la utilización de la imagen conceptual frente a la definición del concepto en las tareas de identificación de polígonos.

Observamos en la situación previa a la intervención que ejerce mucha más influencia la imagen conceptual que los alumnos tienen que la definición del concepto, pues justifican la mayoría de las preguntas aludiendo a dicha imagen. Observamos además que la brecha que hay entre la comparación con la imagen y la utilización de la definición es bastante amplia en la situación previa. Observamos que la brecha disminuye considerablemente en la situación posterior inmediata a nuestra actuación pero se vuelve a dilatar en la situación posterior una semana después (ver *Tabla 10*).

Revisando los resultados de la tarea de construcción de la situación previa observamos que el 95% de los dibujos de rombos son estereotipados. Indicativo de que los alumnos no se basan en la definición del concepto para construir el rombo, sino en la imagen mental que tienen de él. En las situaciones posteriores se siguen construyendo los rombos en su forma estereotipada por lo que seguimos considerando que utilizan la imagen frente a la definición.

4.2.2 La imagen conceptual ha sido enriquecida a través de las actividades propuestas en la intervención.

Los alumnos mejoran la imagen conceptual del rombo aunque de forma limitada. Pues no incluyen el ejemplo de cuadrado. En la situación previa los alumnos poseen una imagen conceptual del rombo constituida por los ejemplos de rombo estereotipado, rombo “tumbado” y cuadrado en posición estereotipada de rombo. Nuestra secuencia didáctica ha enriquecido su imagen mental a través de numerosos ejemplos diferentes de rombos. Como resultado, Tras la secuencia poseen una imagen mental del rombo que incluye cualquier rombo esté en la posición en la que esté que visiblemente posea dos ángulos agudos y dos obtusos enfrentados respectivamente.

4.2.3 La secuencia didáctica promueve el uso del giro como herramienta de identificación de figuras geométricas, lo que unido a que los alumnos de sexto de Educación Primaria no entienden el cuadrado como tipo particular de rombo, da lugar a efectos indeseados en algunas tareas de identificación.

A pesar de las mejoras en la imagen conceptual explicadas en la conclusión anterior, rechazan el cuadrado como rombo también esté en la posición en la que esté (incluyendo el cuadrado en posición estereotipada de rombo que antes aceptaban como tal).

Si revisamos la *Tabla 9*, observamos que en el caso A (la representación gráfica más estereotipada del cuadrado) obtiene un 7,5% de respuestas correctas antes de la secuencia didáctica frente al 24% y 22% de respuestas correctas en los test posteriores. Significa que más alumnos han identificado como rombo la representación gráfica estereotipada del cuadrado tras la secuencia didáctica. Sin embargo las respuestas correctas son todavía muy pocas, indicativo de la secuencia debería profundizar más en este punto.

En el caso C, un cuadrado en posición estereotipada de rombo, para el cual se obtiene un 68% de respuestas correctas en el test previo frente a unos porcentajes de 38% y 44% en los test posteriores. Estos datos muestran que se ha evolucionado de forma contradictoria y los alumnos han identificado la representación del cuadrado en forma de rombo más como cuadrado y menos como rombo tras la secuencia didáctica.

En cuanto a la categorización de respuestas, estudiamos la categoría *comparación con un cuadrado* para los casos de cuadrados A y C. Para el caso A, observamos una progresión de porcentajes de 41%, 30% y 35% respectivamente en pre-test, pos-test inmediato y pos-test una semana después. Dichos porcentajes muestran que menos alumnos aluden a la comparación con un cuadrado tras nuestra secuencia didáctica por lo que pensamos que menos alumnos excluyen al cuadrado como tipo de rombo tras la secuencia. Sin embargo la progresión de los porcentajes del caso C, 13%, 33% y 39% respectivamente, muestra la misma contradicción que comentamos anteriormente. Más alumnos aluden a la comparación con un cuadrado tras nuestra secuencia en el caso C, lo que implica que más alumnos excluyen al cuadrado como tipo de rombo tras nuestra actuación.

Una posible explicación de lo expuesto anteriormente estaría relacionada con el énfasis que la secuencia pone en los giros como movimientos que permiten identificar figuras geométricas al acercarlas a la imagen conceptual previa del alumno. Esto habría tenido como consecuencia que los alumnos de sexto de primaria habrían girado el cuadrado en "posición de rombo" haciéndolo coincidir con su imagen conceptual de cuadrado y alejándolo de su imagen conceptual de rombo. Deberíamos transmitir también en la secuencia mejorada que no siempre es necesario girar una figura geométrica para identificarla.

4.2.4 Nuestra secuencia didáctica resulta útil en parte en la construcción de la imagen conceptual del rombo por lo que ha servido de base para la elaboración de una secuencia ampliada.

