

REVISTA
DE LA
REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS
Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA



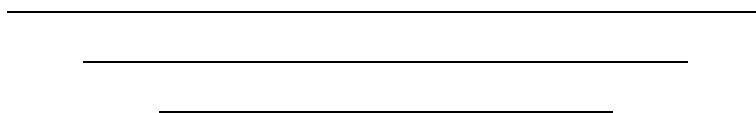
Serie 2.^a
Volumen 57

2002

ÍNDICE DE MATERIAS

On the Asymptotic Determination of Invariant Manifolds for Autonomous Ordinary Differential Equations J. PALACIÁN	7
Riemann y la Función Zeta C. CALDERÓN	67
Homotopía propia simplicial I J. M. GARCÍA CALCINES, L. J. HERNÁNDEZ PARICIO Y S. RODRÍGUEZ MACHÍN	89
Homotopía propia simplicial II J. M. GARCÍA CALCINES, L. J. HERNÁNDEZ PARICIO Y S. RODRÍGUEZ MACHÍN	113
About Gevrey Hypoellipticity of pseudodifferential operators associated to the class of Hörmander symbols of Gevrey type M. HAZI	135
An Extension of Bilateral Generating Function of Certain Special Function-II M. C. MUKHERJEE	143
Estudio asintótico de polinomios ortogonales en la tabla de Askey CHELO FERREIRA Y ESMERALDA MAINAR	147
Tomographic images of the Mediterranean basin obtained by spatial prediction (kriging) J. BADAL, J. SABADELL AND F. J. SERÓN	189
Evolución química de las salmueras del Salar de Huasco (Chile) en condiciones experimentales controladas P. L. LÓPEZ JULIÁN E I. GARCÉS MILLAS	201
Nódulos septarizados en materiales detríticos de la Formación Escucha, Estercuel (Teruel) F. J. TORRIJO, J. MANDADO, C. RUBIO Y M. E. BONA	211
Origen de concreciones dolomíticas en el Terciario de la Cuenca de Calatayud (Zaragoza) F. J. TORRIJO, J. MANDADO Y M. E. BONA	219

Estudios de homología entre regiones del operón <i>mcy</i> de <i>Microcystis aeruginosa</i> PCC 7806 y muestras procedentes de La Estanca de Alcañiz (Teruel) B. MARTÍN, J. Á. HERNÁNDEZ, S. LÓPEZ, L. Á. INDA, M. T. BES, M. F. FILLAT Y M. L. PELEATO	231
Expresión coordinada de una proteína de 42kDa y plastocianina en el alga verde verde <i>Scenedesmus vacuolatus</i> M. D. MIRAMAR, M. L. PELEATO Y L. A. INDA	241
VIDA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS, QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA EN EL AÑO 2002	249



On the Asymptotic Determination of Invariant Manifolds for Autonomous Ordinary Differential Equations

Jesús Palacián

Departamento de Matemática e Informática.

Universidad Pública de Navarra. E – 31006 Pamplona. Spain.

Premio de la Academia a la Investigación (2001–02)

Abstract

A methodology to calculate the approximate invariant manifolds of dynamical systems defined through an m -dimensional autonomous vector field is presented. The technique is based on the calculation of formal symmetries and generalized normal forms associated to the vector field making use of Lie transformations for ordinary differential equations. Once a symmetry is determined up to a certain order, a reduction map allows us to pass from the equation in normal form to the orbit space, leading to the so-called reduced system of dimension $s < m$. Next, a non-degenerate p -dimensional invariant set of the reduced system is transformed, asymptotically, into a $(p+m-s)$ -dimensional invariant set of the departure equation. We put three examples of normal forms computations and reduction process for Hamiltonian and dissipative systems. The procedure is illustrated by three applications: i) we characterize the set of all periodic orbits sufficiently close to the origin of the Hamiltonian vector field defined by the Hénon and Heiles family when the main frequencies do not satisfy a resonance condition; ii) we calculate the normally hyperbolic invariant manifold together with its stable and unstable manifold of an equilibrium point of type centre \times centre \times saddle for the three-degrees-of-freedom (3DOF) Hamilton function of the Rydberg atom, explaining the relevance of these invariant structures in the Transition State Theory; and iii) we apply our technique to the reduction process of the Lorenz equations, obtaining periodic orbits and some one-dimensional (1D) and 2D invariant sets.

Key words and expressions: Extended normal forms, Lie transformations, homology equation, invariant theory, mapping reductions, orbit spaces, reduced phase spaces, centre reduction, periodic orbits, nD invariant tori, normally hyperbolic invariant manifolds, Transition State Theory, averaging techniques, Hamiltonian functions, dissipative systems.

Resumen

En este trabajo se presenta una metodología para calcular variedades invariantes de un sistema dinámico definido mediante un sistema de m ecuaciones diferenciales autónomas. La técnica que empleamos se basa en el cálculo de simetrías asintóticas y formas normales generalizadas asociadas al campo vectorial que define la ecuación de origen, haciendo uso de transformaciones de Lie para ecuaciones diferenciales ordinarias. Una vez determinada la simetría hasta un cierto orden de aproximación un proceso de reducción permite formular la ecuación transformada en un espacio de dimensión s , estrictamente menor que m . El resultado central del trabajo establece que, bajo ciertas condiciones de regularidad, una variedad de dimensión p , invariante por el flujo del sistema dinámico correspondiente al sistema de ecuaciones reducido, se transforma mediante el cambio inverso al anterior, en otra variedad de dimensión $p + m - s$ que es aproximadamente invariante por el flujo del sistema dinámico correspondiente a la ecuación de partida. Además en el caso de que las variedades sean toros invariantes, la transformación asegura la existencia de toros invariantes de dimensión $p + m - s$ en el sistema original. La teoría desarrollada se ilustra a través de tres aplicaciones: i) caracterizamos el conjunto de todas las órbitas periódicas suficientemente cercanas al origen, de un problema de dinámica galáctica, en el que las frecuencias principales del sistema original no satisfacen una condición de resonancia; ii) calculamos la variedad invariante normalmente hiperbólica así como sus variedades estable e inestable de un punto crítico cuya estabilidad es de tipo centro \times centro \times silla correspondiente a un hamiltoniano de tres grados de libertad que modeliza la trayectoria de un átomo sujeto a la acción de un campo eléctrico y otro magnético dispuestos en direcciones perpendiculares, explicando la relevancia que tienen las estructuras geométricas invariantes en el lenguaje de la teoría del estado de transición en reacciones químicas; y iii) aplicamos la teoría al estudio del sistema disipativo de origen meteorológico, llamada ecuación de Lorenz, obteniendo nuevas variedades invariantes de dimensión dos y órbitas periódicas, para ciertos valores de los parámetros del problema.

Palabras clave y expresiones: Formas normales extendidas, transformaciones de Lie, ecuación homológica, teoría de invariantes, aplicaciones de reducción, espacios orbitales, espacios fásicos reducidos, reducción a la variedad central, trayectorias periódicas, toros invariantes n -dimensionales, variedades invariantes normalmente hiperbólicas, teoría del estado de transición, técnicas de promedios, funciones hamiltonianas, sistemas disipativos.

1 Introduction and scope of the paper

The general setting of this paper is given through ordinary differential equations having the form

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t); \varepsilon) = \sum_{i=0}^L \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(t)), \quad (1)$$

where t represents the independent variable, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, ε stands for a dimensionless small parameter and for $0 \leq i \leq L$, \mathbf{F}_i is a vector field with m components defined on an open set $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$. Note that L can be interpreted as the degree reached by the Taylor development of an analytic vector field, thus it can be infinity.

In particular, if \mathbf{F} has a canonical character, there is a scalar field \mathcal{H} such that Equation (1) is equivalent to

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t); \varepsilon) = \sum_{i=0}^L \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathcal{H}_i(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)). \quad (2)$$

Many dynamical systems are modelled by a system of ordinary differential equations either of the type (1) or of the type (2). In both cases they are normally formed by the sum of a principal part (\mathbf{F}_0 or \mathcal{H}_0) plus the perturbation. These equations are very typical of Dynamical Systems Theory; for instance in stability and bifurcation analysis of equilibrium points, periodic orbits or singularity theories. Since (2) is a particular situation of (1) we shall present the results for the more general case, particularizing for (2) when dealing with Hamilton functions.

Analytical methods that deal with dynamical systems like (1) are based on the fact that the vector field $\sum_{i=1}^L (\varepsilon^i/i!) \mathbf{F}_i$ corresponds to a small perturbation of the principal part \mathbf{F}_0 . In the context of Perturbation Theory [25, 33] our aim is to transform the initial problem to a simpler one by means of formal changes of variables.

Let us recall first some known concepts. A regular manifold is a p -dimensional set $M \subseteq \mathbf{R}^m$ ($0 \leq p \leq m$) such that for each $\mathbf{x} \in M$ there is a neighbourhood $U_{\mathbf{x}}$ where one can find an invertible map, $\varphi : \mathbf{R}^m \rightarrow U_{\mathbf{x}}$, \mathcal{C}^1 at least. Given a differential equation like (1), defined in $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$, the manifold $M \subseteq \Omega$ is said to be invariant if the solution $\mathbf{x}(t; \varepsilon)$, with $\mathbf{x}(0) \in M$, is embedded in M for $-\infty < t < \infty$. As remarkable manifolds one has equilibrium points, periodic orbits, $(2 \leq p \leq m)$ -dimensional tori or the stable, unstable and centre manifolds of critical points and the first integrals. More details can be looked up in Refs. [1, 4].

Within this framework, the purpose of the paper is to present a methodology for the computation of approximate, that is, asymptotic, invariant manifolds associated to a system

of the type (1). The central idea consists in constructing generalized (or extended) normal forms, i.e. different formal changes of variables which lead to different systems of differential equations (the normal forms) such that one extracts different invariant sets from each normal form. Thus, the initial equation gets transformed into different systems, each of them enjoying a different symmetry \mathbf{T} up to a certain order of approximation. Hence, the calculation of a generalized normal form (or generalized normalized systems) accomplishes an effective reduction of the original system.

Making use of the Splitting Lemma (see [16] and references therein and see a different approach in [28]) it is readily proven that the transformed vector field can be split into two subsystems defined on two different invariant spaces. One of the subsystems, the so-called reduced system, contains the fundamental dynamics of the departure system. Actually, the reduction can be performed due to the fact that the vector field \mathbf{T} is a continuous symmetry of the normal form system.

The invariant manifolds of the generalized normal forms are computed using standard methods, excepting for the case of the stable, unstable and centre manifolds associated to an equilibrium, as we shall see in Section 3. (Note that due to the reduction in the dimension of the equation, it is easier to find out the invariant manifolds in the reduced systems.) As the implementation of our method uses Lie transformations, once the invariant manifolds of the reduced system have been determined, one can use the inverse Lie transformation to approximate the invariant manifolds of the original differential equation.

More precisely, given the vector field \mathbf{F}_0 , the first step consists in determining the set of independent vector fields \mathbf{T}_i commuting with \mathbf{F}_0 (with the usual Lie brackets for vector fields), that is, the vector fields \mathbf{T}_i belong to the centralizer of \mathbf{F}_0 . Then, for each \mathbf{T}_i one constructs a normal form so that this system is invariant under the action of the Lie group associated to \mathbf{T}_i , in other words, \mathbf{T}_i is the formal symmetry of the normal form. The number of Lie transformations of the original system one can perform depends on the number of available independent vector fields \mathbf{T}_i .

The Lie transformation method for differential equations is based on previous work of Deprit for Hamiltonian systems [11] and was introduced by Kamel [25]. (see also the contribution by Henrard, Ref. [22].) Here we use the setting given by Meyer [33] through his General Perturbation Theorem. At this point we emphasize that our procedure is global in the sense that we do not use local expansions around equilibrium points. However, the convergence of the transformations is not discussed through the paper, though it is known that transformations based on normal form techniques diverge. Basically, a convergent transformation can be guaranteed if there is a nontrivial local one-parameter group of symmetries, see reference [58] and the recent book by Cicogna and Gaeta [6].

The connection of the General Perturbation Theorem with the reduction of a dynamical system through the introduction of symmetries has been given for polynomial vector fields in [46], see also a previous paper by Cicogna and Gaeta [5]. Here we enlarge those studies, considering analytic vector fields making use of a theorem by Schwarz [52]. The extension for non-polynomial vector fields is justified by the use of reduction techniques from the point of view of global analysis of dynamical systems. As examples of normal forms of non-polynomial vector fields we mention the case of perturbed Keplerian systems, see Ref. [9] and references therein.

The paper has eight sections. Section 2 recalls the General Perturbation Theorem and contains the required setting for generalizing the normal form approach. In Section 3 we describe the geometrical aspects of the reduction after the application of the generalized normal forms, dealing with the invariants of the Lie groups related to the symmetry introduced by the Lie transformations. We also show how the different reduced phase spaces are constructed and by means of Theorem 3.2 how the invariant manifolds of the normalized systems are related to the invariant manifolds of the original system. Section 4 is devoted to the construction of normal form and reduced phase spaces for the typical cases of problems in dynamical systems. In Section 5 we illustrate the technique with the Hénon and Heiles family of Hamilton functions for the special case in which the frequencies related to the principal part (quadratic terms) of the Hamiltonian are out of a resonant domain. Section 6 deals with the calculation of normally hyperbolic invariant manifolds for $(n \geq 2)$ -dimensional Hamilton systems, concentrating on one case typical in atomic physics. Section 7 treats the problem of constructing invariant sets for the Lorenz equation by using various normal forms. Finally in Section 8 we outline the main remarks of the paper.

2 Formal symmetries through normal forms

2.1 Lie transformations for vector fields

Meyer's approach to the calculation of formal symmetries is based on Lie transformations. The paper of Meyer in this direction [33] is based on previous work by Kamel [25]. In [33] Meyer presents a Lie transformations treatment in the context of tensor fields. We start by recalling the Lie transformations method applied to analytic vector fields.

Let us consider the system

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}_0(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}(t)), \quad (3)$$

where t represents the time variable, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, ε stands for a dimensionless small parameter and \mathbf{F}_i , $i \geq 0$ is a vector field with m components, which are analytic functions in \mathbf{x} . We

define by $[\cdot, \cdot]$ the Lie bracket of two vector fields \mathbf{g}_1 and \mathbf{g}_2 in \mathbf{R}^m , that is, $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = D\mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{g}_2 - D\mathbf{g}_2(\mathbf{x})\mathbf{g}_1$.

Let us describe the typical algorithm of Lie transformations for ordinary differential equations. An analytic vector field (3) depending on a small parameter ε , is transformed into another vector field

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{G}_0(\mathbf{y}(t)) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{G}_i(\mathbf{y}(t)), \quad (4)$$

where $\mathbf{G}_0(\mathbf{y}(t)) \equiv \mathbf{F}_0(\mathbf{x}(t))$, through a generating function

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{W}_{i+1}(\mathbf{x}),$$

following the recursive formula

$$\mathbf{F}_i^{(j)} = \mathbf{F}_{i+1}^{(j-1)} + \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} [\mathbf{F}_{i-k}^{(j-1)}, \mathbf{W}_{k+1}], \quad (5)$$

with $i \geq 0$, $j \geq 1$. Besides, $\mathbf{F}_i^{(0)} \equiv \mathbf{F}_i$ and $\mathbf{F}_0^{(i)} \equiv \mathbf{G}_i$ for all $i \geq 0$.

Note that $\mathbf{W}(\mathbf{x}; \varepsilon)$ is conserved under the transformation and thus, it can also be expressed as $\mathbf{W}(\mathbf{y}; \varepsilon)$, that is, $\mathbf{W}(\mathbf{x}; \varepsilon) \equiv \mathbf{W}(\mathbf{y}; \varepsilon)$.

Hence, Equation (5) yields the partial differential identity

$$\mathcal{L}_{\mathbf{F}_0}(\mathbf{W}_i) + \mathbf{G}_i = \tilde{\mathbf{F}}_i, \quad (6)$$

where $\tilde{\mathbf{F}}_i$ collects all the terms known from the previous orders plus \mathbf{F}_i . In this identity, called the homology equation, \mathbf{W}_i and \mathbf{G}_i must be determined according to the specific requirements of the Lie transform one performs. Besides, $\mathcal{L}_{\mathbf{F}_0}$ denotes the Lie operator associated to the Lie bracket of two vector functions, i.e. given two vector fields \mathbf{g}_1 and \mathbf{g}_2 : $\mathcal{L}_{\mathbf{g}_1}(\mathbf{g}_2) = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$.

The transformation $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ relates the “old” variables \mathbf{x} with the “new” ones \mathbf{y} and is a near-identity change of variables. The direct change is given by

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{y}_0^{(i)}. \quad (7)$$

Vectors $\mathbf{y}_0^{(i)}$, $i \geq 1$ are calculated recursively with the aid of

$$\mathbf{y}_i^{(j)} = \mathbf{y}_{i+1}^{(j-1)} + \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (\mathbf{y}_k^{(j-1)}, \mathbf{W}_{i+1-k}), \quad (8)$$

with $i \geq 0$, $j \geq 1$ and $\mathbf{y}_i^{(0)} \equiv \mathbf{0}$ for $i \geq 1$ and $\mathbf{y}_0^{(0)} \equiv \mathbf{y}$. Besides, given two vector fields $\mathbf{g}_1(\mathbf{y})$ and $\mathbf{g}_2(\mathbf{y})$, the operator $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ is computed as $D\mathbf{g}_1(\mathbf{y})\mathbf{g}_2$. Consequently,

Equation (7) gives the set of co-ordinates \mathbf{x} in terms of \mathbf{y} with the use of the generating function \mathbf{W} .

Similar formulæ can be used to obtain the inverse transformation $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}; \varepsilon)$, which explicitly reads as

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{x}_i^{(0)}. \quad (9)$$

Now $\mathbf{x}_0^{(0)} \equiv \mathbf{x}$ and for $i \geq 1$ vectors $\mathbf{x}_i^{(0)}$ are calculated recursively by means of

$$\mathbf{x}_i^{(j)} = \mathbf{x}_{i-1}^{(j+1)} + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} (\mathbf{x}_{i-k-1}^{(j)}, \mathbf{W}_{k+1}), \quad (10)$$

with $i \geq 1$, $j \geq 0$. This time $\mathbf{x}_0^{(i)} \equiv \mathbf{0}$ for $i \geq 1$ and the Jacobians appearing in the operators of (10) are computed with respect to \mathbf{x} and \mathbf{W}_{k+1} is also written in \mathbf{x} .

Note that Equation (7) can be used to transform any function expressed in the old variables \mathbf{x} as a function of the new variables \mathbf{y} . Similarly, Equation (9) is used to transform any function in \mathbf{y} as a function of \mathbf{x} .

2.2 Generalized normal forms

The above method is formal in the sense that the convergence of the various series is not discussed. Moreover, the series diverge in many applications. However, the first orders of the transformed system can give interesting information and the process can be stopped at a certain order M . This means that these terms of the series are useful to construct both the transformed vector field and the generating function, since they are unaffected by the divergent character of the whole process. In these circumstances, the General Perturbation Theorem applies.

Theorem 2.1 *General Perturbation Theorem (Meyer).* Let $M \geq 1$ be given, let $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^M$, $\{\mathcal{Q}_i\}_{i=1}^M$ and $\{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^M$ be sequences of vector spaces of analytic functions in $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ defined on a common domain Ω in \mathbf{R}^m with the following properties:

- i) $\mathcal{Q}_i \subseteq \mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, M$;
- ii) $\mathbf{F}_i \in \mathcal{P}_i$, $i = 0, 1, \dots, M$;
- iii) $[\mathcal{P}_i, \mathcal{R}_j] \subseteq \mathcal{P}_{i+j}$, $i + j = 1, \dots, M$;
- iv) for any $\mathbf{D} \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, M$, one can find $\mathbf{E} \in \mathcal{Q}_i$ and $\mathbf{K} \in \mathcal{R}_i$ such that

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} + [\mathbf{F}_0, \mathbf{K}].$$

Then, there is an analytic vector field \mathbf{W} ,

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{W}_{i+1}(\mathbf{x}),$$

with $\mathbf{W}_i \in \mathcal{R}_i$, $i = 1, \dots, M$, such that the change of variables $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ is the general solution of the initial value problem

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\varepsilon} &= D \mathbf{W}(\mathbf{x}; \varepsilon), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y}, \end{aligned}$$

and transforms the convergent vector field

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}),$$

to the convergent vector field

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^M \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{G}_i(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}),$$

with $\mathbf{G}_i \in \mathcal{Q}_i$, $i = 1, \dots, M$.

Proof See reference [33]. □

Now we are ready to extend Theorem 2.1 for the construction of formal symmetries for vector fields. For this we give a result in which we add an extra hypothesis.

Theorem 2.2 *Let $M \geq 1$ be given, let $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^M$, $\{\mathcal{Q}_i\}_{i=1}^M$ and $\{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^M$ be sequences of vector spaces of analytic functions in $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ defined on a common domain Ω in \mathbf{R}^m and let $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{x})$ be a vector field in some $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^M$ with the following properties:*

- i) $\mathcal{Q}_i \subseteq \mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, M$;
- ii) $\mathbf{F}_i \in \mathcal{P}_i$, $i = 0, 1, \dots, M$;
- iii) $[\mathcal{P}_i, \mathcal{R}_j] \subseteq \mathcal{P}_{i+j}$, $i + j = 1, \dots, M$;
- iv) for any $\mathbf{D} \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, M$, one can find $\mathbf{E} \in \mathcal{Q}_i$ and $\mathbf{K} \in \mathcal{R}_i$ such that

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} + [\mathbf{F}_0, \mathbf{K}] \quad \text{and} \quad [\mathbf{E}, \mathbf{T}] = \mathbf{0}.$$

Then, there is an analytic vector field \mathbf{W} ,

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{W}_{i+1}(\mathbf{x}),$$

with $\mathbf{W}_i \in \mathcal{R}_i$, $i = 1, \dots, M$, such that the change of variables $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ is the general solution of the initial value problem

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{d\varepsilon} &= D\mathbf{W}(\mathbf{x}; \varepsilon), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y},\end{aligned}$$

and transforms the convergent vector field

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}),$$

to the convergent vector field

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^M \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{G}_i(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1}),$$

with $\mathbf{G}_i \in \mathcal{Q}_i$ and $[\mathbf{G}_i, \mathbf{T}] = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, M$. Besides, if $[\mathbf{F}_0, \mathbf{T}] = \mathbf{0}$ then $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{y})$ is a formal symmetry of \mathbf{G} .

Proof It appears in reference [46] but we repeat it for sake of clarity in our exposition. Note that the difference between this result and Theorem 2.1 is that here we introduce the vector field \mathbf{T} . Condition *iv*) of Theorem 2.1 is slightly modified in the sense that we also require that functions $\mathbf{E} \in \mathcal{Q}_i$ satisfy $[\mathbf{E}, \mathbf{T}] = \mathbf{0}$. According to Theorem 2.1, $\mathbf{G}_i \in \mathcal{Q}_i$ and the additional thesis $[\mathbf{G}_i, \mathbf{T}] = \mathbf{0}$ is satisfied. \square

The vector field $\mathbf{G}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ is a generalized normal form of the original vector field (3). Note that the number of generalized normal forms depends on the different Lie transformations of $\mathbf{F}(\mathbf{x}; \varepsilon)$ one executes, or in other words, on the functionally independent symmetries \mathbf{T} corresponding to \mathbf{F}_0 . In this respect we can compute a formal symmetry of the original system by reversing the transformation. Specifically if the normal form calculations have been carried out to an order $M > 1$, then we determine $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}; \varepsilon)$ as

$$\mathbf{T}^*(\mathbf{x}; \varepsilon) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^M \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{T}(\mathbf{x})_i^{(0)}, \quad (11)$$

where $\mathbf{T}(\mathbf{x})_i^{(0)}$ are calculated using

$$\mathbf{T}(\mathbf{x})_i^{(j)} = \mathbf{T}(\mathbf{x})_{i-1}^{(j+1)} + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} [\mathbf{T}(\mathbf{x})_{i-k-1}^{(j)}, \mathbf{W}_{k+1}], \quad (12)$$

with $i \geq 1$ and $j \geq 0$. Now $\mathbf{T}(\mathbf{x})_0^{(0)} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{x})$ and for $i \geq 1$, $\mathbf{T}(\mathbf{x})_0^{(i)} \equiv \mathbf{0}$. Then $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}; \varepsilon)$ is an asymptotic symmetry of \mathbf{F} , i.e. $[\mathbf{F}, \mathbf{T}^*] = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$. If we are in the symplectic context, this procedure extends classic results on the determination of formal integrals for Hamiltonian

systems, as those developed in Refs. [59, 60, 20, 17]. For ordinary differential equations, the construction generalized normal forms enlarges other criteria for the determinations of continuous asymptotic symmetries. Details can be found in references [44, 46, 47, 43].

We have to note that given a vector field \mathbf{T} with $[\mathbf{F}_0, \mathbf{T}] = \mathbf{0}$ it is not always possible to solve the homology equation (6) due to the difficulties in finding out the pair $(\mathbf{G}_i, \mathbf{W}_i)$ satisfying it. Therefore, on some occasions we will stop the computation of a normal form at the order we had reached without difficulties.

3 Reduction to the orbit space

3.1 The Splitting Lemma

From a geometrical point of view, the consequence of introducing a symmetry by making use of Theorem 2.2 is that the dimension of the phase space where the transformed system is defined — the so-called reduced phase space — is reduced from m to s (s denoting the number of functionally-independent first integrals associated to $\mathbf{T}(\mathbf{y})$). Let us see how this is achieved with some detail.

Fixed $\varepsilon \in \mathbf{R}$, the system of differential equations (1) is defined over an open subset of \mathbf{R}^m . This is the phase space of the dynamical system determined by (1). Given an m -dimensional vector field \mathbf{T} such that $[\mathbf{F}_0, \mathbf{T}] = 0$, the application of Theorem 2.2, after truncating at order M , leads to the analytic vector field $\mathbf{H}(\mathbf{y}; \varepsilon)$, e.g. the truncation of \mathbf{G} at order M :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{H}(\mathbf{y}; \varepsilon) = \sum_{i=0}^M \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{G}_i(\mathbf{y}), \quad (13)$$

where $\mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{F}_0$ and each \mathbf{G}_i is constructed so that $[\mathbf{G}_i, \mathbf{T}] = \mathbf{0}$, for $1 \leq i \leq M$.

Now we show how the transformation described in Section 2 is effective in the sense that we really simplify the departure system. We use for that a result obtained in reference [16], adapting it to our requirements. Associated to the one-parameter group of symmetries introduced through the Lie transformation there is an $(m - s)$ -dimensional Lie group $G_{\mathbf{T}}$, such that \mathbf{H} is $G_{\mathbf{T}}$ -equivariant, that is, fixed $\varepsilon > 0$, for any $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ and any $g \in G_{\mathbf{T}}$, $\mathbf{H}(\mathbf{y}, \varepsilon) = \mathbf{H}(g\mathbf{y}, \varepsilon)$.

Schwarz [52, 53] generalized a result given by Hilbert for polynomial first integrals for vector fields enjoying a continuous symmetry. Specifically, Schwarz showed that for any $G_{\mathbf{T}}$ -equivariant vector field, there is a set of smooth functions defined on a domain $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$ (in other words, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ -functions) such that any $G_{\mathbf{T}}$ -equivariant smooth function defined in Ω can be written as a $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ -function of those functions. Besides, these functions, designated by $\varphi_i(\mathbf{y}), i = 1, \dots, r$ and $\mathbf{y} \in \Omega$, correspond to the r linearly-independent first integrals of the system $d\mathbf{y}(t)/dt = \mathbf{T}(\mathbf{y}(t))$, from which $1 \leq s \leq r$ are functionally independent.

The set $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ receives the name of minimal integrity basis and it has the structure of a ring of scalar fields with the standard product and addition of \mathcal{C}^∞ -functions. Denote by $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}^*(z(\mathbf{y}))$ the Lie derivative of a function $z : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ related to \mathbf{T} , e.g. $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}^*(z(\mathbf{y})) = \langle D z(\mathbf{y}), \mathbf{T} \rangle$. So, $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}^*(\varphi_i(\mathbf{y})) = 0, i \in \{1, \dots, r\}$. Hence, the φ_i are the independent solutions of the linear partial differential equation $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}^*(\varphi_i(\mathbf{y})) = 0$. Note that $s \leq m$ but r can be bigger than, equal to or smaller than m .

We build a smooth mapping $\varrho_{\mathbf{T}}$ over \mathbf{R}^m as follows:

$$\begin{aligned} \varrho_{\mathbf{T}} : G_{\mathbf{T}} \times \mathbf{R}^m &\longrightarrow \mathbf{R}^m \\ (g, \mathbf{x}) &\longmapsto g \mathbf{x}. \end{aligned}$$

This mapping is a natural action of $G_{\mathbf{T}}$ on \mathbf{R}^m because it satisfies the conditions: i) $\varrho_{\mathbf{T}}(g_1 g_2, \mathbf{x}) = \varrho_{\mathbf{T}}(g_1, \varrho_{\mathbf{T}}(g_2, \mathbf{x}))$, $\forall g_1, g_2 \in G_{\mathbf{T}}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$; and ii) $\varrho_{\mathbf{T}}(e, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ (e is the identity of the Lie group), $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$.

Let us define \sim in such a way that $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$ if and only if \mathbf{x} and \mathbf{x}' lie on the same $G_{\mathbf{T}}$ -orbit of $\varrho_{\mathbf{T}}$. As \sim is an equivalence relation on \mathbf{R}^m , it partitions \mathbf{R}^m into $G_{\mathbf{T}}$ -orbits, see reference [10]. Then we denote $\mathbf{p} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ and $\bar{\mathbf{y}} = g \mathbf{y}$ the orbit of the action $\varrho_{\mathbf{T}}$ through the point $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$. Thus, $\mathbf{p}(\mathbf{y}) \equiv g \mathbf{y}$ and we can define the orbit map (also called the reduction map) as the surjective map:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{T}} : \Omega \subseteq \mathbf{R}^m &\longrightarrow \mathbf{R}^m / G_{\mathbf{T}} \\ \mathbf{y} &\longmapsto \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Now, related to the reduction map $\pi_{\mathbf{T}}$ and the vector field (13), there is a phase space defined as the s -dimensional quotient space $\mathbf{R}^m / G_{\mathbf{T}}$ (which is a semialgebraic manifold, the so-called orbit space, see details in [10]). Henceforth, the φ_i are also called the invariants of the reduction process. The reader can look up references [38, 57] for details about the theoretical aspects of the reduction under the introduction of a continuous symmetry. See also Ref. [8] for a computational treatment of the subject. However, the passage to the orbit space must be combined with an additional differential equation in the Lie group. Now we choose a set of co-ordinates on $G_{\mathbf{T}}$ to make the reduction explicit. Denoting $\mathbf{q} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-s}\}$, the flow on $G_{\mathbf{T}}$ is indeed the time evolution of the variables $\vartheta_i \in G_{\mathbf{T}}$. We have the following result.

Theorem 3.1 *Splitting Lemma.* *Given the generalised normal form system (13) with \mathbf{H} a smooth function of ε and \mathbf{y} defined on $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$, it can be transformed into a triangular system as*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= \mathbf{a}(\mathbf{p}(t); \varepsilon) = \sum_{i=0}^M \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{a}_i(\mathbf{p}(t)), \\ \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} &= \mathbf{b}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t); \varepsilon) = \mathbf{b}_0(\mathbf{p}(t)) + \sum_{i=1}^M \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{b}_i(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)), \end{aligned} \tag{14}$$

\mathbf{a} and \mathbf{b} being smooth functions obtained constructively from \mathbf{H} , and having dimensions r and $m - s$, respectively. Moreover, the vector fields \mathbf{b}_i , $0 \leq i \leq M$, are linear in \mathbf{q} .

Proof It is basically proven in Ref. [16] but here we propose a slight modification, see also [43]. The reason for appearance of \mathbf{a} and \mathbf{b} comes from the fact that they are constructed order by order in powers of ε . The first equation of (14) depends exclusively on the φ_i , it is named the reduced system and is defined over $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$, whereas the second equation of (14) is defined on the Lie group $G_{\mathbf{T}}$. The vector field \mathbf{a} is constructed using the identity $d\mathbf{p}(t)/dt = (\partial\mathbf{p}/\partial\mathbf{y})\mathbf{H}(\mathbf{y};\varepsilon)$ and taking into account that the right-hand member of this equation can be expressed completely in terms of \mathbf{p} (see Refs. [23, 16] for details and the seminal paper by Michel [35]). Thus, we make the identification

$$\mathbf{a}(\mathbf{p};\varepsilon) = D\mathbf{p}(\mathbf{y})\mathbf{H}(\mathbf{y};\varepsilon), \quad \text{that is,} \quad \mathbf{a}_i(\mathbf{p}) = D\mathbf{p}(\mathbf{y})\mathbf{H}_i(\mathbf{y}).$$

For each i , the construction of the \mathbf{b}_i is done with the aid of \mathbf{a}_i and \mathbf{H}_i . It must be performed once the co-ordinates \mathbf{q} have been calculated. Besides, \mathbf{b}_0 cannot depend on \mathbf{q} since it is constructed from \mathbf{F}_0 , and \mathbf{F}_0 is $G_{\mathbf{T}}$ -equivariant, so it does not depend on \mathbf{q} . The dimensions of \mathbf{a} and \mathbf{b} follow, respectively, from the dimensions of \mathbf{p} and \mathbf{q} . \square

The first equation of (14) depends exclusively on the φ_i , it is named the reduced system and is defined on $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$, whereas the second equation of (14) is defined on the Lie group $G_{\mathbf{T}}$. The vector field \mathbf{a} is constructed using the identity $d\mathbf{p}(t)/dt = D(\mathbf{p})\mathbf{H}(\mathbf{y};\varepsilon)$ and taking into account that the right-hand member of this equation can be expressed completely in terms of \mathbf{p} (see Ref. [16] for details). Thus, we identify $\mathbf{a}(\mathbf{p};\varepsilon) = D(\mathbf{p})\mathbf{H}(\mathbf{y};\varepsilon)$. The construction of \mathbf{b} is performed once the co-ordinates \mathbf{q} have been calculated. Note that as there is not a unique set of co-ordinates, there is not a unique function \mathbf{b} . Besides, $G_{\mathbf{T}}$ must be a connected compact group, otherwise the splitting does not hold in general. Theorem 3.1 is also called the Splitting Decomposition. A similar decomposition but of local character and based on geometric considerations is given in [28].

The relevant part of the normal form is given by the equation on the orbit space $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$. Moreover, if the solution of the equation involving the φ_i is known, then the solution of the remaining equation on $G_{\mathbf{T}}$ can be obtained. As there are $r - s$ functionally independent relations among the $\varphi_i(\mathbf{y})$, these relations are indeed the constraints determining the phase space where the normal form system in $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$ is defined. Besides, the basic properties of system (13) are also reflected in $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$. For instance, asymptotic expressions, at a certain order M , of the analytic integrals of the departure system must be found from the analysis of the normal form in the orbit space. The invariance of some subsets of \mathbf{R}^m is formally preserved when passing to the orbit space, see a proof in Ref. [57]. This latter property will be essential in the computation of the invariant sets, as we shall see below.

For Hamiltonian systems we do not have to compute the co-ordinates \mathbf{q} , as the normal form Hamiltonian, by construction, is always a function depending exclusively on \mathbf{p} . Besides, the reduction is done by adding an extra step. First, Theorem 3.1 is applied and \mathbf{p} and \mathbf{a} are calculated. Then, as \mathcal{T} is a constant of motion, one can fix a real value for it, i.e. $\mathcal{T} \equiv c \in I \subseteq \mathbf{R}$.

More concretely, if an initial Hamilton equation defines a dynamical system on a $(2n)$ -dimensional phase space, that is, a system of n degrees of freedom, after a symplectic reduction, the transformed Hamiltonian lies on a phase space of dimension s , if s is even, or of dimension $s - 1$ whether s is odd. Strictly speaking, there is an infinite number of reduced phase spaces, one for each value of $c \in I \subseteq \mathbf{R}$. Moreover, note that in the symplectic context, the Lie bracket of two vector fields is replaced by the Poisson bracket of two scalar fields \mathcal{P} and \mathcal{Q} . That is, if \mathcal{J} denotes the skew-symmetric matrix of order $2n$, the Poisson bracket is defined over an open domain of \mathbf{R}^{2n} as the quantity

$$\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x_{i+n}} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_{i+n}} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x_i} \right)$$

for $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2n})$.

The relation of the procedure described through Theorem 3.1 and the method of averaging is rather clear, see for instance [51]. Indeed, it is easy to see that the passage from the original equation to the system defined on the orbit space can be interpreted as an average of the equation over all “angular” variables ϑ_i since the co-ordinates of the Lie group are absent in $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$. However, the way we have followed seems to be more transparent and general, as the reduction process does not depend on the variables we use, and the co-ordinates of $G_{\mathbf{T}}$ do not need to be actual angles, see some examples in Ref. [67].

Several reductions of a departure system can be performed successively. Indeed, if $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$ correspond to k functionally independent vector fields commuting with the principal part of a dynamical system like (1), it is possible (at least theoretically) to apply up to k different reductions (conversions to normal forms followed by the passage to the corresponding invariants and the splitting decompositions). Thus, an originally m -dimensional system could be reduced to a system of dimension one. However, in practice it is quite unlikely to execute more than one transformation, due to the difficulty in solving the homology equation in the Lie transformation.

3.2 The reduced phase spaces

The co-ordinates of the orbit space (also called generators) are indeed the r linearly-independent first integrals related to \mathbf{T} . As pointed out before, the dimension of $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$ is s thus, there are s functionally independent invariants. However, the number r of linearly

independent invariants cannot be obtained in a systematic manner, and it depends on each reduction, that is, it is determined by the choice of the vector field \mathbf{T} , but $r \geq s$ is always satisfied. Notice that there must be at least $r - s$ relations involving the φ_i . These relations are used to define the reduced phase space.

This space can have singular points due to the existence of non-trivial isotropy subgroups. Specifically, given the Lie group $G_{\mathbf{T}}$ associated to \mathbf{T} and its natural action $\varrho_{\mathbf{T}}$ on \mathbf{R}^m , the isotropy subgroup of a vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ is defined as $G_{\mathbf{T}}^{\mathbf{x}} = \{g \in G_{\mathbf{T}} \mid \varrho_{\mathbf{T}}(g, \mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$. Now, if for all $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ the isotropy subgroup of \mathbf{x} is trivial, the reduced phase space is a smooth manifold. This is the so-called regular reduction [31]. On the contrary, if there is an $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ such that its isotropy subgroup is non-trivial, the reduced phase space is a manifold with singularities. This reduction is called singular [2].

If the reduction is symplectic there is another possibility of introducing singularities in the reduced phase space. After determining the corresponding invariants and computing the reduced Hamiltonian up to the desired order, the value of \mathcal{T} has to be fixed to a constant $c \in \mathbf{R}$. This constant appears as a parameter in the constraints which define the reduced phase spaces. In other words, one has a parametric family of reduced phase spaces with at least one parameter, the constant c . Thus, these reduced phase spaces have different number of singularities according to the values the parameter c takes. This situation cannot be detected by analyzing the corresponding isotropy subgroups. A straightforward way of calculating the singularities consists in parametrizing the reduced phase space and computing thereafter its gradient vector. The singularities are those points where the gradient vanishes.

3.3 Invariant manifolds of the original system

Now, it is time to formulate the main result of the paper, so that we can obtain the invariant sets of an initial system from the (reduced) invariant sets of their reduced systems.

Theorem 3.2 *Let the following differential equation*

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{p}(t); \varepsilon) = \sum_{i=0}^M \frac{\varepsilon^i}{i!} \mathbf{a}_i(\mathbf{p}(t)) \quad (15)$$

be defined over a certain s -dimensional orbit space $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$. Let the vector field \mathbf{a} be an r -dimensional smooth vector coming from a generalised normal form system (13), where \mathbf{H} represents a smooth function defined over $\Omega \subseteq \mathbf{R}^m$ with $s \leq \min\{r, m\}$. (There are $r - s$ essential constraint relations which are part of the definition of $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$.)

Suppose that $\mathbf{c}(\mathbf{t}, \mathbf{p}_0; \varepsilon)$ stands for an r -dimensional vector field defined over $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$, such that is obtained as a non-degenerate (isolated) p -dimensional invariant set of Equation (15)

with $p \leq s$, where we have chosen certain initial conditions \mathbf{p}_0 of \mathbf{p} and p parameters defining $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p)$.

Then, there is a non-degenerate vector field $\mathbf{c}^*(\mathbf{u}, \mathbf{y}_0; \varepsilon)$ defined on \mathbf{R}^m whose dimension is $p + m - s$ (so, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{p+m-s})$ stands for the parameters of \mathbf{c}^*) and such that it represents an invariant set of \mathbf{H} , one of the truncated normal forms of a certain differential equation \mathbf{F} in \mathbf{R}^m (with notations for \mathbf{F} and \mathbf{H} given in Section 2 and 3). In particular, \mathbf{H} stands for the normal form associated to the symmetry of the dominant part \mathbf{F}_0 that we have called \mathbf{T} . Moreover, \mathbf{c} and \mathbf{c}^* have the same type of stability.

Suppose that the equation $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ stands for the direct change of co-ordinates to order M , provided by the Lie transformation built to obtain \mathbf{H} from \mathbf{F} and \mathbf{T} . Suppose in addition that the set $\mathbf{c}^\#(\mathbf{v}, \mathbf{x}_0; \varepsilon)$ with the parameter-vector $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{p+m-s})$ and initial condition $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{y}_0; \varepsilon)$, is constructed from \mathbf{c}^* using the change \mathbf{X} . Then, $\mathbf{c}^\#$ represents an (approximate) invariant set of \mathbf{F} , up to an error $\mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$.

Furthermore, whenever the Lie transformation procedure converges in a domain $D \subseteq \Omega$ and $\mathbf{c}^*(\mathbf{u}, \mathbf{y}_0; \varepsilon) \in D$, the invariant structure $\mathbf{c}^\#$ converges to the exact invariant set of \mathbf{F} .

Finally, suppose that all variables on the Lie group ϑ_i $1 \leq i \leq m - s$, and the parameter-vector \mathbf{t} represent actual angles. In addition suppose that the approximate invariant \mathbf{c}^* depends smoothly on some external parameters $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_\ell)$ such that we can write it as $\mathbf{c}^*(\mathbf{u}, \mathbf{y}_0; \mathbf{d}, \varepsilon)$. Then, whether the $(m \times m)$ -matrix

$$\left(\frac{\partial \mathbf{c}^*(\mathbf{u}, \mathbf{y}; \mathbf{d}^*, \varepsilon)}{\partial \mathbf{y}} \right) (\mathbf{u}^T; \mathbf{y}_0; \mathbf{d}, \varepsilon)$$

(with $\mathbf{d}^* \rightarrow \mathbf{d}$ and $\mathbf{u}^T = (u_1^{T_1}, \dots, u_{p+m-s}^{T_{p+m-s}})$ representing a fixed vector formed with the corresponding periods of the $p + m - s$ angle co-ordinates) has the eigenvalue 1 with multiplicity $p + m - s$, the invariant $(p + m - s)$ -dimensional torus \mathbf{c}^* can be continued into an invariant torus of the vector field \mathbf{F} , called $\mathbf{c}^\#$, with the same dimension and stability character.

Proof The demonstration is an application of Theorems 3.1 and 2.2 of this paper and an adequate use of the Implicit Mapping Theorem for the case of the invariant tori. See more details in [43]

In a first step one needs to calculate, when it will be possible, the invariant sets of the equation defined over $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$. Note that an invariant set (of dimension $0 \leq p \leq m$) associated to the system $d\mathbf{p}(t)/dt = \mathbf{a}(\mathbf{p}(t); \varepsilon)$ can be represented parametrically by the vector field $\mathbf{c}(\mathbf{t}, \mathbf{p}_0; \varepsilon)$ where \mathbf{c} is r -dimensional, \mathbf{t} designates a p -dimensional parameter-vector, and \mathbf{p}_0 stands for some initial conditions calculated in the process of the computation of the specific invariant manifold. Besides, ε remains fixed.

Once \mathbf{c} is determined, we go back to the variable \mathbf{y} by making use of the explicit expressions of the φ_i in terms of \mathbf{y} , by means of the reduction map $\pi_{\mathbf{T}}$. In other words, we

attach to each point of $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$, an $(m-s)$ -dimensional set defined by the co-ordinates of $G_{\mathbf{T}}$. Thus, \mathbf{c} is transformed into $\mathbf{c}^*(\mathbf{u}, \mathbf{y}_0; \varepsilon)$ where \mathbf{y}_0 are derived from the initial condition \mathbf{p}_0 and \mathbf{u} designates a parameter-vector with $p+m-s$ components, accounting for the p -free parameters of \mathbf{c} plus $m-s$ co-ordinates related to ϑ_i , $1 \leq i \leq m-s$. In addition, \mathbf{c}^* has dimension m . Due to the fact that the invariance of \mathbf{c} with respect to the flow defined by (15) is preserved by $\pi_{\mathbf{T}}$, we have that \mathbf{c}^* defines an isolated and exact $(p+m-s)$ -invariant manifold of the ODE $d\mathbf{y}/dt = \mathbf{H}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ in \mathbf{R}^m , with the same stability as \mathbf{c} .

Next we recover the equation of the manifold in the original variable \mathbf{x} . This is achieved by using the change of variable $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$. Thus we pass from the m -dimensional vector $\mathbf{c}^*(\mathbf{u}, \mathbf{y}_0; \varepsilon)$ to the m -dimensional vector $\mathbf{c}^\#(\mathbf{u}, \mathbf{y}_0; \varepsilon)$, with $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{y}_0; \varepsilon)$ and \mathbf{v} having the same meaning as \mathbf{u} . Again since the Lie transformation preserves the invariant character of the expressions, $\mathbf{c}^\#$ remains invariant in \mathbf{R}^m with respect to the flow $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \varepsilon)$, up to an approximation of order M . For a convergent Lie transformation, $\mathbf{c}^\#$ converges asymptotically to an exact invariant set of \mathbf{F} provided that the invariant set lies entirely inside the domain D .

Finally, in the case of having $p+m-s$ angular co-ordinates (all the variables ϑ_i of $G_{\mathbf{T}}$ plus the p parameters of the invariant set \mathbf{c}), the reconstruction of $\mathbf{c}^\#$ is such that all components of the $(p+m-s)$ -dimensional parameter-vector \mathbf{u} represent angles. Thus, we need to construct a suitable Poincaré mapping and apply to it the Implicit Function Theorem, following to Meyer and Hall [34]. We define a cross section to the invariant tori \mathbf{c}^* as the hyperplane Σ of codimension $p+m-s$ as follows

$$\Sigma = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{a}_i \in \mathbf{R}^m \text{ such that} \\ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{H}(\mathbf{y}_0; \varepsilon) \rangle \neq 0 \quad \text{for all } 1 \leq i \leq p+m-s \}.$$

Since the $p+m-s$ parameters of \mathbf{c}^* are angles, and \mathbf{c}^* is an exact invariant set of $d\mathbf{y}/dt = \mathbf{H}(\mathbf{y}; \varepsilon)$, we have by construction that \mathbf{c}^* “starts” on Σ and after a “time” $\mathbf{u}^T = (u_1^{T_1}, \dots, u_{p+m-s}^{T_{p+m-s}})$ returns to the section. So, there is a vector $(u_{01}^{T_1}, \dots, u_{0p+m-s}^{T_{p+m-s}})$ such that if \mathbf{y} is close to \mathbf{y}_0 on Σ , there is a “time” $\mathbf{Q}(\mathbf{y})$ close to \mathbf{u}^T with $\mathbf{c}^*(\mathbf{Q}(\mathbf{y}), \mathbf{y}; \varepsilon)$ is on Σ . Vector \mathbf{Q} is called first return time and allows to define the Poincaré mapping $\mathbf{P} : \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{c}^*(\mathbf{Q}(\mathbf{y}), \mathbf{y}; \varepsilon)$. Clearly, \mathbf{c}^* appears now as a fixed point of \mathbf{P} . Moreover, \mathbf{P} is a smooth map and is used to build the function $\mathbf{E} = \mathbf{P}(\mathbf{y}; \mathbf{d}^*, \varepsilon) - \mathbf{y}$, after adding the external parameters \mathbf{d}^* . Now, the Implicit Function Theorem is applied to the equation $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Note that $\mathbf{E}(\mathbf{y}_0; \mathbf{d}^*, \varepsilon)$ vanishes and the matrix

$$\left(\frac{\partial \mathbf{c}^*(\mathbf{u}, \mathbf{y}; \mathbf{d}^*, \varepsilon)}{\partial \mathbf{y}} \right) (\mathbf{u}^T; \mathbf{y}_0; \mathbf{d}^*, \varepsilon),$$

has the eigenvalue 1 with multiplicity $p+m-s$ (one eigenvalue 1 for each angle \mathbf{u}_i). Next, there is a smooth function $\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{d}^*, \varepsilon)$ such that $\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{d}^*, \varepsilon); \mathbf{d}^*, \varepsilon) = \mathbf{0}$ for small ε and $\mathbf{d}^* \rightarrow \mathbf{d}$.

Thence, the torus \mathbf{c}^* can be continued to a certain set $\mathbf{c}^\#$ for small ε and $\mathbf{d}^* \rightarrow \mathbf{d}$. Finally $\mathbf{c}^\#$ represents an $(p + m - s)$ -dimensional torus of \mathbf{F} . \square

In a first step one needs to calculate, when it will be possible, the invariant sets of the equation defined on $\mathbf{R}^m/G_{\mathbf{T}}$. Note that an invariant set (of dimension $0 \leq p \leq m$) associated to the system $d\mathbf{p}(t)/dt = \mathbf{a}(\mathbf{p}(t); \varepsilon)$ can be represented parametrically at least locally by the equation $\mathbf{p} = \mathbf{u}(\mathbf{c}; \varepsilon)$, where \mathbf{c} designates the p -parameter vector, that is, a vector with p constants, and \mathbf{u} stands for a known r -dimensional vector field determined in the process of the computation of the specific invariant manifold. Besides, ε remains fixed.

Once \mathbf{u} is obtained, we go back to the variable \mathbf{y} by making use of the explicit expressions of the φ_i in terms of \mathbf{y} . Locally, we can express s components of the y_i in terms of ε , the c_i and $m - s$ components of the y_i . Without loss of generality we identify $\mathbf{d}_1 = \{y_1, \dots, y_s\}$ and $\mathbf{d}_2 = \{y_{s+1}, \dots, y_m\}$. Thus, \mathbf{d}_1 can be put in terms of ε , \mathbf{c} and \mathbf{d}_2 . Now, we can express the equation of the invariant manifold as $\mathbf{d}_1 = \mathbf{v}(\mathbf{c}, \mathbf{d}_2; \varepsilon)$ where \mathbf{v} is a known vector field having dimension s . Due to the fact that the invariance of the equations is preserved by $\pi_{\mathbf{T}}$ we have that \mathbf{v} defines an invariant manifold in \mathbf{R}^m .

The last step consists in recovering the equation of the manifold in the variable \mathbf{x} . For that we need to use the direct Lie transformation, that is, the change of variable $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$. Denoting by \mathbf{e}_1 the s components of \mathbf{x} which can be written locally in terms of the other $m - s$ components of \mathbf{x} (which are denoted by \mathbf{e}_2), we arrive at a formula of the type $\mathbf{e}_1 = \mathbf{w}(\mathbf{c}, \mathbf{e}_2; \varepsilon)$ where \mathbf{w} is an s -dimensional vector field defining an invariant set of dimension $p + m - s$. Again \mathbf{w} remains invariant in \mathbf{R}^m up to an approximation of order M .

Estimates of the error committed by the application of Theorems 2.1 and 2.2 can be obtained from the theory developed for the method of averaging. In fact, taking into account that $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$, if we call $\mathbf{F}^*(\mathbf{y}; \varepsilon) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon); \varepsilon)$, then using Theorem 3.2 one can conclude that by choosing an adequate norm, $\|\mathbf{F}^*(\mathbf{y}; \varepsilon) - \mathbf{G}(\mathbf{y}; \varepsilon)\| = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$ on a time-scale $1/\varepsilon$, see references [51, 56] for details. This remark gives the key to know how accurate is the computation of the invariant manifolds.

At this point we must emphasize that the type of manifold of the original system determined through a certain normal form depends on the type of vector field \mathbf{T} (on its invariants and its co-ordinates in $G_{\mathbf{T}}$). Take, for instance, a three-dimensional ordinary differential equation whose principal part \mathbf{F}_0 admits a symmetry \mathbf{T} , i.e. the Lie bracket $[\mathbf{F}_0, \mathbf{T}] = \mathbf{0}$. Suppose besides that the number of functionally independent invariants related to \mathbf{T} is $s = 2$, that is, we have the scalar functions φ_1, φ_2 , such that $\mathcal{L}^*(\varphi_i) = 0$, for $i = 1, 2$. Furthermore suppose that the co-ordinate in $G_{\mathbf{T}}$ is of angular type. We perform a normal form transformation so that we arrive at a two-dimensional system in $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$.

The equilibrium points of the normal form are zero-dimensional invariants in the two-dimensional space $\mathbf{R}^3/G_{\mathbf{T}}$, so $p = 0$ and these equilibria determine one-dimensional invariants in \mathbf{R}^3 , since $p + m - s = 1$. In addition to that, as ϑ is an angle, the invariants of the original system computed through the equilibria of system $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$, following the steps described in the last paragraphs, correspond to periodic orbits in \mathbf{R}^3 , after applying Theorem 3.2 (see also examples in Refs.[51, 56]). Using a similar argument, the periodic orbits one can calculate in $\mathbf{R}^3/G_{\mathbf{T}}$ are in correspondence with two-dimensional invariant tori in \mathbf{R}^3 (in this case, $p = 1$ and $p + m - s = 2$). However, if ϑ is not an angle, the corresponding one-dimensional and two-dimensional manifolds of the original system are not periodic orbits nor invariant tori.

An important application of the reduction techniques concerns with the analysis of the stability of equilibrium points. On some occasions the reduction of the vector field to the centre manifold helps in establishing the stability character of the critical point under study, see for instance the examples of [19, 61]. The reduction to the centre manifold for Hamiltonian vector fields can be looked up in Refs. [36, 24]. In this sense, the computation up to high order of the centre manifolds of equilibrium points can be done in the framework of normal forms theory, see the approach followed in [13]. Moreover, using the generalized normal form point of view we can get the reduction to the centre, stable and unstable manifolds. (Notice that the reduction to the stable manifold is useful from the point of view of calculating approximations of the solution of the original ODE in the neighbourhood of an equilibrium, because of the stability character of the stable manifold of an equilibrium point, see [42].)

Without loss of generality we suppose that the equilibrium in study is the origin of \mathbf{R}^m . Under these circumstances, the principal vector field $\mathbf{F}_0(\mathbf{x})$ becomes a linear system $A\mathbf{x}$ with A a constant matrix of dimension $m \times m$. Thus, the search of vector fields \mathbf{T} commuting with $A\mathbf{x}$ simplifies to look for matrices T such that $AT = TA$. Now, adequate choices of T provide the determination of the centre, stable and unstable manifolds, together with the reduction of some specific equilibria to those manifolds, as exposed in the following.

First of all it is advisable to write A in Jordan canonical form. Suppose then that A has n_s eigenvalues with negative real part, n_u eigenvalues with positive real part and n_c eigenvalues with null real part, then $n_s + n_u + n_c = m$. Moreover we arrange A in such a way that we put all the eigenvalues with null real part at the beginning, then the eigenvalues with negative real part and finally the eigenvalues with positive real part. In order to compute the centre manifold associated to the origin (the equilibrium) we choose a diagonal matrix T whose n_c first components are zero, whereas the rest of entries, $n_s + n_u$, are non-zero real numbers such that they do not satisfy any resonance condition among them. Then,

clearly $AT = TA$ and we could perform the normal form computation and $T\mathbf{y}$ becomes a symmetry of the truncated normal form.

Now, from $d\mathbf{y}/dt = T\mathbf{y}$ we have that $s = n_c$ and $\varphi_1 = y_1, \dots, \varphi_s = y_s$ and $\vartheta_1 = y_{s+1}, \dots, \vartheta_{m-s} = y_m$. So we can pass from the normal form to the reduced system which has dimension s , and corresponds to the differential equation associated to the centre manifold. To compute the co-ordinates of the centre manifold we construct the change of variable putting the original variables in terms of the transformed ones (direct change) by following the technique based on Lie transformations, Refs. [25, 45], obtaining $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$. Finally, we substitute $y_{s+1} = y_{s+2} = \dots = y_m \equiv 0$, arriving at the equations defining the s -dimensional centre manifold of the origin corresponding to the departure system. In a similar manner we would compute the stable and unstable manifolds of the origin, defining a diagonal matrix T having either n_s or n_u zeroes in their corresponding places, whereas the rest of terms are non-zero real numbers that do not satisfy any resonance condition.

The calculation of invariant manifolds of a Hamiltonian vector field $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 + \dots$ is a particular situation of the theory exposed above. However, one has to choose the integrals \mathcal{T} (Hamilton functions) of the principal part \mathcal{H}_0 and perform the Lie transformations in the symplectic frame, see Refs. [44, 45, 50]. Moreover, as the reduction is now symplectic, and \mathcal{T} takes a fixed value $c \in \mathbf{R}$, once we calculate a certain invariant set in the reduced phase space, we can determine a family (parametrized by c) of invariant sets of the original Hamiltonian. Thus, we will talk about families of periodic orbits, or families of p -dimensional invariant tori, etc.

4 Examples of normal forms, reduction techniques and invariant theory

4.1 A case of a semisimple Hamiltonian in \mathbf{R}^4

According to Ref. [45] the number of polynomial Hamilton functions in \mathbf{R}^4 with real parameters and whose dominant part is a quadratic polynomial is fourteen. One of the cases corresponds to a Hamiltonian whose dominant term is $\mathcal{H}_0 = axX + byY$ (a and b are real nonzero constants, x and y refer to positions and X and Y to their velocities). An application of this case is a particle under the influence of a double-well potential, see Ref. [10].

Given a Hamiltonian $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \dots$ where each \mathcal{H}_i , $i \geq 1$ is a homogeneous polynomial in x, y, X and Y of degree $i + 2$ with real parameters, the task is to seek a formal change of co-ordinates $(x', y', X', Y') \rightarrow (x, y, X, Y)$ so that it is used to transform \mathcal{H} into another Hamiltonian $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 + \dots$ where $\mathcal{K}_0 \equiv \mathcal{H}_0$ and each \mathcal{K}_i , with $i \geq 1$ is a homogeneous polynomial in x', y', X' and Y' of degree $i + 2$ but such that the Poisson brackets $\{\mathcal{K}_i, \mathcal{T}\} = 0$, for $i \geq 0$ and a certain polynomial \mathcal{T} . Now, two possibilities are

in order: either the quotient a/b is not a rational number, thus \mathcal{H}_0 defines a non-resonant system and the normal form theory for polynomial Hamiltonians [55, 34] yields a system of dimension zero with trivial phase space; either a/b is a negative or positive integer and the normal form approach yields a one-dimensional phase space if we choose $\mathcal{T} = \mathcal{H}_0$.

If there are resonances, a and b can be taken integers and relatively primes without loss of generality. Moreover, we can always suppose that $|b| \geq |a|$.

The invariants of the normalization are taken as:

$$\varphi_1 = x X, \quad \varphi_2 = y Y, \quad \varphi_3 = x^{|b|} Y^{|a|}, \quad \varphi_4 = X^{|b|} y^{|a|}.$$

Note that φ_3 and φ_4 are polynomials of degree $|a| + |b|$. There are four linearly independent invariants, and are different according to the signs of a and b .

The identity which connects them is:

$$\varphi_1^{|b|} \varphi_2^{|a|} = \varphi_3 \varphi_4. \quad (16)$$

We add the condition $\mathcal{T} = c \in \mathbf{R}$. Putting φ_2 in terms of φ_1 , formula (16) is now:

$$\varphi_1^{|b|} (c - a \varphi_1)^{|a|} = b^{|a|} \varphi_3 \varphi_4. \quad (17)$$

The reduced Hamiltonian \mathcal{K} is computed straightforwardly using the approach of [34], after truncation defines a system of one degree of freedom in φ_1 , φ_2 , φ_3 and φ_4 , that is in the orbit space defined through (16).

The singularities can be determined by parametrizing Equation (16) in the frame defined by φ_1 , φ_2 , φ_3 and φ_4 . The gradient vector is

$$\left(|b| \varphi_1^{|b|-1} \varphi_2^{|a|}, |a| \varphi_1^{|b|} \varphi_2^{|a|-1}, -\varphi_4, -\varphi_3 \right).$$

Now, three possibilities are in order: i) if $|b| > |a| > 1$ the gradient vanishes at $(0, \varphi_2, 0, 0)$ and $(\varphi_1, 0, 0, 0)$; ii) if $|b| > |a| = 1$ then the gradient vanishes at $(0, \varphi_2, 0, 0)$ and iii) if $|b| = |a| = 1$ the gradient is null at $(0, 0, 0, 0)$. Now we take into account the condition $a \varphi_1 + b \varphi_2 = c$ and pass to the three-dimensional space determined by φ_1 , φ_3 and φ_4 . Then, the singular points are $(0, 0, 0)$ and $(c/a, 0, 0)$ in subcase i); $(0, 0, 0)$ in subcase ii) and $(0, 0, 0)$ in subcase iii) if and only if $c = 0$. That is, one has zero singular points if $|b| = |a| = 1$ and $c \neq 0$, two singular points if $|b| > |a| > 1$ and $c \neq 0$ and one singular point in the rest of the cases.

Then, the reduction is regular only if $|b| = |a| = 1$ and $c \neq 0$. Otherwise it is singular. Several phase spaces are depicted in Figures 1 and 2.

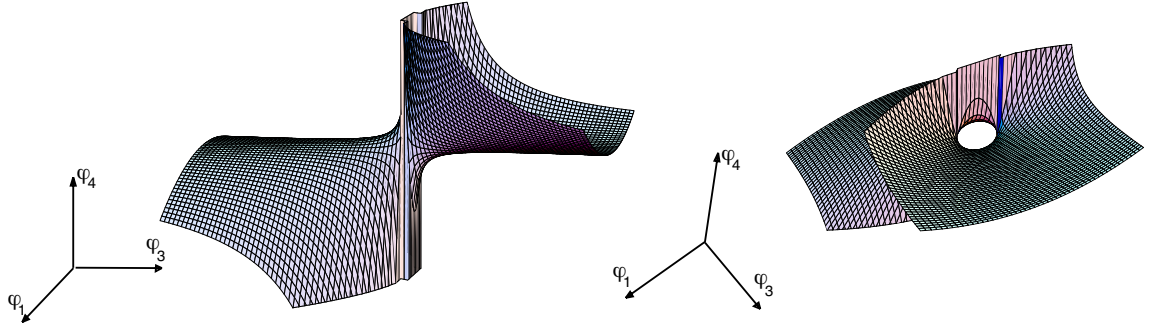


Figure 1: Two views of the reduced phase space for $\mathcal{T} = axX + byY$, $|a| = |b|$ and $c \neq 0$. The surface is regular.

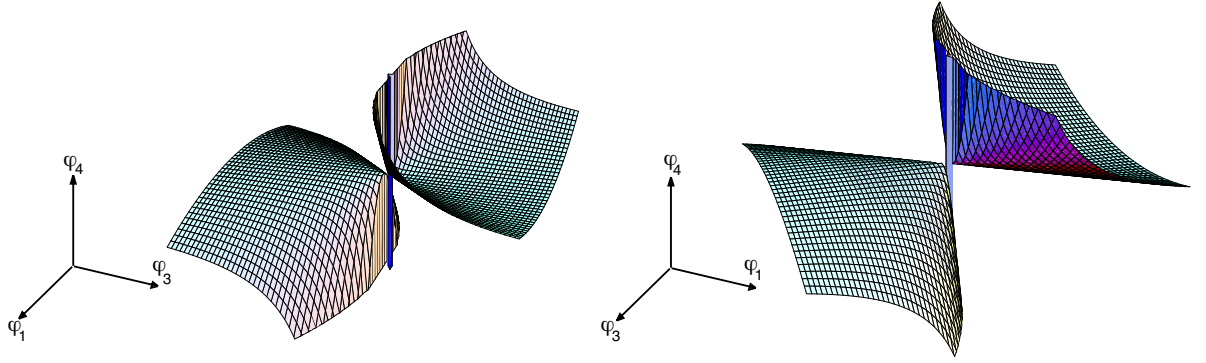


Figure 2: Two views of the reduced phase space for $\mathcal{T} = axX + byY$, $|a| = |b|$ and $c = 0$. The origin is the only singular point of the surface.

4.2 A perturbed Keplerian system

Here we briefly analyze the reduction procedure for artificial satellites orbiting the Earth at low altitudes. We do not plan to give a full theory of artificial satellites, but to present the guidelines for the construction of a normal form for some artificial satellites, see also [39, 40, 41]. The gravity potential written in spherical co-ordinates (r, λ, β) in a reference frame fixed to the Earth, admits the representation independent of the time:

$$\mathcal{V} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^n \sum_{0 \leq m \leq n} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \beta), \quad (18)$$

where μ denotes the gravitational constant, α is the mean equatorial radius of the Earth, C_{nm} and S_{nm} stand for the tesseral coefficients and P_{nm} is the associated Legendre function of degree n and order m , see the details in [12]. Thus the energy of the system is given by the sum of the unperturbed Hamiltonian — composed by the two-body part and Coriolis part — and the potential \mathcal{V} is the sum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_C + \mathcal{V}$ where, in mixed Delaunay

variables (ℓ, g, ν, L, G, N) and polar-nodal variables $(r, \vartheta, \nu, R, G, N)$ (see the definitions of these co-ordinates in [41]), one has

$$\mathcal{H}_K = -\frac{\mu^2}{2L^2} \quad \text{and} \quad \mathcal{H}_C = -\Omega N,$$

where $L^2 = \mu a$ and a stands for the semi-major axis and N refers to the third component of the angular momentum vector.

In the context of an artificial satellite theory, one needs to order the terms of \mathcal{H} according to an asymptotic expansion in order to build a perturbation theory. In general, the full unperturbed part of the Hamiltonian is placed at zeroth order while the perturbation is distributed at first and second orders. However, as we restrict ourselves to the case of low altitude satellites, where the angular velocity of the Earth (i.e. Ω) is much smaller than the initial mean motion of the satellite, n_0 , we propose a different scheme to distribute \mathcal{H} . This scaling is possible as $|\mathcal{H}_K|$ is much bigger than $\Omega |N|$. Now, if one chooses the small parameter ε equal to Ω/n_0 , then the Keplerian terms remains at zeroth order while the term $-\Omega N$ is placed at first order. Then, as the influence of the terms containing the harmonic coefficients is smaller than the one produced by $-\Omega N$, the terms factorized by C_{nm} and S_{nm} are relegated to higher orders.

In the case of the French SPOT satellite the initial conditions for the semi-major axis, the eccentricity and the orbital inclination are respectively, $a = 7200.141$ km, $e = 0.01$ and $I = 98^\circ$. The perturbing potential is distributed as follows: the term factorized by C_{20} is placed at order two and the rest of the potential, \mathcal{V} , goes to order seven. Now, we have that the small parameter is $\varepsilon = \Omega/n_0 \approx 1/14$. The Hamiltonian of the problem in Whittaker variables reads as a power series of ε :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathcal{H}_2 + \frac{\varepsilon^7}{7!} \mathcal{H}_7, \quad (19)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}, & \mathcal{H}_1 &= -n_0 N, & \mathcal{H}_2 &= -\frac{\mu}{r} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 \bar{C}_{20} P_2(s \sin \vartheta), \\ \mathcal{H}_7 &= -\frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 3} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n \bar{C}_{n0} P_n(s \sin \vartheta) \\ &\quad - \frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^n \sum_{1 \leq m \leq n} (\bar{C}_{nm} \cos m \lambda + \bar{S}_{nm} \sin m \lambda) P_{nm}(s \sin \vartheta), \end{aligned}$$

with $s = \sin I = (1 - (N/G)^2)^{1/2}$. We still maintain the spherical longitude λ for simplicity in the notation, assuming that it must be expressed in polar-nodal variables. Besides the ‘‘bar’’ harmonic coefficients satisfy the relations

$$C_{20} = \frac{\varepsilon^2}{2!} \bar{C}_{20}, \quad C_{nm} = \frac{\varepsilon^7}{7!} \bar{C}_{nm} \quad \text{and} \quad S_{nm} = \frac{\varepsilon^7}{7!} \bar{S}_{nm}, \quad \text{for } n \geq 3, m \geq 0 \text{ or } n = 2, m \geq 1.$$

Once the Hamiltonian is written adequately, we apply a symplectic transformation with the aim of doing L a formal integral and eliminating ℓ from the normal form \mathcal{K} .

As a first step we have to put \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_7 in terms of non-negative powers of R and integer powers of r . Then we have to take \mathcal{K}_i as the averages:

$$\mathcal{K}_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{\mathcal{H}}_i d\ell \quad \text{for} \quad i \geq 2,$$

where $\widetilde{\mathcal{H}}_i$ is calculated following the instructions provided by the Lie transformation.

We have pushed the computations of the normal form to order nine, that is, the global error of our computations is of the size $\varepsilon^{10} \approx 3.45 \cdot 10^{-12}$. Up to order seven, the procedure is carried out in a standard manner, resulting equivalent results to those obtained by Coffey and Deprit for the zonal problem (e.g. considering only the first sum in \mathcal{H}_7 , see [7] for details). Nevertheless, in the calculation of \mathcal{K}_8 , we have to deal with terms of the type $P_i \varphi \cos ih$ and $Q_i \varphi \sin ih$ (where $h \equiv \nu$ is the argument of the node, $\varphi = f - \ell$ is the difference between the true and mean anomaly and is called the equation of the centre, P_i and Q_i are functions of the moments). The appearance of these terms is due to the fact that in the Lie process one needs to compute $\{-n_0 H, \mathcal{W}_7\}$, where $H \equiv N$ and \mathcal{W}_7 stands for the generator of normalization at order seven. Therefore, the calculation of the quadrature of φ over ℓ must be done so that to obtain the expression of the generator of order eight in closed form. While these terms do not contribute to the transformed Hamiltonian of order eight (i.e. their average with respect to the mean anomaly is zero), one needs to calculate their primitives with respect to ℓ in order to complete the generating function \mathcal{W}_8 .

Now the intermediate Hamiltonian $\widetilde{\mathcal{H}}_8$ is computed in closed form. Now one expresses everything in terms of $z_E = \exp(i E)$ (E designates the eccentric anomaly) and the integral $\int \widetilde{\mathcal{H}}_8^\#(z_E) dz_E$ must be calculated. At this step, all the terms in $\widetilde{\mathcal{H}}_8^\#$ are of the form

$$z_E^q, \quad z_E^q \text{Li}_2[(1 + \eta)^{-1} e z_E], \quad z_E^q \text{Li}_2[(1 + \eta)^{-1} e z_E^{-1}]$$

and \mathcal{W}_9 is computed in closed form, yielding the polylogarithmic function of third order. (The variable e denotes the eccentricity of the orbit, that is, $e = (1 - (G/L)^2)^{1/2}$ and η is defined such that $\eta^2 + e^2 = 1$.) See Figure 3 for the representation of the polylogarithmic function of complex argument. The process can be continued to higher orders in closed form. At order ten one obtains the polylogarithm of fourth order and so on. Note that Hamiltonian $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \varepsilon \mathcal{K}_1 + (\varepsilon^2/2) \mathcal{K}_3 + \dots + (\varepsilon^9/9!) \mathcal{K}_9$ defines a dynamical system with two degrees of freedom in the variables g and h .

Once \mathcal{K} is determined we should perform the reduction process. Since \mathcal{K} depends only on two angles, it defines a 2DOF system, which is diffeomorphic to $S^2 \times S^2$. The details on the reduction can be seen in Ref. [9]. Notice that the equilibria of the Hamiltonian defined

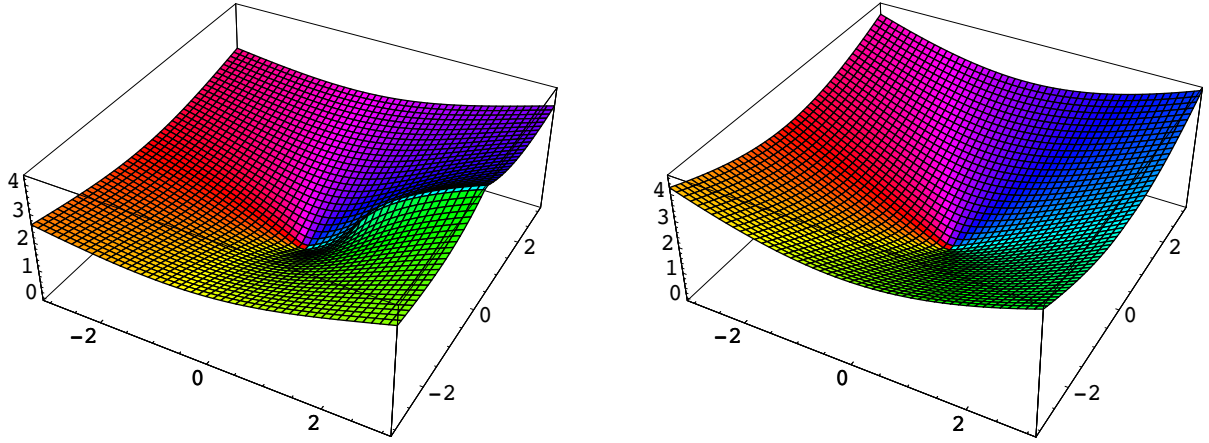


Figure 3: On the left, the polylogarithm of second order with complex argument. On the right, the polylogarithm of order 6 with complex argument.

on $S^2 \times S^2$ correspond to periodic orbits of the original Hamiltonian in the real system. See also details and more examples in Refs. [40, 41].

4.3 A non-Hamiltonian EDO

One of the applications of the theory developed before concerns the cases of polynomial dynamical systems whose linear parts have nilpotent real matrices. In these situations the application of the Normal Form Theorem [32, 13, 4] does not produce a new formal symmetry. The full classification for two- and three-dimensional cases has been treated in [67]. Here we deal with 3×3 -matrices with real entries. See also more details in Ref. [46].

Consider the system

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (20)$$

where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbf{R}^3$ and A is either

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let us suppose that the vector field $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ has three components $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ and $f_3(\mathbf{x})$ corresponding to arbitrary Taylor series in \mathbf{x} starting at degree two. Clearly A_1 , A_2 and A_3 are nilpotent since $A_1^2 = A_2^2 = 0$ and $A_3^3 = 0$. Systems (20) are studied from the Stability Theory point of view with the aim of analyzing if the origin can be stable. Besides, scalar equations of the form $d^3x/dt^3 + f(x, dx/dt, d^2x/dt^2)$, where f has a Taylor expansion starting at degree two, can be written in the form (20) with $A = A_2$. Because of symmetric

considerations we study (20) with $A = A_1$ and A_2 , as the case A_3 can be readily inferred from the analysis for A_1 .

Note that due to the form taken by the function \mathbf{f} we have the freedom of calculating the normal forms and the generating functions in a compact manner, which allows to simplify the notations and calculations. Besides, the Lie transformations are executed easily to any order and in one step. In a real application we should cut the Taylor expansions at an order M but the rest of the formulae apply straightforwardly. In addition to this, we should scale the system defined by (20), say $\mathbf{x} \rightarrow \varepsilon \mathbf{x}'$, so as to introduce a dimensionless small parameter $\varepsilon > 0$. In this manner the equation would appear in the appropriate setting to apply a perturbation theory. However we can avoid this step as we do the Lie transformation in one step. Thus from now on we can fix the value of ε , that is, without loss of generality we make $\varepsilon = 1$.

First of all we apply the Normal Form Theorem. Since $A = A_N$ and $A_S = 0$ (for both A_1 and A_2), no symmetry is going to appear as a consequence of this transformation and therefore the Splitting Lemma does not apply. Note that they are the only matrices (and their Jordan–equivalent) in three dimensions whose semisimple part is zero. More concretely, Equations (20) are converted into:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad (21)$$

with $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^t$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^t$ and

$$g_1(\mathbf{y}) = \alpha(y_1, y_2), \quad g_2(\mathbf{y}) = y_2 \beta(y_1, y_2), \quad g_3(\mathbf{y}) = y_3 \beta(y_1, y_2) + \gamma(y_1, y_2),$$

for $A = A_1$ whereas for $A = A_2$

$$g_1(\mathbf{y}) = \alpha(y_1), \quad g_2(\mathbf{y}) = \frac{y_2}{y_1} \alpha(y_1) + \beta(y_1),$$

$$g_3(\mathbf{y}) = \frac{y_2^2}{2y_1^2} \alpha(y_1) + \frac{y_2}{y_1} \beta(y_1) + \gamma(y_1, 2y_1 y_3 - y_2^2).$$

For the choice $A = A_1$ the Taylor series of $\alpha(y_1, y_2)$ and $\gamma(y_1, y_2)$ start at degree two and the Taylor series of $\beta(y_1, y_2)$ starts at degree one. For $A = A_2$ the Taylor series $\alpha(y_1)$, $\beta(y_1)$, $\gamma(y_1, 2y_1 y_3 - y_2^2)$ start at degree two. So, in all the cases the vector field \mathbf{g} has polynomial components in \mathbf{y} starting at degree two. The corresponding generating functions are also polynomial as we have made use of the Normal Form Theorem. Because systems (21) have been constructed through the application of the Normal Form Theorem, then $[A^t \mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y})] = \mathbf{0}$. As the two systems (20) and (21) are defined over \mathbf{R}^3 , their reduced phase spaces coincide although the transformed systems are simpler than the original ones.

As a second choice we take $T = A_1$ and $T = A_2$, respectively. Note that there are other matrices commuting with A_1 and A_2 but here we only focus on the determination of formal

symmetries with $T = A$. Now, we have to solve $\mathcal{L}_A(\mathbf{w}) + \mathbf{g} = \mathbf{f}$, where $\mathbf{g} \in \ker(\mathcal{L}_T)$ and \mathbf{w} is a solution of $\mathcal{L}_A(\mathbf{w}) = \mathbf{f} - \mathbf{g}$. The application of Theorem 2.2 yields the reduced system

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad (22)$$

where for $A = A_1$

$$g_1(\mathbf{y}) = \alpha(y_1, y_3), \quad g_2(\mathbf{y}) = y_2 \beta(y_1, y_3) + \gamma(y_1, y_3), \quad g_3(\mathbf{y}) = y_3 \beta(y_1, y_3), \quad (23)$$

and for $A = A_2$

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{y}) &= \frac{y_1}{y_3} \alpha(y_3) + \frac{y_2}{y_3} \beta(y_3) + \gamma(2y_1 y_3 - y_2^2, y_3), \\ g_2(\mathbf{y}) &= \frac{y_2}{y_3} \alpha(y_3) + \beta(y_3), \quad g_3(\mathbf{y}) = \alpha(y_3). \end{aligned} \quad (24)$$

When $A = A_1$ the Taylor series of $\alpha(y_1, y_2)$ and $\gamma(y_1, y_3)$ start at degree two and the Taylor series of $\beta(y_1, y_3)$ at degree one. When $A = A_2$ the Taylor series $\alpha(y_3)$, $\beta(y_3)$, $\gamma(2y_1 y_3 - y_2^2, y_3)$ start at degree two. Again, in all the cases the vector field \mathbf{g} has homogeneous polynomial components in \mathbf{y} starting at degree two.

For $A = A_1$

$$\begin{aligned} w_1(\mathbf{y}) &= -\frac{y_2}{y_3} \alpha(y_1, y_3) + \frac{1}{y_3} \int f_1(\mathbf{y}) dy_2, \\ w_2(\mathbf{y}) &= -\frac{y_2^2}{y_3} \beta(y_1, y_3) - \frac{y_2}{y_3} \gamma(y_1, y_3) + \frac{1}{y_3} \int f_2(\mathbf{y}) dy_2 \\ &\quad + \frac{1}{y_3^2} \int \left(\int f_3(\mathbf{y}) dy_2 \right) dy_2, \\ w_3(\mathbf{y}) &= -y_2 \beta(y_1, y_3) + \frac{1}{y_3} \int f_3(\mathbf{y}) dy_2. \end{aligned}$$

For $A = A_2$, the expression for $\mathbf{w}(\mathbf{y})$ is more involved. Indeed, it is not possible to give an explicit formula in terms of a general vector field \mathbf{f} . Hence, one needs to substitute \mathbf{f} in terms of polynomials starting at degree two. We have done it with Mathematica but for an arbitrary polynomial vector field \mathbf{f} of degree two and with three components; the resulting expression for \mathbf{w} is quite big. For the two choices of A , \mathbf{w} is a rational function having y_3 in the denominators. Thus the reductions are not defined if $y_3 = 0$. From this point of view, the open domain (subset of \mathbf{R}^3) which has to be chosen to define the transformation must exclude the line $y_3 = 0$. This makes the normal forms useless for analyzing the origin. However, it is also possible to use (22) in other points of the corresponding reduced phase space.

Note that $[T\mathbf{y}, A\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})] = \mathbf{0}$ for both normal forms. Therefore $T\mathbf{y}$ is a symmetry of the transformed systems, up to a certain order, and we can apply Theorem 3.1. We obtain two functionally-independent first integrals in both cases. For $A = A_1$ one has $\varphi_1(\mathbf{y}) = y_1$

and $\varphi_2(\mathbf{y}) = y_3$ whereas for $A = A_2$, $\varphi_1(\mathbf{y}) = 2y_1y_3 - y_2^2$ and $\varphi_2(\mathbf{y}) = y_3$. In both cases we have $r = s = 2$ and then $m - s = 1$.

For $A = A_1$ an adequate choice of ϑ (the co-ordinate associated to the Lie group G_T) consists in identifying it with y_2 . The reason is that φ_1 and φ_2 are precisely y_1 and y_3 . Thus, equation (23) becomes the polynomial system:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \alpha(\varphi_1, \varphi_2), \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \varphi_2 \beta(\varphi_1, \varphi_2). \quad (25)$$

The remaining one-dimensional system is defined by the polynomial system:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \varphi_2 + \gamma(\varphi_1, \varphi_2) + \beta(\varphi_1, \varphi_2) \vartheta.$$

Note that the second equation is linear in ϑ . Besides, the dynamics (existence of equilibria, periodic trajectories and asymptotic expressions of the analytic first integrals) of the initial system (20) can be analyzed in Equation (25), excepting in the axis $y_3 = 0$.

For $A = A_2$ we can make $\vartheta = y_2$ (we also could have chosen $\vartheta = y_1$). Thus, the splitting is as follows:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2\varphi_1}{\varphi_2} \alpha(\varphi_2) + 2\varphi_2 \gamma(\varphi_1, \varphi_2), \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \alpha(\varphi_2), \quad (26)$$

whereas the one-dimensional equation reads as:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \varphi_2 + \beta(\varphi_2) + \frac{\alpha(\varphi_2)}{\varphi_2} \vartheta.$$

Note that the second equation is linear in ϑ and both systems are polynomial in φ_1, φ_2 . On this occasion, except for the axis $y_3 = 0$, we can analyze system (26) to infer qualitative properties of the departure system (20).

The Lie group associated to each T is the one-dimensional set $G_T = \{\exp(Tt) \in GL(\mathbf{R}^3) \mid t \in \mathbf{R}\}$, where for $T = A_1$ and $T = A_2$ we have respectively:

$$\exp(Tt) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(Tt) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We define the natural action

$$\begin{aligned} \varrho_T : G_T \times (\mathbf{R}^3 \setminus \{y_3 = 0\}) &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \setminus \{y_3 = 0\} \\ (\exp(Tt), \mathbf{y}) &\longmapsto \exp(Tt) \mathbf{y}. \end{aligned}$$

These mappings are natural actions of G_T on $\mathbf{R}^3 \setminus \{y_3 = 0\}$. Thus, systems (25) and (26) are defined over $(\mathbf{R}^3 \setminus \{y_3 = 0\})/G_T$, which are the reduced phase spaces. As for the two choices of T , the corresponding φ_1 runs over \mathbf{R} whereas φ_2 runs over $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, then both reduced

phase spaces can be identified with $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$, that is, $(\mathbf{R}^3 \setminus \{y_3 = 0\})/G_T \cong \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$. This time, the transformation has permitted to reduce the dimension of the phase space by one.

Notice that if one is interested in studying the initial system (20) in a vicinity of $y_3 = 0$ by means of normal form calculations, the only way is to resort to the analysis of system (21) in \mathbf{R}^3 .

Finally, the isotropy subgroups are trivial for all $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{y_3 = 0\}$. This implies that both reductions are regular in this subset of \mathbf{R}^3 .

5 New periodic orbits and 2D-tori in the planar Hénon and Heiles family

In the following we plan to analyze the behaviour of the Hénon and Heiles family — see references [21, 18] — given by the Hamilton function $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ where

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0(x, y, X, Y) &= \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2), \\ \mathcal{H}_1(x, y) &= \alpha x^3 + \beta x y^2.\end{aligned}\tag{27}$$

The unknown $\mathbf{x}' = (x, y, X, Y)$ is formed by the positions x, y and their corresponding velocities X, Y . Therefore, the physical dimensions of x and y are length whereas X and Y are length/time. Besides, ω_1 and ω_2 are strictly positive constants with dimensions 1/time. Finally, α and β are real constants with dimensions 1/(length time²). This problem has been dealt with in Ref. [43], here

First, a dimensionless small parameter $\varepsilon > 0$ is introduced by means of the symplectic change $\mathbf{x}' \rightarrow \varepsilon \mathbf{x}$. Dividing then the new Hamiltonian by ε^2 and using the same notation for \mathcal{H} and for the variables, e.g. $\mathbf{x} = (x, y, X, Y)$, we arrive at the new system defined by $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1$, with the same expressions for \mathcal{H}_0 and \mathcal{H}_1 as in (27). Now, \mathcal{H} is associated with the four-dimensional differential system $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ with $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{F}_1(\mathbf{x})$. Besides, $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = A \mathbf{x}$, $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = (0, 0, -3\alpha x^2 - \beta y^2, -2\beta x y)^t$ and

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notice that as the eigenvalues of A are $\pm i\omega_1$ and $\pm i\omega_2$ (where i designates the imaginary unit), the original system is already in the centre manifold and no reductions to the stable or unstable manifolds are possible.

Whenever ω_1/ω_2 is rational, the “standard” normal form transformation for Hamilton functions, see for instance [10], can be applied to system \mathcal{H} producing a new Hamiltonian

\mathcal{K} , such that, truncating this latter at any order, it enjoys the function $\mathcal{K}_0 \equiv \mathcal{H}_0$ as a new integral. Therefore, by applying singular reduction in the symplectic context, the truncated Hamilton function \mathcal{K} is written as a system of one degree of freedom. Now, depending on the value of ω_1/ω_2 , that is, on the type of resonance, we will have a different reduced phase space, and consequently a different dynamics. For instance, in the case 1/1, the reduced phase space is a two-sphere, but for $\omega_1/1$ with $\omega_1 > 1$ it is a balloon, and for ω_1/ω_2 with $\omega_1 > \omega_2 > 1$, it has the shape of an onion, see also [45].

However, if ω_1/ω_2 is not a rational number things go rather different. In this situation it is still possible to apply the normalization procedure in such a way that \mathcal{K}_0 becomes a new integral up to a certain order. Nevertheless, as there is no pair of integers (i, j) satisfying $i\omega_1 + j\omega_2 = 0$, e.g. the resonant condition, no term is kept in the new Hamiltonian, in other words, $\mathcal{K}_i \equiv 0$ for $i \geq 1$. Therefore, truncating at any order \mathcal{K} defines a system of zero degrees of freedom with a trivial dynamics. Hence, the calculation of the normal form (the usual one) does not work for our requirements of analyzing the dynamics of system \mathcal{H} by means of normal forms.

