

REVISTA  
DE LA  
REAL ACADEMIA  
DE CIENCIAS  
Exactas  
Físicas  
Químicas y  
Naturales  
DE  
ZARAGOZA



Serie 2.<sup>a</sup>  
Volumen 66

2011

## ÍNDICE DE MATERIAS

Carbenos y Metales de Transición: el Tándem Ideal para el Diseño de Catalizadores Eficaces RICARDO CASTARLENAS .....	7
Eventos Tectono-Mágmaticos Alpinos en el Registro Geológico de los Pirineos: Inferencias sobre la Evolución del Manto Superior en una Zona Activa. ENRIQUE ARRANZ, MARCELIANO LAGO, CARLOS GALÉ, TERESA UBIDE, ANDRÉS POCOVÍ, PATRICIA LARREA Y PABLO TIERZ .....	31
Groups of order less than 32, revisited LEYRE ESTEBAN, RAFAEL TAPIA-ROJO, ADRIÁN SANCHO AND LUIS J. BOYA ...	63
Sobre el problema clásico de Waring CATALINA CALDERÓN .....	105
Sistema Tierra, biodiversidad y calidad de vida MIGUEL DELIBES DE CASTRO .....	127
Algunas reflexiones sobre la crisis Mediambiental JUAN PABLO MARTÍNEZ RICA .....	137
ACTIVIDADES DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS, QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA EN EL AÑO 2011 .....	143
Instrucciones a los autores .....	149
Intercambio de Publicaciones .....	151



# Carbenos y Metales de Transición: el Tándem Ideal para el Diseño de Catalizadores Eficaces

Ricardo Castarlenas

Instituto de Síntesis Química y Catálisis Homogénea-ISQCH,  
Universidad de Zaragoza – CSIC. Facultad de Ciencias, 50009 Zaragoza, Spain

*Premio a la Investigación de la Academia 2011. Sección de Químicas*

## Abstract

The interplay between transition metal and carbene species has revolutioned the synthetic strategies for added value products. The electronic properties of the metal carbene intermediates vary from very electrophilic to strongly nucleophilic that allow for a wider scope for these species in catalytic transformations ranging from C-H insertion, cyclopropanation, cycloadditions or olefin metathesis.

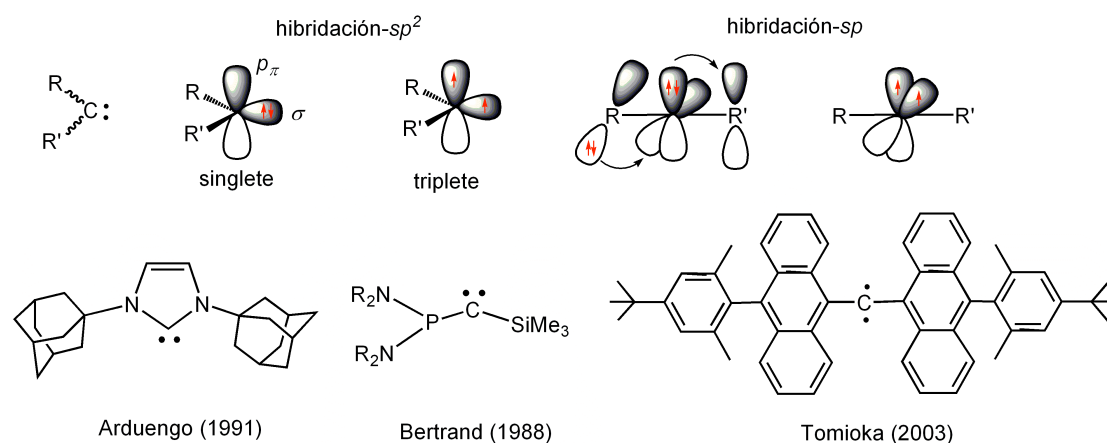
## 1 Introducción

La Química está jugando, y va a jugar sin duda, un papel central en la resolución de muchos problemas de la sociedad moderna, desde la síntesis de medicamentos más eficaces hasta el desarrollo de materiales con nuevas y sorprendentes propiedades. Este objetivo no se debe alcanzar a cualquier precio, sino que es necesario el desarrollo de nuevos procesos industriales llevados a cabo en condiciones suaves, eficientes y selectivas. Para ello es necesario el diseño de nuevas tecnologías que estén en consonancia con los postulados de la química sostenible. Ello incluye básicamente la utilización de materias primas sencillas, prevención en la generación de residuos, seguridad laboral, eficiencia energética y economía atómica. La catálisis homogénea cumple estos requisitos, ya que es un magnífico instrumento que permite la transformación de los sustratos para generar productos de alto valor añadido,

generalmente en condiciones de reacción suaves y con gran selectividad. El diseño de nuevos catalizadores más activos y selectivos es actualmente una tarea fundamental. En este campo, la sinergia carbeno-metal de transición ha demostrado no solo una gran eficiencia catalítica para un amplio rango de reacciones sino también su enorme potencial en el diseño del catalizador adecuado para cada tipo de transformación.

## 2 Características de los carbenos

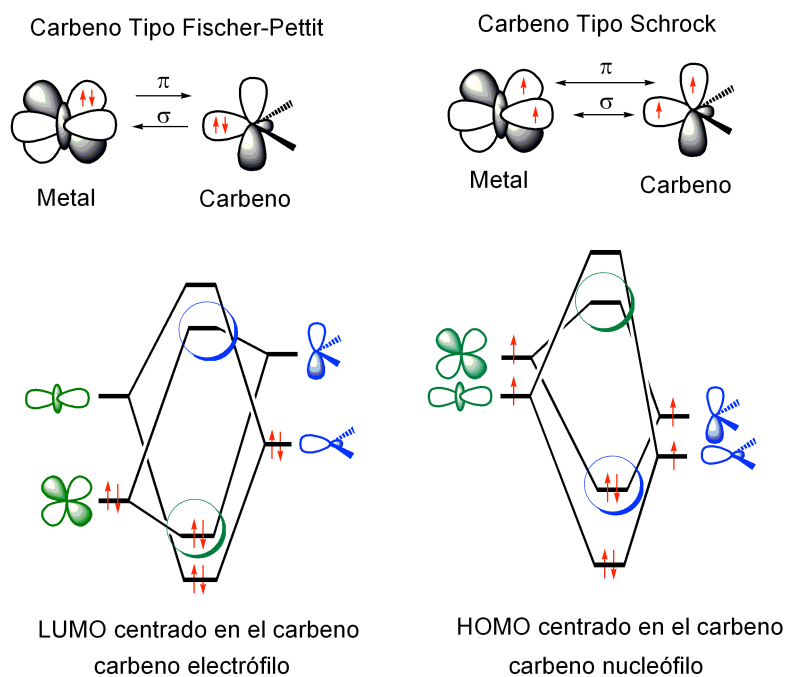
Los carbenos son compuestos neutros divalentes en los que el átomo de carbono posee tan solo seis electrones en su capa de valencia (Figura 1).<sup>1</sup> Debido a esta peculiar característica durante mucho tiempo fueron considerados como especies transitorias muy reactivas,<sup>2</sup> hasta que finalmente consiguieron aislarse y caracterizarse como compuestos estables.<sup>3</sup> Los carbenos presentan gran variedad de geometrías y estados de espín. Así, dependiendo del tipo de hibridación, se pueden encontrar especies lineares (hibridación  $sp$ ) o angulares ( $sp^2$ ). Las dos principales configuraciones electrónicas de los orbitales no enlazantes son: *i*) capa abierta con un electrón en cada orbital con espines paralelos o estado triplete y *ii*) capa cerrada con dos electrones en el nivel de más baja energía (orbital  $\sigma$ ) dejando un orbital vacío ( $p_x$ ), denominado estado singlete. La diferencia energética entre estos dos niveles especifica el estado de espín del carbeno y viene determinada por las características estereoelectrónicas de los sustituyentes. Los carbenos de tipo singlete angulares se estabilizan por grupos fuertemente electronegativos y dadores  $\pi$  de densidad electrónica ( $-NR_2$ ,  $-OR$ ,  $-SR\dots$ ),<sup>3b</sup> mientras que la combinación de un sustituyente  $\pi$  dador y otro  $\pi$  aceptor ( $PR_2$ ,  $SiR_3$ ) estabiliza los carbenos singlete con geometría casi lineal.<sup>3a</sup> Los ligandos muy voluminosos estabilizan cinéticamente todo tipo de carbenos pero hasta la fecha es el único modo de estabilizar carbenos en estado triplete.<sup>4</sup>



**Figura 1.** Estructura electrónica de los carbenos y algunos carbenos estables.

### 3 Carbenos y metales de transición

Además de la estabilización aportada por los sustituyentes, los carbenos también se pueden estabilizar mediante la formación de complejos de metales de transición.<sup>5</sup> La sinergia entre estas dos especies es casi perfecta ya que el metal posee orbitales ocupados y vacantes con simetría idónea para interactuar con los orbitales frontera de los carbenos. Se han descrito gran cantidad de complejos organometálicos con diferentes metales y estados de oxidación que presentan características muy variadas.<sup>6</sup> Tradicionalmente, se han dividido los carbenos metálicos en dos grandes grupos, de tipo Fischer o de tipo Schrock. Los carbenos de tipo Fischer,<sup>7</sup> en el que el carbene está estabilizado por un heteroátomo, tienen carácter electrófilo en el átomo de carbono, mientras que los carbenos de tipo Schrock<sup>8</sup> son nucleófilos (Figura 2). El tipo de enlace metal-carbene en estos complejos es muy diferente. Los carbenos de Fischer presentan una doble donación electrónica ligando $\rightarrow$ metal metal $\rightarrow$ ligando que involucra la donación desde el orbital  $\sigma$  del carbene en estado singlete y la retrodonación desde un orbital  $d$  ocupado del metal al orbital  $p_x$  vacante similar a la encontrada en los ligandos carbonilo o en las especies  $\eta^2$ -olefina. Por otro lado, en el carbene de tipo Schrock tiene lugar la formación de dos enlaces covalentes entre fragmentos de capa abierta del metal y el carbene.



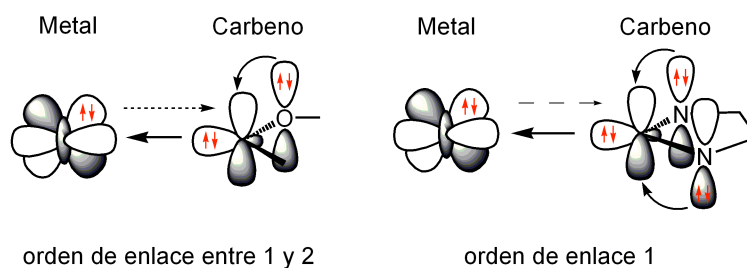
**Figura 2.** Descripción del enlace metal-carbena.

Para explicar la diferente naturaleza electrónica del átomo de carbono de estos complejos debemos fijarnos en sus orbitales frontera. En el caso de los carbenos de tipo Fischer, el orbital ocupado de máxima energía (HOMO) se encontraría más centrado en el metal, y con ello el orbital desocupado de más baja energía (LUMO) se localizaría en el carbono, lo que explicaría el carácter electrófilo de este tipo de especies, mientras que para el carbena de tipo Schrock el HOMO se situaría centrado en el carbono confiriéndole naturaleza nucleófila. Dada la gran variedad de carbenos metálicos descritos hasta la fecha se podría decir que estos dos arquetipos de carbenos son los extremos de una línea continua en la que se situarían los demás complejos.

*Terminología de carbenos: tipo Fischer ¿electrófilo o estabilizado por heteroátomo?*

El primer complejo aislado de tipo Fischer fue un derivado pentacarbonilo de cromo en el que carbena está estabilizado por un heteroátomo, en este caso oxígeno. Esta estabilización consiste en la donación del par libre del heteroátomo al orbital vacío  $p_z$  del carbena, con lo que disminuye la densidad electrónica retrodonada por parte del metal y por ello el orden de enlace M-C es menor (Figura 3). Además el átomo de carbono posee carácter electrófilo. Esta dualidad de características puede generar cierta

confusión a la hora de encuadrar un carbeno como de tipo Fischer ya que podríamos estar refiriéndonos a su estabilización por heteroátomo o a su carácter electrófilo y no necesariamente las dos cosas suceden al mismo tiempo. Por ejemplo, los carbenos N-heterocíclicos (NHC) están estabilizados por un heteroátomo pero no son para nada electrófilos, sin embargo se les suele denominar de tipo Fischer. Por otro lado, Pettit describió carbenos de hierro no estabilizados por heteroátomos de naturaleza electrófila por lo que también se describen como de tipo Fischer.<sup>9</sup> Con la intención de clarificar estos supuestos se ha propuesto con muy buen criterio denominar carbenos de tipo Pettit a los carbenos electrófilos no estabilizados por heteroátomos y reservar el término carbenos de Fischer a los estabilizados por heteroátomos.<sup>10</sup>



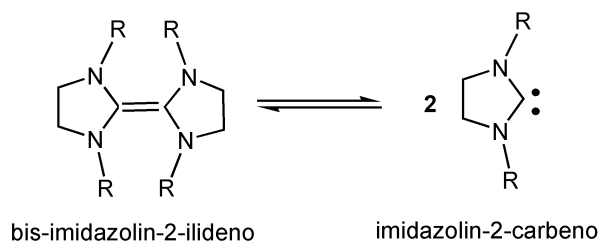
**Figura 3.** Enlace en los carbenos estabilizados por heteroátomos.

*Orden de enlace metal-carbeno: ¿sencillo o doble? ¿Es correcta la denominación “ilideno” para un carbeno libre sin enlace?*

Los carbenos metálicos no estabilizados por heteroátomos que generalmente presentan dos interacciones orbitarias principales y una distancia de enlace más corta característica de un doble enlace se denominan con la terminación “ilideno” (alquilideno, bencilideno...), que significa grupo unido por doble enlace. Sin embargo, hemos visto que en los carbenos estabilizados por heteroátomos disminuye el orden de enlace metal-carbeno desde dos hasta ser casi uno para los ligandos NHC. A pesar de ello, en los carbenos libres del tipo NHC se añade el sufijo “ilideno” para denotar carbeno siendo precisamente en estos complejos donde se alarga más el enlace metal-carbono! Esta asimilación errónea ilideno-carbeno puede tener su origen en que en un principio se pensaba que estos ligandos formaban enlace doble con el metal. Otra posibilidad la encontramos en el hecho de que, previamente a que Arduengo aislara los carbenos libres, los complejos NHC se preparaban por derivados enetetramina resultado de la dimerización del carbeno libre, lo que se conoce como equilibrio de Wanzlick, y



que en este caso si son denominados correctamente imidazolin-2-ilidenos (Figura 4).<sup>11</sup> Ser carbeno no implica pues necesariamente formar enlaces dobles por lo que debería buscarse una nueva notación para los carbenos libres, por ejemplo simplemente el sufijo “carbeno” en la posición del átomo de carbono implicado.



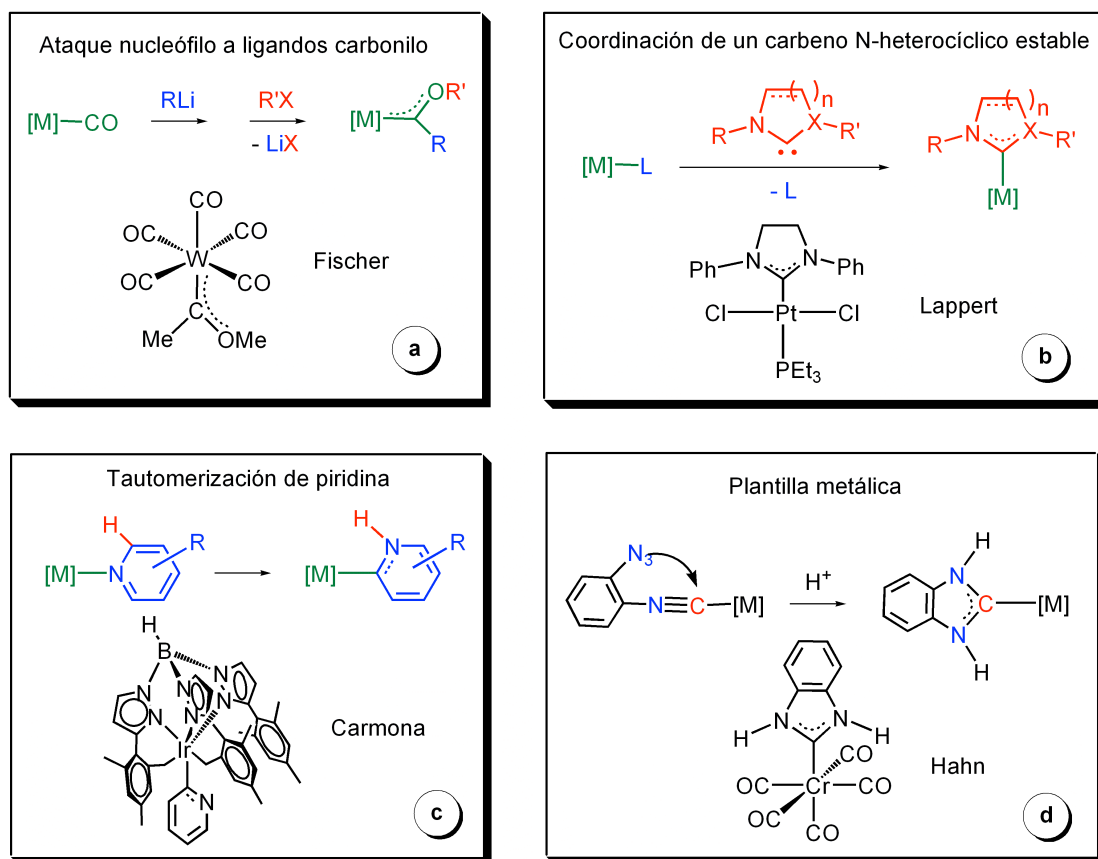
**Figura 4.** Equilibrio de Wanzlick entre carbenos e imidazolin-2-ilidenos.

*Carga formal del carbeno metálico: ¿neutro o dianiónico?*

Hemos visto que existen dos modelos de enlace para los carbenos metálicos. El primer modelo implica interacciones de capa cerrada ligando-metal donación-retrodonación, por lo que el ligando se considera neutro. El caso es diferente para los carbenos de Schrock ya que se considera el doble enlace como la interacción entre dos grupos en estado triplete por lo que el ligando carbeno se considera dianiónico. ¿Cómo considerar a los carbenos intermedios entre estos dos extremos como por ejemplo los carbenos de Grubbs? La respuesta es que por regla general se consideran los carbenos como ligandos neutros para metales de las últimas series de transición y se reservan los carbenos dianiónicos para complejos de metales de la primeras series de transición y cuya estructura concuerda con un metal en alto estado de oxidación, como por ejemplo la estructura tetraédrica en los catalizadores de Schrock para la metátesis de olefinas basados en molibdeno.<sup>12</sup>

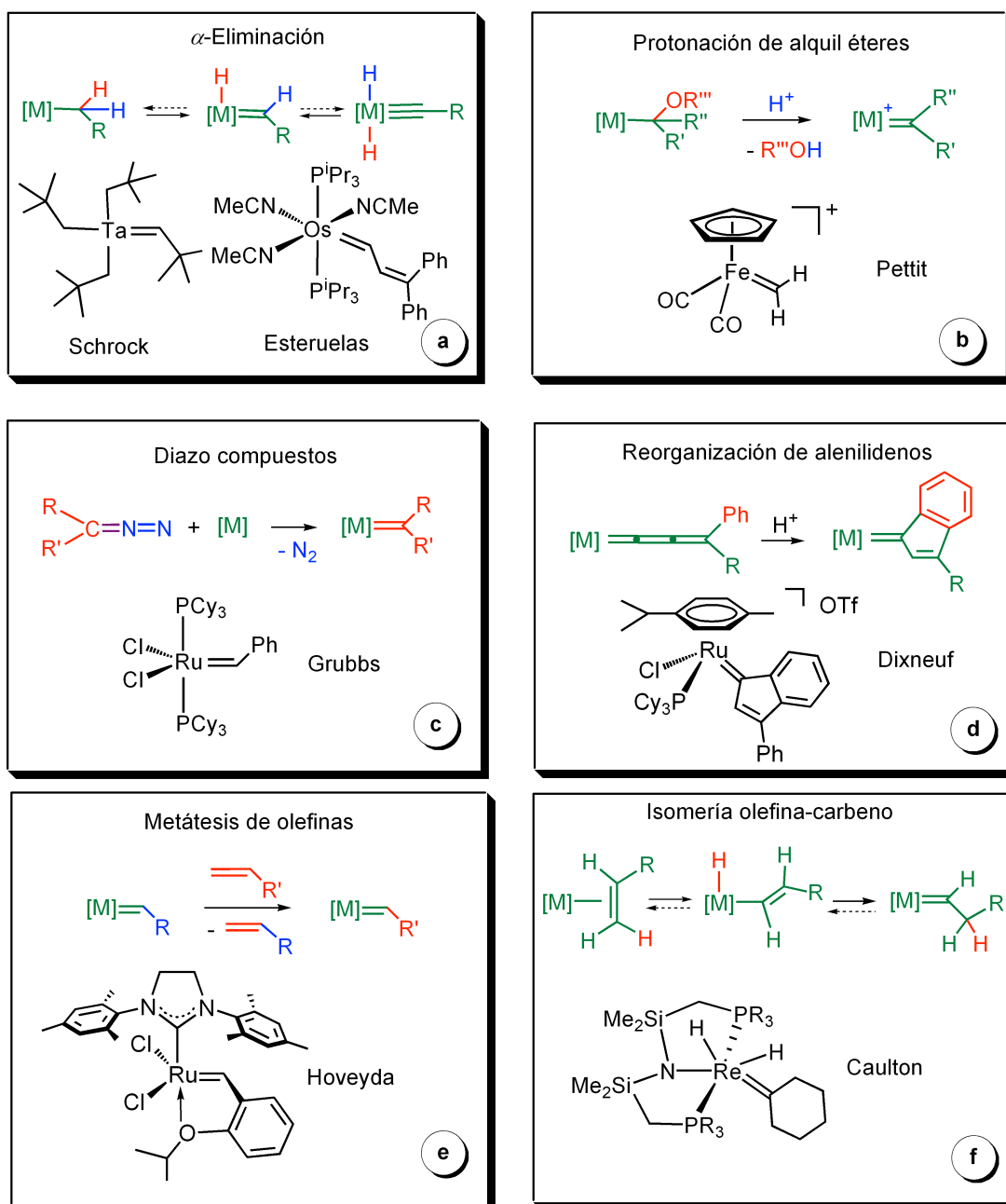
*Rutas sintéticas hacia carbenos metálicos estables*

Existen numerosas rutas de acceso a los carbenos metálicos (Figuras 5 y 6). De manera general se podrían dividir en tres grandes bloques: *i*) modificación de un ligando preexistente (Figura 5a y d; Figura 6a, b, d y e) *ii*) Sustitución o adición de un carbeno libre (5b y 6c) y *iii*) isomerización de un ligando (5c y 6f).



**Figura 5.** Síntesis de carbenos metálicos estabilizados por heteroátomos.

Los carbenos estabilizados por un heteroátomo fueron los primeros que se sintetizaron. La vía más típica para obtener estos derivados consiste en un ataque nucleófilo a un ligando carbonilo y posterior tratamiento con un derivado halogenado (Figura 5a).<sup>13</sup> Otra vía de acceso consiste en la adición de alcoholes o aminas a especies vinilideno o alenilideno.<sup>14</sup> Como hemos visto anteriormente la presencia de dos heteroátomos, en este caso nitrógeno, estabilizan tanto el carbeno que puede ser aislado puro (Figura 5b). Se han descrito complejos NHC para prácticamente todos los metales de transición.<sup>15</sup> La síntesis se puede efectuar directamente con el carbeno libre. En los casos donde aislar el carbeno es dificultoso se pueden generar *in-situ* con una base, o bien obtenerlos por transmetalación desde un carbeno de plata.<sup>16</sup> El carbeno también puede sintetizarse elegantemente en la esfera de coordinación del metal usando éste como plantilla (Figura 5d).<sup>17</sup> Recientemente, se ha descrito que ciertos metales de transición con los ligandos adecuados son capaces de desplazar el equilibrio de tautomerización de piridina a carbeno, altamente desfavorecido en estado libre (Figura 5c).<sup>18</sup>



**Figura 6.** Rutas de acceso para carbenos metálicos no estabilizados por heteroátomos.

En el caso de los carbenos no estabilizados por heteroátomos la primera ruta utilizada fue la  $\alpha$ -eliminación de alquilo (Figura 6a).<sup>5a,19</sup> Posteriormente se comprobó que el equilibrio funciona también en sentido inverso, por lo que estos derivados pudieron obtenerse mediante inserción migratoria en especies hidruro-carbino.<sup>20</sup> Otra vía de acceso utilizada principalmente para preparar carbenos electrófilos de hierro consiste en la protonación de ligandos alquil éter (Figura 6b).<sup>21</sup> Sin embargo, la ruta de síntesis más común y sencilla es sin duda la utilización de diazocompuestos como precursores del carbeno (Figura 6c).<sup>22</sup> Mediante este método se han obtenido los

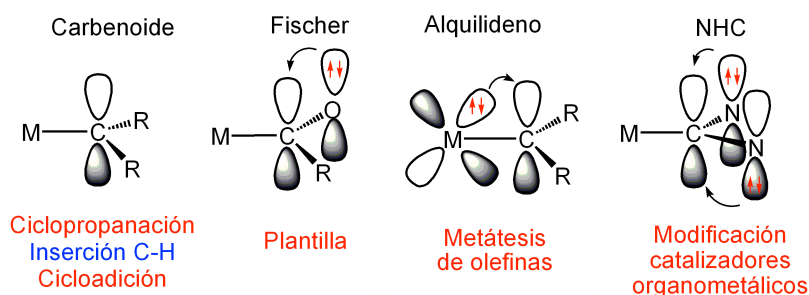
carbenos metálicos más conocidos, los catalizadores de Grubbs para la metátesis de olefinas.<sup>23</sup> La modificación juiciosa de los sustituyentes de estos complejos ha mejorado notablemente tanto la actividad como la selectividad de estos catalizadores. Estos nuevos alquilidenos evolucionados se preparan con gran rendimiento mediante intercambio de los sustituyentes entre un precursor alquilideno y un alqueno (Figura 6e).<sup>24</sup>

Más recientemente, se ha descubierto que derivados alquilideno pueden obtenerse a partir de alquinos y alquinoles mediante reorganización de especies intermedias vinilideno o alenilideno (Figura 6d).<sup>25</sup> Otro equilibrio de gran relevancia en el campo de los carbenos metálicos es la isomería olefina-carbeno (Figura 6f).<sup>26</sup> Se ha propuesto que las especies intermedias son derivados hidruro-alqueno resultantes de la activación C-H de la olefina o de la  $\beta$ -eliminación en alquil carbenos en el sentido opuesto. Generalmente el equilibrio está desplazado hacia el complejo  $\eta^2$ -olefina pero la modificación cuidadosa de los ligandos del metal puede desplazar el equilibrio hacia la forma carbénica. Similarmente, la protonación de especies alqueno también da lugar a derivados carbeno.<sup>27</sup>

#### 4 Transformaciones catalíticas que involucran carbenos metálicos

La gran variedad y diferentes características de los carbenos organometálicos hace que se comporten como potentes iniciadores catalíticos para una miríada de transformaciones orgánicas entre las que se incluyen la inserción en enlaces C-H,<sup>28</sup> ciclopropanación,<sup>29</sup> cicloadiciones<sup>30</sup> o metátesis de olefinas,<sup>12,23</sup> lo que los convierte en importantes efectivos en el arsenal del químico sintético. El diferente grado de estabilidad proporcionado por el metal a la especie carbénica es lo que determina este amplio espectro de reactividad (Figura 7). Por un lado se encuentran los carbenos que interaccionan solo con su orbital  $\sigma$  ocupado manteniendo el  $p_x$  vacío, por lo que son electrófilos muy potentes capaces de reaccionar con enlaces múltiples C-C o incluso enlaces C-H. Estas especies transitorias cercanas a un carbocatión estabilizado se denominan carbenoides. El siguiente tipo de carbeno en nivel de electrofilia serían los carbenos de Fischer.<sup>13</sup> Estas especies se han utilizado principalmente como plantilla sintética aunque más recientemente también en reacciones catalíticas. A continuación se situarían los alquilidenos en la que la estabilización del orbital libre del carbeno proviene de la retrodonación del metal. Dependiendo de los ligandos del metal y el

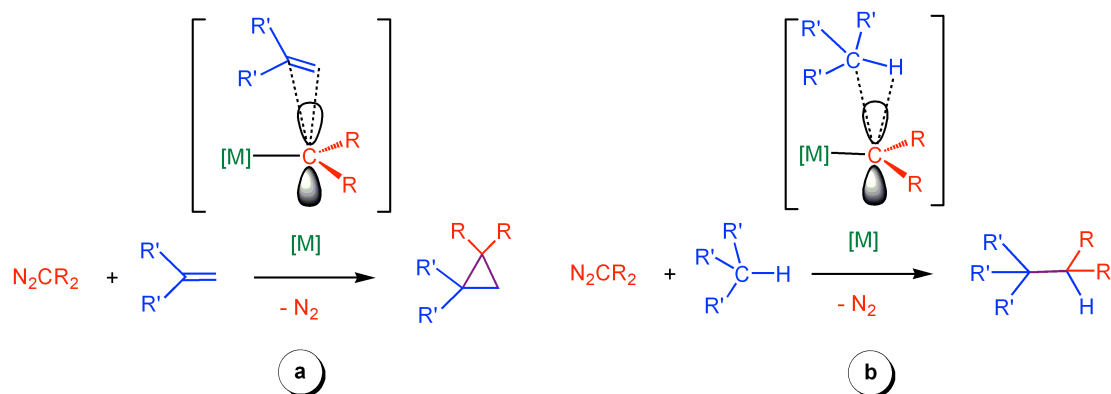
propio metal estas especies presentan carácter electrófilo o principalmente nucleófilo en el carbono carbénico. Su mayor aplicación es la metátesis de olefinas. Finalmente, encontramos los carbenos estables de tipo NHC que aunque generalmente no intervienen directamente en la especie reactiva sus especiales propiedades stereoelectrónicas han propiciado la mejora de la actividad y selectividad de los catalizadores organometálicos para una amplia gama de transformaciones.<sup>15</sup>



**Figura 7.** Carbenos metálicos involucrados en procesos de síntesis orgánica.

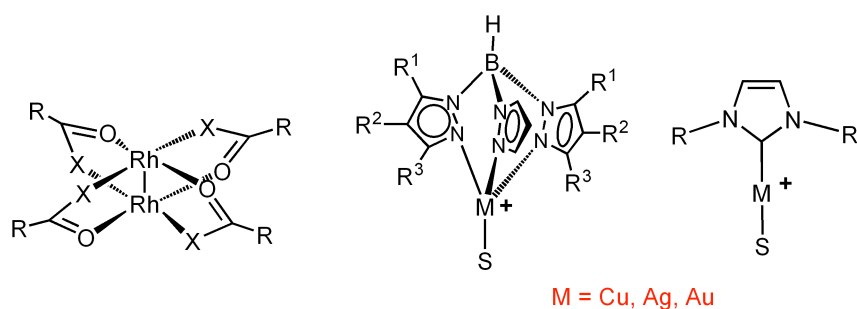
### *Reacciones catalíticas con especies carbenoide*

Los diazocompuestos son precursores de carbeno adecuados para formar especies intermedias de tipo carbenoide muy electrófilas que son capaces de interactuar con los nucleófilos del medio de reacción. La presencia de moléculas con un enlace múltiple C-C da lugar a la formación de derivados ciclopropano o ciclopropeno (Figura 8a). Pero estas especies carbenoide también son capaces de interactuar con la densidad electrónica de un enlace C-H para generar en este caso los productos resultantes de la inserción del carbeno (Figura 8b). Estas especies son raramente detectadas o aisladas del medio de reacción aunque existen algunos ejemplos con cobre.<sup>31</sup>



**Figura 8.** Reacciones de ciclopropanación e inserción C-H.

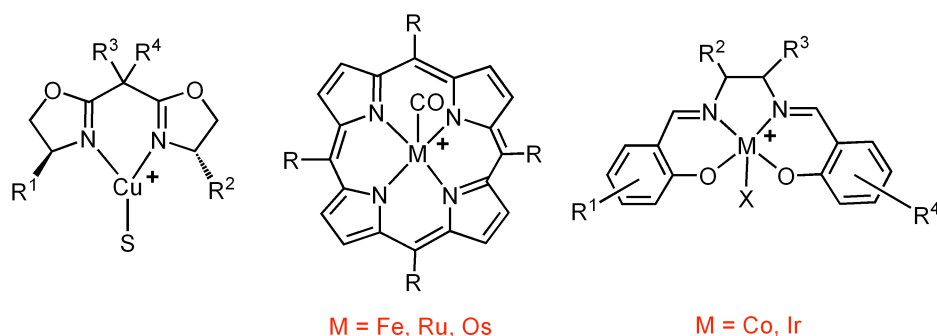
Los catalizadores utilizados en reacciones de inserción C-H se basan principalmente en Rh, Cu, Au (Figura 9). Se han desarrollado catalizadores muy selectivos sobre todo derivados del sistema dinuclear de Rh(II).<sup>32</sup> La inserción se produce manteniendo la configuración del átomo de carbono y depende del tipo de enlace C-H, los terciarios son más reactivos que los secundarios y éstos más reactivos que los primarios. En el estado de transición se produce una especie con cierta carga positiva en el átomo de carbono del sustrato activado por lo que grupos que estabilicen esta carga se verán favorecidos. El efecto estérico del catalizador es muy importante revirtiendo a veces la tendencia general, lo que permite un diseño a la carta de catalizadores para cada caso concreto. La reactividad también depende de los sustituyentes del diazocompuesto. Los grupos atractores aumentan la reactividad pero con una pérdida sensible de la selectividad. La utilización de carbenos con un grupo atractor y otro aromático ha permitido extender la utilización de los catalizadores desde transformaciones intramoleculares a intermoleculares de mayor interés sintético. Recientemente, se ha descrito un sistema capaz de activar incluso metano usando dióxido de carbono supercrítico como disolvente.<sup>33</sup>



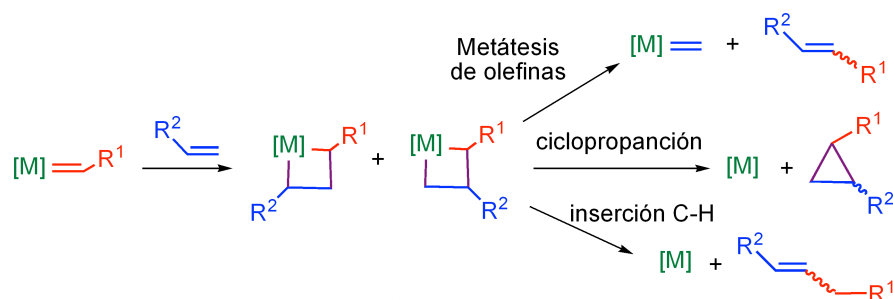
**Figura 9.** Catalizadores para reacciones de inserción C-H.

Generalmente, los complejos que catalizan reacciones de inserción C-H también promueven reacciones de ciclopropanación, en muchos casos de manera competitiva. Se han descrito catalizadores muy eficientes e incluso enantioselectivos basados en Cu, Fe, Ru, Os, Co o Ir con ligandos bis-oxazolona, porfirinas o ligandos salen (Figura 10). Estos compuestos se han soportado en diferentes materiales observándose en ciertos casos la inversión de la selectividad.<sup>34</sup> Especies alquilideno de rutenio aisladas también catalizan la reacción de ciclopropanación. En este caso se propone la formación de una especie metalaciclobutano mediante reacción de cicloadición [2+2], similar a la propuesta en la metátesis de olefinas, que podría evolucionar para dar los productos de

ciclopropanación, metátesis de olefinas o la formal inserción del carbeno en enlace =CH del alqueno (Figura 11).<sup>22f,29b</sup>



**Figura 10.** Catalizadores de ciclopropanación.



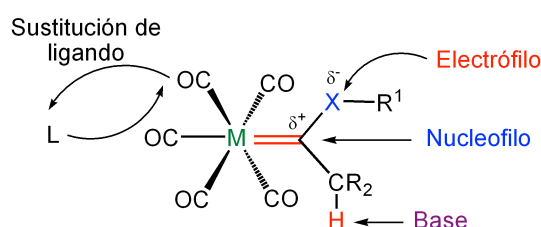
**Figura 11.** Posibles vías de descomposición de las especies metalaciclobutano.

