

REVISTA
DE LA
REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS
Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA



Serie 2.^a
Volumen 61

2006

ÍNDICE DE MATERIAS

Geometría de órbitas de representaciones de grupos y álgebras promediabiles JOSÉ E. GALÉ	7
Cerámicas eutécticas solidificadas direccionalmente para fotónica y electrocerámica ROSA I. MERINO	47
Nuevas tendencias de la Estadística en el siglo XXI JOSÉ A. CRISTÓBAL	87
Organismos científicos internacionales RAFAEL NÚÑEZ-LAGOS ROGLÁ	99
Nuevo modelo de renovación para la recurrencia de terremotos en una falla NICO L. ABADÍAS, ÁLVARO GONZÁLEZ, JAVIER B. GÓMEZ Y AMALIO F. PACHECO	121
Mariano La Gasca en el exilio inglés (1824-1834) LUIS A. INDA ARAMENDÍA Y BEGOÑA AGUIRRE-HUDSON	135
Criptopaleontología y terapéutica contenida en el lapidario del rey Alfonso X “El Sabio” (1279). El primer tratado de literatura paleontológica en lengua castellana. ELADIO LIÑÁN GUIJARRO Y MARÍA LIÑÁN APONTE	147
Nota necrológica: Prof. Dr. André Deprit ANTONIO ELIPE	181
VIDA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS, QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA EN EL AÑO 2006	185
Instrucciones a los autores	191
Intercambio de Publicaciones	193

Geometría de órbitas de representaciones de grupos y álgebras promediabiles

José E. Galé

Departamento de Matemáticas

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

Premio a la Investigación de la Academia 2006. Sección de Exactas

Dedicado a mis padres.

Resumen

Ciertas órbitas de semejanza de representaciones de grupos localmente compactos o álgebras de Banach (álgebras de operadores en particular) admiten una configuración geométrica como espacios homogéneos (de Banach) reductivos. Esto ocurre por ejemplo cuando ambos, grupos o álgebras, son promediabiles. El concepto de grupo promediable surge en relación con la teoría de la medida, mientras que la promediabilidad de álgebras de Banach aparece ligada a problemas de tipo homológico. Se da aquí una panorámica general acerca de la interdependencia de estas nociones, en un contexto geométrico. Más precisamente, se explica cómo puede obtenerse la estructura reductiva mediante la definición, usando operaciones promedio, de una esperanza condicional que juega el papel de 1-forma de conexión, así como el proceso que lleva (o llevó) de manera natural a la consideración de tal método. En la parte final de esta reseña se muestra algunos posibles desarrollos futuros de estas ideas.

2000 Mathematics Subject Classification 46H15, 47A67, 43A65, 43A07, 58B99

Introducción

Hay una ingente literatura matemática sobre análisis y geometría en grupos y álgebras de Lie modelados en espacios de Banach de dimensión infinita. Dos grandes áreas de estudio destacan en este sentido: el análisis armónico en grupos de Lie, sus espacios

homogéneos y estructura, por un lado, y la geometría y teoría de representación de grupos de Lie, por el otro. Ambas disciplinas se han beneficiado por igual de los desarrollos en la teoría de representación inspirados en la física cuántica. Es de destacar, en particular, la aplicabilidad a la teoría de representaciones de métodos geométricos propios de las estructuras geométricas que, si se da el caso, poseen determinados conjuntos asociados a las representaciones. A continuación cito algunos ejemplos de mucho interés en análisis funcional, relativos a convexidad, geometría simpléctica, fibrados vectoriales.

Sea A un álgebra C^* , ó C^* -álgebra (cuando en la escritura venga detrás el objeto matemático así señalado), y $\mathcal{S}(A)$ el espacio de estados de A , débilmente* compacto y convexo. El método de construcción de representaciones de A en espacios de Hilbert, conocido como método GNS (de Gelfand-Naimark y Segal), establece una relación directa entre representaciones y estados, de modo que las representaciones GNS irreducibles se hallan en correspondencia biunívoca con los puntos extremos del compacto convexo $\mathcal{S}(A)$. Para grupos y álgebras de Lie, la relación entre convexidad, holomorfía y representaciones es profunda. El libro de K. H. Neeb [N] sobre la teoría de representación holomorfa (dimensión finita) es una extraordinaria fuente de información al respecto. Aunque mucho de lo incluido en [N] puede extenderse sin traumas a dimensión infinita, está por determinarse los precisos alcance y forma de una tal extensión.

El método de órbitas de Kirillov, Konstant y otros, tiene como objetivo ligar el análisis armónico de los grupos de Lie (y sus representaciones) con la geometría simpléctica. En concreto, el método consiste en utilizar la estructura simpléctica inherente a las órbitas de la representación co-adjunta del grupo de Lie (es decir, órbitas bajo la acción co-adjunta del grupo en cuestión sobre el espacio dual de su álgebra de Lie) como plataforma para construir representaciones unitarias irreducibles del grupo, inducidas por representaciones de subgrupos adecuados, véase [Ki1], [F]. Además de esto, se trata de establecer una especie de diccionario de ida y vuelta entre representaciones y órbitas, de modo que las propiedades de las representaciones unitarias se traduzcan en propiedades geométricas de las órbitas y viceversa. En dimensión infinita el método no es aplicable en todos sus detalles por razones obvias, pero admite variantes parciales. Recientemente se ha considerado el procedimiento GNS como sustituto de la vía simpléctica, y se ha probado que, de manera semejante a lo que ocurre en el proceso de inducción de representaciones, se puede apelar a fibrados vectoriales (vía el uso de núcleos reproductivos) para hallar modelizaciones geométricas de representaciones GNS restringidas a grupos unitarios de álgebras C^* ([BR2]).

Por otra parte, es clásica la relación entre la teoría de fibrados vectoriales y la de representaciones de grupos. En esa conjunción se encuentra uno de los ejemplos más resonantes de variedad infinito-dimensional. Supongamos dado un fibrado vectorial hermítico sobre una superficie de Riemann compacta. En su investigación acerca de las ecuaciones

de Yang- Mills, Atiyah y Bott observaron que el espacio de conexiones \mathcal{C} asociado al fibrado puede verse como variedad de Kähler (de dimensión infinita), con el grupo “gauge”, o calibre, del fibrado actuando sobre \mathcal{C} mediante isometrías. Este ejemplo ha sido de mucha influencia en posteriores desarrollos (enlazando en particular con la teoría de representación de grupos fundamentales de variedades khälerianas), y presenta elementos que podrían quizá generalizarse en el contexto que se describe en este trabajo. Para más casuística sobre variedades de dimensión infinita véase [GM], y el artículo de Corlette de [GM] para la anterior nota.

De hecho, abundan los ejemplos de espacios homogéneos (es decir, variedades sujetas a la acción transitiva de grupos de Lie) de dimensión infinita, cuya geometría diferencial es un problema básico en diversas áreas como las de teoría de representaciones ya mencionada (modelizaciones geométricas de representaciones, ...), teoría de operadores, geometría compleja, álgebras de operadores [B]. Los espacios homogéneos asociados de manera natural a un álgebra de operadores A suelen presentarse en forma de órbitas (bajo la acción de algún grupo de Lie infinito-dimensional) de objetos matemáticos de especial significación para A , tales como estados, proyecciones, esperanzas condicionales, ... , o representaciones. Estamos diciendo pues, y en particular, que las órbitas de representaciones no sólo guardan relación estrecha, como se ha indicado ya, con objetos geométricos exógenos, sino que *ellas mismas* poseen estructuras geométricas inherentes. Tal carácter geométrico es conocido de antiguo. (Como muestra, supongamos que G_f es un grupo finitamente generado, G_t un grupo topológico, y denotemos por $Hom(G_f; G_t)$ el conjunto de homomorfismos entre G_f y G_t . Entonces se tiene que $Hom(G_f; G_t)$ es una variedad algebraica, si G_t es grupo algebraico, y $Hom(G_f; G_t)$ es variedad de Lie si G_t es grupo de Lie.) El estudio de espacios de representaciones, contemplados éstos como variedades algebraicas o topológicas provistas de la topología ambiente adecuada a cada caso, es un área activa de investigación. Entre sus problemas de interés se cuenta el de la descripción de componentes conexas y clausura de órbitas ([GM]).

En el presente artículo-reseña vamos a centrarnos en algunos aspectos de la geometría diferencial de órbitas de representaciones de grupos localmente compactos y/o álgebras de Banach. En determinados espacios homogéneos (de Banach) adscritos a las álgebras de operadores existen estructuras diferenciables de tipo simplético, o de tipo khäleriano ([B]). Aquí vamos a considerar la geometría diferencial ligada al concepto de conexión y sus nociones asociadas: estructura homogénea reductiva, desplazamiento horizontal, torsión, curvatura, geodésicas, etc. No todo grupo (o álgebra) cumple que sus espacios de representaciones admitan una tal geometría. La noción clave a considerar va a ser entonces la de grupo (álgebra) promediable. (Utilizo “promediable” como la traducción aparentemente más airosa del término inglés “amenable”, y siguiendo la pertinente sugerencia del profesor F. Bombal.)

Un grupo topológico (se admite la topología discreta) se llama promediable cuando admite una función promedio sobre él (véase la siguiente sección). La promediabilidad de grupos es un concepto clásico del análisis armónico abstracto que se remonta a los orígenes de la teoría moderna de la medida. F. Hausdorff planteó la cuestión de la existencia de una función definida sobre el conjunto de las partes de \mathbb{R}^n que fuese finitamente aditiva, de medida uno sobre el cubo unidad, e *invariante* por isometrías. Para $n = 1$ y 2 , S. Banach demostró que existe tal función, pero el propio Hausdorff probó que no existe si $n \geq 3$. Para entender justamente el porqué de ese comportamiento dispar conviene precisar que la cuestión de Hausdorff puede plantearse, en términos adecuados, para cualquier grupo, y que son los promediabiles los que dan respuesta positiva. A saber, un grupo discreto G es promediable si y sólo si existe una función finitamente aditiva de conjuntos μ sobre las partes de G , con $\mu(G) = 1$, invariante para la acción del grupo sobre los subconjuntos de G (si y sólo si G es no-paradójico), [Ru2]. El primero en considerar grupos promediabiles explícitamente fue J. von Neumann, pero fue M. M. Day quien les puso su nombre actual.

Es bastante más moderna la noción de álgebra de Banach promediable (me tomo la libertad de traducir así también la “amenability” de álgebras). El término y su significado fueron definidos por B. E. Johnson en clave de propiedades cohomológicas, y el mismo Johnson demostró que, dado un grupo localmente compacto \mathfrak{G} , entonces ocurre que \mathfrak{G} es promediable como grupo si y sólo si el álgebra de grupo $L^1(\mathfrak{G})$ es promediable como álgebra de Banach (de convolución) [J1]. Desde su introducción, las álgebras promediabiles han venido siendo objetos de investigación extremadamente interesantes, con presencia en el contexto de álgebras de operadores, en la moderna teoría de espacios de operadores, en análisis armónico, cohomología, etc.

A pesar de reflejar en principio mundos matemáticos aparentemente tan distantes, resulta que la geometría (reductiva) de representaciones y la promediabilidad en el sentido anterior son áreas con amplia intersección. Creo que este hecho, siendo de interés, no es muy conocido en general, por lo que merece la pena dar una idea del mismo.

Así pues, el objetivo del presente trabajo es proporcionar una vista de conjunto sobre la relación existente entre promediabilidad y geometría diferencial (de conexiones) de órbitas de representaciones. No voy a exponer (por razones de espacio, e intentando presentar un resumen que no resulte muy arduo de leer) una relación ni siquiera mínimamente exhaustiva de la casuística, muy variada, que se encuentra en derredor del tema. Más bien me centraré en cómo la existencia de funcionales promedio definen directamente secciones y formas de conexión, conceptos geométricos centrales de los que emana lo demás, sin prestar demasiada atención a fórmulas o resultados relativos a nociones asociadas. En lugar de proceder axiomáticamente, digamos, yendo de lo más general a lo particular, he preferido seguir el camino opuesto, ateniéndome a la, más o menos fiel, cronología de los avances realizados paulatinamente. De este modo, he intentado dotar a la exposición de

una cierta frescura que haga factible la comprensión de las motivaciones y génesis de los trabajos [CG1], [CG2], así como de las implicaciones que tal punto de vista pueda tener en posteriores desarrollos (véase la sección 5).

Como se verá, la importancia de las contribuciones realizadas por la Escuela Argentina en este orden de ideas ha sido y es muy notable. Quisiera que esta breve memoria se viera también como un homenaje, en la medida de mis alcances, a mis amigos y colegas de dicha escuela.

Antes de entrar en materia (o más bien haciéndolo fugazmente) conviene señalar que siempre que se lea en el texto el símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se debe interpretar que se hace referencia a algún tipo de dualidad (que estará clara en el contexto).

1 Escenario

Variedades de Banach. El contenido de esta reseña afecta por un lado a nociones, propiedades y resultados sobre variedades de Lie de dimensión infinita. Siendo ésta un área de las Matemáticas no tan familiar como puedan serlo otras, parece oportuno dar un mínimo de fundamentos que facilite la lectura del artículo, por lo menos a grandes rasgos. El material incluido está tomado de [Ru2], [U]. Es recomendable asimismo echar una ojeada a [R] y [B].

Trataremos con espacios vectoriales y álgebras sobre el cuerpo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Si E y F son \mathbb{K} -espacios de Banach, denotaremos por $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ el espacio de aplicaciones \mathbb{K} -lineales y continuas de E en F . Cuando $F = E$, abreviaremos poniendo $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ por $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E)$, y se suprimirá la letra \mathbb{K} cuando el contexto deje claro de qué cuerpo \mathbb{K} se trata. Sólo nos interesa la definición de variedad analítica (u holomorfa) y analítica-real. Tales variedades se modelan sobre espacios de Banach. La noción de holomorfía entre ellos es por supuesto la de diferenciabilidad *compleja* de Fréchet, en la que la diferencial en un punto es \mathbb{C} -lineal. Entonces una función entre (abiertos de) espacios de Banach reales es analítica real si es la restricción de una función holomorfa definida entre los espacios de Banach complexificados de los espacios de partida. Escribiré \mathbb{K} -analítico para referirme a la holomorfía o a la analiticidad real, según \mathbb{K} sea \mathbb{C} ó \mathbb{R} , respectivamente.

Un ejemplo básico para nosotros es el siguiente. Sea A álgebra de Banach compleja y con unidad, y sea $G(A)$ el grupo de sus elementos inversibles. Entonces $G(A)$ es un conjunto abierto en A y la aplicación de toma de inversos $a \mapsto a^{-1}$, $G(A) \rightarrow G(A)$ es analítica. Más aún, su diferencial en $x \in G(A)$ viene dada por $y \mapsto -x^{-1}yx^{-1}$ ([B, p. 255]).

Sea Z espacio topológico regular y sea E espacio de Banach sobre \mathbb{K} . La definición de *atlas* y *carta* en Z con relación a E es enteramente análoga a la del caso clásico, en que E es de dimensión finita. Llamaremos *variedad de Banach* \mathbb{K} -analítica a todo espacio

Z , como el anterior, dotado de un atlas \mathbb{K} -analítico. Tampoco vamos a entrar en detalle sobre la descripción del espacio tangente $T_z(Z)$ a una variedad de Banach Z en un punto $z \in Z$. Ahora bien, nos interesa apuntar varias cosas:

(a) $T_z(Z)$, para cada $z \in Z$, es un espacio de Banach isomorfo a E , si Z está modelada sobre E .

(b) Si $f : Z_1 \rightarrow Z_2$ es una aplicación \mathbb{K} -analítica entonces existe, unívoca, la diferencial df_z de f en $z \in Z_1$ y $df_z \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(T_z(Z_1), T_{f(z)}(Z_2))$.

(c) Si Z es un espacio de Banach entonces puede modelarse sobre si mismo y la identificación, para cada $z \in Z$, entre Z y $T_z(Z)$ viene dada por $w \mapsto X_w, Z \rightarrow T_z(Z)$ siendo $X_w(f) = (d/dt)f(z + tw)_{t=0}$, para toda función f \mathbb{K} -analítica en z .

Sea ahora W un subconjunto (no vacío) de una variedad Z . Diremos que W es una *subvariedad* (de Banach) de Z si para cada $w \in W$ existe una carta (U, ϕ) , con $w \in U$, y un subespacio F complementado topológicamente en E tales que $\phi(W \cap U) = F \cap \phi(U)$.

Llamamos *grupo de Banach-Lie* a todo grupo topológico G (con identidad e) que además es una variedad de Banach, y para el cual las aplicaciones

$$(u, v) \mapsto uv, G \times G \rightarrow G; \quad u \mapsto u^{-1}, G \rightarrow G$$

son \mathbb{K} -analíticas. En ese caso, un subgrupo de G se llama *subgrupo de Banach-Lie* de G si es subvariedad de G .

Como ejemplo muy importante de grupo de Banach-Lie tenemos el grupo $G(A)$ de un álgebra de Banach A con unidad e . Su espacio tangente es $T_e(G(A)) \equiv A$. En este caso la identificación entre ambos espacios viene dada por $a \equiv X_a = [(d/dt)e^{ta}]_{t=0}$, siendo $e^{(\cdot)}$ la aplicación exponencial en A .

Dados un grupo de Banach-Lie G y una variedad de Banach Z se dice que G *actúa* (\mathbb{K} -analíticamente) sobre Z si existe una aplicación $(u, z) \mapsto u \cdot z, G \times Z \rightarrow Z$, llamada *acción* de G sobre Z , \mathbb{K} -analítica, tal que $(uv) \cdot z = u \cdot (v \cdot z)$ para todos $u, v \in G$, y todo $z \in Z$. Dada una tal acción, se define su órbita $O(z)$ en $z \in Z$ mediante $O(z) := \{u \cdot z : u \in G\}$. Escribiremos τ_z para referirnos a la aplicación \mathbb{K} -analítica $\tau_z : G \rightarrow O(z)$, y denotaremos como G_z el subgrupo de G estabilizador de z , es decir, $G_z := \{u \in G : \tau_z(u) = z\}$, ($z \in Z$). Claramente, $O(z)$ y el cociente G/G_z son conjuntos isomorfos para todo $z \in Z$.

Una acción como la anterior se llama *transitiva* si para todo $w, z \in Z$ existe $u \in G$ tal que $w = u \cdot z$. O sea, la acción es transitiva si y sólo si Z es una órbita.

Definición 1.1. *Sea $G \times Z \rightarrow Z$ acción \mathbb{K} -analítica transitiva. Decimos que Z es un espacio homogéneo de Banach si existe $z \in Z$ tal que*

(i) $\ker(d\tau_z)_e$ es complementado (topológicamente) en $T_e(G)$.

(ii) $(d\tau_z)_e : T_e(G) \rightarrow T_z(Z)$ es suprayectiva.

Las condiciones (i) y (ii) de la definición significan que τ_z es una *submersión* \mathbb{K} -analítica en e ([U]). De hecho, si (i) y (ii) se cumplen para algún $z \in Z$ entonces se cumplen para todo $w \in Z$ ([R]).

Los espacios homogéneos pueden presentarse, equivalentemente, como espacios cociente provistos de la topología cociente: Si $O(z)$ es un espacio homogéneo de Banach entonces el estabilizador G_z es un subgrupo de Banach-Lie de G , el espacio cociente G/G_z con su topología es un espacio homogéneo, y $G/G_z, O(z)$ son isomorfos como variedades. Recíprocamente, todo cociente de un grupo de Banach-Lie por un subgrupo de Banach-Lie es, con su topología canónica, espacio homogéneo de Banach (véase [U, pp. 123, 136], [B, p. 102]). Así pues, $G \rightarrow O(z)$ es un *fibrado principal* (para la definición y teoría de fibrados principales y vectoriales usamos [KN], cuya exposición, aunque hecha en dimensión finita, sirve en general, con ligeras precisiones).

En este trabajo estamos interesados en espacios homogéneos que se originan a partir de los siguientes datos. Sean A, B álgebras de Banach complejas con unidad e , y B subálgebra cerrada de A . Suponemos que existe una *cuasi-esperanza* de A en B , es decir, una aplicación $\mathcal{E} : A \rightarrow B$, tal que $\mathcal{E} \in \mathcal{L}(A, B)$, $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}(e) = e$, y $\mathcal{E}(bac) = b\mathcal{E}(a)c$ para todo $b, c \in B$. Si A y B , como antes, son además álgebras C^* se llama *esperanza condicional* de A en B a toda aplicación $\mathcal{E} \in \mathcal{L}(A, B)$ que sea proyección de norma 1. Un celebrado teorema de Tomiyama enuncia que toda esperanza condicional es una cuasi-esperanza.

En las condiciones precedentes, el grupo $G(B)$ es subgrupo de Banach-Lie de $G(A)$. Más aún, la aplicación cociente $\tau : G(A) \rightarrow Z := G(A)/G(B)$ es un fibrado principal. En efecto, sea $\Omega := \{u \in G(A) : \|e - u^{-1}\| < (\|\mathcal{E}\|)^{-1}\}$. Si $u \in \Omega$ tenemos que $\mathcal{E}(u^{-1}) \in G(B)$. Tomemos $\mathcal{W} := \Omega G(B)$ entorno de $G(B)$ en $G(A)/G(B)$ y $\mathcal{U} := \tau^{-1}(\mathcal{W})$ abierto de e en $G(A)$. La aplicación $\sigma : \mathcal{W} \rightarrow G(A)$ dada por $\sigma(uG(B)) := u\mathcal{E}(u^{-1})$, ($u \in \Omega$), no depende del representante de la clase $uG(B)$ (pues \mathcal{E} conmuta con $G(B)$) y además $(\tau \circ \sigma)G(B) = \tau(u\mathcal{E}(u^{-1})) = u\mathcal{E}(u^{-1})G(B) = uG(B)$; por tanto σ está bien definida y es de hecho una sección (holomorfa) sobre \mathcal{W} . No es difícil probar entonces que la aplicación

$$u \mapsto (\tau(u), \mathcal{E}(u^{-1})^{-1}), \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W} \times G(B)$$

establece un homeomorfismo entre \mathcal{U} y $\mathcal{W} \times G(B)$, con aplicación inversa dada por

$$(uG(B), v) \mapsto u\mathcal{E}(u^{-1})v, \mathcal{W} \times G(B) \rightarrow \mathcal{U}.$$

Para un genérico $u_0 \neq e$ basta trasladar. La expresión de la sección correspondiente será $\sigma_0(u_0 u G(B)) = u_0 u \mathcal{E}(u^{-1})$, ($u \in \Omega$).

Por tanto se cumple la trivialidad local, y obtenemos que $G(A) \rightarrow G(B)$ es un fibrado principal (con grupo estructura $G(B)$), véase [KN I].

Evidentemente, el razonamiento anterior funciona siempre que $G(A)/G(B)$ porte la

topología cociente. El siguiente teorema da condiciones suficientes sobre topología de normas. Es importante por su particular aplicabilidad a espacios de representaciones.

Teorema 1.2. ([R]) *Sea A álgebra de Banach con unidad e . Supongamos que $G(A)$ actúa holomórficamente sobre un espacio de Banach E de modo que, para algún $y \in E$, existe $x \in O(y)$ verificando*

- (a) $\ker(d\tau_x)_e$ es complementado en $T_e(G(A))$.
- (b) $\text{ran}(d\tau_x)_e$ es complementado en E .
- (c) $\tau_x : G(A) \rightarrow O(y)$ es abierta.

Entonces la órbita $O(y)$ es subvariedad (holomorfa) de E y también es espacio homogéneo de Banach, con $T_x O(y) \equiv \text{ran}(d\tau_x)_e$.

Nuestro objetivo es dar ejemplos de espacios homogéneos con estructura reductiva. Restringimos la definición al caso de acciones de inversibles de un álgebra de Banach.

Definición 1.3. *Sea A álgebra de Banach compleja con unidad y Z espacio homogéneo bajo la acción del grupo $G(A)$. Decimos que Z , o el fibrado $\tau : G(A) \rightarrow Z$, admite estructura homogénea (holomorfa) reductiva si para todo u en $G(A)$ existe subespacio vectorial cerrado H^u de A tal que*

- (1) H^u es complementado topológicamente en A , esto es, existe subespacio vectorial cerrado V^u de A tal que $H^u \oplus V^u = A$.
- (2) $vH^u v^{-1} = H^u$, para todo $v \in G(A)_{\tau(u)}$.
- (3) La distribución $u \mapsto H^u$ es holomorfa, en el sentido de que si $P_u : A \rightarrow H^u$ es la proyección correspondiente a la descomposición del punto (1) entonces $u \mapsto P_u, G(A) \rightarrow \mathcal{L}(A)$ es holomorfa.

Una estructura reductiva define una *conexión*, a saber, la correspondencia $u \mapsto H^u$, o equivalentemente una *forma de conexión*, en nuestro caso $A \rightarrow V^u$. Y la conexión lleva asociadas las nociones de levantamiento y desplazamiento horizontal, torsión, curvatura, geodésicas, etc., véase [KN]. Por ello la notación anterior no es casual; A es visto como el espacio tangente a $G(A)$ en u y entonces H^u hace referencia al conjunto de vectores horizontales de A , mientras que V^u es el correspondiente conjunto de vectores verticales en A . Por tanto V^u puede, y aún debe, verse como el álgebra de Lie del grupo $G(A)_z$ si $\tau(u) = z$. Ésa es la idea acerca de una conexión en $\tau : G(A) \rightarrow Z$: “levantar”, mediante isomorfismo, el espacio tangente en cada z del espacio base Z , de manera que éste pueda ser considerado como un subespacio de vectores horizontales de A que se va trasladando

en correspondencia con las variaciones (analíticas) de z a lo largo de Z . Evidentemente, tal proceso se corresponde con la bien conocida noción de “desplazamiento paralelo”.

También, alternativamente, se puede definir una conexión si se dispone de una 1-forma equivariante $z \mapsto \mathcal{K}_z : T_z(Z) \rightarrow A$ tal que $\mathcal{K}_{\tau(e)}$ sea inverso a derecha de $(d\tau)_e$. En este caso los subespacios horizontales se obtienen como $H^u := \mathcal{K}_{\tau(u)}(T_{\tau(u)}Z)u$, $u \in G(A)$. Éste es el punto de vista adoptado en [MR], trabajo que tomo como referencia básica para espacios reductivos en dimensión infinita.

NOTA.- La definición de estructura reductiva también tiene sentido para la acción \mathbb{K} -analítica de un grupo G_0 , subgrupo de Banach-Lie \mathbb{K} -analítico de $G(A)$, sobre alguna variedad \mathbb{K} -analítica Z . Todo es análogo, teniendo que sustituir holomorfo por \mathbb{K} -analítico y subespacio vectorial por subespacio \mathbb{K} -lineal, aparte de que, en la descomposición de (1), A debe cambiarse por el espacio tangente a G_0 en u , si $\tau(u) = z$. Estoy pensando en el caso en que A sea una C^* -álgebra y $G_0 = U(A)$, su grupo de elementos unitarios. Entonces se tiene que $T_u(U(A)) = \{ua \in A : a^* = -a\}$.

En los ejemplos que nos van a aparecer de espacios reductivos la forma de conexión estará asociada a una cuasi-esperanza \mathcal{E} , de modo que los vectores horizontales vendrán dados por $\ker(\mathcal{E})$. Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, el método de trabajo responderá sencillamente al esquema: 1) disponer de cuasi-esperanzas \mathcal{E} ; 2) comprobar que la sección asociada $u \mapsto u\mathcal{E}(u^{-1})$ es continua respecto a la topología específica de la órbita dada. Por tanto, la forma de definir u obtener esas esperanzas es la clave. En esto interviene la promediabilidad de grupos y álgebras.

Grupos y álgebras promediables. Sea \mathfrak{G} grupo localmente compacto, y $L^\infty(\mathfrak{G})$ el espacio de funciones complejas y esencialmente acotadas sobre \mathfrak{G} respecto a su medida de Haar. Sea E subespacio vectorial de $L^\infty(\mathfrak{G})$ conteniendo las funciones constantes. Llamamos funcional *promedio*, o promedio, o simplemente *media*, sobre \mathfrak{G} a todo funcional $m \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ tal que $m(1) = 1$. Si además E es cerrado para la conjugación compleja entonces m es automáticamente positiva, es decir, $m(\varphi) \geq 0$ si $\varphi \geq 0$. El espacio E se llama invariante a izquierda si $\varphi(u \cdot) \in E$ para todo $u \in \mathfrak{G}$, $\varphi \in E$. Y en este caso una media m sobre \mathfrak{G} se llama *invariante a izquierda* si $m(\varphi(u \cdot)) = m(\varphi)$, para todo $u \in \mathfrak{G}$, $\varphi \in E$.

Definición 1.4. *El grupo \mathfrak{G} se dice promediable si existe una media invariante a izquierda en $L^\infty(\mathfrak{G})$.*

Los grupos abelianos y compactos son grupos promediables, así como lo son las clausuras topológicas de uniones contables de grupos promediables. En el lado opuesto, si un grupo \mathfrak{G} contiene una copia, como subgrupo cerrado, del grupo libre de dos generadores entonces \mathfrak{G} no es promediable.

La invariación a derecha de una media sobre un grupo puede definirse en análogos términos que a la izquierda, y se tiene que un grupo es promediable en el sentido de la Definición 1.4 si y sólo si posee media invariante a derecha. *Más aún*, un grupo es promediable si y sólo si posee una media simultáneamente invariante a izquierda y a derecha. Por último, en la definición y propiedades anteriores puede sustituirse (equivalentemente) el espacio $L^\infty(\mathfrak{G})$ por ciertos subespacios E de $L^\infty(\mathfrak{G})$, invariantes a izquierda, que resultan en la práctica más manejables, según las circunstancias.

Para éstas y otras propiedades de grupos promediables véase [Ru2].

Definición 1.5. ([J1]) *Un álgebra de Banach compleja \mathfrak{A} se llama promediable si toda derivación acotada de \mathfrak{A} en un \mathfrak{A} -bimódulo E de Banach es interna; es decir, para cada $D \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}, E)$ verificando $D(ab) = a \cdot (Db) + (Da) \cdot b$ existe $x \in E$ para el cual $D(a) = a \cdot x - x \cdot a$ ($a \in \mathfrak{A}$).*

Como se ha indicado antes, \mathfrak{G} es promediable como grupo si y sólo si $L^1(\mathfrak{G})$ es promediable como álgebra [J1]. Otros ejemplos importantes de álgebras de Banach promediables son $C(K)$, álgebra de las funciones continuas sobre un compacto de Hausdorff K , ó $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, álgebra de los operadores compactos sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} .

La definición 1.5 es de carácter homológico y ha resultado muy útil tal cual. Sin embargo, aquí va a tener más relieve una caracterización de la promediabilidad basada en funciones de promedio, las cuales evocan las medias de los grupos promediables. Recordemos que, si \mathfrak{A} es un álgebra de Banach, el producto tensorial proyectivo $\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{A}$ es un \mathfrak{A} -bimódulo de Banach respecto a las operaciones definidas por $a \cdot (b \otimes c) := (ab) \otimes c$ y $(b \otimes c) \cdot a := b \otimes (ca)$, $a, b, c \in \mathfrak{A}$. Por dualidad, los espacios dual $(\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{A})^*$ y bidual $(\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{A})^{**}$ devienen asimismo \mathfrak{A} -bimódulos de Banach. Se llama *diagonal virtual* de \mathfrak{A} a todo elemento M de $(\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{A})^{**}$ que cumpla $M \cdot a = a \cdot M$ y $\gamma^{**}(M) \cdot a = a$ para todo $a \in \mathfrak{A}$, siendo γ la multiplicación de \mathfrak{A} , i.e., $\gamma : a \otimes b \mapsto ab$. De forma semejante, se llama *diagonal aproximada* de \mathfrak{A} a toda red acotada $(m_j)_j$ en $\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{A}$ tal que $\lim_j (m_j \cdot a - a \cdot m_j) = 0$ y $\lim_j (\gamma m_j) \cdot a = a$ para todo $a \in \mathfrak{A}$.

Proposición 1.6. *Un álgebra de Banach \mathfrak{A} es promediable si y sólo si posee diagonal virtual, si y sólo si posee diagonal aproximada.*

Para un álgebra de Banach promediable se puede fijar $M, (m_j)_j$ de manera que M sea punto de acumulación de la red $(m_j)_j$ en la topología débil* de $(\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{A})^{**}$.

Hay un formalismo, debido a E. Effros ([E]), muy útil para tratar con diagonales virtuales. Si $\Phi \in (\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{A})^*$ y $\Lambda \in (\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{A})^{**}$, pongamos

$$\langle \Lambda, \Phi \rangle := \int_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}} \Phi(a, b) d\Lambda(a, b).$$

Con esta notación las propiedades que definen una diagonal virtual pueden leerse respectivamente como $\int_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}} \Phi(ab, c) dM(b, c) = \int_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}} \Phi(b, ca) dM(b, c)$, y $\int_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}} bc dM(b, c) = e$,

ésta última en el sentido de que $\int_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}} bc \, dM(b, c) \in \mathfrak{A}^*$ y $\langle \int_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}} bc \, dM(b, c), \varphi \rangle = \langle e, \varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ ([CG1, p. 90]).

El concepto de álgebra de Banach promediable es de relevancia asimismo en el terreno de las álgebras de operadores. Recordemos que una C^* -álgebra \mathfrak{A} es un álgebra de Banach dotada de una involución $a \mapsto a^*$ tal que $\|aa^*\| = \|a\|^2$ ($a \in \mathfrak{A}$). Dadas dos C^* -álgebras \mathfrak{A} y \mathfrak{B} tomemos el producto tensorial algebraico $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ y tratemos de dotarle de una norma C^* . Resulta que no hay una forma canónica de hacer ésto, y por tanto tiene sentido la siguiente importante definición. Se dice que una C^* -álgebra \mathfrak{A} es *nuclear* cuando todas las posibles normas C^* en $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ son equivalentes, para toda C^* -álgebra \mathfrak{B} . Pues bien, una C^* -álgebra \mathfrak{A} es nuclear si y sólo si \mathfrak{A} es promediable. La demostración de este teorema no es sencilla ([Ru2, p. 187]).

Entre las álgebras C^* , la clase más importante es la formada por las *álgebras de von Neumann*. Una tal álgebra \mathcal{M} se caracteriza por ser dual topológico de algún (único, a posteriori) espacio de Banach, digamos \mathcal{M}_* [Ru2, p. 109]. Pero en este terreno las cosas cambian un poco. Las álgebras de von Neumann promediables no son muchas, por lo que se precisa una noción de promediabilidad *ad hoc*. Afortunadamente la noción requerida existe.

Un \mathcal{M} -bimódulo dual (de Banach) E se llama *normal* si las aplicaciones $a \mapsto a \cdot x$ y $a \mapsto x \cdot a$, de \mathcal{M} en E son débilmente* continuas, para cada $x \in E$.

Definición 1.7. *Un álgebra de von Neumann \mathcal{M} se llama promediable en el sentido de Connes, o Connes-promediable, para abreviar, si toda derivación acotada y débilmente* continua de \mathcal{M} en un \mathcal{M} -bimódulo normal es interna.*

De modo semejante a lo que ocurre con álgebras promediables, un álgebra de von Neumann es Connes-promediable si y solamente si posee una *diagonal virtual normal* M . La definición de tal M es análoga a la del caso nuclear, pero ahora exigiendo que M pertenezca al dual $\mathcal{L}_{w^*}^2(\mathcal{M}, \mathbb{C})^*$, siendo $\mathcal{L}_{w^*}^2(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ el espacio de aplicaciones bilineales de $\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{M}$ en \mathbb{C} (o sea, de las aplicaciones lineales de $\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{M}$ en \mathbb{C}) que son débilmente* continuas por separado. Y también, como en el caso promediable = nuclear, existen diversas e importantes caracterizaciones de las álgebras Connes-promediables. Por ejemplo, se dice que un álgebra de von Neumann, actuante en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , es *inyectiva* si existe una cuasi-esperanza $\mathcal{Q} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{M}'$, siendo \mathcal{M}' la sub-álgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ conmutante de \mathcal{M} .

Proposición 1.8. *Un álgebra de von Neumann es Connes-promediable si y sólo si es inyectiva.*

Tampoco es sencilla la prueba de este resultado, véase [Ru2, pp. 186, 152].

La existencia de la cuasi-esperanza \mathcal{Q} en álgebras inyectivas sugiere pensar en formas

de conexión. Efectivamente, ahí está el punto de enlace entre promediabilidad y órbitas de representaciones.

2 Preludio y surgimiento

Órbitas de proyecciones. Dada un álgebra de Banach A , designamos el subconjunto de sus proyecciones (o idempotentes) mediante $\mathcal{P}(A) := \{p = p^2 \in A\}$. Este conjunto ha sido estudiado profusamente y desde diversos enfoques. En el artículo [PR] se resalta el carácter que $\mathcal{P}(A)$ posee de variedad grasmaniana. En él se presenta una lista de propiedades sobre idempotentes que sus propios autores habían aplicado en otras investigaciones suyas (v.g. en la teoría de Morse para fibrados, o en la clasificación de conexiones lineales). Precisamente, para dar un teorema de clasificación de fibrados con conexión, se puede tomar el conjunto $\{(p, x) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}(E)) \times E : p(x) = x\}$ como una suerte de fibrado universal. (Clásicamente, los fibrados universales tautológicos se definen, o construyen, a partir de variedades grasmanianas [KN]). Me ha parecido adecuado elegir el trabajo [PR] como un primer escalón en la exposición subsiguiente, de manera que se puede decir que nuestro punto de partida va a ser una variedad grasmaniana.

Decimos que dos idempotentes p, q de $\mathcal{P}(A)$ son equivalentes cuando $pq = q$ y $qp = p$. Sea $Gr(A)$ el conjunto correspondiente de clases de equivalencia en $\mathcal{P}(A)$. Se tiene que dos idempotentes de $\mathcal{L}(E)$ son equivalentes si y sólo si $p(E) = q(E)$, de modo que $Gr(\mathcal{L}(E))$, y más generalmente $Gr(A)$, es una noción plausible de variedad grasmaniana asociada a A , generalización del caso clásico. (De hecho, $Gr(M_n(\mathbb{R})) = \bigcup_{0 \leq k \leq n} G_{n-k, n}$ siendo $G_{n-k, n}$ la subvariedad grasmaniana de subespacios k -dimensionales de \mathbb{R}^n , y $A = M_n(\mathbb{R})$, álgebra de matrices reales $n \times n$.)

En [PR] se establecen algunas propiedades geométricas interesantes de $\mathcal{P}(A)$ y $Gr(A)$. Como muestra, la aplicación cociente $\mathcal{P}(A) \rightarrow Gr(A)$ es una equivalencia homotópica. Por otro lado, el grupo $G(A)$ actúa sobre $\mathcal{P}(A)$ por automorfismos internos, lo que induce la aplicación

$$\tau_p : u \mapsto upu^{-1}, \quad G(A) \rightarrow \mathcal{P}(A),$$

donde $p \in \mathcal{P}(A)$ está fijado. Se demuestra en [PR] que, si C es una componente conexa de $\mathcal{P}(A)$ y $G(A)_C$ es el subgrupo de $G(A)$ que deja invariante C , entonces la restricción $u \mapsto upu^{-1}, G(A)_C \rightarrow C$ es un fibrado principal con grupo de estructura $(G(A)_C)_p$. Análogamente, si $Gr(C)$ denota la imagen de la componente C en $Gr(A)$ se obtiene que la aplicación $G(A)_C \rightarrow C \rightarrow Gr(C)$ es un fibrado principal.

El artículo [PR] no toma en consideración estructuras reductivas (ni formas de conexión por tanto), pero dedica una parte considerable de espacio a tratar el interesante problema de elevación o levantamiento de curvas de $\mathcal{P}(A)$ a $G(A)$, lo que es de relevancia para una

teoría de conexiones. Termino este breve resumen de [PR] reflejando una formulación del levantamiento mencionado. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(A)$ es una curva de clase $C^{(1)}$ entonces puede expresarse como $\gamma(t) = \Gamma(t)\gamma(0)\Gamma(t)^{-1}$, ($t \in [0, 1]$), en donde $\Gamma : [0, 1] \rightarrow G(A)$ es una curva de clase $C^{(1)}$, solución única de la ecuación $\dot{\Gamma} = (\dot{\gamma}\gamma - \gamma\dot{\gamma})\Gamma$, con valor inicial $\Gamma(0) = 1$.

En el artículo [CPR] se amplía el estudio de órbitas de proyecciones a sistemas (n -tuplas) de proyecciones, presentando además un desarrollo sistemático y explícito de la geometría diferencial de tales sistemas. Si A es como antes y n es un número natural, designemos por

$$\mathcal{P}_n(A) := \{(p_1, \dots, p_n) : p_i \in \mathcal{P}(A), p_i p_j = 0 \ (i \neq j), \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$$

la familia de todas las *descomposiciones de la identidad* formadas por n idempotentes de A . Tal conjunto es un modelo universal para los elementos algebraicos simples de A de grado n . Se le llama también variedad “flag”; p. ej., en [MS].

Como en el caso $n = 1$ ya comentado, la acción de $G(A)$ sobre $\mathcal{P}_n(A)$,

$$(u, p) = (u, (p_1, \dots, p_n)) \mapsto u \cdot p := (up_1u^{-1}, \dots, up_nu^{-1}), \quad G(A) \times \mathcal{P}_n(A) \rightarrow \mathcal{P}_n(A),$$

da lugar a una estructura de variedad diferenciable en $\mathcal{P}_n(A)$. Si $O(p)$ es la órbita de p bajo tal acción, la aplicación $\tau_p : u \mapsto u \cdot p$, $G(A) \rightarrow O(p)$ es un fibrado principal para el cual la expresión $\sigma_p(q) = \sum_{i=1}^n q_i p_i$, proporciona una sección local (en e), $O(p)$ es un espacio homogéneo de Banach, y $\mathcal{P}_n(A)$ es la unión discreta de las órbitas $O(p)$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{P}_n(A)$. Además cada órbita $O(p)$ admite una estructura reductiva, inducida por la forma de conexión

$$\mathcal{E}_p : a \mapsto \sum_{i=1}^n p_i a p_i, \quad A = T_e(G(A)) \rightarrow V_e = \{x \in A : xp_i = p_i x\}$$

Nótese que bajo la identificación de $q = u \cdot p$ con $uG(A)_p$ se comprueba fácilmente que $\sigma_p(q) = u\mathcal{E}_p(u^{-1})$, según el modelo “sección \leftrightarrow cuasi-esperanza” dado previamente al Teorema 1.4.

También se describe en [CPR] los invariantes definidos por la conexión en el fibrado principal y en el fibrado tangente asociado. En este caso los levantamientos horizontales de curvas $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de clase $C^{(1)}$ en $\mathcal{P}_n(A)$ a curvas $C^{(1)}$ en $G(A)$ son las soluciones (únicas para cada ecuación) de la ecuación $\dot{\Gamma} = (\sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i \gamma_i)\Gamma$, $\Gamma(0) = 1$. Es decir, son las soluciones de la ecuación de transporte de Daleckii, Krein y Kato (ver comentarios en [CPR]).

Los elementos de $\mathcal{P}_n(A)$ son descomposiciones de la identidad discretas pero también se puede hacer entrar en el juego descomposiciones de la identidad continuas o descomposiciones espectrales generales. Veamos.

Supongamos ahora que A es específicamente un álgebra de von Neumann, Ω un conjunto no vacío, y Σ una álgebra de subconjuntos de Ω . De acuerdo con [ARS], llamaremos aquí *medida espectral* sobre Σ , valorada en A , a toda aplicación $\mu : \Sigma \rightarrow A$ que satisfaga:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$.
- (ii) $\mu(\omega_1 \cap \omega_2) = \mu(\omega_1)\mu(\omega_2)$, para cada $\omega_1, \omega_2 \in \Sigma$.
- (iii) $\mu(\omega_1 \cup \omega_2) = \mu(\omega_1) + \mu(\omega_2)$, si $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$
- (iv) $\sup\{\|\mu(\omega)\| : \omega \in \Sigma\} < \infty$.

Sea $M(\Sigma)$ el conjunto de todas tales medidas espectrales sobre Σ . No es complicado comprobar que el grupo de inversibles $G(A)$ actúa sobre $M(\Sigma)$ mediante automorfismos internos y da lugar por tanto a los correspondientes fibrados sobre cada órbita. En [ARS] se extienden a $M(\Sigma)$ todos los resultados sobre la geometría diferencial mencionados arriba para $\mathcal{P}_n(A)$. Aunque el medio ambiente es continuo, el método de trabajo toma $\mathcal{P}_n(A)$ como modelo (mediante particiones) y luego procede por paso al límite. Por ejemplo y en concreto, la cuasi-esperanza que define la conexión se construye de la siguiente manera.

Tomamos una partición finita $\beta = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ de Ω . Si $\mu \in M(\Sigma)$, ponemos

$$\mathcal{E}_{\mu, \beta}(a) := \sum_{\omega \in \beta} \mu(\omega) a \mu(\omega), \quad (a \in A)$$

Entonces $\mathcal{E}_{\mu, \beta}$ es una cuasi-esperanza, y es de hacer notar que lo es del tipo visto líneas arriba, por cuanto podemos identificar $\{\mu(\omega) : \omega \in \beta\}$ con un elemento de $\mathcal{P}_n(A)$. Pasemos al límite.

Primeramente $\mathcal{E}_{\mu, \beta}$ verifica la acotación (uniforme en β) $\|\mathcal{E}_{\mu, \beta}(a)\| \leq \|a\|$, para todo $a \in A$. Pensemos en el conjunto de todas las particiones β como conjunto ordenado, dirigido como es usual, y tomemos un punto de acumulación de $\{\mathcal{E}_{\mu, \beta}(a)\}_\beta$ en la topología débil* de A ,

$$\mathcal{E}_\mu(a) := \lim_{\beta} \sum_{\omega \in \beta} \mu(\omega) a \mu(\omega).$$

Entonces \mathcal{E}_μ , dada por la fórmula anterior, es la forma de conexión buscada. De manera análoga al caso discreto la sección $u\mathcal{E}_\mu(u^{-1})$ corresponde a $\sigma_\mu(\nu) = \lim_{\beta} \sum_{\omega \in \beta} \nu(\omega) \mu(\omega)$.

Representaciones de grupos y álgebras. Aunque a primera vista pueda no resultar muy claro, los casos anteriores son ejemplos de representaciones de grupos. A saber, el espacio $\mathcal{P}_n(A)$ coincide con el de representaciones $Rep(\mathbb{Z}_n, A)$ del grupo finito abeliano $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ en A . En efecto, sea ξ la raíz n -ésima de la unidad $\xi = e^{-2\pi i/n}$. Para $p = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathcal{P}_n(A)$, la fórmula $\pi(k) := \sum_{j=0}^{n-1} \xi^j p_j$ define una representación $\pi : \mathbb{Z}_n \rightarrow A$. Recíprocamente, dada una representación $\pi : \mathbb{Z}_n \rightarrow A$, si ponemos $p_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{-kj} \pi(k)$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$), entonces $(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathcal{P}_n(A)$. Estas dos correspondencias son inversas una de la otra, y así obtenemos que $\mathcal{P}_n(A) \equiv Rep(\mathbb{Z}_n, A)$. (Esta observación parece deberse a M. Martin, véase [M], [MS].) Vía la biyección anterior

$\mathcal{P}_n(A)$ transfiera a $Rep(\mathbb{Z}_n, A)$ la estructura de unión discreta de espacios homogéneos reductivos.

Es natural entonces pensar en conjuntos de representaciones de grupos como candidatos a espacios homogéneos. Siendo \mathbb{Z}_n finito, las fórmulas que dan los invariantes de la geometría pueden ser expresadas cómodamente mediante sumas. Para grupos compactos, también la situación es cómoda, gracias a la medida (finita) de Haar.

Sea \mathfrak{G} un grupo compacto con medida de Haar (a izquierda) normalizada ds y A un álgebra de Banach con unidad. Con el símbolo $Rep_c(\mathfrak{G}, A)$ denotamos el conjunto de representaciones $\pi : \mathfrak{G} \rightarrow G(A) \subset A$ continuas en norma. Si $u \in G(A)$ y $\pi \in Rep_c(\mathfrak{G}, A)$, entonces $u\pi u^{-1} \in Rep_c(\mathfrak{G}, A)$, sobreentendiendo que $u\pi u^{-1}(s) = u\pi(s)u^{-1}$ para todo $s \in \mathfrak{G}$ y toda $\pi \in Rep_c(\mathfrak{G}, A)$. Esta acción infiere en $Rep_c(\mathfrak{G}, A)$ una estructura diferenciable como unión discreta de los espacios homogéneos reductivos $O(\pi) := \{u\pi u^{-1} : u \in G(A)\}$, $\pi \in Rep_c(\mathfrak{G}, A)$. La forma de conexión en el fibrado principal $G(A) \rightarrow O(\pi)$ viene definida por la cuasi-esperanza

$$\mathcal{E}_\pi(a) := \int_{\mathfrak{G}} \pi(s) a \pi(s)^{-1} ds, \quad (a \in A),$$

que tiene por sección correspondiente la dada como $\sigma(\rho) = \int_{\mathfrak{G}} \rho(s)\pi(s)^{-1} ds$, sobre el abierto $\{\rho : \sup_{\mathfrak{G}} \|\rho(s) - \pi(s)\| < 1\}$.

Los detalles pueden verse en [M], [MS], [MR].

OBSERVACIÓN.- Ciertamente, la expresión de \mathcal{E}_π recuerda a la de \mathcal{E}_p en el caso de la variedad $\mathcal{P}_n(A)$, pero éstas *no* se corresponden de hecho, pues p_i en \mathcal{E}_p no es ningún elemento de la forma $\pi(i)$. Para entender la aplicación \mathcal{E}_p actuando directamente en el ambiente $Rep(\mathbb{Z}_n, A)$ debemos expresarla mediante representaciones.

Dados $a \in A$, $p_i \in Rep(\mathbb{Z}_n, A)$ ($i = 1, \dots, n$), definimos como antes $(\pi a)(j) := \pi(j)a$ ($j \in \mathbb{Z}_n$). Si tenemos en cuenta que $(1/n) \sum_{j=0}^{n-1}$ es la medida de Haar en \mathbb{Z}_n , resulta claro que $p_k = (1/n) \sum_{j=0}^{n-1} e^{-(2\pi i/n)jk} \pi(j)$ es la transformada de Fourier (vectorial) $\hat{\pi}(k)$ de π en k . Por ser \mathbb{Z}_n finito (bastaría con que sólo fuese compacto) las funciones πa y π están en el álgebra de grupo $l^1(\mathbb{Z}_n)$, y se tiene que $((\pi a) * \pi)^\wedge = (\pi a)^\wedge \hat{\pi}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(a) &= \sum_{k=0}^{n-1} p_k a p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\pi}(k) a \hat{\pi}(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\pi a)^\wedge(k) \hat{\pi}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} ((\pi a) * \pi)^\wedge(k) \\ &= (\pi a * \pi)(0) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \pi(-j) a \pi(j) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \pi(l) a \pi(-l) \end{aligned}$$

para todo $a \in A$, que es exactamente la expresión de \mathcal{E}_π dada antes para grupos compactos (la quinta igualdad en la cadena previa es el teorema de inversión de la transformada de Fourier, válido, a pesar de referirse a valores vectoriales, por ser \mathbb{Z}_n finito).

Análogamente, para medidas espectrales se tiene

$$\mathcal{E}_\mu(a) := \lim_{\beta} \frac{1}{|\beta|} \sum_{\omega \in \beta} \pi_\mu(\omega) a \pi_\mu(\omega),$$

etc.

En las situaciones justamente descritas la promediabilidad de los grupos considerados no aparece todavía explícitamente, pero está subyacente: los grupos abelianos y los compactos son promediables como sabemos, y más aún, la medida de Haar en un grupo compacto es una *media* sobre él mismo. Su uso formal para definir la cuasi-esperanza \mathcal{E}_π va a servir igualmente, en situaciones bastante más generales. Este hecho es observado y utilizado en [ACS1], artículo que sin exagerar puede considerarse como piedra angular en el tema. Voy a comentarlo brevemente.

Hasta el fin de esta sección \mathfrak{A} denotará un álgebra C^* con unidad y \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Recuérdense que el álgebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un álgebra C^* respecto a la involución definida por la operación de paso al operador adjunto. El grupo de inversibles de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ lo denotaremos como $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$, y $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ servirá para designar el subgrupo de unitarios de $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$. Sea $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ el conjunto de homomorfismos acotados π de \mathfrak{A} en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que son no-degenerados, esto es, $\pi(\mathfrak{A})\mathcal{H}$ es denso en \mathcal{H} . En paralelo, \mathcal{M} denotará un álgebra de von Neumann, y $Rep^w(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ será el subconjunto de $Rep(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ formado por los homomorfismos débilmente* continuos de \mathcal{M} en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Llamaremos representación a cualquier homomorfismo de los conjuntos anteriores. Recordemos que una *-representación π verifica, por definición, $\pi(a^*) = \pi(a)^*$, para a en \mathfrak{A} o en \mathcal{M} indistintamente.

El grupo $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ actúa sobre $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ mediante automorfismos internos. Denotamos por $O(\pi)$ la órbita de esa acción, del homomorfismo o representación π de $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Del mismo modo, tenemos que $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ actúa sobre $Rep^w(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. La órbita de $\pi \in Rep^w(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ se designará como $O^w(\pi)$. Entenderemos aquí por *-órbita a toda aquella órbita que contenga una *-representación.

El siguiente teorema recopila dos resultados realmente notables.

Teorema 2.1. ([ACS1])

- (i) \mathfrak{A} es nuclear si y solamente si toda *-órbita $O(\pi)$ es un espacio homogéneo de Banach holomorfo, subvariedad de $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, y con estructura reductiva, para todo espacio de Hilbert \mathcal{H} .
- (ii) \mathcal{M} es inyectiva si y solamente si toda *-órbita $O^w(\pi)$ es un espacio homogéneo de Banach holomorfo, subvariedad de $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, con estructura reductiva, para todo espacio de Hilbert \mathcal{H} .

La demostración del teorema en [ACS1] es un tanto laboriosa. Voy a dar una idea somera acerca de la misma, comenzando por las condiciones necesarias.

En primer lugar se aborda el caso von Neumann. Hay que probar que el fibrado $\mathcal{G}l(\mathcal{H}) \rightarrow O^w(\pi)$ es principal, y para ello se debe construir secciones locales. Esto se

consigue en varias etapas: 1) obtención de una sección en clave finito-dimensional, para *-representaciones; 2) empleando un argumento de aproximación, se demuestra que la acción anterior es localmente transitiva; 3) finalmente, puesto que $\pi(\mathcal{M})'$, conmutador de \mathcal{M} , es un álgebra inyectiva, existe al menos una esperanza condicional de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en $\pi(\mathcal{M})'$, y su uso combinado con la transitividad local permite obtener la sección requerida.

Una vez probado que tenemos un fibrado principal la estructura reductiva se consigue mediante la definición de una esperanza condicional $\mathcal{E}_\pi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \pi(\mathcal{M})'$ de formulación muy concreta, cómoda para describir los invariantes de la conexión asociada:

Puesto que \mathcal{M} es inyectiva existe una proyección central P tal que $P\mathcal{M} = \overline{\bigcup_n \mathcal{M}_n}$ en la topología débil* o ultradébil, en donde $(\mathcal{M}_n)_n$ es una sucesión creciente de *-subálgebras de \mathcal{M} de dimensión finita. Sea \mathcal{U}_n el grupo de elementos unitarios de \mathcal{M}_n , ($n = 1, 2, \dots$). Entonces cada \mathcal{U}_n es un grupo promediable y por consiguiente lo es también $\mathcal{U}_0 := \bigcup_n \mathcal{U}_n$. Fijemos una media m sobre \mathcal{U}_0 . Para cada $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se define, por dualidad,

$$\langle \mathcal{E}_\pi(T)\xi, \eta \rangle := \int_{\mathcal{U}_0} \langle \pi(u) T \pi(u)^{-1}\xi, \eta \rangle dm(u) \equiv m(\langle \pi(\cdot) T \pi(\cdot)^{-1}\xi, \eta \rangle),$$

que, abreviadamente, se escribe $\int_{\mathcal{U}_0} \pi(u) T \pi(u)^{-1} dm(u)$. Entonces $\mathcal{E}_\pi(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; de hecho, $\mathcal{E}_\pi(T)$ pertenece al conmutador $\pi(\mathcal{M})'$ de $\pi(\mathcal{M})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. La similitud formal del operador \mathcal{E}_π anterior con el considerado en el caso de grupos compactos es evidente.

Para el caso de álgebras C^* , la parte necesaria del teorema se sigue del caso previo porque una C^* -álgebra \mathfrak{A} es nuclear si y sólo si el álgebra de von Neumann bidual \mathfrak{A}^{**} es inyectiva, y además las órbitas en los espacios $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ y $Rep^w(\mathfrak{A}^{**}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ son isomorfas.

En cuanto al recíproco (o recíprocos, mejor dicho) del teorema, la llave la da la estructura reductiva pues su existencia implica la de una proyección $\mathcal{Q} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \pi(\mathcal{M})'$ tal que $\mathcal{Q}(STS^{-1}) = S\mathcal{Q}(T)S^{-1}$ para todo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y todo S *invertible* en $\pi(\mathcal{M})'$. Adaptando entonces un argumento de [BuP] para el caso en que la proyección \mathcal{Q} es homomorfismo de $\pi(\mathcal{M})'$ -bimódulos, se deduce que el álgebra de von Neumann \mathcal{M} es inyectiva. Si \mathfrak{A} es un álgebra C^* el recíproco sigue de nuevo por paso al álgebra bidual \mathfrak{A}^{**} ([ACS1, p. 488, 489]).

NOTAS.- a) Igualmente se hace notar en [ACS1] que las órbitas unitarias de *-representaciones de \mathfrak{A} en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y \mathcal{M} en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ son espacios homogéneos de Banach, esta vez como variedades analítico-reales, no necesariamente holomorfas. Por consiguiente, y automáticamente, los espacios totales de *-representaciones son en ambos casos uniones discretas de las correspondientes órbitas.

b) Podemos también preguntarnos qué sucede con los espacios totales de representaciones $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ y $Rep^w(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ en el teorema 2.1. En principio podría haber habido una seria dificultad: el método del teorema exige trabajar con *-representaciones,

y en general π no lo es. Afortunadamente, existen profundos resultados sobre órbitas de semejanza que aseguran que toda órbita $O(\pi)$ posee una (al menos) $*$ -representación, si \mathfrak{A} es nuclear. En otras palabras, toda órbita de semejanza es una $*$ -órbita en ese caso. Se sigue pues que, efectivamente, $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ es la unión discreta de *todas* las órbitas $O(\pi)$ y que, análogamente, $Rep^w(\mathcal{M}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ es la unión discreta de las órbitas $O^w(\pi)$.

c) El teorema 2.1 también se verifica si se sustituye $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ por un álgebra de von Neumann inyectiva general.

Las ideas anteriores tienen aplicación en representaciones de grupos. Si \mathfrak{G} es un grupo localmente compacto denotamos por $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ el conjunto de homomorfismos π de \mathfrak{G} en $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ que son fuertemente continuos (esto es, continuos para la topología fuerte de operadores en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) y uniformemente acotados: $\sup\{\|\pi(s)\| : s \in \mathfrak{G}\} < \infty$. Sea $C^*(\mathfrak{G})$ el álgebra C^* standard generada por \mathfrak{G} (véase la definición en la próxima sección). Existe una biyección entre las representaciones fuertemente continuas y unitarias de \mathfrak{G} en \mathcal{H} , y las $*$ -representaciones de $C^*(\mathfrak{G})$ en \mathcal{H} . Por simpatía con la definición hecha para representaciones de álgebras diremos que una órbita en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$, dada por la acción de $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$, es $*$ -órbita si posee una representación unitaria.

Corolario 2.2. ([ACS1]) *Dado \mathfrak{G} grupo localmente compacto, el álgebra $C^*(\mathfrak{G})$ es nuclear si y solamente si cada $*$ -órbita en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ es un espacio homogéneo de Banach holomorfo, con estructura reductiva.*

La demostración de este corolario es inmediata, así como lo es el hecho de que el subespacio de $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ de representaciones unitarias admite estructura de variedad analítica real como unión discreta de espacios homogéneos de Banach (sus órbitas).

Notemos que si un grupo localmente compacto \mathfrak{G} es promediable entonces el álgebra $C^*(\mathfrak{G})$, generada por el grupo por definición, es nuclear. Al igual que ocurre con álgebras nucleares (o de forma semejante, con álgebras von Neumann inyectivas según el teorema 2.1), podemos preguntarnos si una eventual hipótesis de que cada $*$ -órbita en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ posea estructura reductiva conllevará que \mathfrak{G} deba ser promediable. La respuesta es negativa ya que existen grupos no promediables para los que $C^*(\mathfrak{G})$ es nuclear (v. g. $\mathfrak{G} = SL(2, \mathbb{R})$) y entonces basta aplicar el corolario 2.2.

Asimismo podemos preguntarnos si cada órbita en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ es una $*$ -órbita. Podemos asegurar que es así cuando el grupo \mathfrak{G} es promediable, como es bien conocido [G]. Entonces tenemos

Corolario 2.3. ([ACS1]) *Si \mathfrak{G} es un grupo promediable entonces $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ es la unión discreta de sus órbitas, que son espacios homogéneos de Banach holomorfos reductivos, y subvariedad de $\mathcal{L}(C^*(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.*

En vista de los resultados previos la cuestión natural ahora es la siguiente.

CUESTIÓN 2.4: Supongamos que toda órbita en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ posee estructura reductiva, para todo espacio de Hilbert \mathcal{H} . Dilucidar si se deduce de ahí que \mathfrak{G} deba ser promediable.

El trabajo [ACS1] supone un punto de inflexión en el orden de ideas que estamos considerando. En él se apunta abiertamente el papel que la noción de promediabilidad desempeña en la construcción de una geometría diferencial para representaciones, y de hecho se establece un resultado de este tipo para grupos con media (Corolario 2.3). Quedan, no obstante, algunos puntos en el aire que sugieren un mayor análisis en esta dirección. Por ejemplo, en el artículo se da una cierta confusión en cuanto al tipo de propiedades “de promediabilidad” a usar, y en qué lugares; la demostración del teorema 2.1 para alcanzar los espacios globales de representaciones, siendo ingeniosa e interesante, emplea técnicas que sólo funcionan para $*$ -representaciones, y por tanto requiere de resultados auxiliares sobre órbitas de semejanza, un tanto alejados de la cuestión; el caso nuclear del teorema 2.1 parece algo indirecto, y debería poder hallarse otra prueba que no pasara por apelar a álgebras biduales de von Neumann; a mayor abundamiento, los corolarios 2.2 y 2.3 no se basan en \mathfrak{G} directamente, sino que pasan por $C^*(\mathfrak{G})$, y luego por $C^*(\mathfrak{G})^{**}$.

Las últimas reflexiones suscitan una serie de cuestiones que motivaron en parte los artículos [CG2] y [CG1], y que usaremos como preámbulo para las dos próximas secciones.