Alternatively, we can use the theory developed in the previous sections computing various normal forms and various invariant manifolds. In fact, we restrict ourselves to the case in which ω_1/ω_2 is not rational and such that $i\omega_1 + j\omega_2 \not\approx 0$ with $i, j \in \{-5, \dots, 5\}$. Indeed, in case that $i\omega_1 + j\omega_2 \approx 0$ with $i, j \in \{-5, \dots, 5\}$, we would use a detuning “trick”, see some examples of this technique in Ref. [51, 56].

Then, we need linear vector fields commuting with the Hamiltonian — using the Lie bracket operator — with $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, i.e. we look for matrices T commuting with A . Thus, we shall require T to be of the form $T = \mathcal{J}\bar{T}$ where \bar{T} is a symmetric matrix. So, the matrix \bar{T} must be the following: $\bar{T} = \text{diag}\{\omega_1^2 t_1, \omega_2^2 t_2, t_1, t_2\}$ with t_1 and t_2 arbitrary constants. Hence, the corresponding integrals associated to T are of the form $\mathcal{T}_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(X^2 + \omega_1^2 x^2)$ (related with $T_a = \mathcal{J} \text{diag}\{\omega_1^2, 0, 1, 0\}$ and $\mathbf{T}_a(\mathbf{x}) = T_a \mathbf{x}$) and $\mathcal{T}_b(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(Y^2 + \omega_2^2 y^2)$ (related with $T_b = \mathcal{J} \text{diag}\{0, \omega_2^2, 0, 1\}$ and $\mathbf{T}_b(\mathbf{x}) = T_b \mathbf{x}$) and any linear combination $r_1 \mathcal{T}_a + r_2 \mathcal{T}_b$. It means that we have two functionally-independent integrals to perform normal forms computations. Observe now that if we take $\mathcal{T} = \mathcal{T}_a + \mathcal{T}_b$ we shall arrive at the Hamiltonian \mathcal{K} described before. Thus, we discard this option and maintain two candidates: \mathcal{T}_a and \mathcal{T}_b . So, we shall make two normalizations.

5.1 Two different normal forms and reductions

5.1.1 MAKING \mathcal{T}_a THE NEW INTEGRAL

We want to construct a Hamilton function $\mathcal{K}_a = \mathcal{K}_{a0} + \varepsilon \mathcal{K}_{a1} + \dots + (\varepsilon^M/M!) \mathcal{K}_{aM} + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$ such that $\{\mathcal{K}_a, \mathcal{T}_a\} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$. Thus, starting at order 1 we determine, step by step, a pair $(\mathcal{K}_{ai}, \mathcal{W}_{ai})$ verifying $\{\mathcal{K}_{ai}, \mathcal{T}_a\} = 0$ and $\mathcal{L}_{\mathbf{F}_0}(\mathcal{W}_{ai}) + \mathcal{K}_{ai} = \widetilde{\mathcal{H}}_{ai}$, where $\widetilde{\mathcal{H}}_{ai}$ collects the terms known from the previous orders plus \mathcal{H}_i . Implicitly, we pass from the co-ordinates \mathbf{x} to the new co-ordinates $\mathbf{y} = (x', y', X', Y')$ and the direct and inverse changes of variables can be constructed, formally, with the help of the generator \mathcal{W}_a .

We use complex-symplectic variables (u, v, U, V) :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{\imath}{\omega_1} X \right), & U &= \frac{1}{\sqrt{2}} (X - \imath \omega_1 x), \\ v &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(y - \frac{\imath}{\omega_2} Y \right), & V &= \frac{1}{\sqrt{2}} (Y - \imath \omega_2 y), \end{aligned}$$

to perform the computation in an easier manner. Now, we have that $\mathcal{H}_0 = \imath(\omega_1 u U + \omega_2 v V)$ and the perturbation \mathcal{H}_1 is a homogeneous polynomial in u, v, U, V of degree three. Besides, the terms of the perturbation \mathcal{H}_i are homogeneous polynomials of degree $i+2$ in the complex-symplectic variables. The Lie operator associated to the principal part of \mathcal{H} reads as

$$\mathcal{L}_{\mathbf{F}_0} = \imath \left[\omega_1 \left(u \frac{\partial}{\partial u} - U \frac{\partial}{\partial U} \right) + \omega_2 \left(v \frac{\partial}{\partial v} - V \frac{\partial}{\partial V} \right) \right]. \quad (28)$$

Thus, the monomial $z = u^j v^k U^\ell V^m$, for positive integers j, k, ℓ and m , belongs to $\ker(\mathcal{L}_{\mathcal{T}_a})$, e.g. satisfies $\{z, \mathcal{T}_a\} = 0$, if and only if $j = \ell$. Moreover, if z is not in this kernel we take the monomial $w = \imath z / (\omega_1(j - \ell) + \omega_2(k - m))$ and then the identity $\mathcal{L}_{\mathbf{F}_0}(w) = z$ holds. This completes the way the normal form transformation can be carried out at any order $i \geq 1$. We should stress that if $j \neq \ell$ the expression $\omega_1(j - \ell) + \omega_2(k - m)$ never vanishes, due to the non-resonant condition satisfied by ω_1 and ω_2 .

Using the symbolic processor Mathematica, Version 4.1 [65], we have pushed the computation to calculate the new Hamiltonian and the corresponding generating function up to third order (fifth-degree terms) yielding that $\mathcal{K}_{a1} = \mathcal{K}_{a3} \equiv 0$, but we do not write down the results in Cartesians as they involve quite long expressions.

Now we can determine a formal integral of Hamiltonian \mathcal{H} , by means of \mathcal{T}_a and \mathcal{W}_a . Simply, we have to use Equations (11) and (12) up to $M = 3$, obtaining a polynomial \mathcal{T}_a^* in x, y, X and Y of degree 3, functionally independent of \mathcal{H} and such that $\{\mathcal{H}, \mathcal{T}_a^*\} = 0$. The lowest degree terms of \mathcal{T}_a^* are $\frac{1}{2}(X^2 + \omega_1^2 x^2)$.

Next we calculate the first integrals — the invariant polynomials — associated to the system $d\mathbf{y}(t)/dt = T_a \mathbf{y}(t)$, i.e. the equation related to the constant of motion \mathcal{T}_a . They are readily determined using the procedure described in Subsection 3.1. We obtain three linearly

and functionally-independent polynomials: $\varphi_1 = y'$, $\varphi_2 = Y'$ and $\varphi_3 = \frac{1}{2}(X'^2 + \omega_1^2 x'^2)$, see also [45]. Thus, $s \equiv r = 3$ and we transform the original system \mathcal{H} into the system \mathcal{K}_a which, after being truncated, can be entirely written in terms of φ_1 , φ_2 and φ_3 . Now, we fix a value for $\varphi_3 \equiv c \geq 0$ arriving at a Hamiltonian $\bar{\mathcal{K}}_a(\varphi_1, \varphi_2; \varepsilon, c)$ which defines a system (family of Hamiltonians) of one degree of freedom in the reduced phase space whose generators are $\varphi_1 \in \mathbf{R}$ and $\varphi_2 \in \mathbf{R}$. The constants $\alpha, \beta, \varepsilon, \omega_1$ and ω_2 are the external parameters of the system, whereas c is the internal one. This parametrization yields the plane $O \varphi_1 \varphi_2$, and corresponds to the surface where $\bar{\mathcal{K}}_a$ is defined and therefore, the reduction is regular. Specifically, after dropping some constant terms, we have

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_a(\varphi_1, \varphi_2; \varepsilon, c) &= \frac{1}{2}(\varphi_2^2 + \omega_2^2 \varphi_1^2) \\ &+ \frac{\varepsilon^2 \beta}{2\omega_1^4(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \{ \beta \omega_1^2 \varphi_1^2 [-2c + (\omega_1^2 - 2\omega_2^2) \varphi_1^2 - 2\varphi_2^2] \\ &+ 3\alpha c [(\omega_1^2 - 3\omega_2^2) \varphi_1^2 - \varphi_2^2] \}. \end{aligned} \quad (29)$$

Notice that, as the transformation is symplectic, we have no need of computing explicitly the splitting (i.e. the co-ordinate of the orbit space, which has dimension one) though we can infer that it is an angle. Indeed, using action-angle variables $(\psi_1, I_1, \psi_2, I_2)$ with $I_1 = \frac{1}{2}(X'^2 + \omega_1^2 x'^2)$, $I_2 = \frac{1}{2}(Y'^2 + \omega_2^2 y'^2)$, the angle ψ_1 defined such that $\cos(\psi_1) = X'/(\omega_1^2 x'^2 + X'^2)^{1/2}$, $\sin(\psi_1) = \omega_1 x'/(\omega_1^2 x'^2 + X'^2)^{1/2}$ and the angle ψ_2 defined through $\cos(\psi_2) = Y'/(\omega_2^2 y'^2 + Y'^2)^{1/2}$, $\sin(\psi_2) = \omega_2 y'/(\omega_2^2 y'^2 + Y'^2)^{1/2}$, we have that the fact of calculating $\bar{\mathcal{K}}_a$ is completely equivalent to the “elimination” of the associated angle ψ_1 . That is, the co-ordinate $\vartheta \in G_{T_a}$ should be chosen as the angle ψ_1 .

Now, we are ready to construct the differential system in φ_1 and φ_2 , either using the explanation given immediately after Theorem 3.1 or equivalently, taking into account that $\dot{\varphi}_i = \{ \varphi_i, \bar{\mathcal{K}}_a \}$ for $i = 1, 2$. The result is:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \varphi_2 + \frac{\varepsilon^2 \beta}{\omega_1^4(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \varphi_2 (3\alpha c + 2\beta \omega_1^2 \varphi_1^2), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= -\omega_2^2 \varphi_1 + \frac{\varepsilon^2 \beta}{\omega_1^4(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \varphi_1 \{ 3\alpha c (\omega_1^2 - 3\omega_2^2) \\ &\quad - 2\beta \omega_1^2 [c - (\omega_1^2 - 2\omega_2^2) \varphi_1^2 + \varphi_2^2] \}, \end{aligned} \quad (30)$$

which corresponds to the first equation of (14).

Observe that the equilibria of the equation (30) are those points of the form

$$(\varphi_1(\alpha, \beta, \omega_1, \omega_2, \varepsilon, c), \varphi_2(\alpha, \beta, \omega_1, \omega_2, \varepsilon, c))$$

for which $\dot{\varphi}_1 \equiv \dot{\varphi}_2 = 0$. These points are in correspondence with families, parametrized by $c \geq 0$, of periodic orbits of the system defined by \mathcal{H} , as the variable eliminated ψ_1 is an

angle. We shall compute them next. Moreover, the periodic orbits of (30) will represent families of two-dimensional “deformed” tori of the departure Hamiltonian with parameter c . Ways to obtain periodic orbits of differential systems are standard, see reference [51], but the process to obtain them can be quite cumbersome due to the number of parameters we have. Therefore, we shall not search them in the present work.

As well, it is possible to construct the (non-symplectic) three-dimensional differential system, adding the equation for φ_3 . The equilibria of such a system in \mathbf{R}^3 would give rise to periodic orbits of the fourth-dimensional system, the periodic orbits of the reduced system would refer to two-dimensional deformed invariant tori whereas the two-dimensional invariant tori would be in correspondence with three-dimensional tori of the original Hamiltonian. Following this alternative we would get a richer understanding of the original system, but we would lose the Hamiltonian character of the process and, for example, we could not apply KAM theory.

5.1.2 MAKING \mathcal{T}_b THE NEW INTEGRAL

This time we build a Hamiltonian $\mathcal{K}_b = \mathcal{K}_{b0} + \varepsilon \mathcal{K}_{b1} + \dots + (\varepsilon^M / M!) \mathcal{K}_{bM} + \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$ such that $\{\mathcal{K}_b, \mathcal{T}_b\} = \mathcal{O}(\varepsilon^{M+1})$. As in the latter section, we have to proceed step by step, calculating first \mathcal{K}_{b1} , then \mathcal{W}_{b1} , after that \mathcal{K}_{b2} , then \mathcal{W}_{b2} and so on. The passage from \mathcal{H} to \mathcal{K}_b is performed through the change of variable $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = (x', y', X', Y')$ which can be determined —up to order M — by means of \mathcal{W}_b . Notice that \mathbf{y} has nothing to do with the variable \mathbf{y} introduced in Section 5.1.1.

Similarly to the previous case, for positive integers j, k, ℓ and m , the monomial $z = u^j v^k U^\ell V^m$ belongs to $\ker(\mathcal{L}_{\mathcal{T}_b})$, e.g. $\{z, \mathcal{T}_b\}$ is identically null, if and only if $k = m$. Besides, if z is not in this kernel we take $w = \imath z / (\omega_1(j - \ell) + \omega_2(k - m))$ and the identity $\mathcal{L}_{\mathbf{F}_0}(w) = z$ is readily satisfied. Therefore, the transformation can be executed up to any order $i \geq 1$. Now, we remark that if $k \neq m$ then $\omega_1(j - \ell) + \omega_2(k - m)$ is not null. The calculations have been carried out to order three.

The determination of a formal integral of Hamiltonian \mathcal{H} is carried out by means of \mathcal{T}_b and \mathcal{W}_b . The application of Equations (11) and (12) up to $M = 3$, yields a polynomial \mathcal{T}_b^* in x, y, X and Y of degree 3, functionally independent of \mathcal{H} and such that $\{\mathcal{H}, \mathcal{T}_b^*\} = 0$. This time, the quadratic part of \mathcal{T}_b^* is $\frac{1}{2}(Y^2 + \omega_2^2 y^2)$.

On this occasion the invariants associated to $d\mathbf{y}(t)/dt = \mathcal{T}_b \mathbf{y}(t)$ (i.e. with the constant of motion \mathcal{T}_b) are: $\varphi_1 = x'$, $\varphi_2 = X'$ and $\varphi_3 = \frac{1}{2}(Y'^2 + \omega_2^2 y'^2)$. Again $s \equiv r = 3$ and the original Hamiltonian \mathcal{H} is converted into \mathcal{K}_b which, after truncation is expressed as a function of φ_1 , φ_2 and φ_3 . Fixing a value for $\varphi_3 \equiv c \geq 0$ we arrive at the Hamiltonian $\bar{\mathcal{K}}_b(\varphi_1, \varphi_2; \varepsilon, c)$ which defines a system of one degree of freedom lying on a plane parametrized by φ_1 and φ_2 . The

reduction is again regular. As in the latter section, c is the internal parameter, whereas the rest of constants stand for the external ones. After dropping some constant terms we obtain:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{K}}_b(\varphi_1, \varphi_2; \varepsilon, c) &= \frac{1}{2} (\varphi_2^2 + \omega_1^2 \varphi_1^2) + \frac{\varepsilon}{2\omega_2} \varphi_1 (\beta c + 2\alpha \omega_2^2 \varphi_1) \\
&+ \frac{\varepsilon^2 \beta^2 c}{\omega_2^2 (\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \varphi_1^2 + \frac{\varepsilon^3 \beta^2 c}{24\omega_2^6 (\omega_1^2 - \omega_2^2) (\omega_1^2 - 4\omega_2^2)^2} \varphi_1 \times \\
&\times \{3\alpha \omega_2^2 [-3c\omega_2^2 + 4(\omega_1^4 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 + 6\omega_2^4) \varphi_1^2 + 4(\omega_1^2 - 4\omega_2^2) \varphi_2^2] \\
&+ 2\beta [3c(\omega_1^4 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 + 6\omega_2^4) + 4\omega_2^2 ((-\omega_1^4 + 4\omega_1^2 \omega_2^2 - 12\omega_2^4) \varphi_1^2 \\
&- (4\omega_1^2 - 13\omega_2^2) \varphi_2^2)]\}. \tag{31}
\end{aligned}$$

We do not calculate the co-ordinate of the orbit space but with the same argument we used for \mathcal{T}_a we know that indeed, the angle removed through the transformation is the angle ψ_2 , as it is the conjugate of the action $I_2 = \frac{1}{2} (Y'^2 + \omega_2^2 y'^2)$.

Proceeding as in the latter section, we compute the differential system of equations, yielding:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_1}{dt} &= \varphi_2 - \frac{\varepsilon^3 \beta^2 c}{3\omega_2^4 (\omega_1^2 - \omega_2^2) (\omega_1^2 - 4\omega_2^2)^2} \varphi_1 \varphi_2 \times \\
&\times (-3\alpha \omega_1^2 + 8\beta \omega_1^2 + 12\alpha \omega_2^2 - 26\beta \omega_2^2), \\
\frac{d\varphi_2}{dt} &= -\omega_1^2 \varphi_1 - \frac{\varepsilon}{2\omega_2^2} (\beta c + 6\alpha \omega_2^2 \varphi_1^2) - \frac{2\varepsilon^2 \beta^2 c \varphi_1}{\omega_2^2 (\omega_1^2 - 4\omega_2^2)} \\
&+ \frac{\varepsilon^3 \beta^2 c}{24\omega_2^6 (\omega_1^2 - \omega_2^2) (\omega_1^2 - 4\omega_2^2)^2} \times \\
&\times \{-3c [-3\alpha \omega_2^4 + 2\beta (\omega_1^4 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 + 6\omega_2^4)] \\
&+ 12\omega_2^2 [-3\alpha (\omega_1^4 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 + 6\omega_2^4) \\
&+ 2\beta (\omega_1^4 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 + 12\omega_2^4)] \varphi_1^2 \\
&+ 4\omega_2^2 [-3\alpha \omega_1^2 + 8\beta \omega_1^2 + 12\alpha \omega_2^2 - 26\beta \omega_2^2] \varphi_2^2\}. \tag{32}
\end{aligned}$$

As before, the critical points of (32) are the roots of $\dot{\varphi}_1 \equiv \dot{\varphi}_2 = 0$. These points are related with families of periodic orbits of \mathcal{H} , as the variable eliminated ψ_2 is angular. It will be the subject of next section. Again the periodic orbits of (32) will represent families of two-dimensional tori of \mathcal{H} . It could be possible to work with the differential system formed by $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ and $\dot{\varphi}_3$ with the same considerations mentioned in Section 5.1.1.

5.2 The reduced systems

5.2.1 ANALYSIS OF $\bar{\mathcal{K}}_a$

Solving system (30) with Mathematica produces the following critical points (φ_1, φ_2) in the plane $O\varphi_1\varphi_2$, up to order three, e.g. committing a global error of size ε^4 :

$$(1) (0, 0),$$

$$(2) \left(\pm \frac{\sqrt{\varepsilon^2 (3\alpha - 2\beta) \beta c \omega_1^2 - (9\varepsilon^2 \alpha \beta c + \omega_1^6) \omega_2^2 + 4\omega_1^4 \omega_2^4}}{\varepsilon \beta \omega_1 \sqrt{-2\omega_1^2 + 4\omega_2^2}}, 0 \right),$$

$$(3) \left(\pm \frac{\sqrt{-3\varepsilon^2 \alpha \beta c - \omega_1^6 + 4\omega_1^4 \omega_2^2}}{\sqrt{2}\varepsilon \beta \omega_1}, \pm \frac{\sqrt{-(2\varepsilon^2 \beta^2 c + \omega_1^6) \omega_1^2 + (-3\varepsilon^2 \alpha \beta c + 5\omega_1^6) \omega_2^2 - 4\omega_1^4 \omega_2^4}}{\sqrt{2}\varepsilon |\beta| \omega_1} \right).$$

Of course, the latter points are equilibria whether they represent real expressions, $\omega_1 \neq \sqrt{2}\omega_2$ and $\varepsilon\beta \neq 0$. If $\omega_1 = \sqrt{2}\omega_2$, the critical points are:

$$(1') (0, 0),$$

$$(2') \left(\pm \frac{\sqrt{-3\varepsilon^2 \alpha \beta c + 8\omega_2^6}}{2\varepsilon \beta \omega_2}, \pm \frac{\sqrt{-\varepsilon^2 \beta c (3\alpha + 4\beta) + 8\omega_2^6}}{2\varepsilon |\beta|} \right),$$

when it has sense. These points can also be obtained from (3) by replacing ω_1 by $\sqrt{2}\omega_2$. For $\varepsilon = 0$ or $\beta = 0$ the only equilibrium is the origin. Thus, the number of critical points can be one, three, five or seven, depending on the values the parameters take.

Let us denote the expressions under the three square roots of points (2) and (3) by:

$$\begin{aligned} c_1 &= \varepsilon^2 (3\alpha - 2\beta) \beta c \omega_1^2 - (9\varepsilon^2 \alpha \beta c + \omega_1^6) \omega_2^2 + 4\omega_1^4 \omega_2^4, \\ c_2 &= -3\varepsilon^2 \alpha \beta c - \omega_1^6 + 4\omega_1^4 \omega_2^2, \\ c_3 &= -(2\varepsilon^2 \beta^2 c + \omega_1^6) \omega_1^2 + (-3\varepsilon^2 \alpha \beta c + 5\omega_1^6) \omega_2^2 - 4\omega_1^4 \omega_2^4. \end{aligned}$$

So, the existence of points (2) is assured whether $c_1 \geq 0$, whereas the points (3) are real when $c_2 \geq 0$ and $c_3 \geq 0$. Now, it is easy to see that the points (2) coalesce in the origin if and only if $c_1 = 0$. In addition to that, the four points (3) get reduced to two points in the axis $O\varphi_2$ for $c_2 = 0$ and to the two points (2) if $c_3 = 0$. Thus, the changes in the signs of c_1 , c_2 and c_3 must be considered as the bifurcating conditions. Moreover, if $c_1 \equiv c_2 = 0$ or $c_1 \equiv c_3 = 0$ or $c_2 \equiv c_3 = 0$ then $\beta = 3\alpha(\omega_1^2 - 2\omega_2^2)/(2\omega_1^2)$ and the only critical point is $(0, 0)$.

The stability of the equilibria is analyzed by applying Morse Lemma — we refer to Ref. [1] for a proof and various applications — to Hamiltonian $\bar{\mathcal{K}}_a$ in the neighbourhoods of the

critical points. Thus, we conclude that the origin (1) is a centre if and only if $c_1 c_2 > 0$ and a saddle whenever $c_1 c_2 < 0$, whereas it is degenerate either if $c_1 = 0$ or $c_2 = 0$. Similarly, points (2) are centres if and only if $c_1 c_3 / (\omega_1^2 - 2\omega_2^2) > 0$ and saddles when $c_1 c_3 / (\omega_1^2 - 2\omega_2^2) < 0$. These equilibria become degenerate when $c_1 = 0$ or $c_3 = 0$. For the points (3), we deduce that they always correspond to saddles and become degenerate when $c_2 = 0$ or $c_3 = 0$. In the situations of degeneration it is not so clear what to decide about the stability of the equilibria, but this analysis is out of the scope of this paper.

For the case $\omega_1 = \sqrt{2}\omega_2$ and $\varepsilon\beta \neq 0$ we call

$$c'_1 = -3\varepsilon^2 \alpha \beta c + 8\omega_2^6, \quad c'_2 = -\varepsilon^2 \beta c (3\alpha + 4\beta) + 8\omega_2^6,$$

and, obviously the existence of equilibria (2') is guaranteed provided that $c'_1 \geq 0$ and $c'_2 \geq 0$. When $c'_1 = 0$ the four equilibria (2) coalesce in two points lying in the axis $O\varphi_2$ whereas in the case $c'_2 = 0$ the two resulting points are placed in the axis $O\varphi_1$. Finally, the four equilibrium points get reduced to the origin for $c'_1 \equiv c'_2 = 0$. The application of Morse Lemma to the critical points reveals that the four points (2'), when they exist, are saddles and become degenerate for $c'_1 = 0$ or $c'_2 = 0$. Moreover, on this occasion, the origin is a centre when $c'_1 c'_2 > 0$, a saddle if $c'_1 c'_2 < 0$ and a degenerate point if and only if $c'_1 = 0$ or $c'_2 = 0$. Again we do not discuss the degeneration limits.

In the remaining cases, that is, when $\varepsilon\beta = 0$, as the only equilibrium is the origin, the application of Morse Lemma is rather simple. Indeed, when either $\varepsilon = 0$ or $\beta = 0$ the origin is always a centre and the dynamics of the resulting systems is trivial.

5.2.2 ANALYSIS OF $\bar{\mathcal{K}}_b$

Solving on this occasion system (32) with Mathematica produces the following equilibria (we have considered approximations up to order two):

$$\left(\frac{-2\varepsilon^2 \beta^2 c - q\omega_1^2 \omega_2^2 \pm \sqrt{d}}{6\varepsilon\alpha q \omega_2^2}, 0 \right) \quad (33)$$

with

$$d = 4\varepsilon^4 \beta^4 c^2 - q\omega_2^2 \left(6\varepsilon^2 \alpha \beta c q - 4\varepsilon^2 \beta^2 c \omega_1^2 - q\omega_1^4 \omega_2^2 \right),$$

$q = \omega_1^2 - 4\omega_2^2$ does not vanish, $\varepsilon\alpha \neq 0$ and the parameters are combined so that they yield a real expression, e.g they must verify $d \geq 0$. For $\alpha = 0$ the two critical points get reduced to

$$\left(-\frac{\varepsilon\beta c q}{2(2\varepsilon^2 \beta^2 c + q\omega_1^2 \omega_2^2)}, 0 \right), \quad (34)$$

which is a valid point if $f = 2\varepsilon^2 \beta^2 c + q\omega_1^2 \omega_2^2 \neq 0$. When $f = 0$ it is not hard to see that there is no equilibria. Finally, in the case $\varepsilon = 0$ the only critical point is $(0, 0)$.

In order to determine the stability of the equilibrium points we apply Morse Lemma to Hamiltonian $\bar{\mathcal{K}}_b$, using a Taylor expansion centered at the corresponding critical points. We conclude that, provided that $d \geq 0$, the point defined in (33) with positive sign in front of the square root is a centre for $q > 0$ and a saddle for $q < 0$, whereas the point with negative sign in front of the square root is a saddle when $q > 0$ and becomes a centre for $q < 0$. Besides, when $d = 0$ the two equilibria coalesce in one, which is a degenerate equilibrium, and when $d < 0$ the two equilibria disappear. This is the scenario for a saddle–centre bifurcation (depending smoothly on the variation of d). The application of Morse Lemma to the equilibrium (34) reveals that this point is a centre if and only if $f > 0$ and $q > 0$ or $f < 0$ and $q < 0$, whereas it becomes a saddle when $f < 0$ and $q > 0$ or $f > 0$ and $q < 0$. (Recall that $s \neq 0$ is the condition for the existence of the equilibrium and $q \neq 0$ is always true.) Finally, in the limit case $\varepsilon = 0$ the origin remains a centre. In Figure 4 we show the occurrence of a Hamiltonian saddle–centre bifurcation. See the details in Ref. [66]. It is noticeable to say that the saddle–centre bifurcation is typical of the Hénon and Heiles Hamiltonian in two and 3DOF, see Refs. [66, 15, 29].

All the critical points determined in the last paragraphs are in correspondence with periodic orbits of the initial system \mathcal{H} and these orbits can be calculated up to order ε^4 when related to $\bar{\mathcal{K}}_a$ and to order ε^3 for those points obtained from $\bar{\mathcal{K}}_b$. The same holds for the families of two–dimensional deformed tori, constructed from the periodic orbits obtained from the systems $\bar{\mathcal{K}}_a$ and $\bar{\mathcal{K}}_b$.

As an example, let us specify how to get a family of periodic orbits from a particular equilibrium point $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ obtained from $\bar{\mathcal{K}}_a$, following the steps detailed in Subsection 3.3. First, observe that φ_1^0 and φ_2^0 are written in terms of $\alpha, \beta, \omega_1, \omega_2, \varepsilon$ and c . Thus, taking into account that $\varphi_1 = y'$ and $\varphi_2 = Y'$, we write a point $\mathbf{y}^0 = (x', \varphi_1^0, X', \varphi_2^0)$ and then using that $c = \frac{1}{2}(X'^2 + \omega_1^2 x'^2)$ and that $\cos(\psi_1) = X'/(\omega_1^2 x'^2 + X'^2)^{1/2}$ and $\sin(\psi_1) = \omega_1 x'/(\omega_1^2 x'^2 + X'^2)^{1/2}$ we rewrite \mathbf{y}^0 as the expression $\mathbf{y}^0 = (\sqrt{2c} \sin(\psi_1)/\omega_1, \varphi_1^0, \sqrt{2c} \cos(\psi_1), \varphi_2^0)$. Now, making use of \mathcal{W}_a we construct the direct change $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$, through formula (7). Replacing now \mathbf{y} by \mathbf{y}^0 we obtain explicitly an expression of the type $\mathbf{x}^0 = \mathbf{X}(\mathbf{y}^0; \varepsilon)$, which, for fixed $\alpha, \beta, \varepsilon, \omega_1$ and ω_2 gives the equation of the periodic orbits in \mathbf{R}^4 parametrized by $\psi_1 \in [0, 2\pi)$.

Note that the periodic orbits appear in families, as we still have the parameter $c \geq 0$. In analogous manner we can obtain the periodic orbits from the critical points obtained from $\bar{\mathcal{K}}_b$, parametrized this time by $\psi_2 \in [0, 2\pi)$. Moreover, the stability of the non–degenerate critical points coincides with the stability of the periodic orbits in the departure phase space.

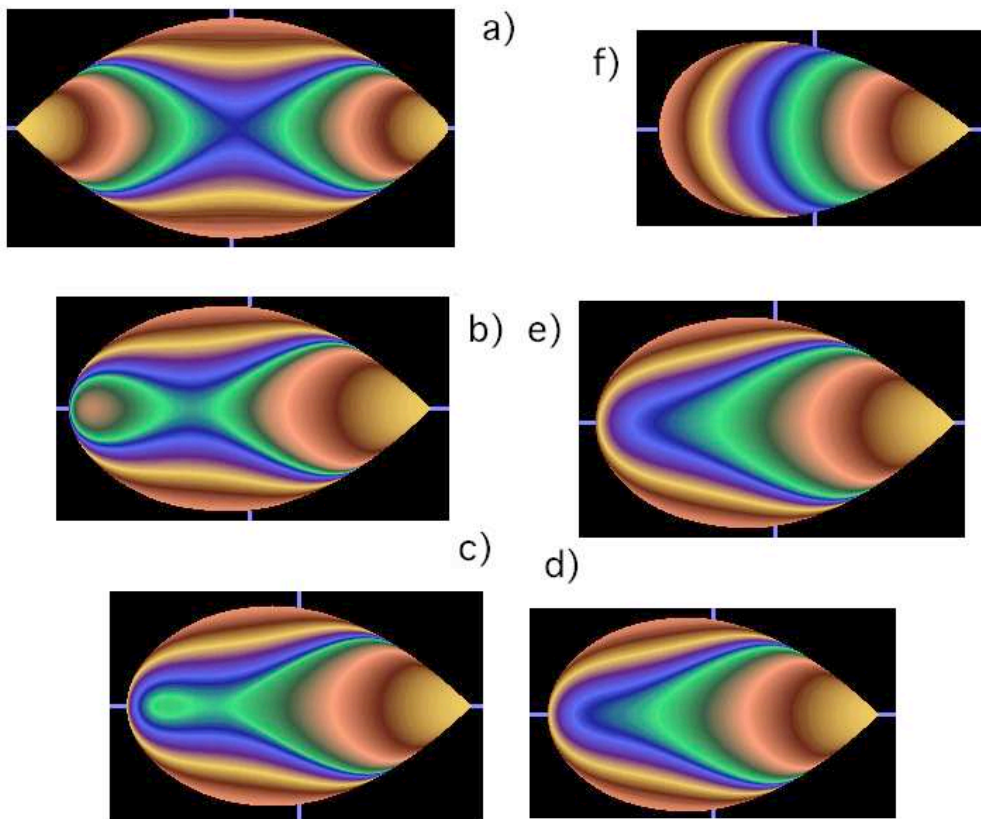


Figure 4: A Hamiltonian saddle–centre bifurcation scenario in six pictures, borrowed from reference [66].

5.3 Two-dimensional invariant tori of \mathcal{H}

Another way to obtain two-dimensional tori of \mathcal{H} consists in applying a new normalization to either $\bar{\mathcal{K}}_a$ or $\bar{\mathcal{K}}_b$, with the aim of making \mathcal{T}_b (in the first case) or \mathcal{T}_a (in the second case) the new integral. This would be exactly equivalent to the application of a normal form to \mathcal{H} choosing as the new integral $\mathcal{T}_a + \mathcal{T}_b$. Thus, the new reduced system, called \mathcal{S} , could be written in terms of I_1 and I_2 and would have zero degrees of freedom and therefore a trivial dynamics. However, one could still compute $\dot{\psi}_i = \partial \mathcal{S} / \partial I_i$ and the equilibrium points obtained from this latter system would correspond to families of two-tori in the Euclidean space \mathbf{R}^4 with angles $\psi_1, \psi_2 \in [0, 2\pi)$ parametrized by the constants $c_1 = I_1 \geq 0$ and $c_2 = I_2 \geq 0$.

By proceeding as the previous paragraph we have computed families of 2D-dimensional tori. Pushing the normal form transformations to order two, we arrive at a unique point (c_1, c_2) where:

$$c_1 = -\frac{4\omega_1^4(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)(3\beta\omega_1^4 - 2(3\alpha + 2\beta)\omega_1^2\omega_2^2 + 24\alpha\omega_2^4)}{\beta\varepsilon^2[(-9\alpha^2 - 48\alpha\beta + 16\beta^2)\omega_1^4 + 12\alpha(\alpha + 16\beta)\omega_1^2\omega_2^2 + 96\alpha^2\omega_2^4]},$$

$$c_2 = \frac{4\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)[2(3\alpha - 2\beta)\beta\omega_1^4 - 3\alpha(5\alpha + 8\beta)\omega_1^2\omega_2^2 + 60\alpha^2\omega_2^4]}{\beta^2\varepsilon^2[(-9\alpha^2 - 48\alpha\beta + 16\beta^2)\omega_1^4 + 12\alpha(\alpha + 16\beta)\omega_1^2\omega_2^2 + 96\alpha^2\omega_2^4]},$$

provided that $\omega_1^2 \neq 4\omega_2^2$, and whenever $\omega_1 \neq 2[(2 \times 11^{1/2} - 5)/3]^{1/2}\omega_2$ then $\alpha = 2(7 \times 11^{1/2} - 27)/15\beta$. Besides, we exclude also those values, of α, β that make null the denominators of c_1 and c_2 .

For $\omega_1 = \pm 2\omega_2$ we obtain, using the second-order normal form:

$$c_1 = \frac{512(3\alpha - 4\beta)\omega_2^6}{\beta(9\alpha^2 + 48\alpha\beta + 4\beta^2)\varepsilon^2}, \quad c_2 = \frac{64(-15\alpha^2 + 24\alpha\beta + 4\beta^2)\omega_2^6}{\beta^2(9\alpha^2 + 48\alpha\beta + 4\beta^2)\varepsilon^2},$$

for $9\alpha^2 + 48\alpha\beta + 4\beta^2 \neq 0$.

Finally, the second-order normal form for the case $\omega_1 \neq 2[(2 \times 11^{1/2} - 5)/3]^{1/2}\omega_2$ and $\alpha = 2(7 \times 11^{1/2} - 27)/15\beta$ produces an infinite set of equilibria in the reduced phase space, concretely, the plane

$$c_1 + c_2 = \frac{32(7 \times 11^{1/2} - 8)\omega_2^6}{35\beta^2\varepsilon^2},$$

if c_1, c_2 vary along \mathbf{R}^+ . In this latter case the computations should be carried out to order four, in order to avoid the degeneracy. We leave this case.

Finally, the 2D-tori are reconstructed inverting the Lie transformation to second order in ε , obtaining therefore explicit expressions of the tori associated to \mathcal{H} up to terms in ε^3 .

6 Invariant manifolds in Transition State Theory

6.1 The normally hyperbolic invariant manifold and the transition state

The geometrical structures which regulate transformations in dynamical systems with three or more degrees of freedom play an important role in the qualitative understanding on some differential equations. The treatment initiated in Ref [63] is based on the analysis of the $(2n-3)$ -dimensional normally hyperbolic invariant manifold (NHIM) in n -degree-of-freedom systems associated with a centre $\times \dots \times$ centre \times saddle in the phase space flow in the $(2n-1)$ -dimensional energy surface. The theory of NHIMs was commenced by Fenichel [14] and generalized by Wiggins [62] for nonlinear systems. The NHIM bounds a $(2n-2)$ -dimensional surface, called a “transition state” in chemical reaction dynamics, which partitions the energy surface into volumes characterized as “before” and “after” the transformation. This surface is the long-sought momentum-dependent transition state beyond two degrees of freedom. The $(2n-2)$ -dimensional stable and unstable manifolds associated with the $(2n-3)$ -dimensional NHIM are impenetrable barriers with the topology of multidimensional spherical cylinders. The phase flow interior to these spherical cylinders passes through the transition state as the system undergoes its transformation. The phase flow exterior to these spherical cylinders is directed away from the transition state and, consequently, will never undergo the transition. The explicit forms of these phase space barriers can be evaluated using normal form theory. We follow Wiggins *et al.* [63] in our exposition.

Consider a Hamilton function of the type:

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\omega_i}{2} (p_i^2 + q_i^2) + \lambda q_n p_n + f_1(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, \mathcal{I}) + f_2(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}), \quad (35)$$

up to arbitrarily high order where $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ denote $(2n)$ -dimensional canonical co-ordinates, $\mathcal{I} \equiv p_n q_n$ and f_1, f_2 are at least third order, i.e., they are responsible for the nonlinear terms in the Hamiltonian vector field, and $f_1(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, 0) = 0$. The NHIM associated to a Hamilton vector field like H is:

$$\mathcal{M}_h^{2n-3}(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\omega_i}{2} (p_i^2 + q_i^2) + f_2(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}) = h = \text{constant} > 0. \quad (36)$$

The NHIM acts as a multidimensional saddle “point”. The dynamics occurs in the $(2n-1)$ -dimensional energy surface given by setting H in the initial Hamiltonian to be a positive

constant h . If we set $q_n = p_n = 0$ in the vector field associated to H , then $\dot{q}_n = \dot{p}_n = 0$. Therefore $q_n = p_n = 0$ is a $(2n - 2)$ -dimensional invariant manifold. Its intersection with the $(2n - 1)$ -dimensional energy surface, is the NHIM, given by (36).

Another advantage of computing the normal form is that the stable and unstable manifolds of \mathcal{M}_h^{2n-3} are known explicitly. They are $(2n - 2)$ -dimensional objects, acting as multidimensional separatrices. They are given by:

$$\begin{aligned}
W^s(\mathcal{M}_h^{2n-3}) &= \left\{ (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \mid \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\omega_i}{2} (p_i^2 + q_i^2) \right. \\
&\quad \left. + f_2(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}) = h = \text{constant} > 0, q_n = 0 \right\}, \\
W^u(\mathcal{M}_h^{2n-3}) &= \left\{ (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \mid \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\omega_i}{2} (p_i^2 + q_i^2) \right. \\
&\quad \left. + f_2(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}) = h = \text{constant} > 0, p_n = 0 \right\}.
\end{aligned} \tag{37}$$

The Hamiltonian vector field (35) has an equilibrium point at the origin which has a $(2n - 2)$ -dimensional centre manifold given by $p_n = q_n = 0$, a one-dimensional stable manifold given by $q_i = p_i = 0$, $i = 1, \dots, n - 1$, $p_n = -\lambda q_n$, and a one-dimensional unstable manifold given by $q_i = p_i = 0$, $i = 1, \dots, n - 1$, $p_n = \lambda q_n$. It is easy to check that the stable and unstable manifolds of the origin have the same energy as the origin, i.e., $h = 0$. We say that they are isoenergetic. However, the centre manifold of the origin is not isoenergetic. The intersection of the centre manifold of the origin with the energy surface is given by:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^2 q_i^2 = h = \text{constant}.$$

This is the normally hyperbolic invariant $(2n - 3)$ -dimensional sphere we described earlier. Hence we see that the centre manifold of the origin is foliated by a one-parameter (normally the energy) family of normally hyperbolic invariant $(2n - 3)$ -dimensional spheres.

Now we construct the transition state. It has the following properties:

- It will be of dimension $2n - 2$ in the $(2n - 1)$ -dimensional energy surface.
- Trajectories that cross the transition state correspond to reactive trajectories.
- The $(2n - 3)$ -dimensional saddle sphere will play an important role in the construction of the transition state.
- The transition state is a true “surface of no return” for this linear Hamiltonian system.

The transition state for this system is obtained by setting $q_n = 0$. Now we look at this in the full $(2n)$ -dimensional phase space. Setting $q_n = 0$ on the energy surface gives the equation:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i^2 q_i^2 = h = \text{constant}. \quad (38)$$

This is the transition state. It is a $(2n-2)$ -dimensional sphere. The sphere has two ‘‘halves’’: $p_n > 0$ and $p_n < 0$. The sphere is divided into these two halves by $p_n = 0$, which corresponds to the saddle sphere S_h^{2n-3} . All reacting trajectories must pass through this transition state. The forward reactive trajectories pass through the sphere with $p_n > 0$ and the backward reactive trajectories pass through the sphere with $p_n < 0$.

6.2 Application to the Rydberg atom

The treatment of [63] and [54] has the advantage of supplying a practical algorithm, demonstrating its use on a strongly coupled nonlinear Hamiltonian, the hydrogen atom in crossed electric and magnetic fields. We take the example from reference [54].

The Hamiltonian in atomic units ($e = \hbar = m_e = 1$) for the hydrogen atom in crossed electric and magnetic fields in Cartesian co-ordinates is given by:

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) - \frac{1}{R} + \left[\frac{\omega_c}{2} (x_1 P_2 - x_2 P_1) + \frac{\omega_c^2}{8} (x_1^2 + x_2^2) - \sigma x_1 \right], \quad (39)$$

where $R = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, ω_c is the cyclotron frequency in atomic units of 2.35×10^5 Tesla and σ is the electric field in atomic units of 5.14×10^{11} V/m. Co-ordinates x_1 , x_2 and x_3 are the Cartesian components of the electron’s position vector with respect to a reference frame centered at the nucleus of the atom. The moments P_1 , P_2 and P_3 refer to the velocities associated to x_1 , x_2 and x_3 , respectively.

Scaling the co-ordinates by ω_c , that is, $x'_i = \omega_c^{2/3} x_i$ and $P'_i = \omega_c^{-1/3} P_i$, for $i = 1, 2, 3$, and dropping the primes in order not to complicate the notation, the Hamiltonian becomes:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) - \frac{1}{R} + \left[\frac{1}{2} (x_1 P_2 - x_2 P_1) + \frac{1}{8} (x_1^2 + x_2^2) - \sigma x_1 \right],$$

where $\mathcal{H} = \omega_c^{-2/3} H$ is the scaled energy and $\sigma = \omega_c^{-4/3} \sigma$ is the scaled electric field. We adopt the experimentally interesting value of $\sigma = 0.58$ in our calculations.

The equilibrium point of interest for the Hamilton vector field must satisfy that the linearization of \mathcal{H} around it is of the type saddle \times centre \times centre. Thus we select:

$$\mathbf{X}_0 = (x_1, x_2, x_3, P_1, P_2, P_3) = (\sigma^{-1/2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}\sigma^{-1/2}, 0). \quad (40)$$

We translate the fixed point to the origin via the following co-ordinate shift:

$$\hat{x}_1 = x_1 - \sigma^{-1/2}, \quad \hat{x}_2 = x_2, \quad \hat{x}_3 = x_3, \quad \hat{P}_1 = P_1, \quad \hat{P}_2 = P_2 + \frac{1}{2}\sigma^{-1/2}, \quad \hat{P}_3 = P_3.$$

The new Hamiltonian (that we call again H) is then given by:

$$H = \frac{1}{2}(\hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2) - \frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{1}{2}(\hat{x}_1\hat{P}_2 - \hat{x}_2\hat{P}_1) + \frac{1}{8}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) - \sigma\hat{x}_1 - \sigma^{1/2},$$

where $\mathcal{R} = ((\hat{x}_1 - x_s)^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2)^{1/2}$ and $x_s = -\sigma^{-1/2}$. From this point on we drop the hats from the variables with the understanding that our equilibrium point has been translated to the origin.

In order to compute the normal form up to a finite order N we will need the Taylor expansion of the Hamiltonian about the origin up through this order:

$$H' = H + 2\sigma^{1/2} = \sum_{n=2}^N H_n, \quad (41)$$

where H_n denotes a homogeneous polynomial in six variables of degree n . We begin by making a Taylor expansion of the term $1/\mathcal{R}$ in the three position variables around the origin up to eighth degree, because the normalization procedure will be pushed up to sixth order, which involves polynomial terms of eighth degree. The terms of the development of $1/\mathcal{R}$ which contribute to the main part of the Hamiltonian are the ones up to second order:

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \sqrt{\sigma} - \sigma x_1 + \sigma^{3/2} x_1^2 - \frac{1}{2}\sigma^{3/2}(x_2^2 + x_3^2) + \mathcal{O}((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}). \quad (42)$$

Since the origin is an equilibrium point the first order terms of the expansion of the Hamiltonian vanish. The constant term is irrelevant to the dynamics. The first relevant terms are the second order terms, which are:

$$H_2 = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + \frac{1}{2}(x_1P_2 - x_2P_1) + \left(\frac{1}{8} - \sigma^{3/2}\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\sigma^{3/2}\right)x_2^2 + \frac{1}{2}\sigma^{3/2}x_3^2. \quad (43)$$

6.3 Transformation of the linear part of Hamilton's equations

We now construct a change of variables to reduce the Hamiltonian (43) to its real normal form:

$$H_2 = 2\eta\tilde{x}_1\tilde{P}_1 + \nu_1(\tilde{x}_2^2 + \tilde{P}_2^2) + \nu_2(\tilde{x}_3^2 + \tilde{P}_3^2), \quad (44)$$

where η , ν_1 and ν_2 are positive constants and due to the choice of parameter we have made, they do not satisfy a resonance condition. We omit the details about we constructed the linear and symplectic transformation are they are quite long. The details are in [54].

Next, in order to obtain the complex normal form associated to (43) we apply the complexifying change:

$$\tilde{x}_1 = q_3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{q_2 + \imath p_2}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{q_1 + \imath p_1}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{P}_1 = p_3, \quad \tilde{P}_2 = \frac{\imath q_2 + p_2}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{P}_3 = \frac{\imath q_1 + p_1}{\sqrt{2}} \quad (45)$$

which leads to the new Hamiltonian:

$$H_2 = \imath \omega_1 q_1 p_1 + \imath \omega_2 q_2 p_2 + \mu q_3 p_3, \quad (46)$$

after making the identification $\mu = 2\eta$, $\omega_1 = 2\nu_2$ and $\omega_2 = 2\nu_1$ (note that the reaction coordinate is “3” now). Hence, the nonlinear terms included in H_i , $i > 2$ must be transformed adequately following the same steps used to calculate (46).

The next step is the calculation of the normal form. We plan to reach sixth order in the normalization procedure, which means that the normal form will be an eighth-degree polynomial in $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ and $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Therefore we have to calculate terms in the Taylor development of $1/\mathcal{R}$ up to degree eight before normalizing. We start by describing the process we shall perform.

6.4 Transformation to normal form up to order 6

We apply the Lie method to the complexified Hamiltonian $H' = \sum_{i=2}^8 H_i$ where H_2 is given by (46) and each H_i , $i > 2$ is a homogeneous polynomial of degree i in the complex coordinates q and p obtained after expanding $1/\mathcal{R}$ in power series of q_i and p_i . Thus, our plan consists in carrying out the calculations up to polynomials of degree eight, e.g. up to sixth order in the normal form. In this way, we construct a change of co-ordinates from the old ones: $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ and $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ to the new ones: $\mathbf{q}' = (q'_1, q'_2, q'_3)$ and $\mathbf{p}' = (p'_1, p'_2, p'_3)$. We drop the primes to avoid tedious notation.

We identify H_2 with \mathcal{H}_0 and each H_{i+2} with $\mathcal{H}_i/i!$, $i \leq 6$. Then, we must recall that terms belonging to $\widetilde{\mathcal{H}}_i$ are monomials in p and q of degree $i+2$ with real or complex coefficients c . So, a monomial of degree $i+2$: $m_i = c q_1^{j_1} q_2^{j_2} q_3^{j_3} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$ such that $\sum_{l=1}^3 (j_l + k_l) = i+2$, belongs to the kernel of \mathcal{L}_{H_2} (and therefore must be incorporated to the new Hamiltonian) if and only if $j_1 = k_1$, $j_2 = k_2$ and $j_3 = k_3$; otherwise its contribution to the new Hamiltonian is zero and the part corresponding to the generating function \mathcal{W}_i becomes $m_i/(\mu(k_3 - j_3) +$

$i(\omega_1(k_1 - j_1) + \omega_2(k_2 - j_2))$). This is the key point in solving the homology equation (6) at each order i .

We rescale the co-ordinates, say $(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*) \rightarrow \varepsilon(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, to introduce the small parameter ε and adopt then the formulæ of Section 2. Afterwards we set $\varepsilon = 1$ and drop the stars to simplify our notation further. We call the normal form $K = \sum_{i=2}^8 K_i$, and in diagonal complex co-ordinates (the transformed ones \mathbf{q}' and \mathbf{p}' , that we have renamed \mathbf{q} and \mathbf{p}) reads as follows:

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{j,k,l}^4 a(j, k, l) (p_1 q_1)^j (p_2 q_2)^k (p_3 q_3)^l, \quad (47)$$

with coefficients given by:

$a(1, 0, 0)$	1.3292326209360146ι
$a(0, 1, 0)$	1.9630114596221002ι
$a(0, 0, 1)$	1.2728995840709765
$a(2, 0, 0)$	$1.084118969828125 \times 10^{-1}$
$a(0, 2, 0)$	$6.432737304520157 \times 10^{-2}$
$a(0, 0, 2)$	$-2.412298516241746 \times 10^{-1}$
$a(1, 1, 0)$	$3.8502889530602764 \times 10^{-3}$
$a(1, 0, 1)$	$-5.709272495222898 \iota \times 10^{-1}$
$a(0, 1, 1)$	$-4.029118438454696 \iota \times 10^{-1}$
$a(3, 0, 0)$	$5.563568366758172 \iota \times 10^{-3}$
$a(0, 3, 0)$	$-1.140865632382711 \iota \times 10^{-3}$
$a(0, 0, 3)$	$-3.4607990223896906 \times 10^{-2}$
$a(2, 1, 0)$	$1.84708258092598 \iota \times 10^{-2}$
$a(2, 0, 1)$	$-9.804116149675277 \times 10^{-2}$
$a(1, 2, 0)$	$-5.26869060648934 \iota \times 10^{-2}$
$a(0, 2, 1)$	$-2.3139914837113457 \times 10^{-1}$
$a(1, 0, 2)$	$4.004377334411079 \iota \times 10^{-2}$
$a(0, 1, 2)$	$2.76105499066869 \iota \times 10^{-1}$
$a(1, 1, 1)$	$-9.949641599540471 \times 10^{-2}$
$a(4, 0, 0)$	$9.18992415784192 \times 10^{-3}$
$a(0, 4, 0)$	$3.921799630947499 \times 10^{-3}$
$a(0, 0, 4)$	$4.005710239128329 \times 10^{-2}$
$a(3, 1, 0)$	$1.2123807670174411 \times 10^{-2}$
$a(2, 2, 0)$	$1.1847669375067585 \times 10^{-2}$
$a(1, 3, 0)$	$2.5741638128707816 \times 10^{-2}$
$a(3, 0, 1)$	$-1.0660011034295587 \iota \times 10^{-1}$
$a(2, 0, 2)$	$-3.307549676029244 \times 10^{-1}$
$a(1, 0, 3)$	$2.2562472925332147 \iota \times 10^{-1}$
$a(0, 3, 1)$	$-6.01563793667196 \iota \times 10^{-2}$
$a(0, 2, 2)$	$-1.7149257534732887 \times 10^{-1}$
$a(0, 1, 3)$	$3.281124863222212 \iota \times 10^{-1}$
$a(2, 1, 1)$	$-2.4216727696341944 \iota \times 10^{-1}$
$a(1, 2, 1)$	$2.2830888537513132 \iota \times 10^{-2}$
$a(1, 1, 2)$	$-4.781394388287208 \times 10^{-1}$

(48)

Each H_i for $2 \leq i \leq 8$ in the last normal form Hamiltonian is a homogeneous polynomial of degree i . The generating function is also a polynomial in \mathbf{q} and \mathbf{p} of degree eight but it is too long to publish. Specifically, $\mathcal{W} = \sum_{i=1}^6 \mathcal{W}_i/i!$ is written as $W = \sum_{i=3}^8 W_i$ where each W_i is a homogeneous polynomial in (\mathbf{q}, \mathbf{p}) of degree i . Then, W_3 consists of 32 monomials, W_4 consists of 64 monomials, W_5 consists of 136 monomials, W_6 consists of 216 monomials, W_7 consists of 416 monomials and, finally, W_8 consists of 656 monomials.

Once W has been determined, we can calculate the new co-ordinates (or any function of them) as functions of the old ones and vice versa. This will be used later on.

Taking into account the considerations of Section 3.3, we have estimated the global error of the transformation, taking $\|(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{P}})\| \leq 10^{-2}$ — which is enough for our computation concerning transition state theory — and $\sigma = 0.58$. In the table below we show the error when the transformation is truncated at different orders i with $1 \leq i \leq 6$:

order 1	$7.51681572767062 \times 10^{-7}$
order 2	$7.440374042482777 \times 10^{-9}$
order 3	$1.3601828348825097 \times 10^{-10}$
order 4	$2.2895973941086116 \times 10^{-12}$
order 5	$3.813254946932333 \times 10^{-14}$
order 6	$5.676373185504885 \times 10^{-16}$

Thence, the transformation carried out at order 6 are such that the computations involved reach double precision. Let us note in addition that for the 6th order, each term of the composed series has around 13000 monomials, this is the reason why we omit the expressions here.

6.5 Exact solutions for the trajectories near the transition state

We write the integrals in terms of the real normal form co-ordinates following (45) as follows:

$$J_1 = \tilde{x}_1 \tilde{P}_1 = q_3 p_3, \quad J_2 = \frac{1}{2} (\tilde{P}_2^2 + \tilde{x}_2^2) = \iota q_2 p_2, \quad J_3 = \frac{1}{2} (\tilde{P}_3^2 + \tilde{x}_3^2) = \iota q_1 p_1. \quad (49)$$

Note that the truncated normal form Hamiltonian can be expressed entirely in terms of these integrals, that is, $K = K(J_1, J_2, J_3)$.

Using (49) and the chain rule, Hamilton's equations can be written as follows:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \frac{\partial K}{\partial \tilde{P}_1} = \frac{\partial K}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \tilde{P}_1} = \frac{\partial K}{\partial J_1} \tilde{x}_1, \\ \dot{\tilde{P}}_1 &= -\frac{\partial K}{\partial \tilde{x}_1} = -\frac{\partial K}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \tilde{x}_1} = -\frac{\partial K}{\partial J_1} \tilde{P}_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{\partial K}{\partial \tilde{P}_2} = \frac{\partial K}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \tilde{P}_2} = \frac{\partial K}{\partial J_2} \tilde{P}_2, \\ \dot{\tilde{P}}_2 &= -\frac{\partial K}{\partial \tilde{x}_2} = -\frac{\partial K}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \tilde{x}_2} = -\frac{\partial K}{\partial J_2} \tilde{x}_2, \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \frac{\partial K}{\partial \tilde{P}_3} = \frac{\partial K}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \tilde{P}_3} = \frac{\partial K}{\partial J_3} \tilde{P}_3, \\ \dot{\tilde{P}}_3 &= -\frac{\partial K}{\partial \tilde{x}_3} = -\frac{\partial K}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \tilde{x}_3} = -\frac{\partial K}{\partial J_3} \tilde{x}_3. \end{aligned} \quad (50)$$

It is important to note that $\partial K/\partial J_i$, $i = 1, 2, 3$, are constants on trajectories. Hence, once the initial condition of a trajectory is chosen, evolution of the trajectory is given by a linear system whose coefficients are constant, but depend on the trajectory.

This simple form of Hamilton's equations in the normal form co-ordinates near the transition state enables us to construct trajectories having any possible behaviour near the transition state. These trajectories can then be visualized in the original co-ordinates using the transformation constructed in Section 6.6.

6.6 Transformation back to the original co-ordinates

In order to construct the change of co-ordinates back to the original co-ordinates i.e.,

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3),$$

we make use of the generating function W . Indeed we simply have to evaluate Poisson brackets but without solving any partial differential equations. Therefore the computational effort is much smaller than the one corresponding to the calculation of the normal form Hamiltonian and the generating function.

With the inverse of the linear change given in (45) the complex formal integrals are transformed into real expressions as functions of $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3)$. As a final step we need to perform a new linear change of variables, inverting the matrix C and expressing consequently the three integrals in terms of $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$. We do not display the formulæ of these integrals as they are quite long.

Next we build the direct change of co-ordinates $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ given through formula (7). Notice that in this particular case \mathbf{x} represents (\mathbf{q}, \mathbf{p}) and \mathbf{y} stands for $(\mathbf{q}', \mathbf{p}')$ (since we are explicitly discussing the transformation from the final step of the normalization back to the original co-ordinates we have returned the primes to the notation). Alternatively we can compute the change in real co-ordinates. For achieving this we first write W in real variables $(\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{P}}') = (\tilde{x}'_1, \tilde{x}'_2, \tilde{x}'_3, \tilde{P}'_1, \tilde{P}'_2, \tilde{P}'_3)$ using the inverse of (45). Thence we calculate $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{P}}) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3)$ by means of (7). Note that on this occasion \mathbf{x} in the formula $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}; \varepsilon)$ means $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{P}})$ whereas \mathbf{y} represents $(\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{P}}')$. With this second route \tilde{x}_1 is expressed as a function of 913 monomials in $(\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{P}}')$, whereas \tilde{x}_2 consists of 777 monomials and \tilde{x}_3 consists of 679 monomials. The momentum \tilde{P}_1 appears as a function of 913 terms in $(\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{P}}')$, \tilde{P}_2 consists of 796 monomials and finally the formula for \tilde{P}_3 consists of 679 monomials in $(\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{P}}')$.

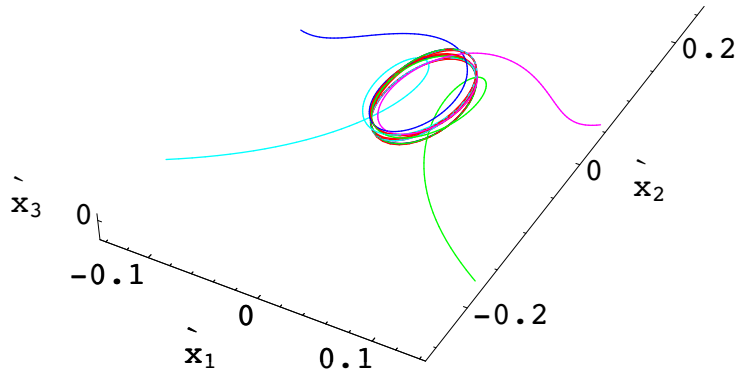


Figure 5: Different projections for trajectories in the NHIM.

6.7 Trajectories near the NHIM for the hydrogen atom in crossed electric and magnetic fields

We now want to show trajectories near the NHIM. We start by computing explicitly the co-ordinates of the NHIM, and its manifolds in the original co-ordinates. Notice that, once h is fixed, J_2 and J_3 are given a value, the asymptotic expressions of \mathcal{M}_h^3 , $W^s(\mathcal{M}_h^3)$ and $W^u(\mathcal{M}_h^3)$ as well as the transition state can be now easily obtained, up to $M = 6$, with the direct real change of co-ordinates. Indeed, the NHIM is parametrized in terms of two parameters whereas $W^s(\mathcal{M}_h^3)$ and $W^u(\mathcal{M}_h^3)$ need three independent parameters to be properly defined. We remark that we do not use numerical approximations to this high-dimensional structures as Koon *et al.* do [27], more the contrary we have “at hand” the (literal) polynomial expressions of all these objects, up to degree 6.

In the normal form co-ordinates we have that $J_1 = 0$ on the NHIM and on its stable and unstable manifolds. Using (50) we can compute trajectories on the NHIM and on any branch of the stable and unstable manifold that we desire. Then these trajectories can be transformed back into the original co-ordinates. This is shown in Figures 5 and 6. In each figure we take $J_3 = (\tilde{P}_3^2 + \tilde{x}_3^2)/2 = 0.001$ and $J_2 = (\tilde{P}_2^2 + \tilde{x}_2^2)/2 = 0.000953096$. In all of the figures the yellow trajectory is on the NHIM: $\tilde{P}_1 = \tilde{x}_1 = 0$.

The light green is the trajectory on the forward unstable manifold of the NHIM with $\tilde{P}_1 = 0$, $\tilde{x}_1 = 0.00001 \exp(1.2728t)$. The blue trajectory is on the backward unstable manifold of the NHIM with $\tilde{P}_1 = 0$, $\tilde{x}_1 = -0.00001 \exp(1.2728t)$.

The dark green trajectory is on the forward stable manifold of the NHIM with $\tilde{P}_1 = 2 \exp(-1.2728t)$, $\tilde{x}_1 = 0$. The pink trajectory is on the backward stable manifold of the

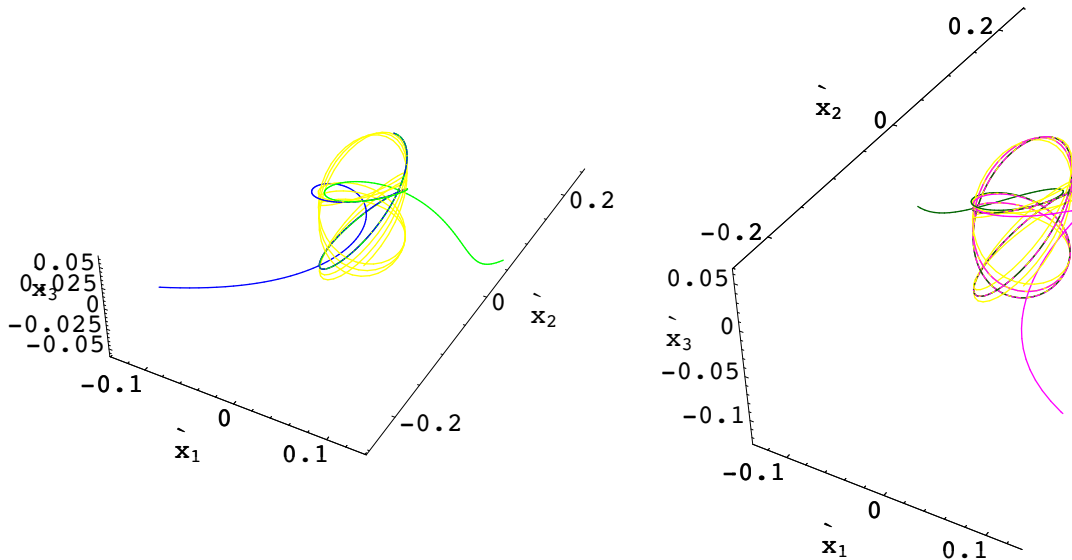


Figure 6: Different projections for trajectories in the NHIM and in the unstable manifold of the NHIM on left and trajectories in the NHIM and in the stable manifold of the NHIM on right.

NHIM with $\tilde{P}'_1 = -2 \exp(-1.2728t)$, $\tilde{x}_1 = 0$.

We can compute trajectories in either the forward or backward stable and unstable manifolds. These trajectories are simply chosen and computed for the normal form vector field (50). The normal form transformation then allows us to visualize them in the original co-ordinates. In other words, we have complete control and knowledge of the exact dynamical trajectories near the transition state in a 3DOF system. This is the first time this has been demonstrated for a 3DOF chemical or atomic system.

Thus, the solution provided through normal forms, leads naturally to the multidimensional generalization of a saddle “point” and its associated separatrices. Indeed, the approach given in Ref. [54] and here, makes explicit the long-sought classical structures that act as transition states in phase space beyond 2DOF. Indeed, the theory for 2DOF is a classic matter, see for instance [64]. We show that the rigorous way to describe the notion of a “barrier” in phase space is through invariant manifolds.

7 Analysis of the Lorenz system

We apply the theory of the Lorenz system [30] given by:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (51)$$

where σ , b and r are positive parameters and t represents the time variable. Our aim now is to apply the method described in Section 2 to system (51) with the goal of analyzing the Lorenz equations in a vicinity of the origin. Calculations have been done with Mathematica.

7.1 Some invariant sets for $\sigma = 10$, $b = 8/3$ and $r > 1$

We start with the standard values for the parameters given by Lorenz, that is, we fix $\sigma = 10$, $b = 8/3$ and $r > 1$ (the case $0 < r \leq 1$ must be treated separately). The classical Lorenz system has been widely analyzed (see, for instance the book by Verhulst [56] and references therein) mainly in regards to its chaotic behaviour and the existence of an strange attractor. However, up to our knowledge, no systematic analysis concerning the possible appearance of periodic orbits and other invariant structures has been performed.

Expanding (51) around the origin (which is obviously an equilibrium point) we have that the linear part is given by $A \mathbf{x}$ where $\mathbf{x} = (x, y, z)$ and

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{pmatrix},$$

having eigenvalues: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-11 \pm \sqrt{81 + 40r})$ and $\lambda_3 = -8/3$. Now we make the corresponding (linear) change of variables $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$, so that A becomes diagonal, say A_J , with the eigenvalues in its diagonal. Besides we scale the system, say $\mathbf{x}' \rightarrow \varepsilon \mathbf{x}''$, so as to introduce a dimensionless small parameter $\varepsilon > 0$.

Clearly, as A_J is a semisimple the application of Theorem 2.1 produces a change of variable $\mathbf{x}'' \rightarrow \mathbf{y}$ and a vector field \mathbf{g} for which $A_J \mathbf{y}$ is a symmetry up to a certain order $M \geq 1$. Now, some resonant relations among the eigenvalues of A_J must hold in order not to reduce \mathbf{g} to $A_J \mathbf{y}$. Letting then $\lambda_{1,2}/\lambda_3 = n \in \mathbf{N}$, r must be equal to $(4n - 15)(8n - 3)/45$. Hence, it is not hard to prove that the first integrals associated to $A_J \mathbf{y}$ are $\varphi_1 = y_1^{-n} y_3$ and $\varphi_2 = y_1^{-33/8+n} y_2$ from where we deduce that $s = 1$, e.g. we would transform a three-dimensional vector field into a one-dimensional one. We have applied the Normal Form Theorem for polynomial vector fields (see Refs. [32, 13]), e.g. the ‘‘standard’’ polynomial transformation order by order starting at order one. We have reached order 3, i.e. the computations have been carried out up to fourth-degree polynomials in \mathbf{y} , obtaining $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_3 \equiv \mathbf{0}$. It only means that $\mathbf{g}(\mathbf{y}; \varepsilon) = A_J \mathbf{y} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$ but we have not pushed the computations further.

Alternatively we apply Theorem 2.2 with adequate matrix T such that $A_J T = T A_J$. Since $r > 1$ the eigenvalues are all different, thence we deduce that T must be diagonal, i.e. $T = \text{diag} \{t_1, t_2, t_3\}$ with $t_i \in \mathbf{R}$ arbitrary. It immediately implies that there are no periodic

orbits of the Lorenz equation for the specific values of σ and b given above, at least periodic orbits close to the origin. However, different choices of t_i lead to different generalized normal forms and consequently, to different invariant sets.

For example, taking $t_3 \equiv t_2 \equiv t_1/2$ and $t_1 \in \mathbf{R}$ we have that the computation of the normal form carries out the change of variables: $\mathbf{x}'' \equiv (x, y, z) \rightarrow \mathbf{y} \equiv (x', y', z')$. The expression for the transformed system can be see in Refs. [48, 49]. Now, the reduction goes as follows. The first integrals are $\varphi_1 = y'/\sqrt{x'}$, $\varphi_2 = z'/\sqrt{x'}$ whereas the co-ordinate in G_T is $\vartheta = x'$. Now, the reduced system is defined on \mathbf{R}^2 as:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= (12r)^{-1} \left(54\varphi_1\varphi_2 + 3 \left(9 + \sqrt{81 + 40r} \right) \varphi_1^2 - 3 \left(-9 + \sqrt{81 + 40r} \right) \varphi_2^2 \right. \\ &\quad \left. - 2r \left(25 + 3\sqrt{81 + 40r} \right) \right) \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= (12r)^{-1} \left(54\varphi_1\varphi_2 + 3 \left(9 + \sqrt{81 + 40r} \right) \varphi_1^2 - 3 \left(-9 + \sqrt{81 + 40r} \right) \varphi_2^2 \right. \\ &\quad \left. + 2r \left(-25 + 3\sqrt{81 + 40r} \right) \right) \varphi_2.\end{aligned}$$

The corresponding equilibria are:

$$(0, 0), \left(\pm \frac{\sqrt{9 + 60r - \sqrt{81 + 40r}}}{\sqrt{30}}, 0 \right), \left(0, \pm \frac{\sqrt{9 + 60r + \sqrt{81 + 40r}}}{\sqrt{30}} \right).$$

By means of the direct Lie transformation we calculate the invariant manifold and the result is depicted in Figure 7. Next we are going to calculate the stable manifold associated to $\mathbf{0}$. As A (or A_J) has two negative eigenvalues and one positive, the dimension of the stable manifold is two. We then take $T = \text{diag}\{0, 0, 1\}$ and apply the generalized normal form transformation to the Lorenz system. The normal form has been calculated to third order, see also [48].

This time the reduction achieves the computation of the differential system in the stable manifold. According to the choice of T we have $\varphi_1 = y_1$, $\varphi_2 = y_2$ and $\vartheta = y_3$. The reduced system is defined on \mathbf{R}^2 , and is given by:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= -\frac{8}{3}\varphi_1 - \frac{9 + \sqrt{81 + 40r}}{2r}\varphi_2^2 \\ &\quad - \frac{27 \left(3(81 + 40r)(57 + 58r) + \sqrt{81 + 40r}(1539 + 2r(973 + 360r)) \right)}{50r^2(81 + 40r)(133 + 72r)}\varphi_1\varphi_2^2, \\ \dot{\varphi}_2 &= -\frac{1}{2}(81 + 40r)^{-1/2}(133 + 72r)^{-1} \left((10773 - 2660\varphi_1 - 360\varphi_1^2 + 11152r \right. \\ &\quad \left. - 1440\varphi_1r + 2880r^2 + (1463 + 792r)\sqrt{81 + 40r} \right) \varphi_2.\end{aligned}$$

By means of the direct Lie transformation we calculate the two-dimensional stable manifold of the origin, as it appears in Figures 8 and 9 for different values of r .

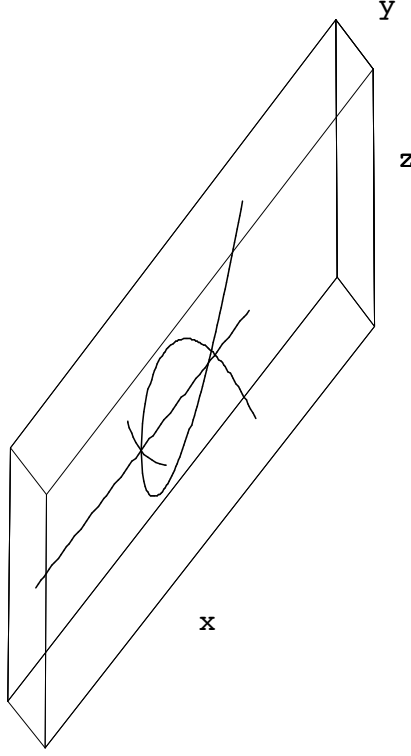


Figure 7: Invariant sets of the origin in the Lorenz system related to $T = \text{diag} \{t_1, t_1/2, t_1/2\}$.

In Ref. [42] we proposed a transformation with the aim of integrating analytically the reduced equations, inverting back the transformation and resolving an initial value problem for equation (51), with $r = 28$, i.e. its classic value and adequate initial conditions. For achieving this we take $T = \text{diag} \{1, \sqrt{2}, 0\}$, thus $A_J T = T A_J$. Besides $s = r = 1$ and the invariant $\varphi = y_3$ and $\vartheta_1 = y_1$ and $\vartheta_2 = y_2$. Note that the key point to obtain only one invariant (and consequently transforming the initial system to a simpler one) is the non-resonant conditions among the entries of T . After computing the normal form up order three, we pass to the reduced equations, yielding that:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2}(-11 + \sqrt{1201})\varphi + \frac{15(1201 - 1689\sqrt{1201})}{134512(25 + 3\sqrt{1201})}\varphi^3, \quad (52)$$

and

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_1 &= \frac{(-9 + \sqrt{1201})}{56}\varphi^2 - \frac{(238268911748107 + 3427671328157\sqrt{1201})}{3389702400(32622739 + 543621\sqrt{1201})}\varphi^4 - \frac{8}{3}\vartheta_1, \\ \dot{\vartheta}_2 &= \frac{3(1893759619 - 24165531\sqrt{1201})}{10117320080(25 + 3\sqrt{1201})}\varphi^3 - \frac{(11 + \sqrt{1201})}{2}\vartheta_2. \end{aligned} \quad (53)$$

The solutions of (52) and (53) can be obtained straightforwardly as φ is firstly written explicitly as a function of time. Then, this expression of φ is inserted in the linear (and

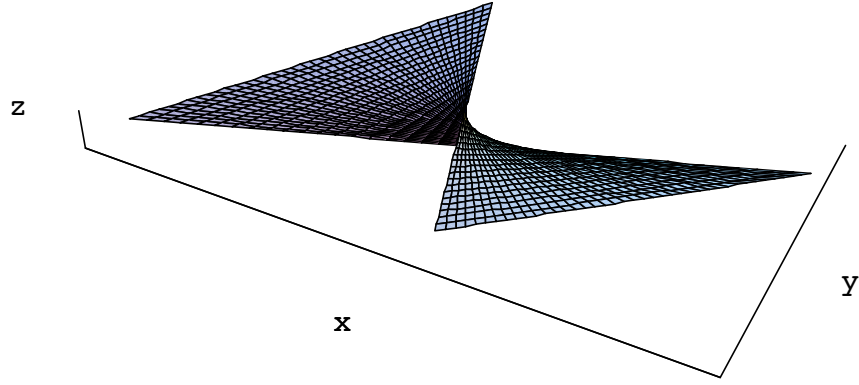


Figure 8: Local stable manifold of the origin for $r = 1.32$.

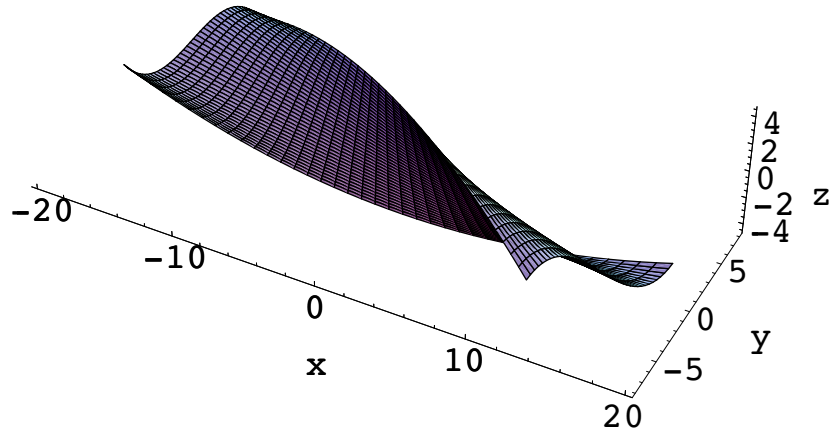


Figure 9: Local stable manifold of the origin for $r = 3.205189$.

separate) equations (53) getting expressions of ϑ_1 and ϑ_2 in terms of t . The process ends going back to the original variables by means of the inverse Lie transformation, obtaining therefore analytic expressions of $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$. See the entire calculations in [42].

7.2 Some periodic orbits for other values of σ , b and r

As we have not found out periodic orbits for $\sigma = 10$ and $b = 8/3$, we are going to treat σ , b and r as positive constants and look for possible relations among the three parameters so as to get some closed trajectories. Furthermore we also assume that $b > 1$ and $r > 1$. The canonical Jordan form of A is

$$A_J = \text{diag} \left\{ -b, \frac{1}{2} \left(-1 - \sigma - \sqrt{(1 - \sigma)^2 + 4r\sigma} \right), \frac{1}{2} \left(-1 - \sigma + \sqrt{(1 - \sigma)^2 + 4r\sigma} \right) \right\}.$$

The first step is to determine whether T_1 , T_2 and T_3 can be candidates to perform normal forms. We then have to discard T_2 , but T_1 and T_3 commute with A_J if and only if $\sigma(b) =$

$b(b-1)/(b+r-1)$.

Now, in order not to have a trivial first order normal form and therefore, in order to search for periodic orbits, we make the identification $r(b) = (1 + \sqrt{2})(b-1)^2/(1 + \sqrt{2} + b)$. Replacing now this value of r in the condition for σ of the latter paragraph we obtain that $\sigma(b) = (1 + \sqrt{2} + b)/(2 + \sqrt{2})$. Note that both $\sigma(b)$ and $r(b)$ are positive if $b > 1$. Moreover, $r(b) > 1$ if and only if $b > 1 + \sqrt{2}$. We have pushed the computations up to second order (homogeneous polynomial vector fields of degree three) finding out that \mathbf{g}_2 vanishes. We do not write the explicit expressions of the normal form and the reduced system in $\varphi_1 = y_1^2 + y_2^2$, $\varphi_2 = y_3$, however we present the three equilibria of the reduced system:

$$(0, 0), \quad \left(0, \pm \frac{\sqrt{b-1} \sqrt{b} \sqrt{34 + 2b(5b-19) + \sqrt{2}(24 + b(7b-27))}}{1 + \sqrt{2} + b} \right). \quad (54)$$

Now the periodic orbits of the initial Lorenz system are calculated passing from the invariants to the variable \mathbf{y} . Note that, apart from the origin, the two other equilibria have co-ordinate $\varphi_1 = 0$, or, in other words, they are closed trajectories with a small radius $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$. Next, using the direct Lie transformation, we express everything in terms of \mathbf{x}'' and, finally, the original variable \mathbf{x} are recovered with the (inverse) linear change used to introduce the canonical Jordan form of A . According to (54), it is not difficult to deduce that when $b > 1 + \sqrt{2}$ there are always three equilibria (three quasi-periodic orbits of the initial system), two of them being stable and one unstable. This situation is maintained for all $b > 1 + \sqrt{2}$. Similar results are obtained from the normal form constructed with the aid of T_3 .

Finally, concerning the estimation of the global error of the computations carried out in this section, since the asymptotic change of variables has been performed up to order three, if we choose $\varepsilon = 10^{-2}$ and $\|\mathbf{x}\| \leq 0.1$, then the global error is $E(\mathbf{x}) \leq 1.33969 \times 10^{-7}$, which is valid on a time-scale $t \approx 100$. More details about the treatment of the error appear in [42].

8 Concluding remarks

The present paper establishes a methodology to analyze an autonomous ODE from a qualitative point of view. More specifically we have given some techniques to calculate different invariant sets for dynamical systems of Hamiltonian and dissipative character.

In fact, our technique carries out a reduction in the dimension of the departure system by means of the introduction of a symmetry through the change of variable. Then, we take advantage of this reducibility with the goal of extracting from the simpler systems qualitative information (about stability and possible bifurcations, existence of periodic orbits or chaotic regions in phase space, calculation of formal integrals of Hamilton functions, analysis of

possible chemical reactions, construction of seminumerical schemes to integrate some ODEs, etc.) valuable for the original equation.

Acknowledgements

This work was partially supported by two Projects of Ministerio de Educación y Ciencia (Spain): ESP99-1074-C02-01 and PB98-1576. Fruitful discussions about the invariants and the reduced phase spaces of the different reductions with Dr. Patricia Yanguas (Universidad Pública de Navarra) are deeply appreciated.

References

- [1] Abraham, R., & Marsden, J. E., *Foundations of Mechanics*, Addison–Wesley Publishing Company (Redwood City, 1985).
- [2] Arms, J. M., Cushman, R. H., & Gotay, M. J., A universal reduction procedure for Hamiltonian group actions. *The Geometry of Hamiltonian Systems*, T. Ratiu, editor, M. R. S. I. Workshop Proceedings, Springer–Verlag, Berlin and New York, pp. 33–51 (1991).
- [3] Arnold, V. I., Kozlov, V. V., & Neishtadt, A. I., *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, in *Dynamical Systems III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences* **3**, V. I. Arnold, editor, Springer–Verlag, (Berlin & New York, 1988).
- [4] Arnold, V. I., *Ordinary Differential Equations*, Springer–Verlag, (Berlin & New York, 1991).
- [5] Cicogna, G., & Gaeta, G., Normal forms and nonlinear symmetries, *J. Phys. A* **27**, 7115–7124 (1994).
- [6] Cicogna, G., & Gaeta, G., *Symmetry and Perturbation Theory in Nonlinear Dynamics*, Lecture Notes in Physics, vol. **57**, Springer–Verlag (Berlin & New York, 1999).
- [7] Coffey, S. C., & Deprit, A., Third order solution to the main problem in satellite theory, *J. Guid., Control and Dynam.* **5**, 363–371 (1982).
- [8] Cox, D., Little, J., & O’Shea, D., *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer–Verlag (Berlin & New York, 1992).

- [9] Cushman, R. H., Reduction, Brouwer's Hamiltonian, and the critical inclination, *Celestial Mech.* **31**, 401–429 (1983).
- [10] Cushman, R. H., & Bates, L. M., *Global Aspects of Classical Integrable Systems*, Birkhäuser (Basel, 1997).
- [11] Deprit, A., Canonical transformations depending on a small parameter, *Celestial Mech.* **1**, 12–30 (1969).
- [12] Deprit, A., The elimination of the parallax in satellite theory, *Celestial Mech.* **24**, 111–153 (1981).
- [13] Elphick, C., Tirapegui, E., Brachet, M. E., Couillet, P., & Iooss, G., A simple global characterization for normal forms of singular vector fields, *Phys. D* **29**, 95–127 (1987).
- [14] Fenichel, N., Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Indiana Univ. Math. J.* **21**, 193–225 (1971).
- [15] Ferrer, S., Hanßmann, H., Palacián, J., & Yanguas, P., On perturbed oscillators in 1-1-1 resonance: the case of axially symmetric cubic potentials, *J. Geom. Phys.* **40**, 320–369 (2002).
- [16] Gaeta, G., A splitting lemma for equivariant dynamics, *Lett. Math. Phys.* **33**, 313–320 (1995).
- [17] Giorgilli, A., A computer program for integrals of motion, *Comput. Phys. Comm.* **16**, 331–43 (1979).
- [18] Grammaticos, B., Dorizzi, B., & Padjen, R., Painlevé property and integrals of motion for the Hénon–Heiles system, *Phys. Lett. A* **89**, 111–113 (1982).
- [19] Guckenheimer, J., & Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences **42**, Springer–Verlag (Berlin & New York, 1993)
- [20] Gustavson, F. G., On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point, *Astronom. J.* **71**, 670–86 (1966).
- [21] Hénon, M., & Heiles, C., The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments, *Astronom. J.* **69**, 73–79 (1964).
- [22] Henrard, J., On a perturbation theory using Lie transforms, *Celestial Mech.* **3**, 107–120 (1970).

- [23] Jaric, M., Michel, L., & Sharp, R., Zeros of covariant vector fields for the point groups: invariant formulation, *J. de Phys.* **45**, 1–27 (1984).
- [24] Jorba, A., A methodology for the numerical computation of normal forms, centre manifolds and first integrals of Hamiltonian systems, *Experiment. Math.* **8**, 155–195 (1999).
- [25] Kamel, A. A., Expansion formulæ in canonical transformations depending on a small parameter, *Celestial Mech.* **1**, 190–199 (1969).
- [26] Kirchgraber, U., An ODE–solver based on the method of averaging, *Numer. Math.* **53**, 621–652 (1988).
- [27] Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E., & Ross, S. N., Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics, *Chaos* **10**, 427–469 (2000).
- [28] Krupa, M., Bifurcations of relative equilibria, *SIAM J. Math. Anal.* **21**, 1453–1486 (1990).
- [29] Lanchares, V., Palacián, J., Pascual, A. I., Salas, J. P., & Yanguas, P., Perturbed ion traps: a generalization of the 3D Hénon–Heiles problem, *Chaos* **12**, 87–99 (2002).
- [30] Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmosph. Sci.* **20**, 130–141 (1963).
- [31] Meyer, K. R., Symmetries and integrals in mechanics. *Dynamical Systems*, M. M. Peixoto, editor, Academic Press, New York & London, pp. 259–272 (1973).
- [32] Meyer, K. R., Normal forms for the general equilibrium, *Funkcial. Ekvac.* **27**, 261–271 (1984).
- [33] Meyer, K. R., *Lie transform tutorial - II*. *Computer Aided Proofs in Analysis*, K. R. Meyer and D. S. Schmidt, editors, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol. **28**, Springer–Verlag, Berlin & New York, pp. 190–210 (1991).
- [34] Meyer, K. R., & Hall, G. R., *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N–Body Problem*, Applied Mathematical Sciences **90**, Springer–Verlag (Berlin & New York, 1992).
- [35] Michel, L., Points critiques des fonctions G –invariantes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B* **272**, A433–A436 (1971).
- [36] Moser, J., New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems, *Comm. Pure Appl. Math.* **11**, 81–114 (1958).

- [37] Moser, J., Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold, *Commun. Pure Appl. Math.* **23**, 609–636 (1970).
- [38] Olver, P. J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **107**, Springer–Verlag (Berlin & New York, 1986).
- [39] Osácar, C., & Palacián, J., Decomposition of functions for elliptic orbits, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **60**, 207–223, (1994).
- [40] Palacián, J., Closed–form normalisations of perturbed two–body problems, *Chaos, Solitons & Fractals* **13**, 853–874 (2002).
- [41] Palacián, J., Normal forms for perturbed Keplerian systems, *J. Differential Equations* **180**, 471–519 (2002).
- [42] Palacián, J., Semianalytic integration of perturbed ordinary differential equations, *submitted* (2002).
- [43] Palacián, J., Invariant manifolds of an autonomous ODE from its generalised normal forms, *submitted* (2002).
- [44] Palacián, J., & Yanguas, P., Reduction of polynomial Hamiltonians by the construction of formal integrals, *Nonlinearity* **13**, 1021–1054 (2000).
- [45] Palacián, J., & Yanguas, P., Reduction of polynomial planar Hamiltonians with quadratic unperturbed part, *SIAM Rev.* **42**, 671–691 (2000).
- [46] Palacián, J., & Yanguas, P., Analytical approach for simplifying dynamical systems of polynomial type, *Math. Comput. Simulation* **57**, 291–305 (2001).
- [47] Palacián, J., & Yanguas, P., Generalized normal forms for polynomial vector fields, *J. Math. Pures Appl.* **80** 445–469 (2001).
- [48] Palacián, J., & Yanguas, P., Periodic orbits of the Lorenz system through perturbation theory, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **10**, 2559–2566 (2001).
- [49] Palacián, J., & Yanguas, P., Asymptotic symmetries and invariant manifolds of perturbed dynamical systems, in *Monografías del Seminario Matemático “García de Galdeano”* **21**, A. Elipe y L. Floría, editors, Universidad de Zaragoza, pp. 61–88 (2001).
- [50] Palacián, J., & Yanguas, P., Equivariant N –DOF Hamiltonians via generalized normal forms, *Comm. Contemp. Math.*, *accepted* (2002).