Especies de tipo carbenoide también han sido propuestas en reacciones de ciclación con catalizadores de oro, paladio o platino.<sup>30</sup> Especialmente, ciertos complejos de oro han demostrado su versatilidad para favorecer reacciones de cicloisomerización de eninos, adiciones nucleófilas, hidroaminación de alenos o transformaciones de tipo Nazarov.<sup>35</sup> Aunque se proponen intermedios de tipo carbeno para este tipo de transformaciones, existe cierta controversia sobre si no deberían considerarse más bien como carbocationes estabilizados por el metal.<sup>30,35</sup>

#### *Carbenos de Fischer como plantilla*

Los carbenos típicos de tipo Fischer contienen generalmente un metal del grupo 6 en bajo estado de oxidación y con ligandos  $\pi$ -aceptores como por ejemplo grupos carbonilo. Este tipo de complejos poseen una reactividad muy rica y han demostrado su utilidad en reacciones estequiométricas de acoplamiento carbono-carbono y carbono-heteroátomo (Figura 12). La electrofilia del átomo carbénico le hace susceptible de ataque por nucleófilos mientras que los electrófilos atacan al heteroátomo unido al

carbeno. Como consecuencia de la naturaleza electrófila del carbeno la acidez del protón en posición alfa aumenta por lo que estos complejos promueven condensaciones aldólicas o de tipo Michael. De hecho, se puede considerar el fragmento [M]-C en estos complejos como isolobular de un grupo carbonilo. Esta analogía metal de transición-átomo de oxígeno ha sido propuesta en otros sistemas.<sup>36</sup> Los ligandos carbonilo pueden experimentar reacciones de sustitución lo que confiere mayor control en la esfera de coordinación del metal. Este tipo de complejos promueven reacciones de cicloadición, ciclopropanación o benzanulaciones, además de adiciones de aminas y alcoholes. Recientemente se han descrito reacciones catalíticas que involucran carbenos de Fischer como reactivos,<sup>13c</sup> así como reacciones fotoquímicas interesantes.<sup>37</sup>

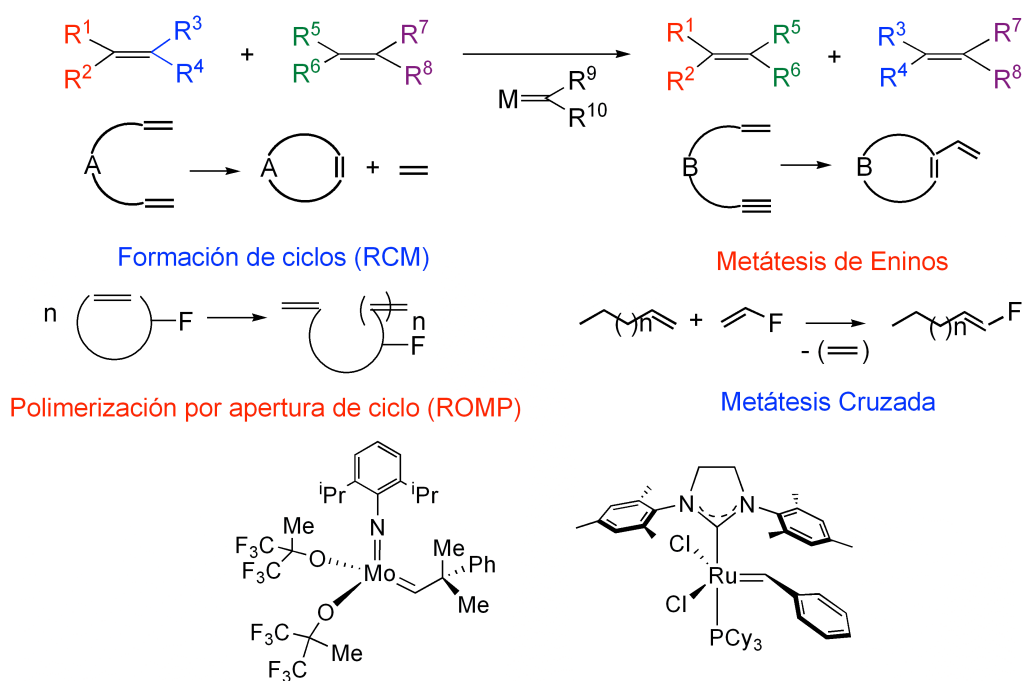


**Figura 12.** Reactividad de los carbenos de Fischer.

### *Metátesis de olefinas promovida por derivados alquilideno*

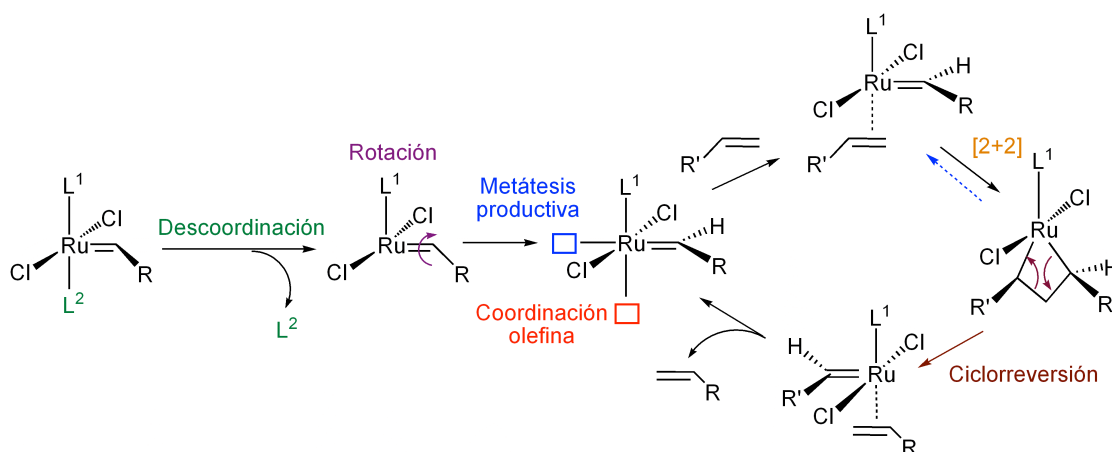
La metátesis de olefinas es, con permiso de las reacciones de inserción C-H, la aplicación más importante de los carbenos metálicos, como ha sido recientemente reconocido por la concesión del premio Nobel de química en 2005.<sup>12,23,24</sup> La reacción, aunque en origen simple (intercambio de sustituyentes entre dos olefinas), es de una gran diversidad sintética dando lugar a ciclaciones, cicloisomerizaciones o polímeros dependiendo de los sustituyentes de las olefinas (Figura 13). Los catalizadores más eficientes están basados en molibdeno y rutenio aunque se han descrito también para otros metales.<sup>37</sup> Generalmente, los complejos de molibdeno son más activos que los basados en rutenio pero también más sensibles a los grupos funcionales de los sustratos, aunque debido a la gran evolución de estos catalizadores existen especies muy activas basadas en rutenio y otras bastante tolerantes a los grupos funcionales basadas en molibdeno.





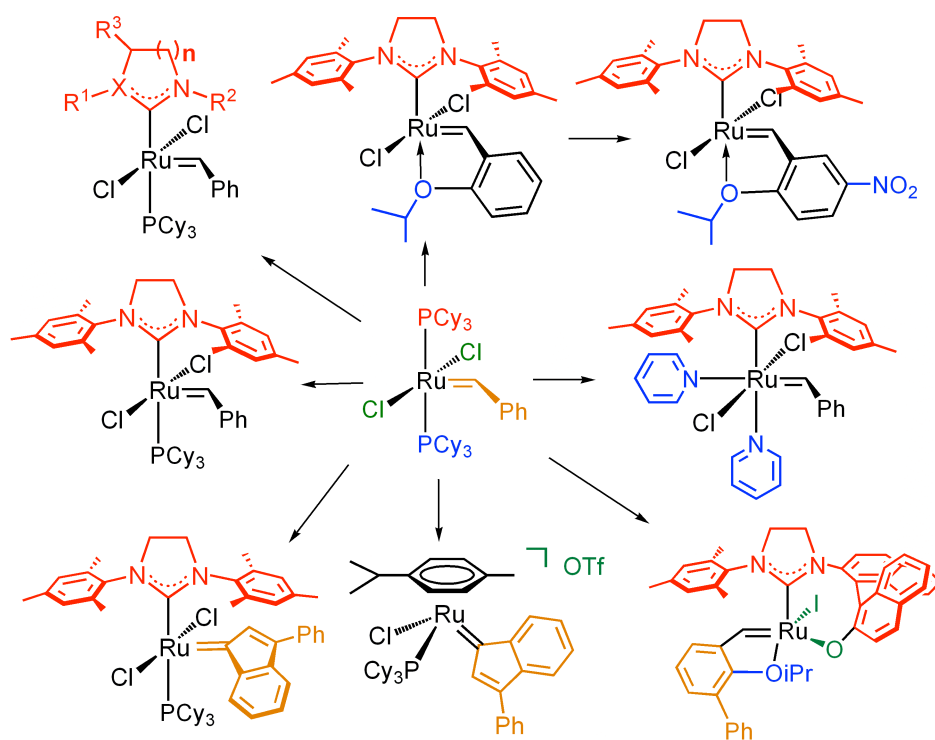
**Figura 13.** Metátesis de olefinas, tipos de reacciones y catalizadores.

La reacción de metátesis de olefinas es un claro ejemplo donde el estudio en profundidad de los mecanismos implicados ha permitido el diseño molecular de nuevos catalizadores evolucionados más eficientes y selectivos. Fue Chauvin quien propuso por primera vez la formación de especies metalociclobutano como intermedios formados vía una reacción de cicloadición [2+2] entre el metal-alquilideno y la  $\eta^2$ -olefina coordinada al metal.<sup>38</sup> En el caso de los catalizadores de tipo Grubbs, y a pesar de ser especies insaturadas de 16 electrones, la etapa de iniciación consiste en la descoordinación de un ligando para generar la especie activa de 14 electrones. Es muy importante que la especie activa sea un intermedio insaturado con dos vacantes coordinativas ya que una es necesaria para la coordinación de la olefina y la segunda para que la ciclorreversión del metalacilo sea productiva y no regenere solamente los productos de partida (Figura 14).



**Figura 14.** Mecanismo para la metátesis de olefinas con los catalizadores de Grubbs.

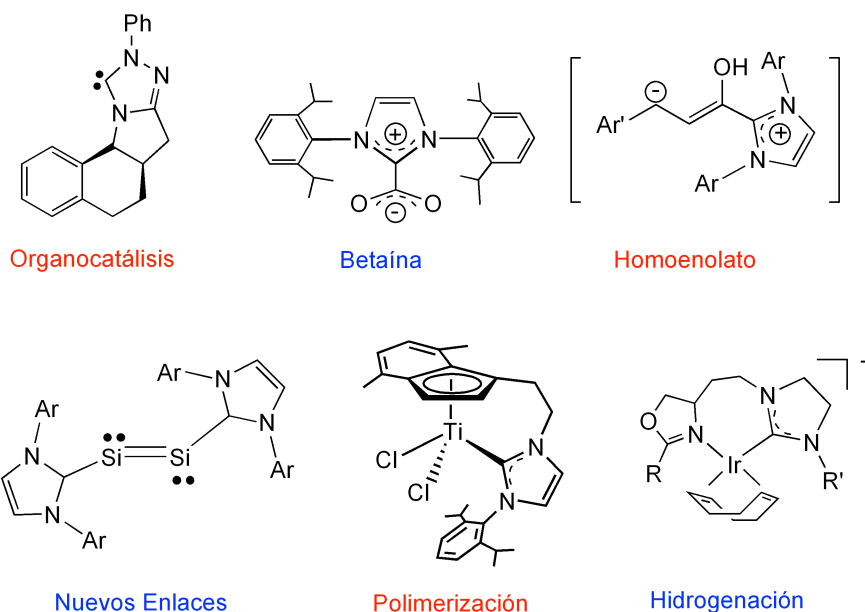
El gran desarrollo experimentado por los catalizadores de tipo Grubbs es debido a la facilidad de modificación de los ligandos (Figura 15). Una de las modificaciones principales consiste en intercambiar una fosfina por un ligando NHC. Aunque en un principio se postuló que el mayor efecto *trans* del carbeno NHC frente a una fosfina favorecería la descoordinación de la otra fosfina para generar la especie activa, se comprobó que sorprendentemente la etapa de iniciación con los ligandos NHC era más lenta. Sin embargo, se comprobó que la etapa de propagación era más rápida con lo que la velocidad global aumentaba al intercambiar una fosfina por un carbeno.<sup>40</sup> Visto que la etapa de iniciación consistía en la descoordinación de un ligando, la siguiente modificación fue sustituir la segunda fosfina por un ligando más lábil, en este caso un grupo éter unido al anillo aromático del alquilideno.<sup>24a,b</sup> La labilidad del grupo éter puede aumentarse añadiendo grupos atractores en posición *para*.<sup>24c</sup> La sustitución de fosfina por dos ligandos piridina también aumenta la actividad catalítica pero además es un complejo de partida útil para posteriores modificaciones.<sup>41</sup> También se ha modificado el ligando bencilideno sustituyéndolo por un grupo indenilideno mucho más robusto, así como los ligandos cloruro.<sup>25a,d,42</sup>



**Figura 15.** Modificaciones de los catalizadores de tipo Grubbs.

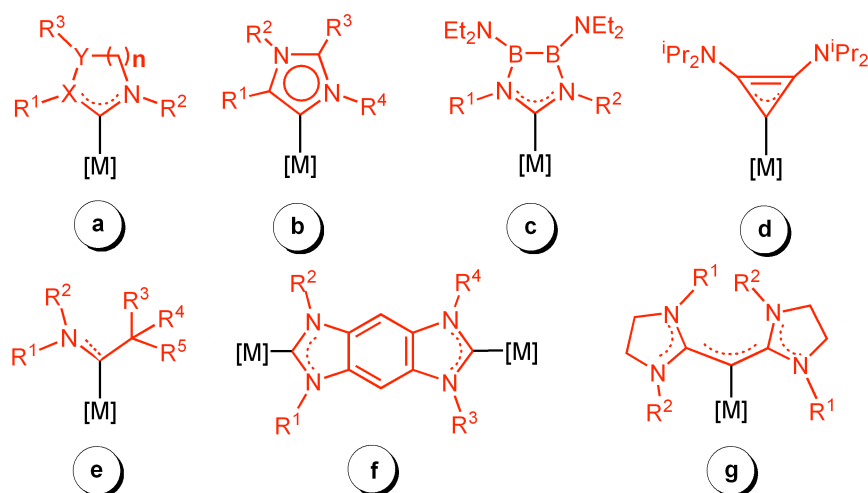
#### *Carbenos N-heterocíclicos como ligandos auxiliares de catalizadores*

Desde el aislamiento por Arduengo y colaboradores de un carbeno N-heterocíclico de tipo imidazol,<sup>3b</sup> el desarrollo y aplicaciones de este tipo de moléculas ha sido exponencial.<sup>15</sup> Este tipo de ligandos se comportan como ligandos  $\sigma$ -dadores típicos, aunque recientemente se han estudiado su capacidad para actuar como  $\pi$ -aceptores<sup>43</sup> e incluso como  $\pi$ -dadores.<sup>44</sup> En general, los ligandos NHC son más básicos y más voluminosos que las fosfinas lo que unido a la facilidad en su síntesis y la gran capacidad de modulación de los sustituyentes, hace que se hayan utilizado como sustitutos de éstas, tanto en química estequiométrica como catalítica (Figura 16). Además estos derivados se han aplicado con éxito como organocalizadores.<sup>45</sup> También son capaces de estabilizar homoenolatos<sup>46</sup> o incluso enlaces múltiples entre átomos de los grupos principales.<sup>47</sup>



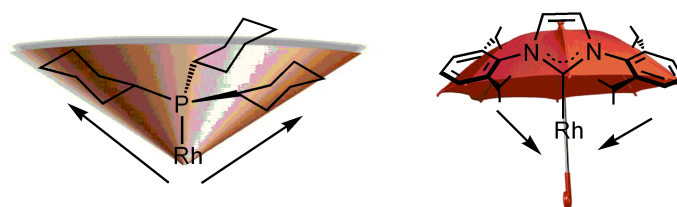
**Figura 16.** Aplicaciones de los carbenos NHC.

La irrupción de este tipo de ligandos ha revolucionado la catálisis organometálica. Su gran capacidad electrodonadora favorece la estabilización de intermedios de reacción. La fácil modulación de sus sustituyentes permite el diseño a la carta para un tipo de catálisis concreta. Se han descrito complejos con ligandos NHC muy variados. Por ejemplo, se puede cambiar el tipo de heteroátomo que estabiliza el carbeno, aumentar la longitud del ciclo o utilizar heterociclos fusionados (Figura 17a). La coordinación de especies de tipo imidazol se puede producir por el carbono-4 lo que se conoce como carbenos atípicos en los que aumenta la capacidad electrodonadora (Figura 17b).<sup>48</sup> También se han descrito carbenos con átomos de los grupos principales<sup>49</sup> o especies acíclicas estabilizadas por un solo heteroátomo o incluso por ninguno (Figura 17c,d,e).<sup>50</sup> Los carbenos pueden formar complejos de tipo pinza o puentes entre los que destacan los de tipo Jano coordinados a dos metales, con lo que son potencialmente interesantes en reacciones tándem (Figura 17f).<sup>51</sup> Puesto que los carbenos se estabilizan por cesión de densidad electrónica desde un átomo nucleófilo y acabamos de ver que las especies NHC son muy nucleófilas, se podría pensar en la estabilización de carbenos por otros carbenos. Esta quimera se ha llevado a cabo pudiéndose caracterizar complejos de oro con carbenos estabilizados por NHCs conocidos como “carbodicarbenos” (Figura 17g).<sup>52</sup>



**Figura 17.** Diferentes tipos de carbenos NHC.

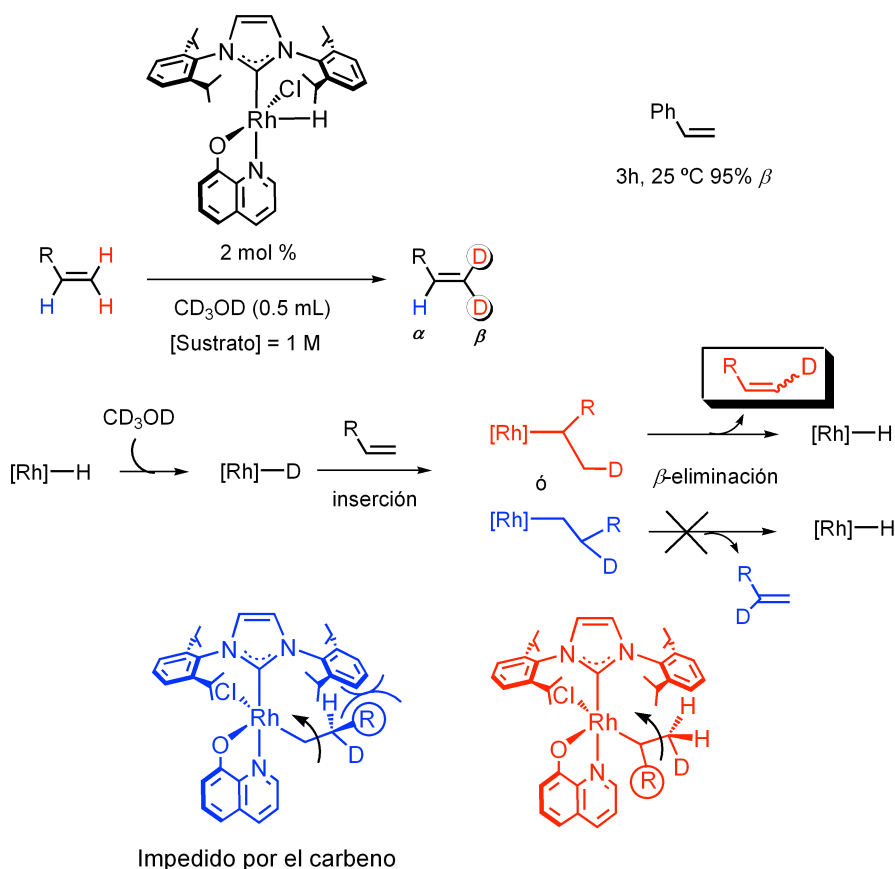
Los ligandos NHC no son solo importantes por sus propiedades electrónicas sino que la influencia estérica que ejercen es fundamental sobre todo para controlar la selectividad de la transformación.<sup>53</sup> El efecto estérico de estos ligandos es muy diferente al de las fosfinas (Figura 18). Contrariamente a las fosfinas voluminosas donde los sustituyentes se disponen de forma cónica, en el ligando NHC los sustituyentes se disponen en forma de paraguas protegiendo más las posiciones axiales del complejo y con ello ejerciendo más influencia sobre la especie catalítica.



**Figura 18.** Comparación del efecto estérico de un carbeno NHC y una fosfina.

Recientemente, nuestro grupo de investigación ha presentado un catalizador Rh-NHC capaz de deuteroar regioselectivamente las posiciones *beta* de olefinas aromáticas manteniendo intactas tanto las posiciones aromáticas como el átomo de hidrógeno en posición *alfa* (Figura 19).<sup>54</sup> El efecto estérico del ligando NHC se ha propuesto como el responsable para dicha selectividad. La inserción de la olefina en el ligando deuteroar puede dar lugar a dos ligandos alquilo, lineal y ramificado. Para que el intercambio H/D sea efectivo es necesario la rotación de este ligando y posterior  $\beta$ -eliminación. Sin esa

rotación se regeneraría la olefina de partida. Los sustituyentes del carbeno dificultan en mayor medida la rotación del alquilo lineal frente a la rotación del alquilo ramificado por lo que se obtiene selectivamente la olefina con la posición *beta* deuterada.



**Figura 19.** Deuteración selectiva catalizada por complejos Rh-NHC.

#### 4 Conclusiones

La conjunción de carbenos y metales de transición es un excelente tándem para el desarrollo de catalizadores eficaces. Las interacciones metal carbeno son muy variadas y dependen tanto de los sustituyentes del carbeno, sobre todo si son heteroátomos, como de la densidad electrónica y estado de oxidación del metal. La estabilización aportada por el metal al carbeno modula la electrofilia del mismo determinando a su vez la estabilidad y con ello la actividad catalítica. Este diferente comportamiento convierte a los carbenos metálicos en excelentes catalizadores para una miríada de transformaciones entre las que se incluyen reacciones de inserción C-H, cicloadiciones, ciclopropanación o metátesis de olefinas. La facilidad de modulación tanto de los sustituyentes del carbeno como de los ligandos del metal abre nuevas oportunidades de mejora para reacciones ya estudiadas y para el descubrimiento de otras nuevas.

## Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento a los Catedráticos Luis Oro y Jesús Pérez-Torrente por su apoyo constante y también, junto a los doctores Ramón Macías y Miguel Baya, por sus comentarios sobre el manuscrito original. Asimismo quisiera agradecer al Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto CTQ2010-15221) y a la Fundación ARAID del Gobierno de Aragón (programa Jóvenes Investigadores) por la financiación recibida.

## Referencias

- (1) (a) D. Bourissou, O. Guerret, F. P. Gabbaï, G. Bertrand, *Chem. Rev.* **2000**, *100*, 39. (b) P. de Frémont, N. Marion, S. P. Nolan, *Coord. Chem. Rev.* **2009**, *253*, 862.
- (2) (a) M. Herrman, *Justus Liebigs Ann. Chem.* **1855**, *95*, 211. (b) H. Staudinger, O. Kupfer, *Ver. Dtsch. Chem. Ges.* **1912**, *45*, 401. (c) W. von E. Doering, A. K. Hoffmann, *J. Am. Chem. Soc.* **1954**, *76*, 6162.
- (3) (a) A. Igau, H. Grützmacher, A. Baceiredo, G. Bertrand, *J. Am. Chem. Soc.* **1988**, *110*, 6463. (b) A. J. Arduengo III, R. L. Harlow, M. Kline, *J. Am. Chem. Soc.* **1991**, *113*, 361.
- (4) E. Iwamoto, K. Hirai, H. Tomioka, *J. Am. Chem. Soc.* **2003**, *125*, 14664.
- (5) (a) R. R. Schrock, *Chem. Rev.* **2002**, *102*, 145. (b) D. J. Mindiola, B. C. Bailey, F. Basuli, *Eur. J. Inorg. Chem.* **2006**, 3135. (c) M. A. Esteruelas, A. M. López, M. Oliván, *Coord. Chem. Rev.* **2007**, *251*, 795. (d) P. L. Arnold, *Nat. Chem.* **2009**, *1*, 29. (e) H. Werner, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2010**, *49*, 4714. (f) S. T. Liddle, D. P. Mills, A. J. Wooles, *Chem. Soc. Rev.* **2011**, *40*, 2164.
- (6) (a) J. W. Herndon, *Coord. Chem. Rev.* **2002**, *227*, 1. (b) J. W. Herndon, *Coord. Chem. Rev.* **2003**, *243*, 3. (c) J. W. Herndon, *Coord. Chem. Rev.* **2004**, *248*, 3. (d) J. W. Herndon, *Coord. Chem. Rev.* **2005**, *249*, 999. (e) J. W. Herndon, *Coord. Chem. Rev.* **2006**, *250*, 1889. (f) J. W. Herndon, *Coord. Chem. Rev.* **2007**, *251*, 1158. (g) J. W. Herndon, *Coord. Chem. Rev.* **2009**, *253*, 83. (h) J. W. Herndon, *Coord. Chem. Rev.* **2009**, *253*, 1517. (i) J. W. Herndon, *Coord. Chem. Rev.* **2010**, *254*, 103. (j) J. W. Herndon, *Coord. Chem. Rev.* **2011**, *255*, 3.
- (7) E. O. Fischer, A. Maasböl, *Angew. Chem., Int. Ed. Engl.* **1964**, *3*, 580.
- (8) R. R. Schrock, *J. Am. Chem. Soc.* **1974**, *96*, 6796.
- (9) P. W. Jolly, R. Pettit, *J. Am. Chem. Soc.* **1966**, *88*, 5044.
- (10) D. Astruc, *New J. Chem.* **2005**, *29*, 42.
- (11) (a) H. W. Wanzlick, *Angew. Chem., Int. Ed. Engl.* **1962**, *1*, 75. (b) A. J. Arduengo III, J. R. Goerlich, R. Krafczyk, W. J. Marshall, *Angew. Chem. Int. Ed.* **1998**, *37*, 1963. (c) W. Kirmse, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2010**, *49*, 8798.
- (12) (a) R. R. Schrock, A. H. Hoveyda, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2003**, *42*, 4592. (b) S. J. Meek, R. V. O'Brien, J. Llaveria, R. R. Schrock, A. H. Hoveyda, *Nature* **2011**, *471*, 461.
- (13) (a) E. O. Fischer, A. Maasböl, *Chem. Ber.* **1967**, *100*, 2445. (b) J. Barluenga, J. Santamaría, M. Tomás, *Chem. Rev.* **2004**, *104*, 2259. (c) M. Gómez-Gallego, M. J.

- Mancheño, M. A. Sierra, *Acc. Chem. Res.* **2005**, *38*, 44. (d) K. H. Dötz, J. Stendel, Jr, *Chem. Rev.* **2009**, *109*, 3227.
- (14)(a) C. Bruneau, P. H. Dixneuf, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2006**, *45*, 2176. (b) E. Bustelo, M. Jiménez-Tenorio, M. C. Puerta, P. Valerga, *Organometallics* **2007**, *26*, 4300.
- (15)(a) D. J. Cardin, B. Çetinkaya, M. F. Lappert, Lj. Manojlović-Muir, K. W. Muir, *J. Chem. Soc. D* **1971**, 400. (b) W. A. Herrmann, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2002**, *41*, 1290. (c) J. A. Mata, M. Poyatos, E. Peris, *Coord. Chem. Rev.* **2007**, *251*, 841. (d) S. Díez-González, S. Marion, S. P. Nolan, *Chem. Rev.* **2009**, *109*, 3612.
- (16) J. C. Y. Lin, R. T. W. Huang, C. S. Lee, A. Bhattacharyya, W. S. Hwang, I. J. B. Lin, *Chem. Rev.* **2009**, *109*, 3561.
- (17)(a) R. A. Michelin, L. Zanotto, D. Braga, P. Sabatino, R. J. Angelici, *Inorg. Chem.* **1988**, *27*, 85. (b) F. E. Hahn, V. Langenhahn, N. Meier, T. Lügger, W. P. Fehlhammer, *Chem. Eur. J.* **2003**, *9*, 705.
- (18)(a) M. A. Esteruelas, F. J. Fernández-Álvarez, E. Oñate, *J. Am. Chem. Soc.* **2006**, *128*, 13044. (b) E. Álvarez, S. Conejero, P. Lara, J. A. López, M. Paneque, A. Petronilho, M. L. Poveda, D. del Rio, O. Serrano, E. Carmona, *J. Am. Chem. Soc.* **2007**, *129*, 14130.
- (19)(a) A. T. Patton, C. E. Strouse, C. B. Knobler, J. A. Gladysz, *J. Am. Chem. Soc.* **1983**, *105*, 5804 (b) M. D. Fryzuk, P. A. McNeil, S. J. Retting, *J. Am. Chem. Soc.* **1985**, *107*, 6708. (c) T. B. Gunnoe, P. S. White, J. L. Templeton, L. Casarrubios, *J. Am. Chem. Soc.* **1997**, *119*, 3171. (d) D. Gusev, A. J. Lough, *Organometallics* **2002**, *21*, 2601. (e) B. C. Bailey, F. Basuli, J. C. Huffman, D. J. Mindiola, *Organometallics* **2006**, *25*, 3963. (f) W. Weng, S. Parkin, O. V. Ozerov, *Organometallics* **2006**, *25*, 5345. (g) R. Castarlenas, M. A. Esteruelas, E. Oñate, *Organometallics* **2007**, *26*, 3082. (h) W. Zhang, K. Nomura, *Organometallics* **2008**, *27*, 6400.
- (20)(a) S. M. Rocklage, R. R. Schrock, M. R. Churchill, H. J. Wasserman, *Organometallics* **1982**, *1*, 1332. (b) E. Bannwart, H. Jacobsen, F. Furno, H. Berke, *Organometallics* **2000**, *19*, 3605. (c) K. G. Caulton, *J. Organomet. Chem.* **2001**, *617-618*, 56. (d) T. Bolaño, R. Castarlenas, M. A. Esteruelas, F. J. Modrego, E. Oñate, *J. Am. Chem. Soc.* **2005**, *127*, 11184.
- (21)(a) M. Brookhart, G. O. Nelson, *J. Am. Chem. Soc.* **1977**, *99*, 6099. (b) S. Brandt, P. Helquist, *J. Am. Chem. Soc.* **1977**, *99*, 6473. (c) V. Gerchais, D. Astruc, *J. Chem. Soc., Chem. Commun.* **1985**, 835. (d) V. Mahias, S. Cron, L. Toupet, C. Lapinte, *Organometallics* **1996**, *15*, 5399
- (22)(a) W. A. Herrmann, *Angew. Chem., Int. Ed. Engl.* **1974**, *13*, 599. (b) P. Schwab, N. Mahr, J. Wolf, H. Werner, *Angew. Chem., Int. Ed. Engl.* **1993**, *32*, 1480. (c) P. Schwab, R. H. Grubbs, J. W. Ziller, *J. Am. Chem. Soc.* **1996**, *118*, 100. (d) B. F. Straub, P. Hofmann, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2001**, *40*, 1288. (e) R. Cohen, B. Rybtchinski, M. Gandelman, Haim Rozenberg, J. M. L. Martin, D. Milstein, *J. Am. Chem. Soc.* **2003**, *125*, 6532. (f) L. Palacios, X. Miao, A. Di Giuseppe, P. Simon, C. Cunchillos, R. Castarlenas, J. J. Pérez-Torrente, F. J. Lahoz, P. H. Dixneuf, L. A. Oro, *Organometallics* **2011**, *30*, 5208.
- (23)(a) R. H. Grubbs, *Tetrahedron* **2004**, *60*, 7171. (b) G. C. Vougioukalakis, R. H. Grubbs, *Chem. Rev.* **2010**, *32*, 1746.
- (24)(a) S. B. Garber, J. S. Kingsbury, B. L. Gray, A. H. Hoveyda, *J. Am. Chem. Soc.* **2000**, *122*, 8168. (b) S. Gessler, S. Randl, S. Blechert, *Tetrahedron Lett.* **2000**, *41*, 9973. (c) K. Grela, S. Harutyunyan, A. Michrowska, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2002**, *41*, 4038. (d) P. E. Romero, W. E. Piers, R. McDonald, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2004**, *43*, 6161. (e) C. Slugovc, D. Burtscher, F. Stelzer, K. Mereiter *Organometallics* **2005**, *24*, 2255. (f) A.



- Ben-Asuly, E. Tzur, C. E. Diesendruck, M. Sigalov, I. Goldberg, N. G. Lemcoff, *Organometallics* **2008**, *27*, 811.
- (25)(a) A. Fürstner, O. Guth, A. Düffels, G. Seidel, M. Liebl, B. Gabor, M. Mynott, *Chem. Eur. J.* **2001**, *7*, 4811. (b) R. Castarlenas, M. Eckert, P. H. Dixneuf, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2005**, *45*, 2576. (c) T. B. Wen, W. Y. Hung, H. H. Y. Sung, I. D. Williams, G. Jia, *J. Am. Chem. Soc.* **2005**, *127*, 2856. (d) R. Castarlenas, C. Vovard, C. Fischmeister, P. H. Dixneuf, *J. Am. Chem. Soc.* **2006**, *128*, 4079. (e) M. Paneque, M. L. Poveda, N. Rendon, K. Mereiter, *Organometallics* **2009**, *28*, 172.
- (26)(a) C. Roger, G. S. Bodner, W. G. Hatton, J. A. Gladysz, *Organometallics* **1991**, *10*, 3266. (b) F. M. Alías, M. L. Poveda, M. Sellin, E. Carmona, *J. Am. Chem. Soc.* **1998**, *120*, 5816. (c) O. V. Ozerov, L. A. Watson, M. Pink, K. G. Caulton, *J. Am. Chem. Soc.* **2003**, *125*, 9604. (d) K. F. Hirsekorn, A. S. Veige, M. P. Marshak, Y. Koldobskaya, P. T. Wolczanski, T. R. Cundari, E. B. Lobkovsky, *J. Am. Chem. Soc.* **2005**, *127*, 4809. (e) S. Conejero, M. Paneque, M. L. Poveda, L. L. Santos, E. Carmona, *Acc. Chem. Res.* **2010**, *43*, 572.
- (27)(a) M. P. Gamasa, J. Gimeno, B. Martín-Vaca, *Organometallics* **1998**, *17*, 3707. (b) J. D. E. T. Wilton-Ely, P. J. Pogorzelec, S. J. Honarkhah, D. H. Reid, D. A. Tocher, *Organometallics* **2005**, *24*, 2862. (c) R. Castro-Rodrigo, M. A. Esteruelas, S. Fuertes, A. M. López, S. Mozo, E. Oñate, *Organometallics* **2009**, *28*, 5941.
- (28)(a) H. M. L. Davies, J. R. Manning, *Nature* **2008**, *451*, 417. (b) M. M. Díaz-Requejo, P. J. Pérez, *Chem. Rev.* **2008**, *108*, 3379. (c) M. P. Doyle, R. Duffy, M. Ratnikov, L. Zhou, *Chem. Rev.* **2010**, *110*, 704.
- (29)(a) H. Lebel, J.-F. Marcoux, C. Molinaro, A. B. Charette, *Chem. Rev.* **2003**, *93*, 977. (b) G. Maas, *Chem. Soc. Rev.* **2004**, *33*, 183. (c) H. Pellissier, *Tetrahedron* **2008**, *64*, 7041. (d) A. Caballero, A. Prieto, M. M. Díaz-Requejo, P. J. Pérez, *Eur. J. Inorg. Chem.* **2009**, 1137.
- (30)(a) Fürstner, A. Davies, P. W. *Angew. Chem. Int. Ed.* **2007**, *46*, 3410. (b) E. Jiménez-Nuñez, A. M. Echavarren *Chem. Rev.* **2008**, *108*, 3326. (c) D. Benitez, N. D. Shapiro, E. Tkatchouk, Y. M. Wang, W. A. Goddard III, F. D. Toste, *Nat. Chem.* **2009**, *1*, 482. (d) E. Soriano, J. Marco-Contelles, *Acc. Chem. Res.* **2009**, *42*, 1027. (e) D. Garayalde, C. Nevado, *Beilstein J. Org. Chem.* **2011**, *7*, 767. (f) N. M. G. Franssen, A. J. C. Walters, J. N. H. Reek, B. de Bruin, *Catal. Sci. Technol.* **2011**, *1*, 153.
- (31)(a) B. F. Straub, P. Hofmann, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2001**, *40*, 1288. (b) Kirmse, W. *Angew. Chem. Int. Ed.* **2003**, *42*, 1088. (c) P. Hofmann, I. V. Shishkov, F. Rominger, *Inorg. Chem.* **2008**, *47*, 11755.
- (32)H. M. L. Davies, D. Morton, *Chem. Soc. Rev.* **2011**, *40*, 1857.
- (33)A. Caballero, E. Despagnet-Ayoub, M. M. Díaz-Requejo, A. Díaz-Rodríguez, M. E. González-Nuñez, R. Mello, B. K. Muñoz, W.-S. Ojo, G. Asensio, M. Etienne, P. J. Pérez, *Science* **2011**, *332*, 835.
- (34)J. M. Fraile, J. I. García, C. I. Herrerias, J. A. Mayoral, E. Pires, *Chem. Soc. Rev.* **2009**, *38*, 695.
- (35)(a) C. Nieto-Oberhuber, S. López, A. M. Echavarren, *J. Am. Chem. Soc.* **2005**, *127*, 6178. (b) J. H. Lee, F. D. Toste, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2007**, *46*, 912. (c) B. Trillo, F. López, M. Gulías, L. Castedo, J. L. Mascareñas, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2008**, *47*, 951.
- (36)(a) A. Krapp, G. Frenking, *J. Am. Chem. Soc.* **2008**, *130*, 16646. (b) T. Bolaño, R. Castarlenas, M. A. Esteruelas, E. Oñate, *J. Am. Chem. Soc.* **2009**, *131*, 2064.
- (37)I. Fernández, F. P. Cossio, M. A. Sierra, *Acc. Chem. Res.* **2011**, *44*, 479.

- (38)(a) R. Castarlenas, M. A. Esteruelas, E. Oñate, *Organometallics* **2005**, *24*, 4343. (b) C. A.-M. Leduc, A. Salameh, D. Soulivong, M. Chabanas, J.-M. basset, C. Copéret, X. Solans-Monfort, E. Clot, O. Eisenstein; V. P. W. Böhm, M. Röper, *J. Am. Chem. Soc.* **2008**, *130*, 6288.
- (39) J. L. Hérisson, Y. Chauvin, *Makromol. Chem.* **1971**, *141*, 161.
- (40) M. S. Sanford, J. A. Love, R. H. Grubbs, *J. Am. Chem. Soc.* **2001**, *123*, 6543.
- (41) M. S. Sanford, J. A. Love, R. H. Grubbs, *Organometallics* **2001**, *20*, 5314.
- (42) R. Castarlenas, P. H. Dixneuf, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2003**, *42*, 4524.
- (43) M. S. Sanderson, J. W. Kamplain, C. W. Bielawski, *J. Am. Chem. Soc.* **2006**, *128*, 16514.
- (44) N. M. Scott, R. Dorta, E. D. Stevens, A. Correa, L. Cavallo, S. P. Nolan, *J. Am. Chem. Soc.* **2005**, *127*, 3516.
- (45) D. Enders, O. Niemeir, A. Hense, *Chem. Rev.* **2006**, *107*, 5606.
- (46) S. S. Sohn, E. L. Rosen, J. W. Bode, *J. Am. Chem. Soc.* **2004**, *126*, 14370.
- (47)(a) Y. Wang, Y. Xie, P. Wei, R. B. King, H. F. Schaeter III, P. von R. Schleyer, G. H. Robinson, *Science* **2008**, *321*, 1069. (b) R. Wolf, W. Uhl, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2009**, *48*, 6774.
- (48) O. Schuster, L. Yang, H. G. Raubenheimer, M. Albrecht, *Chem. Rev.* **2009**, *109*, 3445.
- (49)(a) E. Despagnet-Ayoub, R. H. Grubbs, *J. Am. Chem. Soc.* **2004**, *126*, 10198. (b) K. E. Krahulic, G. D. Enright, M. Parvez, R. Roesler, *J. Am. Chem. Soc.* **2005**, *127*, 4142.
- (50)(a) V. Lavallo, Y. Canac, B. Donnadiou, W. W. Schoeller, G. Bertrand, *Science* **2006**, *312*, 722. (b) G. D. Frey, V. Lavallo, B. Donnadiou, W. W. Schoeller, G. Bertrand, *Science* **2007**, *316*, 439.
- (51)(a) D. M. Khramov, A. J. Boydston, C. W. Bielawski, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2006**, *45*, 6186. (b) E. Mas-Marzá, J. A. Mata, E. Peris, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2007**, *46*, 3729.
- (52)(a) C. A. Dyker, V. Lavallo, B. Donnadiou, G. Bertrand, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2008**, *47*, 3206. (b) A. Fürstner, M. Alcarazo, R. Goddard, C. W. Lehmann *Angew. Chem. Int. Ed.* **2008**, *47*, 3210. (c) O. Kaufhold, F. E. Hahn, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2008**, *47*, 4057. (d) M. Alcarazo, R. M. Suárez, R. Goddard, A. Fürstner, *Chem. Eur. J.* **2010**, *16*, 9746.
- (53)(a) A. C. Hillier, W. J. Sommer, B. S. Yong, J. L. Petersen, L. Cavallo, S. P. Nolan, *Organometallics* **2003**, *22*, 4322. (b) M. Yamashita, K. Goto, T. Kawashima, *J. Am. Chem. Soc.* **2005**, *127*, 7294. (c) A. Fürstner, M. Alcarazo, H. Krause, C. W. Lehmann, *J. Am. Chem. Soc.* **2007**, *129*, 1676. (d) F. Glorius, *Acc. Chem. Res.* **2008**, *41*, 1523. (e) P. Liu, J. Montgomery, K. N. Houk, *J. Am. Chem. Soc.* **2011**, *133*, 6956.
- (54) A. Di Giuseppe, R. Castarlenas, J. J. Pérez-Torrente, F. J. Lahoz, V. Polo, L. A. Oro, *Angew. Chem. Int. Ed.* **2011**, *50*, 3938.