3 Geometría de representaciones en grupos

Hemos visto cómo puede emplearse el álgebra $C^*(\mathfrak{G})$ asociada a un grupo localmente compacto \mathfrak{G} para establecer una geometría de conexiones sobre las representaciones de \mathfrak{G} . Pero ese método conlleva que se pierda contacto con el grupo mismo, y, al menos cuando \mathfrak{G} es promediable, sería conveniente disponer de una demostración interna, más visual por así decir.

Recordemos que, además de $C^*(\mathfrak{G})$, existen otras importantes álgebras de Banach del análisis armónico, cuyas $*$ -representaciones están en correspondencia biunívoca con las representaciones unitarias del grupo \mathfrak{G} . De hecho la tal correspondencia se extiende a los respectivos conjuntos de todas las representaciones, y ésta es una propiedad muy interesante.

Dado, como arriba, un grupo localmente compacto \mathfrak{G} , denotaremos como $M(\mathfrak{G})$ el álgebra de Banach de convolución formada por las medidas de Borel regulares, complejas y de variación acotada sobre \mathfrak{G} . Como es habitual, denotaremos asimismo como $L^1(\mathfrak{G})$ la sub-álgebra de Banach de $M(\mathfrak{G})$ formada por aquellas medidas que son absolutamente continuas respecto a la medida de Haar a izquierda sobre \mathfrak{G} , llamémosla dt . En otros términos, $L^1(\mathfrak{G})$ consiste de las (clases de) funciones complejas y medibles f sobre \mathfrak{G} para

las cuales $\int_{\mathfrak{G}} |f(t)| dt < \infty$. Como en el caso de álgebras C^* o von Neumann considerado anteriormente, $Rep(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ va a significar el espacio de homomorfismos acotados *no degenerados* de $L^1(\mathfrak{G})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Sea $Rep(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ el conjunto de homomorfismos θ acotados entre $M(\mathfrak{G})$ y $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que además son continuos respecto a las topologías fuertes; es decir, si $\lim_j \mu_j * f = \mu * f$ para todo $f \in L^1(\mathfrak{G})$ entonces $\lim_j \theta(\mu_j)x = \theta(\mu)x$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

El siguiente resultado es bien conocido en sus dos terceras partes; en la otra, curiosamente, no tanto.

Proposición 3.1. *Con las notaciones anteriores, se verifican las isometrías*

$$Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H})) \equiv Rep(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H})) \equiv Rep(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H})).$$

Proof: Empezamos tomando un elemento π en $Rep(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Puesto que $\pi(L^1(\mathfrak{G}))\mathcal{H}$ es denso en \mathcal{H} y $L^1(\mathfrak{G})$ es un álgebra de Banach que posee unidad aproximada acotada (a izquierda y a derecha, si falta hiciera) se tiene que $\pi(L^1(\mathfrak{G}))\mathcal{H} = \mathcal{H}$, por aplicación del teorema de Cohen [Ru2, p. 39]. Entonces definimos la extensión $\tilde{\pi}$ de π a $M(\mathfrak{G})$ mediante

$$\tilde{\pi}(\mu)x := \pi(\mu * f)y, \quad \text{si } x = \pi(f)y, \quad y \in \mathcal{H}, f \in L^1(\mathfrak{G}).$$

Usando una aproximación de la identidad (o unidad aproxima acotada, que es el mismo concepto) se comprueba que la definición anterior de $\tilde{\pi}(\mu)$ está bien hecha (no depende de f ni de y) y que da lugar efectivamente a un elemento $\tilde{\pi}$ de $Rep(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Los detalles pueden verse en [Es, p. 96] (aunque están dados para álgebras conmutativas, también sirven en nuestro caso).

Sea ahora θ en $Rep(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Es claro que la restricción de θ a las masas de Dirac δ_t , $t \in \mathfrak{G}$, induce una representación $\pi : t \mapsto \pi(t) := \theta(\delta_t)$ en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$.

Finalmente, cualquier π en $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ induce un elemento del espacio de representaciones $Rep(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ del modo habitual:

$$\pi(f)x := \int_{\mathfrak{G}} f(t) \pi(t)x dt, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}, f \in L^1(\mathfrak{G}).$$

El hecho de que las aplicaciones anteriores son isometrías no es difícil de obtener.

La proposición anterior sigue siendo cierta si en lugar de un espacio de Hilbert \mathcal{H} se considera cualquier espacio de Banach reflexivo, e incluso para álgebras de Banach más generales que $\mathcal{L}(E)$, con E reflexivo.

La aplicación $\mu \mapsto \mu^*$, $M(\mathfrak{G}) \rightarrow M(\mathfrak{G})$ dada por $\mu^*(\omega) := \overline{\mu(\omega^{-1})}$, para cada boreliano ω de \mathfrak{G} , define una involución continua de álgebra en $M(\mathfrak{G})$, que deja invariante $L^1(\mathfrak{G})$ [F, pp. 50, 51]. De modo que tiene sentido hablar de $*$ -representaciones de $M(\mathfrak{G})$ y $L^1(\mathfrak{G})$ con respecto a esa involución. Es un ejercicio sencillo probar que las isometrías de la proposición hacen corresponder representaciones unitarias de \mathfrak{G} con tales

-representaciones, pero éste es un hecho que no vamos a usar aquí. Sí que podemos aprovechar no obstante para recordar la definición de $C^(\mathfrak{G})$: Para cada $f \in L^1(\mathfrak{G})$ se define la norma $\|f\| := \sup\{\|\pi(g)\|\}$ donde el supremo está tomado sobre el conjunto de *-representaciones de f (o de sus clases de equivalencia, mejor dicho). Entonces $C^*(\mathfrak{G})$ es por definición la complección de $L^1(\mathfrak{G})$ en la norma dada, véase [F].

Supongamos que \mathfrak{G} es un grupo localmente compacto promediable, y fijemos una media m invariante a izquierda sobre $L^\infty(\mathfrak{G})$. Sea π una representación uniformemente acotada de \mathfrak{G} en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces, para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $x, y \in \mathcal{H}$, definimos como en el caso de álgebras de von Neumann inyectivas, sección 2 anterior,

$$(3.1) \quad \langle \mathcal{E}_\pi(T)x, y \rangle := \int_{\mathfrak{G}} \langle \pi(s)T\pi(s)^{-1}x, y \rangle dm(s),$$

expresión que quiere significar la acción de la media m sobre la función compleja $s \mapsto \langle \pi(s)T\pi(s)^{-1}x, y \rangle$, acción que tiene sentido ya que dicha función es continua y uniformemente acotada sobre \mathfrak{G} , de manera que pertenece a $L^\infty(\mathfrak{G})$.

El operador resultante $\mathcal{E}_\pi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es particularmente sencillo de manejar en algunos aspectos. Por ejemplo es muy sencillo probar (gracias a que m es invariante a izquierda) que $\text{ran } \mathcal{E}_\pi = \pi(\mathfrak{G})'$. Más aún, \mathcal{E}_π es de hecho una cuasi-esperanza, y esto permite ya establecer que la aplicación $\tau_\pi : \mathcal{G}l(\mathcal{H}) \rightarrow O(\pi)$ es un fibrado principal. Queremos dotar a $O(\pi)$ de estructura reductiva y para ello vamos a seguir las pautas indicadas en [MR], de manera que necesitamos introducir la 1-forma adecuada \mathcal{K}_π (véase la sección 1).

Sea Λ una aplicación lineal y continua de $M(\mathfrak{G})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pongamos

$$\mathcal{K}_\pi(\Lambda) := \int_{\mathfrak{G}} \Lambda(s)\pi(s)^{-1}dm(s),$$

cuyo significado es análogo al indicado por la fórmula (3.1). En la “integral”, se sobreentiende que $\Lambda(s) \equiv \Lambda(\delta_s)$. Entonces \mathcal{K}_π es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{L}(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Nótese que $\mathcal{E}_\pi(T) = \mathcal{K}_\pi(\pi(\cdot)T)$, para todo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Como primer resultado del uso combinado de \mathcal{E}_π y \mathcal{K}_π tenemos que cada órbita $O(\pi)$ es un espacio homogéneo. En efecto, sea $\Delta_\pi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ la aplicación definida por $\Delta_\pi(T)(\mu) := T \circ \pi(\mu) - \pi(\mu) \circ T$, ($T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mu \in M(\mathfrak{G})$). Claramente, Δ_π es lineal y acotada, con $\ker \Delta_\pi = \text{ran } \mathcal{E}_\pi$, y $\text{ran } \Delta_\pi = \text{Der}_\pi(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, espacio de las derivaciones internas de $L^1(\mathfrak{G})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (viendo $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ como $L^1(\mathfrak{G})$ -bimódulo vía la acción de π). El espacio $\text{Der}_\pi(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ coincide con el espacio de *todas* las derivaciones acotadas de $L^1(\mathfrak{G})$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ya que \mathfrak{G} es promediable. Es fácil verificar que $(d\tau_\pi)_e = \Delta_\pi$. Además, $\mathcal{K}_\pi \circ \Delta_\pi = I - \mathcal{E}_\pi$, de donde se sigue que $\mathcal{P}_\pi := \Delta_\pi \circ \mathcal{K}_\pi : \mathcal{L}(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H})) \rightarrow \mathcal{L}(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ es una proyección acotada, tal que $\text{im } \mathcal{P}_\pi = \text{Der}_\pi(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. En resumen, se cumple:

1) $\ker (d\tau_\pi)_e = \ker \Delta_\pi = \text{ran } \mathcal{E}_\pi$ es subespacio topológicamente complementado de $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \equiv T_e(\mathcal{G}l(\mathcal{H}))$.

2) $\text{ran } (d\tau_\pi)_e = \text{ran } \Delta_\pi = \text{im } \mathcal{P}_\pi$ es subespacio topológicamente complementado de $\mathcal{L}(M(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

3) $\tau_\pi : \mathcal{G}l(\mathcal{H}) \rightarrow O(\pi)$ es aplicación abierta, debido a la existencia de secciones locales (facilitadas por \mathcal{E}_π).

Luego, aplicando el teorema 1.4 de la primera sección, repescamos el corolario 2.3 con algo más de información: para toda $\rho \in O(\pi)$ el espacio tangente $T_\rho(O(\pi))$ coincide con el espacio de derivaciones $Der_\rho(\mathfrak{G}, \mathcal{L}(\mathcal{H})) = Der_\rho(L^1(\mathfrak{G}), \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, cosa que resulta de lo más natural. La estructura reductiva en $O(\pi)$ está definida mediante la conexión dada por la distribución de subespacios horizontales $u \mapsto H^u := uH_\pi := u \ker \mathcal{E}_\pi$, complementados de los correspondientes subespacios verticales $V^u := uV_\pi := u\pi(\mathfrak{G})'$, para cada $u \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})$.

Evidentemente nos gustaría dar respuesta afirmativa a la cuestión 2.4 planteada en la segunda sección. No sabemos hacerlo, pero sí podemos enunciar algunas caracterizaciones geométrico-diferenciales de la promediabilidad de grupos. Primeramente, un resultado de A. I. Shtern [S] afirma que para \mathfrak{G} localmente compacto y *conexo*, \mathfrak{G} es promediable si y sólo si $Rep(\mathfrak{G}, \mathcal{G}l(\mathcal{H}))$ es localmente transitivo respecto a la acción de $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ por automorfismos internos. Por tanto se tiene que \mathfrak{G} , conexo, es promediable si y sólo si el fibrado $\tau_\pi : \mathcal{G}l(\mathcal{H}) \rightarrow O(\pi)$ es principal.

Veamos ahora cómo mejorar significativamente el corolario 2.3. En la definición de \mathcal{E}_π , tomemos la media m invariante a izquierda y a derecha al mismo tiempo. Entonces \mathcal{E}_π tiene la propiedad añadida siguiente.

Para $t \in \mathfrak{G}$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $x, y \in \mathcal{H}$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_\pi(\pi(t)T\pi(t^{-1}))x, y \rangle &= \int_{\mathfrak{G}} \langle \pi(st)T\pi((st)^{-1})x, y \rangle dm(s) \\ &= \int_{\mathfrak{G}} \langle \pi(s)T\pi(s^{-1})x, y \rangle dm(s) = \langle \mathcal{E}_\pi(T)x, y \rangle, \end{aligned}$$

es decir, $\mathcal{E}_\pi(\pi(t)T\pi(t^{-1})) = \mathcal{E}_\pi(T)$, o equivalentemente $\mathcal{E}_\pi(\pi(t)T) = \mathcal{E}_\pi(T\pi(t))$, para todos $t \in \mathfrak{G}$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. En otras palabras, con una elección más restringida de la media m , resulta que la conexión definida por la elección de subespacios vectoriales $H_\pi := \ker \mathcal{E}_\pi$ en $O(\pi)$ satisface $[\pi(\mathfrak{G}), H_\pi] \subset H_\pi$. Diremos que una conexión en $O(\pi)$ define una estructura reductiva π -invariante cuando verifique la anterior propiedad. Con esta nomenclatura se obtiene pues que si \mathfrak{G} es promediable entonces existe estructura reductiva π -invariante en toda órbita $O(\pi)$, y esto mejora el corolario 2.3. Pero no sólo eso. No es difícil demostrar, por adaptación a este contexto de argumentos naturales, que si toda representación satisface esta última propiedad entonces se da la promediabilidad de \mathfrak{G} . Por tanto,

Teorema 3.2. ([CG2]) *Sea \mathfrak{G} grupo localmente compacto. Las dos siguientes propiedades son equivalentes.*

(i) \mathfrak{G} es promediable

(ii) Para todo espacio de Hilbert \mathcal{H} y toda representación π de \mathfrak{G} en \mathcal{H} , la órbita $O(\pi)$ es un espacio homogéneo de Banach, holomorfo, con estructura reductiva π -invariante.

Hay una clase de grupos mayor que la de los promediables en cuyo seno éstos pueden caracterizarse mediante la posesión, en sus espacios de representaciones, de estructuras reductivas no necesariamente π -invariantes. A saber, un grupo \mathfrak{G} se llama *promediable por automorfismos internos*, o, más llanamente, *internamente promediable* si existe una media m sobre $L^\infty(\mathfrak{G})$ tal que $m(f(t \cdot t^{-1})) = m(f)$ para todo $t \in \mathfrak{G}$ y toda $f \in L^\infty(\mathfrak{G})$ ([LP]).

Teorema 3.3. ([CG2]) Sea \mathfrak{G} grupo localmente compacto e internamente promediable. Entonces \mathfrak{G} es promediable si y solamente si la órbita $O(\pi)$ es un espacio homogéneo de Banach holomorfo con estructura reductiva, para toda representación π de \mathfrak{G} en un espacio de Hilbert.

Un aspecto interesante de este teorema es que se llega a probar la promediabilidad del grupo usando específicamente el *dato reductivo*: para cada π existe una proyección acotada $\mathcal{Q}_\pi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \pi(\mathfrak{G})'$ tal que $U\mathcal{Q}_\pi(T)U^{-1} = \mathcal{Q}_\pi(UTU^{-1})$ para todo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y todo $U \in \pi(\mathfrak{G})' \cap \mathcal{G}l(\mathcal{H})$. Tal suerte de condición es exactamente (en términos formales) la que resulta suficiente para probar la inyectividad de un álgebra de von Neumann (con conjuntos de representaciones gozando de estructura reductiva). O sea, que este teorema 3.3 viene a ser formalmente el paralelo al de caracterización de la inyectividad.

Para cerrar esta sección, insisto en el interés de saber si se puede eliminar la condición de π -invariación en el teorema 3.2, o la hipótesis sobre la promediabilidad interna del grupo en el teorema 3.3. Mi conjetura es que no se puede.

4 Geometría de representaciones en álgebras de Banach

Acabamos de ver que, para grupos promediables, es posible de forma directa y cómoda llegar a la geometría del espacio de todas las representaciones del grupo sin necesidad de pasar previamente por las que son unitarias y, más importante, sin pasar por la C^* -álgebra de grupo $C^*(\mathfrak{G})$ y sus $*$ -representaciones. Pero todavía tenemos pendiente la cuestión de si el uso previo de $*$ -representaciones es necesario en el contexto de álgebras de operadores, en el caso de las álgebras C^* nucleares o de von Neumann inyectivas. Por otra parte, el álgebra $L^1(\mathfrak{G})$ es promediable si \mathfrak{G} lo es, y entonces disponemos de geometría en las representaciones de $L^1(\mathfrak{G})$ por cuanto que el conjunto de éstas coincide con el de las de \mathfrak{G} . Es natural por ambas razones plantearse si las representaciones de álgebras de Banach generales que sean promediables poseen también propiedades geométricas del estilo que estamos considerando. Esto tiene todavía más sentido o interés por cuanto que existen

álgebras de Banach promediabiles que no están generadas por ningún grupo promediable [K]. Finalmente, la cuestión más aparente es la de si la promediabilidad de un álgebra de Banach pueda caracterizarse por propiedades de tipo geométrico-diferencial.

En los artículos [CG2], [CG1] se da respuestas completas o parciales, según los casos, a las anteriores preguntas. Se establece una teoría general que engloba los trabajos que se han venido comentado, aunque sólo en la dirección apuntada.

Sea \mathcal{B} álgebra de Banach compleja con unidad e . Supondremos que \mathcal{B} es un álgebra *dual*, esto es, existe un \mathcal{B} -submódulo cerrado \mathcal{B}_* del dual \mathcal{B}^* tal que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_*)^*$. Tal módulo no tiene por qué ser único pero nosotros lo suponemos fijado desde el principio (lo que no acarrea ningún problema). Ejemplos de álgebras de Banach duales son: a) el álgebra de medidas $\mathcal{B} = M(\mathfrak{G})$, con $\mathcal{B}_* = C_0(\mathfrak{G})$; b) $\mathcal{L}(E)$, si E es un espacio de Banach reflexivo, con $\mathcal{B}_* = E \hat{\otimes} E^*$, espacio de los operadores de traza finita, o nucleares, sobre E ; c) cualquier álgebra de von Neumann \mathcal{M} , con $\mathcal{B}_* = \mathcal{M}_*$, predual único de \mathcal{M} ; d) el álgebra bidual A^{**} , siempre que A sea álgebra de Banach regular de Arens. (Véase [CG2, p. 317], [Ru2, p. 108].)

Sea ahora \mathfrak{A} un álgebra de Banach compleja no necesariamente con unidad. Con $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ denotaremos el conjunto de homomorfismos acotados $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tales que $\pi(\mathfrak{A})\mathcal{B}_*$ es denso en \mathcal{B}_* , respecto a la norma de \mathcal{B}_* .

Es de hacer notar que cuando $\mathcal{B} = \mathcal{L}(E)$, siendo E espacio de Banach reflexivo, entonces $\pi(\mathfrak{A})(E \hat{\otimes} E^*)$ es denso en $E \hat{\otimes} E^*$ si y sólo si $\pi(\mathfrak{A})(E)$ es denso en E .

En efecto, si $\pi(a)y$ tiende a x en E eso implica que $\pi(a)(y \otimes x^*) = \pi(a)y \otimes x^*$ tiende a $x \otimes x^*$ en $E \hat{\otimes} E^*$, para todo $x^* \in E^*$. Además el conjunto (subespacio lineal) de combinaciones lineales finitas de elementos de la forma $x \otimes x^*$ es denso en $E \hat{\otimes} E^*$, luego $\pi(\mathfrak{A})(E \hat{\otimes} E^*)$ es denso en $E \hat{\otimes} E^*$. Recíprocamente, sea $x \in E$ y tomemos $x^* \in E^*$ tal que $\langle x, x^* \rangle = 1$. Por la densidad asumida como hipótesis, $x \otimes x^*$ puede aproximarse por elementos de la forma $\pi(a)(\sum_j y_j \otimes y_j^*) = \sum_j (\pi(a)y_j) \otimes y_j^*$, con $a \in \mathfrak{A}$, $y_j \in E$, $y_j^* \in E^*$. Entonces $x = \langle x, x^* \rangle x$ puede aproximarse por $\sum_j \langle x, y_j^* \rangle \pi(a)y_j = \pi(a)(\sum_j \langle x, y_j^* \rangle y_j) \in \pi(\mathfrak{A})E$ (nótese que $\langle x, x^* \rangle x$ es la acción del operador nuclear $x \otimes x^*$ sobre x).

En definitiva, $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{L}(E))$ si y solamente si π es no-degenerada en el sentido habitual.

Supongamos que \mathfrak{A} es promediable y fijemos una diagonal aproximada $(m_j)_j$ en $\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{A}$. Sea \mathcal{B} como líneas arriba y tomemos $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Por ser promediable, \mathfrak{A} posee unidad aproximada acotada y entonces el teorema de factorización de Cohen ([Ru2, p. 39]) nos dice que $\pi(\mathfrak{A})\mathcal{B}_* = \mathcal{B}_*$. Tomemos ξ en \mathcal{B}_* . Según lo anterior existen $a \in \mathfrak{A}$, $\eta \in \mathcal{B}_*$ tales que $\xi = \pi(a)\eta$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \lim_j \langle (\pi\gamma)(m_j), \xi \rangle &= \lim_j \langle (\pi\gamma)(m_j), \pi(a)\eta \rangle = \lim_j \langle (\pi\gamma)(m_j)\pi(a), \eta \rangle \\ &= \lim_j \langle \pi((\gamma.m_j)a), \eta \rangle = \langle \pi(a), \eta \rangle = \langle e, \pi(a)\eta \rangle = \langle e, \xi \rangle, \end{aligned}$$

es decir, $\lim_j(\pi\gamma)(m_j) = e$ en la topología débil* de \mathcal{B} . Esto tiene traducción para diagonales virtuales. Si M es una diagonal virtual obtenida como punto de acumulación débil* de $(m_j)_j$ y $\xi \in \mathcal{B}_*$,

$$\begin{aligned} \langle (\pi^{**}(\gamma^{**}M), \xi) &= \langle M, (\pi\gamma)^*(\xi) \rangle \\ &= \lim_j \langle m_j, (\pi\gamma)^*(\xi) \rangle = \lim_j \langle (\pi\gamma)(m_j), \xi \rangle \end{aligned}$$

de modo que $\pi^{**}(\gamma^{**}M) = e$. Este hecho tiene importancia debido al siguiente lema, central para la construcción de la geometría de $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Lema 4.1. Sean \mathfrak{A} , $M = \lim_j m_j$, como antes y \mathcal{B} álgebra dual con unidad e . Sea $\theta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un homomorfismo acotado tal que $\theta^{**}(\gamma^{**}M) = e$. Entonces el operador $\mathcal{K}_\theta : \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ definido mediante

$$\langle \mathcal{K}_\theta(T), \xi \rangle := \langle \mu^{**}(T \otimes \theta)^{**}(M), \xi \rangle, \quad T \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B}), \xi \in \mathcal{B}_*,$$

en donde μ es la multiplicación in \mathcal{B} , es lineal y continuo, y cumple:

- (i) $\|\mathcal{K}_\theta\| \leq \|M\| \|\theta\|$.
- (ii) $\mathcal{K}_\theta(bT(\cdot)) = b\mathcal{K}_\theta(T)$, para cada $b \in \mathcal{B}$, $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.
- (iii) $\mathcal{K}_\theta(T(a \cdot)) = \mathcal{K}_\theta(T)\theta(a)$, para cada $a \in \mathfrak{A}$, $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.
- (iv) $\mathcal{K}_\theta(\theta) = e$.

Este lema es el teorema 2.1 de [CG2] (véase también [Ru2, Teorema 8.2.1], si bien éste contiene un ligero error de transcripción), que proporciona la 1-forma fundamental \mathcal{K}_π , sobre la cual cimentar la estructura reductiva de $O(\pi)$, $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Denotemos por \mathcal{G} el grupo de elementos inversibles de \mathcal{B} . Si $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, y $u \in \mathcal{G}$ es sencillo comprobar que $(u\pi u^{-1})(\mathfrak{A})\mathcal{B}_* = \mathcal{B}_*$. Por tanto, la acción

$$(u, \pi) \mapsto u\pi u^{-1}, \mathcal{G} \times Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \rightarrow Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$$

está bien definida (y es holomorfa). Como habitualmente, vamos a estudiar el fibrado $\tau_\pi : \mathcal{G} \rightarrow O(\pi)$.

Proposición 4.2. Sean \mathfrak{A} y \mathcal{B} como antes, y sea $\pi \in Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Entonces $\mathcal{K}_\pi(\rho) \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{K}_\pi(\rho)\pi\mathcal{K}_\pi(\rho)^{-1} = \rho$ para toda representación ρ en el entorno $\mathcal{U}_\pi := \{\rho : \|\rho - \pi\| < (\|M\| \|\pi\|)^{-1}\}$.

La demostración de la proposición emplea los puntos (ii), (iii) y (iv) del lema 4.1. Lo que nos dice el resultado es que τ_π admite secciones locales obtenidas de la 1-forma \mathcal{K}_π . Además una tal sección induce, en torno a π , un homeomorfismo local implementado por

la fórmula $u \mapsto (u\pi u^{-1}, \mathcal{K}_\pi(u\pi u^{-1})^{-1}u)$ ([CG2]). En consecuencia, $\tau_\pi : \mathcal{G} \rightarrow O(\pi)$ es un fibrado principal holomorfo.

Si releemos la introducción de este trabajo veremos que en la fórmula del homeomorfismo local debe estar implícita una cuasi-esperanza \mathcal{E}_π para la cual $\mathcal{K}_\pi(u\pi u^{-1})^{-1}u = \mathcal{E}_\pi(u^{-1})^{-1}$. Esto es así, en efecto.

Proposición 4.3. *Sea $\mathcal{E}_\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ definida por*

$$\mathcal{E}_\pi(b) := \mathcal{K}_\pi(\pi(\cdot)b), \quad \text{si } b \in \mathcal{B}.$$

Entonces $\mathcal{E}_\pi \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ y se cumple:

- (i) $\|\mathcal{E}_\pi(b)\| \leq \|\pi\|^2\|b\|$, ($b \in \mathcal{B}$).
- (ii) $\text{ran } \mathcal{E}_\pi = \pi(\mathfrak{A})'$ en \mathcal{B} .
- (iii) $\mathcal{E}_\pi^2 = \mathcal{E}_\pi$, y $\mathcal{E}_\pi(e) = e$.
- (iv) $\mathcal{E}_\pi(cbd) = c\mathcal{E}_\pi(b)d$, para todo $b \in \mathcal{B}$; $c, d \in \pi(\mathfrak{A})'$.

En analogía con lo visto para grupos promediables (véase la sección anterior), sea $Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ el espacio de todas las derivaciones (internas de hecho, pues \mathfrak{A} es promediable) de \mathfrak{A} en \mathcal{B} , considerando \mathcal{B} como \mathfrak{A} -módulo a través de la acción de π . Sea $\Delta_\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ dada por $\Delta_\pi(b)(a) := b\pi(a) - \pi(a)b$, ($a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathcal{B}$), y sea $\mathcal{P}_\pi := \Delta_\pi \circ \mathcal{K}_\pi$. Las aplicaciones Δ_π y \mathcal{P}_π son lineales y continuas, y verifican las identidades $(d\tau_\pi)_e = \Delta_\pi$, $\mathcal{K}_\pi \circ \Delta_\pi = I - \mathcal{E}_\pi$, $\ker \Delta_\pi = \text{ran } \mathcal{E}_\pi$, $\text{im } \mathcal{P}_\pi = \text{ran } \Delta_\pi = Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Con todo ello, el teorema 1.4 implica que toda órbita $O(\pi)$ es espacio homogéneo de Banach holomorfo, y subvariedad de $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, de espacios tangentes $T_\rho(O(\pi)) \equiv Der_\rho(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, ($\rho \in O(\pi)$). El espacio $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ es la unión discreta de sus órbitas.

Todavía más, cada elemento de la componente conexa of π en $O(\pi)$ es de la forma $exp(b_1)...exp(b_n)\pi exp(-b_n)...exp(-b_1)$ con $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}$, ya que la componente principal de \mathcal{G} , llamémosla \mathcal{G}_e , consiste de todos los productos finitos de exponenciales de elementos of \mathcal{B} [SS]. También, el elemento inversible $K_\pi(\rho)$ de la proposición 4.2 está en \mathcal{G}_e de hecho. Por tanto, si consideramos la sub-acción de \mathcal{G}_e sobre $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ obtenemos esta vez que la componente conexa de π es $\tau_\pi(\mathcal{G}_e)$.

Como no podía ser menos, en $O(\pi)$ existe una conexión definida por \mathcal{E}_π . Si u pertenece a $\mathcal{G}_\pi := \pi(\mathfrak{A})' \cap \mathcal{G}$ y $b \in \ker \mathcal{E}_\pi$, se tiene $\mathcal{E}_\pi(ubu^{-1}) = u\mathcal{E}_\pi(b)u^{-1} = 0$, de donde resulta ser $u(\ker \mathcal{E}_\pi)u^{-1} = \ker \mathcal{E}_\pi$, y \mathcal{E}_π deviene en una forma de conexión

$$\mathcal{E}_\pi : T_e(\mathcal{G}) = \mathcal{B} \rightarrow \pi(\mathfrak{A})' = T_e(\mathcal{G}_\pi),$$

con distribución asociada de subespacios horizontales $u \ker \mathcal{E}_\pi$, y verticales $u\pi(\mathfrak{A})'$, cuando u recorre \mathcal{G} .

Hay una clase particular de álgebras de Banach promediables para cuyas representaciones se puede dar una estructura reductiva π -invariante, en el sentido de lo hecho para grupos (promediables). Dada A álgebra de Banach, un elemento de $A\hat{\otimes}A$ se llama *simétrico* si es punto fijo de la extensión de la aplicación $a \otimes a' \mapsto a' \otimes a$ al espacio completado $A\hat{\otimes}A$. Un álgebra promediable se llama *simétricamente promediable* si posee una diagonal aproximada acotada que sea simétrica. Esta definición fue también introducida por B. E. Johnson. Como ejemplos, toda álgebra promediable que sea conmutativa, o álgebra de grupo de un grupo (promediable, claro), o álgebra C^* fuertemente promediable, es simétricamente promediable [J2].

Sea entonces \mathfrak{A} un álgebra simétricamente promediable. Cualquier diagonal virtual M obtenida como punto límite débil* de una diagonal aproximada simétrica verifica $M\tilde{\circ}a = a\tilde{\circ}M$ ($a \in \mathfrak{A}$), siendo la operación de bimódulo $\tilde{\circ}$ dada por $(c \otimes d)\tilde{\circ}a = ca \otimes d$, $a\tilde{\circ}(c \otimes d) = c \otimes ad$ ($a, c, d \in \mathfrak{A}$). Por consiguiente, si $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\pi(\pi(a)b) &= \mathcal{K}_\pi(\pi(\cdot a)b) = \mu^{**}((\pi(\cdot a)b \otimes \pi)^{**}(M)) = \mu^{**}((\pi(\cdot) b \otimes \pi)^{**}(M\tilde{\circ}a)) \\ &= \mu^{**}((\pi(\cdot) b \otimes \pi)^{**}(a\tilde{\circ}M)) = \mu^{**}((\pi(\cdot) b\pi(a) \otimes \pi)^{**}(M)) = \mathcal{E}_\pi(b\pi(a)). \end{aligned}$$

(Recordemos que μ denota la multiplicación en \mathfrak{B} .)

En resumen, se cumple que $\mathcal{E}_\pi(\pi(a)b) = \mathcal{E}_\pi(b\pi(a))$ for every $a \in \mathfrak{A}$ and $b \in \mathfrak{B}$. Análogamente al caso de grupos, si tomamos $H_\pi := \ker \mathcal{E}_\pi$ esa propiedad puede escribirse como $[\pi(\mathfrak{A}), H_\pi] \subset H_\pi$.

Las disquisiciones previas nos facilitan el siguiente

Teorema 4.4. *Sean \mathfrak{A} un álgebra de Banach promediable con diagonal virtual fija M , y \mathfrak{B} un álgebra de Banach dual. Entonces, para toda representación $\pi \in \text{Rep}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, la órbita $O(\pi) = \{U\pi U^{-1} : U \in \mathcal{G}\}$ posee estructura reductiva, con forma de conexión definida por M como antes. Más aún, en el caso en que \mathfrak{A} admita una diagonal virtual M tal que $M\tilde{\circ}a = a\tilde{\circ}M$ ($a \in \mathfrak{A}$) (por ejemplo, cuando \mathfrak{A} es simétricamente promediable), entonces la estructura reductiva es π -invariante, en el sentido de que $[\pi(\mathfrak{A}), H_\pi] \subset H_\pi$, siendo H_π el espacio de vectores horizontales (en el punto π) asociado a la conexión.*

Los invariantes de la conexión definida por M sobre el fibrado $\tau_\pi : \mathcal{G} \rightarrow O(\pi)$, así como los de la conexión lineal inducida en el fibrado tangente, pueden calcularse de manera “standard”, a partir de \mathcal{K}_π y \mathcal{E}_π (véase literatura precedente sobre el tema). Es tiempo de insistir, a esos efectos, en que \mathcal{K}_π induce una 1-forma sobre $O(\pi)$ en el sentido de [MR]. Para empezar, recordemos que $\mathcal{K}_\pi \circ \Delta_\pi = I - \mathcal{E}_\pi$ y por ello \mathcal{K}_π se identifica con el isomorfismo $\text{Der}_\pi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \cong \ker \mathcal{E}_\pi$ dado por $\Delta_\pi(b) \mapsto b - \mathcal{E}_\pi(b)$, $b \in \mathfrak{B}$. De otro modo dicho, H_π puede conseguirse alternativamente como la elevación de $T_\pi(O(\pi)) = \text{Der}_\pi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ al fibrado, exactamente como $H_\pi = \mathcal{K}_\pi(\text{Der}_\pi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}))$ (y lo mismo con $H^u = u \cdot H_\pi$, para cada $u \in \mathcal{G}$). Así la interpretación geométrica queda muy clara. Más aún, si $\rho = \text{Ad}_u(\pi)$,

o sea, $\rho = u\pi u^{-1}$, $u \in \mathcal{G}$, no es complicado comprobar, usando diagonales aproximadas por ejemplo ([CG2]), que $\mathcal{K}_\rho(T) = (Ad_u \circ \mathcal{K}_\pi \circ Ad_{u^{-1}})(T)$ for every $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. En conclusión, $\rho \mapsto \mathcal{K}_\rho$ define una 1-forma sobre $O(\pi)$.

Algunos invariantes son los siguientes.

Forma de curvatura de la conexión: Para $u \in \mathcal{G}$ and $X, Y \in (T\mathcal{G})_u = u \cdot \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}$,

$$\Omega_u(X, Y) = (1/2)h_\pi([u^{-1}Y, u^{-1}X]) + (1/2)[h_\pi(u^{-1}X), h_\pi(u^{-1}Y)],$$

en donde h_π es la proyección $h_\pi = I - \mathcal{E}_\pi$ sobre los vectores horizontales en $e \in \mathcal{G}$.

Derivada covariante de un campo tangente $Y(t)$ a lo largo de una curva $\beta(t)$: Es el campo vectorial $\frac{DY}{dt}$ dado por

$$\mathcal{K}_\beta\left(\frac{DY}{dt}\right) = \mathcal{K}_\beta(\dot{Y}) + [\mathcal{K}_\beta(Y), \mathcal{K}_\beta(\dot{\gamma})].$$

Restringida a $\ker(\mathcal{E}_\beta)$, \mathcal{K}_β es un isomorfismo.

Una curva β es una *geodésica* si $\frac{D\dot{\beta}}{dt} = 0$. Se puede probar que la única geodésica ψ in $O(\pi)$ con valor inicial π y vector velocidad $\dot{\psi}(0) = X$ es

$$\psi(t) = e^{t\mathcal{K}_\pi(X)} \pi e^{-t\mathcal{K}_\pi(X)}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Tensor torsión T :

$$\mathcal{K}_\pi(T(X, Y)) = (I - \mathcal{E}_\pi)([\mathcal{K}_\pi(X), \mathcal{K}_\pi(Y)]),$$

para todos $X, Y \in Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Tensor curvatura R :

$$\mathcal{K}_\pi(R(X, Y)Z) = (I - \mathcal{E}_\pi)([\mathcal{K}_\pi(Z), (I - \mathcal{E}_\pi)[\mathcal{K}_\pi(X), \mathcal{K}_\pi(Y)])]$$

para todos $X, Y \in Der_\pi(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Cerramos este apartado mencionando la *ecuación de transporte*, que para una curva $\beta : [0, 1] \rightarrow O(\pi)$ de clase $C^{(1)}$ con $\beta(0) = \pi$, es la ecuación diferencial

$$\dot{\Gamma}(t) = \mathcal{K}_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t))\Gamma(t),$$

sujeta a la condición inicial $\Gamma(0) = 1$. La solución Γ se llama *levantamiento horizontal* of β porque $\tau_\pi(\Gamma(t)) = \beta(t)$, $t \in [0, 1]$, y los vectores tangentes de Γ en cada punto pertenecen a los correspondientes espacios horizontales, $\dot{\Gamma}(t) \in H^{\gamma(t)}$ para todo $t \in [0, 1]$.

El anterior listado se recoge en [CG2, pp. 324, 325].

NOTAS.- 1) Esta sección subsume la literatura precedente sobre el tema, en el sentido de construir o establecer la geometría de conexión de los conjuntos de representaciones (pues hay otros varios aspectos a considerar que no se han contemplado aquí). Algunos de

los resultados vistos son extensión considerable de sus precedentes. Por eso he expuesto la teoría con algo más de detalle que en previas secciones.

Notemos que los resultados indicados se aplican a álgebras C^* nucleares, como la de grupo $C^*(\mathfrak{G})$, o álgebras de convolución $L^1(\mathfrak{G})$ (en ambos casos si \mathfrak{G} es promediable), trabajando directamente sobre las álgebras, mediante las diagonales virtuales o aproximadas.

Al respecto, se afirma en [CG2] que si m es una media sobre un grupo (localmente compacto) promediable \mathfrak{G} entonces m origina una diagonal virtual M in $(L^1(\mathfrak{G}) \hat{\otimes} L^1(\mathfrak{G}))^{**} = L^1(\mathfrak{G} \times \mathfrak{G})^{**} = L^\infty(\mathfrak{G} \times \mathfrak{G})^*$ sin más que poner

$$M : h \in L^\infty(\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}) \mapsto M(h) = \int_{\mathfrak{G}} h(t, t^{-1}) dm(t),$$

para cada $h \in L^\infty(\mathfrak{G} \times \mathfrak{G})$. Este es un despite de grueso calibre, puesto que la diagonal $\{(t, t^{-1}) : t \in \mathfrak{G}\}$ puede ser de medida cero. Así que la afirmación sólo vale cuando \mathfrak{G} es discreto. Los autores de [CG2] están agradecidos al Dr. Ross Stokke por la anterior observación. De hecho, la relación entre medias sobre \mathfrak{G} y diagonales aproximadas (o virtuales) asociadas a \mathfrak{G} no es trivial precisamente ([St]). Afortunadamente, el error es marginal y no afecta a la sustancia de los teoremas de [CG2].

2) Las técnicas comentadas en la sección podrían ser adaptadas a las álgebras de von Neumann inyectivas, utilizando diagonales virtuales *normales*. En ese caso, debería verificarse paso a paso que tales técnicas son compatibles con la continuidad débil* (o ultradébil), que es la propia a considerar en este contexto. Resulta un método más sencillo apelar a la notación de Effros para esas diagonales (véase la introducción de este trabajo), como se hace en [CG1]. De esta forma se obtienen los resultados vistos aquí (salvo la existencia de estructura π -invariante), y en la sección 2 (salvo el recíproco, es decir, su caracterización), para álgebras inyectivas \mathcal{M} , muy directamente, sin necesidad del aparato usado en [ACS1] y reflejado en §2.

3) Pueden darse versiones análogas del teorema 4.3, y de los resultados previos, para conjuntos de $*$ -representaciones y grupos unitarios actuando sobre ellos, en función de la analiticidad real. Por otra parte, también pueden aplicarse parte de las técnicas descritas aquí a órbitas de automorfismos de álgebras promediables [CG2], si bien en el caso de un álgebra de von Neumann no es necesario suponer la inyectividad de la misma [ACS3].

Queda por plantear la posible caracterización geométrica de la promediabilidad de un álgebra de Banach. De acuerdo con el resultado dado por Shtern para grupos, ya comentado en §3, tiene sentido la

CUESTIÓN 4.4: Aclarar si el hecho de que el fibrado $\tau_\pi : \mathcal{G} \rightarrow O(\pi)$ sea principal implica que el álgebra \mathfrak{A} deba ser promediable (véase [Ru2, p. 229]).

Y en general,

CUESTIÓN 4.5: Demostrar si se cumple o no que la existencia de estructura reductiva,

o de alguna otra propiedad de corte geométrico ligada a ésta, en órbitas de representaciones de un álgebra de Banach obliga a ésta a ser promediable.

El hecho de que la π -invariación funcione bien en el caso de grupos y de que toda álgebra $L^1(\mathfrak{G})$ sea simétricamente promediable, si \mathfrak{G} es promediable, sugiere dedicar cierta atención a las álgebras simétricamente promediables generales, respecto a la cuestión anterior.

5 Algunos vínculos

Representación básica de espacios reductivos. En la sección 1 comenzamos refiriendo resultados geométricos en conjuntos de grasmanianas. Reencontramos grasmanianas en este párrafo, a las que van a parar los espacios reductivos (reflejando así, aquellas, su carácter “universal”). En cierto sentido, ésto cierra el circuito.

Supongamos dado un espacio homogéneo reductivo Q en abstracto, pero formado a partir de la acción $G(A) \times Q \rightarrow Q$ del grupo de inversibles $G(A)$ de una C^* -álgebra A con unidad, y con estructura reductiva definida por una esperanza condicional $\mathcal{E} : A \rightarrow B$, siendo $B := \mathcal{E}(A)$ sub-álgebra C^* de A con la misma unidad. Tenemos entonces un fibrado principal $\tau : u \mapsto uqu^{-1}$, $G(A) \rightarrow Q$, si q es un elemento de Q . Supongamos también dado un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H} tal que $B \subset A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Mediante aplicación del teorema de Stinespring al operador completamente positivo (que lo es por tratarse de una esperanza condicional) \mathcal{E} se construyen un nuevo espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$, con $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}$, y una $*$ -representación $\rho : A \rightarrow \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})$. Se toma la proyección de Jones $p : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$, que es extensión de la esperanza \mathcal{E} , y se considera la C^* -álgebra \tilde{A} generada por $\rho(A)$ y p en $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})$. De este modo resultan las dos órbitas de tipo grasmaniano $O(p) := \{upu^{-1} : u \in G(\tilde{A})\}$ y $O_A(p) := \{\rho(u)p\rho(u^{-1}) : u \in G(A)\}$. Entonces Q es biyectivo con $O_A(p)$, si suponemos que \mathcal{E} es fiel, y la aplicación $Q \rightarrow O_A(p) \subset O(p)$ es holomorfa. A esta aplicación se le llama en [ALRS] *representación básica*.

No siempre la inclusión $Q \hookrightarrow O(p)$ presenta Q como subvariedad de $O(p)$. De hecho esa situación es algo restrictiva.

Sea A^+ el cono de elementos positivos de A . Diremos que la esperanza \mathcal{E} tiene *índice finito* si $\lambda := \sup\{\varepsilon > 0 : \|\mathcal{E}(a)\| \geq \varepsilon\|a\|, (a \in A^+)\}$ es un número real *positivo*. En este caso se escribe $Ind(\mathcal{E}) = \lambda^{-1}$. Hay varias nociones de índice de una esperanza condicional; la dada aquí (es decir, en [ALRS]) es conocida como índice *débil* en el ambiente de las álgebras de von Neumann. Pues bien, en [ALRS] se demuestra el siguiente interesante resultado: la inclusión $Q \hookrightarrow O(p)$ proporciona Q como subvariedad (holomorfa) de $O(p)$ si y solamente si el índice de \mathcal{E} es finito.

Eso no ocurre muchas veces, pero se prueba también en [ALRS, Proposición 5.3] que hay ejemplos importantes en que sucede. A saber, cuando \mathcal{E} es la esperanza \mathcal{E}_π asociada a

una representación unitaria (continua en norma) de un grupo compacto. Evidentemente, se suscita la cuestión de qué pasa con esperanzas \mathcal{E}_π cuando π es una representación unitaria de un grupo promediable en general. La respuesta no es clara. La demostración de [ALRS, Proposición 5.3] no funciona por un pequeño detalle, a saber, que en un grupo localmente compacto *no compacto*, dotado de una media m sobre él, se tiene siempre que $m(\chi_V) = 0$, siendo χ_V la función característica de un abierto relativamente compacto en el grupo ([HR]). Pero ese detalle parece vital, de modo que quizá sea más sencillo probar que $\text{Ind}(\mathcal{E}_\pi) = \infty$ en general, en este contexto.

En cualquier caso, si $\text{Ind}(\mathcal{E}_\pi)$ fuera finito para grupos promediables entonces se podría aplicar automáticamente una serie de interesantes resultados. Por ejemplo tendríamos que la órbita $O(\pi)$ es un espacio de cubrimiento. Si $\text{Ind}(\mathcal{E}_\pi)$ no fuera finito en general entonces habría que indagar el mismo tipo de cuestiones en otras direcciones más elaboradas (véase para ambas posibilidades [ALRS], [AS 1,2], por ejemplo).

Álgebras de Banach duales. Se han definido en la sección 4. La propiedad que sustancia estas álgebras aparece utilizada de manera significativa en [CG2] y [CG1], y probablemente ya debía subyacer en diversos aspectos. Su definición explícita se debe a V. Runde, quien ha desarrollado un trabajo notable en esta dirección ([Ru 1,3,4,5,6]). La clase de álgebras duales incluye como subclase más importante la de las álgebras de von Neumann y, como éstas, requieren de los morfismos implicados en sus problemas naturales que sean continuos para las topologías débiles*. Tienen sentido, por separado, los conceptos de álgebra dual Connes-promediable y de diagonal virtual normal (análogos a los mencionados en §1). Toda álgebra dual con diagonal virtual normal es promediable de Connes, pero no a la inversa [Ru5]. (Un caso importante, aparte del de álgebras de von Neumann, para el que las dos nociones coinciden es el del álgebra de medidas $M(G)$ de un grupo localmente compacto G [Ru 3,4].) Si un álgebra dual posee diagonal virtual normal entonces las órbitas de sus representaciones y *-representaciones débilmente* continuas son espacios homogéneos, etc., con estructura reductiva. Esto se demuestra en [CG1] usando la notación Effros para una diagonal virtual. La pregunta que queda en el aire es fácil de adivinar.

CUESTIÓN 5.1: Demostrar que, para un álgebra de Banach dual que sea Connes-promediable, sus órbitas de representaciones débilmente* continuas poseen estructura reductiva. Si esto es así, estudiar si se verifica el recíproco, o sea, si la existencia de estructura reductiva implica promediabilidad de Connes.

Proyecciones completamente acotadas. En [BP] se establece un procedimiento general para construir aplicaciones *completamente acotadas* (c. a., en abreviatura) idempotentes (o sea, proyecciones) sobre *espacios de operadores*, sujetos a la acción de un semigrupo promediable formado a su vez por aplicaciones completamente acotadas. Las proyecciones

obtenidas tienen como rango o espacio imagen el conjunto de puntos fijos para la acción del semigrupo, de manera que a priori se puede imaginar que este tipo de resultados guarda alguna relación con lo tratado aquí. De hecho el “leitmotiv” de [BP] consiste en explorar las consecuencias del uso de técnicas de operaciones de promedio en el contexto de los operadores *c. a.*, y en ciertas direcciones no exploradas anteriormente. En este sentido, hay cierta relación con [CG1].

Más aún, el principal teorema de [BP] permite adquirir una visión unificada de diversas estructuras en teoría de operadores aparentemente no conectadas entre sí (sistemas dinámicos, operadores de Toeplitz, espacios homogéneos de grupos de Lie). Así, se tiene el corolario 3.6 de [BP], en el que aparece latente una estructura reductiva (definida por una forma de conexión *c. a.*) asociada a operadores de Toeplitz, que tal vez mereciera la pena analizar en detalle. Otro ejemplo es el corolario 3.10 de la misma referencia, en el que se prueba que las órbitas de representaciones de grupos promediables, *no necesariamente* localmente compactos, son variedades de Banach.

Hay otros varios resultados en [BP] (Teorema 3.3, Teorema 3.5, ...) que merecen atención desde el enfoque contemplado en esta reseña. El hecho común a todos ellos, incluidos los corolarios citados, es que las proyecciones resultantes, así como acciones de grupos en algunos casos, son *c. a.*, por lo que es natural preguntarse si se puede establecer geometrías reductivas en espacios homogéneos en el ambiente general, pero al mismo tiempo exclusivo, en que todos los morfismos implicados sean completamente acotados. Si este planteamiento funcionara al menos en principio, podría servir de aliciente para abordar los problemas de reciprocidad o, mejor, de caracterización (a la manera como problemas clásicos se han resuelto haciendo una incursión en el mundo completamente acotado, véase [P]). A modo de ejemplo algo impreciso, supóngase que las órbitas de representaciones *c. a.* de un álgebra de Banach \mathfrak{A} en todo espacio de Hilbert \mathcal{H} poseen estructura reductiva con forma de conexión *c. a.* (y si hace falta, incluso π -invariante). La cuestión en este punto es si esa propiedad obliga al álgebra \mathfrak{A} a ser promediable.

A estas alturas el lector que conozca aunque sólo sea de referencia la teoría de “operator spaces” ya echará en falta la pregunta obvia:

CUESTIÓN 5.2: Sea A un álgebra de Banach *operatorial* promediable. Estudiar si (las órbitas de) sus espacios de representaciones *c. a.* son espacios homogéneos con estructura *c. a.* reductiva, y si es así estudiar si esa propiedad obliga al álgebra operatorial A a ser promediable.

(He traducido “operator Banach algebra” ([Ru2]) por “álgebra de Banach operatorial” porque en español la expresión “álgebra de Banach de operadores” puede dar lugar a confusión, por identificación con “álgebra de operadores”.)

Las nociones de álgebra de Banach operatorial y álgebra de Banach operatorial promediable pueden consultarse en [Ru2]. No lo he comprobado, pero de acuerdo con [Ru2,

Teorema 7.3.4], es muy probable que la respuesta a la primera parte de la cuestión 5.2 sea afirmativa. En el caso en que \mathfrak{A} sea un álgebra C^* se tiene que \mathfrak{A} es promediable operatorial si y sólo si es promediable (o nuclear), véase [Ru2, Teorema 7.5.1], luego todo es afirmativo en la cuestión 5.2.

Modelizaciones geométricas de representaciones GNS. El llamado método de órbitas descansa en la idea de que el estudio de representaciones infinito-dimensionales de un grupo de Lie puede basarse en el análisis de una representación en dimensión finita particularmente sencilla de entender, la conocida como representación co-adjunta del grupo. Dicho en términos más cualitativos, se trata de acceder a la comprensión de objetos complicados ligados a la teoría de representaciones (o las representaciones mismas) mediante objetos geométricos “sencillos”, las órbitas de la representación co-adjunta. Éstas poseen de modo natural una estructura simpléctica. Muy somera y esquemáticamente, el método en cuestión funciona como sigue.

Tengamos de partida un grupo de Lie G con álgebra de Lie \mathfrak{g} , y consideremos la acción de G sobre sí mismo mediante automorfismos internos, $(u, g) \mapsto ugu^{-1}$, $G \times G \rightarrow G$. La diferencial de la aplicación $g \mapsto ugu^{-1}$, $G \rightarrow G$ en la identidad de G se denota como $Ad(u) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, y da lugar a lo que se llama *acción adjunta* $Ad : u \mapsto Ad(u)$, $G \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$, si $u \in G$. Por dualidad, tenemos entonces la *acción co-adjunta* de G sobre el dual \mathfrak{g}^* (real o complejo, ahora no es materia de discusión) de \mathfrak{g} dada por $K : u \mapsto K(u) = Ad(u^{-1})^*$, $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, donde $\langle K(u)\xi, X \rangle = \langle \xi, Ad(u^{-1})X \rangle$, para $u \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Sea una órbita Ω de \mathfrak{g}^* en la acción anterior. Entonces existe sobre Ω una 2-forma diferencial ω *simpléctica*, es decir, no degenerada, G -invariante, y *cerrada*, que viene dada (en notación al uso) como $\omega : F \mapsto \omega_F(K_*(X)F, K_*(Y)F) := \langle F, [X, Y] \rangle$, para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$, $F \in \Omega$. Fijemos F en Ω y tomemos \mathfrak{h} una sub-álgebra de Lie de \mathfrak{g} , de dimensión maximal, tal que $F([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$. Sea H subgrupo de Lie de G con álgebra de Lie \mathfrak{h} . Se puede definir una representación unidimensional irreducible ρ de H mediante la fórmula $\rho(\exp X) := e^{2\pi i \langle F, X \rangle}$, $X \in \mathfrak{h}$. En principio esta definición es local y su extensión a todo H depende en profundidad de propiedades geométricas de la forma simpléctica; a saber, que la órbita Ω sea “integral” (no necesitamos la definición), o equivalentemente, que ω sea la forma de curvatura de una conexión hermítica en cierto fibrado de línea (unidimensional) sobre Ω . Una vez tal ocurre y tenemos la representación ρ definida sobre todo H , se obtiene una representación π (que debería ser unitaria e irreducible) de G como la *inducida* por ρ , $\pi := Ind_H^G(\rho)$ en notación habitual.

Hay sustancialmente dos modos de inducir representaciones de subgrupos a grupos, según sea la modelización del espacio de Hilbert de la representación π . En una de estas interpretaciones nos encontramos una intensa tonalidad geométrica, pues se puede decir con precisión que el espacio de Hilbert de la representación π es el espacio de secciones

de un cierto fibrado vectorial con base el espacio homogéneo G/H .

La pretensión del método de órbitas es que pueda establecerse por la vía anterior, o variantes más complicadas, una correspondencia (incluso topológica) entre órbitas co-adjuntas y clases de equivalencia de representaciones unitarias e irreducibles, para amplias e importantes clases de grupos de Lie. Esa correspondencia debería también traducir los aspectos (más o menos intrincados) de la teoría de representaciones en propiedades de la geometría simpléctica de las órbitas, y viceversa. (Tal plan de acción viene a reflejar el planteamiento matemático de los procedimientos de cuantización geométrica de la Física.) Pero, si bien el método funciona satisfactoriamente para unas cuantas clases notables de grupos, no es ése exactamente el caso respecto a otras clases o ejemplos no menos interesantes. Para todo lo anterior puede consultarse [Ki1] y [Ki2], así como [F] para la teoría de representaciones inducidas.

Para grupos de Banach-Lie en dimensión infinita es posible también un acercamiento al estudio de representaciones que rememore las líneas maestras del método orbital, pero, naturalmente, no se dispone de una maquinaria tan ajustada o refinada como la del caso finito-dimensional [Ki2]. Hay entonces diversas formas de entrarle al asunto, según el contexto.

Vamos a considerar el siguiente teatro de operaciones. Sea A un álgebra C^* con unidad y B una sub-álgebra C^* de A de forma que existe una esperanza incondicional $\mathcal{E} : A \rightarrow B$ y un estado φ de A tales que $\varphi \circ \mathcal{E} = \varphi$. Démonos cuenta de que de momento esta situación recuerda mucho a la contemplada antes: el álgebra A puede verse como el álgebra de Lie del grupo $G(A)$; B , asimismo, como el álgebra de Lie de $G(B)$, y φ como el funcional de A^* que correspondería al F de \mathfrak{g}^* anterior. Esta interpretación se refuerza si asumimos además que el estado φ es una traza sobre B ; es decir, $\varphi(bb' - b'b) = 0$ para cada $b, b' \in B$. Pero, más todavía, resulta que si suponemos que A es un álgebra de von Neumann \mathcal{M} y que φ no sólo está en \mathcal{M}^* , sino que de hecho pertenece al predual \mathcal{M}_* , entonces la órbita co-adjunta unitaria

$$O(\varphi) := \{\varphi(u^{-1} \cdot u) : u \in U(\mathcal{M})\}$$

posee estructura simpléctica o, con más precisión, débilmente simpléctica (véase [BR2], y para más detalle [BR1], [B]).

Podríamos intentar seguir los pasos del proceso de inducción señalado líneas arriba para obtener una representación de A inducida por la aplicación $\exp(X) \mapsto e^{2\pi i \langle \varphi, X \rangle}$, $X \in B$, pero eso no está claro, y por otra parte, disponemos en teoría de operadores de un ingenio mucho más directo (aunque menos potente) para construir representaciones de A a partir de φ : el teorema de Gelfand-Naimark o Segal, el teorema GNS; recordemos brevemente en qué consiste.

Primero se toma la forma sesquilineal $(a_1, a_2) \mapsto \varphi(a_2^* a_1)$, $A \times A \rightarrow \mathbb{C}$, se factoriza A

por el espacio nulo de esa forma, y se considera la complección correspondiente. Así se obtiene un espacio de Hilbert \mathcal{H}_A , y se define la representación $\rho_A : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ como la extensión (automática) del operador de multiplicación $a' \mapsto aa'$ en A .

En este punto ya no podemos hablar de un método de órbitas propiamente, nos hemos separado bastante. Tenemos la representación directamente dada en A , sin pasar por B de hecho, y no hay más geometría aparentemente que la inherente al conjunto de estados, si es que viniera al caso tratar con ella. Pero nuestra ρ es una representación unitaria de A , y existe, ya desde algún tiempo, un vivo interés en analizar las representaciones unitarias de grupos unitarios (y no sólo éstos) de álgebras C^* , o von Neumann, en todas sus posibilidades. Las analogías iniciales del caso C^* -algebraico con el de grupos de Lie, comentadas antes, son tan palmarias que sugieren buscar un mayor paralelismo, en particular mirando hacia características geométricas de la representación. Este paso se da en [BR2]:

Del mismo modo que con el álgebra A podemos obtener el espacio de Hilbert \mathcal{H}_B , y representación $\rho_B : B \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, a partir de B y φ , aplicando el método GNS. Por ser $\mathcal{E} : A \rightarrow B$ esperanza condicional, cumple que $0 \leq \mathcal{E}(a)^*\mathcal{E}(a) \leq \mathcal{E}(a^*a)$ para todo $a \in A$, y por tanto puede extenderse a una proyección $P_\varphi : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B$. Entonces se tiene $P_\varphi \circ \rho_A(b) = \rho_B(b) \circ P_\varphi$ para todo $b \in B$.

Restringimos ahora las representaciones ρ_A y ρ_B a los respectivos grupos de elementos unitarios de A y B . Tenemos entonces un fibrado principal $U(A) \rightarrow U(A)/U(B)$, y el fibrado vectorial asociado $\Pi_\varphi : [(u, f)] \mapsto u \cdot U(B)$, $U(A) \times_{U(B)} \mathcal{H}_B \rightarrow U(A)/U(B)$, en donde $[(u, f)]$ es la clase de $(u, f) \in U(A) \times \mathcal{H}_B$ respecto a la relación de equivalencia $(u_1, f_1) \sim (u_2, f_2)$: existe $v \in U(B)$ tal que $u_1 = u_2v$ y $f_1 = \rho_B(v^{-1})f_2$. Este último fibrado es hermítico continuo, con núcleo reproductivo K_φ de sencilla expresión,

$$K_\varphi(u_1U(B), u_2U(B))[(u_2, f)] = [(u_1, P_\varphi(\rho_A(u_1^{-1}u_2)f))]$$

siendo $u_1, u_2 \in U(A)$ y $f \in \mathcal{H}_B$.

Pues bien, la representación ρ_A puede modelizarse geoméricamente mediante la transformación del espacio \mathcal{H}_A en un espacio de secciones del fibrado Π_φ . Sea $\Gamma(U(A)/U(B))$ el espacio de secciones continuas de ese fibrado, y sea ι_φ el *operador de modelización* $\iota_\varphi : \mathcal{H}_A \rightarrow \Gamma(U(A)/U(B))$ dado, en clara relación con el núcleo K_φ , por $\iota_\varphi(h)(u \cdot U(B)) := [(u, P_\varphi(\rho_A(u^{-1})h))]$ para cada $h \in \mathcal{H}_A$ y $u \in U(A)$. Se tiene que de hecho $\iota_\varphi(h)(\mathcal{H}_A)$ consiste de secciones analítico-reales.

Sea α la acción natural de $U(A)$ sobre el espacio $\Gamma(U(A)/U(B))$.

Teorema 5.3. ([BR2]) *El operador ι_φ es inyectivo e intercambia la representación ρ_A (restringida a $U(A)$) con la representación α ; es decir, $\iota_\varphi \circ \rho_A(v) = \alpha(v) \circ \iota_\varphi$:*

$$\iota_\varphi(\rho_A(v)h)(u \cdot U(B)) = v \iota_\varphi(h)(v^{-1}u \cdot U(B))$$

para cada $u, v \in U(A)$, $h \in \mathcal{H}_A$.

Este teorema suministra una interesante modelización geométrica (en espacios de secciones) de representaciones GNS sobre grupos de unitarios en álgebras de operadores. La llave de paso para su obtención la ha proporcionado un adecuado núcleo reproductivo asociado a un fibrado vectorial. Tiene importancia estudiar cuándo las secciones de la modelización son holomorfas.

Supóngase entonces que A es un álgebra de von Neumann \mathcal{M} con un estado τ normal, fiel, y que sea traza. Sea $a \in \mathcal{M}$, de espectro finito, tal que $0 \leq a$, $\tau(a) = 1$. Definamos $\varphi(a') := \tau(aa')$ si $a' \in \mathcal{M}$. Sea $\mathcal{M}_\varphi := \{c \in \mathcal{M} : \varphi(ca') = \varphi(a'c), (a' \in \mathcal{M})\}$. Notemos que el cociente $U(\mathcal{M})/U(\mathcal{M}_\varphi)$ y la órbita co-adjunta unitaria $O(\varphi)$ coinciden difeomórficamente.

Teorema 5.4. ([BR2]) *El fibrado vectorial $U(\mathcal{M}) \times_{U(\mathcal{M}_\varphi)} \mathcal{H}_{\mathcal{M}_\varphi} \rightarrow O(\varphi)$ es holomorfo, con núcleo reproductivo holomorfo, y la imagen $\iota_\varphi(\mathcal{H}_{\mathcal{M}})$ del operador de modelización está formada en este caso por secciones holomorfas.*

Parece bastante claro que hay una relación estrecha (al menos entre aspectos formales) de los teoremas 5.3 y 5.4, por un lado, y los resultados comentados en secciones precedentes. Desde luego, tenemos un primer resultado inmediato en este sentido, bajo las siguientes hipótesis.