- [51] Sanders, J. A., & Verhulst, F., *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences, vol. **59**, Springer–Verlag (Berlin & New York, 1985).
- [52] Schwarz, G. W., Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group, *Topology* **14**, 63–68 (1975).
- [53] Schwarz, G. W., Lifting smooth homotopies of orbit spaces, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **51**, 37–135 (1980).
- [54] Uzer, T., Jaffé, C., Palacián, J., Yanguas, P. & Wiggins, S.: The geometry of reaction dynamics, *Nonlinearity* **15**, 957–992 (2002).
- [55] van der Meer, J.–C., *The Hamiltonian Hopf Bifurcation*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1160**, Springer–Verlag (Berlin & New York, 1985).
- [56] Verhulst, F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, (Berlin, 1991).
- [57] Walcher, S., On differential equations in normal form, *Math. Ann.* **291**, 293–314 (1991).
- [58] Walcher, S., On convergent normal form transformations in presence of symmetries, *J. Math. Anal. Appl.* **244**, 17–26 (2000).
- [59] Whittaker, E. T., On the adelpic integral of differential equations of dynamics, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **37**, 95–116 (1918).
- [60] Whittaker, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, (Cambridge, 1927).
- [61] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Texts in Applied Mathematics **2**, Springer–Verlag, (Berlin & New York, 1990).
- [62] Wiggins, S., *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences **105**, Springer–Verlag, (Berlin & New York, 1994).
- [63] Wiggins, S., Wiesenfeld, L., Jaffé, C., & Uzer, T., Impenetrable barriers in phase–space, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5478–5481 (2001).
- [64] Wilson, E. B., Decius, J. C., & Cross, P. C., *Molecular Vibrations*, Dover Publications Inc., (New York, 1955).
- [65] Wolfram, S., *The Mathematica Book*, 4th edition, Wolfram Media/Cambridge University Press (Cambridge, 1999).

- [66] Yanguas, P., *Integrability, Normalization and Symmetries of Hamiltonian Systems in 1-1-1 Resonance*, Ph.D. thesis, Universidad Pública de Navarra, (Pamplona, 1998).
- [67] Yanguas, P., Lowering the dimension of polynomial vector fields in \mathbf{R}^2 and \mathbf{R}^3 , *Chaos* **11**, 306–318 (2001).

La Función Zeta de Riemann

Catalina Calderón

Departamento de Matemáticas. Universidad del País Vasco

1 Introducción

(George Friedrich) BERNHARD RIEMANN (1826-1866), nació el 17 de septiembre de 1826 en Breselenz, cerca de Hannover. Hijo de un pastor luterano que se ocupó personalmente de la educación de su hijo durante los primeros años y lo instruyó en materias como aritmética, geometría e historia.

Riemann quería seguir los pasos de su padre y estudió filosofía y teología en Göttingen, pero los cursos que siguió del gran Gauss le llevaron muy pronto al estudio de las matemáticas. Incluso redactó su tesis doctoral bajo la dirección de Gauss.

Estudió un año en Berlin con insignes matemáticos como Jacobi, Steiner, Eisenstein y con el que (posiblemente) tuvo una influencia decisiva en sus investigaciones relativas a la teoría de los números, nos referimos a P.G.L. Dirichlet.

Riemann fue uno de los fundadores de la teoría de las funciones analíticas. Hizo contribuciones importantes en materias como geometría, física matemática y muy especialmente en teoría de los números, por las notables consecuencias que ha tenido su famosa hipótesis [32]. Las páginas que siguen sólo pretenden ser un breve esbozo de algunas de las



Figura 1: Bernhard Riemann

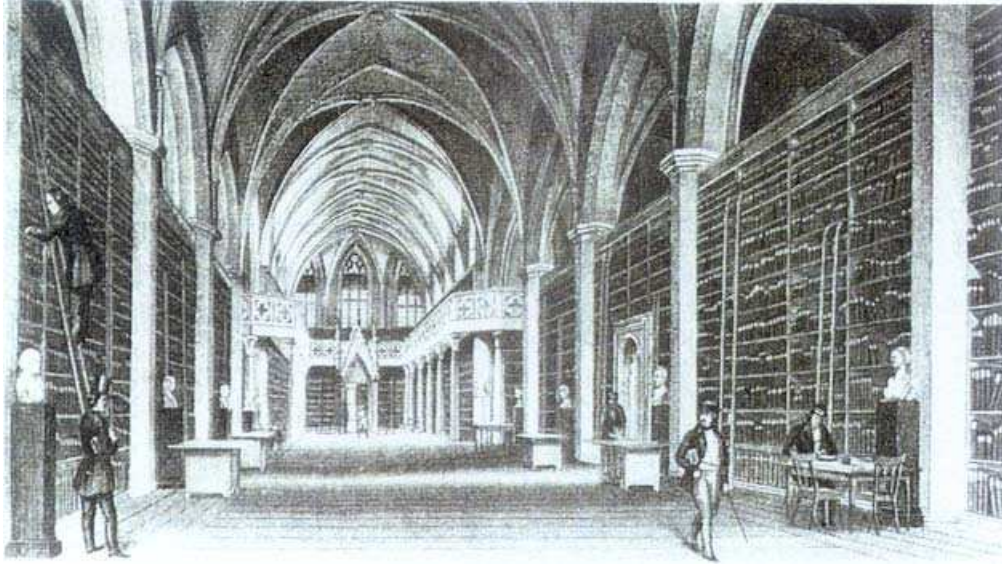


Figura 2: Biblioteca de la Universidad de Göttingen (alrededor de 1854)

propiedades relativas a la denominada función zeta de Riemann y su relación con ciertos problemas de la teoría de los números.

2 De Euler a Riemann

Desde Euclides (año 300 a. C.) se sabe que la sucesión de números primos es infinita. En 1737 Euler demostró que $\sum_n 1/p_n$ diverge, lo cual conduce a otra demostración de la existencia de infinitos números primos. Uno de los más notables descubrimientos de Euler fué la siguiente fórmula $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$. La observación de Euler (1749) de que el producto

$$(2.1) \quad \prod_p \{1 - p^{-s}\}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s > 1$$

donde p recorre todos los números primos p y n los naturales, será el comienzo de las investigaciones de Riemann en esta dirección.

A Riemann la fórmula de Euler le pareció realmente admirable. Entre los más de 100 años que hay desde el descubrimiento de esta fórmula por Euler y el interés de Riemann por ella, la mayoría de los matemáticos la consideraban como una mera curiosidad. Resulta difícil ver como esta representación en producto puede ayudar a establecer un planteamiento analítico para la función $\pi(x)$, esto es, la cantidad de números primos en el intervalo $[1, x]$. La distribución de los primos es realmente obstrusa.

Riemann se interesó, entre otros temas, por la distribución de los números primos. Se plantean inmediatamente numerosas preguntas como son: existencia de infinitos números primos; determinación de fórmulas que permitan obtener los números primos; distribución

de los mismos en otras sucesiones distintas de la de números naturales; medida de los intervalos entre dos primos consecutivos; etc.

En 1849 A. de Polignac conjeturó que para todo número par $2n$ había infinitas parejas de primos cuya diferencia era $2n$. El caso $n = 1$ corresponde a la famosa conjetura de los primos gemelos. La pregunta que nos hacemos aquí es ¿existen infinitos primos p , tales que $p + 2$ sea también primo?. Una caracterización de los primos gemelos la da Clement [7]. Sea $n \geq 2$, los enteros n y $n + 2$ forman un par de primos gemelos sí y sólo si $4[(n - 1)! + 1] + n \equiv 0 \pmod{n(n + 2)}$.

Para cada $x > 1$, denotamos por $\pi_2(x)$ al número de primos $p \leq x$ tales que $p + 2$ es a su vez primo. La conjetura es que $\pi_2(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. V. Brun obtiene los primeros resultados no triviales relativos a esta conjetura (ver [29]) y demuestra que la serie $\sum_n 1/p_n$ restringida a los primos gemelos es convergente.

Legendre y Gauss se interesaron por el problema de establecer la cantidad de números primos que hay en un intervalo $[1, x]$. Legendre afirmaba que para valores suficientemente grandes $\pi(x)$ es aproximadamente igual a $x/(\log x - 1, 08366)$.

Independientemente de Legendre, Gauss (1792), calculando la cantidad de números primos consecutivos que hay en cada mil números de la sucesión natural, afirmaba que $\pi(x)$ se diferencia relativamente poco de la integral

$\int_2^x dt/\log t$. Prácticamente las hipótesis de Legendre y Gauss se expresan por las fórmulas

$$\overline{\pi(x)} \approx \frac{x}{\log x}, \quad \pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Esta última integral es denotada usualmente por $li x$. Aplicando integración por partes el $li x$ se demuestra que

$$li x = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \sim \frac{x}{\log x}$$

así que $\pi(x) \sim li x$ y $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, $x \rightarrow \infty$ son equivalentes.

Chebyshev (1851) demuestra las desigualdades $0.92 \leq \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq 1.11$ y deduce que si existe el límite cuando $x \rightarrow \infty$ de $\frac{\pi(x)}{x/\log x}$, entonces debe ser la unidad

$$(2.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1,$$

(en el supuesto de que dicho límite exista). Es decir que se cumpliría la equivalencia asintótica siguiente $\pi(x) \sim x/\log x$, $x \rightarrow \infty$. Esta conjetura es la que conocemos como *Teorema de los números primos*, sobre la *densidad* de estos entre los naturales.

La existencia del límite la demostraron Hadamard y de la Vallée Poussin independientemente uno de otro en 1896, mediante las ideas desarrolladas por Riemann relacionadas con la función $\zeta(s)$ para valores complejos de s . Con ello quedaba completamente demostrada (2.2): la ley asintótica de distribución de los números primos. Pero que se

verifique (2.2) o su equivalente, sólo nos dice que $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o(\frac{x}{\log x})$. Nos queda por lo tanto un resto $R(x) = \pi(x) - \frac{x}{\log x}$ que hay que precisar.

Riemann observó que el orden de la diferencia de $\pi(x) - li(x)$ depende de la ubicación de los ceros de la función $\zeta(s)$ en la franja crítica $0 < Re s = \sigma < 1$.

En su memoria de 1859, Riemann estudia la función $\zeta(s)$ definida en $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$ por la serie armónica generalizada $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, $s = \sigma + it, \sigma, t \in \mathbb{R}$. N. Oresme ya había demostrado que $\zeta(1)$, la propia serie armónica, diverge. Sabemos así que esta serie es convergente en la región dada y en $Re(s) \geq \delta > 1$ la serie está dominada término a término por la serie absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta}$ por lo que, según el criterio de Weierstrass converge uniformemente en $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq \delta\}$ y representa una función holomorfa en $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$.

La conexión fundamental entre la función $\zeta(s)$ y los números primos está dada por

$$(2.3) \quad \zeta(s) = \prod_p \{1 - p^{-s}\}^{-1}, \quad s > 1$$

donde el producto está tomado sobre todos los números primos p .

En efecto : Si cada uno de los factores $\{1 - p^{-s}\}^{-1}$ de la derecha de (2.5) lo escribimos mediante el desarrollo $1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots$, entonces el producto de los factores extendido a los primos $p \leq N$ se puede escribir como suma de los términos de la forma n^{-s} siendo n divisible únicamente por los primos $p \leq N$. Pasando al límite obtenemos (2.3).

Veremos algunas de las propiedades que la función $\zeta(s)$ verifica, considerando $\zeta(s)$ para valores complejos de s .

(a) La primera de ellas es que la fórmula (2.3) es válida para todo s complejo del semiplano $\sigma > 1$, siendo además el producto infinito absolutamente convergente en dicho semiplano. Como consecuencia, ya que $\zeta(s)$ es un producto de factores no nulos absolutamente convergente en $\sigma > 1$, deducimos que $\zeta(s) \neq 0$ en $\sigma > 1$. Es decir, $\zeta(s)$ no tiene ceros en el semiplano $\sigma > 1$.

(b) La versión discreta de la integración por partes, llamada fórmula de sumación de Abel nos va a proporcionar una versión integral de la función $\zeta(s)$ en el semiplano $\sigma > 1$.

Sea $a(n)$ una función aritmética, $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ y sea $f(t)$ una función con derivada continua en el intervalo $[x_0, x]$. Definamos $A(t) = \sum_{n \leq t} a(n)$ entonces

$$(2.4) \quad \sum_{x_0 < n \leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(x_0)f(x_0) - \int_{x_0}^x A(t)f'(t)dt.$$

Algunos ejemplos relacionados con la función $\zeta(s)$ se obtienen considerando $f(x) = x^{-s}$, y la función aritmética $a(n) = 1, \mu(n), |\mu(n)|, \Lambda_1(n) = \Lambda(n)/\log n, \Lambda(n)$, tal que la función $\mu(n)$ se define por $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$ siendo $\omega(n)$ el número de factores primos distintos del número n y $\mu(n) = 0$ si n es divisible por un cuadrado. La función $\Lambda(n)$ es nula salvo cuando n es una potencia de un primo p en cuyo caso $\Lambda(n) = \log p$.

Las expresiones correspondientes de $A(x)$ son $[x]$, $M(x)$, $Q(x)$, $\Pi(x)$, $\psi(x)$ $[x]$ denota la parte entera de x , $M(x)$ es la función de Mertens (1897), esto es, la función sumatoria de $\mu(n)$, $Q(x)$ cuenta los números libres de cuadrados en $[1, x]$ y

$$\Pi(x) = \pi(x) + (1/2)\pi(x^{1/2}) + (1/3)\pi(x^{1/3}) + \dots$$

y por último $\psi(x)$ que es la función de Chebyshev $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$.

Entonces si hacemos tender x a ∞ y $Re\ s > 1$, resulta

que en todos los casos mencionados se puede acotar de forma trivial $A(x) \ll x$ por lo que el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x)/x = 0$. Se obtienen entonces las formulaciones integrales correspondientes a las funciones siguientes $\zeta(s)$, $1/\zeta(s)$, $\zeta(s)/\zeta(2s)$, $\log \zeta(s)$, $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ por ejemplo en $\sigma > 1$ se tiene

$$(2.5) \quad \zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{[x]}{x^{s+1}} dx.$$

La siguiente propiedad muestra la estrecha relación entre $\zeta(s)$ y $\pi(x)$. Para $\sigma > 1$ se verifica

$$(2.6) \quad \log \zeta(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx.$$

El teorema del número primo puede obtenerse invirtiendo esta relación, esto es, resolviendo la ecuación para $\pi(x)$. Entonces, aparece $\pi(x)$ como una integral sobre $(\log \zeta(s))/s$, aunque la integral resultante es algo difícil de evaluar.

Si en (2.4) consideramos por función $a(n)$ el carácter $\chi(n)$ de Dirichlet estaremos en el caso de las L -funciones, $L(\chi, s)$.

(c) Si seguimos avanzando en el plano complejo nos encontramos con las investigaciones de Hadamard y de la Vallée Poussin que demostraron que

$$\zeta(1 + it) \neq 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

(d) Podemos extender $\zeta(s)$ al semiplano $\sigma > 0$, así se comprueba que $\zeta(s)$ es analítica en $\sigma > 0$ salvo en $s = 1$, y se representa en dicho semiplano por la relación

$$(2.7) \quad \zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$

donde $\{x\}$ indica la parte fraccionaria de x . De esta expresión precisamente, vemos que el residuo de $\zeta(s)$ en $s = 1$ es la unidad y como consecuencia resulta que $\zeta(s)$ admite un desarrollo en serie de Laurent de la forma siguiente

$$(2.8) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma_0 + \gamma_1(s-1) + \gamma_2(s-1)^2 + \dots$$

donde $\gamma_0 = \gamma = 0,5772157\dots$ es la constante de Euler y

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n \leq N} \frac{1}{n} \log^k n - \frac{\log^{k+1} N}{k+1} \right], \forall k \in \mathbb{N}.$$

(d) Todavía podemos prolongar analíticamente la función $\zeta(s)$ a un semiplano mayor. Obtenemos que para $\sigma > -1$, la función $\zeta(s)$ es analítica, salvo en el polo $s = 1$, y admite la representación

$$(2.9) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^{\infty} \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx.$$

3 Hipótesis de Riemann

Según hemos mencionado al principio, vemos que las cuestiones relativas a la distribución de números primos están estrechamente relacionadas con las propiedades de la función $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, $s = \sigma + it$, $\sigma, t \in \mathbb{R}$.

Riemann, demostró que $\zeta(s)$ se puede prolongar analíticamente a todo el s -plano complejo, resultando una función meromorfa con un único polo simple en el punto $s = 1$ de residuo 1.

Teorema. *La función $\zeta(s)$ es analítica para todo valor de s salvo $s = 1$, donde existe un polo de la función de residuo 1. Se satisface la ecuación funcional*

$$(3.1) \quad \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Esta ecuación se puede demostrar usando varios métodos, algunas de las demostraciones pueden encontrarse en el libro de Titchmarsh. Una de ellas depende de la fórmula de sumación de Euler. Otra depende de la fórmula de sumación de Poisson

$$(3.2) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\pi n x dx.$$

Una demostración original de Riemann (entre otras), parte de la relación

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} e^{-n^2 \pi x} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) n^{-s} \pi^{-\frac{1}{2}s}.$$

Lo que conduce a

$$(3.3) \quad \zeta(s) = \pi^{\frac{1}{2}s} \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}s\right) \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}s-1} \theta(x) dx, \quad (\sigma > 1).$$

Para $x > 0$, se sabe que $2\theta(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} (2\theta(\frac{1}{x}) + 1)$ siendo $\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$. De (3.3) se deduce

$$\pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} (x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}s-1}) \theta(x) dx$$

y la integral converge para todo s , así la fórmula se verifica, por prolongación analítica, para todo valor de s . Cambiando a la derecha s por $1-s$ se obtiene la ecuación funcional en la forma

$$(3.4) \quad \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\right) \zeta(1-s).$$

La ecuación funcional se escribe también en la forma $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ $s = \sigma + it$,

$$(3.5) \quad \chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

y $\chi(s)\chi(1-s) = 1$ si $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$, entonces se verifica $\xi(s) = \xi(1-s)$ siendo $\Gamma(s)$ la función Gamma de Euler, que en forma integral es

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

El propio Euler obtuvo un caso particular de la ecuación funcional y evaluó $\zeta(s)$ para s entero positivo par y para s entero negativo impar. (ver Ayoub [2]).

De la ecuación funcional se deduce que en el semiplano $\operatorname{Re} s < 0$ la función $\zeta(s)$ sólo tiene los ceros triviales $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}$. Para valores enteros de s sabemos que $\zeta(0) = -1/2$ y para m entero no nulo resulta $\zeta(-2m) = 0$; $\zeta(1-2m) = \frac{(-1)^m B_m}{2m}$, ($m = 1, 2, 3, \dots$) donde los coeficientes B_m son los del desarrollo

$$\frac{s}{e^s - 1} = 1 - \frac{1}{2}s + \frac{B_1}{2!}s^2 - \frac{B_2}{4!}s^4 + \dots, \quad |s| < 2\pi.$$

Así queda por estudiar la parte más problemática del plano, la denominada franja crítica, $0 < \sigma < 1$, $t \in \mathbb{R}$. Riemann en su memoria afirma

(1) $\zeta(s)$ tiene infinitos ceros complejos que están en la banda crítica, que son simétricos respecto de las rectas $\operatorname{Re} s = \sigma = 1/2$, y $\operatorname{Im} s = 0$.

(2) Si denotamos por $N(T)$ al número de ceros de $\zeta(s)$ en el rectángulo $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$, entonces $N(T) = (T/2\pi) \log(T/2\pi) - (T/2\pi) + O(\log T)$.

(3) La serie $\sum |\rho|^{-2}$ converge mientras que la serie $\sum |\rho|^{-1}$ es divergente. La sumación se extiende a todos los ceros complejos $\rho = \beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$.

(4) La función entera $\xi(s) = (1/2)s(s-1)\pi^{-(1/2)s}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ se puede escribir en la forma

$$(3.6) \quad \xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} \{1 - (s/\rho)\} e^{s/\rho}$$

donde A, B son constantes. El producto es absolutamente convergente y está tomado sobre todos los ceros complejos de $\zeta(s)$.

(5) Todos los ceros complejos de $\zeta(s)$ están en la recta $\operatorname{Re} s = 1/2$.

(6) Para $x > 1$, la función $\Pi(x) = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m}$ verifica $\Pi(x) = \pi(x) + O(\sqrt{x})$. Riemann conjetura que para x no entero

$$(3.7) \quad \Pi(x) = li(x) - \sum_{\rho} li(x^\rho) + \int_2^\infty \frac{du}{(u^2-1)u \log u} - \log 2$$

siendo $li(x)$ es el logaritmo integral, $\int_2^x dt/\log t$ y $\sum |\rho|^{-2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\gamma| \leq T} |\rho|^{-2}$.

Las cuestiones (1), (3), (4) las demostró por primera vez Hadamard

[11]-[12] y fueron muy importantes en las primeras demostraciones del teorema de los números primos. La (2) fué demostrada por Mangoldt ([26]) en 1895, y más precisamente en 1905. Hardy [13], en 1914, demostró la existencia de infinitos ceros en la recta $Re s = 1/2$. La única afirmación abierta es (5), que es la conocida como *Hipótesis de Riemann*. El primer paso a su demostración se debe al propio Riemann, quien demostró que $\zeta(s)$ tiene infinitos ceros en la recta $Re s = 1/2$ y que casi todos los ceros de la función están próximos a esta recta. Pero Riemann no publicó sus resultados y fué Siegel, en 1935, el que lo descubrió entre los papeles inéditos de Riemann.

En 1900 Hilbert colocó el problema (5) en la lista de los problemas más importantes con los que deberían enfrentarse los matemáticos.

4 Ceros de la función $\zeta(s)$

En el estudio de los ceros de la función zeta, consideramos tres aspectos, a) el número de ceros que hay en un rectángulo de la franja crítica, b) la magnitud de los intervalos entre ceros consecutivos de la línea crítica y c) la obtención de regiones de la franja crítica donde $\zeta(s) \neq 0$.

a) Hipótesis de Lindelöf e hipótesis de densidad. En relación con la función zeta de Riemann, Lindelöf conjetura que $\zeta(1/2 + it) \ll |t|^\epsilon$ siendo $t \rightarrow +\infty$ y ϵ un número positivo arbitrariamente pequeño.

En 1912, Littlewood [24] probó que la conjetura de Riemann implica la de Lindelöf. El recíproco es falso.

Denotamos por ρ los zeros complejos de $\zeta(s)$, y $N(\alpha, T)$ al número de tales ceros ρ , tal que $0 < Im \rho \leq T, Re \rho = \sigma > \alpha$ siendo $1/2 \leq \alpha \leq 1$. Una condición necesaria y suficiente para que la hipótesis de Lindelöf sea cierta es que se verifique $N(\alpha, T + 1) - N(\alpha, T) = o(\log T)$ cuando $\alpha > 1/2, T \rightarrow +\infty$, (vease Backlund [3] y Littlewood [23]). Littlewood probó que para $1/2 \leq \alpha \leq 1$ la siguiente estimación

$$N(\sigma, T) \ll \frac{T}{\sigma - 1/2} \log \frac{1}{\sigma - 1/2}$$

es válida uniformemente respecto de σ .

Selberg [33], obtiene una estimación uniforme respecto de σ en el intervalo $1/2 \leq \sigma \leq 1$ que rebaja el exponente de T respecto a la de Littlewood,

$$N(\sigma, T) \ll T^{1 - \frac{1}{4}(\sigma - \frac{1}{2})} \log T.$$

Las estimaciones de $N(\sigma, T)$ son importantes en la aplicación a la resolución de ciertos problemas. En la conjetura de Bertrand, Chebyshev demostró un resultado más fuerte pues probó que en el intervalo $(x, x+h]$ hay un número primo si $x \geq x_0$ y $h \geq \frac{1}{5}x$. A partir

de esto la pregunta siguiente es clara. ¿ Como de pequeño puede ser $h = h(x)$ de forma que se siga cumpliendo el postulado de Bertrand? Se comprueba que si se estudia la diferencia $\psi(x+h) - \psi(x)$, $h < x$, entonces la demostración de que en el intervalo $(x, x+h]$ haya un número primo, depende de la comprobación de que la suma $\sum_{x < p \leq x+h} \log p$ sea positiva, con lo que se podrá afirmar que el intervalo de sumación es no vacío. Dicha suma depende a su vez del número de ceros complejos en un rectángulo, por lo que este problema nos lleva a la necesidad de tener estimaciones de $N(\sigma, T)$ de la forma

$$(4.1) \quad N(\sigma, T) \ll T^{a(1-\sigma)} \log^b T, \quad 1/2 \leq \sigma \leq 1$$

(a, b constantes absolutas positivas, $a \geq 2$), uniforme en sigma. La estimación (4.1) con $a = 2$, se conoce como

Hipótesis de densidad.

Si la hipótesis de Riemann es cierta, entonces $N(\sigma, T) = 0$, para $\sigma > 1/2$.

b) Intervalos entre ceros consecutivos. Una de las cuestiones que se plantean, es estudiar como están distribuidos los ceros en la línea $s = \frac{1}{2} + it, t \in \mathbb{R}$.

Por ello se busca estimar la diferencia entre las partes imaginarias de ceros consecutivos de dicha línea. Sea t_n la parte imaginaria del n -ésimo cero de la función $\zeta(s)$ de la forma $\frac{1}{2} + it, t \geq 0$, tal que $0 < t_1 \leq t_2 \dots$. Por ejemplo, los primeros valores de t_j con seis decimales son

$$t_1 = 14.134725, t_2 = 21.022040, t_3 = 25.010858, t_4 = 30.42487666, t_5 = 32.935062,$$

$$t_6 = 37.586178, t_7 = 40.918719, t_8 = 43,327073, t_9 = 48.005151, t_{10} = 49.773832 ,$$

(Haselgrove-Miller [16], dan los 1500 primeros ceros con seis decimales). Sea

$$\theta = \inf\{\alpha \geq 0; t_{n+1} - t_n \ll t_n^\alpha\}$$

así que $t_{n+1} - t_n < t_n^{\theta+\epsilon}$, para cada $\epsilon > 0$ y $n \geq n_0(\epsilon)$. Hardy y Littlewood obtuvieron la estimación con $\theta \leq \frac{1}{4}$ en 1918. Su estimación no se mejoró hasta 1976 cuando J. Moser [27] y R. Balasubramanian [4] obtienen $\theta \leq \frac{1}{6}$. A.A. Karatzuba [20] la obtiene con $\theta \leq \frac{5}{32}$.

A. Ivic [19], demuestra que $\theta \leq 0,15594583\dots < \frac{5}{32}$, lo que mejora la estimación de A.A.karatzuba.

c) Regiones libres de ceros y método de Vinogradov. Una forma de abordar el problema (5) por numerosos matemáticos ha sido obtener regiones de la franja crítica $0 < \sigma < 1, t \in \mathbb{R}$, cada vez más amplias donde $\zeta(s) \neq 0$. Ch. de la Vallée Poussin (1898) demostró que $\zeta(s) \neq 0$ en el dominio

$$(4.2) \quad \text{Re } s \geq 1 - \frac{A}{\log(|t| + 2)}, \quad A > 0.$$

En 1922 Littlewood mejoró el resultado anterior demostrando que la función $\zeta(s)$ no tiene ceros en

$$(4.3) \quad \operatorname{Re} s \geq 1 - \frac{A \log \log |t|}{\log |t|}, \quad |t| > e^2.$$

Es evidente que la constante A no es la misma en cada caso. En 1936 Chudakov obtiene para $|t| \geq 3$, la región libre de ceros

$$(4.4) \quad \operatorname{Re} s \geq 1 - \frac{A}{\log^{3/4} |t| (\log \log |t|)^{3/4}}.$$

El método de Vinogradov-Korobov de estimación de integrales exponenciales nos permite obtener regiones libres de ceros. Sea H^n el hipercubo unidad n dimensional $(0, 1]^n$. Para cada n -tupla $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ de enteros b_j , sea $J_{k,n}(\mathbf{b}, P)$ el número de soluciones de

$$(4.5) \quad \sum_{i=1}^k (x_i^j - x_{k+i}^j) = b_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq x_1, \dots, x_{2k} \leq P$$

y sea $S(\mathbf{a}, P) = \sum_{x \leq P} e(a_1 x + \dots + a_n x^n)$. Entonces

$$J_{k,n}(\mathbf{b}, P) = \int_{H^n} |S(\mathbf{a}, P)|^{2k} e(-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) d\mathbf{a}$$

donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. Es fácil ver que

$$(4.6) \quad J_{k,n}(\mathbf{b}, P) \leq J_{k,n}(0, P) = J_{k,n}(P).$$

El primer paso en el método de Vinogradov-Korobov es obtener una estimación para $J_{k,n}(P)$, hallando una cota superior para el número de soluciones del sistema de ecuaciones, cuando $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, lo cual después de las investigaciones de Linnik, Karatzuba y Korobov se comprueba que equivale a calcular el número de soluciones de un sistema de congruencias. Esta cota de $J_{k,n}(P)$ se conoce como *Teorema del valor medio de Vinogradov*.

El segundo paso es aplicar el *Teorema del valor medio de Vinogradov* para estimar sumas de la forma $\sum_{n \in I} e^{2\pi i f(n)}$, $I = (a, b]$, donde f es una función real de variable real continuamente diferenciable cierto número de veces. Obsérvese que si se elige la función $f(x) = -\frac{1}{2\pi} t \log x$, $t > 0$ entonces se tiene la suma $\sum_{n \in I} n^{-it}$, $I = (a, b]$. Como consecuencia obtenemos estimaciones en sumas del tipo

$$\sum_{a < n \leq b} n^{-\sigma - it}, \quad 0 < \sigma < 1, t > 0$$

de la cual se deduce una región libre de ceros del tipo

$$\zeta(s) \neq 0, \quad \text{si } \operatorname{Re} s > 1 - \frac{1}{\log^\alpha t}, \quad t > t_1 (t_1 > 2), \quad \alpha < 1.$$

que es mejor que la de Littlewood. Refinando el método se obtiene la mejor región libre de ceros conocida.

Ivic [19], da el siguiente teorema: *Existe una constante $\eta > 0$ tal que para $1-\eta \leq \sigma \leq 1$ uniformemente en σ se tiene*

$$(4.7) \quad \zeta(\sigma + it) \ll t^{122(1-\sigma)^{3/2}} \log^{2/3} t, \quad (t \geq t_0).$$

Este resultado implica $\zeta(1+it) \ll (\log t)^{2/3}$ demostrado en 1958 por Korobov [21] y Vinogradov [35]. La mejor región libre de ceros conocida por ahora $\sigma \geq 1-C(\log t)^{-2/3}(\log \log t)^{-1/3}$, $t \geq 3$. Su demostración puede encontrarse en el libro de Walfisz [36] y el resultado es debido a H.E. Richert, (ver pag.226 o también en Ivic [19]). La estimación anterior aún siendo la mejor, está todavía muy lejos de la hipótesis planteada por Riemann.

5 Algunos problemas relacionados con la hipótesis de Riemann

Ya hemos visto la estrecha relación que existe entre $\zeta(s)$ y la función $\pi(x)$. Veremos aquí que, si se supone cierta la hipótesis de Riemann, entonces, se obtiene la mejor estimación posible para los intervalos entre dos primos consecutivos.

(a) **Hipótesis de los primos consecutivos.** La cuestión ahora es: *¿cómo están distribuidos los números primos?* La distribución de los números primos es extremadamente irregular. Conociendo el n -ésimo número primo p_n , ¿cuánto tengo que avanzar en la sucesión natural hasta encontrar otro número primo p_{n+1} ? Esto nos lleva a la conocida como hipótesis de los primos consecutivos. *Dados dos primos consecutivos ¿de qué orden es su diferencia?* Para los intervalos entre dos números primos consecutivos, se obtienen estimaciones asintóticas del tipo $p_{n+1} - p_n \ll p_n^\alpha (\log p_n)^\beta$ con $0 < \alpha < 1$, $\beta \geq 0$.

La hipótesis de Lindelöf implica la estimación para la diferencia de primos consecutivos $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2+\epsilon}$ para cada $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande.

C.J.Mozzochi [28] demuestra (sin hipótesis) $p_{n+1} - p_n \ll p_n^\theta$, $\theta = (11/20) - \delta$ donde $\delta \leq \frac{1}{384} = 0,547395833\dots$. Pero si la Hipótesis de Riemann es cierta, se cumple la mejor estimación siguiente

Teorema. *Si la Hipótesis de Riemann es cierta entonces se verifica la estimación $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2} \log p_n$.*

Este es el mejor resultado que se tiene en este problema suponiendo la Hipótesis de Riemann.

(b) **Distribución de los números primos.** Obtener mayores regiones libres de ceros de $\zeta(s)$ conduce a mejores estimaciones de varias funciones conectadas con la distribución de los números primos. La evaluación más precisa del término error depende precisamente de esas regiones libres de ceros de $\zeta(s)$, cuanto mayor es la región mejor es la estimación de la diferencia $|\psi(x) - x|$; $|\pi(x) - li(x)|$.

Gran número de problemas se pueden formular mediante las funciones de Chebyshev $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$.

Riemann estableció sin demostración en 1895, una fórmula mediante la cual se relaciona $\psi(x)$ con cierta suma sobre los ceros complejos de la función zeta, esto es

$$(5.2) \quad \psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2})$$

siendo γ la constante de Euler, ($x > 1, x \neq p^m$) y que demostró H. von Mangoldt en 1895. La suma se extiende a todos los ceros complejos de $\zeta(s)$ y

$$\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\text{Im}\rho| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho}.$$

La forma truncada de E. Landau es la que se usa en la práctica para muchas de las investigaciones,

$$(5.3) \quad \psi(x) = x - \sum_{|\text{Im}\rho| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x}{T}(\log xT)^2\right) + O(\log x).$$

La propiedad de Hadamard y de la Vallée Poussin: $\zeta(s) \neq 0$ en

la línea $\text{Re } s = 1$ junto con (5.2) implican que $\psi(x) \sim x$, cuando $x \rightarrow \infty$ esto es, una forma equivalente de la ley asintótica de distribución de los números primos. Se ha de estimar la diferencia $\psi(x) - x$, $\theta(x) - x$, o equivalentemente $\pi(x) - li(x)$.

Teorema. *La hipótesis de Riemann aplicada aquí nos da las estimaciones*

$$(5.4) \quad \psi(x) = x + O(\sqrt{x} \log^2 x), \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(\sqrt{x} \log x).$$

Prescindiendo de la Hipótesis de Riemann y utilizando la mejor región libre de ceros de la función zeta en la franja crítica se deduce

$$(5.5) \quad \psi(x) = x + O(x \exp\{-C\delta(x)\})$$

donde C es una constante positiva y $\delta(x) = (\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5}$. Sin hipótesis de Riemann (5.5) es la mejor estimación conocida de $\psi(x)$. La fórmula se debe a H.E. Richert y A. Walfisz ([36]).

Así mismo para el número de primos $p \leq x$ se verifica

$$(5.6) \quad \pi(x) = li(x) + O(x \exp\{-C\delta(x)\}).$$

(c) Función de Möbius e hipótesis de Mertens. Consideremos la función de Mertens $M(x)$, esto es, la función suma de los coeficientes de la serie de Dirichlet

$$(5.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad s = \sigma + it$$

que evidentemente converge en $\sigma > 1$. Nos preguntamos ahora por dos cuestiones: (i) la acotación de $M(x)$, (ii) posibilidad de convergencia de la serie en un semiplano mayor

Respecto al primer problema es conocido que, sin restricciones de hipótesis de Riemann o Lindelöf se verifica

$$(5.8) \quad M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \ll x \exp\{-C\delta(x)\}$$

con $\delta(x)$ definida como en (5.5).

Respecto al segundo problema, mediante la fórmula de inversión para las series de Dirichlet (fórmula truncada de Perron), se demuestra que (5.7) es además válida en todos los puntos de la línea $\sigma = 1$.

Lema. Sea $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$, absolutamente convergente en el semiplano $\text{Re } s > 1$. Supongamos que $|a(n)| < C\Psi(n)$, $C > 0$ y siendo la función $\Psi(x)$ monótona creciente para $x \geq x_0$. Sea además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^{\sigma}} \ll \frac{1}{(\sigma - 1)^{\alpha}}$$

cuando $\sigma \rightarrow 1 + 0$ para algún $\alpha > 0$. Si $w = u + iv$ (u y v reales) es arbitrario, $b > 0$, $T > 0$, $u + b > 1$, entonces

$$\sum_{n \leq x} \frac{a(n)}{n^w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s+w) \frac{x^s}{s} ds +$$

$$+O(x^b T^{-1}(u+b-1)^{-\alpha}) + O(T^{-1}\Psi(2x)x^{1-u} \log 2x) + O(\Psi(2x)x^{-u}),$$

y la estimación es uniforme en x, T, b y u con tal que b y u esten acotados.

En [34] se puede ver la fórmula desglosada según que x sea entero o no. Aplicando el Lema a la función generatriz de la función de Möbius tenemos

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{\zeta(s+w)} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{Tb}\right) + O\left(\frac{\log x}{T}\right).$$

Del teorema de los residuos y las acotaciones en la región libre ceros de la función zeta se deduce

Teorema. Se verifica la relación

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

en todos los puntos de la línea $\sigma = 1$.

En particular resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Mangoldt demuestra que esta serie es nula utilizando el teorema del número primo. También se verifica el recíproco: es decir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$ implica

$$(5.9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} = 0,$$

y esta es una de las numerosas formas equivalentes del teorema del número primo.

Pero si se supone que la Hipótesis de Riemann es cierta entonces se mejoran considerablemente ambas propiedades. Por un lado se cumple

Teorema. *Para que la hipótesis de Riemann sea cierta, es condición necesaria y suficiente que se verifique la estimación*

$$(5.10) \quad M(x) \ll x^{1/2+\epsilon}$$

para cada $\epsilon > 0$.

Obsérvese que hemos pasado de la estimación $M(x) = o(x)$, $x \rightarrow \infty$ a una estimación (5.10) mucho mas precisa. En cuanto a la convergencia de la serie, utilizando el Lema anterior con $a(n) = \mu(n)$, $F(s) = 1/\zeta(s)$, $b > 1$ obtenemos

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{\zeta(s+w)} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{Tb}\right).$$

La aplicación del teorema de los residuos en el rectángulo de vértices $(b \pm iT, 1/2 - \sigma + \delta \pm iT)$ donde $0 < \delta < \sigma - 1/2$, y teniendo en cuenta que si la hipótesis de Riemann es cierta entonces $\zeta(s) \ll t^\epsilon$, $1/\zeta(s) \ll t^\epsilon$ para cada s con $\sigma > 1/2$ y eligiendo $b = 2$, $T = x^3$, resulta que *si suponemos cierta la hipótesis de Riemann la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s}$ converge en el semiplano $\sigma > 1/2$* . Como consecuencia resulta que

Teorema. *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s}$ converge para $\sigma > 1/2$ si y sólo si la hipótesis de Riemann es cierta.*

La hipótesis de Mertens sobre $M(x)$, establece que $|M(x)| < \sqrt{x}$ obsérvese que esta hipótesis es más fuerte que la de Riemann, de hecho la hipótesis de Mertens implicaría la de Riemann. Pero la hipótesis de Mertens fué rechazada en 1985 por Odzizco y Riele [30] quienes probaron que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} > 1,06, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} < -1,009.$$

(d) Problema divisor de Dirichlet e hipótesis de Lindelöf. En los problemas divisor se estudian las funciones aritméticas que son coeficientes de series de Dirichlet generadas por $\zeta^2(s)$, $\zeta^k(s)$, $k > 2$. Estas funciones son $d(n) = d_2(n)$ que denota el número de divisores positivos de n y está generada por $\zeta^2(s)$.

La función $d_k(n)$ está generada por $\zeta^k(s)$, $k > 2$ y representa el número de formas de expresar n como producto de k factores de enteros positivos. El caso $k = 3$ es conocido como problema de Piltz.

El problema divisor de Dirichlet trata de la estimación del término error $\Delta_k(x)$, $k \geq 2$ para la función sumatoria de $d_k(n)$. Cuando $k = 2$ se tiene

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta(x).$$

De la fórmula de inversión para series de Dirichlet, obtenemos la relación

$$(5.11) \quad \sum_{n \leq x} d_k(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \zeta^k(s) x^s s^{-1} ds, \quad b > 1$$

con la condición de x no entero y siendo $\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s}$, $\sigma > 1$. Así se obtiene

$$\sum_{n \leq x} d_k(n) = x P_{k-1}(\log x) + \Delta_k(x)$$

donde $P_{k-1}(t)$ representa un polinomio en t de grado $k-1$ y que se puede calcular mediante el teorema de Cauchy de los residuos. El término error está dado por

$$(5.12) \quad \Delta_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \zeta^k(s) x^s s^{-1} ds + O(x^\epsilon)$$

para $1/2 < c < 1$, y $\Delta_k(x) = o(x)$, cuando $x \rightarrow \infty$.

Para $k \geq 4$ la estimación del término error depende de las estimaciones de la función zeta, y para los valores de $k = 2, 3$, las mejores estimaciones se han obtenido por otros métodos diferentes.

Para el término error, el propio Dirichlet demuestra que cuando $k = 2$ es $\Delta_2(x) \ll \sqrt{x}$. Una extensión del método de Dirichlet da la estimación para $\Delta_k(x)$ siguiente $\Delta_k(x) \ll x^{\frac{k-1}{k}} \log^{k-2} x$.

Sean α_k, β_k el ínfimo de los números a_k, b_k respectivamente para los cuales

$$(5.13) \quad \Delta_k(x) \ll x^{a_k+\epsilon}, \quad \int_1^x \Delta_k^2(y) dy \ll x^{1+2b_k+\epsilon}.$$

Para todo $k \geq 2$ se verifican las desigualdades $\frac{k-1}{2k} \leq \beta_k \leq \alpha_k$.

Problemas relacionados con $\Delta_k(x)$ se pueden formular en función de los parámetros α_k, β_k . Por ejemplo, *la condición necesaria y suficiente para la certeza de la hipótesis de Lindelöf es que $\beta_k = \frac{k-1}{2k}$, $k = 2, 3, \dots$* (ver Titchmarsh [34]).

Para α_2 la mejor estimación es la obtenida por Huxley ([17]), así por ahora es conocido que $1/4 \leq \alpha_2 \leq 23/73$.

Condiciones necesarias y suficientes alternativas para que la hipótesis de Lindelöf sea cierta son

$$(5.14) \quad \int_1^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^{2k} dt \ll_{\epsilon, k} T^{1+\epsilon}, \quad \epsilon > 0, k = 1, 2, \dots$$

(aquí la notación $\ll_{\epsilon,k}$ significa que la constante implicada depende de ϵ, k .)

$$(5.15) \quad \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \ll_{\epsilon,\sigma,k} T^{1+\epsilon}, \quad (\sigma > 1/2, \epsilon > 0, \quad k = 1, 2, \dots)$$

$$(5.16) \quad \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = (1 + o(1)) \sum_{n=1}^{\infty} d_k^2(n) n^{-2\sigma}$$

($\sigma > 1/2, k = 1, 2, \dots$)

$$(5.17) \quad \zeta^k(s) = \sum_{n \leq |t|^\delta} d_k(n) n^{-s} + O(|t|^{-\lambda})$$

para cada entero positivo k y $\sigma \geq \sigma_0 > 1/2$, donde $\lambda = \lambda(k, \delta, \sigma_0) > 0$ y $0 < \delta < 1$ es un número cualquiera fijado.

$$(5.18) \quad D_k(x) = \sum_{n \leq x} d_k(n) = x P_{k-1}(\log x) + O(x^{1/2+\epsilon}), \quad k \geq 2.$$

6 Hipótesis de Riemann generalizada

Conocida la existencia de infinitos números primos en la sucesión natural, la siguiente cuestión que surge es ¿siguen existiendo infinitos números primos si nos restringimos a una sucesión de números de la forma $h + kn, n = 0, 1, 2, \dots$, con h, k enteros, k entero positivo ?

La respuesta nos la da un importante teorema de Dirichlet que afirma que cualquier progresión aritmética del tipo anterior con la condición de que $(h, k) = 1$ contiene infinitos números primos.

En los problemas de distribución de los números primos en progresiones, desempeñan un papel análogo a la función Zeta, las L-funciones de Dirichlet.

$$(6.1) \quad L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

donde $\chi(n)$ es un carácter respecto del módulo k . Un carácter, es una función no idénticamente nula, definida en \mathbb{Z} , que es completamente multiplicativa, esto es $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ y además es periódica de periodo k . Un caso especial, es el llamado carácter principal respecto del módulo k , $\chi_1(n) = 1$ si $(n, k) = 1$ y es cero si $(n, k) > 1$. La L -función correspondiente $L(s, \chi_1)$ es una función meromorfa, con un único polo de primer orden en $s = 1$, de residuo $\varphi(k)/k$; $\varphi(k) = \text{card}\{n \leq k, (n, k) = 1\}$. En los demás casos la L -función es entera.

Hardy y Littlewood enunciaron la hipótesis según la cual, todos los ceros no triviales de $L(s, \chi)$, en la franja $0 < \text{Re } s = \sigma < 1$ están situados en la recta $\sigma = 1/2$. Esta es la hipótesis de Riemann generalizada.

Para las L -funciones de Dirichlet se verifica una identidad análoga a la de Euler para la $\zeta(s)$, esto es, en $Re\ s > 1$ se tiene

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$$

Cuando χ es el carácter principal tenemos $L(s, \chi_1) = \zeta(s) \prod_{p|k} (1 - p^{-s})$. En particular $L(s, \chi) \neq 0$ cuando $Re\ s > 1$. Si $\chi \neq \chi_1$, resulta que $\max_{x \geq 1} |\sum_{n \leq x} \chi(n)| \leq \frac{k}{2}$. Por el test de Dirichlet se tiene que la serie $L(s, \chi)$ converge en $Re\ s > 0$.

Basándose en las propiedades de las L -funciones, Dirichlet, demostró en 1837 que la condición necesaria y suficiente para que en una progresión aritmética $h + kn$ existan infinitos números primos, es que h y k sean primos entre si.

Posteriormente Ch. de la Vallée-Poussin demostró que

$$(6.3) \quad \pi(x; h, k) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv h \pmod{k}}} 1 = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

donde c es una constante que sólo depende de k . A. Walfisz mediante un teorema de Siegel demostró que la fórmula asintótica anterior es uniforme en $3 \leq k \leq \log^\alpha x$, donde $\alpha > 0$ es arbitrariamente grande y $c > 0$ una constante absoluta.

Pero si la hipótesis de Riemann generalizada es cierta, entonces la estimación que se obtiene es mucho más precisa

$$(6.4) \quad \pi(x; h, k) = \frac{x}{\varphi(k) \log x} + O(\sqrt{x} \log x),$$

análogamente para la función de Chebyshev se obtiene

$$(6.5) \quad \psi(x; h, k) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv h \pmod{k}}} \Lambda(n) = \frac{x}{\varphi(k)} + O(\sqrt{x} \log^2 x),$$

siempre que $k \leq x$.

Existen otros problemas en los que influye decisivamente la hipótesis de Riemann generalizada. Veamos para terminar estas notas, uno muy importante que por el momento sigue abierto.

En una carta de 1742 a Euler, Goldbach le expresa su creencia de que

(G) *Cada entero $n > 5$ se puede expresar como suma de tres primos.* Goldbach consideraba 1 como número primo.

A lo que Euler contesta a Goldbach, eso se puede ver fácilmente que es equivalente a lo siguiente

(E) *cada entero par, $2n \geq 4$, es la suma de dos primos.*

Observese que si (E) es cierta y si $2n \geq 6$ entonces $2n - 2 \geq 4$ por lo que $2n - 2 = p_1 + p_2$, con p_1, p_2 primos así $2n + 1 = 3 + p_1 + p_2$.



Figura 3: Memorial de Riemann (Breselenz)

Recíprocamente si (G) es cierta y $2n \geq 4$ entonces $2n + 2 = p_1 + p_2 + p_3$ con p_1, p_2, p_3 primos, entonces necesariamente uno es 2 por ejemplo p_3 . De donde resulta que $2n = p_1 + p_2$. [P. Ribenboim (1989)]

En la actualidad permanecen abiertas las conjeturas conocidas como problema ternario: *Cada entero impar $n > 7$ es la suma de tres primos*, y problema binario: *cada número par, mayor que 2, es la suma de dos primos*.

Hardy-Littlewood (1923) demostraron que para $r_3(n)$ - número de representaciones de n impar $n > 7$ como suma de tres primos- que si la hipótesis de Riemann generalizada es cierta, entonces $r_3(n) \sim S_3(n)n^2/\log^3 n$, $S_3(n)$ conocida como serie singular, depende de n pero está comprendida entre dos constantes. En 1937 I. Vinogradov demostró sin condiciones que todo número impar suficientemente grande, $N \geq N_0$, se puede escribir como suma de tres primos. El problema después ha sido rebajar la constante N_0 .

Mediante la hipótesis de Riemann generalizada, Deshouillers-Effinger-te Riele-Zinoviev ([8]), dan una demostración completa del problema ternario para todo $n > 7$ impar.

Referencias

- [1] Aparicio, E. *Teoría de los números*. Editorial UPV. (1993).
- [2] Ayoub, R. *Amer. Math. Monthly* . Vol. 81, 1067-1086, (1974).
- [3] Backlund, R. (2) *Über die Beziehung zwischen Anwachsen und Nullstellen der Zeta funktion*. Öfersigt Finska Vetensk. Soc. 61 (1918-19), No. 9.

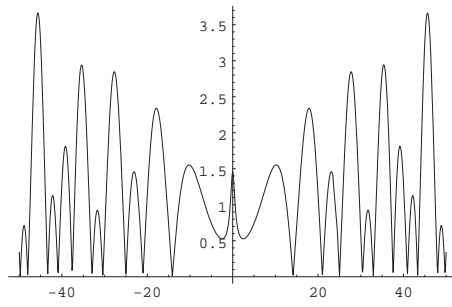


Figura 4: La función $|\zeta(\frac{1}{2} + iy)|$, con $y \in [-50, 50]$

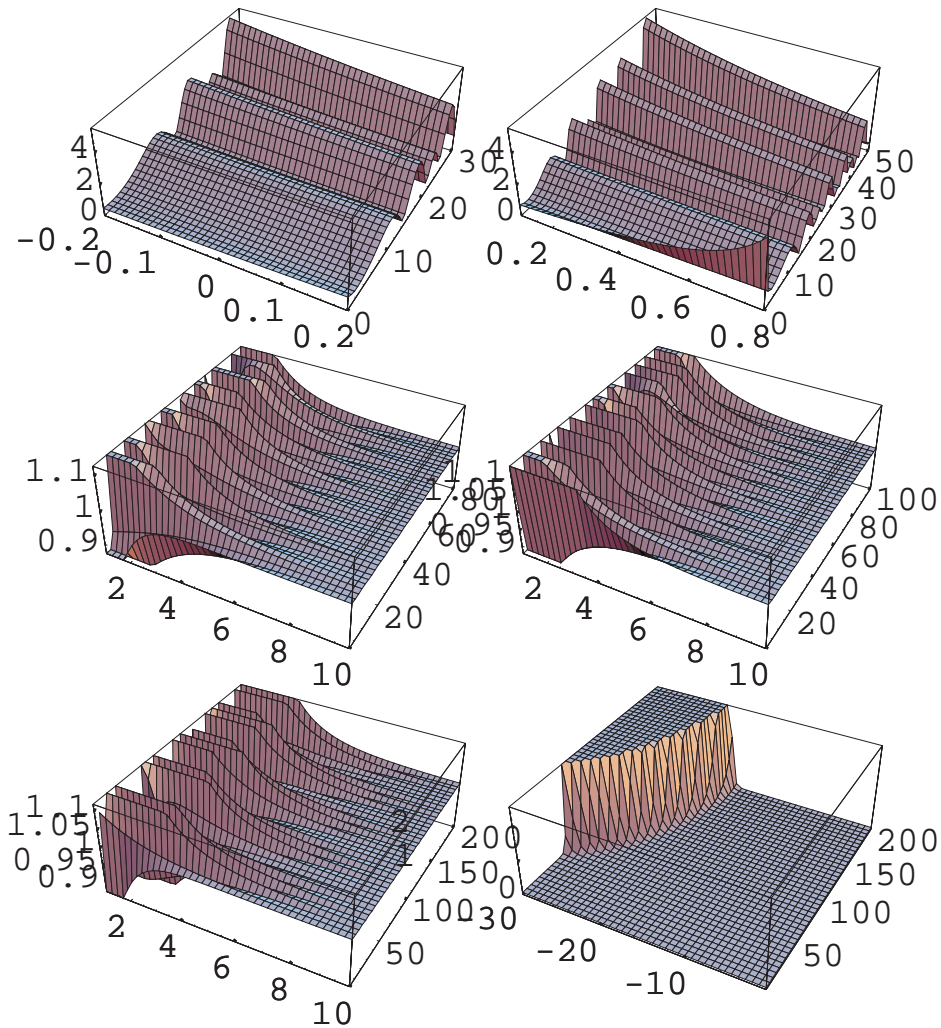


Figura 5: La función $|\zeta(x + iy)|$, con varios valores de x e y .

- [4] Balasudramanian, R. *An improvement of a theorem of Titchmarsh on the mean square of $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$* . Proc. London Math. Soc. 36 (1978), 540- 576.
- [5] Chandrasekharan, K. *Arithmetical functions*. Springer Verlag New York 1969.
- [6] — *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag New-York 1968.
- [7] Clement, P.A. *Congruences for sets of primes*. Amer. Math. Monthly, 56, (1949), 23-25.
- [8] Deshouillers, J.M., Effinger, G., te-Riele, H., Zinoviev, D. *A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis*. Electron Res. Announc. Amer. Math. Soc. 3 (1997), 99-104.
- [9] Edwards, H.M. *Riemann's zeta function* Acad. Press. New York. 1974.
- [10] Faisant, A. *L'équation diophantaine du second degré*. Hermann, Paris, 1991.
- [11] Hadamard, J. *Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*. J. Math. Pur. appl. 9 (1893), 171-215.
- [12] — *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*. Bull. Soc. Math. France 24, 199-220 (1896).
- [13] Hardy, G.H. *Comptes Rendus*, Acad. Sci. Paris, 158 (1914), 1012-1014.
- [14] Hardy, G.H. and Wright, E.M. *An Introduction to the theory of numbers*. Oxford. Clarendon Press. 1979.
- [15] Hardy, G.H. and Littlewood, J.E, *Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the distributions of primes*. Acta Math. 41, 19-196 (1918).
- [16] Haselgrove, C.B. and Miller, J.C.P. *Tables of the Riemann zeta function*. RSM 6, Cambridge University Press 1963.
- [17] Huxley, M.N. *Exponential sums and lattice points II*. Proc. London Math. Soc. (3) 66, no. 2, 279-301, 1993.
- [18] Ingham, A.E. (4) *On the difference between consecutive primes*. Quart. J. Math. (Oxford Series) 8 (1937), 255- 266.
- [19] Ivic, A. *The Riemann zeta function*. Jhon Wiley, New York 1985.
- [20] Karatzuba, A.A. *On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function on the critical line*. Trudy Math Inst. Steklov Moscu, 157, 49-63 (1981).
- [21] Korobov, N.M. *Estimates of trigonometric sums and their applications*. Usp. Mat. Nauk. 13:k (1958), 185-192.

- [22] Lavrik, A.F., Sobirov, A.S. *On the remainder term in the elementary proof of the prime number theorem*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 211 (1973), 534-536.
- [23] Laugwitz, D. *Bernhard Riemann 1826-1866. Turning points in the conception of Mathematics*. Translated by Abe Shenitzer, Birkhäuser, 1999.
- [24] Littlewood, J.E. *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $\text{Re } s > 1/2$* . Comptes Rendus de l'Acad. des sciences (Paris) 154(1912), 263-266.
- [25] Littlewood, J.E. *On the zeros of Riemann zeta-function*. Proc. Camb. Phil. Soc. 22 (1924), 295-318.
- [26] Mangoldt 1895, 1905 Math. Annalen, 60 (1905), 1-19.
- [27] Moser, J. *On a theorem of Hardy-Littlewood in the theory of the Riemann zeta function*. Acta Arith. 31 (1976), 45-51 and 35 (1979), 403-404.
- [28] Mozzochi, C.J. *On the difference between consecutive primes*, J.N. Theory, 24 (1986), 181-187.
- [29] Nathanson, M.B. *Additive Number Theory, The Classical Bases*. Springer GTM 164, (1996)
- [30] Odzizco, A.M., and Riele, J.J. *Disproof of Mertens conjecture*. J. reine angew Math. 367 (1985), 138-160.
- [31] Ribenboim, P. *The book of prime number records*. Springer-Verlag, 1989.
- [32] Riemann, B. *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Gröse*. Monatsber. Akad. Berlin, 671-680, (1859).
- [33] Selberg, A. *Contributions to the theory of the Riemann zeta function*. Arch. Math. og Naturv. B, 48 (1946) no. 5.
- [34] Titchmarsh, E.C. *The theory of the Riemann Zeta-Function*. Clarendon Press. Oxford 1988. Revised by D.R. Heath Brown.
- [35] Vinogradov, I.M. *A new estimate for $\zeta(1 + it)$* . Iz. Ak. Nauk. 22 (1958), 161-164.
- [36] Walfisz, A. *Exponentialsummen in Neueren Zahlentheorie*. Deuts. Verlag 1963.

Homotopía propia simplicial I *

J. M. García Calcines¹ L. J. Hernández Paricio²

S. Rodríguez Machín¹

¹*Departamento de Matemática Fundamental
Universidad de la Laguna
38271 La Laguna, SPAIN
E-mails: jmgarc@ull.es, seroma@ull.es*

²*Departamento de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja
26004 Logroño, SPAIN
E-mail: luis-javier.hernandez@dmc.unirioja.es*

Abstract

The notion of exterior space consists of a topological space together with a certain nonempty family of open subsets that is thought of as a ‘system of open neighborhoods at infinity’. An exterior map is a continuous map which is ‘continuous at infinity’. In this paper we present and develop the category of exterior spaces as a good framework for proper homotopy theory. As an application we give a new version of the Whitehead theorem for proper homotopy theory. We also give simplicial models for this new category and we analyze singular and realization-type functors for these models.

1 Introducción

Uno de los problemas existentes en la categoría de los espacios y aplicaciones propias, \mathbf{P} , es que no verifica la axiomática de Quillen (que exige tener límites y colímites finitos) pues la categoría \mathbf{P} no tiene objeto final y en general no existen push-outs. Una forma de establecer un marco de trabajo en teoría de homotopía propia es escoger axiomáticas menos restrictivas, como la noción de categoría cofibrada. En este sentido se demuestra que \mathbf{P} tiene estructura de categoría cofibrada [7]. Existen otras posibilidades, por ejemplo, se puede encajar \mathbf{P} en una categoría completa y cocompleta y usar teorías de homotopía que asuman la existencia de límites y colímites. En esta dirección, se tiene el encaje de Edwards y Hastings de la subcategoría de \mathbf{P} de los espacios σ -compactos, Hausdorff y localmente compactos en la categoría de homotopía de proespacios. Una desventaja de este encaje es la gran restricción hecha en \mathbf{P} . Otro problema es que las contrucciones homotópicas producen proespacios que muchas veces no pueden ser interpretados geoméricamente como espacios. García-Pinillos [14] propone en su tesis una nueva solución. Introduce la noción de espacio exterior, de forma que la categoría de los espacios exteriores, \mathbf{E} , es completa y cocompleta y demuestra que \mathbf{P} se puede considerar como una subcategoría plena suya. Además, \mathbf{E} , tiene varias estructuras de categoría de modelos cerrada.

Por otro lado, la obtención de modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios topológicos ha sido un objetivo primordial en la homotopía algebraica. Uno de los primeros modelos con información

*Los autores quieren agradecer a la Dirección General de Enseñanza Superior y a la Dirección General de Universidades e Investigación del Gobierno de Canarias por su aportación financiera en la realización de ese trabajo.

algebraica sobre tipos de homotopía fueron los complejos de cadenas de grupos abelianos. En su estudio tuvo lugar un proceso de algebraización de la teoría de homotopía topológica que produjo el concepto de homotopía entre aplicaciones de cadenas. La obtención de adecuados modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios ha conducido, con el tiempo, al intento de hacer teoría de homotopía con tales modelos algebraicos con el objetivo de utilizar métodos algebraicos que aparecen más simples que aquellos de los espacios topológicos.

El objetivo principal de este trabajo es el de presentar técnicas simpliciales para las categorías de homotopía propia, así como buscar modelos axiomáticos adecuados para dichas categorías. Aquí presentamos una memoria de los resultados obtenidos sin incluir demostraciones, de forma que el lector pueda hacerse una idea más concreta de lo obtenido. El marco de trabajo usado para la categoría propia es la categoría de los espacios exteriores. Para ello se presentan nuevos resultados de gran interés, que dejará ver la utilidad de \mathbf{E} como una herramienta eficaz para el estudio de la homotopía propia.

Siguiendo todas estas ideas este trabajo se ha estructurado en tres partes: La primera consiste en una sección preliminar, donde se establecen nociones y resultados bien conocidos sobre categorías simpliciales, de modelos cerrada y categorías de prehaces. En la segunda se establecen, por un lado, resultados, generalizaciones y nuevas nociones para \mathbf{E} . También se generalizan leyes exponenciales, en concreto se tiene, por un lado $Hom_{\mathbf{E}}(X \bar{\times} Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(Y, Z^X)$, para X, Z espacios exteriores, X con ciertas propiedades adicionales, e Y espacio topológico; por otro $Hom_{\mathbf{E}}(X \bar{\times} Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{E}}(X, Z^Y)$, con X, Z espacios exteriores, Y espacio topológico localmente compacto. También se establece el enriquecimiento de la estructura de modelos cerrada dada por García-Pinillos, que aquí se denominará *e-estructura*, por una estructura de categoría simplicial compatible suya. Se consideran en \mathbf{E} unos nuevos morfismos:

- *g-equivalencias débiles* (resp. *g-fibraciones*), que son equivalencias débiles (resp. fibraciones) en el sentido de García-Pinillos, tales que al olvidar su estructura exterior son equivalencias débiles clásicas en \mathbf{Top} ;
- *g-cofibraciones*, que son aquellos que verifican la propiedad de elevación de homotopía a izquierda respecto de las *g-fibraciones* triviales.

Con estos morfismos \mathbf{E} es una categoría simplicial de modelos cerrada (*g-estructura*). Unos objetos cofibrantes en esta categoría son los denominados *gCW complejos*. Estos espacios exteriores X están dotados de una filtración, $\emptyset = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$, de forma que el n -esqueleto se obtiene del $(n-1)$ -esqueleto pegando celdas de dos tipos: las clásicas celdas compactas y un tipo especial de celdas no compactas. En estos espacios las equivalencias de homotopía exterior se caracterizan por los grupos de homotopía de tipo Brown y por los grupos de homotopía clásicos, mediante un teorema de tipo Whitehead, que tendrá una adaptación para la categoría \mathbf{P} . En la siguiente sección se hacen una comparación entre las distintas estructuras homotópicas de \mathbf{E} , la *e-estructura* y la *g-estructura*, así como la de \mathbf{Top} .

La tercera parte es de naturaleza más algebraica. En ésta se da una construcción de modelos de tipo simplicial, allanando el camino para un próximo estudio de las nociones de homología en los espacios exteriores. En concreto se presentan los *M-conjuntos* simpliciales y los conjuntos simpliciales exteriores. El primer modelo no es más que la categoría de objetos simpliciales de los conjuntos con la acción de un determinado monoide M . Se define en esta categoría:

- *equivalencia débil* (resp. *fibración*), a aquel morfismo que al olvidar la acción del monoide es equivalencia débil (resp. fibración) en conjuntos simpliciales;
- *y cofibración*, a aquel morfismo que verifica la propiedad de elevación de homotopía a izquierda respecto de las *fibraciones* triviales.

Con estos morfismos se tiene la existencia de una estructura de categoría simplicial de modelos cerrada. A continuación se compara dicho modelo con \mathbf{E} , viéndose la existencia de una adjunción del tipo singular-realización, adjunción que se hereda en las categorías localizadas respectivas (proceso que necesita muchas comprobaciones previas). También se introduce, asociado a cada espacio exterior X , y vía un M -conjunto simplicial, un conjunto simplicial, denominado *prismas infinitos*, cuya importancia radica en que sus grupos de homotopía recogen información sobre los grupos de homotopía de tipo Steenrod de X . En las dos siguientes secciones se estudia el segundo modelo: la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores; ésta tiene una estructura de categoría simplicial, dotada de tensor y exponenciación en el sentido de Quillen y, al igual que con los M -conjuntos simpliciales, se tiene la existencia de una adjunción del tipo singular-realización con los espacios exteriores. Se destaca la extensión de la noción de exterior a otras categorías, como conjuntos (resp. grupos abelianos) exteriores y grupos abelianos simpliciales exteriores, así como también para funtores. En esta línea se estudia la categoría de objetos simpliciales de los conjuntos exteriores. Para finalizar se analiza la categoría de los grupos abelianos simpliciales exteriores. Esta tiene propiedades similares a la de los conjuntos simpliciales exteriores, en concreto, también es una categoría simplicial. Se dan dos relaciones funtoriales: por un lado, un functor que relaciona esta categoría con la de objetos simpliciales de los grupos abelianos exteriores. Por otro, mediante adjunciones del tipo libre-olvido con las categorías análogas de conjuntos.

2 Preliminares.

2.1 Categorías simpliciales de modelos cerradas.

La teoría de homotopía axiomática consiste en el desarrollo de las construcciones básicas de la teoría de homotopía en un contexto abstracto, de forma que pueda aplicarse a otras categorías. La aproximación más conocida es la de Quillen, que introduce la noción de categoría de modelos (cerrada).

Dado un diagrama conmutativo de flechas continuas en una categoría \mathbf{C} :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

se dice que i tiene la propiedad de elevación a izquierda (PEI) respecto de p , o bien que p tiene la propiedad de elevación a derecha (PED) respecto de i si existe un morfismo $h : B \rightarrow X$ tal que $hi = u$ y $ph = v$.

Una categoría de modelos cerrada es una categoría \mathbf{C} junto con tres clases distinguidas de morfismos, llamadas *cofibraciones*, *fibraciones* y *equivalencias débiles*, satisfaciendo los axiomas CM1-CM5 (véase [32]). Puede verse una reformulación equivalente en [31].

Dada una categoría de modelos cerrada \mathbf{C} , la *categoría homotópica* $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$, se obtiene a partir de \mathbf{C} invirtiendo formalmente todas las equivalencias débiles (véase [12] y [31]).

El objeto inicial de \mathbf{C} se denota por \emptyset , mientras que al objeto final por $*$. Se dice que un objeto X es *cofibrante* si el único morfismo $\emptyset \rightarrow X$ es una cofibración; dualmente X es *fibrante* si $X \rightarrow *$ es una fibración. Se denota por \mathbf{C}_{cof} y \mathbf{C}_{fib} a las subcategorías plenas de \mathbf{C} determinadas, respectivamente, por los objetos cofibrantes y fibrantes.

Ejemplo: Se considera la categoría \mathbf{SS} de conjuntos simpliciales. Es bien conocido el hecho de que es una categoría de modelos cerrada con la siguiente estructura: una aplicación simplicial $f : X \rightarrow Y$ es una fibración (resp. fibración trivial) si verifica la PED respecto de $V(n, k) \hookrightarrow \Delta[n]$, para $0 \leq k \leq n$ y $n > 0$ (resp. de $\hat{\Delta}[n] \hookrightarrow \Delta[n]$, para $n \geq 0$), donde $V(n, k)$ es el subconjunto simplicial generado por

las i -caras, $i \neq k$, del n -simplex estándar $\Delta[n]$; $\dot{\Delta}[n]$ está generado por todas las caras de $\Delta[n]$. Una aplicación simplicial $i : A \rightarrow B$ es una cofibración (resp. cofibración trivial) si verifica la PEI respecto de las fibraciones triviales (resp. de las fibraciones). Finalmente, una equivalencia débil es una aplicación simplicial que puede factorizarse como una cofibración trivial seguida de una fibración trivial.

Si X y K son conjuntos simpliciales, denotaremos por X^K al conjunto simplicial dado por $(X^K)_q = \text{Hom}_{\mathbf{SS}}(K \times \Delta[q], X)$.

Una *categoría simplicial* es una categoría \mathbf{C} junto con un funtor $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{SS}$, satisfaciendo las condiciones dadas en [31], páginas 1.1 y 1.2; en particular tenemos que $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{C}}(X, Y)_0 \cong \text{Hom}(X, Y)$. Asociada a toda categoría simplicial \mathbf{C} , está la categoría $\pi_0(\mathbf{C})$, cuyos objetos son los mismos que los de \mathbf{C} y cuyo conjunto de morfismos viene definido por $\text{Hom}_{\pi_0(\mathbf{C})}(X, Y) = \pi_0 \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, donde $\pi_0 \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ es el conjunto de las componentes conexas del conjunto simplicial $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{C}}(X, Y)$.

Una *categoría de modelos simplicial cerrada* es una categoría de modelos cerrada \mathbf{C} que es también una categoría simplicial y que satisface los axiomas SM0 y SM7 ([31], página 2.2).

Ejemplo: Se denota por **Top** a la categoría de los espacios topológicos y aplicaciones continuas. Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en **Top** se dice que es *fibración* si es una aplicación fibrada en el sentido de Serre, y una *equivalencia débil* si es una equivalencia de homotopía débil (esto es, $\pi_q(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_q(Y, f(x))$, para todo $x \in X$ y $q \geq 0$). Una aplicación continua se dice que es una *cofibración* si verifica la propiedad de elevación a izquierda respecto de las fibraciones triviales. Por otro lado, si X e Y son espacios, se considera $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ dada por $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{Top}}(X, Y)_n = \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X \times |\Delta[n]|, Y)$ con las operaciones simpliciales naturales, donde $|\cdot|$ denota la realización geométrica. Si $f \in \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{Top}}(X, Y)_n$ y $g \in \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{Top}}(Y, Z)_n$, se define $g \circ f$ como la composición

$$X \times |\Delta[n]| \xrightarrow{id_X \times \Delta} X \times |\Delta[n]| \times |\Delta[n]| \xrightarrow{f \times id_{|\Delta[n]|}} Y \times |\Delta[n]| \xrightarrow{g} Z.$$

Considerando $X \otimes K = X \times |K|$ y $X^K = X^{|K|}$, Quillen probó que **Top**, con esta estructura, es una categoría simplicial de modelos cerrada.

La definición de categoría simplicial de modelos cerrada no es muy práctica, por lo que muchas veces se hace uso de una equivalencia más manejable: Sea \mathbf{C} una categoría simplicial que satisface los axiomas **M0** y **SM0**, con cuatro clases distinguidas de morfismos: fibraciones, cofibraciones, fibraciones triviales y cofibraciones triviales, tales que la primera y la cuarta (resp. la segunda y la tercera) determina cada una por propiedades de elevación como en **M6** (a) y (b) de la definición de categoría de modelos cerrada. Entonces **SM7** es equivalente a

SM7(a): Si f es fibración (resp. fibración trivial) entonces el morfismo inducido en el pull-back,

$$\begin{array}{ccc} X^{\Delta[n]} & \xrightarrow{f^{id_{\Delta[n]}}} & Y^{\Delta[n]} \\ \downarrow (id_X)^j & \searrow & \downarrow (id_Y)^j \\ X^{\dot{\Delta}[n]} \times_{Y^{\dot{\Delta}[n]}} Y^{\Delta[n]} & \xrightarrow{p_1} & Y^{\Delta[n]} \\ \downarrow p_2 & & \downarrow (id_Y)^j \\ X^{\dot{\Delta}[n]} & \xrightarrow{f^{id_{\Delta[n]}}} & Y^{\dot{\Delta}[n]}, \end{array}$$

es una fibración (resp. fibración trivial), donde $j : \hat{\Delta}[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ denota la inclusión, y

$$\begin{array}{ccc}
 X^{\Delta[1]} & \xrightarrow{f^{id_{\Delta[1]}}} & Y^{\Delta[1]} \\
 \downarrow (id_X)^{l_k} & \searrow & \downarrow (id_Y)^{l_k} \\
 X^{V(1,k)} \times_{Y^{V(1,k)}} Y^{\Delta[1]} & \xrightarrow{p_1} & Y^{\Delta[1]} \\
 \downarrow p_2 & & \downarrow (id_Y)^{l_k} \\
 X^{V(1,k)} & \xrightarrow{f^{id_{V(1,k)}}} & Y^{V(1,k)}
 \end{array}$$

es fibración trivial, donde $l_k : V(1, k) \hookrightarrow \Delta[1]$ es la inclusión, $k \in \{0, 1\}$.

2.2 Categorías de prehaces.

Sea \mathbf{C} una categoría pequeña, se define la *categoría de prehaces* de \mathbf{C} , a la categoría $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$. A los objetos de $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ se les denomina *prehaces* de \mathbf{C} . La notación usual es $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$.

Todo objeto C de \mathbf{C} se puede considerar de forma natural como el prehaz,

$$y(C) = Hom_{\mathbf{C}}(-, C).$$

Si P es un prehaz, se dirá que es *representable* si existe un objeto C tal que $y(C)$ y P son naturalmente isomorfos. Por otro lado, si $f : C_1 \rightarrow C_2$ es un morfismo, se define $y(f) : y(C_1) \rightarrow y(C_2)$, dado como $y(f)_C = f_*$. Esto da lugar a un funtor fiel y pleno $y : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ denominado *encaje de Yoneda*.

Sea P un prehaz, se define la *categoría de elementos* de P , $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{P}$, también llamada *categoría de Grothendieck* de P , a aquella que tiene por objetos pares de la forma (C, x) , donde C es un objeto de \mathbf{C} y $x \in P(C)$. Un morfismo $\tilde{u} : (C, x) \rightarrow (C', x')$ consiste en un morfismo de \mathbf{C} , $u : C \rightarrow C'$, tal que $P(u)(x') = x$. Esta categoría tiene un funtor proyección $\pi_P : \int_{\mathbf{C}} \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}$ dado como $\pi_P((C, x)) = C$.

Si $A : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ es un funtor desde una categoría pequeña a una categoría cocompleta, el funtor

$$R : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}},$$

dado por $R(E)(C) = Hom_{\mathbf{E}}(A(C), E)$ tiene un funtor adjunto a izquierda $L : \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{E}$ definido para cada prehaz, P , como el colímite

$$L(P) = colim \left(\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi_P} \mathbf{C} \xrightarrow{A} \mathbf{E} \right).$$

Como consecuencia, si P es un prehaz, entonces

$$P \cong colim \left(\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi_P} \mathbf{C} \xrightarrow{y} \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}} \right),$$

es decir, todo prehaz es colímite de prehaces representables.

Otro resultado interesante que se deduce es el siguiente: para cada funtor $A : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ desde una categoría pequeña a una categoría cocompleta existe un funtor $L : \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{E}$ verificando

- (i) L preserva colímites.
- (ii) L hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{C} & \xrightarrow{y} & \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}} \\
 A \downarrow & \swarrow L & \\
 \mathbf{E} & &
 \end{array}$$

Además, este funtor L con las propiedades (i) y (ii) es único salvo isomorfismo y se puede definir como

$$L(P) = colim \left(\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi_P} \mathbf{C} \xrightarrow{A} \mathbf{E} \right).$$

3 Espacios exteriores.

Se presenta el contexto en el que estará totalmente inmerso el trabajo: la categoría de los espacios exteriores. En la primera parte se ven sus propiedades básicas, así como otra interpretación de esta categoría. En la siguiente se desarrollan leyes exponenciales generales, cruciales para la determinación y relación de estructuras e invariantes homotópicos. Posteriormente se generaliza enriqueciendo esta categoría con estructuras de categoría simplicial de modelos cerrada con la llamada g-estructura. Además se dará la noción de gCW complejo, objeto g-cofibrante para esta estructura, y se podrán dar teoremas de tipo Whitehead. Por último, se harán comparaciones entre las distintas estructuras axiomáticas de la categoría de los espacios exteriores: la e-estructura, dada por García-Pinillos, y la mencionada g-estructura, introducida aquí, así como la existente en **Top**, los espacios topológicos con aplicaciones continuas.

3.1 La categoría de los espacios exteriores, primeras propiedades.

Intuitivamente hablando, un espacio exterior es un espacio topológico enriquecido con un sistema de entornos en el “infinito”. El comportamiento de los complementos de sus compacto-cerrados inspira la definición abstracta de exterior.

Definición 3.1 Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *externología* en (X, τ) es una colección no vacía de abiertos, $\varepsilon \subset \tau$, tal que

- (i) Si $E_1, E_2 \in \varepsilon$ entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;
- (ii) Si $E \in \varepsilon, U \in \tau$ y $E \subset U$ entonces $U \in \varepsilon$.

A los elementos de ε se les denomina *abiertos externos* o *e-abiertos*. Un *espacio exterior* consiste en un espacio topológico junto con una externología. Se denotará por $(X, \varepsilon \subset \tau)$.

De esta definición de externología se deducen algunas propiedades inmediatas, entre ellas cabe destacar que una externología ε es una topología si y sólo si $\emptyset \in \varepsilon$ si y sólo si $\varepsilon = \tau$. También, que la unión de un e-abierto con un abierto es un e-abierto y que el espacio total, X , es siempre un e-abierto.

Ejemplos:

Dado un espacio topológico (X, τ) se tiene la externología formada por los complementos de sus compacto-cerrados: $\varepsilon_{cc}^X = \{E \in \tau : X - E \text{ es compacto}\}$. Otras externologías que se le pueden asignar son la trivial, $\varepsilon = \{X\}$, y la propia topología, $\varepsilon = \tau$.

Obsérvese que si X es un espacio compacto entonces $\emptyset \in \varepsilon_{cc}^X$ y, por tanto, $\varepsilon_{cc}^X = \tau$.

Definición 3.2 Una aplicación, $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \rightarrow (X', \varepsilon' \subset \tau')$, entre espacios exteriores se dice que es *exterior* si es continua y $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

La composición de aplicaciones exteriores es exterior y la aplicación identidad en un espacio exterior es exterior, de aquí se tiene la categoría cuyos objetos son los espacios exteriores y cuyos morfismos son las aplicaciones exteriores. Dicha categoría se denotará por **E**.

Muchas veces es más cómodo quedarse con una subfamilia representativa de ε . Si $(X, \varepsilon \subset \tau)$ es un espacio exterior y $\beta \subset \varepsilon$ se dice que β es *base exterior* de X si para cada E e-abierto, existe $B \in \beta$ tal que $B \subset E$. Por otro lado, si $\Sigma \subset \varepsilon$ se dice que Σ es *subbase exterior* de X si para cada E e-abierto existe $\{S_1, \dots, S_n\} \subset \Sigma$ tal que $\bigcap_{i=1}^n S_i \subset E$. Es sencillo comprobar que una aplicación continua es exterior manipulando tan solo e-abiertos básicos, o bien subbásicos.

Se recuerda ahora la noción de aplicación propia.

Definición 3.3 Dada una aplicación continua entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$, se dirá *propia* si $f^{-1}(K)$ es compacto para cada K , compacto-cerrado.

La categoría de los espacios topológicos y aplicaciones propias se denotará por \mathbf{P} . Como consecuencia se tiene que $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ es una aplicación propia si y sólo si $f : (X, \varepsilon_{cc}^X \subset \tau_X) \rightarrow (Y, \varepsilon_{cc}^Y \subset \tau_Y)$ es exterior.

\mathbf{P} es una subcategoría plena de \mathbf{E} : existe el encaje $e : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{E}$ que consiste en asignar a cada espacio topológico X el espacio exterior $e(X) = X_e$ provisto de la topología de X y con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados. A cada aplicación propia f se le asigna $e(f) = f_e = f$.

Se dará ahora una serie de definiciones y resultados que comprobarán que la categoría de los espacios exteriores, \mathbf{E} , es completa y cocompleta.

Definición 3.4 Sea $\{(X_i, \varepsilon_i \subset \tau_i)\}_{i \in I}$ una colección de espacios exteriores. Se define el *espacio exterior coproducto* como $\coprod_{i \in I} X_i$, la unión disjunta con la topología coproducto y con externología la de los subconjuntos $E \subset X$ tales que $j_k^{-1}(E) \in \varepsilon_k$ para cada $k \in I$, donde $j_k : X_k \rightarrow X$ es la inyección k -ésima. Por otro lado, se define el *espacio exterior producto* como $\prod_{i \in I} X_i$, el producto conjuntista con la topología producto, y si se denota por $p_k : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_k$ la proyección k -ésima, entonces la externología es la generada por la subbase exterior cuyos elementos son de la forma $p_k^{-1}(E_k)$, $E_k \in \varepsilon_k$, $k \in I$.

Estos nuevos espacios exteriores creados son el coproducto y producto categóricos de la familia dada, respectivamente.

Todo espacio exterior induce subespacios exteriores.

Definición 3.5 Sea X espacio exterior y $A \subset X$, se define en A la externología cuyos elementos son de la forma $E \cap A$ donde E es e -abierto en X .

Nótese que la inclusión canónica $i : A \rightarrow X$ es exterior.

Definición 3.6 Sea $(X, \varepsilon \subset \tau)$ un espacio exterior, " \sim " una relación de equivalencia en X , X/\sim el espacio topológico cociente. Si se denota por $\pi : X \rightarrow X/\sim$ la proyección canónica, se define en X/\sim la externología dada por aquellos subconjuntos E tales que $\pi^{-1}(E) \in \varepsilon$.

Así, por procedimientos análogos a los hechos para los espacios topológicos, tenemos:

Proposición 3.7 Dadas dos aplicaciones exteriores,

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y ,$$

existe su igualador y su coigualador.

Nota: Se hace notar que $(\emptyset, \{\emptyset\} \subset \{\emptyset\})$ es el objeto inicial en \mathbf{E} y que el objeto $(*, \{*\} \subset \{\emptyset, *\})$ es final, donde $*$ representa el conjunto unipuntual.

Como consecuencia de todo lo anterior:

Teorema 3.8 \mathbf{E} es una categoría completa y cocompleta.

3.2 Otra interpretación de la categoría \mathbf{E}

Un hecho especial de la categoría de los espacios exteriores es que se puede considerar como una subcategoría de \mathbf{Top}_* , la categoría de los espacios topológicos punteados, mediante un proceso similar a la compactificación de Alexandroff. Si $(X, \varepsilon_X \subset \tau_X)$ es un espacio exterior y $*$ un punto no perteneciente a

X se define $X_\infty = X \cup \{*\}$ con punto distinguido $*$, junto con la topología $\tau_\infty = \tau_X \cup \{E \cup \{*\} : E \in \varepsilon_X\}$. Por otro lado, si $f : X \rightarrow X'$ es una aplicación exterior, se define $f_\infty : X_\infty \rightarrow X'_\infty$ ($X_\infty = X \cup \{*\}$, $X'_\infty = X' \cup \{*\}$) dada por $f_\infty(x) = f(x)$ si $x \in X$ y $f_\infty(*) = *'$. Esto origina un funtor $(\cdot)_\infty : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Top}_*$. Este funtor es claramente fiel.

Se considera \mathbf{Top}_∞ la subcategoría de \mathbf{Top}_* cuyos objetos son los espacios topológicos punteados de la forma (X, x_0) donde $\{x_0\}$ es cerrado en X . Los morfismos de esta categoría son las aplicaciones continuas punteadas $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tales que $f^{-1}(\{y_0\}) = \{x_0\}$. Entonces

Teorema 3.9 \mathbf{E} y \mathbf{Top}_∞ son categorías equivalentes.

3.3 Leyes exponenciales.

Ahora se analizarán unas leyes exponenciales en \mathbf{E} de carácter general y también unas consecuencias que se deducen de éstas.

Definición 3.10 Sea X un espacio exterior y $L \subset X$. Se dice que L es *e-compacto* si $L-E$ es compacto para cada E e-abierto.

Se deduce inmediatamente que X es e-compacto si y sólo si su externología está contenida en la de los complementos de sus compacto-cerrados.

Definición 3.11 Sean X, Z espacios exteriores. Se define

$$Z^X = \text{Hom}_{\mathbf{E}}(X, Z),$$

con la topología generada por la subbase cuyos elementos son de la forma

$$(K, U) = \{\alpha \in Z^X : \alpha(K) \subset U\},$$

$$(L, E) = \{\alpha \in Z^X : \alpha(L) \subset E\},$$

donde K es compacto en X , U abierto en Z , L es e-compacto en X y E e-abierto en Z . Esta topología se denotará por τ_{Z^X} .

Proposición 3.12 Existe un funtor,

$$(\cdot)^{(\cdot)} : \mathbf{E}^{op} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Top},$$

dado por $(X, Z) \mapsto Z^X$, $(f, g) \mapsto g^f = f^*g_*$.

Definición 3.13 Sean X espacio exterior e Y espacio topológico. Se define en $X \times Y$ la topología producto y externología dada por aquellos subconjuntos abiertos de $X \times Y$, E , tales que para cada $y \in Y$ existe $U_y \in \tau_Y$, $y \in U_y$, y existe $E_y \in \varepsilon_X$ tal que $E_y \times U_y \subset E$. Este nuevo espacio exterior se denotará por $X \bar{\times} Y$.

Proposición 3.14 Existe un funtor,

$$\bar{\times} : \mathbf{E} \times \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{E},$$

dado por $(X, Y) \mapsto X \bar{\times} Y$, $(f, g) \mapsto f \bar{\times} g$.

Cuando el espacio topológico Y es compacto entonces $\varepsilon_{X \bar{\times} Y} = \{E \in \tau_{X \times Y} : \exists G \in \varepsilon_X, G \times Y \subset E\}$. Si además X es un espacio exterior dotado de la externología de los complementos de sus compacto-cerrados entonces la externología de $X \bar{\times} Y$ coincide con la de los complementos de sus compacto-cerrados.

Teorema 3.15 Sean X, Z espacios exteriores, X Hausdorff, localmente compacto, con externología ε_{cc}^X , e Y espacio topológico. Entonces existe una biyección natural,

$$Hom_{\mathbf{E}}(X \bar{\times} Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(Y, Z^X).$$

Definición 3.16 Sea Y un espacio topológico y Z un espacio exterior. Se define $Z^Y = Hom_{\mathbf{Top}}(Y, Z)$ provista de la topología compacto-abierta y la externología cuya base exterior está formada por los subconjuntos de Z^Y de la forma (K, E) , K compacto en Y , E e-abierto en Z . Esta externología se denotará por ε_{ZY} .

Otra ley exponencial que se da es la siguiente:

Teorema 3.17 Existe una biyección natural,

$$Hom_{\mathbf{E}}(X \bar{\times} Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{E}}(X, Z^Y),$$

con X, Z espacios exteriores, Y espacio topológico localmente compacto.

De las biyecciones naturales 3.15, 3.17 se deduce primeramente que, fijado un espacio exterior X Hausdorff, localmente compacto y con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, existe una situación de adjunción,

$$X \bar{\times} _- : \mathbf{Top} \rightleftarrows \mathbf{E} : (.)^X, \quad X \bar{\times} _- \dashv (.)^X.$$

También, fijado un espacio topológico localmente compacto Y , existe una adjunción,

$$_-\bar{\times} Y : \mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{E} : (.)^Y, \quad _-\bar{\times} Y \dashv (.)^Y.$$

3.4 Estructuras de Quillen para \mathbf{E} .

Se estudiarán diferentes estructuras de modelo para homotopía en el sentido de Quillen, relacionándolas entre sí. Se considerará el conjunto de los números naturales \mathbb{N} con la topología discreta y externología de los complementos de sus compacto-cerrados, es decir, de sus subconjuntos finitos. También a S^n , D^n , I , la n -esfera, el n -disco y el intervalo unidad cerrado provistos con las topologías inducidas por la usual, respectivamente.

Se considera la categoría de los espacios exteriores bajo \mathbb{N} , $\mathbf{E}^{\mathbb{N}}$. Los objetos $a : \mathbb{N} \rightarrow X$, que son aplicaciones exteriores, se denotarán por (X, a) , mientras que los morfismos

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{N} & \\ a \swarrow & & \searrow b \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

por $f : (X, a) \rightarrow (Y, b)$.

Definición 3.18 Sean $f, g : (X, a) \rightarrow (Y, b)$ aplicaciones exteriores bajo \mathbb{N} . Se dirá que f es *e-homotopa a g relativamente a \mathbb{N}* , si existe una aplicación exterior $H : X \bar{\times} I \rightarrow Y$ (denominada *homotopía exterior relativa a \mathbb{N}*), tal que $H\delta_0 = f$, $H\delta_1 = g$ y $H(a \times id) = bp$.