# Eventos Tectono-Mágmaticos Alpinos en el Registro Geológico de los Pirineos: Inferencias sobre la Evolución del Manto Superior en una Zona Activa.

Enrique Arranz, Marceliano Lago, Carlos Galé, Teresa Ubide, Andrés Pocoví, Patricia Larrea y Pablo Tierz

Departamento de Ciencias de la Tierra

Universidad de Zaragoza - Facultad de Ciencias, 50009, Zaragoza, Spain.

*Premio a la Investigación de la Academia 2011. Sección de Naturales*

## **Abstract**

The geological record of the Pyrenees includes igneous rocks generated in three main tectono-magmatic events during the Alpine cycle: Permian (transitional-alkaline), late Triassic (tholeiitic) and Cretaceous (alkaline) magmatisms. The geochemical signature of the mantle involved in the genesis of each of these magmatisms suggest a dominant influence of the enrichment related to the subduction of oceanic lithosphere during the Variscan orogeny, which is significant in the Permian and Triassic magmatisms, whereas the composition of the Cretaceous magmatism suggests the upwelling of asthenospheric, undepleted mantle as the Pyrenean crust was extremely thinned during the opening of the Bay of Biscay. These igneous rocks preserve in their geochemical composition some of the geochemical modifications added to the upper mantle in previous events allowing for a evolutionary study of the lithospheric mantle under the Pyrenean structure. The geochemical footprint of each of these tectono-magmatic events can be identified in the subsequent magmatisms, supporting the persistence of these geochemical anomalies to long periods of time (>200 Ma) and the progressive increase of upper mantle heterogeneity under active areas.

## **1 Introducción**

La cordillera pirenaica, tal como la conocemos en la actualidad es una cadena montañosa reciente, desde un punto de vista geológico, ya que su construcción principal tuvo lugar desde finales del Cretácico superior hasta inicios del Mioceno (84-24 Ma, Capote et al., 2002; Srivastava et al., 1990). Pero su historia es mucho más compleja y

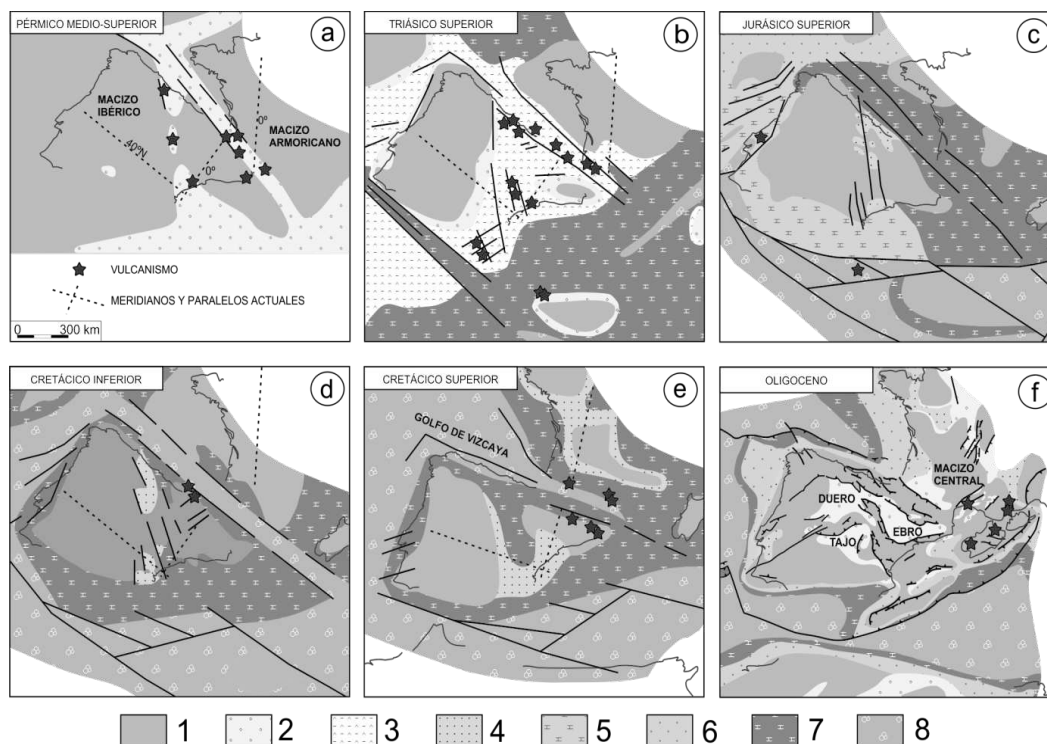
se puede afirmar que, realmente, la estructura geológica que vemos y estudiamos actualmente son los Pirineos más recientes, en los que podemos encontrar los datos para reconstruir, al menos parcialmente, los principales eventos que han intervenido en la configuración de los materiales y de la cordillera actual, considerados a escala de corteza terrestre y las evidencias de otros “pirineos” anteriores.

Uno de los principales caracteres geológicos de la cadena pirenaica es su especial situación, jalonando de modo aproximado el límite previo a la etapa compresiva alpina, entre la placa europea y la microplaca ibérica, configurada como tal durante la orogenia Varisca, que alcanzó su clímax al final de la era Paleozoica (hace aproximadamente 300 Ma). Esta particular situación permite entender porque esta zona ha actuado como una zona especialmente activa, no solo desde la configuración de la microplaca ibérica sino también con anterioridad, como se puede deducir, entre otros, de los estudios tectónicos, petrológicos y geoquímicos. El presente trabajo pretende aproximarse, de modo integrado, a la historia y evolución durante el ciclo alpino de este particular contexto geológico y del manto terrestre subyacente, a partir de los estudios realizados sobre rocas ígneas.

## **2 Evolución de la microplaca ibérica durante el ciclo alpino.**

La actual península ibérica forma parte de una placa litosférica menor (denominada microplaca ibérica) individualizada como unidad al final de la orogenia Varisca. Esta orogenia, generada por la colisión entre Laurussia y Gondwana resultó en el cierre del espacio oceánico que separaba estas dos masas continentales (océano Rheico) y el desarrollo de una estructura orogénica de enormes dimensiones enlazando las masas continentales que configuraron Pangea (Matte, 1986, 2001). Esta amalgama de unidades litosféricas resultó también en la unión de las diferentes unidades de litosfera continental que configuran y encuentran su mejor zona de estudio en el Macizo ibérico y que definen una de las estructuras geológicas más características del orógeno varisco en el sur de Europa: el arco Ibero-armoricano (Franke, 1989; Matte, 2001). Pero también tuvo como consecuencia la subducción de volúmenes muy significativos de litosfera oceánica, que pasaron a incorporarse a niveles del manto litosférico profundo bajo el orógeno, favoreciendo así el desarrollo de procesos de movilización de elementos en fases fluidas y en consecuencia, de modificaciones metasomáticas de los niveles de manto litosférico más superficial situados por encima.

El cese de los movimientos compresivos Variscos dio paso, durante el Carbonífero superior (límite Kasimoviense-Gzheliense, aproximadamente 305 Ma) a un régimen de esfuerzos primero transcurrente y posteriormente extensional (Ziegler, 1990; Ziegler y Cloetingh, 2004); este cambio marca el inicio de lo que denominamos ciclo alpino. Los sistemas de fracturas generados comenzaron a individualizar la microplaca ibérica ya durante el final del Paleozoico (Pérmico) e inicio del Mesozoico (Figura 1a).



**Figura 1.** Reconstrucciones paleogeográficas de la microplaca ibérica durante el ciclo alpino, con indicación de la localización de los vulcanismos desarrollados. 1: áreas continentales emergidas. 2: cuencas continentales. 3: sedimentación en cuencas restringidas continentales. 4: sedimentación detrítica de margen continental. 5: sedimentación carbonatada de plataforma somera. 6: sedimentación mixta de plataforma somera. 7: sedimentación carbonatada de plataforma profunda. 7: sedimentación pelágica. Modificado de Vera et al, 2001.

Asociado a esta evolución tardiorogénica y al desarrollo de los sistemas de fracturas, se produjo vulcanismo en numerosos puntos, tanto en el interior de la microplaca ibérica (Sistema Central, Cadena Ibérica) como en su margen norte (área pirenaica), del que trataremos en el epígrafe 3.1.

El contexto netamente distensivo que caracterizó a las etapas iniciales del ciclo alpino junto con la existencia de los sistemas de fracturas tardivariscos citados, facilitaron el inicio de la apertura de nuevos espacios oceánicos, bordeando la microplaca ibérica por el noroeste (proto-atlántico) y por el este (neo-Tethys). Esta

situación de fracturación de corteza continental en régimen extensional (*rifting*), permitió la descompresión del manto litosférico (por adelgazamiento de la corteza) desencadenando procesos de fusión parcial y la generación, ascenso y emplazamiento de magmas en condiciones volcánicas y subvolcánicas durante el Triásico Superior, de modo muy destacado en la zona pirenaica (véase epígrafe 3.2), pero también en otras áreas, como los márgenes de las actuales Cordilleras Béticas o la Cordillera Ibérica. (Figura 1b). A partir del Jurásico Inferior, el inicio de la apertura del Atlántico central y posteriormente del Atlántico norte, acaban de delimitar la microplaca ibérica, plenamente bordeada por cuencas sedimentarias marinas en el Cretácico Inferior (Figuras 1c y 1d).

El contexto de máxima distensión relacionado con la individualización de Iberia se alcanzó en el Cretácico inferior tras la rotación de Iberia durante el Aptiense (125-112 Ma; Sibuet et al., 2004; Gong et al., 2008), movimiento que se tradujo en la apertura del golfo de Vizcaya y en una profundización de la cuenca pirenaica en su sector central y occidental.

Desde el punto de la actividad endógena, esta situación distensiva se expresa por el desarrollo de una intensa actividad volcánica e intrusiva que se desarrolló inicialmente en la cuenca vasco-cantábrica, pero que afectó posteriormente a sectores más orientales (Figuras 1d y 1e), magmatismo que caracterizaremos en el epígrafe 3.3.

El inicio, en el Cretácico Superior de los movimientos compresivos alpinos, relacionados esencialmente en el contexto Ibérico con el movimiento hacia el norte de la placa africana respecto a la europea tras la rotación de la microplaca ibérica supuso una evolución muy rápida de las cuencas y de los contextos tectónicos. Así, el paso a un régimen compresivo condicionó la inversión tectónica de la cuenca pirenaica y el desarrollo de las grandes estructuras de cabalgamiento que caracterizan a la cordillera actual, que se desarrollaron involucrando progresivamente a niveles más profundos del zócalo.

En este contexto, los pirineos actuales constituyen la macroestructura geológica que jalona el límite septentrional de la microplaca ibérica y que, desde el final de la orogenia alpina, une solidariamente a Iberia con la placa euroasiática. Esta sutura se configura como un orógeno de colisión continental construido, en su parte superior, por apilamiento de unidades cabalgantes y en el cual la litosfera ibérica se introduce por debajo de la litosfera europea, tal como se ha podido mostrar a partir de la realización de los perfiles de sismica de reflexión profunda ECORS (ECORS-Pirineos, ECORS-

Arzacq y ECORS Golfo de Vizcaya) y más recientemente ESCI (ESCI N1, ESCI N2, ESCI N3 y ESCI N4) y MARCONI, realizados en diferentes segmentos de la estructura pirenaica, todos ellos como parte de proyectos internacionales o nacionales de investigación aplicada.

El límite meridional actual de la placa ibérica (y por ende, de la placa euroasiática), lo constituye el sistema de fracturas de Azores-Gibraltar.

### **3 Eventos tectono-magmáticos**

Tal como hemos indicado en el apartado anterior, la evolución alpina del margen norte de la microplaca ibérica va a estar jalonada, en diversos momentos, por el desarrollo de actividad ígnea que marca los momentos en los que se alcanzaron las condiciones tectónicas distensivas adecuadas, capaces de favorecer el ascenso adiabático del manto litosférico al adelgazarse la corteza y que favorecieron el desarrollo de procesos de fusión parcial del manto. Estos magmatismos no son por lo tanto eventos de actividad puntual, causados por el desarrollo de anomalías térmicas profundas, sino que se relacionan, en su origen, con la evolución tectónica de la litosfera; de ahí, que para referirnos a estos episodios de actividad empleemos la denominación de eventos tectono-magmáticos, ya que ambos factores están íntimamente relacionados. Por otra parte, la composición de los productos emitidos va a reflejar la composición y la situación relativa de la zona fuente y nos va a permitir reconstruir la evolución del manto en el entorno geológico considerado, que es el principal objetivo de este trabajo. Tal como hemos esbozado previamente, los magmatismos alpinos en los Pirineos se desarrollan en tres momentos concretos.

-en el Pérmico, momento en el que el cambio de régimen de esfuerzos relacionado con el fin del ciclo varisco y el inicio del ciclo alpino, está marcado por un cambio en el tipo de magmatismo.

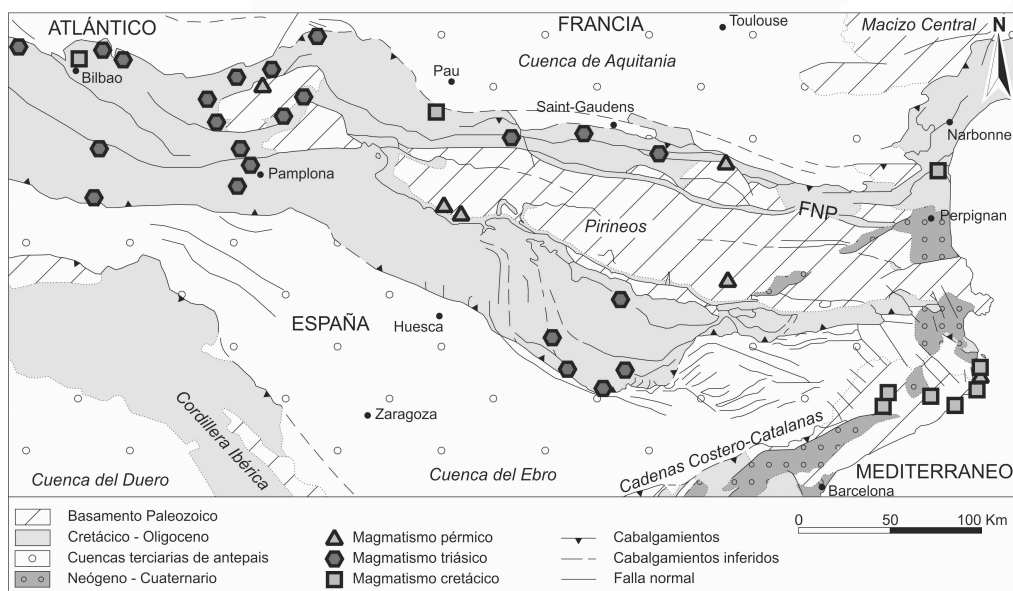
- en el Triásico superior, asociado al inicio de la oceanización (*rifting*) del golfo de Vizcaya y el Atlántico norte. Este magmatismo es el que presenta un mayor desarrollo en número de afloramientos.

- en el Cretácico, asociado a la máxima distensión previa a los movimientos compresivos y a la rotación de la microplaca ibérica. En este caso, se observa una variación temporal en el magmatismo, ya que la actividad más temprana (final del



Cretácico inferior) se sitúa en el extremo occidental (cuenca vasco-cantábrica) en tanto que los afloramientos más orientales tienen una edad más reciente (Cretácico superior).

La localización de los afloramientos de rocas ígneas generadas en cada uno de estos momentos se indica en la Figura 2.



**Figura 2.** Localización de los afloramientos de rocas ígneas alpinas en los Pirineos

### 3.1 *El magmatismo tardivarisco en los Pirineos*

El final de los eventos relacionados con la orogenia Varisca en el área pirenaica y que marcan el inicio del ciclo Alpino estuvo marcado por dos caracteres muy significativos (Lago et al, 2004):

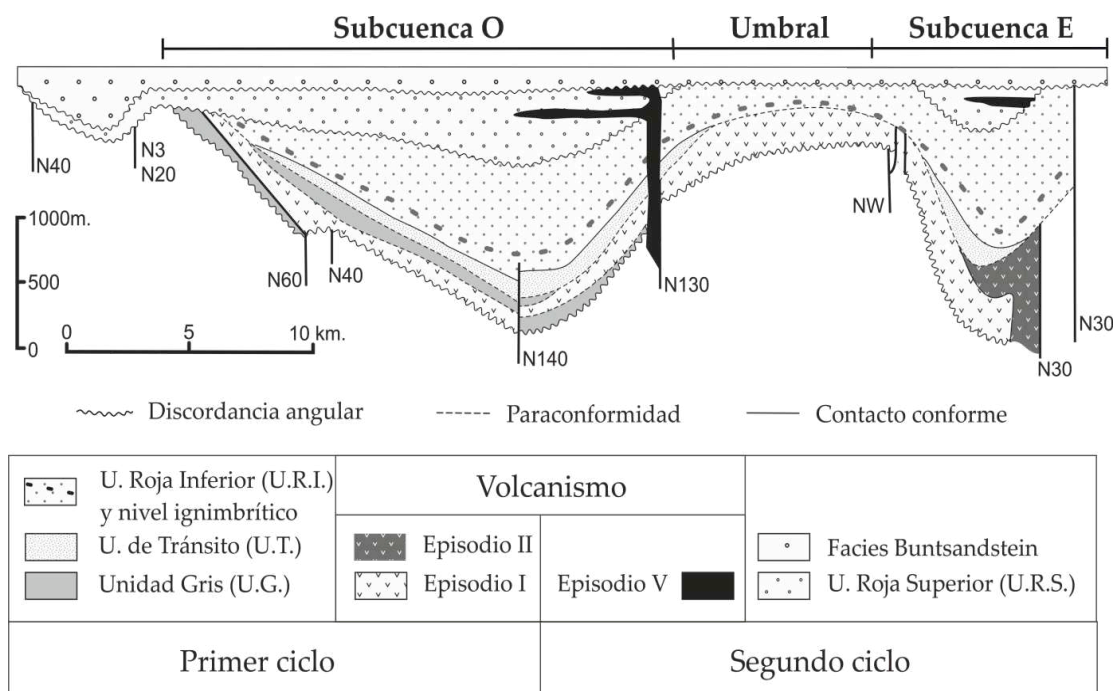
- respecto a la tectónica, el cambio de régimen de esfuerzos, que provocó un progresivo adelgazamiento de la corteza engrosada previamente.

- respecto al magmatismo, un cambio en la química de los magmas generados. El inicio del ciclo alpino está marcado por una profundización de la fuente de los magmas, que adquieren rasgos propios de los magmas alcalinos, si bien mantienen algunos de los rasgos propios del magmatismo calco-alcalino sin-orogénico, indicando una cierta herencia petrológica y composicional.

Ambos rasgos permiten afirmar que el cambio de ciclo tectónico no resulto simplemente del cese de la actividad orogénica, sino también del inicio de las características propias del ciclo siguiente, teniendo por lo tanto un carácter marcadamente transicional.

La fase de colapso extensional de la orogenia Varisca, tras el cese de los esfuerzos compresivos tuvo lugar desde el Carbonífero final (Gzheliense) al Pérmico inferior y se caracterizó por la implantación de un régimen de esfuerzos tangenciales que se tradujo en el desarrollo de sistemas de fracturas transcurrentes y sus fracturas de Riedel secundarias asociadas; estas fracturas controlaron el desarrollo de cuencas sedimentarias alargadas pero relativamente estrechas, fuertemente subsidentes ya que estaban limitadas esencialmente por sistemas de fracturas activos y con morfología compartimentada, con varias zonas subsidentes (subcuencas) separadas por umbrales elevados (Gisbert, 1981; Figura 3). Estas cuencas, presentan registros sedimentarios variablemente completos, bien por erosión o ausencia de relleno; en la cuenca del Cadí, en los pirineos orientales, el registro es bastante completo y permitió establecer tanto una secuencia tipo como el modelo general de cuenca, que se encuentran representados de modo parcial en otros sectores pirenaicos. En el caso de la cuenca del Cadí (Gisbert 1981, 1984; Valero y Gisbert, 2004), los niveles inferiores de relleno de la cuenca corresponden a rocas sedimentarias detríticas y en menor proporción carbonatadas, con intercalaciones de materiales volcánicos (rocas masivas andesíticas a riolíticas, rocas piroclásticas -tobas, ignimbritas, aglomerados). El material de origen volcánico es también un componente significativo de las rocas sedimentarias presentes.

Tal como fue propuesto por Bixel (1984,1988) y Martí (1986), todas estas rocas volcánicas asociadas a las unidades sedimentarias inferiores de relleno de las cuencas (Unidades Gris, de Tránsito y Roja Inferior de Gisbert, 1981), representan al primer ciclo tectono-magmático de volcanismo tardivarisco. Dentro de este primer ciclo, se pueden identificar al menos tres episodios magmáticos, claramente diferenciables en el complejo del Midi d'Ossau (Episodio I) y en la Sierra del Cadí (Episodios I, II y III; Bixel, 1984), con diferentes caracteres petrológicos, dominando las composiciones riolíticas y dacíticas en los tres episodios, con caracteres propios de volcanismo explosivo (ignimbritas y otras rocas piroclásticas) en el episodio II y en menor proporción andesitas (fases finales del episodio I). Todas las rocas emitidas en este ciclo son de naturaleza calco-alcalina y representan las emisiones al exterior de las cámaras magmáticas emplazadas en la corteza en este contexto transcurrente. Algunas de estas cámaras terminaron consolidando en profundidad y se configuran los como grandes macizos plutónicos que actualmente resultan expuestos por erosión en la zona axial pirenaica.



**Figura 3.** Estructura y secuencia de relleno volcano-sedimentario de las cuencas tardivariscas pirenaicas (modificado de Gisbert, 1981).

Pero la actividad sedimentaria y volcánica en estas cuencas no se interrumpió a terminar este primer ciclo. El segundo ciclo magmático propuesto por Bixel (1984,1988), es el primero que muestra caracteres propios de la evolución alpina. Se caracteriza por desarrollarse bajo un régimen transtensivo a claramente extensional y se divide a su vez en dos eventos de naturaleza diferente:

- Un evento de edad Pérmico inferior-medio con actividad subvolcánica-volcánica (Galé, 2005), formado por lavas traquiandesíticas con carácter transicional o débilmente alcalino que está representado en dos áreas de afloramiento: el dique de San Salvador, cerca de La Seu d'Urgell, y en la cuenca del Anayet (zonas de Aguas Tuertas y pico de Anayet). Este evento corresponde al Episodio IV de Bixel (1984).

- Un evento poco posterior, de edad probable Pérmico medio, caracterizado por actividad volcánica y subvolcánica con magmas de composición basáltica y afinidad alcalina (Galé, 2005; Lasheras, 1998). Este episodio magmático (episodio V de Bixel, 1984,1988) está representado por los sills basálticos del área del Anayet y por los sills basálticos y diques doleríticos aflorantes en el macizo de Cinco Villas (áreas de Larrún, Ibantelli, Mendaur, Yanci y Aranaz, Pirineo Navarro).

Los afloramientos actuales de rocas formadas en estos dos eventos magmáticos (Figura 2) forman parte del relleno de cuencas sedimentarias que ya fueron activas y rellenadas parcialmente durante el primer ciclo. Los mismos sistemas de fracturas que permitieron el desarrollo, subsidencia y alimentación de conductos volcánicos durante el final del Carbonífero, siguieron siendo activos durante el Pérmico e incluso posteriormente.

#### *Evento Pérmico inferior-medio (Episodio IV)*

Tal como hemos indicado, las rocas desarrolladas durante este evento corresponden esencialmente a rocas andesíticas con textura traquítica, caracterizadas por el predominio de la plagioclasa como microcristales y microfenocristales, con proporciones subordinadas de clinopiroxeno y minerales opacos y apatito como mineral accesorio. En general, presentan una intensa alteración que afecta especialmente al piroxeno, transformado de modo habitual a clorita. Desde el punto de vista del emplazamiento, las intrusiones en el sector del Anayet (en forma de lacolito y sills asociados) y de Oza (un solo sill, que alcanza los 40 m de espesor) se intercalan entre los niveles inferiores de la Unidad Roja Superior (URS, Gisbert, 1981), lo que permite situar la edad de estas intrusiones próxima al límite pérmico inferior-medio (límite Cisuraliense-Guadalupiense). La intrusión que representa a este magmatismo en la sierra del Cadí (dique de San Salvador) presenta relaciones de contacto poco claras: intruye a la serie carbonífero-pérmica e incluso a la URS, pero no se pueden apreciar, por erosión, las relaciones de contacto con los niveles suprayacentes. Dado que al menos es posterior a la base de la URS y que además su composición y su petrología son equiparables a las de las rocas descritas en el sector central (Anayet-Oza), se considera como representativo del mismo evento magmático.

#### *Evento Pérmico medio (Episodio V)*

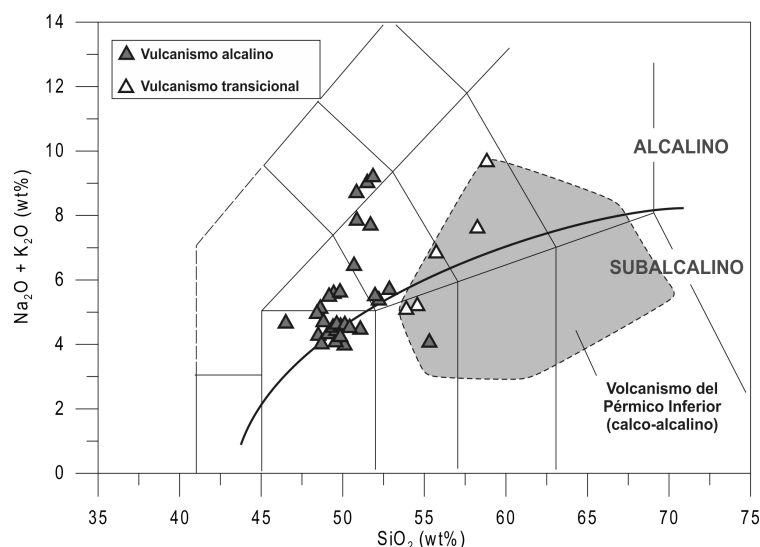
Las rocas ígneas que se generaron durante este evento se presentan emplazadas bien como sills de espesor variable (desde ligeramente inferior a 1 m., hasta 110 m.) intercalados en los niveles medios y superiores de la URS, tanto en el sector central (Anayet), como en el occidental (Pirineo Navarro) o bien como diques, emplazados cortando a las series del Devónico y Carbonífero Inferior, en el sector occidental

(Pirineo Navarro). En ambas modalidades de emplazamiento la composición general es basáltica, si bien la textura es diferente; en los sills, la textura es porfídica, con fenocristales de plagioclasa y clinopiroxeno, correspondiendo petrológicamente a basaltos, mientras que en los diques, la textura es subofítica a intergranular, de modo que se clasifican como doleritas. En ambos casos, la plagioclasa es el mineral predominante, junto con clinopiroxeno titanado, lo que indica una composición de tipo alcalino, carácter que está apoyado también por la presencia de olivino en los basaltos del sector occidental (Pirineo Navarro), si bien este mineral se presenta siempre transformado a otros minerales como consecuencia de procesos de alteración, siendo reconocible solo como pseudomorfos. Los minerales opacos (esencialmente magnetita) completan la asociación mineral primaria en estas rocas. Cabe reseñar que, según los datos paleogeográficos y paleomagnéticos, el sector occidental (Pirineo Navarro), actualmente en continuidad estructural con el resto de la cadena alpina, formó parte del margen sur de la placa europea (Larrasoña et al, 2003), mientras que el sector central se situaba en el margen norte de la microplaca ibérica. Esta situación se mantuvo hasta la etapa de colisión alpina y permite explicar las diferencias de detalle en la composición de las rocas pérmicas en estos dos sectores mucho más distantes originalmente que en la actualidad.

#### *Geoquímica de los eventos pérmicos*

Desde el punto de vista de la composición química en elementos mayores, la proyección de las composiciones de ambos episodios magmáticos Pérmicos en el diagrama Total de Álcalis-Sílice (TAS, Fig. 4), comparada con la de los episodios anteriores (I a III, que componen el primer ciclo tectono-magmático, tardivarisco), permite indicar varios caracteres relevantes.

En primer lugar, resulta patente la marcada diferencia entre las rocas del episodio IV y las del episodio V, si bien ambos grupos de muestras definen tendencias paralelas. En ambos casos, las composiciones menos evolucionadas se sitúan cerca del límite entre las composiciones subalcalinas (calcoalcalinas en este caso) y alcalinas y evolucionan hacia el campo alcalino.

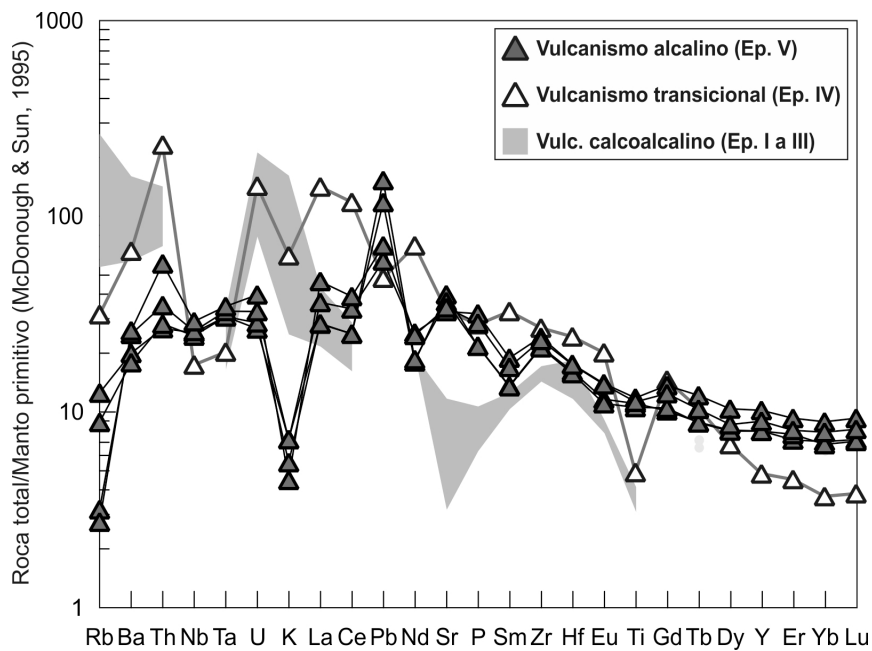


**Figura 4.** Composición geoquímica en elementos mayores de los magmatismos pérmicos en el diagrama TAS. Datos composicionales empleados de Cabanis y Le Fur-Balouet (1989) y Galé (2005).

Las composiciones del episodio IV son coincidentes con las más alcalinas del volcanismo del Pérmico inferior (episodios I a III), indicando una cierta relación composicional, si bien la petrología y la química mineral permiten diferenciar ambos grupos. En cuanto a la composición en elementos traza (Figura 5), los episodios IV y V son también claramente diferenciables entre sí y respecto al magmatismo calcoalcalino previo (Ep. I a III). Estas diferencias son especialmente relevantes en cuanto a los valores en elementos litófilos (Rb, Ba, K) y otros de alto radio iónico (Th, U) asociados típicamente a la participación de componentes relacionados con la corteza en la génesis de los magmas y a la presencia de una anomalía negativa en el par Nb-Ta, que típicamente se asocia a contextos de subducción. El magmatismo calcoalcalino orogénico (Ep. I a III) muestra un marcado enriquecimiento en Rb, Ba, K, Th y U. Estos dos últimos elementos siguen presentando valores elevados en el magmatismo de carácter transicional (Ep. IV), que también presenta valores elevados para los elementos ligeros del grupo de las tierras raras (La-Eu).

Por el contrario, el magmatismo basáltico del Ep. V presenta valores mucho menores para los elementos litófilos y no presenta anomalía negativa en Nb-Ta, sino en K y Rb,

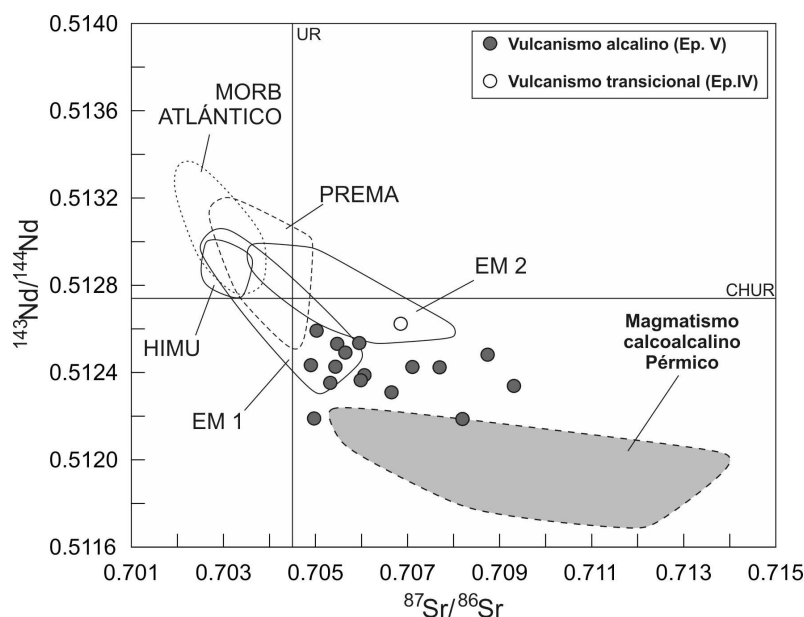
junto con valores elevados en los elementos más pesados de la derecha del diagrama.



**Figura 5.** Diagrama multielemental normalizado para las composiciones de los magmatismos pérmicos. Datos composicionales empleados de Cabanis y Le Fur-Balouet (1989) y Galé (2005).

La composición de estos magmatismos, en cuanto a los valores de las relaciones isotópicas de Sr y Nd (Figura 6), nos permite hacer inferencias más claras respecto a las fuentes implicadas en su génesis. El vulcanismo del primer ciclo, calcoalcalino, se proyecta en el cuadrante inferior derecho, mostrando composiciones isotópicas muy radiogénicas: valores elevados de la relación  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$  -muy superiores al de UR- y bajos para  $^{143}\text{Nd}/^{144}\text{Nd}$  -inferiores a CHUR-. Este tipo de composiciones isotópicas se relacionan con fuentes magmáticas con un elevado tiempo de residencia en la corteza, es decir son indicativas de procesos de generación que implican la incorporación de fundidos generados en la corteza, bien de modo directo o mediante mezcla entre componentes de derivación cortical y otros de origen profundo (manto metasomatizado), hipótesis que parece probable dada la elevada dispersión de los valores de  $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ , típica de procesos con participación variable de componentes. En contraste, las composiciones de los magmatismos del pérmico inferior-medio (transicional y alcalino), son algo menos radiogénicas y se aproximan a las composiciones propias de mantos de tipo enriquecido (EM1 o EM2), indicando una participación clara de niveles del manto en la generación de los magmas; además, ese carácter de modificación de la composición del manto (“enriquecimiento”), se sitúa en una composición intermedia entre los campos de EM y del magmatismo calcoalcalino

previo, de modo que se puede afirmar que el proceso de enriquecimiento del manto está relacionado con el metasomatismo generado por el evento previo.



**Figura 6.** Composición isotópica de Sr y Nd de los magmatismos pérmicos. Se indican los valores de referencia para ambos sistemas isotópicos (UR, Uniform Reservoir y CHUR, Chondritic Uniform Reservoir), así como los campos definidos por composiciones reales representativas de los distintos tipos de reservorios o fuentes mantélicas definidas por Zindler y Hart (1986): EM (Enriched mantle) de tipos 1 y 2, PREMA (Prevalent Mantle), HIMU (High  $\mu$ ) y MORB (Mid Oceanic Ridge Basalt) de tipo Atlántico. Datos composicionales empleados de Innocent et al (1994), Galé (2005) y Lago et al (2004).

### 3.2 Magmatismo Triásico

La corteza en el área pirenaica resulto considerablemente adelgazada como consecuencia de la actividad tectónica transcurrente y posteriormente extensional que caracterizó al inicio del ciclo alpino. El inicio de los movimientos de apertura de nuevos espacios oceánicos al final del Triásico, facilitó el desarrollo de procesos de fusión parcial del manto litosférico, generando diferentes tipos de magmas. En el caso del margen pirenaico, el magmatismo desarrollado en este momento son las rocas de composición basáltica y textura dolerítica, denominadas en la literatura clásica como “ofitas”. Su afinidad, definida tanto a partir de su petrología como de la composición geoquímica es claramente toleítica, lo que permite indicar que los magmas se generaron a partir de niveles relativamente altos del manto litosférico y con una tasa de fusión elevada. Esta es una característica claramente diferencial, ya que en otros sectores, los



magmatismos desarrollados en igual edad tienen una afinidad diferente; así, son comunes las rocas basálticas de afinidad alcalina relacionadas con la apertura del Neo-Tethys, aflorantes, p.e. en el margen este pirenaico (Corbières), el área del Moncayo, el sur de Tarragona y la Sierra de Tramuntana en Mallorca; también alcalinas son las rocas ígneas intercaladas en la serie del Triásico superior relacionadas con el rifting de la cuenca Ibérica, emplazadas en varios sectores del sur-sureste de la provincia de Teruel. En todos estos casos, el carácter alcalino de estos magmatismos sugiere un origen a partir de magmas generados con tasas de fusión bajas y en principio a partir de niveles más profundos, esquema compatible con un contexto de adelgazamiento previo de la corteza menor en estos sectores que en la zona pirenaica.

El magmatismo toleítico pirenaico (doleritas), estudiado en conjunto por Lago (1980), presenta una extensión amplia (Figura 2) desde el sector oriental (Trempe) al occidental (Santander) y también se identifican numerosos afloramientos en el margen norte pirenaico (Francia). La morfología de afloramiento es bastante común, en forma de sills, con longitud variable, desde la escala kilométrica a la decamétrica, que se encuentran interstratificados dentro de los sedimentos evaporíticos del Triásico superior (Facies Keuper), sobre los que la intrusión de magmas generó un metamorfismo de contacto de grado débil (Amigó *et al.*, 1987). El modelo de emplazamiento propuesto implica una inyección lateral del magma a partir de los conductos, produciéndose el emplazamiento a favor de la interfase entre los sedimentos (arcillas y margas) poco compactados, plásticos, de la Facies Keuper y los niveles inferiores, ya algo litificados. La actuación posterior de esfuerzos compresivos y procesos halocinéticos determinan una fragmentación de los sills en cuerpos aislados con modificación de los contactos iniciales, fragmentación que por otra parte facilitó el desarrollo de alteraciones secundarias a favor de planos de fracturas.

En las áreas mejor conservadas para su estudio -Aulet (Lago y Pocovi, 1980), Estopiñán-Camporrells (Lago y Pocovi, 1982) y El Grado (Lago *et al.*, 2000) en la provincia de Huesca y en diversos sectores de Santander (Lago y Pocovi, 1984)-, los sills doleríticos presentan a su techo estructuras de fluidalidad (formas almohadilladas y otras helicoidales) debidas a la movilidad del magma a favor del plano de contacto entre los sedimentos plásticos (arcillas y margas), poco consolidados, de la Facies Keuper encajante. En la base, son frecuentes las estructuras de carga. El control estratigráfico marca una edad de emplazamiento en el límite del Trías superior, pre-Lías inferior,

corroborada por datación absoluta en zircón ( $199\pm 2$  M.a., Limite Triásico- Jurásico; Rossi et al, 2003).