Sea \mathfrak{A} un álgebra C^* nuclear o von Neumann inyectiva, y sea \mathcal{B} una C^* -álgebra dual, esto es, un álgebra de von Neumann. Sea π una representación en $Rep(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ (que suponemos débilmente* continua, si \mathfrak{A} es de von Neumann e inyectiva). Tomemos $A := \mathcal{B}$, $B := \pi(\mathfrak{A})'$, y $\mathcal{E} := \mathcal{E}_\pi : A \rightarrow B$ obtenida mediante diagonal virtual, como en §4. Sea ϕ un estado cualquiera de B , y tomemos $\varphi := \phi \circ \mathcal{E}$; obviamente, $\varphi \circ \mathcal{E} = \varphi$. Por aplicación del teorema 5.3, resulta que la representación GNS, sobre los unitarios de $B = \pi(\mathfrak{A})'$, construida a partir de φ puede ser modelizada actuando en espacios de secciones. Tales secciones lo son de un tipo de fibrado vectorial, asociado al fibrado principal $\tau_\pi : G(B) \rightarrow O(\pi)$ con forma de conexión $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\pi$, de los que se presentan de manera natural en la teoría de conexiones ([KN]). (El corolario también es cierto si se sustituye \mathfrak{A} por un grupo promediable.)

La reflexión que precede sugiere una *cuestión general* evidente, la de investigar cómo se relacionan la geometría diferencial de conexiones y la teoría de representación geométrica de grupos de álgebras de operadores. Puesto que la forma de conexión \mathcal{E} actúa de $A = T_e G(A)$ en $B = T_e G(B)$, y no sólo de $T_e U(A)$ en $T_e U(B)$ (nótese que $T_e U(A) = \{a \in A : a = -a^*\}$), parece lógico incorporar a la teoría en que se inserta el teorema 5.3 los grupos de inversibles $G(A)$ y $G(B)$ *totales*, y no limitarse a los grupos de unitarios. En este contexto, sería oportuno conseguir modelizaciones sobre secciones *holomorfas* en general, así como estudiar su relación con complexificaciones de órbitas de unitarios. Esto implica una serie de tareas colaterales no triviales, como por ejemplo dar con una noción

adecuada de núcleo reproductivo, y otras cuestiones. Hay en marcha un proyecto o plan general de trabajo en la dirección indicada, por parte del Dr. D. Beltita, del Instituto de Matemáticas “Simion Stoilow” en Bucarest, y yo mismo. Se han obtenido ya algunos resultados de interés, parte de los cuales serán recogidos en una prepublicación de próxima aparición [BG].

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el M.C.YT./DGI-FEDER, España, en el seno del Proyecto MTM2004-03036, y por la D.G. de Aragón, España, en el Proyecto E-64.

Referencias

- [ACS1] E. Andruchow, G. Corach y D. Stojanoff, A geometric characterization of nuclearity and injectivity, *J. Funct. Anal.* **133** (1995), 474-494.
- [ACS2] E. Andruchow, G. Corach y D. Stojanoff, The homogeneous space of representations of a nuclear C^* -algebra, *Contemp. Math.* **189** (1995), 37-53.
- [ACS3] E. Andruchow, G. Corach y D. Stojanoff, A Banach-Lie structure for the automorphism group of a von Neumann algebra, *prepublicación*.
- [ALRS] E. Andruchow, Larotonda, L. Recht y D. Stojanoff, Infinite-dimensional homogeneous reductive spaces and finite index conditional expectations, *Illinois J. Math.* **41** (1997), 54-76.
- [ARS] E. Andruchow, L. Recht y D. Stojanoff, The space of spectral measures is a homogeneous reductive space, *Int. Eq. Oper. Th.* **16** (1993), 1-14.
- [AS1] M. Argerami y D. Stojanoff, The Weyl group and the normalizer of a conditional expectation, *Int. Eq. Oper. Th.* **34** (1999), 165-186.
- [AS2] M. Argerami y D. Stojanoff, Orbits of conditional expectations, *Illinois J. Math.* **45** (2001), 243-263.
- [B] D. Beltita, *Smooth Homogeneous Structures in Operator Theory*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. 137, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.
- [BG] D. Beltita y J. E. Galé, trabajo en preparación.
- [BP] D. Beltita y B. Prunaru, Amenability, completely bounded projections, dynamical systems and smooth orbits, por aparecer en *Int. Eq. Oper. Th.*
- [BR1] D. Beltita y T. S. Ratiu, Symplectic leaves in real Banach Lie-Poisson spaces, *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), 753-779.

- [BR2] D. Beltita y T. S. Ratiu, Geometric representation theory for unitary groups of operator algebras, por aparecer en *Adv. in Math.*, accesible *on line*.
- [BuP] J. W. Bunce y W. L. Paschke, Quasi-expectations and amenable von Neumann algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **71** (1978), 232-236.
- [CG1] G. Corach y J. E. Galé, Averaging with virtual diagonals and geometry of representations, in: *Proc. 13th Intern. Conf. of Banach Algebras 1997*, E. Albrecht y M. Mathieu (eds.), Walter de Gruyter, Berlin 1998, pp. 87-100.
- [CG2] G. Corach y J. E. Galé, On amenability and geometry of spaces of bounded representations, *J. London Math. Soc.* **59** (1999), 311-329.
- [CPR] G. Corach, H. Porta y L. Recht, Differential geometry of systems of projections in Banach algebras, *Pacific J. Math.* **143** (1990), 209-228.
- [E] [E] E. Effros, Amenability and Virtual Diagonals for von Neumann algebras, *J. Funct. Anal.* **78** (1988), 137-153.
- [Es] J. Esterle, Quasimultipliers, representations of H^∞ , and the closed ideal problem for commutative Banach algebras, in: *Radical Banach Algebras and Automatic Continuity, Proc. Long Beach 1981* J. M. Bachar et al., (eds.), Lecture Notes in Math., 975, Springer-Verlag, Berlin 1983, pp. 66-162.
- [F] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Adv. Math., CRC Press, Boca Raton 1995.
- [G] F. P. Greenleaf, *Invariant Means on Topological Groups and Their Applications*, Van Nostrand Math. Studies 16, Van Nostrand, New York, 1969.
- [GM] W. M. Goldman y A. R. Magid (ed.), Geometry of group representations, *Contemporary Math.* **74**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [HR] E. Hewitt y K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [J1] B. E. Johnson, Cohomology in Banach algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.* **127** (1972).
- [J2] B. E. Johnson, *Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivations*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **120** (1996), 455-474.
- [K] A. Kepert, *Amenability in group algebras and Banach algebras*, Math. Scand. **74** (1994), 275-292.
- [Ki1] A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Ki2] A. A. Kirillov, *Lectures on the Orbit Method*, Graduate Studies in Math., 64, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

- [KN] M. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* I, II, Interscience, New York, 1969.
- [LP] A. T. M Lau and A. T. L. Paterson, Inner amenable locally compact groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **325** (1991), 155-169.
- [M] M. Martin, Projective representations of compact groups in C^* -algebras, in: *Linear Operators in Function Spaces (Timisoara 1998)*, Oper. Theory Adv. Appl., 43, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 237-253.
- [MS] M. Martin y N. Salinas The canonical complex structure of flag manifolds in a C^* -algebra, in: *Nonselfadjoint Operator Algebras, Operator Theory, and Related Topics*, Bercovici, H. et al. (eds.), Oper. Theory Adv. Appl., 104, Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 173-187.
- [MR] L. Mata -Lorenzo, L. Recht, Infinite dimensional homogeneous reductive spaces, *Acta Cient. Venezolana* **43** (1992), 76-90.
- [N] K. H. Neeb, *Holomorphy and Convexity in Lie Theory*, de Gruyter Exp. in Math. 28, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
- [P] G. Pisier, *Similarity problems and Completely Bounded maps*, Lecture Notes in Math. 1618, Springer-Verlag 1996.
- [PR] H. Porta y L. Recht, Spaces of projections in a Banach algebra, *Acta Cient. Venezolana* **38** (1987), 408-426.
- [R] I. Raeburn, The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space, *J. Funct. Anal.* **25** (1977), 366-390.
- [Ru1] V. Runde, Amenability for dual Banach algebras, *Studia Math.* **148** (2001), 47-66.
- [Ru2] V. Runde, *Lectures on Amenability*, Lecture Notes in Math. 1774, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [Ru3] V. Runde, Connes-amenability and normal, virtual diagonals for measure algebras I, *J. London Math.* **67** (2003), 643-656.
- [Ru4] V. Runde, Connes-amenability and normal, virtual diagonals for measure algebras II, *Bull. Austral Math. Soc.* **68** (2003), 325-328.
- [Ru5] V. Runde, Dual Banach algebras: Connes-amenability, normal, virtual diagonals, and injectivity of the predual bimodule, *Math. Scand.* **95** (2004), 124-144.
- [Ru6] V. Runde, A Connes-amenable, dual Banach algebra need not have a normal, virtual diagonal, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 391-402.

- [S] A. I. Shtern, A characterization of amenability in the class of connected locally compact groups, *Russian Math. Surv.* **49** No.2 (1994), 174-175.
- [St] R. Stokke, Approximate Diagonals and Følner Conditions for Amenable Group and Semi-group Algebras, *Studia Math.* **164** (2004), 139-159.
- [SS] A. M. Sinclair and R. R. Smith, *Hochschild cohomology of von Neumann algebras*, London Math. Soc., Lecture Note Series 203, Cambridge University Press, 1995.
- [U] H. Upmeyer, *Symmetric Banach Manifolds and Jordan C^* - algebras*, North- Holland Math. Studies 104, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1985.

Cerámicas eutécticas solidificadas direccionalmente para fotónica y electrocerámica

Rosa I. Merino

Departamento de Física de la Materia Condensada

Instituto de Ciencia de Materiales de Aragón

Universidad de Zaragoza – CSIC

Pedro Cerbuna 12, E-50009 Zaragoza

Premio a la Investigación de la Academia 2006. Sección de Físicas.

Resumen

Se describe la microestructura de eutécticos de óxidos y fluoruros que se obtienen mediante diversos procedimientos de solidificación direccional. El artículo revisa las propiedades ópticas y la conductividad de estos materiales haciendo hincapié sobre todo en la influencia que su microestructura tiene en dichas propiedades. La investigación en este campo ha sido realizada fundamentalmente durante los últimos 20 años..

Abstract

We describe the microstructure of oxide and fluoride eutectics produced by diverse methods of directional solidification. The article reviews the optical properties and ionic conductivity of the materials with special emphasis on the influence of microstructure on those properties. The research in this field has been performed mainly along the last 20 years.

1 Introducción

Los materiales eutécticos producidos a partir de un fundido constituyen materiales compuestos de una o más fases, con intercaras estables y libres de impurezas, y con microestructuras finas cuyo tamaño es controlable mediante el proceso de solidificación.[1]

Como materiales compuestos que son presentan ventajas respecto a los correspondientes materiales monofásicos, sobre todo en cuanto a sus propiedades mecánicas (más resistentes en general a fluencia debido a la alta densidad de intercaras que limitan el movimiento de dislocaciones; mayor tenacidad causada por el exceso de energía necesaria para que las microgrietas atraviesen las intercaras entre distintas fases). Asimismo, la limpieza de las intercaras y la homogeneidad de la microestructura les confieren ventajas frente a los materiales producidos mediante sinterización (intercaras limpias, fuertemente enlazadas y ausencia de defectos en ellas que mejora la resistencia mecánica; y homogeneidad en la dimensión de las fases que mejora estabilidad térmica de la microestructura frente a engrosamiento).[2] Estas ventajas fueron previstas, investigadas y explotadas en sistemas eutécticos metálicos tempranamente, y son la base de numerosos avances en metalurgia.

La investigación en eutécticos de metales permitió determinar cuales son los parámetros físicos y tecnológicos que intervienen en el crecimiento eutéctico, distinguiéndose entre magnitudes intrínsecas de los materiales (entalpías de fusión, anisotropía cristalina, proporción volumétrica de fases que componen la mezcla eutéctica, coeficientes de difusión en el fundido) y otras controlables en buena medida por el tecnólogo-investigador (velocidad de solidificación, gradiente térmico, atmósfera, etc.). Al estudio de los eutécticos han contribuido recientemente de forma esencial los avances en las técnicas de caracterización estructural y microestructural (microscopia electrónica de transmisión con alta resolución para investigar las intercaras responsables de buena parte de las propiedades del material, difracción de electrones retrodispersados en SEM y difracción de rayos X para la construcción de diagramas de polos para conocer las direcciones de crecimiento y epitaxia, difracción de rayos X y neutrones de alta resolución para determinar tensiones residuales, etc.). [3, 4, 5] Asimismo, los potentes ordenadores disponibles hoy en día han hecho posibles métodos de cálculo que tienen en cuenta muchos de los factores relevantes en el proceso de solidificación y pueden predecir la microestructura resultante de la solidificación de sistemas multicomponentes. [6]

Los eutécticos cerámicos han sido menos investigados que los metálicos [7, 8, 9], en parte a causa de su dificultad de preparación (altos puntos de fusión). En las últimas décadas ha habido un impulso fuerte provocado por la búsqueda de materiales estructurales para aplicaciones de alta temperatura [10, 11, 12, 13, 14] Esta fuerza motriz ha desarrollado mucho la investigación básica de una serie de eutécticos cerámicos ($ZrO_2-Al_2O_3$, ZrO_2-NiO , Al_2O_3-

YAG) y ha propiciado que otros investigadores los estudien debido a sus propiedades funcionales. [15, 16]

Aunque ya Galasso en 1967 [17, 18] avanzó que los eutécticos podrían aprovecharse por sus propiedades funcionales, la comunidad científica no se ha ocupado de ello hasta más recientemente, en gran medida por la dificultad de controlar la solidificación de eutécticos cerámicos, las altas temperaturas de fusión requeridas o la limitada selección en composiciones disponibles. Sin embargo se ha invertido mucho esfuerzo en la investigación de técnicas variadas para la preparación de otros tipos de materiales compuestos que permitan producir combinaciones de microestructuras y composiciones que produzcan sinergias en las propiedades de los materiales para conseguir nuevas aplicaciones. Ejemplos de materiales compuestos de este tipo son los cristales fotónicos (estructuras dieléctricas periódicas en el rango micro y submicrométrico que confinan la luz y alteran las características luminiscentes de entidades allí alojadas), o las cerámicas nano- y micro-estructuradas (conductividades o propiedades mecánicas controladas por las intercaras más que por la suma de propiedades de sus componentes). Las cerámicas eutécticas solidificadas a partir del fundido constituyen un tipo particular de materiales compuestos que se consiguen mediante procedimientos de solidificación in-situ, tienen microestructuras que van desde dimensiones submicrométricas a decenas de micras y combinan materiales de propiedades diversas (ferroeléctricos, semiconductores, ferromagnéticos, etc.). Además, el tipo de microestructuras que se obtienen puede permitir, mediante procedimientos adecuados (disolución-infiltración o reacción), reemplazar uno de los componentes por otro más idóneo para la aplicación deseada (filtros, catalizadores de alta temperatura, etc.)

La solidificación direccional es una herramienta idónea para producir cristales de muy alta calidad, libres de defectos e impurezas, a partir de un fundido ya que permite cierto control sobre las velocidades de solidificación, dirección de solidificación, gradientes térmicos, uso de semillas etc. Es por tanto una herramienta muy valiosa para conseguir eutécticos con la microestructura deseada. Además genera piezas conformadas en geometrías diversas (usando matrices apropiadas) y de dimensiones variadas.

Este artículo recoge los avances recientes realizados en la investigación de eutécticos de óxidos y fluoruros enfocados a aplicaciones funcionales, en particular en fotónica (luminiscencia, guiado de luz, etc.) y como conductores iónicos.

2 Microestructura eutéctica y procedimientos de solidificación

En la figura 1 se representa como ejemplo el diagrama de fases de equilibrio del sistema $ZrO_2-Al_2O_3$ [19], que muestra un punto eutéctico en la composición 37 mol % ZrO_2 -63 mol % Al_2O_3 , con temperatura eutéctica de $T_E = 1860$ °C. La solidificación del eutéctico consiste en enfriar el mismo por debajo de la T_E , generando un subenfriamiento suficiente que permita superar la barrera establecida por la entalpía de fusión, y transformar el líquido homogéneo en una mezcla de sólidos (ZrO_2 y Al_2O_3). La microestructura resultante de este proceso suele ser una dispersión homogénea de ambas fases, con una escala que va desde unas décimas de micras a varias decenas de micras. Obviaremos las primeras etapas de la nucleación, y nos fijaremos solamente en el estado estacionario, invariante en el tiempo a medida que progresa la solidificación. En las condiciones habituales de solidificación se establecerá un equilibrio químico en la interfase sólido-líquido (s-l), de acuerdo con el diagrama de fases (líneas de solidus y liquidus), que implica un gradiente de composición en el líquido delante de la interfase, tanto transversal como longitudinal (cada fase sólida habrá segregado hacia el líquido el otro componente). A distancias largas (comparadas con el interespaciado entre las fases sólidas), el líquido es de nuevo homogéneo. Esta somera descripción permite entender que el interespaciado entre las fases va a depender de la velocidad de solidificación, esto es, del tiempo de que disponen las especies iónicas para difundir en el líquido y separarse. (Ver por ejemplo [20] y las referencias allí citadas). En concreto, la relación que se observa con frecuencia experimentalmente y que se justifica teóricamente bajo ciertas condiciones es $\lambda^2 V = K$. Siendo λ el interespaciado eutéctico y V la velocidad de solidificación, y K una constante que depende del diagrama de fases de equilibrio y de las propiedades termofísicas del fundido y de los sólidos, y no del gradiente de solidificación para subenfriamientos pequeños. La situación descrita corresponde a un frente de solidificación plano, que ocurre cuando la intercara sólido-líquido es estable frente a perturbaciones morfológicas en la misma y por lo tanto ninguna protuberancia o deformación de esa superficie tiene velocidad de crecimiento mayor que la superficie misma. Esta condición puede establecerse si el crecimiento es unidireccional, es decir, dirigido por un gradiente de temperatura (G) impuesto externamente mediante el método de solidificación de tal modo que el sentido de crecimiento (avance del frente de solidificación) es opuesto al gradiente.

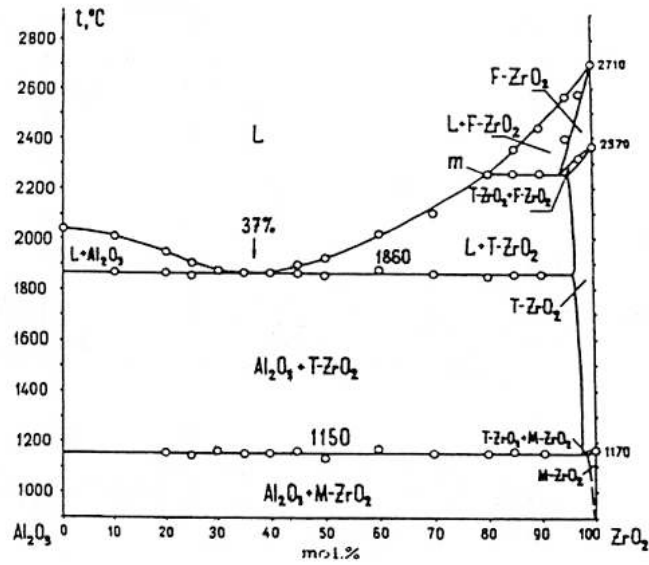


Figura 1. Diagrama de fases del sistema $ZrO_2-Al_2O_3$, mostrando un punto eutéctico en 1860 °C. (Tomado de 19)

Cuando el frente plano deja de ser estable, condición generada por ejemplo por la presencia de impurezas que se segregan hacia el fundido hasta el punto de producir subenfriamiento constitucional ($G/V < \Delta T_0/D$)ⁱ, puede tener lugar la formación de células o también de dendritas eutécticas, igual que sucede en la solidificación de un cristal monofásico en presencia de soluto. Tanto con frente plano como formando colonias (crecimiento poco anisotrópico) o dendritas eutécticas (crecimiento anisótropo a lo largo de direcciones cristalográficas preferidas), tendremos crecimiento eutéctico.

En el caso de eutécticos es además posible que la desestabilización de la intercara s-l (sólido-líquido) se deba a protuberancia de una sola fase (fase primaria), promovida por subenfriamiento de regiones del líquido por debajo de la línea de solidus de esa fase y originando dendritas primarias rodeadas de eutéctico. Esta circunstancia se da fundamentalmente en sistemas eutécticos con diagramas de fase muy asimétricos (en los que la región de crecimiento eutéctico acoplado no está centrada en la composición eutéctica del diagrama de fases para cualquier subenfriamiento) o en la solidificación fuera de la composición eutéctica.

ⁱ G es el gradiente térmico en la interfase sólido-líquido, V la velocidad de avance del frente, D el coeficiente de difusión del soluto en el fundido y ΔT_0 es la diferencia de temperatura entre las curvas de solidus y liquidus.

Otro aspecto relevante para la microestructura eutéctica es la anisotropía cristalográfica de crecimiento, que puede cuantificarse mediante el uso de la entropía de fusión (S_f). En la literatura de eutécticos metálicos se encuentra que si S_f es baja para ambos componentes de la mezcla ($\Delta S_f/R < 2$), el eutéctico será regular (las fases se acoplan bien al crecimiento acoplado simultáneo manteniendo equidistancia y acomodándose de forma suave a variaciones en las condiciones de crecimiento). Si es alta para al menos una de las fases o las dos ($\Delta S_f/R > 2$), el crecimiento será irregular, con fases muy facetadas que requieren ruptura brusca de la continuidad del crecimiento para acomodarse a perturbaciones en las condiciones de crecimiento (V). Las fases facetadas mostrarán terminaciones, ramificaciones, etc.

Y por último, la microestructura en el caso de crecimiento acoplado, regular, con frente plano, será aquella que minimice la energía interfacial en el sólido resultante. Esto nos lleva a crecimiento en fibras, con disposición regular hexagonal, cuando la fracción volumétrica de una fase es menor a 0.28, o laminar si es mayor. La anisotropía en la intercara entre los sólidos puede modificar esta tendencia general, o también facetar las fibras.

Llorca y Orera [2] recogen en su reciente revisión los fundamentos de la solidificación direccional de eutécticos de forma escueta y sencilla, así como los métodos de solidificación direccional utilizados por diversos investigadores en el crecimiento de óxidos eutécticos. La solidificación direccional requiere procedimientos efectivos para controlar el gradiente de solidificación. Los métodos más habituales utilizados en la fabricación de los eutécticos que se relacionan en el presente trabajo son:

- Fusión por zonas asistida por láser (LFZ), también llamada LHPG (laser heated pedestal growth por otros autores), que consiste en la generación por calentamiento con láser de una pequeña zona fundida, sostenida por tensión superficial entre una barra policristalina compactada que alimenta el fundido y el cristal que va creciendo al desplazar la zona fundida a través de la región de enfoque del láser. Este procedimiento se ha empleado para los eutécticos de óxidos. Permite solidificar materiales de alto punto de fusión, y permite gradientes térmicos altos en la interfase sólido-líquido. Otros métodos también utilizados en la solidificación de óxidos, como Edge Defined Film Fed Growth (EFG) o Micro pulling down, utilizan crisol y extraen el fundido a través de pequeños orificios por capilaridad para conseguir frentes planos y abruptos con mínima convección.

- Crecimiento en horno de resistencias mediante el método Bridgmann, en el que el fundido (mezcla de fluoruros o de fluoruros con óxidos en este caso) dentro de un crisol se desplaza fuera de la zona caliente del horno a una velocidad predeterminada.
- En nuestro laboratorio hemos desarrollado también una variación del crecimiento por zonas descrito más arriba, similar a la refusión láser de superficies, pero a velocidades más lentas. [21] No se trata de solidificación rápida sino del crecimiento en equilibrio en la superficie de un soporte cerámico de una capa resolidificada. La diferencia con LFZ es que el frente no es macroscópicamente plano, sino que toma la forma de la gota

En este trabajo vamos a considerar también un hecho importante, que pocas veces se tiene en cuenta en el estudio de eutécticos solidificados direccionalmente. Se trata de la posibilidad de que exista segregación macroscópica. Esta segregación suele estar asociada a corrientes de convección en el fundido. En los estudios convencionales de eutécticos no suele considerarse porque se procura que esas corrientes sean mínimas, utilizando pequeños tamaños de fundido y controlando el aporte de calor desde el exterior (bajos gradientes térmicos). La segregación macroscópica ha sido estudiada ampliamente en la fundición de aleaciones ya que la presencia de defectos en el producto final es un factor muy importante en el fallo catastrófico de las piezas. [22] Al final de esta revisión veremos ejemplos de segregación macroscópica en los eutécticos de los óxidos estudiados, y apuntaremos sus posibles causas y algunas consecuencias desde el punto de vista de las aplicaciones.

3 Microestructura de sistemas eutécticos de óxidos y fluoruros

En la tabla I se recogen composiciones (en vol%) y microestructuras de algunos eutécticos óxidos y fluoruros estudiados en la literatura y por nosotros.

Tal y como se espera se observa que en general para fracciones volumétricas pequeñas, la disposición de las fases es en forma de fibras, y en forma de láminas en caso contrario. Las excepciones entre los compuestos de la tabla las encontramos en:

- MgO-MgSZ, que está muy cerca de la frontera (28 % MgO), y que dependiendo de las condiciones de solidificación se dispone en fibras ordenadas de MgO o en láminas. Mediante LFZ, nosotros hemos encontrado ordenamiento en fibras preferentemente.

- $ZrO_2-Al_2O_3$, que contiene 33 % de YSZ en volumen, y cuya microestructura ocurre en forma de láminas degeneradas o también formando colonias con una disposición hexagonal de fibras de YSZ en la matriz de Al_2O_3 . Es un crecimiento dominado por la fuerte anisotropía de Al_2O_3 , y que más abajo estudiamos con más detalle.
- YSZ- $NiAl_2O_4$, con un 39 vol % teórico de YSZ y que sin embargo aparece con una disposición hexagonal ordenada de fibras de YSZ dentro de colonias con matriz de $NiAl_2O_4$ [23]. En este caso la fuerte tendencia hacia fibras de YSZ y que no se justifica por fracción volumétrica, ha de venir como en el caso anterior de esa fuerte anisotropía de crecimiento que hace que la espinela $NiAl_2O_4$ crezca facetada.

Tabla I: Algunos eutécticos de fluoruros y óxidos.

Mezcla	T_f (°C)	Vol (%)	Microestruct.	λ (μ m) a V (mm/h)	Referencias *
LiF-MgF ₂	720	49.4 MgF ₂			PED1471
LiF-CaF ₂	769	41.6 CaF ₂	L	5 μ m a 3mm/h	PED7491, [59]
LiF-SrF ₂	761	41.7 SrF ₂			PED3443
LiF-LaF ₃	780	40.2 LaF ₃	L	4 μ m (10 mm/h)	PED7494, [24]
MgF ₂ -LaF ₃	1125	48.7 LaF ₃			PED7566, 5795
CaSZ-CaZrO ₃	2250	41 CaSZ	L	5.4 μ m (50mm/h)	[8, 25]
MgO-MgSZ	2170	28 MgO	F ó L	1.9 μ m (50mm/h)	[8]
CaF ₂ -MgO	1350	10 MgO	F	9 μ m (3 mm/h)	[26]
ZrO ₂ -Al ₂ O ₃	1860	33 YSZ	I, C o D (F)	2 μ m (10 mm/h)	[19, 27]
Al ₂ O ₃ -YAG	1825	45 Al ₂ O ₃	I	2.8 μ m (50mm/h)	[28]
YSZ-NiO	1840	44 YSZ	L	1.6 μ m (50 mm/h)	[29]
YSZ- $NiAl_2O_4$	1995	39 YSZ	C a D (F)	0.85 (30 mm/h)	[23]

T_f = Temperatura de fusión; vol(%)= fracción volumétrica de la fase minoritaria; λ (μ m): interespaciado. V: velocidad de crecimiento (mm/h). YAG: $Y_3Al_5O_{12}$. YSZ: circonita cúbica estabilizada con itria. CaSZ: circonita cúbica estabilizada con calcia. Microestructura (L: láminas, F: fibras, I: interpenetrada (frente plano), C: colonias, D: dendritas. * PED: Phase equilibrium diagrams, CD-ROM database. The American Ceramic Society, Westerville, Ohio, 1988.

Las microestructuras que hemos denominado interpenetradas corresponden a crecimientos con frente plano (puesto que no se observa presencia de células o dendritas), pero sin ordenamiento periódico de las fases dentro de los granos eutécticos. Éstas toman la forma de láminas degeneradas, de espesor irregular y conforman una red tridimensional de ambas fases. Es una microestructura isótropa en el plano perpendicular al crecimiento y elongada en la dirección longitudinal. También en estos casos puede definirse un interespaciado promedio [28, 30] que satisface la relación $\lambda^2V = \text{cte}$. Se trata de microestructuras no recogidas en el sencillo marco descrito en el apartado anterior, que se refería a ordenamientos periódicos únicamente, pero son frecuentes [31] y presentan excelente resistencia mecánica tanto el monolito como el eutéctico vaciado de una de las fases. Cuando esta microestructura interpenetrada presenta intercaras facetadas entre los dos sólidos componentes (por ejemplo para Al_2O_3 -YAG, donde ambos compuestos son fuertemente anisótropos) se encuentra descrita en la literatura como “Chinese Script”. La escala de la microestructura eutéctica, indicada por el interespaciado entre las fases, está en el rango de 0.4 a 10 μm para las velocidades de solidificación usuales en crecimiento cristalino.

En la tabla II se recogen propiedades físicas de las fases aisladas que forman los eutécticos de la tabla I. En particular hemos recogido los datos de la entropía de fusión [32]. En los fluoruros (salvo MgF_2 y LaF_3) y los óxidos cúbicos más sencillos están por debajo de 3 o muy cercanos a 3, incluso en muchos fluoruros cercanos a 2, frontera que en el caso de metales permite predecir si la microestructura eutéctica será de tipo regular o irregular. S_f/R crece si baja la simetría del cristal. Comparar MgF_2 , que tiene simetría tetragonal con estructura de rutilo con CaF_2 , que tiene simetría cúbica (fluorita). Al_2O_3 en particular presenta un crecimiento en forma de monocristal altamente anisótropo, y es la causa de las variadas microestructuras que presenta también los eutécticos que la contienen, con tendencia a la formación de dendritas facetadas en rangos intermedios de velocidad de crecimiento para Al_2O_3 -YSZ (ver más abajo). Kaiden et al [31] atribuyen también a esta anisotropía la microestructura tipo Chinese Script del eutéctico YAG- Al_2O_3 . Los valores relativamente bajos de entropía de fusión en YSZ (que dado el desorden presente ya en el cristal será menor que para ZrO_2), NiO, MgO son compatibles con la formación de microestructuras regulares para sus eutécticos.

Tabla II. Propiedades físicas de algunos óxidos y fluoruros.

Compuesto	T _f (K)	Entropía de fusión (ΔS _f /R)	Ventana transparente (μm)	Índice de refracción (a 500 nm)	de Coef. de expansión (10 ⁻⁶ K)	Densidad (g/cm ³)
LiF	1121	2.91	0.12-6.6	1.3903	34.4	2.635
MgF ₂	1536	4.60	0.13-7.7	1.3785 (o) 1.3892 (e)	10.8	3.17
CaF ₂	1691	2.11	0.135-9.4	1.4348	18.9	3.180
SrF ₂	1750	2.04	0.13-11.0	1.4389	18.1	4.24
BaF ₂	1641	1.71	0.14-12.2	1.4767	18.4	4.89
LaF ₃	1766	3.42	0.15-10	1.6056 1.5983	14.2	5.941
MgO	3105	3.02	0.35-6.8	1.740	10.6	3.583
NiO	2228	2.94		2.18	16.5	6.69
ZrO ₂	2950	3.55			7.5	5.6
YSZ	3110	se espera < 3.55	0.38-6.0	2.166	10.2	5.94
CaZrO ₃	2823			2.15	10.3	5.37
Al ₂ O ₃	2327	5.74	0.19-5.0 (o) -5.2 (e)	1.770 (o) 1.176 (e)	8.2	3.987
YAG (Y ₃ Al ₅ O ₁₂)	2210	28.2	0.21-5.2	1.840	8.9	4.554

Para los eutécticos de fluoruros incluidos en la tabla la fracción volumétrica de fases permite predecir ordenamiento laminar, y la baja anisotropía de crecimiento de ambos componentes (S_f/R baja) nos lleva a esperar microestructuras regulares. En la figura 2 se ve la microestructura del eutéctico LaF₃-LiF crecido por el método Bridgmann (micrografías ópticas de secciones transversal y longitudinal). Se observa claramente el ordenamiento en láminas esperado, en este caso con perturbaciones en la anchura de las mismas (claramente visibles en el corte transversal), probablemente generadas por variaciones locales en las condiciones de solidificación pero que no causan una ruptura de la microestructura a irregular. Se puede apreciar el pequeño tamaño de los granos eutécticos en este caso, así como la anisotropía de la microestructura, con láminas más largas en la dirección de crecimiento. El método de crecimiento usado permite fabricar cristales de dimensiones de varios cm³, y por lo tanto es apropiado para multitud de dispositivos. Es evidente sin embargo que se requiere un crecimiento más controlado para conseguir que las láminas presenten menos perturbaciones en su anchura y que los granos eutécticos tengan mayores dimensiones. Los datos de entropía de fusión y ausencia de facetas en el crecimiento permiten pensar que esto sea posible con

control sobre fases que se evaporan y probablemente reformulación de la composición eutéctica sobre los datos encontrados en la literatura, que fueron usados para preparar esta muestra.

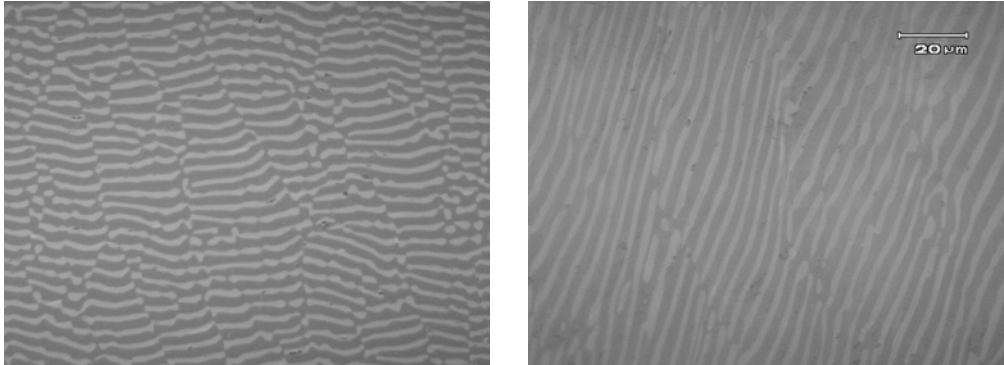


Figura 2. Microfotografías ópticas del cortes transversales (izquierda) y longitudinal (derecha) del eutéctico $\text{LaF}_3\text{-LiF}$ solidificado. La fase clara es LaF_3 y la oscura LiF . Ambas fotografías están tomadas con los mismos aumentos.

Según los datos de las tablas I y II, esperamos microestructuras similares para los eutécticos LiF-CaF_2 y LiF-SrF_2 . Trnovcová et al. han encontrado microestructuras similares para LiF-LaF_3 . [33] Si se sustituye al LaF_3 por otros óxidos de tierras raras, a medida que crece el radio iónico de la tierra rara, la fracción volumétrica del LiF en el eutéctico disminuye y la microestructura se torna fibrosa en LiF-GdF_3 . En toda la serie LiF-RF_3 ($\text{R} = \text{La, Nd, Sm, Gd}$) las intercaras son no facetadas [33].

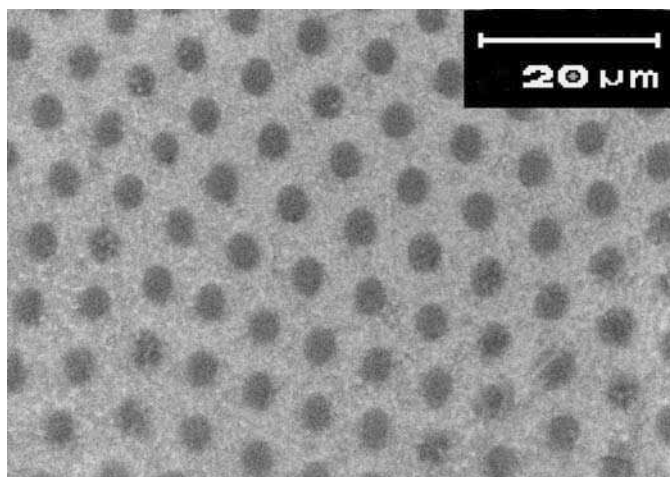


Figura 3. Microfotografía óptica de sección transversal en el eutéctico NaCl (matriz, claro) – LiF (fibras, oscuro).

Esperamos ordenamiento laminar con tendencia a formar facetas y hacerse más irregular para LiF-MgF_2 debido a la sensiblemente mayor entropía de fusión de éste último. De hecho, Orera et al. han observado fibras de MgF_2 facetadas en el eutéctico $\text{MgF}_2\text{-NaCl}$, pero que en el caso de LiF-NaCl son no facetadas. En la figura 3 se presenta un detalle del eutéctico LiF-NaCl , donde la matriz es NaCl y las fibras, al 25 % en volumen, LiF [84], las fases son no facetadas y el crecimiento es acoplado, con ordenamiento hexagonal de fibras en la dirección de crecimiento.

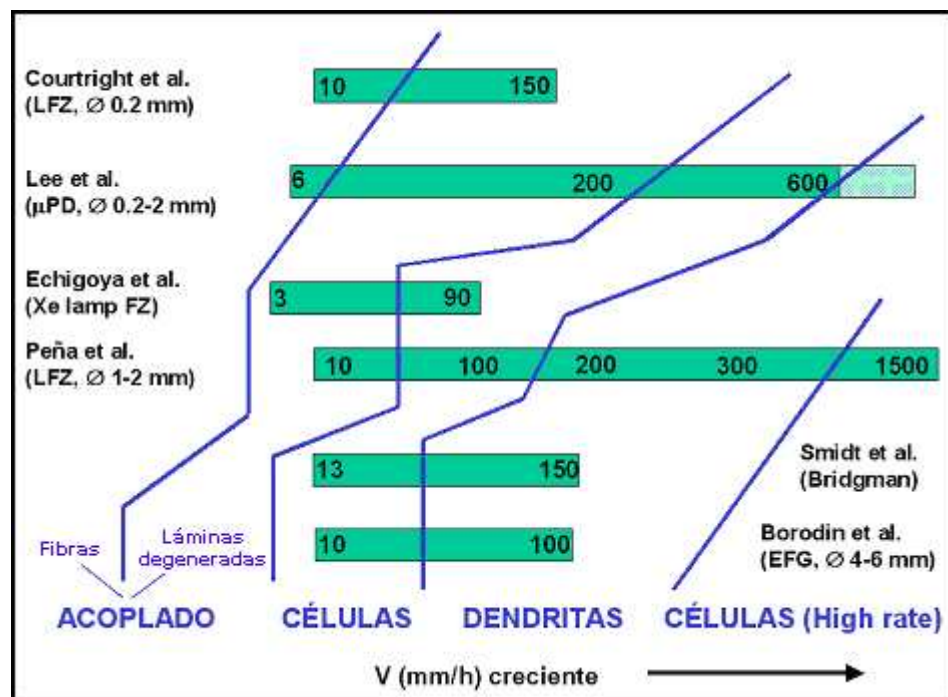


Figura 4. Microestructuras observadas en el eutéctico $\text{ZrO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3$. Las velocidades de transición entre regímenes de crecimiento corresponden al crecimiento sin dopantes. Courtright [34], Lee [35], Echigoya [36], Peña [37], Smidt [38], Borodin [14].

El eutéctico $\text{ZrO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3$ ha sido estudiado por muchos autores debido a sus aplicaciones estructurales. Este sistema forma fácilmente células y dendritas a las velocidades usuales de solidificación. Lo que ocurre es que debido a la tendencia del zafiro a crecer en direcciones cristalográficas preferentes con crecimiento dendrítico se sobrepasa el límite de subenfriamiento que provoca la transición tal como se indicó en el apartado 2. En la figura 4 se recogen los rangos de velocidad de solidificación utilizados con distintos métodos de solidificación direccional (los números dentro de las barras indican las velocidades mínima y

máxima ensayadas por los autores), el tamaño de las fibras o barras solidificadas (en las columnas laterales, y que crece de arriba a abajo) y la microestructura observada (separados los diferentes campos por las líneas transversales).

A velocidades lentas de solidificación el crecimiento es acoplado con microestructura de fibras ordenadas o más frecuentemente en forma de láminas degeneradas (microestructura interpenetrante). A velocidades mayores pasamos a un régimen de crecimiento celular, que se convierte en dendrítico (colonias facetadas que crecen en la dirección c del zafiro) al crecer la velocidad de solidificación. A las velocidades más altas el crecimiento es de nuevo celular, más isótropo, con ordenamiento laminar dentro de las células. Las velocidades críticas a las que el sistema transita de un régimen de crecimiento a otro son mayores cuanto menor es el tamaño de la muestra. Llorca y Orera, analizaron con más detalle esta correlación cualitativa redibujando los datos contenidos en la gráfica en un diagrama velocidad (V) -radio de la muestra (R) por medio de la relación entre el gradiente de solidificación y el radio máximo del cristal que puede solidificarse sin agrietamiento.ⁱⁱ De este modo se puede ver que la velocidad crítica sigue una relación aproximada $R^{3/2}V = \text{cte}$ para la transición de un régimen de crecimiento a otro.

Fuera de la composición eutéctica se produce crecimiento dendrítico de fase primaria incluso a velocidades moderadas, siendo posible un crecimiento eutéctico acoplado sólo a velocidades muy lentas (o subenfriamiento pequeño). Los resultados experimentales para el sistema $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_3(3\%\text{molY}_2\text{O}_3)$ se recogen en la figura 5, que resume los experimentos de I. de Francisco.[39] Las líneas continuas, delimitan el área dentro del cual puede obtenerse una microestructura de tipo eutéctico mediante este procedimiento de solidificación.

ⁱⁱ Como se ha expuesto más arriba, el rango de crecimiento con frente plano (velocidades de solidificación) depende del gradiente de solidificación, de tal modo que a mayor gradiente, mayor será la velocidad máxima que hace transitar al eutéctico de frente plano a celular o a dendrítico. Pero la integridad mecánica de las piezas solidificadas impone un límite a este gradiente. En geometría cilíndrica, gradientes axiales implican gradientes transversales en el sólido que pueden ocasionar grietas. Así, a menor diámetro, mayor será el gradiente de solidificación que puede imponerse, y más amplio el rango de crecimiento con frente plano.

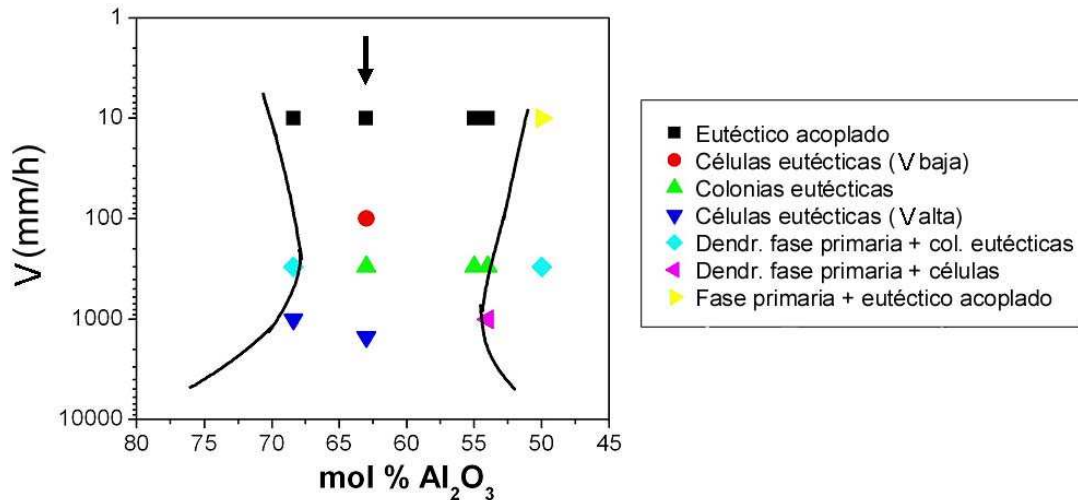


Figura 5. Microestructuras observadas preferentemente en el sistema $ZrO_2-Al_2O_3$ con composición eutéctica y fuera del eutéctico a distintas velocidades (LFZ). La flecha indica la composición eutéctica.

Merece la pena señalar que la característica de mínima temperatura de fusión para una mezcla que caracteriza a los eutécticos los convierten en candidatos para la producción de vidrios con composiciones no usuales, si se utilizan velocidades muy rápidas (subenfriamientos altos, tal que el fundido se haga muy viscoso) que permitan congelar la estructura vítrea. Así, es posible formar vidrios de excelentes propiedades ópticas de la mezcla eutéctica W-TCP [40], composición que se encuentra muy en el límite de la zona considerada vitrificable dado el bajo contenido de formador. Otras composiciones todavía menos usuales para vidrios se han obtenido a partir de las mezclas eutécticas $HfO_2-Al_2O_3-GdAlO_3$ [41] o $Al_2O_3-RE_2O_3$ [42] con velocidades de enfriamiento inferiores a 1000 K/s, que presentan ventajas para la conformación de vidrios o de nanocerámicas por sinterización.

4 Conductividad eléctrica en eutécticos.

Los cristales eutécticos son buenos materiales desde el punto de vista de sus propiedades mecánicas, lo que es siempre ventajoso a la hora de fabricar dispositivos, además de fundir a temperaturas menores que sus monocristales constituyentes facilitando su manufactura. Ya sólo debido a esto merece un esfuerzo el estudio de cristales eutécticos que contengan conductores iónicos de interés práctico, caso de la circonita dopada (utilizada en sensores de oxígeno o pilas de combustible) o de muchos fluoruros (para sensores de gases por ejemplo).

En materiales granulares (monofásicos o dopados heterogéneamente, como se denomina a aquellos en los que se introducen partículas de una segunda fase aislante) las fronteras entre granos contienen más volumen libre que el interior de grano, para poder acomodar las respectivas redes cristalinas. Son lugares donde se acumulan las mayores deformaciones (tensiones), se forman dislocaciones y con frecuencia existe segregación preferente de impurezas y de defectos. La concentración de defectos en las fronteras de grano varía frente al equilibrio termodinámico del interior de grano, dotando a las primeras de carga que genera una capa de carga espacial. Todos estos procesos convierten a las fronteras en lugares donde la concentración o la movilidad iónica pueden ser muy superiores al interior de grano, lo que causa un incremento en conductividad que puede ser de varios órdenes de magnitud. [43] Asimismo se ha comprobado que en estructuras de multicapas nanométricas la conductividad iónica se ve incrementada por solapamiento de la capa de carga espacial. [44]

Los compuestos eutécticos contienen una alta concentración de fronteras entre fases, que tienen la particularidad de ser intercaras enlazadas a escala atómica, con planos cristalográficos seleccionados y libres de impurezas y contaminantes. Puesto que su densidad puede controlarse con el crecimiento, sería posible controlar el efecto que éstas tengan sobre la conductividad del dispositivo.

4.1 Conductividad iónica de mezclas eutécticas solidificadas direccionalmente.

Las mezclas eutécticas solidificadas direccionalmente presentarán en general conductividad anisótropa como consecuencia de la anisotropía en su microestructura. Hartman et al [45, 46] a finales de los 1980 estudiaron la conductividad en eutécticos de NaF-LiF y otras mezclas de haluros alcalinos y NaF-CaF₂ y NaF-MgF₂ (cristales iónicos con cierta movilidad iónica). Encontraron que las intercaras no contribuyen a la conductividad, aunque si observaron anisotropía en la conductividad tanto en microestructuras laminares como fibrosas. La conductividad es un orden de magnitud mayor en la dirección de crecimiento que en la perpendicular, aunque se trata de conductividades bajas (3.3×10^{-9} S/cm en NaF-LiF y 3.2×10^{-6} S/cm en NaF-CaF₂ a 500K y paralelo a la dirección de solidificación), y que no depende del tamaño de las láminas o fibras.

Un poco después Trnovcová et al [47, 33, 48, 49] exploraron la conductividad iónica de numerosos eutécticos de fluoruros solidificados donde el conductor iónico es mejor conductor (PbF₂ o un fluoruro de tierra rara) y el aislante LiF o NaF. En fluoruros de alcalinotérreos, fluoruros de tierras raras o PbF₂ la conductividad iónica se debe a transporte de iones F⁻. Muy

pocos de estos eutécticos presentan conductividades mayores que la de la fase conductora aislada ni hay correlación entre la densidad de intercaras y la conductividad. Una excepción son los eutécticos de LiF-LiRF₄ (R= tierra rara), en las que sólo en el rango de temperaturas en que la conductividad es baja ($<10^{-6}$ S/cm), la conductividad de la mezcla es superior a la del compuesto LiRF₄, pero no se han investigado a fondo las causas. En mezclas LiF-RF₃, bien consecuencia de que las intercaras coherentes no forman trayectorias de difusión rápidas para iones (como señala Tnovcova [47]), o de que la intersolubilidad genere en la fase conductora una concentración de defectos extrínsecos suficientemente alta, la presencia de intercaras aislante-conductor no incrementa la conductividad. Valores típicos de conductividad a 500K de estos eutécticos son 4.1×10^{-3} S/cm en NaF-PbF₂, 1.3×10^{-4} S/cm en LiF-PrF₃ y de hasta 1.3×10^{-6} S/cm en LiF-LiBaF₃.

Las conductividades más altas se encuentran cuando ambas fases que forman el eutéctico son conductores iónicos. Así, Sorokin en 2004 [50] ha encontrado que la conductividad de eutéctico 21mol% SrF₂ – 79mol% LaF₃ alcanza 6.7×10^{-3} S/cm a 500 K paralela a la dirección de solidificación. Esto se debe a que LaF₃ se disuelve en parte en SrF₂ y SrF₂ en LaF₃, poseyendo ambos compuestos valores altos de conductividad iónica con altas concentraciones de defectos extrínsecos por dopado homogéneo.

Chandra et al [51] estudiaron desde el punto de vista de la conducción iónica de mezclas del sistema AgCl:KCl, que forma un eutéctico de láminas interpenetradas con KCl como la fase minoritaria. En la mezcla policristalina el efecto sobre la conductividad de dopado heterogéneo es poco importante. Sin embargo el material que resulta de la disolución de KCl en un eutéctico solidificado es un conductor iónico poroso útil como sensor (alta superficie específica) o como contenedor de otros electrolitos líquidos mejor conductores.

Entre los óxidos conductores iónicos cuyos eutécticos se han solidificado se encuentra la circona. La YSZ (circona estabilizada con itria) es un conductor iónico de extensa aplicación en pilas de combustible de alta temperatura. En este óxido se ha estudiado extensamente tanto el dopado heterogéneo (con partículas aislantes de Al₂O₃ por ejemplo (ver por ejemplo el artículo de revisión reciente de Guo y Waser 52)), como la fabricación de cerámicas sinterizadas de grano nanométrico [53] desde el punto de vista de la contribución de las fronteras de grano a la conductividad. Ninguno de los dos métodos permite incrementar sensiblemente la conductividad de piezas macroscópicas de circona. El dopado heterogéneo o el refinamiento de los granos consigue limpiar las fronteras de grano de fases vítreas e

impurezas, incrementando así algo la conductividad total. La disminución del tamaño de grano parece incrementar la conductividad sólo en capas delgadas [54].

Las medidas de conductividad publicadas en los eutécticos solidificados direccionalmente que tienen circona como fase conductora presentan conductividades menores que las del componente circona. En la figura 6 se representa la conductividad de los eutécticos CaSZ-CaZrO_3 , MgSZ-MgO y $\text{ZrO}_2(3\text{mol}\% \text{Y}_2\text{O}_3)\text{-Al}_2\text{O}_3$, todos ellos mezclas de conductor de O^- y aislante. El primero presenta microestructura regular de láminas alternadas de CaSZ (circona estabilizada con calcia, 41 % vol) y CaZrO_3 , y su conductividad es fuertemente anisótropa (prácticamente un factor 10 mayor en paralelo a la dirección de crecimiento que perpendicular a él), que es lo que se espera para el apilamiento alternado de láminas de estos dos compuestos. [55] El segundo está formado por matriz de circona estabilizada con Mg atravesada de fibras de MgO (con 28 % en volumen). La conductividad aquí es prácticamente isotrópica, correspondiéndose con una matriz conductora y unas fibras aislantes que no contribuyen a la conductividad. [56]

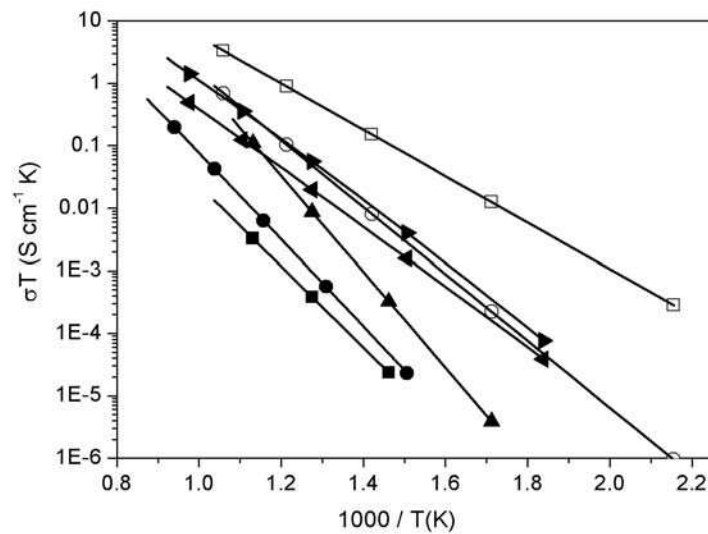


Figura 6. Conductividad eléctrica de varios eutécticos en que una de las fases es circona. Con símbolos llenos la circona es la fase conductora: De menor a mayor conductividad: $\text{CaZrO}_3\text{-CaSZ}$ en direcciones perpendicular y paralela a la dirección de solidificación; MgO-MgSZ ; eutéctico $\text{ZrO}_2(3\text{mol}\% \text{Y}_2\text{O}_3)\text{-Al}_2\text{O}_3$; y $\text{ZrO}_2(3\text{mol}\% \text{Y}_2\text{O}_3)\text{-Al}_2\text{O}_3$ con exceso de circona. Con símbolos huecos YSZ-NiO en aire (cuadrados) y en N_2 (círculos).

Para la conductividad en el sistema $\text{ZrO}_2(3\text{mol}\% \text{Y}_2\text{O}_3)\text{-Al}_2\text{O}_3$ se esperaría una dependencia acusada con la microestructura, que varía mucho con las condiciones de

crecimiento y en él la fase conductora es la minoritaria (33 vol%). Los datos publicados por Cicka et al. y Trnovcová et al. [57, 49] presentan variabilidad entre muestras, mientras que datos de García et al. [58] y Merino et al [59] sugieren que se obtienen diferencias de conductividad para muestras con distinto contenido de Y_2O_3 (que dopa la circonita) y no con diferentes microestructuras. Incluso para muestras envejecidas a alta temperatura donde la microestructura ha engrosado sensiblemente y ha perdido buena parte del alineamiento, no se observa variación en la conductividad iónica en la dirección de crecimiento. Esto lo hemos confirmado en experimentos recientes fabricando muestras crecidas desde velocidades muy bajas (10 mm/h), con microestructura regular interpenetrante e interespaciado de unas 2 μm , hasta velocidades de 1000 mm/h, constituyendo celdas laminares con muy poco contenido de fases entre colonias e interespaciado entre láminas de unos 200 nm. La conductividad es prácticamente invariable, mostrando tan sólo un pequeño incremento de un 23% en las muestras crecidas a 1000 mm/h frente a las solidificadas a 10 mm/h. Este incremento que puede atribuirse al factor de forma más alargado de la fase conductora (circonita). Que la variación en conductividad sea tan pequeña con una variación en un factor 10 de la superficie de intercaras por unidad de volumen demuestra que no está dominada por conductividad interfacial y que el grado de conectividad que presenta el material compuesto en todas sus microestructuras es similar.

El espesor de la fase circonita no es suficientemente pequeño como para que la región de carga espacial pueda tener un papel relevante en la conductividad. Dada la alta concentración de vacantes presentes en la circonita se requerirían interespaciados menores que unos 10 nm, mucho más pequeños de los 200 nm que se han obtenido mediante solidificación direccional. Los cálculos de Guo sugieren además que las intercaras YSZ- Al_2O_3 serán deficientes en portadores respecto al cristal masivo de YSZ; con lo que el efecto además habría de disminuir la conductividad con la disminución del espesor de la fase circonita.

En todos los eutécticos estudiados con circonita, para conseguir conductividades mayores es necesario incrementar el contenido de fase conductora en el material. Solidificando fuera de la composición eutéctica se puede conseguir incrementar la conductividad casi un factor 3 (ver la figura 6). Para ello ha sido necesario controlar la formación de fase primaria en el proceso de crecimiento, determinando condiciones de solidificación por LFZ para barras de 2 mm de diámetro a 10 mm/h y fuerte contrarrotación entre el cristal y el precursor y 45 % vol de circonita. I. de Francisco [60] ha mostrado además que estos compuestos presentan dureza y tenacidad similares a las de sus homólogos eutécticos a temperatura ambiente. Sin embargo,

aunque las condiciones de crecimiento se han seleccionado de modo que no exista gradiente composicional en la dirección longitudinal, es inevitable cierto grado de segregación en la dirección transversal. Es esta distribución radial de fases la que explica los detalles de la evolución con la composición y la temperatura de la conductividad, que de nuevo es compatible con una conductividad determinada por la proporción volumétrica de fase conductora (circona) y por la conductividad de la misma (contenido de Y).

En este punto podemos extraer una primera conclusión: puesto que la naturaleza y concentración de las interfases en estos sistemas eutécticos en que una de las fases es aislante no es la óptima para mejorar la conductividad; la vía para obtener mejoras sustanciales es la de fabricar eutécticos en cuya composición ambos componentes sean conductores iónicos. Algunos ejemplos se vieron repasando la bibliografía de fluoruros. En sistemas óxidos no existe todavía investigación al respecto, probablemente porque pocos conductores iónicos son a la vez compatibles con YSZ, forman eutécticos y son suficientemente buenos conductores iónicos. Ejemplos serían ZrO_2 - $CaZrO_3$ o ZrO_2 - $SrZrO_3$, que muestran microestructuras laminares [61]. Para hacer conductoras a las perovskitas es necesario introducir dopantes de distinta valencia (3+) en los circonatos, por ejemplo con $In:CaZrO_3$ o $Y:SrZrO_3$. [62] En el eutéctico $CaZrO_3$ - $CaSZ$ incluido en la figura 6 el $CaZrO_3$ era aislante puesto que no estaba dopado más allá de la escasa solubilidad de ZrO_2 durante la solidificación.

Los resultados recogidos en este epígrafe muestran que en los eutécticos YSZ-óxido aislante o eutécticos de fluoruros con una fase aislante la mejora de las prestaciones no viene dada por una mejor conductividad sino por unas propiedades mecánicas mejoradas respecto a la fase conductora monofásica. Los eutécticos YSZ- Al_2O_3 tienen excelente resistencia mecánica hasta altas temperaturas [2], y en las mezclas LiF - RF_3 , las grietas se deflectan en las fronteras entre fases de forma muy eficiente igual que ocurre en CaF_2 - MgO , [26]. Otra ventaja del eutéctico PbF_2 - NaF es parecen ser más estables en aire y tener propiedades más reproducibles que las disoluciones sólidas monofásicas. [47]

4.2 Reacciones red-ox en eutécticos con una fase conductora de oxígeno.

Los materiales bifásicos, cermets o mezcla de conductor iónico-conductor electrónico son muy útiles en ánodos, membranas o catalizadores de reacciones red-ox. En ellos es importante conocer los mecanismos de difusión química (implicados en reacciones red-ox del material bifásico).

En los materiales compuestos en que una de las fases es conductora de oxígeno las reacciones red-ox pueden tener lugar no sólo en la superficie en contacto con la atmósfera oxidante o reductora, sino dentro del material mediado por el transporte de oxígeno a lo largo de la fase conductora. Para que se produzca reducción química además ha de existir transporte de electrones para compensar la carga. Si la microestructura está alineada el transporte será rápido a lo largo de esta dirección. La reducción de un compuesto de estas características será más rápida que la de un material monofásico que no sea buen conductor mixto, y además más homogénea espacialmente, teniendo lugar en el caso ideal en todo el material masivo simultáneamente. En la realidad, el transporte no es tan rápido comparado con la cinética de la reacción de reducción como para que la misma sea homogénea en muestras macroscópicas en los eutécticos estudiados (YSZ-NiO, YSZ-CoO o YSZ-NiAl₂O₄). Tanto la distribución de fases que se observa en muestras mediado el proceso de reducción como la cinética global del proceso muestran que el transporte de oxígeno es el paso limitante para la reducción termoquímica de los eutécticos YSZ-NiO, YSZ-CoO o YSZ-NiAl₂O₄. [63, 64]

Los dos primeros son similares en cuanto a microestructura y comportamiento. La conductividad total de CaSZ-NiO [65] en aire y N₂ (símbolos huecos en la figura 6) viene dada por el transporte de electrones en NiO (semiconductor tipo p), que es mucho mayor que la conductividad de iones oxígeno en la circona a bajas temperaturas. Puesto que se trata de reducción química, ambos portadores deben difundir al mismo ritmo desde el punto de reacción hasta el gas (poro conectado con el exterior de la superficie o superficie exterior), la cinética estará limitada por el proceso más lento, bien sea por conducción iónica de la circona o por la reacción de reducción. Laguna et al. [63, 66.67] han determinado que el proceso lo limita el transporte, observando mediante estudios microestructurales el avance del frente. El Ni metálico resultante nuclea en la intercara NiO-YSZ y la cinética está controlada por difusión de O⁻.

En YSZ-NiAl₂O₄ la reducción de la espinela deja Ni + Al₂O₃. Casas [64] ha estudiado la microestructura resultante de reducciones parciales a distintas temperaturas. Para los tiempos más cortos y T más bajas, se forman nanopartículas de Ni dispersas dentro de la matriz espinela deficiente en Ni. [23] Con tiempos más largos de reducción y temperaturas más altas, las partículas de Ni son ya desde ligeramente submicrométricas cercanas a la circunferencia exterior de la muestra cilíndrica a mayores que la micra en el centro, nucleando cerca de las fronteras YSZ-espinela, pero predominantemente cerca de las fronteras entre colonias. Estas fronteras resultan ser por lo tanto trayectorias rápidas de difusión a lo largo de las cuales la

baja actividad del oxígeno generada en la superficie exterior se extiende hasta el interior de la muestra. Sin datos sobre la conductividad electrónica de NiAl_2O_4 ni estudios precisos sobre cinéticas globales no es posible saber el mecanismo exacto, pero las microestructuras descritas apuntan a que tiene lugar el establecimiento de un gradiente macroscópico suave para el potencial químico del oxígeno desde el exterior de la superficie que se superpone con la presencia de puntos de nucleación cerca de intercaras YSZ- NiAl_2O_4 y gradientes microscópicos debido a la conectividad entre las fases, resultando todo ello en una distribución u otra de partículas metálicas. El control de la dispersión de partículas metálicas en soportes cerámicos es un aspecto clave en el diseño y fabricación de catalizadores para la oxidación de hidrocarburos por ejemplo.