Sustituyendo \mathbb{N} por \emptyset surge, de forma natural, la *homotopía exterior no relativa*. La relación de e-homotopía relativa a \mathbb{N} es de equivalencia en $Hom_{\mathbf{E}^{\mathbb{N}}}(X, a), (Y, b)$. Además, esta relación es compatible respecto de la composición con aplicaciones exteriores bajo \mathbb{N} .

Dado X espacio exterior existe la biyección

$$Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}S^n, X) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(S^n, X^{\mathbb{N}}).$$

Este tipo de biyección se puede trasladar para objetos bajo \mathbb{N} :

$$Hom_{\mathbf{E}^{\mathbb{N}}}((\mathbb{N}\bar{\times}S^n, id \times *), (X, a)) \cong Hom_{\mathbf{Top}^*}((S^n, *), (X^{\mathbb{N}}, a)).$$

Teniendo en cuenta que $Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}(S^n \times I), X) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(S^n \times I, X^{\mathbb{N}})$ existe la biyección

$$[(\mathbb{N}\bar{\times}S^n, id \times *), (X, a)]^{\mathbb{N}} \cong [(S^n, *), (X^{\mathbb{N}}, a)],$$

donde el primer miembro de la biyección es el conjunto de las clases de e-homotopía relativa y el segundo es el conjunto de clases homotopía punteado clásico. Esto da pie a la siguiente definición:

Definición 3.19 Dado (X, a) objeto en $\mathbf{E}^{\mathbb{N}}$, se define su n -conjunto de homotopía exterior de tipo Brown como el conjunto

$$\pi_n^B((X, a)) = [(\mathbb{N}\bar{\times}S^n, id \times *), (X, a)]^{\mathbb{N}}.$$

Así, existe una biyección $\varphi_{(X,a)} : \pi_n^B((X, a)) \rightarrow \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a)$, de forma que induce la estructura algebraica de uno a otro. Entonces, $\pi_0^B((X, a))$ es un conjunto punteado, $\pi_1^B((X, a))$ es un grupo y $\pi_n^B((X, a))$ es un grupo abeliano, para $n \geq 2$.

También se puede considerar $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ con la topología inducida por la usual y externología de los complementos de sus compactos. De forma totalmente análoga, se tiene la categoría de los espacios exteriores bajo \mathbb{R}_+ , $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$. Surge la noción de e-homotopía relativa a \mathbb{R}_+ y, observando que \mathbb{R}_+ es Hausdorff, localmente compacto y con la externología $\varepsilon_{cc}^{\mathbb{R}_+}$, se puede hacer el mismo razonamiento hecho para \mathbb{N} , dando lugar, así, a la siguiente definición:

Definición 3.20 Dado (X, a) objeto en $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$, se define su n -conjunto de homotopía exterior de tipo Steenrod como el conjunto

$$\pi_n^S((X, a)) = [(\mathbb{R}_+\bar{\times}S^n, id \times *), (X, a)]^{\mathbb{R}_+}.$$

Así, se tiene un conjunto punteado para $n = 0$, un grupo para $n = 1$ y un grupo abeliano para $n \geq 2$. De igual manera se tiene, dado una aplicación exterior bajo \mathbb{R}_+ , una aplicación de conjuntos, un homomorfismo de grupos o un homomorfismo de grupos abelianos, dependiendo que la dimensión sea 0, 1 o mayor o igual que 2, respectivamente.

Definición 3.21 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación exterior. Se dice que f es *equivalencia débil exterior* o *e-equivalencia débil* si verifica una de las dos condiciones siguientes:

- (i) Si $X^{\mathbb{N}} = \emptyset$ entonces $Y^{\mathbb{N}} = \emptyset$.
- (ii) Si $X^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$ entonces, $\pi_n^B(f) : \pi_n^B((X, a)) \rightarrow \pi_n^B((Y, fa))$ es biyección, para cada $n \geq 0$, $a \in X^{\mathbb{N}}$.

Definición 3.22 Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación exterior, se dice que es una *fibración exterior*, o *e-fibración* si tiene la P.E.D. respecto de las aplicaciones $\delta_0 : \mathbb{N}\bar{\times}D^n \rightarrow \mathbb{N}\bar{\times}(D^n \times I)$, $n \geq 0$. Es decir, todo diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\bar{\times}D^n & \xrightarrow{u} & E \\ \delta_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ \mathbb{N}\bar{\times}(D^n \times I) & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

tiene elevación, $h : \mathbb{N}\bar{\times}(D^n \times I) \rightarrow E$, $ph = v$, $h\delta_0 = u$.

Definición 3.23 Sea $i : A \rightarrow B$ una aplicación exterior, se dice que es *cofibración exterior* o *e-cofibración* si tiene la propiedad de elevación de homotopía a izquierda respecto de las e-fibraciones triviales.

\mathbf{E} , junto con la e-fibraciones, e-cofibraciones y las e-equivalencias débiles, tiene estructura de categoría de modelos cerrada. Pero además, tiene una estructura adicional, la de categoría simplicial de modelos cerrada.

Se define un funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{E}} : \mathbf{E}^{op} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{SS}$ por $\underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X, Y)_n = Hom_{\mathbf{E}}(X \bar{\times} |\Delta[n]|, Y)$.

Si $f \in \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X, Y)_n$ y $g \in \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(Y, Z)_n$, entonces $g \circ_n f$ viene determinado por la composición

$$X \bar{\times} |\Delta[n]| \xrightarrow{id_X \bar{\times} \Delta} (X \bar{\times} |\Delta[n]|) \bar{\times} |\Delta[n]| \xrightarrow{f \bar{\times} id_{|\Delta[n]|}} Y \bar{\times} |\Delta[n]| \xrightarrow{g} Z.$$

o define una aplicación simplicial para cada terna de espacios exteriores X, Y, Z . Se tiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 3.24 \mathbf{E} con la estructura definida anteriormente es una categoría simplicial.

Definición 3.25 Sea X un espacio exterior y sea K un conjunto simplicial finito. Se define $X \otimes K = X \bar{\times} |K|$ y $X^K = X^{|K|}$.

Nótese que, en este caso, $|K|$ es un espacio topológico compacto y Hausdorff.

Teorema 3.26 Existe una biyección natural,

$$Hom_{\mathbf{E}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X, Y)),$$

donde X, Y son espacios exteriores y K un conjunto simplicial finito.

Proposición 3.27 Sean X un espacio exterior y K, L conjuntos simpliciales finitos, entonces,

$$(i) X \otimes (K \times L) \cong (X \otimes K) \otimes L,$$

$$(ii) X^{K \times L} \cong (X^K)^L.$$

También se tiene:

$$Hom_{\mathbf{E}}(Y, X^K) \cong Hom_{\mathbf{E}}(Y \otimes K, X) \cong Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(Y, X)).$$

Así, \mathbf{E} verifica el axioma SM0. Se tiene que $Hom_{\mathbf{E}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\mathbf{E}}(X, Y^K)$. Esto se puede generalizar a nivel simplicial.

Teorema 3.28 \mathbf{E} tiene estructura de categoría simplicial de modelos cerrada.

Se definirá ahora una nueva estructura en \mathbf{E} . Existe un funtor de olvido $U : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Top}$ de forma que prescindir de la externología de cada espacio exterior y a cada aplicación exterior se le asigna la misma aplicación entre los espacios topológicos correspondientes. Siempre que no haya lugar a ambigüedad o confusión se denotará al olvido de $f : X \rightarrow Y$ como el mismo $f : X \rightarrow Y$.

Existe otro funtor, $V : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{E}$ que a cada espacio topológico lo transforma en un espacio exterior sin más que considerar como externología la propia topología. U es adjunto a derecha de V .

Definición 3.29 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación exterior. Se dice que f es *g-equivalencia débil* si es e-equivalencia débil y su olvido es equivalencia débil en \mathbf{Top} .

Se observa que toda equivalencia de homotopía exterior es una g-equivalencia débil.

Definición 3.30 Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación exterior. Se dice que es *g-fibración* si es e-fibración y su olvido es fibración en \mathbf{Top} .

Decir que el olvido de p es fibración en **Top** es lo mismo que decir que p , como aplicación exterior, tiene la P.E.D. en **E** respecto de las aplicaciones exteriores $\delta_0 : D^q \rightarrow D^q \bar{\times} I$, donde en D^q se considera la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, es decir, la propia topología; por tanto en $D^q \bar{\times} I$ se tiene también la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, o la propia topología. Asimismo, toda aplicación $u : D^q \rightarrow X$ es exterior si y sólo si su olvido es continua, al igual con aplicaciones del tipo $D^q \times I \rightarrow X$.

Definición 3.31 Sea $i : A \rightarrow B$ una aplicación exterior, se dice que es *g-cofibración* si verifica la P.E.I. respecto de las g-fibraciones triviales.

Se deduce que todo espacio exterior es g-fibrante. Además, tanto el coproducto de g-cofibraciones como la inducida en un push-out de una g-cofibración es de nuevo una g-cofibración.

Teorema 3.32 **E** junto con las g-fibraciones, g-cofibraciones y las g-equivalencias débiles es una categoría simplicial de modelos cerrada.

La definición de gCW complejo surge como un espacio exterior en el que se pegan adecuadamente celdas compactas y no compactas. Se dará ahora su definición rigurosa y se verán algunas de sus propiedades más importantes, así como un teorema de tipo Whitehead.

Definición 3.33 Sea X un espacio exterior, se dice que es un *gCW complejo* si admite una filtración

$$\emptyset = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X,$$

tal que X es el colímite de dicha sucesión y cada X^n se obtiene de X^{n-1} mediante un push-out en **E** de la forma

$$\begin{array}{ccc} (\coprod_{\lambda \in A_n} \mathbb{N} \bar{\times} S_\lambda^{n-1}) \amalg (\coprod_{\mu \in B_n} S_\mu^{n-1}) & \xrightarrow{(\coprod_{\lambda \in A_n} \varphi_\lambda) \amalg (\coprod_{\mu \in B_n} \varphi_\mu)} & X_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\coprod_{\lambda \in A_n} \mathbb{N} \bar{\times} D_\lambda^n) \amalg (\coprod_{\mu \in B_n} D_\mu^n) & \xrightarrow{(\coprod_{\lambda \in A_n} \psi_\lambda) \amalg (\coprod_{\mu \in B_n} \psi_\mu)} & X_n. \end{array}$$

A $\psi_\lambda(\mathbb{N} \bar{\times} D_\lambda^n)$, $\psi_\mu(D_\mu^n)$ se les denomina *N-celda* y *celda simple* respectivamente, y a las aplicaciones $\varphi_\lambda : \mathbb{N} \bar{\times} S_\lambda^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$, $\varphi_\mu : S_\mu^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ las aplicaciones *característica* respectivas.

Se llama *q-esqueleto* de X al elemento q -ésimo de la filtración que admite X , X^q .

Proposición 3.34 *Todo gCW complejo es un espacio exterior g-cofibrante.*

Se obtiene como consecuencia el teorema de Whitehead.

Teorema 3.35 *Sea $f : X \rightarrow Y$ aplicación exterior entre gCW complejos. Entonces f es una equivalencia de homotopía exterior si y sólo si f es g-equivalencia débil.*

Todo CW complejo es un gCW complejo con externología la propia topología. Esta externología no tiene por qué coincidir con la de los complementos de los compacto-cerrados, sin embargo bajo ciertas condiciones sí se cumple.

Proposición 3.36 *Sea X un CW complejo localmente finito, de dimensión finita y con un número contable de celdas en cada dimensión. Entonces X , con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, es un gCW complejo.*

Como consecuencia se obtiene el teorema de Whitehead propio.

Teorema 3.37 *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación propia entre CW complejos localmente finitos, de dimensión finita y con un número contable de celdas en cada dimensión. Entonces $f = f_e$ es g-equivalencia débil si y sólo si f es una equivalencia de homotopía propia.*

3.5 Comparación de estructuras de modelos.

En esta sección se compararán las estructuras de categorías de modelos existentes en \mathbf{E} : la e-estructura, la g-estructura, así como también la de los espacios topológicos.

Como se ha visto, la categoría de los espacios exteriores tiene una estructura de categoría simplicial de modelos cerrada con las e-fibraciones, e-cofibraciones y las e-equivalencias, y otra con las g-fibraciones, g-cofibraciones y g-equivalencias débiles. Cabe preguntarse qué ocurre con las categorías localizadas respectivas. Se denotará por $\mathbf{Ho}_e(\mathbf{E})$ a la categoría localizada de \mathbf{E} con la estructura de modelos derivada de las e-fibraciones, e-cofibraciones y e-equivalencias débiles. Similarmente se denotará por $\mathbf{Ho}_g(\mathbf{E})$ a la localizada de \mathbf{E} con la estructura derivada por los g-morfismos respectivos. Obsérvese que, de forma obvia, existe una adjunción,

$$\mathbf{E} \begin{array}{c} \xrightarrow{id} \\ \xleftarrow{id} \end{array} \mathbf{E} .$$

Evidentemente $id : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ lleva g-fibraciones en e-fibraciones y g-equivalencias débiles en e-equivalencias débiles, por lo que lleva e-cofibraciones en g-cofibraciones.

Proposición 3.38 *Existe una adjunción,*

$$\underline{\underline{L}}(id) : \mathbf{Ho}_e(\mathbf{E}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}_g(\mathbf{E}) : \underline{\underline{R}}(id).$$

Nota: $\underline{\underline{L}}(F)$ y $\underline{\underline{R}}(F)$ denotan los funtores adjuntos a izquierda y a derecha de F respectivamente, véase [31].

Además

Proposición 3.39 *El funtor $\underline{\underline{L}}(id) : \mathbf{Ho}_e(\mathbf{E}) \leftrightarrow \mathbf{Ho}_g(\mathbf{E})$ es un encaje.*

Otra comparación de especial interés es entre las categorías localizadas de \mathbf{Top} con la estructura de Quillen y la localizada $\mathbf{Ho}_g(\mathbf{E})$. El funtor olvido $U : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Top}$ transforma g-fibraciones en fibraciones y g-equivalencias débiles en equivalencias débiles. Recordemos que su funtor adjunto a izquierda es $V : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{E}$, en el que a cada espacio topológico se le considera como externología su topología.

Proposición 3.40 *Existe una adjunción,*

$$\underline{\underline{L}}(V) : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}_g(\mathbf{E}) : \underline{\underline{R}}(U).$$

Además,

Proposición 3.41 *El funtor $\underline{\underline{L}}(V) : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \leftrightarrow \mathbf{Ho}_g(\mathbf{E})$ es un encaje.*

4 Modelos simpliciales.

Se presentan dos modelos algebraicos para la categoría de los espacios exteriores: los M -conjuntos simpliciales y los conjuntos simpliciales exteriores. Se establece una estructura de categoría simplicial de modelos cerrada para el primer modelo así como la creación de funtores adjuntos, realización y singular exteriores, que inducen otra adjunción en las categorías localizadas respectivas.

Se extenderá la noción de exterior a otras categorías, entre ellas, el segundo modelo. Otras son los grupos abelianos simpliciales exteriores y conjuntos (grupos abelianos) exteriores. La relación de este otro modelo con \mathbf{E} es la existencia de una adjunción a través de funtores análogos a la realización geométrica y el singular clásicos.

4.1 M -conjuntos simpliciales.

Definición 4.1 Un *monoide* es un conjunto M con una ley de composición interna $\cdot : M \times M \rightarrow M$ verificando

- (i) $m \cdot (m' \cdot m'') = (m \cdot m') \cdot m''$, para cualquier m, m', m'' de M . (Ley asociativa).
- (ii) Existe $1 \in M$ tal que $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$, para cualquier m de M . (Existencia de elemento neutro).

Todo monoide M se puede considerar como una categoría con un solo objeto $*$, donde los morfismos $* \rightarrow *$ son los elementos de M , siendo la composición la operación. Recíprocamente, toda categoría con un único objeto tiene estructura de monoide considerando sus morfismos y como operación su composición.

Definición 4.2 Sea M un monoide, un *M -conjunto a derecha* es un par (X, θ) , donde X es un conjunto y θ representa una acción de M por la derecha de X , esto es, una aplicación $\theta : X \times M \rightarrow X$ tal que

- (i) $\theta(\theta(x, m), m') = \theta(x, m \cdot m')$, para cada x de X y m, m' de M ;
- (ii) $\theta(x, 1) = x$, para cada x de X .

Para simplificar notación, $\theta(x, m)$ se suele representar por $x \cdot m$ y al par (X, θ) por X .

Definición 4.3 Si X, Y son M -conjuntos por la derecha, una *M -aplicación a derecha* de X a Y consiste en una aplicación $f : X \rightarrow Y$ que respeta las acciones, es decir, $f(x \cdot m) = f(x) \cdot m$, para x de X y m de M .

La composición de M -aplicaciones por la derecha es M -aplicación por la derecha y la identidad en un M -conjunto es M -aplicación por la derecha. Surge entonces la categoría de M -conjuntos por la derecha, denotada por \mathbf{Sets}_M . También existe la noción de M -conjunto y M -aplicación por la izquierda, dando lugar, de forma natural, a la categoría de M -conjuntos a izquierda, ${}_M\mathbf{Sets}$. A partir de aquí, cuando se haga referencia a M -conjuntos y M -aplicaciones se entenderá que son por la derecha.

Considerando a M como categoría se puede hablar de la categoría de funtores, $\mathbf{Sets}^{M^{op}}$. Se tiene que \mathbf{Sets}_M y $\mathbf{Sets}^{M^{op}}$ son categorías isomorfas.

Dada una categoría cualquiera \mathbf{C} , se ha hablado de la categoría de objetos simpliciales de \mathbf{C} como la categoría de funtores $\mathbf{C}^{\Delta^{op}}$ donde Δ es la categoría simplicial. En este caso, la categoría de M -conjuntos simpliciales es $(\mathbf{Sets}_M)^{\Delta^{op}} \cong (\mathbf{Sets}^{M^{op}})^{\Delta^{op}} \cong \mathbf{Sets}^{\Delta^{op} \times M^{op}} = \mathbf{Sets}^{(\Delta \times M)^{op}}$. Todas estas reformulaciones se pueden usar indistintamente para designar a la categoría de los M -conjuntos simpliciales.

De forma natural surge el functor olvido $U : \mathbf{Sets}_M \rightarrow \mathbf{Sets}$, también considerado como $U : \mathbf{Sets}^{M^{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$, $U(X) = X(*)$, olvidando la acción del monoide. Este functor se extiende simplicialmente, olvidando nivel a nivel la acción del monoide en los conjuntos, a $U^{\Delta^{op}} : (\mathbf{Sets}^{M^{op}})^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\Delta^{op}}$, que se denota como U .

Mediante este functor olvido, U , se obtienen los siguientes morfismos especiales:

Definición 4.4 Sea $f : X \rightarrow Y$ una M -aplicación simplicial, entonces

- (i) f es una *fibración*, si $U(f)$ es fibración en $\mathbf{Sets}^{\Delta^{op}}$;
- (ii) f es una *equivalencia débil*, si $U(f)$ es equivalencia débil en $\mathbf{Sets}^{\Delta^{op}}$;
- (iii) f es *cofibración*, si tiene la P.E.I. respecto de las fibraciones triviales.

Teorema 4.5 La categoría de M -conjuntos simpliciales, $\mathbf{Sets}^{(\Delta \times M)^{op}}$, junto con las fibraciones, cofibraciones y equivalencia débiles definidas anteriormente, tiene estructura de categoría de modelos cerrada.

$(\mathbf{Sets}^{M^{op}})^{\Delta^{op}}$ es una categoría simplicial al ser de objetos simpliciales ([31]). Además, se verifican los axiomas **SM0** y **SM7**. De la cocompletitud de $\mathbf{Sets}^{M^{op}}$, dado X un M -conjunto simplicial y K un conjunto simplicial:

Definición 4.6 El M -conjunto simplicial $X \otimes K$ viene dado como

$$(X \otimes K)_n = \coprod_{\tau \in K_n} X_n,$$

y si $j_\sigma : X_n \rightarrow \coprod_{\tau \in K_n} X_n$ denota a la inclusión σ -ésima, $\sigma \in K_n$.

Existe, además, un isomorfismo canónico: $X \otimes (K \times L) \cong (X \otimes K) \otimes L$.

Definición 4.7 Dado X un M -conjunto simplicial, K un conjunto simplicial, se define X^K como

$$(X^K)_n = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(K \times \Delta[n], U(X)).$$

Se obtiene entonces:

Proposición 4.8 Si X, Y son M -conjuntos simpliciales y K un conjunto simplicial, existe una biyección natural, $\text{Hom}_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\text{op}}})^{\Delta^{\text{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong \text{Hom}_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\text{op}}})^{\Delta^{\text{op}}}}(X, Y^K)$.

Como consecuencia, si X es un M -conjunto simplicial y K, L son conjuntos simpliciales entonces $X^{K \times L} \cong (X^K)^L$.

Teorema 4.9 $\mathbf{Sets}^{(\Delta \times \mathbf{M})^{\text{op}}}$ es una categoría simplicial de modelos cerrada.

4.2 Funtores singular y realización geométrica exteriores.

Se construirán ahora unos funtores adjuntos de una categoría en la otra, llamados *singular exterior* y *realización geométrica exterior*, que inducen una adjunción en las categorías localizadas respectivas.

Se considera el monoide concreto $M = \text{Hom}_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, donde en \mathbb{N} se toma la topología discreta y externología de los complementos de sus subconjuntos finitos. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se considera el n -símplice standard geométrico Δ_n . Si $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ es creciente entonces se induce una aplicación continua denotada como $\tilde{\varphi} : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$ que da origen a un functor $\Delta \rightarrow \mathbf{Top}$.

Definición 4.10 Se define el *functor singular exterior*, $\text{Sing}_e : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Sets}^{(\Delta \times \mathbf{M})^{\text{op}}}$, como $\text{Sing}_e(X)_n = \text{Hom}_{\mathbf{E}}(\mathbb{N} \bar{\times} \Delta_n, X)$.

Teorema 4.11 Existe un functor $|\cdot|_e : \mathbf{Sets}^{(\Delta \times \mathbf{M})^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{E}$, llamado *realización geométrica exterior*, tal que es adjunto a izquierda del functor singular exterior. Además, este functor viene definido por

$$|X|_e = \text{colim} \left(\int_{\Delta \times \mathbf{M}} X \xrightarrow{\pi_X} \Delta \times \mathbf{M} \xrightarrow{A} \mathbf{E} \right),$$

para cada M -conjunto simplicial X .

Estos funtores inducen unos funtores adjuntos en las categorías localizadas respectivas:

Teorema 4.12 Existe una adjunción, $\underline{L}(|\cdot|_e) \dashv \underline{R}(\text{Sing}_e)$,

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Sets}^{(\Delta \times \mathbf{M})^{\text{op}}}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\underline{L}(|\cdot|_e)} \\ \xleftarrow{\underline{R}(\text{Sing}_e)} \end{array} \mathbf{Ho}_{\mathbf{e}}(\mathbf{E}).$$

4.3 Prismas infinitos.

Se define, para cada M -conjunto simplicial, un conjunto simplicial especial, denominado *prismas infinitos*. En ciertos casos será de Kan, por lo que se podrán definir directamente sus grupos de homotopía. Se ven propiedades muy interesantes, entre éstas la relación de los grupos de homotopía exterior de tipo Steenrod con los grupos de homotopía de los prismas infinitos de un determinado M -conjunto simplicial. Para X , M -conjunto simplicial, se considera $X^{\Delta[1]}$ y $d_0, d_1 : X^{\Delta[1]} \rightarrow X$. Cada d_ε es tal que $(d_\varepsilon)_n : (X^{\Delta[1]})_n \rightarrow X_n$, $\alpha \rightsquigarrow \alpha_n(\sigma_\varepsilon, id_{[n]})$, donde $\sigma_\varepsilon : [n] \rightarrow [1]$ es tal que $\sigma_\varepsilon(t) = \varepsilon$, $t \in [n]$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

También se tiene a $s : X \rightarrow X^{\Delta[1]} : s_n : X_n \rightarrow (X^{\Delta[1]})_n$; $(s_n(x))_m(k, \sigma) = X(\sigma)(x)$.

Existe un elemento especial del monoide $M = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Definición 4.13 El elemento $sh : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $sh(k) = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, se denomina *operador shift*.

Si X es un M -conjunto simplicial se puede definir una aplicación simplicial $(sh)^* : X \rightarrow X$, dada por $(sh)_n^*(x) = x \cdot sh$, $x \in X_n$. Sin embargo, no es M -aplicación simplicial.

Definición 4.14 Sea X un M -conjunto simplicial, se define *los prismas infinitos* de X , y se denotará por $Prinf(X)$, al conjunto simplicial pull-back

$$\begin{array}{ccc} Prinf(X) & \xrightarrow{p_1} & X^{\Delta[1]} \\ p_2 \downarrow & & \downarrow (d_0, d_1) \\ X & \xrightarrow{(id_X, (sh)^*)} & X \times X. \end{array}$$

Nótese que el pull-back es en $\mathbf{Sets}^{\Delta^{op}}$. Por otro lado $Prinf(X)$ tiene la descripción explícita:

$$\begin{aligned} Prinf(X)_n &= \{a \in (X^{\Delta[1]})_n : (d_1)_n(a) = (d_0)_n(a) \cdot sh\}, \\ Prinf(X)(\varphi) &= X^{\Delta[1]}(\varphi) | Prinf(X)_n. \end{aligned}$$

Además, $p_1 : Prinf(X) \hookrightarrow X^{\Delta[1]}$ es la inclusión canónica y p_2 es $d_0 | Prinf(X) : Prinf(X) \rightarrow X$. Se induce de forma natural un functor $Prinf : \mathbf{Sets}^{(\Delta \times M)^{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\Delta^{op}}$.

Los funtores $USing_e, Sing(\cdot)^{\mathbb{N}} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\Delta^{op}}$ son naturalmente isomorfos. Como consecuencia inmediata se obtiene una relación entre los grupos de homotopía de tipo Brown y los grupos de homotopía de un determinado conjunto simplicial punteado.

Teorema 4.15 Sea Z un espacio exterior y $a \in Z^{\mathbb{N}}$. Entonces el n -grupo de homotopía de tipo Brown de (Z, a) es isomorfo al n -grupo de homotopía del conjunto simplicial punteado $(U(Sing_e(Z)), a')$ donde $a' : \mathbb{N} \bar{\times} \Delta_0 \rightarrow Z$ es isomorfo a a .

Para el caso de los grupos de homotopía de tipo Steenrod, $\pi_n^S((Z, a))$, con $a \in Z^{\mathbb{R}^+}$, existe una relación directa con el functor prismas infinitos dando lugar al siguiente resultado.

Teorema 4.16 Sea Z espacio exterior y $a \in Z^{\mathbb{R}^+}$. Entonces los grupos de homotopía de tipo Steenrod de (Z, a) son isomorfos a los grupos de homotopía del conjunto simplicial punteado $(Prinf(Sing_e(Z)), \bar{a})$, donde \bar{a} se corresponde con a de modo canónico.

4.4 Conjuntos simpliciales exteriores.

Se introduce ahora otro modelo algebraico para \mathbf{E} : la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores. Esta nueva categoría, a pesar de no ser de objetos simpliciales, tiene una estructura de categoría simplicial y además dispone de unos objetos $X \otimes K$, X^K , en el sentido simplicial de Quillen. De esta manera se podrá hablar de homotopía y categoría homotópica.

Definición 4.17 Un *conjunto simplicial exterior* consiste en un par (X, ε) , donde X es un conjunto simplicial y ε es una familia no vacía de subconjuntos simpliciales de X , llamada *externología*, verificando

- (i) Si $Z_1, Z_2 \in \varepsilon$ entonces $Z_1 \cap Z_2 \in \varepsilon$;
- (ii) Si $Z \in \varepsilon, W \subset X$ y $Z \subset W$ entonces $W \in \varepsilon$.

De forma totalmente análoga, se pueden considerar para los conjuntos simpliciales exteriores, bases y subbases exteriores.

Definición 4.18 Una *aplicación simplicial exterior* es una aplicación simplicial entre conjuntos simpliciales exteriores, $f : (X, \varepsilon) \rightarrow (X', \varepsilon')$, tal que $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

Si no hay peligro de confusión, a las aplicaciones simpliciales exteriores se las denotará por $f : X \rightarrow X'$, omitiendo las externologías. También, se denota a la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores por $\mathbf{E-Sets}^{\Delta^{op}}$.

Definición 4.19 Sea (X, ε) un conjunto simplicial exterior y $A \subset X$ un subconjunto simplicial. Se define $\varepsilon_A = \{E \cap A : E \in \varepsilon\}$.

Es externología en A , dotándola así de estructura de conjunto simplicial exterior y haciendo que la inclusión canónica $i : A \hookrightarrow X$ sea una aplicación simplicial exterior. Sea ahora (X, ε) un conjunto simplicial exterior, de forma que en cada X_n existe una relación de equivalencia compatible, es decir, $x \sim x'$ si y sólo si $X(\varphi)(x) \sim X(\varphi)(x')$, para cada φ de Δ , con codominio $[n]$. Se considera $(X/\sim)_n = X_n/\sim$ y $(X/\sim)(\varphi) = \bar{\varphi}$ la inducida en las proyecciones. X/\sim es el conjunto simplicial *cociente*. Se tiene también la proyección $\pi : X \rightarrow X/\sim$, $\pi_n(x) = [x]$, $x \in X_n$. Evidentemente es simplicial, y la externología $\varepsilon_{X/\sim} = \{E \subset X/\sim : \pi^{-1}(E) \in \varepsilon\}$ dota a X/\sim de estructura de conjunto simplicial exterior. Se denomina *conjunto simplicial exterior cociente*.

Por otro lado, si $\{(X^i, \varepsilon^i)\}_{i \in I}$ una colección de conjuntos simpliciales exteriores, por un lado se considera $\coprod_{i \in I} X^i$ el conjunto simplicial coproducto, dado por $(\coprod_{i \in I} X^i)_n = \coprod_{i \in I} X_n^i$, y si $j_k : X^k \hookrightarrow \coprod_{i \in I} X^i$ representa la inyección k -ésima, $k \in I$, entonces se define la externología $\varepsilon_{(\coprod_{i \in I} X^i)} = \{E \subset \coprod_{i \in I} X^i : j_k^{-1}(E) \in \varepsilon^k, \forall k \in I\}$, haciendo a cada j_k exterior. $\coprod_{i \in I} X^i$ con la estructura exterior es el coproducto categórico de la familia dada. Por otro lado, si se considera el conjunto simplicial producto $\prod_{i \in I} X^i$ y se denota por $p_k : \prod_{i \in I} X^i \rightarrow X^k$, la proyección k -ésima, se define la externología generada por $S = \{p_k^{-1}(E_k) : E_k \in \varepsilon^k, k \in I\}$. $\prod_{i \in I} X^i$ es el producto categórico de la familia dada en $\mathbf{E-Sets}^{\Delta^{op}}$.

Por otro lado, dadas $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$, aplicaciones simpliciales exteriores, existe su igualador y coigualador.

Si \emptyset representa el conjunto simplicial vacío, y $*$ el conjunto simplicial unipuntual, entonces $(\emptyset, \{\emptyset\})$ y $(*, \{*\})$ son los objetos inicial y final de esta categoría, respectivamente. Se deduce inmediatamente que $\mathbf{E-Sets}^{\Delta^{op}}$ es una categoría completa y cocompleta.

Otra propiedad interesante de esta categoría es que es simplicial. En primer lugar se introduce el tensor $X \otimes K$, cuando X es un conjunto simplicial exterior y K es un conjunto simplicial, noción que dará pie a la creación del funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{E-Sets}^{\Delta^{op}}}$.

Definición 4.20 Sea (X, ε) un conjunto simplicial exterior, K conjunto simplicial. Se define el conjunto simplicial exterior $(X \otimes K, \varepsilon_{X \otimes K})$ como sigue: $X \otimes K = X \times K$, donde representa el producto cartesiano en conjuntos simpliciales, olvidándose de la estructura exterior de X . Los elementos de $\varepsilon_{X \otimes K}$ son los subconjuntos de $X \times K$, E , tales que para cada $p \geq 0$, y para cada $\sigma \in K_p$, existe $F^\sigma \in \varepsilon$ y existe $G^\sigma \subset K$ con $\sigma \in G_p^\sigma$ y $F^\sigma \times G^\sigma \subset E$.

Proposición 4.21 Sea X un conjunto simplicial exterior y K, L conjuntos simpliciales finitos. Entonces $(X \otimes K) \otimes L = X \otimes (K \times L)$.

Definición 4.22 Sean X, Y conjuntos simpliciales exteriores. Se define

$$\underline{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(X, Y)_p = \underline{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(X \otimes \Delta[p], Y), \quad p \geq 0.$$

Definición 4.23 Se define $g \circ_p f$ como la composición

$$X \otimes \Delta[p] \xrightarrow{id_X \otimes \Delta} X \otimes (\Delta[p] \times \Delta[p]) \xrightarrow{f \otimes id_{\Delta[p]}} Y \otimes \Delta[p] \xrightarrow{g} Z,$$

para cada $f \in \underline{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(X, Y)_p$ y $g \in \underline{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(Y, Z)_p$.

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.24 $\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}$ es una categoría simplicial.

Si se tiene en cuenta:

Proposición 4.25 Existe una biyección natural,

$$\underline{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(X, Y)).$$

Entonces $X \otimes K$ es el objeto tensor en el sentido simplicial de Quillen. También existe la exponenciación.

Definición 4.26 Sea X un conjunto simplicial exterior, K un conjunto simplicial. Se define X^K como $(X^K)_p = \underline{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(K \times \Delta[p], X)$, $p \geq 0$ ($X \equiv U(X)$), donde

$$\varepsilon_{X^K} = \{E \subset X^K : \exists F \in \varepsilon_X \text{ tal que } F^K \subset E\}.$$

Esta construcción dota a X^K de estructura de conjunto simplicial exterior.

Los funtores $-\otimes-$ y $(\cdot)^{(\cdot)}$ están relacionados mediante una biyección natural, hecho crucial para comprobar que X^K es la exponenciación del sentido simplicial de Quillen.

Proposición 4.27 Existe una biyección natural,

$$\underline{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(X, Y^K),$$

donde X, Y recorren los conjuntos simpliciales exteriores y K los conjuntos simpliciales finitos.

La biyección natural de la proposición anterior tiene una generalización simplicial.

4.5 Los funtores $E\text{-Sing}$ y $E\text{-}|\cdot|$.

Ahora se dará una definición de un functor $E\text{-Sing}$, estilo functor singular, de la categoría de los espacios exteriores a la de conjuntos simpliciales exteriores.

Definición 4.28 Si (X, ε_X) es un espacio exterior, se define

$$(E\text{-Sing})((X, \varepsilon_X)),$$

como el conjunto simplicial $Sing(X)$ junto con la externología que admite como base exterior los subconjuntos simpliciales de la forma $Sing(E)$, con $E \in \varepsilon_X$.

Se induce un functor $E\text{-Sing} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}$.

Definición 4.29 Sea (X, ε_X) un conjunto simplicial exterior. Se define $E\text{-}|(X, \varepsilon_X)|$, como el espacio exterior dado por el espacio topológico $|X|$, realización geométrica de X considerado como conjunto simplicial, junto con la externología formada por los abiertos de $|X|$ que contienen a la realización geométrica de algún subconjunto simplicial exterior de X .

Si no hay lugar a confusión se denota como $E\text{-}|X|$. Se tiene un funtor $E\text{-}| \cdot | : \mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{E}$. Estos funtores construidos, $E\text{-}Sing$ y $E\text{-}| \cdot |$, están relacionados por una adjunción, la cual viene inducida por la adjunción clásica entre espacios topológicos y conjuntos simpliciales.

Proposición 4.30 Sea X un conjunto simplicial exterior, Y un espacio exterior y $f : E\text{-}|X| \rightarrow Y$ una aplicación exterior. Entonces se induce, de forma natural, $\tilde{f} : X \rightarrow (E\text{-}Sing)(Y)$ una aplicación simplicial exterior.

Se tiene así,

Teorema 4.31 Existe una biyección natural,

$$Hom_{\mathbf{E}}(E\text{-}|X|, Y) \cong Hom_{\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(X, (E\text{-}Sing)(Y)),$$

donde X recorre los conjuntos simpliciales exteriores, Y los espacios exteriores.

Siguiendo ideas paralelas a las de la categoría de los espacios exteriores, \mathbf{E} , y la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores, $\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}$, surgen nuevas categorías. En concreto, *los conjuntos exteriores*, cuya categoría de objetos simpliciales asociada está relacionada con la de los conjuntos simpliciales exteriores a través de un funtor fiel.

Definición 4.32 Un *conjunto exterior* es un par (X, ε) , donde X es un conjunto y ε es una familia no vacía de subconjuntos de X tal que

- (i) Si $E_1, E_2 \in \varepsilon$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;
- (ii) Si $E \in \varepsilon, F \subset X$ y $E \subset F$ entonces $F \in \varepsilon$.

Definición 4.33 Una *aplicación exterior* entre dos conjuntos exteriores $(X, \varepsilon), (X', \varepsilon')$ consiste en una aplicación $f : X \rightarrow X'$ tal que $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

De estas nociones surge la categoría de conjuntos exteriores $\mathbf{E}\text{-Sets}$. Esta categoría también tiene propiedades buenas sobre límites y colímites. Dada $\{(X_i, \varepsilon_i)\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos exteriores, si se denota por $j_k : X_k \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ la inclusión k -ésima del coproducto en \mathbf{Sets} , se considera en $\{(X_i, \varepsilon_i)\}_{i \in I}$ la externología constituida por aquellos subconjuntos, E , tales que $j_k^{-1}(E) \in \varepsilon_k$, para cada $k \in I$. Por otro lado, si $p_k : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow X_k$ representa la proyección k -ésima en \mathbf{Sets} , se considera en $\coprod_{i \in I} X_i$ la externología que admite como base exterior los subconjuntos de la forma $p_k^{-1}(E_k), E_k \in \varepsilon_k, k \in I$. Es inmediato que son producto y coproducto categóricos en $\mathbf{E}\text{-Sets}$ de la familia considerada.

Dadas f, g aplicaciones exteriores de X a Y se considera

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\},$$

con la externología inducida por la de X , es decir, sus subconjuntos exteriores son de la forma $E \cap A$, con $E \in \varepsilon_X$. Entonces $i : A \hookrightarrow X$, la inclusión canónica, es el igualador de f y g . Si se considera en Y el conjunto cociente Y/\sim , con las relaciones elementales $f(x) \sim g(x), x \in X$, y externología formada por aquellos subconjuntos E tales que $\pi^{-1}(E)$ es subconjunto exterior de Y , donde $\pi : Y \rightarrow Y/\sim$ es la proyección, entonces π es el coigualador de f y g . De esta manera, se prueba que la categoría de conjuntos

exteriores, **E-Sets**, es completa y cocompleta. Nótese que $(\emptyset, \{\emptyset\})$ y $(*, \{*\})$ son el objeto inicial y final respectivamente.

Al ser $(\mathbf{E-Sets})^{\Delta^{\text{op}}}$ una categoría de objetos simpliciales, entonces es una categoría simplicial. Como **E-Sets** es cerrada bajo coproductos dado un conjunto exterior simplicial $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{E-Sets}$, y K un conjunto simplicial, existe el conjunto exterior simplicial $X \otimes K$, que viene dado por $(X \otimes K)_n = \coprod_{\tau \in K_n} X_n$, $n \geq 0$.

La categoría de conjuntos simpliciales exteriores y la categoría de conjuntos exteriores simpliciales están relacionadas mediante un funtor fiel,

$$W : \mathbf{E-Sets}^{\Delta^{\text{op}}} \rightarrow (\mathbf{E-Sets})^{\Delta^{\text{op}}},$$

que conserva el tensor $- \otimes -$ restringido a conjuntos simpliciales con un número finito de símlices en cada dimensión. Este funtor viene definido como $W((X, \varepsilon))_n = (X_n, \varepsilon_n)$, donde ε_n es la externología que admite como base exterior a $\{E_n : E \in \varepsilon\}$. Como consecuencia inmediata, este funtor W preserva los cilindros, es decir,

$$W(X \otimes \Delta[1]) = W(X) \otimes \Delta[1].$$

4.6 Grupos abelianos simpliciales exteriores.

Como se ha comentado, la noción *exterior* se puede trasladar a otras categorías. En paralelismo a la sección anterior, en el apartado concerniente a los conjuntos simpliciales exteriores y conjuntos exteriores simpliciales, surgen los *grupos abelianos simpliciales exteriores* (noción exterior de grupo abeliano simplicial), y los *grupos abelianos exteriores simpliciales* (categoría de objetos simpliciales de la categoría exterior de grupos abelianos). Estas nuevas categorías sirven de puente para el desarrollo de homologías en espacios exteriores.

Se comienza con la presentación de la categoría de los *grupos abelianos simpliciales exteriores*. Dado un grupo abeliano simplicial, se consideramos subgrupos simpliciales $H < G$.

Definición 4.34 Un *grupo abeliano simplicial exterior* consiste en un par (G, ε) , donde G es un grupo abeliano simplicial y ε es una familia no vacía de subgrupos simpliciales de G verificando:

- (i) Si $E_1, E_2 \in \varepsilon$ entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;
- (ii) Si $E \in \varepsilon$, $F < G$ y $E < F$ entonces $F \in \varepsilon$.

Nota: Al igual que en conjuntos simpliciales exteriores se establecen, de forma obvia, las nociones de base y subbase exterior.

Definición 4.35 Un homomorfismo simplicial entre grupos abelianos simpliciales exteriores $f : (G, \varepsilon) \rightarrow (G', \varepsilon')$ se dice que es *exterior* si $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

Se tiene entonces, una nueva categoría, la de los grupos abelianos simpliciales exteriores, $\mathbf{E-Ab}^{\Delta^{\text{op}}}$. También esta categoría es completa y cocompleta. Además es punteada.

Si A es un subgrupo simplicial de G , con G simplicial exterior, se induce en A la externología ε_A cuya base exterior está formada por los subgrupos de A de la forma $E \cap A$, $E \in \varepsilon$. Así, la inclusión $i : A \hookrightarrow G$ es homomorfismo simplicial exterior. Por otro lado se puede definir el grupo simplicial cociente G/A por $(G/A)_p = G_p/A_p$, $p \geq 0$; teniendo el homomorfismo simplicial proyección $\pi : G \rightarrow G/A$, se define

$$\varepsilon_{G/A} = \{E < G/A : \pi^{-1}(E) \in \varepsilon\},$$

haciendo a π simplicial exterior.

Por otro lado, si $\{(G^i, \varepsilon_i)\}_{i \in I}$ es una familia de grupos abelianos simpliciales exteriores, se considera $\bigoplus_{i \in I} G^i$, dada por $(\bigoplus_{i \in I} G^i)_p = \bigoplus_{i \in I} G_p^i$, $p \geq 0$; y la inyección $j_k : G^k \rightarrow \bigoplus_{i \in I} G^i$, para cada $k \in I$. Se consideran los subgrupos simpliciales $E < \bigoplus_{i \in I} G^i$ tales que $j_k^{-1}(E) \in \varepsilon_k$, $\forall k \in I$, dando lugar al coproducto categórico de la familia dada. Si se toma $\prod_{i \in I} G^i$ por $(\prod_{i \in I} G^i)_p = \prod_{i \in I} G_p^i$, y $p_k : \prod_{i \in I} G^i \rightarrow G^k$, se toma la subbase exterior formada por los subgrupos simpliciales de la forma $p_k^{-1}(E_k)$, $E_k \in \varepsilon_k$, $k \in I$, teniéndose el producto. Con estas nociones y resultados se comprueba la completitud y cocompletitud de esta categoría. Si se considera el grupo abeliano simplicial $0 : \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ dado por $0_p = 0$, $p \geq 0$, y como externología $\{0\}$, se comprueba que $(0, \{0\})$ es el objeto cero. Se verifica que es una categoría simplicial. Las construcciones tanto del tensor como del funtor $\underline{\text{Hom}}_{\mathbf{E}\text{-Ab}^{\Delta^{\text{op}}}}$ son análogas a las hechas para $\mathbf{E}\text{-Sets}^{\Delta^{\text{op}}}$.

Definición 4.36 Sea (G, ε) un grupo abeliano simplicial exterior y K un conjunto simplicial. Se considera $G \otimes K$ grupo abeliano simplicial exterior, olvidándose en G de la estructura exterior, junto con la familia de subgrupos simpliciales E , tales que, para cada $p \geq 0$, $\sigma \in K_p$, existe $F^\sigma \subset K$ y existe $H^\sigma \in \varepsilon$, con $\sigma \in H_p^\sigma$ tal que $H^\sigma \otimes F^\sigma < E$.

Nota: Si (G, ε) es un grupo abeliano simplicial exterior y K un conjunto simplicial finito, $\varepsilon_{G \otimes K} = \{E < G \otimes K : \exists F \in \varepsilon, F \otimes K < E\}$.

Proposición 4.37 Existe una biyección natural,

$$\text{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Ab}^{\Delta^{\text{op}}}}(G \otimes K, H) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(K, \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{E}\text{-Ab}^{\Delta^{\text{op}}}}(G, H)).$$

Definición 4.38 Sea G un grupo abeliano simplicial exterior y K un conjunto simplicial. Se define G^K como $(G^K)_p = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(K \times \Delta[p], G)$, $p \geq 0$ ($G \equiv U(G)$), y con externología cuya base exterior está formada por los de la forma E^K , $E \in \varepsilon_G$.

Nótese que aunque en $\text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\Delta^{\text{op}}}}(K \times \Delta[p], G)$ se olvida de la estructura algebraica de G así como de su externología, se induce una estructura de grupo abeliano simplicial exterior, de forma obvia: $(f + f')_q = f_q + f'_q$. Existe también una biyección natural, $\text{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Ab}^{\Delta^{\text{op}}}}(G \otimes K, H) \cong \text{Hom}_{\mathbf{E}\text{-Ab}^{\Delta^{\text{op}}}}(G, H^K)$, donde G, H recorren los grupos abelianos simpliciales exteriores y K los conjuntos simpliciales finitos.

Otra categoría de interés es la de *los grupos abelianos exteriores*. Sus objetos son pares (G, ε) , con G grupo abeliano y ε una familia no vacía de subgrupos de G , llamados *exteriores* verificando que la intersección de dos elementos de ε es de ε y que todo subgrupo de G que contenga a un elemento de ε vuelve a ser de ε . Por otro lado, sus morfismos son homomorfismos de grupos $f : G \rightarrow G'$ tales que $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$. Esta nueva categoría se denota por $\mathbf{E}\text{-Ab}$. De forma similar a $\mathbf{E}\text{-Sets}$, esta categoría es completa y cocompleta con objeto cero $(0, \{0\})$. Además $\mathbf{E}\text{-Ab}$ es una categoría aditiva (aunque no es abeliana).

$(\mathbf{E}\text{-Ab})^{\Delta^{\text{op}}}$ como categoría de objetos simpliciales es una categoría simplicial, además es completa y cocompleta, por lo que si G es un grupo abeliano exterior simplicial y K es un conjunto simplicial, entonces existe el grupo abeliano exterior simplicial $G \otimes K$, y viene dado por $(G \otimes K)_p = \prod_{k \in K_p} G_p$, $p \geq 0$. De forma análoga a conjuntos, existe un funtor fiel,

$$W' : \mathbf{E}\text{-Ab}^{\Delta^{\text{op}}} \rightarrow (\mathbf{E}\text{-Ab})^{\Delta^{\text{op}}},$$

que conserva el tensor $- \otimes -$, restringido a conjuntos simpliciales con un número finito de símlices en cada dimensión. Este funtor viene definido como $W'((G, \varepsilon))_n = (G_n, \varepsilon_n)$, donde ε_n es la externología que admite como base exterior a $\{E_n : E \in \varepsilon\}$.

Se tiene también que W' conserva los cilindros, es decir,

$$W'(G \otimes \Delta[1]) = W'(G) \otimes \Delta[1].$$

Se ven ahora relaciones entre todas las categorías simpliciales definidas, esto es, conjuntos simpliciales exteriores, grupos abelianos simpliciales exteriores, conjuntos exteriores simpliciales y grupos abelianos exteriores simpliciales. Estas relaciones, functoriales, se deducen de la adjunción existente entre el functor libre, de conjuntos a grupos abelianos, y el functor olvido, de grupos abelianos a conjuntos.

Se denota por $L : \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{Ab}$ al functor *libre*, que asigna a cada conjunto X el grupo abeliano libre generado por X , $L(X)$. Si $f : X \rightarrow X'$ es una aplicación, el homomorfismo $L(f) : L(X) \rightarrow L(X')$, dado por $L(f)(x) = f(x)$, para cada $x \in X$, extendiéndose por linealidad. Por otro lado, existe un functor de *olvido* $U : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Sets}$, que prescinde de la estructura algebraica del conjunto. L es un functor adjunto a izquierda de U .

Definición 4.39 Dado (X, ε) un conjunto exterior $(E-L)((X, \varepsilon))$ es el grupo abeliano exterior dado por el par $(L(X), \varepsilon_{(E-L)((X, \varepsilon))})$, donde $L(X)$ es el grupo abeliano libre generado por X y la externología es aquella que admite como base exterior los subgrupos de la forma $L(E)$, $E \in \varepsilon$.

Definición 4.40 Si (G, ε) un grupo abeliano exterior, se considera $(E-U)((G, \varepsilon))$,

el conjunto exterior formado por el par $(U(G), \varepsilon_{(E-U)((G, \varepsilon))})$ donde $U(G)$ es el olvido de G y la externología admite como base exterior los subconjuntos de la forma $U(E)$, $E \in \varepsilon$.

Si $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ es un functor e \mathbf{I} una categoría pequeña se denota por $F^I : \mathbf{C}^I \rightarrow \mathbf{D}^I$ al functor definido como $F^I(X)$ la composición FX y $F^I(\alpha) = F(\alpha)$.

Otra adjunción a tener en cuenta es

$$\mathbf{Sets}^{\Delta^{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{L^{\Delta^{op}}} \\ \xleftarrow{U^{\Delta^{op}}} \end{array} \mathbf{Ab}^{\Delta^{op}}.$$

Aquí, el objeto $E-L^{\Delta^{op}}((X, \varepsilon))$ es el par definido como $(L^{\Delta^{op}}(X), \varepsilon_{E-L^{\Delta^{op}}((X, \varepsilon))})$, donde la externología tiene como base exterior a los de la forma $L^{\Delta^{op}}(E)$, $E \in \varepsilon$. Análogamente para morfismos. De igual forma se define un functor $E-U^{\Delta^{op}}$, que resulta ser adjunto a derecha de $E-L^{\Delta^{op}}$.

Teorema 4.41 *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E-Sets}^{\Delta^{op}} & \begin{array}{c} \xrightarrow{E-L^{\Delta^{op}}} \\ \xleftarrow{E-U^{\Delta^{op}}} \end{array} & \mathbf{E-Ab}^{\Delta^{op}} \\ \downarrow W & & \downarrow W' \\ (\mathbf{E-Sets})^{\Delta^{op}} & \begin{array}{c} \xrightarrow{(E-L)^{\Delta^{op}}} \\ \xleftarrow{(E-U)^{\Delta^{op}}} \end{array} & (\mathbf{E-Ab})^{\Delta^{op}} \end{array}$$

es conmutativo, donde las flechas horizontales son adjunciones.

Referencias

- [1] R. AYALA, E. DOMINGUEZ and A. QUINTERO. A theoretical framework for Proper Homotopy Theory. *Math. Proc. Camb. Philos. Camb. Soc.* **107** (1990), 475-482.
- [2] H.J. BAUES. *Foundations of proper homotopy theory*. Preprint 1992.
- [3] D. BASSENDOSKI. *Whitehead and Hurewicz theorems in proper homotopy theory*. Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 1977.

- [4] F. BORCEUX. *Handbook of Categorical Algebra*. Encyclopedia of Math. and its applications. Cambridge University Press. Vol. **50,51** (1994).
- [5] E.M. BROWN. *On the proper homotopy type of simplicial complexes*. Lect. Notes in Math. **375**, (1975).
- [6] K.S. BROWN. Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology. *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1973), 419-458.
- [7] J. CABEZA, M.C. ELVIRA and L.J. HERNÁNDEZ. Una categoría cofibrada para las aplicaciones propias. *Actas XIV Jor. Hispano-Lusas, Vol. II, Univ. de La Laguna*, (1989), 595-590.
- [8] Z. ČERIN. On various relative proper homotopy groups. *Tsukuba J. Math.* **4** (1980), 177-202.
- [9] D. EDWARDS and H. HASTINGS. *Čech and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology*. Lect. Notes Math. **542** (Springer, 1976).
- [10] J.I. EXTREMIANA, L.J. HERNÁNDEZ and M.T. RIVAS. Proper CW complexes: A category for the study of proper homotopy. *Collectanea Math.* **39** (1988), 149-179.
- [11] F.T. FARRELL, L.R. TAYLOR and J.B. WAGONER. The Whitehead theorem in the proper category. *Compositio Math.* **27** (1973), 1-23.
- [12] P. GABRIEL and M. ZISMAN. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Springer, Berlin (1966).
- [13] J. GARCÍA-CALCINES, M. GARCÍA-PINILLOS and L. J. HERNÁNDEZ. A closed simplicial model category for proper homotopy and shape theories. *Bull. Austr. Math. Soc.* **57**, 221-242, (1998).
- [14] M. GARCÍA-PINILLOS. El estudio del infinito a través del espacio exterior. *Univ. de La Rioja*. Tesis (1998).
- [15] J.W. GROSSMAN. A homotopy theory of pro-spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **201** (1975), 161-170.
- [16] J.W. GROSSMAN. Homotopy Groups of Pro-spaces. *Illinois J. Math.* **20** (1976), 622-625.
- [17] L.J. HERNÁNDEZ. Applications of simplicial M-Sets to proper and strong shape theories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347** (1995), 363-409.
- [18] L.J. HERNÁNDEZ and T. PORTER. Global analogues of the Brown-Grossman proper homotopy groups. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **104** (1988), 483-496.
- [19] P.J. HILTON and U. STAMMBACH. *A Course in Homological Algebra*. Springer GTM 4, New York, (1971).
- [20] D.M. KAN. A combinatorial definition of homotopy groups. *Ann. of Math.* **67** (1958), 282-312.
- [21] D. M. KAN. On homotopy theory and C.S.S. groups. *Ann. of Math.* **68** (1958), 38-53.
- [22] B. KERÉKJÁRTO. *Vorlesungen uber Topologie*. vol. 1, Springer-Verlag (1923).
- [23] S. MAC LANE and I. MOERDIJK. *Sheaves in Geometry and Logic*. (Springer-Verlag, 1991).
- [24] J.P. MAY. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*. Van Nostrand, 1967.
- [25] J. MILNOR. The geometric realization of a semi-simplicial complex. *Ann. of Math.* **65** (1957), 357-362.

- [26] J.G. MIRANDA. Estructuras de modelos y teoría de homotopía en categorías de grupos y grupoides simpliciales. *Univ. de Granada*. Tesis (1995).
- [27] J.C. MOORE. *Seminar on algebraic homotopy theory*. Princeton (1956).
- [28] E. PADRÓN and S. RODRÍGUEZ-MACHÍN. Model-Additive categories. *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, serie II*, **24** (1990), 465-474.
- [29] T. PORTER. Abstract homotopy theory in procategories. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle*, vol. **17** (1976), 113-124.
- [30] T. PORTER. Proper homotopy theory. *Handbook of Algebraic Topology* (ch. 3) (1995), 127-167.
- [31] D. QUILLEN. *Homotopical Algebra*. Lect. Notes in Math. **43** (Springer, 1967).
- [32] D. QUILLEN. Rational Homotopy Theory. *Ann. of Math.* **90** (1969), 205-295.
- [33] L.C. SIEBENMANN. The obstruction of finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five. Thesis, 1965.
- [34] L.C. SIEBENMANN. Infinite simple homotopy types. *Indag. Math.* **32** (1970), 479-495.

Homotopía propia simplicial II *

J. M. García Calcines¹ L. J. Hernández Paricio²

S. Rodríguez Machín¹

¹*Departamento de Matemática Fundamental
Universidad de la Laguna
38271 La Laguna, SPAIN
E-mails: jmgarcac@ull.es, seroma@ull.es*

²*Departamento de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja
26004 Logroño, SPAIN
E-mail: luis-javier.hernandez@dmc.unirioja.es*

Abstract

Taking into account the simplicial models given in the category of exterior spaces we define and develop homology invariants for this category: the M -homology and the \mathfrak{R} -homology, as well as the tubular and the closed tubular homologies. As an application we give a description of the reduced Steenrod homology for compact metric spaces, X , in terms of the closed tubular homology of the Lefschetz's fundamental complex $OFC(X)$.

1 Introducción

En este trabajo continuamos el iniciado en “Homotopía propia simplicial I” (ver [21]) y nos dedicamos fundamentalmente a estudiar invariantes de naturaleza homológica para la categoría de los espacios exteriores \mathbf{E} , en concreto la M -homología, u homología con la acción del monoide M , y la \mathfrak{R} -homología. Para ello se hace un análisis preliminar de las distintas categorías de complejos de cadenas involucradas, así como de las categorías exteriores de complejos de cadenas, creadas partiendo de categorías en las que intervienen los grupos abelianos con las nociones de exterior y simplicial. Estas relaciones se harán a través de funtores de tipo Moore y de sumas alternas, aunque el que se utiliza en la práctica es este último. Posteriormente se hace un estudio algebraico del anillo de las matrices localmente finitas con coeficientes enteros y el funtor \mathcal{P} de Brown, importantes para la construcción de la \mathfrak{R} -homología. Se estudian las homología en sí que surgen cuando existe la acción del monoide y en la que interviene el anillo \mathfrak{R} , presentando riqueza en propiedades, como existencia de sucesiones exactas largas de homología, invarianza por homotopía exterior, etc. Cabe destacar la creación en la \mathfrak{R} -homología de un algoritmo de cálculo para una amplia clase de gCW complejos; para ello se define el *complejo de cadenas \mathfrak{R} -celular* de X y se ve que los grupos de homología del gCW complejo X son los de su complejo de cadenas \mathfrak{R} -celular asociado.

La última sección está dedicada al estudio de otras homología en los espacios exteriores que se derivan de las ya estudiadas: la homología tubular y la tubular cerrada. Estas homología tienen especial

*Los autores quieren agradecer a la Dirección General de Enseñanza Superior y a la Dirección General de Universidades e Investigación del Gobierno de Canarias por su aportación financiera en la realización de ese trabajo.

importancia en el estudio del final de un espacio exterior y tienen como análogos la homología del final y la localmente finita respectivamente de un espacio topológico. Entre sus propiedades destacan la existencia de una sucesión exacta larga de homología, invarianza por homotopía exterior, aditividad finita y teoremas de tipo escisivo. En 1940 Steenrod [37] definió grupos de homología para los espacios métrico-compactos basados en ciclos regulares. Posteriormente, en 1961, J. Milnor [33] dio una caracterización axiomática para este tipo de grupos en la categoría de los pares de espacios métrico-compactos. Para un CW complejo contable y localmente finito la homología reducida de Steenrod de su compactificación de Alexandroff es precisamente la homología celular basada en ciclos infinitos; es decir, se toma el complejo formado por un producto de cíclicos infinitos donde el conjunto de índices de dicho producto es el cardinal de las celdas de la dimensión correspondiente y el operador borde es el inducido por los números de incidencia de dichas celdas. La importancia de la homología tubular cerrada radica en que, para CW complejos, K , localmente finitos y con un número contable de celdas en cada dimensión su homología celular localmente finita coincide, salvo un salto de dimensión, con la homología tubular cerrada K dotado de cierta estructura de gCW complejo, teniéndose como consecuencia que la homología reducida de Steenrod de un espacio métrico-compacto X es isomorfa a la homología tubular cerrada de su complejo fundamental de Lefschetz asociado [29], también llamado construcción telescópica de Milnor.

2 Categorías de complejos de cadenas.

Dada \mathbf{A} una categoría abeliana se tiene una pareja de funtores,

$$\mathbf{A}^{\Delta^{\text{op}}} \begin{array}{c} \xrightarrow{N} \\ \xleftarrow{P} \end{array} \mathbf{Ch}^+ \mathbf{A},$$

entre la categoría de objetos simpliciales de \mathbf{A} y la categoría de complejos de cadenas positivos en \mathbf{A} . El functor N asigna a cada objeto simplicial, X , el complejo $N(X)$, llamado *complejo de Moore*, y dado por

$$\begin{aligned} N(X)_n &= \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker\{\partial_i : X_n \rightarrow X_{n-1}\} \\ d_n^{N(X)} &= \partial_n | N(X)_n : N(X)_n \rightarrow N(X)_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

El functor N , junto con el functor P que describiremos posteriormente, da lugar a una equivalencia de categorías por el Teorema de Dold-Puppe.

Por otro lado existe otro functor, $K : \mathbf{A}^{\Delta^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{Ch}^+ \mathbf{A}$, que a cada objeto simplicial de \mathbf{A} , X , lo transforma en el complejo $K(X)$:

$$\begin{aligned} K(X)_n &= X_n \\ d_n^{K(X)} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i : X_n \rightarrow X_{n-1}. \end{aligned}$$

Este último functor es mucho más usado en homología a pesar de no ser una equivalencia de categorías. No obstante, los funtores N y K están relacionados pues existe una transformación natural $i : N \rightarrow K$, la inclusión canónica, tal que cada componente es una equivalencia de homotopía.

Se introduce y analiza la categoría de los *complejos de cadenas exteriores positivos de grupos abelianos*. Esta categoría es equivalente a la de grupos abelianos simpliciales exteriores mediante una relación del tipo Dold-Puppe.

Dado un complejo de cadenas de grupos abelianos, (X, d^X) , se puede hablar de intersección de subcomplejos. También, si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo de complejos, de la imagen y antiimagen de subcomplejos. Se supondrá a partir de ahora que los complejos considerados son positivos y se denotará un contenido, \subset , cuando se haga referencia a subcomplejos.

Definición 2.1 Un *complejo de cadenas exterior de grupos abelianos* consiste en un par (X, ε) , donde X es un complejo de cadenas de grupos abelianos y ε es una familia no vacía de subcomplejos de X verificando:

- (i) Si $E_1, E_2 \in \varepsilon$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;
- (ii) Si $E \in \varepsilon$, $F \subset X$ y $E \subset F$ entonces $F \in \varepsilon$.

Definición 2.2 Dado $f : (X, \varepsilon) \rightarrow (X', \varepsilon')$, un morfismo de complejos entre complejos exteriores, se dice que es *exterior* si $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

Esta categoría se denotará como $\mathbf{E-Ch}^+ \mathbf{Ab}$, y se denominará *de complejos de cadenas exteriores de grupos abelianos*. La siguiente construcción da lugar a un complejo de cadenas exterior de grupos abelianos, para cada grupo abeliano simplicial exterior:

Definición 2.3 Si (G, ε) es un grupo abeliano simplicial exterior, se define el complejo exterior

$$(E-N)((G, \varepsilon)),$$

como el par $(N(G), \varepsilon_{(E-N)((G, \varepsilon))})$, donde $N(G)$ es el complejo de Moore usual y la externología es la que admite como base exterior a los subcomplejos de la forma $N(E)$, $E \in \varepsilon$.

Si $f : (G, \varepsilon) \rightarrow (G', \varepsilon')$ es un homomorfismo simplicial exterior, se induce de forma natural un morfismo de complejos exterior,

$$(E-N)(f) = N(f) : N(G) \rightarrow N(G').$$

Dado $E \in \varepsilon'$, $f^{-1}(E) \in \varepsilon$ y $N(f)(N(f^{-1}(E))) \subset N(E)$, luego efectivamente, es exterior. Todo esto da lugar a un funtor $E-N : \mathbf{E-Ab}^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{E-Ch}^+ \mathbf{Ab}$.

Para el caso clásico de los grupos abelianos, el funtor P de la equivalencia de categorías tiene la definición siguiente: Para cada $q \geq 0$, se considera $K[q] = L^{\Delta^{op}}(\Delta[q])$, el grupo abeliano simplicial generado por $\Delta[q]$, esto es,

$$\begin{aligned} K[q]_n &= L(\Delta[q]_n), \\ K[q](\varphi) &= L(\Delta[q](\varphi)). \end{aligned}$$

Entonces se considera el complejo de cadenas $N[q] = N(K[q])$. Si C es un complejo de cadenas positivo de grupos abelianos, y $f : C \rightarrow C'$ es un morfismo de complejos,

$$\begin{aligned} P(C)_q &= \text{Hom}_{\mathbf{Ch}^+ \mathbf{Ab}}(N[q], C), \\ P(C)(\varphi) &= \text{Hom}_{\mathbf{Ch}^+ \mathbf{Ab}}(NL^{\Delta^{op}}(\varphi_*), id_C) = (NL^{\Delta^{op}}(\varphi_*))^*, \\ P(f)_q &= f_*. \end{aligned}$$

Este funtor se puede generalizar al caso exterior.

Definición 2.4 Si (C, ε) es un complejo de cadenas exterior de grupos abelianos, se define el grupo abeliano simplicial exterior,

$$(E-P)((C, \varepsilon)),$$

al formado por el par $(P(C), \varepsilon_{(E-P)((C, \varepsilon))})$, donde la externología es aquella que admite como base exterior los subgrupos simpliciales de la forma $P(E)$, $E \in \varepsilon$.

Es bien conocido que la homotopía en complejos de cadenas se puede describir en función del complejo de cadenas $N[1]$, anteriormente descrito: Si la categoría abeliana, \mathbf{A} , es la de módulos sobre un anillo Λ , C^1, C^2 son complejos de cadenas de módulos, se tiene el producto tensorial $C^1 \otimes C^2$,

$$\begin{aligned} (C^1 \otimes C^2)_p &= \oplus_{i+j=p} (C_i^1 \otimes C_j^2), \\ d(c_i^1 \otimes c_j^2) &= d^1(c_i^1) \otimes c_j^2 + (-1)^i c_i^1 \otimes d^2(c_j^2), \quad c_i^1 \in C_i^1, c_j^2 \in C_j^2. \end{aligned}$$

Sean e_0, e_1 los generadores de $N[1]_0$, y sea e el generador de $N[1]_1$ con $d(e) = e_1 - e_0$. Una homotopía de complejos entre f^0 y f^1 , homomorfismos de complejos $C \rightarrow C'$, es un morfismo de complejos $D :$

$C \otimes N[1] \rightarrow C'$ con $D(e_i \otimes c) = f^i(c)$. Si existe tal homotopía, se dice que f^0 es homótopo a f^1 . En realidad, las dos nociones de homotopía existentes coinciden (véase [9]). Para módulos simpliciales K^1 , K^2 se define $K^1 \times K^2$ como

$$(K^1 \times K^2)_q = K_q^1 \otimes K_q^2,$$

$$(K^1 \times K^2)(\varphi) = K^1(\varphi) \times K^2(\varphi).$$

Se comprueba que, si M es un módulo simplicial y K es un conjunto simplicial finito, entonces $M \otimes L^{\Delta^{op}}(K) = M \times L^{\Delta^{op}}(K)$. El functor N preserva la homotopía.

Si $f : (C, \varepsilon) \rightarrow (C', \varepsilon')$ un morfismo en $\mathbf{E-Ch}^+ \mathbf{Ab}$ se induce otro en $\mathbf{E-Ab}^{\Delta^{op}}$, $(E-P)(f) = P(f)$.

Nótese que si $E \in \varepsilon'$, $P(f)(P(f^{-1}(E))) \subset P(E)$, por lo que, efectivamente, es exterior. Se obtiene de aquí un functor $E-P : \mathbf{E-Ch}^+ \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{E-Ab}^{\Delta^{op}}$.

El Teorema de Dold-Puppe [11] asegura que existen isomorfismos naturales $NP \cong id$, $id \cong PN$, haciendo que $\mathbf{Ch}^+ \mathbf{Ab}$ y $\mathbf{Ab}^{\Delta^{op}}$ sean equivalentes. Ocurre también esto con los funtores $E-N$ y $E-P$, por lo tanto:

Teorema 2.5 *Las categorías $\mathbf{E-Ch}^+ \mathbf{Ab}$, $\mathbf{E-Ab}^{\Delta^{op}}$ son equivalentes.*

Definición 2.6 Se define el functor $E-K : \mathbf{E-Ab}^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{E-Ch}^+ \mathbf{Ab}$ que a cada grupo abeliano simplicial (G, ε) , le hace corresponder el complejo $K(G)$ junto con la externología generada por la base exterior $\{K(E) : E \in \varepsilon\}$. Para cada morfismo $f : (G, \varepsilon) \rightarrow (G', \varepsilon')$, $(E-K)(f)_n = f_n$, que, de forma natural, es exterior.

Por un lado, se ha definido la categoría de complejos de cadenas exteriores de grupos abelianos, y por otro, se tiene la categoría de complejos de cadenas de grupos abelianos exteriores. Estas categorías están relacionadas por un functor fiel $W'' : \mathbf{E-Ch}^+ \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E-Ab})$. $W''((C, \varepsilon))$ viene definido como $W''((C, \varepsilon))_n = (C_n, \varepsilon_n)$, donde ε_n es la externología en C_n cuya base exterior está formada por los subgrupos $\{E_n : E \in \varepsilon\}$;

Obsérvese que, a pesar de que la categoría de los grupos abelianos exteriores no es abeliana se pueden construir los funtores $K, N : (\mathbf{E-Ab})^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E-Ab})$, sin ningún problema, gracias a su aditividad.

Proposición 2.7 *Los diagramas*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E-Ab}^{\Delta^{op}} & \xrightarrow{E-K} & \mathbf{E-Ch}^+ \mathbf{Ab} \\ W' \downarrow & & \downarrow W'' \\ (\mathbf{E-Ab})^{\Delta^{op}} & \xrightarrow{K} & \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E-Ab}), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{E-Ab}^{\Delta^{op}} & \xrightarrow{E-N} & \mathbf{E-Ch}^+ \mathbf{Ab} \\ W' \downarrow & & \downarrow W'' \\ (\mathbf{E-Ab})^{\Delta^{op}} & \xrightarrow{N} & \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E-Ab}), \end{array}$$

son conmutativos.

3 El anillo de las matrices localmente finitas.

En esta sección se introduce el anillo \mathfrak{R} , de las matrices localmente finitas así como un functor aditivo adjunto a derecha, $\mathcal{P} : \mathbf{E-Ab} \rightarrow \mathfrak{R}\text{-Mod}$, de los grupos abelianos exteriores a los \mathfrak{R} -módulos a derecha, que dará lugar a una gran cantidad de relaciones y propiedades útiles para la homología. Se considera \mathbb{N} , el conjunto exterior cuya externología es la de los complementos de sus subconjuntos finitos. Si $\mathbb{N}(k) = \{i \in \mathbb{N} : i \geq k\}$, entonces $\{\mathbb{N}(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una base exterior. Sea el grupo abeliano exterior $(E-L)(\mathbb{N})$, es decir, $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}$ con la externología con base exterior $\{\bigoplus_{k=i}^{\infty} \mathbb{Z}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Denotando por e_i la sucesión de enteros $(0, 0, \dots, 0, 1^i, 0, 0, \dots)$ entonces $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ genera, claramente, a $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}$. Por simplificar, se denotará a este grupo abeliano exterior por \mathfrak{J} .

Dar un homomorfismo exterior, $\alpha : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}$, es lo mismo que dar las imágenes $\{\alpha(e_i)\}_{i=0}^{\infty}$. Cada $\alpha(e_i)$ es una combinación lineal finita de elementos $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$, y por otro lado, como α es exterior, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(\oplus_{i=l}^{\infty} \mathbb{Z}) \subset \oplus_{i=k}^{\infty} \mathbb{Z}$. De esta manera, α se puede identificar con una matriz infinita de orden $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con coeficientes enteros tal que cada columna y cada fila tiene un número finito de enteros no nulos. Este tipo de matriz se denomina *localmente finita* sobre \mathbb{Z} . Si $\alpha(e_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_k^i e_i$, con $k = 0, 1, \dots$, entonces se interpreta como

$$A_{\alpha} = (\alpha_k^i).$$

El conjunto de las matrices localmente finitas sobre \mathbb{Z} se denota como $lf(\mathbb{Z})$. En este conjunto se puede definir sin ningún problema la suma y producto matriciales dotándolo de estructura de anillo con unidad. Por otra parte se considera $Hom_{\mathbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ definiéndose $(\alpha + \beta)(k) = \alpha(k) + \beta(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces $Hom_{\mathbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ con la suma y la composición tiene estructura de anillo con unidad. Además,

Proposición 3.1 $Hom_{\mathbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ y $lf(\mathbb{Z})$ son anillos isomorfos.

Se llamará \mathfrak{R} al anillo $Hom_{\mathbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ o bien $lf(\mathbb{Z})$, y $\mathfrak{R-Mod}$ a la categoría de \mathfrak{R} -módulos por la derecha.

Proposición 3.2 $Hom_{\mathbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, -)$ es un funtor de $\mathbf{E-Ab}$ a $\mathfrak{R-Mod}$.

Se denotará por \mathcal{P} al funtor $Hom_{\mathbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, -)$ y se denominará *funtor de Brown*. El funtor \mathcal{P} no es ni fiel ni pleno. Sin embargo se tiene una propiedad interesante.

Proposición 3.3 Existe un isomorfismo natural de \mathfrak{R} -módulos,

$$Hom_{\mathbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, G) \cong Hom_{\mathfrak{R-Mod}}(\mathcal{P}(\mathfrak{Z}), \mathcal{P}(G)),$$

cuando G recorre los grupos abelianos exteriores.

Obsérvese que el resultado no sólo dice que es biyección natural, sino que, además dice que es isomorfismo natural de \mathfrak{R} -módulos.

Proposición 3.4 Existe un funtor adjunto a izquierda de \mathcal{P} ,

$$V : \mathfrak{R-Mod} \rightarrow \mathbf{E-Ab}.$$

Se deduce inmediatamente que $V(\mathfrak{R}) \cong \mathfrak{Z}$, puesto que para cada grupo abeliano exterior G ,

$$Hom_{\mathbf{E-Ab}}(V(\mathfrak{R}), G) \cong Hom_{\mathfrak{R-Mod}}(\mathfrak{R}, \mathcal{P}(G)) \cong \mathcal{P}(G) = Hom_{\mathbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}, G).$$

Además, se tiene

Proposición 3.5 $\mathcal{P} : \mathbf{E-Ab} \rightarrow \mathfrak{R-Mod}$ es un funtor aditivo.

Existe de forma natural una adjunción,

$$(\mathfrak{R-Mod})^{\Delta^{op}} \begin{matrix} \xrightarrow{V^{\Delta^{op}}} \\ \xleftarrow{\mathcal{P}^{\Delta^{op}}} \end{matrix} (\mathbf{E-Ab})^{\Delta^{op}}.$$

Además, como \mathcal{P} preserva los límites al ser adjunto a derecha, entonces $\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(X^K) = \mathcal{P}^{\Delta^{op}}(X)^K$, para X grupo abeliano exterior simplicial y K conjunto simplicial.

Notación: Dado $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un funtor entre categorías punteadas, tal que preserva el objeto cero, se induce un funtor entre las respectivas categorías de complejos de cadenas, $Ch(F) : \mathbf{ChC} \rightarrow \mathbf{ChD}$,

$$\begin{aligned} Ch(F)(X)_n &= F(X_n), & d_n^{Ch(F)(X)} &= F(d_n^X), \\ Ch(F)(f)_n &= F(f_n). \end{aligned}$$

Proposición 3.6 *Existe una adjunción,*

$$\mathbf{Ch}^+(\mathbf{E}\text{-Ab}) \begin{array}{c} \xrightarrow{Ch^+(\mathcal{P})} \\ \xleftarrow{Ch^+(V)} \end{array} \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-Mod}),$$

$$Ch^+(V) \dashv Ch^+(\mathcal{P}).$$

Para finalizar esta sección, se dan las relaciones de este functor \mathcal{P} con los funtores N y K mediante diagramas conmutativos de funtores.

Proposición 3.7 *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{E}\text{-Ab})^{\Delta^{\text{op}}} & \xrightarrow{N} & \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E}\text{-Ab}) \\ \mathcal{P}^{\Delta^{\text{op}}} \downarrow & & \downarrow Ch^+(\mathcal{P}) \\ (\mathfrak{R}\text{-Mod})^{\Delta^{\text{op}}} & \xrightarrow{N} & \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-Mod}). \end{array}$$

Análogamente, existe otro diagrama conmutativo sustituyendo N por K .

4 Homologías en la categoría de los espacios exteriores.

En esta sección se crean invariantes de tipo homológico siguiendo la línea de los modelos simpliciales creados y aprovechando todas las propiedades vistas. En primer lugar se hace un estudio de la homología que surge cuando existe la acción del monoide $M = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, viéndose que coincide con la homología singular clásica de un determinado espacio de funciones. Este hecho hace que tenga propiedades tales como la existencia de una sucesión exacta larga de homología, la invarianza por homotopía exterior y un teorema de Hurewicz en el que estarán involucrados los grupos de homotopía de tipo Brown [21].

En la otra homología intervendrá el mencionado anillo de las matrices localmente finitas. Entre sus propiedades más destacadas están la invarianza por homotopía exterior, un teorema de tipo escisivo, la aditividad finita y un algoritmo de cálculo para gCW complejos.

4.1 M -homología

Definición 4.1 Sea X un espacio exterior. Un M - n -símplice singular exterior es una aplicación exterior $u : \mathbb{N} \bar{\times} \Delta_n \rightarrow X$. La i -cara de u es el $(n-1)$ -símplice singular exterior $u(id_{\mathbb{N}} \bar{\times} \tilde{\delta}_i)$, donde $\tilde{\delta}_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ es la inducida por $\delta_i : [n-1] \rightarrow [n]$, $0 \leq i \leq n$.

Si X es un espacio exterior se construye un complejo de cadenas de grupos abelianos con la acción del monoide M según la composición de funtores:

$$\mathbf{E} \xrightarrow{Sing_e} (\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\text{op}}})^{\Delta^{\text{op}}} \xrightarrow{(L^{\mathbf{M}^{\text{op}}})^{\Delta^{\text{op}}}} (\mathbf{Ab}^{\mathbf{M}^{\text{op}}})^{\Delta^{\text{op}}} \xrightarrow{K} \mathbf{Ch}^+(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M}^{\text{op}}}).$$

Nótese que M es una categoría pequeña y \mathbf{Ab} es abeliana, por lo que $\mathbf{Ab}^{\mathbf{M}^{\text{op}}}$ es una categoría abeliana. Así, se tiene una equivalencia de categorías: $(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M}^{\text{op}}})^{\Delta^{\text{op}}} \simeq \mathbf{Ch}^+(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M}^{\text{op}}})$, mediante los funtores N y P . La composición de todos estos funtores $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Ch}^+(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M}^{\text{op}}})$ se denominará por C^M , *complejo de cadenas de M -grupos abelianos*. Explícitamente, si X es un espacio exterior y f es una aplicación exterior, entonces

$$\begin{aligned} C^M(X)_n &= L(Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N} \bar{\times} \Delta_n, X)), \\ d_n^{C^M(X)} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i L((id_{\mathbb{N}} \bar{\times} \tilde{\delta}_i)^*), \\ C^M(f)_n &= L(f_*). \end{aligned}$$

Definición 4.2 Una *pareja exterior*, (X, A) , consiste en un espacio exterior X y un subespacio exterior $A \subset X$.

Como $C^M(A)$ es un subcomplejo de $C^M(X)$ se puede considerar el complejo cociente $C^M(X)/C^M(A)$, llamado *complejo de cadenas de M -grupos de X relativo a A* , y denotado por $C^M(X, A)$. Un morfismo de parejas exteriores $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ consiste en un par de aplicaciones exteriores, (f, g) , $f : X \rightarrow Y$, $g : A \rightarrow B$ haciendo conmutativo a

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

donde i, j son las inclusiones canónicas respectivas. Nótese que $g = f|_A$, por lo que, de hecho, consiste en dar una aplicación exterior $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$. Se induce de forma natural un morfismo de complejos $\overline{C^M(f)} = C^M(f, g) : C^M(X, A) \rightarrow C^M(Y, B)$ dado por la inducida en los cocientes de $C^M(f) : C^M(X) \rightarrow C^M(Y)$.

Definición 4.3 Dado (X, A) una pareja exterior se define su *n - M -grupo de homología* como el del complejo de M -grupos $C^M(X, A)$.

Si se denota por H_n^M entonces $H_n^M(X, A) = H_n(C^M(X, A))$. Esta construcción da lugar, claramente, a un funtor para cada n : $H_n^M : \mathbf{E}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}^{M^{\text{op}}}$. Para cada morfismo de parejas, f , se considera $H_n^M(f) = H_n(\overline{C^M(f)})$, comprobándose que conserva tanto la composición como la identidad. Aquí, $\mathbf{E}^{(2)}$ denota la categoría de parejas exteriores.

Si (X, A) es una pareja exterior entonces $(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}})$ es una pareja de espacios topológicos. Se puede considerar, así, la homología singular clásica, $H_n(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}})$. Cabe preguntarse qué relación existe, para cada $n \geq 0$, entre $H_n^M(X, A)$ y $H_n(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}})$. El siguiente resultado da una respuesta a esta cuestión:

Teorema 4.4 *Existe un isomorfismo natural,*

$$H_n^M(X, A) \cong H_n(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}}),$$

donde (X, A) recorre las parejas exteriores.

Si X es un espacio exterior se puede identificar con la pareja (X, \emptyset) , surgiendo la noción de homología exterior de X , $H_n^M(X) = H_n^M(X, \emptyset)$. Así, también toda aplicación exterior $f : X \rightarrow Y$ se puede considerar como (f, \emptyset) pudiéndose definir su homología exterior. Uniendo lo anterior se tiene un isomorfismo natural $H_n^M(X) \cong H_n(X^{\mathbb{N}})$. Otra propiedad interesante de esta homología es la existencia de una sucesión exacta larga asociada a cada pareja exterior (X, A) . Si (X, A) es una pareja exterior, entonces existe una clara sucesión exacta corta de complejos de M -grupos abelianos,

$$0 \longrightarrow C^M(A) \xrightarrow{i} C^M(X) \xrightarrow{j} C^M(X)/C^M(A) \longrightarrow 0,$$

donde i, j denotan la inclusión y proyección canónicas respectivamente. Como consecuencia:

Teorema 4.5 *Para cada pareja exterior (X, A) existe una sucesión exacta larga,*

$$\dots \longrightarrow H_n^M(A) \xrightarrow{i_*} H_n^M(X) \xrightarrow{j_*} H_n^M(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^M(A) \longrightarrow \dots,$$

donde $i_* = H_n^M(i)$, $j_* = H_n^M(j)$ y δ_* es el M -homomorfismo de conexión. Además, esta sucesión es isomorfa a la correspondiente de la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow C(A^{\mathbb{N}}) \longrightarrow C(X^{\mathbb{N}}) \longrightarrow C(X^{\mathbb{N}})/C(A^{\mathbb{N}}) \longrightarrow 0.$$

Para cada pareja exterior (X, A) surge un cilindro, $(X \bar{\times} I, A \bar{\times} I)$ y morfismos de parejas $\delta_0, \delta_1 : (X, A) \rightarrow (X \bar{\times} I, A \bar{\times} I)$, $p : (X \bar{\times} I, A \bar{\times} I) \rightarrow (X, A)$.

Definición 4.6 Sean $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ dos morfismos de parejas exteriores. Se dirá que f es homótopo a g , $f \simeq g$, si existe un morfismo de parejas, $F : (X \bar{\times} I, A \bar{\times} I) \rightarrow (Y, B)$, tal que $F\delta_0 = f$, $F\delta_1 = g$.

Esta relación es de equivalencia y compatible con la composición. Si f, g son morfismos de parejas exteriores y $f \simeq g$ entonces es sencillo establecer que $f^{\mathbb{N}} \simeq g^{\mathbb{N}}$. Por otro lado, en **Top** la homología singular es invariante por homotopía entre morfismos de parejas de espacios. Entonces se tiene un resultado análogo para exteriores, es decir, la invarianza por homotopía entre morfismos de parejas exteriores.

Teorema 4.7 Si $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son morfismos de parejas exteriores homótopos entonces se tiene que $H_n^M(f) = H_n^M(g)$.

Como consecuencia, si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es una equivalencia de homotopía exterior entonces $H_n^M(f) : H_n^M(X, A) \rightarrow H_n^M(Y, B)$ es isomorfismo, para cada $n \geq 0$. Aprovechando de nuevo el isomorfismo natural $\pi_n^B((X, a)) \cong \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a)$, existe también un teorema de tipo Hurewicz.

Definición 4.8 Sea X un espacio exterior y $a \in X^{\mathbb{N}}$, $n \geq 1$. Se define el M -homomorfismo de Hurewicz,

$$h_n^M : \pi_n^B(X, a) \rightarrow H_n^M(X),$$

como el que se induce en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_n^B((X, a)) & \xrightarrow{\quad} & H_n^M(X) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a) & \xrightarrow{h_n} & H_n(X^{\mathbb{N}}), \end{array}$$

donde $h_n : \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a) \rightarrow H_n(X^{\mathbb{N}})$ es el homomorfismo de Hurewicz clásico.

Como consecuencia se obtiene un teorema de tipo Hurewicz exterior:

Teorema 4.9 Sea X un espacio exterior tal que

$$\pi_0^B(X) = 0, \quad \pi_k^B((X, a)) = 0, \quad 1 \leq k < n,$$

para algún $a \in X^{\mathbb{N}}$, y por tanto para cualquiera, con $n \geq 2$. Entonces $h_n^M : \pi_n^B(X, a) \rightarrow H_n^M(X)$ es isomorfismo y $h_{n+1}^M : \pi_{n+1}^B(X, a) \rightarrow H_{n+1}^M(X)$ es epimorfismo.

4.2 \mathfrak{R} -homología

Si X es un espacio exterior se construye el complejo positivo de cadenas de \mathfrak{R} -módulos, $C^{\mathfrak{R}}(X)$, según la composición de funtores $C^{\mathfrak{R}} = K\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(E-L)^{\Delta^{op}}W(E-Sing) : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-Mod})$. Explícitamente,

$$\begin{aligned} C^{\mathfrak{R}}(X)_n &= Hom_{\mathbf{E}\text{-Ab}}(\mathfrak{J}, L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X))), \quad n \geq 0, \\ d_n^{C^{\mathfrak{R}}(X)} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i L(\tilde{\delta}_i^*)_* \end{aligned}$$

donde $L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X))$ tiene la externología formada por los subgrupos exteriores de la forma $L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, E))$, E e-abierto en X . Obsérvese también que $d_n^{C^{\mathfrak{R}}(X)}(a)(e_k) = d_n^{C(X)}(a)(e_k)$, para cada $a \in C^{\mathfrak{R}}(X)_n$, $e_k \in \mathfrak{J}$, donde $d_n^{C(X)}$ denota el operador borde singular clásico.

Si (X, A) es una pareja exterior, $C^{\mathfrak{R}}(A)$ es un subcomplejo de \mathfrak{R} -módulos de $C^{\mathfrak{R}}(X)$. Así, se puede definir el complejo de \mathfrak{R} -módulos cociente, $C^{\mathfrak{R}}(X, A) = C^{\mathfrak{R}}(X)/C^{\mathfrak{R}}(A)$.

Definición 4.10 Dada (X, A) una pareja exterior se define su n - \mathfrak{R} -módulo de homología como el del complejo de \mathfrak{R} -módulos, $C^{\mathfrak{R}}(X, A)$. Si se denota por $H_n^{\mathfrak{R}}$ entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(X, A) = H_n(C^{\mathfrak{R}}(X, A))$.