Además de la morfología de emplazamiento indicada, es característico en este magmatismo el desarrollo de una estructura petrológica con tres tipos de facies:

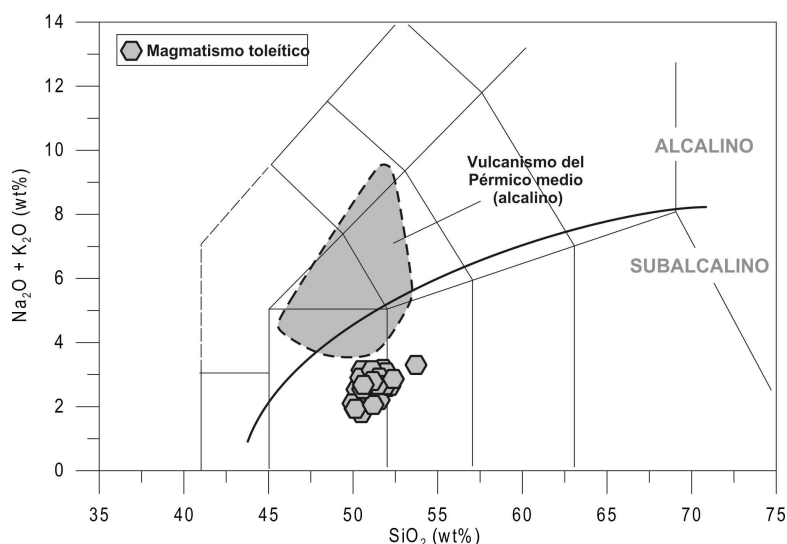
- el borde enfriado, con desarrollo centimétrico, caracterizado por una textura de grano fino, que pasa gradual y rápidamente a la facies central

- facies central (textura ofítica típica) con progresivo aumento en tamaño de grano hacia el interior del afloramiento.

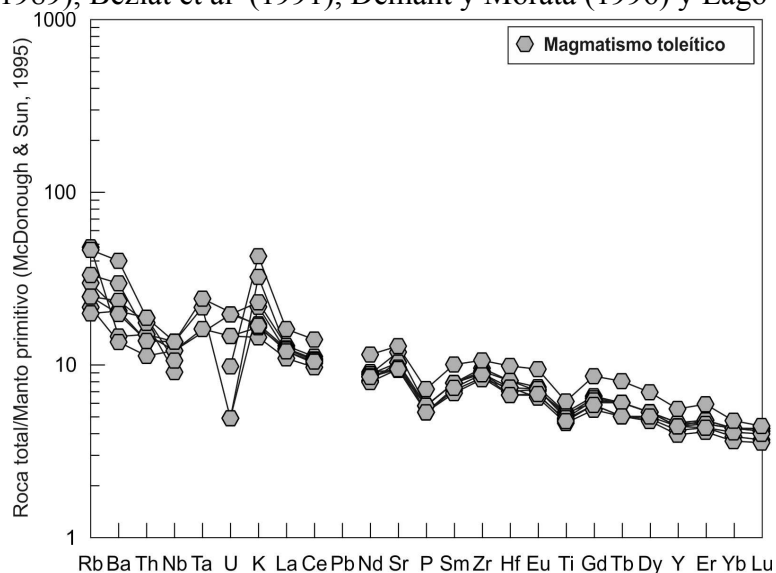
- aislados filones pegmatoides donde los cristales de piroxeno y plagioclasa pueden alcanzar dimensiones de hasta 7 centímetros con entrecruzamiento mutuo.

Desde el punto de vista de la petrología, su composición es considerablemente homogénea en los distintos afloramientos considerados (Azambre *et al.*, 1987; Lago *et al.*, 2000). La asociación mineral es de 2-5% olivino (siempre alterado a clorita o talco), 35-55% plagioclasa cálcica, 30-45% piroxeno (augita cálcica y pigeonita características y ortopiroxeno ocasional) siendo minoritarios el anfíbol (ferroedenita), la biotita, el feldespato potásico, el cuarzo y los opacos (magnetita e ilmenita). Los sulfuros son accesorios. En las facies micropegmatíticas (líquido más diferenciado y sin olivino) destacan la plagioclasa sódica y los piroxenos enriquecidos en Fe así como una mayor proporción de feldespato potásico, cuarzo, anfíbol, biotita y opacos (ilmenita) y son excepcionales los silicatos de circonio y con tierras raras. En casos aislados se observan facies de cumulado con más del 10% de olivino y una proporción más alta a la habitual de orto- y clinopiroxeno (Azambre *et al.*, 1987).

Su composición química confirma la afinidad toleítica y su escasa variación composicional (Figura 7), además de su clara distinción respecto a los vulcanismos anteriores en el área; los magmas experimentaron una pequeña diferenciación por cristalización fraccionada, solo destacable en el caso de los escasos cumulos o en los pegmatoides. Sus pautas de elementos traza muestran valores relativamente bajos en todo el espectro de elementos (Figura 8), como es característico de los magmas generados en el manto con tasas de fusión elevadas.



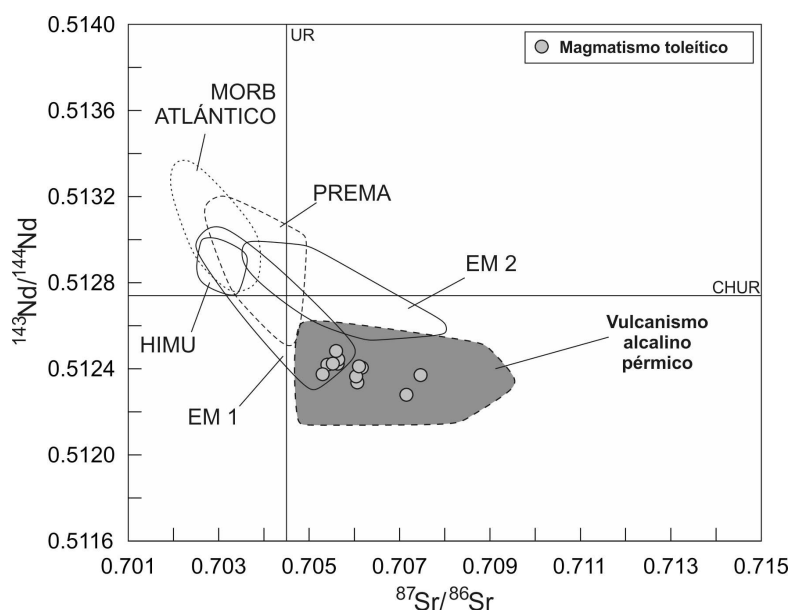
**Figura 7.** Composición geoquímica en elementos mayores del magmatismo triásico en el diagrama TAS. Datos composicionales empleados de Alibert (1985), Curnelle y Cabanis (1989), Béziat et al (1991), Demant y Morata (1996) y Lago et al (2000).



**Figura 8.** Diagrama multielemental normalizado para composiciones representativas del magmatismo toleítico triásico de los Pirineos. Datos composicionales empleados de Lago et al (2000).

Resulta relevante que algunas de las muestras presentan anomalía positiva en K y negativa en U, junto con valores relativamente elevados en Rb y Ba, lo que indica que la fusión afectó a niveles de manto modificados por los eventos previos, posiblemente fundiendo fases que no fueron incorporadas en el magmatismo alcalino pérmico. Esta herencia composicional respecto a magmatismos previos es claramente patente cuando se consideran las composiciones isotópicas de Sr y Nd (Figura 9); pese a la diferente tasa de fusión y la clara diferencia composicional, el vulcanismo toleítico presenta composiciones similares a las que ya se observaban para el magmatismo pérmico (se

proyectan dentro del campo definido por las rocas pérmicas), lo cual sugiere que el manto afectado en ambos procesos de fusión pudo haber tenido características similares e incluso corresponder a niveles equivalentes. Cabe destacar, no obstante, que resulta inusual que un magmatismo toleítico presente composiciones propias de un manto enriquecido. Las rocas toleíticas emitidas en la actualidad en zonas de dorsal oceánica (p.e. MORB Atlántico), derivadas de mantos no enriquecidos, muestran composiciones isotópicas claramente diferentes, empobrecidas en los componentes radiogénicos, como se puede observar en la Figura 9.



**Figura 9.** Composición isotópica de Sr y Nd del magmatismo toleítico pirenaico. Referencias igual que en la Figura 6. Datos composicionales empleados de Alibert (1985)

### 3.3 Actividad Cretácica

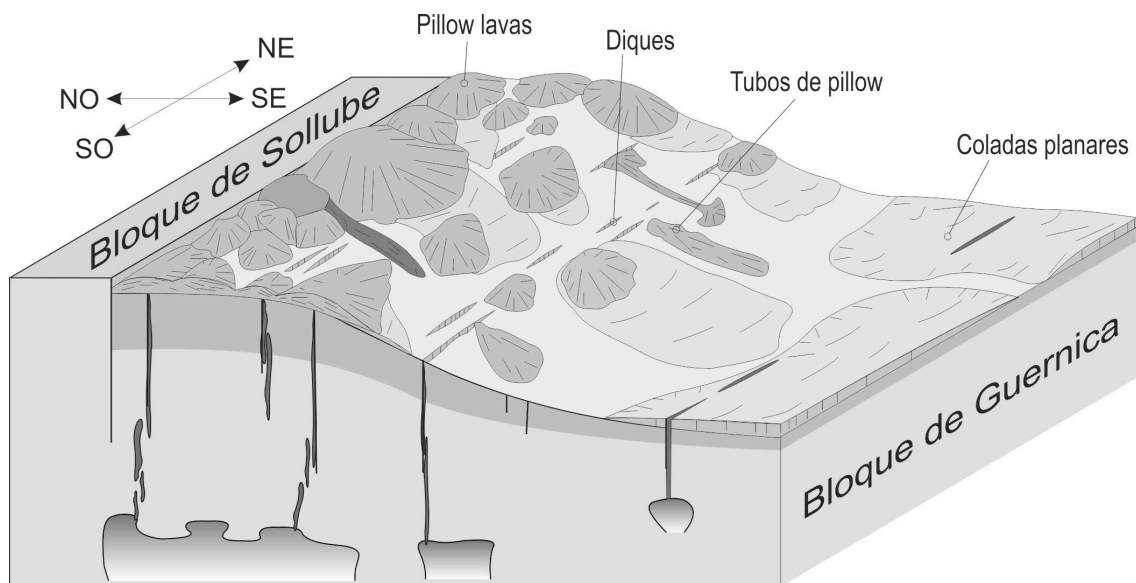
El magmatismo de edad cretácica de los Pirineos y áreas próximas (incluimos los afloramientos de rocas de igual edad y afinidad situados en la provincia de Gerona, aunque en un sentido geológico estricto se sitúan en el extremo norte de la Cadena Costera Catalana), es uno de los marcadores más relevantes de las condiciones de distensión y transtensión que se produjeron en el margen septentrional de Iberia como consecuencia de la rotación de la microplaca ibérica y la apertura del Golfo de Vizcaya (Rossy et al 1992, Cabanis y Le Fur-Balouet, 1990). Los sectores relevantes de afloramiento (Figura 2; Azambre et al, 1992) corresponden a: la cuenca Vasco-Cantábrica, los pirineos centrales (donde aparte de algunos afloramientos menores se han descrito rocas ígneas cretácicas en registros de sondeo en Pau-Tarbes y Sant

Gaudens), el área de Corbières-Fitou (en el extremo oriental, entre Narbonne y Perpignan) y finalmente en el extremo norte de la Cadena Costera Catalana (macizo del Montseny y zonas costeras próximas a Sant Feliu de Guixols, Begur y Calella de Palafrugell; Ubide et al, 2008).

Las rocas ígneas generadas en relación a este evento extensional son todas ellas de naturaleza alcalina, pero en detalle, son considerablemente variadas. Así, los afloramientos en el sector occidental (cuenca Vasco-cantábrica), presentan tanto variedades extrusivas (basaltos y rocas traquitoides) como intrusivas (gabros y escasos monzogabros, algunos de ellos con carácter cumulativo). Hacia los sectores central y oriental el predominio corresponde a las variedades intrusivas que, de modo general presentan desarrollo filoniano (diferentes tipos de lamprófidos -camptonitas de modo común, pero también monchiquitas y sannaitas-) o en pequeños stocks (sienitas nefelínicas y gabros anfibólicos).

El vulcanismo de la cuenca vasco-cantábrica (Castañares *et al*, 2001; Castañares y Robles, 2004 y sus referencias) es la manifestación mayor en volumen y también la que permite un estudio más detallado de las relaciones entre las diferentes unidades volcánicas y sedimentarias en la provincia alcalina cretácica de los pirineos. Las unidades volcánicas presentan un desarrollo de diferentes facies, relacionadas con la existencia de conductos de alimentación que extruyeron el magma en diferentes partes del talud generado por la actividad tectónica (Figura 10), siendo más activas las zonas con desarrollo de *pillow lavas*. Dado que las emisiones se produjeron en un medio sedimentario marino y se intercalaron entre materiales sedimentarios que han podido ser datados mediante métodos bioestratigráficos, la edad de este magmatismo se ha podido delimitar con precisión, abarcando desde el Albiense superior al Santoniense inferior (102-85 Ma.), así como establecer el carácter discontinuo del magmatismo, comprendiendo diversos episodios de actividad.

En las unidades intrusivas del extremo oriental (Corbières y Cadena Costera Catalana), las edades obtenidas para este magmatismo cubren un intervalo similar, si bien parecen reflejar una actividad que se desarrolla de modo algo más tardío, tanto en su inicio como en su finalización. Así, Montigny et al (1986), obtienen edades entre 95,5 - 89 Ma. para las rocas de Corbières, en tanto que las rocas de la Cadena Costera Catalana presentan edades algo más recientes, en el intervalo 80,5 a 69 Ma. (Solé et al, 2003). Actualmente estas dataciones están siendo revisadas y completadas por nuestro grupo de investigación, dentro de la Tesis Doctoral de T. Ubide.



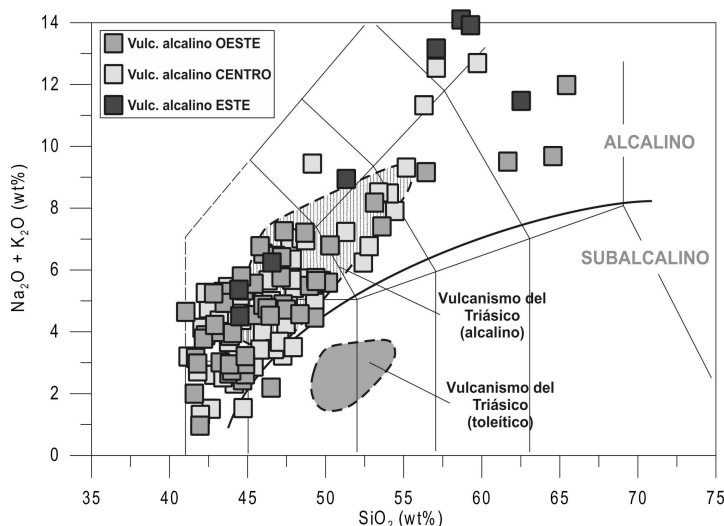
**Figura 10.** Modelo de emplazamiento de las rocas volcánicas cretácicas en uno de los márgenes de la cuenca vasco-cantábrica. La zona de mayor productividad, con desarrollo de cámaras de mayor continuidad se sitúa en las proximidades de la zona de fractura, donde se produce una intensa acumulación de lavas almohadilladas (*pillow lavas*). Modificado de Castañares et al, (2001).

Desde el punto de vista petrológico, las rocas intrusivas más básicas generadas por este magmatismo (gabros y lamprófidos) presentan características netamente distintas de las que se pueden identificar en las rocas de eventos anteriores. El carácter porfiroide a claramente porfídico es apreciable en buena parte de los casos y está condicionado por la presencia de núcleos cristalinos de anfíbol (kaersutita) y clinopiroxeno variablemente titanado, relativamente homogéneos y de gran tamaño que se presentan parcialmente reabsorbidos y posteriormente reecrecidos.

Este carácter parece indicar (Ubide et al, 2011) el desarrollo de eventos de fusión e infiltración del manto superior por fundidos previos, en ocasiones más diferenciados que los que finalmente incluyen a los cristales y la extracción posterior de los magmas a través de los mismos conductos, durante episodios de recarga o inyección en niveles superiores, produciéndose la reabsorción y posterior reecrecimiento de dichos cristales. Por otra parte, es muy relevante el desarrollo de estructuras de emplazamiento en los sills de lamprófidos camptoníticos, encajados en rocas graníticas; la estructura general muestra el desarrollo de bordes enfriados, tanto a la base como al techo, laminaciones a la base, desarrollo de niveles de vesiculación (con vesículas rellenas de calcita) y acumulación gravitatoria de los fenocristales hacia la base, caracteres que definen una estructuración compleja con influencia en la composición de cada una de las unidades

(Ubide *et al*, 2012). Todos estos caracteres permiten interpretar unas condiciones de emplazamiento con una reducida carga litostática, sobre un encajante a baja temperatura y con desarrollo de una inyección lateral forzada, que aprovecha las discontinuidades previas del encajante.

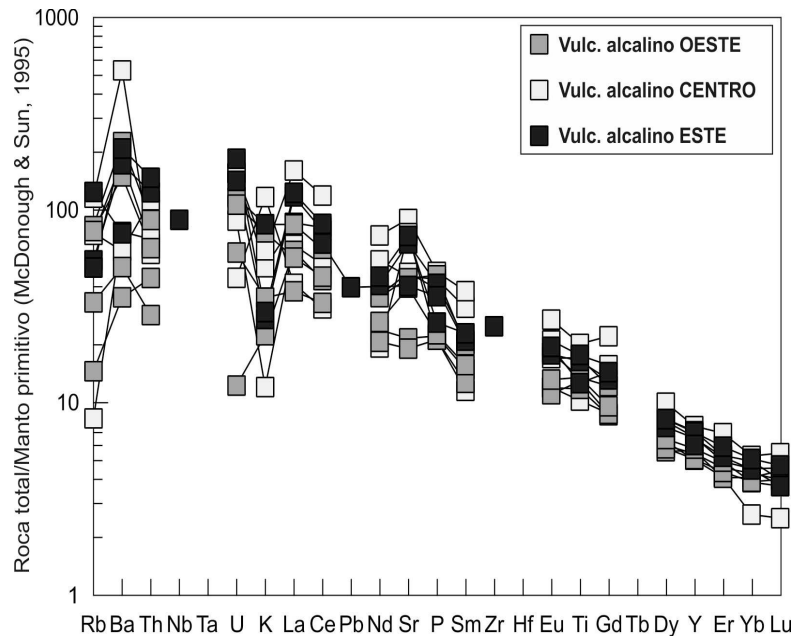
La composición geoquímica de las rocas indica claramente una composición de tipo alcalino, cubriendo un amplísimo rango de variación (Figura 11), como es esperable en magmas generados durante un amplio intervalo temporal y en áreas distantes entre si, desde términos fuertemente subsaturados en sílice hasta términos peralcalinos (total de álcalis: 14%). No obstante, cada una de las tres áreas de afloramientos presenta un rango de variación composicional de similar amplitud y además las composiciones se superponen según una pauta común, lo que es indicativo de una similitud en el proceso y en las fuentes de los magmas generados.



**Figura 11.** Composición geoquímica en elementos mayores del magmatismo cretácico pirenaico en el diagrama TAS. Datos composicionales empleados de Cabanis y Le Fur-Balouet, (1990). Se han indicado, como referencia, los campos de proyección de las composiciones de los magmatismos triásicos pirenaicos.

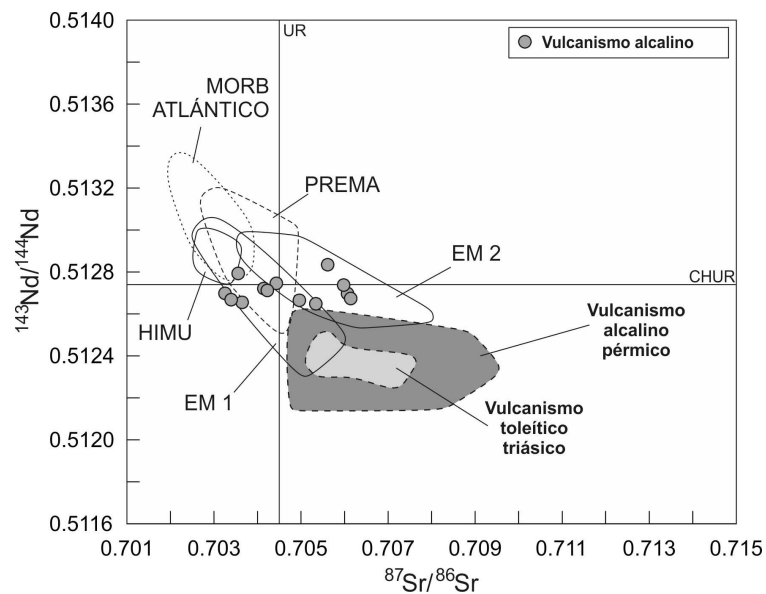
Las pautas de elementos traza normalizados (Figura 12) muestran los caracteres típicos de un magmatismo alcalino generado por fusión del manto, con enriquecimientos muy significativos en algunos elementos fuertemente incompatibles o móviles, relacionados con su generación a partir de procesos con baja tasa de fusión. Debe destacarse que las composiciones en elementos traza de las rocas representadas son considerablemente homogéneas, pese a incluir materiales de edades y localizaciones muy diferentes, lo que nos indica que el proceso de fusión responsable de este

magmatismo se desarrollo en condiciones similares en toda el área considerada.



**Figura 12.** Diagrama multielemental normalizado para composiciones representativas del magmatismo alcalino cretácico de los pirineos. Datos composicionales empleados de Cabanis y Le Fur-Balouet (1990).

Las composiciones isotópicas, en contraste (Figura 13), muestran una moderada dispersión, especialmente en cuanto a la relación isotópica de Sr, carácter que parece sugerir una cierta heterogeneidad de la fuente, aunque también puede ser consecuencia de otros procesos, como una variable interacción con los materiales encajantes, tal como proponen Rossy et al (1992); en cualquier caso se aprecia un desplazamiento hacia composiciones menos enriquecidas y con un menor carácter radiogénico.



**Figura 13.** Composición isotópica de Sr y Nd del magmatismo toleítico pirenaico. Iguales referencias que en la Figura 6. Datos composicionales empleados de Rossy et al (1992).



#### **4 Evolución del manto bajo los pirineos durante el ciclo alpino.**

El desarrollo de la orogenia varisca (como evento inmediatamente anterior al ciclo alpino), implicó la colisión de grandes masas continentales y la subducción de importantes segmentos de litosfera oceánica. Los efectos de esta subducción son poco conocidos en general y especialmente en el entorno de los pirineos, puesto que solamente podemos deducirlos de modo indirecto. Uno de los principales argumentos que permiten identificar este proceso se relaciona con los caracteres del vulcanismo tardivarisco de los Pirineos.

Las secuencias vulcano-sedimentarias que rellenan inicialmente las cuencas carbonífero-pérmicas del pirineo –y que hemos denominado Ciclo I, siguiendo la terminología de Bixel (1984) presentan características propias del magmatismo asociado a zonas de subducción, con desarrollo de un magmatismo calcoalcalino andesítico acompañado de emisiones riolíticas y actividad explosiva de tipo pliniano, evidenciada en el desarrollo de niveles ignimbríticos (Gisbert, 1981; Martí, 1986). Además, la composición en elementos traza de las rocas generadas durante este primer ciclo, con valores elevados del grupo Rb-K, anomalía negativa del par Nb-Ta, valores bajos de Sr y Ti y valores marcadamente radiogénicos para las relaciones isotópicas del Sr y del Nd son todos ellos característicos de contextos de subducción; en el caso de los pirineos, el cierre completo del espacio oceánico previo provocó, adicionalmente, un sobreengrosamiento de la corteza continental que facilitó el desarrollo de procesos de fusión parcial de corteza (anatexia), posiblemente concomitantes con el clímax térmico del metamorfismo varisco en los pirineos (305±5 Ma, Vielzeuf, 1996) y favorecidos también por la intrusión de magmas básicos subalcalinos, generados en el manto litosférico, a los niveles inferiores de la corteza o a las zonas de interfase manto-corteza (Arranz, 1997).

Estos caracteres desarrollados durante la orogenia Varisca resultaron el punto de partida al inicio del ciclo alpino. Así el primer magmatismo que se puede considerar ya propiamente alpino, de carácter transicional (episodio IV), preserva algunos de los caracteres propios del evento anterior (valores altos de Th y U, anomalía de Nb-Ta pero por otra parte muestra caracteres propios de la fusión de un manto litosférico relativamente enriquecido por procesos metasomáticos, con valores elevados en elementos muy incompatibles, como son todos los elementos del grupo de las tierras

raras ligeras y medias (La-Eu). Estos caracteres permiten sugerir la posible interacción de los magmas generados en el manto, con magmas residuales de origen cortical, generados previamente y que no hubieran consolidado completamente, lo que permitiría justificar el carácter intermedio (transicional), de este magmatismo.

Durante el pérmico, tal como hemos descrito, el contexto tectónico evolucionó hacia condiciones más extensionales y las rocas ígneas generadas en el pérmico medio (Episodio V) presentan un carácter alcalino definido, pero no extremo. Este carácter alcalino debería llevar asociado valores elevados en elementos incompatibles (véase por ejemplo el diagrama de pautas de elementos traza para el volcanismo cretácico en la figura 12), situación que no se produce, lo que sugiere que los magmas se generaron a partir de un volumen de manto afectado por modificaciones de composición (metasomatizado) y en la que posiblemente la fusión parcial se produjo en condiciones de equilibrio con minerales residuales capaces de retener algunos elementos, como el Rb y el K, que aparecen empobrecidos pero incluyendo como fases en fusión otro mineral capaz de liberar otros elementos más compatibles, como el Ti y las tierras raras pesadas. Considerando las relaciones isotópicas de este magmatismo alcalino pérmico, la fuente presenta caracteres propios de un manto enriquecido, metasomatizado, en el que es frecuente la presencia de fases minerales hidratadas (Lago et al., 2004).

El magmatismo toleítico triásico, presenta un carácter claramente subalcalino y una gran homogeneidad de composición a todos los niveles (elementos mayores, traza e isótopos radiogénicos). Sus contenidos en elementos traza son considerablemente bajos y coherentes con lo esperable en magmas toleíticos de naturaleza basáltica, generados en relación con procesos con mayor tasa de fusión que en el caso de los magmas alcalinos. No obstante, la fuente magmática es isotópicamente muy similar a la que ya presentaba el magmatismo alcalino pérmico y, como ya hemos destacado anteriormente, presenta un carácter enriquecido, con algunas anomalías positivas de composición en elementos alcalinos y alcalinotérreos, situación infrecuente en magmatismos toleíticos.

Finalmente, el magmatismo cretácico presenta caracteres propios de un magmatismo con baja tasa de fusión, con valores muy elevados en elementos incompatibles y con una composición isotópica menos radiogénica que la identificada en los casos anteriores, sugiriendo una generación a partir de una fuente de manto diferente y emplazado posiblemente desde niveles más profundos, teniendo por lo tanto un carácter más “juvenil”. Rossy et al (1992), apoyan esta idea, indicando que este enriquecimiento en elementos incompatibles se produjo durante el proterozoico (1000-

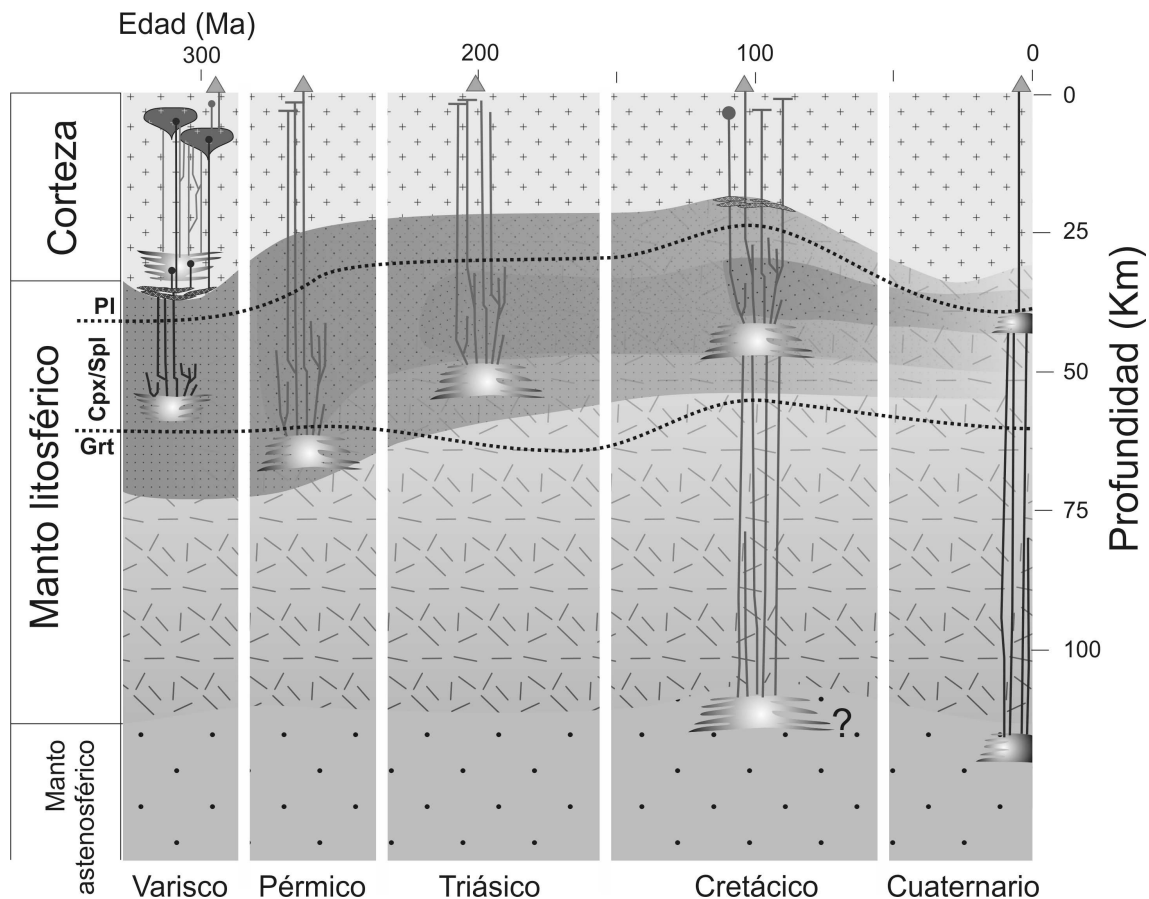
600 Ma) y que la composición del magmatismo alcalino cretácico de los pirineos es similar a la propia de los contextos de isla oceánica.

Los estudios de detalle, especialmente los centrados en las composiciones isotópicas, realizados sobre los macizos de peridotitas de los pirineos centrales, considerados clásicamente como representativos de la composición del manto litosférico bajo los pirineos han puesto de manifiesto el registro de diferentes eventos de modificación de la composición del manto y la edad de dichos eventos. Así, Henry et al (1998), basándose en la composición isotópica de Sm y Nd de las peridotitas y piroxenitas de los pirineos centrales, identifican un evento de fraccionación antiguo, desarrollado hace 450-500 Ma (Cámbrico superior-Ordovícico), cuando las unidades de litosfera que finalmente compusieron la microplaca ibérica eran todavía bloques independientes en el margen norte de Gondwana. Estos mismos autores obtienen edades  $^{40}\text{Ar}$ - $^{39}\text{Ar}$ , en los anfíboles de estas peridotitas, que se distribuyen en el intervalo 103-108 Ma, edad que interpretan como representativa del evento de ascenso y emplazamiento de los magmas cretácicos, que provocaron la cristalización de fases hidratadas.

Varios de los estudios realizados sobre la composición de las peridotitas pirenaicas (Downes et al, 1991; Fabries et al, 1991) y de las rocas emitidas (Lago et al, 2004) ponen de manifiesto la heterogeneidad del manto litosférico pirenaico, en el que se pueden distinguir, a diferentes escalas, dominios con composiciones diferentes; el desarrollo de estos dominios se relaciona con dos factores principales: en primer lugar, con la historia del manto subpirenaico, que incluye unidades cuya historia, tanto alpina como previa es diferente (unidades de manto “europeo” amalgamadas durante la orogenia Varisca con unidades que habían evolucionado en el margen norte de Gondwana). En segundo lugar, con los efectos de los diferentes eventos tectonomagmáticos que han afectado a dicho manto durante el final de la orogenia Varisca y durante el ciclo alpino y que han modificado diferencialmente la composición de distintos sectores. Un resumen esquemático de esta evolución se muestra en la figura 14.

Los eventos asociados a la orogenia Varisca, como punto de partida de la evolución alpina, supusieron una intensa modificación del manto subpirenaico, con un metasomatismo asociado a la incorporación al manto de los componentes subducidos durante la convergencia continental (véase epígrafe 2) y también la incorporación de los fundidos generados en el manto a los niveles basales de la corteza y su interacción con

fundidos generados en la corteza. Este metasomatismo generó un enriquecimiento, posiblemente diferencial, con creación de dominios diferentes de manto, situación que dejó un manto heterogéneo, variablemente enriquecido, a inicios del ciclo alpino (Lago et al, 2004), alcanzando profundidades de más de 75 km, dentro del campo de estabilidad del granate. Este manto enriquecido siguió generando fundidos de modo progresivo durante el pérmico y triásico, a la vez que iba siendo elevado como consecuencia del contexto extensional (adelgazamiento de la corteza) y su herencia es claramente apreciable en las características de estos magmatismos. A su vez, cada uno de estos eventos magmáticos indujo modificaciones, tanto en los niveles de manto afectados por fusión parcial (proceso que implica la pérdida selectiva de componentes minerales) como en los niveles superiores, en los que se inyectaron los fundidos generados.



**Figura 14.** Esquema evolutivo del manto subpirenaico con indicación de los diferentes eventos magmáticos alpinos, sus fuentes y los niveles afectados por modificaciones composicionales relacionadas con los diferentes eventos.

Tal como indican Fabries et al (1991), los fundidos toleíticos triásicos se inyectaron en niveles peridotíticos emplazados a profundidades en torno a los 45-50 km, proceso al

que siguió un metasomatismo generalizado de las peridotitas a dicho nivel, evidenciado por la formación de anfíbol rico en titanio.

El magmatismo cretácico, que presenta en parte caracteres juveniles (es decir, con participación de componentes de origen profundo, astenosférico), tal como hemos expuesto, supuso un nuevo evento de modificación del manto litosférico supirenaico. Tal como han mostrado los numerosos estudios sobre los macizos de peridotitas de los Pirineos, los magmas generados durante el cretácico modificaron profundamente la composición del manto litosférico, cristalizando parcialmente en forma de venas penetrativas, de composición rica en anfíbol, muy patentes en el caso del macizo de Lherz (Fabries et al, 1991; Downes et al, 1991). Las edades obtenidas por Henry et al (1998) en dichos anfíboles apoyan esta relación genética. Esta modificación composicional supone incluso una “refertilización” (Le Roux et al, 2007) de las peridotitas, es decir, la incorporación, en dominios discretos, de componentes que pueden generar fundidos, sobre rocas que habían adquirido un carácter refractario como consecuencia de los eventos de extracción de fundidos previos.

Finalmente, los estudios realizados sobre el magmatismo cuaternario de La Garrotxa, (Olot y áreas próximas, Gerona; Cebriá et al ,2000), han permitido mostrar que los efectos de las modificaciones composicionales desarrolladas durante el ciclo alpino, tanto por metasomatismo como por extracción de fundidos, son identificables en las rocas emitidas por este volcanismo reciente.

Este hecho junto con la herencia composicional que hemos podido mostrar entre los magmatismos alpinos pirenaicos, permiten demostrar que, en la evolución de zonas activas, los eventos tectonomagmáticos desarrollados dejan una impronta geoquímica identificable en el manto litosférico, que va a condicionar su comportamiento posterior y la composición de los magmas que se generen en eventos posteriores. El tiempo durante el cual la modificación composicional (anomalía geoquímica) relacionada con un evento magmático es identificable en productos posteriores, puede ser muy grande, de más de 200 Ma tal como muestran los datos expuestos. Esta elevada longevidad permite indicar que, incluso en zonas activas, con una dinámica intensa de las unidades implicadas, las composiciones del manto litosférico evolucionan hacia una mayor heterogeneidad, tal como resulta patente en el caso estudiado, la cordillera pirenaica.