5. Aplicaciones en fotónica de eutécticos solidificados direccionalmente.

Los eutécticos transparentes solidificados direccionalmente forman estructuras dieléctricas periódicas que podrían tener un lugar en aplicaciones como guías de onda planas, mazos de guías planas o fibras, sustratos para guías acanaladas, combinación de luminiscencias dentro de un mismo material bi- o tri-fásico con más o menos difusión de luz (anisotrópica), efectos de cristal fotónico, etc. Son pocas las investigaciones realizadas a este respecto.

5.1 Eutécticos solidificados direccionalmente para guiado de luz

Los materiales eutécticos que nos ocupan están formados por fases transparentes monocristalinas, algunas de ellas con amplias ventanas de transparencia en el IR o UV cercano (como se recoge en la tabla I), e interfases limpias y abruptas. En bastantes de ellos la introducción de iones ópticamente activos es fácil a partir de fusión (tierras raras en LaF_3 , o en fluoruros de alcalino-térreos, en YSZ o en YAG, o iones 3d en Al_2O_3 o YAG por ejemplo), de modo que pueden aprovecharse sus propiedades luminiscentes (fósforos, sensores ópticos, detectores de radiación, etc). La mayor parte de los haluros alcalinos y alcalino-térreos y los óxidos más sencillos presentan además crecimiento eutéctico regular, lo que permite pensar en dispositivos que aprovechen el guiado a lo largo de la fase de mayor índice. Algunos eutécticos de fluoruros y de óxidos ya fueron considerados candidatos por Galasso [17] puesto que presentaban crecimiento regular. Orera et al. [68, 2] identificó una serie de combinaciones que permiten guiado en el visible o IR cercano, determinando además, en base al contraste de índice y la dimensión de las láminas (fibras) de la fase que guía, la frecuencia de corte

(longitud de onda mínima) para guiado monomodo. Esta se sitúa en los 500 nm para las fibras de ZrO_2 en Al_2O_3 que hemos visto más arriba, aunque este sistema, dado su crecimiento irregular (formando colonias de dimensiones muy limitadas), no sería buen candidato para dispositivos de guiado de tamaño grande. Solamente si se consiguiera, basándonos en el perfecto conocimiento que hoy tenemos de su cristalografía, utilizando semillas y creciendo fibras de diámetros pequeños (ausencia de convección), podrían encontrarse fases ordenadas a lo largo de dimensiones del orden del milímetro. La longitud de onda de corte es de aprox. 1.7 μm para el eutéctico laminar $CaSZ-CaZrO_3$, magnitud esta última suficiente para guiado monomodo en la tercera ventana de comunicaciones ópticas, lo que permite su uso potencial en dispositivos de amplificación en este sector. Notar que las dimensiones de las láminas o fibras (tabla I) están en torno o algo mayor que la micra, dimensiones habituales en solidificación de sistemas eutécticos sin necesidad de utilizar velocidades de crecimiento tan altas que perturben el crecimiento acoplado.

Esta capacidad de guiado fomentó una investigación a fondo tanto de la posibilidad de dopar el compuesto con iones luminiscentes (Er^{3+} como representante de las tierras raras o Cr^{3+} , ion 3d), su distribución entre las fases, su influencia en las condiciones de crecimiento estable; como las propiedades luminiscentes del compuesto dopado y las de guiado. Orera y otros [69] demostraron experimentalmente que barritas solidificadas direccionalmente mediante LHPG (o LFZ) muestran guiado eficiente a lo largo de la matriz de $CaSZ$ en 980 nm y 545 nm, longitudes de onda de excitación y luminiscencia por up-conversion respectivamente de Er^{3+} .

La optimización de un sistema así, admitiendo las limitaciones dimensionales, podría requerir un dopaje selectivo, puesto que como se estudia más adelante, el Er^{3+} es admitido como dopante tanto en la fase que guía ($CaSZ$) como en $CaZrO_3$, ocasionando esta última posibles pérdidas del bombeo o de parte de la luminiscencia. Por su similitud química todas las tierras raras se comportarán de forma similar, y por otro lado el Er^{3+} es insustituible en los amplificadores de fibra óptica, de modo que para poder dopar selectivamente debemos buscar sistemas en los que la microestructura sea adecuada y además el dopante se ubique muy mayoritariamente en la fase que guía, que actuaría de amplificador, o bien viceversa, cuando lo que interese sea desacoplar el guiado de la amplificación. Esto puede conseguirse con los sistemas de $LiF-AF_2$, siendo A un alcalino-térreo, o $LiF-LaF_3$, por ejemplo. Es sabido que los iones de tierras raras no se introducen fácilmente en la matriz de LiF , de estructura del $NaCl$ y pequeño parámetro de red (4.017 Å) [70], mientras que sí son admitidos en los fluoruros de

alcalino térreos de catión más grande y muy bien en LaF_3 . Los índices de refracción de CaF_2 , BaF_2 y LaF_3 son mayores que el de LiF , mientras que el de MgF_2 es menor, y SrF_2 muy parecido al LiF . (ver la tabla II) Además, algunos fluoruros de alcalino térreo forman disoluciones sólidas entre sí ($\text{Sr}_{1-x}\text{Ca}_x\text{F}_2$; $\text{Ba}_{1-x}\text{Ca}_x\text{F}_2$), con lo que podremos modular en índice de refracción de esta fase hasta el valor deseado para conseguir mayor o menor contraste de índice, modificar los coeficientes de expansión térmica o bien inhibir la formación de fases birrefringentes como MgF_2 . Estas características abren un abanico grande de posibilidades, cuya limitación más fuerte la constituye las dimensiones de los granos eutécticos, típicamente de dimensiones submilimétricas, y donde la estabilidad del crecimiento ha de ser controlada con precisión.

Entre los sistemas de fibra que muestran guiado bajo observación al microscopio óptico se encuentra el eutéctico MgO-CaF_2 , ver la figura 7. El guiado a lo largo de MgO despolariza la luz incidente, cambiando la polarización a la salida de la luz que atraviesa las fibras de MgO . Se podría conseguir una pantalla de $40.000 \text{ pixels/mm}^2$, capaz de trasladar una imagen en una superficie de la misma a la superficie opuesta sin distorsión cuando las fibras son paralelas (faceplates). [26].

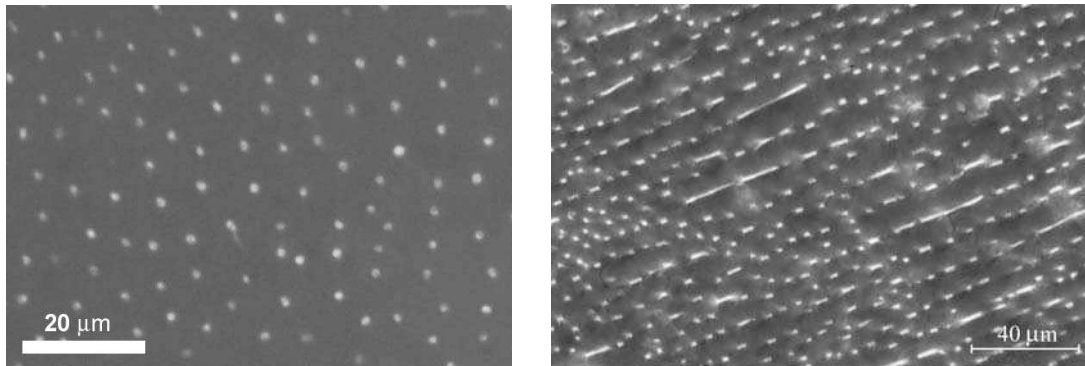


Figura 7: Microfotografías por transmisión de una lámina de $\text{CaF}_2\text{-MgO}$ tomadas entre polarizadores cruzados. Izda.: perpendicular a las fibras de MgO . Se observa como el guiado en las láminas cambia la polarización.

5.2. Eutécticos solidificados direccionalmente como sistemas luminiscentes.

Como sistemas luminiscentes, sus propiedades van más allá de la mera suma de las propiedades de sus componentes. Esto se debe por un lado a la dimensión micrométrica y submicrométrica del interespaciado y/o a su periodicidad, que afecta tanto a la propagación de la luz como a la probabilidad de emisión radiativa, si bien, no se esperan efectos de

confinamiento electrónicos o fonónicos en las dimensiones de las fases habitualmente encontradas. Por otro lado, la distribución de los elementos luminiscentes entre los componentes del cristal eutéctico viene determinada por los respectivos coeficientes de partición relativos durante el crecimiento. En tercer lugar, el crecimiento simultáneo de ambas fases a altas temperaturas puede conllevar algo de disolución de una fase en otra y acumulación de tensiones termoelásticas, factores ambos que modifican las distancias interatómicas en cada componente respecto del cristal aislado de forma homogénea o inhomogénea, y con ello modificación de la luminiscencia. Algunos otros efectos han sido también observados, como transferencia radiativa entre iones de una matriz a otra, o disminución en la difusión de luz por comparación con materiales granulares con la consiguiente mejora en la eficiencia de iluminación [71].

Veamos primero el comportamiento del eutéctico CaSZ-CaZrO₃ dopado con Er₂O₃. Microanálisis por microsonda muestran que añadiendo Er₂O₃ a la mezcla eutéctica (de 0.5 a 2 mol%), el ion Er³⁺ se introduce en ambas matrices, con preferencia por CaSZ, con un factor entre 3.3 y 4 mayor (en at/cm³). [72,73] Como catión sustitucional, en la estructura perovskita de CaZrO₃ se coloca en el sitio de Ca²⁺, con coordinación alta, radio iónico grande, y sin centro de inversión. Por lo tanto muestra probabilidades de absorción altas (transiciones dipolares eléctricas). Dentro de la matriz cúbica de CaSZ, estructura de la fluorita, el sitio disponible es el sitio de catión con coordinación 8, con simetría de inversión, pero dentro de una matriz altamente defectiva, con muchas vacantes de oxígeno y por ello capaz de acomodar por distorsión local muchos dopantes. Además, es conocido que los iones de tierras raras, sobre todo los más pequeños, estabilizan la fase cúbica de la circona formando disolución sólida hasta concentraciones altas de tierra rara [74]. Esto explica la localización preferente del Er³⁺ en la matriz defectiva de CaSZ.

En la figura 8 se muestra la estructura de niveles del Er³⁺ correspondiente a configuración f¹¹ y hasta el nivel ²H_{11/2} (absorción intensa en el verde) para los dos compuestos. Sobre ellos se indican los máximos de absorción a RT, los tiempos de vida radiativos (determinados a partir de la teoría de Judd-Ofelt) y entre paréntesis los medidos experimentalmente para varios niveles. El cociente $\tau_{\text{exp}}/\tau_{\text{rad}} = \eta$, nos da la eficiencia cuántica de la transición, que mide la proporción de desexcitación radiativa tras la población de ese nivel emisor. Puede observarse que las transiciones son más permitidas en CaZrO₃ que en CaSZ (mayores Ω_k y menor τ_R), causadas por la ausencia de simetría de inversión en el sitio de Ca²⁺ en la perovskita ortorrómbica. Además se ha comprobado que el Er³⁺ se coloca sólo

en un tipo de sitio en esta matriz. El espectro de absorción del material eutéctico, medido a lo largo de la dirección de crecimiento para minimizar la difusión de luz, puede cuantificarse con una suma ponderada a la concentración de Er^{3+} dentro de cada matriz, de las absorciones en cada una de ellas. Por el contrario, las luminiscencias no son tan simples. En particular, excitando en el nivel $^2\text{H}_{11/2}$, la luminiscencia en el $1.5 \mu\text{m}$ del nivel $^4\text{I}_{13/2}$ en el eutéctico es

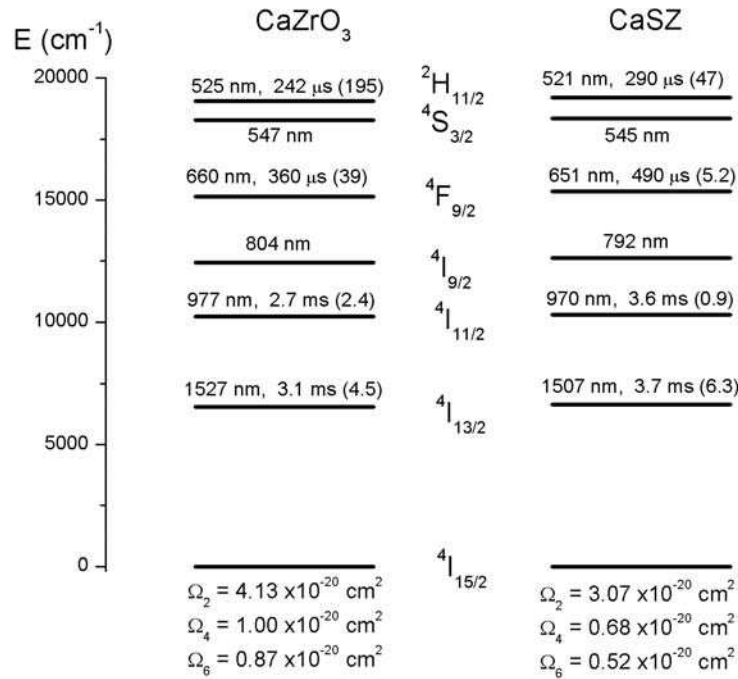


Figura 8. Diagrama de niveles del Er^{3+} correspondiente a configuración f^1 y hasta el nivel $^2\text{H}_{11/2}$. Sobre ellos se indican los máximos de absorción a RT, los tiempos de vida radiativos y entre paréntesis los medidos experimentalmente. Debajo se dan los parámetros de Judd-Ofelt ([72]).

prácticamente coincidente con la luminiscencia de CaSZ, mientras que la luminiscencia en 980 nm ($^4\text{I}_{11/2} - ^4\text{I}_{15/2}$) excitando en el nivel $^4\text{F}_{9/2}$ (rojo), coincide con la de CaZrO₃. La razón se encuentra en las diferentes eficiencias cuánticas que se recogen en el esquema. Para CaSZ todas las transiciones, salvo la luminiscencia en $1.5 \mu\text{m}$, son fundamentalmente no radiativas (NR) (y en este caso además multifonónicas ya que la concentración de dopante seleccionada para este estudio es baja y no hay transferencia de energía entre iones contiguos), de modo que casi cualquier excitación acaba poblando muy eficientemente el nivel $^4\text{I}_{13/2}$, cuya desexcitación en $1.5 \mu\text{m}$ tiene una fuerte componente radiativa. Los niveles del CaZrO₃ entre el $^4\text{F}_{9/2}$ y el $^4\text{I}_{9/2}$ desexcitan NR a éste último que tiene una eficiencia cuántica grande y se

desexcita radiativamente. Las mayores eficiencias cuánticas en CaZrO_3 que en CaSZ son consecuencia de sus mayores probabilidades de transición dipolares eléctricas y de su menor acoplamiento electrón-fonón para la relajación no radiativa [72, 73].

El aspecto más relevante del eutéctico dopado es la posibilidad de sintonizar en la luminiscencia que nos interese (con mayor ensanchamiento inhomogéneo para CaSZ y tiempos de vida más cortos, o con líneas más estrechas y mayores tiempos de vida para CaZrO_3), seleccionando en la excitación dentro del mismo material. Añadido a esto, la mezcla contigua de dos compuestos facilita la transferencia radiativa de energía de una matriz a otra, produciendo absorciones dentro del espectro de luminiscencia de la otra que se aprecian bien en medidas de baja temperatura tanto en espectros de excitación como de luminiscencia, pero que han de estar presentes a cualquier temperatura y por ello afectan a las eficiencias observadas experimentalmente. En este caso se tratará fundamentalmente de transferencia más eficiente desde CaSZ a CaZrO_3 porque el primero tiene sus transiciones a energías ligeramente mayores que el segundo, haciendo posible la reabsorción por solapamiento de la absorción del segundo con luminiscencia del primero, y porque las bandas tienen mayor ensanchamiento inhomogéneo en el primero.

Un caso muy distinto lo constituye el Er^{3+} en $\text{YSZ-Al}_2\text{O}_3$. El Er^{3+} se disuelve solamente en una de las fases, YSZ . Como se explica en la sección 3, el eutéctico $\text{ZrO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3$ tiene microestructura regular interpenetrante con interespaciados en torno a $1\ \mu\text{m}$ en un rango muy estrecho de velocidades de crecimiento, tomando configuraciones en colonias con morfología interna en fibras o láminas, de interespaciados decrecientes respectivamente. Además el contraste de índice es alto, y por ello las muestras dejan de ser translúcidas para ser blancas y prácticamente opacas debido a difusión. En la figura 9 se observan detalles de la microestructura en dos situaciones típicas: formando colonias en fibras o celdas laminares. Se trata de microestructuras ordenadas dentro de las colonias, que unido al mayor contraste de índice, deberán llevar asociada una modificación sustancial de la propagación de luz en el material, que no observamos como anisotropía macroscópicamente dada la pequeña dimensión de las colonias que constituyen el material. Y sin embargo si existen efectos de confinamiento de luz que se aprecian en los tiempos de vida. [75, 73] En la tabla III se dan los tiempos de vida a temperatura ambiente en función de la dimensión de la microestructura para 2 niveles seleccionados de Er^{3+} ($^4\text{S}_{3/2}$ y $^4\text{I}_{13/2}$), el primero dominado por relajación multifonónica y el segundo fundamentalmente radiativo con fuerte componente dipolar magnética. Se observa que la probabilidad de transición radiativa disminuye con la

disminución del tamaño de la fase circona, mientras que no hay efecto del tamaño en la componente no radiativa. Esta variación se debe a la presencia de la fase Al_2O_3 , de menor índice de refracción, en las inmediaciones del emisor (Er^{3+}). Según la regla de oro de Fermi, y como la luz emitida ha de ocupar estados disponibles para el campo electromagnético, su densidad determina la probabilidad de transición, que es fuertemente dependiente del índice de refracción. El caso extremo es la aparición de bandas prohibidas en cristales fotónicos (que sólo son posibles si el contraste de índice es mucho mayor que el que aquí nos ocupa), pero también es medible en el caso de microesferas o nanopartículas embebidas en materiales de distinto índice [76, 77, 78]. Estimando que la probabilidad de transición para el $^4\text{I}_{13/2} \rightarrow ^4\text{I}_{5/3}$ es $\frac{1}{2}$ dipolar eléctrica y $\frac{1}{2}$ dipolar magnética, para dimensiones transversales de la fase circona tendiendo a cero de tal modo que el medio dieléctrico pudiera considerarse como un medio efectivo y teniendo en cuenta los índices de refracción y la fracción volumétrica respectiva, la variación del tiempo de vida radiativo entre un material compuesto de este tipo y un cristal de circona sería $\tau_Z / \tau_{ZA} = 0.78$. En los eutécticos se observa experimentalmente $\tau_{ZA0.6} / \tau_{ZA0.05} = 0.85$, dentro de los límites esperados. Una vía para incrementar el contraste de índice sería la disolución selectiva de la matriz y sustitución por un material de distinto índice o bien por aire (materiales porosos). Por otro lado, la consecución de materiales ordenados en dimensiones mayores sería claramente deseable para aprovechar la anisotropía del comportamiento óptico.

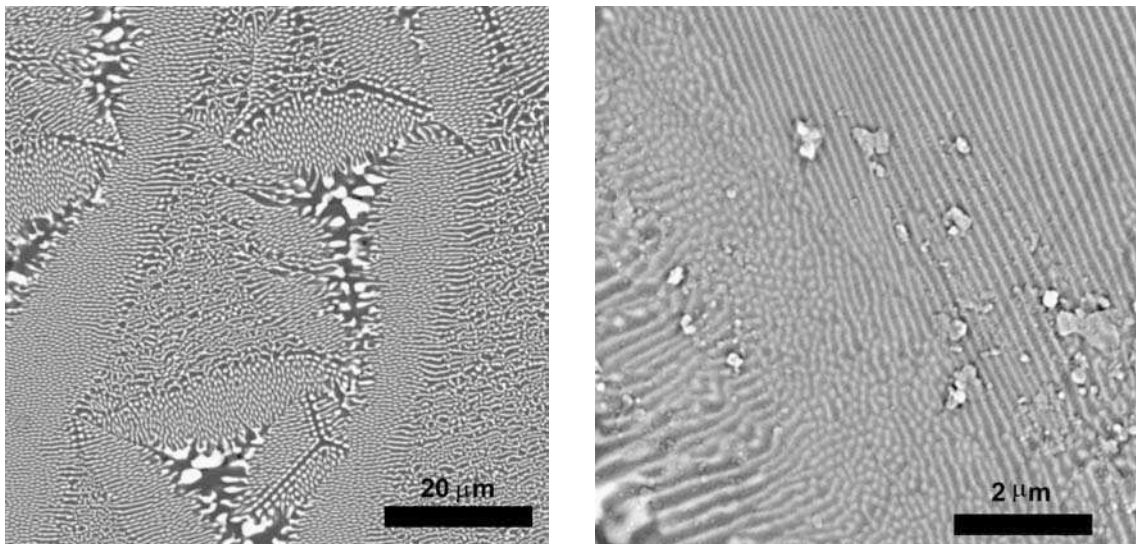


Figura 9. Microestructura de eutécticos $\text{ZrO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3\text{:Er}^{3+}$ solidificados a distintas velocidades.

Para poder afectar a las transiciones no radiativas se requeriría una modificación sustancial bien del acoplamiento electrón-fonón (distancias interiónicas por ejemplo); o bien disminución importante de la energía de los fonones más energéticos disponibles para asistir en la relajación multifonónica (confinamiento de fonones) sólo posible en dimensiones mucho más pequeñas.

Tabla III. Vidas medias de niveles de Er³⁺ en el eutéctico ZrO₂-Al₂O₃ a RT.

Dimensión transversal de la fase circona	⁴ S _{3/2}	⁴ I _{13/2}
0.60 μm	25.0 ± 0.3 μs	3.4 ± 0.1 ms
0.36 μm	25.0 ± 0.3 μs	3.6 ± 0.1 ms
0.05 μm	25.0 ± 0.3 μs	4.0 ± 0.1 ms

Puesto que para que el tiempo de vida se vea modificado por la presencia de un dieléctrico en el exterior del luminiscente es necesario que la longitud de onda de la radiación sea del orden de $2\pi d$, donde d designa el tamaño de la partícula o fase donde se produce la luminiscencia; en eutécticos, donde d está habitualmente cercano a la micra, sólo se esperan estos efectos para luminiscencias muy en el IR. Por ejemplo, las luminiscencias de Cr³⁺ en YSZ-Al₂O₃, donde entra fundamentalmente en la matriz de Al₂O₃ con la que Cr₂O₃ forma disolución sólida, se sitúan en el rojo (aprox. 693 nm) y su vida media no está afectada. Sin embargo su frecuencia si es fuertemente dependiente de la tensión local, que debido a las tensiones termoelásticas residuales acumuladas durante el enfriamiento del material compuesto por dos fases con diferente coeficiente de expansión, es alta e inhomogénea. Esto produce ensanchamiento y desplazamiento de las líneas de emisión actuando el Cr³⁺ como un excelente sensor piezospectroscópico en Al₂O₃. [79,80,81]. Las emisiones asociadas a otros dopantes como el Er³⁺ también sufren desplazamientos con la deformación. La ventaja del Cr³⁺ es que los iones 3d son más sensibles al entorno que los iones de tierras raras, y de hecho la variación es mayor para la línea R de Cr³⁺. Además en el caso particular de la línea R se trata de una línea estrecha.

5.3. Otras aplicaciones en fotónica.

Muchos iones de tierra rara son luminiscentes, por ejemplo Pr^{3+} o Tb^{3+} , y existen numerosos compuestos eutécticos que los contienen (véanse por ejemplo los diagramas de fase de $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-R}_2\text{O}_3$ o LiF-RF_3 , $\text{R} = \text{lantánido}$), sin embargo, sólo se ha reportado hasta la fecha el comportamiento óptico atribuible al ordenamiento de las fases que se ha referido más arriba. Una línea de investigación que aparenta ser más fructífera es el uso de superficies de estos sistemas ordenados como soportes para capas con funcionalidad óptica que aprovechen el contraste de índice del soporte o su microestructuración, dado que para esto es suficiente una superficie microestructurada, que puede buscarse en la dirección de mayor dimensión de los cristales eutécticos. Por ejemplo, Pawlak et al. [82] han fabricado recientemente el eutéctico $\text{Tb}_3\text{Sc}_2\text{Al}_3\text{O}_{12}\text{-TbScO}_3$ ordenado en fibras en el que mediante ataque superficial pueden eliminar bien la matriz o bien las fibras, formando una capa semivaciada susceptible de ser rellenada con metal con vistas a obtener estructuras metalodieléctricas ordenadas en las que aprovechar novedosas propiedades ópticas como guiado de luz por plasmones superficiales por ejemplo. También se han probado como sustratos para materiales con otras funcionalidades. [83]

La eliminación selectiva de una de las fases permite por ejemplo la generación de matrices monocristalinas altamente porosas [84], con posibilidad de infiltración con un compuesto con diferentes propiedades ópticas; o la obtención de fibras cristalinas [84, 85]. Otro ejemplo son dosímetros de radiación combinando sensibilidad a altas y bajas dosis [86]; etc. Y en general puede pensarse en la combinación de materiales con propiedades complementarias para aplicaciones variadas.

6. Macrosegregación como herramienta para conseguir microestructuras laminares, con función gradiente o piezas recubiertas.

En el proceso de solidificación, la convección en el fundido unida a los gradientes de concentración que se originan en la región vecina a la superficie sólido-líquido o a tendencia de los componentes del líquido a separarse produce una segregación macroscópica (de las dimensiones de la pieza que se está solidificando). Cuando se desean microestructuras y composiciones homogéneas es necesario evitarla. En otros casos esta segregación puede ser aprovechada para aplicaciones. Así, Yoshikawa et al. [87] observaron que en la solidificación de fibras eutécticas de $\text{YAG-Al}_2\text{O}_3$, las fibras (diámetro aproximado de 100 micras) producidas por micro-pulling-down se recubrían de una de las fases, dando lugar a una microestructura corona de YAG-núcleo de eutéctico, sin que llegaran a investigar su origen.

La resolidificación superficial de cerámicas eutécticas puede también dar lugar a estos fenómenos de recubrimiento de la capa procesada por una de las fases. Encontramos ejemplos en la figura 10 (CaSZ-CaZrO₃ e YSZ-NiO), y también ha sido observado en Al₂O₃-YAG, cuando la solidificación se ha realizado a velocidades lentas.

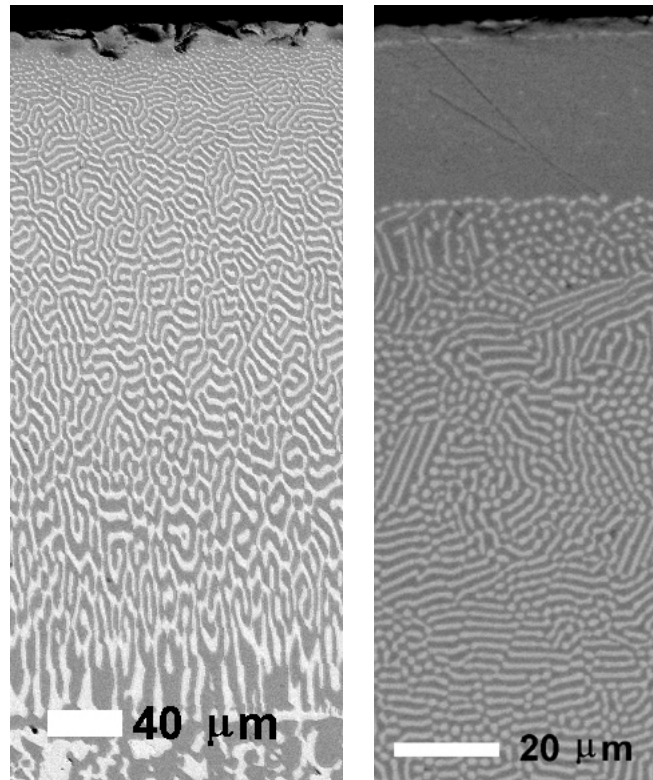


Figura 10: Micrografías SEM de secciones transversales de capas resolidificadas de los eutécticos: CaSZ-CaZrO₃ a 100 mm/h (izquierda) y región cercana a la superficie de YSZ-NiO a 60 mm/h (derecha). Se observa claramente el enriquecimiento de la superficie en la fase más oscura, CaZrO₃ y NiO respectivamente.

En el primer caso (figura 10a) se realizó sobre una cerámica de composición eutéctica, con láser de CO₂, en el segundo caso (fig 10b), deseando optimizar el proceso de segregación se resolidificó la capa superficial de una cerámica enriquecida en YSZ utilizando un láser de diodos de alta potencia. Ambos procedimientos son similares en esta aplicación. El líquido absorbe la radiación en una capa superficial delgada, y el volumen fundido se calienta mediante conducción térmica. Esta gota, contenida por tensión superficial, soporta un fuerte gradiente térmico [88] y se desplaza por la pieza a la velocidad de arrastre prefijada. Durante el tiempo en que la gota está fundida tienen lugar además de la difusión para generar la microestructura eutéctica, segregación dirigida por el empuje causado por diferencias de

densidad o por diferencias de solubilidad o bien evaporación preferencial de uno de los componentes (muy clara en el caso de NiO). Cuando las corrientes de convección son altas se produce la separación macroscópica de fases dentro del líquido y resulta un sólido con composición inhomogénea. En los dos materiales presentados en la figura 10, para velocidades suficientemente rápidas de procesamiento (500 mm/h), o lo que es lo mismo tiempos cortos de permanencia en estado fundido, se observa que los espesores de la capa segregada monofásica y la capa de composición variable disminuyen hasta cancelarse completamente.

No se han estudiado aun los mecanismos precisos que originan la segregación en estos eutécticos, aunque si está muy estudiada la segregación por convección en lingotes de fundición. Aunque falta experimentación para poder proponer un modelo, su observación experimental y posibilidad de control parcial permiten idear aplicaciones. Un ejemplo sería la resolidificación superficial para sellar superficies, cuyas propiedades de resistencia a la abrasión y a flexión son mejores cuando la capa es microestructurada (eutécticos). En el caso de que uno de los componentes de la capa sea menos resistente al ataque químico, sería conveniente que gradualmente la composición de dicha capa fuera cambiando desde el interior al exterior hasta terminar con un recubrimiento monofásico del componente más resistente al ataque químico. Asimismo, esa composición gradual permitiría acoplar mecánicamente la capa monofásica externa al compuesto binario interior que constituye el bloque cerámico. Habríamos evitado la necesidad de aplicar capas extra al recubrimiento denso y generado en un solo paso de resolidificación superficial teórico el material con función gradiente.

En el caso de fibras recubiertas, la defensa frente a un ataque químico es evidente, permaneciendo buena parte de su resistencia mecánica debido a la microestructura bifásica del interior. Pero también en el campo del guiado puede tener ventajas. Hemos visto que la existencia de un material binario interpenetrado combina las propiedades luminiscentes de los componentes, pero genera pérdidas por difusión de luz. Una fibra (o cristalito delgado) recubierto de una capa monofásica transparente actuaría de capa-guía, permitiendo transportar la luz emitida por el material compuesto al lugar en que esta sea requerida, justamente a lo largo de la capa protectora que en el caso de óxidos es un material de alto índice de refracción.

7. Conclusiones.

Los resultados aquí presentados muestran que para sacar la máxima ventaja de los eutécticos de óxidos y haluros solidificados a partir de un fundido es importante un conocimiento preciso de su microestructura y un control del método de fabricación. Hoy se conoce mucho sobre la solidificación de cerámicas eutécticas: métodos de solidificación, inestabilidades del crecimiento, cristalografía y textura de los materiales, granos eutécticos etc. Se ha analizado la microestructura de diversos eutécticos de fluoruros y óxidos atendiendo a la regularidad y el interespaciado. Se pueden conseguir estructuras con ordenamientos apropiados para diversas aplicaciones.

Los eutécticos solidificados direccionalmente presentan una conductividad iónica y difusión anisótropas. Aunque se puede controlar la densidad de intercaras, no se ha probado que éstas tengan efectos importantes en la conductividad. La conductividad máxima se obtiene en aquellas mezclas eutécticas en que ambas fases constituyentes son buenos conductores iónicos, o si no es posible, solidificando fuera de la composición eutéctica si se limita la macrosegregación. Otra característica importante de los eutécticos conductores iónicos solidificados a partir de fundido son sus buenas propiedades mecánicas y mayor estabilidad química frente a los materiales monofásicos.

En el artículo se han presentado resultados de experimentos realizados en laboratorio que muestran la capacidad de estos materiales como guías planas o mazos de fibras monocristalinas así como de su aprovechamiento como sustratos microestructurados. El tamaño de las fases es óptimo para modificar la propagación de luz visible y en el IR cercano, modificando las probabilidades de emisión radiativa de entidades luminiscentes. La longitud de onda de las luminiscencias se ve afectada por las tensiones termoelásticas acumuladas en el material en la solidificación de estos materiales multifásicos.

8. Agradecimientos.

Esta revisión ha sido posible gracias al trabajo de los últimos años del grupo de materiales procesados por láser (ICMA). Agradezco especialmente a V.M. Orera, J.I. Peña, A. Larrea, J.A. Pardo, M.A. Laguna-Bercero, P.B. Oliete y M.I. de Francisco las discusiones que hemos mantenido sobre el tema. Asimismo agradezco la financiación del Ministerio de Educación y Ciencia a través de los proyectos MAT2003-01182 y MAT2003-06085-C03-01.

9. Bibliografía.

- ¹ L.M. Hogan, R.W. Kraft and F.D. Lemkey. Eutectic Grains. Advances in Materials Research vol. 5, p. 83-216 Ed. H. Herman (1971) Wiley Intescience.
- ² J. Llorca and V.M. Orera. Directionally solidified eutectic ceramic oxides. Progress in materials science 51 (2006) 711-810.
- ³ L. Mazerolles, D. Michel, M.J. Hýtch. Microstructure and interfaces in directionally solidified oxide-oxide eutectics. J. Europ. Ceram. Soc. 25 (2005) 1389-1395.
- ⁴ J. Echigoya, Structure of Interfaces in Directionally solidified oxide eutectic systems. J. Europ. Ceram. Soc. 25 (2005) 1381-87.
- ⁵ E.C. Dickey, C.S. Fazer, R.R.Watkins and C.R. Hubbard. Residual stresses in high-temperature ceramic eutectics. J. Europ. Ceram. Soc. 19 (1999) 2503-2509.
- ⁶ U. Hetch et al., Multiphase solidification in multicomponent alloys. Mat. Sci. Eng. R. 46 (2004) 1-49.
- ⁷ R.L. Ashbrook. Directionally solidified eutectic ceramics. J. Am. Ceram. Soc. 60 (1977) 428-35.
- ⁸ V.S. Stubican and R.C. Bradt. eutectic Solidification in ceramic systems. Ann. Rev. Mater. Sci. 11 (1981) 267-297.
- ⁹ A. Revcolevschi, G. Dhalenne, D. Michel., Interfaces in Directionally Solidified Oxide-Oxide Eutectics. Mater. Sci. Forum. 29 (1988) 173-198.
- ¹⁰ Y. Waku, N. Nakagawa, T. Wakamonto, H. Ohtsubo, K. Shimizu, Y. Kohtoku. A ductile ceramic eutectic composite with high strength at 1,873 K. Nature 389 (1997) 49-52.
- ¹¹ A. Sayir, S.C. Farmer, P.O Dickerson, A.M. Yun. High temperature mechanical properties of Al₂O₃/ZrO₂(Y₂O₃) fibers. Mat. Res. Soc. Sympo. Proc. 365 (1993) 21-27.
- ¹² R. Mah, T.A. Parthasarathy, L.E. Matson. Ceram. Eng. Sci. Proc. Processing and Mechanical Properties of Al₂O₃/Y₃Al₅O₁₂ (YAG) eutectic composite. 11 (1990) 1617- 1627.
- ¹³ J.Y. Pastor, P. Poza, J. LLorca, J.I. Peña, R.I. Merino, V.M. Orera. Mechanical properties of directionally solidified Al₂O₃-ZrO₂(Y₂O₃) Eutectics. Materials Science and Engineering A308 (2001) 241-249
- ¹⁴ V.A. Borodin, M.Yu Starostin y T.N. Yalovets. Structure and related mechanical properties of shaped eutectic Al₂O₃-ZrO₂ (Y₂O₃) composites. J. Cryst. Growth 104 (1990) 148-153.

- ¹⁵ M.A. Laguna-Bercero, A. Larrea, R.I. Merino, J.I. Peña, V.M. Orera. Stability of Channeled Ni-YSZ Cermets Produced from Self-Assembled NiO-YSZ Directionally Solidified Eutectic. *J. Am. Ceram. Soc.* 88 (2005) 3215-17.
- ¹⁶ J.I. Peña, R.I. Merino, G.F. de la Fuente and V.M. Orera. Aligned ZrO₂(c)-CaZrO₃ eutectics grown by the laser floating zone method: electrical and optical properties. *Adv. Mater.* 8 (1996) 909-912.
- ¹⁷ F.S. Galasso. Unidirectionally solidified eutectics for optical, electronic and magnetic applications. *J. of Met.* 19 (1967) 17-21
- ¹⁸ F.S. Galasso, F.C. Douglas and J.A. Batt, Recent Studies of Eutectics for Nonstructural Applications. *J. of Metals* 22 (1970) 40-44.
- ¹⁹ S.N.Lakiza and L.M. Lopato. Stable and metastable phase relations in the system alumina-zirconia-yttria. *J. Am. Ceram. Soc.* 80 (1997) 893-902.
- ²⁰ W. Kurz y D.J. Fisher, *Fundamentals of Solidification*, 4th Ed., TTP, Suiza, 1998
- ²¹ A. Larrea, G.F. de la Fuente, R.I. Merino, V.M. Orera. ZrO₂-Al₂O₃ eutectic plates produced by laser zone melting. *Journal of the European Ceramic Society* 22 (2002) 191-198
- ²² M. Flemings. Our understanding of macrosegregation: past and present. *ISIJ International* 40 (2000) 833-841.
- ²³ R.I. Merino, J.I. Peña, A. Larrea, G.F. de la Fuente y V.M. Orera. Melt grown composite ceramics obtained by directional solidification: structural and functional applications. *Recent. Res. Devel. Mat. Sci.* 4 (2003) 1-24.
- ²⁴ V. Trnovcova, P.P. Fedorov, C. Barta, V. Labas, V.A. Melshina, B.P. Sobolev. Microstructure and physical properties of superionic eutectic composites of the LiF-RF₃ (R= rare earth element) system. *Solid State Ionics* 119 (1999) 173-180.
- ²⁵ A. Larrea, V. M. Orera, J. I. Peña, and R. I. Merino. Orientation relationship and interfaces in nonfaceted-nonfaceted ZrO₂(c)-CaZrO₃ lamellar eutectics. *J. Mater. Res.*, 14 (1999) 2588-2593.
- ²⁶ A. Larrea, L. Contreras, and R.I. Merino, J. Llorca y V.M. Orera. Microstructure and physical properties of CaF₂-MgO eutectics produced by the Bridgman method. *J. Mater. Res.*, 15 (2000) 1314-1319.
- ²⁷ J.I. Peña, R.I. Merino, N.R. Harlan, A. Larrea, G.F. de la Fuente, V.M. Orera. Microstructure of Y₂O₃ doped Al₂O₃-ZrO₂ eutectics grown by the laser floating zone method. *Journal of the European Ceramic Society* 22 (2002) 2595-2602

- ²⁸ B.M. Epelbaum, K. Yoshikawa, K. Shimamura, T. Fukuda, K. Suzuki and Y. Waku. Microstructure of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ eutectic fibers grown by μ -PD method. *J. Crystal. Growth* 198 (1999) 471-475.
- ²⁹ M.A. Laguna Bercero, tesis, Universidad de Zaragoza, 2005.
- ³⁰ J.Ramírez-Rico, A.R.Pinto-Gómez, J.Martínez-Fernández, A.R.de Arellano-López, P.B.Oliete, J.I.Peña, V.M.Orera. High-temperature plastic behaviour of $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ directionally solidified eutectics. *Acta Materialia* 54 (2006) 3107–3116.
- ³¹ H. Kaiden, S. D. Durbin, A. Yoshikawa, J.H. Lee, K. Sugiyama, T. Fukuda. Model for the microstructure of oxide utectics and comparison with experimental observations. *J. Alloys and Compounds* 336 (2002) 259-264.
- ³² I. Barin y G. Platzki, *Thermochemical Data of Pure Substances*, VCH, Weinheim, 1995.
- ³³ V. Trnovcova, P.P. Fedorov , C. Barta , V. Labas , V.A. Meleshina , B.P. Sobolev. Microstructure and physical properties of superionic eutectic composites of the LiF-RF_3 (R=rare earth element) system. *Solid State Ionics* 119 (1999) 173–180
- ³⁴ E.L. Courtright, J. S. Haggerty y J. Sigalovsky. Controlling microstructures in $\text{ZrO}_2(\text{Y}_2\text{O}_3)$ - Al_2O_3 eutectic fibers. *Ceram. Eng. Proc.* 14 (1993) 671-681.
- ³⁵ J.H. Lee, A. Yoshikawa, H. Kaiden, K. Lebbou, T. Fukuda, D.H. Yoon y Y. Waku. Microstructure of Y_2O_3 doped $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ eutectic fibers grown by the micro-pulling-down method. *J. Cryst. Growth.* 231 (2001) 179-185.
- ³⁶ J. Echigoya, Y. Takabayashi, H. Suto y M. Ishigame. Structure and crystallography of directionally solidified Al_2O_3 - ZrO_2 - Y_2O_3 eutectic by the floating zone melting method. *J. Mater. Sci. Lett.* 5 (1986) 150- 152.
- ³⁷ J.I. Peña. R.I. Merino, N.R. Harlan, A. Larrea, G.F. de la Fuente y V.M. Orera. Microsturcture of Y_2O_3 doped Al_2O_3 - ZrO_2 eutectics grown by the laser floating zone method. *J. Europ. Ceram. Soc.* 22 (2002) 2595-2602.
- ³⁸ F. Schmid y D. Viechnicki. Oriented eutectic microstructures in the system $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$. *J. Mater. Sci.* 5 (1970) 470-473.
- ³⁹ I. de Francisco, tesis, Universidad de Zaragoza (2005).
- ⁴⁰ J.A. Pardo, J.I. Peña, R.I. Merino, R. Cases, A. Larrea, V.M. Orera. Spectroscopic properties of Er^{3+} and Nd^{3+} doped glasses with the $0.8\text{CaSiO}_3-0.2\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ eutectic composition. *Journal of Non-Crystalline Solids* 298 (2002) 23–31

- ⁴¹ S. Araki, M. Yoshimura. Fabrication of transparent ceramics through melt solidification of near eutectic composition in $\text{HfO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3\text{-GdAlO}_3$ system. *J. Europ. Ceram. Soc.* 26 (2006) 3295-3299
- ⁴² A. Rosenflanz, M. Frey, B. Enders, T. Anderson, E. Richards y C. Schardt. Bulk glasses and ultrahard nanoceramics based on alumina and rare-earth oxides. *Nature* 430 (2004) 761-764.
- ⁴³ J.B. Wagner, Jr. Composite Solid Ion Conductors. En *High Conductivity Solid Ionic Conductors, Recent Trends and Applications*, (1989) Ed. T. Takahashi, World Scientific, Singapore.
- ⁴⁴ N. Sata, K. Eberman, K. Eberl and J. Maier. Mesoscopic fast ion conduction in nanometre-scale planar heterostructures. *Nature* 408, (2000) 946-949.
- ⁴⁵ E. Hartmann, V.V. Peller and G.I. Rogalski. The electrical conductivity o fluoride eutectic composites. *Solid State Ionics* 28 (1988) 1098-1101.
- ⁴⁶ E. Hartmann, V.V. Peller and G.I. Rogalski. Electrical conductivity of alkali halide eutectic composites. *Solid State Ionics* 37 (1990) 123-124.
- ⁴⁷ V. Trnovcova, P.P. Fedorov, I.I. Buchinskaya, B.P. Sobolev. Ionic Conductivity of the $\text{PbF}_2\text{+NaF}$ eutectic composite and PbF_2 single crystals doped with alkali fluorides. *Inorg. Mater* 32 (1996) 110-1107.
- ⁴⁸ V. Trnovcova , P.P. Fedorov , I.I. Buchinskaya , V. Smatko , F. Hanic. Fast ionic conductivity of $\text{PbF}_2\text{:MF}_2$ (M=Mg, Ba, Cd) and $\text{PbF}_3\text{:ScF}_3$ single crystals and composites. *Solid State Ionics* 119 (1999) 181–189
- ⁴⁹ V. Tnovcova, M. Yu. Starostin, R. Cicka, P.P. Fedorov, C. Barta, V. Labas y B.P. Sobolev. Microstructure and fast ionic conduction of inorganic fluoride and oxide eutectic composites prepared from the melt. *Solid State Ionics* 126-137 (2000) 11-17.
- ⁵⁰ N.I. Sorikin, Superionic transport in fluoride composites and glasses. *Russian Journal of Electrochemistry* 40 (2004) 569-557.
- ⁵¹ A. Chandra, A. Spangengerb and J. Maier. Electrical Conductivity Studies of AgCl:KCl (RbCl , CsCl) composites and a novel method of obtaining highly porous materials. *J. Electroceramics* 3 (1999) 47-52.
- ⁵² X. Guo and R. Waser. Electrical properties of the grain boundaries of oxygen ion conductors: acceptor-doped zirconia and ceria. *Progress in Mat Sci.* 51 (2006) 151-210.

- ⁵³ F. Boule'h, L.aurent Dessemond, E. Djurado. Dopant size effect on structural and transport properties of nanometric and single-phased TZP. *Solid State Ionics* 154–155 (2002) 143–150
- ⁵⁴ I. Kosacki, C.M. Rouleau, P.F. Becher, J. Bentley and D.H. Lowndes. Nanoscale effects on the ionic conductivity in highly textured YSZ thin films. *Solid State Ionics* 176 (2005) 1319-1326.
- ⁵⁵ R.I. Merino, V.M. Orera, G.F. de la Fuente y J.I. Peña. Conductivity and microstructure of LFZ produced ZrO_2 -CaO eutectics. *Proceedings of Electroceramics V, International Conference on Electronic Ceramics and Applications*, p. 131-134. Aveiro (Portugal) 1996.
- ⁵⁶ R.I. Merino, J.I. Peña, V.M. Orera, G.F. de la Fuente. Conductivity anisotropy in directionally solidified $CaZrO_3$ -CaSZ and MgO-MgSZ eutectics. *Solid State Ionics* 100 (1997) 313 -318
- ⁵⁷ R. Cicka, V. Trnovcová and M. Yu. Starostin. Electrical properties of alumina-zirconia eutectic composites. *Solid State Ionics* 140 (2002) 425-429.
- ⁵⁸ I. García, J.I. Peña, R.I. Merino, G.F. de la Fuente y V.M: Orera. Crecimiento de fibras $ZrO_2(Y_2O_3)$ - Al_2O_3 eutécticas mediante la técnica de fusión zonal inducida por láser. *Boletín de la Sociedad Española de Cerámica y Vidrio* 37 (1998) 256-259.
- ⁵⁹ R.I. Merino, J.I. Peña, A. Larrea, G.F. de la Fuente y V.M. Orera. Melt grown composite ceramics obtained by directional solidification: structural and functional applications. *Recent. Res. Devel. Mat. Sci.* 4 (2003) 1-24.
- ⁶⁰ I. de Francisco. Tesis. Universidad de Zaragoza, 2005.
- ⁶¹ W.J. Minford, R.C. Bradt and V.S. Stubican. Crystallography and Microstructure of Directionally Solidified Oxide Eutectics. *J. Am. Ceram. Soc.* 62 (1979) 154-157.
- ⁶² J. Müller, K.D. Kreuer, J. Maier, S. Matsuo y M. Ishigame. A conductivity and thermal gravimetric analysis of a Y-doped $SrZrO_3$ single crystal. *Solid State Ionics* 97 (1997) 421-427.
- ⁶³ M.A. Laguna-Bercero, A. Larrea, J.I. Peña, R.I. Merino, V.M. Orera. Structured porous Ni- and Co-YSZ cermets fabricated from directionally solidified eutectic composites. *J. Europ. Ceram. Soc.* 25 (2005) 1455–1462
- ⁶⁴ C. Casas. Memoria del proyecto fin de Carrera. 2002 CPS Ingenieros, Universidad de Zaragoza.

- ⁶⁵ R.I. Merino, J.I. Peña, M.A. Laguna-Bercero, A. Larrea, V.M. Orera. Directionally solidified calcia stabilised zirconia–nickel oxide plates in anode supported solid oxide fuel cells. *Journal of the European Ceramic Society* 24 (2004) 1349–1353
- ⁶⁶ M. A. Laguna-Bercero, A Larrea, R. I. Merino, J. I. Peña, y V. M. Orera. Stability of Channeled Ni–YSZ Cermets Produced from Self-Assembled NiO–YSZ Directionally Solidified Eutectics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 88 (2005) 3215–3217
- ⁶⁷ B. Bonvalot-Dubois, G. Dhallenne, J. Berthon, A. Revcolevschi, R.A. Rapp. Reduction of NiO platelets in a NiO/ZrO₂(CaO) directional composite. *J. Am. Ceram. Soc.* 71 (1988) 296-301.
- ⁶⁸ V.M. Orera, R.I. Merino, J.A. Pardo, A. Larrea, G. F. De la Fuente, L. Contreras y J. I. Peña. Oxide Eutectics: Role of the interfaces in the material properties. *Acta Physica Slovaca* 50 (2000) 549-557.
- ⁶⁹ V. M. Orera J. I. Peña, R. I. Merino, J.A. Lázaro, J.A. Vallés y M.A. Rebolledo. Prospects of new planar optical waveguides based on eutectic microcomposites of insulating crystals: The ZrO₂-CaZrO₃ erbium doped system. *Appl. Phys. Lett.* 71 (1997) 2746- 2748.
- ⁷⁰ Properties of Crystals and Glasses, W.J. Tzupf, M.E. Thomas and T.J. Harris, Chap. 13 in *Handbook of Optics. Devices, measurements and properties.* 2nd edition, editor M. Bass, Mc. Graw-Hill Inc. 1995.
- ⁷¹ T. Ishikawa, S. Sakata y A. Mitani. Durable, ultraluminous structure for incandescent high power white LED. *Int. J. Appl. Ceram. Technol.* 3 (2006) 144-149.
- ⁷² R. I. Merino, J. A. Pardo, J. I. Peña, G. F. de la Fuente, A. Larrea, and V. M. Orera. Luminescence properties of ZrO₂-CaO eutectic crystals with ordered lamellar microstructure activated with Er³⁺ ions. *Phys. Rev. B* 56 (1997) 10 907-10915
- ⁷³ J.A. Pardo, 2001, tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.
- ⁷⁴ C. Pascual y P. Durán. Phase equilibria and ordering in the erbia-zirconia system. *J. of Materials Science* 16 (1981) 3067-3076.
- ⁷⁵ R. I. Merino, J. A. Pardo, J. I. Peña, and V. M. Orera. Microstructure-size dependence of the 1.520 μm Er³⁺ luminescence lifetime in Al₂O₃-ZrO₂ eutectic melt growth composites. *Appl. Phys. Lett.* 80 (2002) 589-591
- ⁷⁶ R.S. Meltzer, S.P. Feofilow, B. Tissue y H.B. Yuan. Dependence of fluorescence lifetimes of Y₂O₃: Eu³⁺ nanoparticles on the surrounding medium. *Phys. Rev. B* 60 (1999) R14012-R14015.

- ⁷⁷ H. Schniepp y V. Sandoghdar. Spontaneous emission of europium ions embedded in dielectric nanospheres. *Physical Review Letters* 89 (2002) 257403.
- ⁷⁸ B. Li, J. Zhou, R. Zong, M. Fu, L. Li y Q. Li Strong Suppression and Enhancement of Photoluminescence in $\text{Zn}_2\text{SiO}_4:\text{Mn}^{+2}$ Inverse Opal Photonic Crystals. *J. Am. Ceram. Soc.*, 89 (2006) 2308–2310
- ⁷⁹ J. A. Pardo, R. I. Merino, V. M. Orera, J. I. Peña, C. González, J. Y. Pastor, y J. LLorca. Piezospectroscopic Study of Residual Stresses in $\text{Al}_2\text{O}_3\text{--ZrO}_2$ Directionally Solidified Eutectics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 83 (2000) 2745–52
- ⁸⁰ V.M. Orera, R. Cemborain, R.I. Merino, J.I. Peña, A. Larrea. Piezo-spectroscopy at low temperatures: residual stresses in $\text{Al}_2\text{O}_3\text{--ZrO}_2(\text{Y}_2\text{O}_3)$ eutectics measured from 77 to 350 K *Acta Materialia* 50 (2002) 4677–4686
- ⁸¹ J. He y D.R. Clarke. Determination of the piezospectroscopic coefficients for chromium-doped sapphire. *J. Am. Ceram. Soc.* 78 (1995) 1347-1353.
- ⁸² D.A. Pawlak, K. Kolodziejak, S. Turczynski, J. Kisielewski, K. Rozniatowski, R. Diduszko, J. Kaczkan y M. Malinowski. Self-organized, rodlike, micrometer-scale microstructure of $\text{Tb}_3\text{Sc}_2\text{Al}_3\text{O}_{12}\text{--TbScO}_3:\text{Pr}$ eutectic. *Chem. Mater* 18 (2006) 2450-2457.
- ⁸³ J. Santiso, V. Laukhin, M. Doudkowsky, G. Garcia, A. Figueras, L.A. Angurel, R.I. Merino, J.I. Peña, M.L. Sanjuán and V.M. Orera. A New approach to obtain strip-structured biepitaxial $\text{Yba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-8}$ films by using Ca-stabilized zirconia- CaZrO_3 eutectic substrates. *Adv. Mater* 12 (2000) 116-119.
- ⁸⁴ V.M. Orera, A. Larrea, R.I. Merino, M.A. Rebolledo, J.A. Vallés, R. Gotor y J.I. Peña. Novel photonic materials made from ionic eutectic compounds. *Acta Physica Slovaca* 55 (2005) 261-269.
- ⁸⁵ V.M. Orera and A. Larrea. NaCl assisted growth of micrometer-wide long single crystalline fluoride fibres. *Optical Materials* 27 (2005) 1726-1729.
- ⁸⁶ A. Chouiyakh, F. Gimeno, J.I. Peña, L. Contreras, V.M. Orera. Thermoluminescence properties of $\text{CaF}_2\text{--LiF}:\text{Mn}$ eutectic melt grown composites. *Phys. Chem. News* 13 (2003) 139-143.
- ⁸⁷ A. Yoshikawa, B.M. Epelbaum, K. Hasegawa, S.D. Durbin and T. Fukuda. Microstructures in oxide eutectic fibers grown by a modified micro-pulling-down method. *J. Cryst. Growth* 205 (1999) 305-316.

⁸⁸ J.F. Li, L. Li y F.H. Stott. A three-dimensional numerical model for a convection-diffusion phase change process during laser melting of ceramic materials. *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 47 (2004) 5523-5539

Nuevas tendencias de la Estadística en el siglo XXI*

José A. Cristóbal

Departamento de Métodos Estadísticos

Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza

La llegada del nuevo milenio ha impulsado un nuevo espíritu en la investigación tanto para científicos como para humanistas. En particular, todo apunta hacia el desarrollo de una nueva cultura intelectual donde el trabajo más profundo de los científicos se hace más accesible al público en general. En palabras de John Brockman, filósofo norteamericano y autor de numerosos libros sobre ciencia de vanguardia: “La aparición de esta nueva cultura es una evidencia de un gran anhelo universal, un deseo para la nueva e importante idea que dirige nuestros tiempos: un desarrollo revolucionario en biología molecular, ingeniería genética, nanotecnología, inteligencia artificial, teoría del caos, redes neuronales, biodiversidad, sistemas expertos, autómatas celulares y realidad virtual, entre otros”. Al menos, términos tales como ADN, wavelets, fractal, ciberespacio, etc. son ahora frecuentes en nuestro vocabulario.

En lo que se refiere a la Estadística, el británico Peter Green ha resumido muy bien esta omnipresencia: “Como todos nosotros reconocemos, la Estadística es una disciplina extraordinaria. Se ha extendido dentro de la administración y la industria, en la vida pública y en muchas otras áreas. A su vez, esas interacciones han moldeado profundamente esta materia. Su concepción adopta una amplia variedad de aspectos: fundamentos filosóficos, teoría matemática, principios de inferencia, diseño, recogida de datos, técnicas, computación, construcción de modelos, etc. Y crucialmente, el comportamiento de sus interacciones con el resto del mundo es parte de su propio objetivo”.

Pero “algunos usuarios de métodos estadísticos, ven aparentemente a la Estadística como algo estático, un armario lleno de técnicas y buenas prácticas para ser consultados sólo ocasionalmente, y sin mucho entusiasmo ni compromiso”. De hecho, en los foros y reuniones científicas en donde la Estadística no es el objetivo prioritario del acontecimiento,

*Conferencia leída en el Aula Magna de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, el 15 de noviembre de 2006, con motivo de la festividad de San Alberto Magno.

se puede observar constantemente el uso de términos tales como proceso generador, análisis de datos, predicción, estimación, hipótesis, significación, etc., pero la Estadística como disciplina suele ser raramente reconocida.

En un mundo en el que “*información*” se ha convertido a la vez en una moneda de cambio y un producto global, en el cual “*incertidumbre*” es un término en creciente utilización y su impacto más ampliamente apreciado, y en el que gobierna la “*cuantificación*”, es asombroso que una disciplina cuyo núcleo central es la *cuantificación de la información bajo incertidumbre*, no sea debidamente valorada.

¡Claramente, tenemos un problema de imagen!

Me atrevo a apuntar la necesidad de un cambio de actitud por parte de los estadísticos para conocer las necesidades que se despliegan en la ciencia del siglo XXI.

Es mi propósito, en estas breves palabras, comentar algunos aspectos de nuestro pasado estadístico, examinar la situación en que nos encontramos en el presente y especular con nuestro futuro.

En primer lugar, el desarrollo de la Estadística ha estado condicionado por el extenso entorno en el que opera: por aplicaciones en las ciencias, las ciencias sociales, la medicina, la ingeniería y el mundo empresarial, por la aparición de nuevos tipos de datos que están demandando interpretación y análisis, y por el rápido avance de la tecnología de la computación. Esta reflexión no es nueva, pero lo que parece no tener precedente es el rango de aplicaciones y nuevos tipos de datos que están empujando el desarrollo de la Estadística. En los siglos XIX y XX, el análisis estadístico estuvo en gran parte dirigido a las aplicaciones en un pequeño número de áreas (astronomía, estadística oficial, agricultura). Pero en la segunda mitad del siglo XX, la Estadística se ha convertido en una parte central de muchas disciplinas que analizan datos numéricos, (y a veces, incluso no numéricos), y una buena parte de la investigación estadística ha sido consecuencia de la demanda de nuevos métodos desde estas disciplinas externas.

Por otra parte, es un hecho claro que la revolución de los computadores ha transformado la Estadística, la cual se ha construido en gran parte sobre fundamentos matemáticos, pero en los últimos 30 años la computación de alta velocidad se ha convertido en una piedra angular. Ha hecho posible nuevos tipos de análisis y modelos que previamente no sólo eran impracticables, sino incluso impensables. Estas técnicas abarcan desde el primer software interactivo, tal como GLIM en los años 70, pasando por el bootstrap y el lenguaje S, que permitió fácil exploración visual de los datos en los años 80, hasta la revolución bayesiana de los 90, hecha posible gracias a los métodos MCMC, acrónimo de

Markov Chain Monte Carlo (por cierto, este año celebramos el centésimo quincuagésimo aniversario del nacimiento de Markov).

En general, quizá podemos decir que la investigación científica está dedicada a la búsqueda de teorías o hipótesis que explican o predicen un fenómeno. ¿Cómo puede ayudar la Estadística a conocer si una hipótesis es cierta o no? Es bien conocido que hay varias escuelas dentro de la Estadística que propugnan enfoques diferentes para resolver un mismo problema. El gran estadístico hindú, Callyampudi Rao plasmó magníficamente esta situación, al describir una conversación imaginaria entre Albert Einstein y algunos estadísticos, líderes de esas filosofías:

Einstein: Tengo una nueva teoría para explicar algunos fenómenos naturales. ¿Puede ayudarme la Estadística a contrastarla?

Neyman y Pearson: Albert, tienes que hacer tu experimento, darnos tus datos y decirnos qué posibles alternativas hay a tu teoría. Nosotros podemos revelarte el método más potente de verificarla.

Einstein: ¡Teorías alternativas! Puede haberlas, pero no conozco ninguna.

Fisher: Puedo darte el diseño de un experimento perfecto para llevarla a cabo. Los resultados pueden rechazar tu teoría si es errónea, aunque no pueden confirmarla si es cierta.

Wald y Wolfowitz: Podemos ayudarte a decidir eligiendo la acción que más te conviene, pero necesitamos que nos des una valoración cuantitativa del coste que ocasionará tanto la aceptación como el rechazo de tu teoría.

Por supuesto, sería conveniente añadir a este diálogo la posibilidad de un enfoque bayesiano, puesto en boca de alguno de los grandes pioneros de este tratamiento (como por ejemplo Bruno De Finetti, del cual también celebramos este año el centésimo aniversario de su nacimiento).

Dada la gran variedad de opciones, el estadístico inglés David Cox ofrece su propia perspectiva sobre estas cuestiones: “Mi punto de vista personal es ecléctico, consistente en tomar lo que es valioso de los diferentes enfoques. Por supuesto esto puede degenerar en una cobardía vagamente intelectual, pero la defensa de mi decisión radica en tener en cuenta el test fundamental de ver lo que hay de relevante y fructífero en las aplicaciones. La extraordinariamente rica variedad de aplicaciones de la Estadística apunta en contra de tomar un enfoque simple”.

Ante tal panorama, cabe preguntarse: ¿hacia dónde se dirige el área de la Estadística en el nuevo milenio? Al estadístico irlandés Adrian Raftery le parece seguro que se realizarán progresos teóricos para analizar nuevos tipos de datos, con el consiguiente

desarrollo de técnicas computacionales para hacerlo posible. Un ejemplo lo constituyen los datos de expresión genética, área en el que los estadísticos se han introducido rápidamente. La minería de datos constituye otro ejemplo; su estudio comenzó como un análisis de datos codificados, aunque los estadísticos se han incorporado en este campo de modo más lento. Por otra parte, un área donde la Estadística ha estado ausente en el pasado, pero donde se prevé que las nuevas teorías y potencia computacional permitan una relevante contribución, es el análisis de simulación de modelos mecánicos, donde domina el esfuerzo científico de muchas disciplinas para excluir los modelos estadísticos más convencionales.