Obviamente esta construcción da lugar a un funtor, para cada $n : H_n^{\mathfrak{R}} : \mathbf{E}^{(2)} \rightarrow \mathfrak{R}\text{-Mod}$. Por otro lado, si $A = \emptyset$, se denota $H_n^{\mathfrak{R}}(X) = H_n^{\mathfrak{R}}(X, \emptyset)$. Asociada a cada pareja exterior, (X, A) existe una sucesión exacta corta de complejos de \mathfrak{R} -módulos,

$$0 \longrightarrow C^{\mathfrak{R}}(A) \xrightarrow{i} C^{\mathfrak{R}}(X) \xrightarrow{j} C^{\mathfrak{R}}(X, A) \longrightarrow 0,$$

donde i, j son la inclusión y proyección canónicos respectivamente. Como consecuencia inmediata:

Teorema 4.11 Si (X, A) es una pareja exterior entonces existe una sucesión exacta larga de homología,

$$\dots \longrightarrow H_n^{\mathfrak{R}}(A) \xrightarrow{i_*} H_n^{\mathfrak{R}}(X) \xrightarrow{j_*} H_n^{\mathfrak{R}}(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(A) \longrightarrow \dots,$$

con $i_* = H_n^{\mathfrak{R}}(i)$, $j_* = H_n^{\mathfrak{R}}(j)$, y δ_* el homomorfismo de conexión.

También se tiene la invarianza homotópica exterior:

Teorema 4.12 Si $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son morfismos de parejas exteriores homótopos entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(f) = H_n^{\mathfrak{R}}(g)$.

Si X es un espacio exterior se puede considerar el complejo de cadenas de grupos abelianos exteriores según la composición de funtores: $D = K(E-L)^{\Delta^{op}} W(E-Sing) : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E-Ab})$. Obsérvese que, según las conmutatividades vistas, $Ch^+(\mathcal{P})D = C^{\mathfrak{R}}$.

Definición 4.13 Sea X un espacio exterior. Se dice que X es *primer contable exterior*, o bien *E-C1*, si admite una base exterior contable $\beta = \{E_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Dado X espacio exterior E-C1 se puede considerar, sin pérdida de generalidad que

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$$

Esta nueva noción se puede trasladar sin problemas a las categorías exteriores definidas.

Un hecho curioso en la categoría de grupos abelianos exteriores es que si $p : G \rightarrow H$ es un homomorfismo exterior sobre entonces p es cociente (sobre y la externología de H es la de aquellos subgrupos $E < H$ tales que $p^{-1}(E) \in \varepsilon_G$) si y sólo si p transforma subgrupos exteriores en subgrupos exteriores. Como consecuencia, si $p : G \rightarrow H$ es cociente entonces lleva cada base exterior de G en una base exterior de H , y si G es E-C1 entonces H también lo es. Además, se puede comprobar que en las categorías exteriores, ser E-C1 es una propiedad hereditaria. Por otro lado, si $f : \mathfrak{Z} \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos abelianos, donde G es grupo abeliano exterior E-C1, con base exterior $\beta = \{E_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces, se tiene que f es exterior si y sólo si existe una sucesión $\{\varphi(i)\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, con $\varphi(i) < \varphi(i+1)$, $i \in \mathbb{N}$ y tal que para cada $l \in \mathbb{N}$ y $k \geq \varphi(l)$ entonces $f(e_k) \in E_l$. De este modo, si C es un grupo abeliano exterior E-C1, C' subgrupo abeliano exterior y C/C' el grupo abeliano exterior cociente, se tiene que

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}(C') \xrightarrow{\mathcal{P}(i)} \mathcal{P}(C) \xrightarrow{\mathcal{P}(p)} \mathcal{P}(C/C') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de \mathfrak{R} -módulos ($i : C' \hookrightarrow C$ y $p : C \rightarrow C/C'$ denotan la inclusión y proyección canónicas, respectivamente). Además

Proposición 4.14 Existe un isomorfismo natural,

$$Ch^+(\mathcal{P})(D(X)/D(A)) \cong C^{\mathfrak{R}}(X, A),$$

donde (X, A) recorre las parejas exteriores E-C1.

Así, para hallar los \mathfrak{R} -módulos de homología de una pareja exterior (X, A) se puede hacer a partir del complejo $Ch^+(\mathcal{P})(D(X)/D(A))$. Teniendo en cuenta todo esto se tiene el teorema de escisión:

Teorema 4.15 *Sea (X, A) una pareja exterior, con X E-C1, y sea U un abierto de X tal que $Cl_X(U) \subset Int_X(A)$. Entonces la inclusión $i : (X-U, A-U) \hookrightarrow (X, A)$ induce isomorfismo en \mathfrak{R} -homología, es decir,*

$$H_n^{\mathfrak{R}}(i) : H_n^{\mathfrak{R}}(X-U, A-U) \rightarrow H_n^{\mathfrak{R}}(X, A)$$

es isomorfismo de \mathfrak{R} -módulos, para cada n .

Otra propiedad interesante de esta homología es la aditividad finita:

Teorema 4.16 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^m$ una familia finita de espacios exteriores. Entonces*

$$H_n^{\mathfrak{R}}(\coprod_{i=1}^m X_i) \cong \oplus_{i=1}^m H_n^{\mathfrak{R}}(X_i), \quad n \geq 0.$$

Analizamos ahora la \mathfrak{R} -homología del espacio exterior \mathbb{N} . Una base exterior está constituida por los abiertos de la forma $\mathbb{N}(k) = \{i \in \mathbb{N} : i \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Así, en $D(\mathbb{N})_n = L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, \mathbb{N}))$ la externología considerada será la que tiene como base exterior $\{L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, \mathbb{N}(i)))\}_{i=0}^{\infty}$. Si se denota por $D(\mathbb{N}) = C(\mathbb{N})$, entonces la base exterior se denota como $\{C(\mathbb{N}(i))\}_{i=0}^{\infty}$.

Teorema 4.17

$$H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) = \begin{cases} \mathfrak{R}, & n = 0 \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Dado (X, τ) un espacio topológico se puede obtener un espacio exterior de dos maneras, una de ellas es considerar como externología la propia topología y otra es considerar el espacio total $\{X\}$. En ambos espacios exteriores la homología $H_n^{\mathfrak{R}}$ viene dada en función de la homología singular usual de X .

Proposición 4.18 *Sea (X, τ) espacio topológico.*

(i) *Si $\varepsilon_X = \{X\}$ entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(X) \cong \prod_{i=0}^{\infty} H_n(X)$;*

(ii) *Si $\varepsilon_X = \tau_X$ entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(X) \cong \oplus_{i=0}^{\infty} H_n(X)$,*

siendo los isomorfismos naturales.

El siguiente objetivo es definir homología reducida. Para ello habrá que restringirse a una categoría especial de espacios exteriores, $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Esta categoría tiene como objetos triángulos conmutativos,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{id} & \mathbb{N} \\ & \searrow i_X & \nearrow r_X \\ & X, & \end{array}$$

que se denotarán por (i_X, X, r_X) . Un morfismo $(i_X, X, r_X) \rightarrow (i_Y, Y, r_Y)$ es una aplicación exterior $f : X \rightarrow Y$ tal que $f i_X = i_Y$, $r_Y f = r_X$.

Nótese que esta categoría es una subcategoría de $\mathbf{E}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, espacios exteriores bajo y sobre \mathbb{N} . También, se observa que $H_n^{\mathfrak{R}}(r_X)H_n^{\mathfrak{R}}(i_X) = H_n^{\mathfrak{R}}(r_X i_X) = id_{H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})}$ por lo que $(r_X)_* = H_n^{\mathfrak{R}}(r_X)$ es epimorfismo y $(i_X)_* = H_n^{\mathfrak{R}}(i_X)$ es monomorfismo.

Definición 4.19 *Sea (i_X, X, r_X) un objeto de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Se define*

$$\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) = \ker(H_n^{\mathfrak{R}}(X) \xrightarrow{(r_X)_*} H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})).$$

Por la propiedad del núcleo, dada $f : (i_X, X, r_X) \rightarrow (i_Y, Y, r_Y)$, se induce un homomorfismo $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(f) : \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) \rightarrow \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(Y)$. En el caso que $n > 0$, entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) = 0$, por lo que $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) = H_n^{\mathfrak{R}}(X)$.

Si (X, A) es una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathfrak{N}}$, esto es, la inclusión $i : A \rightarrow X$ es un morfismo de dicha categoría, se define $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X, A) = H_n^{\mathfrak{R}}(X, A)$. Si $f : X \rightarrow Y$ es exterior, en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathfrak{N}}$, con $f(A) \subset B$ se define $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(f) = H_n^{\mathfrak{R}}(f)$.

Teorema 4.20 *Sea (X, A) una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathfrak{N}}$. Existen morfismos i_* , j_* y δ_* tales que la siguiente sucesión es exacta larga:*

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X, A) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_{n-1}^{\mathfrak{R}}(A) \longrightarrow \dots$$

También se da la invarianza homotópica:

Teorema 4.21 *Sean $f, g : (i_X, X, r_X) \rightarrow (i_Y, Y, r_Y)$ homótopas exteriormente. Entonces $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(f) = \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(g)$.*

Es de destacar una relación natural entre la homología $H_*^{\mathfrak{R}}$ y su reducida, $\tilde{H}_*^{\mathfrak{R}}$. Se observa que existe una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) \longrightarrow H_n^{\mathfrak{R}}(X) \longrightarrow H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) \longrightarrow 0,$$

que escinde, así $H_n^{\mathfrak{R}}(X) \cong \tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(X) \oplus H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})$, $n \geq 0$.

Analizamos, a continuación, un algoritmo de cálculo de la \mathfrak{R} -homología para ciertos gCW complejos. Para ello se comienza viendo homología en celdas y esferas. Si S^n es la n -esfera, se denota por $\mathfrak{S}^n = \mathbb{N} \bar{\times} S^n$. Claramente es un objeto de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathfrak{N}}$ definiendo $i_{\mathfrak{S}^n}(k) = (k, s_0)$, y $r_{\mathfrak{S}^n}(k, x) = k$, donde $s_0 = (0, 0, \dots, 0, -1) \in S^n$. Otro objeto especial es \mathbb{N} , donde $i_{\mathbb{N}} = r_{\mathbb{N}} = id_{\mathbb{N}}$. Evidentemente, se tiene que $\tilde{H}_i^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \bar{\times} \{s_0\} \subset \mathfrak{S}^n$, se considerará a \mathbb{N} como un subespacio exterior de \mathfrak{S}^n . Además $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathfrak{S}^n$ es un morfismo de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathfrak{N}}$. Otro objeto a considerar es $\mathfrak{D}^n = \mathbb{N} \bar{\times} D^n$, $n \geq 0$, donde D^n es el n -disco. Aquí, $i_{\mathfrak{D}^n}(k) = (k, s_0)$ y $r_{\mathfrak{D}^n}(k, x) = k$. Haciendo uso, entre otras propiedades, del teorema de escisión y por argumentos análogos a los hechos en el caso clásico de la homología singular obtenemos:

Proposición 4.22

- (i) $\tilde{H}_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n) \cong \tilde{H}_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$,
- (ii) $\tilde{H}_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^{n+1}) \cong \tilde{H}_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Como consecuencia:

Teorema 4.23

$$\tilde{H}_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} \mathfrak{R}, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}, \quad H_0^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{R}, & n = 0 \\ \mathfrak{R}, & n > 0. \end{cases}$$

Si $n \geq 1$:

$$H_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{D}^n, \mathfrak{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathfrak{R}, & i = n \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

Considerando las esferas S^{n-1} , $n \geq 1$, con topología como externología, así como para los discos, D^n , y teniendo en cuenta el cálculo de la homología singular usual de S^n , entonces,

Teorema 4.24 Si $i > 0$,

$$H_i^{\mathfrak{R}}(S^n) = \begin{cases} \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & i \neq n, \end{cases} \quad H_0^{\mathfrak{R}}(S^n) = \begin{cases} (\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbb{Z}) \oplus (\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbb{Z}), & n = 0 \\ \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & n > 0. \end{cases}$$

Y , si $n \geq 1$:

$$H_i^{\mathfrak{R}}(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

Los gCW complejos son espacios que se crean pegando discos o \mathbb{N} -discos por su borde, proceso que se describe a través de push-outs. Por esto es adecuado estudiar la siguiente situación:

Sean X, X^* espacios exteriores Hausdorff, tal que X^* es $E-C1$ y se obtiene de X a partir de un push-out de la forma

$$\begin{array}{ccc} (\coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_\lambda^{n-1}) \coprod (\coprod_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma^{n-1}) & \xrightarrow{(\coprod_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda) \coprod (\coprod_{\gamma \in \Gamma} g_\gamma)} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{D}_\lambda^n) \coprod (\coprod_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma^n) & \xrightarrow{(\coprod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda) \coprod (\coprod_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma)} & X^*, \end{array}$$

con Λ y Γ finitos. Como la flecha vertical del coproducto de esferas en el coproducto de discos es inyectiva, cerrada y e-cerrada, se tiene que $X \hookrightarrow X^*$ es inyectiva, cerrada y e-cerrada, luego un encaje. Se puede, entonces, suponer sin pérdida de generalidad, que X es un subespacio exterior cerrado de X^* . En este caso se obtiene lo siguiente:

Proposición 4.25

$$H_i^{\mathfrak{R}}(X^*, X) \cong \begin{cases} (\oplus_\lambda \mathfrak{R}) \oplus (\oplus_\gamma (\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbb{Z})), & i = n \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

Estamos en condiciones de dar la homología celular.

Definición 4.26 Se define el *complejo \mathfrak{R} -celular* de X como

$$C_n^{\mathfrak{R}cel}(X) = H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}),$$

con operador frontera la composición

$$H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

donde δ_* es el homomorfismo de conexión y j_{n-1} el inducido por la inclusión.

Para simplificar se denotará por (C, d) . (C, d) es un complejo de cadenas de \mathfrak{R} -módulos. Si k_n, j_n denotan las inducidas en las inclusiones se considera el diagrama

$$H_n^{\mathfrak{R}}(X) \xleftarrow{k_n} H_n^{\mathfrak{R}}(X^n) \xrightarrow{j_n} H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}).$$

Teorema 4.27 Sea X un gCW complejo con un número finito de celdas en cada dimensión. Entonces

- (i) k_n es epimorfismo;
- (ii) j_n es monomorfismo;
- (iii) $im(j_n) = ker(d_n)$, $ker(k_n) = j_n^{-1}(im(d_{n+1}))$.

Corolario 4.28 $\theta_n = (j_n k_n^{-1}) : H_n^{\mathfrak{R}}(X) \rightarrow H_n(C)$ es un isomorfismo de \mathfrak{R} -módulos.

Por tanto, para hallar los grupos de \mathfrak{R} -homología de X basta hallar los grupos de homología del complejo de cadenas de \mathfrak{R} -módulos, C .

5 Aplicaciones: Homologías tubulares.

Otros importantes invariantes de naturaleza homológica para los espacios exteriores son estudiados en esta sección: la homología tubular y la tubular cerrada. Se ven relaciones entre éstas y la homología singular clásica, así como que, para CW complejos localmente finitos y con un número contable de celdas en cada dimensión, K , su homología localmente finita coincide con la homología tubular cerrada de cierta estructura de gCW complejo para K , con lo cual, y como consecuencia inmediata, se podrá dar una relación de la homología reducida de Steenrod de un espacio métrico-compacto, X , con la homología tubular cerrada asociada a su complejo fundamental de Lefschetz.

5.1 Homología tubular.

Se considera la categoría $\mathbf{Ch}_{\text{ai}}\mathbf{Ab}$, de complejos de cadenas acotados inferiormente de grupos abelianos.

Definición 5.1 Dado X un objeto de $\mathbf{Ch}_{\text{ai}}\mathbf{Ab}$, se define su *cocilindro*, X^I , como,

$$(X^I)_n = X_n \oplus X_{n+1} \oplus X_n, \\ d_n^{X^I}(x, y, z) = (d_n^X(x), -d_{n+1}^X(y) + x - z, d_n^X(z)).$$

Es sencillo comprobar que es un objeto de $\mathbf{Ch}_{\text{ai}}\mathbf{Ab}$. Tomando $(d_0)_n$ y $(d_1)_n$ las proyecciones en la primera y tercera componente respectivamente, definen homomorfismos de complejos: $d_0, d_1 : X^I \rightarrow X$. Por otro lado, se define $s : X \rightarrow X^I$ como $s_n(x) = (x, 0, x)$, dando un homomorfismo de complejos. Entonces se tiene un diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(id, id)} & X \times X \\ & \searrow s & \nearrow (d_0, d_1) \\ & & X^I, \end{array}$$

con (d_0, d_1) fibración y s equivalencia débil en $\mathbf{Ch}_{\text{ai}}\mathbf{Ab}$, por lo que es un objeto cocilindro de X , en el sentido de categoría de modelos de Quillen (véase [35] y [8]). Dado $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de $\mathbf{Ch}_{\text{ai}}\mathbf{Ab}$ se define su cocilindro, f^I , como $(f^I)_n = f_n \oplus f_{n+1} \oplus f_n$. Surge así, un funtor cocilindro,

$$(\cdot)^I : \mathbf{Ch}_{\text{ai}}\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ch}_{\text{ai}}\mathbf{Ab}.$$

Además, d_0, d_1 y s son transformaciones naturales. El funtor cocilindro transforma equivalencias débiles en equivalencias débiles. Si X es un complejo de cadenas positivo de \mathfrak{A} -módulos, se puede considerar $(sh)^* : X \rightarrow X$, dado como $(sh)_n^*(x) = x \cdot sh$, donde sh es el operador shift definido en [21]. Es sencillo comprobar que es un homomorfismo de complejos de cadenas positivo de grupos abelianos. Teniendo en cuenta la existencia del funtor canónico

$$\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{A}\text{-Mod}) \rightarrow \mathbf{Ch}^+\mathbf{Ab} \subset \mathbf{Ch}_{\text{ai}}\mathbf{Ab},$$

entonces tiene sentido la siguiente definición:

Definición 5.2 Sea X un objeto de $\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{A}\text{-Mod})$. Se define el *complejo de cadenas tubular* de X , $P(X)$, como el obtenido en el siguiente pull-back en $\mathbf{Ch}_{\text{ai}}\mathbf{Ab}$:

$$\begin{array}{ccc} P(X) & \xrightarrow{p_1} & X^I \\ p_2 \downarrow & & \downarrow (d_0, d_1) \\ X & \xrightarrow{(id, (sh)^*)} & X \times X. \end{array}$$

Su descripción explícita es

$$P(X)_n = X_n \oplus X_{n+1},$$

$$d_n^{P(X)}(a, x) = (d_n^X(a), -d_{n+1}^X(x) + a - a \cdot sh).$$

Por otro lado, si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo de $\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-Mod})$, se induce, por la propiedad universal del pull-back, un morfismo de $\mathbf{Ch}_{\mathfrak{ai}}\mathbf{Ab}$, $P(f) : P(X) \rightarrow P(Y)$, cuya expresión es $P(f)_n = f_n \oplus f_{n+1}$. Claramente define un funtor $P : \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-Mod}) \rightarrow \mathbf{Ch}_{\mathfrak{ai}}\mathbf{Ab}$. Para cada pareja exterior (X, A) , $C^{\mathfrak{R}}(X, A)$ es un complejo de cadenas positivo de \mathfrak{R} -módulos. Se denota por $P(X, A)$ a $P(C^{\mathfrak{R}}(X, A))$.

Definición 5.3 Sea (X, A) una pareja exterior, se define el n -grupo de homología tubular de (X, A) , y se denotará por $H_n^P(X, A)$, como el del complejo $P(X, A)$.

De modo natural, si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es un morfismo de parejas exteriores se define $H_n^P(f) : H_n^P(X, A) \rightarrow H_n^P(Y, B)$, dando lugar, para cada $n \in \mathbb{Z}$ un funtor $H_n^P : \mathbf{E}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Teorema 5.4 Sea (X, A) una pareja exterior, entonces existe una sucesión exacta larga en homología tubular,

$$\cdots \longrightarrow H_n^P(A) \xrightarrow{i_*} H_n^P(X) \xrightarrow{j_*} H_n^P(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^P(A) \longrightarrow \cdots,$$

donde i_* , j_* son las inducidas en las correspondientes inclusiones.

También se tiene la invarianza homotópica:

Teorema 5.5 Sean $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ morfismos en $\mathbf{E}^{(2)}$ homótopos exteriormente. Entonces $H_n^P(f) = H_n^P(g)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

La homología tubular verifica también el teorema de escisión:

Teorema 5.6 Sea (X, A) una pareja exterior, con X E-C1, y sea U un abierto de X con $Cl_X(U) \subset Int_X(A)$. Entonces $i : (X-U, A-U) \hookrightarrow (X, A)$, la inclusión, induce isomorfismo en homología tubular, es decir,

$$H_n^P(i) : H_n^P(X-U, A-U) \rightarrow H_n^P(X, A)$$

es isomorfismo de grupos, para cada n .

Y la aditividad finita:

Teorema 5.7 Sea $\{X^i\}_{i=1}^m$ una colección finita de espacios exteriores. Entonces existe un isomorfismo natural,

$$H_n^P(\coprod_{i=1}^m X^i) \cong \oplus_{i=1}^m H_n^P(X^i).$$

Recordamos ahora la descripción del funtor derivado del funtor límite inverso.

Definición 5.8 Sea

$$G_0 \xleftarrow{p_0} G_1 \xleftarrow{p_1} G_2 \xleftarrow{p_2} G_3 \xleftarrow{\quad} \cdots$$

un sistema inverso de grupos abelianos. Se considera el homomorfismo de grupos $d : \prod_{i=0}^{\infty} G_i \rightarrow \prod_{i=0}^{\infty} G_i$ dado por $d(g_0, g_1, g_2, \dots) = (g_0 - p_0(g_1), g_1 - p_1(g_2), g_2 - p_2(g_3), \dots)$. Entonces el límite inverso es $\lim \{G_i, p_i\} = \ker(d)$, y el límite derivado, $\lim^1 \{G_i, p_i\} = \text{coker}(d)$.

Por simplificar notación y siempre que no haya lugar a confusión, se omiten los homomorfismos de transición, p_i . De forma canónica se definen \lim y \lim^1 para morfismos de sistemas inversos de grupos abelianos. Dos importantes propiedades concernientes al funtor \lim^1 son las siguientes:

(i) Si cada $p_i : G_{i+1} \rightarrow G_i$ es un epimorfismo, entonces $\lim^1 \{G_i\} = 0$;

(ii) Los límites inversos y derivados de una sucesión exacta corta de sistemas inversos de grupos abelianos,

$$0 \longrightarrow \{G_i\} \longrightarrow \{H_i\} \longrightarrow \{K_i\} \longrightarrow 0,$$

están relacionados por una sucesión exacta larga de grupos abelianos,

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \lim \{G_i\} \longrightarrow \lim \{H_i\} \longrightarrow \lim \{K_i\} \\ \longrightarrow \lim^1 \{G_i\} \longrightarrow \lim^1 \{H_i\} \longrightarrow \lim^1 \{K_i\} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Supóngase X un espacio exterior E-C1, y

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$$

una base exterior. Sea $i_k : E_{k+1} \hookrightarrow E_k$ la inclusión canónica correspondiente y dado $q \in \mathbb{Z}$, $p_k : H_q(E_{k+1}) \rightarrow H_q(E_k)$ su inducida en los grupos de homología singular. Entonces se tiene, para cada q , un sistema inverso de grupos abelianos,

$$H_q(E_0) \xleftarrow{p_0} H_q(E_1) \xleftarrow{p_1} H_q(E_2) \xleftarrow{p_2} H_q(E_3) \xleftarrow{\dots} \dots$$

Teorema 5.9 *Existe, para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,*

$$0 \longrightarrow \lim^1 \{H_{q+1}(E_i)\} \longrightarrow H_q^P(X) \longrightarrow \lim \{H_q(E_i)\} \longrightarrow 0.$$

El siguiente resultado es la versión del teorema anterior para el caso no absoluto:

Teorema 5.10 *Sea (X, A) una pareja exterior, X E-C1, y*

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$$

una base exterior de X . Entonces, si se denota por $E'_i = E_i \cap A$, existe, para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow \lim^1 \{H_{q+1}(E_i, E'_i)\} \longrightarrow H_q^P(X, A) \longrightarrow \lim \{H_q(E_i, E'_i)\} \longrightarrow 0.$$

La \mathfrak{R} -homología y la homología tubular están relacionadas mediante una sucesión exacta larga.

Teorema 5.11 *Sea X un espacio exterior. Existe una sucesión exacta larga de la forma:*

$$\dots \longrightarrow H_{q+1}^{\mathfrak{R}}(X) \longrightarrow H_q^P(X) \longrightarrow H_q^{\mathfrak{R}}(X) \longrightarrow H_q^{\mathfrak{R}}(X) \longrightarrow \dots$$

Se tiene también el resultado para el caso relativo.

El teorema 5.9 anterior es útil para el cálculo de homología tubular, en concreto se puede calcular sin problemas la homología tubular del espacio exterior \mathbb{N} . Claramente, $\{\mathbb{N}(i)\}_{i=0}^{\infty}$ es una base exterior que está en las condiciones de dicho teorema.

Teorema 5.12

$$H_q^P(\mathbb{N}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z} / \oplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & q = -1 \\ 0, & q \neq -1. \end{cases}$$

Una propiedad curiosa de la homología tubular surge cuando la externología considerada es la propia topología.

Proposición 5.13 *Sea X un espacio exterior tal que $\varepsilon_X = \tau_X$. Entonces $H_n^P(X) \cong 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Se deduce que, si X es un espacio topológico compacto, entonces $H_n^P(X_e) \cong 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

De forma similar se tiene para el caso relativo, con parejas exteriores compactas.

5.2 Homología tubular cerrada.

Variando un poco el complejo de cadenas tubular de un espacio exterior, se obtiene un subcomplejo suyo, el complejo tubular cerrado, dando lugar a otro importante invariante homológico: la homología tubular cerrada. Se darán, primeramente, unas consideraciones algebraicas antes de dar su definición.

Definición 5.14 *Sea X un complejo de cadenas positivo de grupos abelianos exteriores. El complejo de cadenas tubular cerrado de X , $Q(X)$, es el complejo de cadenas acotado inferiormente de grupos abelianos siguiente:*

$$Q(X)_n = \{(a, x) \in \text{Hom}_{\mathbf{E-Ab}}(\mathfrak{J}, X_n) \oplus \text{Hom}_{\mathbf{E-Ab}}(\mathfrak{J}, X_{n+1}) : a_0 = 0\},$$

$$d_n^{Q(X)}(a, x) = ((d_n^X)_*(a), -(d_{n+1}^X)_*(x) + a - a \cdot sh).$$

Nota: Obsérvese que, $Q(X)_n = \{(a, x) \in P(\text{Ch}^+(\mathcal{P})(X))_n : a_0 = 0\}$, siendo $d_n^{Q(X)}$ la restricción de $d_n^{P(\text{Ch}^+(\mathcal{P})(X))}$ a $Q(X)_n$.

Evidentemente, $Q(X)$ es subcomplejo de $P(X) \equiv P(\text{Ch}^+(\mathcal{P})(X))$, la inclusión $i : Q(X) \hookrightarrow P(X)$ es homomorfismo de complejos de cadenas acotados inferiormente de grupos abelianos. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo de complejos de grupos abelianos exteriores se considera $Q(f) : Q(X) \rightarrow Q(Y)$ dada por $Q(f)_n = ((f_n)_*(a), (f_{n+1})_*(x))$, es decir, $P(f)_n|Q(X)_n$.

Si (X, A) es una pareja de complejos de cadenas positivos de grupos abelianos exteriores se considera $Q(X, A) = Q(X/A) \subset P(X, A)$. De forma natural se define para $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ morfismo de parejas correspondiente, dando lugar a un funtor: $Q : \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E-Ab})^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ch}_{\text{ai}}\mathbf{Ab}$.

Si (X, A) es una pareja de espacios exteriores, se denotará por $Q(X, A)$ al complejo $Q(D(X), D(A)) = Q(D(X)/D(A))$. Aquí $D(X)$ es el complejo singular $C(X)$ de forma que en cada nivel $C(X)_n$, tiene la externología generada por $\{C(E)_n : E \in \varepsilon_X\}$. Si no hay lugar a ambigüedad, a veces se denota $D(X) = C(X)$ y $D(X, A) = C(X, A)$. Se define de forma natural $Q(f) : Q(X, A) \rightarrow Q(Y, B)$ para parejas.

Definición 5.15 *Sea (X, A) una pareja de espacios exteriores. Se define su n -grupo de homología tubular cerrada, $H_n^Q(X, A)$, como el del complejo $Q(X, A)$.*

Si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es un morfismo de parejas de espacios exteriores se define de forma canónica $H_n^Q(f) : H_n^Q(X, A) \rightarrow H_n^Q(Y, B)$, originando un funtor para cada $n \in \mathbb{Z} : H_n^Q : \mathbf{E}^{(2)} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Es sencillo comprobar que si (X, A) es una pareja exterior entonces existe un isomorfismo natural $Q(X, A) \cong Q(X)/Q(A)$. Por consiguiente:

Teorema 5.16 *Sea (X, A) una pareja exterior. Entonces existe una sucesión exacta larga en homología tubular cerrada,*

$$\cdots \longrightarrow H_n^Q(A) \xrightarrow{i_*} H_n^Q(X) \xrightarrow{j_*} H_n^Q(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^Q(A) \longrightarrow \cdots$$

Se da también la invarianza homotópica:

Teorema 5.17 Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones exteriores homótopas. Entonces

$$H_n^Q(f) = H_n^Q(g), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La homología tubular, tubular cerrada y la singular están relacionadas por una sucesión exacta larga:

Teorema 5.18 Sea X un espacio exterior. Existe una sucesión exacta larga,

$$\cdots \longrightarrow H_n^Q(X) \longrightarrow H_n^P(X) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}^Q(X) \longrightarrow \cdots$$

Como consecuencia inmediata si X es un espacio exterior tal que $\varepsilon_X = \tau_X$ entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $H_n^Q(X) \cong H_{n+1}(X)$. En particular, si X es un espacio topológico compacto, $H_n^Q(X_e) \cong H_{n+1}(X)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Existe también la versión para el caso relativo.

También la homología tubular cerrada verifica el teorema de escisión.

Teorema 5.19 Sea (X, A) una pareja exterior, con X E-C1, y sea U un abierto de X con $Cl_X(U) \subset Int_X(A)$. Entonces $i : (X-U, A-U) \hookrightarrow (X, A)$, la inclusión, induce isomorfismo en homología tubular cerrada, es decir,

$$H_n^Q(i) : H_n^Q(X-U, A-U) \rightarrow H_n^Q(X, A)$$

es isomorfismo de grupos, para cada n .

Y la aditividad finita:

Teorema 5.20 Si $\{X^i\}_{i=1}^m$ es una colección de espacios exteriores, entonces

$$H_n^Q(\coprod_{i=1}^m X_i) \cong \oplus_{i=1}^m H_n^Q(X_i).$$

Como en la homología tubular, existe un teorema similar útil para cálculos.

Teorema 5.21 Sea X un espacio exterior E-C1, y sea

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$$

una base exterior. Existe, para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow \lim^1 \{H_{q+1}(X, E_i)\} \longrightarrow H_{q-1}^Q(X) \longrightarrow \lim \{H_q(X, E_i)\} \longrightarrow 0.$$

Para el caso relativo, si (X, A) es una pareja exterior, X E-C1 y $\{E_i\}_{i=0}^\infty$ una base exterior tal que $E_0 = X$ y $E_n \supset E_{n+1}$, para cada n , si se denota por $\tilde{E}_i = A \cup E_i$, entonces existe para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow \lim^1 \{H_{q+1}(X, \tilde{E}_i)\} \longrightarrow H_{q-1}^Q(X, A) \longrightarrow \lim \{H_q(X, \tilde{E}_i)\} \longrightarrow 0.$$

Haciendo uso de esta herramienta se calcula la homología tubular cerrada de \mathbb{N} :

Teorema 5.22

$$H_q^Q(\mathbb{N}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^\infty \mathbb{Z}, & q = -1 \\ 0, & q \neq -1 \end{cases}$$

Así como el siguiente caso:

Proposición 5.23 Sea $\{(X_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección contable de parejas de espacios compactos. Si en los coproductos,

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \quad \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda,$$

se consideran las externologías de los complementos de sus compacto-cerrados, entonces

$$H_n^Q(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} H_{n+1}(X_\lambda, A_\lambda), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

5.3 Homología celular tubular cerrada y homología de Steenrod.

En esta sección se comprueba la importancia de la homología tubular cerrada viéndose una relación directa con la homología de Steenrod de los espacios métrico-compactos. Las homologías tubular y tubular cerrada tienen las propiedades necesarias para repetir los argumentos hechos en los gCW complejos con un número finito de celdas en cada dimensión para la \mathfrak{R} -homología. Únicamente varían los grupos de coeficientes y en unos casos un salto de dimensión. Se introduce ahora, a semejanza de la \mathfrak{R} -homología reducida, la homología tubular cerrada reducida.

Definición 5.24 Sea (i_X, X, r_X) un objeto de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Se define

$$\tilde{H}_n^Q(X) = \ker(H_n^Q(X) \xrightarrow{(r_X)^*} H_n^Q(\mathbb{N})).$$

Dada $f : (i_X, X, r_X) \rightarrow (i_Y, Y, r_Y)$, se induce un homomorfismo de grupos $\tilde{H}_n^Q(f) : \tilde{H}_n^Q(X) \rightarrow \tilde{H}_n^Q(Y)$. Para $n > 0$, entonces $H_n^Q(\mathbb{N}) = 0$, por lo que $\tilde{H}_n^Q(X) = H_n^Q(X)$. Si (X, A) es una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, se define $\tilde{H}_n^Q(X, A) = H_n^Q(X, A)$. Si $f : X \rightarrow Y$ es exterior, en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, con $f(A) \subset B$ se define $\tilde{H}_n^Q(f) = H_n^Q(f)$.

Teorema 5.25 Sea (X, A) una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Entonces existen morfismos i_* , j_* y δ_* tales que la siguiente sucesión es exacta larga:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n^Q(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n^Q(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n^Q(X, A) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_{n-1}^Q(A) \longrightarrow \cdots$$

Se establece la invarianza homotópica:

Teorema 5.26 Sean $f, g : (i_X, X, r_X) \rightarrow (i_Y, Y, r_Y)$ homótopas exteriormente. Entonces $\tilde{H}_n^Q(f) = \tilde{H}_n^Q(g)$, $n \geq 0$.

Haciendo uso, básicamente de la escisión, entre otras propiedades:

Proposición 5.27

- (i) $\tilde{H}_{i+1}^Q(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n) \cong \tilde{H}_i^Q(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$;
- (ii) $\tilde{H}_{i+1}^Q(\mathfrak{S}^{n+1}) \cong \tilde{H}_i^Q(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Obtenemos así, como consecuencia:

Teorema 5.28

$$\tilde{H}_i^Q(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & i = n - 1 \\ 0, & i \neq n - 1, \end{cases} \quad H_{-1}^Q(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} (\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}) \oplus (\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}), & n = 0 \\ \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & n > 0. \end{cases}$$

Si $n \geq 1$:

$$H_i^Q(\mathfrak{D}^n, \mathfrak{S}^{n-1}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & i = n - 1 \\ 0, & i \neq n - 1. \end{cases}$$

Por el cálculo de la homología singular usual de S^n y (D^n, S^{n-1}) :

Si $i > 0$,

$$H_i^Q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n - 1 \\ 0, & i \neq n - 1, \end{cases} \quad H_{-1}^Q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}, & n > 0. \end{cases}$$

Y, si $n \geq 1$:

$$H_i^Q(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n - 1 \\ 0, & i \neq n - 1. \end{cases}$$

Dados X^* y X espacios exteriores como en el resultado 4.25, entonces

$$H_i^Q(X^*, X') \cong (\oplus_{\lambda \in \Lambda} H_i^Q(\mathfrak{D}_\lambda^n, \mathfrak{S}_\lambda^{n-1})) \oplus (\oplus_{\gamma \in \Gamma} H_i^Q(D_\gamma^n, S_\gamma^{n-1})),$$

por lo que

$$H_i^Q(X^*, X) \cong \begin{cases} (\oplus_\lambda (\prod_{i=0}^\infty \mathbb{Z}) \oplus (\oplus_\gamma \mathbb{Z})), & i = n-1 \\ 0, & i \neq n-1. \end{cases}$$

Definición 5.29 Sea X un gCW complejo con un número finito de celdas en cada dimensión. Se define el complejo celular tubular cerrado, $C^{Qcel}(X)$, como

$$C_n^{Qcel}(X) = H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}),$$

con operador borde, $d_n^{C^{Qcel}(X)}$, la composición

$$H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-2}^Q(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-2}^Q(X^{n-1}, X^{n-2}).$$

Entonces el n-grupo de homología de dicho complejo es isomorfo al grupo de homología tubular cerrada de X de dimensión n-1. Supóngase ahora un CW complejo, X , localmente finito y con un número contable de celdas en cada dimensión. Se considera en cada objeto del diagrama push-out en **Top** la externología de los complementos de sus compacto-cerrados,

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\lambda \in A_n} S_\lambda^{n-1} & \xrightarrow{\prod_{\lambda \in A_n} g_\lambda^n} & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow i_n \\ \prod_{\lambda \in A_n} D_\lambda^n & \xrightarrow{\prod_{\lambda \in A_n} f_\lambda^n} & X^n. \end{array}$$

Entonces es un push-out en **E**; así, si X tiene dimensión finita, X_e es un gCW complejo (nótese que si hay un número numerable de n-celdas entonces se puede considerar como una sola \mathbb{N} -celda de dimensión n.) Para el caso general, la externología considerada en X será la del colímite. Se denotará este gCW complejo por \hat{X} . Obsérvese que

$$H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}) \cong \prod_{\lambda \in A_n} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \cong \prod_{\lambda \in A_n} H_n(\bar{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n),$$

donde $e_\lambda^n = f_\lambda^n(Int(D_\lambda^n))$, $\bar{e}_\lambda^n = f_\lambda^n(D_\lambda^n)$ y $\dot{e}_\lambda^n = \bar{e}_\lambda^n - e_\lambda^n$.

Como es conocido, la homología celular localmente finita de X , orientado, es la homología del complejo $C^{lfcel}(X)$, definido como $C_n^{lfcel}(X) = \prod_{\lambda \in A_n} H_n(\bar{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n)$, con operador borde

$$d_n^{lfcel}(\{c_\lambda^n\}_{\lambda \in A_n}) = \{(\sum_{\lambda \in A_n} [e_\lambda^n : e_\mu^{n-1}] w_\lambda^n) a_\mu^{n-1}\}_{\mu \in A_{n-1}},$$

donde a_λ^n es el generador del grupo cíclico infinito $H_n(\bar{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n)$, es decir, la orientación de e_λ^n (véase capítulo 4 de [31]), $c_\lambda^n = w_\lambda^n a_\lambda^n$, $w_\lambda^n \in \mathbb{Z}$ y $[e_\lambda^n : e_\mu^{n-1}]$ denota el número de incidencia de la n-celda e_λ^n respecto de la (n-1)-celda e_μ^{n-1} . Nótese que, por el isomorfismo $H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \cong H_n(\bar{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n)$, se puede dar una definición alternativa de la homología celular localmente finita de X : $C_n^{lfcel}(X) = \prod_{\lambda \in A_n} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1})$, siendo el operador borde, $d_n^{lfcel}(\{(c')_\lambda^n\}_{\lambda \in A_n}) = \{(\sum_{\lambda \in A_n} [e_\lambda^n : e_\mu^{n-1}] (w')_\lambda^n) (a')_\mu^{n-1}\}_{\mu \in A_{n-1}}$, con $(a')_\lambda^n$ el generador de $H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1})$, que se corresponde con a_λ^n y $(c')_\lambda^n = (w')_\lambda^n (a')_\lambda^n$, $(w')_\lambda^n \in \mathbb{Z}$. Además, existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{\lambda \in A_n} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \\ d_n^{Qcel} \downarrow & & \downarrow -d_n^{lfcel} \\ H_{n-2}^Q(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{\mu \in A_{n-1}} H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2}). \end{array}$$

Teniendo en cuenta todos estos razonamientos:

Teorema 5.30 Si X es un CW complejo localmente finito, con un número contable de celdas en cada dimensión, entonces

$$H_{n-1}^Q(\hat{X}) \cong H_n(C^{lfccl}(X)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Y, como consecuencia:

Teorema 5.31 Sea X es un espacio métrico compacto. Entonces

$$H_n^Q(\widehat{OFC}(X)) \cong \tilde{H}_n^{st}(X), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Es decir, la homología reducida de Steenrod de X ([37]) es isomorfa a la homología tubular cerrada de $\widehat{OFC}(X)$ donde $OFC(X)$ denota el complejo fundamental de Lefschetz de X ([19]).

Referencias

- [1] M. ARTIN and B. MAZUR. *Etale Homotopy*. Lect. Notes in Math. **100** (1969).
- [2] H.J. BAUES. *Algebraic homotopy*. Cambridge Univ. Press, 1988.
- [3] H.J. BAUES. *Foundations of proper homotopy theory*. Preprint 1992.
- [4] D. BASSENDOSKI. *Whitehead and Hurewicz theorems in proper homotopy theory*. Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 1977.
- [5] M. BEATTIE. About Moore spaces. *Proc. Workshop on Proper Homotopy Theory., Universidad de La Rioja*, 1991.
- [6] F. BORCEUX. *Handbook of Categorical Algebra*. Encyclopedia of Math. and its applications. Cambridge University Press. Vol. **50,51** (1994).
- [7] BOUSFIELD and D.M. KAN. *Homotopy limits, Completions and Localizations*. Lect. Notes in Math. **304** (Springer-Verlag), 1972.
- [8] J. CABEZA. Homologías y cohomologías propias y de la forma. *Universidad de Zaragoza*. Tesis (1995).
- [9] A. DOLD. Homology of symmetric products and other functors of complexes. *Annal of Math*, **68** (1958), 54-80.
- [10] A. DOLD. *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1972.
- [11] A. DOLD and D. PUPPE. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier*. **11** (1961), 201-312.
- [12] D. EDWARDS and H. HASTINGS. *Čech and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology*. Lect. Notes Math. **542** (Springer, 1976).
- [13] S. EILENBERG and S. MAC LANE. On the groups $H(\prod, n)$, I. *Ann. of Math*. **58** (1953), 55-106.
- [14] S. EILENBERG and N. STEENROD. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton Univ. Press, 1952.
- [15] J.I. EXTREMIANA, L.J. HERNÁNDEZ and M.T. RIVAS. Proper CW complexes: A category for the study of proper homotopy. *Collectanea Math*. **39** (1988), 149-179.

- [16] J.I. EXTREMIANA, L.J. HERNÁNDEZ and M.T. RIVAS. An isomorphism theorem of the Hurewicz type in the proper homotopy category. *Fund. Math.* **132** (1989), 195-214.
- [17] F.T. FARREL and J. WAGONER. Infinite matrices in algebraic K-theory and topology. *Comm. Math. Helv.* **47** (1972), 474-501.
- [18] F.T. FARREL and J. WAGONER. Algebraic torsion for infinite simple homotopy types. *Comm. Math. Helv.* **47** (1972), 502-513.
- [19] S.C. FERRY. Remarks on Steenrod homology. *Proc. 1993 Oberwolfach Conf. on the Novikov Conjectures, and Index Theorems and Rigidity*. Vol 2, L.M.S. Lecture Notes **227**, 148-166, Cambridge (1995).
- [20] J. GARCÍA-CALCINES, M. GARCÍA-PINILLOS and L.J. HERNÁNDEZ. A closed simplicial model category for proper homotopy and shape theories. *Bull. Austr. Math. Soc.* **57**, 221-242, (1998).
- [21] J. GARCÍA CALCINES, L.J. HERNÁNDEZ y S. RODRÍGUEZ MACHÍN. Homotopía propia simplicial I. *Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza*.
- [22] M. GARCÍA-PINILLOS. El estudio del infinito a través del espacio exterior. *Univ. de La Rioja*. Tesis (1998).
- [23] A.R. GARZÓN and J.G. MIRANDA. Homotopy theory for truncated weak equivalences of simplicial groups. *Math. Proc. Camb. Ph. Soc.* **121** n1 (1997), 51-74.
- [24] M. GOLASIŃSKI and G. GROMADZKI. The homotopy category of chain complexes is a homotopy category. *Coll. Math.* **XLVII** (1982), 173-178.
- [25] L.J. HERNÁNDEZ. Applications of simplicial M-Sets to proper and strong shape theories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347** (1995), 363-409.
- [26] L.J. HERNÁNDEZ. Functorial and algebraic properties of Brown's \mathcal{P} functor. *Theory and Applications of Categories*. Vol **1** (1995), 1-44.
- [27] P.J. HILTON and U. STAMMBACH. *A Course in Homological Algebra*. Springer GTM 4, New York, (1971).
- [28] B. HUGHES and A. RANICKI. *Ends of complexes*. Cambridge Univ. Press, 1996.
- [29] S. LEFSCHETZ. *Topology*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. New York, 1930.
- [30] S. MAC LANE. *Categories for the Working Mathematician*. (Springer-Verlag, 1971).
- [31] W.S. MASSEY. *Singular homology theory*. GTM 70 Springer (1980).
- [32] C.R.F. MAUNDER. *Algebraic Topology*. Van Nostrand (1970).
- [33] J. MILNOR. On the Steenrod homology theory. *Proc. 1993 Oberwolfach Conf. on the Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity*. Vol 1, L.M.S. Lecture Notes **226**, 79-96, Cambridge (1995).
- [34] J.C. MOORE. *Seminar on algebraic homotopy theory*. Princeton (1956).
- [35] D. QUILLEN. *Homotopical Algebra*. Lect. Notes in Math. **43** (Springer, 1967).
- [36] E. SPANIER. *Algebraic Topology*. Mc. Graw-Hill, 1966.

- [37] N.E. STEENROD. Regular cycles of compact metric spaces. *Ann. of Maths.* **41** (1940), 833-851 .
- [38] R.M. SWITZER. *Algebraic Topology, Homotopy and Homology*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band 212 (1971).
- [39] S. WILLARD. *General Topology*. Addison-Wesley (1970).

About Gevrey Hypoellipticity of pseudodifferential operators associated to the class of Hörmander symbols of Gevrey type

Mohammed Hazi

Department of Mathematics, Ecole Normale Supérieure

16050 - Kouba-Algiers. Algeria

e-mail: mohamedhazi@hotmail.com

Abstract

Treves, F., [15], proved the hypoellipticity of some regular operators. Later, Hörmander, L., [11] Durand, M., [7], and Oleinik, O.A. & Radkevic, E. V., [13], considered independently second order operators which are sum of squares of real vector fields; they gave criteria of hypoellipticity. Derridj, M. & Zuily, C., [5], studied their Gevrey regularity. Moreover, Baouendi, M. S. & Goulaouic, C., [1] and then Derridj, M. & Zuily, C., [6], obtained some results of analyticity and Gevrey regularity for some degenerate elliptic operators. Here, we aim to prove Gevrey hypoellipticity of pseudodifferential operators associated to Hörmander symbols of Gevrey type.

Key words: Gevrey class, hypoellipticity, pseudodifferential operators, symbols of Gevrey.

MSC: 47 G 30.

Notations

In the sequel, we will use the following conventions:

- \mathbb{R}^n is the n-dimensional vector space in which every point x is defined by its n coordinates x_1, x_2, \dots, x_n .
- Ω denote, unless specified otherwise, an open subset of \mathbb{R}^n .
- s is a real greater than or equal to 1.
- Δ is the diagonal of $\Omega \times \Omega$.
- dx stands for the hypervolume element $dx_1 dx_2 \dots dx_n$.
- $x + y$ is the element the coordinates of which are $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$.

- $x \geq 0$ means $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.
- $x \geq y$ means $x_1 \geq y_1, x_2 \geq y_2, \dots, x_n \geq y_n$.
- The order of a system $p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, of integers is $|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$.
- $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ is the space of infinitely differentiable functions on \mathbb{R}^n ; $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ is its topological dual.
- $\mathcal{D}(\Omega)$ is the space of infinitely differentiable functions on \mathbb{R}^n , with compact support in Ω ; $\mathcal{D}'(\Omega)$ is its topological dual.
- \widehat{u} is the Fourier transform of u .
- \overline{U} is the closure of U .
- $[x]$ is the integer part of the real number x .

1 Pseudodifferential operators of class s

To settle the notion of pseudodifferential operators of Gevrey class, we first recall that of Gevrey function then we restore that of symbol of the same class. To the latter, we associate the introduction of above mentioned operators.

Definition 1 *A real function f in $C^\infty(\Omega)$ is said of Gevrey class with order s if, for any compact subset $K \subset \Omega$*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \|D^\alpha f\| \leq C^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s. \quad (1)$$

In (1), the choice of the norm does not matter (see [2,9,10]). However, we will use the sup-norm in this paper.

Definition 2 *Let $m \in \mathbb{R}$, ρ and δ two real numbers such that $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. We say that a real function $a = a(z, x)$ in $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, is a symbol (or amplitude) of Gevrey type with class s and of type (m, ρ, δ) on Ω if and only if: for any compact subset $K \subset \Omega$, there exist C_0, C_1, R positive constants such that*

$$\sup_{x \in K} |D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_0 C_1^{|\alpha+\beta|} (|\alpha|!)^s (|\beta|!)^s (1 + |\xi|^2)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \quad (2)$$

for any $\xi \in \mathbb{R}^n$ with, $|\xi| \geq R$, $|\alpha|^s$, α and $\beta \in \mathbb{N}^n$.

We denote by ${}_{\rho, \delta} S_{G^s}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ the set of such symbols.

To every symbol a of ${}_{\rho, \delta} S_{G^s}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, we associate an operator $a(x, D) = A$ in the following manner:

For any $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ and any $x \in \Omega$, we set

$$(A\varphi)(x) = a(x, D)\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x, \xi) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi,$$

or, equivalently, by making explicit the Fourier transform

$$(A\varphi)(x) = a(x, D)\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) \varphi(y) dy d\xi.$$

We write $A = Opa$ and say that A belongs to $Op_{\rho, \delta} S_{G^s}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

The distribution-kernel T of $a(x, D)$ is defined by

$$T(x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) d\xi.$$

The symbol of the pseudodifferential operator is often given by formal series, called asymptotic expansion (see, for instance, [2], [12]):

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, \xi), \quad a_j(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n), \quad j = 0, 1, \dots \quad (3)$$

In this case, we assume the following hypothesis:

For any compact subset K de Ω , there exist three positive constants C_0, C_1, R such that

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_j(x, \xi)| \leq C_0 C_1^{|\alpha+\beta|} (|\beta| + j)!^s (1 + |\xi|)^{m-\delta|\alpha|+\delta j}, \quad |\xi| \geq R(j + |\alpha|)^s, \quad (4)$$

then, we can construct the genuine Gevrey symbol of the formal series (3) as in the analytical case by F. Treves.

Afterwards, we make use of a sequence of functions $\varphi_j(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j = 0, 1, \dots$, satisfying

$$0 \leq \varphi_j(\xi) \leq 1, \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi_j(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\xi| < 2L \max(j^s, 1), \\ 1, & \text{if } |\xi| > 2L \max(j^s, 1), \end{cases}$$

$$|D^\alpha \varphi_j| \leq \left(\frac{C}{Lj^{s-1}} \right)^{|\alpha|}, \quad \text{if } |\alpha| \leq 2j,$$

where L is a suitable positive constant.

If we take $L > 2^{s-1}R$, in which R is the number given in (4), and set:

$$a(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\xi) a_j(x, \xi),$$

then $a \in {}_{\rho, \delta} S_{G^s}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. The proof is similar to that given by Treves in [16].

Definition 3 A pseudodifferential operator A of $Op_{\rho,\delta}S_{G^s}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ is Gevrey-pseudolocal with class s , if for any $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, Au is Gevrey type of class s in any open set where u is so.

That is:

$$\text{Gevrey} - \text{Suppsing}Au \subset \text{Gevrey} - \text{Suppsing}u.$$

In this context, we prove

Theorem 4 Let a be a symbol of ${}_{\rho,\delta}S_{G^s}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, $0 < \delta < \rho < 1$, $m \leq \rho - \delta$ satisfying the constrains (2) for multi-indices α et $\beta \in \mathbb{N}^n$ such that

$$|\alpha|, |\beta| \leq [n/2] + 1.$$

Then,

1. The kernel T of $a(x, D)$ is a Gevrey function of class s on $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$.
2. $a(x, D)$ is Gevrey-pseudolocal of class s .

Proof. We have

$$T(x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) d\xi.$$

To elucidate (1), one must prove that $(x - y)^\alpha T = F$ is a Gevrey function of class s on $\Omega \times \Omega$. First, let us observe that

$$F(x, y) = \int e^{i(x-y)\xi} (-D_\xi)^\alpha a(x, \xi) d\xi.$$

Then

$$D_x^\beta F(x, y) = \int D_x^\beta (e^{i(x-y)\xi} (-D_\xi)^\alpha a(x, \xi)) d\xi.$$

Since

$$|D_x^\beta (e^{i(x-y)\xi} (-D_\xi)^\alpha a(x, \xi))| \leq CC_0 C_1^{|\alpha+\beta|} (|\alpha|!)^s (1 + |\xi|^2)^{m-\rho|\alpha|+2\delta|\beta|},$$

where C_0 and C_1 are the constants involved in (2) whereas C is positive constant not depending on α and β , it is allowable to get

$$|D_x^\beta F(x, y)| = C' C_0 C_1^{|\alpha+\beta|} (|\alpha|!)^s,$$

which means that F satisfies (1). Then, it is of Gevrey type of class s with respect to x . Of course, the same argument shows that F is of Gevrey type of class s with respect to y ; the first claim of the theorem follows.

Regarding the second one, we prove that

$$\forall u \in \mathcal{E}'(\Omega), \text{Gevrey} - \text{Suppsing } Tu \subset \text{Gevrey} - \text{Suppsing } u.$$

To this end, consider an open set $U \subset \Omega$ and $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ such that $\varphi \equiv 1$ on a neighbourhood of \bar{U} . Let $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ of Gevrey type of class s on U . We have:

$$Tu = T(\varphi u) + T((1 - \varphi)u).$$

Clearly, φu is Gevrey type of class s on U . Since T is separately regular, it follows that $T(\varphi u) \in \mathcal{E}(\Omega)$.

Moreover, it holds

$$T((1 - \varphi)u)(x) = \int T(x, y)(1 - \varphi(y)) u(y) dy$$

For $x \in U$ and $y \in \text{Supp}(1 - \varphi)$ (the complementary of some neighbourhood of the diagonal Δ where T is a Gevrey function of class s). Therefore, differentiating and making use of the Lebesgue dominated convergence theorem, we find that $T(1 - \varphi)u$ is of Gevrey type of class s in V , whence the claim.

2 Gevrey-Hypoelliptic operators

The operators, such as elliptic ones, are said to be Gevrey-hypoelliptic. More explicitly (see [12]):

Definition 5 *A linear operator $A : \mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ is said Gevrey-hypoelliptic if, for any distribution u in $\mathcal{E}'(\Omega)$ and any open set $U \subset \Omega$, the restriction u/U of u to U is of Gevrey type of class s whenever the restriction Au/U of Au to U is.*

In other words

Definition 6 *An operator A is said Gevrey-hypoelliptic if it satisfies*

$$\text{Gevrey} - \text{Suppsing } u = \text{Gevrey} - \text{Suppsing } Au. \tag{5}$$

One of the most essential consequences of the construction of a parametrization is described by this

Theorem 7 *If $A \in Op_{\rho, \delta} S_{G^s}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ is an eigen-support, elliptic with $1 > \rho > \delta > 0$, $m \leq \rho - \delta - n(1 + \delta/2)$, then it is Gevrey-hypoelliptic.*

Proof. Let B a two sided parametrization of A in $Op_{\rho,\delta}S_{G^s}^{-m}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Then $u = B(Au)$ (mod. $S_{G^s}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$). The pseudo-local Gevrey property of B yields

$$\text{Gevrey} - \text{Suppsing } B(Au) \subset \text{Gevrey} - \text{Suppsing } Au,$$

that is,

$$\text{Gevrey} - \text{Suppsing } u \subset \text{Gevrey} - \text{Suppsing } Au.$$

The converse inclusion follows from the Gevrey-pseudolocal property of A ; whence (5).

The following theorem extends this property to pseudodifferential operators associated to amplitudes $a \in_{\rho,\delta,\theta} S_{G^s}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, characterised by this

Definition 8 Let ρ , δ and θ be three real such $0 \leq \delta, \theta < \rho \leq 1$. With the notations of definition (1.2), we say that a function $a \in_{\rho,\delta,\theta} S_{G^s}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ if, for any compact subset K in $\Omega \times \Omega$, we have

$$\left| D_{\xi}^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} D_{y}^{\gamma} a(x, \xi) \right| \leq C_0 C_1^{|\alpha+\beta+\theta|} (|\alpha|!)^s (|\beta|!)^s (|\gamma|!)^s (1 + |\xi|^2)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|+\theta|\gamma|}. \quad (6)$$

Such operators A are defined by

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi. \quad (7)$$

We assume they have eigen supports, which allow them, as in the C^{∞} case, to act continuously from $\mathcal{E}(\Omega)$ into itself (see, for instance, [3], [14]). Let us state

Theorem 9 Let A be a pseudodifferential operator as in (7) associated to the symbol $D_y^{\beta} a(x, \xi)$ with

$$1 > \rho > \max(\delta, \theta) > 0, m \leq \rho - \max(\delta, \theta) - n(1 + \max(\delta, \theta)/2). \quad (8)$$

Then its kernel T is a function with class s on $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$. Moreover, for any pair of disjoint compact subsets K, L of Ω and any integer r , there exists an integer k and some positive constants B and C such that, for every multi-index α , we have

$$|D_x^{\alpha} T, \varphi \otimes \psi| \leq C B^{|\alpha+\beta+\theta|} (\alpha!)^s (\beta!)^s \sup_{|\beta| \leq k} \sqrt{\int |D^{\beta} \psi(y)|^2 dy} \sqrt{\int |\varphi(x)|^2 dx}. \quad (9)$$

Proof. It is based upon two lemmas. First, we recall Frieberg's lemma [8]:

Lemma 10 *Let U a bounded open set in \mathbb{R}^n and $N = [n/2] + 1$, then, for any compact subset K of U and any number $h(0 < h < 1)$, such that $K_h \subset U$, there exists a positive constant C such that,*

$$h^N \sup_{x \in K} |u(x)| \leq C \sum_{|\alpha|} h^{|\alpha|} \left(\int_{K_h} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

where $K_h = \{x \in \mathbb{R}^n / \text{dist}(x, K) \leq h\}$ (the set of elements of \mathbb{R}^n the distance of which to K is less than or equal to h).

The second lemma follows from lemma 2.2 by L . Hörmander [11]:

Lemma 11 *Let K be a compact subset of \mathbb{R}^n and h a positive real number, there exists a sequence of functions $(\psi_j)_j$ in $C_0^\infty(K_h)$ such that $\psi_j = 1$ on K and ,*

$$|D^\alpha \psi_j(x)| \leq \left(\frac{A}{h} \right)^{js} (\alpha!)^s, \quad |\alpha| \leq j.$$

where C and A are positive constants independent of j , a and h (in case h is bounded).

Let us resume the proof of our theorem. First, we point out that condition (9) implies that T is of Gevrey class with order s in x on $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$. By transposition and using (9) for the kernel T_{t_A} of the transpose tA , we deduce that T is of Gevrey class with order s in y on $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$. Since, thanks to theorem (8) in [4], T is C^∞ on $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$, we find that T is Gevrey class with order s in (x, y) on $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$. So, this amounts to prove (9). The same argument, up to some constants, as under taken in [3], elucidates this point.

References

- [1] Baouendi, M. S. and Goulaouic, C., Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Ecole Norm., vol 4; 1971.
- [2] Boutet De Monvel, L. and Krée, P. Pseudodifferential operators and Gevrey classes; Ann. Inst. de F., Grenoble, 17.1; 1967, pp. 295 - 323.
- [3] Croc, E., Dermenjian, Y. and Iftimie, V. Une classe d'opérateurs pseudodifférentiels partiellement hypoelliptiques analytiques; J. Math. Pures et App., 57; 1978, pp. 255-274.
- [4] Dermenjian, Y. and Iftimie, V. Une classe d'opérateurs pseudodifférentiels presque hypoelliptiques; Comptes Rendus, t. 279 ; 1974, pp. 507-510.
- [5] Derridj, M. and Zuily, C., Sur la régularité Gevrey des opérateurs de Hörmander, J. Math. Pures et Appl., vol. 52; 1973, pp. 309-336.

- [6] Derridj, M. and Zuily, C., Régularité analytique et Gevrey d'opérateurs elliptiques dégénérés, J. Math. pures et appl., vol. 52; 1973, pp. 65-80.
- [7] Durand, M. Régularité Gevrey d'une classe d'opérateurs hypoelliptiques; J. Math. pures et app., 57; 1978, pp. 323-360.
- [8] Friberg, J. Estimates for partially hypoelliptic differential operators, Communications Séminaire Math. Université de Lund, tome 17; 1963, pp. 1-97.
- [9] Hazi, M. Kernels of pseudodifferential operators associated to Hörmander's symbols of Gevrey type, Arab Gulf J. of Sci. Research, vol 19, No.1; 2001, pp. 52-58.
- [10] Hazi, M. About the continuity of pseudodifferential operators associated to Gevrey symbols. To appear.
- [11] Hormander, L. On the continuity of pseudodifferential operators. Comm. Pure Appl. Math. 24; 1971, pp. 529-535.
- [12] Matsuzawa, T., Journées d'équations aux dérivées partielles, Saint-Jean de Monts, 7 Juin 1982.
- [13] Oleinik, O.A. and Radhevic, E.V., Second order equations with nonnegative characteristic form, Amer. Math. Soc., Providence; 1973.
- [14] Taylor, M. E., Pseudodifferential operators, Princeton University Press, Princeton, New Jersey; 1981.
- [15] Treves, F., An invariant criterion of hypoellipticity, Amer. J. Math., Vol 83; 1961, pp. 645-668.
- [16] Treves, F. An introduction to Pseudodifferential operators and Fourier integral operators. Plenum Press, New-York; 1980.

An Extension of Bilateral Generating Function of Certain Special Function-II

M. C. Mukherjee

Netaji Nagar Vidyamandir

Calcuta-700092. INDIA

Abstract

In this paper an extension of the bilateral generating function involving Jacobi polynomial derived by Chongdar [2] is well presented by group-theoretic method [6]. A nice application of our theorem is also pointed out.

A.M.S. subject classification: 33A65

Key words: Generating functions, Jacobi polynomials, Group theoretic method.

1. Introduction

While extending the general theorem on bilateral generating function for Jacobi polynomial we use the term “Quasi Bilinear Generating Function” [6] for Jacobi polynomial by means of the relation

$$G(x, u, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(n, \beta)}(u) w^n \quad (1)$$

and we prove the existence of a quasi bilinear generating function implies the existence of a more general generating function. In [2], A. K. Chongar proved the following theorem on bilateral generating function involving Jacobi polynomial as introduced by G.K. Goyal [5].

Theorem 1 *If*

$$G(x, u, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) w^n \quad (2)$$

then

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x, y) w^n = (1-w)^k (1-\omega)^{-(1+\alpha+k)} P\left(\frac{x-\omega}{1-\omega}, \frac{wy}{1-\omega}\right). \quad (3)$$

where

$$\sigma_n(x, y) = \sum_{p=0}^n a_p \frac{(p+1)_{n-p}}{(n-p)!} P_n^{(\alpha, k-n+p)}(x) y^p \quad \text{and} \quad \omega = \frac{w}{2}(1+x)$$

Now we can state from the above discussion that the ‘‘Theorem-1’’ of [2] can be extended in the following way:

Theorem 2 *If there exists a generating relation of the form*

$$G(x, u, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(n, \beta)}(u) w^n \quad (4)$$

then

$$\begin{aligned} & (1-wt)^{-(1+\beta+m)} (y+2\omega z)^\beta (y+2\omega z)^{-(1+\alpha+\beta)} y^{\alpha+1} G\left(\frac{xy+2\omega z}{y+2\omega z}, \frac{u+wt}{1-wt}, \frac{wztv}{(1-wt)(y+2\omega z)}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_n \frac{w^{p+q}}{p!q!} (n+1)_q (wzvt)^n (-2y^{-1}z)^q t^p (1+n+\beta+m)_p P_{n+q}^{(\alpha, \beta-q)}(x) P_m^{(n+p, \beta)}(u) \end{aligned} \quad (5)$$

The importance of our theorem is that one can get a large number of bilinear generating relations from (5) by attributing different suitable values to a_n in (4).

Proof of the theorem

Let us consider now the following two linear partial differential operators [3, 4],

$$R_1 = (1-x^2)y^{-1}z \frac{\partial}{\partial x} - z(x-1) \frac{\partial}{\partial y} - (1+x)y^{-1}z^2 \frac{\partial}{\partial z} - (1+\alpha)(1+x)y^{-1}z \quad (6)$$

and

$$R_2 = (1+u)t \frac{\partial}{\partial u} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (1+\beta+m)t \quad (7)$$

such that

$$R_1 \left(P_n^{(\alpha, \beta)}(x) y^\beta z^n \right) = -2(n+1) P_{n+1}^{(\alpha, \beta-1)}(x) y^{\beta-1} z^{n+1} \quad (8)$$

and

$$R_2 \left(P_n^{(n, \beta)}(u) t^n \right) = (1+n+\beta+m) P_m^{(n+1, \beta)}(u) t^{n+1} \quad (9)$$

and also

$$e^{wR_1} f(x, y, z) = \left(\frac{y}{y+2\omega z} \right)^{\alpha+1} f\left(\frac{xy+2\omega z}{y+2\omega z}, \frac{y(y+2\omega z)}{y+2\omega z}, \frac{yz}{y+2\omega z}\right) \quad (10)$$

and

$$e^{wR_2} f(u, t) = (1-wt)^{-(1+\beta+m)} f\left(\frac{u+wt}{1-wt}, \frac{t}{1-wt}\right). \quad (11)$$

Now we consider the following generating relation

$$G(x, u, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(n, \beta)}(u) w^n. \quad (12)$$

Replacing w by $wztv$ and then multiplying both sides by y^β from we get

$$y^\beta(G(x, u, wztv)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(P_n^{(\alpha, \beta)}(x) y^\beta z^n \right) \left(P_m^{(n, \beta)}(u) t^n \right) (wv)^n. \quad (13)$$

Operating e^{wR_1}, e^{wR_2} on both sides of (13), we have

$$e^{wR_1} e^{wR_2} \left[y^\beta(G(x, u, wztv)) \right] = e^{wR_1} e^{wR_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (P_n^{(\alpha, \beta)}(x) y^\beta z^n) (P_m^{(n, \beta)}(u) t^n) (wv)^n \right]. \quad (14)$$

Now the left member of (14) becomes

$$\begin{aligned} & e^{wR_1} e^{wR_2} \left[y^\beta(G(x, u, wztv)) \right] \\ &= e^{wR_1} \left[(-wt)^{-(1+\beta+m)} y^\beta G \left(x, \frac{u+wt}{1-wt}, \frac{wztv}{1-wt} \right) \right] \\ & \quad y^{\alpha+\beta+1} (1-wt)^{-(1+\beta+m)} (y+2wt)^\beta (y+2\omega z)^{-(\alpha+\beta+1)} \\ & \quad G \left(\frac{xy+2\omega z}{y+2\omega z}, \frac{u+wt}{1-wt}, \frac{wyztv}{(1-wt)(y+2\omega z)} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

On the other hand the right member of (14) becomes

$$\begin{aligned} & e^{wR_1} e^{wR_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (P_n^{(\alpha, \beta)}(x) y^\beta z^n) (P_m^{(n, \beta)}(u) t^n) (wv)^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_n \frac{w^{(p+q+n)}}{p!q!} v^n (-2)^q (n+1)_q P_{n+q}^{(\alpha, \beta, -q)}(x) y^{\beta-q} z^{n+q} \\ & \quad (1+n+\beta+m)_p P_m^{(n+p+\beta)}(u) t^{n+p}. \end{aligned} \quad (16)$$

Equating (15) and (16) we get the following

$$\begin{aligned} & (1-wt)^{-(1+\beta+m)} (y+2wz)^\beta (y+2\omega z)^{-(1+\alpha+\beta)} y^{\alpha+1} G \left(\frac{xy+2\omega z}{y+2\omega z}, \frac{u+wt}{1-wt}, \frac{wztv}{(1-wt)(y+2\omega z)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_n \frac{w^{p+q}}{p!q!} (n+1)_q (wzvt)^n (-2y^{-1}z)^q t^p (1+n+\beta+m)_p P_{n+q}^{(\alpha, \beta, -q)}(x) P_m^{(n+p, \beta)}(u) \end{aligned} \quad (17)$$

which is our desired result.

2. Application

Putting $m = 0, y = z = t = 1$ in the above stated result (17), we obtain

$$\begin{aligned} & (1-w)^{-(1+\beta)} (1+2w)^\beta (1+2\omega)^{-(1+\alpha+\beta)} G \left(\frac{x+2\omega}{1+2\omega}, \frac{wv}{(1-w)(1+2\omega)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_n \frac{w^q}{q!} (n+1)_q (wv)^n (-2)^q P_{n+q}^{(\alpha, \beta, -q)}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^p}{p!} (1+n+\beta)_p. \end{aligned} \quad (18)$$

Now, replacing $2w$ by $(-r)$, s by $-v/(2+r)$ and then simplifying we get

$$(1-r)^\beta [1-r(1+x)/2]^{-(1+\alpha+\beta)} G\left(\frac{x-r(1+x)/2}{1-r(1+x)/2}, \frac{sr}{1-r(1+x)/2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sigma_n(x, s)$$

where

$$\sigma_n(x, s) = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} P_n^{(\alpha, \beta-n+q)}(x) s^q$$

which is found derived in [2].

References

- [1] Chakravorty, S. P. and Chatterjea, S. K., 1989: "On extension of a bilateral generating function of Al-Salam-1". *Pure Math. Manuscript* **8**, 117.
- [2] Chongdar, A. K.: "On bilateral generating functions". To appear in *Bull. Cal. Math Soc.*
- [3] Guta Thakurta, B. K., 1986: "Some generating functions of Jacobi polynomial." *Proc. Indian Acad. Sc. (Math. Sc.)* **95(1)**, 531.
- [4] Rainville, E.D., 1960: *Special funstions*. Chelsia Publishing Co., N.Y..
- [5] Goyal, G. K., 1983: *Vijnana Parisad Anusandhan Patrika*. **26**, 263.
- [6] Weisner, L., 1995: "Group-theoretic origin of certain generating function." *Pacific J. Math.* **5**, 1033.

Estudio asintótico de polinomios ortogonales en la tabla de Askey

Chelo Ferreira y Esmeralda Mainar

Depto. de Matemática Aplicada. Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

Resumen

En recientes trabajos se ha señalado que numerosos polinomios ortogonales de la tabla de Askey admiten desarrollos asintóticos en términos de polinomios de Hermite y de Laguerre. A partir de estos desarrollos, se obtuvieron varios límites conocidos y otros no conocidos entre los polinomios de la tabla de Askey. En este trabajo, realizamos un análisis exhaustivo de los tres primeros niveles de la tabla de Askey, completando de este modo el análisis asintótico desarrollado por López y Temme. Por una parte, obtenemos desarrollos asintóticos de los polinomios de Charlier, de Meixner-Pollaczek, de Jacobi, de Meixner y de Krawtchouk en términos de polinomios de Hermite. Por otra parte, obtenemos desarrollos asintóticos de los polinomios de Meixner-Pollaczek, de Jacobi, de Meixner y de Krawtchouk en términos de polinomios de Charlier. Por último, establecemos nuevas demostraciones para los límites conocidos entre polinomios de los tres primeros niveles de la citada tabla y deducimos límites nuevos.

Palabras clave: Desarrollos asintóticos, límites de polinomios, polinomios ortogonales, tabla de Askey, polinomios de Hermite, polinomios de Charlier, polinomios de Meixner, polinomios de Meixner-Pollaczek, polinomios de Krawtchouk, polinomios de Jacobi.

1 Introducción

La tabla de los polinomios de Askey recoge todas las familias conocidas de polinomios ortogonales que pueden definirse en términos de funciones hipergeométricas. En [6] puede encontrarse un estudio completo sobre los polinomios que aparecen en dicha tabla. En esta página Web se resumen, entre otros aspectos, las definiciones, relaciones de ortogonalidad, relaciones de recurrencia, funciones generadoras o ecuaciones diferenciales satisfechas por estos polinomios. Algunas de las fórmulas que se incluyen se pueden encontrar en diferentes referencias bibliográficas.

Se conocen numerosas relaciones entre los polinomios de la tabla de Askey. Éstas vienen dadas en forma de límites cuando se hace variar algún parámetro de los que dependen los polinomios ortogonales hipergeométricos.

Los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (1)$$

juegan un papel muy importante en la obtención de numerosos límites de este tipo. Por ejemplo, los polinomios de Gegenbauer $G_n^\gamma(x)$, definidos mediante la función generadora

$$(1 - 2xw + w^2)^{-\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^\gamma(x) w^n, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad |w| < 1,$$

verifican las siguientes relaciones

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{G_n^\gamma(x)}{G_n^\gamma(1)} = x^n, \quad (2)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma^{-n/2} G_n^\gamma(x/\sqrt{\gamma}) = \frac{1}{n!} H_n(x). \quad (3)$$

Límites como los anteriores permiten estudiar aspectos importantes de estos polinomios como, por ejemplo, la localización de sus raíces. En este sentido, la igualdad (2) muestra que los ceros de $G_n^\gamma(x)$ se aproximan al origen cuando el parámetro γ toma valores que tienden a infinito. Del mismo modo, la igualdad (3) nos muestra la relación entre los polinomios de Gegenbauer y los polinomios de Hermite adecuadamente escalados, cuando el parámetro γ del que dependen los primeros tiende a infinito.

Análogamente, los polinomios de Laguerre, $L_n(x, \alpha)$, que se definen mediante la función generadora

$$(1 - w)^{-\alpha-1} e^{-wx/(1-w)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x, \alpha) w^n, \quad \alpha, x \in \mathbf{C}, \quad |w| < 1, \quad (4)$$

verifican

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{-n} L_n(\alpha x, \alpha) = \frac{(1-x)^n}{n!}, \quad (5)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{-n/2} L_n(x\sqrt{\alpha} + \alpha, \alpha) = \frac{(-1)^n 2^{-n/2}}{n!} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (6)$$

En este caso, el límite (5) permite estudiar la localización de las raíces de $L_n(x, \alpha)$ y (6) relaciona los polinomios de Laguerre escalados adecuadamente con los polinomios de Hermite, cuando α tiende a infinito.

En [8] se observó que el límite (6) puede obtenerse como consecuencia de la existencia de un desarrollo asintótico de los polinomios de Laguerre en términos de polinomios de Hermite para valores grandes del parámetro α :

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^n B^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{B^k} \frac{H_{n-k}(X)}{(n-k)!},$$

donde X , B y otros aspectos se detallarán a lo largo del trabajo. Este desarrollo tiene un carácter asintótico para valores grandes de $|\alpha|$ (ver Sección 2.1). En particular, el límite (6) se obtiene a partir de la aproximación que proporciona el primer término de este desarrollo.

El método a partir del cual puede obtenerse este tipo de desarrollos fue introducido en [8, 9, 10]. En particular, en [8] y [10] se describieron métodos para aproximar polinomios ortogonales en términos de polinomios de Hermite y polinomios de Laguerre, respectivamente.

Gracias a estos métodos, en [8], se obtuvieron desarrollos asintóticos de los polinomios de Laguerre y de Jacobi dados en términos de polinomios de Hermite. De igual modo, en [10], se obtuvieron desarrollos asintóticos de los polinomios de Meixner-Pollaczek, de Jacobi, de Meixner y de Krawtchouk en términos de polinomios de Laguerre. Asimismo, en [8] y [9] se determinaron desarrollos asintóticos que no estaban incluidos en la tabla de Askey como, por ejemplo, los desarrollos en términos de polinomios de Hermite de los polinomios de Tricomi-Carlitz, de los generalizados de Bernoulli, de Euler, de Bessel y de Buchholz.

La obtención de estos desarrollos asintóticos se basa en el conocimiento de la función generadora de los polinomios y, por ello, se diferencia de las técnicas descritas en [3] y en [4]. Así, el método dado en [3] se basa en un problema de conexión y proporciona información acerca de las relaciones entre polinomios ortogonales discretos y continuos de la tabla de Askey. Sin embargo, el método que aquí se presenta proporciona desarrollos asintóticos de polinomios ortogonales situados en un nivel de la tabla de Askey en términos de polinomios situados en niveles inferiores y que, por lo tanto, son más sencillos. Este método también es distinto de los sofisticados métodos considerados en [11] y en [12], en donde se consiguen desarrollos asintóticos de los polinomios de Charlier o de los polinomios de Meixner de un cierto grado n para valores grandes de n . En el método que aquí se presenta mantenemos el grado n constante y hacemos que ciertos parámetros de los polinomios tiendan a infinito.

En la Sección 2 describiremos el método desarrollado en [8] para obtener relaciones asintóticas en términos de polinomios de Hermite. Además, aplicaremos esta técnica para obtener desarrollos de los polinomios de Charlier, de Krawtchouk, de Meixner, de Meixner-Pollaczek y de Jacobi, obteniendo, de este modo, nuevos límites de los ya conocidos de la tabla de Askey. En la Sección 3 detallamos un nuevo procedimiento para obtener desarrollos en términos de polinomios de Charlier. Consideraremos los polinomios del tercer nivel de la tabla de Askey (polinomios de Krawtchouk, de Meixner, de Meixner-Pollaczek y de Jacobi) y obtendremos desarrollos asintóticos y, como consecuencia, límites de estos polinomios. En ambas secciones, ilustramos los resultados obtenidos mediante experimentos que muestran la precisión de las aproximaciones dadas en la Secciones 2 y 3.

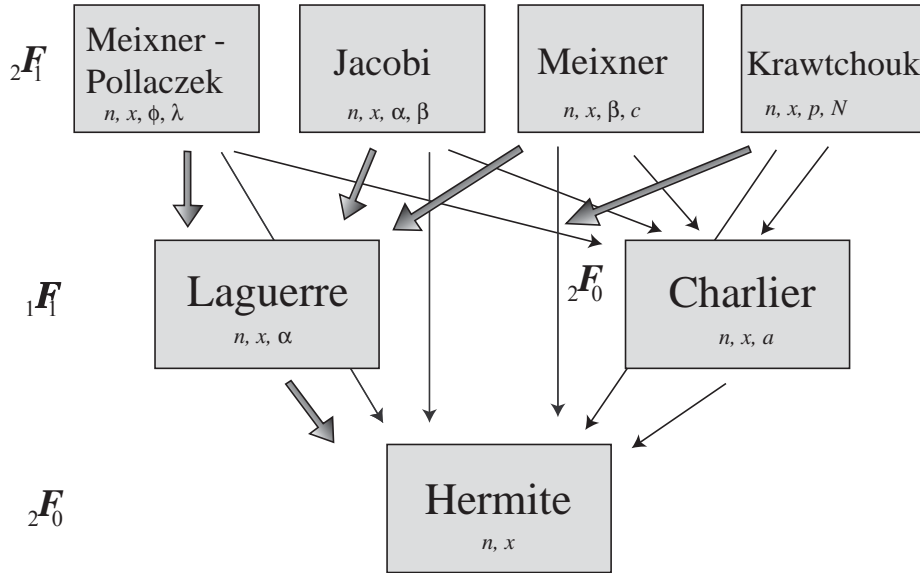


Figura 1: Tres últimos niveles de la tabla de Askey de los polinomios hipergeométricos ortogonales. Las flechas gruesas indican relaciones asintóticas conocidas entre los polinomios que conectan, mientras que las flechas finas indican nuevos desarrollos asintóticos obtenidos en este trabajo.

2 Desarrollos asintóticos en términos de polinomios de Hermite

En esta sección, detallamos el método introducido en [8] para estudiar el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de la tabla de Askey y obtener, como consecuencia, límites de dichos polinomios en términos de polinomios de Hermite.

Los polinomios ortogonales de la tabla de Askey $p_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$ se pueden representar a través de series de potencias que los generan mediante

$$F(x, w) = \sum_{i=0}^{\infty} p_n(x) w^n, \quad (7)$$

donde $F(x, w)$ es una función analítica con respecto a la variable w en un dominio que contiene al origen. La función $F(x, w)$ se llama *función generadora* de la familia de funciones p_n (las cuales no dependen de la variable w).

A partir de la relación dada en (7) y aplicando el Teorema de Cauchy, se obtiene la siguiente representación integral del polinomio p_n

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(x, w) w^{-(n+1)} dw, \quad (8)$$

donde C es un círculo cerrado conteniendo al origen e incluido en el dominio de analiticidad de F .

A modo de ejemplo, consideremos los polinomios de Hermite $H_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$ (ver (1)). Esta familia de polinomios se puede obtener a partir de la función generadora

$$e^{2xw-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} w^n, \quad x, w \in \mathbf{C}, \quad (9)$$

de donde se deduce la siguiente expresión integral

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C e^{2xw-w^2} w^{-(n+1)} dw, \quad (10)$$

donde C es un círculo cerrado conteniendo al origen e incluido en el dominio de analiticidad de F .

Mediante el siguiente resultado, expresaremos polinomios ortogonales $p_n(x)$ como una suma finita de términos que dependen de polinomios de Hermite $H_n(x)$.

Teorema 2.1 Sean $p_n(x)$ polinomios definidos por la función generadora

$$F(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) w^n, \quad (11)$$

donde $F(x, w)$ es una función analítica en $w = 0$ y $F(x, 0) = 1$. Sea

$$f(x, w) = e^{-Aw+Bw^2} F(x, w), \quad (12)$$

y $\{c_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}}$, la sucesión de coeficientes tales que

$$f(x, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) w^k, \quad c_0 = 1, \quad (13)$$

donde A y B no dependen de w . Entonces $p_n(x)$ puede representarse mediante

$$p_n(x) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k(x)}{z^k} \frac{H_{n-k}(\xi)}{(n-k)!}, \quad z = \sqrt{B}, \quad \xi = \frac{A}{2\sqrt{B}}, \quad (14)$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite de grado n .

Demostración. La representación integral de $p_n(x)$ dada en (8) se puede escribir como

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{Aw-Bw^2} f(x, w) w^{-(n+1)} dw. \quad (15)$$

Observemos que F como función de w es analítica y además $f(x, w) = e^{-Aw+Bw^2} F(x, w)$. Así pues, podemos deducir que f como función de w es también una función analítica y, por tanto, se puede expresar mediante una serie de potencias de w

$$f(x, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) w^k. \quad (16)$$

A continuación, sustituimos (16) en (8) obteniendo de este modo

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) e^{Aw-Bw^2} w^{k-(n+1)} dw. \quad (17)$$

Puesto que los términos del sumatorio correspondientes a los índices k tales que $k - (n + 1) \geq 0$ son funciones analíticas en el interior del dominio de integración, entonces

$$\int_C c_k(x) e^{Aw-Bw^2} w^{k-(n+1)} dw = 0, \quad k \geq n + 1.$$

Por último, teniendo en cuenta la representación integral (10) de los polinomios de Hermite y realizando el cambio de variable $w \rightarrow \tilde{w} = \sqrt{B}w$ se obtiene (14). ■

Observemos que los coeficientes A y B de (12) pueden depender de la variable x . Por ello, si B se anula para algún valor de x_0 , entonces escribiremos

$$p_n(x_0) = A^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{A^k (n-k)!}.$$

Para obtener propiedades asintóticas de (14), tomaremos coeficientes A y B para los que $c_1 = c_2 = 0$. Bajo estas condiciones, estos coeficientes quedan determinados mediante

$$A = p_1(x), \quad B = \frac{1}{2}p_1^2(x) - p_2(x), \quad (18)$$

asumiendo que $F(x, 0) = p_0(x) = 1$ (lo cual implica $c_0 = 1$). Con esta elección de coeficientes, tenemos

$$\ln(F(x, w)) = p_1(x)w + \left(p_2(x) - \frac{1}{2}p_1^2(x) \right) w^2 + \mathcal{O}(w^3), \quad w \rightarrow 0$$

y por lo tanto, aproximamos en el origen la exponencial de (12) y la función $F(x, w)$.

En las siguientes secciones, deduciremos las propiedades de los desarrollos (14) a partir del comportamiento asintótico de los coeficientes c_k que en ellos intervienen, cuando el correspondiente parámetro tienda a infinito. El siguiente resultado será de gran utilidad para determinar buena parte de los comportamientos asintóticos de las sucesiones de coeficientes c_k que aparecerán en el trabajo.

Lema 2.1 Sean $\phi_1(w)$, $\phi_2(w)$ funciones analíticas en $w = 0$, cuyos desarrollos de Maclaurin se pueden escribir como

$$\phi_1(w) = \mu w^n (a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots), \quad \phi_2(w) = w^n (b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots),$$

donde n es un entero positivo y a_k, b_k son números complejos que no dependen de $\mu \in \mathbf{C}$ para todo $k \in \mathbf{N}$ y, además, $a_0, b_0 \neq 0$. Sea $\phi(w) := \phi_1(w) + \phi_2(w)$ y sea $\{c_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ la sucesión formada por los coeficientes de la serie de potencias de la función $f(w) = e^{\phi(w)}$ y que, por lo tanto, verifica

$$f(w) = e^{\phi_1(w) + \phi_2(w)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k.$$

Entonces $c_0 = 1$, $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ y

$$c_k = \mathcal{O}\left(|\mu|^{[k/n]}\right), \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Demostración. Consideramos, en primer lugar, el desarrollo en serie de potencias de $e^{\phi_1(w)}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k w^k &= e^{\phi_1(w)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\phi_1(w))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k w^{kn}}{k!} (a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots)^k. \end{aligned} \quad (19)$$

Igualando los términos de los miembros de (19) correspondientes a potencias de w del mismo grado, deducimos que $\tilde{c}_0 = 1$, $\tilde{c}_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$ y, además,

$$\tilde{c}_k = \mathcal{O}\left(|\mu|^{[k/n]}\right), \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Por otra parte, si estudiamos el desarrollo en serie de potencias de $e^{\phi_2(w)}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k w^k &= e^{\phi_2(w)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\phi_2(w))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{kn}}{k!} (b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots)^k, \end{aligned}$$

deducimos que $\bar{c}_0 = 1$, $\bar{c}_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$ y los coeficientes \bar{c}_k no dependen de μ .

Finalmente, obtenemos el resultado teniendo en cuenta

$$e^{\phi_1(w)+\phi_2(w)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k w^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k w^k \right)$$

e igualando de nuevo los términos de los miembros de la igualdad anterior correspondientes a potencias de w del mismo grado. ■

En las siguientes subsecciones aplicaremos el método desarrollado en el Teorema 2.1 para obtener desarrollos asintóticos de los polinomios ortogonales del segundo y tercer nivel de la Tabla de Askey en términos de polinomios de Hermite.

2.1 Polinomios de Charlier en términos de polinomios de Hermite

Los polinomios de Charlier, se definen mediante la función generadora

$$e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x, a)}{n!} w^n, \quad x, w \in \mathbf{C}. \quad (20)$$

Así pues, su representación integral (8) es

$$C_n(x, a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x w^{-(n+1)} dw, \quad (21)$$

donde \mathcal{C} es un círculo alrededor del origen y la integración se hace en la dirección positiva.