## Referencias

- Alibert, C., 1985: A Sr-Nd isotope and REE study of late Triassic dolerites from the Pyrenees (France) and the Messejana Dyke (Spain and Portugal). *Earth and Planetary Science Letters*, **73**, 81-90.
- Amigó, J.M., Bastida, J., Lago, M., Pocovi, A., Sanz, A. y Soriano, J., 1987: Estudio de la influencia térmica del emplazamiento de doleritas (ofitas) del área de Estopiñán (Huesca y Lérida) en los sedimentos triásicos encajantes. *Cuadernos de Geología Ibérica*, **11**: 83-96.
- Arranz, E., 1997 : Petrología del macizo granítico de La Maladeta (Huesca-Lérida): estructura, mineralogía, geoquímica y petrogénesis. *Tesis doctoral*, Universidad de Zaragoza, 337 pp.
- Azambre, B.; Rossy, M. y Lago, M., 1987: Caractéristiques pétrologiques des dolérites tholéitiques d'âge triasique (ophites) du domaine pyrénéen. *Bulletin de Minéralogie*, **110**, 379-396.
- Azambre, B., Rossy, M., Albarède, F., 1992: Petrology of the alkaline magmatism from the Cretaceous North-Pyrenean Rift zone (France and Spain). *European Journal of Mineralogy*, **4**, 813-834.
- Béziat, D., Joron, J.L., Monchoux, P., Treuil, M. y Walgenwitz, F., 1991: Geodynamic implications of geochemical data for the Pyrenean ophites (Spain-France). *Chemical Geology*, **89**, 243-262.
- Bixel, F., 1984: Le volcanisme stéphano-permien des Pyrénées. *Thèse Doct. Sc.* Univ. Toulouse. Univ. Paul Sabatier, Toulouse, 637 pp.
- Bixel, F., 1988: Le volcanisme stéphano-permien des Pyrénées Atlantiques. *Bulletin Centres Recherche Exploration-Production. Elf-Aquitaine*, **12**, 661-706.
- Cabanis, B. y Le Fur-Balouet, S. (1989): Les magmatismes stéphano-permiens des pyrénées marqueurs de l'évolution géodynamique de la chaîne: apport de la géochimie des éléments en traces. *Bull.Centres Rech.Explor.-Prod. Elf-Alquitaine*, **13**, 1, 105-130.
- Cabanis, B. y Le Fur-Balouet, S. (1990): Le magmatisme Crétacé des pyrénées - Apport de la géochimie des éléments en traces – conséquences chronologiques et géodynamiques. *Bull.Centres Rech.Explor.-Prod. Elf-Alquitaine*, **14**, 1, 155-184.
- Capote, R., Muñoz, J.A., Simón, J.L., Liesa, C., Arlegui, L., 2002: Alpine tectonics I: the Alpine system north of the Betic Cordillera. En: *The Geology of Spain* (W. Gibbons y T. Moreno, Eds), 367-400. The Geological Society of London, London.
- Castañares, L.M., Robles, S., Gimeno, D. y Vicente Bravo, J.C., 2001: The submarine volcanic system of the Errigoiti formation (Albian-Santonian of the Basque-Cantabrian basin,

- Northern Spain): stratigraphic framework, Facies, and sequences. *Journal of Sedimentary Research*, **71**, nº2, 318-333.
- Castañares, L.M. y Robles, S. 2004: El vulcanismo del Albiense-Santoniense en la Cuenca Vasco-Cantábrica. En: *Geología de España* (J.A. Vera, Ed.), 306-308. SGE-IGME, Madrid.
- Cebriá, J.M., López-Ruiz, J., Doblas, M., Oyarzun, R., Hertogen, J., Benito, R., 2000: Geochemistry of the Quaternary alkali basalts of Garrotxa (NE Volcanic Province, Spain): a case of double enrichment of the mantle lithosphere. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **102**, 217-235.
- Curnelle, R. y Cabanis, B., 1989: Relations entre le magmatisme “triasique” et le volcanisme infra-liasique des Pyrénées et de l’Aquitaine – Apports de la Géochimie des éléments en traces – Conséquences Chronologiques et géodynamiques. *Bull.Centres Rech.Explor.-Prod. Elf-Aquitaine*, **13**, 2, 347-376.
- Demant, A. y Morata, D., 1996: Les dolérites tholéitiques de Gaujacq et St-Pandelon (Landes, France). *Pétrologie, Géochimie et cadre géodynamique. Bull. Soc. Géol. France*, **167**, nº 3, 321-333.
- Downes, H., Bodinier, J.-L., Thirlwall, M.F., Lorand, J.-P., Fabries, J., 1991 : REE and Sr-Nd Isotopic Geochemistry of eastern pyrenean peridotite massifs : sub-continental lithospheric mantle modified by continental magmatism. *Journal of Petrology*, (Special Lherzolites Issue), 97-115.
- Fabries, J., Lorand, J.-P., Bodinier, J.-L., Dupuy, C., 1991: Evolution of the upper mantle beneath the Pyrenees: evidence from orogenic spinel lherzolite massifs. *Journal of Petrology*, (Special Lherzolites Issue), 55–76.
- Franke, W., 1989: Variscan plate tectonics in Central Europe-current ideas and open questions. *Tectonophysics*, **169**:221-228.
- Galé, C., 2005: Evolución geoquímica, petrogenética y de condiciones geodinámicas de los magmatismos pérmicos en los sectores central y occidental del Pirineo. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 457 pags.
- Gisbert, J., 1981: Estudio geológico y petrológico del Estefaniense-Pérmico de la Sierra del Cadí (Pirineo de Lérida): diagénesis y sedimentología. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza, 317 pags.
- Gisbert, J., 1984: Las molasas tardihercínicas del Pirineo. En: *Geología de España. Libro Jubilar de J. M. Ríos* (J. A. Comba, Coord.), 168-186. IGME, Madrid.
- Gong, Z., Langereis, C.G., Mullender, T.A.T. , 2008: The rotation of Iberia during the Aptian and the opening of the Bay of Biscay. *Earth and Planetary Science Letters*, **273**, 80–93.
- Henry, P., Azambre, B., Montigny, R., Rossy, M., Stevenson, R.K., 1998: Late mantle evolution of the Pyrenean sub-continental lithosphere in the light of new  $^{40}\text{Ar}$ - $^{39}\text{Ar}$  and Sm-Nd ages on pyroxenites and peridotites (Pyrenees, France). *Tectonophysics*, **296**, 103-123.

- Hofmann, A.W., 1988: Chemical differentiation of the Earth: the relationship between mantle, continental crust, and oceanic crust. *Earth and Planetary Science Letters*, **90**, 297-314.
- Innocent, C.; Briquieu, L., & Cabanis, B., 1994: Sr-Nd isotope and trace-element geochemistry of late Variscan volcanism in the Pyrenees: magmatism in post-orogenic extension?. *Tectonophysics*, **238**, 161-181.
- Lago, M., 1980: *Estudio geológico, petrológico, geoquímico y de aprovechamiento industrial de las rocas ofíticas en el Norte de España*. Tesis Doctoral. 444 pags. Universidad de Zaragoza.
- Lago, M. y Pocovi, A., 1980: Observaciones petrográficas y tectónicas sobre las ofitas del área de Aulet (Prepirineo meridional, prov. de Huesca). *Acta Geológica Hispánica*, **15-5**: 141-151.
- Lago, M. y Pocovi, A., 1982: Nota preliminar sobre la presencia de estructuras fluidales en las ofitas del área de Estopiñán (Provincia de Huesca). *Acta Geológica Hispánica*, **17-4**: 227-233.
- Lago, M. y Pocovi, A., 1984: Aspectos geológicos y petrológicos de las doleritas triásicas (ofitas) de Cantabria. *I Congreso Español de Geología*, Vol. II: 147-160.
- Lago, M., Galé, C., Arranz, E., Vaquer, R., Gil, A., & Pocovi, A. 2000: Triassic tholeiitic dolerites (“ophites”) of the El Grado diapir (Pyrenees, Huesca, Spain): emplacement and composition. *Estudios Geológicos*, **56**, 3-18
- Lago, M., Arranz, E., Pocovi, A., Galé, C., Gil-Imaz, A. 2004: Permian Magmatism and basin dynamics in the southern Pyrenees: a record of the transition from the late-Variscan transtension to the early alpine extension. En: *Permo-Carboniferous Magmatism and Rifting in Europe*; Paper U04-19; (Wilson, M., Neumann, E.-R., Davies, R, Timmermann, M, Heeremans, M. & Larsen, B.T., Eds), 439- 464, The Geological Society of London, Londres
- Larrasoña, J. C., Parés, J.M., Millán, H., del Valle, J., Pueyo, E.L., 2003: Paleomagnetic, structural, and stratigraphic constraints on transverse fault kinematics during basin inversion: The Pamplona Fault (Pyrenees, north Spain), *Tectonics*, **22(6)**, 1071-1093.
- Lasheras, E., 1998: Geología, petrología y geoquímica del magmatismo Pérmico en el Pirineo navarro. Tesis de Licenciatura. Universidad de Zaragoza, 159 pags.
- Le Roux, V., Bodinier, J. L., Tommasi, A., Alard, O., Dautria, J. M., Vauchez, A., Riches, A. J. V., 2007: The Lherz spinel lherzolite: Refertilized rather than pristine mantle. *Earth and Planetary Science Letters*, **259(3-4)** , pp. 599–612.
- Martí, J., 1986: El vulcanisme explosiu tardihercynia del Pirineu Catala. Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, 303 pags.
- Matte, P., 1986: Tectonics and Plate Tectonics model for the Variscan Belt of Europe. *Tectonophysics*, **126**, 329-374.



- Mette, P., 2001: The Variscan collage and orogeny (480-290 Ma) and the tectonic definition of the Armorica microplate: a review. *Terra Nova*, **13**:122-128.
- McDonough, W.F., Sun, C.C., 1995: Composition of the Earth. *Chemical Geology*, **120**, 223-253.
- Montigny, R., Azambre, B., Rossy, M. y Thuizat, R., 1982: Étude K/Ar du magmatisme basique lié au Trias supérieur des Pyrénées. Conséquences méthodologiques et paléogéographiques. *Bulletin de Minéralogie*, **105** : 673-680.
- Montigny, R., Azambre, B., Rossy, M., Thuizat, R., 1986 : K-Ar study of Cretaceous magmatism and metamorphism in the Pyrenees: age and length of rotation of the Iberian Peninsula. *Tectonophysics*, **129**, 257-273
- Rossi, P., Cocherie, A., Fanning, C.M., Ternet, Y., 2003 : Datation U-Pb sur zircons des dolérites tholéitiques pyrénéennes (ophites) à la limite Trias-Jurassique et relations avec les tufs volcaniques dits « infra-liasiques » nord-pyrénéens. *C. R. Geoscience*, **335**, 1071-1080.
- Rossy, M., Azambre, B. y Albarède, F., 1992 : REE and Sr-Nd isotope geochemistry of the alkaline magmatism from the Cretaceous North Pyrenean Rift Zone (France-Spain). *Chemical Geology*, **97**, 33-46.
- Sibuet, J.C., Srivastava, S.P., Spakman, W. , 2004 : Pyrenean orogeny and plate kinematics. *Journal of Geophysical Research*, **109**, B8104.
- Solé, J., Pi, T., Enrique, P., 2003 : New geochronological data on the Late Cretaceous alkaline magmatism of the northeast Iberian Peninsula. *Cretaceous Research*, **24**, 135-140.
- Srivastava, S.P., Schouten, H., Roest, W.R., Klitgord, K.D., Kovacs, L.C., Verhoef, J., Macnab, R.: 1990. Iberian plate kinematics: a jumping plate boundary between Eurasia and Africa. *Nature*, **344**, 756 - 759
- Ubide, T., Galé, C., Arranz, E., Lago, M., 2008: Geology and composition of the Costa Brava lamprophyres. VII Congreso Geológico de España. *Geotemas*, **10**, Abstracts CD-ROM, 1425-1428.
- Ubide, T., Arranz, E., Lago, M., Galé, C., Larrea, P., Tierz, P., 2011: Magma differentiation and recharge processes: evidence from clinopyroxene compositions (Catalonian Coastal Ranges, northeast Spain). EGU General Assembly, Viena. *Geophysical Research Abstracts*, **13**, EGU2011-6888.
- Ubide, T., Arranz, E., Lago, M., Galé, C. y Larrea, P., 2012: The influence of crystal settling on the compositional zoning of a thin lamprophyre sill: A multi-method approach. *Lithos*, **132-133**, 37-49.
- Valero, B.L., Gisbert, J., 2004: El Estephaniense y Pérmico de los Pirineos. En: *Geología de España* (J.A. Vera, Ed.), 266-268. SGE-IGME, Madrid.
- Vera, J.A., Salas, R., Bitzer, K., Mas, R., Roca, E: 2001. Iberia and the Western Mediterranean. En: G.M. Stampfli, G. Borel, W. Cavazza, J. Mosar, P.A. Ziegler, Editors , *The*

- Paleotectonic Atlas of the PeriTethyan Domain*, (en CD). European Geophysical Society, Katlenburg-Lindau, Germany.
- Vielzeuf, D., 1996: La croûte hercynienne des Pyrénées: une synthèse. Chapitre 10. Metamorphisme Hercynien. En: A. Barnolas, J.C. Chiron, B. Guérangé, Eds, *Synthèse géologique et géophysique des Pyrénées*. Vol 1. , 568-576. BRGM-ITGE, Orleans-Madrid.
- Ziegler, P.A., 1990: *Geological Atlas of Western and Central Europe* (2nd Ed. ). Shell Internationale Petroleum Maatschappij, 239 pp. The Hague.
- Ziegler, P.A., Cloetingh, S., 2004: Dynamic processes controlling evolution of rifted basins. *Earth Science Reviews*, **64**, (1-2), 1-50.
- Zindler, A., Hart, S.R., 1986: Chemical Geodynamics. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, **14**, 493-571.

## Groups of order less than 32, revisited

Leyre Esteban, Rafael Tapia-Rojo, Adrián Sancho and Luis J. Boya

Departamento de Física Teórica, Universidad de Zaragoza

E-50009 ZARAGOZA, SPAIN

### Abstract

We consider all finite groups  $G$  up to order 32 (there are 93 of them) from a different point of view as usually seen. We consider first possible values for the number  $r$  of classes of conjugate elements from the relations  $N \equiv |G| = \sum_{i=1}^r d_i^2$ , where  $d_i$  is the dimension of the  $i$ -th irreducible complex representation, and  $|G| = \sum_{n=1}^r n \cdot m_s$ , the partition of elements in classes. For each possible value of  $N$ , we extract the maximum information: abelianized group, center, and some details on the classes of (outer) automorphisms. In several cases this is enough to characterize some of these groups completely.

**MSC Classification:** 20B05, 20D45

### 1 Introduction

Today finite groups up to order 2000 have been classified [5]; also, extensive studies do exist for groups e.g. up to order 32, or order power of a prime; see, for example, Coxeter-Moser, [10]; Thomas-Wood, [29]; Hall [18]; Berkovitz [3], [4] and Huppert [20]; for elementary details, up to order 8 see e.g. Lederman [22]; for order 16, Wild [32], etc. In this review we study these groups again, up to  $|G| < 32$  (there are 48 abelian for a total of  $48 + 45 = 93$  distinct groups), with a different point of view: our starting point will be the orthogonality *Burnside relation*, relating the order  $|G|$  of group  $G$  with the dimensions  $d_i$  of the  $r$  inequivalent irreducible complex representations (*irreps*), and with the same number  $r$  of classes of conjugate elements, namely the two relations

$$|G| = \sum_{i=1}^r d_i^2 = 1 \cdot 1^2 + (N - 1) \cdot 1^2 + M \cdot d_2^2 + \dots, \quad (1.1)$$

$$|G| = \sum_{n=1}^r n \cdot m_s = 1 \cdot 1_1 + \sum_n n \cdot 1_{s \neq 1} + \dots, \quad (1.2)$$

where  $1, 2, \dots, i, \dots, r$  label the *irreps*, of dimension  $d_i$ , with also the  $r$  classes, expressed in the second equation, where  $n \cdot m_s$  means there are  $n$  classes of conjugate elements, of  $m$  elements each, of period (order)  $s$ ; we stress that there are  $N \geq 1$  one-dim *irreps*, with the identical always, and the identity  $e$  is the first summand  $1 \cdot 1_1$  in (1.2). The information enclosed in (1.1) and (1.2) is plentiful: number of classes  $r$ , order of the abelianized group  $|G_{ab}| = N = 1 + (N - 1)$ , where  $G_{ab} = G/G'$  and  $G'$  being the derived or commutator (sub-)group; order of the center,  $|Z(G)| = 1 + \sum_n n \cdot 1_{s \neq 1}$ , etc. *Automorphisms* can be detected as repeated elements of same period in the abelian case; in non-abelian groups, with  $1 \leq N < |G|$ , types of *outer* automorphisms are delated by repeated classes, etc. Of course, for each relation (1.1) and (1.2) there might be several groups.

We shall employ the usual definitions and notations (see Appendix A; also [25]; [18]): we write  $G$  for a generic group,  $G_{ab}$  if we know it is abelian,  $G_n$  if its order is  $n$ . For any group  $G$ ,  $G'$  is the derived subgroup,  $Z(G) \equiv Z_G$  is the center (centre),  $G_{ab} = G/G'$  the abelianized group,  $Inn(G) = G/Z(G)$  the group of inner automorphisms (*autos*),  $Aut(G)$  the total group of *autos*,  $Out(G) = Aut(G)/Inn(G)$  the group of classes (or types) of automorphisms (*outos*).  $\#X$  at times would mark the number of elements in set  $X$ .  $|\cdot|$  means the order of some implicit group,  $*\dots*$  would mean a higher statement, not shown why in the main text. We discuss often the automorphism group (for  $G = G_{ab}$ , abelian) and the group of classes of automorphisms,  $Out(G)$ , for  $G$  which, although computable from Ref. [29], is not calculated explicitly. For any  $n$ ,  $\phi(n)$  is the *Euler totient function*, which counts the numbers  $\leq n$  coprime with it; for example,  $\phi(9) = 6$ . For the numeration of groups, we use nearly always the system in [29], which starts as  $\underline{n/1}$  for the cyclic group  $Z_n$  for any number  $n$ , then the rest of the abelian groups of this order, then direct products, etc.

Some known results (proved or hinted at in the Appendices) we use directly are:

1. The dimension  $d_i$  of the *irreps* divides the order of the group,  $|G| : d_i$ .
2. The family of *irreps* of  $G$  includes that of all quotients  $Q = G/K$ .
3. The order of the abelianized also divides the order of the group (because  $|G_{ab}| = N = |G|/|G'|$  and Lagrange's theorem).
4. If  $G$  abelian,  $N = |G|$ . If  $G$  is simple and non-abelian,  $N = 1$ .
5. If  $|G| = p^f$ ,  $p$  a prime number, the center is non-trivial,  $|Z_G| > 1$ .
6. For  $|Out(G)| > 1$ , there must be repeated classes of same period in (1.2) for  $G$ .

From this and the number of classes  $r$ , we work out many of the characteristics of the group: after doing that, we continue with the usual characterization of groups by generators and relations, and consider several items: Hasse subgroup structure, Jordan-Hölder chain(s), Character Table, automorphisms ( $Aut(G)$ ) and classes of them ( $Out(G)$ ), etc., although we are not at all exhaustive; some natural extensions of groups, including the (semi)direct product(s), and the holomorph of a group, are also indicated. Possible outer *autos* relate different classes of the same type. When a group admits two or more representations with the same dimension, we may have (but not necessarily) isomorphism between them, related to *outos* of the group or of some quotient groups. In general  $Aut(A)$  ( $A$  abelian) operates in the set (dual group)  $\hat{A}$  of *irreps* of  $A$ , and  $Out(G)$  operates in the set of *irreps* or the “dual” set  $\hat{G}$ . When actions of the group in some sets are important, we signal them also;  $G \circ \rightarrow X$  will always mean for us: the group  $G$  operates in the set  $X$ .

## 2 Review of the paper

The plan of the work is as follows. In Sect. 3 we study groups with  $|G| < 8$ , showing simply why there are precisely 8 abelian +1 non-abelian = 9 groups, and its structure. Sect. 4 deals with groups of order 8 (five of them, 3 Abelian plus 2 non-). Sect. 5 studies other groups up to order 16, with order 12 left out, for Sect. 5A; in total so far there are 20 abelian +8 = 28 groups,  $|G| < 16$ . Sects. 6 and 7 deal with  $|G| = 16$ , with 5 + 9 groups. Sects. 8 to 10 deal with the remaining groups, with  $16 < |G| < 32$ , again separating  $|G| = 24$  (for Sect. 9). The total number of groups is 48 abelian plus 45 non abelian, a total of 93. Some Tables and final comments are grouped in Sects. 11 and 12.

We shall use also at times notions and notations of *category theory*:  $\mathcal{G}$  stands for the category of all groups, and  $\mathcal{G}^{\circ\circ}$  for that of finite groups;  $Ab$  for all abelian groups,  $Ab^{\circ}$  for the finitely generated abelian groups (e. g. the integers  $Z$ ), and  $Ab^{\circ\circ}$  for that of the finite abelian groups. We include, of course, morphisms between the groups in each category. As said, we shall also use generally the notation of [29] for the number of the group: e.g. 4/2 is the *Vierergruppe*  $V$ , or second group of order 4; 24/1 is the group  $Z_{24}$ , 24/2 is  $Z_{12} \times Z_2$  etc.

There are two Appendices; Appendix A deals with general definitions and results, around subsets (subgroups), extensions and natural maps (*morphisms*); then we deal with the structure of finite abelian groups, and next categorize the action of (finite) groups  $G$  on (arbitrary) sets  $\Omega$  (orbits, fixed points, stabilizers, transitivity, etc); it also contains standard examples of families of groups (symmetric, cyclic, . . . , dicyclic, Clifford, . . .). Appendix B includes the necessary elements of Representation Theory: irreducibility, equivalence, Tables of Characters etc. Then we study all the possible groups up to two prime factors,  $|G| = pq$ ; also we recall the finite fields  $\mathbb{F}_q$  with  $q = p^f$ , power of a prime

$p$ , and the  $\mathbb{F}_q$ -linear groups  $GL_n(q)$  with some (sub)quotients (= quotients of subgroups). We deal finally with Coxeter groups [10], that is groups defined by reflections (involutions,  $a^2 = e$ ).

The notation  $Sym_n$  or  $S_n$ ,  $Alt_n$ ,  $Z_n$ ,  $D_n$  or  $Dih_n$  stands for the groups: Symmetric (order  $n!$ ), Alternating ( $n!/2$ ), Cyclic ( $n$ ), and Dihedral ( $2n$ ),  $D_n = Z_n \rtimes Z_2$ , with  $\rtimes$  meaning semi-direct product; our  $D_n$  is labelled  $D_{2n}$  very often in the literature. Later we shall define and use the *dicyclic* groups  $Q_n$ , and also the *Clifford* groups  $\Gamma_n, \Gamma_n^+$ . As above, with  $A \rtimes B$  we denote the semidirect product with kernel A (supposed abelian unless statement to the contrary); in particular  $Hol(A) := A \rtimes Aut(A)$  is the *holomorph* (group) of abelian group A. For quotient groups  $G/H = Q$ , we shall use frequently the *exact sequence* formulation  $H \rightarrow G \rightarrow Q$ , explained in detail in App. A.

### 3 Groups up to order 8

The group of one element,  $e$ , will be noted  $I$  for 1/1, so  $I = \{e\}$ , and will be not too much used in the sequel, but it will count.

For order two we have only a group:

2/1:  $Z_2 : \{a \mid a^2 = e\}$  abelian, cyclic and simple.

$$2 = 2 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1_1(e) + 1 \cdot 1_2(a) \quad (3.1)$$

The two 1-dim *irreps* are  $Id := D_0$  and  $D_0^-$ ; in the second,  $D_0^-(a) = -1$ , of course, so it is *faithful*.

In any group  $G$ , elements  $a \neq e$  with  $a^2 = e$  are called involutions: each generates a different  $Z_2$  (sub)group. We have the following four lemmas, all referred to the number 2, and very easy to prove:

**Lemma 1.-**  $H \subset G$  and  $[G : H] = 2 \Rightarrow H$  normal in  $G$  (only a coset, hence  $gH = Hg$ ).

**Lemma 2.-**  $Z_2$  normal in  $G \Rightarrow$  central also (as  $g \cdot Z_2 \cdot g^{-1} = Z_2 \Rightarrow g \cdot a \cdot g^{-1} = a$ ).

**Lemma 3.-** If, in some group  $G$ , all elements  $\neq e$  are involutions,  $G$  is abelian and, if finite,  $G \approx (Z_2)^n$ . For  $ab$  involutive means  $abab = e$ , but  $ab(ab)^{-1} = abba = e$  also, hence  $ab = ba$ ;  $G$  has, if finite, order power of two,  $G \approx (Z_2)^n$ , so  $|G| = 2^n$  with  $2^n - 1$  involutions.

**Lemma 4.-** (Cauchy)  $G \ni a$  involution,  $\Rightarrow |G|$  even; and if  $|G|$  even,  $\#$  involutions odd number. *Proof:* If  $\exists a, \exists Z_2$ ; now  $Z_2 \subset G, \Rightarrow |G|$  even (Lagrange). Now if  $|G|$  even, pair any  $g$  with  $g^{-1} \neq g$ : only involutions and  $e$  left over, so an even number; hence  $\#$

involutions is odd, and hence  $\geq 1$ .

When  $G$  is a  $Z_2$  extension of  $K$ , viz. when  $K \rightarrow G \rightarrow Z_2$ , we might write  $G = K \cdot 2$ ; when  $G$  is a  $Q$ -extension of  $Z_2$ , viz. when  $Z_2 \rightarrow G \rightarrow Q$ , we can write  $G = 2 \cdot Q$ . This is the notation of the Atlas [12]; see also [16]. Some common examples follow:

1.  $Sym_n/Alt_n = Z_2$ , or  $S_n = Alt_n \cdot 2$
2.  $*O(n)/SO(n) = Z_2$ , or  $O(n) = SO(n) \cdot 2$  [ $O(n)$ , orthogonal;  $SO(n)$ , rotations]
3.  $D_n/Z_n = Z_2$ , or  $D_n = Z_n \cdot 2$
4.  $Z_2 \rightarrow SU(2) \rightarrow SO(3)$ , or  $SU(2) = 2 \cdot SO(3)$ ; in general
5.  $Z_2 \rightarrow Spin(n) \rightarrow SO(n)$ , or  $Spin(n) = 2 \cdot SO(n)*$

As a fact, groups reflect symmetries of particular systems; for a general introduction to groups from this point of view, see [26]. See also the original [21].

The Coxeter diagram for  $Z_2$  is simply  $\circ$  (meaning a single generator  $a$ , with  $a^2 = e$ ). The character Table and the Hasse subgroup structure are trivial here, so we shall show them later, in more complicated groups. As  $Z_2$  is already simple, the Jordan - Hölder chain (J-H) is simply  $\{Z_2, e\}$ . There is only the Id automorphism in  $Z_2$ , as  $(e, a)$  must go to  $(e, a)$  under any *auto*: indeed  $Z_2$  is the *only* group  $G \in \mathcal{G}$  with no non-trivial *autos*:

**Lemma 5.-**  $Aut(G) = I \Leftrightarrow G = Z_2$  :  $Z_2$  is the ONLY group with not more than the trivial automorphism  $\alpha = Id$ .

*Proof* : if  $G$  is non-abelian, it has inner autos; and in any abelian group with *more* than involutions the map  $\alpha : a \rightarrow a^{-1}$  is a non-trivial automorphism. Finally if e.g. is  $A = (Z_2)^k$ ,  $k > 1$  we have *autos*; in particular (see below, 4/2) if  $A = Z_2^2 = V$ , with involutions  $(a, b, ab)$ , e.g. the map  $\alpha : a \rightarrow b \rightarrow a$  is *auto*. *qed*.

$Z_2$  is also the additive group of the *finite field*  $\mathbb{F}_2$ ; see App. B. Therefore, the *elementary abelian* group  $(Z_2)^k$  can be written also as the  $k$ -dim vector space  $\mathbb{F}_2^k$  over  $\mathbb{F}_2$ , with Automorphism group the linear group  $GL_k(2)$ ; we have  $GL_1(2) = I$ , but we shall see that  $GL_{2,3,4}(2)$  are important groups, which we shall encounter later; note  $\mathbb{F}_2^* = \mathbb{F}_2 \setminus \{0\}$ , the multiplicative group of the field, is just  $I$ .

*Even* order for *simple nonabelian* groups is the famous Feit-Thomson\* result: any odd order group is *solvable*, hence cannot be simple. Also in the '60s, the search for centralizers of involutions (Brauer) were instrumental in completing the list of finite simple groups [14].

---

\*The Feit-Thomson result (1963) [13]: any odd order group is solvable.

For order three 3, again we have only  $Z_3$ , as *abelian*, *cyclic* and *simple*.

$$\underline{3/1} : \quad 3 = 3 \cdot 1^2 . - \quad 3 = 1 \cdot 1_1(e) + 2 \cdot 1_3(a, a^2). - \quad Z_3 : a; a^3 = e; Z_3 \equiv \{e, a, a^2\} \quad (3.2)$$

If  $\mathbb{C} \ni \omega := \exp(2\pi i/3)$  (= rotation by  $120^\circ$ ), besides the identical *irrep*  $D_0 := \chi(a) = 1$  for  $Z_3$ , one faithful *irrep* is  $\chi(a) = \omega$ , or  $D_1 \equiv \chi(e, a, a^2) = (1, \omega, \omega^2)$ ; the other is the conjugate  $D_2(\dots) = (1, \omega^2, \omega)$ ; this is related to  $Aut(Z_3)$ :

Now we have  $Aut(Z_3) = Z_2$ , namely  $\alpha \neq Id$  is the map to the inverses for  $a, a^2$  (resp.  $(a^2, a)$ ). Hence the *holomorph* will have order 6; indeed, as we shall prove *later*,

$$Hol(Z_3) \equiv A \rtimes Aut(A)|_{A=Z_3} = Z_3 \rtimes Z_2 = S_3 = D_3. \quad (3.3)$$

We have also  $Alt_3 = Z_3$ , as  $|Alt_3| = 6/2 = 3$ .  $Z_3$  is also the rotation symmetry of the regular triangle,  $Rot(\Delta) = Z_3$ . The involution  $\alpha$  in  $Aut(Z_3) = Z_2$ , as hinted, also changes the two  $D_{1,2}$  1-dim *irreps* (out of the identical  $D_0$ ): this is a general feature; as said, the *Aut* of an abelian group operates in its *irreps*. Finally  $\mathbb{F}_3$  is the 3-element field;  $GL_1(3) = \mathbb{F}_3^* = Z_2$  and, for example,  $|PSL_2(3)| = (3^2 - 1)(3^2 - 3)/2/2 = 12$ ; in fact,  $PSL_2(3) \approx Alt_4$ , see later, and  $|GL_2(3)| = 48$ .

In any  $G$ , elements  $a, a \neq e, a^3 = e$  will be called *cubic*; if  $G$  contains cubics,  $|G| : 3$ , again from Lagrange's. The number of cubics is even (if  $a$  cubic,  $a^2 \neq a$  also), but the number of  $Z_3$  subgroups might be even (including zero) or odd.

For order four 4 = 2<sup>2</sup> we have only  $4 = 4 \cdot 1^2$  from Burnside's, so group(s) are abelian; if  $\exists a, a^4 = 1$ , the group must be  $Z_4$ ; if not, we have the group  $V := Z_2 \times Z_2$  (Lemma 3), an *elementary abelian* group, as the only other possibility. Consider first the cyclic case  $Z_4$ :

$$\underline{4/1} \quad Z_4 = \{a \mid a^4 = 1\} = \{e, a, a^2, a^3\}. - \quad 4 = 1 \cdot 1_1(e) + 1 \cdot 1_2(a^2) + 2 \cdot 1_4(a, a^3) \quad (3.4)$$

The only nontrivial *auto* is the map  $\alpha : a \rightarrow a^{-1} = a^3$ , so  $Aut(Z_4) = Z_2$ ; hence  $Hol(Z_4) := Z_4 \rtimes Z_2 = D_4$ , a *dihedral group*, see below. The (unique) Jordan-Hölder (JH) chain is  $\{Z_4, Z_2, e\}$ .

$Z_4$  has four *irreps* 1-dim, of course. The two *faithful* ones are  $\chi(e, a, a^2, a^3) \Rightarrow (1, \pm i, -1, \mp i)$ ; besides the identical *irrep*, the map  $Z_4 \rightarrow Z_2$  provides the fourth one, unfaithful. The Hasse subgroup diagram is simply:

$$\begin{array}{ccc} \text{(all) } Z_4 \text{ (order 4)} & & (3.5) \\ | & & \\ \text{(} a^2 \text{) } Z_2 \text{ (order 2)} & & \\ | & & \\ \text{(} e \text{) } I & & \end{array}$$



$Z_4$  is the rotation symmetry group of the square  $\square$ , and the isometry group of the *Swastika*.

Consider now the *Vierergruppe*  $V$  of F. Klein (or four-group)  $\approx Z_2^2$ :

$$\underline{4/2} \text{ or } V : \{e, a, b, ab\} \text{ with } a^2 = b^2 = (ab)^2 = e. - \quad 4 = 1 \cdot 1_1(e) + 3 \cdot 1_2(a, b, ab) \quad (3.6)$$

It has NO faithful *irreps*; besides the identical  $D_0$ , the other three are  $(1, a', b', a'b')$  with  $a' = \pm 1, b' = \pm 1$ . The reason is, there are three quotients  $V \rightarrow Z_2$ , which have to be represented by their (faithful) *irrep*.

The Hasse diagram is ( $3^*Z_2$ : there are three subgroups type  $Z_2$ )

$$\begin{array}{c} V \\ | \\ 3^*Z_2 \\ | \\ I \end{array} \quad (3.7)$$

As Automorphism group, any  $\alpha \in \text{Aut}(V)$  must permute the involutions:  $(\alpha_1(a) = b, \alpha_1(b) = a)$  generates  $Z_2$ , but  $(\alpha_2(a) = b \text{ and } \alpha_2(b) = ab)$  generates  $Z_3$ : hence  $\text{Aut}(V) = S_3$ , which creates the holomorph of  $V$  as a rather large (Hol) group:

$$\text{Hol}(V) := V \rtimes S_3 = S_4 \text{ (as we shall see), order } 4 \times 6 = 24 \quad (3.8)$$

Now  $V$  can be considered also as  $\mathbb{F}_2^2$ , the 2-dim vector space over the finite field  $\mathbb{F}_2$  (App. 2). For  $V \approx \mathbb{F}_2^2$ , the automorphism group must be  $GL_2(2)$ : we shall exploit later the natural isomorphism (as we know  $GL_2(2)$  cannot be abelian)

$$GL_2(2) \approx S_3 = D_3 \quad \text{as order } (2^2 - 1)(2^2 - 2) = 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6. \quad (3.9)$$

Finally, the Coxeter *diagram* for  $V$  is just two unconnected balls:  $o \ o$  (so  $G = Z_2 \times Z_2$ ). As subgroup of  $Alt_4$ ,  $V \subset Alt_4$  contains permutation  $(12)(34)$ , etc.). Finally, recall the three extensions  $V \rtimes Z_2 (\approx D_4)$ ,  $V \rtimes Z_3 (\approx Alt_4)$ ,  $V \rtimes S_3 (\approx Sym_4)$ , see below Sect. 4),  $V \rtimes S_3 (\approx Sym_4)$ , see below Sect. 9).

Order five, 5 prime number, so only a group:

$$\underline{5/1} \text{ or } Z_5 : \{a \mid a^5 = e\} \text{- Finite, abelian, cyclic and simple. } 5 = 5 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1_1 + 4 \cdot 1_5$$

$\text{Aut}(Z_5) = Z_4$ , as any *auto*  $\alpha$  maps  $a$  to any power  $a^k, k \neq 0$ . So we have  $\text{Hol}(Z_5) := Z_5 \rtimes Z_4$ , order 20.- In particular it contains  $D_5 := Z_5 \rtimes Z_2$ , order 10.

If  $\phi = \exp(2\pi i/5) = \text{rotation by } 72^\circ$ , and  $D_0$  is the identical *irrep*, the second  $D_1$  can be defined by  $a \rightarrow \phi$ , and the other three  $\neq id$  as variations, e.g.  $a \rightarrow \phi^2$  etc., permuted cyclically by  $\text{Aut}(Z_5) = Z_4$ , see below in detail for  $Z_7$ .

$Z_5$  is the rotation symmetry group of the regular pentagon  $\diamond$ . Regular polytopes (generalization of *regular* polyhedra in any dimension) might have pentagonal faces in 2, 3 and 4 dimensions *only*.

Groups of order six. There is a single abelian one,  $Z_6$ , as  $6 = 2 \cdot 3$ , primes, and one has the cyclic group

$$\underline{6/1} \quad Z_6 : \{a \mid a^6 = e\}. - \quad Z_6 = Z_2 \times Z_3, \quad \text{or} \quad \{b, c \mid b^3 = c^2 = e; bc = cb\} \quad (3.10)$$

The equations type ( $Z_6 = Z_2 \times Z_3$ ) are NOT true in general (e.g.  $Z_4 \neq \{Z_2 \times Z_2\}$ ; it is true for  $Z_p \times Z_q$ , with  $p \neq q$  primes). The isomorphism in (3.10)  $\iota : Z_6 \approx Z_2 \times Z_3$  is proved e.g. by  $\iota(a) = bc$ .

$|G| = 6$  group(s), non-abelian. One writes  $6 = N \cdot 1^2 + M \cdot 2^2$ , as  $3^2 = 9 > 6$ . Now  $6 > N \geq 1$  if  $G$  nonabelian, and  $N$  divisor of 6: the only solution is  $6 = 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2$ : so  $\#$  classes  $\equiv r = 3$ , there are possibly just *three* classes, and the abelianized group being of order two, it has to be  $Z_2$ , and then the derived  $G'$  has to be  $Z_3$ .  $G$  of order 6 must have elements  $\neq e$  of order 2 and 3, the number of 3 even ( $a \neq a^2$ ), but that of 2 odd (Cauchy; see our Lemma 3 in 2/1); hence, as  $Z_3$  normal, the only solution is 2 elements of order 3 and 3 of order 2. That is, in classes

$$6 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 3_2 + 1 \cdot 2_3 \quad (3.11)$$

Hence  $Z_3$  is a unique subgroup and so must be normal (Sylow), and it is the derived group  $G'$ : so from  $G' \rightarrow G \rightarrow G_{ab} = Z_2$ , it is  $Z_3 \rightarrow G \rightarrow Z_2$ ; now  $\text{Aut}(Z_3) = Z_2$ , hence there is a unique solution  $D_3 := Z_3 \rtimes Z_2$ , order  $3 \cdot 2 = 6$ ; so there is only a group, which of course is the smallest nonabelian group:

$$\underline{6/2} \quad D_3 = Z_3 \rtimes Z_2 = S_3; \quad \{a, \alpha \mid a^3 = \alpha^2 = 1, \alpha a \alpha^{-1} = a^2 = a^{-1}\} \quad (3.12)$$

Now, trivially,  $3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ , and one shows at once that  $D_3 = S_3$ : the 3 order-two elements are the permutations (12), (23) and (13), and the 2 order-3 are (123) and (132).

The full group diagram is simply:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & I & & \\
 & & \downarrow & & \\
 Z_3 & \longrightarrow & S_3 & \longrightarrow & Z_2 \\
 & & \downarrow & & \\
 & & S_3 & \longrightarrow & S_3 \quad (\text{i.e., no } \textit{outos})
 \end{array} \tag{3.13}$$

To see another form, take again  $\mathbb{F}_2$ , the Galois field of order two  $\{1, 0\}$ . The projective line (App. B)  $\mathbb{F}_2P^1$  has three elements (say  $0, 1, \infty$ ), and indeed the projective group  $PGL_2(2) = GL_2(2)$  is  $S_3$  also, because  $\mathbb{F}_2^2 \approx V$  (see 4/2). Notice, for the field  $\mathbb{F}_2$ ,  $GL_n(2) = PGL_n(2) = SL_n(2) = PSL_n(2)$  (because  $\mathbb{F}_2^* = \{1\}$ ).

Finally, as isometry of regular triangles  $\triangle$ ,  $Z_3$  is the rotation group and  $S_3$  the full isometry group... The Coxeter diagram for  $S_3$  is clearly  $o - o$ , as any link with no mark is supposed to be of period 3 (Cfr. App. B): the group is also formed with  $\{a, b\}$  as reflections, by  $a^2 = b^2 = (ab)^3 = e$ .

So for the smallest nonabelian group we have many characterizations, to repeat:

$$D_3 = S_3 = Z_3 \rtimes Z_2 = Sym_3 = PSL_2(2) = GL_2(2) = Hol(Z_3) = Z_3 \rtimes Aut(Z_3) \tag{3.14}$$

Regular hexagons  $\square$  tessellate the plane optimally; this is probably why honeycombs by bees are made out of hexagons...

The definition for  $Z_7$  is of course  $\{a \mid a^7 = e\}$ , with

$$\underline{7/1} \quad Z_7 : \{7 = 7 \cdot 1^2\}. - \quad 7 = 1 \cdot 1_1 + 6 \cdot 1_7 \quad \text{again abelian, cyclic and simple} \tag{3.15}$$

What about automorphisms  $\alpha$ ? They are defined by the image of generator  $a : \alpha(a)$ ; as the map might be any power  $\alpha(a) = a^k$ ,  $k \neq 0$ , the group is  $Aut(Z_7) = Z_{p-1|p=7} = Z_6 = Z_2 \times Z_3$ . Hence the Holomorph  $A \rtimes Aut(A)$  is  $Z_7 \rtimes Z_6$ , of order  $7 \cdot 6 = 42$ . Of course, the Dihedral extension is included,  $D_7 \subset Hol(Z_7)$ , as  $D_7 = Z_7 \rtimes Z_2$ , where the single non-trivial *auto* is only  $\alpha(a) = a^{-1} = a^7$ , as we shall see; compare discussion after 5/1.

We include the whole Character Table for completeness; if  $\Phi \equiv$  rotation by  $2\pi/7 \approx 51^\circ$ , it is

$Z_7$  is the rotation symmetry of the regular heptagon, and  $D_7$  the full isometry group (rotations and reflections) of the same; it is also the periodicity of the white keys in the *piano* musical instrument.