Aunque el abanico de posibilidades sobre las futuras direcciones de la Estadística es enorme, voy a fijarme en tres grandes secciones sobre las que hay un cierto consenso en considerar como más importantes: *la Estadística en las Ciencias de la Vida, la Estadística en la Empresa y las Ciencias Sociales, y la Estadística en las Ciencias Físicas y la Ingeniería.*

Por supuesto, hay una gran diversidad y amplitud de técnicas en esos tres contextos, pero diversos temas son a veces recurrentes, subrayando la unidad del campo de la Estadística. Como ejemplo, consideremos el análisis de procesos puntuales definidos por las veces que ocurre a lo largo del tiempo un determinado fenómeno, tal como una muerte, una salida de un empleo o el fallo de una máquina. En las ciencias de la salud, esto se llama análisis de supervivencia; en las ciencias sociales, análisis temporal (o histórico) de sucesos, y en la ingeniería se denomina teoría de la fiabilidad. La estrategia de análisis subyacente es la misma en las tres áreas: el análisis de la función de fallo y el desarrollo de modelos para este concepto, como el célebre modelo de riesgo proporcional de Cox.

I.- Estadística en las Ciencias de la vida

Paso a considerar el primero de estos contextos, que es el de la Estadística en las Ciencias de la vida, donde el desarrollo y aplicaciones de un conjunto coherente y comprensivo de métodos para analizar datos es quizá el mayor logro de la Estadística en la segunda mitad del siglo XX. Esto ha llevado al desarrollo de la Bioestadística, la cual es una próspera disciplina en sí misma, mientras permanece como una parte integral de la amplia profesión estadística.

Varias materias comunes aparecen en este campo, pero destacaré tres importantes metodologías: el análisis causal, el análisis de supervivencia y los modelos jerárquicos, así como un rico conjunto de aplicaciones.

El análisis causal utilizando el concepto de efecto de un tratamiento fue introducido por Neyman para experimentos en el área de la agricultura, y el método de aleatorización

de Fisher le dio la base física para realizar inferencias causales. El epidemiólogo inglés Sir Austin Hill (pionero en el descubrimiento de la relación del consumo de tabaco con el cáncer de pulmón), introdujo esos principios en el campo de la medicina dando lugar a los ensayos clínicos aleatorizados, doble-ciego y controlados con placebo. Como David Harrington (célebre investigador en distintos aspectos del cáncer y profesor de Bioestadística en Harvard) afirmó, éste fue posiblemente el más importante avance científico en medicina durante el siglo XX.

El impacto del análisis de supervivencia ha sido inmenso: se han discutido métodos de supervivencia para monitorización de la fertilidad de poblaciones. Se han descrito modelos para el estudio del cáncer sobre la base del análisis de tiempos de vida en ensayos con animales. El estudio de los efectos del SIDA ha estimulado el desarrollo de metodologías para tratar con estructuras de datos cada vez más complicados que pueden estar sujetos a truncamiento y censura. Por otra parte, los métodos de supervivencia multivariante se han revelado de una gran utilidad y aplicación en epidemiología genética.

Pero este amplio conjunto de aplicaciones todavía representan sólo una pequeña muestra del total. El estimador límite producto de Kaplan y Meier, el test del logaritmo del rango de Mantel, y el modelo de regresión de riesgo proporcional son las técnicas indispensables de un gran plantel de estadísticos trabajando en ensayos clínicos en la industria, el gobierno y en el mundo académico. El hecho de que David Cox recibiera el premio *General Motors* de 1990 para investigación sobre cáncer clínico subraya el impacto enormemente beneficioso de su trabajo en la medicina clínica.

La medicina preventiva se ha visto no menos afectada por los conceptos y métodos del análisis de supervivencia. La medida epidemiológica clave, la razón de incidencia, está firmemente arraigada en la tradición de varios siglos de las tablas de vida, mientras que el más reciente concepto de riesgo relativo está basado en un ratio de tales índices. El modelo de riesgo proporcional dota de los fundamentos matemáticos a los métodos epidemiológicos clásicos de estimación de riesgo relativo.

En cuanto a los modelos jerárquicos, aunque se pueden implementar utilizando sólo el modelo mixto de ecuaciones y la estimación de componentes de la varianza por máxima verosimilitud restringida, las ventajas obtenidas al realizar un enfoque totalmente bayesiano son aparentemente mayores. Los cálculos MCMC, además, son esenciales para ajustar modelos con un gran número de efectos aleatorios.

Por otra parte, el método Bayes de selección de modelos se ha mostrado como muy útil en epidemiología cuando hay factores de exposición múltiple, como sucede, por ejemplo, al examinar la relación entre polución atmosférica y mortalidad. En la actualidad,

se están desarrollando con rapidez aplicaciones de MCMC para predicción espacial en problemas de datos de monitorización medioambiental (como por ejemplo la estimación de niveles de ciertos contaminantes en lugares que no pueden ser medidos). El motivo es que estas técnicas no tienen el inconveniente de los métodos geoestadísticos tradicionales, que necesitan realizar fuertes hipótesis sobre la estructura espacial.

No obstante, los bayesianos no están solos en su uso de MCMC y otros procedimientos computacionalmente intensivos. El bootstrap de Efron ha tenido también un impacto espectacular tanto en la teoría como en la práctica de la Estadística. Los modelos de captura-recaptura se han aplicado, entre otros contextos, a la estimación de parámetros demográficos de poblaciones de animales en libertad, tales como tamaño de población, supervivencia, migración, etc. De hecho, la continua interacción entre expertos en ecosistemas y estadísticos ha sido crucial para el desarrollo de dichos modelos de captura-recaptura (atrás quedaron ya los años en que una población animal se estudiaba a partir de una foto fija en el tiempo. Ahora sabemos que los datos así recogidos están sesgados y también sabemos cómo modificar la metodología estadística estándar para analizarlos).

Pero quizá el área más activa de la ciencia en este momento lo constituye el estudio del genoma. Cuatro líneas de investigación son las más relevantes en este campo: las dos más establecidas de localización de genes y análisis de secuencias y las dos más actual y rápidamente extendidas (en donde la Estadística interviene de un modo más importante), que son la predicción de estructura de proteínas y el análisis de datos de expresión de genes. Y es que, mientras en el siglo XX los esfuerzos estuvieron dedicados al análisis individual de los genes, en este nuevo siglo se plantea como objetivo el conocimiento conjunto de la naturaleza completa del genoma, a través de los datos genéticos.

Este pequeño listado que acabamos de hacer representa tan sólo una muestra de los fascinantes problemas estadísticos que aparecen en las ciencias médicas y de la vida, de las cruciales contribuciones hechas por estadísticos en este área, y de los conceptos y técnicas estadísticas que han conducido con éxito a su resolución. Pero sirven para confirmar que la Estadística del siglo XXI estará fuertemente influenciada por los desarrollos revolucionarios de la tecnología, particularmente en las ciencias biomédicas, y por la posibilidad de acceder a nuevos enormes volúmenes de datos geográficos, medioambientales, moleculares, etc.

Podemos acabar este punto mencionando el refuerzo de actividades de colaboración dado en el informe de 2002 de la National Science Foundation, que realiza el siguiente alegato: “La gran cantidad de datos producida por experimentos biológicos modernos y la variabilidad en la respuesta humana a la intervención médica produce una creciente demanda de estadísticos que pueden colaborar con biólogos e inventar nuevos métodos para

conducir diseños experimentales y análisis de datos biológicos. Existe así una necesidad de coordinar fondos a largo plazo para proyectos interdisciplinarios tales que el estadístico pueda ser capaz de desarrollar el entendimiento científico tan vital a la verdadera colaboración”.

II.- Estadística en la Empresa y las Ciencias Sociales

En cuanto al segundo contexto de análisis, el de la Estadística en la Empresa y las Ciencias Sociales, hay que destacar la importancia histórica y el papel del pensamiento y la metodología estadística en la evolución de los estudios en este área, así como la razonable seguridad de la consecución de continuas innovaciones en las intersecciones de la Estadística con esos campos de conocimiento. Los aspectos metodológicos más habituales de la Estadística en este área lo constituyen el análisis de series de tiempo y la predicción, las tablas de contingencia, y la inferencia causal. Por otra parte, atendiendo a las disciplinas en donde se aplica, la gama es extensa y variada, pero podemos citar como más representativas, las áreas de finanzas y el marketing, las ciencias políticas, la psicología, la sociología, la demografía y el derecho.

Por supuesto, no se pretende realizar aquí una revisión enciclopédica de todos estos temas y, ciertamente, se podrían haber incluido muchas otras técnicas adicionales de haber suficiente espacio y tiempo. Dicho esto, parece lógico destacar algunos de los tópicos que son recurrentes en todas las ramas científicas anteriormente citadas, como son el análisis de datos de panel, los modelos de ecuaciones estructurales, el análisis factorial y otras técnicas multivariantes, el análisis espacial, etc.

Puede parecer extraño que no haya comenzado este punto destacando el área de la Economía, pero su interrelación con la Estadística es tan fuerte que para explicar el papel de la Estadística en la Economía sería esencialmente necesario hacer una revisión de prácticamente todo el campo de la propia Estadística. En lugar de ello, me dedicaré a soslayar algunas de las numerosas referencias a los papeles que la Economía y los economistas han jugado en el desarrollo de metodología estadística dentro del campo de la administración de empresas y las ciencias sociales.

La Estadística y los mercados financieros han estado desde el comienzo fuertemente relacionados, pero en las últimas décadas, muchas de esas conexiones han llegado a ser una parte del núcleo de las finanzas modernas, y en la actualidad es imposible entender el trabajo sobre mercados financieros sin su ayuda. A este respecto, cabe destacar que el Premio Nobel de Economía de 2003 recayó en Robert Engle (compartido con Clive Granger), por “el empleo de métodos estadísticos en series económicas de tiempo, y

en concreto por los métodos de análisis de series temporales económicas con volatilidad temporal variable”.

Hay muchos ejemplos en los que la Estadística se ha convertido en indispensable para realizar análisis financieros. Así, el análisis multivariante, la entropía y otros conceptos de teoría de la información, se utilizan para resolver, con ciertas propiedades de optimalidad asintótica, el problema de la selección de la cartera de valores. Los métodos no paramétricos, como la suavización local y el algoritmo de remuestreo bootstrap son ya lugar común en la estimación y evaluación de modelos financieros, muchos de los cuales son altamente no lineales y basados en ingente cantidad de datos. Las wavelets, las máquinas de soporte vectorial y otros modelos de series de tiempo no lineales se han aplicado con éxito a los problemas de predicción financiera y administración del riesgo.

De igual modo, no es sorprendente que gran parte del desarrollo metodológico sobre los estudios empíricos de marketing tenga un cierto sabor estadístico, o que la literatura econométrica figure de modo prominente en cualquier revisión sobre series de tiempo y predicción. En cualquier caso, en los últimos años se ha originado una explosión en la cantidad y variedad de datos que son factibles para los investigadores de mercados. En particular los datos que provienen de comercio electrónico y marketing directo han crecido de modo exponencial y la tecnología basada en la web ha disminuido espectacularmente el coste de la obtención de datos de demanda. Ello ha impulsado la aplicación de modelos jerárquicos bayesianos, entre otros, que constituyen un planteamiento natural para realizar inferencias en este contexto.

En lo que respecta a la utilización de técnicas estadísticas en el área jurídica, se pueden destacar tres grandes ramas de aplicación: a) utilización de análisis empírico científico para hacer prevalecer un caso en un litigio (en este sentido, el ejemplo más importante se refiere a la identificación forense —recordemos la masiva utilización en la actualidad del ADN para estimar modelos probabilísticos de identificación de sujetos—), b) utilización de análisis empírico social en casos individuales (como puede ser el análisis de casos de discriminación —por ejemplo en el empleo—), y c) utilización de métodos empíricos para describir cómo opera el sistema legal (cuya consecuencia más importante puede ser la creación de ciertas políticas públicas —en este campo la bases de datos suelen ser fuertemente sesgadas y afectadas por la no-respuesta o la no-observación, por lo que se necesitan técnicas estadísticas no estándar—).

Por otra parte, en lo que se refiere a la utilización de tratamientos estadísticos en las ciencias políticas cuantitativas, puede citarse el final de la Segunda guerra Mundial como la época de la revolución de las ciencias del comportamiento en la metodología política, aunque ya se habían realizado serios intentos desde finales del siglo XIX. En realidad los

científicos políticos encuentran el enfoque econométrico más atractivo que el estadístico, porque, simplificando, éste último tiene como fin primario la evaluación de teorías (y por lo tanto, están más interesados en saber si un parámetro de un modelo es grande o pequeño, en lugar de la relación exacta que hay entre las variables). Es conocido el aforismo: si el modelo y los datos no son congruentes, el estadístico cuestiona el modelo, mientras que el economista cuestiona los datos. Es mi experiencia que ambas partes están de acuerdo con esto, y nadie se siente ofendido en esta descripción.

Por lo tanto, aunque los tipos de cuestiones que aparecen en los variados campos que se originan en la interconexión de la Estadística con las ciencias sociales varían en alguna medida, es claro que el pensamiento y la metodología estadística es una parte central del avance de nuestro entendimiento del comportamiento y las interacciones humanas. Las oportunidades presentadas por las nuevas y evolucionadas tecnologías para recoger más y mejores datos son abundantes, y sin duda continuarán motivando nuevas investigaciones y aplicaciones estadísticas durante muchos años. Un atractivo de la Estadística ha sido siempre su amplia aplicabilidad a interesantes e importantes problemas, y la anterior revisión es una muestra de las numerosas e intelectualmente desafiantes oportunidades para hacer valiosas contribuciones en distintas áreas.

III.- Estadística en las Ciencias Físicas y la Ingeniería

El último de los contextos que analizamos es el de la Estadística en las Ciencias Físicas y la Ingeniería, campo en el cual tienen su raíz muchos de los problemas reales a los que se enfrentaron los estadísticos a partir del siglo XIX. Así, por ejemplo, Box estudió diseños de superficies de respuesta trabajando con ingenieros químicos, Tukey desarrolló el análisis exploratorio de datos trabajando con ingenieros de telecomunicación, y Wald llevó a cabo la teoría de los tests de hipótesis secuenciales trabajando con ingenieros militares. Estos estadísticos tenían a la vez un fuerte sentido de lo que era importante en la correspondiente área de aplicación, así como un gran conocimiento de la metodología estadística que se necesitaba.

Las aportaciones de la Estadística en este área se desarrollan en muy variados campos de aplicación, comenzando con ciencias de la tierra y continuando con telecomunicación, control de calidad, monitorización y producción avanzada. Bajo una mirada superficial, esas materias tienen poco en común, pero comparten algunas similitudes profundas. Muchas de esas áreas, por ejemplo, se enfrentan a nuevas oportunidades y desafíos a causa de nuestra creciente habilidad para recoger extensas cantidades de datos. Cada vez con mayor frecuencia, la unidad de tamaño muestral en las ciencias físicas e ingeniería no es el número de observaciones, sino el número de gigabytes de espacio necesitado para almacenar los datos. Pero a pesar de los tremendos avances en potencia computacional,

el procesamiento de bases de datos tan extensas puede entrañar una gran dificultad, y la visualización, exploración y construcción de modelos para los datos puede ser aún más complicado. No obstante, una ventaja de trabajar con físicos e ingenieros es que muchos de ellos tienen años de experiencia diseñando sistemas de recogida, proceso y modelización de conjuntos masivos de datos, y los estadísticos pueden aprender de su experiencia. Lo importante es que muchos de estos avances están animando a los estadísticos a colaborar con especialistas de cualquier área, incluso de aquellos campos en las que esta colaboración era totalmente impensable hace sólo unos pocos años.

Una reflexión a tener en cuenta es que los modelos estadísticos por sí solos pueden ser insuficientes para resolver algunos problemas. Es necesario que incorporen los conocimientos de una teoría científica a la aleatorización. Por ejemplo, el problema de la predicción de terremotos, que actualmente está minando la credibilidad de los científicos que trabajan en este campo, requiere tanto una adecuada teoría de génesis y evolución sísmica, como la construcción de modelos estadísticos que respetan las leyes geofísicas y sean apropiados para datos altamente agrupados. Recordemos a Box: “todos los modelos son falsos, aunque algunos son útiles”.

Otro tanto puede decirse cuando se analiza el flujo de datos a través de Internet. Cuando se supervisa la bibliografía sobre este tema, un adjetivo emerge de manera recurrente para describir este tráfico: *feroz*. Las bases de datos son enormes, la topología de la red es vasta, las propiedades estadísticas son complejas, y el mecanismo de ingeniería es intrincado e introduce feedback en el tráfico. Para que los modelos estadísticos alcancen aquí el éxito necesario, es preciso que tengan en cuenta el conocimiento del entorno que rodea este complejo mecanismo.

Incluso en áreas de ingeniería en las que la incorporación de la Estadística tiene ya una larga tradición, como la fiabilidad y el control de calidad, a menudo surgen nuevos desafíos a la incorporación de la Estadística. Así, la degradación de productos en dinámica de medioambiente conduce a modelos como son los procesos puntuales multivariantes, para los cuales la inferencia está apenas desarrollada. Algunos investigadores comentan que hay una clara divergencia entre los métodos de control de calidad que los estadísticos proponen y los que realmente se necesitan, aunque en mi opinión, lo que en realidad se observa es una gran laguna entre el desarrollo metodológico y la investigación aplicada en esta área. Tukey ya comentaba que la investigación estadística no se debe concentrar en “buscar soluciones exactas a problemas erróneos sino en aproximar soluciones a problemas correctos”.

Uno de los desafíos a los que se enfrentan en la actualidad los estadísticos industriales está dedicado a la reducción del tiempo dedicado a estimar la vida de un producto. Los

investigadores están cambiando la experimentación física por construcción de modelos virtuales y técnicas CAD de diseño asistido en el ordenador. Esto representa un conjunto de oportunidades para los estadísticos, variando desde la verificación y validación de modelos al diseño eficiente de experimentos virtuales de alta dimensión. Por otra parte, los estadísticos han estado a menudo trabajando de modo aislado, y desarrollando enfoques parciales que ignoran información importante sobre procesos de manufactura multietapa secuencial. La complejidad de ambientes de fabricación avanzada implica que los estadísticos debemos trabajar junto con los ingenieros y tomar un enfoque de sistemas para mejorar el proceso. La combinación del análisis estadístico de los datos que entran en el proceso con la información sobre la arquitectura y secuencia conjunta, permite que la causa de la variabilidad del proceso sea diagnosticada más rápida y eficientemente.

Esta revisión que acabamos de hacer muestra las enormes oportunidades para los estadísticos de contribuir a realizar avances en las ciencias físicas y la ingeniería, mientras trabajan en la vanguardia de la metodología estadística. Hay una creciente sensación en este campo de que algunas ramas con un núcleo computacional, tales como la minería de datos, son las únicas técnicas estadísticas apropiadas para el entendimiento de datos complejos y masivos. Pero esto no es tanto una amenaza como una oportunidad para aprender nuevos modos de trabajar con datos y construir modelos. Una continua y quizá más seria amenaza, es la creencia de que la teoría estadística es dura, de nivel elevado y con un fin intelectual más valioso que el trabajo en aplicaciones estadísticas serias, lo que proyectaría una visión de que los estadísticos dedicados a realizar aplicaciones necesitan desarrollar teoría, pero los estadísticos dedicados a la construcción de teorías no necesitan realizar aplicaciones.

Por el contrario, todo lo que acabo de exponer pone de manifiesto que al desarrollar metodología para resolver problemas concretos en aplicaciones reales se consigue un fin también intelectualmente valioso, y es la mejor manera de asegurar que una teoría merece la pena.

No quisiera terminar sin agradecer a todos ustedes su atención, y al profesor Elipe, que hoy cesa en sus labores de Decano de nuestra Facultad de Ciencias, por haberme confiado el honor de impartir esta lección el día de nuestro patrono San Alberto.

Muchas gracias.

Organismos científicos internacionales

Rafael Núñez-Lagos Roglá *

Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza

Resumen

Este artículo está basado, esencialmente, en la conferencia que el autor impartió el 23 de octubre de 2006 en la sesión inaugural del SENATUS Científico de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. Se han añadido apéndices y se ha adaptado a un texto escrito. Tanto la conferencia como este artículo tienen la intención de dar a conocer, al público en general y al mundo científico en particular, los organismos científicos internacionales más relevantes y muy especialmente ICSU que es, con diferencia, el más importante y probablemente el más desconocido de todos ellos.

1 Introducción

Son muchos los organismos científicos internacionales que existen en la actualidad. La mayor parte de ellos son desconocidos, no sólo para el gran público, situación lógica teniendo en cuenta la incultura científica de nuestra sociedad, sino también por los propios científicos y esto es algo menos lógico y más preocupante. Sin embargo la función de estos organismos es importante y en muchos casos absolutamente fundamental para el desarrollo de la ciencia y la tecnología. ¿Quién decide, por ejemplo, que el símbolo del Americio es Am, en que frecuencia tiene que emitir el telescopio Hubble, las medidas a tomar con las epidemias, la predicción de los huracanes o cual es el valor de las constantes físicas? Tienen que ser, sin duda, organismos científicos y tecnológicos internacionales quienes no sólo son los que toman tales decisiones o hacen las advertencias y predicciones sino que gozan, además, del prestigio e influencia suficiente para que sus decisiones sean aceptadas por los científicos, ingenieros y técnicos e incluso por los políticos de todo el mundo.

La multitud de organismos, programas, consejos, comités, y demás instituciones que existen en relación con la ciencia y la tecnología se pueden agrupar en tres bloques:

*Académico de número. Catedrático Emérito de Física Atómica y Nuclear. *Senator* de la Facultad de Ciencias

- a.- Organismos creados por o bajo el paraguas de la Organización de Naciones Unidas.
- b.- Organismos Europeos
- c.- Organismos Independientes.

Entre los Organismos del sistema de Naciones Unidas, que analizaremos con más detalle más adelante, se encuentran:

- i.- La Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura, UNESCO,
- ii.- La Agencia Internacional de la Energía Atómica, IAEA,
- iii.- La Organización Mundial de la Salud, OMS,
- iv.- La Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación, FAO,
- v.- La Organización Meteorológica Mundial, OMM.

Las Naciones Unidas también tienen otros órganos y programas científicos como son:

- i.- La Universidad de las Naciones Unidas,
- ii.- El Instituto de las Naciones Unidas para la Formación y la Investigación,
- iii.- El Consejo Mundial de la Alimentación,
- iv.- El Programa Alimentario Mundial, y
- v.- El Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente.

Por último, la ONU tiene multitud de organismos, instituciones y programas que poco o nada tiene que ver con la ciencia y la tecnología como puedan ser UNICEF para la infancia o ACNUR para los refugiados.

El segundo grupo, el de Organismos Europeos, es más reducido y para la ciencia y la tecnología destacan sobre todos la Comunidad Europea de la Energía Atómica, EURATOM, y el Centro Europeo para la Investigación Nuclear, CERN.

Finalmente, entre los Organismos Científicos independientes se puede decir que, hoy día, prácticamente todos o forman parte del Consejo Internacional para la Ciencia, ICSU, o están bajo su ámbito.

2 Organismos creados por o bajo el paraguas de la Organización de Naciones Unidas.

2.1 *La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO)*

El organismo mundial de la ONU más conocido por los medios de difusión y el gran público es, sin duda, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, UNESCO, (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization).

Los fines para los que fue creada la UNESCO, de acuerdo con su documento fundacional, son los siguientes:

- i.- Difundir la educación,
- ii.- Sentar las bases científicas y técnicas necesarias para el desarrollo,
- iii.- Fomentar y conservar los valores culturales nacionales,
- iv.- Incrementar las comunicaciones y el intercambio de información entre los pueblos
- v.- Promover las ciencias sociales.

La UNESCO tiene su antecedente en el Organismo de Cooperación Internacional, creado en 1924 por la Sociedad de Naciones. Al final de la Segunda Guerra Mundial, Francia y Gran Bretaña convocaron a 44 países aliados a una conferencia celebrada en Londres, donde se pusieron las bases para la construcción de un nuevo organismo que sustituyese a la organización que desapareció a la vez que la Sociedad de Naciones. La conferencia se celebró entre el 1 y el 16 de noviembre de 1945 y la UNESCO se constituyó, oficialmente, el 4 de noviembre de 1946. La sede se estableció en París.

A lo largo de las décadas siguientes se pusieron de manifiesto los problemas inherentes a una organización con unos fines tan amplios y formada por tan heterogéneos miembros. Las profundas diferencias políticas, sociales y económicas entre los estados, la división en bloques ideológicos y las diferencias entre países ricos y pobres pronto dificultaron la consecución de las metas originales de la nueva organización, incluso la definición concreta de sus objetivos fue causa de agrias polémicas entre los países desarrollados y los subdesarrollados. A ese antagonismo hay que añadir las dificultades financieras, cuyos costosos programas no han podido ser siempre atendidos debido a la morosidad de algunos estados miembros en el pago de las cuotas e incluso a la retirada de algunos de ellos de capital importancia como los Estados Unidos. Esta situación ha obligado a la UNESCO a restringir sus ambiciones y concretar su misión, a más corto plazo, en una serie de actuaciones concretas, entre las que destacan:

- i.- La adopción de planes para la lucha contra el analfabetismo y la consecución de una educación universal, libre y obligatoria,
- ii.- La preservación del patrimonio histórico y cultural de la humanidad
- iii.- La difusión de los derechos humanos.

Estas actuaciones indican claramente la orientación que ha tomado esta organización respecto al tema que nos ocupa y donde queda claramente establecido que en la actualidad las acciones de la UNESCO poco o nada tienen que ver con la ciencia y la tecnología. El segundo fin establecido en la creación del Organismo, “sentar las bases científicas y técnicas necesarias para el desarrollo”, ha quedado, por el momento, aparcado u olvidado.

La UNESCO es el organismo de las Naciones Unidas con mayor amplitud en sus fines, aunque, probablemente por ello, es también el menos científico-técnico. A pesar de que la ciencia figura en su nombre, hace muy poco en el campo científico y su labor está prácticamente dedicada a lo que comúnmente se denomina cultura y educación. La UNESCO ha delegado en ICSU casi todo el tema científico a escala mundial. Son miembros de la UNESCO 191 estados y tiene además 6 miembros asociados.

2.2 La Agencia Internacional de la Energía Atómica (IAEA)

La Agencia Internacional de la Energía Atómica, IAEA (International Atomic Energy Agency), suena con cierta frecuencia en los medios de difusión. Los inspectores en Irak, el programa nuclear de Irán y Corea del Norte, etc. son buenos ejemplos actuales de la intervención mundial de este Organismo. La Agencia se creó después de la segunda guerra mundial y como consecuencia de ella. La IAEA es una organización internacional especializada en la problemática de la energía nuclear y su utilización con fines pacíficos.

La creación de la IAEA en la década de los cincuenta fue una respuesta a la inquietud existente en todo el mundo acerca del uso de la energía nuclear y la preocupación por su uso para fines bélicos. Las demandas internacionales acerca de la creación de un organismo que controlase el desarrollo y la utilización de la nueva tecnología fueron atendidas por la ONU (Resolución 810 de 4 de diciembre de 1954), que convocó en 1954 una conferencia, auspiciada por el presidente Eisenhower, sobre la utilización pacífica de esta fuente de energía. La reunión se celebró en agosto de año 1955 en Ginebra bajo el nombre de tomos para la Paz y fue la primera vez en que comenzaron a desvelarse los secretos de la ciencia y tecnología nuclear, sobre todo por parte de los Estados Unidos. En ella se creó la Agencia Internacional de la Energía Atómica, que celebró una primera reunión preparatoria en Nueva York en la que se aprobaron los estatutos de la nueva organización. La primera

Conferencia General de la Organización tuvo lugar en Viena en octubre de 1957 y sirvió para constituir formalmente la IAEA.

La IAEA nació como entidad supranacional vinculada a la ONU con el objetivo de conseguir que la energía nuclear se utilizase para fines pacíficos y contribuyese a la paz y la prosperidad de las naciones, así como para evitar que la tecnología ad hoc se pudiese utilizar para fines militares. Su sede permanente se encuentra en Viena y forman parte de ella 130 Estados. Tiene además cuatro oficinas regionales situadas en Ginebra, Nueva York, Toronto y Tokio y cuatro Centros de Investigación y Laboratorios situados en Viena y Seibersdorf en Austria, en Mónaco y en Trieste (Italia). La Agencia trabaja con sus Estados Miembros y Asociados para promover, en todo el mundo, una tecnología nuclear segura y pacífica.

La IAEA tiene tres misiones básicas o áreas de trabajo:

1. La Seguridad y Protección
2. La Ciencia y Tecnología
3. Las Salvaguardias y Verificación

Para implementarlas fomenta el desarrollo tecnológico, la investigación y el intercambio de información, facilita materiales y equipo, contribuye a la formación de personal especializado, promueve la conclusión de normativas internacionales sobre seguridad en instalaciones y establece controles sobre los materiales susceptibles de ser utilizados para la fabricación de armamento nuclear.

La IAEA colabora para el mejor cumplimiento de sus objetivos con otros organismos en los que se pueda hacer uso pacífico de las radiaciones y los isótopos radiactivos, como la Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO) en temas de filotecnia, filogenética, fertilidad de los suelos, lucha contra las plagas, riegos y producción, etc., la Organización Mundial de la Salud (OMS) en temas de lucha contra el cáncer y la utilización de radionucleidos para la investigación y diagnóstico de enfermedades, o el Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA) en el control de la radiactividad ambiental. Su Laboratorio para el Estudio de la Radioactividad en el Medio Marino, ubicado en Mónaco, realiza además de investigaciones propias, colaboraciones con otros organismos de investigación y universidades.

En todas sus áreas de actuación la IAEA es un organismo activo y básico para garantizar la seguridad nuclear y la protección radiológica a escala planetaria. Ha promovido y se encarga del seguimiento de acuerdos internacionales tan importantes como el Tratado de Prohibición de Pruebas Nucleares en la Atmósfera que se ha cumplido escrupulosamente

desde su puesta en vigor y el Tratado sobre No Proliferación de Armas Nucleares, que también se cumple estrictamente aunque hay países que no lo han firmado.

La Agencia presenta informes anuales a la Asamblea General de la Naciones Unidas y si es necesario al Consejo de Seguridad cuando, por ejemplo, existe el incumplimiento de algún acuerdo por parte de algún Estado o cuando se trata de materias que puedan afectar a la paz o la seguridad mundial.

2.3 La Organización Mundial de la Salud (OMS)

La Organización Mundial de la Salud OMS (WHO, World Health Organization) es el organismo de las Naciones Unidas especializado en salud y se creó el 7 de abril de 1948. Actúa como autoridad directiva y coordinadora en asuntos de salud internacional,

El objetivo de OMS es que todos los pueblos puedan gozar del grado máximo de salud que se pueda lograr, pero teniendo en cuenta que la Constitución de la OMS define la salud como un estado de completo bienestar físico, mental y social y no solamente como la ausencia de afecciones o enfermedades. Entre sus fines más relevantes podemos mencionar:

1. Ayudar a los distintos gobiernos a promover y fortalecer los servicios de salubridad,
2. Proporcionar a los gobiernos la ayuda técnica y la cooperación adecuada en casos de emergencia,
3. Estimular labores destinadas a suprimir enfermedades epidémicas, endémicas u otras
4. Fomentar la cooperación entre las agrupaciones científicas y profesionales que trabajen en pro de la mejora de la salud,
5. Promover convenciones, acuerdos y reglamentos en materia de salubridad internacional,

Para la consecución de esos objetivos, la OMS lleva a cabo una triple labor:

1. Prestación de servicios a escala mundial (información sobre nuevas enfermedades, elaboración de estadísticas mundiales, etc.)
2. Asistencia a países necesitados (asesoramiento para mejorar los servicios especializados, ayuda científico-técnica para combatir epidemias, etc.),
3. Fomento de la investigación médica mediante la creación de una red de laboratorios dedicados a la detección de organismos nocivos, la elaboración de nuevas vacunas, etc.).

La componen 193 Estados Miembros y su sede está en Ginebra.

2.4 La Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO)

La Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación FAO (Food and Agriculture Organization) fue fundada en 1945 y conduce las actividades internacionales encaminadas a erradicar el hambre en el mundo, aunque es evidente que con moderado éxito. Es el mayor organismo especializado de las Naciones Unidas y la primera organización internacional creada tras la Segunda Guerra Mundial.

La FAO se creó el 16 de octubre de 1945 en Québec, en una reunión en la que participaron 45 países como miembros fundadores. Su nacimiento se remonta a la Conferencia sobre Agricultura y Alimentación, celebrada en 1943 en la población estadounidense de Hot Springs y auspiciada por el presidente Roosevelt. En ella se reunieron los representantes de 44 naciones aliadas, que abordaron el enorme problema de cómo luchar contra el hambre tras el previsible final de la guerra. En esta conferencia se preparó el anteproyecto de lo que sería la FAO. La sede de la organización se fijó en Roma, ya que allí se encontraba el Instituto Internacional de Agricultura, antecedente de la FAO como organización dedicada al desarrollo agrícola y la lucha contra el hambre.

La FAO actúa como un foro neutral donde todos los países se reúnen en pie de igualdad para negociar acuerdos y debatir políticas agroalimentarias

La FAO tiene cuatro principales esferas de actuación:

1. Recoger y difundir información.
2. Compartir conocimientos especializados en materia de políticas de planificación
3. Ofrecer un lugar de encuentro para los países.
4. Asesorando a los gobiernos y fomentando la cooperación entre los estados.
5. Fomentar y extender el conocimiento científico, Agrícola, Forestal, Pesquero y sobre Alimentación Humana y Animal.

La Organización ayuda científica y técnicamente a los países en desarrollo y a los países en transición a modernizar y mejorar sus actividades agrícolas, forestales y pesqueras, con el fin de asegurar una buena nutrición para todos. La FAO cuenta con varias oficinas regionales.

2.5 La Organización Meteorológica Mundial (OMM)

Todos estamos pendientes del tiempo, pero la predicción meteorológica no es posible sólo con datos y observaciones locales, además el tiempo en superficie está dictado en gran

parte por las condiciones a unos cuatro o cinco mil metros de altura. Afortunadamente existe la Organización Meteorológica Mundial que coordina la actividad científica a escala planetaria para que la información meteorológica, y otros servicios, lleguen con rapidez y precisión cada vez mayores al público, al usuario privado y comercial, a la navegación aérea y a la navegación marítima internacional. La OMM es la voz científica y autorizada en todo cuanto concierne al estado y comportamiento de la atmósfera y del clima de la Tierra.

El antecedente inmediato de la OMM es la Organización Meteorológica Internacional, en funcionamiento desde 1878 y en cuya duodécima Conferencia de Directores, convocada en Washington en 1947, se adoptó el Convenio Meteorológico Mundial. En virtud de ese acuerdo se creó la nueva organización, cuyas actividades no habrían de iniciarse hasta un año después de la entrada en vigor del convenio (1950). Con apenas unos pocos meses de vida, a finales de 1951, la OMM firmó un acuerdo de colaboración con las Naciones Unidas por el cual adoptó el estatuto de organismo especializado perteneciente al sistema de esta entidad. La OMM ha puesto en marcha diversos proyectos que comprenden la coordinación de los datos de 9.200 estaciones de exploración terrestre, 1.000 de exploración en altura, 9 buques oceánicos y 7.400 buques mercantes que colaboran con ella, cinco satélites geoestacionarios entre ellos los dos Meteosat europeos y cuatro satélites circumpolares.

Tiene su sede en Ginebra y cuenta con 185 Miembros. Esencialmente sus fines son:

1. La predicción meteorológica
2. La predicción de las tormentas tropicales
3. La investigación sobre la contaminación del aire
4. El estudio el cambio climático
5. El estudio del agotamiento de la capa de ozono
6. La promoción del intercambio rápido de información meteorológica, la normalización de las observaciones meteorológicas y la investigación
7. El fomento de las aplicaciones de la meteorología a todos los campos como por ejemplo la navegación marítima y aérea, la agricultura, la hidrología, etc.

Gracias a la OMM tenemos información detallada y constantemente actualizada no sólo meteorológica sino también sobre la contaminación atmosférica y el clima.

3 Organismos Europeos

3.1 La comunidad Europea de la Energía Atómica (EURATOM)

EURATOM es una de las Comunidades iniciales de Europa junto a la del Carbón y del Acero y el Mercado Común. EURATOM es el nombre con el que oficialmente se conoce a la Comunidad Europea de la Energía Atómica. Se constituyó en el Tratado de Roma, de 1957, con la finalidad de contribuir al desarrollo pacífico de las industrias nucleares y elevar así el nivel de vida de los Estados que la componen y también constituyó un intento de crear un mercado común de materiales nucleares. Su historia, su desarrollo y su entrada en vigor se entremezclan con el tratado Constitutivo de la Comunidad Económica Europea. Los países que la formaron eran los mismos que constituyeron la CEE y hoy día la forman los 25 que constituyen la Unión Europea. Su sede está en Bruselas.

EURATOM fue inicialmente creado para coordinar los programas de investigación de los Estados con vistas a una utilización pacífica de la energía nuclear y actualmente contribuye a la puesta en común de conocimientos, infraestructuras y financiación de la energía nuclear. Su labor es esencialmente científica, tecnológica e industrial fomentando la investigación básica y aplicada en el campo nuclear y asegurando el funcionamiento de las industrias nucleares. Cuenta con presupuesto propio e independiente dentro de la Unión Europea.

Entre sus Objetivos podemos mencionar:

1. Garantizar la seguridad del aprovisionamiento de materiales y combustibles para la energía nuclear en el marco de un control centralizado.
2. Contribuir al desarrollo pacífico de las industrias nucleares.
3. Crear un mercado común de materiales nucleares.
4. Fomentar y desarrollar la investigación nuclear.

Gracias a EURATOM el precio de los combustibles nucleares ha sido y es muy estable y además el suministro de combustibles nucleares no ha presentado problemas, ha sido fluido y está garantizado. Un panorama que es muy diferente al del petróleo y el gas. Los países europeos que lo deseen pueden disponer, gracias a EURATOM, de una fuente de producción eléctrica, segura, eficiente, estable, competitiva y que no produce CO₂ como es la energía nuclear. Francia es el país de la Unión Europea que más se ha beneficiado, y se sigue beneficiando, de la existencia de EURATOM.

3.2 *El Centro Europeo de Investigación Nuclear (CERN)*

El CERN se creó en 1954 por acuerdo de 12 países como Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (Consejo Europeo para la Investigación Nuclear) y se estableció en los alrededores de Ginebra junto a la frontera francesa. Hoy día ocupa terrenos en ambas naciones y sus aceleradores subterráneos se ubican en túneles, de más de 36 km, que pasan por debajo de ciudades de ambos países. En la actualidad está integrado por 19 estados y cada uno de ellos aporta una contribución económica en función de su renta nacional. La investigación del CERN ha sido reconocida con seis Premios Nobel. Hoy día es conocido como Centro Internacional para la Física de Altas energías, aunque es con el acrónimo CERN con el que es mundialmente conocido.

El CERN es el mayor laboratorio del mundo, en él trabajan más de 3.000 científicos e ingenieros y si se cuentan los científicos que, prácticamente en todos los países del mundo desarrollado, trabajan en experimentos y proyectos del CERN la cifra puede aumentarse en un orden de magnitud. El CERN ha sido y es una fuente de ciencia y tecnología a escala planetaria. Algunas de sus invenciones han tenido una trascendencia increíble como internet y la célebre www que se desarrolló para poder enviar datos experimentales a los distintos laboratorios de los países que colaboraban en las experiencias que se realizaban en los laboratorios de Ginebra.

En España hay unos 200 físicos que trabajan en los experimentos del CERN que constituyen quince grupos de investigación en Universidades y además hay grupos en el Ciemat (Centro de investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas) y en CSIC (Consejo Superior de investigaciones Científicas). En el mundo hay grupos en unas 500 universidades pertenecientes a 80 países.

4 **Organismos Independientes (ICSU)**

4.1 *Uniones Científicas e ICSU*

La organización científico-técnica mundial es mucho más antigua que la Organización de Naciones Unidas y la Unión Europea. La necesidad de alcanzar acuerdos para hablar un lenguaje común y universal por parte de los científicos, hizo, que en el último cuarto del siglo XIX, en 1875, se estableciera en París la Convención del Metro, que fue firmada inicialmente por 17 estados. Con ello las unidades fundamentales y el sistema métrico decimal comenzaron a ser universalmente aceptados por los científicos. La tecnología ha tardado más en aceptar la normativa de la Convención del Metro y el mundo anglosajón y su área de influencia sigue utilizando, incluso hoy día, las pulgadas, las libras, los galones, etc. La sociedad civil se ha familiarizado al pasar el tiempo con la convención del metro y lo utiliza sin grandes problemas debido fundamentalmente a la adopción, por

parte de los estados signatarios de la Convención, como únicas unidades oficiales para las transacciones comerciales las de longitud, el metro, la masa, el kilogramo, el tiempo, el segundo, la temperatura el grado centígrado y el sistema decimal para su expresión.

El desarrollo científico, tecnológico e industrial de finales del siglo XIX y comienzos del XX forzaron a mayores acuerdos entre científicos y tecnólogos y comenzaron a gestarse y crearse las Uniones Científicas. De ellas en nuestro ámbito de la Facultad de Ciencias destacan la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada, (IUPAP), la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada, (IUPAC) y la Unión Internacional de Matemáticas (IMU), todas ellas fundadas en 1922 ente otros países por España que ha permanecido en ellas ininterrumpidamente hasta nuestros días. Junto a ellas se han ido creando, con el tiempo, otras Uniones Científicas en Geología y Biología y en todos los demás campos de la ciencia y tecnología. Hoy día existen 30 Uniones Científicas.

Las Uniones Científicas son a su vez, cada una de ellas, organismos científicos internacionales, los más importantes en su campo, con estructuras y fines bien definidos, de las que forman parte Estados y que, generalmente, tienen en su seno decenas de Comisiones Internacionales específicas para abordar ciertos temas, grupos de trabajo, etc.

Las Uniones Científicas desarrollaron su labor muy eficaz y provechosamente y pronto se sintió la necesidad de coordinar los trabajos de muchas de ellas, pues la ciencia no es estanca y las fronteras de los campos se solapan creando zonas de interés común a varias de ellas. Por ejemplo la nomenclatura química afecta no sólo a los químicos, sino también a físicos y biólogos, todos ellos deben estar de acuerdo y seguir las mismas pautas, utilizar los mismos valores para las constantes, etc. Las Uniones Científicas a su vez se unieron y crearon, en 1931, en Paris ICSU, acrónimo de International Council of Scientific Unions. Hoy día tres cuartos de siglo después ICSU es, con gran diferencia, la mayor y más importante organización científica mundial. ICSU es una organización no gubernamental y desde sus inicios se pensó no sólo como la reunión de las Uniones Científicas Internacionales sino como un organismo que también reuniese a Estados. Cada Estado está representado por una única institución, que ha de ser tal que sea capaz de llevar la voz de todas sus comunidades y organismos científicos y que tenga además un carácter económico-ejecutivo en el ámbito científico. El objetivo primordial de ICSU es promover la actividad científica internacional en las diferentes ramas de la ciencia y sus aplicaciones en beneficio de la humanidad.

España también fue fundadora de ICSU y ha permanecido en la organización desde entonces. Con el tiempo ICSU fue creando y acogiendo en su seno a nuevas Uniones Científicas a la vez que fue constituyendo comités y comisiones para tratar con problemas o temas específicos, por ejemplo la Comisión Internacional sobre Aguas Superficiales o el Sistema para la Observación del Cambio Climático, en otros casos da apoyo y cobijo a or-

organizaciones internacionales existentes. En 1998 en una reunión extraordinaria celebrada en Viena se consideró que las misiones y acciones de ICSU quedarían mejor reflejadas si su nombre fuese Consejo Internacional para la Ciencia (International Council for Science) y así se acordó pero manteniendo el acrónimo ICSU con el que es conocida.

En España fue la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Madrid la que firmó la adhesión y creación de ICSU en 1.931, situación que se mantuvo hasta que con la creación del Consejo Superior de Investigaciones Científicas pasó a ser este organismo el que representaba a España y a los científicos españoles. Con posterioridad fue la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) la que pasó a abonar las cuotas y a representar nuestra ciencia, funciones que traspasó a la Oficina de Ciencia y Tecnología (OCYT). Con su creación el Ministerio de Ciencia y Tecnología, absorbió las funciones económicas y de representación en ICSU y en la actualidad es el Ministerio de Educación y Ciencia a través de su Subdirección General de Programas y Organismos Internacionales el que tiene esta responsabilidad. Pero toda esta pertenencia se ha limitado, hasta muy recientemente, simplemente al abono de las cuotas.

Hoy día el Consejo Internacional para la Ciencia es la organización de mayor importancia y trascendencia científica y tecnológica que existe en el mundo. ICSU tiene en la actualidad 107 miembros que tienen derecho a voto en las Asambleas Generales que se celebran cada 3 años, de ellos 30 son Uniones Científicas que pueden verse en el apéndice 1 y 77 son Miembros Científicos Nacionales, Estados, que abonan las cuotas correspondientes y representan a los científicos del país correspondiente . Se encuentran relacionados en el apéndice 2,

Existen además en el seno de ICSU muchos otros organismos como son 16 organismos interdisciplinarios, que pueden verse en el apéndice 3, de los cuales 2 son organismos evaluadores como SCOPE, el Comité Científico sobre Problemas del Medio Ambiente; 6 comités temáticos, entre los que se encuentran COSPAR, Comité para la Investigación Espacial y SCAR, Comité Científico para la Investigación Antártica; 5 organismos de información y datos como CODATA, Comité sobre Datos para la Ciencia y la Tecnología o FAGS Federación de Servicios para Análisis de Datos Astronómicos y Geofísicos y por último 3 servicios permanentes como IUCAF Comisión Inter-uniones para la Asignación de Frecuencias para Radioastronomía y Ciencias Espaciales.

Junto a lo anterior ICSU tiene 11 iniciativas conjuntas, que figuran en el apéndice 4, de las cuales 5 son programas medioambientales globales como WCRP, Programa mundial de investigación sobre el clima; 4 organismos de observación y control como GCOS Sistema de observación del clima global y 2 programas de profesorado y becas.

Hay además 29 asociados científicos a ICSU, listados en el apéndice 5, de los cuales 26 son asociados internacionales como por ejemplo IRPA, Asociación Internacional de

Protección Radiológica y los otros 3 son asociaciones regionales como ACAL, Academia de Ciencias de América Latina, es decir son a su vez asociaciones de organismos científicos internacionales de una región del globo.

Por último ICSU tiene 9 acuerdos con entes intergubernamentales entre ellos con la UNESCO, la IAEA y la OCDE que puden verse en el apéndice 6.

ICSU ha firmado además 50 Acuerdos de colaboración con Organizaciones Internacionales, entre ellos con la ISO Organización Internacional para la Estandarización (International Organization for Standardisation); el BIPM , Oficina Internacional de Pesas y Medidas (Bureau International des Poids et Mesures) o el CERN Centro Internacional para la Física de Altas energías.

ICSU tiene, implementa y exige a sus miembros una política de no discriminación reafirmando los derechos y la libertad de los científicos de poder realizar su actividad científica en cualquier parte del mundo sin tener en cuenta la nacionalidad, religión, creencias, régimen político, origen étnico, raza, color, lengua, edad o sexo. Promueve la libertad de movimiento de los científicos, promueve la apertura y acceso de todos los científicos a las grandes instalaciones y promueve el acceso de todos los científicos a la información científica.

4.2 España e ICSU

En España, instituciones científicas y sociedades, se han adherido a lo largo del tiempo a distintas Uniones Científicas Internacionales, Comités, Comisiones, etc. algunas como hemos visto, desde su creación, pero siempre a título individual y abonando las cuotas de sus propios fondos. Aunque a partir de los años 90 la Cicyt comenzó a hacerse cargo de estos gastos lo hizo sólo para algunas Uniones Científicas y para ICSU pero sin un criterio de acción a ningún plazo. Todas las Uniones Científicas Internacionales tienen en cada país un Comité Local (Liaison Committee) que es el encargado, entre otras funciones, de extender y explicar en el país las decisiones de la Unión y llevar a la Unión la problemática de los científicos del país. En España cada Comité, cuando existía, se defendía como podía e incluso había Uniones que no tenían ningún comité, aunque si científicos trabajando con la Comisión Internacional.

Respecto a ICSU la situación de España era tragicómica. España había sido fundadora de ICSU y había abonado religiosamente las cuotas, incluso durante la guerra civil. Sin embargo hasta 1.996 jamás había asistido ningún representante de España a ninguna Asamblea General, que es el órgano supremo de decisión que se reúne cada tres años, ni tampoco España había participado nunca, como Estado, en ninguna de sus comisiones y consejos directivos.

Después de asistir a aquella asamblea, y a la de 1.999 como único representante de España, he realizado multitud de gestiones e informes con buenas palabras y pocos resultados. Finalmente hace unos dos años el MEC comenzó a tomarse en serio su política científica internacional y tras varias reuniones y mucho trabajo el proceso ha culminado con el reconocimiento, institucionalización y puesta en marcha de los Comités Científicos Españoles de las distintas Uniones Científicas, Programas y Comisiones Internacionales en los que participa España o hay científicos españoles. Se han aprobado oficialmente unos reglamentos de funcionamiento, que cada Comité se ha dado a si mismo con arreglo a su historia y sus peculiaridades y con arreglo a las instrucciones generales comunes a todos ellos, dotándoles de esta manera de una estructura. Se les habilitan vías para que puedan solicitar fondos para sus actividades, asignándoles un presupuesto, abonando su cuotas correspondientes, etc. junto a todo ello, los responsables de cada Comité, que ha resultado elegidos por sus miembros, tienen los consiguientes nombramientos ministeriales. No solo existen, por fin, oficialmente en España las Uniones Científicas y los Programas Científicos Internacionales y el Ministerio tiene pleno conocimiento y conciencia de ello sino que también existe ICSU. Se ha constituido la Comisión Española del Comité Internacional de la Ciencia ICSU, CE-ICSU, organismo del que son vocales todos los presidentes de todos los Comités Científicos Españoles de todas las Uniones Científicas y Programas Científicos Internacionales presentes en España. Está presidido por el Secretario General de Política Científica y Tecnológica del Ministerio de Educación y Ciencia, actualmente el que fue Profesor de esta Universidad D. Francisco Marcellán y tiene dos vicepresidentes, uno nombrado por el Ministerio, que ha designado a D Violeta del Monte, Directora General de Investigación y otro elegido por los Vocales que en este momento, después de la primera asamblea constitutiva celebrada en diciembre de 2005, es quien escribe estas líneas. Tiene sus normas de funcionamiento, los nombramientos correspondientes y su presupuesto. En el apéndice 7 se encuentra el listado de todas las organizaciones que constituyen CE-ICSU. A la última Asamblea general de ICSU de 2005 han asistido, por fin, miembros del Ministerio. (A la de 2002 no asistió nadie).

Esta Comisión es el órgano colegiado de los representantes de los Comités Científicos Nacionales y del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). Tiene como función primordial la de coordinar las actuaciones de política científica del MEC con la desarrollada a nivel internacional por ICSU y con la de las actuaciones de los Comités Científicos Nacionales ICSU, para mejorar la visibilidad y la promoción internacional del Sistema Español de Ciencia, Tecnología e Innovación.

La Comisión Española ICSU será la encargada de velar por los intereses de los distintos Comités ante los Organismos Nacionales, incluido el propio Ministerio, e internacionales.

La CE-ICSU tratará de :

1. Identificar y canalizar en España los temas científicos más importantes para la sociedad tanto nacional como internacional.
2. Facilitar la interacción entre las distintas disciplinas científicas.
3. Promover la participación de los científicos españoles en los programas científicos nacionales e internacionales.
4. Proporcionar información y consejo experto e independiente a las autoridades y organismos que lo requieran tanto públicos como privados.

Espero y deseo que esta labor se consolide con su quehacer diario y no quede inoperante por los avatares y envidias políticas tan frecuentes en nuestro país.

ICSU y todas las Uniones y Comisiones que forman parte o se coordinan en ella realizan una labor constante, generalmente callada y discreta, pero son los que hacen que la ciencia y la tecnología progresen y sean verdaderamente universales. Como consecuencia consiguen que realmente la ciencia, y en lo posible la tecnología, esté al alcance de los científicos y tecnólogos de todo el mundo y se desarrolle, con la cooperación de todos, la humanidad.

5 Información y Bibliografía

Hay multitud de páginas de Internet de donde se puede obtener información específica. Prácticamente todos y cada uno de los organismos a los que se ha hecho referencia tiene su página web. El Ministerio de Educación y Ciencia tiene en su página web www.mec.es, la selección de Ciencia y Tecnología, cooperación internacional, o directamente la página www.mec.es/ciencia/cooperacion, desde ahí en Comisión Española ICSU se tiene información detallada. ICSU tiene su página web www.icsu.org donde se encuentra información actualizada y se puede realizar la suscripción gratuitamente a ICSU Newsletter. Las Uniones Científicas tienen, cada una, sus respectivas páginas web donde se encuentra información detallada.

Agradecimientos

Agradezco al Decano de la Facultad de Ciencias Prof. Antonio Elipe el haberme dado la oportunidad de impartir la conferencia en la inauguración del SENATUS Científico así como el permitirme el publicar este artículo.

Apéndice 1.- Uniones Científicas Internacionales (30) con su acrónimo y la fecha de su constitución o incorporación a ICSU.

IAU	Int. Astronomical Union (1922)
IBRO	Int. Brain Research Organization (1993)
IGU	Int. Geographical Union (1923)
IMU	Int. Mathematical Union (1922)
ISPRS	Int. Society for Photogrammetry and remote Sensing (1968)
IUPAB	Int. Union for Pure and Applied Biophysics (1966)
IUPESM	Int. Union for Physical and Engineering Sciences in Medicine (1999)
INQUA	Int. Union for Quaternary research (1928)
IUAES	Int. Union of Anthropological and Ethnological Sciences (1993)
IUBMB	Int. Union of Biochemistry and Molecular Biology (1955)
IUBS	Int. Union of Biological Sciences (1925)
IUCr	Int. Union of Crystallography (1947)
IUFosT	Int. Union of Food Science and Technology (1996)
IUFRO	Int. Union of Forest Research Organizations (2005)
IUGG	Int. Union of Geodesy and Geophysics (1922)
IUGS	Int. Union of Geological Sciences (1961)
IUHPS	Int. Union of the History and Philosophy of Science (1947-1956)
IUIS	Int. Union of Immunological Societies (1976)
IUMRS	Int. Union of Material Research Societies (2005)
IUMS	Int. Union of Microbiological Societies (1982)
IUNS	Int. Union of Nutritional Sciences (1968)
IUPHAR	Int. Union of Pharmacology (1972)
IUPS	Int. Union of Physiological Sciences (1955)
IUPsyS	Int. Union of Psychological Science (1982)
IUPAB	Int. Union for Pure and Applied Biophysics (1966)
IUPAC	Int. Union of Pure and Applied Chemistry (1922)
IUPAP	Int. Union of Pure and Applied Physics (1922)
IUSS	Int. Union of Soil Sciences (1993)
IUTAM	Int. Union of Theoretical and Applied Mechanics (1947)
IUTOX	Int. Union of Toxicology (1996)
URSI	Union Radio Scientifique International (1922)

Apéndice 2.- Listado oficial de Estados Miembros de ICSU (77)

Argentina, Armenia, Australia, Austria, Azerbaijan (Observer),
Bangladesh, Belarus (Observer), Belgium, Bolivia, Brazil ,Bulgaria, Burkina Faso (Associate),
Cameroon (Associate), Canada , Caribbean Associate, Chile, China, China: Taipei,
Colombia, Costa Rica, (Observer), Cte d'Ivoire (Associate), Croatia, Cuba, Czech Republic,
Denmark ,
Egypt Arab Rep of, Estonia, Ethiopia,
Finland, France,
Georgia (Associate), Germany, Ghana, Greece, Guatemala (Associate),
Hungary,
India, Indonesia, Iran Islamic Rep. Of, Iraq, Ireland, Israel, Italy,
Jamaica, Japan, Jordan (Associate),
Kazakhstan (Associate), Kenya, Korea Democratic People (Observer), Korea Republic of,
Latvia, Lebanon, Lithuania, Luxembourg,
Macedonia, Former Yugos, Madagascar (Associate), Malaysia, Mauritius, Mexico, Moldova (Observer),
Monaco Principauté de, Mongolia, Montenegro, Morocco, Mozambique (Associate),
Nepal, Netherlands, New Zealand, Nigeria, Norway,
Pakistan, Panama, Peru, Philippines, Poland, Portugal,
Romania, Russian Federation,
Saudi Arabia Kingdom of, Senegal (Associate), Serbia, Seychelles (Associate), Singapore,
Slovak Republic, South Africa, **Spain**, Sri Lanka, Sudan Republic of, Swaziland (Observer),
Sweden, Switzerland,
Tajikistan (Observer), Tanzania, Thailand, Togo, Tunisia (Associate), Turkey,
Uganda (Associate), Ukraine, United Kingdom, United States, Uruguay (Observer), Uzbekistan Republic of,
Vatican City State, Venezuela (Observer), Vietnam (Observer),
Zimbabwe.

Apéndice 3.- Organismos Interdisciplinarios de ICSU (16)

ÓRGANOS EVALUADORES. (2)

- MA Millennium Ecosystem Research
- SCOPE Scientific Committee on Problems of the Environment

COMITÉS TEMÁTICOS (6)

- COSPAR Committee on Space Research
- SCAR Scientific Committee on Antarctic Research
- SCL Scientific Committee on the Lithosphere
- SCOR Scientific Committee on Oceanic Research
- SCOSTEP Scientific Committee on Solar-Terrestrial Physics
- ICSU-TWAS- UNESCO-UNO/IAS Visiting Scientific Program

ORGANISMOS DE INFORMACIÓN Y DATOS. (5)

- CODATA Committee on Data for Science and Technology
- FAGS Federation of Astronomical and Geophysical Data Analysis Services.
- INASP International Network for the Availability of Scientific Publications
- IUCAF Scientific Committee on Frequency Allocation for Radio Astronomy and Space Science
- WDC Panel on World Data Centre

SERVICIOS PERMANENTES, PANELES Y COMISIONES (3)

- FAGS Permanent Service for the Federation of Astronomical and Geophysical Data Analysis Services
- WDC Panel on World Data Centres (Geophysical, Solar and Environmental
- IUCAF Inter-Union Commission on Frequency Allocations for Radio Astronomy and Space Science

Apéndice 4.- Iniciativas Conjuntas de ICSU (11)

PROGRAMAS MEDIOAMBIENTALES GLOBALES. (5)

COSTED-IBN	Committee on Science and Technology in Developing Countries – International Biosciences Networks
IGCP	International Geological Correlation Programme
WCRP	World Climate Research Programme
DIVERSITAS	An Integrated Programme of Biodiversity Science
IHDP	International Human Dimensions of Global Environmental Change Programme

ORGANISMOS DE OBSERVACIÓN Y CONTROL (4)

GCOS	Global Climate Observing System
GOOS	Global Ocean Observing System
GTOS	Global Terrestrial Observing System
IGOS	Integrated Global Observing System

PROGRAMAS DE PROFESORADO Y BECAS (2)

	Lectureship/Professorship in Science and Sustainable Development
	UNESCO/ICSU/TWAS Short-Term Fellowship Programme in the Basic Sciences

Apéndice 5 Asociados Científicos a ICSU (29)

ASOCIADOS INTERNACIONALES (26)

ECOR	Engineering Committee on Oceanic Resources
IASC	Int. Arctic Science Committee
IAHR	Int. Association of Hydraulic Engineering and Research
ICA	Int. Cartographic Association
ICRO	Int. Cell Research Organization
ICO	Int. Commission for Optics
ICLAS	Int. Council for Laboratory Animal Science
IUCC	Int. Union Against Cancer
ICSTI	Int. Council for Scientific and Technical Information
IFIP	Int. Federation for Information Processing
IFLA	Int. Federation of Library Associations and Institutions
IFSE	Int. Federation of Science Editors
IFSM	Int. Federation of Societies for Microscopy
FIG	Int. Federation of Surveyors
IDF	Int. dairy Federation
IFS	Int. Foundation for Science
IIASA	Int. Institute for Applied Systems Analysis
IRPA	Int. Radiation Protection Association
ISE	Int. Society of Endocrinology
IUVSTA	Int. Union for Vacuum Science, Technique and Applications
IWA	Int. Water Association
PSA	Pacific Science Association
IUFRO	Int. Union of Forestry Research
FID	Int. Federation for Information and Documentation
ISPRS	Int. Society for Photogrammetry and Remote Sensing
IUPESM	Int. Union for Physical and Engineering Sciences in Medicine

ASOCIADOS REGIONALES (3)

ACAL	Academia de Ciencias de América Latina
TWAS	Academy of Sciences for the Developing World
FASAS	Federation of Asian Scientific Academies and Societies

Apéndice 6.- Relaciones de ICSU con Organismos Internacionales (9)

UNESCO	United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
WMO	World Meteorological Organization
IAEA	International Atomic Energy Agency
ITU	International Telecommunications Union
FAO	Food and Agricultural Organization
WHO	World Health Organization
UNEP	United Nations Environmental programme
ECOSOC	Economic and Social Council
EC	European Council

Apéndice 7.- Comisiones Científicas que Constituyen CE-ICSU (21)

C.C. CEICAG	Comité
C.C. DIVERSITAS	(Int. Programme of Biodiversity Science)
C.C. ICLAS	(Int. Council for Laboratory Animal Science)
C.C. IGBP	(Int. Geosphere Biosphere Programme)
C.C. IHDP	(Int. Human Dimensions Programme on Global Environmental Change)
C.C. IMU	(Int. Mathematical Union)
C.C. INQUA	(Int. Union for Quaternary Research)
C.C. IUBMB	(Int. Union of Biochemistry and Molecular Biology)
C.C. IUBS	(Int. Union of Biological Sciences)
C.C. IUCr	(Int. Union of Crystallography)
C.C. IUGS.	(Int. Union of Geological Sciences)
C.C.IUHPS/DHST	(Int. Union of History and Philosophy of Science Division of History of Science and Technology)
C.C. IUPAB	(Int. Union of Pure and Applied Biophysics)
C.C. IUPAC	(Int. Union of Pure and Applied Chemistry)
C.C. IUPAP	(Int. Union of Pure and Applied Physics)
C.C. IUTOX	(Int. Union of Toxicology)
C.C. SCAR	(Scientific Committee on Antarctic Research)
C.C. SCOPE	(Scientific Committee on Problems of the Environment)
C.C. SCOR	(Scientific Committee of Oceanic Research)
C.C. URSI	(Int. Union of Radio Science)
C.C. WCRP	(World Climate Research Programme)

Nuevo modelo de renovación para la recurrencia de terremotos en una falla

Nico L. Abadías¹, Álvaro González², Javier B. Gómez²
y Amalio F. Pacheco¹

(1) Departamento de Física Teórica

(2) Departamento de Ciencias de la Tierra

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza. España.