En términos generales podemos decir que nuestra secuencia didáctica con GeoGebra ha mejorado la concepción del rombo en los alumnos de sexto de primaria. Pues disminuyen las alusiones a la forma estereotipada de rombo, aumentan las alusiones a la posición irrelevante de las figuras y aumenta la utilización correcta de la definición del concepto. Sin embargo, no es lo suficientemente extensa ni aclaratoria, pues los datos obtenidos en el pos-test inmediato que muestran dichos progresos no perduran a corto plazo ya que se desvanecen una semana después. Esto se debe en parte a que nuestra secuencia didáctica no es lo suficientemente extensa y apenas se le dedica tiempo a la quinta fase de integración propuesta por Van Hiele.

Señalar que los altos porcentajes de respuestas sin justificar e imprecisas muestran que los alumnos de sexto curso de Educación Primaria no están acostumbrados a justificar respuestas sencillas utilizando sus conocimientos previos. Además la categoría de respuestas sin justificar recibe unos porcentajes, en los casos del pre-test, que doblan los porcentajes recibidos en los casos de los pos-test. Estos datos muestran que nuestra secuencia didáctica ha aportado información y herramientas a los alumnos para responder a las preguntas. Sin embargo, tal y como han disminuido las respuestas *sin justificar*, han aumentado las respuestas *imprecisas*, indicativo de que hay más información pero no está clara; aunque los alumnos tienen más conocimientos, no los han utilizado correctamente porque no los han integrado (fase 5). Encontramos en este aspecto una importante brecha en nuestra breve secuencia didáctica que es abordada en la secuencia ampliada.

4.2.5 El análisis exhaustivo realizado ha permitido que, partiendo de las limitaciones anteriormente expuestas de la intervención inicial, diseñemos una nueva secuencia que las ayude a superarlas.

Frente a una secuencia breve, apostamos por una extendida y de una secuencia que sólo comprendía el concepto de rombo, proponemos una en la que se trabajen los conceptos de cuadrilátero, paralelogramo, romboide, rombo, rectángulo y cuadrado. De una sesión y tres actividades pasamos a una nueva secuencia con tres sesiones y nueve actividades.

Ante la clasificación particional de los cuadriláteros dominante en los estudiantes nos esforzamos por favorecer una clasificación jerárquica característica de toda la secuencia e incluimos una actividad específica que la trabaja. Por último, ante las numerosas respuestas sin justificar e imprecisas, otorgamos especial importancia a las aclaraciones y soporte del profesor y reaccionamos otorgando importancia al seguimiento de las fases de Van Hiele, en especial a la fase quinta de integración y síntesis de los conocimientos.

Respecto al problema referido del uso indebido de los giros como herramienta de identificación de figuras geométricas, la secuencia ampliada propone en las actividades 3 *Falsos cuadrados* y 8 *Clasificación inclusiva de cuadriláteros* varios ejemplos de figuras que no necesitan ser girados para ser identificados, además proponemos preguntar explícitamente en ambas actividades sobre qué acciones ha realizado el alumno para identificar la figura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnal-Bailera, A., & Guerrero-Belloc, B. (2015). Construyendo la idea de cuadrado: Un ejemplo de la integración de GeoGebra en el currículo de 1º de primaria. *REIDOCREA*, *4*, 129-135.

Corberán, R. M. (1989). *Didáctica de la geometría: modelo Van Hiele.* España: Educació Materials.

Guetiérrez, Á. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, & F. D. Ruiz, *Geometría para el siglo XXI* (págs. 13-58). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Gutiérrez, Á. (2009). *Enseñanza de las Matemáticas en Entornos Informáticos, GeoGebra.* (pág.2). Universitat de València. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxix*, 55-70.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry. Two Sides of the Coin. *Focus on Learning Problems in Mathematicas*, *11*(1), 61-76.

Laborde, C. (1993). The Computer as Part of the Learning Environment: The Case of Geometry. En K. Christine, & K. Ruthven, *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (págs. 48-67). Springer Berlin Heidelberg.

López, N. R. (noviembre de 2013). Influencia del software de geometría dinámica GeoGebra en la. Santo Domingo, República Dominicana. Obtenido de I CEMACyC.

Matos, J. M. (1992). Cognitive Models in Geometry Learning. (J. F. João Pedro Ponte, Ed.) *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*, 93-112.

Michael, D. V. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14-1.

Morales, A., Marmolejo, J. E., & Locia, E. (2014). EL SOFTWARE GEOGEBRA: UN RECURSO HEURÍSTICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS. *Revista Premisa*, 20-28.

Moriena, S., & Scaglia, S. (abril de 2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *EDUCACICIÓN MATEMÁTICA, 15*(1), 5-19.

Moriena, S., & Scaglia, S. (diciembre de 2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 17*(3), 105-120.

Rizo, C., & Campistrous, L. (abril de 2007). Geometría dinámica en la escuela, ¿mito o realidad? *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*(45), 61-79.

Sánchez, J. A. (1997). De la calle al ordenador. *Aula de innovación educativa*(58), 20-21. Obtenido de http://geogebra.es/pub/TFM_tgm.pdf

Serrano, L. (2001). Elementos geométricos y formas planas. En E. Castro, *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (págs. 381-397). Madrid: Síntesis Educación.

Turuégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación el el aula. *Ensayos. Revista de Estudios de la Escuela Universitaria de Magisterio de Albacete*, 35-48.