7 is also a number with religious resonances: the seven arms of the jewish candelabrum; or the seven days of creation (Jews and Christians), the 7-day week, etc.

	1A	7A	7B	7C	7D	7E	7F
$\chi_0$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1$	1	$\Phi$	$\Phi^2$	$\Phi^3$	$\Phi^4$	$\Phi^5$	$\Phi^6$
$\chi_2$	1	$\Phi^2$	$\Phi^4$	$\Phi^6$	$\Phi$	$\Phi^3$	$\Phi^5$
$\chi_3$	1	$\Phi^3$	$\Phi^6$	$\Phi^2$	$\Phi^5$	$\Phi$	$\Phi^4$
$\chi_4$	1	$\Phi^4$	$\Phi$	$\Phi^5$	$\Phi^2$	$\Phi^6$	$\Phi^3$
$\chi_5$	1	$\Phi^5$	$\Phi^3$	$\Phi$	$\Phi^6$	$\Phi^4$	$\Phi^2$
$\chi_6$	1	$\Phi^6$	$\Phi^5$	$\Phi^4$	$\Phi^3$	$\Phi^2$	$\Phi$

Table 1.— Character Table

#### 4 Order 8

Let us work out now possible groups of order 8. First, there are the three abelian cases, as  $8 = 2^3$  and  $\text{Part}(3) = 3$ :  $[3]$ ,  $[2, 1]$  and  $[1, 1, 1]$ , see App. A. If there is an element of order 8, it generates  $Z_8$ , the *cyclic* group; if all elements  $\neq e$  are involutions, the group is  $(Z_2)^3$ , an *elementary abelian* group; and if there are 4-th order elements (but not 8-th), the abelian group has to be  $Z_4 \times Z_2$ :

$$G_8, \quad \text{Abelian : } Z_8; \quad Z_4 \times Z_2; \quad (Z_2)^3 \quad (4.1)$$

$$\underline{8/1} \quad Z_8 : \quad \{a \mid a^8 = e\}. \quad - \quad 8 = 1 \cdot 1_1(e) + 1 \cdot 1_2(a^4) + 2 \cdot 1_4(a^2, a^6) + 4 \cdot 1_8(\text{rest}) \quad (4.2)$$

Let us look for its *automorphism* group; as  $Z_8$  is cyclic, any auto  $\alpha$  is defined once  $\alpha(a)$  is known;  $\alpha(a)$  can be  $a, a^3, a^5$  or  $a^7$ : these  $\alpha \neq Id$  are *involutions* (and commute), e.g. if  $\alpha(a) = a^5, \alpha(a^5) = a^{25} \equiv a \Rightarrow \alpha^2 = Id$ . Therefore

$$\text{Aut}(Z_8) = (Z_2)^2 = V \quad (4.3)$$

Because this, we shall see that  $Z_8$  admits *three* different  $Z_2$  extensions, not only the conventional Dihedral  $D_8 = Z_8 \rtimes Z_2$  (see order 16, Sect. 7).

As for  $A = (Z_2)^3$ , it is the 3-dim vector space over the  $\mathbb{F}_2$  field,

$$\underline{8/3} \quad (Z_2)^3 \approx \mathbb{F}_2^3 = (a, b, c). \quad - \quad 8 = 1 \cdot 1_1(e) + 7 \cdot 1_2(a, b, c; ab, ac, bc; abc). \quad (4.4)$$

Hence the Automorphism group is some matrix group:

$$\text{Aut}((Z_2)^3) = \text{Aut}(\mathbb{F}_2^3) = GL_3(2) \equiv PSL_3(2) = PSL_2(7) \quad (4.5)$$

$$\text{order } (2^3 - 1)(2^3 - 2)(2^3 - 4) = 168 = (7^2 - 1)(7^2 - 7)/(7 - 1)/2$$

168 is the order of the *second smaller* nonabelian simple group (the *first* is  $Alt_5$ ); for a modern outlook see [15]. Both  $GL_3(2)$  and  $PSL_2(7)$  are of same order and simple (see Appendix B), to they must be *isomorphic* (the smallest number for two different *simple* group of *same* order is bigger than 20000: see (Artin [1]) ). If  $\{a, b, c\}$  generate  $(Z_2)^3$ , in any auto  $\alpha : a \rightarrow \alpha(a)$ ,  $a$  can go to 7 positions, then  $b$  only 6, as  $\alpha(b) \neq \alpha(a)$ , but  $c$  only four, as  $a, b$  and  $ab$  have already prefixed positions; hence directly we obtain  $|Aut(Z_2^3)| = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ . Now the group  $PGL_2(7)$  acts naturally and sharp 3-transitive (App. B) in the  $8(= 7 + 1)$ -point projective line  $\mathbb{F}_7P^1$ , hence is of order  $(49 - 1)(49 - 7)/6 = 336$ , so  $|PSL_2(9)| = 168 = 336/2$ . Recall  $Aut(Z_2^2) = S_3$ , arbitrary permutations of  $a, b$  and  $ab$ . But here,  $|Aut(Z_2^3)| = 168 \ll |S_7| = 5040$ ; \*for analogous reasons, if  $\mathbb{H}$  and  $\mathbb{O}$  are the division algebras of the *quaternions* and *octonions*, resp.,  $Aut(\mathbb{H}) = SO(3)$ , while  $Aut(\mathbb{O}) = G_2 < (!)SO(7)$ : as Lie groups,  $dim G_2 = 14 < dim SO(7) = 21^*$ .

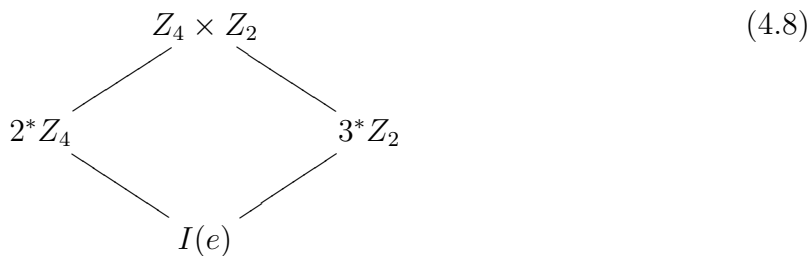
Next we have  $Z_4 \times Z_2$ : suppose is generated by  $a$  and  $b$  ( $a^4 = b^2 = e$ ;  $ab = ba$ ); then

$$\underline{8/2} \quad Z_4 \times Z_2. - \quad 8 = 1 \cdot 1_1(e) + 3 \cdot 1_2(a^2, b, ba^2) + 4 \cdot 1_4(a, a^3, ba, ba^3) \quad (4.6)$$

As for  $Aut(Z_4 \times Z_2)$ , as any *aut* element  $\alpha$  keeps order, so it must map  $a$  to  $(a, a^3, ba$  or  $ba^3)$ , while  $b$  maps to  $(b, or  $ba^2)$ : the possible map  $b$  to  $a^2$  is fixed for  $\alpha(a)$  (the inverse): so we have  $4 \cdot (3 - 1)$  cases: *eight* possible *autos*; they go from  $\alpha_0 = id$ ,  $\alpha_1(a, b) = (a, a^2b)$ ;  $\alpha_2(a, b) = (a^3, b) \dots$  up to  $\alpha_7(a, b) = (a^3b, a^2b)$ .  $\alpha_5$  and  $\alpha_7$  have order four, the rest two. Hence the *Aut* group has to be  $D_4 := Z_4 \times Z_2$ , (see Sect. 7) as the only rival,  $Z_4 \times Z_2$  itself, has four elements of order 4, see (4-6). This remarkable result is also proved directly in [32]:$

$$Aut(Z_4 \times Z_2) = D_4 \quad (4.7)$$

The Hasse diagram for  $(Z_4 \times Z_2)$  is worth to describe ([29], type 8/2):



Classes for order 8: call  $n_{1,2,4,8}$  the number of elements of each order in any  $G$ ,  $|G| = 8$ ; we have  $n_1 = 1$  in all cases; in the nonabelian ones,  $n_8 = 0$  (otherwise the group is  $Z_8$ ), and  $n_2 < 7$  (otherwise the group is  $(Z_2)^3$ ). On the other hand,  $n_2$  is odd, and  $n_4$  even (because Lemma 4 above and: if  $a$  is order four,  $a^3 \neq a$  is also).

Non abelian groups of order 8; Burnside's relation is *unique*, as in  $8 = N \cdot 1^2 + M \cdot 2^2$  is  $N < 8$  if nonabelian: so

$$8 = 4 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 \quad (r = \#classes = 5) \quad (4.9)$$

Hence, the derived group  $G'$  is  $= Z_2$ , implied by abelianized  $G_{ab}$  of order 4; but now, derived  $Z_2$  implies Center contains  $Z_2$ , because  $Z_2$  normal implies  $Z_2$  central (see Lemma 2 in Sect. 3); and we have to solve for number of involutions ( $n_2$ ) and number of elements of order four ( $n_4$ ).  $n_2$  has to be odd (Cauchy, see Lemma 3.); the fourth order elements go in pairs  $(b, b^3)$ ; so we have *three* cases:

$$(n_2, n_4) = (1, 3 \cdot 2), \quad \text{or} \quad (3, 2 \cdot 2) \quad \text{or} \quad (5, 1 \cdot 2) \quad (4.10)$$

In the *third* case, the  $Z_4$  is unique, so normal (Sylow), and the solution of  $Z_4 \rightarrow G_8 \rightarrow Z_2$  is clearly  $G_8 \equiv D_4 = Z_4 \rtimes Z_2$ : the Dihedral group (of order 8), or 8/4. In the *first case*, if  $i$  and  $j$  are order-four, the squares coincide, and  $ij$  must be also of order four: the group is called the Quaternion group 8/5, specified as  $Q := \pm(1, i, j, ij)$ , with  $i \cdot j \cdot i^{-1} = -j$  etc. One writes a quaternion (Hamilton, 1842) as  $q = u + xi + yj + z(ij) \in \mathbb{H}$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

As for the second solution in 4.10, it leads to  $Z_4 \times Z_2$  or 8/2 of above, and to nothing else. Hence the two nonabelian groups of order 8 are

$$D_4 = Z_4 \rtimes Z_2 : (n_2, n_4) = (5, 2) \quad \text{and} \quad Q : (n_2, n_4) = (1, 6) \quad (4.11)$$

In both nonabelian cases the center is  $Z_2$ : this is to be expected, as in any  $p$ -Group (= order  $p^f$ ) the center is never trivial [25].  $D_4$  is the full symmetry group of the regular square; it is also called *octic group*.  $Q$  is the quaternion group, also called  $Q_2$  (dicyclic) and  $\Gamma_2$  (Clifford) (see just below).

For the octic group  $D_4$ , the class split is, as  $D_4 = Z_4(a) \rtimes Z_2(\alpha)$ :

$$\underline{8/4} \quad 8 = 1 \cdot 1_1(e) + 1 \cdot 1_2(a^2) + \bar{2} \cdot 2_2(\alpha, \alpha a^2; \alpha a, \alpha a^3) + 1 \cdot 2_4(a, a^3), \quad (4.12)$$

hence it admits a *unique* involutive *outo* (changing classes in  $2 \cdot 2_2$ ):  $Out(D_4) = Z_2$ ; however, it *cannot* be implemented as semidirect product, as one shows that the inverse image of that  $Z_2$  in  $Aut(D_4)$  is  $Z_4$ , not  $Z_2$ . We have  $|Aut(D_4)| = |Inn| \cdot |Out| = 8$ ; indeed, one shows  $Aut(D_4) = D_4$ , inspite having a center! (Compare  $S_3 = Aut(S_3)$  above; this peculiarity of  $D_4$  is noted also by Robinson [25] p. 30). In other words, one has the curious result

$$Z_4 \rtimes Z_2 = D_4 = V \rtimes Z_2 \quad (4.13)$$

which can be proved directly as isomorphism  $\iota : (e, b, a^2, ba^2)$  makes up  $D_4$  as  $V \rtimes Z_2$ .

As for  $Q = \pm(1, i, j, ij = k)$ , the class split is different,

$$\underline{8/5} \quad 8 = 1 \cdot 1_1(e) + 1 \cdot 1_2(-1) + \bar{3} \cdot 2_4(\pm i, \pm j, \pm ij) \quad (4.14)$$

( $-1 = i^2$  etc.) and hence the  $Aut$  group can be up to  $S_3$ ; it is  $S_3$ , as one can map  $i$  to three values  $i, j, ij$ , and then  $j$  to two only, so  $|Aut| = 3 \cdot 2$ , and being non-abelian, it has to be  $S_3$ .

For another construction of  $Q$  from  $Z_4$ , see [32]

In App. A (examples) we gave the definitions of *Clifford*  $\Gamma_n$  [6] and *dicyclic* groups  $Q_n$ ; that accepted, we can write at once

$$Q = \Gamma_2, \text{ and } \Gamma_2^+ = Z_4 \quad . - \quad Q = Z_4 \rtimes_{/2} Z_4 \equiv Q_2 \quad (4.15)$$

Recall (App. A and B) a (finite)  $p$ -Group is a group of order  $p^f$ . A  $p$ -group is called *extraspecial*, if the center  $Z(G)$  is  $Z_p$  and the quotient  $Inn(G) := G/Z(G)$  is the elementary abelian group  $(Z_p)^{f-1}$ ; one shows [14] that  $f$  is odd,  $f = 1 + 2n$ . In our simple case  $8 = |G| = 2^{1+2 \cdot 1}$  we see our two groups  $D_4$  and  $Q$  are extraspecial (center  $Z_2$  and quotient  $V$  in both cases); notice also  $G'$  and  $G/G'$  behave similarly as  $Z(G)$  and  $G/Z(G)$ . Extraspecial groups are important because they show up as *centralizers of involutions*, and as such they were instrumental for the big advances in the '60 and '70s in the search for finite simple groups [14], [24].

This completes the study of the  $(3+2)$  8-order groups. Notice how fast the number of groups grows with the prime factors in the order: if  $|G| = p$ , only 1 group; if  $|G| = pq$ , at most two; and if  $|G| = pqr$ , at most five (as we shall see); generally the number of groups with four factors is 15. So up to order  $\leq 8$ , we have in total 14 groups, 3 non-abelian.

## 5 Groups with order $8 < |G| < 16$

Exclude  $|G| = 12$  for the moment (studied at the end, Sect. 5A). From now on we shall use directly some results of the Appendices; so for example, for orders  $|G| = p$ ,  $p^2$  or  $pq$ , we shall take directly the results for granted.

Order 9.-  $|G| = 9$ ; as  $3^2 = 9 \cdot 1^2$  only possibility, the groups are abelian, and there are *two* of them, as  $9 = 3^2$  and  $Part(2) = 2$ , namely  $Z_9$  and  $(Z_3)^2$ .

$$\underline{9/1} \quad Z_9 - \{a \mid a^9 = e\} \quad 9 = 1 \cdot 1_1(e) + 2 \cdot 1_3(a^3 \text{ and } a^6) + 6 \cdot 1_9(\text{rest}) \quad (5.1)$$

so the group is (abelian and) cyclic. As for *autos*,  $|Aut(Z_9)| = \phi(9) = 6$ : the function of Euler  $\phi(n)$ , counting the number of coprimes with  $n$  (here 2, 4, 5, 7, 8 and 9). One sees easily that  $\alpha(a) = a^2$  is of order 6, hence

$$Aut(Z_9) = Z_6 \quad \alpha(a) = a^2 \quad (5.2)$$

As for the other group,  $Z_3 \times Z_3$ , it is an elementary abelian group,  $\approx \mathbb{F}_3^2$ , with  $\mathbb{F}_3$  the (Galois) field with 3 elements, and therefore

$$\underline{9/2} \quad Z_3 \times Z_3 \approx \mathbb{F}_3^2 \quad . - \quad 9 = 1 \cdot 1_1(e) + 8 \cdot 1_3 \quad (5.3)$$

$|Aut(Z_3 \times Z_3)| = |GL_2(3)| = (3^2 - 1)(3^2 - 3) = 48$ .  $Hol(Z_3^2) = Z_3^2 \rtimes G_{48} = G_{432}$ . As reasoning, if  $Z_3^2$  has points (elements)  $(e; a, a^2; b, b^2; ab, a^2b, ab^2, a^2b^2)$ , under *auto*  $\alpha$   $a$  can go to eight points, but then  $b$  to six:  $\alpha(a)$  and  $\alpha(a^2)$  excluded; hence, order  $8 \cdot 6 = 48$ .

Order ten.- As  $10 = 2 \cdot 5$ , both primes, there are only the two known solutions, namely the cyclic  $Z_{10} = Z_5 \times Z_2$  and the Dihedral,  $D_5 = Z_5 \rtimes Z_2$ :

$$\underline{10/1} \quad Z_{10} : \{a \mid a^{10} = e\}; \quad Z_{10} = Z_5 \times Z_2. \quad - \quad 10 = 1 \cdot 1_1(e) + 1 \cdot 1_2(a^5) + 4 \cdot 1_5(a^{2,4,6,8}) + 4 \cdot 1_{10} \quad (5.4)$$

The  $Aut(Z_{10})$  group is easy to compute: as 2, 5 are prime,

$$Aut(Z_{10}) = Aut(Z_5 \times Z_2) = Aut(Z_5) \times Aut(Z_2) = Z_4 \times \{e\} = Z_4 \quad (5.5)$$

Hence e.g.  $|Hol(Z_{10})| = 40$ .

$$\underline{10/2} \quad D_5 = Z_5 \rtimes Z_2. \quad - \quad (a^5 = \alpha^2 = 1; \alpha \cdot a \cdot \alpha^{-1} = a^{-1}, \text{ or } \alpha \cdot a \cdot \alpha = a^4). \quad (5.6)$$

$$10 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2. \quad - \quad 10 = 1 \cdot 1_1(e) + 1 \cdot 5_2 + \bar{2} \cdot 2_5$$

There is clearly a leftover *auto*, as  $|Hol(Z_5)| = 20$ :  $Out(D_5) = Z_2$ , changing the two order-5 classes. The complete structure is given by the diagram

$$\begin{array}{ccc} & D_5 & \\ & / \quad \backslash & \\ Z_5(a) & & 4^* Z_2(\alpha, \alpha a, \dots) \\ & \backslash \quad / & \\ & I & \end{array} \quad (5.7)$$

11/1 Order 11 .- As 11 is prime, only  $\exists Z_{11}$  ( $a \mid a^{11} = e$ ), with  $Aut(Z_{11}) = Z_{10} = Z_2 \times Z_5$ . If  $\alpha$  is the generating *auto*,  $\alpha(a) = a^2$ , etc. As before,  $Z_{11}$  is abelian, cyclic and simple.

13/1. Same with 13, another prime,  $Z_{13}$ ; and, of course,  $Aut(Z_{13}) = Z_{12} = Z_4 \times Z_3$ .

Order 14.- The abelian case,  $Z_{14}$  is of course  $\approx Z_7 \times Z_2$  and unique; there is also the dihedral  $D_7$ , as the only non-abelian; so *in toto*:

$$\underline{14/1} \quad Z_{14} = Z_7 \times Z_2. \quad - \quad \text{Abelian and cyclic.} \quad - \quad Aut(Z_{14}) = Aut(Z_7) = Z_6 \quad (5.8)$$



$$\begin{aligned} \underline{14/2} \quad D_7 = Z_7(a) \rtimes Z_2(\alpha), \quad a^7 = \alpha^2 = 1, \quad \alpha \cdot a \cdot \alpha = a^6. \quad - \quad 14 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2. \quad - \\ 14 = 1 \cdot 1_1(e) + 1 \cdot 7_2(\alpha, \alpha a, \dots, \alpha a^6) + \bar{3} \cdot 2_7 \end{aligned} \quad (5.9)$$

What about  $Out(D_7)$ ? It must be  $Z_3$ , as the three order-7 classes can be mixed, but in order. Hence

$$|Aut(D_7)| = |Inn| \times |Out| = 14 \times 3 = 42 \quad (5.10)$$

as  $D_{14}$  has trivial center, but derived group is  $Z_7$  (non-trivial, as in any Dihedral). The last equation corresponds of course to  $|Hol(Z_7)| = 42$ ,  $Hol(Z_7) = Z_7 \rtimes Z_6$ .

Order 15.- As  $15 = n \cdot 1^2 + m \cdot 3^2$ , with  $n = 1, 3, 5$  or  $15$ , only solution is  $n = 15$ ,  $m = 0$ , which gives

15/1  $Z_{15} = Z_5 \times Z_3$  as the only possibility. We say that primes  $(3, 5)$  are *incompatible* (by contrast, we shall see that  $(3, 7)$  are compatible). As  $(5, 3) = 1$ , the  $Aut$  group just factorizes:

$$Aut(Z_{15}) = Aut(Z_3) \times Aut(Z_5) = Z_2 \times Z_4 \quad |Hol(Z_{15})| = 15 \cdot 8 = 120 \quad (5.11)$$

Sect 5.A .- Groups of Order 12.-  $12 = n \cdot 1^2 + m \cdot 2^2 + r \cdot 3^2$  has *three* solutions for the first time for the Burnside relation:

$$12 = 12 \cdot 1^2 (Z_{12}); \quad 12 = 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 (D_6); \quad \text{and} \quad 12 = 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2 (Alt_4); \quad (5.12)$$

we wrote an example of each, to be discussed next. As  $12 = 2^2 \cdot 3$ , there are two abelian groups:  $Z_{12} = Z_4 \times Z_3$  (our example) and  $V \times Z_3$ : so 12/1 and 12/2 are cleared up:

$$\underline{12/1} = Z_{12} \quad Aut(Z_{12}) = Aut(Z_4) \times Aut(Z_3) = Z_2 \times Z_2 = V \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} Z_{12} = Z_4 \times Z_3 \quad 1 \cdot 1(e) + 1 \cdot 1_2(a^2) + \bar{2} \cdot 1_3(b, b^2) \\ + \bar{2} \cdot 1_4(a, a^3) + 2 \cdot 1_6(a^2b, a^2b^2) + 4 \cdot 1_{12}(ab, ab^2, a^3b, a^3b^2) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\underline{12/2} = V \times Z_3 = Z_2 \times Z_6 \quad Aut(V \times Z_3) = S_3 \times Z_2 \quad (\text{order } 12, \text{ so it is } \underline{12/4} \text{ below}) \quad (5.15)$$

$$1 \cdot 1_1(e) + 3 \cdot 1_2(a, b, ab) + 2 \cdot 1_3(c, c^2) + 6 \cdot 1_6(a, ab^2, b, bc^2, abc, abc^2) \quad (5.16)$$

As for the non-abelian groups, see first that  $12 = 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2$ , with four classes, implies  $G_{ab} = 3$ , so  $G_{ab} = Z_3$ , and hence  $G' = Z_4$  or  $V$ : only  $V$  to form the non-abelian case, as  $Aut(Z_4) = Z_2, \neq Z_3$  but  $Aut(V) = S_3 \supset Z_3$ ; so we have

$$\begin{aligned} \underline{12/3} \quad G_{12} : V \rightarrow G_{12} \rightarrow Z_3 \text{ or } G_{12} := V \rtimes Z_3 = Alt_4, \\ 12 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 3_2 + \bar{2} \cdot 4_3 \end{aligned} \quad (5.17)$$

as  $Alt_4$  has the class of  $(12)(34)$ , that closes to  $V$ , and the class of  $(123)$ , which closes to  $Z_3$ . The repetition  $\bar{2}$  hints at the extension to the symmetric group  $S_4$ , of course, which is  $S_4 = Alt_4 \cdot 2$  in the Atlas [12] notation.

As for  $12 = 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2$  (six classes), now  $Z_3$  is the derived, and  $V$  or  $Z_4$  the abelianized; *both* give solutions, as

$$Z_3 \rtimes Z_4 = Q_3 \quad \text{and} \quad Z_3 \rtimes V = S_3 \times Z_2 = Z_6 \rtimes Z_2 = D_6 \quad (5.18)$$

As said, this is the first case in which there are more than one (two) possibilities for non-abelian Burnside's. In the first,  $G_{ab} = Z_4$ , so the construction must be

$$Z_3 \rightarrow G_{12} = Q_3 \rightarrow Z_4$$

As for  $12 = 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2$ , it is also trivially realized in  $Z_2 \times S_3 = (b, a, \alpha)$ . The class splits are, first

$$\underline{12/4} \quad Z_2 \times S_3. - 12 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2(b) + 2 \cdot 3_2(\alpha, \alpha a, \alpha b) + 1 \cdot 2_3(a, a^2) + 1 \cdot 2_6(ba, ba^2) \quad (5.19)$$

Notice  $\underline{12/3} = Alt_4$  has no elements of order 6, while  $\underline{12/4}$  none of order 4: the reciprocal of Lagrange theorem is *not* true.  $Out(Alt_4) = Z_2$  necessarily.

And secondly, there is the dicyclic  $Q_3$  group, or

$$\underline{12/5} \quad Q_3 = Z_6 \rtimes_{/2} Z_4 = Z_3 \rtimes Z_4 : \quad 12 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 1 \cdot 2_3 + \bar{2} \cdot 3_4 + 1 \cdot 2_6 \quad (5.20)$$

We see there is again only a nontrivial *outo*, mixing the two order-3 classes.

This completes our study of groups up to order 16. As final result, for order less than 16, we find 20 abelian groups plus 8 non-abelian. The non-abelian ones, with their *outos*, are given in Table 2:

Order	Group $G$	$ Out G $
6	$S_3$	1
8	$D_4$	2
8	$Q$	6
10	$D_5$	2
12	$Alt_4$	2
12	$D_6 = S_3 \times Z_2$	2
12	$Q_3 = Z_3 \rtimes Z_4$	2
14	$D_7 = Z_7 \rtimes Z_2$	3

Table 2.—  $|Out(G)|$  for  $|G| < 16$

## 6 Abelian Groups of order 16

From order 16 on we shall be less exhaustive: we shall take the groups for granted, explaining them with generators and relations. Cfr. e.g. [10] or [29]; see also the modern treatment [32]. The *Aut* groups will also be indicated only succinctly.

As  $16 = 2^4$  and  $Part(4) = 5$ , ( $[4], [3, 1], [2^2], [2, 1^2]$  and  $[1^4]$ ), there are FIVE abelian groups of order 16. They are (Appendix A):

$$Z_{16}, \quad Z_8 \times Z_2, \quad Z_4 \times Z_4, \quad Z_4 \times Z_2^2 = Z_4 \times V \quad \text{and} \quad Z_2^4. \quad (6.1)$$

The first one is the only cyclic, and the last is *elementary abelian*. The third is like  $(Z_4)^2$ , understood as modulus over  $Z_4$  as a *ring* (not as Galois field!). Now in detail:

16/1  $Z_{16} = \{a \mid a^{16} = e\}$ ,  $16 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 2 \cdot 1_4 + 4 \cdot 1_8 + 8 \cdot 1_{16}$ : abelian cyclic.

The *Aut* group has order 8, as  $|Aut(Z_n)| = \phi(n)$ , Euler's function;  $\phi(16) = 8$ . It has to be  $Z_4 \times Z_2$ , as it has four elements of order 4, 3 of order 2, and none of order 8. See this group above.

16/2  $Z_8 \times Z_2 = \{a, b \mid a^8 = b^2 = e; ab = ba\}$ ,  $16 = 1 \cdot 1_1 + 3 \cdot 1_2 + 4 \cdot 1_4 + 8 \cdot 1_8$ .

The *Aut* group has order  $16 = 8 \cdot 2$ , as  $a$  can go 8 places, and then  $b$  to 3 – 1; it turns out that  $Aut(Z_4 \times Z_2) = D_4 \times Z_2$  o 16/6 (see later).

16/3  $Z_4 \times Z_4 \approx (Z_4)^2$ ,  $16 = 1 \cdot 1_1 + 3 \cdot 1_2 + 12 \cdot 1_4$ ;  $|Aut((Z_4)^2)| = 96$ , as in  $(a, b)$  of fourth order generating 16/3,  $a$  can go to 12 positions, but then  $b$  only to eight. One shows also  $Aut((Z_4)^2) = GL_2(Z_4)$  as  $2 \times 2$  matrices over the *ring*  $Z_4$ .

16/4  $Z_4 \times Z_2^2 = Z_4 \times V$ ;  $16 = 1 \cdot 1_1 + 7 \cdot 1_2 + 8 \cdot 1_4$ ;  $|Aut(Z_4 \times Z_2^2)| = 192$ , as, if  $a, b, c$  generate  $Z_4, Z_2$  and  $Z_2$ ,  $a$  has 8 choices, for 6 of  $b$  and 4 of  $c$ .

$$\underline{16/5} \quad Z_2^4 : 16 = 1 \cdot 1_1 + 15 \cdot 1_2.$$

As before  $Z_2^3$  for order 8, this *elementary abelian group* is a 4-dim vector space over the field  $\mathbb{F}_2$ . So  $Z_2^4 \approx \mathbb{F}_2^4$ , and therefore

$$\text{Aut}(Z_2^4) = GL_4(2), \text{ with order } (16-1)(16-2)(16-4)(16-8) = 20160 = 8!/2. \quad (6.2)$$

The groups  $GL_4(2)$  and  $Alt_8$  are isomorphic [2]; but notice also other numerical coincidence:

$$|PSL_3(4)| = (64-1)(64-4)(64-16)/3/3 = 20160, \quad (6.3)$$

but these groups are *not* isomorphic: 20160 is the smallest number for the order of two non-isomorphic *simple* groups (Artin). This anticoincidence is also related to the ‘‘large’’ Mathieu groups  $M_{22}$ ,  $M_{23}$  and  $M_{24}^\dagger$ .

It is remarkable the increase in automorphisms as one goes from the first  $A = Z_{16}$  to the fifth, the elementary abelian  $A = (Z_2)^4$ : the orders of  $(\text{Aut}A)$  are 8, 16, 96, 192 and 20160 respectively: this is reflected also in the partition by numbers: calling  $n_{1,2,4,8,16}$  the number of elements of this order, for  $\underline{16/1}$ ... up to  $\underline{16/5}$ :

$$n_{1,2,4,8,16} : (1, 1, 2, 4, 8). - (1, 3, 4, 8, 0). - (1, 3, 12, 0, 0). - (1, 7, 8, 0, 0). - (1, 15, 0, 0, 0). \quad (6.4)$$

## 7 Non-abelian groups of order 16

See [32] as a modern reference, therefore we shall report on them rather briefly. We start by dividing the groups in *three* families:

*First family:* (Semi-) Direct products;  $D_4 \times Z_2$ ,  $Q \times Z_2$  and  $Q \rtimes Z_2$

$$\underline{16/6} \quad D_4 \times Z_2. - \quad 2(4 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2) = 8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 : \quad (7.1)$$

There are then TEN classes, and the class split is deduced from the structure  $(Z_4 \rtimes Z_2) \times Z_2 : (a, \alpha, b; a^4 = \alpha^2 = b^2 = e; \alpha a \alpha = a^3; ab = ba, \alpha b = b \alpha)$ .

$$n_{1,2,4,8,16} = 1, 11, 4, 0, 0 \quad \text{with} \quad 16 = 1 \cdot 1_1 + 3 \cdot 1_2 + 4 \cdot 2_2 + 2 \cdot 2_4 \quad (7.2)$$

There are plenty of *Out* elements; notice  $\text{Centre} = V$ ,  $\text{Ab} = Z_2^3$ , and  $\text{Inn} = V$ . One shows  $|\text{Aut}| = 64$  (as  $a$  can go to 4 places,  $\alpha$  to 8, and then  $b$  to 2), hence  $|\text{Out}| = 16$ .

$$\begin{aligned} \underline{16/7} \quad Q \times Z_2 \quad \text{with, as above,} \quad 16 = 8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2, \text{ and} \\ n_{1,2,4,8,16} = 1, 3, 12, 0, 0 \quad \text{with} \quad 16 = 1 \cdot 1_1 + 3 \cdot 1_2 + 6 \cdot 2_4 \end{aligned} \quad (7.3)$$

---

<sup>†</sup>(L.J. Boya, Aug-2010). Contribution to the ICM in Hyderabad, India. Unpublished.

As before,  $G' = Z_2$ ,  $Z(G) = V$ ,  $Inn(G) = V$ , one shows  $|Aut| = 192$ , hence  $|Out| = 48$ .

16/8  $Q \rtimes Z_2$ : as  $Aut(Q) = S_4$  and  $Out(Q) = S_3$ ,  $Z_2 \subset S_3 \subset S_4$  and the semidirect product makes sense.

*Second family*: Dihedral groups, 16/9 to 16/11:  $D_8$ ,  $D'_8$ , and  $D''_8$

16/9  $D_8 = Z_8 \rtimes Z_2$ :  $\{a^8 = \alpha^2 = e, \alpha \cdot a \cdot \alpha = a^7 = a^{-1}\}$ ,  $16 = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2$ ,  
Dihedral group  $n_{1,2,4,8,16} = 1, 9, 12, 4, 0$  with  $16 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 2 \cdot 2_4 + 1 \cdot 2_4 + 2 \cdot 2_8$  (7.4)

Center is  $Z_2$ ,  $G_{ab}$  is  $Z_4$ ,  $Out$  is  $Z_2 \times Z_2 = V$ ; so  $|Aut| = (16/2) \cdot 4 = 32$ ; one shows also  $Aut = Hol(Z_8) = Z_8 \rtimes V$ .  $D_8$  is the full Symmetry group of the regular octagon.

As we anticipated, due to the fact that  $Aut(Z_8) = V$ , there are two more involutive autos, which allow for two more (different) “dihedral-type” groups:

16/10  $D'_8 = Z_8 \rtimes Z_2$ :  $\{a^8 = \alpha^2 = e, \alpha \cdot a \cdot \alpha = a^3\}$ ,  $16 = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2$ ,  
 $n_{1,2,4,8,16} = 1, 5, 6, 4, 0$  with  $16 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 2 \cdot 4_2 + 1 \cdot 2_4 + 2 \cdot 4_4 + 2 \cdot 2_8$  (7.5)

Center  $Z_2$  implies  $|Inn| = 8$ , and as obviously  $|Out| = 2$ , we have  $|Aut| = 16$ ; indeed  $Aut(D'_8) = Q \rtimes Z_2$ .

Now, as when  $\alpha \cdot a \cdot \alpha = a^5$ , the  $a^2$  and  $a^6$  remain fixed, things are a bit different in  $D''_8$ :

16/11 ( $TW : 16/11$ )  $D''_8 = Z_8 \rtimes Z_2$ :  $\{a^8 = \alpha^2 = e, \alpha \cdot a \cdot \alpha = a^5\}$ ,  $16 = 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2$ ,  
 $n_{1,2,4,8,16} = 1, 3, 4, 8, 0$  with  $16 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 2 \cdot 2_2 + 2 \cdot 1_4 + 1 \cdot 4_2 + 4 \cdot 2_8$

*Third family*: “ $4 \times 4$ ” groups, 16/12 to 16/14:

16/12:  $Z_4 \rtimes Z_4$ : the auto is defined as  $Aut(Z_4) = Z_2$ , and  $Z_4 \rightarrow Z_2$ . We have

$$16 = 8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2, \quad \text{ten classes, and } 16 = 1 \cdot 1_1 + 3 \cdot 1_2 + 6 \cdot 2_4 \quad (7.6)$$

Center is  $V$ ,  $G_{ab}$  is  $Z_4 \times Z_2$ , and  $Inn$  is  $V$ ; hence,  $|Aut| = 32$ , as  $|Out| = 8$ .

16/13:  $V \rtimes Z_4 = (Z_2 \times Z_2) \rtimes Z_2$ : the auto is an involution within  $Aut(V) = S_3$ :

$$16 = 8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2. - \quad n_{1,2,4,8,16} = (1, 7, 8, 0, 0) \quad \text{with } 16 = 1 \cdot 1_1 + 3 \cdot 1_2 + 2 \cdot 2_2 + 4 \cdot 2_4 \quad (7.7)$$

One has  $|Out| = 8$ ; as  $Inn = V$ ,  $|Aut| = 32$ .

16/14: Finally, we have the Dicyclic  $Q_4 = Z_8 \rtimes_{/2} Z_4$ ,  $16 = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2$ , 7 classes  $\{a^8 = \alpha^4 = e, a^4 = \alpha^2, \alpha \cdot a \cdot \alpha^{-1} = a^{-1}\}$

$$n_{1,2,4,8,16} = (1, 1, 10, 4, 0) \quad \text{with } 16 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 1 \cdot 2_4 + 2 \cdot 4_4 + 2 \cdot 2_8 \quad (7.8)$$

We have easily  $Center = Z_2$ ,  $G_{ab} = V$ ,  $Inn = D_4$ ,  $|Aut| = 32$  and  $|Out| = 4$

## 8 Groups with order $16 < |G| < 32$ , order $p$ or $pq$

Consider first  $|G| = p$  or  $pq$  (one or two prime factors *only*). That means in this level orders 17, 19, 23, 29, 31 (prime  $p$ ) and orders 21, 22, 25, 26 (two primes  $pq$ ).

For the first case, prime order, the only group is the corresponding  $Z_p$ :  
17/1, 19/1, 23/1, 29/1 and 31/1. e.g. for  $p = 29$  as the example,

29/1  $Z_{29}$ , abelian, cyclic and simple;  $29 = 29 \cdot 1^2$ ;  $29 = 1 \cdot 1_1 + 28 \cdot 1_{29}$ .  $Aut(Z_{29}) = Z_{28} = Z_7 \times Z_4$ ; rotation symmetry of the 29-th regular polygon.

Now for the case of two prime factors:

Groups of order 21. As anticipated, there are two, as 3 and 7 are *compatible* primes (i.e.  $(7 - 1)$  divides 3):

21/1, namely  $Z_{21} = Z_7 \times Z_3$ :  $21 = 1 \cdot 1_1 + 6 \cdot 1_3 + 2 \cdot 1_7 + 12 \cdot 1_{21}$ ,  $Aut(Z_{21}) = Z_6 \times Z_2 = V \times Z_3 = \underline{12/2}$ .

21/2:  $G_{21}$ , called sometimes Frobenius group,  $G_{21} = Z_7 \rtimes Z_3$ : this group acts transitively in the so-called Fano plane, related to the octonion numbers... [9]

$$21 = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2, \quad 21 = 1 \cdot 1_1 + 2 \cdot 7_3 + 2 \cdot 3_7. \quad (8.1)$$

For order 22, we have the cyclic and the dihedral, as for order 10, 14, etc.:

22/1:  $Z_{22} = Z_2 \times Z_{11}$ .

22/2: The dihedral  $D_{11} = Z_{11} \rtimes Z_2$ .

For order  $25 = 5^2$  we have the two abelian solutions, as  $Part(2) = 2$ .

25/1:  $Z_{25}$ , cyclic.  $Aut(Z_{25}) = Z_{25-5=20}$ .

25/2:  $(Z_5 \times Z_5)$  (elementary abelian:  $\mathbb{F}_5^2$ ,  $Aut = GL_2(5)$ , order  $480 = (5^2 - 1)(5^2 - 5)$ ).

It is good to exhibit the full structure of the  $GL_2(5)$  group:

$$\begin{array}{ccccc}
Z_2 & \longrightarrow & SL_2(5)_{120} & \longrightarrow & PSL_2(5)_{60} \approx Alt_5 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Z_4 & \longrightarrow & GL_2(5)_{480} & \longrightarrow & PGL_2(5)_{120} \approx Sym_5 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Z_2 & \longrightarrow & Z_4 \approx \mathbb{F}_5^* & \longrightarrow & Z_2
\end{array}$$

Notice the isomorphisms:  $PSL_2(5) \approx Alt_5$ , the first nonabelian simple group; and  $PGL_2(5) \approx Sym_5$ : the group  $PGL_2(5)$  is sharp 3-transitive in 5+1 symbols (Cfr. App. A), whereas  $Sym_5$  is sharp 5-trans in 5, but this is the same number, as  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . The groups are also isomorphic: e.g.  $Sym_5$  has elements of order 6.