Resumen

A new probability distribution, discrete and with only one parameter, is introduced. It is devised to describe the frequency distribution of the duration of seismic cycles (time intervals between large earthquakes in a fault) when the sequence of cycles has an aperiodicity between $\simeq 0,47$ and 1. This distribution results from a renewal model which is based on a reduction of states (coarse-graining type) of the so-called Box Model [González *et al.* (2005): The occupation of a box as a toy model for the seismic cycle of a fault. *Am. J. Phys.*, 73 (10), 946–952]. The new probability distribution is formed by a difference between two geometrical distributions, and solves the inability of the Box Model to describe sequences of cycles with aperiodicity larger than $\simeq 0,47$.

1. Introducción

La mayor parte de los terremotos que se generan en la parte superior, frágil, de la corteza terrestre tienen su origen en el desplazamiento brusco de un bloque de corteza respecto a otro a lo largo de una fractura denominada *falla*. Este mecanismo de generación esporádica de terremotos se explica, desde hace casi un siglo, por la *teoría del rebote elástico*, formulada por Harry F. Reid [1] tras analizar el origen del gran terremoto de San Francisco de 1906. Según esta teoría, fuerzas tectónicas deforman lentamente los bloques de roca separados por una falla, y cuando se alcanza un cierto umbral de resistencia en ésta, los bloques se mueven rápidamente uno con respecto a otro a lo largo de la falla, reduciéndose así la energía elástica acumulada en ella. Las vibraciones producidas, por este

movimiento brusco, en el medio que rodea a la falla son las ondas sísmicas que registran los sismómetros.

El proceso descrito se repite cíclicamente, y se denomina *ciclo sísmico* al intervalo de tiempo transcurrido entre dos grandes terremotos generados por una misma falla [2]. Pese a su ciclicidad, este fenómeno no es periódico: los ciclos sísmicos de una falla tienen diferentes duraciones unos de otros. La aperiodicidad de una serie de estos ciclos suele cuantificarse [3, 4, 5, 6] con el llamado *coeficiente de variación*: la desviación estándar de la duración de los ciclos, dividida por la duración media. Este coeficiente adimensional es nulo si la serie es perfectamente periódica; entre cero y uno si es cuasiperiódica; la unidad si aquélla es puramente aleatoria (esto es, generada por un proceso de Poisson); y más de uno si los eventos suceden en grupos temporales que a su vez están separados entre sí por intervalos mucho más largos [6]. El coeficiente de variación de las series de ciclos sísmicos en fallas reales suele ser inferior a uno, y, de hecho menor que 0.5 en la mayoría de los casos [3, 5].

Todavía no se conoce bien cuál es la distribución de probabilidad de duración del ciclo sísmico en cada falla (la función que indica cuán frecuentes son los ciclos sísmicos de distintas duraciones). Esta ignorancia se debe a que, para cualquier falla concreta, sólo se tiene registro (histórico o geológico) de los últimos pocos ciclos, generalmente no más de diez [7]. Este es un número demasiado pequeño como para caracterizar en detalle la distribución empírica de probabilidad, así que lo habitual es ajustar alguna distribución teórica a los datos disponibles acerca de la duración de los ciclos reales. Toda distribución que se utilice tendría que poseer las siguientes propiedades, observadas habitualmente en las series de ciclos sísmicos reales [8]:

1. Obviamente, *el tiempo transcurrido entre terremotos es una cantidad positiva*, así que la distribución sólo debiera existir para valores positivos de las abscisas. Esto no ocurre, por ejemplo, en la distribución Gaussiana [8].
2. *Los ciclos muy breves, comparados con la media de la serie, son escasos o inexistentes*. sta es la causa de que las series de ciclos sísmicos reales suelen tener aperiodicidades bajas [4, 5]. La explicación física de esta escasez de ciclos breves es que, según la teoría del rebote elástico, se necesita un tiempo mínimo para que la falla, por lenta deformación tectónica, acumule suficiente energía elástica como para generar un nuevo gran terremoto. A este hecho se le denomina en ocasiones *sombra de esfuerzo* (*stress shadow* [9]), y supone que el momento en el que ocurre un gran terremoto depende de cuándo ocurrió el previo. Debido a esta dependencia, es probable que los ciclos sísmicos de las fallas no resulten de un proceso de Poisson [4, 10], puesto que en éste los eventos son independientes entre sí.
3. *La probabilidad es siempre decreciente para duraciones mucho mayores que la du-*

ración media. Existen bastantes ciclos de duración mayor que la típica, aunque son más escasos cuanto mayor sea la duración que se considere.

Hay varias distribuciones estadísticas con las tres características mencionadas. Las tres más comúnmente usadas para describir la distribución de ciclos sísmicos son la lognormal, gamma y Weibull [3, 8, 11, 12]. Recientemente se han propuesto otras, que se derivan de modelos físicos numéricos muy idealizados de cómo se acumula la energía elástica en una falla y se relaja en forma de terremotos. Estos modelos son el de *Brownian Passage Time* [3, 4, 8, 10, 13], el *Modelo Minimalista* [12, 14, 15, 16, 17], y el *Modelo de Caja (Box Model o BM)* [18, 19]. Todas estas distribuciones son capaces de ajustarse razonablemente bien a los datos disponibles sobre la duración de los ciclos reales.

Estas funciones de distribución de la duración de los ciclos se pueden emplear para estimar cómo varía con el tiempo la probabilidad de que se produzca el nuevo gran terremoto en la falla. Este método consiste en considerar que estos eventos siguen un *proceso de renovación* [11, 20, 21], de manera que la duración de cada ciclo es una variable aleatoria, independiente de los ciclos anteriores, y distribuída según la función considerada. Cada distribución proporciona una estimación de probabilidad diferente, de ahí la importancia de seguir contrastando estas distribuciones y buscando otras nuevas.

En este artículo nos proponemos paliar una limitación que presenta el BM: este modelo no es apto para series de ciclos sísmicos relativamente aperiódicas (con coeficiente de variación mayor que $\simeq 0,47$). En el BM [18] la energía (o deformación) elástica acumulada en una falla se idealiza mediante una variable de estado adimensional. Al comienzo de un ciclo, el valor de esta variable es cero. A lo largo del ciclo, la variable va aumentando hasta un valor umbral constante N , que es el único parámetro del modelo. Cuando esto ocurre, se genera un terremoto, que reduce la variable a su valor inicial nulo, dando comienzo a un nuevo ciclo. El proceso de aumento paulatino de esa variable de estado a lo largo del ciclo es aleatorio, lo que causa que la duración de los ciclos varíe de uno a otro. Este modelo se puede describir también como el proceso de llenado estocástico de una caja (de ahí su nombre [18]), con N huecos, donde la variable de estado representa el número de huecos ocupados. En el BM, el tiempo transcurre de forma discreta (es decir, en pasos), y la media y la aperiodicidad (coeficiente de variación) de la serie de ciclos dependen exclusivamente de N . Tras cada terremoto, en el modelo hay una sombra de esfuerzo de $N - 1$ pasos temporales, en la cual no se puede generar un terremoto nuevo. Esta duración, relativamente grande, de la sombra de esfuerzo, causa que la aperiodicidad de la distribución de ciclos sea como mucho $\simeq 0,47$. Por ello el modelo sólo es adecuado para describir series de ciclos poco aperiódicas.

En este artículo presentamos una simplificación del BM, a la que llamaremos *modelo de caja miniaturizado (mini-Box Model, o m-BM)*. El m-BM también tiene como único

parámetro a N , pero la sombra de esfuerzo siempre dura dos pasos temporales, por lo que es relativamente más breve que en el BM para cualquier $N > 3$. De este modo, la aperiodicidad de la distribución estadística de la duración de los ciclos es mayor en el m-BM (entre $\simeq 0,47$ y uno). Esta distribución, además, cumple los tres requisitos arriba mencionados. Estas propiedades la podrían hacer interesante para tratar de describir la distribución de ciclos sísmicos en una falla real y estimar la probabilidad de que ocurra el siguiente gran terremoto en ésta.

En la siguiente sección del artículo describiremos el m-BM mediante su matriz de Markov, que determina cuáles son las probabilidades de transición entre los distintos estados del modelo. En la sección tercera se deducirá analíticamente la distribución estadística de la duración de los ciclos en el m-BM. La media, desviación estándar y aperiodicidad de esta distribución se deducirán en la sección cuarta. La función de riesgo, importante para el cálculo de la probabilidad condicional si el m-BM se emplea como modelo de renovación, se trata en la sección quinta. El artículo finaliza con un resumen y discusión de los resultados obtenidos.

2. Descripción del modelo y su matriz de Markov

El m-BM aquí presentado resulta de una simplificación tipo *coarse graining* del BM [18, 19]. sta consiste en reducir el número de estados posibles a tres, frente al máximo de N que presentaba el modelo original. Como se ha mencionado antes, el BM está completamente descrito por la evolución de una única variable de estado, a la que se denomina ν [19], y que idealiza la energía (o deformación) elástica acumulada en una falla. Esta variable es discreta, y toma valores enteros en el rango $0, 1, 2 \dots N$. El modelo evoluciona en pasos de tiempo discretos según las reglas siguientes: 1) Al comienzo, $\nu = 0$; 2) en cada paso temporal, ν aumenta una unidad con probabilidad $1 - \nu/N$, y permanece estable con probabilidad ν/N ; 3) al llegar al valor umbral $\nu = N$, el sistema se relaja instantáneamente hasta su estado inicial $\nu = 0$. Esta relajación es análoga a un terremoto. El ciclo sísmico es, por tanto, el intervalo de tiempo entre dos relajaciones en el modelo.

El BM tiene N estados estables, con $\nu = 0, 1, 2 \dots (N - 1)$, respectivamente. El estado $\nu = N$ no es estable, puesto que el modelo no permanece ningún paso temporal en él. El aumento de ν a lo largo del ciclo muestra semejanzas cualitativas con el aumento de la deformación elástica acumulada en una falla a lo largo del tiempo [18].

El m-BM tiene a N como único parámetro ajustable, al igual que ocurre en el BM. Sin embargo, en el m-BM, con independencia del valor de N , supondremos que sólo existen tres estados (configuraciones) estables. Uno, que denotaremos A , en que $\nu = 0$; uno segundo, intermedio, que denotaremos I ; y otro, denotado C , en el que $\nu = N - 1$. El estado I aglutinará así a las $N - 2$ configuraciones intermedias que existían en el BM. De

esta manera, en el m-BM se pierde el detalle de cómo evoluciona el valor de ν a lo largo del ciclo.

Las probabilidades de transición entre los estados estables del BM se pueden tabular en una matriz de Markov. sta es una matriz cuadrada con un número de filas (y columnas) igual al número de estados estables en el sistema. Cada elemento $\mathbf{M}_N(i, j)$ de la matriz denota la probabilidad de transición, en un sólo paso, del estado i al estado j . Para una discusión general de los procesos de Markov puede consultarse la referencia [22]. En el BM, puesto que hay N estados estables, la matriz de Markov es de tamaño $N \times N$, mientras que en el m-BM será siempre de tamaño 3×3 para cualquier sistema con $N \geq 3$. Además cuando $N = 3$, el BM y el m-BM son estrictamente el mismo modelo. Los tres estados del m-BM constituyen una cadena de Markov, irreducible y aperiódica, con una única distribución estacionaria [22]. Los elementos de la matriz de Markov para un m-BM con parámetro N son simplemente:

$$\begin{aligned} A \rightarrow A &= 0 & A \rightarrow I &= 1 & A \rightarrow C &= 0 \\ I \rightarrow A &= 0 & I \rightarrow I &= \eta & I \rightarrow C &= 1 - \eta \\ C \rightarrow A &= \frac{1}{N} & C \rightarrow I &= 0 & C \rightarrow C &= 1 - \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (1)$$

de manera que la matriz de Markov tiene la forma:

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \eta & 1 - \eta \\ \frac{1}{N} & 0 & 1 - \frac{1}{N} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde el valor de $\eta \leq 1$ es desconocido y será calculado imponiendo que la probabilidad de residencia estacionaria (tiempo medio de permanencia) del sistema en la configuración I , π_I , coincida con la suma de las probabilidades de residencia estacionarias del BM en todas las configuraciones intermedias representadas por I .

Para deducir η , y así determinar por completo la matriz de Markov, resulta conveniente definir el siguiente factor de normalización:

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i}, \quad (3)$$

$$S \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma + \ln N + \frac{1}{2N}, \quad (4)$$

siendo $\gamma \simeq 0,5772157$ la constante de Euler.

A partir de la matriz de Markov del BM [19] se puede calcular [22] que las probabilidades estacionarias de encontrar al sistema con $\nu = 0$ ó $\nu = N - 1$ son, respectivamente

$$\pi_A = \frac{1}{NS}, \text{ y} \quad (5)$$

$$\pi_C = \frac{1}{S}. \quad (6)$$

Teniendo en cuenta que la suma de probabilidades de residencia estacionarias debe ser igual a 1, obtenemos que

$$\pi_I = 1 - (\pi_A + \pi_C) = 1 - \frac{1 + N}{NS}. \quad (7)$$

A su vez, mediante el cálculo explícito de π_I a partir de \mathbf{M}_N (aplicando el método correspondiente [22] a la Ec. 2) resulta

$$\pi_I = \frac{1 - \eta}{(1 - \eta)(1 + N) + 1}. \quad (8)$$

Igualando las ecuaciones (7) y (8) obtenemos

$$\eta = \frac{N(S - 1) - 2}{N(S - 1) - 1}, \quad (9)$$

con lo que la matriz de Markov \mathbf{M}_N queda completamente determinada.

3. Distribución estadística de la duración de los ciclos

A partir de la matriz de Markov, calculada mediante las Ec. (2) y (9), se puede obtener la función de distribución de probabilidad de la duración de los ciclos en el m-BM. Para ello emplearemos el método algebraico explicado para el BM en [19], previamente utilizado también para el Modelo Minimalista ([14], y con más detalle en [15]). Esta función de distribución de probabilidad se ha venido denotando en otros modelos [14, 15, 18, 19] como $P_N(n)$, y define la probabilidad de que, para un modelo con parámetro N , el ciclo dure n pasos temporales. A lo largo del ciclo, el m-BM cambia en $n - 1$ pasos desde el estado A al I , y de éste al C , sin regresar al estado A en ningún momento dentro del ciclo. Por último, en el paso n se produce la transición desde el estado C al A . Para calcular $P_N(n)$ deduciremos entonces en primer lugar la probabilidad de que el sistema pase en $n - 1$ pasos desde A a C , sin haber pasado por A en el camino. Después multiplicaremos esa probabilidad por la correspondiente a pasar de C a A en el paso n . Con este propósito [22] se ha de construir una nueva matriz a partir de \mathbf{M}_N , en la que se anula la probabilidad de pasar directamente de C a A , esto es, el elemento $\mathbf{M}_N(1, 3)$, quedando la nueva matriz como

$$\mathbf{M}'_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \eta & 1 - \eta \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{N} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

y ahora esta matriz debe elevarse a la potencia $n - 1$ (véase [22]). El elemento $[\mathbf{M}'_N]^{n-1}(1, 3)$ indicará la probabilidad de pasar en $n - 1$ pasos desde A a C , sin haber pasado por A en

el camino. Como la probabilidad de pasar de C a A en un sólo paso es $1/N$, entonces la distribución de probabilidad del m-BM será

$$P_N(n) = \frac{1}{N} [\mathbf{M}'_N]^{n-1} (1, 3). \quad (11)$$

La potenciación de la matriz \mathbf{M}'_N se realiza mediante la descomposición de Jordan,

$$[\mathbf{M}'_N]^{n-1} = \mathbf{X}_N \cdot \mathbf{\Lambda}_N^{n-1} \cdot \mathbf{Y}_N, \quad (12)$$

siendo \mathbf{X}_N , $\mathbf{\Lambda}_N$ e \mathbf{Y}_N las matrices

$$\mathbf{X}_N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\eta} & P \\ 0 & 1 & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_N = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\eta} & R \\ 0 & 1 & -Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Las funciones P , Q y R han sido introducidas con el único propósito de aliviar la notación en el cálculo matricial, y se definen como

$$P \equiv \frac{N^2(\eta - 1)}{(N - 1)(1 - N + \eta N)}, \quad (14)$$

$$Q \equiv \frac{N(\eta - 1)}{1 - N + \eta N}, \quad (15)$$

$$R \equiv \frac{-Q}{\eta} - P. \quad (16)$$

Efectuando las operaciones mencionadas anteriormente, la distribución estadística de la duración del ciclo en el modelo es

$$P_N(n) = K (\beta^{n-2} - \eta^{n-2}), \quad (17)$$

que está definida para $n \geq 2$. K y β se han introducido para simplificar la notación, y se definen como

$$K \equiv \frac{1 - \eta}{N - \eta N - 1}, \text{ y} \quad (18)$$

$$\beta \equiv 1 - \frac{1}{N}. \quad (19)$$

Nótese que K siempre es negativa.

Puede observarse que $P_N(n)$ es la diferencia de dos distribuciones geométricas. Dos casos particulares de esta distribución, para dos valores diferentes de N , se muestran, respectivamente, en las Figuras 1 y 2, donde se los compara con distribuciones resultantes de un BM de igual N .

Por último, la distribución de probabilidad acumulada para $n \geq 2$ es

$$A_N(n) = K \left(\frac{1 - \beta^{n-1}}{1 - \beta} - \frac{1 - \eta^{n-1}}{1 - \eta} \right). \quad (20)$$

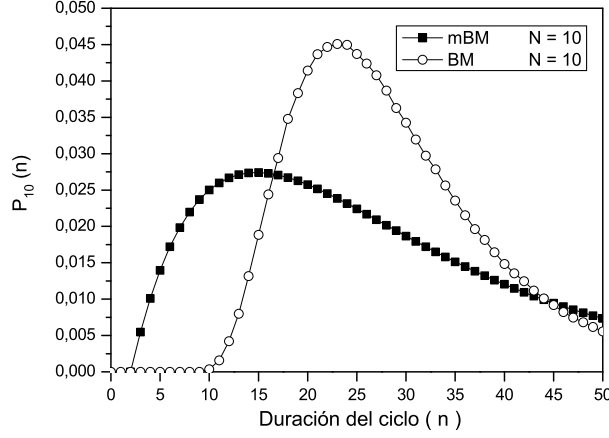


Figura 1.— Distribución $P_N(n)$ para $N = 10$ en el BM y m-BM.

4. Media, desviación estándar y aperiodicidad

En este apartado deduciremos los dos primeros momentos de la distribución $P_N(n)$: la media (número medio de pasos por ciclo, $\langle n \rangle_N$) y la desviación estándar (σ_N). A partir de ellos es inmediato calcular la aperiodicidad (coeficiente de variación), definida como el cociente

$$\alpha_N \equiv \frac{\sigma_N}{\langle n \rangle_N}. \quad (21)$$

La media de $P_N(n)$, expresada en función de K y β [Ecs. (18) y (19)], es

$$\langle n \rangle_N = K \sum_{n=2}^{\infty} n (\beta^{n-2} - \eta^{n-2}). \quad (22)$$

Dada la forma de la Ec. 22, lo único que resta por calcular es la suma

$$B \equiv \sum_{n=2}^{\infty} n\beta^n = 2\beta^2 + 3\beta^3 + 4\beta^4 + \dots. \quad (23)$$

Para ello empleamos la función

$$P \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \beta^n = \frac{\beta^2}{1-\beta}. \quad (24)$$

La derivada de P con respecto a β es

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\beta} &= \frac{\beta(2-\beta)}{(1-\beta)^2} = 2\beta + 3\beta^2 + 4\beta^3 + \dots \\ &= \frac{\beta(2-\beta)}{(1-\beta)^2} - (\beta^2 + \beta^3 + \dots) + (\beta^2 + \beta^3 + \dots) \\ &= 2\beta + B + \frac{\beta^2}{1-\beta}, \end{aligned} \quad (25)$$

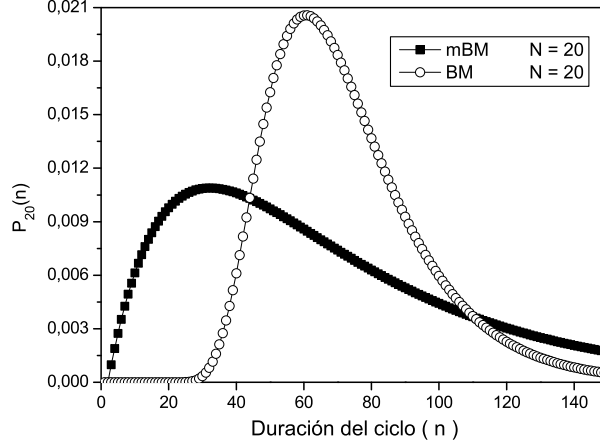


Figura 2.— Distribución $P_N(n)$ para $N = 20$ en el BM y m-BM.

por lo que B es

$$B = \frac{\beta^2(2 - \beta)}{(1 - \beta)^2}. \quad (26)$$

Sustituyendo la Ec. (26) en la Ec. (22) obtenemos la media

$$\langle n \rangle_N = \frac{1 - \eta}{N - \eta N - 1} \left(\frac{2 - \beta}{(1 - \beta)^2} + \frac{2 - \eta}{(1 - \eta)^2} \right). \quad (27)$$

Procedemos ahora a calcular la varianza, que viene dada por la expresión

$$\sigma_N^2 = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 P_N(n) - \langle n \rangle_N^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle_N^2. \quad (28)$$

Para ello lo único nuevo que resta calcular es la función D , definida como

$$D \equiv \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \beta^n = 2^2 \beta^2 + 3^2 \beta^3 + 4^2 \beta^4 + \dots. \quad (29)$$

Usando argumentos similares a los empleados en el cálculo de $\langle n \rangle_N$, obtenemos

$$D = \frac{dB}{d\beta} - 4\beta - 2B - \frac{\beta^2}{1 - \beta}, \quad (30)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \frac{1 - \eta}{N - \eta N - 1} \left\{ \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{dB}{d\beta} - 4\beta - 2B - \frac{\beta^2}{1 - \beta} \right] \right\} - \\ &- \frac{1 - \eta}{N - \eta N - 1} \left\{ \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{dA}{d\eta} - 4\eta - 2A - \frac{\eta^2}{1 - \eta} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

siendo A la expresión análoga a B (Ec. 26) pero sustituyendo η por β , es decir

$$A \equiv \frac{\eta^2(2 - \eta)}{(1 - \eta^2)}. \quad (32)$$

La Ec. (31), junto con la Ec. (27), permiten obtener explícitamente la desviación estándar (raíz cuadrada de σ_N^2) en función de N . La aperiodicidad de la distribución se puede calcular con la Ec. (21). La media y desviación estándar de $P_N(n)$ en el BM y m-BM se comparan en la figura 3, mientras que en la figura 4 se hace lo propio con la aperiodicidad. Se deduce analíticamente que, en el m-BM, α_N tiende a la unidad cuando N tiende a infinito.

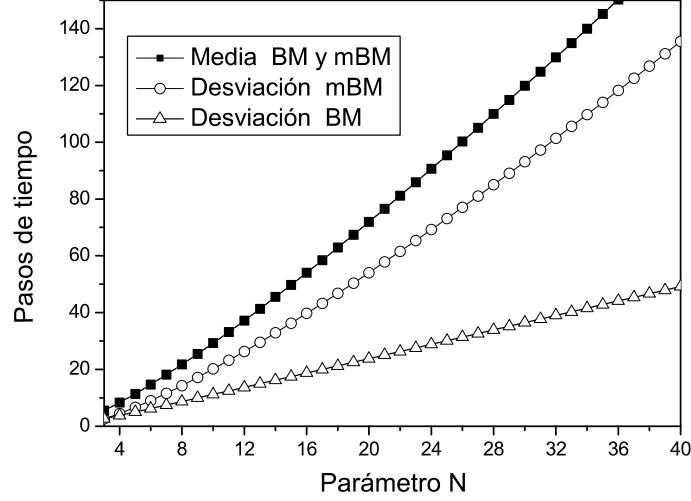


Figura 3.— Media y desviación estándar de $P_N(n)$ del BM y m-BM para varios valores de N . Nótese como la media es idéntica para un mismo N en ambos modelos, mientras que la desviación estándar es diferente (siempre mayor en el m-BM), salvo cuando $N = 3$, valor para el cual ambos modelos son idénticos.

5. Función de riesgo

En todo modelo de renovación desempeña un papel importante la función de riesgo. Esta se define como la probabilidad instantánea de que finalice el ciclo, siempre que no haya finalizado ya. En modelos discretos como el que nos ocupa, es la probabilidad de que el ciclo finalice en un paso dado (n), si llegado ese paso no ha finalizado aún [23]. La función de riesgo es por tanto

$$h_N(n) \equiv \frac{P_N(n)}{\sum_n P_N(n)}. \quad (33)$$

En el m-BM esta función es siempre creciente, pero tiende a un valor constante positivo cuando el ciclo es muy largo:

$$h_N(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\eta^{n-2}}{\frac{\eta^{n-2}}{1-\eta}} = 1 - \eta = \frac{1}{N(S-1)-1}. \quad (34)$$

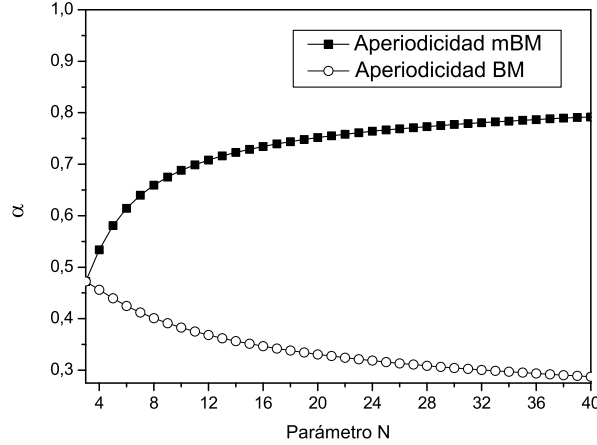


Figura 4.— Aperiodicidad de $P_N(n)$ del BM y m-BM para varios valores de N . Cuando $N \rightarrow \infty$, la aperiodicidad tiende a cero en el BM, mientras que tiende a la unidad en el m-BM.

Para sistemas grandes ($N \rightarrow \infty$), este valor asintótico de la función de riesgo tiende a cero, de la forma

$$h_N(n) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N \ln N}. \quad (35)$$

6. Conclusiones

Hemos presentado una nueva función de distribución de probabilidad, discreta y de un sólo parámetro, basada en un modelo de renovación que hemos denominado modelo de caja miniaturizado (*mini-Box Model*, m-BM). Este modelo resulta a su vez de una reducción de estados del llamado Modelo de Caja (*Box Model*, BM) [18, 19]. El único parámetro, común a ambos modelos, es N . En el BM había N estados posibles, definidos por otros tantos valores de una variable de estado, $\nu = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$. En el m-BM existen sólo tres estados estables, uno en el que $\nu = 0$, otro en el que $\nu = N - 1$, y uno intermedio entre ambos que aglutina a los $N - 2$ estados intermedios que existían en el BM. El nuevo modelo se define (Ec. 2) obligando a que el estado intermedio tenga la misma duración promedio que el conjunto de los estados intermedios del BM a los que agrupa. Así, para un mismo N , la duración media de los ciclos es idéntica en ambos modelos (Fig. 3). Además, para $N = 3$ ambos modelos son estricta y trivialmente idénticos.

En el BM, ν era nula al comienzo del ciclo, y podía incrementarse como mucho en una unidad por cada paso de tiempo transcurrido. El ciclo terminaba cuando $\nu = N$, momento en el que el sistema se relajaba instantáneamente hasta el estado estable $\nu = 0$. Un ciclo del BM duraba por tanto un mínimo de N pasos temporales (Figs. 1 y 2). En el m-BM, al tener sólo los tres estados mencionados, la duración mínima de los ciclos es de tres pasos

temporales, independientemente de N (Figs. 1 y 2). Para $N > 3$, esta duración mínima es más corta en el m-BM que en el BM. Puesto que las distribuciones de ambos modelos tienen igual media para un mismo N , la diferencia mencionada causa una distribución más ancha en el m-BM que en el BM correspondiente (Figs. 1 y 2). Así, la desviación estándar y la aperiodicidad son mayores en la distribución del m-BM que en la del BM para cualquier $N > 3$ (Figs. 3 y 4). Mientras que la aperiodicidad (coeficiente de variación) de la distribución del BM se podía encontrar, en función de N , entre 0 y $\simeq 0,47$, la del m-BM puede ser desde este último valor hasta la unidad. Podría decirse así que ambas familias de distribuciones (del BM y del m-BM) son en cierta forma complementarias.

Precisando, la distribución de probabilidad del m-BM es una diferencia de dos distribuciones geométricas, que resulta nula para ciclos de dos pasos temporales, siendo no nula para ciclos de tres pasos temporales o más de duración. Para ciclos muy largos la distribución de probabilidad está dominada por un puro decaimiento geométrico, por lo que la función de riesgo tiende a una constante mayor que cero. Esto último también ocurre en otros modelos de renovación inspirados en el proceso de recurrencia de terremotos en fallas: el Brownian Passage Time [4], el Modelo Minimalista [16], y el BM [18, 19], aunque los valores asintóticos de la función de riesgo son diferentes para cada modelo.

Consideramos que el m-BM podría ser interesante para describir la distribución de probabilidad de duración de los ciclos sísmicos de una falla, si la aperiodicidad de la serie de ciclos está entre $\simeq 0,47$ y 1, análogamente a lo que ocurriría con el BM para aperiodicidades inferiores [18]. Esta propuesta se basa, por una parte, en que el m-BM está derivado a partir del BM, cuya variable de estado sigue una evolución semejante a la de la deformación elástica acumulada en una falla [18]. También, la tendencia creciente de la función de riesgo a lo largo del ciclo es consistente con la teoría del rebote elástico: conforme el ciclo avanza, la energía elástica acumulada en la falla es mayor, y por tanto existe más riesgo de que se produzca un nuevo terremoto. Asimismo, la distribución de probabilidad de duración del ciclo en el m-BM cumple los tres requisitos que las series de ciclos sísmicos reales sugieren, a saber: 1) está definida sólo para valores positivos de la duración de los ciclos; 2) tiene sombra de esfuerzo: los ciclos muy breves (de menos de tres pasos temporales) son inexistentes (cabe recordar que en el BM [18, 19] y en el Modelo Minimalista [14, 15, 16] la duración de esta sombra de esfuerzo era $N - 1$ pasos); y 3) la probabilidad es siempre decreciente para duraciones del ciclo mucho mayores que la duración media.

Para ajustar la distribución del m-BM a una serie de ciclos sísmicos reales debiera seguirse el procedimiento utilizado con otros modelos [12, 16, 18], detallado en [18]: 1) Calcular la aperiodicidad de la serie real; 2) hallar el valor de N para el cual la distribución del m-BM tiene esa misma aperiodicidad; 3) calcular el factor de proporcionalidad entre la media de la serie real y la del m-BM, con lo que se determina cuál es el tiempo real al

que corresponde un paso de tiempo adimensional del modelo.

Referencias

- [1] Reid, H. F.: 1910, “The mechanics of the earthquake”, En: *The California Earthquake of April 18, 1906, Report of the State Earthquake Investigation Comission*, Carnegie Institution (Washington, USA), Vol. 2, pp. 1–192.
- [2] Scholz, C. H.: 2002, *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*, segunda edición. Cambridge University Press (Cambridge, UK), 496 pp.
- [3] Ellsworth, W. L.; Matthews, M. V.; Nadeau, R. M.; Nishenko, S. P.; Reasenber, P. A. & Simpson, R. W.: 1999, *A Physically-Based Earthquake Recurrence Model for Estimation of Long-Term Earthquake Probabilities*. United States Geological Survey Open-File Report 99–552 (Menlo Park, California, USA), 22 pp.
- [4] Matthews, M. V.; Ellsworth, W. L. & Reasenber, P. A.: 2002, “A Brownian model for recurrent earthquakes”. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **92** (6), 2233–2250.
- [5] Lindh, A. G.: 2003, “Long-term earthquake forecasts in the San Francisco Bay area: A contrarian perspective”. *Eos, Transactions, American Geophysical Union*, **84** (46), abstract NG41C-0069.
- [6] Zöller, G.; Hainzl, S.; Ben-Zion, Y. & Holschneider, M.: 2006, “Earthquake activity related to seismic cycles in a model for a heterogeneous strike-slip fault”. *Tectonophysics*, **423** (1–4), 137–145.
- [7] Savage, J. C.: 1994, “Empirical earthquake probabilities from observed recurrence intervals”. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **84** (1), 219–221.
- [8] Michael, A. J.: 2005, “Viscoelasticity, postseismic slip, fault interactions, and the recurrence of large earthquakes”. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **95** (5), 1594–1603.
- [9] Harris, R. A.: 2000, “Earthquake stress triggers, stress shadows, and seismic hazard”. *Current Science*, **79** (9), 1215–1225.
- [10] Working Group on California Earthquake Probabilities: 2003, *Earthquake Probabilities in the San Francisco Bay Region: 2002–2031*. United States Geological Survey Open-File Report 03-214 (Menlo Park, California, USA), 234 pp.
- [11] Utsu, T.: 1984, “Estimation of parameters for recurrent models of earthquakes”, *Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo*, **59**, 53–66.
- [12] González, Á.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2006, “Updating seismic hazard at Parkfield”, *Journal of Seismology*, **10** (2), 131–135.

- [13] Kagan, Y. Y. & Knopoff, L.: 1987, “Random stress and earthquake statistics: time dependence”, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **88** (3), 723–731.
- [14] Vázquez-Prada, M.; González, Á.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2002, “A minimalist model of characteristic earthquakes”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, **9** (5–6), 513–519.
- [15] Vázquez-Prada, M.; González, Á.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2003, “Forecasting characteristic earthquakes in a minimalist model”. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **10** (3), 565–571.
- [16] Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2004, “The minimalist model of characteristic earthquakes as a useful tool for description of the recurrence of large earthquakes”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **94** (5), 1960–1967.
- [17] González, Á.; Vázquez-Prada, M.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2006, “A way to synchronize models with seismic faults for earthquake forecasting: Insights from a simple stochastic model”, *Tectonophysics*, en prensa.
- [18] González, Á.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2005, “The occupation of a box as a toy model for the seismic cycle of a fault”, *American Journal of Physics*, **73** (10), 946–952.
- [19] González, Á.; Gómez, J. B. & Pacheco, A. F.: 2006, “Appendix to: The occupation of a box as a toy model for the seismic cycle of a fault”, *arXiv.org e-print archive*, <http://arxiv.org/abs/physics/0502048>
- [20] Vere-Jones, D.: 1970, “Stochastic model for earthquake occurrence”, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology)*, **32** (1), 1–62.
- [21] Çinlar, E.: 1975, *Introduction to Stochastic Processes*, Ed. Prentice Hall (New York, USA), 402 pp.
- [22] Durrett, R.: 1999, *Essentials of Stochastic Processes*. Ed. Springer Verlag (Berlin, Alemania), 281 pp.
- [23] Shaked, M.; Shanthikumar, J. G. & Valdez-Torres, J. B.: 1995, “Discrete hazard rate functions”, *Computers & Operations Research*, **22** (4), 391–402.

Mariano La Gasca en el exilio inglés (1824-1834)

Luis A. Inda Aramendía

Departamento de Agricultura, Escuela Politécnica Superior de Huesca
Universidad de Zaragoza. Carretera de Cuarte s/n. 22071-Huesca.

Begoña Aguirre-Hudson

Departamento de Micología, Jardines Botánicos Reales de Kew
Richmond, Surrey TW9 3AB. Reino Unido

Abstract

Mariano La Gasca was forced to migrate to Great Britain because of his liberal ideology, at a time when the King of Spain, Ferdinand VII, proclaimed his autocratic rule after three years of liberal ruling. On the one hand he found that London was the centre for a large number of Spaniards in exile, but also for numerous botanists that befriended him. Devoided of economic resources he survived clasifying the herbaria that arrived to the city, writing regular publications, and preparing exsiccata. While in London he was awarded fellowship to the most prestigious botanical institution: The Linnean Society of London, in recognition to his botanical contribution in Spain and abroad.

1 Introducción

Mariano La Gasca (Encinacorba 5-X-1776, Barcelona 26-VI-1839) ha sido considerado el botánico español más universal [1, 2]. Algunos de los que le conocieron ya publicaron datos sobre su vida, como sus discípulos Eduardo Carreño (1840) [3] y Agustín Yáñez (1842) [4].

Mariano fue nombrado por la Regenta del Reino, María Cristina, director del Real Jardín Botánico de Madrid de forma interina en 1813. Propiedad que le concedió posteriormente Fernando VII. El Gobierno le comisiona para escribir la Flora de Santa Fe de Bogotá, que en un principio acepta, pero no la realiza por ser nombrado diputado a Cortes en diciembre de 1821 [4]. Este cargo de diputado lo desempeña durante el trienio liberal (1820-1823). Sus posiciones liberales y la expresión de sus ideas le granjeó la persecución a la que se vio expuesto [5].

En 1823 España es invadida por los Cien Mil Hijos de San Luis. Por decreto fueron declarados traidores y reos de muerte los diputados que votaron en la última sesión de las Cortes la destitución de Fernando VII, entre ellos La Gasca. “El 13 de junio en Sevilla: un populacho desenfrenado y atizado por el fanatismo religioso y político se entregó a todos los excesos, y arrojó a las llamas ó sumergió en el río los equipajes de los diputados y empleados del gobierno, que se dirigían precisamente a Cádiz como último baluarte constitucional”. El equipaje de La Gasca figuraba entre ellos, casi toda su biblioteca y su herbario. Del fuego se salvaron algunos paquetes de plantas que fueron comprados por el duque de Ahumada en una almoneda de Sevilla y le fueron devueltos muchos años después cuando La Gasca regresó del exilio [4].

De Sevilla va a Cádiz y a los tres meses se traslada a Gibraltar (septiembre 1823). Del Peñón pasa a Londres, a donde llegó en 1824. Su esposa, Antonia Carrasco, con la que se casó hacia 1803 [3], y sus cuatro hijos permanecerán en Cádiz en el más lastimoso estado, bajo el apoyo de Antonio Cabrera. Se reunirían en Londres con él hacia finales de 1825, dos años después [6]. Durante su estancia en Cádiz publicará la descripción de dos nuevas especies halladas en los alrededores de Sevilla *Malva anodaeformis* Lag. y *Ononis subspicata* Lag. [7].

2 La Gasca en Londres

Según cuentan sus biógrafos, los botánicos ingleses le trataron lo mejor posible: Aylmer Lambert, William Anderson, Robert Brown, Smith, Lindley, Bentham, W. Hooker, David Don, Webb [3]. Con algunos de estos botánicos (Lambert, Hooker, Brown) ya mantenía correspondencia años antes. Con todos ellos estableció relación. Desde, al menos 1819, el duque de San Carlos le envía cartas de Lambert y le pide que le conteste [8]. Posteriormente La Gasca le enviará a Lambert la obra “*Agricultura*” de Gabriel Alonso de Herrera [9]. En 1820 el duque le enviaría *Hortus Kewensis* y de parte de Lambert plantas secas de la India [10].

Smith, primer presidente de la Sociedad Linneana de Londres, le propuso como catedrático en una Universidad de Estados Unidos. Mariano no aceptó. Hooker siendo profesor en Glasgow cuenta como conoció a La Gasca en casa de Lambert. Hooker lo cuenta así en “*Botanical miscellany*”: “Mientras examinábamos los tesoros del conde de Lambert, entró en la sala un hombre pequeño vestido de negro, que echó una mirada llena de dolor y de indignación sobre los paquetes que había allí, pertenecientes al herbario de Ruiz y Pavón [herbario de plantas americanas que José Ruiz y Pavón tuvo que vender, 29]. Tanto esta mirada, como la elevada fisionomía de aquel sujeto, no pudieron menos que llamar mi atención, y no siendo posible sujetar mi curiosidad, pregunté al señor David Don quien podía ser dicho hombre, y me respondió: ¡el señor La-Gasca! No bien lo hubo

dicho, cuando me eché en los brazos de mi antiguo amigo, que no pudo imaginarse quien era yo, pues solo nos habíamos conocido por escrito durante algunos años, y henos aquí reunido como por encanto, cuando menos lo esperábamos. ¡Desgraciado La Gasca! El había perdido a su familia (su mujer y cinco hijos estaban en Cádiz) y su fortuna; su gran herbario; el manuscrito de Flora de España, en el que había empleado más de 20 años e iba a ser impreso . . . Después de esta entrevista, nos visitamos La Gasca y yo diariamente, y algunas veces herborizamos juntos” [11]. Esta relación continuará epistolariamente cuando Mariano regrese del exilio a Madrid [12].

¿De que vivía en Londres? Se sabe que identificó las plantas de un herbario de un “insigne” botánico inglés que viajó por Oriente. Con lo que ganó por este trabajo pudo pagar el viaje de su familia de Cádiz a Londres [3]. Hay quien ha sospechado [13] que el botánico que le dio trabajo fue Nathaniel Wallich, quien en 1828 llegaba a Londres con un gran herbario procedente de la India. Sin embargo, para cuando Wallich, un botánico danés y superintendente del Jardín Botánico de Calcuta, llega a Londres con su cargamento, La Gasca ya había conseguido el dinero para trasladar a su familia de Cádiz a Londres (1826).

Hubo de experimentar estrecheces para el sostenimiento de su familia. Tanto es así que él mismo lo describe en una carta al duque de Bedford [14] donde le propone que le compre “*Herbarium pictum*”: “la serie de sucesos políticos de mi patria me han puesto en la triste necesidad de deshacerme de esta obra . . . para poder atender la subsistencia de una familia dilatada, y poder proporcionar alguna educación a cuatro hijos que con su madre tengo en mi compañía tres meses ha, . . .”

“*Herbarium pictum*” constaba de seis volúmenes en folio con 1383 dibujos iluminados de plantas mandadas dibujar por el Dr. Miguel Barnades, profesor de Botánica del Jardín Botánico de Madrid. En general eran plantas europeas, pero también había africanas y americanas. La Gasca lo había comprado a la viuda del Marqués de Casa Valencia en 1820 por 30000 reales de vellón (300 libras esterlinas), pero dadas las necesidades de La Gasca se lo ofrece al duque por 200 libras. Posteriormente salió a la venta en Londres por 140 libras, pero tampoco se vendió. Esta obra aparece en el Jardín Botánico de Madrid en 1863 pero sin el tomo del texto [15].

A mediados de 1826 recibe el auxilio de 20 libras esterlinas que le concede la Sociedad del Fondo Literario de Londres de mano de Blanco White [16].

Por otra parte, y como resultado de sus herborizaciones en los alrededores de Londres en compañía de sus dos hijos mayores, con las plantas recolectadas, compone “*Hortus siccus londinensis*” o, *A Collection of Dried Specimens of Plants growing wild within twenty miles round London named on the authority of the Banksian Herbarium and other original Collections* (Fig. 1). La exsicata consiste de cuatro entregas de plantas secas con anotaciones que formaron un tomo. Los nombres de las plantas los tomó de “*English*

Flora” de Smith. En las anotaciones que acompañan a las plantas figuran las localidades inglesas en las que las encontró y si las recordaba de España también las consigna. Su idea, según cuenta en el prefacio, era publicar 30 copias. Estas se harían por suscripción y cada parte costaría 1 libra. La primera parte o fascículo aparece en diciembre 1826 y contiene 25 especies; el segundo a principios de 1827 y tiene otras 25 especies; el tercero es de abril de 1827 y contiene 30 especies [17] y el cuarto aparece a finales de 1827 y contiene 40 especies. La exsiccata no incluye especies de nueva descripción. De esta recopilación se conservan ejemplares en los herbarios de Michigan, Oxford y México [18, 19]. La presencia de su “*Hortus siccus*” en México puede ser debida al intercambio que pudo establecer con su amigo La Llave [13].

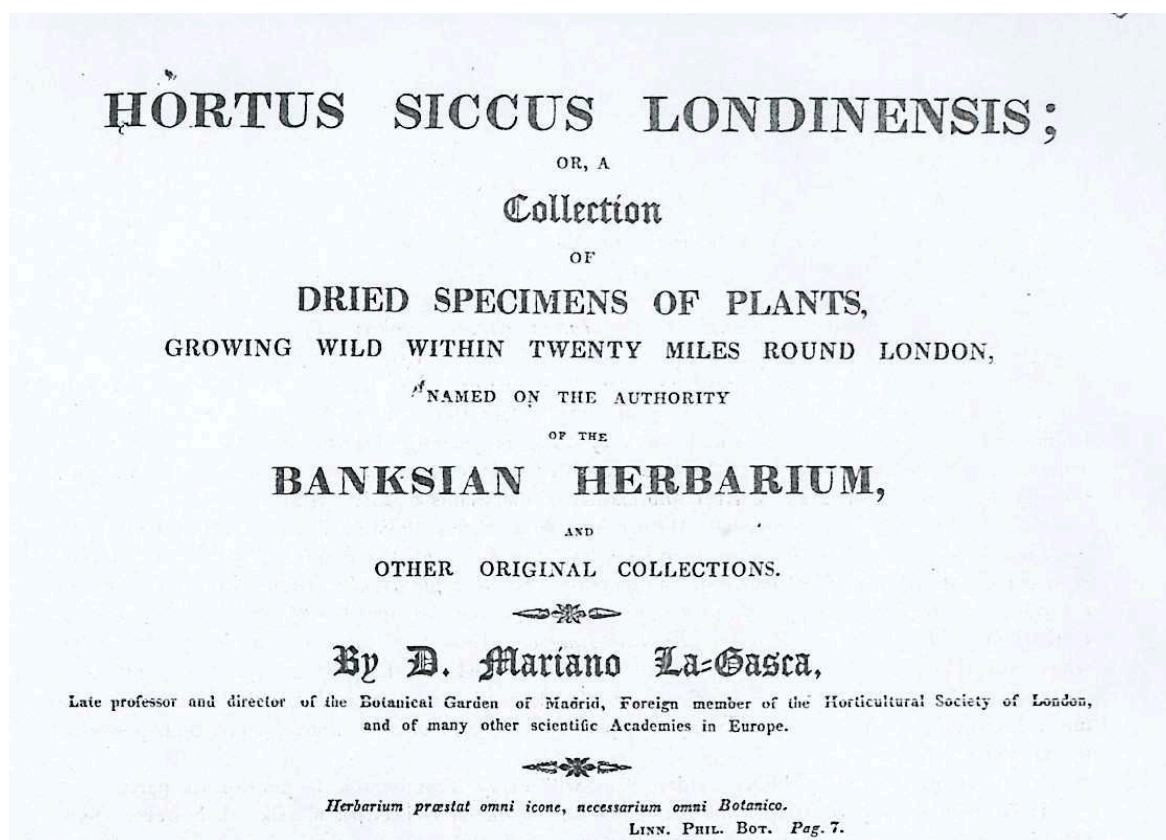


Figura 1.— Encabezamiento de la propaganda de *Hortus siccus Londinensis*. Archivo del Real Jardín Botánico de Madrid.

Un “*Hortus siccus*” era un herbario original (personal) que se desarrolló en Europa en los siglos XVI y XVII, no se trataba de un herbario (colección de plantas prensadas y secas) institucional, de un museo, universidad o institución pública. La mayoría de los botánicos tenía su propio herbario, formado por las plantas colectadas por ellos localmente. También tenían duplicados que habían recibido de sus amigos y personas con las que se carteaban. Lo que Mariano se proponía suministrar era una “*Flora exsiccata*”, un conjunto de plantas secas de un grupo particular o, como es este caso de una región particular.

Por aquella época, Londres se había convertido en un centro de vida intelectual his-

pana, donde se editaban siete periódicos en castellano. La Gasca colabora en varios de estos periódicos: “*Repertorio Americano*” y “*Ocio de españoles emigrados*”. Participa junto a Núñez de Arenas y Mendivil en la creación en el Ateneo Español de Londres, institución destinada a la enseñanza gratuita de los hijos de exiliados; la apertura se celebró en 1829 [2].

Tradujo “*Teoría elemental de Botánica*” de Decandolle, traducción con anotaciones que ya había realizado en 1819 [9], que no publicó. Volvió a escribir “Elementos de Botánica” que perdió en Sevilla y usaba en sus clases desde 1806 y no fue publicado en su día por decisión de la censura. Tampoco ahora fue publicado. En “*The Gardeners Magazine*” publicó varios trabajos:

1. “*Sketches of Botanical, Horticultural, Agronomical and Rural Circumstances of Spain*” publicado en Julio de 1826 (volumen I, páginas 235-249). En este primer artículo escribe sobre los Jardines Botánicos, que como comenta en su época eran: el Real Jardín Botánico de Madrid; los pertenecientes a las cuatro escuelas de farmacia de Madrid, Sevilla, Barcelona y Santiago; el del colegio de cirugía de Cádiz; el de la Universidad de Valencia y el perteneciente al consejo de comercio de Barcelona dedicado a la botánica agronómica. Comenta otros jardines como los de Cartagena, Zaragoza o Valladolid, pero se centra en el Jardín Botánico de Madrid.
2. “*On the Gardening and Botany of Spain*” publicado en 1827 (Volumen II, páginas 393-399) se centra en comentar los Jardines Botánicos de: Cádiz, Lúcar de Barameda, Alicante, Muchamiel, Penacerrada, Puzol y Barcelona.
3. “*On the Gardening and Botany of Spain*” publicado en junio de 1828 (Volumen IV, páginas 65-76) tiene dos partes: la primera sobre los jardines farmacéuticos, donde el del monasterio de Santo Domingo de Silos es el más comendado, y la segunda sobre “Pleasure-Gardens” donde empieza comentando los reales Jardines de La Granja y Aranjuez y continua paseándose por los jardines del reino.

En Londres pudo examinar el herbario de Linneo, tras haber solicitado acceso al mismo a J.E. Smith como consta en la correspondencia escrita en latín a éste [28]. Fue miembro en propiedad de la Sociedad Linneana de Londres desde el 20 de diciembre de 1831, con la particularidad de que esta sociedad le eximió de los derechos de entrada y cuotas anuales que pagan los socios, en atención “a los eminentes servicios que tenía prestados a la ciencia de las plantas”. Su certificación como miembro de esta Sociedad estaba firmada por R. Brown, E. Forster, W.J. Burchell, N. Wallich, W. Yarrell, W. Nicholl, F. Boott, W. Andersom, G. Bentham, C. Konig, E. Bernard, N.B. Ward, R.H. Solly, A.B. Lambert [13]. También fue corresponsal de la Linneana de Estocolmo desde el 31 de marzo de 1832

[4]. Antes de llegar a Londres ya era miembro honorario desde el 4 de mayo de 1819 de la Sociedad de Horticultura de Londres.

Como comenta Carreño (1840) [3], por indicaciones de Anderson, la Sociedad de Farmacéuticos de Londres le permitió que en el Jardín de Chelsea sembrara umbelíferas y gramíneas, grupos que en ese momento le preocupaban [20]¹.

3 Traslado a la isla de Jersey, Canal de la Mancha

El clima húmedo de Londres no resultó favorable para sus vías respiratorias, que degeneraron en bronquitis crónica. Por este motivo se muda de Londres a la isla de Jersey, donde residirá de 1931 a 1934.

El 15 de marzo de 1831 todavía se encontraba en Londres y desde allí envía a Juan Antonio Melón semillas de ruibarbo [25]. Éstas no serán las únicas semillas que envió a Madrid. Con anterioridad, y residiendo todavía en Londres, en 1831 envió semillas de 248 plantas diferentes recién llegadas de los “Estados unidos anglo-americanos”. Estas semillas se repartieron en tres porciones: la principal para el Jardín Botánico de Madrid, la segunda para el Jardín Real de Aranjuez y la tercera para los de La Granja. La mayor parte son de árboles y arbustos, hay pocas especies herbáceas (Anexo 1) [26].

El 29 de septiembre de 1831 envía su equipaje a Jersey a través de la compañía de Lewis Gilson junior. Este envío a Jersey contiene cinco cajas de libros y diez y nueve de plantas. Entre los documentos que envía están sus “*Elementos o curso de Botánica*”, traducción de taxonomía y fitografía de De Candolle, diploma de la sociedad botánica de Ratisbona, “*Ceres*”, “*Theorie elementale*” de DeCandolle 2^a edición, nombres de plantas y animales de la provincia de Cádiz, descripción de plantas de Londres, trozos traducidos de la Química de Turner, plantas cogidas en Gibraltar, Desmazieres “*Plantes cryptogames du nord de la France*”, DeCandolle “*Memoire sur les umbeliferes*”, Gussone “*Florae siculae Podromus*”, Lindley “*Principles of Botany*”, tres ejemplares encuadernados de “*Hortis Siccum*” y uno sin encuadernar, dos legajos con plantas de California, un legajo con plantas de México, . . . [21].

En esta isla forma un herbario con fanerógamas y helechos, redacta un catálogo de la flora local que no publicará y asesorará a los agricultores para que mejoren sus cul-

¹Tanto en los libros de historia como en el archivo de esta Sociedad no existe el permiso oficial para que La Gasca utilizase el Jardín Botánico de Chelsea, que pertenecía a esta Sociedad. Sin embargo el jardinero responsable era William Anderson, nombrado por las excelentes referencias que sobre él había hecho Sir Joseph Banks. Con Anderson si que La Gasca tenía relación, es más, necesitado La Gasca de dinero para marcharse a Jersey, Anderson lo recolectará (RJB01/0056/0001/0009).

Gina Douglas, bibliotecaria y archivera de la Sociedad Linneana de Londres, nos apostilla que “cultivó una gran e interesante colección de cereales españoles en el jardín de los apotecarios en Chelsea durante su exilio en Londres”.

tivos. Siguiendo las instrucciones de La Gasca, se logró que el gobierno inglés, que había prohibido la importación de cereales de Jersey, no solo revocara esa orden, sino que considerase a Jersey como semillero nacional [4]. Se le nombra miembro honorario de Royal Jersey Agricultural and Horticultural Society [22].

La situación económica de La Gasca sigue siendo tan precaria en Jersey como lo fue en Londres, de manera que, en esta isla, solicitará una pensión de estudios para uno de sus hijos pequeños, Juan [23].

Cuando la reina María Cristina dicta la amnistía por el Real decreto del 23-X-1833, La Gasca decide regresar a España tras once años de destierro. La reina le concede un sueldo de 24000 reales de vellón al año y trabajo en el jardín botánico de Madrid a partir del 10 de marzo de 1834, fecha en la que al parecer decidió volver [24].

De Jersey vuelve a Londres en agosto de 1834 para despedirse de amigos y botánicos. Al dejar Inglaterra La-Gasca se planteó presentar su herbario al Museo Británico apoyado por Robert Brown (según consta en una carta de este del 2 de agosto de 1834). Esto no ocurrió. Años más tarde, 1851, este herbario se encontraba parte Madrid y parte en Málaga, no en buenas condiciones [17]. De Londres se va a París donde se reúne con su familia. Pasando por Lyon, Aviñon y Montpellier llega a Barcelona en los últimos días de 1834, para finalmente llegar al Jardín botánico de Madrid a principios de abril de 1835 [27].

Agradecimientos

Debemos agradecer el interés y ayuda prestada por Vicente Martínez Tejero, Guillaume Gigot, Julia Buckley, Nicholas Hind y Gina Douglas.

Referencias

- [1] Casaseca B. 1976. La vida de La Gasca. *La Gascalia* 6: 191-201.
- [2] Martínez Tejero, V. 2005. Piedras, fósiles, plantas, insectos, peces, pájaros ... naturalistas aragoneses. Ibercaja. Zaragoza.
- [3] Carreño M. 1840. Notice sur la vie et les écrits du botaniste espagnol D. Mariano La Gasca. *Annales der Sciences Naturelles* XIV: 146-161.
- [4] Yáñez y Girona, A., 1848. Elogio Histórico de D. Mariano La-Gasca y Segura. Barcelona. Imprenta de D. Antonio Bagnes y Compañía.
- [5] Bellot F. 1976. La Gasca como político. *La Gascalia* 6: 203-208.

- [6] Archivo del Real Jardín Botánico de Madrid (en adelante: RJB) RJB01/0057/0008/0019. Carta de A. Cabrera a Simón de Rojas Clemente donde le comenta la situación en la que se encuentran algunos conocidos. Cádiz, 16-12-1825.
- [7] La Gasca M. 1824. Descripción de dos plantas nuevas halladas en los contornos de Sevilla y noticia de otras varias que se crían con ellas. Periódico de la sociedad médico-quirúrgica de Cádiz. Tomo IV: 1-5.
- [8] RJB01/0057/0003/0016. Carta del duque de San Carlos, José Miguel Carvajal Manrique, a Mariano La Gasca. Londres 4-5-1819.
- [9] RJB01/0057/0003/0018. Carta del duque de San Carlos a Mariano La Gasca. Londres 6-10-1819.
- [10] RJB01/0057/0003/0019. Carta del duque de San Carlos a Mariano La Gasca. Londres 6-1-1820.
- [11] Hooker W.J., 1829. Bot. Misc. I:64.
- [12] Archivo de los Reales Jardines Botánicos de Kew. Correspondencia del director W. Hooker. Carta de M La Gasca, Madrid 20-4-1838.
- [13] Britten J. and Jackson B.D. 1924. La Gasca in England. The Journal of Botany 64: 347-350.
- [14] Reyes Prosper E. 1917. Dos noticias históricas del inmortal botánico y sacerdote hispano-valentino D. Antonio Cavanilles y Centi y D. Mariano La Gasca. Madrid. Artes gráficas "Mateu".
- [15] Armada J. and San Pío M^a . P. Las rosas en el Herbarium Pictum. Real Jardín Botánico de Madrid (CSIC). Madrid.
- [16] RJB01/0057/0006/0009. Borrador de la carta de Mariano La Gasca a la comisión de la Sociedad del Fondo Literario. Camden Twon, 12-8-1826.
- [17] Britten J. 1908. La Gasca and his "Hortus siccus londinensis". J. of Botany British and foreign 46: 163-170.
- [18] Staflew. 1979. Taxonomic Literature. Vol. II. Pg. 720-721.
- [19] McVaugh R. 1968. Rare old publications in Michigan Herbaria. The Michigan Botanist 7: 11-13
- [20] Cook, D., comunicación personal del archivero de la Sociedad de apotecarios de Londres.
- [21] RJB01/0044/0002/0006. Lista del equipaje de M. La Gasca entregado a L. Gilson. Gran Bretaña, 1831.
- [22] RJB01/0056/0008/0023. Carta de Le Couteur a Mariano Lagarsca.

- [23] RJB01/0044/0002/0012. Borrador de la instancia en la que La Gasca pide una pensión para estudios de su hijo Juan. St. Heliers, Jersey 2-1-1832.
- [24] RJB01/0047/0004/0013. Oficio de la Comisaría del Real Jardín Botánico, Antonio Sandalio Arias, al pagador del Real Jardín Botánico, José Antonio Fernández de la Peña. Madrid 30-3-1835.
- [25] RJB01/0057/0005/0022. Carta de Mariano La Gasca a J.A. Melón enviándole semillas de ruibarbo. Londres, 15-3-1831.
- [26] RJB01/0044/0002/0005. Catalogue of American and other tree, shrub and herbaceous plant seeds, imported for sale by George Charlwood, seedsman, & C., con comentarios de La Gasca. Covent Garden. 5-3-1831.
- [27] RJB01/0047/0005/0007. Oficio de Ramón Garcés de Marcilla a A. S. de Arias. Madrid 7-6-1835.
- [28] Biblioteca y Archivo de la Linnean Society of London. Cartas a J.E. Smith vol. 5, nº 8. M. La Gasca, Camden Town, 9 November 1826.
- [29] Miller H.S. 1970. The Herbarium of Aylmer Bourke Lambert: Notes on its acquisition, dispersal, and present whereabouts. *Taxon* 19:489-553.



Figura 2.— *Lychnis lagascae* Hook. Biblioteca de los Reales Jardines Botánicos de Kew (Reino Unido) Vicent Brooks, Day and Son Imp.

Anexo. Listado de las especies enviadas por LaGasca desde Londres a España.

Entre los árboles se encuentran:

- 5 especies de arce (*Acer rubrum*, *A. striatum*, *A. saccharinum*, *A. negundo*, *A. montanum*),
(7 abedules),
un haya (*Fagus ferruginea*),
un castaño (*Castanea americana* = *Castanea dentata*),
dos carpes (*Carpinus americana* = *Carpinus carolineana*, *Ostrya virginica* = *Ostrya virginiana*),
3 crataegus ó espinomajuelos (*Crataegus coccinea*, *C. spathulata*, *C. pyrifolia*),
1 chionato (*Chionanthus virginica* = *C. virginicus*)
2 cipreses (*Cupressus disticha* = *Taxodium distichum*, *C. thuyoides* = *Chamaecyparis thuyoides*),
1 diospiro (*Diospyros virginiana*)
4 fresnos (*Fraxinus euptera*, *F. pubescens*, *F. sambucifolia*, *F. juglancifolia* (?)).
2 halesias (*Halesia tetraptera*, *H. parviflora*)
5 acebos (*Ilex dahoon*, *I. opaca*, *I. cassine*, *I. vomitoria*, *I. laxiflora*)
8 nogales
2 laureles: sassafras (*Sassafras albidum*) y Benzoin.
1 tulipero (*Liriodendron tulipiferum* = *L. tulipifera*)
1 magnolia (*Magnolia glauca*)
1 moral (*Morus rubra*)
4 myricas o árboles cereros (*Myrica cerifera*, *M. carolinensis*, *M. var. minor* (¿), *M. pennsylvanica*)
21 pinos (*Pinus alba*, *P. nigra*, *P. rigida*, *P. microcarpa*, *P. canadensis*, *P. variabilis*, *P. inops*,
P. palustris, *P. pungens*, *P. serotina*, *P. rubra*, *P. balsamea* (¿), *P. fraserii* (¿), *P. pumila*, *P. montana*,
P. cembra, *P. silvestris*, *P. picea*, *P. abies*, *P. pinea*, *P. pineaster*).
1 plátano (*Platanus occidentalis* = *P. orientalis* var. *occidentalis*)
2 porcelias (*Porcelia glabra*, *P. trilobata*)
6 “cirileros” (*Prunus virginiana*, *P. hyemalis*, *P. serotina*, *P. carolineana*, *P. pennsylvanica*, *P. nigra*)
9 encinas o robles (*Quercus coccinea*, *Q. rubra*, *Q. palustris*, ¿?, *Q. aquatica*, ¿?, *Q. America yellow*, ¿?,
Q. european (¿))
Acacias (*A. julibrissin* = *Albizia julibrissin*, *A. armata*)
3 olmos (*Ulmus alba*, *U. americana*, *U. nemoralis*)
3 vaccinios o arandanos (*Vaccinium frondosum*, *V. resinatum*, *V. estamineum*)
y 1 gleditzia (*Gleditschia inermis*).