Como en (12), hemos expresado la función generadora como

$$e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x = e^{Aw-Bw^2} f(x, w), \quad (22)$$

con coeficientes A y B que no dependen de w . Para obtener un buen comportamiento asintótico, a partir de (18), hemos definido

$$A := \frac{1}{a}(a-x), \quad B := \frac{x}{2a^2}.$$

De este modo, hemos obtenido la representación (14) de los polinomios de Charlier

$$C_n(x, a) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k H_{n-k}(\xi)}{z^k (n-k)!}, \quad z = \sqrt{\frac{x}{2a^2}}, \quad \xi = \frac{a-x}{\sqrt{2x}}. \quad (23)$$

Hemos comprobado que con nuestra elección de A y B , $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_3 = -x/(3a^3)$ en (23). Para determinar el resto de los coeficientes c_k hemos derivado en ambos miembros de la igualdad (22) y entonces hemos deducido que f satisface la siguiente ecuación diferencial

$$xw^2 f = (w-a)a^2 \frac{df}{dw}. \quad (24)$$

Substituyendo en esta ecuación diferencial f por su desarrollo en serie de potencias hemos obtenido la siguiente relación de recurrencia

$$a^3(k+1)c_{k+1} = a^2 k c_k - x c_{k-2}. \quad (25)$$

A partir de (25) podremos calcular los coeficientes c_k para todo $k > 2$.

Para estudiar el comportamiento asintótico de (23), observemos que a partir de (25) y por inducción sobre k se puede deducir de manera sencilla que la sucesión de coeficientes c_k verifica

$$c_k = \mathcal{O}(a^{-k}), \quad a \rightarrow \infty.$$

Teniendo en cuenta que los polinomios de Hermite $H_n\left(\frac{a-x}{\sqrt{2x}}\right)$ tienen grado n con respecto a la variable a , es decir, $H_n\left(\frac{a-x}{\sqrt{2x}}\right) = \mathcal{O}(a^n)$ cuando $a \rightarrow \infty$ y además, $z = \mathcal{O}(a^{-1})$ cuando $a \rightarrow \infty$, podemos determinar la naturaleza asintótica de los términos de (23), para valores grandes de a , con n y x fijados:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} c_k \left(\frac{x}{2a^2}\right)^{(n-k)/2} H_{n-k}\left(\frac{a-x}{\sqrt{2x}}\right) = 0, \quad \forall k > 0. \quad (26)$$

Las gráficas de la Figura 2 muestran la precisión que se obtiene al aproximar los polinomios de Charlier mediante el primer término del desarrollo obtenido en (23) para valores crecientes del parámetro a . Es de destacar la precisión obtenida en la aproximación de los ceros de los polinomios.

Para poder expresar el límite de los polinomios de Charlier, cuando su orden tiende a infinito, en términos de polinomios de Hermite, hacemos el cambio de variable $x \mapsto (2a)^{1/2}x + a$. Con este cambio tenemos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \xi = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a - \sqrt{2ax} - a}{\sqrt{2(\sqrt{2ax} + a)}} = -x, \quad (27)$$

y $z = \sqrt{2(\sqrt{2ax} + a)}/2a$ verifica

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{2a}z = 1. \quad (28)$$

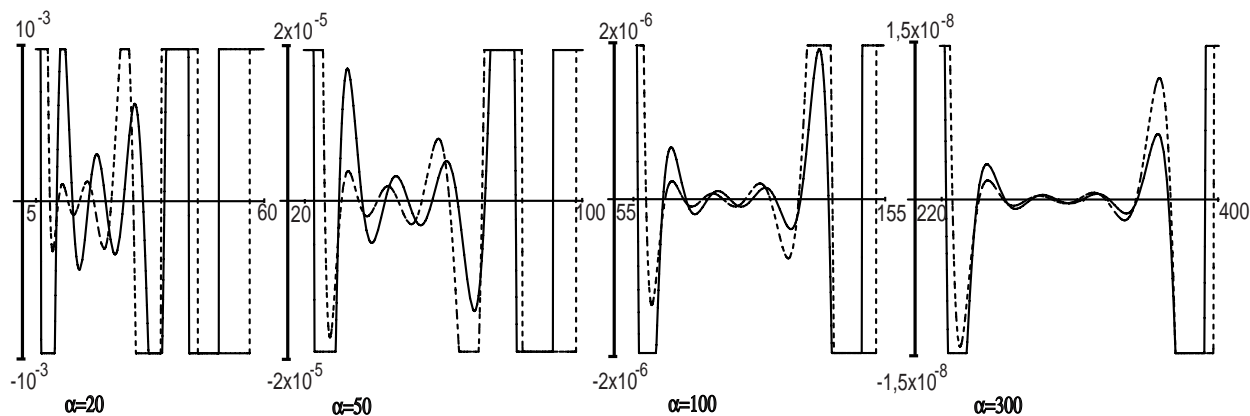


Figura 2: Aproximación obtenida con el primer término de (23) para $n = 10$. Las líneas continuas representan $C_{10}(x, a)$. Las líneas discontinuas representan $z^{10}H_{10}(\xi)/10!$.

Tomando límites en (23) y usando (26), (27) y (28) obtenemos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (2a)^{n/2} C_n((2a)^{1/2}x + a, a) = H_n(-x) = (-1)^n H_n(x), \quad (29)$$

que corresponde a uno de los límites conocidos de la tabla de Askey (ver Figura 1).

La Figura 3, ilustra el límite (29).

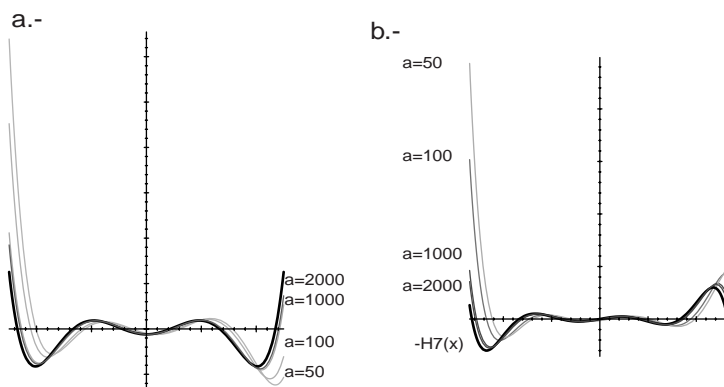


Figura 3: Límite (79) para diferentes a y $n = 10$.

2.2 Polinomios de Krawtchouk en términos de polinomios de Hermite

Los polinomios de Krawtchouk $K_n(x; p, N)$ se definen mediante la función generadora

$$\left(1 - \frac{(1-p)}{p} w\right)^x (1+w)^{N-x} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} K_n(x; p, N) w^n, \quad x, w \in \mathbf{C}, \quad (30)$$

donde $n = 0, \dots, N$ y $0 < p < 1$.

Como en (12), expresamos la función generadora como

$$\left(1 - \frac{(1-p)}{p} w\right)^x (1+w)^{N-x} = e^{Aw - Bw^2} f(x, w), \quad (31)$$

donde A y B no dependen de ω . Al igual que en (18), para obtener un buen comportamiento asintótico, tomaremos

$$A = \frac{Np - x}{p}, \quad B = \frac{p^2N + x - 2xp}{2p^2}.$$

De este modo, la representación (14) se puede escribir como

$$\binom{N}{n} K_n(x; p, N) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k H_{n-k}(\xi)}{z^k (n-k)!}, \quad (32)$$

donde

$$z = \sqrt{\frac{p^2N + x - 2xp}{2p^2}}, \quad \xi = \frac{Np - x}{\sqrt{2(p^2N + x - 2xp)}}.$$

Hemos comprobado que nuestra elección de A y B garantiza $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ en (32) y, además, $c_3 = (-x + 3xp - 3xp^2 + p^3N)/3p^3$. Para determinar el resto de los coeficientes c_k hemos derivado en ambos miembros de la igualdad (31) y entonces hemos deducido que f satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} w^2((2xp^2 - 3xp - p^3N + p^2N + x)w + x - 3xp + 3xp^2 - p^3N)f = \\ = ((p-1)p^2w^2 + (2p-1)p^2w + p^3) \frac{df}{dw}. \end{aligned} \quad (33)$$

Substituyendo en esta ecuación diferencial f por su desarrollo en serie de potencias hemos obtenido la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} p^3(k+1)c_{k+1} &= p^2(1-2p)kc_k - p^2(p-1)(k-1)c_{k-1} + \\ &+ (p^3N - 3xp^2 + 3xp - x)c_{k-2} + \\ &+ (p^3N - (2x+N)p^2 + 3xp - x)c_{k-3}. \end{aligned} \quad (34)$$

A partir de (34), siendo ya conocidos c_0 , c_1 , c_2 y c_3 , podemos calcular los coeficientes c_k para todo $k > 3$.

Para determinar el comportamiento asintótico de los coeficientes c_k cuando $N \rightarrow \infty$, observemos que la función $f(x, w)$ de (31) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{w^3(N\phi_1(w) + x\phi_2(w))},$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= \ln(1+w) - w + w^2/2, \\ \phi_2(w) &= \ln\left(\frac{p - (1-p)w}{p(1+w)}\right) + w/p - (2p-1)w^2/(2p^2). \end{aligned}$$

De esta manera, aplicando el Lema 2.1 deducimos $c_k = \mathcal{O}(N^{[k/3]})$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Por último, teniendo en cuenta que $\xi = \mathcal{O}(N^{n/2})$ y $z = \mathcal{O}(N^{n/2})$ cuando $N \rightarrow \infty$, deducimos que la sucesión $\{\phi_k\}$ definida por $\phi_k := c_k H_{n-k}(\xi)/z^k$ tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$\phi_k = \mathcal{O}(N^{n/2+[k/3]-k}), \quad N \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Esta relación explica la naturaleza asintótica del desarrollo obtenido en (32) para valores grandes de N , fijados x y n .

Las gráficas de la Figura 4 muestran la precisión que se obtiene al aproximar los polinomios de Krawtchouk mediante el primer término de la representación obtenida en (32) para valores crecientes del parámetro N . Es de destacar la precisión obtenida en la aproximación de los ceros de los polinomios.

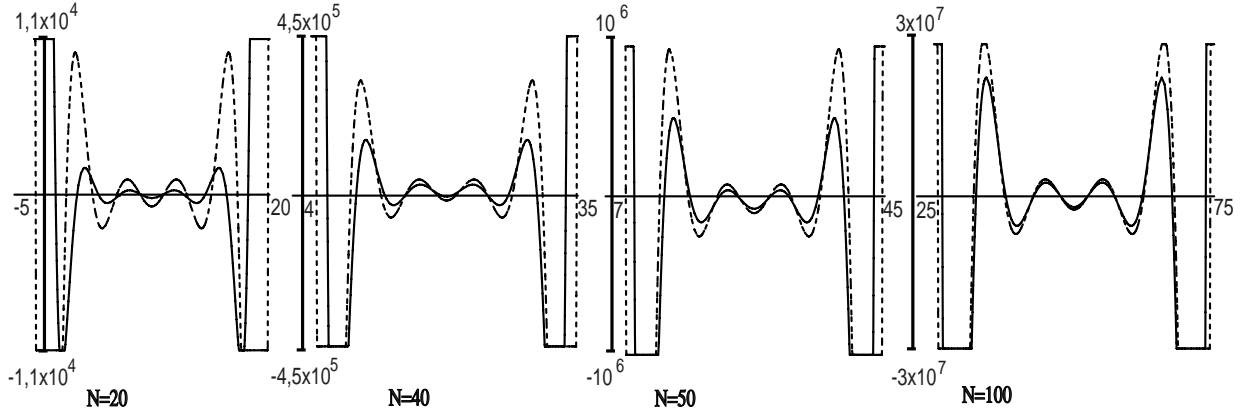


Figura 4: Aproximación obtenida con el primer término de (32) para $n = 10$ y $p = 1/2$. Las líneas continuas representan $K_{10}(x; p, N)$. Las líneas discontinuas representan la aproximación $z^{10} H_{10}(\xi)/10!$.

Para poder expresar el límite de los polinomios de Krawtchouk, cuando $N \rightarrow \infty$, en términos de polinomios de Hermite, sustituimos $x \rightarrow pN + x\sqrt{2p(1-p)N}$. Con este cambio de variable

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-x\sqrt{p(1-p)N}}{\sqrt{p(1-p)N + (1-2p)x\sqrt{2p(1-p)N}}} = -x$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{\frac{(1-p)}{2p}N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{p(1-p)N + (1-2p)x\sqrt{2p(1-p)N}}}{\sqrt{p(1-p)N}} = 1.$$

De esta manera deducimos el siguiente límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \binom{N}{n} \left(\sqrt{\frac{2p}{N(1-p)}} \right)^n K_n(pN + x\sqrt{2p(1-p)N}; p, N) = \frac{(-1)^n}{n!} H_n(x). \quad (35)$$

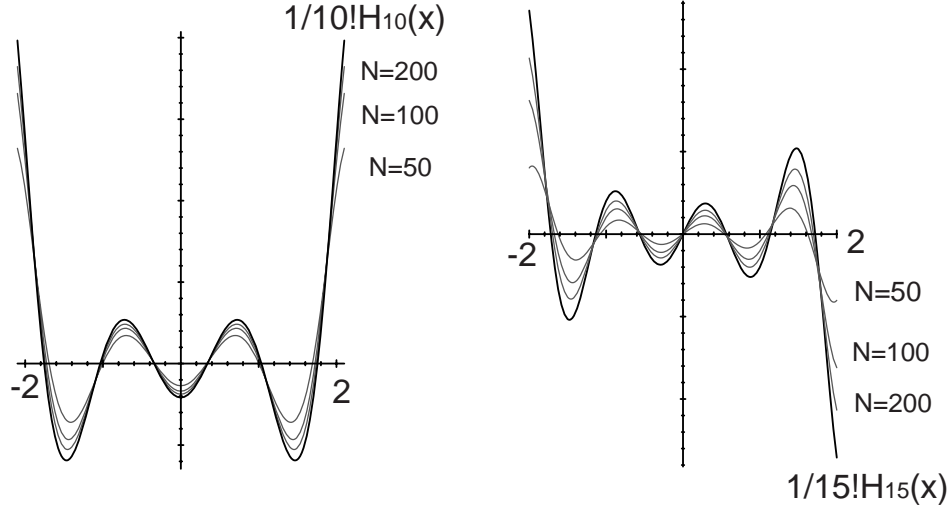


Figura 5: a.- Ilustra (35) para grado $n = 10$. b.- Ilustra (35) para grado $n = 15$.

2.3 Polinomios de Meixner en términos de polinomios de Hermite

Los polinomios de Meixner $M_n(x; \beta, c)$ se definen mediante la función generadora

$$\left(1 - \frac{w}{c}\right)^x (1 - w)^{-x-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} M_n(x; \beta, c) w^n, \quad x, w \in \mathbf{C}, \quad (36)$$

donde $\beta > 0$ y $0 < c < 1$.

Como en (12), expresamos la función generadora como

$$\left(1 - \frac{w}{c}\right)^x (1 - w)^{-x-\beta} = e^{Aw - Bw^2} f(x, w), \quad (37)$$

donde A y B no dependen de ω .

Para obtener un buen comportamiento asintótico, a partir de (18), definimos

$$A = \frac{1}{c}((c-1)x + \beta c), \quad B = \frac{1}{2c^2}((1-c^2)x - \beta c^2).$$

De este modo, la representación (14) se puede escribir como

$$M_n(x; \beta, c) = \frac{n!}{(\beta)_n} z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{H_{n-k}(\xi)}{(n-k)!}, \quad (38)$$

con

$$z = \sqrt{\frac{(1-c^2)x}{2c^2} - \frac{\beta}{2}}, \quad \xi = \frac{(c-1)x + \beta c}{2cz}.$$

Hemos comprobado que nuestra elección de A y B garantiza $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ en (38) y, además, $c_3 = ((c^3 - 1)x + c^3\beta)/3c^3$. Para determinar el resto de los coeficientes c_k hemos derivado en ambos miembros de la igualdad (37) y entonces hemos deducido que f satisface la siguiente ecuación diferencial

$$w^2(x - \beta c^3 - c^3 x + w(\beta c^2 - x - c^2 x))f = c^2(-c + w(c+1) - w^2) \frac{df}{dw}. \quad (39)$$

Substituyendo en esta ecuación diferencial f por su desarrollo en serie de potencias, hemos obtenido la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} c^3(k+1)c_{k+1} &= c^2(c+1)kc_k - c^2(k-1)c_{k-1} + (\beta c^3 + c^3x - x)c_{k-2} + \\ &+ (x - c^2x + \beta c^2)c_{k-3}. \end{aligned} \quad (40)$$

A partir de (40), puesto que c_0, c_1, c_2 y c_3 son ya conocidos, podemos calcular los coeficientes c_k para todo $k > 3$.

Para determinar el comportamiento asintótico de los coeficientes c_k cuando $\beta \rightarrow \infty$, observemos que la función $f(x, w)$ de (37) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{w^3(\beta\phi_1(w) + x\phi_2(w))},$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= -\ln(1-w) - w - w^2/2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k+3}, \\ \phi_2(w) &= \ln\left(\frac{1-w/c}{1-w}\right) - (c-1)w/c - (c^2-1)w^2/(2c^2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{k+3}-1}{(k+3)c^{k+3}} w^k. \end{aligned}$$

Usando el Lema 2.1 deducimos que $c_k = \mathcal{O}(\beta^{\lfloor k/3 \rfloor})$ cuando $\beta \rightarrow \infty$.

Por último, teniendo en cuenta que $\xi = \mathcal{O}(\beta^{n/2})$ y $z = \mathcal{O}(\beta^{n/2})$ cuando $\beta \rightarrow \infty$ deducimos que la sucesión $\{\phi_k\}$ con $\phi_k := c_k H_{n-k}(\xi)/z^k$ tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(\beta^{n/2 + \lfloor k/3 \rfloor - k}), \quad \beta \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Esto explica la naturaleza asintótica de la representación dada en (38) para valores grandes del parámetro β , dejando x y n fijos.

Las gráficas de la Figura 6 muestran la precisión que se obtiene al aproximar los polinomios de Meixner mediante el primer término de la representación obtenida en (38) para valores crecientes del parámetro β . Es de destacar la precisión obtenida en la aproximación de los ceros de los polinomios.

Para expresar el límite de los polinomios de Meixner, cuando $\beta \rightarrow \infty$, en términos de los polinomios de Hermite, haremos el cambio de variable $x \rightarrow c(\beta - \sqrt{2\beta/c})/(1-c)$. Con este cambio, tenemos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \xi = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{c\sqrt{2\beta/c}x}{\sqrt{2}\sqrt{c\beta - c(1-c)}\sqrt{2\beta}x} = x$$

y

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} z\sqrt{\frac{2c}{\beta}} = 1.$$

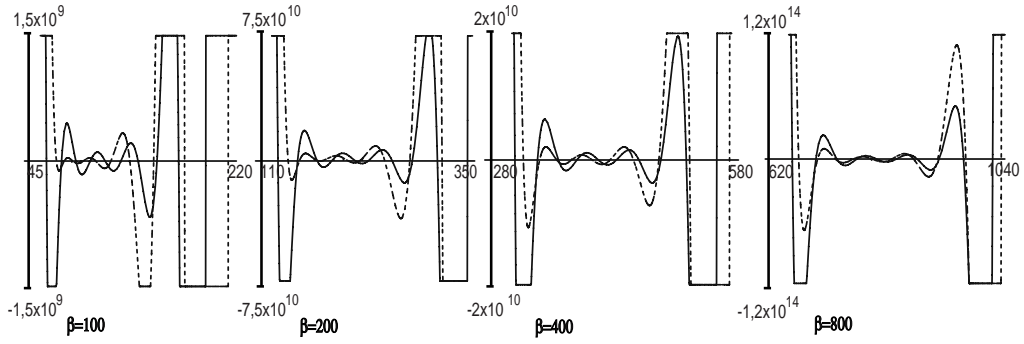


Figura 6: Aproximación obtenida con el primer término de (38) para $n = 10$ y $c = 1/2$. Las líneas continuas representan $M_{10}(x; \beta, c)$. Las líneas discontinuas representan la aproximación $z^{10}H_{10}(\xi)/10!$.

De esta manera deducimos el siguiente límite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (\beta)_n \left(\frac{2c}{\beta} \right)^{n/2} M_n \left(\frac{c}{1-c} \left(\beta - \sqrt{\frac{2\beta}{c}} \right) x; \beta, c \right) = H_n(x). \quad (41)$$

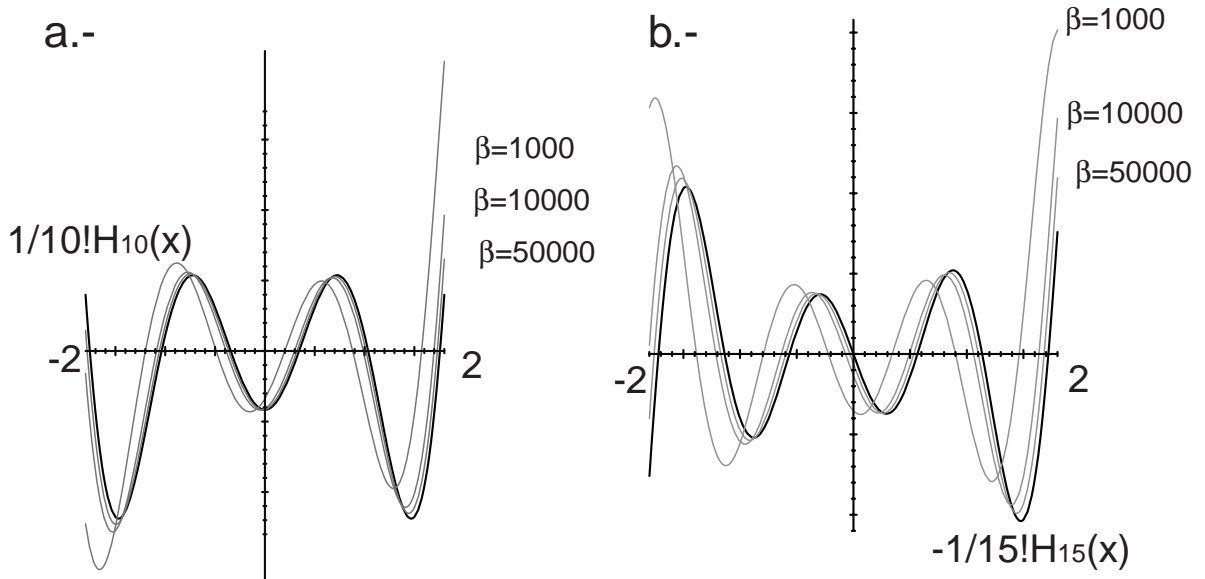


Figura 7: a.- Ilustra el límite (41) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 10$. b.- Ilustra el límite (41) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 15$.

2.4 Polinomios de Meixner-Pollaczek en términos de polinomios de Hermite

Los polinomios de Meixner-Pollaczek $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ se definen mediante la función generadora

$$(1 - e^{i\phi}w)^{-\lambda+ix} (1 - e^{-i\phi}w)^{-\lambda-ix} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x; \phi)w^n, \quad x, w \in \mathbb{C}, \quad (42)$$

con $\lambda > 0$ y $0 < \phi < \pi$.

Como en (12), expresamos la función generadora como

$$(1 - e^{i\phi}w)^{-\lambda+ix} (1 - e^{-i\phi}w)^{-\lambda-ix} = e^{Aw-Bw^2} f(x, w), \quad (43)$$

donde A y B no depended de ω .

Para obtener un buen comportamiento asintótico, a partir de (18), hemos definido

$$A = 2\lambda \cos(\phi) + 2 \sin(\phi)x, \quad B = -\lambda \cos(2\phi) - x \sin(2\phi).$$

De esta forma, el desarrollo (14) se puede expresar como

$$P_n^{(\lambda)}(x; \phi) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k H_{n-k}(\xi)}{z^k (n-k)!}, \quad (44)$$

donde

$$z = \sqrt{-\lambda \cos(2\phi) - x \sin(2\phi)}, \quad \xi = \frac{\lambda \cos(\phi) + \sin(\phi)x}{\sqrt{-\lambda \cos(2\phi) - x \sin(2\phi)}}.$$

Hemos comprobado que nuestra elección de A y B garantiza $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ en (44) y, además, $c_3 = 2(\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi))/3$. Para determinar el resto de los coeficientes c_k hemos derivado en ambos miembros de la igualdad (43) y deducido que f satisface la siguiente ecuación diferencial

$$2w^2(\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi) - (\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi))w)f = (1 - 2 \cos(\phi)w + w^2) \frac{df}{dw}. \quad (45)$$

Substituyendo en esta ecuación diferencial f por su desarrollo en serie de potencias hemos obtenido la relación de recurrencia

$$(k+1)c_{k+1} = 2 \cos(\phi)kc_k - (k-1)c_{k-1} + 2(\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi))c_{k-2} - 2(\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi))c_{k-3}. \quad (46)$$

A partir (46), siendo ya conocidos c_0 , c_1 , c_2 y c_3 , podemos calcular los coeficientes c_k para todo $k > 3$.

Para determinar el comportamiento asintótico de los coeficientes c_k cuando $\lambda \rightarrow \infty$, observemos que la función $f(x, w)$ de (43) es de la forma

$$f(x, w) = e^{w^3(\lambda\phi_1(w)+x\phi_2(w))},$$

con

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= -\ln\left((1 - e^{i\phi}w)(1 - e^{-i\phi}w)\right) - 2 \cos(\phi)w - \cos(2\phi)w^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cos((k+3)\phi)}{k+3} w^k, \\ \phi_2(w) &= i \ln\left(\frac{1 - e^{i\phi}w}{1 - e^{-i\phi}w}\right) - 2 \sin(\phi)w - \sin(2\phi)w^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \sin((k+3)\phi)}{k+3} w^k. \end{aligned}$$

De este modo, aplicando el Lema 2.1 deducimos $c_k = \mathcal{O}(\lambda^{\lfloor k/3 \rfloor})$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Por último, teniendo en cuenta $\xi = \mathcal{O}(\lambda^{n/2})$ y $z = \mathcal{O}(\lambda^{n/2})$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ deducimos que la sucesión $\{\phi_k\}$ con $\phi_k := c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$ tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(\lambda^{n/2 + \lfloor k/3 \rfloor - k}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Este comportamiento explica la naturaleza asintótica de la relación (44) para valores grandes de λ , con x y n fijados.

Las gráficas de la Figura 8 muestran la precisión que se obtiene al aproximar los polinomios de Meixner-Pollazek mediante el primer término de la representación obtenida en (44) para valores crecientes del parámetro λ . Es de destacar la precisión obtenida en la aproximación de los ceros.

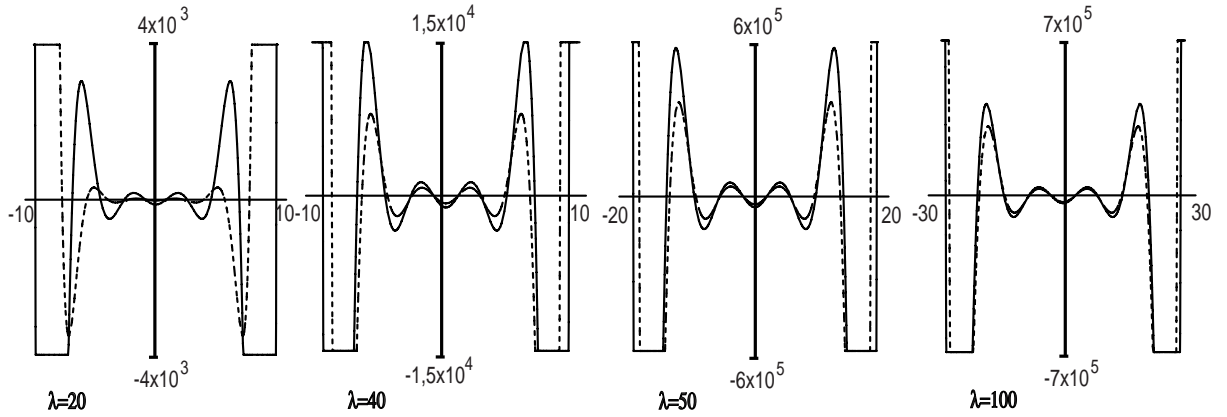


Figura 8: Aproximación obtenida con el primer término de (44) para $n = 10$ y $\phi = \pi/2$. Las líneas continuas representan $P_{10}^{(\lambda)}(x; \phi)$. Las líneas discontinuas representan la aproximación $z^{10} H_{10}(\xi)/10!$.

Para expresar el límite de los polinomios de Meixner-Pollazek, cuando $\lambda \rightarrow \infty$, en términos de polinomios de Hermite, hacemos el cambio de variable $x \rightarrow (\sin(\phi))^{-1}(x\sqrt{\lambda} - \lambda \cos(\phi))$ en (44). De este modo cuando $\lambda \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{z}{\lambda} = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\xi}{x} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n/2} P_n^{(\lambda)} \left(\frac{x\sqrt{\lambda} - \lambda \cos(\phi)}{\sin(\phi)}; \phi \right) = \frac{H_n(x)}{n!}. \quad (47)$$

2.5 Polinomios de Jacobi en términos de polinomios de Hermite

Los polinomios de Jacobi $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ se definen mediante la función generadora

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1+R-w)^\alpha(1+R+w)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(\alpha, \beta)}(x) w^n, \quad R = \sqrt{1-2xw+w^2}, \quad (48)$$

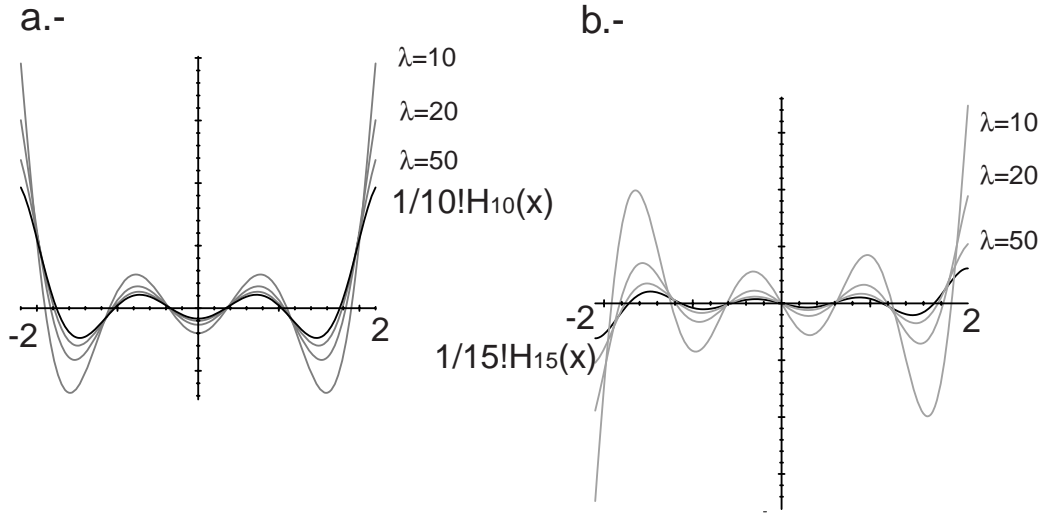


Figura 9: a.- Ilustra el límite (47) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 10$. b.- Ilustra el límite (47) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 15$.

con $x, w \in \mathbf{C}$, $\alpha > -1$ y $\beta > -1$.

Como en (12), escribimos la función generadora como

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1+R-w)^\alpha(1+R+w)^\beta} = e^{Aw-Bw^2} f(x, w), \quad (49)$$

donde A y B no dependen de ω .

Para obtener un buen comportamiento asintótico, a partir de (18), hemos definido

$$\begin{aligned} A &= x + 1/2(\alpha + \beta)x + 1/2(\alpha - \beta), \\ B &= 1/2 - x^2 + 1/8(\alpha + \beta) - 1/4(\alpha - \beta)x - 3/8x^2(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

De esta manera, la representación (14) se puede escribir como

$$p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k H_{n-k}(\xi)}{z^k (n-k)!}, \quad (50)$$

donde

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{1/2 - x^2 + 1/8(\alpha + \beta) - 1/4(\alpha - \beta)x - 3/8x^2(\alpha + \beta)}, \\ \xi &= \frac{x + 1/2(\alpha + \beta)x + 1/2(\alpha - \beta)}{2\sqrt{1/2 - x^2 + 1/8(\alpha + \beta) - 1/4(\alpha - \beta)x - 3/8x^2(\alpha + \beta)}}. \end{aligned}$$

Nuestra elección de A y B garantiza $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ en (50). Por simplicidad, consideraremos que α y β verifican

$$\alpha + \beta \rightarrow \infty, \quad \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \rightarrow 0.$$

La función $f(x, w)$ de (49) es de la forma

$$f(x, w) = e^{w^3(\phi_1(x, w) + (\alpha + \beta)\phi_2(x, w) + (\alpha - \beta)\phi_3(x, w))}.$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_1(x, w) &= -\ln(R(w)) - xw - (x^2 - 1/2)w^2, \\ \phi_2(x, w) &= -1/2 \left(\ln \left((1 + R(w))^2 - w^2 \right) - 2\ln(2) + xw + (3x^2 - 1)w^2/4 \right), \\ \phi_3(x, w) &= 1/2 \left(\ln \left(\frac{1 + R(w) + w}{1 + R(w) - w} \right) - w - xw^2/2 \right).\end{aligned}$$

Usando el Lema 2.1 y puesto que $\xi = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{n/2})$, $z = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{1/2})$ deducimos que la sucesión $\{\phi_k\}$ definida por $\phi_k := c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$ tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{n/2 + [k/3] - k}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Este comportamiento explica la naturaleza asintótica de la relación (50) para valores grandes de $\alpha + \beta$, con x y n fijados.

Las gráficas de la Figura 10 muestran la precisión que se obtiene al aproximar los polinomios de Jacobi mediante el primer término de la representación obtenida en (50) para valores crecientes del parámetro $\alpha + \beta$. Es de destacar la precisión obtenida en la aproximación de los ceros.

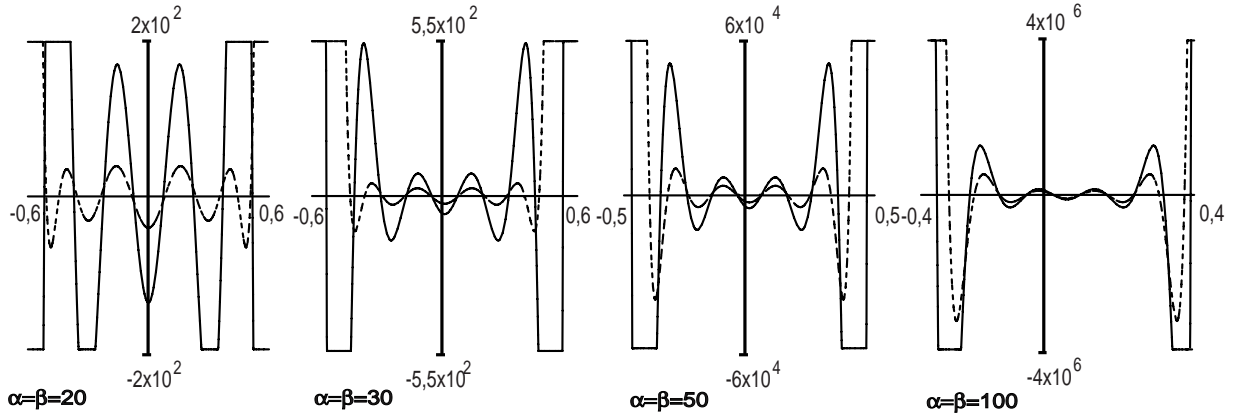


Figura 10: Aproximación obtenida con el primer término de (50) para $n = 10$. Las líneas continuas representan $p_{10}^{(\alpha, \beta)}(x)$. Las líneas discontinuas representan la aproximación $z^{10} H_{10}(\xi)/10!$.

Para expresar el límite de los polinomios de Jacobi en términos de polinomios de Hermite, realizamos el cambio de variable $x \rightarrow (\sqrt{2\alpha + 2\beta}x + \beta - \alpha)/(2 + \alpha + \beta)$ en (50) y obtenemos

$$\lim_{(\alpha + \beta) \rightarrow \infty} \frac{4z}{\sqrt{2\alpha + 2\beta}} = 1, \quad \lim_{(\alpha + \beta) \rightarrow \infty} \frac{\xi}{x} = 1.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, deducimos

$$\lim_{(\alpha + \beta) \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{\sqrt{2\alpha + 2\beta}} \right)^n j_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{\sqrt{2\alpha + 2\beta}x + \beta - \alpha}{2 + \alpha + \beta} \right) = \frac{H_n(x)}{n!}. \quad (51)$$

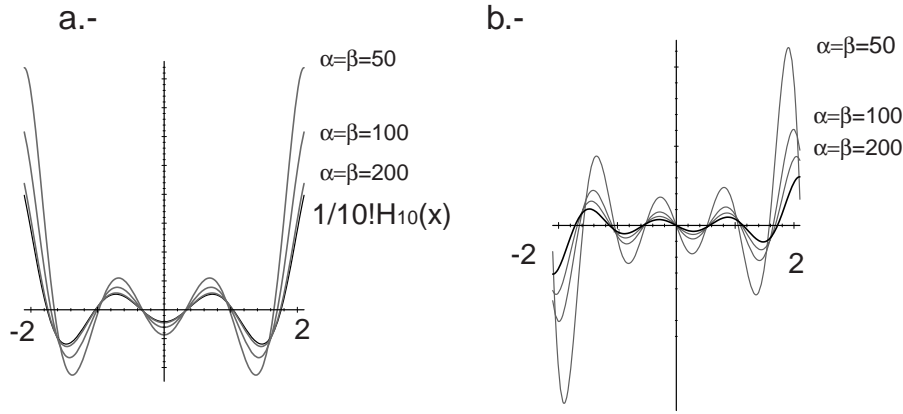


Figura 11: a.- Ilustra el límite (51) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 10$. b.- Ilustra el límite (51) en el intervalo $[-2, 2]$ para grado $n = 15$.

3 Desarrollos asintóticos en términos de polinomios de Charlier

Nuestro objetivo ahora es adecuar el método descrito anteriormente para obtener desarrollos asintóticos en términos de los polinomios de Hermite, al caso de los polinomios de Charlier. Es decir, buscamos desarrollos asintóticos de los polinomios del tercer nivel de la tabla de Askey en términos de los polinomios de Charlier.

Los polinomios de Charlier, cuya definición viene dada en términos de la función hipergeométrica

$$C_n(x, a) = {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{1}{a} \right), \quad (52)$$

para $a > 0$ y $x \in \mathbf{N}$, son ortogonales con respecto a la medida discreta $a^x/x!$ y tienen la siguiente función generadora

$$e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x, a)}{n!} w^n, \quad a > 0, \quad (53)$$

que a su vez nos proporciona la siguiente integral de Cauchy

$$C_n(x, a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^w \left(1 - \frac{w}{a}\right)^x w^{-n-1} dw, \quad (54)$$

donde \mathcal{C} es un camino cerrado alrededor del origen dentro del dominio donde F es analítica.

Mediante el siguiente resultado, expresaremos polinomios ortogonales $p_n(x)$ como una suma finita de términos que dependen de polinomios de Charlier $C_n(x, C)$.

Teorema 3.1 Sean $p_n(x)$ polinomios definidos por la función generadora

$$F(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) w^n, \quad (55)$$

donde $F(x, w)$ es una función analítica en $w = 0$ y $F(x, 0) = 1$. Sea

$$F(x, w) = e^{Bw} \left(1 - \frac{Bw}{C}\right)^A f(x, w), \quad (56)$$

y $\{c_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}}$, la sucesión de coeficientes tales que

$$f(x, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) w^k, \quad (57)$$

donde A y B no dependen de w . Entonces $p_n(x)$ puede representarse mediante

$$p_n(x) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{C_{n-k}(\xi, C)}{(n-k)!}, \quad \xi = A, \quad z = B, \quad (58)$$

donde $C_n(x, C)$ son los polinomios de Charlier de grado n y orden C .

Demostración. La representación integral de $p_n(x)$ dada en (54) se puede escribir como

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{Bw} \left(1 - \frac{Bw}{C}\right)^A \frac{f(x, w)}{w^{n+1}} dw. \quad (59)$$

Por otro lado, observemos que $F(x, w)$ es una función analítica con respecto a la variable w y, además, $f(x, w) = e^{-Bw} \left(1 - \frac{Bw}{C}\right)^{-A} F(x, w)$. Así pues, $f(x, w)$ es analítica y por lo tanto,

$$f(x, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) w^k, \quad (60)$$

donde asumimos que $p_0(x) = 1$ (es decir, $c_0 = 1$).

Si sustituimos (60) en (59) obtenemos

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) e^{Bw} \left(1 - \frac{Bw}{C}\right)^A w^{k-n-1} dw. \quad (61)$$

Puesto que los términos del sumatorio correspondientes a los índices k tales que $k - n - 1 \geq 0$ son funciones analíticas en el interior del dominio de integración, entonces

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} c_k(x) e^{Bw} \left(1 - \frac{Bw}{C}\right)^A w^{k-n-1} dw = 0, \quad k \geq n + 1. \quad (62)$$

Por último, teniendo en cuenta la representación integral (54) de los polinomios de Charlier y realizando un cambio de variable adecuado se deduce (58). ■

La elección de los parámetros A , B , C viene dada por las condiciones $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Obtenemos así,

$$\begin{aligned} A &= \frac{4(p_1(x)^2 - p_2(x))^3}{(2p_1(x)^3 - 3p_1(x)p_2(x) + p_3(x))^2}, \\ B &= \frac{p_1(x)^2 p_2(x) - 2p_2(x)^2 + p_1(x)p_3(x)}{2p_1(x)^3 - 3p_1(x)p_2(x) + p_3(x)}, \\ C &= \frac{2(p_2(x) - p_1(x)^2)(p_1(x)^2 p_2(x) - 2p_2(x)^2 + p_1(x)p_3(x))}{(2p_1(x)^3 - 3p_1(x)p_2(x) + p_3(x))^2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Observemos que el parámetro C depende de la variable x . Por tanto, en ese caso, obtendremos un desarrollo de $p_n(x)$ en términos de polinomios de Charlier con un orden dependiente de x . Evidentemente, ésta no va a ser una propiedad deseable a la hora de analizar algunas propiedades de los polinomios $p_n(x)$, como por ejemplo al investigar sus ceros; por ello, trataremos de evitarla. En primer lugar, tenemos la opción de fijar este parámetro tomando, por ejemplo, $C = a$ (haciendo así que el orden sea independiente de x), y resolver el sistema dado por $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ para obtener los otros dos parámetros A y B . Otra opción a seguir es fijar dos parámetros y resolver la ecuación, $c_1 = 0$ para obtener el tercero.

Nuestro objetivo es analizar la naturaleza asintótica del desarrollo (58) para algún parámetro asintótico de los polinomios $p_n(x)$. Veremos que las propiedades asintóticas de los desarrollos obtenidos se derivan tanto del comportamiento de los coeficientes c_k como del carácter de los parámetros A , B y C en cada caso. Obtendremos desarrollos asintóticos tomando $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (tres parámetros libres); o bien, $c_1 = c_2 = 0$ (dos parámetros libres); o bien, $c_1 = 0$ (un parámetro libre). Analizaremos los tres casos considerando los polinomios de Meixner, de Krawtchouk, de Meixner-Pollaczek y de Jacobi.

3.1 Polinomios de Meixner en términos de polinomios de Charlier

Los polinomios de Meixner vienen dados por la función generadora

$$F(x, w) = \left(1 - \frac{w}{c}\right)^x (1 - w)^{-x-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} M_n(x, \beta, c) w^n, \quad (64)$$

con $\beta > 0$ y $0 < c < 1$. Si escribimos como en (56)

$$\left(1 - \frac{w}{c}\right)^x (1 - w)^{-x-\beta} = e^{Bw} \left(1 - \frac{B}{C}w\right)^A f(x, w), \quad (65)$$

con f definida de la misma manera que en (60), entonces el desarrollo (58) de los polinomios de Meixner en términos de los polinomios de Charlier es

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = z^n n! \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{C_{n-k}(\xi, C)}{(n-k)!}, \quad \xi = A, \quad z = B, \quad (66)$$

donde los coeficientes c_k se derivan de (60) con la función $F(x, w)$ definida en (64).

3.1.1 TRES PARÁMETROS LIBRES

En este caso, resolvemos el sistema $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} A &= \frac{((1-c^2)x - \beta c^2)^3}{(\beta c^3 + (c^3 - 1)x)^2}, \\ B &= -\frac{(c-1)^2 x(\beta+x)}{\beta c^3 + (c^3 - 1)x}, \\ C &= \frac{(c-1)^2 c x(\beta+x)((1-c^2)x - \beta c^2)}{(\beta c^3 + (c^3 - 1)x)^2}. \end{aligned} \quad (67)$$

Con esta elección, hemos comprobado que los primeros coeficientes c_k son

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{(c-1)^2 x(\beta+x)}{4c^2((1-c^2)x - \beta c^2)}.$$

El resto de coeficientes c_k para $k > 4$, se puede obtener mediante la siguiente relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [-h_1 k c_k - h_2 (k-1) c_{k-1} - h_3 (k-2) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (68)$$

donde

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{-\beta c^2(1+2c) + (2+c-c^2-2c^3)x}{c(\beta c^2 + (c^2-1)x)}, & h_3 &= \frac{-\beta c^3 + x - c^3 x}{c^2(\beta c^2 + (c^2-1)x)}, \\ h_2 &= \frac{\beta c^3(2+c) + (c-1)(1+c)^3 x}{c^2(\beta c^2 + (c^2-1)x)}, & h_4 &= -\frac{(c-1)^2 x(\beta+x)}{c^2(\beta c^2 + (c^2-1)x)}. \end{aligned} \quad (69)$$

Esta relación se obtiene sustituyendo el desarrollo en serie de Maclaurin de f en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} &-w^3(c-1)^2 x(\beta+x) f = \\ &= (c-w)(w-1) \left[\beta c^3(w-1) + (c+c^3(w-1)-w)x \right] \frac{df}{dw}, \end{aligned}$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (65).

De forma sencilla, por inducción con respecto a k , podemos probar que $c_k = \mathcal{O}(\beta^0)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$. En efecto:

- i) Para $k = 0, 1, 2, 3, 4$, es inmediato ver que $c_k = \mathcal{O}(\beta^0)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$.
- ii) Supongamos que $c_k = \mathcal{O}(\beta^0)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$ para todo $k \geq 4$. Por (69), $h_i = \mathcal{O}(\beta^0)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$ para cualquier valor de x . Por tanto, a partir de (68) concluimos

$$c_{k+1} = \mathcal{O}(\beta^0), \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Teniendo en cuenta que $c_k = \mathcal{O}(\beta^0)$, $z = B = \mathcal{O}(\beta^0)$ y $A = \mathcal{O}(\beta)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$, se deduce que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico dado por

$$\phi_k = \mathcal{O}(\beta^{n-k}), \quad \beta \rightarrow \infty$$

con $k = 0, 1, 2, \dots$. Teniendo en cuenta esto y que $c_0 = 1$ y $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, la naturaleza asintótica de la representación dada en (66) para valores grandes de β , con x y n fijos queda reflejada por

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = z^n \left[C_n(\xi, C) + \mathcal{O}(\beta^{n-4}) \right], \quad \xi = A, \quad z = B, \quad \beta \rightarrow \infty,$$

donde hemos señalado el primer término, puesto que constituye una aproximación de los polinomios de Meixner debidamente escalados.

Observemos que de esta representación no podemos obtener un límite para $\beta \rightarrow \infty$. Sin embargo, sí que se obtiene un límite si establecemos la relación

$$c = \frac{a}{a + \beta}.$$

Para este caso, a partir de la recurrencia (68), se deduce que los coeficientes c_k tienen el comportamiento asintótico $c_k = \mathcal{O}(\beta^{k-1})$ para $\beta \rightarrow \infty$. Por otro lado, los parámetros en este caso, vienen dados por

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta(-a^2 + 2ax + \beta x)^3}{(-a^3 + 3a^2x + 3a\beta x + \beta^2x)^2}, \\ B &= \frac{\beta(a + \beta)x(\beta + x)}{-a^3 + 3a^2x + 3a\beta x + \beta^2x}, \\ C &= -\frac{a\beta(a + \beta)x(\beta + x)(a^2 - 2ax - \beta x)}{(-a^3 + 3a^2x + 3a\beta x + \beta^2x)^2}. \end{aligned} \tag{70}$$

Con estos valores obtenemos que

$$c_k/z^k = \mathcal{O}(\beta^{-1}), \quad \beta \rightarrow \infty$$

y el desarrollo (82) se puede escribir

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, \frac{a}{a + \beta}) = z^n \left[C_n(\xi, C) + \mathcal{O}(\beta^{-1}) \right], \quad \xi = A, \quad z = B, \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Tomando límites en la expresión anterior

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \xi &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} A = x, \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} C &= a, \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{z^n}{(\beta)_n} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{B^n}{(\beta)_n} = 1, \end{aligned} \tag{71}$$

y obtenemos finalmente el límite ya conocido de la Tabla de Askey (ver Figura 12)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_n(x, \beta, \frac{a}{a + \beta}) = C_n(x, a). \tag{72}$$

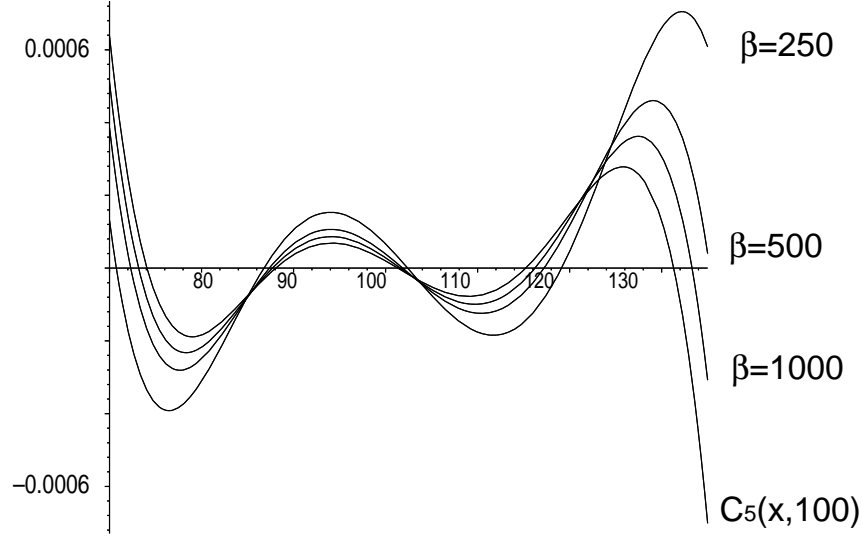


Figura 12: Límite (72) para $n = 5$.

3.1.2 DOS PARÁMETROS LIBRES

Ahora fijamos $B = 1$ y resolvemos el sistema $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ para obtener

$$A = \frac{(x - c(\beta + x - 1))^2}{(1 - c^2)x - \beta c^2}, \quad C = \frac{c(x - c(\beta + x - 1))}{\beta(1 - c^2)x - \beta c^2}.$$

Con esta elección comprobamos que los primeros coeficientes c_k son

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0,$$

$$c_3 = \frac{x(-1 + c^3 + x - 2cx + c^2x) + \beta(c^3 + x - 2cx + c^2x)}{3c^2(x - c(\beta + x - 1))}.$$

El resto se obtienen de la siguiente relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [h_1 k c_k + h_2 (k-1) c_{k-1} + (i_3 - h_3 (k-2)) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (73)$$

con

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{c - \beta c + c^2(1 - 2\beta - 2x) + 2x}{c(x - c(\beta + x - 1))}, \\ h_2 &= \frac{c^2(3\beta + 3x - 1) - x - 2cx}{c^2(x - c(\beta + x - 1))}, \\ h_3 &= \frac{x - c^2(x - \beta)}{c^2(x - c(\beta + x - 1))}, \\ h_4 &= \frac{x - c^2(x + \beta)}{c^2(x - c(\beta + x - 1))}, \\ i_3 &= \frac{(x + \beta)(c^3 + x - 2cx + c^2x) - x}{c^2(x - c(\beta + x - 1))}. \end{aligned} \quad (74)$$

Esta relación se obtiene al sustituir el desarrollo en serie de Maclaurin para la función f en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & -w^2(w-1)x + (\beta+x) [c^3 + x - 2cx + c^2(x-w)] f = \\ & = (c-w)(w-1) [cx - wx + c^2(1 + \beta(w-1) - x + wx)] \frac{df}{dw}, \end{aligned}$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (65).

Por inducción con respecto a k , probamos que $c_k = \mathcal{O}(\beta^0)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$. Como claramente $A = \mathcal{O}(\beta)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$, concluimos que la sucesión $\{\phi_k\}$, definida por $\phi_k = c_k/z^k C_{n-k}(\xi, C) = c_k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico dado por

$$\phi_k = \mathcal{O}(\beta^{n-k}) \quad \beta \rightarrow \infty$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Por lo tanto, como $c_0 = 1$ y $c_1 = c_2 = 0$, la naturaleza asintótica de la representación dada en (66) para valores grandes de β , con x y n fijos queda reflejada por

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = C_n(\xi, C) + \mathcal{O}(\beta^{n-3}), \quad \xi = A, \quad \beta \rightarrow \infty,$$

donde de nuevo hemos señalado el primer término, puesto que constituye una aproximación de los polinomios de Meixner debidamente escalados.

Como alternativa a la elección anterior, fijamos ahora el parámetro

$$C = aB$$

y resolvemos $c_1 = 0, c_2 = 0$ obteniendo

$$A = a^2 \left(\left(\frac{1}{c^2} - 1 \right) x - \beta \right), \quad B = \beta - a\beta - \frac{(c-1)(ac + a - c)}{c^2} x.$$

Hemos comprobado que los primeros c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{x(c - c^3 + a(c^3 - 1)) + \beta c^3(a - 1)}{3ac^3},$$

mientras que el resto, como antes, se derivan de una relación de recurrencia.

La función $f(x, w)$ de (65) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{\phi_1(w) + x\phi_2(w)},$$

donde las funciones

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= \beta \left((a-1)w - \log(1-w) + a^2 \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) \right), \\ \phi_2(w) &= \frac{w(c-1)(a-c+ac)}{c^2} - \log(1-w) - a^2 \left(\frac{1}{c^2} - 1 \right) \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) + \log \left(1 - \frac{w}{c} \right), \end{aligned}$$

tienen los siguientes desarrollos de Maclaurin

$$\phi_1(w) = \beta w^3 \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{a} \right) + \frac{w}{4} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) + \dots \right],$$

$$\phi_2(w) = w^3 \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{c^2} - 1 \right) - \frac{1}{c^3} \right) + w \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{c^2} - 1 \right) - \frac{1}{c^4} \right) + \dots \right].$$

Por el Lema 2.1, deducimos que la sucesión de coeficientes c_k tiene el orden $c_k = \mathcal{O}(\beta^{[k/3]})$ cuando $\beta \rightarrow \infty$. Considerando que C tiene el orden $\mathcal{O}(\beta)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$ si $a \neq 1$, observamos que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\begin{cases} \phi_k = \mathcal{O}(\beta^{[k/3]-k}), & \beta \rightarrow \infty, & k = 0, 1, 2, \dots, & \text{si } a \neq 1, \\ \phi_k = \mathcal{O}(\beta^{n+[k/3]-2k}), & \beta \rightarrow \infty, & k = 0, 1, 2, \dots, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Así pues, la naturaleza asintótica de la representación dada en (66) para valores grandes de β , con x y n fijos queda reflejada por

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = z^n \left[C_n(\xi, C) + \mathcal{O}(\beta^{-2}) \right], \quad \xi = A, \quad z = C/a, \quad (75)$$

para $\beta \rightarrow \infty$ si $a \neq 1$, y

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = z^n \left[C_n(\xi, C) + \mathcal{O}(\beta^{n-5}) \right], \quad \xi = A, \quad z = C, \quad (76)$$

para $\beta \rightarrow \infty$ si $a = 1$. Como siempre, hemos señalado el primer término del desarrollo, puesto que constituye una aproximación de los polinomios de Meixner debidamente escalados como se puede comprobar en la Figura (13).

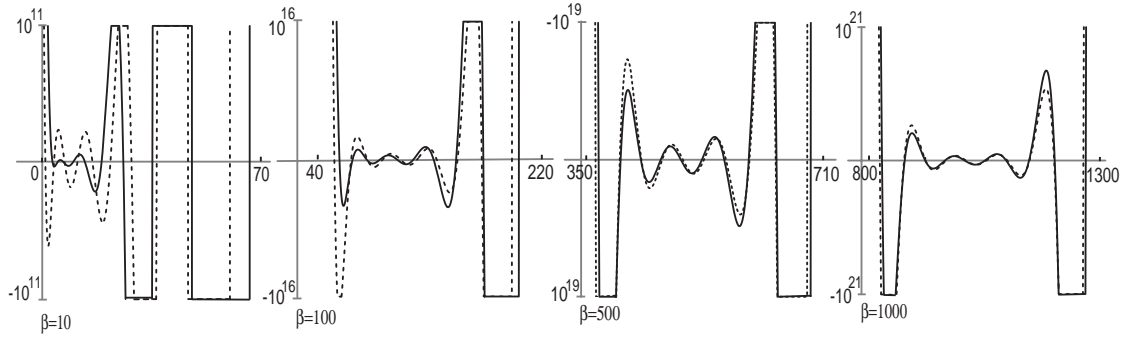


Figura 13: Aproximación (76) para $n = 10$. La línea discontinua representa $(\beta)_{10} M_{10}(x, \beta, c)$, la línea continua $z^{10} C_{10}(\xi, C)$

Si tomamos límites en (75), obtenemos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} z^{-n} (\beta)_n M_n(x, \beta, c) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} C_n(\xi, C) = (1-a)^{-n}, \quad z = C/a, \quad a \neq 1, \quad (77)$$

y dado que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} (\beta)_n / z^n = 1/(1-a)^n$ deducimos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_n(x, \beta, c) = 1, \quad 0 < c < 1. \quad (78)$$

3.1.3 UN PARÁMETRO LIBRE

En esta ocasión, fijamos $B = 1$, $C = a$ y resolvemos $c_1 = 0$ obteniendo

$$A = a \left(1 - \beta - x + \frac{x}{c} \right).$$

Ahora, la función $f(x, w)$ de (65) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{\phi_1(w) + \phi_2(x, w)},$$

donde las funciones

$$\phi_1(w) = \beta \left(a \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) - \log(1 - w) \right),$$

$$\phi_2(x, w) = -w - x \log(1 - w) + a \left(-1 + x - \frac{x}{c} \right) \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) + x \log \left(1 - \frac{w}{c} \right),$$

tienen los siguientes desarrollos de MacLaurin

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= \beta w^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a} \right) + \frac{w}{3} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) + \dots \right], \\ \phi_2(x, w) &= w^2 \left[\frac{1}{2a} + \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{ac} \right) + \frac{w}{3} \left(\frac{1}{a^2} + x \left(1 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^2c} \right) \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.1 tenemos que $c_k = \mathcal{O}(\beta^{\lfloor k/2 \rfloor})$ cuando $\beta \rightarrow \infty$. Así pues, la naturaleza asintótica de la representación obtenida en (66) para grandes valores de β se deriva del hecho de que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(\beta^{n+\lfloor k/2 \rfloor - k}), \quad \beta \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y por lo tanto, podemos escribir

$$(\beta)_n M_n(x, \beta, c) = C_n(\xi, a) + \mathcal{O}(\beta^{n-1}), \quad \xi = A, \quad (79)$$

para $\beta \rightarrow \infty$.

3.2 Polinomios de Krawtchouk en términos de polinomios de Charlier

Los polinomios de Krawtchouk vienen dados por la siguiente función generadora

$$F(x, w) = \left(1 - \frac{1-p}{p} w \right)^x (1+w)^{N-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} K_n(x, p, N) w^n, \quad (80)$$

con $N \in \mathbf{N}$ y $0 < p < 1$. Si escribimos como en (56)

$$\left(1 - \frac{1-p}{p} w \right)^x (1+w)^{N-x} = e^{Bw} \left(1 - \frac{B}{C} w \right)^A f(x, w), \quad (81)$$

con f definida igual que en (60), el desarrollo (58) de estos polinomios en términos de los polinomios de Charlier es

$$\binom{N}{n} K_n(x, p, N) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{C_{n-k}(\xi, C)}{(n-k)!}, \quad \xi = A, \quad z = B, \quad (82)$$

donde los coeficientes c_k se siguen de (60) con $F(x, w)$ dada en (80).

3.2.1 TRES PARÁMETROS LIBRES

En primer lugar, resolvemos $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ obteniendo así

$$\begin{aligned} A &= \frac{(Np^2 + x - 2px)^3}{(Np^3 + (-3p^2 + 3p - 1)x)^2}, \\ B &= \frac{(p-1)(N-x)x}{Np^3 + (-3p^2 + 3p - 1)x}, \\ C &= \frac{(1-p)p(N-x)x(Np^2 + x - 2px)}{(Np^3 + (-3p^2 + 3p - 1)x)^2}. \end{aligned} \quad (83)$$

Con esta elección hemos comprobado que los primeros coeficientes c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{(p-1)^2 x(x-N)}{4p^2(Np^2 + x - 2px)},$$

mientras que el resto se obtienen de la siguiente relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [-h_1 k c_k - h_2 (k-1) c_{k-1} - h_3 (k-2) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (84)$$

con

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{Np^2(3p-1) + (-7p^2 + 7p - 2)x}{p(Np^2 + x - 2px)}, & h_2 &= \frac{Np^3(3p-2) - (2p-1)^3 x}{p^2(Np^2 + x - 2px)}, \\ h_3 &= \frac{(p-1)(Np^3 + (-3p^2 + 3p - 1)x)}{p^2(Np^2 + x - 2px)}, & h_4 &= \frac{(p-1)^2 x(x-N)}{p^2(Np^2 + x - 2px)}. \end{aligned}$$

Esta relación resulta de sustituir el desarrollo de Maclaurin de f en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} w^3(p-1)^2 x(x-N) f &= \\ &= (w+1)(p-w+pw) \left(Np^3(1+w) + (p-w+3pw - p^2(2+3w))x \right) \frac{df}{dw} \end{aligned}$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (81).

Por inducción con respecto a k , utilizando la relación de recurrencia (84), comprobamos que $c_k = \mathcal{O}(N^0)$ cuando $N \rightarrow \infty$. Puesto que $A = \mathcal{O}(N)$ y $z = B = \mathcal{O}(N^0)$ cuando $N \rightarrow \infty$, podemos concluir que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(N^{n-k}), \quad N \rightarrow \infty$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Esto explica la naturaleza asintótica de la representación (82) para valores grandes de N , con x y n fijos:

$$\binom{N}{n} K_n(x, p, N) = z^n \left[\frac{C_{n-k}(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(N^{n-4}) \right], \quad \xi = A, \quad z = B,$$

para $N \rightarrow \infty$. El primer término de este desarrollo se puede utilizar para aproximar los polinomios de Krawtchouk para valores grandes de N .

En la representación anterior no podemos obtener un límite para $N \rightarrow \infty$. Sin embargo, sí que obtenemos un límite si establecemos

$$p = a/N.$$

Con esta elección, de la relación de recurrencia (84) se deriva que los coeficientes c_k tienen nuevamente el comportamiento $c_k = \mathcal{O}(N^0)$ cuando $N \rightarrow \infty$ y los parámetros (83) vienen dados por

$$\begin{aligned} A &= \frac{N(a^2 - 2ax + Nx)^3}{(a^3 - 3a^2x + 3aNx - N^2x)^2}, \\ B &= \frac{(a - N)N(N - x)x}{a^3 - 3a^2x + 3aNx - N^2x}, \\ C &= \frac{a(a - N)N(x - N)x(a^2 - 2ax + Nx)}{(a^3 - 3a^2x + 3aNx - N^2x)^2}, \end{aligned} \quad (85)$$

por lo que observamos que $c_k/z^k = \mathcal{O}(N^{-k})$ para $N \rightarrow \infty$ y el desarrollo (82) para valores grandes de N , con x y n fijos es

$$\binom{N}{n} K_n(x, \frac{a}{N}, N) = z^n \left[\frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(N^{-4}) \right], \quad \xi = A, \quad z = B.$$

Tomando límites en la aproximación anterior

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \xi &= \lim_{N \rightarrow \infty} A = x, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} C &= a, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n! \binom{N}{n}} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{B^n}{n! \binom{N}{n}} = 1, \end{aligned} \quad (86)$$

obtenemos finalmente el límite del esquema de Askey (ver Figura 14)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_n(x, \frac{a}{N}, N) = C_n(x, a). \quad (87)$$

3.2.2 DOS PARÁMETROS LIBRES

En este caso, fijamos $B = 1$ y resolvemos el sistema $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ obteniendo

$$A = \frac{(p - Np + x)^2}{Np^2 + x - 2px}, \quad C = \frac{p(p - Np + x)}{Np^2 + x - 2px}.$$

Hemos comprobado que los primeros coeficientes c_k vienen dados por

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \\ c_3 &= \frac{-N(p^3 + x - px) + x(1 + 3p^2 + x - p(x + 3))}{3p^2(-x + p(N - 1))}. \end{aligned}$$

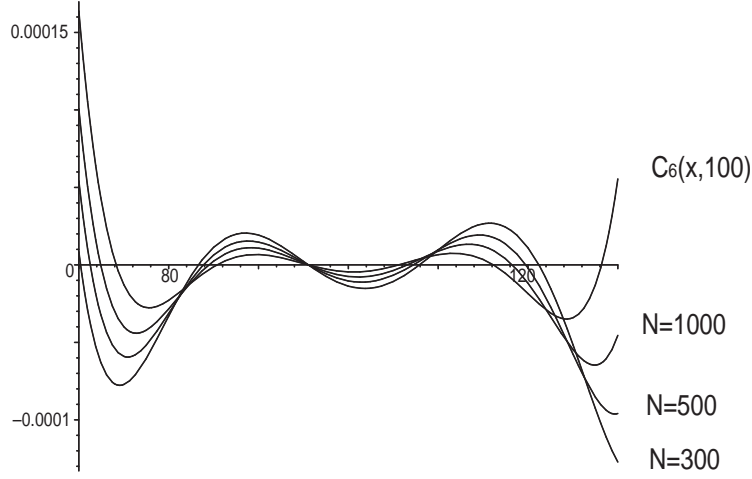


Figura 14: Límite (87) para $n = 5$.

El resto de coeficientes se pueden calcular con la siguiente relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [h_1 k c_k + h_2 (k-1) c_{k-1} + (i_3 - h_3 (k-2)) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (88)$$

donde

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{(2-3N)p^2 - 2x + p(4x + N - 1)}{p((N-1)p - x)}, \\ h_2 &= \frac{(1-3N)p^3 - p^2(1-2N-5x) + x - 5px}{p^2((N-1)p - x)}, \\ h_3 &= \frac{(p-1)(Np^2 + x - 2px)}{p^2((N-1)p - x)}, \\ h_4 &= \frac{(1-p)(Np^2 + x - 2px)}{p^2((N-1)p - x)}, \\ i_3 &= \frac{-N(p^3 + x - px) + x(1 + 3p^2 + x - p(3+x))}{p^2((N-1)p - x)}. \end{aligned} \quad (89)$$

Nuevamente, esta relación se obtiene sustituyendo el desarrollo de Maclaurin de la función f en la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} &w^2 \{-N(-p^2 w + p^3(1+w) + x - px) + \\ &+ x(1+w + p^2(3+2w) + x - p(3+3w+x))\} f = \\ &= (w+1)(p-w+pw) \left(p^2(-1+N+Nw) + wx - p(x+2wx) \right) \frac{df}{dw}, \end{aligned}$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (81).

Por inducción con respecto a k , probamos que $c_k = \mathcal{O}(N^0)$ cuando $N \rightarrow \infty$ y considerando que $A = \mathcal{O}(N)$ obtenemos que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k C_{n-k}(\xi, C) = c_k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(N^{n-k}) \quad N \rightarrow \infty$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Teniendo en cuenta esto, deducimos que la naturaleza asintótica de la representación (82) para valores grandes de N , con x y n fijos viene dada por

$$\binom{N}{n} K_n(x, p, N) = \frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(N^{n-3}), \quad \xi = A,$$

y el primer término es una buena aproximación de los polinomios de Krawtchouk debidamente escalados.

Como alternativa, fijamos

$$C = pB/(1-p)$$

y resolvemos el sistema $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ obteniendo

$$A = \frac{Np^2 + x - 2px}{(p-1)^2}, \quad B = \frac{x - N}{p-1}.$$

Hemos comprobado que los primeros coeficientes c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{N-x}{3p},$$

y el resto se obtienen de la correspondiente relación de recurrencia.

La función $f(x, w)$ de (81) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{N\phi_1(w) + x\phi_2(w)},$$

donde las funciones

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= \frac{1}{(p-1)^2} \left[(p-1)w + (p-1)^2 \log(w+1) - p^2 \log\left(1 + w - \frac{w}{p}\right) \right], \\ \phi_2(w) &= \frac{-1}{(p-1)^2} \left[(p-1)w + (p-1)^2 \log(w+1) - p^2 \log\left(1 + w - \frac{w}{p}\right) \right], \end{aligned}$$

tienen las siguientes series de Maclaurin

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= w^3 \left(\frac{1}{60p^4} \right) \left[20p^3 - 15w(-p^2 + 2p^3) - 12w^2(-p + 3p^2 - 3p^3) + \dots \right], \\ \phi_2(w) &= w^3 \left(\frac{-1}{60p^4} \right) \left[20p^3 - 15w(-p^2 + 2p^3) - 12w^2(-p + 3p^2 - 3p^3) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.1, $c_k = \mathcal{O}(N^{\lfloor k/3 \rfloor})$. Por tanto, la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$, tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(N^{\lfloor k/3 \rfloor - k}), \quad N \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

De esta manera, explicamos la naturaleza asintótica de la representación (82) para valores grandes de N :

$$\binom{N}{n} K_n(x, p, N) = z^n \left[\frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(N^{-2}) \right], \quad \xi = A, \quad z = \frac{(1-p)}{p} C, \quad (90)$$

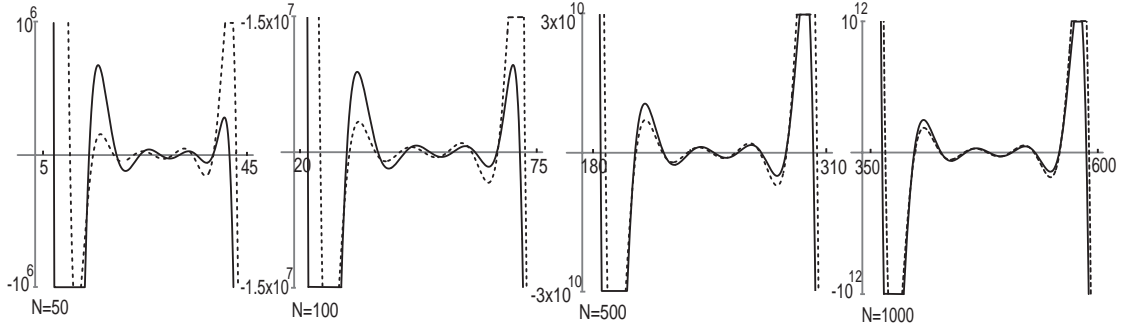


Figura 15: Aproximación (90) para $n = 10$. La línea discontinua representa $(\beta)_{10}M_{10}(x, \beta, c)$, la línea continua $z^9 C_9(\xi, C)/9!$

cuando $N \rightarrow \infty$. En la Figura 15 podemos ver reflejada la aproximación que proporciona el primer término de (90).

Si tomamos límites en (90), tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z^{-n} \binom{N}{n} K_n(x, p, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_n(A, C)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} (p-1)^n, \quad z = \frac{(1-p)C}{p}, \quad (91)$$

y, considerando que $\lim_{N \rightarrow \infty} \binom{N}{n}/z^n = (-1)^n (p-1)^n/n!$ obtenemos finalmente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_n(x, p, N) = 1, \quad 0 < p < 1. \quad (92)$$

3.2.3 UN PARÁMETRO LIBRE

Fijamos ahora $B = 1$ y $C = a$ y resolvemos $c_1 = 0$ para obtener

$$A = \frac{a(p - Np + x)}{p}.$$

En este caso, la función $f(x, w)$ de (81) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{N\phi_1(w) + \phi_2(x, w)},$$

donde las funciones

$$\phi_1(w) = \log(1+w) + a \log\left(1 - \frac{w}{a}\right),$$

$$\phi_2(x, w) = -\frac{1}{p} \left(px \log(1+w) + a(p+x) \log\left(1 - \frac{w}{a}\right) + p \left(w - x \log\left(1 + w - \frac{w}{p}\right) \right) \right),$$

tienen los siguientes desarrollos de Maclaurin

$$\phi_1(w) = w^2 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{3} w \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) + \dots \right],$$

$$\phi_2(x, w) = w^2 \left[\frac{1}{2a} + \frac{x}{2} \left(1 - \frac{(p-1)^2}{p^2} - \frac{1}{ap}\right) + \frac{w}{3} \left(\frac{1}{a^2} + x \left(\frac{(p-1)^3}{p^3} + \frac{1}{a^2 p} - 1 \right) \right) + \dots \right].$$

Por el Lema 2.1, concluimos que $c_k = \mathcal{O}(N^{\lfloor k/2 \rfloor})$ cuando $N \rightarrow \infty$. Por tanto, la naturaleza asintótica de la representación obtenida en (82), para valores grandes de N , se deriva del hecho de que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(N^{n+\lfloor k/2 \rfloor - k}), \quad N \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y entonces

$$\binom{N}{n} K_n(x, p, N) = \frac{C_n(\xi, a)}{n!} + \mathcal{O}(N^{n-1}), \quad \xi = A.$$

3.3 Polinomios de Meixner-Pollaczec en términos de polinomios de Charlier

Los polinomios de Meixner-Pollaczec vienen dados por la siguiente función generadora

$$F(x, w) = (1 - e^{i\phi}w)^{-\lambda+ix} (1 - e^{-i\phi}w)^{-\lambda-ix} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x, \phi) w^n, \quad (93)$$

con $\lambda > 0$ y $0 < \phi < \pi$. Si escribimos como en (56)

$$(1 - e^{i\phi}w)^{-\lambda+ix} (1 - e^{-i\phi}w)^{-\lambda-ix} = e^{Bw} \left(1 - \frac{B}{C}w\right)^A f(x, w), \quad (94)$$

el desarrollo (58) para estos polinomios es

$$P_n^{(\lambda)}(x, \phi) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k C_{n-k}(\xi, C)}{z^k (n-k)!}, \quad \xi = A, \quad z = B, \quad (95)$$

donde los coeficientes c_k se derivan de (60) con $F(x, w)$ definida en (93).

Si expresamos $x + i\lambda = r e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, $r \geq 0$, y consideramos el parámetro asintótico $r \rightarrow \infty$; los resultados que obtengamos se cumplirán uniformemente respecto a θ .

3.3.1 TRES PARÁMETROS LIBRES

Resolvemos el sistema $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_3 = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2(\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi))^3}{(\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi))^2} = -2r \frac{\sin^3(2\phi + \theta)}{\sin^2(3\phi + \theta)}, \\ B &= -\frac{2(\lambda^2 + x^2) \sin^2 \phi}{\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi)} = -2r \frac{\sin^2 \phi}{\sin(3\phi + \theta)}, \\ C &= -\frac{2(\lambda^2 + x^2) \sin^2 \phi (\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi))}{(\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi))^2} = -2r \frac{\sin^2 \phi \sin(2\phi + \theta)}{\sin^2(3\phi + \theta)}. \end{aligned} \quad (96)$$

Los primeros coeficientes c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0,$$

$$c_4 = -\frac{(\lambda^2 + x^2) \sin^2 \phi}{2(\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi))} = -r \frac{\sin^2 \phi}{2 \sin(2\phi + \theta)},$$

mientras que el resto se derivan de la relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [-h_1 k c_k - h_2 (k-1) c_{k-1} - h_3 (k-2) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (97)$$

con

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{\lambda \cos \phi + 2\lambda \cos(3\phi) + x(\sin \phi + 2 \sin(3\phi))}{\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi)} = -\frac{\sin(\phi + \theta) + 2 \sin(3\phi + \theta)}{\sin(2\phi + \theta)}, \\ h_2 &= \frac{2\lambda \cos(2\phi) + \lambda \cos(4\phi) + 8x \cos^3 \phi \sin \phi}{\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi)} = 2 + \frac{\sin(4\phi + \theta)}{\sin(2\phi + \theta)}, \\ h_3 &= -\frac{\lambda \cos(3\phi) + x \sin(3\phi)}{\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi)} = -\frac{\sin(3\phi + \theta)}{\sin(2\phi + \theta)}, \\ h_4 &= -\frac{2(\lambda^2 + x^2) \sin^2 \phi}{\lambda \cos(2\phi) + x \sin(2\phi)} = -2r \frac{\sin^2 \phi}{\sin(2\phi + \theta)}. \end{aligned}$$

Esta relación se obtiene sustituyendo la serie de Maclaurin de la función f en la ecuación diferencial

$$-w^3 2r \sin^2 \phi f = -(1 + w^2 - 2w \cos \phi) (-\sin(2\phi + \theta) + w \sin(3\phi + \theta)) \frac{df}{dw},$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (94).

En este caso, la función $f(x, w)$ de (94) tiene la forma

$$f(x, w) = e^{r\phi_1(w) + \phi_2(w)},$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= i e^{i\theta} \log \left(\frac{1 - w e^{i\phi}}{1 - w e^{-i\phi}} \right) + 2w \frac{\sin^2 \phi}{\sin(3\phi + \theta)} + \frac{\sin^3(2\phi + \theta)}{\sin^2(3\phi + \theta)} \log \left(1 - w \frac{\sin(3\phi + \theta)}{\sin(2\phi + \theta)} \right), \\ \phi_2(w) &= 0, \end{aligned}$$

y el desarrollo de Maclaurin de $\phi_1(x, w)$ es

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= w^4 \left(\frac{\sin^2 \phi}{60 \sin^3(2\phi + \theta)} \right) \{15[-1 + \cos(2(2\phi + \theta))]\} + \\ &\quad + 12w [-3 \cos \phi + \cos(3\phi + 2\theta) + 2 \cos(5\phi + 2\theta)] + \dots \}. \end{aligned}$$

Así, por el Lema 2.1 concluimos que $c_k = \mathcal{O}(r^{[k/4]})$ cuando $r \rightarrow \infty$, y considerando que $A = \mathcal{O}(r)$, $C = \mathcal{O}(r)$ y $z = B = \mathcal{O}(r)$ cuando $r \rightarrow \infty$ obtenemos que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k / z^k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(r^{[k/4]-k}), \quad r \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La naturaleza asintótica de la representación (95) para valores grandes de N , con x y n fijos queda reflejada mediante

$$P_n^{(\lambda)}(x, \phi) = z^n \left[\frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(r^{-3}) \right], \quad \xi = A, \quad z = B, \quad (98)$$

para $r \rightarrow \infty$ uniformemente respecto a θ . Tomando límites en (98) obtenemos finalmente

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\lambda^{-n} P_n^{(\lambda)}(x, \phi) \right] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{C_n(A, C)}{n!} = \frac{2^n}{n!} (2 \cos(2\phi) - 1)^n \cos^{2n} \phi \cos^{-n}(3\phi). \quad (99)$$

3.3.2 DOS PARÁMETROS LIBRES

Fijamos $B = 1$ y resolvemos $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ obteniendo

$$A = -\frac{(1 - 2r \sin(\phi + \theta))^2}{2r \sin(2\phi + \theta)}, \quad C = \frac{-1 + 2r \sin(\phi + \theta)}{2r \sin(2\phi + \theta)}.$$

Los primeros coeficientes c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{2r(r - r \cos(2\phi) + \sin(3\phi + \theta))}{3(-1 + 2r \sin(\phi + \theta))},$$

mientras que el resto se obtiene de la relación de recurrencia

$$c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)} [h_1 k c_k + h_2 (k-1) c_{k-1} + (i_3 - h_3 (k-2)) c_{k-2} + h_4 c_{k-3}], \quad (100)$$

con

$$\begin{aligned} h_1 &= 2 \cos \phi - \frac{2r \sin(3\phi + \theta)}{1 - 2r \sin(\phi + \theta)}, & h_3 &= \frac{2r \sin(2\phi + \theta)}{1 - 2r \sin(\phi + \theta)}, \\ h_2 &= \frac{-1 + 4r \sin(\phi + \theta) + 2r \sin(3\phi + \theta)}{1 - 2r \sin(\phi + \theta)}, & h_4 &= -\frac{2r \sin(2\phi + \theta)}{1 - 2r \sin(\phi + \theta)}, \\ i_3 &= -\frac{2r(-r + r \cos(2\phi) - \sin(3\phi + \theta))}{1 - 2r \sin(\phi + \theta)}, \end{aligned} \quad (101)$$

Nuevamente, esta relación resulta de sustituir la serie de Maclaurin de la función f en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} w^2 2r(r - r \cos(2\phi) - w \sin(2\phi + \theta) + \sin(3\phi + \theta)) f = \\ = (1 + w^2 - 2w \cos \phi) (1 - 2r \sin(\phi + \theta) + 2rw \sin(2\phi + \theta)) \frac{df}{dw}, \end{aligned}$$

obtenida al derivar en ambos miembros de (94).

A través de la relación de recurrencia, por inducción con respecto de k , probamos que $c_k = \mathcal{O}(r)$ cuando $r \rightarrow \infty$. Puesto que $A = \mathcal{O}(r)$ cuando $r \rightarrow \infty$, tenemos que la sucesión $\{\phi_k\}$, con $\phi_k = c_k / z^k C_{n-k}(\xi, C) = c_k C_{n-k}(\xi, C)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(r^{n+1-k}), \quad r \rightarrow \infty,$$

uniformemente con respecto a θ , y para $k = 0, 1, 2, \dots$. La naturaleza asintótica de la representación obtenida en (95) queda reflejada por

$$P_n^{(\lambda)}(x, \phi) = \frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(r^{n-2}), \quad \xi = A,$$

para $r \rightarrow \infty$, uniformemente respecto de θ .

Alternativamente, resolvemos ahora el sistema $c_1 = 0, c_2 = 0$ *B* fijando

$$C = aB$$

y obtenemos

$$A = -2a^2r \sin(2\phi + \theta), \quad B = 2r (\sin(\phi + \theta) - a \sin(2\phi + \theta)).$$

Hemos comprobado que los primeros c_k vienen dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{2r (-\sin(2\phi + \theta) + a \sin(3\phi + \theta))}{3a}.$$

Coefficientes de mayor grado vienen dados por la correspondiente relación de recurrencia.

Nuevamente, la función $f(x, w)$ de (94) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{\phi_1(w) + \phi_2(w)},$$

con

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= ie^{i\theta} \log \left(\frac{1 - we^{i\phi}}{1 - we^{-i\phi}} \right) + \log \left(\sin \theta \frac{1 - we^{i\phi}}{1 - we^{-i\phi}} \right) - 2w \sin(\phi + \theta) + \\ &+ a \left[w + a \log \left(1 - \frac{w}{a} \right) \right] \sin(2\phi + \theta), \end{aligned}$$

$$\phi_2(w) = 0,$$

y el desarrollo de Maclaurin de $\phi_1(w)$ es

$$\begin{aligned} \phi_1(w) &= rw^3 \left(\frac{1}{30a^2} \right) \{ 20a^3 [-\sin(2\phi + \theta) + a \sin(3\phi + \theta)] + \\ &15a^2w [-\sin(2\phi + \theta) + a^2 \sin(4\phi + \theta)] + \dots \}. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.1 tenemos que $c_k = \mathcal{O}(r^{[k/3]})$ cuando $r \rightarrow \infty$. Así, la naturaleza asintótica para valores grandes de r de la representación en (95) se deriva del hecho de que la sucesión $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$ tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(r^{[k/3]-k}), \quad r \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y entonces

$$P_n^{(\lambda)}(x, \phi) = z^n \left[\frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right], \quad \xi = A, \quad z = C/a, \quad (102)$$

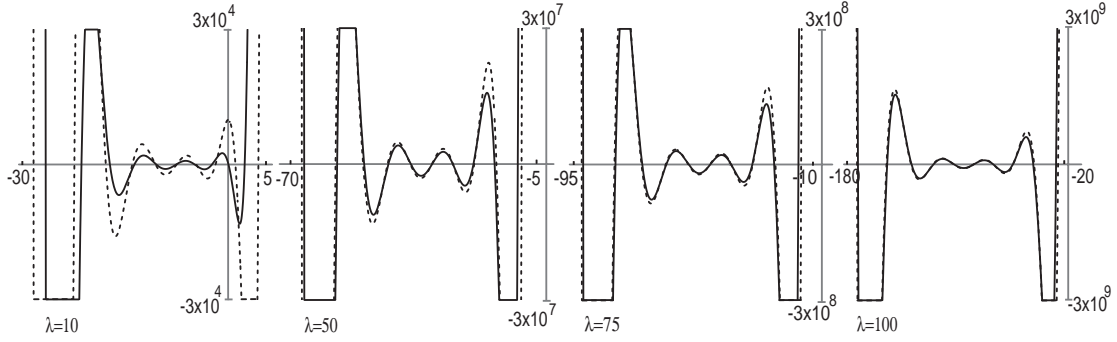


Figura 16: Aproximación (102) para $n = 10$. La línea discontinua representa $P_{10}^{(\lambda)}(x, \phi)$, la línea continua $z^{10}C_{10}(\xi, C)/10!$

para $r \rightarrow \infty$, uniformemente con respecto a θ . Por ello, el primer término de este desarrollo es una buena aproximación de los polinomios como se ilustra en la Figura 16.

Tomando límites en (102) obtenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[z^{-n} P_n^{(\lambda)}(x, \phi) \right] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{C_n(A, C)}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\cos \phi}{\cos \phi - a \cos(2\phi)} \right)^n, \quad z = C/a. \quad (103)$$

3.3.3 UN PARÁMETRO LIBRE

Fijamos $B = 1$, $C = a$ y resolvemos $c_1 = 0$ obteniendo

$$A = a(1 - 2r \sin(\phi + \theta)).$$

Expresamos ahora la función $f(x, w)$ de (94) como

$$f(x, w) = e^{r\phi_1(w) + \phi_2(w)},$$

donde las funciones

$$\phi_1(w) = ie^{i\theta} \log(1 - we^{i\phi}) - ie^{-i\theta} \log(1 - we^{-i\phi}) + 2a \log\left(1 - \frac{w}{a}\right) \sin(\phi + \theta),$$

$$\phi_2(w) = -w - a \log\left(1 - \frac{w}{a}\right),$$

tienen los siguientes desarrollos de Maclaurin

$$\begin{aligned} \phi_1(w) = w^2 \left(\frac{1}{3a^5} \right) \{ & 3a^4 [-\sin(\phi + \theta) + a \sin(2\phi + \theta)] + \\ & + 2a^3 w [-\sin(\phi + \theta) + a \sin(3\phi + \theta)] + \dots \}, \end{aligned}$$

$$\phi_2(w) = w^2 \left(\frac{1}{a^5} \right) \left(\frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{3}a^3 w + \frac{1}{4}a^2 w^2 + \frac{1}{5}a w^3 + \dots \right).$$

Por el Lema 2.1, tenemos que $c_k = \mathcal{O}(r^{[k/2]})$ cuando $r \rightarrow \infty$, y considerando que $A = \mathcal{O}(r)$ concluimos en que $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$ tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}(r^{n+[k/2]-k}), \quad r \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y por lo tanto,

$$P_n^{(\lambda)}(x, \phi) = \frac{C_n(\xi, a)}{n!} + \mathcal{O}(r^{n-1}), \quad \xi = A,$$

para $r \rightarrow \infty$ uniformemente respecto a θ .

3.4 Polinomios de Jacobi en términos de polinomios de Charlier

Los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ están definidos por la función generadora

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1+R-w)^\alpha(1+R+w)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) w^n, \quad R = \sqrt{1-2xw+w^2}, \quad x, w \in \mathbf{C}, \quad (104)$$

con $\alpha > -1$ y $\beta > -1$. Si escribimos como en (56)

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1+R-w)^\alpha(1+R+w)^\beta} = e^{Bw} \left(1 - \frac{B}{C}w\right)^A f(x, w), \quad (105)$$

con f definida en (60). El desarrollo (58) de los polinomios de Jacobi es

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = z^n \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \frac{C_{n-k}(\xi, C)}{(n-k)!}, \quad \xi = A, \quad z = B. \quad (106)$$

donde los coeficientes c_k se siguen de (60) con $F(x, w)$ dada en (104).