As for order 26 is:

26/1:  $Z_{26} = Z_2 \times Z_{13}$ .  $Aut = I \times Aut(Z_{13}) = Z_{12}$ .

26/2:  $D_{13} = Z_{13} \rtimes Z_2$ .  $Aut(D_{13}) = Z_6$ , as  $|Hol(Z_{13})| = 13 \cdot 12$ .  $26 = 1 \cdot 1_1(e) + 6 \cdot 2_{13} + 1 \cdot 13_2$

## 9 Groups of order 24

As  $24 = 2^3 \cdot 3$ , there are three abelian groups: (24/1,2,3)

$$Z_{24} = Z_8 \times Z_3, \quad Z_4 \times Z_2 \times Z_3 = Z_6 \times Z_4, \quad Z_2^3 \times Z_3 = Z_6 \times V. \quad (9.1)$$

As examples, the class-order partition for the three are

$$24 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 2 \cdot 1_3 + 2 \cdot 1_4 + 2 \cdot 1_6 + 4 \cdot 1_8 + 4 \cdot 1_{12} + 8 \cdot 1_{24} \quad (\text{for } Z_{24})$$

$$24 = 1 \cdot 1_1 + 7 \cdot 1_2 + 2 \cdot 1_3 + 14 \cdot 1_6 \quad (\text{for } Z_6 \times Z_4)$$

$$24 = 1 \cdot 1_1 + 7 \cdot 1_2 + 8 \cdot 1_3 + 8 \cdot 1_6 \quad (\text{for } Z_6 \times V)$$

As for the  $Aut$  groups, we have  $Aut(Z_{24}) = Aut(Z_2^3) \times Aut(Z_3) = Aut(Z_2^3) \times Z_2$ , so

$$Aut(Z_{24}) = Aut(Z_8) \times Aut(Z_3) = V \times Z_2 = (Z_2)^3,$$

$$Aut(Z_4 \times Z_2 \times Z_3) = D_4 \times Z_2, \quad \text{and}$$

$$Aut(Z_2^3 \times Z_3) = GL_3(2) \times Z_2, \quad \text{order } 168 \cdot 2 = 336.$$

As for the non-abelian groups of order 24, several at once are direct products:

24/4:  $D_6 \times Z_2 = (Z_6 \rtimes Z_2) \times Z_2 = Z_2 \times (Z_3 \rtimes Z_2) \times Z_2 = S_3 \times V$ .

24/5:  $Alt_4 \times Z_2 = (V \rtimes Z_3) \times Z_2$

24/6:  $Q_3 \times Z_2 = (Z_3 \rtimes Z_4) \times Z_2$ .

24/7:  $D_4 \times Z_3$ .

24/8:  $Q \times Z_3$ .

24/9:  $S_3 \times Z_4$ . (Notice  $S_3 \times V = \underline{24/4}$ : easy to prove).

As 24 divisible by 2 and 4, and also  $24 = 4!$ , three more groups are immediate;

24/10:  $D_{12} = (Z_{12} \rtimes Z_2) = (Z_3 \times Z_4) \rtimes Z_2$ .

24/11:  $Q_6 := Z_6 \rtimes_2 Z_4$ .

24/12:  $S_4 \equiv \text{Sym}_4 = \text{Alt}_4 \cdot 2 = \text{Alt}_4 \rtimes Z_2$ .

As the last ( $\text{Sym}_4$ ) is one of the few cases of semidirect product with nonabelian kernel, we specify why is it possible: The *auto* in  $\text{Alt}_4$  mixing the two (123)-type classes is involutive. But it can be realized also as an *involutive auto*, because, for example, conjugation of a (123) permutation by an involution, e.g. (12) does generate the other 3-cycle class! Hence, one writes correctly  $\text{Sym}_4 = \text{Alt}_4 \rtimes Z_2$ .

Finally, we shall show later (last, Sect. 12) that the  $\text{Alt}_n$  groups have a  $2 \cdot \text{Alt}_n$  extension (Schur *multiplier*), so our next group is

24/13:  $SL_2(\mathbb{F}_3) \approx 2 \cdot \text{Alt}_4$ .

For more detailed information, see [29]. Notice only the diagram (Cfr. 8.1)

$$\begin{array}{ccc} 2 \cdot \text{Alt}_4 \approx SL_2(3)_{24} & \longrightarrow & PSL_2(3)_{12} \approx \text{Alt}_4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL_2(3)_{48} & \longrightarrow & PGL_2(3)_{24} \approx \text{Sym}_4 = \text{Alt}_4 \cdot 2 \end{array} \quad (9.2)$$

Finally, in the product  $24 = 3 \cdot 8$  the group  $Z_3$  admits semidirect extensions as in

24/14:  $Z_3 \rtimes Z_8$  (where  $Z_8$  acts in  $Z_2 = \text{Aut}(Z_3)$  by  $Z_8 \rightarrow Z_2 \text{ mod } Z_4$ ).

24/15:  $Z_3 \rtimes D_4$  (where similarly  $D_4$  acts in  $Z_2 = \text{Aut}(Z_3) \text{ mod } V$ ).

This completes our study of order 24 groups. There are  $15 = 3 + 12$  of them.

## 10 Rest of groups

$16 < |G| < 32$ .  $|G| = pqr : 18, 20, 27, 28$  and  $30$  ( $|G| \neq 24$ ).

Order 18: Two abelians, as  $18 = 2 \cdot 3^2$  and three no-abelians:  $D_9$ ,  $S_3 \times Z_3$  and  $(Z_3^2) \rtimes Z_2$ . For the last one, note  $\text{Aut}(Z_3^2) = GL_2(3) \supset Z_2$ . The description is straightforward; we omit to make some of the *autos* explicit, for simplicity. Notice the Burnside possibility  $18 = 9 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2$  is not realized. Notice also  $\text{Hol}(Z_9) = Z_9 \rtimes Z_6 \supset Z_9 \rtimes Z_2$ .



$$\underline{18/1}: Z_{18} = Z_9 \times Z_2, \quad 18 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 2 \cdot 1_3 + 2 \cdot 1_6 + 6 \cdot 1_9 + 6 \cdot 1_{18}; \quad \text{Aut}(Z_{18}) = Z_6$$

$$\underline{18/2}: (Z_3)^2 \times Z_2 = Z_6 \times Z_3, \quad 18 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 8 \cdot 1_3 + 8 \cdot 1_6 \quad \text{Aut} = GL_2(3)$$

$$\underline{18/3}: \text{for } S_3 \times Z_3, \quad 18 = 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2; \quad 18 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 3_2 + 1 \cdot 2_3 + 2 \cdot 1_3 + 2 \cdot 2_3 + 2 \cdot 3_6 \quad \text{Out} = Z_2.$$

$$\underline{18/4}: D_9 := Z_9 \rtimes Z_2; \quad 18 = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2; \quad 18 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 9_2 + 1 \cdot 2_3 + 3 \cdot 2_9.$$

$$\underline{18/5}: \text{for } (Z_3)^2 \rtimes Z_2; \quad 18 = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2; \quad 18 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 9_3 + 4 \cdot 2_2.$$

For order 20 the situation is very similar:  $20 = 2^2 \cdot 5$ , so 2 Abelian plus 3 non: only the structure is given, but for 20/5:

$$\underline{20/1}: Z_{20} = Z_5 \times Z_4.$$

$$\underline{20/2}: Z_5 \times (Z_2)^2 = Z_5 \times V.$$

$$\underline{20/3}: D_{10} = Z_{10} \rtimes Z_2 = (Z_5 \times Z_2) \rtimes Z_2 = (Z_5 \rtimes Z_2) \times Z_2 = D_5 \times Z_2 \quad 20 = 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2.$$

$$\underline{20/4}: Q_5 \text{ Dicyclic} = Z_{10} \rtimes_2 Z_4 = Z_5 \rtimes V \quad 20 = 8 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2.$$

$$\underline{20/5}: Z_5 \rtimes Z_4 = \text{Hol}(Z_5): \quad 20 = 4 \cdot 1^2 + 1 \cdot 4^2, \quad 20 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 5_2 + 2 \cdot 5_4 + 1 \cdot 4_5.$$

For order  $27 = 3^3$ , we have three abelian groups, as  $\text{Part}(3) = 3$  and two nonabelian, as for order 8:

$$\underline{27/1}: Z_{27}, \text{ cyclic}; \quad 27 = 27 \cdot 1^2; \quad 27 = 1 \cdot 1_1 + 2 \cdot 1_3 + 6 \cdot 1_9 + 18 \cdot 1_{27}, \quad |\text{Aut}(Z_{27})| = 9.$$

$$\underline{27/2}: Z_9 \times Z_3, \quad 27 = 1 \cdot 1_1 + 8 \cdot 1_3 + 18 \cdot 1_9.$$

$$\underline{27/3}: (Z_3)^3, \text{ elementary abelian. } \quad 27 = 1 \cdot 1_1 + 26 \cdot 1_3, \quad |\text{Aut}((Z_3)^3)| = |GL_3(3)| = 11232.$$

As  $\text{Aut}(Z_9) = Z_6$  and  $\text{Aut}(Z_3^2) = GL_2(3)$ ,  $|\cdot| = 48$ , there is map  $Z_3 \rightarrow \text{Aut}(Z_3^2)$ . Hence, the two nonabelian are semidirect products (this differs from the order 8 case):

$$\underline{27/4}: (Z_3^2) \rtimes Z_3: \quad 27 = 9 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2, \text{ and } 27 = 1 \cdot 1_1 + 2 \cdot 1_3 + 8 \cdot 3_2.$$

$$\underline{27/5}: Z_9 \rtimes Z_3: \quad 27 = 9 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2, \text{ and } 27 = 1 \cdot 1_1 + 2 \cdot 1_3 + 2 \cdot 3_3 + 18 \cdot 3_9.$$

As for the case of order 8, these two order 27 groups are *extraspecial*, as the center is  $Z_3$  and the abelianized  $(Z_3)^2$ .

Notice 27/2 and 27/5 have the same partition by orders (namely,  $n_3, n_9 = 8, 18$ ).

In [9] groups with this property are called *conformal*; note they are *not* isomorphic.

For order 28, there are only *four* groups: 2 Ab + 2 non:

$$\underline{28/1}: Z_{28} = Z_7 \times Z_4 \quad \text{Aut} = Z_6 \times Z_2.$$

$$\underline{28/2}: Z_7 \times Z_2 \times Z_2 = Z_7 \times V = Z_{14} \times Z_2 \quad \text{Aut} = Z_6 \times S_3.$$

$$\underline{28/3}: D_{14} := Z_{14} \rtimes Z_2 = D_7 \times Z_2 \quad \text{Out} = Z_3.$$

$$\underline{28/4}: Z_7 \rtimes Z_4 = Q_7 = Z_{14} \rtimes_2 Z_4, \quad 28 = 4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 2 \cdot 7_4 + 3 \cdot 2_7 + 3 \cdot 2_{14} \quad \text{Out} = Z_6.$$

One might ask: why in orders  $12 = 2^2 \cdot 3$ ,  $18 = 2 \cdot 3^2$  and  $20 = 2^2 \cdot 5$  are there five groups, whereas in  $28 = 2^2 \cdot 7$  there are only four? The answer is: 12, 18 and 20 are special! The first has  $V \rtimes Z_3 = \text{Alt}_3$  as special, the second  $S_3 \times Z_3$  is special, and the third  $Z_5 \rtimes Z_4 = \text{Hol}(Z_5)$ , also special.

Order 30 is interesting, as there is only an abelian group, inspite of having three factors, but none is repeated:  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ . Hence

$$\underline{30/1}: Z_{30} = Z_2 \times Z_3 \times Z_5 = Z_6 \times Z_5 = Z_{10} \times Z_3 = Z_2 \times Z_{15}, \text{ etc. } 30 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 1_2 + 2 \cdot 1_3 + 4 \cdot 1_5 + 4 \cdot 1_{10} + 8 \cdot 1_{15} + 8 \cdot 1_{30}. \quad \text{Aut}(Z_{30}) = Z_4 \times Z_2.$$

and there are three nonabelian as 2 is compatible with any prime, but 3 and 5 are not:

$$\underline{30/2}: D_5 \times Z_3, \quad 30 = 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2, \quad 30 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 5_2 + 2 \cdot 1_3 + 2 \cdot 2_5 + 2 \cdot 5_6 + 4 \cdot 2_{15} \quad \text{Out} = V.$$

$$\underline{30/3}: (Z_3 \rtimes Z_2) \times Z_5 = S_3 \times Z_5, \quad 30 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 3_2 + 1 \cdot 2_3 + 4 \cdot 1_5 + 4 \cdot 3_{10} + 4 \cdot 2_{15} \quad \text{Out} = Z_4.$$

$$\underline{30/4}: D_{15} = Z_{15} \rtimes Z_2, \quad 30 = 2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 2^2, \quad 30 = 1 \cdot 1_1 + 1 \cdot 15_2 + 1 \cdot 2_3 + 2 \cdot 2_5 + 4 \cdot 2_{15} \quad \text{Out} = Z_4.$$

This completes our study of the  $48 + 45 = 93$  groups  $G$ , with  $|G| < 31$ .

## 11 Tables

In this Section we just group the found groups in some classes, for completeness.

Table 3 recalls the total counting, separating the abelian ones.

	Abelian	Non-abelian	Total
$ G  < 8$	8	1	9
$ G  = 8$	3	2	5
$8 <  G  < 16, (\neq 12)$	7	2	9
$ G  = 12$	2	3	5
			<u>20 + 8</u>
$ G  = 16$	5	9	14
$16 <  G  < 24$	9	8	17
$ G  = 24$	3	12	15
$24 <  G  \leq 31$	11	8	19
	48	45	<u>93</u>

Table 3.—

Table 4 selects some Abelian groups with their  $Aut$  group, or  $|Aut|$  order.

Group	Order	Struct.	$Aut$	$ Aut $	Comments
$V$	4	$Z_2^2$	$S_3$	6	First non-cyclic group.
$Z_8$	8	cyclic	$V$	4	Cyclic, $Aut$ group not.
$Z_2^3$	8	$\mathbb{F}_2^3$	$GL_3(2)$	168	(2 <sup>nd</sup> smallest nonabel. simple)
$Z_{24}$	24	$Z_8 \times Z_3$	$V \times Z_2$	8	
$Z_{30}$	30	$Z_2 \times Z_3 \times Z_5$	$Z_2 \times Z_4$	8	

Table 4.— Some interesting abelian groups,  $|A| < 32$ .

Group	Order	Struct.	$Out$	$ Out $	Comments
$S_3$	6	$Z_3 \rtimes Z_2$	$e$	1	Smallest non-abelian.
$Q$	8	Quaternion	$S_3$	6	Smallest, no $\times$ nor $\rtimes$ .
$Alt_4$	12	$V \rtimes Z_3$	$Z_2$	2	$Alt_4 \cdot 2 = Sym_4 = Alt_4 \rtimes Z_2$ .
$Dih'_8$	16	$Z_8 \rtimes Z_2$			$\alpha a \alpha = a^5$ .

Table 5.— Some interesting non-abelian groups,  $|G| < 32$ .

Group	Order	$Aut$	$Hol$	$ Hol $
$Z_3$	3	$Z_2$	$S_3$	6
$V = \mathbb{F}_2^2$	4	$S_3$	$S_4$	24
$\mathbb{F}_2^3$	8	$GL_3(2)$	$Aff_3(2)$	1344
$\mathbb{F}_3^2$	9	$GL_2(3)$	$Aff_2(3)$	48

Table 6.— Some interesting Holomorphs of certain groups,  $|G| < 32$ .

## 12 Final comments

Here we comment some isolated topics not dealt with in the main text.

1. Extraspecial groups. For order  $8 = 2^3$  and  $27 = 3^3$  the nonabelian groups (two in each case) are *extraspecial*, as we noted. This is reflected in the center, being  $Z_2$  and  $Z_3$  respectively, and the abelianized, being  $(Z_2)^2$  and  $(Z_3)^2$  respectively. One shows [14] they all come from  $(Z_p)^3$ ,  $p$  prime, where the two nonabelian groups are the extraspecial.
2. Schur multipliers. (To understand the following some knowledge of the mathematics of Quantum Theory is necessary; see e.g. [30] or [23]).

The transition from integer spin “ $\ell$ ” = 0, 1, 2, 3, ... in orbital angular momentum to “half-integer” for spin particles in Quantum Mechanics (QM), so  $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$  is due to the need of using *projective* representations of the  $SO(3)$  group, because in QM states are rays, not vectors. The change from  $SO(3)$  to  $Spin(3)$  is, as an extension problem, a double (universal) covering;

$$Z_2 \longrightarrow SU(2) = Spin(3) \longrightarrow SO(3) \quad (12.1)$$

and we wrote in several occasions  $SU(2) = 2 \cdot SO(3)$ : this 2 “on the left” is a case of Schur multiplier; in general, extensions of type

$$Z_n \longrightarrow G^\wedge \longrightarrow G \quad (12.2)$$

are called “Schur multipliers”, because I. Schur was the first to consider projective representations of groups (ca. 1898).

The complete story of this goes through the extension theory, which requires a study of *Homological Algebra*, that we just omit.

3. The attentive reader has probably observed that the majority of our non-abelian groups are:

- Simple, if prime order,  $Z_p$ .
- Direct product, whenever possible; e.g. 28/3:  $D_7 \times Z_2$ .
- Semidirect product, e.g.  $S_3 = Z_3 \rtimes Z_2$ .

In very few occasions, we have quotients of semidirect products, e.g. in order 8,  $Q = Q_2 \equiv Z_4 \times /_2 Z_4$ . Why non-simple groups are nearly always direct or semidirect products? The reason is [6] that, in the general extension problem, that we just mention in Appendix A, for orders of  $G$  with small factors, the group of the extensions reduces to the unity. And precisely the cases non of this type start with three or more factors identical, that is to say, 8, 16, 24, etc., where indeed there are groups not in simple, direct or semidirect form.

## A APPENDIX

Here we collect some definitions and show easy results in the abstract theory of finite groups; general references are ([25], [17], [14], and [28]). All groups will be finite, order of  $G := |G| = n < \infty$ ; three other classical sources for finite groups are [9], [8] and [20]. The unity will be named  $e$  or  $Id$  or  $id$ ; for  $I$  we signal at times the group only with  $\{e\}$ . For a group  $G$  the *opposed* group, named  $G^o$  has the same elements as  $G$ , but to the pair  $(a, b)$  corresponds the product  $(ba)$ .  $ab$  and  $ba$  are in the same class, as  $a^{-1}aba = ba$ .  $G$  is *abelian* iff  $G = G^o$ . Groups and their *natural* maps (homomorphisms) form a *category*  $\mathcal{G}$ , and finite groups the (sub)category  $\mathcal{G}^{\circ\circ}$ ; but we shall not say much of that.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  and  $\mathbb{C}$  will be the natural, integer, rational, real and complex numbers, as usual; quaternions  $\mathbb{H}$  will be mentioned very sporadically. For any natural number  $n$  there always exists a *cyclic* group (and only one), named  $Z_n$ , where  $Z_n : \{a \mid a^n = e\}$ ; it is also written  $Z/nZ$ , read integers with sum *mod*  $n$  (Gauss). For a set  $X$  with  $n$  points, the *permutation group* or collection of all permutations under composition, has order  $n!$ ; it is written  $Sym_n$  or simply  $S_n$ ; the *even* permutations make a normal subgroup, called alternating group  $Alt_n$ , with  $n!/2$  elements.

1. General definitions. In a set  $X$  we give a *composition law*  $X \times X \rightarrow X$ , which is *associative*  $x(yz) = (xy)z$ , with *unit*  $e$  ( $xe = ex = x$ ) and *inverse*  $x^{-1}$  ( $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ ): this is the abstract definition of a group (A. Cayley, 1854); as said we consider only finite groups  $G$ ,  $|G| < \infty$ . Then the *period* of an element is the minimum  $n$  such  $a^n = e$ .

Given a group  $G$ , a *subgroup*  $H$  is a subset of  $G$  which is group by itself;  $G$  splits under  $H$  in left  $gH$  (or right -  $Hg$ ) *cosets*, so e.g.  $G = H \cup gH \cup g'H \cup g''H \dots$ . Each *coset*  $gH$  has order  $|H|$ , because  $gH$  with  $g \notin H$  just changes  $k$  in  $H$  by  $gk$ : this is *Lagrange theorem*: the order  $h = |H|$  of a subgroup  $H \subset G$  divides the order of  $G$ ,  $n = |G|$ ; one writes  $[G : H]$  for the *index* of  $H$  in  $G$ , so  $[G : H] = n/h$ .

The “left translation”  $g : g' \rightarrow gg'$  permutes the elements of the set  $G$ ; hence the group itself  $G$ ,  $|G| = n$ , can be seen as a subgroup of the general permutation group  $S_n$ : this is *Cayley theorem*.  $H \subset G$  is *normal* subgroup (invariant, distinguished) if  $gHg^{-1} = H \Leftrightarrow ghg^{-1} = h'$ . If  $H$  normal in  $G$ , there is a group structure in the cosets, by composition, called the *quotient* group  $Q$ ; one writes  $G/H = Q$ . We shall write this as

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1 \tag{A.1}$$

(*short exact sequence*), meaning: the second map is injective, the third epjective, and composition of any two consecutive maps gives 1. Normally we shall omit the two “1”s.

If  $|G| = p^f \cdot m$ , with  $m$  natural,  $p$  prime and  $f$  natural, with  $(m, p) = 1$ , there are in  $G$  subgroups of any order  $p^r$ ,  $1 \leq r \leq f$ ; the subgroups of maximal order  $p^f$  are called *Sylow subgroups*, all are conjugate, and the number of them is  $1 + kp$ , dividing  $|G|$  (*Sylow theorems*); see [11]. There is a *partial* ordering of the subgroups  $H$  of a group  $G$  by inclusion; one thus forms the lattice of subgroups.

Natural maps  $\mu : G \rightarrow Q$  are *homomorphisms*, i.e. when  $\mu(gh) = \mu(g)\mu(h)$ . The image of  $\mu$  is the subgroup  $\mu(G) \subset Q$ , and  $\mu$  is *onto* when  $\mu(G) = Q$ . (Homo-)Morphisms  $\mu : G \rightarrow G$  are called endomorphisms (*endos*), and isomorphisms  $\iota$  are invertible morphisms, as automorphisms  $\alpha$  (*autos*) are invertible *endos*. In any morphism  $\mu : G \rightarrow Q$  the kernel  $K := \mu^{-1}(e_Q)$  is *normal* subgroup,  $gKg^{-1} = K$ , as  $k \in K \Rightarrow \mu(gkg^{-1}) = \mu(g)\mu(k)\mu(g^{-1}) = \mu(g)\mu(g^{-1}) = e$ .  $\mu$  is *injective* if  $\ker K = \{e\}$ . One writes  $G/K = \text{Im } \mu = \mu(G) \subset Q$ : the image is just subgroup. If two groups  $G_1$  and  $G_2$  are isomorphic, we write  $G_1 \approx G_2$ : we try to reserve  $G_1 = G_2$  for two groups *defined* identically. For example  $Z_6 \approx Z_2 \times Z_3$ , but  $Z_2^2 = V$ .

One writes a general morphism  $\mu : G \rightarrow Q$  as composition of  $\text{Ker } \mu \rightarrow G \rightarrow \text{Im } \mu$  and injection  $\text{Im } \mu \rightarrow Q$ .

The set of *autos* of any algebraic (or geometrical) structure is always a group under composition. This is the *very reason* of the existence of Groups as algebraic structures. In our study  $\text{Aut}(G)$  will play an important role; of course,  $\text{Aut}(G)$  is finite if  $G$  is. But  $A$  can be abelian and  $\text{Aut}(A)$  not; or  $Z$  being infinite, has  $\text{Aut}(Z)$  finite ( $\pm 1$ ).

For abelian groups  $A$  one sets up a *ring* structure in the whole set of *endos*,  $\text{End}(A)$ , by defining  $(a + b)(x) := a(x) + b(x)$ , besides  $(ab)(x) = a(b(x))$ ; the *autos* are the invertible elements in  $\text{End}(A)$ ; (so  $0 : a \rightarrow e$  is *never* an auto, but  $1 : a \rightarrow a$  is *always*). Recall a field is a *commutative* ring with all elements  $\neq 0$  having inverse under product.

*Conjugation* of element  $g$  by another element  $k$  is the map  $i_k : g \rightarrow k g k^{-1}$ , and it is an automorphism in  $G$ , called *inner*; their set is named  $\text{Inn}(G)$ , with  $\text{Inn}(G) \subset \text{Aut}(G)$ , as (normal) subgroup. The above *onto* map  $G \rightarrow \text{Inn}(G)$  is morphism, with kernel the center (centre) of  $G$ , namely  $Z(G) : \{z | z g = g z\}$ . An automorphism which is not inner is called *outer*: the quotient  $\text{Out}(G) := \text{Aut}/\text{Inn}$  is called the *group of classes* of outer automorphisms. An element  $g$  and all its conjugates  $k g k^{-1}$  make up the class of  $g$ ,  $cl(g)$ .

Automorphisms  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  keep the order, as  $a^n = e \Rightarrow \alpha(a)^n = e$  with  $n$  period; hence, in order a group to have automorphisms  $\neq e$ , it has to have more than one element with the same period; for example,  $\text{Aut}(Z_2) = I$ . If  $G$  is nonabelian, the  $\text{Out}(G)$  group operates in the classes (as orbits under conjugation, i. e. inner automorphisms); hence, for having *autos*  $\gamma \neq e$ , a group  $G$  has to have classes of the same periods (many examples).

The commutator of two elements  $a, b$  is  $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ ; it is  $(, ) = e$  iff  $ab = ba$ ; the closure of commutators makes up another *normal* subgroup, called the *derived* (or commutator) subgroup  $G' = \{aba^{-1}b^{-1}\}$ . The quotient  $G/G' := G_{ab}$  is abelian, and  $G \rightarrow G_{ab}$  is the *maximal* abelian image of  $G$ , with  $A = G_{ab}$  iff  $G$  abelian already. For any subset  $X$  of a group  $G$ , the *centralizer* in  $G$ ,  $Z_G(X)$  is the subgroup  $\{g|gx = xg, x \in X\}$ ; the *normalizer*  $N_G(X)$  is defined by  $\{g|gXg^{-1} = X\}$ ; by  $\langle X \rangle$  we mean the group *generated* by elements in  $X$ , that is, the minimum group containing the set  $X$ .

For example, the centralizer of  $G$  itself is the center,  $Z(G)$ ; the normalizer of a normal subgroup  $H$  is the whole group,  $G$ ; etc.

We express these definitions and results by the following diagram, very much used (implicitly) in this review

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z(G) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 G' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G_{ab} \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \text{Inn}(G) & \longrightarrow & \text{Aut}(G) \longrightarrow \text{Out}(G)
 \end{array}$$

A normal subgroup is invariant under inner *autos*, by definition; if it is invariant under *any* automorphism, it is called *characteristic* subgroup; one shows easily that the center  $Z(G)$  is characteristic, and so is the commutator  $G'$ . Therefore, there is a map  $\text{Out}(G) \rightarrow \text{Aut}(Z(G))$  as  $\text{Inn}(G)$  operates trivially in the center.

A group is simple if the only normal subgroups are the trivial ones, namely  $I$  and the group  $G$  itself. For example,  $Z_p$ ,  $p$  a prime number, is simple; so is  $\text{Alt}_{n>4}$  (Galois). The smallest non-abelian simple group is  $\text{Alt}_5$ , order  $5!/2 = 60$ , and the second smallest is  $\text{PSL}_2(7) = \text{GL}_3(2)$ , order 168.

A group is called *complete* if  $\text{Center} = \text{Out} = e$ ; *perfect* if  $G = G'$  (so  $G_{ab} = e$ ). For example,  $S_3$  is complete, and  $\text{Alt}_5$  is perfect; perfect groups, if not simple, are *rare*: about the smaller *nonsimple* perfect group is  $\text{SL}_2(5)$ , order 120; \*note  $\text{Alt}_5 \approx \text{PSL}_2(5)^*$ .



We define the *class*  $[g] \equiv cl(g)$  of an element as the set of its conjugate elements:  $[g] = \{k, k = hgh^{-1}\}$ ; then “belonging to a class” is an *equivalence relation* in  $G$ , and so one writes  $G = \cup_{\text{diff classes}} [g]$ ; for example, for the cyclic group  $Z_p$ ,  $p$  a prime number, one has  $|Z_p| = p$  and there are one class of 1 element of order 1( $e$ ), plus  $(p - 1)$  classes of 1 element, of order  $p$ ; we write this as  $p = 1 \cdot 1_1(e) + (p - 1) \cdot 1_p(a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1})$ . This partition by classes is the same as the orbits of the group acting on itself by conjugation. For any finite group  $G$ , one can write, in general

$$|G| := N = \sum n \cdot m_s, \quad (\text{A.2})$$

where  $n \cdot m_s$  means:  $n$  classes of  $m$  elements each, of period  $s$ . Elements in the same class have same period, but of course not viceversa: a *more rough* classification of elements is by counting  $\{n_s\}$ , the number of elements for each period. For example,  $\{n_{s=1,2,4,8,16}\} = (1, 1, 2, 4, 8)$  in  $Z_{16}$ . In [8] one defines two groups to be *conformal* if the partition by classes (A.2) is the same.

With two groups  $G = \{g\}$  and  $K = \{k\}$  we form the *direct product* in the product set  $G \times K$  by  $(g, k) \cdot (g', k') := (gg', kk')$ . For example, one shows thus that  $Z_6 = Z_2 \times Z_3$ ,  $Z_{15} = Z_3 \times Z_5$ , etc. This is the simplest case of the extension problem: given two groups,  $K$  for kernel and  $Q$  for quotient, form all groups  $E$  with  $K$  normal and  $E/K = Q$ . The complete solution of this question requires *Homological Algebra*, which we shall not develop.

If  $A$  is abelian (with  $a + b$  for  $ab$ ) and there is a morphism  $\mu : G \rightarrow Aut(A)$ , in the set  $A \times G$  one forms a group with the composition  $(a, k) \cdot (a', k') = (a + \mu_k(a'), kk')$ , and it is called the *semidirect* product, written  $A \rtimes G$ . For example, one shows  $S_3 = Z_3 \rtimes Z_2$ . We shall use a lot this semidirect product construction. There is also an extension of the semidirect product for non-abelian groups,  $B \neq B^o$ , which we shall use far less.

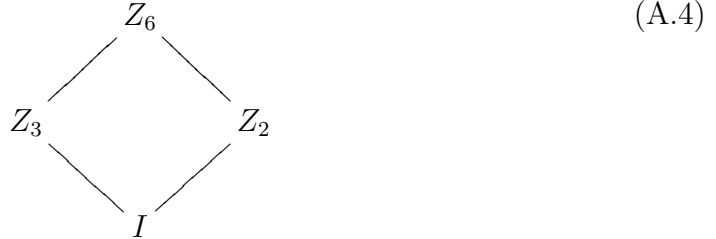
As an example of (A.2), for the permutation group  $Sym_4$ , of order  $4! = 24$ , there are 5 classes, as  $Part(4) = 5$ ; the reader should check the balance (we write one representative per class)

$$4! = 24 = 1 \cdot 1_1(e) + 1 \cdot 6_2([12]) + 1 \cdot 3_2([12; 34]) + 1 \cdot 8_3[123] + 1 \cdot 6_4([1234]) \quad (\text{A.3})$$

where  $[12]$  is the transposition  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , etc: we suppose the structure of the group  $S_n$  is known to the reader: e.g. the classes of  $S_n$  correspond to the partitions of number  $n$ .

2. Subgroup structure. Recall a group  $G$  with no non-trivial normal subgroups is called *simple*. Finite simple groups are the *atoms* in the  $(\mathcal{G}^{\circ\circ})$  category of finite groups, meaning any finite group is an extension (composition) of more elementary, simple groups; for example,  $Sym_3$  is composed of  $Z_3$  and  $Z_2$ , and  $Alt_4$  is also, as we shall see that  $Alt_4 = (Z_2 \times Z_2) \rtimes Z_3$ .

For any finite group  $G$ , the *Hasse diagram* exhibits the subgroup structure; for example, for  $Z_6$  the Hasse diagram is



Really, the set of subgroups  $H$  of a group  $G$  form a *lattice* (we do not elaborate; see e.g. [25]).

Jordan-Hölder theorem. For any group  $G$ , a *normal* subgroup  $H$  is maximal, if there is NO group  $K$ , with  $H \subset K$  and  $K$  normal in  $G$ . Then  $G/H = Q_{u_1}$  is simple (proof elemental!); if now  $H$  is not simple, it has  $Q_{u_2}$  as quotient  $H/K$ , with  $K$  maximal in  $H$ . So we obtain a chain:  $\{G; Q_{u_1}; Q_{u_2}; \dots Q_{u_n}\}$ , or  $\{G; H; K_1; \dots K_n\}$  with  $Q_j$  simple. The chain ends when the last  $K_n$  is already *simple*. The Jordan-Hölder *theorem* asserts: any other choice of maximal normal subgroups has the same chain of quotients, up to the order. See e.g. [17], [25], etc... By contrast, a group  $G$  is called *solvable* if the chain of Jordan-Hölder quotients is made out of abelian (hence prime cyclic) groups.

When we have an extension  $Z_n \rightarrow G \rightarrow Q$ , we say that  $G = n \cdot Q$ , and called it a Schur *multiplier*. See Sect. 12.

3. Abelian Groups. The category of finite abelian groups is perfectly understood (Frobenius and Stickelberger, 1879); see any textbook or even [7].

If  $A$  is abelian ( $A = G_{ab}$ ), one usually writes 0 for  $e$  and sum ( $a+b$ ) for composition;  $Z_n$  is abelian for any  $n$ , and so are  $Sym_2(\approx Z_2)$  and  $Alt_3(\approx Z_3)$ . As any *irrep* is 1- $d$  (see App. B), the Character Table conveys the whole *irrep* information.

If  $A$  is (finite and) abelian, it is a direct product (direct sum) of cyclic groups of order power of a prime,  $A = P(p)Q(q)\dots T(t)$ , where  $|P(p)| = p^f$ , etc., with  $p, q, \dots t$  primes. If  $\alpha$  is an automorphism of  $A = P(p)Q(q)$ , and  $p', q'$  are in each factor, any *auto*  $\alpha$  preserves the order, hence also the product structure, that is  $\alpha(p') = p'' \in P$ ,  $\alpha(q') = q'' \in Q$ .

For rank  $r$  of an abelian group we understand the *minimal* number of generators; it does *not* coincide with the number of different number of prime-power products: for example,  $Z_6$  is rank one, but it is also  $Z_2 \times Z_3$ .

For  $|A| = p^f$ , there are as many different abelian groups of this order as *partitions* of number  $f$ , called  $Part(f)$ , that is expressions of  $f$  as sum of integers; we have e.g.,

$$Part(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42. \quad (\text{A.5})$$

For example, the number of abelian groups of order  $32 = 2^5$  is  $Part(5) = 7$ , namely  $Z_{32}, Z_{16} \times Z_2, Z_8 \times Z_4, Z_8 \times V, Z_4^2 \times Z_2, Z_4 \times Z_2^3$  and  $Z_2^5$ ; see e.g. ([25], Ch. 4). The number of *abelian* groups of order 720 is ten:  $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ , and so  $Part(4) \cdot Part(2) \cdot Part(1) = 5 \cdot 2 \cdot 1$ .  $Part(n)$  grows rather quickly with  $n$ , like [23]

$$Part(n) \approx \exp\left(\frac{\pi\sqrt{2n/3}}{4n\sqrt{3}}\right), \quad n \gg 1. \quad (\text{A.6})$$

We shall need and use some results on  $Aut(A)$ ,  $A$  abelian; the complete results are messy; for a recent review, see [19].

For any (abelian or not) group  $G$  one can form the holomorph,  $Hol(G)$ , defined by

$$Hol(G) = G \rtimes Aut(G). \quad (\text{A.7})$$

For example,  $Hol(Z_3) = S_3 (= Z_3 \times Z_2)$ ; we shall use the holomorph concept mainly for *abelian* groups. Finally we recall (Appendix B) the *irreps of an abelian group are unidimensional, and reciprocally*.

4.  $G$  operates in  $\Omega$ : Actions of Groups. The group  $G = \{g\}$  operates in the set  $\Omega = \{x\}$ , if  $g(x) = y$  is well defined, with  $e(x) = x$  and  $g(k(x)) := (gk)(x)$ ; for this action we shall write at times  $G \circ \rightarrow \Omega$ . This is equivalent to the existence of a natural map

$$\mu : G \rightarrow Perm(\Omega), \quad (\text{A.8})$$

where  $Perm(\Omega) = Sym_n$  if  $|\Omega| = n$ :  $Perm(\Omega)$  is kind of “universal” operating group in the set  $\Omega$ . The true nature, its *raison d’etre*, of groups is as transformation groups in some sets: the idea of *Geometry* (F. Klein) is just that of a group of allowed transformations  $G$  in some space  $\Omega$  [21]. Also, *Symmetries* in physics are implemented by means of groups.

If the kernel above,  $K := ker \mu$  is  $= e$ , we say the action (of  $G$  on  $\Omega$ ) is *effective*.  $G/K$  acts naturally and *effectively* on  $\Omega$ . Call  $G(x)$  or  $G \cdot x$  the set of  $y$ ’s in  $\Omega$  reached from

$x$  by some  $g \in G$ : it is called the *orbit* of  $x$ ; *belonging to an orbit* is an equivalence relation. If in  $G \circ \rightarrow \Omega$  there is only an orbit, we speak of action being *transitive*: any element  $x$  can go to any other  $y$ . In any orbit, the set  $G_x = \{g \in G | g(x) = x\}$  is a subgroup of  $G$ , called the *stabilizer* of point  $x$  (*isotropy* subgroup, *little group* in physics), or of the orbit  $G(x)$ : different points in the same orbit have *conjugate* stabilizers; in our finite group context, clearly  $|Orb x| = |G|/|G_x|$ , or

$$|G| = |Orb x| \cdot |G_x| \quad \text{for any } x. \quad (\text{A.9})$$

Orbits with a single point signal *fixed* points, whose stabilizer is the whole group; for example,  $GL_n(\mathbb{R})$  acting on vector space  $\mathbb{R}^n$  has the origin  $x = 0$  as (unique) fixed point. Or: central elements of a group are the fixed points for the adjoint action (conjugation).

\*For example,  $SO(3)$  acting by rotations is *transitive* in the ordinary sphere  $S^2$ ; the stabilizer (of any point, e.g. the north pole) is  $\approx SO(2)^*$ . If  $T_2$  is the regular triangle  $\Delta$ , the symmetric group  $S_3$  acts by orthogonal transformations (leaving it invariant),  $S_3 \circ \rightarrow T_2$ : the action is transitive, with stabilizer  $Z_2$  as reflections. The subgroup  $Alt_3 = Z_3$  of rotations is also transitive, with  $e$  as stabilizer: one says then the action is *free*. If  $G$  with  $|G| = n$  operates in  $X$ ,  $card X = m$  and describes  $k$  orbits, one has  $|G| = |G_x| \cdot |G(x)|$ , for  $x$  arbitrary in each of the  $k$  orbits as in A.9.