Entre los arbustos sobresalen:

- 3 andromedas (*Andromeda racemosa*, *A. mariana*, *A. paniculata*)
6 azaleas (¿*Azalea dealbata*, *A. scabra*, *A. humilis*, *A. rubescens*, *A. coccineum* ? y varias variedades mezcladas)
2 hypericones (*Hypericum kalmianum*, *H. prolificum*)

- 3 kalmias muy apreciadas en Londres (*Kalmia latifolia*, *K. glauca*, *K. angustifolia*)
- 5 rosales (*Rosa carolineana* (¿), *R. gemella*, *R. lucida*, *R. fenestrata*, *R. laevigata*)
- 4 rododendros (¿ *Rhododendrum maximun*, *R. punetatum*, *R. catawbiense*, *R. ferruginea* ?)
- 4 espireas (¿ *Spirea tomentosa*, *S. trifoliata*, *S. salicifolia*, *S. corymbosa* ?)
- 4 viburnos (*Viburnum dentatum*, *V. medium*, *V. oxycoccus* (¿), *V. prunifolium*)
- 2 apias (*Apios tuberosa*, *A. frutescens*)
- 1 berbero o agracejo
- 3 cletras (*Clethra alnifolia*, *C. acuminata*, *C. paniculata*)
- 3 clematides o muermeras (*C. virginica*, *C. crispa*, *C. hybrida*) y algunas otras.

Entre las matas y [hierbas] hay varias dignas por su hermosura o rareza, como los

- 7(¿) hibiscos (*Hybiscus militaris*, *H. hybridus*, *H. grandiflora*, *H. speciosus*, *H. palustris*, *H. virginicus*)
 - 3 gerardias (¿ *Gerarda flava*, *G. purpurea*, *G. quercifolia*?)
 - 2 lobelias (*Lobelia fulgens*, *L. siphilitica*)
 - 6 monardas (*Monarda mollis*, *M. alba*, *M. punctata*, *M. oblongata*, *M. clinopodea*, *M. didyma*)
 - 3 phloxes (*Phlox acuminata*, *P. paniculata*, *P. amoena*)
 - 2 baptisias (*Baptisia cerulea*, ¿)
- y ocho aparasoladas que se encuentran en muy pocos Jardines de Europa”

Criptopaleontología y terapéutica contenida en el lapidario del rey Alfonso X “El Sabio” (1279). El primer tratado de literatura paleontológica en lengua castellana.

Eladio Liñán*

Área y Museo de Paleontología. Departamento Ciencias de la Tierra

Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza

María Liñán Aponte

C/ Cruz Roja, nº 8. E-24008 León

Resumen

El lapidario del Rey Alfonso X “El sabio” de Castilla es considerado como el primer tratado de literatura médica escrito en castellano. El estudio criptopaleontológico realizado en este trabajo sugiere que entre las 301 piedras que han llegado hasta nosotros en el libro primero, o de Abolays, aparecen numerosas referencias a fósiles, por lo que también debe ser considerado como el primer tratado de literatura paleontológica escrito en castellano. Los libros segundo y tercero aparentemente no contienen fósiles. El libro cuarto, o de Aben Quiche, presenta descripciones más breves de las piedras que dificultan la identificación de fósiles.

De entre los fósiles contenidos en el libro primero, destacan, dentro de un contexto fantástico, las referencias a trilobites, crustáceos, equinodermos, graptolites (la más antigua referencia escrita de este grupo), moluscos, plantas, vertebrados, corales, fósiles químicos y moldes externos e internos. Para la mayoría de ellos se dan las referencias geográficas donde se encuentran. El libro cuarto contiene muy probables referencias a ámbar y amonites.

Se incluyen también aquí las referencias a animales actuales y a las piedras encontradas en su interior porque, desde un punto de vista histórico, especímenes fósiles fueron también incluidos en ellas.

*Académico numerario

Abstract

The lapidary of the Alfonso X the Learned of Castilia is considered as the first book of medical literature writing in Spanish language. The cryptopalaeontological study of this lapidary suggests that there are diverse references to fossils between the 301 stones included in the first book which is named the Abolays book. It is also the first treatise on palaeontological literature writing in Spanish language. The second and third books has not fossil references. The fourth book or Aben Quiche lapidary have more concise descriptions of stones which made arduous the recognition of fossils.

Between the fossil contained in the Abolays book, trilobites, crustacea, echinoderms, perhaps graptolites, (the oldest reference in the literature), mollusca, plants, cnidaria, vertebrates, chemical fossils and external and internal moulds are described within an imaginative context. Most of the fossil descriptions contain its geographical location. The fourth book have possible references to amber and ammonites.

Lapidary references to recent animals and the stones found inside them are also studied here because fossil specimens were sometimes included in these stones from an historical point of view.

1 Introducción

En la farmacia actual, los medicamentos no son sino combinaciones de sustancias químicas inorgánicas, pero también de sustancias orgánicas. El más vasto campo de combinaciones químicas de sustancias tanto inorgánicas como orgánicas que podamos imaginar lo ofrece el laboratorio geológico de la naturaleza, que durante miles de millones de años ha venido produciendo diferentes tipos de rocas que se disponen, a modo de catálogo, por edades y regiones geológicas dentro de los estantes de la corteza terrestre que conforman esa gran botica natural que es nuestro planeta. Esta realidad es la que utilizaron de manera empírica en los lapidarios, junto con la botánica y la zoología, los naturalistas de la antigüedad, entre los que se encuentran renombrados pioneros de la medicina como Dioscórides, Galeno o Aetios d'Amida. Si la botánica tiene su base para sanar y componer remedios medicinales y la zoología también, la pregunta es ¿cabría esperar, a priori, que las piedras entendidas como asociaciones de sustancias minerales, y por tanto de elementos biófilos, posean un campo sanador propio?. Eso es exactamente lo que pensaban los autores de los lapidarios, que los concibieron como tratados de las piedras con propiedades sanadoras. Estos antiguos tratados nos indican que las piedras fueron utilizadas empíricamente como remedios medicinales, bien es verdad que junto a ingentes reminiscencias de creencias fantásticas, fabulaciones y supercherías, usadas por embaucadores en provecho propio. Por supuesto, con muchos más fracasos que aciertos; pero fracasos, a fin de cuentas, de los que no está exenta ninguna investigación científica.

He aquí, por lo tanto, un amplio campo para la investigación farmacéutica, iniciado hace varios milenios y abandonado en el renacimiento por otra línea más científica, mucho más comprehensiva, coherente y eficaz que se encuentra representada en nuestros días por la farmacopea occidental. Ello no obstante, la inmensidad de combinaciones con que se presentan las rocas en la naturaleza permite pensar que los lapidarios son aún hoy un amplio y desconocido campo geológico-farmacológico que no es conveniente despreciar y cuyo patrimonio no debiera perderse, una vez haya sido tamizado por la aquilatada metodología científica de nuestra farmacología moderna en combinación con los análisis geoquímicos, mineralógicos y de microscopio con microsonda. Un acervo que de algún modo rescata la moderna disciplina de Geología Médica con su primer congreso celebrado en el año 2005 en Brasil [1]. Los lapidarios son, en este sentido, los depositarios de una milenaria experimentación sin cuerpo teórico, cuya puerta de acceso comienza por desentrañar, de su lenguaje críptico, el nombre científico de las piedras utilizadas.

Dentro de estas piedras se encuentran algunos fósiles, cuya identificación forma parte de los estudios de Criptopaleontología [2]. El objetivo de este trabajo es analizar el contenido paleontológico del “Lapidario del Rey Alfonso X El Sabio”, mandado traducir al castellano de su original árabe por este rey castellano-leonés (Toledo, 1223-1284) y conservado en los manuscritos escurialenses h-I-15 (1.250-¿?) y h-I-16 (1.276-1.279); pues aunque existe otro código en la Biblioteca Nacional de Madrid, éste es una copia tardía del h-I-15. Estos dos códigos constituyen parte de una magna obra cuyo objetivo fue, al parecer, constituir un compendio en castellano de los libros sobre las piedras y sus propiedades, traducidos del árabe. El código más antiguo (h-I-15) es un tratado que incluye cuatro lapidarios copiados uno a continuación de otro con un cierto enlace narrativo del copista. Los tres primeros han sido atribuidos a Abolays, aunque un estudio detenido permite más correctamente atribuir el primero a Abolays, y el cuarto a Aben-Quiche. En dicho código faltan algunas páginas relativas al primer lapidario y por lo tanto se ha perdido la descripción de 59 de las 360 piedras que contenía el original. El segundo código (h-I-16) contiene sólo el índice de una obra de once partes que o bien no se copió [3] o se ha perdido [4].

Para el estudio criptopaleontológico se ha utilizado un ejemplar de la reproducción fotocromolitográfica del código h-1-15 de la Biblioteca del Real Monasterio de San Lorenzo del Escorial [5] puesta gentilmente a mi disposición por D. Vicente Martínez Tejero, así como la versión y traducción moderna realizada por Brey Mariño [4] y el trabajo comparativo de Amasuno [6] con el Dioscórides de Laguna. La versión de Brey Mariño ha permitido a la autora recuperar el nombre de algunas de las piedras que faltan en el primer código, donde se han perdido algunas páginas. El código es una traducción al castellano, probablemente enriquecida, de otro código arábigo no conservado que, según se dice en el lapidario, es la traducción que hizo Abolays de un original en lengua caldea. Este origen

caldeo ha sido cuestionado[7]. Por las múltiples referencias que se hace a las localidades españolas donde se encuentran las piedras opinamos que no fue una copia literal sino que probablemente se incluyeron en él algunos de los conocimientos que tenían los copistas (véase aquí la Piedra Gagates).

En relación a otros lapidarios conservados, el lapidario alfonsino tiene la particularidad de que suele dar los nombres alternativos en griego, latín, egipcio, caldeo, árabe y castellano para bastantes piedras. Como la Criptopaleontología indaga no sólo en los escritos antiguos sino también en las tradiciones orales, el lapidario de Alfonso X es una herramienta muy útil para contrastar en la tradición oral de distintos países las muchas lagunas descriptivas que caracterizan a los lapidarios, a la hora de identificar las piedras desde el punto de vista moderno de la mineralogía, petrología y paleontología. Otra particularidad de este lapidario es el amplio desarrollo que tiene la parte astrológica, inexistente en el resto de los lapidarios griegos y latinos conocidos, con excepción del Lapidario Damigerón-vax, donde se relacionan algunas piedras con constelaciones, y con excepción de alguna velada alusión que se hace en el Lapidario de Orfeo. Lo cual no es de extrañar porque el texto conservado en latín del Lapidario Damigerón-vax también indica su procedencia oriental. Por el contrario, el Lapidario de Alfonso X se diferencia bien de los apócrifos griegos por carecer de las connotaciones mitológicas tan frecuentes en aquéllos. Finalmente, en el primer libro se suele dar una descripción referida al color, humedad, temperatura y tacto de las piedras, pero a veces tan vaga que no ayuda demasiado a su identificación; especialmente ardua, cuando el nombre es arábigo o caldeo.

Las piedras que se encuentran en el interior de los animales o que se piensa por su forma, son producidas por animales, son llamadas expresamente en las descripciones “Piedras de los animales”, quizá aludiendo a una clasificación previa en algún lapidario antiguo. Algunas de éstas son cuerpos fósiles, otras son esqueletos actuales, como el coral, y algunas otras son gastrolitos o cálculos formados en el sistema digestivo.

Para la localización referencial de cada piedra en los cuatro lapidarios, se utilizará en caracteres romanos el número de orden del lapidario (I a IV) y en arábigos la página en que se encuentra en el código, seguida de la simbología empleada en la obra de Brey Mariño [7] que referencia cada piedra por su número de orden en que aparece en el Lapidario I del código. También preferimos seguir, en general, la versión que hace esta autora del castellano antiguo, pues aunque es menos literal que la del código realizada por Fernández Montaña [5] se comprende mejor en el español actual. También existen diferencias sintácticas en el nombre exacto de las piedras entre uno y otro autor; por ejemplo *Abarquid* y *Abarquiz* o *Abietityz* y *Abietitiz* o *Maihutyz* y *Maihitiz*, respectivamente. Se seguirá aquí la versión más moderna.

El lapidario primero recoge la creencia (sobre la que no hay fundamento) de que Aristóteles escribió un libro nombrando setecientas piedras acompañadas por su color,

grandeza, propiedades y lugar de origen. El cuarto recoge la existencia de supuestos lapidarios de Platón y otros sabios; contiene 92 piedras; la primera de ellas tiene siete variedades de color con atributos mágico-medicinales diferentes, lo que hace un total de 98 piedras. Se indica en él la primera clasificación general de rocas pues las piedras raíces o principales de la tierra son tres: mármol (calcáreas), calcedonia o pedernal (silíceas), y çad (seguramente menas metálicas, pues según el lapidario, la primera piedra çad es el hierro).

Sorprende el alto número relativo de piedras que según las descripciones deben ser moldes internos de fósiles y a los que se le confieren propiedades maravillosas, igual que a las concreciones. Es fácil de imaginar la fuerte impresión que produciría, al partir una piedra, el encontrar en su interior otra piedra de distinta forma o naturaleza que parecía haber germinado la tierra y por ello tendría, supuestamente, una fuerza especial. Se comprende que los mineros alemanes del siglo XVI denominaran a los moldes internos de fósiles como “steinkern” (el corazón de la piedra). Estas ideas quedan bien expresadas en el “*Lapidario órfico*” cuando refiere que la tierra es la madre de todos los males (terremotos, inundaciones, tsunamis, erupciones,...) pero también de los remedios que los curan. De la tierra provienen todas las piedras, y encontramos en ellas un poder mayor que el de las plantas porque la Madre Tierra les ha dado un alma a la cual ni la muerte ni la vejez pueden tocar.

2 Fósiles y esqueletos animales

2.1 De la Piedra Gagatiz o Gagates (I 2,3).

*“Del tercer grado del signo de Aries es la piedra a la que dicen **Gagatiz** en caldeo y en latín **Gagates**. Le viene el nombre del río Gaga....A esta piedra no la traspasa la luz [opaca] pues es de color de greda turbia; hállanla también en España en unos montes que están cerca de Zaragoza en un lugar que llaman Diche [¿Daroca?]. Y también en el monte cerca de Granada que llaman Soler.... Pero tanto las de Zaragoza como las de Granada son pocas y no son tan buenas como las que hallan en el río de Gaga.*

Es de naturaleza caliente y seca y tiene tal propiedad que cuando la pulen y dan, lo que de ella sale, a beber a algún hombre al que huela mal el cuerpo por razón del sudor, quítaselo luego y hace que huela bien. Otra propiedad es que si la ciñeren sobre el vientre a un hombre que tenga en los intestino gusanos de los que llaman simiente de calabazas [¿tenias?] hácelos morir y echarlos por abajo ...”.

La descripción tan vaga de esta piedra, impediría su asignación moderna, si no fuera por el nombre latino con que se la conoce en los diversos lapidarios. Se trata de carbón fósil conocido como lignito, hulla o antracita según su contenido en carbono. Se conoce como azabache a una variedad de lignito de color negro jaspeado y por extensión a la

pedra gagates o piedra de carbón.

El comentario sobre la bondad relativa de la gagates española indica que esta piedra era utilizada como remedio curativo en España durante la Edad Media.

Esta piedra azabache es también recogida como **Piedra Zequeth** (I 67, 212), leída **Zequech** (cf. Amasuno 1987) o Sektedj (cf. lapidario de Ibn al-Baitar) o también **Sekbedj** (cf. Leclerc, diversos manuscritos, 1877, 1881, 1883). Dice así en el original alfonsino: *“Del primer grado del signo de Sagitario es la piedra a la que dicen **Zequeth**. Es hallada en tierra de Luquia [Licia] y también junto al río que corre cerca de la villa que llaman Mitaz. Piedra es de color negro y muy liviana de peso. Cuando la queman hace llama, y sale de ella humo que huele como pez al que meten en fuego. De naturaleza es caliente y seca. Y si sahumaren con ella al que está endemoniado, tómale luego. Y también, sahumando con ella a la mujer que tiene dolor en su natura, sánala luego, por razón de que esta piedra es percusiva; y del humo de ella huyen los reptiles. Y esta piedra es buena cuando la meten en las medicinas para sanar la enfermedad que llaman artética, que viene de naturaleza de flema, porque es algo salada”*.

Su parecido terapéutico con la Piedra de Gagates de Dioscórides es evidente [6] por lo que Gagatz y Zequeth vienen a ser la misma piedra tomada de fuentes distintas.

2.2 De la Piedra Maziuquez (I 86, 278)

*“Del séptimo grado del signo de Acuario es la piedra que dicen **Maziuquez**. Es hallada en el monte Sinaí. Fuerte es y dura de quebrantar; de color pardo que tira algo a amarillo y hay en ella figura de árbol de color verde, y cuando la quebrantan, en cuantos pedazos se hacen de ella, en cada uno de ellos aparece esta figura. De naturaleza es caliente y húmeda. Si la muelen y ponen de ella en las llagas antiguas, hácelas cerrar en poco tiempo, y si la mezclan con cera o con resina, es mejor para esto. Aún tiene otra muy noble virtud: que nunca hallarán hombre que la tuviese consigo que deshiciese su hacienda; por eso la tienen siempre guardada en sus arcas y en sus tesoros los de la Tierra de Promisión”*.

Muchos minerales como el cobre nativo, la hematites o la pirolusita se presentan bajo aspecto dendriforme, confundidos con vegetales. De color verde es la malaquita, un carbonato de cobre hidratado que, a veces, reemplaza las paredes carbonosas de los vegetales fósiles, como sucede en las capas de pizarras pardo-amarillentas con vegetales del Triásico de los alrededores del Moncayo (Zaragoza), donde este mineral abunda. Así, pudiera tratarse de un fósil vegetal mineralizado. Por otra parte, hay otros muchos fósiles con forma arborescente como las algas, los briozoos, las esponjas o los corales que podrían teóricamente estar incluidos en esta descripción general. La clave del significado real de esta piedra ha de estar en el monte Sinaí. Véase también el parecido en forma y color de esta piedra con la Piedra Botryites de Plinio (XXXVII 150) relacionada con posibles

vegetales fósiles [8].

2.3 De la Piedra Açufaratiz (I 8-9, 25-28)

*“De los XXV grados del signo Aries es la piedra que dicen açufaratiz y hay cuatro maneras de ella; a la primera llaman **Liemeni** [yemení] porque es hallada en tierra de Liemen [Yemen]; a la segunda dicen **Kabroci** [chipriota], porque es hallada en la tierra que dicen Kabrocen en Arábigo y en latín Chipre. a la tercera le dicen Lubi [libia]; porque es hallada en la tierra que dicen **Lubia** [Libia]; y a la cuarta dicen **Antoqui** [antioqueña], porque es hallada en la tierra que dicen Antoquia, que quiere decir en latín Antioquía. De cada una de estas piedras hablaremos en este libro allí donde conviniere: más primeramente diremos de la yemení”.*

Las cuatro modalidades de piedra Açufaratiz (A. Liemeni, A. Kabroci o Abietityz, A. Lubi, y A. Antoqui o Ceraquiz) se caracterizan por tener en su interior otra piedra. Y se diferencian por la forma externa. Se relacionan con concreciones; pero, como es el caso de las dos primeras modalidades y la última, también con el relleno de huecos en el interior de fósiles (moldes internos) que aunque reproducen la cara interna del fósil tienen una distinta composición a la de él. A continuación, veremos estas tres piedras con más detalle

2.4 De la Piedra Açufaratiz Liemeni (yemení) (I 8, 25)

“De su naturaleza es caliente y seca; y es de color negra, y liviana de peso. Y tiene figura de agalla: y no la hallan sino en la ribera del río de aquella tierra [Yemen]. Y es blanda, y ligera de quebrantar, y cuando la quebrantan hallan en su interior otra piedra que es dura y fuerte de quebrantar”. Y tiene tal virtud que si molieren de aquella piedra que hallan dentro y la revolvieren con leche de mujer y mojaren en ella una poca de lana y la pusieren en la natura de la mujer, cuando yaciere con ella el hombre, empreñará a la primera vez; eso mismo hará cualquier animal si la piedra estuviere mezclada con la leche de la hembra de su naturaleza...”.

Seguramente se refiera a una concreción. No descartamos que también pudiera haberse incluido en esta piedra, por su forma de agalla, rellenos internos de fósiles subsféricos; como por ejemplo serían los esqueletos de equinoideos rellenos de marga.

Los supuestos poderes curativos se basan en los remedios simpáticos. Como la piedra tiene aparentemente poder para engendrar otra en su interior, también este poder serviría ingenuamente para ayudar a una mujer u otro animal a engendrar otro ser en su interior.

2.5 Piedra Abietityz o Accufaratiz Kabroci o Buitreña (I 9, 26)

*“De los XXVI grados del signo Aries es la piedra que dicen **abietityz**; que quiere decir Boitrenna [buitreña], y tiene este nombre porque la trae la hembra del buitre a su nido por parir más ligeramente a sus hijos. De su naturaleza es caliente y seca, y es la segunda manera [de Açufaratiz] que dijimos llaman **cabroci** [sic]. Y es hallada en figura de bellota; pero hay algunas de ellas que son algo más largas. Blanda es y ligera de quebrantar y liviana de peso; y tira un poco a blanco; mas no mucho.*

Y cuanto la quebrantan hallan dentro otra que tira un poco a amarillo, y a veces, hallan dentro también unas piedras menudas y amarillas, que son ligeras de quebrantar como las otras. Y esta piedra tiene tal virtud que cuando la meten en cuero de ciervo y la atan a la mujer al muslo izquierdo, pare luego ligeramente y sin peligro, y nacen los hijos sin percance, si la naturaleza no erró antes al formarlos [toda una declaración de lo poco eficaz que debía ser el remedio] ...”.

Por su descripción podrían ser concreciones; si bien la forma de bellota y el hecho de encontrar, a veces, otras piedras amarillas dentro casa más con su asignación a fósiles rellenos internamente como por ejemplo equinoideos de cuerpo alargado. Los cefalópodos fósiles llamados belemnites tienen forma de bellota que es frecuentemente más alargada, como dice el texto; cuando se conserva la parte superior o rostro, ésta está rellena de sedimentos (molde interno del fósil) que por la producción de limonita como alteración de la materia orgánica del cuerpo, pueden ser amarillos. No sería extraño que esta piedra incluyera ambos tipos de fósiles.

Plinio da como forma de bellota a la Piedra Balanites, que sin descartar pudiera aludir a un belemnites o cirrípedo fósil, se ha relacionado por su color verde y bronce con un mineral [8].

2.6 De la Piedra Ceraquiz o Açufaratiz Antoqui o Antioqueña (I 9, 28)

*“De los XXVIII grados del signo Aries es la piedra a que llaman **Ceraquiz**; es la cuarta manera de la piedra que dijimos a que dicen **Açufaratiz**, y es esta a la que llaman **antioqueña**. Es de forma redonda, y muy blanca de color y liviana de peso porque es muy porosa, pues en ella hay muchos agujeros sutiles que no se ven. Ligeramente quiebra y cuando la quebrantan, hayan dentro otra piedra que tira a amarillo. De su naturaleza es caliente y seca.*

Tiene tal virtud que impide el parto de este modo: que si la ataren en cuero de cordero que sea degollado con cuchillo de acero fino, y la colgaren sobre la natura de la mujer, estorbará que pueda parir de ningún modo, así que conviene que se la quiten al tiempo del parto, si no, por derecha fuerza habrá la mujer de quebrar o morir. Eso mismo hace en cualquier animal sobre el que la pongan ...”.

La forma redondeada y las perforaciones internas sugieren el molde interno de algún fósil, sin descartar que pudiera tratarse de una concreción.

2.7 De la Piedra Zamoricaz o Piedra de los Ermitaños (I 14, 40)

“Del décimo grado del signo de Tauro es la piedra que llaman Zamoricaz; y que también es dicha: piedra de los ermitaños. Es hallada en la ribera de la Mar que dicen Alcuçun, y es aquella mar por la que pasó Moisés a los hijos de Israel, cerca de la ciudad que llaman Bocaliz, pues las ondas de aquella mar échanlas a la orilla, cuando hace tormenta. Y es muy amarilla de color y lucia como el aceite claro, y transparente. Es fuerte de quebrantar, y hay de ellas grandes y pequeñas. pero siempre la hallan en figura de castaña. De naturaleza es fría y seca, y muy fuerte en estas dos complexiones. Aprécianla mucho en aquélla tierra y úsanla en sortijas y en sartales, porque el hombre que la trae consigo no tiene sabor ninguno de pleito de mujer, y aunque lo comience no puede acabar ninguna cosa mientras la piedra tuviere consigo; por esto, los sabios antiguos dábanla a los religiosos a los ermitaños y a aquellos que prometían de tener castidad. Y algunos de los gentiles que tenían por ley de no yacer con sus mujeres sino en tiempos señalados, por deseo de empreñarlas más pronto y de hacer los hijos más recios, traíanlas siempre consigo en todo otro tiempo, menos cuando querían engendrar. Y si dieren un peso de tres dracmas de beber de esta piedra molida a algún hombre, nunca jamás tendrá poder de yacer con mujer. Y por ello, los reyes de India cuando a algunos querían castrar para que guardasen a sus mujeres, dábanles a beber de esta piedra, por duelo de tenerles que cortar sus miembros, y valía tanto como si fuesen castrados”.

Se trata de una auténtica piedra mágica que el título del código llama Zamorat por error (según Brey Mariño, 1997). Sin descartar una gema, bien pudiera tratarse de ámbar, cuya referencia no se encuentra en todo el Lapidario. Ello explicaría bien su color, transparencia y brillo. También su utilización por los religiosos (es una de las piedras que aparece en el pectoral del sumo sacerdote de los hebreos), y su empleo como adorno en sortijas y cuentas ensartadas. La **Piedra Zayetanizes** (IV, 43) pudiera ser la misma piedra: *“Zayetanizes dicen en griego a la primera piedra de la z. De color es de aceite y de hermosa apariencia, y hay en ella gran claridad y vése el hombre en ella. Y quien la engastare en anillo y la llevase consigo no le empestará mordedura de ningún vestiglo [monstruo fantástico horrible]”,* pero también casa como la anterior con una gema. Otra resina fósil parece ser la **Piedra Yonuoloyz o goma Dalbelat** (IV, 55). *“Yonuoloyz llaman en griego a la primera piedra de la y. Y dícenle también goma Dalbelat; porque la hallan en una villa de Alejandría. Y es de muchas colores y no la hayan sino en Alejandría. Y su virtud es que ayuda al que tiene la postema, a la que no pueden dar consejo los físicos, fregándola con agua y untando, con lo que saliere de ella, el lugar donde el hombre tiene el dolor”.*

2.8 De la Piedra Iudiega (Piedra Judaica) (I 36, 109)

*“Del XIX grado del signo de cáncer es la piedra llamada **iudiega**. Esta hállanla en la tierra que dicen Falaztim [Palestina]. Es siempre hallada en forma de bellota; de color es blanca y hay en ella líneas verdes, de largo en largo. De su naturaleza es fría y húmeda; deshácese cuando la echan en el agua, y lo que de ella sale no tiene sabor ninguno. De ellas hay que son llanas de un cabo y del otro redondas, en forma de castaña y están cerca del tamaño de una nuez.*

Piedra es pesada en sí y tiene tal virtud que si tomaren de ella tanto como un garbanzo y lo pulieren en aguzadera negra y dieren de ello a beber, con tres tanto de sí de agua dulce, al que tiene retenimiento de orina, sana luego; quebranta la piedra que se hace en la vejiga y sirve también contra la otra que es hecha en los riñones...”

Esta piedra no está recogida en la traducción de Fernández Montaña. La piedra judaica es recogida por la mayoría de los lapidarios y ha sido referida a esqueletos de equinoideos fósiles [9]), cuya forma actual más conocida es el erizo de mar. La descripción que hace el lapidario de Alfonso X es muy parecida a la de Dioscórides (V 137).

2.9 De la Piedra Marina

*“Del XXVII grado del signo de Libra es la piedra que dicen **Marina**. Es hallada en la parte de Occidente a la orilla del mar porque las olas la echan fuera sobre la arena. De forma es como los torteros que meten en los husos con que hilan, y es horadada en medio. Unas hay grandes y otras pequeñas y por encima hechas todas así como a granos. De color son amarillas y como polvorosas por encima; fuertes, duras de quebrantar y espesas de color. De naturaleza son calientes y húmedas.*

Su virtud es tal que quien bebe de ella peso de media dracma, quebranta la piedra que se hace en la vejiga o en el riñón, y hácesela echar como arena menuda. Si de esta piedra ponen un poco en la carne cuando la meten a cocer, ablanda los huesos de manera que los pueden comer como la carne; y eso mismo hace con las espinas del pescado...”

La simetría de la forma parece corresponder bien con un fósil cuya asignación no es fácil en estos momentos. Por la forma redondeada y el orificio podría tratarse de artejos de crinoides aunque suelen ser de tamaño pequeño. También los granos que presenta externamente podrían relacionar esta piedra con el esqueleto fosilizado en margas de un erizo de mar del grupo de los equinoideos que tuviera cuerpo aplanado y las aberturas del sistema digestivo enfrentadas. Esto estaría más en consonancia con las virtudes médicas que se le atribuyen como disolvente de cálculos, al compararlas con las otras piedras de fósiles.

2.10 De la Piedra Albarquid (I 13, 35)

“Del quinto grado del signo de Tauro es la piedra a que dicen **albarquid**, y es hallada en tierra de frica, en las minas de azufre. Liviana es y fuerte de quebrantar; y es de fuera de color de alheña mezclada, verde con un poco de amarillo. Es de figura llana, y cuando el hombre la mira bien, aparece en ella figura de escorpión; y si la quebrantan, hallan dentro la piedra figurada de aquella misma manera. Por su naturaleza es fría y seca.

Y tiene tal virtud que cuando alguna mujer la trae consigo, enciéndela tanto por codicia de varón que no se puede contener sino por muy gran fuerza; y así lo hace cualquier animal que la tenga que sea hembra. Los de India, que trabajan mucho del arte de nigromancia, obran mucho con esta piedra. Y tiene tal virtud que si dieren de esta piedra molida a beber a mujer, hínchale el vientre poco a poco, de guisa que semeja a preñada; y cuando viene el tiempo de parir, deshácese. Y los nigromantes hacen creer que, por su arte y por su saber se hace aquella preñez y se deshace.

Y la estrella luciente que está en el lado derecho de la figura de Perseo, tiene poder sobre esta piedra, que de ella recibe la virtud; y cuando ella fuese en el ascendente, muestra esta piedra más manifestamente sus obras”.

Este primitivo, y poco convincente, afrodisíaco femenino que es la piedra Albarquid, se refiere sin ningún tipo de duda a pizarras de trilobites. Esta apreciación se basa en las siguientes razones. La pizarra es una roca paleozoica liviana y dura. Son también llanas o planas. Su tacto es frío y son impermeables, por eso son usadas desde tiempos inmemoriales como techumbre. Las pizarras de trilobites del Cámbrico son, con mucho, las más extendidas, y suelen ser verde-amarillentas, y más claras en cuanto más meteorizadas se encuentran. Hasta tiempos actuales, la denominación de escorpión de piedra se ha venido dando a las pizarras de trilobites por los lugareños de ciertas regiones españolas [10]. Estos artrópodos extinguidos, cuando su tamaño es grande, no tienen otro parangón morfológico en las regiones secas del interior sino con sus parientes actuales los escorpiones. Las pizarras de trilobites se caracterizan por sus acumulaciones sobre las sucesivas superficies de las pizarras, de ahí que al partirlas en lajas, normalmente aparezcan nuevas superficies con trilobites. Finalmente, la piedra de escorpión se encuentra citada en el lapidario apócrifo griego de Orfeo (*lithos skorpíós*, v.494-497) y también en Plinio (*lapidibus Scorpitis*, XXXVII 187) por lo que debió ser una de las más conocidas. Los trilobites son frecuentes en todo el norte de frica, y también en el norte de la India, regiones geográficas que cita el lapidario.

2.11 De la Piedra Coral [bermejo] (I 14, 41)

“Del oncenno grado del signo de Tauro es la piedra a que dicen **coral** en latín, y en árábigo dicen a la raíz de ella **margen** y a los ramos **becet**. Esta piedra se cuaja del agua

de la mar y hácese como árbol, y semeja en color a la hierba que dicen hierba marina. Es de muchos ramos y, mientras está en el agua de la mar, es blanda, y luego que la sacan y la hiere el aire, endurece. Es hallada en muchos lugares más, pero la mejor de todas es la que hallan en la mar de Inglaterra o en la Isla de Cerdeña. No es clara que la pase la vista; de color es bermeja, y cuanto más tiene en sí bermejura, tanto es mejor. De su naturaleza es fría y seca. Y su propiedad es de estreñir templadamente; y si la destemplaren con vino o con alguna cosa y la dieren de beber a los que escupen sangre, sírveles mucho. Y también ayuda a los que no pueden hacer orina. Y a quien la bebe con algún líquido, desata la apostema que se hace en el bazo...”

En esta piedra y en la siguiente, el lapidario se refiere a corales actuales y no a corales fósiles. Se incluye en este estudio porque en las boticas se dispensaron bajo esta denominación también los corales fósiles.

En el segundo libro denominado “Sobre el signo de las faces de los signos” esta piedra aparece cuatro veces referida. La primera dice: **De la piedra que a nombre Coral** (II 97, 18) *“De la tercera faz del signo de virgo es la piedra que llaman coral, de la que dijimos ya en este libro en el XI grado del signo de Tauro. Y su virtud es tal que el que la trae consigo aprecias mucho en su voluntad; y pagas de cuanto hace. Y si la ponen en lugar donde haya casados, hace que se amen mucho los maridos con sus mujeres; y si alguna desavenencia tuvieron antes, hace que se torne en amor. . .”*. La segunda dice: **De la piedra que dicen Coral** (II 99, 29) *“De la segunda faz del signo de Capricornio es la piedra que llaman Coral de la que ya se ha dicho en este libro en el sexto [undécimo en realidad] grado del signo de Tauro. Y tiene tal virtud que si la pusieren en el lugar donde anden ganados, crecerles ha mucho la leche, y son guardados de los accidentes que les suelen acaecer; y esto mismo hace a las abejas. Pero esto lo hace ella más cumplidamente estando Venus en esta fase, y en el ascendiente y en su hora y a salvo de los infortunio y en buena relación con Júpiter. . .”*. La tercera es: **De la piedra que llaman Coral** (II 100, 33) *“De la tercera faz del signo de Aquario es la piedra que llaman Coral de la que ya se ha dicho en el onceavo signo de Tauro. Su virtud es tal que si alguna mujer la tuviere consigo será mucho amada de las otras mujeres y dirán bien de ella. Esto hace ella estando Venus en esta fase, y en su ascendiente, y en su hora, y recibida del sol y de la luna..”*. La cuarta es: **De la piedra de nombre Coral** (II100, 36) *“De la tercera faz del signo de Piscis es la piedra que dicen Coral, y de esta ya se ha dicho en este libro en el XI grado del signo de Tauro. Su virtud es tal que el que la trajere consigo amará mucho andar por yermos y por montes, y nunca querrá entra en Villa, y será buen andante en toda caza que se haga con aves. . .”* Es claro que para los astrólogos que escribieron este lapidario, las piedras adquirirían otras propiedades complementarias según la situación de los planetas en su órbita.

En el libro III, está dedicado a cómo se cambian muchas veces las propiedades de las

piedras según el estado de los planetas y de las figuras que están en el octavo cielo, de donde ellas reciben la virtud También se encuentran en él cuatro referencias del coral. La primera, **De la piedra que dicen Coral** (III 105, 31), dice: “*Coral es la piedra que recibe también virtud por la fuerza de Venus y señaladamente para hacer huir a los ratones y múridos que son dañosos a los hombres, y esto hace cuando está Venus en su exaltación y su hora...*”. La segunda, **De la piedra que llaman Coral** (III 106, 32), dice: “*Aún tiene otra virtud el coral por la fuerza de Venus. Quien lo trajese consigo estando este planeta en su hora, en su estado ascendente y en la primera fase de Tauro, será amado de toda cosa que él vea...* La tercera, **De la piedra de nombre Coral** (III 106, 33), dice: “*Coral tiene también otra virtud por razón de Venus: que el que la tuviere consigo estando Venus en su ascendente y bien apropiada, amarle han las mujeres mancebas y hermosas. Continúa : De la piedra de nombre Coral* (III 106, 34). “*Aún el coral tiene otra virtud por la fuerza de Venus: que el que lo tuviere consigo en hora de Venus y en su ascendente, le es bueno para el amor de mujeres; pues amarlas há el mucho y ellas a él...*”

2.12 De la Piedra Coral negro (I 14, 42)

“*Del duodécimo grado del signo de Tauro es la piedra que dicen **Coral negro**. Tal nombre tiene en árabe como la otra; y así es tierna bajo el agua y endurecese cuando la sacan al aire como ella; pero el olor es más fuerte que el de la otra. De naturaleza es fría y seca, mas la sequedad de ésta es mayor que la de la otra. Tiene cumplidamente todas las virtudes del coral bermejo y, además, tiene ésta: que si la beben molida, sirve para las llagas de los intestinos y para el temblor de corazón, y entra en medicinas que se dan para alegría. Y cuando la quemar y la hacen polvos, sirve mucho para enjugar la lágrima que viene a los ojos y, por ello, es buena para meter en los alcoholes*”.

Es difícil pensar que las boticas incluyeran en esta piedra zoológica corales fósiles, aunque no se puede descartar pues los hay de color negro.

2.13 De la Piedra Espuma de mar o Alcyonio (I-49-50, 153-157)

“*Del segundo grado del signo de Libra es la piedra a que dicen **espuma de mar** [Alcyonio en Dioscórides] y de ésta hay cinco maneras. A la primera dicen **Esponja**, a la segunda **Alga marina**; a la tercera **Ferfide** [Milesia en Dioscórides] que quiere decir tanto bermejo como mezclado con pardo; a la cuarta dicen **Laneña** y a la quinta **Hongueña** [un mineral]...”*

El texto también refiere más adelante otras denominaciones: Alga marina o Algueña se denomina en caldeo **Gacor**; Farfiri [sic] en griego es **Milicion**; y Laneña es en caldeo **Guyrunion**.

El lapidario de Abolays reproduce las cinco clases de la **Piedra Alcyonio** que se encuentra en la obra de Dioscórides con gran coincidencia de textos [6], aunque en alguna de las clases se extiende algo más.

Este octocoralario, llamado falsa esponja por su forma, por su descripción y hallazgo no es fácil pudiera confundirse con material fósil; que por otra parte es muy escaso. Dioscórides reserva el nombre de espuma de mar a la sal depositada sobre las piedras de la orilla.

2.14 De la Piedra de la Esponja (I 85, 274)

*“Del tercer grado del signo de Acuario es la piedra de la **Esponia**. Estas son halladas en muchos lugares y de muchas formas, y las que hallan en Tierra de Promisión son piedrezuelas menudas y muy duras. De color es de iuuba, y de naturaleza caliente y húmeda: su humedad es en el primer grado y la calentura en el tercero, por lo que se seca más que humedece. Si dan de ella a beber, quebranta la piedra que se hace en la vejiga, mas no las de los riñones. Tiene otra propiedad: que si la ponen en agua, apártase de ella como si la aborrece. Si la revuelven con cualquier aceite incorpórase con él y hácese una sola cosa; y si la ponen de esta manera en los dientes, sana las llagas que haya en ellos; lo mismos hace a la sarna y a la comezón y quita el dolor de ellos. Si la calentaren y echaren de ella en la oreja, quita el ruido que se hace allí, seca el agua y la supuración que está dentro encerrada e impide que se haga postema”.*

Esta piedra de la esponja en relación con las esponjas de Dioscórides, se encuentra en tierra adentro y tiene distintas propiedades curativas. Es posible que se trate de corales fósiles e incluso esponjas, pero no es posible saber fehacientemente su asignación pues no se da descripción alguna.

2.15 De la Piedra Tarnicen (I 56, 179)

*“Del XXVIII grado del signo de Libra es la piedra que tiene nombre **Tarnycen**, que quiere decir imán de sanguijuelas. Fuerte es, dura de quebrantar y de color pardo que tira a bermejo. Hállanla siempre en forma de redoma y aparece dentro de ella figura de sanguijuela; y si la quebrantan, en cada pedazo hallan otra tal. Esta piedra se halla en el monte Sinaí, en el pie de él, en una cueva que no es muy honda. De naturaleza es caliente y húmeda, y la sequedad de ella es más fuerte que la humedad. Su virtud es tal que si la ponen en la boca de algún animal que tenga sanguijuela en el cuerpo o en la garganta, atráela con tal fuerza que la hace venir a pegarse en ella. Y si molida y hecha polvos la pusieren sobre carne que sea sobresanada, quítala y cura, y eso mismo hace a las verrugas. También tiene gran fuerza de retener la humedad para que no corra y de juntar las cosas separadas; por eso hacen de ella alcohol para sanar la albura del ojo en*

que se hace mancha y también la niña que quiere salir de él por el gran dolor”.

Parece ciertamente una piedra fosilífera, pero la fabulación de sus cualidades terapéuticas no dice mucho en favor del rigor con que el autor la describe y es difícil una asignación. Pudiera ser una caliza de esponjas o de corales solitarios fósiles o simplemente una roca. La figura de sanguijuela pudiera referirse a serpúlidos adheridos a los esqueletos.

2.16 De la Piedra Siphé (I 26, 76)

*“Del décimo sexto grado del signo de géminis es la piedra a que dicen **Siphé**, que quiere decir sanamiento. Es, de su naturaleza, caliente y húmeda y de color amarillo, pero hay en ella líneas cárdenas a semejanza de árboles, y en cuantas piedras de ella quebrantan, siempre hallan en ellas esta figura. Fuerte es, dura y de color resplandeciente; y hallan de ellas grandes y de ellas pequeñas, y tiran más a livianas que no a pesadumbre. Y su virtud es tal que sana del dolor de estómago y de los intestinos a quien la trae colgada sobre ellos. Si la trajere antes de que tenga la enfermedad, estará seguro de no tenerla, y si al que la tiene dieren de ella a beber, sana luego enseguida; y porque tamaña salud viene de ella, por eso le pusieron este nombre, por eso le pusieron este nombre, y por esta razón es contada como una de las piedras más preciosas”.*

Las líneas cárdenas (amoratadas) pudieran ser hidróxidos de hierro que aparecen con forma dendrítica; pero con la vaguedad de la descripción es difícil saberlo, Una roca amarilla, fuerte y resplandeciente que al quebrantar presente siempre la misma figura casa bien con una pizarra paleozoica. En las pizarras del Cámbrico de Murero (Zaragoza) se suelen encontrar bellos ejemplares de pizarras con líneas cárdenas arborescentes, como resultado de la meteorización de cuerpos blandos fósiles y el posterior emplazamiento de hierro secundario.

2.17 De la Piedra Diente de Cangrejo marino (I 28, 86)

*“Del XXVI grado del signo de Géminis es la piedra que es **diente de cangrejo** [cangrejo] **marino** y es contada por una de aquéllas de los animales. De su naturaleza es caliente y húmeda, y su color es tal como el del casco de un cangrejo.*

Y su virtud es que si la meten molida y hecha polvos en los ojos, esfuerza la vista, sana la sarna y quita la comezón que hay en ellos. Y las dos estrellas que están la una en la boca y la otra en el ojo de la figura de la Osa Mayor tienen poder sobre esta piedra, que de ellas recibe la virtud; por tanto, cuando estas ambas están en el ascendente, muestra esta piedra más manifestamente sus obras”.

Los cangrejos marinos fósiles son frecuentes en el registro fósil desde el Periodo Cretácico. En Aragón son muy abundantes en el Cretácico de Teruel y en la Edad Eoceno de Huesca. Muchas veces su esqueleto se encuentra desarticulado por las corrientes siendo sus pinzas,

más resistentes, las que mejor se conservan. La palabra diente habría quizá que traducirla en su contexto histórico por pinza, toda vez que estos artrópodos no tienen dientes en sentido estricto. Se interpreta por tanto como Pinzas de cangrejo fósil.

2.18 De la Piedra Espinazo del Cangrejo marino (I 91, 298)

*“Del XXVII grado del signo de Géminis es la **pedra que se hace en el espinazo del Cancro marino**; es contada entre las piedras de los animales, pero es más débil que la que se hace en los dientes. De naturaleza es caliente y húmeda.*

Y su virtud es tal que si la hacen polvos y la meten en los ojos, sirve para el dolor de ellos, enjuga mucho las humedades, esfuerza los nervios y aguza la vista. Si la muelen y la amasan con vinagre y untan con ella la enfermedad a que llaman en arábigo hazez, y en lenguaje de España, empeines, sana. Cuando la queman mengua en su humedad y crece en la sequedad y en la sutileza, y del fuego de ella sale un olor muy agudo. Las mujeres usan de ella cuando es quemada para hacer la piel de la cara delicada y de buen color.

La estrella que está entre los hombros del Caballo tiene poder en esta piedra, que de ella recibe la virtud; y cuando está en el ascendente, muestra esta piedra más manifestamente sus obras”.

El Cancro castellano es la constelación Cáncer y también cangrejo o crustáceo en español. Pudiera interpretarse como esqueletos fósiles de artrópodos crustáceos; fundamentalmente cangrejos, sin descartar que pudieran haberse incluido en algún momento moldes internos de trilobites u otros artrópodos marinos no crustáceos. Torrubia (1754) figura cangrejos fósiles que recogió de China y de Filipinas, y refiere los poderes que les atribuían los nativos. Otra posibilidad es que se trate de concreciones calcáreas que se forman en el interior de ciertos cangrejos.

2.19 De la Piedra Maihutyz (I 44, 135)

*“Del XIV grado del signo de Virgo es la piedra a que dicen **maihutyz**. En ésta hay tallado como en manera de vid, con ramos y con hojas, por su naturaleza. Piedra es blanda y de color negro, pero no mucho. Hállanla en tierra de Egipto, en las partes de occidente, en minas que hay muy hondas bajo tierra. De naturaleza es fría y seca, pero tiene en sí más de la sequedad que del frío.*

Y tiene tal virtud que si la molieren muy bien y después la pusieren sobre la tiña, sánala; lo mismo hace a las llagas muy hondas y a las quebraduras de las uña . . .”.

Seguramente vegetales fósiles conservados en pizarras como carbón piedra, como parece indicar el color negro, su impermeabilidad (naturaleza seca) y tacto frío. Ello estaría en consonancia con el empleo de carbón en la farmacopea occidental. Los vegetales contenidos en las capas de carbón, se vuelven de color pardo por la meteorización de las

cutículas carbonosas que liberan óxidos y les confiere un color pardo oscuro, lo que podría justificar la aseveración —negro, pero no mucho—.

2.20 De la Piedra del Pez (I 51, 158)

“Del VII grado del signo de Libra es la piedra del pez. Esta la hallan en la isla que dicen Zulunica en la ribera de la mar en unas minas que hay muy hondas. Las hay grandes y pequeñas. Liviana es de peso y horadada y áspera de tiento y fuerte y dura de quebrantar, pero cuando la quebrantan hállanla lezne de dentro. Y la color de fuera parece como la del agua de mar, y quebrantándola hállanla dentro de color amarillo tirando a bermejo. Es de naturaleza caliente y húmeda; y hállanla en la isla Aquineniz que quiere decir piedra de pez; y esto es porque huele a pescado fresco como cuando se comienza a dañar. Y su virtud es tal que si la echan en lugar donde hay peces ayúntanlos allí todos. Y si molida dieren de ella al gafo peso de tres libras sana entonces y si untaren con ella el baño hace otro tal . . . ”

La descripción de esta piedra no ayuda a su identificación. Estudios terapéuticos comparados con las piedras de otros lapidarios indican que quizá pudiera tratarse de la piedra Adarce o Aquiveniz [6]; en cuyo caso pueden ser considerados moldes externos de subfósiles vegetales. Existe otra Piedra del Pez (I 56, 181) cuya descripción y propiedades terapéuticas son distintas y que analizaremos más adelante como Piedra (de la cabeza) del Pez para diferenciarla de ésta.

2.21 De la Piedra Mazintarican o piedra del frío (I 64, 206)

“Del XXV grado del signo de Escorpión es la piedra a la que dicen Macintarican, que quiere decir tanto como cosa que es gobernada de friura, pues esta es una especie de las piedras que crecen gobernadas por otra cosa. Se hace en fondo de tierra en lugares muy fríos, en tiempo del invierno, y mayormente allí donde se juntan las aguas de la lluvia cuando hace los años lluviosos. Esta piedra es hallada en el séptimo clima, de este modo: que cuando las aguas crecen mucho y después menguan y se enjugan por la calentura del sol, hácese unos oteruelos rehendidos y quien para mientes en ellos y los abre, halla dentro unas piedras con ramos en forma de coral; más no tiene que ver con él ninguna otra cosa. Piedra es muy dura, así que no quiebra sino con gran trabajo. Pesada es mucho, y de dos colores: la una es verde y la otra es blanca; y cada una es muy lucia en sí. De naturaleza es muy fría y húmeda; tiene los ramos unos gruesos y otros delgados, y están trabados unos a otros bajo tierra a manera de raíces de árboles. Y porque es más, cuélganla a los cuellos de los niños, y también por la virtud que hay en ella, pues los guarda de la enfermedad que hay en ella, pues los guarda de la enfermedad que llaman maseda, del correr de las babas y del llorar mucho. Si la muelen y dan de ella a beber sirve

para toda enfermedad de pecho, para los que escupen sangre o pus, y para los que le gotea la orina. Cuando hacen de ella emplasto, hace mucho bien a los postemas calientes”.

Quizá sea una descripción de la piedra Adarce, aunque no casa bien con la dureza y el peso. También muchos icnofósiles como *Phycodes* y los llamados “fucoides” por su semejanza con raíces y tallos (*Paleophycus*, *Rusophycus*, *Arthrophyucus* ...) fueron considerados como restos de vegetales fósiles hasta la mitad del siglo XIX. Son extraordinariamente abundantes en las rocas de todos los Periodos geológicos y es posible que pudieran haber sido incluidos en esta piedra, aunque no casa bien con su aspecto lúcido, salvo que sea una pizarra micácea. Más difícil parece su relación con auténticos vegetales fósiles.

2.22 De la Piedra que se hace en el Caracol de la mar (I 91, 296)

*“Del XXV grado del signo acuario es la **piedra que se hace en el espinazo del caracol de la mar**. Y esta es contada entre las de los animales. De naturaleza es caliente y húmeda, pero tiene en sí más la sequedad que no la humedad. De color es parda y áspera de tiento.*

Y su virtud es tal que si la muelen y dan de ella a beber, sirve para todas las enfermedades del pulmón, abriendo los conductos de él, y esclarece la voz. Si los polvos de ella pusieren en la llaga al que está herido de saeta de modo que no pueden sacarle el hierro, sácalo y sana la llaga. Y si la cocieren y en el agua que saliere de ella se asentare el que fuere llagado de los intestinos, sana”.

Se interpreta como moldes internos de gasterópodos marinos fósiles, pero también pudiera incluirse en ella a especímenes de cefalópodos como amonites y nautiloideos.

2.23 De la Piedra Tarmicaz (I 34, 101)

“Del undécimo grado del signo de Cáncer es la piedra a que dicen Tarmicaz. Esta es de color blanco mezclado algo con verde, y hállanlas menudas, de manera que la mayor de ellas no pesa más que media dracma, pero son bastante pesadas para su tamaño; hállanla siempre de forma de tres cantos y es muy suave de todas partes. De naturaleza es fría y húmeda. Es hallada en la mar que llaman Bermeja, por donde pasaron los hijos de Israel, en unas conchas que se crían en ella, y estas piedras hácense sobre ellas, en semejante de la escama que está sobre el pescado; cuanto mayor es la concha tanto mayor piedra se cría en ella, pero no que pase de la cuantía dicha. Su virtud es tal que si la ponen en agua de Psillyo, a que llaman en arábigo zaragatona, se ablanda en manera de blandura de cera cuando está caliente; y cuando así está blanda, si dieren de beber de ella a mujer, nunca se empreñará sino de hija, y eso mismo hará cualquier animal que la beba que sea hembra”.

No es fácil desentrañar el significado de esta piedra; sin duda una de las más extrañas. Su formación sobre-impuesta a bivalvos, los tres cantos en que se halla y su suavidad nos dan la clave. Probablemente se trate de moldes externos de bivalvos. Ello explicaría que se encuentra en forma de tres cantos: molde externo de la valva derecha, molde interno (o valva fósil) y molde externo de la valva izquierda, al partirla. La impresión exterior de las valvas daría pie a la explicación de su origen.

2.24 De la Piedra Arábiga (I 69, 221)

“Del X grado del signo de Sagitario es la piedra que dicen Arábiga. Semeja en color al marfil blanco y limpio. Suave es de tiento, pesada, fuerte y dura de quebrantar, y cuando la quebrantan, hállanla por dentro áspera. Tiene una muy maravillosa virtud: que siendo tan blanca como ella es, cuando la frotan con alguna cosa líquida, sale de ella color jalde como de azafrán. Hállanla en tierra de Arabia, cerca de la villa que llaman Carynduin, en minas que hay allí de ella. De naturaleza es caliente y seca, y por eso limpia y quita el paño que se hace en el rostro, y las otras cosas que vienen por exceso de humores. Si la muelen y la ponen en lugar de que corre sangre, hácela estancar; y también, cuando es quemada y molida, hacen de ella polvos muy buenos para limpiar los dientes fregándolos con ellos”.

Se trata de marfil fósil. Es citada en todos los lapidarios.

2.25 De la Piedra Milititaz (I 4, 9)

*“Del noveno grado del signo de Arieses la piedra a que dicen **Milititaz**. Es caliente y seca y hállanla en una tierra de nombre Cin, en un lugar por donde corre un río que dicen río de la miel. Es liviana de peso y muy porosa; y nunca la hallan sino en figura cuadrada. Bermeja es de color, más no mucho; pues una gran parte tira a color amarillo. Y su propiedad es tal que si la pulen con alguna cosa, sale de ella un sabor dulce como miel. En el arte de la física hace esto gran provecho, pues si la dieran de beber a un hombre con tos u otra dolencia en los pechos, siente gran alivio y sana luego. Y si la colgaren sobre aquél lugar donde tiene la dolencia hará eso mismo; pero no tan pronto”.*

Por una parte parece tratarse de una resina fósil por el sabor, el color y su liviandad. La porosidad no es característica del ámbar, aunque sí es frecuente que tenga vacuolas de aire a lo que pudiera aludirse con la porosidad. La forma cuadrada implica más a un mineral, de color ambarino como la calcita acaramelada pero ésta no es porosa por lo que es difícil decidirse. Sin duda es la piedra Melanites o Melitites de Isidoro (XVI 4, 26).

2.26 De la Piedra Farquidiuz (I 39, 120)

“Del trigésimo grado del signo de Cáncer es la piedra a que dicen Farquidiuz. Es hallada en la isla de Alcaquak, en la ribera de la mar. Es de color amarillo y hay en ella líneas negras, metidas unas sobre otras en semejanza de árbol. Piedra es muy pesada y dura y fuerte de quebrantar, de manera que no se quiebra sino con gran trabajo. Si la metieren en el fuego sale de ella un olor muy malo que huele a carne podrida; y si este humo oliere alguno que tuvo demonio, tómale luego, mas al que no lo tuvo no le hace daño alguno. De naturaleza es fría y húmeda”.

Las características coinciden con una caliza organógena fétida que contuviera fósiles de corallitos ramificados. Es frecuente en el Carbonífero pero también en otros periodos geológicos.

2.27 De la Piedra Romana (I 88, 287)

*“Del XVI grado del signo de Acuario es la piedra a que dicen **Romana**. Es hallada a la parte occidental de tierra de Roma, en una cueva que está a raíz de un monte que tiene nombre Cinac. Piedra es de color verde y hay en ellas líneas blancas que semejan letras romanas, y en cuantos pedazos hacen de ella, en todos la hallan de este modo. Espesa es de naturaleza.*

Y su virtud es tal que el que la trae consigo de continuo, nunca enferma de la enfermedad a que llaman Pondo (o porido? [4]), y si la tiene de antes, sana usándola, y también sana las llagas de los intestinos. De naturaleza es caliente y húmeda en tercer grado. Y por ello, si la muelen y la meten en los ojos, quita la blancura y la uña (pterrigio) que se hace en ellos; sana también el paño que se cría en la cara (cloasma o cara manchada) y le da buen color. Y si cuando cortan las verrugas, untan con ellas el lugar donde han sido cortadas, nunca más nacen allí”.

La descripción de una piedra verde (y por tanto meteorizada), espesa (densamente empaquetada) y con líneas blancas que semejan letras romanas que siempre aparecen por más que se parta la piedra, podría corresponderse bien con una pizarra de color verde, que es laminada y fácilmente exfoliable, con fósiles alargados y con ramificación sencilla en cada superficie de sus láminas. Fósiles parecidos a letras romanas son los graptolitos. También pequeños organismos coloniales ramificados como briozoos o corales podrían dar impresión por intersección de sus ramas de alguna letra romana; sin embargo, el color blanco no suele ser frecuente. Otros fósiles blanquecinos al meteorizarse están representados por el icnogénero Chondrites, una pista ramificada que se encuentra al occidente de la ciudad de Roma en el flysh alpino en torno a San Marino (Gutiérrez Marco, com. personal), aunque parece difícil relacionar fehacientemente sus numerosos conductos ramificados con letras romanas.

Los graptolitos son fósiles coloniales carbonosos del Paleozoico que se vuelven blancos al alterarse. Aparecen densamente acumulados en pizarras negras, y más raramente en verdes y amarillas por meteorización. Se presentan bajo formas que semejan a las letras romanas C, L, X, V, I y G. Los que tienen forma de V como el género *Didimo-graptus*, al encontrarse pares invertidos dan también forma de A y cuando se tocan dos de ellos de M. Si con la parte occidental de la tierra de Roma, el lapidario se refiere a la parte occidental del antiguo imperio romano (como parece deducirse de su traducción de un original árabe), el monte Cinac podría referirse a alguna localidad de Italia (Alpes cárnicos o Cerdeña), Francia, España, Yugoslavia o Inglaterra donde existen importantes yacimientos de graptolitos en las pizarras del Ordovícico y Silúrico. Por todo ello, no es improbable que la piedra romana sea una referencia críptica de graptolitos; en cuyo caso, sería la cita más antigua conocida de este grupo fósil cuyos yacimientos son, por otra parte, relativamente frecuentes en la Europa y frica mediterráneas. Los esquistos verdes con crenulación pudieran también dar un aspecto de escritura y también algunos pórfidos vistos en sección.

2.28 De la piedra *Yenetatiz* (IV 115, 57)

“Yenetatiz es el nombre griego de la segunda piedra de la y. Semeja el corazón de un ave a que dicen Caeracoz. Y el que fregare esta piedra y diere de y diere de beber lo que de ella saliere al que hubiere dolor de hígado, quitárselo ha”.

Esta piedra entra dentro del grupo de piedras con forma de corazón que ha sido relacionado con moldes internos de bivalvos [9].

2.29 De la Piedra *Lenelim* (IV 116, 65)

“Lenelim es nombrada la piedra de la L. Semeja a la teta de la mujer, y hállanla en los montes de la Tierra de Alheyz. Las hay bermejas y amarillas. y si la colgare la mujer sobre la teta en que tuviere dolor o postema, quitárselo ha, y hacerle correr también la leche a la mujer que tuviere poca”. Una clara referencia a la medicina simpática.

Las moldes internos de las cámaras de los cefalópodos nautiloideos cuando se separan tienen este aspecto; sobre todo los Ortoceráticos (Paleozoico) que al ser intrasifonados presentan una pequeña protuberancia en posición central a modo de pezón.

2.30 De la Piedra *Kartoiz* (IV 117, 89)

“La segunda piedra de la Kaftiene de nombre Kartoiz. De color es negra. Es muy encavada; y semeja a la serpiente en su encavamiento. Y es de la manera de las piedras selladas que guardaban los antiguos. Y ayuda a echar los dragones y las serpientes de los lugares”.

Seguramente se refiere a amonoideos, también conocidos como serpientes petrificadas en Europa. Los amonoideos piritizados se conocían en la antigüedad como Cuerno de Amón (Plinio XXXVIII 167).

3 Piedras del interior de animales

3.1 De la Piedra Aliofar (Aljófar) (I 4, 11)

“Del onceavo grado del signo de Aries es la piedra a la que llaman Aliofar. Es de natura caliente y seca. Y hállanla en muchas partes que están en la gran mar que rodea el mundo, en unas conchas muy grandes [ostras] en que se crían ellas de esta guisa; que cuando vienen los vientos de septentrión ábrense y cogen aquélla humedad que aducen: y con aquéllas gotas de rocío que en ellas caen ciérranse, y van de noche al fondo del agua, y cuando viene el día salen y párense contra el sol, y ábrense, y cogen gran parte del calor de él: y después descienden al fondo y eso mismo hacen a la tarde cuando se pone el sol. Y cuando entienden que aquella agua está cuajada, alivianse; así que las ondas de la mar las empujan tan fuerte, que las echan a la orilla. Y cuando se encogen, tíranlas consigo; y cuando se extienden envíanlas hacia afuera. Y trayéndolas de esta guisa hácese redondas y hermosas y luminosas. Y cuanto mayores son y más blancas y más claras, tanto más valen. Y esta piedra magar [mágica?] es muy blanca, no la pasa la visión; porque su blancura es espesa: pero es muy brillante de por sí, como si estuviera pulida. Y las que salen de mal color, o turbias, o de mala facción que no son bien redondeadas, o llanas, no es sino por yerro de la crianza de las conchas, que no reciben el aire o el calor del sol tanto como deben, ni de aquélla manera que conviene, ni se dejan traer por las olas del mar para redondearse. Esta piedra es muy noble y muy preciada por los hombres y hay en ella gran virtud; pues la aman todos los que la ven por la forma y la hermosura propias; que no necesitan ayuda de artesano. Y aprécianla mucho los grandes señores; pues es contada entre las nobles. Y en el arte de física es muy buena; pues ayuda mucho al temor del corazón: y a los que son tristes o medrosos: y a toda enfermedad que venga por melancolía; pues ella limpia la sangre del corazón y esclarecela y quita toda su turbiedad: y por eso hace favor a todas estas cosas que son dichas. Y por eso los físicos métenlas entre sus medicinas y en los prontuarios con que sanan estas enfermedades, dándoselas a comer. También hacen polvos con ellas que ponen en los ojos; porque esclarece mucho la vista, esforzando los nervios, los vasos y enjugando la humedad que desciende de ellos. Y si esta piedra deshiciere de manera que se torne agua y untaren con ella la . . . [borrado en el original] la sanará a la primera. Eso mismo hará metiéndola en las narices del que tiene dolor de cabeza, por movimiento de los nervios de los ojos. Y el que esta piedra quisiere deshacer muélala mucho, y amásela con el amargo de la sidra, y póngala en vaso de tierra vidriado, y cúbrala con aquélla agua y cuélguelo sobre otro vaso de vinagre muy

fuerte; y cierre las bocas de los vasos muy bien; y entiérrelos en estiércol húmedo y déjelos estar así catorce días; y al cabo del plazo hallará aquella piedra tornada en agua”.

Se trata de perlas, llamadas aljófar en castellano antiguo.