3.4.1 DOS PARÁMETROS LIBRES

Fijamos $C = B$ y resolvemos A y B con $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. Obtenemos así

$$A = \frac{1}{4} \left(4 + \alpha + \beta - 2x(\alpha - \beta) + x^2(-8 - 3(\alpha + \beta))\right),$$

$$B = -\frac{1}{4}(x-1)(4 + \alpha + \beta + 2(\alpha - \beta) + x(8 + 3(\alpha + \beta))).$$

Los primeros coeficientes c_k están dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = 0,$$

$$c_3 = \frac{1}{3} + \frac{\beta}{6} + \left(-1 - \frac{5\alpha}{12} - \frac{\beta}{12}\right)x + \left(\frac{-2}{3} - \frac{\beta}{2}\right)x^2 + \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{12}(\alpha + \beta)\right)x^3,$$

$$c_4 = \frac{1}{2} + \frac{7}{64}(-\alpha + \beta) + \frac{5}{16}(-\alpha + \beta)x + \left(-\frac{5}{2} - \frac{21}{32}(\alpha + \beta)\right)x^2$$

$$+ \frac{5}{16}(\alpha - \beta)x^3 + \left(2 + \frac{35}{64}(\alpha + \beta)\right)x^4.$$

Estudiamos ahora el comportamiento asintótico cuando $\alpha + \beta \rightarrow \infty$ con $(\alpha - \beta)/(\alpha + \beta) \rightarrow 0$. De este modo, tenemos que la función $f(x, w)$ de (105) se puede expresar como

$$f(x, w) = e^{\beta\phi_1(x, w) + \phi_2(x, w)},$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_1(x, w) &= \frac{1}{4}w(x-1)(6x+2) + 2\log 2 + \frac{1}{4}(6x^2-2)\log(1-w) - \log\left((R+1)^2 - w^2\right), \\ \phi_2(x, w) &= w\left[-1 - \frac{3(\alpha-\beta)}{4} - x + 2x^2 + \frac{3(\alpha-\beta)x^2}{4}\right] + (\alpha-\beta)\log 2 + \\ &+ \left[-1 + 2x^2 + \frac{(\alpha-\beta)}{4}(-1 + 2x + 3x^2)\right]\log(1-w) - \log R - (\alpha-\beta)\log(1-w+R),\end{aligned}$$

tienen un desarrollo de Maclaurin de la forma

$$\begin{aligned}\phi_1(x, w) &= w^3\left(\frac{1}{48}\right)\left[8(1-3x-3x^2+5x^3) + 15w(1-6x^2+5x^4) + \dots\right], \\ \phi_2(x, w) &= w^3\left(\frac{1}{960}\right)\left\{(x-1)\left[80(-4+(8+5(\alpha-\beta))x+(16+5(\alpha-\beta))x^2)\right] + \right. \\ &\quad \left.+ 15w(x+1)\left(-32+(-7+20(\alpha-\beta))x+(128+35(\alpha-\beta))x^2\right) + 12w^2(\dots) + \dots\right\}.\end{aligned}$$

Por el Lema 2.1, tenemos que $c_k = \mathcal{O}((\alpha+\beta)^{\lfloor k/3 \rfloor})$ para $\alpha+\beta \rightarrow \infty$ y $(\alpha-\beta)/(\alpha+\beta) \rightarrow 0$. La sucesión $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$, tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}((\alpha+\beta)^{\lfloor k/3 \rfloor - k}), \quad \alpha+\beta \rightarrow \infty, \quad \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

lo que explica la naturaleza asintótica de la representación (106) para valores grandes de $\alpha+\beta$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = z^n \left[\frac{C_n(\xi, C)}{n!} + \mathcal{O}((\alpha+\beta)^{-2}) \right], \quad \xi = A, \quad z = C, \quad (107)$$

para $\alpha+\beta \rightarrow \infty$ y $(\alpha-\beta)/(\alpha+\beta) \rightarrow 0$. Por ello, el primer término de este desarrollo es una buena aproximación de los polinomio como nos muestra la Figura 17.

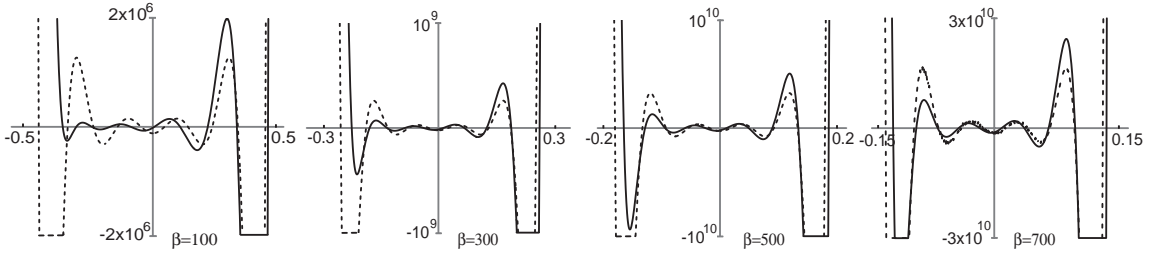


Figura 17: Aproximación (107) para $n = 10$. La línea discontinua representa $P_{10}^{(\alpha,\beta)}(x, \phi)$, la línea continua $z^{10}C_{10}(\xi, C)/10!$

Finalmente, tomando límites obtenemos

$$\lim_{\alpha+\beta \rightarrow \infty} (\alpha+\beta)^{-n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \lim_{\alpha+\beta \rightarrow \infty} \frac{C_n(A, C)}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n. \quad (108)$$

que ilustramos en la Figura 18.

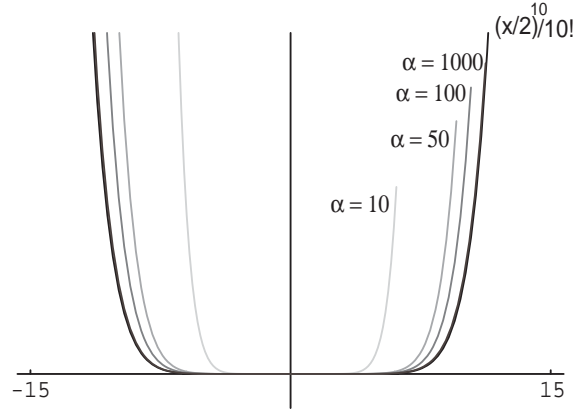


Figura 18: Límite (108) para diferentes $\alpha = \beta$ y $n = 10$ se representan $(\alpha + \beta)^{-n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ y $(x/2)^{10}/10!$.

3.4.2 UN PARÁMETRO LIBRE

Fijamos $B = 1$ y $C = a$ y resolvemos $c_1 = 0$ para obtener

$$A = -\frac{1}{2}a(2(x-1) + \alpha - \beta + (\alpha + \beta)).$$

Los primeros coeficientes c_k son

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{8}(\alpha + \beta) - \frac{1}{4a}(\alpha - \beta) - \left(\frac{2}{a} - (\alpha - \beta) + \frac{1}{a}(\alpha + \beta)\right) \frac{x}{4} + \left(1 + \frac{3}{8}(\alpha + \beta)\right) x^2.$$

Nuevamente, analizamos la naturaleza asintótica para $\alpha + \beta \rightarrow \infty$ y $(\alpha - \beta)/(\alpha + \beta) \rightarrow 0$. La función $f(x, w)$ de (105) se puede escribir como

$$f(x, w) = e^{\beta\phi_1(x, w) + \phi_2(x, w)},$$

donde las funciones

$$\phi_1(x, w) = 2 \log 2 + ax \log\left(1 - \frac{w}{a}\right) - \log\left((R+1)^2 - w^2\right),$$

$$\phi_2(x, w) = -w + (\alpha - \beta) \log 2 + \left(x - 1 + \frac{(\alpha - \beta)(x+1)}{2}\right) \log\left(1 - \frac{w}{a}\right)$$

$$- \log R - (\alpha - \beta) \log(1 - w + R),$$

tienen los siguientes desarrollos de Maclaurin

$$\phi_1(x, w) = \frac{w^2}{96a^5} \left\{ -24a^5 + -48a^4x + 72a^5x^2 + w \left[(-32^3 - 48a^5)x + 80a^5x^2 \right] + \right.$$

$$\left. + w^2 \left[9a^5 - 24a^2x - 90a^5x^2 + 105a^5x^4 \right] + \dots \right\},$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x, w) = & \frac{w^2}{24a^5} \left\{ a^5 \left[-24 - 3(\alpha - \beta) + 6(\alpha - \beta)x + 24x^2 + 9(\alpha - \beta)x^2 \right] + \right. \\ & + 6a^4 \left[2 - (\alpha - \beta) - (2 + (\alpha - \beta))x \right] + w \left[8a^3 - 4a^3(\alpha - \beta) - 2a^5(\alpha - \beta) + \right. \\ & + (-8a^3 - 24a^5 - 4a^3(\alpha - \beta) - 6a^5(\alpha - \beta))x + 6a^5(\alpha - \beta)x^2 + \\ & \left. \left. + (32a^5 + 10a^5(\alpha - \beta))x^3 \right] + w^2(\dots) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.1, concluimos que $c_k = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{\lfloor k/2 \rfloor})$. Por tanto, la sucesión $\phi_k = c_k/z^k H_{n-k}(\xi)$ tiene el comportamiento asintótico

$$\phi_k = \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{n+\lfloor k/2 \rfloor - k}), \quad (\alpha + \beta) \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y para valores grandes de $\alpha + \beta$ la naturaleza asintótica de (106), viene dada por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{C_n(\xi, a)}{n!} + \mathcal{O}((\alpha + \beta)^{n-1}), \quad \xi = A,$$

para $(\alpha + \beta) \rightarrow \infty$.

Referencias

- [1] R. A. Askey, *Orthogonal polynomials and special functions*, S.I.A.M., Philadelphia, 1975.
- [2] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [3] E. Godoy, A. Ronveaux, A. Zarzo and I. Area, On the limit relations between classical continuous and discrete orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.* **91** (1998) 97-105.
- [4] E. Godoy, A. Ronveaux, A. Zarzo and I. Area, Transverse limits in the Askey tableau, *J. Comp. Appl. Math.* **99** (1998) 327-335.
- [5] X. S. Jin and R. Wong, Uniform asymptotic expansions for Meixner polynomials, *Constr. Approx.* **14** (1998) 113-150.
- [6] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, Askey scheme or hypergeometric orthogonal polynomials, <http://aw.twi.tudelft.nl/koekoek/askey>, (1999)
- [7] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th edition, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Providence, R.I., 1975.
- [8] J.L. López and N. M. Temme, Approximations of orthogonal polynomials in terms of Hermite polynomials, *Meth. Appl. Anal.* **6** (1999) 131-146.

- [9] J.L. López and N. M. Temme, Hermite polynomials in asymptotic representations of generalized Bernoulli, Euler, Bessel and Buchholz polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* **239** (1999) 457-477.
- [10] J.L. López and N. M. Temme, The Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials viewed from asymptotic analysis, *J. Comp. Appl. Math.* **133** (2001) 623-633.
- [11] B. Rui and R. Wong, Uniform asymptotic expansions of Charlier polynomials, *Meth. Appl. Anal.* **1** (1994) 294-313.
- [12] Frenzen, C.L., and R. Wong, Uniform asymptotic expansions of Laguerre polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **19** (1988) 1232-1248.

Tomographic images of the Mediterranean basin obtained by spatial prediction (kriging)

José Badal[†], Javier Sabadell[†] and Francisco J. Serón[‡]

[†]Physics of the Earth, Ciencias-B, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza

[‡]Computation Sciences, CPS, Universidad de Zaragoza, 50015 Zaragoza

Abstract

The purpose of this work is to give briefly an overall view of the shear wave velocity structure of the lithosphere-asthenosphere system beneath the Mediterranean basin, providing new tomographic images obtained through a method of spatial prediction applied to a common database. The starting data are path-averaged Rayleigh-wave group velocities previously determined by standard digital filtering, and then inverted by a damped least-squares. We use an interpolation method as kriging, especially useful for analysing short-range variability between scattered points. The results are shown by means of characteristic seismic velocities belonging to a prefixed interval, and horizontal slices at increasing reference depths down to 200 km. The method has allowed us to constrain the sharply contrasting seismic velocity structure between neighbouring areas of the Mediterranean. The images reveal significant variations in velocity with depth, and lateral changes in the crust and uppermost mantle elastic structure emphasising the processes associated with the convergence of the Eurasian and African plates.

Key words: surface waves, kriging, tomography, Mediterranean basin

1. Database and data processing

On the basis of surface waves propagating at a regional scale, we considered a total of 42 regional earthquakes selected from the USGS catalogue with M_s values ≥ 4.5 and focal depths ≤ 40 km, that occurred during the period 1990-1993, which were recorded at seismic stations installed in the Mediterranean area. The data set for this study consists of almost 200 wave trains generated by regional events recorded at very broad-band stations (Figure 1, upper part) belonging to or cooperating with the MedNet project (Boschi et al., 1988; Giardini et al., 1992). Epicentral distances mainly range from 500 to 1,500 km

and the path coverage (Figure 1, lower part) is fairly good on account of the relevant seismicity of the area despite the irregular distribution of stations (Martínez et al., 1996).

Our work benefited from the constructive pre-processing of real data. The basic information consists of path-averaged group velocities of fundamental mode Rayleigh waves across the Mediterranean basin. Reliable source-receiver, group-velocity dispersion up to periods of 90 s was determined by moving-window analysis on the signal to obtain approximate group arrival times. Afterwards, a correction of the waveform using a time-variable filter was performed in order to measure with the least possible bias the dispersion of the wave train (Badal et al., 1990, 1992). In principle, the wavelengths used sample well depths down to 160 km or even more.

Starting from path integrals that are representative of group times, local group velocities for periods ranging between 10 and 90 s over the area covered by the seismic trajectories were mapped. This operation involving linear inversion of travel times, was made as a previous step to volumetric modelling, and performed by means of the method proposed by Ditmar and Yanovskaya (1987) and Yanovskaya and Ditmar (1990). More recent applications can be found in Lana et al. (1997, 1999) and Yanovskaya et al (1998, 2000). Figure 2 shows as an example the local group-velocity contour map for a reference period of 40 s. Most remarkable lateral changes in group velocity are found for short periods ≤ 40 s. Longer periods show smooth lateral changes. The velocity uncertainties do not exceed 0.09 km/s and mainly range from 0.04 to 0.07 km/s for all periods, even in those areas with the poorest path coverage, such as south of the central Mediterranean and easternmost part of the basin (Figure 1).

The local velocities were inverted to shear velocity-depth profiles at almost 450 grid points over the study region using damped least-squares. The compressional and shear velocities and densities given by the PREM model (Dziewonski and Anderson, 1981) were taken as initial model to carry out inversion for velocity structure. The stochastic inversion of all these local dispersion curves permits to obtain the respective 1-D velocity-depth models, and to regard this set as linear constraints on the averaged properties of the 3-D shear wave velocity distribution. The reliability of the inversion results was tested by comparing the observed dispersion with the theoretical dispersion obtained after solving the forward problem, and their resolution through the kernels of the resolution matrix (Badal et al., 1996). In our case both procedures illustrate the good quality of the solution down to 160 km and sometimes at greater depths.

2. Spatial prediction

Our working scheme involves inversion and then volumetric modelling. In this context volumetric modelling implies spatial prediction that we perform using an interpolation method as kriging. A brief description of the mathematical content of kriging is depicted in Serón et al. (2001), where exact-type methods and approximate methods to reconstruct 3-D Earth structures from irregularly sampled seismic data are briefly described and compared. From a theoretical viewpoint, kriging is based on the theory of regionalised variables (Davis, 1986). It is a distance weighting estimation method that takes advantage of the spatial characteristics of the local structure through the variogram function. When the variogram is well known and well behaved, the resulting estimate is stated to be the best, linear, unbiased estimate that can be calculated (Isaaks and Srivastava, 1989).

The weighted contribution of each scattered datum is controlled not only by its relative position respect to the estimation point, but also by the specific spatial properties of the data involved in the estimation (Krajewski and Gibbs, 1996). When applying this technique, a number of matrix calculations must be completed as follows. A set of simultaneous equations are set up, which calculate the mean square difference between all the possible pairs of data point values, giving a matrix that we refer as $[K]$. A second matrix $[M]$ is computed in order to calculate the mean square difference between each scattered point value and the point to be estimated. This calculation is carried out using values from the variogram. The imposition of normalised weights is performed by a Lagrangian coefficient. The equation

$$[K] = [M][\lambda]$$

is inverted to obtain the kriging weights λ_i for each scattered data point value. With these weights the velocity estimation can be performed through the equation

$$\tilde{\nu} = \sum_i \lambda_i \nu(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Kriging provides an estimate of the error and confidence interval for every one of the unknown points, an asset not provided by other interpolation procedures. This information reflects the density and distribution of control points, and the degree of spatial autocorrelation, and therefore is very useful to analyse the reliability of the process. The error map may also be used to determine where more information is needed, so that future sampling may be planned.

Among the positive aspects of this technique we can say the following advantages. Kriged weights result in mean square error that is equal to zero. Kriging can estimate beyond the minimum and maximum values of the scattered data. Kriging can model both regional trends and local anomalies. Kriging is a robust estimator. Despite the

model presented below is based on the same data as used by Martínez et al. (2000), these advantages make it in principle a better one than simply applying linear interpolation to space-distributed shear wave velocity. As for disadvantages, kriging is not easy to understand mathematically and needs experienced staff with geostatistical techniques.

Many types of kriging are available and are used in different situations. In this work we are chosen “ordinary kriging”. It is the most widely used type of kriging, and permits to estimate values when data point values vary or fluctuate around a constant mean value.

To substantiate the reliability of the results provided by the imaging technique that we use, to ensure that the method works well, we take into account two aspects related to our spatial interpolator: accuracy and computational efficiency. This task has extensively been developed by Serón et al. (2001). The accuracy and computational efficiency of the spatial interpolator used have numerically been tested by synthetic outputs from the reconstruction of specific volumes whose (geometrical and physical) characteristics are known. The outputs so obtained prove the reliability of the final solution. Relative errors due to the algorithm measured under the l1-norm, for all the numerical tests, are in all cases fewer than 2-3%. This is indeed important for interpretation, as even though the numerical error does not reflect the error due to scatter of real data, the structures given and interpreted below may be considered actually resolved.

3. Results and interpretation

We directly supply shear wave velocity values, instead of positive and negative velocity anomalies, in any case estimated with the help of an interpolator not used until now. The idea, according to our stated main objective, is to review the S-wave velocity patterns concerning the Mediterranean basin, to constraint the contrasting seismic velocity structure between neighbouring areas of the basin, and to enhance the most conspicuous structural features.

After computing a three-dimensional matrix of voxelized data and using a 3-D data visualisation system, we have got tomographic images regarding the S-wave velocity structure beneath the Mediterranean basin. The most outstanding results are shown in Figures 3 and 4. These views allow us to see inner structural details of the basin by means of characteristic seismic velocities belonging to a prefixed interval (Figure 3), and horizontal slices at gradually increasing depths down to 200 km (Figure 4).

Lower velocities than 3.9 km/s are found in the crust for approximate depths between 20 (western basin) and 35-45 km (eastern basin). The subcrustal structure shows velocities up to 4.7 km/s approximately and a complex geometry over the whole basin. Underlying the lithosphere, the low velocity channel of the asthenosphere shows velocities

between 4.1 and 4.4 km/s, and exhibits a complicated form on its upper part (Figure 3). All these constraints agree with velocity values given by Corchete et al. (1995) for the Iberian subcrustal lithosphere and asthenosphere, and by Martínez et al. (2000) for the Mediterranean.

All the horizontal depth sections reveal significant lateral changes in shear velocity, with smaller values for the eastern part and higher ones for the western part, the maximum differences (sometimes close to 1 km/s for instance at 25 km) corresponding to the eastern and western ends. This is a general pattern valid at least down to 65 km (Figure 4). For each reference depth, the highest velocities arise in the Balearic Sea extending to Sardinia, whereas the lowest velocities are detected in the Adriatic Sea and above all to east of Crete. As the depth increases, the lateral changes become smoother and relative high velocities appear near Sardinia and the Algerian coast (45 km). These features suggest a significant variation in the lithosphere structure -a thickening of the crust- going from the Iberian Peninsula, Corsica and Sardinia to the opposite end of the Mediterranean, to the Ionian Sea, Albania, Greece, Aegean Sea, Crete, south of Turkey and Cyprus. So, a thin crust (20 km) would characterise the Balearic Sea, the Ligurian-Provençal basin and the Tyrrhenian Sea, and a thicker crust (35km) the rest of the Mediterranean basin more or less. A conspicuous feature defined by relative high velocities is observed in the Balearic area and particularly to south of the Balearic Sea (25 km). The contrast with the north Balearic Sea is due to the thin continental crust underlying this zone opposite to the oceanic crust of the southern basin.

Since 65 km the velocity pattern changes notably. Areas of relative high velocity begin to appear in the central and eastern Mediterranean. Three specific high velocity areas are found in the Ionian Sea and south of the Adriatic Sea, between the Italian Peninsula and Greece, to south of the central basin, along the Algerian coast, and to west, near Corsica and Sardinia. Notable lateral changes in velocity arise at 95 km with a displacement of the highest velocities to east extending over the south Aegean, south Greece, Crete and reaching the Egyptian coast. These high velocities would be a consequence of the subduction of the eastern Mediterranean oceanic lithosphere dipping into the Hellenic Arc.

At greater depths of 130 and 160 km, the most evident variations in velocity take place in the western basin along a band from the Tunisian coast, through Sicily, to the Adriatic Sea, where we observe higher velocities in comparison with other neighbouring areas. Again, these high velocity values at deep levels would be a consequence of the collision processes associated with the convergence of the African and Eurasian plates and subduction under the Calabrian Arc. We observe again a conspicuous feature of the

north Balearic basin (95-130 km) consisting of the emergence of clearly high velocities. Now we are before the opposite case: low velocities in the south Balearic basin and high ones in the north basin. Despite this result can be explained by a deep beginning of the asthenosphere as one approaches the continental domain, since this small area is poorly covered by seismic paths, such a velocity contrast should be studied with special attention.

An interesting picture of the region as a whole in good agreement with tectonic regimes is as follows. On the basis of crustal velocities less than 3.9 km/s we can follow the changes in the location of the crust-mantle boundary and therefore the variable crustal thickness all over the Mediterranean region. We appreciate a 20 km thin crust in the western Balearic and Ligurian-Provençal basins and a gradually increasing thickness going to east, the crust reaching a maximum thickness of 45 km in the eastern Mediterranean, just between Crete and Cyprus (Figure 3). We observe likewise a crustal thickness of 35 km in the Ionian Sea, south Aegean Sea, and Peloponnisos, 30 km beneath the Greece Peninsula, and 30-35 km under the Italian Peninsula and Adriatic Sea. Assuming shear velocities between 4.1 and 4.4 km/s for the low velocity channel of the Mediterranean asthenosphere (Martínez et al., 2001), we can estimate that this gross layer extends beyond 200 km of depth varying its form and velocity structure from north to south and from west to east. The top of the asthenosphere is indeed irregular, albeit it is detected at an average depth of 75 km in the western basin (37°N-41°N). This depth becomes 150 km in the middle of the eastern basin (33°N-37°N). From south to north, the beginning of the asthenosphere varies from 150 to 90 km. Conspicuous features are the presence of materials characterised by relative high velocities at deep and variable levels affecting the lithosphere/asthenosphere transition in many places (Figure 3). We observe these materials down to 150 km in the middle of the eastern basin near the African coast (33-35°N), beneath Sicily (37°N), and to south and centre of the Italian Peninsula (39-41°N). The thicker lithosphere in these regions emphasises the processes associated with the convergence of the Eurasian and African plates: old subduction of the African lithosphere under Sicily, subduction of the Ionian lithosphere under the Calabrian Arc, and subduction of the eastern Mediterranean oceanic lithosphere dipping into the Hellenic Arc.

Acknowledgements

We acknowledge the Instituto Nazionale di Geofisica (Rome, Italy) for the facilities given for obtaining seismic records from MedNet broad-band stations. We are also grateful to M.D. Martínez and X. Lana of the Universidad Politécnic de Cataluña for the pre-processing of real data. Helpful comments from anonymous reviewers are gratefully acknowledged. The Dirección General de Investigación of the Ministerio de Ciencia y Tecnología, Spain, Project REN2000-1740-C05-04, supported this research.

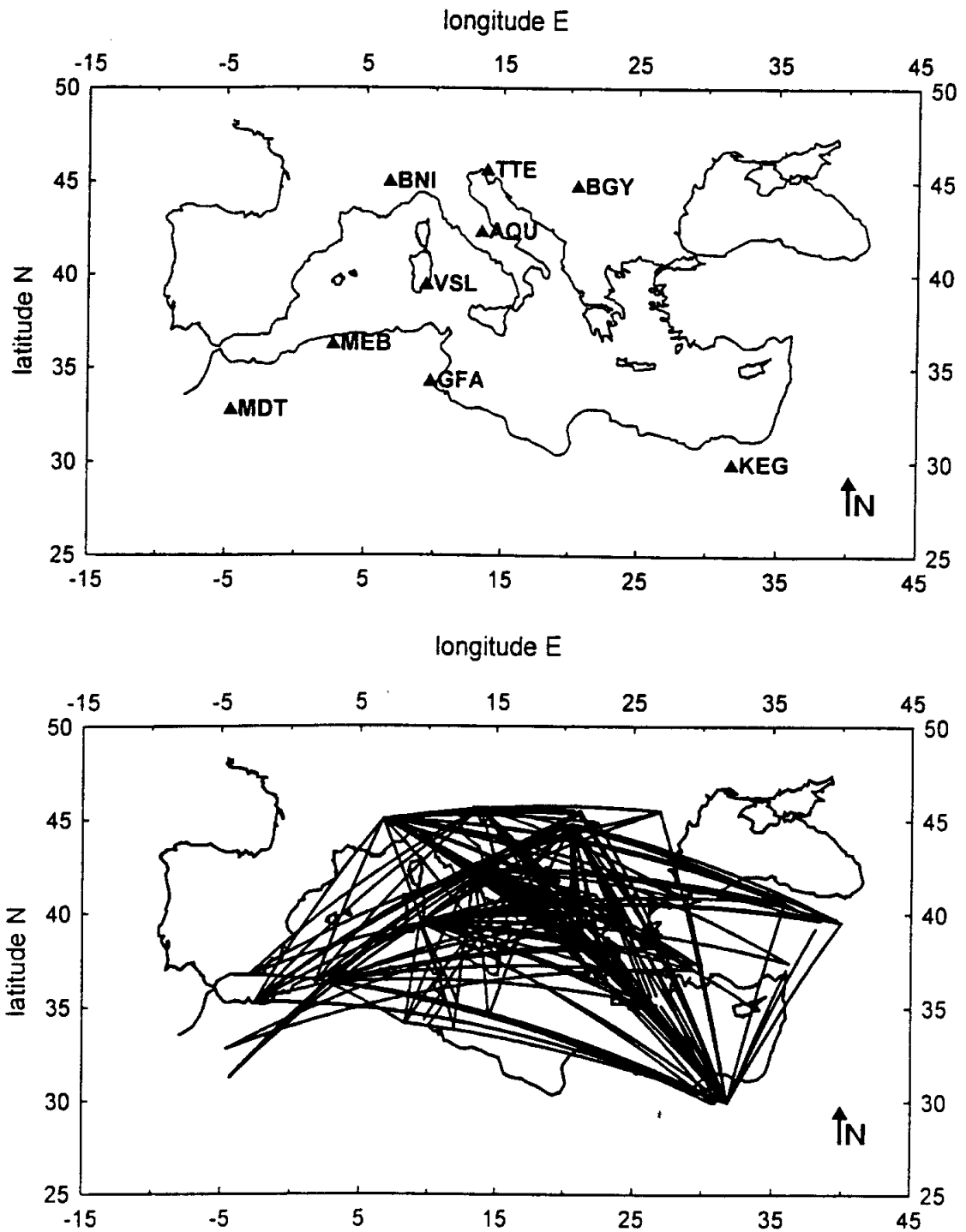


Figure 1.—Geographical location of the MedNet broad-band stations (small triangles) around the study region: the Mediterranean basin (upper part). Path coverage of the area for Rayleigh wave group velocity measurements depicted by great circles connecting epicentres to broadband stations (lower part).

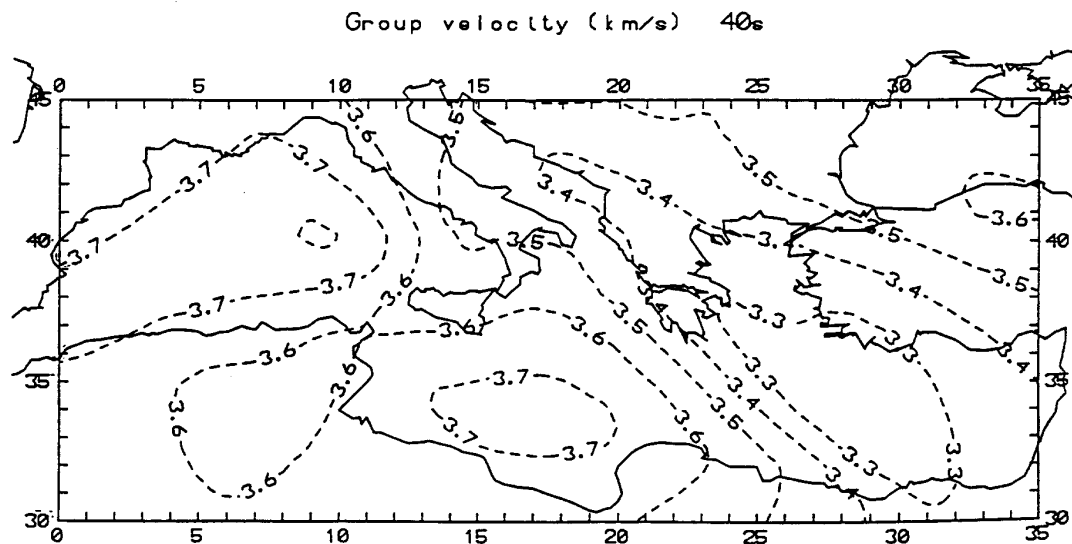


Figure 2.—Contoured local group-velocity pattern for the Rayleigh fundamental mode of 40 s propagating across the Mediterranean basin. Velocities in km/s. Isolines have been drawn in order to ensure clarity.

References

- [1] BADAL, J., V. CORCHETE, G. PAYO, J. A. CANAS, L. PUJADES and F. J. SERÓN (1990): Processing and inversion of long-period surface-wave data collected in the Iberian Peninsula, *Geophys. J. Int.*, **100**, 193-202.
- [2] BADAL, J., V. CORCHETE, G. PAYO, F. J. SERÓN, J. A. CANAS, and L. PUJADES (1992): Deep structure of the Iberian Peninsula determined by Rayleigh wave velocity inversion, *Geophys. J. Int.*, **108**, 71-88.
- [3] BADAL, J., V. CORCHETE, G. PAYO, L. PUJADES and J. A. CANAS (1996): Imaging of shear-wave velocity structure beneath Iberia, *Geophys. J. Int.*, **124**, 591-611.
- [4] BOSCHI, E., D. GIARDINI, A. MORELLI, G. ROMEO and Q. TACCETTI (1988): MedNet, The Italian broad-band seismic network for the Mediterranean, in *Workshop on Broad-Band Downhole Seismometers in the Deep Ocean*, edited by G. M. PURDY and A. M. ZIEWONSKI, Woods Hole Oceanographic Institute, MA, pp.116-124.
- [5] CORCHETE, V., J. BADAL, F. J. SERÓN and A. SORIA (1995): Tomographic images of the Iberian subcrustal lithosphere and asthenosphere, *J. Geophys. Res.*, **100**, 24133-24146.
- [6] DAVIS, J. C. (1986): *Statistics and Data Analysis in Geology*, Wiley, New York.
- [7] DITMAR, P. G. and T. B. YANOVSKAYA (1987): Generalization of the Backus-Gilbert method for estimation of lateral variations of surface wave velocities, *Physics of the Solid*

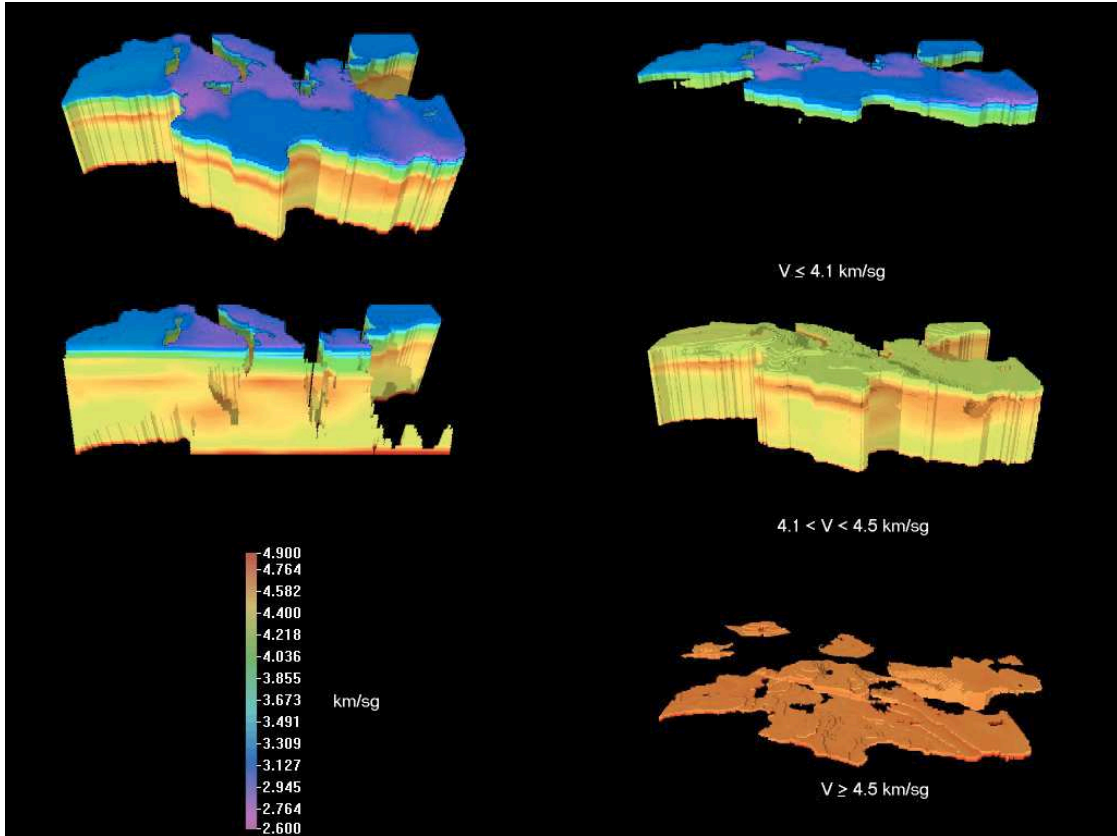


Figure 3.—Three-dimensional tomographic images of the Mediterranean basin as defined by characteristic shear velocity ranges. From top to bottom: $\leq 4.1 \text{ km/s}$, $4.1\text{-}4.5 \text{ km/s}$, $\geq 4.5 \text{ km/s}$. Materials connected with a specific velocity interval are thereafter displayed within a transparent volume representing the probed domain. An overall view together with an east-west vertical cross section of the basin (left side) images the shear-wave velocity structure of the lithosphere-asthenosphere system.

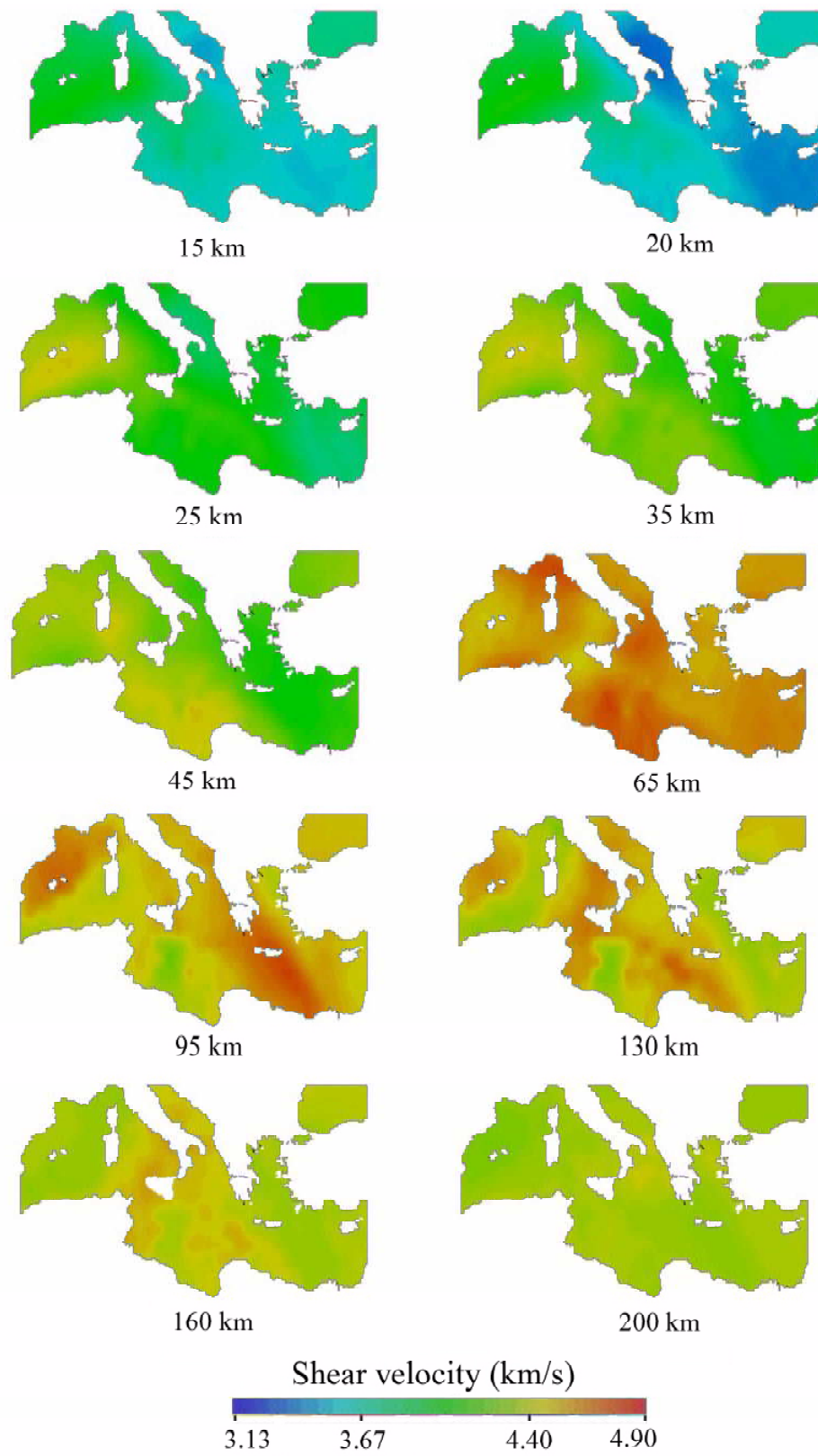


Figure 4.—Horizontal depth sections showing S-wave velocity panoramas for the structure under the Mediterranean Sea at different reference depths (from 15 to 200 km). Each coloured image represents the sea area outlined around by the European (north) and African (south) coasts. These pictures were obtained through spatial prediction by kriging, and obviously permit to appreciate the variations in velocity both laterally and with depth.

Earth, Izvestia Acad. Sci. USSR, **23** (6), 470-477.

- [8] DZIEWONSKI, A. M. and D. L. ANDERSON (1981): Preliminary Reference Earth model, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **60**, 297-356.
- [9] GIARDINI, D., E. BOSCHI, S. MAZZA, A. MORELLI, D. BEN SARI, D. NAJID, H. BENHALLOU, M. BEZZEGHOUD, H. TRABELSI, M. HFAIDH, R. M. KEBEASY and E. M. IBRAHIM (1992): Very-broad-band seismology in Northern Africa under the MedNet project, *Tectonophysics*, **209**, 17-30.
- [10] ISSAKS, E. H. and R. M. SRIVASTAVA (1989): *An Introduction to Applied Geostatistics*, Oxford University Press, New York.
- [11] KRAJEWSKI, S. A. and B. L. GIBBS (1996): *Understanding Contourin*, Industrial Ergonomics, Inc., Colorado.
- [12] LANA, X., G. FERNÁNDEZ MILLS, J. BADAL and J. A. CANAS (1997): Objective regionalization of Rayleigh wave dispersion data by clustering algorithms, *Geophys. J. Int.*, **129**, 421-438.
- [13] LANA, X., O. CASELLES, J. A. CANAS, J. BADAL, L. PUJADES and M. D. MARTÍNEZ (1999): Anelastic structure of the Iberian Peninsula obtained from an automatic regionalization algorithm and stochastic inversion, *Tectonophysics*, **304**, 219-239.
- [14] MARTÍNEZ, M. D., X. LANA, J. BADAL and J. A. CANAS (1996): Improvements on the MedNet broadband network from the viewpoint of tomographic studies, *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 2041-2044.
- [15] MARTÍNEZ, M. D., X. LANA, J. A. CANAS, J. BADAL and L. PUJADES (2000): Shear-wave velocity tomography of the lithosphere-asthenosphere system beneath the Mediterranean area, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **122**, 33-54.
- [16] MARTÍNEZ, M. D., X. LANA, J. A. CANAS and J. BADAL (2001): Objective regionalization of Rayleigh wave dispersion data by clustering algorithms, *Tectonophysics*, **330**, 245-266.
- [17] SERÓN, F. J., J. I. BADAL and F. J. SABADELL (2001): Spatial prediction procedures for regionalization and 3-D imaging of Earth structures, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **123**, 149-168.
- [18] YANOVSKAYA, T. B. and P. G. DITMAR (1990): Smoothness criteria in surface wave tomography, *Geophys. J. Int.*, **102**, 63-72.
- [19] YANOVSKAYA, T. B., E. S. KIZIMA and L. M. ANTONOVA (1998): Structure of the crust in the Black Sea and adjoining regions from surface wave data, *J. Seismol.*, **2**, 303-316.

- [20] YANOVSKAYA, T. B., L. M. ANTONOVA and V. M. KOZHEVNIKOV (2000): Lateral variations of the upper mantle structure in Eurasia from group velocities of surface waves, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **122**, 19-32.

Evolución química de las salmueras del Salar de Huasco (Chile) en condiciones experimentales controladas

Pedro L. López Julián

Depto. Ciencias de la Tierra, Universidad de Zaragoza. 50009 - Zaragoza

Ingrid Garcés Millas

Departamento de Ingeniería Química. Universidad de Antofagasta

Casilla 170 Antofagasta. Chile

Abstract

Evaporation process affecting surficial brines in salar of Huasco (Chile) saline system has been reproduced in laboratory with the main objective of studying its chemical evolving path. This experimental device has been carried out since a previous descriptive work has showed that the evolution of surficial brines present in salar could not be explained only considering a simple process of evaporative concentration (López *et al.*, 1999). The dilute initial solution has evaporated under isothermal conditions. Density of solutions reaches values up to 1.30 gr/cm³, with ionic strength levels near to 10 molal. Solid samples analysed have shown the progressive precipitation of calcite, gypsum, thenardite, and halite. The evolution of chemical concentration of solutions reflects this mineral sequence.

1. Introducción

El salar de Huasco se ubica en la zona de la Alta Cordillera andina, en la Primera Región de Tarapacá, y se localiza a unos 130 km en línea recta al E de la ciudad costera de Iquique. Se encuentra muy próximo además a la frontera entre Chile y Bolivia, de la cual dista aproximadamente 15 km (ver figura 1).

Se trata de un cuerpo evaporítico-sedimentario situado a una altitud aproximada de 3800 m.s.n.m, cuyo principal acceso es una pista de tierra que parte del pueblo de Pica, un oasis enclavado en la Depresión Central aunque muy próximo al contacto entre ésta y la Precordillera Andina. La cuenca de drenaje del salar se extiende a lo largo de una

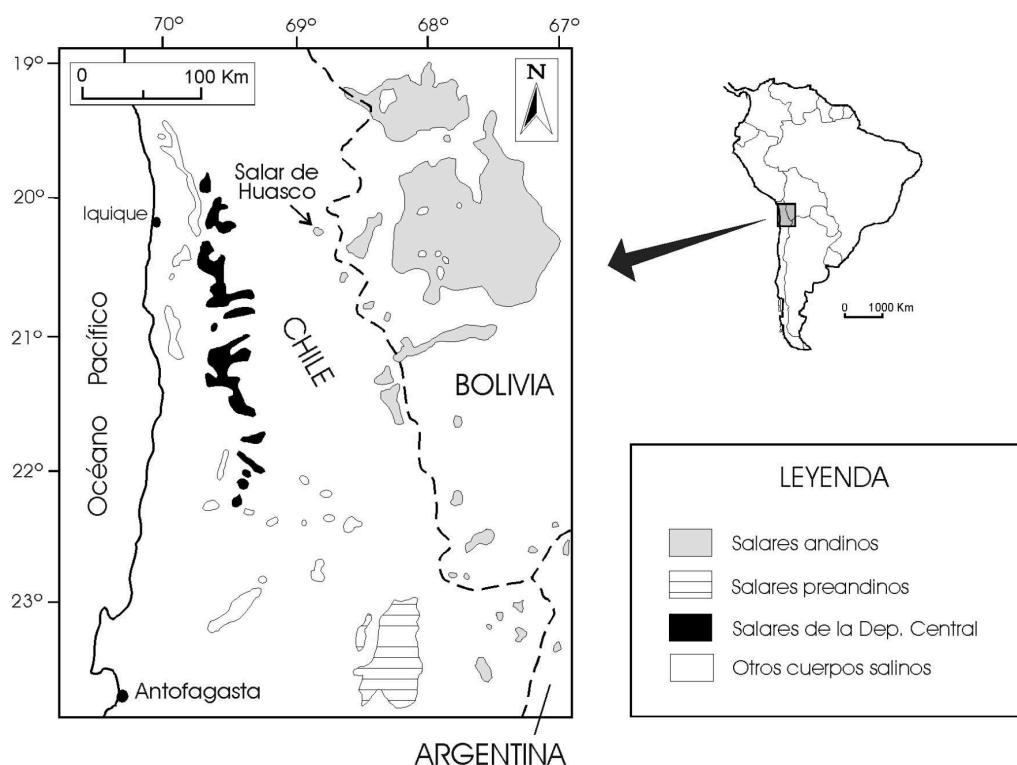


Figura 1.—Ubicación geográfica del salar de Huasco.

superficie aproximada de 1500 km², la cual aparece elongada en sentido N-S. El salar se ubica en el sector meridional de dicha cuenca, cubre un área de unos 50 km² y su eje mayor presenta una dirección ONO-ESE, con una longitud aproximada de 10 km (Karzulovic y García, 1978).

El clima de la zona donde se instala el salar de Huasco ha sido definido por Fuenzalida (1965) como de tipo “estepario de altura”, estando caracterizado por una extrema sequedad ambiental y por la presencia de vientos fuertes, secos y de frecuencia prácticamente diaria, además de por sufrir unas acusadas oscilaciones térmicas. Además, el balance hídrico es claramente negativo, ya que mientras que las precipitaciones promedio estimadas se sitúan en torno a 150 mm/año (Karzulovic y García, 1978), los valores promedio calculados para la evaporación potencial alcanzan unos 2500 mm/año (Montti y Henríquez, 1970).

Los aspectos geológicos generales del salar de Huasco fueron presentados y publicados en un artículo previo (López *et al.*, 1999), y junto a ellos se exponían los principales rasgos geoquímicos deducibles a partir del muestreo de salmueras y sedimentos salinos en la superficie del salar.

El cuerpo salino central del salar de Huasco es de tipo masivo y su mineralogía está dominada por sales sódicas (fundamentalmente sulfatos y cloruros), pero el área cubierta

por agua libre es muy reducida en comparación con las dimensiones del salar, siendo además la profundidad de esta lámina de agua no superior a 20 cm. Los sedimentos salinos que aparecen en el salar, al igual que ocurre en otros muchos sistemas andinos de este tipo, se generaron a partir de lagos profundos que ocuparon parcialmente las cuencas endorreicas donde actualmente sólo quedan salares y acumulaciones de agua de escasa entidad.

La modelización geoquímica realizada en el trabajo previo de López *et al.* (1999) a partir de los análisis químicos de las soluciones muestreadas permitió observar que el proceso de evaporación que tiene lugar actualmente en la superficie del salar se ve afectado por la interacción entre las aguas superficiales que acceden al salar y los minerales salinos previamente existentes. Este hecho deriva directamente de la evolución paleoclimática que ha tenido lugar en tiempos recientes, tendente en general hacia un incremento continuado de la aridez en buena parte del planeta, y que en zonas como el Norte Grande de Chile ha provocado que en sistemas salinos como el actual de Huasco la recarga hidráulica no llegue a generar una acumulación superficial de agua equiparable a la que dio lugar a la sedimentación salina que ocupa la zona más deprimida de la cuenca endorreica. Esta situación ha sido puesta de manifiesto en otros sistemas similares, como es el caso del salar de Ascotán (Herrera *et al.*, 1997).

Por todo ello, se consideró oportuno realizar un estudio que permitiese evaluar los procesos geoquímicos que ocurren actualmente en el salar de Huasco como consecuencia de la concentración por evaporación de las soluciones que acceden a la superficie del sistema salino. Además, la realización de experimentos de evaporación en condiciones controladas de laboratorio ha permitido tomar muestras del sistema salino en etapas evolutivas muy avanzadas, situación ésta altamente complicada de realizar directamente en el sistema natural. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos en el experimento de evaporación desarrollado bajo condiciones controladas de laboratorio, a partir de un volumen de salmuera recogida directamente en el salar de Huasco durante una campaña de desmuestre.

2. Metodología

Para la consecución de los objetivos propuestos en este trabajo, es decir, para estudiar el proceso de concentración por evaporación que tiene lugar en las salmueras superficiales del salar de Huasco pero sin interacción con los minerales salinos preexistentes, se procedió en primer lugar a la recolección de salmuera del sistema a estudiar. Se recogieron 30 litros de salmuera del cuerpo de agua superficial circulante sobre el salar, que fueron introducidos en un bidón de polietileno que fue inmediatamente trasladado al laboratorio, donde se

dispuso al abrigo de la luz y de los cambios térmicos.

El experimento se realizó mediante la inmersión en un baño termostático de la cubeta que contenía la salmuera. Se escogió una temperatura de 40°C para proporcionar al proceso de evaporación una velocidad adecuada, dada cuenta del volumen de solución a evaporar. El experimento se ha desarrollado bajo condiciones isotermas, es decir, manteniendo constante la temperatura de la salmuera, a fin de evitar procesos de precipitación mineral relacionados con las variaciones de temperatura y no con la pauta de evaporación en sí misma, como se ha comprobado que afecta de manera importante al sistema Na-SO₄-H₂O a consecuencia de la gran variabilidad de la constante de equilibrio de la mirabilita con la temperatura (Auqué *et al.*, 1995).

Se diseñó igualmente una estrategia de muestreo del sistema experimental, que incluyó la toma de 25 ml de salmuera en varios momentos evolutivos. De manera simultánea a este muestreo se determinaron pH, densidad y alcalinidad carbonatada, y en las soluciones se procedió a la determinación analítica del contenido en calcio, magnesio, sodio, potasio, cloruro, sulfato y boro. Los cationes se analizaron mediante espectrometría de absorción atómica con un equipo Perkin Elmer 2380. La determinación de sulfato fue llevada a cabo mediante precipitación con BaCl₂, empleándose técnicas volumétricas para el análisis de cloruros (método de Mohr) y boratos (técnica ácido-base).

En algunos puntos de desmuestre de soluciones se procedió, de manera simultánea, a la recolección de precipitados salinos, sobre los cuales se realizó un análisis mineralógico mediante difracción de rayos X, empleando para ello un equipo Siemens D-5000.

3. Resultados

Los resultados obtenidos mediante el análisis químico de las soluciones recogidas a lo largo del experimento de evaporación en laboratorio aparecen recopilados en la tabla 1. En ella se presentan además las mediciones relativas a pH y densidad que se efectuaron de manera simultánea al muestreo de las soluciones. Todos estos datos se han representado gráficamente en función del parámetro escogido como indicador del grado de avance del proceso evaporativo (la concentración molal de Cl, expresada en escala logarítmica), a fin de visualizar mejor las distintas pautas observables.

De este modo, en la figura 2 se puede observar la evolución de la densidad de las soluciones, parámetro que aumenta paulatinamente de valor hasta un máximo de aproximadamente 1,30 gr/ml, aunque en la última muestra se comprueba un cambio en la tendencia, pasando a producirse en este punto un descenso apreciable hasta un valor en torno a 1,25 gr/ml. En la misma figura se muestra la evolución de la fuerza iónica de las soluciones, parámetro calculado por el código de modelización geoquímica PHRQPITZ

Muestra	Ca	Mg	Na	K	Cl	SO ₄	HCO ₃	B	pH	Dens
CH-1	2.994	13.332	515.751	44.452	274.307	157.687	6.064	17.1	8.22	1.023
CH-2	7.485	29.829	1152.861	104.864	630.553	350.821	14.448	38.9	8.22	1.034
CH-3	12.799	50.401	2000.151	186.709	1099.992	609.218	23.993	66.1	8.17	1.076
CH-4	13.099	54.516	2174.880	194.382	1194.991	653.025	22.993	73.4	8.34	1.090
CH-5	11.552	63.567	2521.774	229.550	1386.540	760.065	26.747	84.1	8.19	1.131
CH-6	11.228	75.087	3129.957	290.294	1714.241	942.986	35.744	104.9	8.04	1.167
CH-7	1.272	141.946	5592.531	533.911	3289.990	1573.431	68.489	189.5	7.71	1.283
CH-8	0.349	211.891	5231.457	831.238	4549.996	958.113	95.711	292.9	7.41	1.268

Tabla 1.—Composición química, pH y densidad de las salmueras recogidas en el experimento de evaporación realizado. La concentración elemental está expresada en milimoles por litro (mmoles/l), excepto en el caso del boro (cuyos valores aparecen en este caso expresados en miligramos por litro). Por su parte, los valores de densidad expuestos corresponden a gramos por mililitro.

(Plummer *et al.*, 1988) y que se emplea frecuentemente como expresión global de la concentración de una solución. La evolución de la fuerza iónica de las soluciones aumenta progresivamente hasta un valor máximo próximo a 10 molal, pero en la última muestra se observa de nuevo un descenso de este parámetro hasta situarse aproximadamente en torno a 9 molal.

De lo observado en la figura 2 se puede deducir por tanto que el proceso evaporativo provoca un aumento progresivo tanto en la densidad de las soluciones como en su fuerza iónica, aunque en un punto determinado, cuando las salmueras alcanzan una concentración elevada (para un valor de fuerza iónica próximo a 10 molal), tiene lugar un cambio de tendencia que provoca un descenso cuantitativamente apreciable en ambos parámetros.

En la figura 3 se han representado gráficamente los resultados del análisis químico de las soluciones muestreadas, ordenados según el mismo parámetro empleado en la figura 2. El gráfico 3A muestra los valores discretos para cada solución y cada elemento analizado, y la representación continua de la evolución elemental se muestra en el gráfico 3B, en el cual se pueden apreciar de manera mucho más nítida las pautas evolutivas correspondientes a los elementos químicos de interés. Así, por un lado podemos destacar el comportamiento conservativo deducible de la pauta lineal de K, Mg y B (además del Cl, elemento empleado como variable de progreso del proceso de evaporación), lo que significa que estos elementos no se ven involucrados en proceso alguno de precipitación o disolución mineral a lo largo del intervalo muestreado. Del resto de elementos analizados, Na y SO₄ delinear una tendencia conservativa hasta la penúltima muestra analizada, donde el aumento continuado en su concentración cambia de pendiente y tiene lugar un descenso apreciable en la última

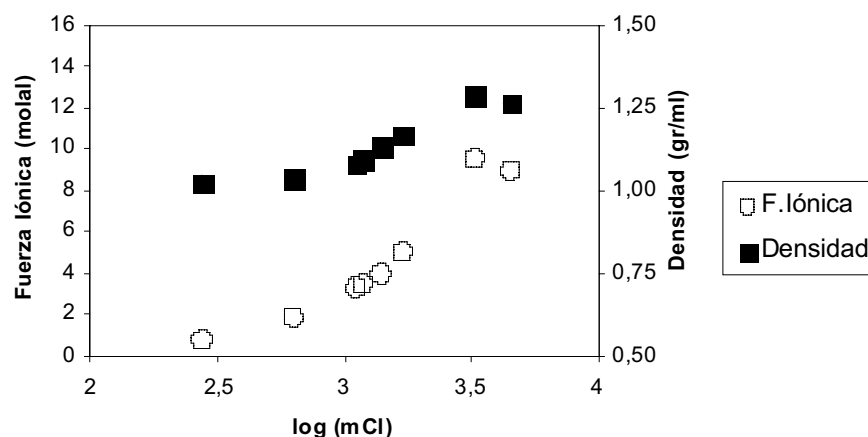


Figura 2.—Evolución de la densidad de la salmuera y de su concentración total (expresada como fuerza iónica) a lo largo del experimento de evaporación, en función del contenido en Cl.

muestra recogida. Los dos elementos restantes muestran un comportamiento irregular, ya que mientras el anión bicarbonato ve aumentar su concentración (aunque con distintas pendientes) a lo largo de todo el proceso, el catión Ca sufre un cambio de pendiente a partir del cual su concentración va a disminuir hasta alcanzar niveles muy bajos.

La representación de las determinaciones físicas y químicas realizadas sobre las soluciones muestreadas nos ha permitido apreciar que el proceso evaporativo provoca un aumento progresivo en la densidad y la fuerza iónica de las soluciones, aunque se alcanza un punto en la pauta evolutiva que da lugar a un cambio de tendencia, pasando a disminuir el valor de ambas variables (figura 2). Este cambio de tendencia es simultáneo al que sufren Na y SO_4 (figura 3B), lo que parece indicar que tiene lugar un importante proceso de precipitación salina que afecta a estos dos iones en etapas evolutivas avanzadas, es decir, cuando las soluciones alcanzan un grado de concentración muy elevado. Hay otros iones que también muestran un comportamiento no conservativo, como es el caso de Ca y bicarbonato, de lo que se deduce que deben estar afectados igualmente por procesos de precipitación en alguna etapa del proceso evolutivo registrado.

En la tabla 2 se presentan los resultados del análisis mineralógico de las muestras sólida recogidas de la cubeta de evaporación en distintos momentos a lo largo del experimento. En la primera columna se indica la muestra de salmuera que fue recogida de manera simultánea al sólido correspondiente, y los minerales presentes se han agrupado según su abundancia de un modo semicuantitativo a partir de los resultados de los difractogramas, considerando minerales mayoritarios aquéllos presentes en la muestra en un porcentaje superior al 5%, y minoritarios los que no alcanzaban este umbral. Los minerales mayoritarios determinados en las muestras recogidas son calcita (muestra CH-2), yeso (muestras

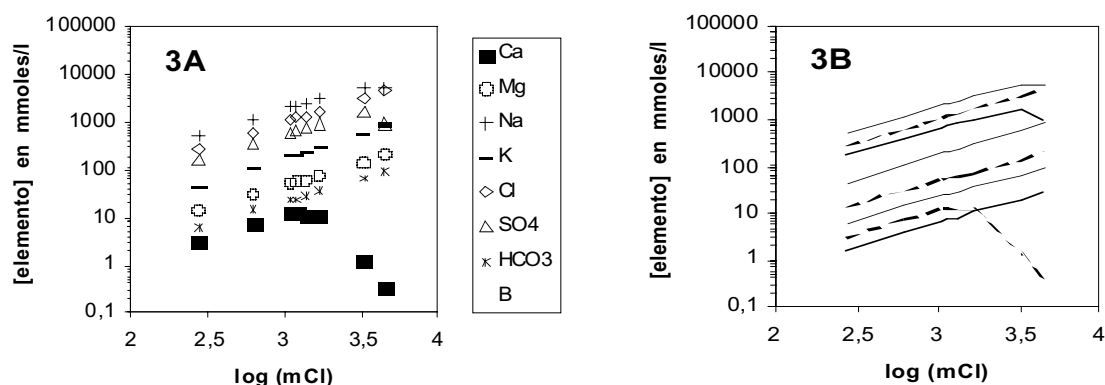


Figura 3.—Evolución de la composición química de las salmueras a lo largo del experimento de evaporación, en función del contenido en Cl.

CH-3 y CH-5), thenardita (muestras CH-7 y CH-8) y halita (muestra CH-8). Por otra parte, los minerales minoritarios no se espera que sean representativos del estadio evolutivo en el que se tomaron las respectivas muestras, ya que los sólidos fueron desecados previamente a su determinación difractométrica, y en este proceso la salmuera que los impregnaba debió dejar depositados sobre los minerales mayoritarios otros representativos de etapas más avanzadas (ésta es una situación prácticamente idéntica a la formación de eflorescencias en sistemas naturales).

Los minerales determinados en las muestras sólidas indican que el proceso de precipitación salina que tiene lugar por evaporación a partir de las salmueras incluye la formación de carbonatos y sulfatos de calcio en las etapas iniciales de menor concentración, mientras que en las fases más avanzadas se produce la precipitación mayoritaria de minerales evaporíticos sódicos, fundamentalmente sulfatos y cloruros.

4. Conclusiones

El salar de Huasco es un sistema salino que posee un cuerpo masivo compuesto principalmente por sales sódicas, generado por la evaporación de las aguas de un lago preexistente que ocupaba una cuenca de drenaje endorreico. En la actualidad, las soluciones superficiales de recarga dan lugar a una acumulación que cubre únicamente una mínima parte del salar, viéndose sometidas a un proceso de concentración por evaporación a consecuencia de la elevada sequedad ambiental reinante.

En un trabajo previo se realizó un estudio geoquímico de la evolución de estas salmueras superficiales, donde se pudo constatar que, al menos a priori, las soluciones se veían ex-

MUESTRA	MINERALES MAYORITARIOS	MINERALES MINORITARIOS
CH-2	Calcita	Yeso, Thenardita, Halita
CH-3	Yeso	Calcita, Halita
CH-5	Yeso	Halita, Thenardita, Calcita
CH-7	Thenardita	Halita, Polihalita
CH-8	Thenardita, Halita	—

Tabla 2.—Composición mineralógica de los sedimentos salinos recogidos en el experimento.

puestas a otros procesos que modificaban las pautas evolutivas esperables por un proceso simple de concentración por evaporación (López *et al.*, 1999). Con el objetivo de estudiar las características de la evolución de las salmueras únicamente por evaporación, se realizó el experimento cuyos resultados aquí se han presentado.

En el experimento realizado se ha comprobado que las soluciones de recarga del salar se evaporan para dar lugar a la precipitación progresiva de calcita, yeso, thenardita y halita, cuya presencia se ha comprobado mediante el análisis mineralógico de los precipitados recogidos durante el experimento. Los minerales que se identificaron en las muestras sólidas recogidas directamente sobre el salar (presentados en el trabajo precedente citado) son prácticamente los mismos que se han determinado en el experimento de evaporación. No obstante, esta experiencia ha permitido comprobar qué minerales se generan por precipitación directa a partir de las salmueras del salar, ya que las condiciones impuestas al dispositivo experimental evitan la formación de costras eflorescentes que suelen estar formadas por otros minerales salinos de solubilidad todavía superior.

Referencias

- [1] Auqué, L.F.; Valls, V.; Zougari, H.; López, P.L. y Bourrié, G. (1995): “Geoquímica de las lagunas saladas de Los Monegros (Zaragoza). I. Determinación experimental de los efectos del reequilibrio mirabilita-solución con la temperatura en un sistema natural”. *Estudios Geológicos*, **51**, p. 243-257.
- [2] Fuenzalida, H. (1965): “Clima”. In: *Geografía Económica de Chile*. Corp. Fomento de la Producción (CORFO), vol. **1**, p. 188-325.
- [3] Herrera, C.; Guerra, N.; Pereira, M. y Guerrero, C. (1997): “Características geológicas y geoquímicas del Salar de Ascotán”. *Actas del VIII Congreso Geológico Chileno*, vol. **1**, p. 732-737. Antofagasta (Chile).
- [4] Karzulovic, J. y García, F. (1978): “Evaluación de los recursos hídricos de la provincia de Iquique”. Ministerio de Obras Públicas (inédito).

- [5] López, P.L.; Garcés, I.; Auqué, L.F.; Gómez, J.; Gimeno, M.J. y Lapuente, M.P. (1999): “Características geoquímicas y aspectos geológicos del Salar de Huasco (Chile)”. *Boletín Geológico y Minero*, **110**, p. 297-316.
- [6] Montti, S. y Henríquez, H. (1970): “Interpretación hidrogeológica de la génesis de salares y lagunas del Altiplano Chileno”. *Actas del II Congreso Geológico Chileno*, p. 669-680. Arica (Chile).
- [7] Plummer, L.N.; Parkhurst, D.L.; Fleming, G.W. y Dunkle, S.A. (1988): “Computer program incorporating Pitzers equations for calculation of geochemical reactions in brines”. *Water-Resources Investigation Report*, WRI **88-4153**, 310 p.

Nódulos septarizados en materiales detríticos de la Formación Escucha, Esteruel (Teruel)

F. J. Torrijo^{*,†}, J. Mandado^{*}, C. Rubio^{*} y M. E. Bona[‡]

^{*} Depto. Ciencias de la Tierra, Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

[†] Depto. de Geología y Geotecnia. Laboratorios PROYEX, S.A., 50180 Utebo

[‡] Ibergeotecnia, S.R.L. C/ Don Jaime I, 35, 50003 Zaragoza

Abstract

The present work shows the first dates of study carried out in the Lower Cretaceous of Iberian Range (Esteruel, Teruel). This is a preliminary report focused on the analysis of diagenetic structures, septarized nodules and cone-in-cone structures, based on morphological features and others field indicators.

1. Introducción

En la cuenca marginal cretácica de Oliete (Cordillera Ibérica), en las proximidades de la localidad turolense de Esteruel, se han localizado nódulos septarizados asociados con estructuras tipo “cone-in-cone” en depósitos detríticos correspondientes al Miembro Medio de la Formación Escucha.

Este trabajo refleja los primeros datos de los estudios que se están llevando a cabo sobre la génesis de estas estructuras diagenéticas. Para dichos estudios se está llevando a cabo, actualmente, el levantamiento de varios perfiles litoestratigráficos, incluyendo el estudio paleontológico y geoquímico de las muestras recogidas, para ubicar en un único modelo petrogenético y geoquímico el crecimiento de estas estructuras. De ellos se ha seleccionado, para este trabajo, el levantado en el denominado “barranco El Pinarello”.

2. Localización geográfica y Marco Geológico

La zona de estudio está situada en la provincia de Teruel, a 110 km de la Capital de la Provincia. Se ubica en la Comarca de las Cuencas Mineras y geográficamente se halla en el piedemonte de la Sierra de San Just, en su zona septentrional.

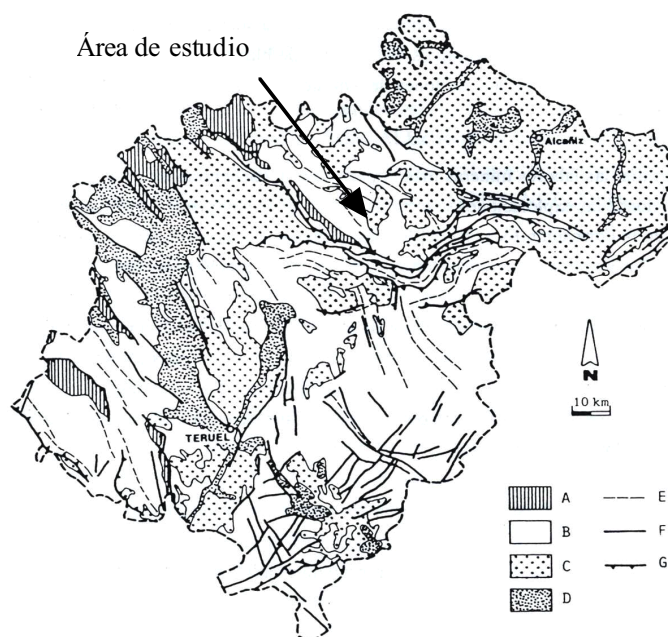


Figura 1.—Situación del área de estudio sobre el mapa geológico de la Provincia de Teruel. A: Paleozoico; B: Mesozoico; C: Terciario; D: Plio-cuaternario y Cuaternario; E: Principales ejes de plegamiento; F: Fallas; G: Cabalgamientos. Modificado de Gutiérrez y Meléndez (1991).

El perfil levantado se localiza al Sudeste del pueblo de Esteruel, en las inmediaciones de un pequeño embalse existente en el denominado “barranco El Pinarello”.

Geológicamente, los afloramientos en los que se ha realizado el trabajo se sitúan en el borde Sudeste de la Cordillera Ibérica, más concretamente en el extremo oriental de la cuenca marginal cretácica de Oliete, definida por Soria en 1997 (figura 1).

Los materiales estudiados son de edad Aptiense superiorAlbiense inferior, correspondientes al Miembro Medio de la Formación Escucha definido por Aguilar *et al.* en 1971.

3. Títoestratigrafía

El perfil levantado (figura 2) presenta una potencia de 27,5 metros, habiéndose realizado en dos partes debido a la presencia de una falla de componente inversa, que divide la serie.

Los niveles con nódulos septariformes se localizan en el Miembro Medio de la Formación Escucha. Esta formación ha sido estudiada por numerosos autores, entre los que cabría destacar Pardo (1974 y 1979), Cervera *et al.* (1976), Pardo y Villena (1979a y b), García-Hernández *et al.* (1981) y Soria (1997); quienes dividen la formación en tres miembros.

En el perfil levantado (figura 2), el substrato de la Formación Escucha lo constituye

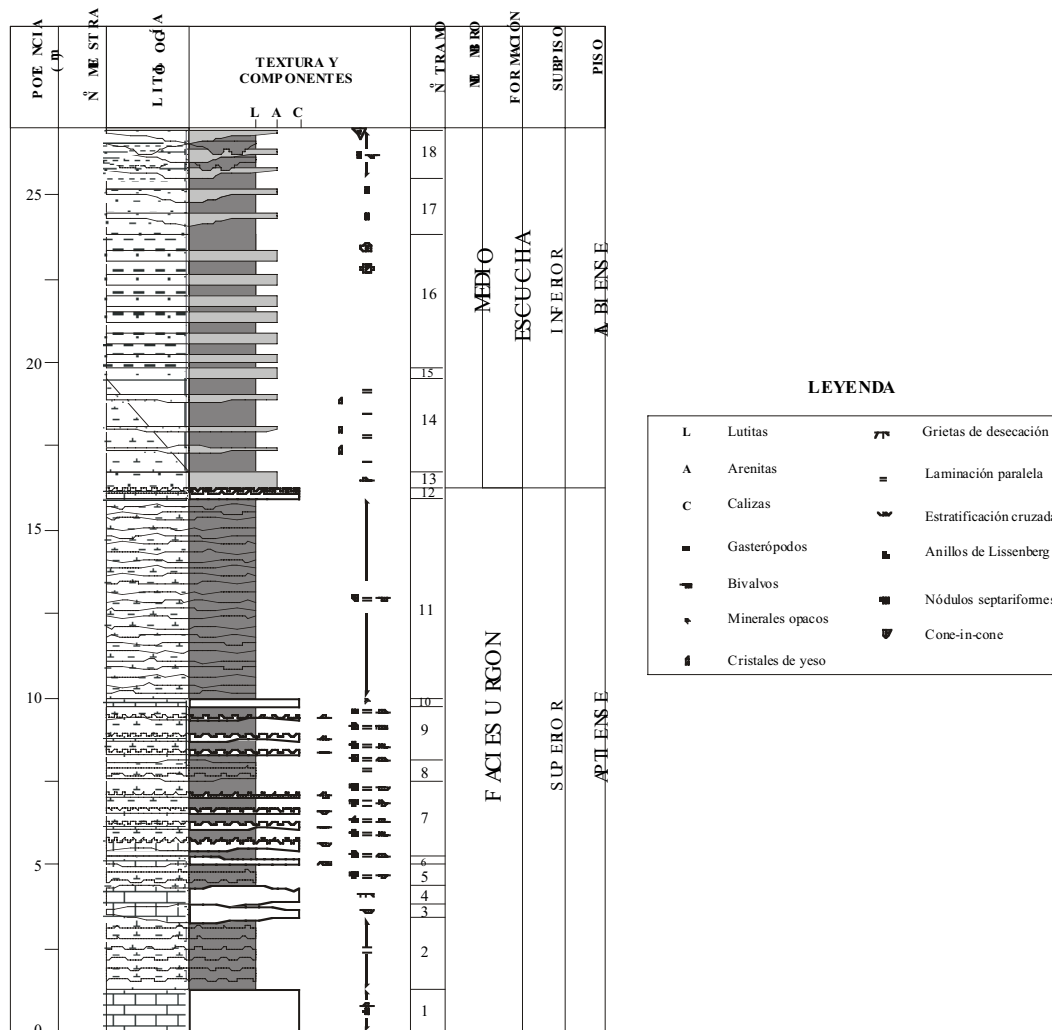


Figura 2.—Sección estratigráfica del perfil estudiado, incluyendo la posición de las muestras.

una alternancia de calizas, con abundante contenido fosilífero (puntualmente construyendo verdaderas lumaquelas), y lutitas margosas. Estos materiales se habrían depositado en medios costeros, y se incluirían, por sus características (no poseen niveles de carbón), en el denominado complejo de facies Urgon, análogamente a lo sugerido por García-Hernández *et al.* (1981). En los materiales más antiguos (facies Urgon) se ha hallado, en una primera prospección en el campo, registro fósil correspondiente a medios marinos litorales, con presencia de los géneros *Trigonia*, *Ostrea*, *Neithea* y *Exogyra*. También se da el caso de haber encontrado múltiples fragmentos de fósiles corporales y moldes internos de gasterópodos y bivalvos.

La Formación Escucha propiamente dicha se caracteriza por una alternancia de arenitas poco cementadas y de lutitas margosas, correspondientes al Miembro Medio de la misma. En ella se han localizado dos niveles estratiformes con nódulos septariformes, a 440 y 370 metros, respectivamente, del techo del perfil. La columna levantada finaliza

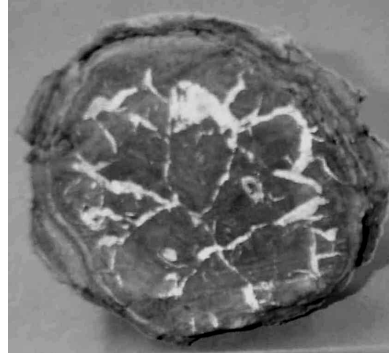


Figura 3.—Nódulo carbonatado estudiado, en el que se aprecia la distribución de las septarias.

con un nivel carbonatado con estructuras de tipo “cone-in-cone” y espesor máximo de 5 centímetros.

4. Descripción morfológica de las estructuras diagenéticas

Los nódulos, de morfología predominante esférica y con un diámetro variable entre 7 y 60 cm, se localizan en un nivel con alternancia de capas milimétricas de naturaleza arenítica y lutítica y con abundante contenido fósil (predominantemente bivalvos). Los materiales que los rodean adaptan su laminación a la forma de los mismos, siendo este hecho una de las evidencias que caracterizan un modelo de crecimiento concéntrico convencional, tal y como sugieren, entre otros, Raiswell (1971) y Torrijo (1999). Su naturaleza es carbonatada, con contenido variable en hierro, presentando una red de fracturas grietas que se desarrollan íntegramente en su interior, constituyendo lo que se denomina en la literatura geológica como “septarias”.

Las septarias (Fig. 3) podemos dividir las en dos grupos en función de su diámetro de apertura. Las que presentan una menor apertura (05-20 mm) se localizan en la parte central de los nódulos, aumentando el tamaño a medida que nos vamos aproximando a la periferia de los mismos. Presentan una estructura radial desde el centro a la periferia, disponiéndose de modo concéntrico en la parte más externa de los nódulos, presentando un esquema muy parecido al expuesto por el Comité des Techniciens (1966) y Sellés-Martínez (1996a y b). Estas septarias se encuentran selladas por un cemento esparítico de naturaleza calcítica y puntualmente dolomítica.

Por otra parte, las estructuras tipo “cone-in-cone” consisten en un conjunto de conos circulares rectos, encajados unos en otros, presentando analogías con los descritos con anterioridad en áreas cercanas por García-Hernández *et al.* (1981). Estos conos encajados se disponen perpendiculares a la superficie de estratificación, con los conos apuntando hacia abajo.

La altura de los conos individuales oscila entre 3 y 5 centímetros, y el diámetro de la base varía entre 1 y 3 centímetros, siendo la relación entre la altura y el diámetro de la base de 2 a 3, por lo que el valor del ángulo del vértice viene a ser de 35 a 60 grados. Morfológicamente, la superficie externa de cada uno de los conos presenta unas depresiones de tipo anular y pequeño tamaño, que simulan un aspecto escalonado. Estas características son similares a las que se dan para las estructuras de este tipo descritas en la bibliografía (véase entre otros: Franks, 1969; MacKenzie, 1972; García-Hernández *et al.*, 1981; Aso, 1991; Aso *et al.*, 1992; Sellés-Martínez, 1994, 1996a y b).

5. Discusión y conclusiones

En la cuenca marginal cretácica de Oliete (Cordillera Ibérica) se han localizado nódulos septariformes, asociados a estructuras tipo “cone-in-cone”, en depósitos detríticos correspondientes al Miembro Medio de la Formación Escucha. Para su estudio se están levantando varios perfiles litoestratigráficos en las proximidades de la localidad turolense de Esteruel.

Según los apartados descritos anteriormente, se puede hacer una primera aproximación al modelo sedimentario sugiriendo que se trataba de una zona litoral, en la que se han producido abundantes aportes de materiales detríticos, propios de cauces fluviales o bien medios deltáicos.

La presencia de fósiles marinos en los estadios más inferiores y la ausencia de ellos en los más superiores marca un retroceso de la línea de costa. La concentración de abundantes fósiles corporales y moldes internos muy fracturados, indican un medio muy agitado propio de acumulaciones de materiales en épocas de tormentas.

Los nódulos septarizados presentan una estructura de tipo “polar” (Sellés-Martínez, 2000), que se caracteriza por presentar un juego de fracturas radial planar, y otro concéntrico esferoidal. Esto implica que el cambio de volumen del núcleo de la concreción se ha producido isotrópicamente, es decir, en el momento de su génesis, los campos de esfuerzos interno y externo tuvieron que ser isótropos, presentando el primero de ellos, tracción perimetral y radial.

Las muestras obtenidas, tanto nódulos septarizados como estructuras “cone-in-cone”, presentan características similares a las recogidas en la literatura geológica para este tipo de estructuras diagenéticas. Este hecho está permitiendo una buena precisión respecto a su origen, lo cual facilita su modelización genética y proporciona nuevos parámetros para estudiar con precisión el tránsito entre los depósitos en facies Urgon y los pertenecientes a la Formación Escucha en este sector de la Cordillera Ibérica.

Referencias

- [1] Aguilar, M., Ramírez del Pozo, J. y Riba, O. (1971). Algunas precisiones sobre la sedimentación y paleontología del Cretácico inferior en la zona de Utrillas-Villarroya de los Pinares. *Estudios Geol.*, **27**, 497-512.
- [2] Aso, E. (1991). *Origen de septarias y "cone-in-cone", condiciones geológicas y reproducción experimental*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza, 231 pp.
- [3] Aso, E., Gisbert, T.J. y Valero Garcés, B. (1992). Type septaria-cone-in-cone nodules in the Stephano-permian of the Catalan Pyrenees. *Carbonates and Evaporites*, **7**, 132-139.
- [4] Cervera, A., Pardo, G. y Villena, J. (1976). Algunas precisiones litoestratigráficas sobre la formación "Lignitos de Escucha". *Tecniterrae*, **14**, 25-33.
- [5] Comité des Techniciens (1966). *Essai de nomenclature et caracterisation des principales structures sedimentaires*. Editions Technip, Paris, 233 pp.
- [6] Franks, P.C. (1969). Nature, origin and significance of cone-in-cone structures in the Kiowa Formation (Early Cretaceous), North-central, Kansas. *Jour. Sed. Petrol.*, **39**, 1438-1454.
- [7] García-Hernández, M., Martín, L., Pignatelli, R. y Vera, J.A. (1981). Interpretación genética de los niveles calizos con estructuras de "cone-in-cone" de la formación Escucha (Cretácico inferior) de la Región Utrillas-Estercuel-Andorra (Cordillera Ibérica). *Estudios Geol.*, **37**, 59-68.
- [8] Gutiérrez, G. y Meléndez, A. (1991). *Introducción a la geología de la provincia de Teruel*. En: Gutiérrez, M. y Meléndez, A. (Eds.), Instituto de Estudios Turolenses, Teruel: 1-9.
- [9] MacKenzie, W.S. (1972). Fibrous calcite, a Middle Devonian Geologic Marker, with stratigraphic Significance, district of MacKenzie, Northwest Territoires. *Can. Jour. Earth Sci.*, **9**, 1431-1440.
- [10] Pardo, G. (1974). Nota previa sobre las características litoestratigráficas de las formaciones "Arenas de Utrillas" y "Lignitos de Escucha". *Acta Geol. Hisp.*, **27**, 497-512.
- [11] Pardo, G. (1979). *Estratigrafía y sedimentología de las formaciones detríticas del Cretácico inferior terminal en el Bajo Aragón turolense*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza, 470 pp.
- [12] Pardo, G. y Villena, J. (1979a). Estudio sedimentológico de las arenas de Utrillas en las cuencas de Utrillas y Estercuel (provincia de Teruel). *Estudios Geol.*, **35**, 645-650.
- [13] Pardo, G. y Villena, J. (1979b). Características sedimentológicas y paleogeográficas de la Formación Escucha. *Cuad. Geol. Ibérica*, **5**, 407-418.

- [14] Raiswell, R. (1971). The growth of cambrian and liassic concretions. *Sedimentology*, **17**, 147-171.
- [15] Sellés-Martínez, J. (1994). New insights in the origin of cone-in-cone structures. *Carbonates and Evaporites*, **9**, 172-186.
- [16] Sellés-Martínez, J. (1996a). Implicancias mecánicas de la diferenciación entre septarias polares y ortogonales. *AAS Revista*, **3**, 11-16.
- [17] Sellés-Martínez, J. (1996b). Concretion morphology, classification and genesis. *Earth Sciences Reviews*, **41**, 177-210.
- [18] Soria, A.R. (1997). *La sedimentación en las Cuencas Marginales del Surco Ibérico durante el Cretácico inferior y su control estructural*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza, 363 pp.
- [19] Torrijo, F.J. (1999). *Nódulos y concreciones carbonatadas. Distribución y génesis*. Tesis de Licenciatura. Universidad de Zaragoza, 201 pp. (No publicada).

Origen de concreciones dolomíticas en el Terciario de la Cuenca de Calatayud (Zaragoza)

F. J. Torrijo^{*,†}, J. Mandado^{*} y M. E. Bona[‡]

^{*} Depto. Ciencias de la Tierra, Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

[†] Depto. de Geología y Geotecnia. Laboratorios PROYEX, S.A., 50180 Utebo

[‡] Ibergeotecnia, S.R.L. C/ Don Jaime I, 35, 50003 Zaragoza

Abstract

Carbonate concretions in deposits of Tertiary (Calatayud-Zaragoza) were studied. The concretions are included in dolomitic mudstones, and contain dolomite and detrital particles of host. The cement is micritic dolomite.

Content in authigenic cement decreases outwards the concretions related to the ground waters. A precompactacional model, and a replacement growth are proposed.

1. Introducción

Son numerosos los autores que a lo largo de la historia han estudiado diferentes aspectos de los materiales terciarios de la cuenca de Calatayud, aunque es destacable que ninguno haga referencia a la existencia de nódulos carbonatados. El estudio de la bibliografía geológica referente a los materiales estudiados en esta zona permite comprobar que hay numerosos trabajos, tanto generales como específicos, de los mismos, pero en los cuales no se hace referencia a la existencia de concreciones carbonatadas.

Los primeros estudios concretos en esta región fueron realizados por Julivert en 1954, en un trabajo referente a la tectónica de la Depresión de Calatayud. A éste se han sumado numerosos trabajos, de diversa índole, de los que cabría destacar los de Bomer (1960), Tena *et al.* (1980), Tena y Mandado (1984), Colomer y Santanach (1988), y más recientemente los llevados a cabo por Gutiérrez (1994 y 1999).

Uno de los últimos trabajos sobre la zona es el realizado por Joven *et al.* (1997) sobre los rasgos edáficos de los materiales miocenos de la periferia del lago terciario central y en él se cita la presencia de estas estructuras.

Este trabajo se centra, por tanto, en el estudio petrográfico, geoquímico y mineralógico de las concreciones, que aportan datos que permiten discernir su origen, proporcionando un modelo genético para ellos, que se basa en el modelo de clasificación propuesta por Torrijo *et al.* (1997) y Torrijo (1999).

2. Localización geográfica y Marco Geológico

La situación del punto de estudio se localiza en la Depresión de Calatayud, en el margen oriental de la Sierra de Armantes, situada al norte de Calatayud. La región se sitúa en la hoja de Calatayud (409) del Mapa Topográfico Nacional a escala 1:50.000.

El perfil levantado se localiza entre la Ermita del Cristo de Ribota y la Ermita de Santa Cruz (figura 5.11 y lámina VII, foto A). Este perfil fue publicado por Joven *et al.* (1997), y se recoge en la figura 1.

El punto de estudio se sitúa al NE de la Sierra de Armantes, dentro de la Cuenca de Calatayud. Esta cuenca es una fosa tectónica intramontañosa formada por un proceso de rifting en el Mioceno medio mediante la reactivación de fracturas de zócalo y rellena de sedimentos neógenos que se depositaron en un ambiente continental endorreico. Julivert (1954) considera que la Depresión de Calatayud, en la zona de Daroca, presenta un carácter de semigraben, mientras que en la zona de Calatayud se puede considerar como una verdadera fosa tectónica.

La cuenca está limitada al SO por la llamada falla del Jiloca, la cual es en realidad un sistema de fallas de dirección NO-SE escalonadas de forma levógira (Colomer y Santanach., 1988), y al NO por una discordancia que pone en contacto los conglomerados terciarios y los materiales paleozoicos.

Sobre los materiales paleozoicos se depositaron los materiales mesozoicos y paleógenos en un ambiente continental endorreico, que continúa en el Mioceno con el depósito de evaporitas en el centro de la cubeta, completándose la colmatación con depósitos predominantemente calcáreos.

Los depósitos carbonatados terciarios de las planas, donde se encuentran las concreciones, tienen su origen en la precipitación dentro del lago central en condiciones relativamente salobres, aunque también se considera la influencia de algas para su depósito. Los materiales calcáreos que se encuentran digitados entre los depósitos detríticos se consideran debidos a la precipitación en zonas de llanura circundante al lago sulfatado por procesos de concentración evaporativa (Joven *et al.*, 1997).

Dos de las características de los materiales carbonatados encontrados en la Sierra de Armantes es la presencia de procesos de dolomitización y de silicificaciones en forma de nódulos y capas continuas de sílex. Es importante señalar la evolución lateral de nódulos

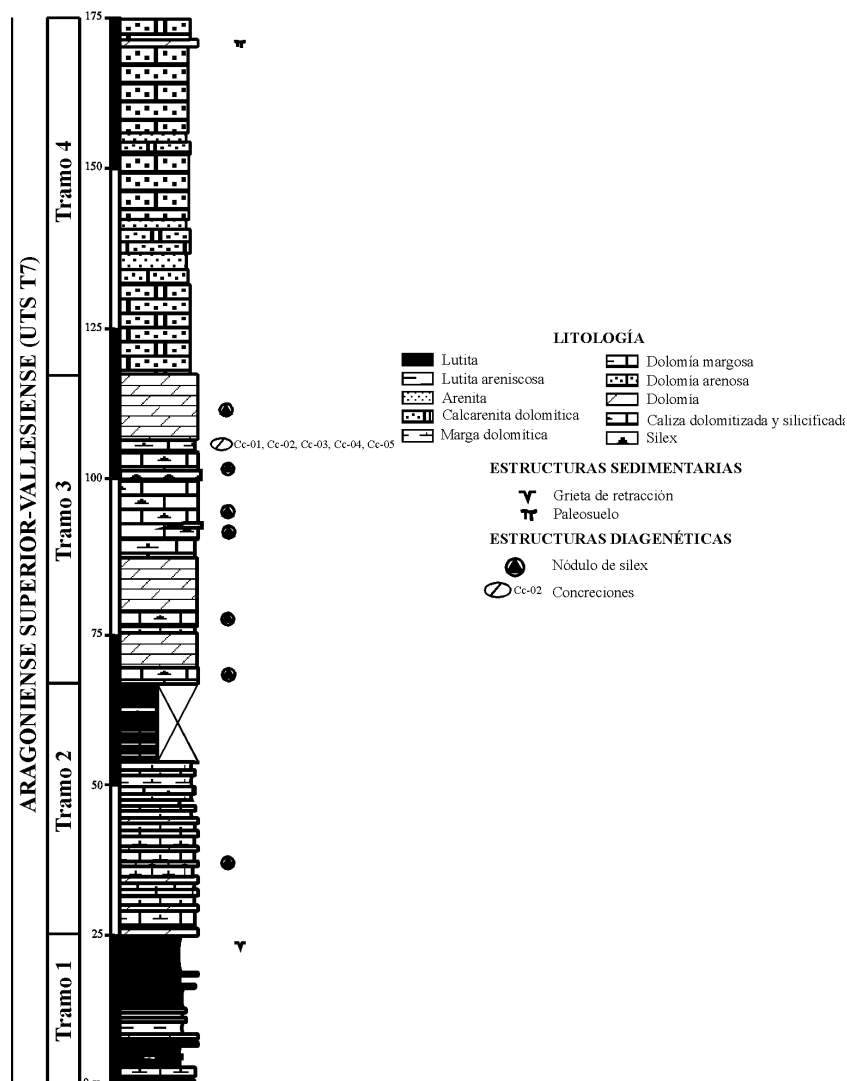


Figura 1.—Columa litoestratigráfica levantada entre la Ermita del Cristo de Ribota y la Ermita de Santa Cruz (modificada de Joven *et al.*, 1997).

de sílex a una capa continua que desaparece cuando se produce el tránsito de la facies carbonatada a las facies lutíticas. El proceso que se interpreta para la formación de estas silicificaciones es la sustitución de los carbonatos preexistentes por la sílice, lo cual es coherente con un modelo de génesis por reemplazamiento. Estos procesos han sido verificados recientemente por Joven *et al.* (1997).

La cronoestratigrafía de esta cuenca se basa actualmente en las unidades tectosedimentarias (U.T.S.) establecidas por Villena *et al.* (1991). Dentro de este marco, las concreciones se ubican en materiales calcáreos neógenos de la unidad tectosedimentaria UTS T7 (Aragonesense superior-Vallesiense).

3. Metodología

Se muestrearon cuatro concreciones separándolas de la roca encajante de manera manual y retirando posteriormente del mismo modo las superficies de alteración. A continuación se subseccionaron cada una de las concreciones, seleccionando de cada subsección una muestra para su estudio en lámina delgada y otra para su trituración y posterior análisis químico, tal y como propone Raiswell (1971).

La trituración se realizó mediante trituradora de mandíbulas y molienda de la fracción extraída con molino de aros, hasta un tamaño de grano inferior a 60 μm . Para ello se usaron los equipos del Servicio de Preparación de Rocas y Materiales Duros de los Servicios de Apoyo a la Investigación de la Universidad de Zaragoza.

El análisis químico de las muestras se realizaron en el Laboratorio “Juan Tena” del Área de Petrología y Geoquímica del Departamento de Ciencias de la Tierra de la Universidad de Zaragoza, y en el Laboratorio de Análisis Químico de la empresa Laboratorios Proyex, S.A.

La disgregación de las muestras carbonatadas es un problema analítico sencillo que requiere pocas modificaciones en función de las características de la misma. En nuestro caso, se ha seleccionado una sistemática de extracción estándar, de acuerdo con la metodología de Brand y Veizer (1980).

La valoración gravimétrica del residuo insoluble al ataque ácido, expresada en % respecto al peso inicial de muestra, se expresa como R.I.; que corresponde al contenido de la fracción de minerales arcillosos, cuarzo y otros silicatos detríticos de la roca, no disueltos durante el ataque.

La determinación del contenido en carbonato se ha realizado mediante el cálculo de la pérdida de peso por ignición (Dean, 1974). Se basa en la interpretación de que las pérdidas de peso tras calentamientos escalonados a 200, 500 y 900 $^{\circ}\text{C}$ corresponden a los contenidos de agua, materia orgánica y CO_2 respectivamente.

El análisis de cationes, excepto el estroncio, se efectuó por espectrometría de absorción atómica, con un equipo PERKIN-ELMER 2380 con llama de acetileno en atmósfera de aire. Por su parte, el estroncio se determinó también por espectrometría de absorción atómica, con un equipo PERKIN-ELMER 3030 con llama de óxido nitroso en atmósfera de aire.

A partir de las muestras se realizaron secciones pulidas y láminas delgadas en el Servicio de Preparación de Rocas y Materiales Duros de la Universidad de Zaragoza. Antes del recubrimiento de estas últimas, se hizo la observación de las propiedades luminiscentes de los cristales que componen las muestras carbonatadas. Mediante esta técnica se intentó

identificar si la incorporación de elementos tales como Fe y Mn en la red del carbonato era o no significativa. Para ello se utilizó el equipo de catodoluminiscencia del Departamento de Geología, modelo 8200 MK II de TECHNOSYN. Los resultados de esta técnica demostraron el carácter no luminiscente de prácticamente la totalidad de las muestras analizadas.

El estudio petrográfico convencional permite identificar la distribución textural y estructural de los componentes, así como una semicuantificación de los mismos, facilitando la identificación de subestructuras y variaciones composicionales en el interior de los nódulos.

4. Resultados

4.1 Distribución y geometría

Las concreciones se sitúan paralelas a la estratificación existente en la roca encajante. Se disponen en un nivel bien definido, presentando una correlación a gran escala dentro del afloramiento.

La laminación alrededor de la concreción está deformada y envolviendo a ésta, sin apreciarse láminas que las corten.

Se encuentran separadas de forma brusca de la roca encajante por la presencia de una coraza de 1 a 3 mm de espesor. Su naturaleza es carbonatada aunque empobrecida con respecto a la concreción y a la roca encajante.

En las concreciones se observan fracturas de pequeño tamaño con continuidad dentro la roca que las rodea. Además, presentan numerosos rasgos edáficos recientes, tales como restos de bioturbación por raíces, depósitos espeleotémicos laminares y estructuras en panal de abeja.

Tanto en las concreciones como en la roca encajante no se ha podido constatar la presencia de restos fósiles.

In situ, las concreciones son de color gris oscuro a gris blanquecino, presentan una morfología esferoidal oblata, aunque también se han identificado algunas morfologías irregulares, y se presentan paralelas al plano de estratificación. Sus diámetros mayores varían de 3 a 16 cm (tabla 1). Presentan una clara zonación, mostrando un núcleo de color más oscuro.

Las concreciones con morfologías irregulares (p.ej.: la muestra Cc-02) podrían tener su origen en la acción de los procesos edáficos posteriores, o incluso podrían deberse a una karstificación diferencial de estas morfologías. Ambos procesos son visibles en la muestras estudiadas. En este caso se descarta el origen por coalescencia de dos o más concreciones, ya que no se ha podido encontrar ningún indicio de este fenómeno.

Muestra	Forma	Diámetro mayor	Diámetro intermedio	Diámetro menor	Material encajante	Inclinación respecto a So
Cc-01	Esferoide oblató	16	11.5	3	Dolomía	0
Cc-02	Irregular	-	-	-	Dolomía	0
Cc-03	Esferoide oblató	11.5	6	6	Dolomía	0
Cc-04	Esferoide oblató	21	15	8	Dolomía	0

Tabla 1.—Parámetros morfológicos y características de situación de los nódulos estudiados. Los diámetros establecidos en cm y la inclinación en grados.

Su superficie viene caracterizada por la presencia de irregularidades debidas a la existencia de espeleotemas laminares, los cuales se ajustan al modelo de formación pedogénico descrito por Sanz (1998) para estas estructuras, y por la existencia de una coraza carbonatada que las separa de la roca encajante.

En varias de las muestras se observa la existencia de pátinas de pirolusita dendrítica y es de destacar la falta de restos fósiles, tanto en la roca encajante como en las concreciones.

4.2 Características microscópicas

Las concreciones están constituidas por dolomita (de origen secundario), con algún indicio de calcita, en forma de micrita ($< 5\mu\text{m}$), y por pequeñas cantidades de cuarzo, tanto como pequeños fragmentos detríticos como en forma de coloides de sílice.

Las concreciones presentan una textura micrítica, en cuyo interior aparecen pequeñas zonas con morfologías pseudolenticulares rellenas de cemento microesparítico, cuya génesis está ligada a la actividad edáfica. En todas ellas encontramos zonas rellenas de cemento microesparítico, las cuales se asocian a procesos edáficos. Estos procesos son el resultado de la actividad de las raíces, tanto en las concreciones como en la roca encajante.

Se observan algunas fracturas de poco espesor y rellenas de cemento microesparítico. Estas fracturas también se aprecian en la roca encajante.

Todas las muestras estudiadas presentan un marcado contraste con la roca encajante, ya que ésta presenta un mayor contenido en minerales opacos y fragmentos de cuarzo detrítico.

4.3 Características mineralógicas y geoquímicas

La composición mineralógica de las concreciones y de la roca encajante es muy homogénea, sin observarse cambios considerables entre el interior y el exterior de las concreciones, tal y como se aprecia en los datos obtenidos por D.R.X. (tabla 2).

Por su parte, las tendencias de evolución geoquímica se pueden explicar desde un punto de vista mineralógico. Si expresamos los contenidos de los elementos diagenéticos

	Micas	Cuarzo	Calcita	Dolomita
Roca	8	7	indicios	85
Exterior	-	indicios	indicios	100
Interior	-	indicios	indicios	100

Tabla 2.—Contenido mineralógico medio obtenido mediante análisis semicuantitativo por D.R.X..

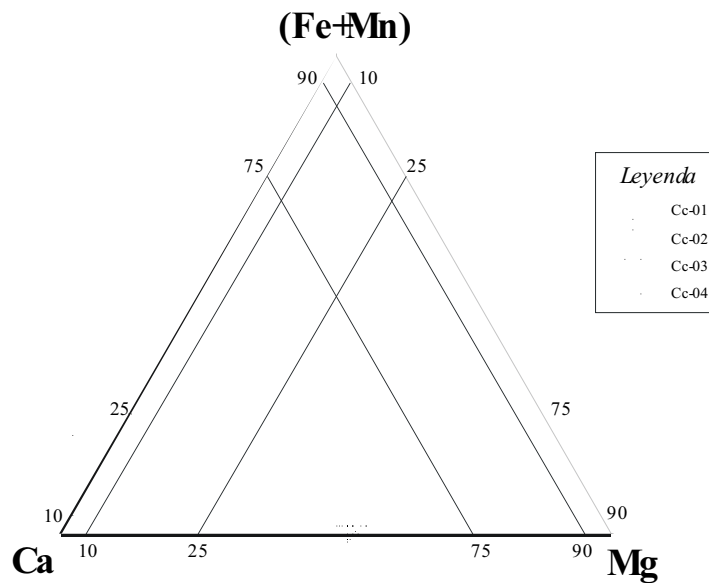


Figura 2.—Variabilidad composicional de las muestras estudiadas, expresada en forma de diagrama triangular, utilizando como polos del mismo los datos analíticos del Ca, Mg y Fe+Mn.

más significativos en un diagrama triangular en el que se representen los contenidos de Ca - Mg - Fe+Mn (figura 2) podemos observar que todas las muestras se sitúan en el dominio de la dolomita.

En contra de lo que parece indicar la figura 2, la dolomita no es la fase mineral responsable original de la formación de las concreciones, sino que han sufrido un proceso posterior de dolomitización que ha afectado por igual a la roca encajante y a las concreciones (Joven *et al.*, 1997). Por lo tanto, es presumible pensar, por analogía con los materiales adyacentes a la columna estudiada, los cuales presentan una naturaleza calcítica, que la fase mineral primaria en la formación de las concreciones y de la roca encajante sea calcita.

La tendencia general en el interior de los nódulos es de una paulatina disminución del contenido en dolomita de centro a borde y en el contenido de residuo insoluble hacia el exterior (figura 3).

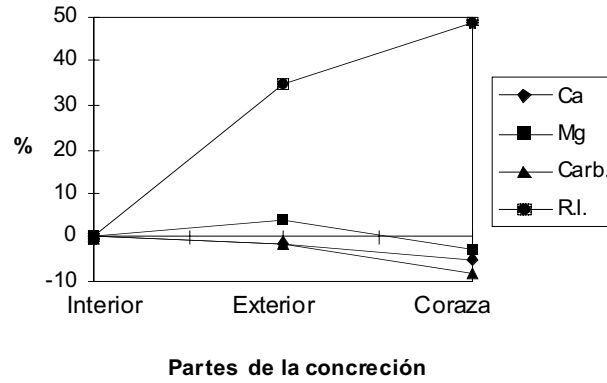


Figura 3.—Porcentaje medio de variación, en el interior de las concreciones, del contenido en carbonato, calcio, magnesio y residuo insoluble.

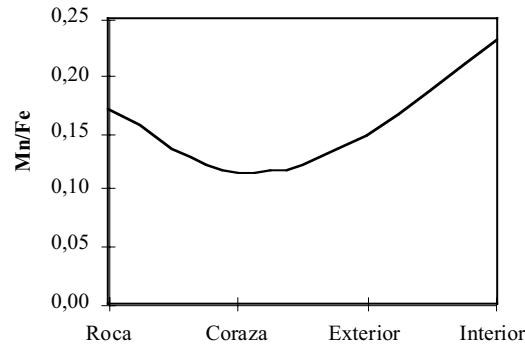


Figura 4.—Variación media del parámetro geoquímico Mn/Fe en las diferentes zonas de los nódulos y en la roca encajante.

Por último, el parámetro Mn/Fe (figura 4), presenta una tendencia negativa desde el interior de los nódulos hasta la roca encajante.

5. Discusión y conclusiones

La distribución de concreciones carbonatadas en los materiales terciarios de las proximidades de la Ermita del Cristo de Ribota (Cuenca de Calatayud), está controlada por las aguas intergranulares atrapadas en los sedimentos. Esta afirmación se fundamenta en la inexistencia de restos fósiles y fragmentos detríticos carbonatados dentro de las concreciones, que pudieran haber actuado como fuente interna en el crecimiento de las concreciones.

El transporte sufrido por el carbonato disuelto hasta el punto de precipitación ha debido ser, en circunstancias normales, relativamente largo (de escala hectométrica a

kilométrica); y evidentemente el mecanismo de transporte ha sido el de flujo, pudiendo descartarse un mecanismo difusivo (Bjørkum y Walderhaug, 1990).

Los aspectos más relevantes a tener en cuenta a la hora de establecer un modelo genético son:

1. La laminación alrededor de las concreciones está deformada, envolviéndolas, sin apreciarse láminas que las corten. Esto sugiere que la roca encajante ha sido desplazada durante el crecimiento de las concreciones.
2. El contenido en residuo insoluble, considerado como el reflejo del contenido en minerales detríticos no carbonatados existente en las muestras, es muy similar tanto en las concreciones como en la roca encajante, observándose los mayores valores en la periferia de los nódulos y en la coraza, lo que podría explicarse por un modelo de emplazamiento desplazante.
3. Las concreciones presentan un contenido en carbonato más elevado, generalmente, en el centro de las concreciones y va disminuyendo progresivamente hacia la periferia. Esta tendencia negativa hacia el exterior de las concreciones es coherente con el crecimiento concrecionario y refleja una reducción progresiva de la porosidad (Gautier, 1982a y b; Mozley y Burns, 1993a y b; entre otros).
4. Se observa un claro zonado marcado por cambios de tonalidad que se podría corresponder con un proceso de ralentización en su velocidad de crecimiento asociado al empobrecimiento progresivo de las concreciones en carbonato. Esta zonación interna concéntrica es una evidencia clara de una estructura concéntrica convencional (Parsons, 1980; Scotchman, 1991; entre otros), la cual no implica siempre un modelo de crecimiento concéntrico convencional, sino que en este caso, y debido al marcado empobrecimiento en carbonato de la roca encajante en contacto directo con las concreciones, parece implicar que crecimiento se ajuste a un modelo de crecimiento en equilibrio, el cual también puede presentar una estructura concéntrica, debida a la variación temporal de la química de las aguas intergranulares durante el crecimiento concrecionario (Berner, 1968; Gautier, 1982a y b).

A la vista de estas evidencias podemos concluir diciendo que la génesis de las concreciones se adapta claramente a un modelo precompactacional, con un emplazamiento desplazante y caracterizado por un crecimiento en equilibrio (Torrijo *et al.*, 1997; Torrijo, 1999).

Agradecimientos

Los autores queremos agradecer la colaboración de María Paz Ibáñez (Laboratorios Proyex, S.A.) en la determinación de estroncio mediante espectrometría de absorción atómica, y la colaboración de Francisco Gonzalo y Fernando San Miguel Til (MYTA) en la realización del estudio mineralógico mediante difracción de rayos X.

Referencias

- [1] Brand, U. and Veizer, J. (1980): Chemical diagenesis of a multicomponent carbonate system-1: Trace elements. *Jour. Sed. Petrol.*, **50**(1), 219-236.
- [2] Berner, R.A. (1968). Calcium carbonate concretion formed by the decomposition of organic matter. *Science*, **159**, 195-197.
- [3] Bjørkum, P.A. and Walderhaug, O. (1990). Geometrical arrangement of calcite cementation within shallow marine sandstones. *Earth Sci. Reviews*, **29**, 145-161.
- [4] Bomer, B. (1960). Aspectos morfológicos de la Cuenca de Calatayud-Daroca y de sus zonas marginales. *Estudios Geol.*, año **XXI**, 21-80, 393-402.
- [5] Colomer, M. y Santanach, P. (1988). Estructura y evolución del borde suroccidental de la Fosa de Calatayud-Daroca. *Geogaceta*, **4**, 29-31.
- [6] Dean, W.E. (1974): Determination of carbonate and organic matter in calcareous sediments and sedimentary rocks by loss on ignition: comparison with other methods. *Jour. Sed. Petrol.*, **44**, 242-248.
- [7] Gautier, D.L. (1982a): Siderite concretions: indicators of early diagenesis in the Gammon Shale (Cretaceous). *Jour. Sedim. Petrol.*, **52**, 859-871.
- [8] Gautier, D.L. (1982b): Siderite concretions, indicators of early diagenesis in shallow gas reservoirs of the Gammon Shale (Cretaceous). *Eleventh International Congress on Sedimentology*.
- [9] Gutiérrez, F. (1994). *Geomorfología de la Región de Calatayud. El karst en yesos*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Zaragoza. 302 pp. (No publicada).
- [10] Gutiérrez, F. (1999). *Fenómenos de subsidencia por disolución de formaciones evaporíticas en las fosas neógenas de Teruel y Calatayud (Cordillera Ibérica)*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza. (No publicada).
- [11] Joven, R.B., Mandado, J., Sanz, F.J. y Torrijo, F.J. (1997). Rasgos edáficos en la periferia del lago terciario central de la Cuenca de Calatayud. *Rev. Acad. Ciencias Zaragoza*, **52**, 171-183.

- [12] Julivert, M. (1954). Observaciones sobre la tectónica de la Depresión de Calatayud. *Arrahona*, 1-17.
- [13] Mozley, P.S. and Burns, S.J. (1993a): Oxygen and carbon isotopic composition of marine carbonate concretions: An overview. *Jour. Sed. Petrol.*, **63**(1), 73-83.
- [14] Mozley, P.S. and Burns, S.J. (1993b): Oxygen and carbon isotopic composition of marine carbonate concretions: An overview. Reply. *Jour. Sed. Petrol.*, **63**(5), 1008.
- [15] Parson, M.W. (1980). *Distribution and origin of elongate sandstones concretions, Bullion Creek and Slope Formations (Paleocene), Adams County, North Dakota*. Master's Thesis, University of North Dakota, Grand Forks, N.D. 133 pp. (Unpublished).
- [16] Raiswell, R. (1971): The Growth of Cambrian and Liassic concretions. *Sedimentology*, **17**, 147-171.
- [17] Sanz, F.J. (1998). *Génesis de depósitos carbonatados asociados al sistema termal de Jarabá-Alhama de Aragón*. Tesis de licenciatura, Universidad de Zaragoza. 180 pp. (No publicada).
- [18] Scotchman, I.C. (1991). The geochemistry of concretions from the Kimmeridgiense Clay Formation of southern and eastern England. *Sedimentology*, **17**, 147-171.
- [19] Tena, J.M. y Mandado, J. (1984). Estudio Geológico de la Cuenca Terciaria de Calatayud-Daroca. *Rev. Acad. Ciencias Zaragoza*, **39**, 69-78.
- [20] Tena, J.M., Mandado, J. y Gisbert, J. (1980). *Síntesis geológica de la Cuenca Terciaria de Calatayud*. Memoria del Departamento de Petrología de la Universidad de Zaragoza. 75 pp. (No publicada).
- [21] Torrijo, F.J., Mandado Collado, J., Joven Barcelona, R.B. y Sanz Morales, F.J. (1997): Nódulos y concreciones. Modelos genéticos. *Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza*, **52**, 159-169.
- [22] Torrijo, F.J (1999): *Nódulos y concreciones carbonatadas. Distribución y génesis*. Tesis de Licenciatura. Universidad de Zaragoza. 201 pp. (No publicada).
- [23] Villena, J, Pérez, A., Pardo, G. y González, A. (1991). *Mapa y memoria explicativa de la Hoja 40 (Daroca) del Mapa Geológico de España a escala 1:200.000*, ITGE.

Estudios de homología entre regiones del operón *mcy* de
Microcystis aeruginosa PCC 7806 y muestras procedentes de
La Estanca de Alcañiz (Teruel)

Beatriz Martín, José Ángel Hernández, Sara López, Luis Ángel Inda,
M. Teresa Bes, María F. Fillat y M. Luisa Peleato

Departamento de Bioquímica y Biología Molecular y Celular.
Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza. 50009-Zaragoza

Abstract

Samples from a toxic bloom in La Estanca (Alcañiz, Teruel) during the late summer and fall of 2000 were used to study the possible Fur (ferric uptake regulator) regulation of the microcystin synthesis. Three promoter regions with homology with promoter sequences present in the *mcy* operon from the toxic *Microcystis aeruginosa* PCC 7806 were found. Putative iron-boxes are present in the three amplified sequences. Gel-shift assays were performed to study possible Fur-DNA binding using those promoter regions and a Fur protein from the cyanobacterium *Anabaena* PCC 7120.

Resumen

En muestras colectadas en la proliferación detectada en otoño del año 2000 en La Estanca de Alcañiz (Teruel) se ha llevado a cabo la amplificación de regiones promotoras de genes descritas en el operón *mcy* de *Microcystis aeruginosa* PCC 7806. El resultado ha mostrado la amplificación de tres regiones con un considerable grado de homología con el citado operón. Estas regiones presentan potenciales secuencias de unión de la proteína Fur (ferric uptake regulator). Ensayos de retardo en gel mostraron que estos promotores unían débilmente FurA de la cianobacteria *Anabaena* PCC 7120.

1. Introducción

El hierro es un elemento esencial limitante en los ecosistemas acuáticos. Recientemente el experimento de fertilización *in situ* en el océano Pacífico, Iron ExII (Coale *et al.*,

1996) demostró que la adición de este elemento incrementaba fuertemente la biomasa. El hierro es muy abundante en la naturaleza, pero paradójicamente se produce deficiencia en muchos casos, dada su escasa solubilidad en medios acuáticos. Además, los organismos deben controlar muy finamente su incorporación ya que puede catalizar la generación de radicales libres. La proteína Fur (ferric uptake regulator) es un represor que en presencia de hierro regula un gran número de genes en bacterias y cianobacterias. Se trata de una proteína de unión al DNA que reconoce secuencias específicas en los promotores de los genes blanco, y afecta a su transcripción. Asimismo, la supervivencia de muchas bacterias patógenas está limitada por el hierro disponible, y en muchos de esos casos la expresión de algunos factores de virulencia y toxinas esta mediada por Fur (De Lorenzo *et al.* 1999)

Las microcistinas son metabolitos secundarios hepatotóxicos producidos por ciertas cianobacterias. Se han descrito cerca de un centenar de microcistinas, que son péptidos cíclicos en los que intervienen aminoácidos no proteicos, y cuya síntesis no se lleva a cabo mediante ribosomas, sino por enzimas denominadas en general “péptido sintetetasas”, que llevan a cabo los enlaces peptídicos, junto con otras enzimas.

Las cianobacterias están ampliamente distribuidas en océanos y aguas dulces. En las aguas dulces, debido a la creciente eutrofización, en muchas ocasiones se producen proliferaciones incontroladas de cianobacterias, capaces de competir muy eficazmente con otros organismos del fitoplancton. Algunas de estas proliferaciones o “blooms” dan lugar a la producción de toxinas, sin que hasta el momento se hayan podido establecer con claridad las causas que llevan a esta situación. Sólo algunas cepas de estos organismos se han mostrado como capaces de formar toxinas. Los factores ambientales en que una cianobacteria pasa a expresar toxinas es uno de los aspectos más estudiados por los especialistas, pero dista mucho de estar claro. Parece ser que altas temperaturas, alta luminosidad, poco viento (es decir, aguas tranquilas y no aireadas), además de disponibilidad de nitrógeno y fósforo podrían ser los factores implicados en que una determinada especie se transforme en tóxica. También un pH del agua alcalino se ha asociado a la aparición de toxicidad. Se da la paradoja de que en muchos casos resulta bastante difícil hacer expresar la toxicidad en el laboratorio a determinadas cepas, mientras que en condiciones naturales la producción ha sido muy elevada.

Los péptidos no ribosomales se sintetizan tanto en organismos eucariotas como en procariotas. La síntesis ocurre en grandes complejos multienzimáticos llamados en general “péptido sintetetasas”, que permiten incorporar y modificar de forma muy variable los aminoácidos, dando lugar a una gran variabilidad. Los genes que codifican las proteínas que forman estos grandes complejos multienzimáticos suelen estar agrupados en grandes operones o “clusters”, donde cada módulo responsable de la adición de un aminoácido

concreto está constituido por dominios muy similares a otros del mismo operón (Moffit and Neilan, 2000). Tillet *et al.* (2000) caracterizaron el operón presente en una cepa de uno de los organismos que más frecuentemente produce problemas, *Microcystis aeruginosa* PCC 7806.

En el otoño del año 2000 tuvo lugar en La Estanca de Alcañiz (Teruel) una proliferación de *Microcystis*, acompañada de producción de toxinas. En estas muestras hemos estudiado la posible presencia de secuencias promotoras homólogas a las presentes en el operón *mcy* (responsable de la síntesis de microcistina) de la cianobacteria tóxica *Microcystis aeruginosa* PCC 7806. Se estudia también la potencial unión de una proteína Fur de otra cianobacteria, *Anabaena* PCC 7120 a estas regiones.

2. Material y Métodos

RECOGIDA DE MUESTRAS: Se tomaron muestras de agua de La Estanca (Alcañiz, Teruel) y tras filtrar a través de varias capas de gasa, se obtuvo el conjunto de la biomasa por centrifugación. Las muestras se mantuvieron congeladas a -20 °C hasta su uso.

EXTRACCIÓN DEL DNA TOTAL: Se tomó 0,03 g de masa celular, resuspendiéndose la muestra en 300 μ l de TE (10 mM Tris-HCl pH 8,0 + 1 mM EDTA, pH 8) y 1% Tritón-X 100. Tras calentar a 95°C durante 4 min, se procedió a la extracción del DNA utilizando fenol-cloroformo (1:1). La extracción se realizó dos veces en proporción 1:1 (v/v) con la muestra. Se centrifugó durante 2 min a 13.000 rpm para separar las fases.

AMPLIFICACIÓN DE LOS PROMOTORES: De acuerdo con la secuencia previamente publicada del operón *mcy* de *Microcystis aeruginosa* PCC 7806, (Tillet *et al.*, 2000. Figura 1) se seleccionaron secuencias promotoras, y se diseñaron los oligonucleótidos correspondientes, utilizándose 20 μ l de la fase acuosa obtenida anteriormente. Se llevó a cabo la amplificación utilizando los oligonucleótidos diseñados para las regiones promotoras J, H, E, G, DA de *Microcystis* PCC7806 en condiciones de hibridación muy permisivas 46°C , o más restrictivas, 57 °C (*T. annaling*), obteniéndose en este último caso una sola banda. Los fragmentos de DNA clonados se purificaron mediante los productos GFX PCR DNA y Gel Band Purification (Amersham-Pharmacia).

EXPERIMENTOS DE RETARDO EN GEL: Se utilizó una proteína recombinante clonada y sobreexpresada de acuerdo con lo descrito en Hernández *et al.* (2002). Los extractos se obtuvieron y purificaron parcialmente según lo descrito en Bes *et al.* (2001). El estudio de retardo en geles se llevó a cabo utilizando la metodología descrita en Bes *et al.* (2001). Se utilizó un tampón que contenía 10 mM Bis-Tris, pH 7.5, 2 mM de DTT, 40 mM KCl, 0.1 mM MnCl₂, 0.5 mg/ml BSA y 15% glicerol. Los fragmentos de DNA usados se obtuvieron

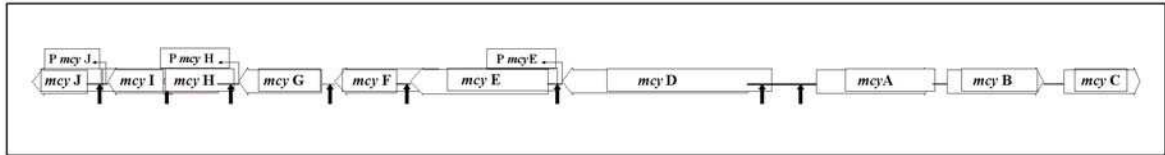


Figura 1.—Localización de potenciales secuencias de unión de Fur en el operón *mcy* de *Microcystis aeruginosa* PCC 7806 (Tillet *et al.*, 2000). Las flechas señalan las regiones promotoras en las que se ha localizado una potencial caja Fur

por PCR y su posterior purificación fue llevada a cabo mediante los “kits” GFX PCR DNA y Gel Band Purification (Amersham-Pharmacia). Para demostrar la especificidad de la unión de la proteína a un determinado promotor, las incubaciones se llevaron a cabo en presencia de un DNA competidor no específico, el cuarto exon de la Apo-E humana.

3. Resultados

El estudio de las secuencias publicadas del operón *mcy* permitió localizar varias secuencias, en las regiones promotoras de algunos genes, potencialmente identificables como una caja de unión de la proteína Fur. La secuencia utilizada como secuencia consenso para establecer la comparación, fue la descrita previamente en Bes *et al.*, (2001), y que correspondía con la secuencia de unión de Fur presente en la zona promotora del gen de la flavodoxina. Presentaban cajas de unión de Fur la mayoría de las regiones promotoras del operón *mcy*, (señaladas con una flecha en la Figura 1).

A partir del DNA cromosómico obtenido del conjunto de células procedentes de La Estanca, y utilizando los oligonucleótidos complementarios a las regiones del operón *mcy* en las que se había localizado una potencial caja de unión de Fur, fue posible amplificar 3 fragmentos de las regiones denominadas J, E y H. No resultó posible amplificar la región DA ni G utilizando los oligonucleótidos diseñados con las secuencias de *Microcystis aeruginosa* PCC 7806.

La figura 2 muestra el alineamiento de las regiones amplificadas, E, J y H (ver correspondientes en figura 1) con las secuencias publicadas para la cepa PCC 7806 de *Microcystis aeruginosa*. La figura muestra que la homología es alta en los tres casos mostrando que mientras en el caso de E y de J la identidad es del 98% y 99% respectivamente, en el caso de la región H, ésta se limita al 74%. En la figura se muestran con una barra las secuencias identificadas como potenciales cajas Fur, en algún caso, solapadas.

Se llevaron a cabo estudios de retardo en gel utilizando los fragmentos citados, una vez purificados. Los fragmentos, que presentaban potenciales cajas de unión a Fur, se

incubaron con la proteína FurA procedente de otra cianobacteria, *Anabaena* PCC 7120. La proteína FurA presentó una débil unión a los promotores, ya que únicamente se observaba retardo a altas concentraciones de proteína, 1 μ M (Figura 3). Otras concentraciones de proteína FurA, tales como 250 y 350 nM no indujeron ningún cambio.

Extractos crudos de las células recolectadas en La Estanca fueron incubados durante 30 minutos a temperatura ambiente con anticuerpos obtenidos contra la proteína FurA de *Anabaena* PCC 7120. Las muestras se centrifugaron y los precipitados se sometieron a una electroforesis desnaturalizante en presencia de SDS (15% de poliacrilamida), y a una posterior transferencia a una membrana de PVDF. La tinción de las proteínas obtenidas indicó que había una proteína mayoritaria con reacción cruzada con los anti-Fur de *Anabaena* PCC 7120, (carriles 4 y 5 de la Figura 4), que tenía mayor peso molecular que la utilizada como control, Fur de *Anabaena* (carriles 1, 2 y 3 de la Figura 4). Esta potencial proteína Fur podría también proceder de alguna de las cianobacterias presentes en las células de partida, no necesariamente de *Microcystis*, aunque ésta era la población mayoritaria.

4. Dicción

Fur es una proteína reguladora que se piensa que afecta a gran número de genes, incluyendo algunos no directamente relacionados con el metabolismo o la incorporación de hierro (Escolar *et al.*, 1999). Se ha propuesto que Fur podría ser un regulón de primera magnitud en los procariotas, controlando rutas clave. En bacterias heterótrofas patógenas se ha demostrado que la expresión de factores de toxicidad está controlada por la proteína Fur, que ante la escasez de hierro disponible, deja de reprimir una serie de genes que expresan toxinas. Las toxinas destruyen a las células circundantes, por ejemplo glóbulos rojos, que originan el hierro suficiente para garantizar su proliferación y no ver su crecimiento limitado por la escasez de este metal.

En cianobacterias, Fur reprime, entre otros genes, la expresión de la flavodoxina, una flavoproteína de pequeño tamaño que se induce en condiciones de deficiencia de hierro. El hecho de que en años anteriores se demostrara inequívocamente, mediante fertilización *in situ*, que el hierro es el elemento limitante en ciertas regiones oceánicas llamadas HNLC (high nutrients low chlorophyll, altos nutrientes y baja clorofila) (Coale *et al.*, 1996) indica que el metabolismo del hierro puede ser crucial en la supervivencia y crecimiento de las cianobacterias.

Existe muy poca información en cuanto a la regulación de la expresión de las enzimas relacionadas con la síntesis de microcistina. Se ha descrito que la luz regula la transcripción del operón *mcy* en *Microcystis aeruginosa* PCC 7806 (Kaebernick *et al.*, 2002),

pero por el momento no se ha encontrado ningún otro factor de regulación. Como dato interesante podemos apuntar que se han observado cajas de unión a Fur en general, en los genes regulados por luz.

Un factor importante en la regulación de la síntesis de microcistinas, podría ser en nuestra opinión, la disponibilidad de hierro, y Fur podría estar mediando esa regulación. En principio Fur es un represor, que en presencia de Fe^{++} se une al DNA e impide la transcripción de los genes a los cuales regula. Las cianobacterias tienen mecanismos de adquisición de hierro muy importantes, lo cual les confiere una ventaja muy grande en cuanto a competencia con otros organismos debido a la producción de sideróforos. Muchos de estos mecanismos de adquisición de hierro, están regulados también por Fur. En la literatura hay datos contradictorios con respecto a la influencia del hierro y la expresión de toxicidad, aunque Lukac y Aegerter (1993) y Lyck et al, (1996) demuestran que la deficiencia de hierro da lugar a una mayor producción de microcistina, interpretándolo como una respuesta a un estrés. Deficiencia de hierro provocaría la no funcionalidad de Fur, y el cese de represión de los genes afectados.

Nuestra hipótesis consiste en que un exceso de nutrientes, incluido el hierro, provocan una proliferación incontrolada de fitoplancton, con fuerte predominio de las cianobacterias con mejores sistemas de adquisición de nutrientes, y esta proliferación da lugar a un colapso en que se induce una deficiencia secundaria de hierro, por otra parte muy poco soluble en ciertos pHs típicos de blooms tóxicos. La deficiencia de hierro daría lugar a la expresión de los factores de toxicidad, antes bloqueados, y a la síntesis de microcistina. En algún caso, hay una referencia indicativa de que el hierro estimula la producción de microcistina (Utkilen and Gjome, 1995), pero en nuestra opinión, esto podría ser debido a un efecto del hierro sobre proliferación de las células, y posterior deficiencia indirecta.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al proyecto P073/2001 de la Diputación General de Aragón y a una Beca Predoctoral de Formación de Personal Investigador de D.G.A. concedida a Beatriz Martín Luna.

Referencias

- [1] Bes, M.T., Hernández, J.A., Peleato, M.L. y Fillat, M.F. (2001) Cloning, overexpression and interaction of recombinant Fur from the cyanobacterium *Anabaena* PCC 7119 with isiB and its own promoter. FEMS Microbiology Letters **194**, 187-192.
- [2] Escolar, L., Pérez-Martin, J. y de Lorenzo, V. (1999) Opening the iron box: transcriptional metalloregulation by the Fur protein. J. Bacteriol. **181**, 6223-6229.

- [3] Coale, K.H., Johnson, K.S., Fitzwater, S.E., Gordon, R.M., Tanner, S., Chavez, F.P., Ferioli, L., Sakamoto, C., Rogers, P., Millero, F., Steinberg, P., Nightingale, P., Cooper, D., Cochlan, W.P., Landry, M.R., Constantinou, J., Rollwagen, G., Trasvina, A. y Kudela, R. (1996). A massive phytoplankton bloom induced by an ecosystem-scale iron fertilization experiment in equatorial Pacific Ocean. *Nature* **383**, 495-501.
- [4] Boyd, P.W. (2000) A mesoscale phytoplankton bloom in the polar southern Pacific ocean stimulated by iron fertilization. *Nature* **407**, 695-702.
- [5] Hernández, J.A. M. Teresa Bes, María F. Fillat, José L. Neira and M. Luisa Peleato. (2002). Biochemical analysis of the recombinant Fur protein from *Anabaena* PCC 7119; factors affecting its oligomerization state. *Biochemical Journal*. **366**, 315-322.
- [6] Kaebernick, M., Neilan, B.A. (2001). Ecological and molecular investigations of cyanotoxin production. *FEMS Microbiol. Ecol.* **35**, 1-9.
- [7] Kaebernick, M., Dittmann, E., Börner, T. and Neilan, B.A. (2002) Multiple alternate transcripts direct the biosynthesis of microcystin, a cyanobacterial nonribosomal peptide. *Applied and Environmental Microbiology*, **68**, 449-445.
- [8] Lukac, M. y Aegerter, R. (1993) Influence of trace metals on growth and toxin production of *Microcystis aeruginosa*. *Toxicon*. **31**, 293-305.
- [9] Lyck, S., Gjolme, N. y Utkilen, H. (1996). Iron starvation increases toxicity of *Microcystis aeruginosa* CYA 228/1 (Chroococcales, Cyanophyceae). *Phycologia*, **35**, 120-124.
- [10] Tillet, D., Dittmann, E., Erhard, M., von Döhren, H., Börner, T y Neilan, B. (2000). Structural organization of microcystin biosynthesis in *Microcystis aeruginosa* PCC7806: an integrated peptide-poliketide synthetase system. *Chemistry and Biology*, **7**, 753-764.

```

region H  GGAGGAGAAAACAGCATTC CCCCATGAACTTATTACCTAAGAAAATGTCCTTCCTTTAAGAN 60
mcyH      GGAGGAGAAAACAGCATTC CCCCATGAACTTATTACCTCTGAAAATGTCCTTCCTTTAAGAT 60

region H  CCGGATGGATACCACTCCTAGGAGCGNANATMAAANNMNAATTANCAAAAAANAGATGAGAA 120
mcyH      CCGGATGGATACCACTCCTAGGAGCGCAATCAATTTCCAGATTGTCAAAAAATTGATGAGAG 119

region H  CTNTTNNMGGNATCTCTGCTNAAAAANNNMGATNTTNTGNATTTTGAA----- 166
mcyH      CTNTTACGGTTTCTTGTTCAAAAATATGGAGTTTGCATAGTTTGAAATATAGGGTAACTTT 179

region H  ----- 166
mcyH      TAGGAAAATGCCTTGAATTTTTTTTTAACTTCAAGCTTTCTAACTTCAAGGCTTAGGATTAT 239

region H  ----- 166
mcyH      TTAATCTCCTAAAAAAGCCTCCAAATCAGTAAGTTCTTG 278

region E  CTCTCAACCATGCCCTATTCTCTATAAATTTCTAAATTTATACGCCGTTAAACATAAAATTA 60
pmcyE    CTCTCAACCATGCCCTATTCTCTATAAATTTCTAAATTTATACGCCGTTAAACATAAAATTA 60

region E  GGATGCTGTGCTATCAGTAAATATAAACCCAAATTTAACCCAGAGAGTTAAGCTTACTC 120
pmcyE    GGATGCTGTGCTATCAGTAAATATAAACCCAAATTTAACCCAGAGAGTTAAGCTTACTC 120

region E  ATGTTTCATCTACCTATCCTACCACATCTCATGGCTTTTGAAACATTAATTTTAAAGTTTA 180
pmcyE    ATGTTTCATCTACCTATCCTACCACATCTCATGGCTTTTGAAACATTAATTTTCAAGTTTA 180

region E  ACCTCCATATTGATCAAGCTCCG 203
pmcyE    ACCTCCATATTGATCAAGCTCCG 203

region J  CTGATCTTGCAAAAAACGCCATTTCTCGAACCGGATTAAGGATAAATTGTTTGATGATTGC 60
pmcyJ    CTGATCTTGCAAAAAACGCCATTTCTCGAACCGGATTAAGGATAAATTGTTTGATGATTGC 60

region J  CCAGCGATTACGCCATTCATCTTTGAGGGGAATTTGCCGATGTTTTCCAAATTATTATC 120
pmcyJ    CCAGCGATTACGCCATTCATCTTTGAGGGGAATTTGCCGATGTTTTCCAAATTATTATC 120

region J  CTCCTAAGGATTTTGCAGAAAATATTGCCATTTTTAACTTAACCGAATCCCTGAGATTCTCT 180
pmcyJ    CTCCTAAGGATTTTGCAGAAAATATTGCCATTTTTAACTTAACCGAATCCCTGAGATTCTCT 180

region J  AGATGCTTTAAAAAAGATTCCACGCCTCCGGATTAATC 218
pmcyJ    AGATGCTTTAAAAAAGATTCCACGCCTCCGGATTAATC 218

```

Figura 2.—Secuencia de las tres regiones promotoras amplificadas, H, E y J. Las secuencias se muestran alineadas con las correspondientes en el operón *mcy* de *Microcystis aeruginosa*. Las potenciales cajas de unión de la proteína Fur se encuentran señaladas con una barra en la parte superior.

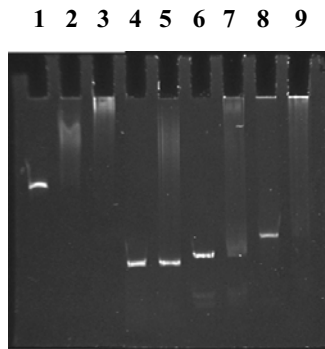


Figura 3.—Retardo en gel de las regiones H, E y J en presencia de FurA 1 mM. Carriles 1, 2 y 3: control positivo con la region promotora de furA (1) y esta región promotora en presencia de FurA 750 nM (2) y 1 μ M (3). Carriles 4 y 5: promotor E sin (2) y con (3) FurA 1 μ M. Carriles 6 y 7: promotor J sin (6) y con (7) FurA 1 μ M. Carriles 8 y 9: promotor H sin (8) y con (9) FurA 1 μ M.

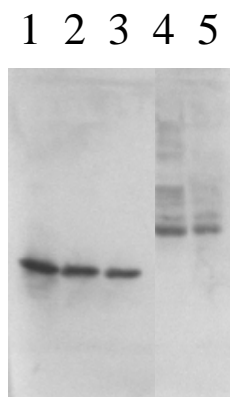


Figura 4.—Transferencia de Western de inmunoprecipitados obtenidos tras incubación de extractos crudos de muestras de La Estanca. Carril 1: 1 μ g de FurA pura ; carril 2: 0.5 μ g de FurA pura; carril 3: 0.25 μ g de FurA pura; carril 4: extracto crudo de muestras de La Estanca, con 64 μ g de proteína total, incubadas con anticuerpos antiFurA de *Anabaena* PCC 7120. Se aplicó el inmunoprecipitado; carril 5: muestra análoga a la aplicada en el carril 4, pero con 42 μ g de proteína total.

Expresión coordinada de una proteína de 42kDa y plastocianina en el alga verde verde *Scenedesmus vacuolatus*

M. Dolores Miramar, M. Luisa Peleato y Luis A. Inda

Departamento de Bioquímica y Biología Molecular y Celular.
Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza. 50009-Zaragoza

Abstract

To maintain photosynthetic competence under different nutritional conditions, the green alga *Scenedesmus vacuolatus* is able to use either a hemo protein, cytochrome c_6 or a copper protein, plastocyanin, depending on the iron and copper availability. A 42 kDa protein, crossreactive with plastocyanin antibody is coordinately expressed with plastocyanin in response to changes in copper availability.

Resumen

Se ha purificado una nueva proteína del alga verde *Scenedesmus vacuolatus*. Esta proteína presenta reactividad cruzada con los anticuerpos de plastocianina, tiene un peso molecular aparente de 42 kDa, un punto isoeléctrico ácido. Esta proteína parece verse afectada por la disponibilidad de cobre, y se expresa coordinadamente con la plastocianina.

1. Introducción

La plastocianina es una pequeña proteína que contiene cobre, y que lleva a cabo un importante papel redox en organismos fotosintéticos. Este transportador soluble de un electrón se encuentra en el espacio tilacoidal y transfiere electrones desde el citocromo f al fotosistema I. Algunas algas y cianobacterias, bajo deficiencia de cobre son capaces de sustituir esta cuproproteína por otro transportador que contiene hemo, el citocromo c_6 . En contraste, solo plastocianina ha sido encontrada en las plantas superiores, y está ampliamente aceptado que el citocromo ha sido evolutivamente eliminado. La cantidad relativa de ambas proteínas, cuando estas coexisten, está regulado por cobre, que reprime la transcripción del gen del citocromo c_6 (Merchand y Bogarad, 1986).

En el trabajo de purificación y caracterización de la plastocianina del alga verde *Scenedesmus vacuolatus* (Miramar *et al.*, 2002) se detectó una proteína que presenta reactividad cruzada con los anticuerpos generados contra la plastocianina. En este trabajo se describe la purificación de esta proteína, su expresión en medios de cultivo con diferentes disponibilidades de hierro y cobre.

2. Materiales y Métodos

CULTIVO DE *Scenedesmus vacuolatus*

Las células se cultivaron a 28 °C con el medio de cultivo descrito por Kessler y Czygan (1970). Las células se iluminaron con un panel de luces fluorescentes ($100 \mu\text{mol m}^{-2} \text{s}^{-1}$) y se burbujearon con aire y CO_2 al 5%. Las células fueron cultivadas en medios deficientes de hierro ($0,18 \mu\text{M}$) con cobre ($1 \mu\text{M}$) y en medios completos de hierro ($18 \mu\text{M}$) y nada de cobre.

PURIFICACIÓN DE LA PROTEÍNA

Las células se rompieron utilizando un molino de bolas (Vi 4 de Edmund Bühler). Para ello se mezclan 160 g de bolas de circonio (de $500 \mu\text{m}$ de diámetro) por cada 20 g de algas y 25 ml de tampón de homogenización. El tampón de homogenización consiste en: Tris-acetato 50 mM pH 8, MnCl_2 5mM, β -mercaptoetanol 1 mM, EDTA 1 mM y el inhibidor de proteasas PMSF (fluoruro de fenil-metil-sulfonilo) $10 \mu\text{M}$. Las membranas y células no rotas se retiraron por centrifugación a 18000 g durante 20 minutos a cuatro grados. El sobrenadante resultante se precipitó con un 90% de acetona pre-enfriada ($-20 \text{ }^\circ\text{C}$). El nuevo precipitado obtenido se separó por centrifugación y se eliminó la acetona restante por evaporación en campana extractora.

El precipitado se resuspendió en tampón de homogenización y se centrifugó a 18000 g durante 10 minutos.

Este extracto proteico crudo se pasó por una primera columna de DEAE-celulosa ($3 \times 65 \text{ cm}$) previamente equilibrada con Tris-HCl 50 mM pH 8. La elución se llevó a cabo mediante un gradiente salino de 0 a 0,5 M de NaCl. Las fracciones obtenidas se analizaron mediante medidas de absorbancia a 280 nm y mediante el test de Ouchterlony. Las fracciones que contenían p42 se juntaron y dializaron frente a Tris-HCl 50 mM pH 8.

Se realizó una segunda cromatografía de DEAE-celulosa para separar la plastocianina de la p42. La columna ($2 \times 31 \text{ cm}$) se eluyó utilizando un gradiente salino de 0 a 0,4 M de NaCl. La fracción que contiene p42 se dializó y concentró con una célula Amicon (Grace).

Esta fracción se sometió a una nueva cromatografía por FPLC, usando una columna Mono-Q 10 (Pharmacia). El disolvente A fue Tris 20 mM pH 8 y el B fue Tris 20 mM

pH 8 y NaCl 1 M. El gradiente fue de 0 a 55 % en 30 minutos. Las fracciones obtenidas se examinaron por absorbancia a 280 nm, electroforesis y por la técnica de Ouchterlony.

MÉTODOS INMUNOQUÍMICOS

Los anticuerpos anti-plastocianina se obtuvieron como se describe en Bes *et al.* (1999).

La reactividad cruzada se estudió con la técnica de Ouchterlony (1949).

Los análisis de western-blot se llevaron a cabo usando los anticuerpos anti plastocianina al 0,5% (v/v). Las muestras se corrieron en geles de SDS-PAGE al 15%, y se transfirió a filtros de PVDF (Waters). Las membranas fueron tratadas utilizando anticuerpos anti-IgG de conejo unidos a peroxidasa. Como sustrato de la peroxidasa se utilizó dioctil-sulfosuccinato y 3,3',5,5'-tetrametilbenzidina.

MÉTODOS ANALÍTICOS

La cuantificación de proteína totales se llevó a cabo por el método de Lowry (Lowry *et al.*, 1951).

El contenido en clorofila se determinó espectrofotométricamente utilizando acetona como describió MacKinney (1941).

La lectura de la secuencia aminoterminal de la p42 se llevó a cabo en The Babraham Institute de Cambridge (U.K.). La muestra para secuenciación fue transferida a membranas de PVDF como se describe en LeGengre *et al* (1993).

TÉCNICAS ENZIMÁTICAS. ACTIVIDAD ALDOLASA.

Se determinó el descenso de absorbancia por minuto a 340 nm, causado por la oxidación del NADH a NAD⁺.

La mezcla de reacción contenía: Glicil-glicina-KOH pH 7,5 60 mM, KCl 0,15 M, Fructosa 1,6 difosfato 30 mM, Triosa fosfato isomerasa 1 UI, α -glicerofosfato deshidrogenasa 1 UI, NADH 1mM y muestra proteica.

3. Resultados y discusión

Las anticuerpos generados contra la plastocianina, no sólo reconocen a la plastocianina, sino que también reconocen a otra proteína. Utilizando la técnica de doble difusión (Ouchterlony) se comprobó que el mismo antisuero reconocía a dos proteínas (Fig. 1).

La reactividad cruzada podría ser debida a la presencia de un mismo determinante antigénico en ambas. Se excluyó que se tratara de una contaminación inicial al generar los anticuerpos, ya que no se observó una banda de precipitación extraña entre el antisuero y la proteína utilizada en su generación. El antisuero fue generado a partir de la proteína pura, la cual sólo produjo una señal. Esta analogía antigénica entre varias proteínas de un mismo organismo ha sido descrita previamente en proteínas ferredoxín-dependientes de al-



Figura 1.—Gel de Ouchterlony. En los pocillos centrales se colocó el suero anti-plastocianina. En el pocillo A se aplicó extracto total de proteínas solubles de *S. Vacuolatus* y en B se aplicaron muestras de la misma fracción de plastocianina pura de *S. Vacuolatus* utilizada para la inoculación de los conejos.

gas (Gotor *et al.*, 1990) y plantas (Knaff y Hirasawa, 1991). Esta proteína era ligeramente menos aniónica que la plastocianina ($pI= 3,9$), deducido a partir de su comportamiento en cromatografía de intercambio aniónico.

Transferencias de Western mostraron que la banda con reactividad cruzada correspondía a una masa molecular de 42 kDa (Figura 2, carril C).

Se consideró la posibilidad de que esta banda se debiera a oligomerización de plastocianina y un comportamiento anormal de estos oligómeros no afectándose por la presencia de SDS y β -mercaptoetanol. La formación de oligómeros en este tipo de geles había sido observado previamente en otras proteínas (Medina *et al.*, 1997; Kerfeld *et al.*, 1995), pero la plastocianina purificada y concentrada no daba lugar a esta banda pesada, por lo que se descartó esta posibilidad (Figura 2, carril A).

En el mismo experimento se analizaron muestras procedentes de cultivos en presencia y ausencia de cobre y se observó que esta proteína aparecía incrementada en cultivos sin deficiencia de cobre (Figura 3, carriles 1, 2 y 4), y que su comportamiento parecía paralelo al de la plastocianina. Con hierro en condiciones óptimas (carril 4), se observa otra banda con reactividad cruzada que identificamos como el precursor de la plastocianina, conteniendo el péptido señal para su introducción en el cloroplasto.

La purificación se realizó con varios pasos de cromatografía. En la primera cromatografía, columna de DEAE-celulosa, la elución se analizó espectrofotométricamente a varias longitudes de onda para determinar de forma específica la presencia de varias proteínas ya descritas. En el conjunto de fracciones que contenían plastocianina había considerables cantidades de p42. Este conjunto de fracciones que contenían plastocianina

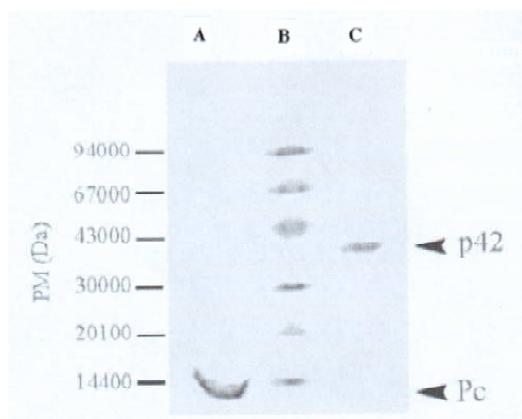


Figura 2.—Gel de electroforesis SDS-PAGE de dos fracciones eluidas de la cromatografía de FPLC. Carril A= muestra de plastocianina pura., Carril B= patrones de peso molecular, Carril C= proteína de 42 kDa pura.

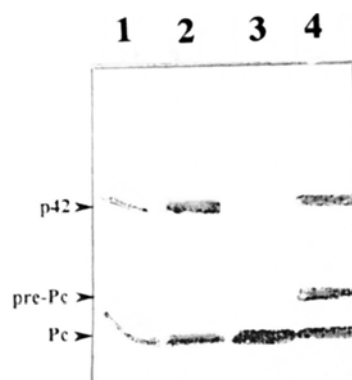


Figura 3.—Western-blot (electroforesis SDS-PAGE al 15% y transferencia a filtro de PVDF) de proteínas procedentes de extractos solubles de células de *S. vacuolatus* crecidas en diferentes condiciones de hierro y cobre. Carril 1: extracto de células crecidas con Fe 9 μM y Cu 0 μM . Carril 2: extracto de células crecidas con Fe 9 μM y Cu 1 μM . Carril 3: Plastocianina. Carril 4: extracto de células crecidas con Fe 18 μM y Cu 1 μM .

y p42 se dializó y sometió a una segunda cromatografía, también de DEAE-celulosa. Una nueva cromatografía en FPLC de intercambio iónico permitió separarla de las impurezas de plastocianina. En la figura 2 se observa un gel de electroforesis con dos muestras de proteínas separadas en la tercera cromatografía.

La proteína purificada se sometió a secuenciación del extremo amino-terminal, obteniéndose la secuencia:

1 K Y D E E L V Q T A N K K K S S S G R G 21

Se buscaron secuencias homólogas a la secuencia aminoterminal de p42 en las bases de datos Swiss-Protein (www.expasy.org/sprot/) (Bairoch y Apweiler, 2000) y EMBL (www.embl-heidelberg.de), con resultados meramente especulativos.

La máxima homología comparando con secuencias conocidas de proteínas correspondió

con la fructosa difosfato aldolasa de arroz (12 de 19 aminoácidos) y de otra alga verde, *Chlamydomonas reinhartii* (8 de 10 aminoácidos). Esta proteína tiene el peso molecular aproximado coincidente con nuestra proteína problema, pero por el contrario, el pI de todas las aldolasas caracterizadas hasta el momento es básico y el punto isoeléctrico de la p42 es aniónico. Las pruebas de actividad aldolasa realizadas con p42 purificada resultaron negativas, por lo que no se puede asumir que se trate de esta proteína. Aunque se han descrito tres tipos de aldolasas en los organismos fotosintéticos, con distintos requerimientos bioquímicos para ser activas, las de algas verdes, rojas y pardas no necesitan requerimientos especiales (Gibbs y Latzko, 1979).

La comparación con las bases de datos de genomas conocidos no aportó tampoco más luz al problema. Ninguna hipotética proteína de cianobacterias presentaba homología con p42, y en este caso la mayor homología la presentaba con una hipotética proteína inducible por NaCl (13 de 20 aminoácidos), acídica, pero de 7 kDa también presente en el alga verde *Chlamydomonas reinhartii*.

Los resultados obtenidos indican que se trata de una proteína desconocida que aumenta su concentración en presencia de cobre, que tiene un peso molecular de 42 kDa y un punto isoeléctrico cercano a 4.

Referencias

- [1] Bairoch A. y Apweiler R. (2000). *Nucleic Acid Res.*, **28**, 45-48.
- [2] Bes M.T., Parisini E., Inda L.A., Saraiva L.M., Peleato M.L. y Sheldrick G. (1999). *Structure*, **7**, 1201-1211.
- [3] Gibbs M. y Latzko E. (1979). *Encyclopedia of Plant Physiology*. Vol. **6**. Springer-Verlag.
- [4] Gotor C., Pajuelo E., Romero L.C., Márquez J.A. y Vega J.M. (1990). *Arch. Microbiol.* **153**, 2309-234.
- [5] Kerfeld C.A., Anawa H.P., Interrante R, Merchant S. y Yeates T.O. (1995). *J. Mol. Biol.* **150**, 627-647.
- [6] Kessler E. y Czygan F. C. (1970). *Arch. Mikrobiol.*, **70**, 211-216.
- [7] Knaff D.B. y Hirasawa M. (1991). *Biochim. Biophys. Acta* **1056**, 93-125.
- [8] LeGendre N., Mansfield M., Weiss A. y Matsudara P (1993). En *A practical guide to protein and peptide purification for microsequencing*. Matsudara P.(ed). pp 71-101. Academic Press. San Diego (CA).
- [9] Lowry O.H., Rosebrough N.J., Farr A.L. y Randall R.J. (1951). *J. Biol. Chem.*, **193**, 265-275.

- [10] MacKinney G. (1941) *J. Biol. Chem.*, **140**, 314-322.
- [11] Medina M., Louro R., Gagmon J., Peleato M.L., Mendes J., Gómez Moreno C., Xavier A. y Teixeira M. (1997). *J. Biol. Inorg. Chem.* **2**, 225-234.
- [12] Merchand S. y Bogorad L. (1986). *Mol. Cell. Biol.* **6**, 462-469.
- [13] Miramar M.D., Inda L.A., Saraiva L.M. y Peleato M.L. (2002) enviado a *J. of Plant Physiology*.
- [14] Ouchterlony O. (1949). *Acta Pathol. Microbiol. Scand.*, **26**, 507-511.

VIDA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS, QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA EN EL AÑO 2002

Desde el día 18 de septiembre de 2002, y por concesión de la Casa Real de España, la Academia pasa a denominarse **Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza**. Sus principales actividades a lo largo del año 2002 se resumen en lo que sigue.

Sesiones:

En el año 2002 la Real Academia de Ciencias de Zaragoza ha celebrado 9 Sesiones. De ellas cinco fueron Ordinarias y cuatro Extraordinarias, dos de estas últimas con motivo de Discursos de Ingreso de nuevos Académicos Numerarios y las dos restantes con motivo de Discursos de Recepción de nuevos Académicos Correspondientes.

Las Ordinarias tuvieron lugar los días 11 de abril, 9 de mayo, 13 de junio, 25 de septiembre y 17 de diciembre.

Las Extraordinarias tuvieron lugar en las fechas que se indican, con los títulos de los correspondientes discursos:

- 16/5/2002. Discurso de Ingreso del Ilmo. Sr. D. Pablo J. Alonso Gascón: *La resonancia paramagnética y electrónica: una técnica multidisciplinar*.
- 17/10/2002. Discurso del Académico Correspondiente Ilmo. Sr. D. Claude Brezinski: *Quasi-orthogonality and applications to some families of orthogonal polynomials*.
- 16/5/2002. Discurso de Ingreso del Ilmo. Sr. D. Juan Pablo Martínez Rica: *La ecología de montaña: oportunidades para la investigación científica*.
- 17/10/2002. Discurso del Académico Correspondiente Ilmo. Sr. D. Leandro Sequeiros Sanromán: *La extinción de las especies biológicas: construcción de un paradigma científico*.

Nuevos Académicos Numerarios:

- Ilmo. Sr. D. Pablo Javier Alonso Gascón, Académico Numerario (Sección de Físicas) con la Medalla N°35

- Ilmo. Sr. D. Juan Pablo Martínez Rica, Académico Numerario (Sección de Naturales) con la Medalla N°36

Nuevos Académicos Correspondientes:

- Ilmo. Sr. D. Claude Brezinski, de la Universidad de Lille (Francia), por la Sección de Exactas.
- Ilmo. Sr. D. Charles A. Micchelli, de la State University de Nueva York en Albany (USA), por la Sección de Exactas.
- Ilmo. Sr. D. Giles Pisier, de la Universidad de Paris VI. París (Francia), por la Sección de Exactas.
- Ilmo. Sr. D. José Luis Fernández Pérez, de la Universidad Autónoma de Madrid (España), por la Sección de Exactas.
- Ilmo. Sr. D. Emiliano Aguirre Enríquez, de la Real Academia de Ciencias de Madrid (España), por la Sección de Naturales.
- Ilmo. Sr. D. Leandro Sequeiros Sanromán, de la Universidad de Granada (España), por la Sección de Naturales.
- Ilmo. Sr. D. Claus Sdzuy, de la Universidad de Wrzburg (Alemania), por la Sección de Naturales.
- Ilmo. Sr. D. Pedro Montserrat, del Instituto de Estudios Pirenaicos (España), por la Sección de Naturales.
- Ilmo. Sr. D. Luis Villar, del Instituto de Estudios Pirenaicos (España), por la Sección de Naturales.
- Ilmo. Sr. D. Adrian Harvey, de la Universidad de Liverpool (Gran Bretaña) por la Sección de Naturales.
- Ilmo. Sr. D. Mario Panizza, de la Universidad de Módena (Italia), por la Sección de Naturales.
- Ilma. Sra. Dña. M Josefa Yzuel, de la Universidad Autónoma de Barcelona (España), por la Sección de Físicas.
- Ilmo. Sr. D. Carlos Sánchez del Río, de la Real Academia de Ciencias de Madrid (España), por la Sección de Físicas.

- Ilmo. Sr. D. Giuseppe Marmo, de la Universidad de Nápoles (Italia), por la Sección de Físicas.
- Ilmo. Sr. D. Ekkehardt Hahn, de la Universidad de Munster (Alemania), por la Sección de Químicas.
- Ilmo. Sr. D. Pierre Braunstein, de la Universidad de Estrasburgo (Francia), por la Sección de Químicas.

Publicaciones de la Academia:

- Los dos Discursos de Ingreso relatados en el apartado de Sesiones.
- Monografía N°20. *Multivariate Approximation and Interpolation with Applications*. Editor: Mariano Gasca.
- Monografía N°21. *La extinción de las especies biológicas: construcción de un paradigma científico*. Autor: Leandro Sequeiros.
- Volumen 57 de la Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza.

La distribución de números de la Revista y Monografías se realiza fundamentalmente mediante intercambio con distintos organismos de todo el mundo.

Organización de Congresos y Conferencias.

La Academia ha colaborado en la organización de los siguientes congresos en 2002:

- IX Encuentro de Topología, organizado en Jaca (Huesca) en mayo por la Académica Numeraria Dra. Dña. Ma. Teresa Lozano.
- V Jornadas de Mecánica Celeste, organizadas en Albarracín (Teruel) en junio por el Académico Numerario Dr. D. Antonio Elipe.
- También ha colaborado en la organización del Ciclo de Conferencias Cita con la Ciencia. Espacio Facultad 2002-2003 en la Facultad de Ciencias y en la organización, con la Secretaría General de la Universidad de Zaragoza, el 25 y 26 de noviembre, de unas Conferencias sobre Matemática Electoral con el título Elecciones Universitarias, impartidas por el Profesor D. Victoriano Ramírez, de la Universidad de Granada.

- Además de participar en numerosos Congresos nacionales e internacionales, los Académicos impartieron distintas conferencias en el ámbito de la difusión de la ciencia.

En particular, el Académico D. José S. Urieta, ha coordinado unos ciclos de conferencias (e impartido algunas de éstas) correspondientes a la Red Temática Docente “Fundamentos moleculares del comportamiento de fluidos y de los equilibrios de fases. Aplicaciones a las industrias química y alimentaria”. Tuvieron lugar en la Universidad de Vigo-Orense, del 15 al 20 de julio, 2002, y en la Católica Universidad Pontificia del Perú (Lima, del 12 al 17 de agosto, 2002).

El Académico D. José F. Cariñena fue miembro del Comité Organizador del “34th Symposium on Mathematical Physics”, celebrado en junio en Torun (Polonia) y el Académico D. Mariano Gasca fue miembro del “Comité Científico de la Fifth International Conference on Curves and Surfaces” celebrado en St. Malo (Francia).

Premios de investigación 2002.

Se convocaron los Premios de Investigación 2001–02 de la Academia. El ganador fue el trabajo de la Sección de Exactas titulado *On the asymptotic determination of invariant manifolds of autonomous ordinary differential equations*, firmado por D. Jesús Palacián Subiela, que recogió el Premio en la Sesión Extraordinaria del 24 de octubre. El trabajo se publica en el volumen 57 de la Revista de la Academia.

Distinciones a Académicos.

El Ilmo. Sr. D. Luis Oro Giral recibió el Premio de Investigación Bethancourt-Perronet 2002.

El Ilmo. Sr. D. Manuel Calvo Pinilla recibió el Premio CMMSE 2002 en el Congreso Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering 2002 en Alicante.

El Ilmo. Sr. D. Antonio Elipe Sánchez recibió en San Fernando (Cádiz) la Cruz al Mérito Naval con distintivo blanco.

El Ilmo. Sr. D. Luis Oro Giral fue nombrado Académico Asociado Extranjero de la Academie des Sciences de Francia.

El Ilmo. Sr. D. Manuel Calvo Pinilla fue nombrado Académico Correspondiente de la Academia Canaria de Ciencias.

El Ilmo.Sr. D. Eladio Liñán fue nombrado Académico Correspondiente de la Real Academia de Córdoba de Ciencias, Bellas Letras y Nobles Artes.

Otros datos.

Se ha dado mucho mayor contenido a la página web de la Academia, cuya dirección es <http://www.unizar.es/acz/>

Se ha completado en los locales de la Academia en la Facultad de Ciencias la Galería de Retratos de todos los Presidentes de la Academia a lo largo de sus 86 años de vida.

Zaragoza, diciembre de 2002

PUBLICACIONES DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS DE ZARAGOZA

La Real Academia de Ciencias de Zaragoza inició, a partir de 1988, una nueva fase en la estructura de sus publicaciones, con objeto de ampliar y completar su contenido, estableciendo que dichas publicaciones pueden ser de tres clases:

1. *Discursos* pronunciados por Académicos electos para su ingreso como numerarios, o conferencias desarrolladas por Académicos numerarios o correspondientes en sesiones públicas.
2. *Revista de la Real Academia de Ciencias*, que incluye trabajos científicos de investigación en las secciones de Matemáticas, Física, Química y Naturales, tal como viene realizando desde 1916, y con arreglo a los normas de publicación que se acompañan.
3. *Monografías de la Real Academia de Ciencias*, que pueden recoger aspectos actuales del quehacer científico, aunque no tengan el carácter de exclusiva investigación. Se incluirán, por tanto, entre tales monografías los trabajos de revisión y puesta al día de problemas científicos, trabajos bibliográficos de interés, e incluso exposiciones didácticas de temas científicos destinados a favorecer la adquisición de conocimientos por parte de personas interesadas en ellos.

En principio, se estima que el contenido de dichas monografías, escritas con arreglo al mismo formato de publicación establecido para los artículos de la Revista, no deben sobrepasar las 100 páginas.

Por todo lo anterior, la Real Academia de Ciencias de Zaragoza invita a los científicos de cualquier nacionalidad, y de modo especial a los españoles, al envío de originales que puedan ser incluidos entre sus publicaciones.

Horacio Marco Moll
Presidente

REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA

Abstract

La Revista de la Real Academia de Ciencias publishes original research contributions in the fields of Mathematics, Physics, Chemistry and Natural Sciences. All the manuscripts are peer reviewed in order to assess the quality of the work. On the basis of the referee's report, the Editors will take the decision either to publish the work (directly or with modifications), or to reject the manuscript.

1. Normas generales de publicación

1.1 Envío de los manuscritos.

Para su publicación en esta Revista, los trabajos deberán remitirse bien por correo ordinario al

Académico-Director de Publicaciones
Revista de la Academia de Ciencias
Universidad de Zaragoza
50009 Zaragoza

o bien electrónicamente a la cuenta `elipe@posta.unizar.es`.

La Revista utiliza el sistema de *offset* de edición, empleando como original el facilitado por los autores, que deberán cuidar al máximo su confección, siguiendo las normas que aquí aparecen.

Los autores emplearán un procesador de texto. Se recomienda el uso de LaTeX, para el que se han diseñado los estilos `academia.sty` y `academia.cls` que pueden obtenerse directamente por internet en <http://www.unizar.es/acz/> o por petición a la cuenta de correo electrónico: `elipe@unizar.es`.

1.2 Dimensiones

El texto de los trabajos, redactados en español, inglés o francés, no deberá exceder de 16 páginas, aunque se recomienda una extensión de 6 a 10 páginas como promedio. El texto de cada página ocupará una caja de 16×25 cm., con espacio y medio entre líneas.

2. Presentación del trabajo.

Los trabajos se presentarán con arreglo al siguiente orden: En la primera página se incluirán los siguientes datos:

- a) *Título del trabajo*: Conciso, pero ilustrativo, con mayúsculas.
- b) *Autor*: Nombre y apellidos del autor o autores, con minúscula.
- c) *Centro*: Centro donde se ha realizado, con su dirección postal.
- d) *Abstract*: En inglés y con una extensión máxima de 200 palabras.
- e) *Texto*

A) En la primera página, el título debe comenzar 2 cm por debajo de la caja antes mencionada.

B) El punto y aparte tendrá una sangría de cinco espacios.

C) Los encabezamientos de cada sección, numerados correlativamente, serán escritos con letras **minúsculas** en negrita. Los encabezamientos de subsecciones, numerados en la forma 1.1, 1.2, . . . , 2.1, 2.2, . . . , se escribirán en *cursiva*.

D) Las fórmulas comenzarán, preferentemente, con una sangría de 10 espacios y serán numeradas correlativamente, o bien haciendo referencia a la sección, seguidas de números correlativos.

E) Las referencias bibliográficas intercaladas en el texto, deben ser fácilmente identificables en la lista de referencias que aparecerá al final del artículo, bien mediante un número, bien mediante el nombre del autor y año de publicación.

F) Las figuras y tablas, numeradas correlativamente, se intercalarán en el texto. Los apéndices, si los hay, se incluirán al final del texto, antes de la bibliografía.

G) Las referencias bibliográficas de artículos deberán contener: Autor: año de publicación, "Título del artículo", revista **número**, página inicial-final. En el caso de libros, deberá incluirse: Autor: año de publicación, *Título del libro*. Editorial, lugar de publicación.

3. Notas finales

Por cada trabajo publicado, se entregarán al autor o autores un total de 25 separatas. La Revista permite la inclusión de fotografías o figuras en color, con un coste adicional que correrá a cargo de los autores.

Rafael Cid
Editor

Antonio Elipe
Editor asociado

RELACIÓN DE REVISTAS NACIONALES QUE RECIBE EN INTERCAMBIO
LA BIBLIOTECA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS

ACTA BOTANICA BARCINONENSIS
ACTA QUIMICA COMPOSTELANA - Departamento de Química Analítica
AFINIDAD - Revista Química Teórica y Aplicada
ANALES DE BIOLOGIA - Sección de Biología General (Murcia)
ANALES DEL JARDIN BOTANICO DE MADRID
ANALES DE LA UNIVERSIDAD DE MURCIA
ANALES DE CIENCIAS - Facultad de Ciencias (Químicas y Matemáticas) (Murcia)
ANALES SECCION DE CIENCIAS - Colegio Universitario de Girona
ANUARIO DEL OBSERVATORIO ASTRONOMICO - Madrid.
BELARRA. SOCIEDAD MICOLOGICA. Baracaldo.
BLANCOANA - Col. Univ. "Santo Reino" Jaén
BOLETIN DA ACADEMIA GALEGA DE CIENCIAS - (Santiago de Compostela)
BOLETIN DE LA ASOCIACION HERPETOLOGICA ESPAÑOLA
BOLETIN GEOLOGICO Y MINERO
BOTANICA COMPLUTENSIS - Madrid
BUTLLETI DEL CENTRO D'HISTORIA NATURAL DE LA CONCA DE BARBARA
COLLECTANEA BOTANICA - (Barcelona)
COLLECTANEA MATEMATICA - (Barcelona)
ESTUDIO GENERAL - Revista Colegio Universitario (Girona)
EXTRACTA MATHEMATICAE - Universidad de Extremadura
FACULTAD DE CIENCIAS EXPERIMENTALES DE JAEN. Monografías.
FOLIA BOTANICA MISCELANEA - Departamento de Botánica (Barcelona)
INDICE ESPAÑOL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA -
INSTITUTO GEOLOGICO Y MINERO DE ESPAÑA
INVESTIGACION E INFORMACION TEXTIL Y DE TENSIOACTIVIVOS (C.S.I.C.) - Barcelona
LACTARIUS.- BOL. DE LA ASOCIACION MICOLOGICA - Jaén
LUCAS MALLADA - Inst. Est. Altoaragoneses.
MEMORIAS DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES DE BARCELONA
MISCELANEA ZOOLOGICA - Museo Zoológico - Ayuntamiento de Barcelona
NATURALIA BAETICA - Jaén
PUBLICACIONES PERIODICAS DE LA BIBLIOTECA DEL MUSEU DE ZOOLOGIA -
(Barcelona)
REBOLL.- Bull. Centro d'Historia Natural de la Concha de Barbera.
REVISTA DE LA ACADEMIA CANARIA DE CIENCIAS
REVISTA REAL ACADEMIA GALEGA DE CIENCIAS

REVISTA DE BIOLOGIA DE LA UNIVERSIDAD DE OVIEDO
REVISTA ESPAÑOLA DE FISILOGIA - Pamplona
REVISTA ESPAÑOLA DE HERPETOLOGIA
REVISTA IBERICA DE PARASITOLOGIA
REVISTA MATEMATICA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE - (Madrid)
REVISTA DE OBRAS PUBLICAS
REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
DE MADRID - Matemáticas
REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS - QUIMICA - Madrid
RUIZIA - Monografías del Jardín Botánico (Madrid)
SCIENCIA GERUNDENSIS
STUDIA GEOLOGICA SALMANTICENSIA - Universidad de Salamanca
TRABAJOS DE GEOLOGIA - Universidad de Oviedo
TREBALLS DEL CENTRE D'HISTORIA NATURAL DE LA CONCA DE BARBERA.
TREBALLS DE L'INSTITUT BOTANIC DE BARCELONA
TREBALLS DEL MUSEU DE ZOOLOGIA DE BARCELONA
ZOOLOGIA BAETICA. UNIVERSIDAD DE GRANADA.

RELACION DE REVISTAS INTERNACIONALES QUE RECIBE EN
INTERCAMBIO LA BIBLIOTECA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS - Córdoba. Argentina
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCIEI - Notiziario
ACCADEMIA UDINESE DI SCIENZI LETTERS ED ARTI.
ACTA ENTOMOLOGICA MUSEI NATIONALIS PRAGAE
ACTA FAUNISTICA ENTOMOLOGICA MUSEI NATIONALIS - Pragae
ACTA GEOLOGICA POLONICA - Warszawa
ACTA MATHEMATICA HUNGARICA
ACTA MATEMATICA SINICA - New Series China
ACTA MUSEI NATIONALI PRAGAE
ACTA ORNITHOLOGICA - Polska Akademia Nauk Warszawa
ACTA PHYSICA - Academia Scientarum Hungaricae
ACTA SOCIETATIS ENTOMOLOGICA BOHEMOSLOVACA
ACTA UNIVERSITATIS - Series: Mathematics and Informatic - University of Nis - Yugoslavia
ACTA ZOOLOGICA FENNICA
AGRONOMIA LUSITANICA - Est. Agr. Nac. Sacavem - Portugal
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ANALES DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATU-
RALES DE BUENOS AIRES
ANALES DE LA ESCUELA NACIONAL DE CIENCIAS BIOLÓGICAS. Mexico
ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA
ANALES DE LA ESCUELA NACIONAL DE CIENCIAS BIOLÓGICAS - México
ANNALEN DES NATURHISTORICHEN MUSEUMS IN WIEN
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - Serie A - I Matematica - Helsinke
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - Serie A - II Chemica - Helsinke
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - III Geologica Geografica - Helsinke
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - Serie A - IV Physica - Helsinke
ANNALES HISTORICO NATURALES - Musei Nationalis Hungarici
ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER - Université de Grenoble
ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER - Gap
ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE - Serie I - Science Mathematiques Physiques
Bruxelles
ANNALES UNIVERSITATIS MARIA CURIE - Sectio A Mathemat. - Sklodowska
ANNALES UNIVERSITATIS MARIA CURIE - Sklodowska - Sectio AA Chemica. Lublin.

ANNALES UNIVERSITATIS MARIA CURIE - Sklodowska - Sectio AAA Physica. Lublin.
 ANNALES ZOOLOGICI FENNICI - Helsinki
 ANNALI DELLA FACOLTA DE AGRARIA - Universita de Pisa
 ANNALI DEL MUSEO CIVICO DI STORIA NATURALE "Giacomo Doria"
 ARBOLES Y SEMILLAS DEL NEOTROPICO - Museo Nac. de Costa Rica
 ARCHIVIO GEOBOTANICO - Univ de Pavia.
 ATTI DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI. RENDICONTI LINCEI - Matematica e Applicazioni - Roma
 ATTI DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI. RENDICONTI LINCEI - Scienze Fisiche e Naturali - Roma
 ATTI DELLA ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE E ARTI DI UDINE
 ATTI DELL'ISTITUTO BOTANICO E DEL LABORATORIO CRITTOGRAMICO DELL'UNIVERSITA DI PAVIA
 BAYERISCHE AKADEMIE DR WISSENSCHAFTEN - Munchen
 BEITRAGE ZUR FORSCHUNSTECHOLOGIE - Akademie Verlag Berlin
 BOLETIM DA SOCIEDADE PARANAENSE DE MATEMATICAS - Paraná
 BOLETIM DA SOCIEDADES PORTUGUESA DE CIENCIAS NATURALES - Lisboa
 BOLETIN DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS FISICAS, MATEMATICAS Y NATURALES - Caracas
 BOLETIN DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS - Cordoba. Argentina.
 BOLETIN BIBLIOGRAFICO DE LA ESCUELA NACIONAL DE CIENCIAS BIOLOGICAS - México
 BOLETIN DEL MUSEO NAC. DE COSTA RICA.
 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA
 BOTANY UNIV. OF CALIFORNIA PUBLICATIONS.
 BRENESIA - Museo Nacional de Costa Rica
 BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES - Scientific Information - CENTRE MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES
 BULGARIAN JOURNAL OF PHYSICS
 BULLETIN OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY - Providence
 BULLETIN DE LA CLASSE DE SCIENCES - Academie Royale de Belgique - Bruxelles
 BULLETIN OF THE GEOLOGICAL INSTITUTION OF THE UNIVERSITY UPSALA
 BULLETIN OF THE JSME (Japan Society of Mechanical Engineers)
 BULLETIN DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRETAGNE - Rennes
 CALIFORNIA AGRICULTURE - University of California
 CIENCIAS TECNICAS FISICAS Y MATEMATICAS. Academia de Ciencias. Cuba.
 COLLOQUIUM MATHEMATICUM - Warszawa
 COMMENTATIONES MATHEMATICAE - Ann. So, Mathematicae Polonese
 COMPTES RENDUS DE L'ACADEMIE BULGARE DE SCIENCES - Sofia
 DARWINIANA REV. INST. BOTANICA DARWINION - República Argentina

DORIANA - Supplementa agli Annali del Museo Civico di Storia Naturale "G. Doria" - Cenova
 ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS DO SERVIC DE FOMENTO MINERO - Portugal
 ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS, DIECCIO GERAL DE GEOLOGIA E MINAS - Porto
 FILOMAT - FACTA UNIVERSITATIS - Univ. af Nis.
 FÍSICA DE ONDAS ACÚSTICAS Y ELECTROMAGNÉTICAS LINEALES - Acad. Búlgara
 de las Ciencias
 FOLIA ANATOMICA UNIVERSITATIS CONIMBRIGENSIS - Coimbra
 FOLIA ZOOLOGICA - Czechoslovak Academy of Sciences
 FUNCTIONS ET APPROXIMATIC COMMENTARI MATHEMATICI - Poznan
 GLASNIK MATEMATICKI - Zagreb
 IBC - INFORMAZIONI - Rivista Bimestrale Inst. Beni. Artistic. - Regione Emilis- Romagna
 INSTITUTO DE MATEMATICA - Univ. Nac. del Sur - Bahia Blanca - Argentina
 INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO AGRARIA - Estação AGRONOMICA NA-
 CIONAL OEIRAS
 INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO DE CIENFUEGOS
 INTERNATIONAL TIN RESEARCH INSTITUTE
 JAHRBUCH DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN GTTINGEN.
 JOURNAL OF THE AMERICAN ACADEMY OF ARTS AND SCIENCES - Daedalus
 JOURNAL OF THE BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
 JOURNAL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY
 JOURNAL OF NON-CRYSTALLINE SOLIDS - Amsterdam
 LESTURAS MATEMATICAS - Colombia
 MATHEMATICA BALKANICA
 MATHEMATICA MONTISNIGRA
 MEMORABILIS ZOOLOGICA
 MEMORANDA SOCIETATIS PROFAUNA ET FLORA FENNICA - Helsingfors
 MEMORIAS DA ACADEMIA DAS CIENCIAS DE LISBOA (Classe de Ciencias)
 MITTEILUNGEN AUS DEN ZOOLOGISCHEN MUSEUM IN BERLIN
 MONOGRAFIAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y
 NATURALES DE BUENOS AIRES
 NACHRICHTEN DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN GUTTINGEN - II
 Matematic y Fisica
 NATURAL HISTORY MUSEUM UNIV. OF KANSAS.
 NEOTROPICO - Museo Nacional de Costa Rica
 NETHERLANDS JOURNAL OF ZOOLOGY
 NONLINEARITY - Inst. Physics and London Math. Soc
 NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS - Ins. de Matematica - Univ. Atac. del Sur. Bahia
 Blanca
 NOTULAE NATURAE
 NUCLEAR ENERGY -Bulgarian Academy of Sciences

OCCASIONAL PAPERS OF THE CALIFORNIA ACADEMY OF SCIENCES - San Francisco
PHILIPPINE JOURNAL OF SCIENCES - Manila
POLISH ACADEMY OF SCIENCES. INSTITUTE OF MATHEMATICA
POLSKA AKADEMIE NAUK-PRACE GEOLOGICZNE
POLSKA AKADEMIE NAUK-PRACE MINERALOGICZNE
PORTUGALIA PHYSICA - Sociedade Portuguesa de Física
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF NATURAL SCIENCES OF PHILADELPHIA
PROCEEDINGS OF THE CALIFORNIA ACADEMY OF SCIENCES
PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY
PROCEEDINGS OF THE ROCHESTER ACADEMY OF SCIENCES
PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON - A: Mathematical and Physical
Sciences
PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH - Section A (Mathematical
and Physical Sciences)
PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF QUEENSLAND
PUBLICACIONES FUNDAMENTALES DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS DE SOFIA
PUBLICATION DE L'INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE - Stras-
bourg
PUNIME MATEMATIKE - Prishtine
QUADERNI DELL' ACADEMIA UDINESE.
QUATERLY OF APPLIED MATHEMATICS
REVISTA CUBANA DE FISICA
REVISTA COLOMBIANA DE MATEMATICAS
REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA QUIMICA- Univ. Nal. del Litoral - Argentina
REVISTA TRIMESTRAL DEL INTERNATIONAL TIN RESEARCH INSTITUTE
REVISTA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA - Argentina
REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
REZIMEA ABSTRACS - POGDORICA
SCIENCE BULLETIN - University of Kansas
SCIENTIFIC PAPERS NAT. HISTORY MUSEUM. The University Kansas.
SEARCH AGRICULTURAL ITHACA NEW YORK
SENCKENBERGIANA BIOLOGICA - Frankfurt
SENCKENBERGIANA LETHAEA - Frankfurt
SMITHSONIAN CONTRIBUTIONS TO PALEONTOLOGY
SPECTRUM - Akademie der Wissenschaften der DDR
STUDIA GEOLOGICA POLONICA - Polska Akademy Nauk Warsovia
SUT JOURNAL OF MATHEMATICS - Science University of Tokio
T. KOSCIUSZKI TECHNICAL - Univesity of Cracow
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA - Notas del museo de la Plata
UNIVESITY OF THE STATE OF NEW YORK - Bulletin

UNIVERSITY OF KANSAS PALEONTOLOGICAL CONTRIBUTIONS
VERTEBRATOLOGICKE ZPRAVY CESKOLOVENSKA AKADEMIE BRNO
ZBORNIK RADOVA FILOZOFSKOG - Fakulteta u Nisu-Serija Matematika
ZBORNIK - Acta Musei Nationalis - Pragae
ZOOLOGICA POLONIAE
ZPRAVY USEB (Vertebralogy zpravy) - Brno - Czechoslovakia