3.2 De la Piedra Atarraz [o del estómago de liebre marina] (I 17, 52)

“De los XXII grados del signo de Tauro es la piedra a la que dicen **Atarraz**. Es de naturaleza fría y seca, y muy fuerte en estas dos complejiones; pero la gente de aquella tierra donde es más frecuentemente hallada llámanle la **piedra de la liebre**, por esta razón, que en aquel lugar donde entra el gran río del Nilo en la mar Mediterránea, críase un animal que semeja en sus miembros y en todos sus aspectos a la liebre de tierra, y por ello la llaman liebre marina; y tiene tal naturaleza que, cuando la mar crece y hace grandes ondas y sube por el Nilo arriba y enturbia el agua, entonces sale la liebre y abre la boca y traga de aquella agua turbia cuanto más pueda tragar, y cuando la tiene tragada, pónese al sol en la orilla del río, y con la gran calentura que tiene aquel animal en sí y con la otra que recibe del sol, vásele cuajando aquella agua en el cuerpo, y cuando nota que se le va cuajando, entra en la mar y de allí vuelve al río y sale a la tierra; y esto hace tantas veces hasta que cree que se le ha cuajado el agua en el cuerpo hecha piedra. Cuando cree que está bien dura y seca, sale a la tierra y vomítala; por eso la hallan en aquellas riberas del Nilo y de la mar. Son muy verdes de color, y tan duras que no se pueden quebrantar con ninguna cosa y, por eso, le dicen los caldeos **Rofolez**, que expresa tanto como cosa que no se puede partir. Es pesada en sí, dado su tamaño, pero la mayor que se haya no pesa más de dos dracmas. De ellas hallan redondas y, de ellas, un poco más larguizuelas, y éstas son las mejores.

Los sabios probaron muchas maneras para que se pudieran quebrantar o deshacer esta piedra y no hallaron más que una sola y es ésta: que tomen esta liebre y que la quebranten toda viva y que la quebranten mucho y saquen cuanto zumo pudieren sacar de ella; pónganlo en un vaso de vidrio, o de cobre estañado, o de plata, y echen aquellas piedras en él de manera que estén cubiertas de aquella agua, y después cierren bien el vaso de manera que no entre allí otra humedad que aquella y, cuando esto hubieren hecho, cuélguenlo en un pozo de agua dulce de manera que no alcance el agua, y ciérrenle bien la boca del pozo, de modo que la calor del sol ni otra ninguna pueda allí tocar; déjenla estar así cuarenta días, y después sáquenla y hallarán que todas aquellas piedras estarán desechas y tornadas agua, que tiene tal virtud que si untaren con ella los lugares donde hubieren arrancado o raído los cabellos, nunca más allí nacerán. Por eso los físicos de aquella tierra se valen de ella para curar a los hombres que tienen una enfermedad por la cual les nacen los cabellos en los ojos y les impiden dormir y ver”.

Sin duda algún tipo de guijarro del lugar, deleznable por ácidos orgánicos, sobre el

que se ha fraguado una génesis fantástica acorde con sus supuestas propiedades maravillosas. Según Dioscórides (II 19), la liebre marina semeja a un calamar (molusco cefalópodo). Para García Valdés (1998) se trataría probablemente del molusco *Aplysia leporina*. La liebre marina es incluida sin ilustración por Laguna en su traducción del libro de Dioscórides “Acerca de la Materia Médica Medicinal y de los Venenos Mortíferos” (VI, 592). Que estos animales pudieran producir piedras verdes y pesadas debió ser una fabulación literaria posterior al siglo I, pues tal aserto no se encuentra ni en el lapidario de Plinio ni en el de Dioscórides.

3.3 De la Piedra de la cabeza de la liebre [marina] (I 19, 56)

“De los XXVI grados del signo de Tauro es la piedra que hallan en la cabeza de la liebre que dijimos; así que, cuando la matan, le cortan la cabeza por fuera y se la abren, hállansela dentro del meollo o pegada a los huesos. Es peso liviana, porque es porosa; áspera es al tacto y de color parda con gotas bermejas. Y ésta es contada como una de las piedras que se hallan en los animales. Sus virtudes son pocas y dañosas, pues tiene por propiedad que si la acercan a la carne de cualquier animal vivo, pégase a ella y arranca consigo la carne a que se allega, de manera que deja allí gran llaga y mala, según la cantidad que toma, así que sana muy tarde y si no la medicinan se puede morir de ella. Y si esta piedra acercan a carne muerta, hace eso mismo; y si diesen de ella gran cuantía a hombre a beber, llágale los intestinos y mátele si no le socorren pronto . . . ”.

Probablemente el pico de los calamares.

3.4 De la Piedra del hombre (I 19, 57)

“De los XXVII grados del signo Tauro es la piedra del hombre; es contada también, como la otra que dijimos, entre las de los animales, pero hay una diferencia entre ésta y las otras; que la del hombre se hace dentro del cuerpo, así como en la vejiga y en los riñones, y a los otros animales se les hace en la cabeza o en los miembros extremos. Según diferencian los sabios, los animales-menos el hombre- tienen los conductos anchos por donde corren los humores gruesos y salen con la orina pero el hombre los tiene estrechos y no pueden tan ligeramente correr los humores y, en deteniéndose cuando llegan a aquel lugar donde hay más calor, cuájanse, por lo que se va superponiendo un humor sobre otro; por eso, cuando la piedra es grande, hállanla como cortezas, la una sobre la otra. Tierna es y ligeramente se deshace. De ellas hay que son de color muy bermejas y, de ellas, blancas, otras como amarillas, y otras como pardas; y en las que son muy cocidas, aparece en ella como forma de luz, como en la piedra del yeso. No se hace en todos los hombres de una manera, pues a los unos se les hace blanca y a los otros bermeja, y así de los otros colores que dijimos; y aún a aquellos a quienes se hace bermeja, a veces se

les cambia en los otros colores, según los lugares del cuerpo en que se cuece, o las viandas que se comen, o los humores que tienen en sí, o según los tiempos en que se cuaja. Su virtud es tal que cuando la muelen y la ciernen mucho y la echan en los ojos de aquéllos que tienen la mancilla a que llaman nube, despréndela; esto no lo hace luego, al instante, más usándola algún tiempo . . . ”.

Es una receta para tratar las cataratas con cálculos humanos.

3.5 De la Piedra Bezahar (I 24-25, 69-71)

Hay cuatro variedades de esta piedra que se saca de varias minas de la India, tierra de Cin, Horacin y tierra de Ballac. Su voz semeja a la Piedra Bezoar de los árabes que se forma en el interior de algunos mamíferos, pero por la descripción que se hace se trataría de otra piedra, en concreto de una roca, quizá relacionadas con el mineral bezoárdico, un peróxido de antimonio; por lo que no la trataremos aquí. Esta piedra también es recogida dos veces en el libro tercero (III 109, 61 y 62) dedicado a explicar cómo cambian las propiedades de las piedras con la posición de los planetas a lo largo del año.

3.6 De la Piedra del vientre de la golondrina (I 27, 79)

*“Del décimo noveno grado del signo de Géminis es la **piedra de la golondrina**, y es una de las piedras que hay entre todas aquéllas que se hacen en los animales. Quien la quisiere hallar debe tomar el primer pollo que hace la golondrina en el año, y pare mientes de que sea la luna creciente cuando lo tomare; y luego que saliere del huevo, debele abrir por el vientre y hallará allí dos piedrezuelas de sendos colores: la más veces hallan la una verde y la otra blanca, pero hállanlas también de muchos colores. Son ásperas de tiento, duras de quebrantar y pequeñas de forma. Son de naturaleza caliente y húmeda. Y su virtud es tal que si toman estas dos piedras, las meten en cuero de ciervo o de becerro y las atan con hilo de seda bermejo al cuello a hombre que estuviere endemoniado, sana luego; pero no hacen esta virtud si no estuvieren ambas piedras en uno, o no fueren de un golondrino pollo [tantos requisitos posteriores indican la nula fiabilidad de este remedio mágico]. Y aún tiene otra virtud: que si las molieren en mortero de oro, y meten los polvos de ellas, bien molidos, en los ojos de quien los tiene claros y no ve, por agua que tiene encerrada en ellos, hácele muy gran provecho, y si lo usa, sana del todo”*[un tosco remedio para quitar las cataratas].

Aunque es posible encontrar en los pájaros las pequeñas piedras pulidas que engullen para ayudar a la digestión, conocidas como gastrolitos, y sin descartar la formación de pequeños cálculos, parece se trate de una piedra fabulosa.

3.7 De la Piedra del hígado (I 29, 88)

*“Del XXVIII grado del signo de géminis es la **pedra del figado**. Esta es de color bermeja que tira un poco contra negro y semeja al hígado en color y en forma; pues por un lado es redonda y por el otro como cavada y no tiene claridad alguna. Es fuerte, dura de quebrantar y pesada; pero cuando la quebrantan sale de ella agua del color de sí misma. De su naturaleza es caliente y húmeda; y hállanla en minas que hay en tierra de Egipto en unos lugares muy despoblados a los que dicen Lecuricaz, y es tierra de muchos leones y otras bestias fieras. Y su virtud es tal que si la colgaren sobre un hígado enfermo sana éste; y si bebieren del agua que de ella sale hace otro tanto y previene. Y generalmente sana todo el mal de hígado y abre las carreras de él por colgarla o por beberla . . .”.*

Una piedra pesada, dura, con forma de hígado (redonda por un lado y cóncava por el otro) y de color rojo negruzco que al partirla desprende agua, debe ser una piedra fabulosa o bien un fruto de apariencia pétreo.

3.8 De la Piedra del gallipavo (I 37, 114)

*“Del XXIV grado del signo de Cáncer es la **pedra del gallo**, y es una de aquéllas de los animales. Hállanla de este modo: que paren mientes al primer huevo que pone la gallina, y si hallaren que es macho, débenlo criar hasta ocho meses y entonces matarlo; cuando estuviere muerto, le hallarán en el vientre una piedra blanca que semeja en el color al cristal y es tamaña como una haba o un poco mayor. De su naturaleza es fría y húmeda.*

Tiene tal virtud que si dieren de ella molida a beber al hombre, cuando tiene gran sed, quítasela; si la lavaren antes que sea molida y dieren de aquella levadura a beber, se le alegrará el espíritu de la vida y se le quitará la tristeza, si la tuviere; eso mismo hace al que la trae consigo. Si la traen los mozos, pierden aquel miedo que han acostumbrado de tener cuando son pequeños”.

Seguramente gastrolitos del interior de gallináceas.

3.9 De la Piedra del Pez de las Lagunas (I 54, 170)

*“Del XIX grado del signo de Libra es la **pedra que dicen del pez de las lagunas**. Tiene tal nombre por esta razón: porque en medio de una isla que llaman Cahuelyn hay unas lagunas que están muy lejos de los ríos, en que se crían muchos peces menudos así que el mayor de ellos no tiene de largo un palmo, y aunque ellos están vivos tienen las cabezas de piedra; y tienen otra en el espinazo, de que hablaremos más a delante en este libro en su lugar. Más esta de la cabeza es caliente y húmeda y, entre las piedras de los animales es contada por una de las más maravillosas de todas. Y si la queman, la muelen y echan polvos sobre las llagas, quita la carne sobrante de ellas y sanan enseguida”.*

Es difícil imaginar peces que tengan las cabezas de piedra y piedras en el espinazo. Como en el texto se habla de peces vivos, es difícil saber si se incluirían peces fósiles, a lo que también podría aludir la piedra del espinazo. Sin embargo, la terapéutica es similar a la del cangrejo, tanto de río como marino, que aparece en el Dioscórides de Laguna (1555). Por ello, si la palabra peces hubiera sido una mala traducción de pescados, donde se han venido incluyendo genéricamente también a los mariscos, esto casaría mejor con la cabeza de piedra y la existencia de piedras en su cuerpo. También explicaría porqué no aparece la piedra del espinazo del pez en el lapidario, a pesar de que la cita en este texto — *y tiene otra en el espinazo, de que hablaremos más adelante...* — aunque sí se encuentra más adelante la piedra del espinazo del cangrejo marino (I 91, 298).

3.10 De la Piedra (de la cabeza) del Pez (I 56, 181)

“Del XXX grado del signo de Libra es la **piedra del pez**. Y esta es contada como una de las que se hallan en los animales y es hallada cerca del mar Rubro en la isla que dicen Vacuac; allí hay una laguna que limita con aquél, en que hay unos peces del tamaño como de un palmo, no tienen escamas ninguna y tienen las cabezas redondas; y cuando se las hienden, hállanle allí estas piedras en lugar de meollo. Fuertes son y duras de quebrantar y livianas de peso y ásperas de tiento, y de color blanco que tira algo a amarillento. De naturaleza es caliente y húmeda en el tercer grado. Tiene tal virtud que si la muelen y dan de ella a beber un peso de tres dracmas, quebranta la piedra que se hace en los riñones y sana de ella; y hace aún otra cosa: que si la amasan con orina de cabra y la ponen en un vaso de tierra que tenga la boca estrecha y la soterraren en estiércol y la dejaren allí estar treinta días en tiempo del verano, hallaran allí, al cabo de este plazo, un animal que semeja la figura de un lagarto, pero es de color bermejo; y si le queman y hacen polvos y dieren de ellos a alguno a beber cualquier cantidad, mátale sin aparecer en él enfermedad, ni señal ninguna de ella; y eso mismo hace en oliéndolo, y contra este tósigo no vale ninguna cosa que hombre pueda hacer”.

Se trata de una piedra fabulosa.

3.11 De la Piedra Tumen (I, 64, 204)

“Del XXIII grado del signo de Escorpión es la piedra **Tumen**. De naturaleza es fría y húmeda y hállanla en la ribera del mar rubro de esta guisa: en la ribera de aquel mar hay unos peces llamados Cumi que no tienen lugar por donde salga la suciedad de ellos sino por la boca, y por ende se les hace esta piedra en el cuerpo. Y cuando la quiere echar sale a la ribera y échala allí. Y tiene tal virtud que si después de haberla hechado llegara otro pez a ella muere luego, y los pescadores aprécianlas mucho porque cuando la ponen en el anzuelo todo el pescado que llega a ella muere Y su color es como las hojas del puerro

verde que tiran ya cuanto a blanco. . . ”.

Es difícil la identificación de esta piedra fabulosa. Seguramente una roca.

3.12 De la Piedra Catu (I 64, 205)

“Del XXIV grado del signo de Escorpio es la piedra a la que llaman **Catu**. Es contada entre las de los animales. Y hállanla de esta guisa: en la tierra de Tept hay carneros monteses que son pequeños de cuerpo y tienen tan gran poder de correr que ninguna cosa los puede alcanzar; y por ende no los pueden tomar sino con engaños; a estos carneros llaman en caldeo *Catu*, de donde toma la piedra su nombre; y cada uno de aquéllos carneros tiene una piedra en la frente entre el cuero y la carne, y cuando la hace hinchasele el cuero; y de esta guisa entienden que la tiene; y cuando se la sacan hállanla del color de yuyuba. Y su forma es de esta guisa: que de la parte que se tiene con el hueso es llana y de la parte de fuera contra el cuero es alta y redonda; la llana reluce como espejo y la otra no. Piedra es fuerte y dura de quebrantar, pero cuando la quebrantan hállanla dentro como telas. De naturaleza es fría y húmeda. Hacen de ella mangos para cuchillos y para espadas, encastrando los pedazos de ella unos con otros. Su olor es así como de ámbar y aún más fuerte cuando la ponen sobre el fuego. Y si la molieren quemada, los polvos de ella huelen muy bien. Y si la amasan con agua y la ponen sobre quemadura de fuego sánala y no deja señal.”

Seguramente un rumiante con una protuberancia pequeña o incipiente como el antílope de Arabia. Su relación posterior con la piedra del unicornio no puede descartarse. Tampoco con la Piedra Cornamenta (astas) de Ciervo de Dioscórides y quizá la de los lapidarios órficos.

3.13 De la Piedra en la hiel del toro o del buey (I 69, 220)

“Del IX grado del signo de sagitario es la piedra que hallan en la hiel del toro o del buey, de esta manera: que cuando lo matan en la luna creciente, hállanle la piedra dentro de ella y, por tanto, es contada como una de las piedras de los animales. De naturaleza es caliente y seca en el cuarto grado. Piedra es redonda y dura, y de color bermejo que tira algo a amarillo. Dícenle en arábigo **varç**, y en griego **kiron**. Su propiedad es que si la mezclan con los polvos que son para los ojos, esfuerza los nervios y aguza la vista. Si la amasan con hierbas frías y untan con ella las postemas calientes, sánalas y otro tanto hace con las llagas corrosivas que llaman hormiga. Si la amasan con zumo de acelgas y la ponen en las narices al que tiene la enfermedad que llaman en latín *catarata*, y es que tiene los ojos claros y no ve, sana luego usándola; y también cura la enfermedad que arranca los cabellos de la cabeza, a la que llaman *alopecia*, de manera que los hace nacer por fuerza; y a los que son blancos, tíñelos del color que eran antes”.

Esta piedra del interior de rumiantes es conocida como la piedra bezoar, una concreción calcúlosa de las vías digestivas y urinarias, que aparece en numerosos lapidarios

3.14 *De la Piedra Fanaquid (I 83-84, 271)*

Es una de las piedras con forma y color de ojo, que tan relativamente numerosas son en el lapidario de Plinio. Aquí se la compara con el ojo humano aunque no se relaciona con él puesto que se encuentra en el fondo de una laguna. Por ser transparente y clara se considera una gema y no se da la descripción.

3.15 *De la Piedra Carbedic (I 85, 272)*

“Del primer grado del signo de Aquario es la piedra Carbedic . . . contada entre las piedras de los animales . . . en tierra de Macedonia hay unas liebres muy grandes hállanle en el corazón una piedra de color blanca que tiene una gota muy bermeja . . .”.

Una piedra fabulosa.

4 Fósiles dudosos

4.1 *De la Piedra Guifirquizti (I 81, 260)*

*“Del XIX grado del signo Capricornio es la piedra a que dicen **Guifirquizti**, que quiere decir en caldeo guardador de niños, porque tiene tal virtud que si la ponen a los niños cuando nacen, son guardados de no tener maseda ni las otras enfermedades que les suelen acaecer cuando los crían. Esta piedra semeja en forma y color a la bellota. Hállanla en un río que tiene nombre Zeyle, que corre a la parte occidental de la tierra de promisión. Liviana es de peso, fuerte y dura de quebrantar, y cuando la quebrantan hallan dentro en ella a semejanza de lana carmenada. Cuando la queman hácese ceniza y si ponen de esta ceniza a la raíz de cualquier árbol, no le hace mal la helada ni otra quemazón ninguna, y tendrá fruto bueno a su tiempo y sin dificultad. Si dieren de ella molida a beber a hombre que tenga dolor en los intestinos, sana, y otro tanto hace del dolor de piedra. De naturaleza es fría y seca”.*

La forma y color de bellota (pardo) es significativo. Existen fósiles en forma de bellota como belemnites, y balánidos [8] pero por la descripción deben ser descartados. Pudiera tratarse de alguna concreción con rellenos de óxidos de hierro tubulares pero no casa bien con su forma de bellota. La forma de bellota y el interior en forma de lana peinada se producen en ciertos corales solitarios fósiles y en arqueociatos, en cuyo interior se observan las paredes o septos de disposición longitudinal. Esto es muy patente cuando el esqueleto calcútico de los políperos se encuentra disuelto y su interior está relleno de material ferruginoso, dando este molde interno la apariencia de lana cardada.

4.2 De la Piedra que aparece en la mar cuando sube Saturno (I 81, 262)

“Del XXI grado del signo capricornio es la piedra que aparece en la mar cuando sube saturno y se esconde cuando desciende ... De color es muy negra y clara. Y hállanla siempre en forma de piña. Espesa es mucho, y fuerte y dura de quebrantar y cuando la quebrantan hállanla por dentro blanca ...”.

Esta piedra fabulosa la ponemos aquí por su forma de piña. Como por dentro es clara, indicando un relleno, debe tratarse de una concreción, más que algún tipo de fósil con relleno interno.

4.3 De la Piedra Melizlumen (I 82, 364)

“Del XXIII grado el signo de Capricornio es la piedra a la que dicen en caldeo Melizlumen que quiere decir tanto como piedra que quebranta a la otra que se cría en el hombre. De naturaleza es fría y seca y cuando la quebrantan hallan dentro de ella sustancia de vidrio. Hallada es en ribera de la mar de occidente, donde la echan las olas a la orilla. Y hállanla siempre en forma de trocisco en donde hay granillos menudos como de arena. Y su virtud es tal que si dan de ella a beber el peso de una dracma quebranta la piedra que se hace en los riñones o en la vejiga, y hácela echar en forma de arena menuda. Y también entra mucho en los polvos que hacen para los ojos. Y aún hace otra cosa, que si dan a beberde ella a la bestia que tiene olivas, la sana ...”.

Por su supuesta función terapéutica podría tratarse de una acepción local de la Piedra Tecolithos (Plinio (XXXVII 184) que ha sido asimilada a la Piedra Judaica, pero el texto de Abolays no comenta su típica forma de bellota y también podrían tratarse de dos piedras distintas. El lapidario indica que aparece en forma de trociscos, es decir como una parte de otra; también destaca que tiene granitos menudos como de arena (ornamentación?) y que al partirla tiene piedra de vidrio (calcita cristalina?). Ello la hace asemejarse a radiolas (púas) de equínidos cuya composición es de calcita cristalina y que, a veces, se han incluido en la Piedra Judaica [9].

4.4 De la Piedra Caoz (I 83, 269)

Esta piedra que hallan en el corazón de la tierra, que tiene forma de almendra, tacto suave y aparece en el interior de la tierra podría ser un molde interno de algún molusco; pero su color negro que tira a bermejo y el polvo contenido en su interior (limonita?) y su empleo en metalurgia indican que muy probablemente sea una concreción ferruginosa, por ello prescindimos de reproducir su descripción literal.

4.5 *De la Piedra Buritasen (I, 60, 192)*

Es una piedra liviana que flota en el agua y que al partirla sale una cosa delgada y fina que asemeja una tela de araña. Podría tratarse de una concreción en cuyo interior aparezca una estructura maclada. También una estructura interior en forma de red se encuentra en briozoos y equinodermos, pero éstos no flotan. Al flotar en el agua, lo más probable es que se trate de una acepción local de la pumita o piedra pómez, cuya estructura de huecos semeja a una tela de araña.

4.6 *De la Piedra Yetaniz (I 89, 290)*

Es una piedra de color rojo que tira a amarillo y está toda echa como de agujeros. Si se desuella es blanca por dentro. Parece una roca horadada y exteriormente manchada de óxido de hierro meteorizado, más que un fósil.

4.7 *De la Piedra Seralicen (I 91, 297)*

Es una piedra del oriente español que semeja en forma y color al bazo del hombre. Quizá un nódulo o concreción mineral pues según el lapidario es un veneno mortal.

4.8 *De la Piedra que atrae los huesos (I 13, 37)*

Pudiera tratarse de una resina por su color pardo y liviandad, pero por su relleno interior de cuerpo muy blanco que se deshace entre los dedos más parece una concreción de yeso que también uniría los huesos e inmovilizaría las fracturas a que se refiere su terapéutica.

5 Conclusiones

El libro de Abolays o primero del lapidario del rey Alfonso X, contiene citas de más de una docena de fósiles, algunos de los cuales pudieran ser las primeras referencias escritas a grupos paleontológicos concretos que se conocen hasta el momento. Es el caso de la Piedra Romana que podría ser una referencia velada a las pizarras con graptolitos tan frecuentes en los terrenos ordovícicos y silúricos. También los cangrejos fósiles (crustáceos decápodos) a los que alude el lapidario I son la primera cita en la literatura paleontológica de que tenemos conocimiento.

Este lapidario, constituye, por el número de citas, el tratado literario más completo de fósiles de la antigüedad, superando incluso al de Plinio e Isidoro de Sevilla. También es el lapidario que da una relación más pormenorizada de los distintos nombres de fósiles en diferentes lenguas lo que constituirá una gran ayuda en las futuras investigaciones criptopaleontológicas. Las acepciones citadas para estos fósiles lo son, frecuentemente,

en castellano, caldeo, árabe o griego, citando su procedencia geográfica, lo que también ayudará en la concreción de las asignaciones paleontológicas que se hacen aquí, que en algunas ocasiones ya comentadas han de tenerse como provisionales. El número de citas geográficas para estos fósiles sugiere que algunas de las fuentes originales proceden de la tierra de Caldea o Palestina.

Finalmente, el lapidario alfonsí, al representar el primer tratado literario de paleontología en castellano debió tener una cierta influencia en la denominación posterior de algunos grupos fósiles, lo que será importante tener en cuenta para estudios posteriores

Agradecimientos

Nuestro reconocimiento a D. Vicente Martínez Tejero que nos sugirió la necesidad de hacer este trabajo y puso a nuestra disposición todos los medios bibliográficos para poder realizarlo. Esta labor inicial fue luego continuada con su inestimable ayuda durante la redacción del manuscrito y con su lectura final. Sin su aportación, este trabajo no hubiera sido posible. Al Prof. Gozalo de la Universidad de Valencia por sus múltiples comentarios al manuscrito final y al Prof. Elipe de la Academia de Ciencias de Zaragoza por la revisión del texto definitivo.

Éste es un trabajo realizado dentro del Proyecto CGL2006-12.975/BTE Consolidación-FEDER del MEC y del Grupo de investigación E-17 del Gobierno de Aragón.

Referencias

- [1] Selenius, O., Alloway, B., Centeno, J. A., Finkelman, R. B., Fuge, R., Lindh, U. y Smedley, P. (editors). 2005. *Essentials of Medical Geology*. Elsevier, Amsterdam, 812 pp.
- [2] Liñán, E., 2004: Fósiles, mitos y leyendas: Criptopaleontología. *Revista de la Real Academia de Córdoba, de Ciencias, Bellas Letras y Nobles Artes*, **146**, 189-205.
- [3] Neumaker, J. H., 1931. Noticias sobre la alquimia en el Lapidario de Alfonso X. *Revista de Filología Española*, **XVIII**, 261-262.
- [4] Brey Mariño, M. 1997. *El lapidario del Rey Alfonso X el Sabio*. Edit. Castalia. Madrid.
- [5] Fernández Montaña, J., 1881: *Lapidario del rey D. Alfonso X. Códice original. Prólogo y reproducción en caracteres modernos*. Edición fotomicrolitográfica. Real Academia de la Historia. Madrid.
- [6] Amasuno, M.V., 1987: *La materia médica de Dioscórides en el Lapidario de Alfonso X el Sabio. Literatura y Ciencia en la Castilla del siglo XIII*. Cuadernos Galileo de Historia de la Ciencia, 9, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 181 pp. Madrid
- [7] Neumaker, J. H., 1939: In pursuit of the Sources of the Alfonsine lapidaries. *Speculum. A journal of the mediaeval Studies*, **14**, 483-489.
- [8] Liñán, E., 2005. Una visión criptopaleontológica del lapidario de Plinio” El viejo” (siglo I). *Boletín de la Real Academia de Córdoba, de Ciencias, Bellas Letras y Nobles Artes*, **148**, 119-234.
- [9] Liñán, E. 2005: Citas criptopaleontológicas en la obra “Plantas y remedios medicinales” de Dioscórides (siglo I). *Revista de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, **60**, 133-142.
- [10] Liñán, E. 2005. La Criptopaleontología en los lapidarios apócrifos griegos. *Revista española de Paleontología*, **20** (2), 119-126.

Nota Necrológica

Prof. Dr. André Deprit

El pasado 7 de noviembre tras una larga y penosa enfermedad falleció el Dr. D. ANDRÉ DEPRIT, Académico Correspondiente por la Sección de Exactas de esta Real Academia de Ciencias de Zaragoza.

Nació en Saint Servais (Bélgica) el 10 de abril de 1926. Fue un brillante estudiante y obtuvo las licenciaturas de Filosofía en 1948 y de Matemáticas en 1953, ambas por la Universidad de Lovaina. En dicha universidad fue alumno del Profesor Georges Lemaître, quien enseñaba Mecánica celeste y tenía un gran interés en computación. Tras tres años en la Universidad de Cambridge, obtuvo su doctorado por la Universidad de Lovaina en 1957. Comenzó su carrera académica en su *alma mater*, primero como *chargé de cours* (con dos años de enseñanza en el centro asociado de la Universidad de Lovaina en Kimwenza, Zaire) y en 1961 como Catedrático. No fue hasta 1961 que publicó su primer artículo de Mecánica celeste. Hasta entonces su principal interés habían sido el Álgebra y el Análisis, con algunas aplicaciones a la Mecánica Cuántica. Sus primeros pasos en Mecánica Celeste estuvieron relacionados con el “Problema de tres cuerpos”, sin duda el problema más estudiado de la Mecánica Celeste. Su sólida formación matemática estaría presente a lo largo de toda su investigación.



André Deprit (1926–2006)

Con sus colaboradores (André Delie, Paul Pâquet, Jacques Roels, Roger Broucke and Jacques Henrard) publicó una serie de artículos sobre órbitas periódicas y aspectos cualitativos del Problema de tres cuerpos. Precisamente con ellos comenzó su trabajo pionero de desarrollar teoría analíticas mediante ordenador. Sus artículos atrajeron la atención de Dirk Brouwer y así, André Deprit se convirtió en un miembro habitual de los cursos organizados por Dirk Brouwer en el Summer Institute in Dynamical Astronomy en Yale. Uno de los colaboradores de André Deprit fue su esposa Andrée Deprit -Bartholomé, recientemente fallecida (27 de julio de 2006), compañera suya de licenciatura. Con ella

desarrolló la “compresión de efemérides” mediante polinomios de Chebyshev, actualmente utilizada en las Efemérides astronómicas, y publicó un artículo fundamental sobre cómo calcular la estabilidad no lineal de los puntos lagrangianos.

En los 1960 los conflictos lingüísticos en Bélgica no hicieron precisamente fácil la vida de un valón en una provincia flamenca. No deseando perder energías en batallas estériles, obtuvo un puesto en los Boeing Scientific Research Laboratories en Seattle. Ahí, con J.M.A. Danby y Arnold Rom desarrolló un paquete informático, que llamaron MAO (Mechanized Algebraic Operations), que fue el origen de muchos otros desarrollados en varios laboratorios. Con MAO calcularon la normalización de Birkhof hasta orden 26 para los asteroides troyanos. Pero el verdadero reto que afrontaron fue un problema mucho más difícil: ver si eran capaces de reproducir mediante ordenador la Teoría de la Luna de Delaunay, quien había dedicado más de 20 años a su desarrollo y que tenía una precisión de 3 km en distancia. Pensando en cómo abordar este problema, André Deprit encontró una nueva transformación explícita, basada en series de Lie, posiblemente la mayor contribución de Deprit a la Mecánica Celeste y ampliamente utilizada hoy en día en otros campos científicos. Con Jacques Henrard y Arnold Rom no solamente reprodujo por ordenador la teoría de Delaunay, sino que al extenderla a órdenes superiores obtuvieron una precisión de 50 cm en distancia. Este trabajo tuvo un gran impacto, pues por primera vez mostraba las enormes posibilidades de los ordenadores para manipular expresiones algebraicas y fue recompensado con la J.C. Watson Golden Medal de la U.S. National Academy of Sciences.

Los satélites artificiales hicieron florecer de nuevo la Mecánica Celeste y André Deprit estuvo involucrado en esta tarea desde el principio. Conocedor del potencial que la Mecánica Celeste iba a jugar, promovió la fundación de una nueva revista, *Celestial Mechanics*, donde publicar artículos de esta materia, que hasta entonces estaban siendo publicados en revistas de carácter astronómico. *Celestial Mechanics* publicó su primer número en 1969, conteniendo un artículo con su famoso método de perturbaciones conocido como de Lie-Deprit.

Con este nuevo método y con los ordenadores hizo contribuciones fundamentales a la Teoría del Satélite Artificial, por ejemplo, con la “eliminación de la paralaje” los desarrollos convencionales se redujeron en un 87 %. Con Shannon Coffey y Bruce Miller probó que la *inclinación crítica* era una singularidad en la Teoría del Satélite Artificial; en este mismo problema, inventó la técnica de *pintar hamiltonianos* que ha sido ampliamente empleada para análisis cualitativo de sistemas dinámicos, no sólo en Astrodinámica, sino en Óptica, Física Nuclear o Dinámica Galáctica, entre otros campos. Le gustaba considerar los problemas desde su origen y siempre buscando lo que los “clásicos” habían logrado.

Tras 7 años como Catedrático en la Universidad de Cincinnati, André Deprit entró en el National Institute of Standards and Technology en 1979, en donde alcanzó el rango de *Senior Fellow*; permaneció empleado del NIST hasta su jubilación en 1997. André tenía un especial don para la enseñanza; sabía como atraer la atención de los alumnos y presentar conceptos intrincados como si fueran algo totalmente sencillo y natural. En su intensa labor como investigador en el NIST, echaba de menos el contacto con estudiantes. Así pues, no hubo sorpresa en que aceptara el puesto de Catedrático visitante que la Universidad de Zaragoza le ofreció. Desde 1987 hasta 1998, cuando su enfermedad se hizo más evidente, pasó tres meses cada año en Zaragoza, totalmente involucrado en proyectos de investigación, cursos de doctorado y dirigiendo varias tesis doctorales y, por supuesto, disfrutando en gran manera del estilo de vida español.

Además de la Ciencia, la Historia y la Política fueron dos de sus pasiones. Era buen conocedor de la situación política de los países que visitaba y le gustaba debatir por el placer de conversar. Con respecto a la Historia sucedía algo similar; era bastante frecuente el que solventásemos nuestras discrepancias sobre fechas, batallas o sucesión de reyes en la Biblioteca del Departamento de Historia.

Un hombre de su reputación recibió numerosos premios y honores, de los que podemos mencionar, entre otros, las Medallas de Plata y Oro del U.S. Department of Commerce, los Dirk Brouwer Awards, de la American Astronautical Society y de la American Astronomical Society, Fellow del American Institute of Aeronautics and Astronautics, Doctor *honoris causa* por la Universidad de Zaragoza y Presidente de la Comisión 7 (Celestial Mechanics) de la International Astronomical Union.

Descanse en paz el gran científico y maestro. Sus colegas, colaboradores, estudiantes y amigos lloramos su pérdida. Todos echaremos en falta su energía, consejos, conversación elocuente, su fino sentido del humor y, sobre todo, su amistad.

ANTONIO ELIPE
Académico numerario

VIDA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS, QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA EN EL AÑO 2006

Sesiones:

Durante el año 2006 la Real Academia de Ciencias de Zaragoza celebró nueve Sesiones. De ellas cinco fueron Ordinarias y cuatro Extraordinarias, tres con motivo de Discursos de Ingreso de nuevos Académico Numerarios y una de Entrega de Premios de Investigación. Las Ordinarias tuvieron lugar los días 23 de marzo, 27 de abril, 5 de octubre, 23 de noviembre y 19 de diciembre. Las Extraordinarias con Discurso de Ingreso tuvieron lugar en las fechas que se indican junto con el título del correspondiente discurso:

- 26/1/2006. Discurso de la Académica Numeraria Ilma. Sra. Dña. María Jesús Azanza Ruiz: *Actividad Neuronal y Magnetobiología*. Le respondió en nombre de la Academia el Excmo. Sr. D. Horacio Marco Moll.
- 23/2/2006. Discurso del Académico Numerario Ilmo. Sr. D. Alberto Elduque Palomo: *Algunos objetos excepcionales*. Le respondió en nombre de la Academia el Ilmo. Sr. D. Luis J. Boya Balet.
- 12/12/2006. Discurso del Académico Numerario Ilmo. Sr. D. José Luis Serrano Ostáriz: *Treinta años de cristales líquidos en Aragón*. Le respondió en nombre de la Academia el Ilmo. Sr. D. Enrique Meléndez Andréu.

Nuevos Académicos Numerarios:

- Ilma. Sra. Dña. María Jesús Azanza Ruiz, Académica Numeraria (Sección de Naturales) con la Medalla N^o 38.
- Ilmo. Sr. D. Alberto Elduque Palomo, Académico Numerario (Sección de Exactas) con la Medalla N^o 29.
- Ilmo. Sr. D. José Luis Serrano Ostáriz, Académico Numerario (Sección de Químicas) con la Medalla N^o 26.

Baja de Académicos Numerarios:

- Ilmo. Sr. D. José Luis Viviente Matéu, por traslado de domicilio a Alicante, pasando a Académico Correspondiente por el reglamento de la Academia.

Nuevos Académicos Correspondientes:

- Ilmo. Sr. D. Santos González Jiménez (Sección de Exactas).
- Ilmo. Sr. D. Carlos López Otín (Sección de Naturales).
- Ilmo. Sr. D. José Luis Viviente Matéu (Sección de Exactas).

Nuevos Presidentes de Sección:

- Ilmo. Sr. D. Mariano Gasca González, de la Sección de Exactas. Sustituye al Ilmo. Sr. D. José Luis Viviente Matéu, quien cesa por pasar a Académico Correspondiente.

Baja de Académico Correspondiente:

Por fallecimiento, causa baja como Académico Correspondiente:

- Ilmo. Sr. D. André Deprit

Publicaciones de la Academia:

- Los tres Discursos de Ingreso citados en el apartado de Sesiones.
- Volumen 61 de la Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza.
- Volumen 28 de la serie Monografías de la Academia de Ciencias con el título *Actas de las VIII Jornadas de Mecánica Celeste*.
- Volumen 29 de la serie Monografías de la Academia de Ciencias con el título *Groups, Geometry and Physics*. Son la Actas de un congreso del mismo título en homenaje al Académico D. José Cariñena.

Organización de Congresos y Conferencias:

La Academia ha colaborado en 2005 en la organización de los siguientes eventos:

- Ciclo de Conferencias **Evolución y Origen de la Vida**, en colaboración con la Facultad de Ciencias. En él, y bajo la dirección del Académico Profesor Boya se han impartido las siguientes conferencias
 1. *Ochoa y el desarrollo de la Bioquímica en España*. Dra. Margarita Salas, del Instituto de España.
 2. *Geología de la Tierra primitiva y los fósiles del Precámbrico*. Dr. Eladio Liñán, de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza

3. *La vida como consecuencia de la Evolución del Universo*. Dr. Juan Pérez Mercader, Instituto de Astrobiología INTA-NASA.
4. *El genoma, registro fósil de la vida*. Dr. Jaume Bertranpetit, Universidad Pompeu Fabra de Barcelona.
5. *Sobre ratones, cuevas y hombre*. Dra. Gloria Cuenca, Universidad de Zaragoza.
6. *Origen de la vida*. Dra. Susanna Manrubio.

- Se ha iniciado un ciclo de conferencias con el título **Química y sostenibilidad** organizado por la Academia en colaboración con la Facultad de Ciencias. La primera conferencia, con el título de *Química, medio ambiente y desarrollo sostenible*, tuvo lugar el 30 de noviembre a cargo del Profesor D. Luis Oro.
- También ha colaborado en la organización del Ciclo de Conferencias **Cita con la Ciencia. Espacio Facultad 2005-2006** en la Facultad de Ciencias.
- La Academia ha colaborado con el Depto. de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza en la organización del congreso **I Singular Workshop in Zaragoza**.
- Se ha colaborado en la organización de las **IX Jornadas de Mecánica Celeste**, que tuvieron lugar en Jaca (Huesca) en junio.
- Y también en la organización del **Congreso Particles and fields: classical and quantum**, que tuvo lugar en Jaca (Huesca) en septiembre.
- La Academia colabora en la organización del **Taller de Talento Matemático** que, con objeto de promover el descubrimiento de habilidades matemáticas en niños y niñas, tiene lugar anualmente bajo la dirección del Académico D. Alberto Elduque.

Dentro de la habitual participación de Académicos en numerosos Congresos nacionales e internacionales, y en conferencias en el ámbito de la difusión de la ciencia, cabe destacar las siguientes actuaciones.

- El Dr. Luis Oro organizó la *XXII International Conference on Organometallic Chemistry*, celebrada en Zaragoza, el pasado mes de julio, a la que asistieron 1200 científicos de 50 países.
- El Dr. Luis J. Boya fue conferenciante invitado en la conferencia: *Fields and Particles: Classical and Quantum* que tuvo lugar en Jaca (Huesca).
- El profesor Rafael Núñez-Lagos Roglá impartió una ponencia como representante español en la Agenzia per la Protezione dell'Ambiente e per i Servizi Tecnici APAT

en Roma. También ha co-presidido la *II Asamblea de la Comisión Española del Comité Internacional de la Ciencia*, celebrada en Madrid.

- La profesora María Teresa Lozano es la Presidenta del Comité Científico del *Primer Congreso Hispano-Francés de Matemáticas* que tendrá lugar en Zaragoza en 2007. El congreso satélite del *ICM Geometry and Topology of Low Dimensional Manifolds* celebrado en El Burgo de Osma en 2006, fue en honor de ella misma, del Profesor José María Montesinos, Académico Correspondiente de nuestra Academia y de otro colaborador internacional.
- El Dr. Alberto Elduque fue conferenciante plenario invitado en el *Workshop Lie Algebras and Quantum Groups* celebrado en Coimbra (Portugal), miembro del Comité Científico del Congreso *Associative and Nonassociative Algebraic Structures and Applications* celebrado en Oviedo, y conferenciante invitado en el *Workshop Infinite Dimensional Lie Theory*, celebrado en Oberwolfach (Alemania).
- El Dr. Pablo Alonso fue conferenciante invitado en la *III Reunión bienal del Grupo Especializado de RMN de la RSEQ*, celebrada en Sant Joan (Alicante), con la conferencia *ESEEM spectroscopy applied to the study of molecular systems of biological interest*. Además, fue miembro del comité organizador del *6th European Federation of EPR Groups Meeting*, celebrado en Madrid.
- El Dr. Antonio Elipe fue conferenciante plenario invitado en la Conferencia *New Trends in Astrodynamics and Applications III* celebrada en Princeton y en la *III Reunión Venezolana de Astronomía* celebrada en Mérida (Venezuela). También ha presidido el Comité Científico de las *IX Jornadas de Mecánica Celeste*, celebradas en Jaca.
- El Dr. Eladio Liñán inauguró el Ciclo de Conferencias con motivo de la exposición *Tesoros Fósiles de Aragón*, celebrado en el Centro Joaquín Roncal (Fundación CAI-ASC) de Zaragoza, y fue coautor del libro *Guía de Campo de las XXII Jornadas de la Sociedad Española de Paleontología* celebradas en León. Impartió también una conferencia en el acto de homenaje e inauguración de monumento a Lucas Malla y Puello en Huesca. También ha actuado como co-comisario en la exposición *Aquaria, agua territorio y paisaje en Aragón*, organizada por la Diputación de Zaragoza y el Depto. de Medio Ambiente del Gobierno de Aragón celebrada en la Lonja y el palacio de los Condes de Sástago en Zaragoza, a finales de 2006.
- El Profesor Mariano Gasca fue miembro del Comité Científico de la *6th internacional conference on curves and surfaces* celebrada en Avignon (Francia) y conferenciante

plenario invitado en la conferencia internacional *Approximation and iterative methods* celebrada en Lille (Francia) con motivo de la jubilación del Profesor Claude Brezinski, Académico Correspondiente de nuestra Academia en su sección de Exactas.

- Varios Académicos colaboran con cursos propios en la *Universidad de la Experiencia* que organiza la Universidad de Zaragoza.

Premios de investigación 2006

Se convocaron los Premios de Investigación 2005-2006 de la Academia correspondientes a las secciones de Físicas y Exactas, de acuerdo con las nuevas bases. En la primera, el Premio fue para la Dra. Rosa Isabel Merino Rubio, del ICMA de Aragón. El de la sección de Exactas lo obtuvo el Profesor Dr. José E. Galé Gimeno, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. Los premiados expusieron sendos trabajos de investigación en la Sesión Extraordinaria de la Academia celebrada el 24 de octubre en la que recibieron el Premio, con los títulos respectivos de *Cerámicas eutécticas solidificadas unidireccionalmente para fotónica y electrocerámica* y *Geometría de órbitas de representaciones de grupos y álgebras promediabiles* que se publican en este volumen 61 de la Revista de la Academia.

Se ha iniciado el proceso para los Premios 2006-2007 en las Secciones de Químicas y Naturales.

Distinciones a Académicos.

El Profesor Luis Oro ingresó en la *Academia Alemana de Ciencias Leopoldina*, el pasado mes de septiembre, siendo el primer español que ingresa en dicha Academia, la más antigua del mundo.

La Profesora M^a Teresa Lozano ha sido nombrada Académica Correspondiente de la Real Academia de Ciencias de Madrid.

El Profesor José Luis Serrano, recientemente ingresado en la Academia, ha obtenido el *Premio Aragón Investiga 2006 a la Excelencia Investigadora*.

El Académico Correspondiente D. Alberto Galindo Tixaire ha sido elegido Presidente de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Sustituye en el cargo a D. Carlos Sánchez del Río, también Académico Correspondiente de nuestra Academia.

El Académico Electo D. Fernando Solsona Motrel ha sido elegido presidente de la Real Academia de Medicina de Zaragoza.

Otros datos.

La Real Academia de Ciencias de Zaragoza ha sido subvencionada exclusivamente por el Ministerio de Educación y Ciencia a través del programa de apoyo a las Reales Academias asociadas al Instituto de España.

Se ha continuado poniendo al día la página web de la Academia, cuya dirección es <http://www.unizar.es/acz/>

Zaragoza, diciembre de 2006

REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA

Abstract

La Revista de la Real Academia de Ciencias publishes original research contributions in the fields of Mathematics, Physics, Chemistry and Natural Sciences. All the manuscripts are peer reviewed in order to assess the quality of the work. On the basis of the referee's report, the Editors will take the decision either to publish the work (directly or with modifications), or to reject the manuscript.

1 Normas generales de publicación

1.1 Envío de los manuscritos.

Para su publicación en esta Revista, los trabajos deberán remitirse a

Académico-Director de Publicaciones
Revista de la Academia de Ciencias
Universidad de Zaragoza
50009 Zaragoza

o bien electrónicamente a la cuenta `elipe@unizar.es`.

La Revista utiliza el sistema de *offset* de edición, empleando el texto electrónico facilitado por los autores, que deberán cuidar al máximo su confección, siguiendo las normas que aquí aparecen.

Los autores emplearán un procesador de texto. Se recomienda el uso de LaTeX, para el que se han diseñado los estilos `academia.sty` y `academia.cls` que pueden obtenerse directamente por internet en <http://www.unizar.es/acz/> o por petición a la cuenta de correo electrónico: `elipe@unizar.es`.

1.2 Dimensiones

El texto de los trabajos, redactados en español, inglés o francés, no deberá exceder de 16 páginas, aunque se recomienda una extensión de 6 a 10 páginas como promedio. El texto de cada página ocupará una caja de 16×25 cm., con espacio y medio entre líneas.

2 Presentación del trabajo.

Los trabajos se presentarán con arreglo al siguiente orden: En la primera página se incluirán los siguientes datos:

- a) *Título del trabajo*: Conciso, pero ilustrativo, con mayúsculas.
- b) *Autor*: Nombre y apellidos del autor o autores, con minúscula.
- c) *Centro*: Centro donde se ha realizado, con su dirección postal.
- d) *Abstract*: En inglés y con una extensión máxima de 200 palabras.
- e) *Texto*

A) Los encabezamientos de cada sección, numerados correlativamente, serán escritos con letras **minúsculas** en negrita. Los encabezamientos de subsecciones, numerados en la forma 1.1, 1.2, . . . , 2.1, 2.2, . . . , se escribirán en *cursiva*.

B) Las fórmulas estarán centradas y numeradas correlativamente.

C) Las referencias bibliográficas intercaladas en el texto, deben ser fácilmente identificables en la lista de referencias que aparecerá al final del artículo, bien mediante un número, bien mediante el nombre del autor y año de publicación.

D) Las figuras y tablas, numeradas correlativamente, se intercalarán en el texto. Las figuras se enviarán en formato EPS, o que se pueda convertir a éste con facilidad. Los apéndices, si los hay, se incluirán al final del texto, antes de la bibliografía.

G) Las referencias bibliográficas de artículos deberán contener: Autor: año de publicación, “Título del artículo”, *revista número*, páginas inicial–final. En el caso de libros, deberá incluirse: Autor: año de publicación, *Título del libro*. Editorial, lugar de publicación.

3 Notas finales

Por cada trabajo publicado, se entregarán al autor o autores un total de 25 separatas. La Revista permite la inclusión de fotografías o figuras en color, con un coste adicional que correrá a cargo de los autores.

Antonio Elipe
Académico Editor

RELACIÓN DE REVISTAS NACIONALES QUE RECIBE EN INTERCAMBIO
LA BIBLIOTECA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS

ACTA BOTANICA BARCINONENSIS
ACTA QUIMICA COMPOSTELANA - Departamento de Química Analítica
AFINIDAD - Revista Química Teórica y Aplicada
ANALES DE BIOLOGIA - Sección de Biología General (Murcia)
ANALES DEL JARDIN BOTANICO DE MADRID
ANALES DE LA REAL ACADEMIA DE DOCTORES
ANALES DE LA UNIVERSIDAD DE MURCIA
ANALES DE CIENCIAS - Facultad de Ciencias (Químicas y Matemáticas) (Murcia)
ANALES SECCION DE CIENCIAS - Colegio Universitario de Girona
ANUARIO DEL OBSERVATORIO ASTRONOMICO - Madrid.
BELARRA. SOCIEDAD MICOLOGICA. Baracaldo.
BLANCOANA - Col. Univ. "Santo Reino" Jaén
BOLETIN DA ACADEMIA GALEGA DE CIENCIAS - (Santiago de Compostela)
BOLETIN DE LA ASOCIACION HERPETOLOGICA ESPAÑOLA
BOLETIN GEOLOGICO Y MINERO
BOTANICA COMPLUTENSIS - Madrid
BUTLLETI DEL CENTRO D'HISTORIA NATURAL DE LA CONCA DE BARBARA
COLLECTANEA BOTANICA - (Barcelona)
COLLECTANEA MATEMATICA - (Barcelona)
ESTUDIO GENERAL - Revista Colegio Universitario (Girona)
EXTRACTA MATHEMATICAE - Universidad de Extremadura
FACULTAD DE CIENCIAS EXPERIMENTALES DE JAEN. Monografías.
FOLIA BOTANICA MISCELANEA - Departamento de Botánica (Barcelona)
GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA
INDICE ESPAÑOL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA -
INSTITUTO GEOLOGICO Y MINERO DE ESPAÑA
INVESTIGACION E INFORMACION TEXTIL Y DE TENSIOACTIVIVOS (C.S.I.C.)
- Barcelona
LACTARIUS.- BOL. DE LA ASOCIACION MICOLOGICA - Jaen
LUCAS MALLADA - Inst. Est. Altoaragoneses.

MEMORIAS DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES DE BARCELONA
MISCELANEA ZOOLOGICA - Museo Zoológico - Ayuntamiento de Barcelona
NATURALIA BAETICA - Jaen
PIRINEOS
PUBLICACIONES PERIODICAS DE LA BIBLIOTECA DEL MUSEU DE ZOOLOGIA
- (Barcelona)
REBOLL.- Bull. Centro d'Historia Natural de la Concha de Barbera.
REVISTA DE LA ACADEMIA CANARIA DE CIENCIAS
REVISTA REAL ACADEMIA GALEGA DE CIENCIAS
REVISTA DE BIOLOGIA DE LA UNIVERSIDAD DE OVIEDO
REVISTA ESPAÑOLA DE FÍSICA
REVISTA ESPAÑOLA DE FISILOGIA - Pamplona
REVISTA ESPAÑOLA DE HERPETOLOGIA
REVISTA IBERICA DE PARASITOLOGIA
REVISTA MATEMATICA COMPLUTENSE - (Madrid)
REVISTA DE OBRAS PUBLICAS
REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATU-
RALES DE MADRID – Matemáticas
REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS - QUIMICA - Madrid
RUIZIA - Monografías del Jardín Botánico (Madrid)
SCIENCIA GERUNDENSIS
STUDIA GEOLOGICA SALMANTICENSIA - Universidad de Salamanca
TRABAJOS DE GEOLOGIA - Universidad de Oviedo
TREBALLS DEL CENTRE D'HISTORIA NATURAL DE LA CONCA DE BARBERA.
TREBALLS DE L'INSTITUT BOTANIC DE BARCELONA
TREBALLS DEL MUSEU DE ZOOLOGIA DE BARCELONA
ZOOLOGIA BAETICA. UNIVERSIDAD DE GRANADA.

RELACIÓN DE REVISTAS INTERNACIONALES QUE RECIBE EN
INTERCAMBIO LA BIBLIOTECA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS - Córdoba. Argentina
ACADEMY OF NATURAL SCIENCES OF PHILADELPHIA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCIEI - Notiziario
ACCADEMIA UDINESE DI SCIENZE LETTERS ED ARTI.
ACTA ENTOMOLOGICA MUSEI NATIONALIS PRAGAE
ACTA FAUNISTICA ENTOMOLOGICA MUSEI NATIONALIS - Praga
ACTA GEOLOGICA POLONICA - Warszawa
ACTA MATHEMATICA HUNGARICA
ACTA MATEMATICA SINICA - New Series China
ACTA MUSEI NATIONALI PRAGAE
ACTA ORNITHOLOGICA - Polska Akademia Nauk Warszawa
ACTA PHYSICA - Academia Scientiarum Hungaricae
ACTA SOCIETATIS ENTOMOLOGICA BOHEMOSLOVACA
ACTA UNIVERSITATIS - Series: Mathematics and Informatic – University of Nis –
Yugoeslavia
ACTA ZOOLOGICA FENNICA
AGRONOMIA LUSITANICA - Est. Agr. Nac. Sacavem - Portugal
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ANALES DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y
NATURALES DE BUENOS AIRES
ANALES DE LA ESCUELA NACIONAL DE CIENCIAS BIOLÓGICAS. México
ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA
ANALES DE LA ESCUELA NACIONAL DE CIENCIAS BIOLÓGICAS - México
ANIMAL BIODIVERSITY CONSERVATION
ANNALEN DES NATURHISTORISCHEN MUSEUMS IN WIEN
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - Serie A - I Matematica - Helsinki
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - Serie A - II Chemica - Helsinki
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - III Geologica Geografica - Helsinki
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - Serie A - IV Physica - Helsinki
ANNALES HISTORICO NATURALES - Musei Nationalis Hungarici

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER - Université de Grenoble
 ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER - Gap
 ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE - Serie I - Science Mathematiques Physiques
 Bruxelles
 ANNALES UNIVERSITATIS MARIA CURIE - Sectio A Mathemat. - Sklodowska
 ANNALES UNIVERSITATIS MARIA CURIE - Sklodowska - Sectio AA Chemica. Lublin.
 ANNALES UNIVERSITATIS MARIA CURIE - Sklodowska - Sectio AAA Physica. Lublin.
 ANNALES ZOOLOGICI FENNICI - Helsinki
 ANNALI DELLA FACOLTA DE AGRARIA - Universita de Pisa
 ANNALI DEL MUSEO CIVICO DI STORIA NATURALE "Giacomo Doria"
 ARBOLES Y SEMILLAS DEL NEOTROPICO - Museo Nac. de Costa Rica
 ARCHIVIO GEOBOTANICO - Univ de Pavía.
 ATTI DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI. RENDICONTI LINCEI - Matem-
 atica e Applicazioni - Roma
 ATTI DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI. RENDICONTI LINCEI - Scien-
 ze Fisiche e Naturali - Roma
 ATTI DELLA ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE E ARTI DI UDINE
 ATTI DELL'INSTITUTO BOTANICO E DEL LABORATORIO CRITTOGRAMICO
 DELL'UNIVERSITA DI PAVIA
 BAYERISCHE AKADEMIE DR WISSENSCHAFTEN - Munchen
 BEITRAGE ZUR FORSCHUNSTECHOLOGIE - Akademie Verlag Berlin
 BOLETIM DA SOCIEDADE PARANAENSE DE MATEMATICAS - Paraná
 BOLETIM DA SOCIEDADES PORTUGUESA DE CIENCIAS NATURALES - Lisboa
 BOLETIN DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS FISICAS, MATEMATICAS Y
 NATURALES - Caracas
 BOLETIN DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS - Córdoba. Argentina.
 BOLETIN BIBLIOGRAFICO DE LA ESCUELA NACIONAL DE CIENCIAS BIOLÓ-
 GICAS - México
 BOLETIN DEL MUSEO NAC. DE COSTA RICA.
 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA
 BOTANY UNIV. OF CALIFORNIA PUBLICATIONS.
 BRENESIA - Museo Nacional de Costa Rica
 BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES - Scientific Information - CENTRE MATH-
 EMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES
 BULGARIAN JOURNAL OF PHYSICS
 BULLETIN OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY - Providence
 BULLETIN DE LA CLASSE DE SCIENCES - Academie Royale de Belgique - Bruxelles
 BULLETIN OF THE GEOLOGICAL INSTITUTION OF THE UNIVERSITY UPSALA

BULLETIN OF THE JSME (Japan Society of Mechanical Engineers)
 BULLETIN DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRETAGNE - Rennes
 CALIFORNIA AGRICULTURE - University of California
 CIENCIAS TECNICAS FISICAS Y MATEMATICAS. Academia de Ciencias. Cuba.
 COLLOQUIUM MATHEMATICUM - Warszawa
 COMMENTATIONES MATHEMATICAE - Ann. So, Mathematicae Polonese
 COMPTES RENDUS DE L'ACADEMIE BULGARE DE SCIENCES - Sofia
 DARWINIANA REV. INST. BOTANICA DARWINION - República Argentina
 DORIANA - Supplementa agli Annali del Museo Civico di Storia Naturale "G. Doria" -
 Cenova
 ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS DO SERVIC DE FOMENTO MINERO - Portugal
 ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS, DIECCIÓ GERAL DE GEOLOGIA E MINAS -
 Porto
 FILOMAT - FACTA UNIVERSITATIS - Univ. af Nis.
 FÍSICA DE ONDAS ACÚSTICAS Y ELECTROMAGNÉTICAS LINEALES - Acad.
 Búlgara de las Ciencias
 FOLIA ANATOMICA UNIVERSITATIS CONIMBRIGENSIS - Coimbra
 FOLIA ZOOLOGICA - Czechoslovak Academy of Sciences
 FUNCTIONS ET APPROXIMATIC COMMENTARI MATHEMATICI - Poznań
 GLASNIK MATEMATICKI - Zagreb
 IBC - INFORMAZIONI - Rivista Bimestrale Inst. Beni. Artistic. - Regione Emilis-
 Romagna
 INSTITUTO DE MATEMATICA - Univ. Nac. del Sur - Bahia Blanca - Argentina
 INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO AGRARIA - Estação AGRONOMICA
 NACIONAL OEIRAS INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO DE CIENFUEGOS
 INTERNATIONAL TIN RESEARCH INSTITUTE
 JAHRBUCH DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN GÖTTINGEN.
 JOURNAL OF THE AMERICAN ACADEMY OF ARTS AND SCIENCES - Daedalus
 JOURNAL OF THE BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
 JOURNAL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY
 JOURNAL OF NON-CRYSTALLINE SOLIDS - Amsterdam
 LESTURAS MATEMATICAS - Colombia
 MATHEMATICA BALKANICA
 MATHEMATICA MONTISNIGRA
 MEMORABILIS ZOOLOGICA
 MEMORANDA SOCIETATIS PROFAUNA ET FLORA FENNICA - Helsingfors
 MEMORIAS DA ACADEMIA DAS CIENCIAS DE LISBOA (Classe de Ciencias)
 MITTEILUNGEN AUS DEN ZOOLOGISCHEN MUSEUM IN BERLIN

MONOGRAFIAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISI-
 CAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES
 NACHRICHTEN DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN GUTTINGEN - II
 Matemáticas y Física
 NATURAL HISTORY MUSEUM UNIV. OF KANSAS.
 NEOTROPICO - Museo Nacional de Costa Rica
 NETHERLANDS JOURNAL OF ZOOLOGY
 NONLINEARITY - Inst. Physics and London Math. Soc
 NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS - Ins. de Matematica - Univ. Atac. del Sur. Bahia
 Blanca
 NOTULAE NATURAE
 NUCLEAR ENERGY -Bulgarian Academy of Sciences
 OCCASIONAL PAPERS OF THE CALIFORNIA ACADEMY OF SCIENCES - San
 Francisco
 PHILIPPINE JOURNAL OF SCIENCES - Manila
 POLISH ACADEMY OF SCIENCES. INSTITUTE OF MATHEMATICA
 POLSKA AKADEMIE NAUK-PRACE GEOLOGICZNE
 POLSKA AKADEMIE NAUK-PRACE MINERALOGICZNE
 PORTUGALIA PHYSICA - Sociedade Portuguesa de Física
 PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF NATURAL SCIENCES OF PHILADEL-
 PHIA
 PROCEEDINGS OF THE CALIFORNIA ACADEMY OF SCIENCES
 PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY
 PROCEEDINGS OF THE ROCHESTER ACADEMY OF SCIENCES
 PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON - A: Mathematical and
 Physical Sciences
 PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH - Section A (Mathe-
 matical and Physical Sciences)
 PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF QUEENSLAND
 PUBLICACIONES FUNDAMENTALES DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS DE SOFIA
 PUBLICATION DE L'INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE -
 Strasbourg
 PUNIME MATEMATIKE - Prishtine
 QUADERNI DELL' ACADEMIA UDINESA.
 QUATERLY OF APPLIED MATHEMATICS
 REVISTA CUBANA DE FISICA
 REVISTA COLOMBIANA DE MATEMATICAS

REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA QUIMICA- Univ. Nal. del Litoral -
Argentina
REVISTA TRIMESTRAL DEL INTERNATIONAL TIN RESEARCH INSTITUTE
REVISTA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA - Argentina
REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
REZIMEA ABSTRACS - POGDORICA
SCIENCE BULLETIN - University of Kansas
SCIENTIFIC PAPERS NAT. HISTORY MUSEUM. The University Kansas.
SEARCH AGRICULTURAL ITHACA NEW YORK
SENCKENBERGIANA BIOLOGICA - Frankfurt
SENCKENBERGIANA LETHAEA - Frankfurt
SMITHSONIAN CONTRIBUTIONS TO PALEONTOLOGY
SPECTRUM - Akademie der Wissenschaften der DDR
STUDIA GEOLOGICA POLONICA - Polska Akademy Nauk Warsovia
SUT JOURNAL OF MATHEMATICS - Science University of Tokio
T. KOSCIUSZKI TECHNICAL - Univesity of Cracow
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA - Notas del museo de la Plata
UNIVESITY OF THE STATE OF NEW YORK - Bulletin
UNIVERSITY OF KANSAS PALEONTOLOGICAL CONTRIBUTIONS
VERTEBRATOLOGICKE ZPRAVY CESKOLOVENSKA AKADEMIE BRNO
ZBORNIK RADOVA FILOZOFSKOG - Fakulteta u Nisu-Serija Matematika
ZBORNIK - Acta Musei Nationalis - Pragae
ZOOLOGICA POLONIAE
ZPRAVY USEB (Vertebralogy zpravy) - Brno - Checoslovaquia