The action  $G \circ \rightarrow X$  is *2-transitive*, if it is transitive and  $G_x$  acts transitive in the complement to  $x$ ,  $X^* := X \setminus \{x\}$ , i.e., the little group acts still *trans* in the complementary. Alternatively, if any two points  $x \neq y$  go to any other two points  $g(x) \neq g(y)$ . One defines *k-transitive* actions of  $G$  on  $X$ , by the natural generalization: in particular,  $G$  operating on  $X$  is *k-transitive*, if any  $k$  different points go to any other set of distinct  $k$  points. In particular, by a transitive action we just mean 1-transitive.

The *k-transitive* action is called *sharp*, if the last stabilizer is just the identity: in particular, if  $G$  is sharp 1-trans on  $\Omega$ ,  $|\Omega| = |G|$ ; if  $G \circ \rightarrow \Omega$  is 2-trans sharp, we have similarly  $|G| = |\Omega| \cdot (|\Omega| - 1)$ , etc. Nearly by definition,  $Sym_n = S_n$  is sharp  $n$ -transitive in  $n$  objects; one shows easily that  $Alt_n$  is  $(n - 2)$  sharp transitive in  $n$  objects (as  $Alt_3 = Z_3$ ). Besides the natural  $Sym_n$  and  $Alt_n$ , actions more than 3-transitive are very rare; but with finite fields  $\mathbb{F}_q$  (App. B), one shows that  $PGL_2(q)$  is sharp 3-transitive in the projective line  $\mathbb{F}_q P^1$ , with  $q + 1$  points, where  $q = p^f$  (power of a prime). \*Compare  $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ , where  $x \rightarrow (ax + b)/(cx + d)$  is sharp 3-trans, with stabilizers  $Aff_1(\mathbb{R}), \mathbb{R} \setminus \{0\}, \{e\}$ .\*

5. Examples of families of finite groups. We already defined and use

$$Z_n(\text{order } n), D_n(\text{order } 2n), Sym_n = S_n(\text{order } n!), Alt_n(n!/2) \quad (\text{A.10})$$

as families of finite groups; some structural relations are

$$\begin{aligned} Z_p \text{ is simple; } D_n &= Z_n \rtimes Z_2; \text{ } Alt_3 = Z_3; \text{ } Sym_2 = Z_2; \\ Sym_3 &= D_3; \text{ } Alt_4 = V \rtimes Z_2; \text{ } S_4 = V \rtimes S_3 = Hol(V). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Dicyclic groups are defined as 2-quotients, namely (If  $a, \alpha$  verify  $a^{2n} = \alpha^4 = e$ ),

$$(Dicl_n =) Q_n := Z_{2n} \rtimes_{/2} Z_4, \quad \alpha a \alpha^3 = a^{-1}, \quad a^n = \alpha^2. \quad (\text{A.12})$$

We have

$$|Q_n| = 4n, \quad Q_2 = Q(= \pm(1, i, j, ij = k)), \quad Q_3 \approx Z_3 \rtimes Z_4, \quad \text{etc.} \quad (\text{A.13})$$

where  $Z_4$  acts in  $Z_{2n}$  by the inverse auto via the  $2 : 1$  map  $Z_4 \rightarrow Z_2$ .

We shall define another family,  $\Gamma_n$ , the finite Clifford groups [6]: define Dirac-like matrices  $\gamma_\mu$  by

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}; \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.14})$$

The  $\gamma$ 's make up a *finite* group of order  $2^{n+1}$ :

$$\pm\{1; \gamma_\mu; \gamma_\mu\gamma_\nu; \dots; \text{“}\gamma_5\text{”} := \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n\}. \quad (\text{A.15})$$

One has  $\Gamma_1 = Z_4$ ,  $\Gamma_2 = Q$ ,  $\Gamma_4$  is the group of the usual Dirac matrices (order 32), etc. The even order matrices make up a index-2 subgroup, hence normal, called  $\Gamma_n^+$ ; for example  $\Gamma_2^+ = Z_2$ .

## B APPENDIX

1A.- A representation of the group  $G$  is a natural map (morphism)  $D : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ , where  $V$  is a  $K$ -vector space; we shall consider only spaces  $V$  *finite* dimensional over  $\mathbb{C}$ , the field of *complex* numbers (at times over  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ): so a representation of a group is a realization of the group via complex (invertible) matrices; of course,  $\text{Aut}(V) = \text{GL}_n(K)$ , if  $\dim V = n : \text{GL}_n(K)$  is the set of  $n \times n$  invertible matrices with entries in the field  $K$ . Representation theory was instrumental in extending group theory at the end of the XIX century (Frobenius, 1896; Schur...), and it has many applications in physics, mainly in Quantum Physics [30], [31].

If a subspace  $W \subset V$  is invariant, namely if  $D(G)W \subset W$ , we say  $D$  *reduces* to  $W$ ;  $D$  is irreducible if only  $V$  and  $\mathbb{C}$  are invariant. A representation  $D$  of group  $G$  is called fully reducible or *decomposable*, if for any subrepresentation  $D_1$  in  $W \subset V$  there is a complementary one  $D'_1$  in  $W'$ , so one writes  $D = D_1 + D'_1$  and  $V = W + W'$ . Finite groups (indeed, compact groups) have *only* decomposable representations, as one can set up a metric in  $V$ , the representation space, so  $D$  is unitary under that metric: then any invariant subspace has an orthogonal one, also invariant.

$D : G \rightarrow \text{Aut}(V)$  and  $D' : G \rightarrow \text{Aut}(V')$  are equivalent, if  $\exists A : V \Leftrightarrow V'$  with  $D'(g) = AD(g)A^{-1}$ . The search for *irreducible inequivalent representations* (irreps) is a formidable industry, with plenty of applications in mathematics and in physics. For a group  $G$ , note the set of irreps by  $\hat{G}$ : it is a well-defined set.

We have, for any finite group  $G$ , the following results ( [25], [30]):

- 1) The number of *irreps* coincides with the number of classes,  $r$ .

*Hint:* The formal sums  $\sum x_i g_i$  with  $x_i$  complex numbers, make up a complex associative algebra  $\mathcal{A}(G)$ , as the “units”  $g$  multiply by the group product,  $g_i g_j = g_k$ , with dimension of  $\mathcal{A} = n \equiv |G|$ ; this is called the *group algebra*  $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(G)$  (Frobenius, 1906). The center of this algebra is generated by  $g (= ege) + \sum k g k^{-1}$ , i.e. by sum of classes of conjugate elements, so the order of the center is  $r$ , the number of classes. One obtains a bilateral central projector for each class. One shows then that  $\mathcal{A}(G)$  splits in  $m$  simple matrix algebras  $\mathcal{M}_i$ , where  $m = \dim(\text{center } \mathcal{A}) = \#$  of classes =  $r$ . It is well-known (e.g. [30]) that simple complex matrix algebras are *complete*, and of the form  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , hence a square; so it follows that  $\mathcal{A}(G) = \sum_{i=1}^r \mathcal{M}_i^2$ .

This leads to the important and very much used

2) Burnside relation between the order  $|G|$  and the  $dim d_i$  of the  $i$ -th irrep:

$$\boxed{|G| = \sum_{i=1}^r d_i^2} \quad (\text{B.1})$$

- 3) If  $G$  abelian, all irreps are of  $dim$  1 (Schur's Lemma; obvious from  $cl(a) = \{a\}$ ); in this case one shows  $\hat{A}$  is an *abelian group*, and  $A \approx \hat{A}$ : this is the starting point of *Fourier analysis*: for example, if  $G = U(1)$ , the dual  $U(1) = Z$ , and completeness in either space is justly Fourier series!
- 4) When  $G/K = Q$ , the set of *irreps* of  $G$  includes these of  $Q$  (as  $D : G \rightarrow Q \rightarrow Aut(V)$  defines  $D : G \rightarrow Aut(V)$ ).
- 5)  $|G_{ab}|$  is the number of 1-*dim* irreps of  $G$  (always  $\geq 1$ ).
- 6) If  $G = K \times H$ ,  $D(G) = D(K) \otimes D(H)$ , where  $\otimes$  is Kronecker product of matrices.
- 7) For  $A$  abelian,  $Aut(A)$  operates in  $\hat{A}$ . For  $G$  arbitrary, it is  $Out(G)$  which operates in  $\hat{G}$ .
- 8) If  $G$  finite,  $|G| : d_i$ , i.e., the  $dim$  of the *irrep* divide  $G$  (difficult; see [27]).

1B.- Character Table. For any representation  $D : G \rightarrow V$  the character  $\chi$  of element  $g$  in this representation  $D$  is defined as the trace:  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$\chi_D(g) := Tr D(g) \quad (\text{B.2})$$

One proves at once: elements in the same class have the same character, and equivalent representations also; both come from the *cyclic* property, namely  $Tr(ABC) = Tr(CAB)$ .

As an example, for the group  $Z_3$  the Character Table runs as follows: (with  $\omega$  a cubic root,  $\omega = \exp(2\pi i/3)$ ).

	1A	3A	3B
$D_0$	1	1	1
$D_1$	1	$\omega$	$\omega^2$
$D_2$	1	$\omega^2$	$\omega$

As finite groups are compact, and *irreps* of compact groups are unitary (mentioned above), there are orthogonality properties between rows and between columns [30].

We write only one: the square modulus of the first row is again Burnside relation, namely

$$|G| = \sum_{i=1}^r d_i^2. \quad (\text{B.3})$$

Different columns have zero (conjugate) product: above e.g. it is  $(1 + \omega + \omega^2 = 0)$ , as the sum of the three cubic roots of 1.

2. Finite Fields. Some of our finite groups can be seen as groups of matrices over *finite fields*. Let  $p$  be a prime, and in the numbers  $0, 1, 2, \dots, (p-1)$  consider sum and product *mod*  $p$ : the *congruences* of Gauss; for example, in  $(0, 1)$  the rules are  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $1 + 1 = 0$ ; with  $0 \cdot (\text{any}) = 0$ , and  $1 \cdot 1 = 1$ . So we *define* the finite field  $\mathbb{F}_2$  with 2 elements, and the finite field  $\mathbb{F}_p$  with  $p$ ;  $\mathbb{F}_p^* := \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$  is the multiplicative group: only 0 is non-invertible under the product. These finite fields were first introduced by Galois (1832).

One shows (Moore 1903) that any other finite field  $\mathbb{F}_q$  has cardinal  $q = p^f$ , for (any prime  $p$  and) any natural number  $f$ , and it is commutative (Wedderburn, 1905); but the rules are *different*:

$$\text{Sum in } Z_q, \text{ as in the elementary abelian group } (Z_p)^f. \quad (\text{B.4})$$

$$\text{Product in } F_q^*, \text{ as in } Z_{q-1}. \quad (\text{B.5})$$

For example,

$$\text{in } \mathbb{F}_4 : \{0, 1, \omega, \omega^2\} \text{ is e.g. } 1 + \omega = \omega^2, \omega + \omega^2 = 1. \quad 1 + \omega^2 = \omega. \quad (\text{B.6})$$

Product: as  $Z_3$  in  $(1, \omega, \omega^2) = (e, a, a^2)$ .

Given any finite field  $\mathbb{F}_q$ ,  $\mathbb{F}_q^n$  is the  $n$ -dim  $\mathbb{F}_q$ -vector space,  $M_n(\mathbb{F}_q)$  all the  $n \times n$  matrices  $\approx \text{End}(\mathbb{F}_q^n)$ , and  $GL_n(\mathbb{F}_q) = GL_n(q)$  the invertible ones. One shows the order of the *finite* group  $GL$  is

$$|GL_n(q)| = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{n-1}), \quad (\text{B.7})$$

(e.g. in the first row there cannot be all 0's; the second is linear independent of the first, etc.).

The determinant map:  $GL_n(q) \rightarrow \mathbb{F}_q^*$  has as kernel the unimodular group  $SL_n(q)$ . Also the diagonal matrices  $\approx \mathbb{F}_q^*$  are normal (central) in  $GL$ , with  $PGL$  as quotient.



So one constructs the Box

$$\begin{array}{ccccc}
H & \longrightarrow & SL_n(q) & \longrightarrow & PSL_n(q) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{F}_q^* & \longrightarrow & GL_n(q) & \longrightarrow & PGL_n(q) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
J & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^* & \longrightarrow & H
\end{array}$$

where  $H = \mathbb{F}_q^* \cap SL_n(q)$ , etc. Now, the *fundamental result of Jordan-Dickson* says:  $PSL_n(q)$  is simple, for all  $n$  and  $q$ , except  $n = 2$  and  $q = 2$  or  $q = 3$ . Indeed

$$PSL_2(2) = Sym_3 = Z_3 \rtimes Z_2; \quad PSL_2(3) = Alt_4 = V \rtimes Z_3. \quad (\text{B.8})$$

This forms the *third* family (besides  $Z_p$  and  $Alt_{n>4}$ ) of *finite simple* groups, although it is *bi*-parametric. Other families, that we omit, contain the equivalent to the orthogonal and symplectic groups, plus the corresponding exceptional groups (Chevalley, 1955), etc.

3.  $|G| =$  up to  $pq$ . Let us study the possible finite group with  $|G|$  up to order  $pq$ , only two factors. If only one,  $Z_p$  is the only possibility, and the group split in *irreps* and classes is

$$Z_p : \{a^p = e\}; \quad p = p \cdot 1^2 \quad \text{and} \quad p = 1 \cdot 1_1(e) + (p-1) \cdot 1_p. \quad (\text{B.9})$$

These groups are finite, abelian, cyclic and simple: one for each prime (e.g.  $Z_{137}$ ).

Consider now  $|G| = p^2$ ; one has  $p^2 = p^2 \cdot 1^2$ , so they are abelian; and there are two of them, as  $Part(2) = 2$ : they correspond to  $Z_{p^2}$ , cyclic, and  $(Z_p)^2$ , the elementary abelian: the groups  $(Z_p)^f$ , appearing very often, are called *elementary abelian groups*.

E.g. for the case  $(Z_p)^2$  it is,

$$Z_p \times Z_p : \quad p^2 = p^2 \cdot 1^2; \quad p = 1 \cdot 1_1(e) + (p-1) \cdot 1_p \quad (\text{rest}). \quad (\text{B.10})$$

Next case is  $|G| = p(\neq)q$ ; if  $p = 2$ , there is also the dihedral group, performing the *auto* of pass to the inverse in  $Z_p$ : so there are just *two* groups,

$$|G| = 2q : \quad Z_{2q} \quad \text{and} \quad D_q = Z_q \rtimes Z_2. \quad (\text{B.11})$$

We leave to the reader to express  $2q =$  (sum of irreps)  $=$  (sum of classes).

Next case is  $|G| = pq$ ,  $2 < p < q$ . Only possible non-abelian solution is

$$pq = p \cdot 1^2 + x \cdot p^2, \quad \text{with} \quad x = (q-1)/p, \quad (\text{B.12})$$

when  $(q-1) : p$ . we say then that primes  $q$  and  $p(> 2)$  are *compatible*;  $q, p = 3, 7$  are the first example (see more examples in [7]); then we have the *semidirect product*

$$pq = |G_{pq}| = p \cdot 1^2 + (q-1)/p \cdot p^2 \quad \text{or} \quad G_{pq} = Z_q \rtimes Z_p. \quad (\text{B.13})$$

When  $p$  and  $q$  are incompatible, the only possible group is the cyclic  $Z_{pq}$ .

We shall not bother to completely classify the  $pqr$  groups; only *two* cases will be considered here:

- (a)  $|G| = p^3$ : there are 3 abelian groups, as  $Part(3) = 3$ , and two nonabelian groups, repeating our studied case for  $|G| = 8$  and  $27$ : one has the two constructs

$$(Z_{p^2}) \rtimes Z_p, \text{ possible as } |Aut(Z_{p^2})| = \Phi(p^2 - p) \text{ and } \exists Z_p \rightarrow Aut(Z_{p^2}).$$

$$(Z_p)^2 \rtimes Z_p, \text{ possible also, as } |Aut(Z_p)^2| = |GL_2(p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p), \text{ divides } p.$$

The two nonabelian groups of order  $p^3$  can be seen to be *extraspecial* [20].

- (b)  $G = (Z_p)^3$ , an elementary abelian group. In this case  $G = \mathbb{F}_p^3$ , and  $Aut(G) = GL_3(\mathbb{F}_p)$ , of order  $(p^3 - 1)(p + 1)(p - 1)^2 p^3$ .

4. Coxeter groups. H. S. M. Coxeter (1907 - 2003) studied since 1930 discrete groups generated by involutions (reflections); for full information see [10].

There is a well-known graphical representation (invented by Coxeter, but copied by Dynkin):

- (a)  $\circ$  means a single involution  $a$ , so the group is  $Z_2$ .
- (b)  $\circ \quad \circ$  two independent involutions, so the group is  $V = (Z_2)^2$ .
- (c)  $\circ - \circ$  means, by definition,  $a^2 = b^2 = (ab)^3 = 1$ : it generates  $Sym_3$ .
- (d)  $\circ - \overset{4}{\circ}$  means  $a^2 = b^2 = (ab)^4 = e$ ; it generates  $D_4$ . With any other number  $n$  it generates the dihedral  $D_n$ , order  $2n$ . It is the isometry group (rotations and reflections) of a regular polygon of  $n$  sides.
- (e)  $\circ - \circ - \circ - \dots - \circ$ , means  $a^2 = b^2 = \dots = n^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^2 = \dots = (mn)^3 = e$ : it generates  $S_n$  (easy to prove).

## References

- [1] E. Artin. The orders of the classical simple groups. *Comm. Pure and Appl. Maths*, 8:455-472, 1955.

- [2] E. Artin. The orders of the linear groups. *Comm. Pur. Appl. Maths*, 8:355–366, 1955.
- [3] Y. Berkovich. *Groups of Prime Order*. Walter de Gruyter, Berlin, 2008.
- [4] Y. Berkovich and Z. Janko. *Groups of Prime Order (vol II)*. Walter de Gruyter, Berlin, 2008.
- [5] H. U. Besche, B. Eick, and E. A. O’Brien. A millenium project: Constructing small groups. *Int. J. Alg. Comp.*, 12:623–644, 2002.
- [6] L. J. Boya and M. Byrd. Clifford periodicity from finite groups. *J. Phys. A*, 32:L201–L205, 1999.
- [7] L. J. Boya and C. Rivera. Grupos abelianos finitos: Una mirada categorial. *Gazeta de la RSME*, 13:229–244, 2010.
- [8] W. Burnside. *The theory of groups of finite order*. Cambridge U. P., Cambridge, 1897.
- [9] R. D. Carmichael. *Groups of finite order*. Dover, Dover, 1937.
- [10] H. M. S. Coxeter and W. O. J. Moser. *Generators and Relations for Discrete Groups*. Springer, Heidelberg, 1980.
- [11] J. Dorronsoro and E. Hernandez. *Números, Grupos y Anillos*. Addison-Wesley-UAM, Madrid, 1996.
- [12] Conway et. al. *Atlas of finite groups*. Oxford U. P., Oxford, 1986.
- [13] W. Feit and J. G. Thomson. Solvability of groups of odd order. *Pacific J. Math*, 13:755–1029, 1963.
- [14] D. Gorenstein. *Finite groups*. Chelsea, New York, 1980.
- [15] J. Gray. From the history of a simple group. *The Math. Intell.*, 4:59–67, 1982.
- [16] R. L. Griess. *Twelve Sporadic Groups*. Springer, Berlin, 1998.
- [17] M. Hall. *Teoría de los grupos*. Mc Millan, New York, 1967.
- [18] M. Hall and J. K. Senior. *Groups of order  $2^n$ , ( $n \leq 6$ )*. Mc Millan, New York, 1964.
- [19] C. J. Hillar and D. I. Rhea. Automorphisms of finite abelian groups. *Am. Math. Monthly*, 114:917–923, 2007.
- [20] B. Huppert. *Endliche Gruppen I*. Springer, 1967.

- [21] F. Klein. *Le programme d'Erlangen*. Gauthier-Villiers, 1974.
- [22] W. Lederman. *Theory of Finite Groups*. Oxford U.P., Oxford, 1948.
- [23] J. Milnor and J. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton, 1972.
- [24] J. Otal. The classification of finite simple groups. *R. Acad. Cien. Zgza*, 26:27–42, 2004.
- [25] D. J. K. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*. Springer, Berlin, 1996.
- [26] M. Du Sautoy. *Symmetry*. Harper-Collins, 2008.
- [27] B. Simon. *Representations of Groups*. Am. Math. Soc., 1996.
- [28] A. Speiser. *Gruppen von endlichen Ordnung*. Birkhäuser, Basel, 1921.
- [29] A. D. Thomas and G. V. Wood. *Group Tables*. Shiva Pub. Ltd, Orpington (UK), 1980.
- [30] H. Weyl. *Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover, Dover, 1956.
- [31] E.P. Wigner. *Group Theory*. Academic Press, 1959.
- [32] M. Wild. The groups of order sixteen made easy. *Am. Math*, 112:20–31, 2005.

## Sobre el problema clásico de Waring

Catalina Calderón

Departamento de Matemáticas. Universidad del País Vasco. 48940 Bilbao

*Omnis integer numerus vel est cubus; vel e duobus, tribus, 4, 5, 6, 7, 8, vel novem cubus compositus: est etiam quadratoquadratus; vel e duobus, tribus etc. usque ad novemdecim compositus et cetera deinceps.*

in Meditationes Algebraicæ 1770, pag. 204-5: (Edward Waring)

### Resumen

El objetivo de estas páginas es mostrar el problema de Waring y su evolución en la resolución del mismo a través de las investigaciones de matemáticos como G.H. Hardy, J.E. Littlewood, I.M. Vinogradov y otros.

### 1. Euler y la función partición

Los problemas aditivos tratan de la posibilidad de representación de los enteros  $n$  en sumandos de la forma

$$n = a_{1i_1} + a_{2i_2} + \cdots + a_{si_s}, \quad (1)$$

donde los  $a_{jr}$  son enteros de unas sucesiones numéricas determinadas. El fundador de esta rama de la teoría de números es L. Euler (1707-1783). Sus investigaciones vienen expuestas en su memoria “*De partitionumerorum*”.

En el método empleado por Euler, las sucesiones  $\{a_{jr}\}$ ,  $j = 1, \dots, s$  no negativas, se ponen en correspondencia con la serie de potencias  $f_j(z) = \sum_{r=1}^{\infty} z^{a_{jr}}$  la cual es convergente para  $|z| < 1$ . El número de soluciones  $A(n)$ , de la ecuación (1), es igual al coeficiente de  $z^n$  en la serie

$$F(z) = \prod_{j=1}^s f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n)z^n, \quad (2)$$

y el problema se reduce al cálculo de ese coeficiente. En numerosos problemas,  $s$  está acotado, pero puede ser infinito.

El método empleado por Euler ( método de las funciones generatrices ) había sido casi olvidado durante mas de cien años pues no se había conseguido hallar métodos efectivos para el cálculo de los coeficientes de la serie principal (2). A finales del siglo XIX, el matemático inglés J. Sylvester y otros, para la resolución de los problemas aditivos lineales, aplicaban la descomposición de  $F$  en fracciones continuas, pero este método no servía para los problemas no lineales. Más tarde, grandes matemáticos como S. Ramanujan, G.H. Hardy, J.E. Littlewood, e I.M. Vinogradov, conservando la idea fundamental de Euler de aplicación de las series infinitas desarrollaron un método nuevo que actualmente sigue siendo de gran utilidad en la resolución de problemas aditivos.

La suma de la serie (2) cuyo coeficiente es  $A(n)$ , se llama función generatriz de  $A(n)$ . A Euler el estudio del número de formas en que un entero puede expresarse como suma de otros enteros era un problema que le fascinaba. En este caso, la función  $A(n)$  se denota por  $P(n)$  y se llama función partición.

La función partición se define precisamente, como el número de formas en que el entero positivo  $n$  puede escribirse como una suma de enteros positivos. No se consideran distintas dos particiones si, difieren sólo en el orden de sus sumandos. Por ejemplo  $P(4) = 5$  puesto que  $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ . Definimos  $P(0) = 1$ . Euler descubrió numerosas identidades que relacionan diversos valores de  $P(n)$ . Tomando  $P(0) = 1$  y  $P(n) = 0$  para  $n < 0$ , Euler da una fórmula de recurrencia para  $P(n)$ , para todo  $n \geq 1$

$$P(n) - P(n - 1) - P(n - 2) + P(n - 5) + P(n - 7) + \dots = 0.$$

y obtiene también la función generatriz expresada en el siguiente teorema:

**Teorema 1.** (Euler)([17]) Para  $|z| < 1$  tenemos

$$F(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - z^m)} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)z^n. \quad (3)$$

La demostración se hace primero en el intervalo  $0 \leq x < 1$  y se extiende al disco unidad por prolongación analítica.

Notar que

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + z^m), \prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^m)$$

son ambos uniformemente convergentes en un disco  $|z| \leq \rho$ , donde  $\rho < 1$ . Luego representan funciones analíticas que pueden desarrollarse en serie de Taylor para  $|z| < 1$ . Los productos señalados son no nulos en  $|z| < 1$  y sus recíprocos son a su vez funciones analíticas en dicho disco.

Euler también considera las particiones de  $n$  en sumandos impares y distintos o pares y distintos. Las funciones generatrices son respectivamente

$$F(z) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + z^{2m-1}), \quad F(z) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + z^{2m}).$$

Los números pentagonales  $1, 5, 12, 22, \dots$  son las sumas parciales de los términos de la progresión aritmética

$$1, 4, 7, 10, 13, \dots, 3n + 1, \dots$$

Si  $T(n)$  denota la suma de los  $n$  primeros términos de esta progresión, entonces

$$T(n) = \sum_{r=0}^{n-1} (3r + 1) = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Para estos números, Euler comprueba que su función generatriz es

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z^{T(n)} + z^{T(-n)}), \quad |z| < 1.$$

Es de notar también que la función partición crece muy rápidamente con  $n$ , por ejemplo  $P(10) = 42$ ,  $P(100) = 190569292$ ,  $P(200) = 3972999029388$ .

## 2. Análisis complejo en los problemas aditivos

G.H. Hardy (1877-1947) y S. Ramanujan (1887-1920), hicieron un estudio profundo de la función generatriz  $F(x)$  para valores complejos de  $x$  en las proximidades del círculo unidad de convergencia. Así que conservando la idea fundamental de L. Euler de aplicación de las series infinitas, estudiaron el problema de las particiones de un entero  $n$ , y en 1918, dieron una primera aproximación de lo que después conocemos como *método del círculo*. Ellos obtienen una fórmula asintótica para  $P(n)$ . El punto de partida es la fórmula de Euler (3) y el Análisis Complejo: Todo punto del círculo unidad  $|z| = 1$  es punto singular esencial para la función  $F(z)$  representada por el producto en el disco  $|z| < 1$ , aplicando la fórmula integral de Cauchy consiguen calcular los coeficientes  $P(n)$  de la serie (3):

$$P(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz, \quad (4)$$

donde  $\gamma_\rho$  es el círculo de centro 0,  $|z| = \rho < 1$ . Hardy y Ramanujan, grandes conocedores de las propiedades analíticas, observaron que al ser el punto  $z = 1$  polo de cada término del producto infinito, la función  $\frac{F(z)}{z^{n+1}}$  debía crecer muy rápidamente cuando  $z$  tiende hacia 1 a lo largo del eje real. Dividieron  $\gamma_\rho$  en dos arcos  $M_\alpha$  y  $m_\alpha$ , así la integral es

$$P(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{M_\alpha} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{m_\alpha} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz$$

en el arco  $M_\alpha$  dedujeron una aproximación para  $\frac{F(z)}{z^{n+1}}$  y pudieron acotar la integral sobre  $m_\alpha$  por una función de  $\rho$ , y  $\alpha$  relativamente pequeña, con lo que consiguieron obtener una fórmula asintótica para  $P(n)$ . (Chandrasekharan [9] ).

**Teorema 2.** Si  $P(n)$  denota el número de particiones de  $n$ , entonces

$$P(n) = \frac{e^{C\lambda(n)}}{4\sqrt{3}\lambda^2(n)} + O\left(\frac{e^{C\lambda(n)}}{\lambda^3(n)}\right)$$

donde  $C = \pi\sqrt{2/3}$ ,  $\lambda(n) = \sqrt{n - (1/24)}$ .

Algunas propiedades notables de divisibilidad relativas a  $P(n)$  descubiertas por Ramanujan son

$$P(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}, \quad P(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7} \quad (5)$$

también da sin demostración las identidades siguientes

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(5n + 4)x^n = 5 \frac{f(x^5)^5}{f(x)^6} \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(7n + 5)x^n = 7 \frac{f(x^7)^3}{f(x)^4} + 49x \frac{f(x^7)^7}{f(x)^8}, \quad (7)$$

donde  $f(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)$ . Pero dado que las funciones de la derecha de (6), (7) admiten desarrollos en serie de potencias con coeficientes enteros, se sigue que las identidades de Ramanujan implican a su vez las relaciones de congruencia (5).

### 2.1. Aplicación a los grupos abelianos finitos.

Sea  $a(n)$  la función aritmética que denota el número de grupos abelianos con  $n$  elementos. Esta función es positiva de valores enteros y multiplicativa de forma que  $a(1) = 1$  y para cada  $p$  primo y cada entero  $k \geq 1$ ,  $a(p^k) = P(k)$ , donde  $P(k)$  es la función partición de  $k$ .

Por la teoría de series de Dirichlet y el teorema de Euler, resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} &= \prod_p \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{p^{ks}} \right) = \prod_p \prod_{k=1}^{\infty} \{1 - p^{-ks}\}^{-1} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \prod_p \{1 - p^{-ks}\}^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty} \zeta(ks), \quad \text{Re } s = \sigma > 1 \end{aligned}$$

donde  $\zeta(s)$  es la función zeta de Riemann y  $s = \sigma + it$ . También podemos decir que  $a(n)$  es igual al número de formas en las que  $n$  puede ser expresado como  $n = n_1 n_2^2 \dots n_j^j \dots$ , donde  $n_1, \dots, n_j, \dots$ , son enteros positivos.



Es fácil calcular el valor de  $a(p^k)$ . Por ejemplo, para todo número natural  $k = 1, 2, \dots, 20$  sus valores son respectivamente:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627.

Es decir que para todo primo  $p$  se cumple que  $a(p) = 1, a(p^2) = 2, a(p^3) = 3, a(p^4) = 5, a(p^6) = 11, a(p^7) = 15, \dots, a(p^{20}) = 627$ . Como por otro lado si  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$  se cumple que  $a(n) = a(p_1^{\alpha_1}) \dots a(p_r^{\alpha_r})$  podemos conocer  $a(n)$  para cada  $n$ .

Aplicando métodos del Análisis Complejo y acotaciones de la función zeta de Riemann, se pueden estudiar términos error para funciones obtenidas mediante convoluciones de Dirichlet en las que interviene precisamente  $a(n)$ . Así se demuestra -entre otras fórmulas asintóticas- que (véase [6])

$$\sum_{n \leq x} (a * a * a)(n)^2 = xP_8(\log x) + O_\epsilon(x^{2/3+\epsilon}) (\forall \epsilon > 0)$$

siendo  $P_8(t)$  un polinomio de grado 8 en  $t$ .

### 3. De Waring a Hilbert

Edward Waring nació en 1734<sup>1</sup> en Old Heath (cerca de Shrewsbury), Shropshire (Inglaterra), hijo de granjeros, fue educado en la escuela de Shrewsbury.

Ingresó el 24 de Marzo de 1753 en el Magdalene College de Cambridge, la segunda Universidad más antigua de habla inglesa del mundo, fundada en 1209.



Figura 1.— Edward Waring (1734-1798). Retrato de Thomas Kerrich (1794)

Muy pronto destacó por su capacidad matemática. Su trabajo más famoso es *Meditationes algebraicae*, remitió el primer capítulo de su trabajo a la Royal Society sin obtener

<sup>1</sup>The new encyclopaedia Britanica 15th edition, vol. 12 pag 487

contestación en los dos años siguientes. Cuando en 1759, Waring fue nombrado *Lucasian Chair of Mathematics* en Cambridge, el trabajo fue distribuido como *Miscellanea analytica* para probar que estaba cualificado para el puesto a pesar de su juventud. Se publicó como un trabajo completo en 1762 y a esta segunda edición, Waring la llamó *Meditationes algebraicae*, un importante trabajo que cubre tópicos entre los que se encuentra la teoría de números.

El 2 de Junio de 1763, Waring fue elegido *Fellow* de la Royal Society. Algunos de los miembros ilustres de la Royal Society fueron L. Euler (1747), J.L.M. Lagrange (1791), C.F. Gauss (1804), A.L. Cauchy (1832), I.M. Vinogradov (1942) y mas recientemente R.C. Vaughan (1990) y D.R. Heath-Brown (1993).

Su obra *Miscellanea analytica* de 1762, fue la base de otras obras que publicaría posteriormente. *Proprietates algebraicarum curvarum*, sobre geometría publicada en 1772. Otro trabajo *Miscellanea analytica* apareció en 1776 y una nueva edición ampliada en 1785. *Meditationes algebraicæ*, cubriendo la teoría de ecuaciones y la teoría de números apareció en 1770, y una versión ampliada en 1782.

En *Meditationes algebraicae* prueba que todas las funciones simétricas racionales de las raíces de una ecuación, se pueden expresar como funciones racionales de los coeficientes. Dedujo un método para expresar polinomios simétricos e investigó la ecuación ciclotómica  $x^n - 1 = 0$ . Este trabajo hace de Waring uno de los investigadores mas tempranos en el desarrollo de la teoría de Galois.

También *Meditationes algebraicae*, capítulo 4, contiene resultados como : *k ecuaciones con k incognitas se pueden reducir a una ecuación con una incognita*. Su resultado: *el producto de los grados de las ecuaciones originales es el grado de la ecuación reducida* es conocido como Teorema Generalizado de Bezout. El resto del libro se ocupa de la Teoría de números, un tema en el cual Waring hizo interesantes avances.

Presentaba una serie de proposiciones nuevas relativas a la descomposición de un número como suma de otros números y sugería un método (no probado) para la descomposición de todo número par en suma de dos números primos.

Este resultado es conocido como Conjetura de Goldbach. ( *Cada entero par (a partir de 4) es suma de dos primos, y cada entero impar (a partir de 7) es o primo o suma de tres primos,*(ver [24]) ). Aunque Goldbach propuso esta cuestión a Euler en una carta mucho antes de que Waring publicara su *Meditationes algebraicæ*, la versión de Waring fue la primera en publicarse. Waring lo publicó en 1770 y la carta de Christian Goldbach (1690-1764), a Leonhar Euler (1707-1783) de 30 de Junio 1742 no fue publicada hasta 1843.

Entre los resultados también se encontraba el teorema que universalmente se conoce

con el nombre de John Wilson (1741-1793). Wilson enuncia, sin demostración, el teorema siguiente: *Para cada número primo  $p$ ,  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .* Fue Lagrange en 1773, el que dió una demostración de esta propiedad.

Se le concedió en 1784 la Medalla Copley, un reconocimiento a su trabajo científico. La medalla es considerada como la más prestigiosa atribuida al trabajo científico, en cualquiera de sus campos y otorgada por la Royal Society. Es también la mas antigua, la primera se concedió en 1731. En 2006 se le concedió a Stephen Hawking (especialidad: física teórica), a Roger Penrose (especialidad: física matemática) se la otorgaron en 2008. En 2009 a Sir Martin John Evans (Stroud, Inglaterra, 1 de enero de 1941); genetista y bioquímico británico. La Medalla Copley 2011 se otorgó a Dan Peter McKenzie, Professor de la University of Cambridge.

En 1794 publica un ensayo filosófico *Essay on the principles of human knowledge*. Durante toda su carrera, los problemas de comunicación impidieron que el mérito de Waring fuera realmente reconocido. Al final de su vida entró en una profunda melancolía. Quizá por eso dimitió de la Society en 1795.

Posiblemente la más acertada afirmación acerca de Waring fue hecha por Thomas Thomsom: *Waring fue uno de los más profundos matemáticos del siglo dieciocho, pero la poca elegancia y oscuridad de sus escritos evitaron que él obtuviera esa reputación a la cual le dieron derecho.*

Waring estudió también el problema de la convergencia de series infinitas y enunció el criterio del cociente, atribuido a Cauchy (1789-1857). El 15 de Agosto de de 1798 Edward Waring murió en Pontesbury.

### 3.1. Existencia de solución en el problema de Waring

E. Waring en *Meditationes Algebraicae* de 1770, ( pág. 203-204) y en su edición posterior de 1782 (pp. 349-350) [41] [42] [43], afirma (sin demostrar), que cada número entero o bien es un cubo o la suma de  $2, 3, 4, \dots, 8$ , o 9 cubos; análogamente cada entero es o una cuarta potencia o la suma de  $2, 3, \dots, 19$  cuartas potencias de enteros no negativos y así sucesivamente. De otra: para cada  $k \geq 2$  existe un  $s \geq 1$  tal que cada número natural es la suma de a lo mas  $s$  potencias  $k$ -ésimas.

En este caso vemos que  $\{a_{jr}\}, j = 1, 2, \dots, s$  es la sucesión de las  $k$ -potencias de enteros no negativos.

El problema general denominado como problema de Waring, consiste en demostrar que para cualquier entero  $k \geq 2$  existe un entero  $s$  dependiendo sólo de  $k$ , tal que todo entero positivo  $n$  pueda expresarse como la suma de a lo más  $s$   $k$ -ésimas potencias de

enteros no negativos:

$$n = x_1^k + \cdots + x_s^k. \quad (8)$$

Se denota por  $g(k)$  al mínimo  $s$  que verifica la condición anterior. David Hilbert (1862-1943), en 1909 resolvió el problema de la **existencia** de  $g(k) < \infty$ , para todo  $k$ .

**Teorema 3.** (Hilbert) *Para cualquier número natural  $k$ , existe un  $s$  que solo depende de  $k$ , tal que para todo número natural  $n$ , la ecuación (8) admite solución mediante números enteros no negativos  $x_1, \dots, x_s$ .*

Su demostración se basa en la identidad siguiente: Dados  $k \geq 1$ ,  $n \geq 1$ , sea  $N = \binom{2k+n-1}{2k}$ . Existen  $N$  números racionales  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  y enteros  $a_{1i}, \dots, a_{ni}$ ,  $i = 1, \dots, N$  tales que

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^k = \sum_{i=1}^N \lambda_i (a_{1i}x_1 + \cdots + a_{ni}x_n)^{2k}$$

para todos los enteros  $x_1, \dots, x_n$ . Así que la respuesta al problema de Waring es afirmativa, pero Hilbert **no determinó** el valor numérico de  $g(k)$  para cualquier  $k$ . La demostración de Hilbert fue publicada en *Göttinger Nachrichten (1909) 17-36 y Math. Annalen 67 (1909), 281-305*.

*Cota inferior de  $g(k)$ .* La pregunta natural que surge es ¿cómo es de grande  $g(k)$ ? o si se puede determinar el valor de  $g(k)$  para cada  $k$ . J.A. Euler (1734-1800) (hijo de L. Euler ver Ribenboim [24]), hace la siguiente observación: Para  $k \geq 2$ , sea  $3^k = q2^k + r$ , donde  $1 \leq r < 2^k$  y  $q = \lfloor (3/2)^k \rfloor$ , como el entero  $n = 2^k q - 1 < 3^k$ , solo puede ser representado por potencias  $k$ -ésimas de 1 y 2, y el menor número de estas es  $\lfloor (3/2)^k \rfloor - 1$  potencias  $k$ -ésimas de 2 y  $2^k - 1$  potencias  $k$ -ésimas de 1 esto es,  $n = (q - 1)2^k + (2^k - 1)1^k$ , así que se requieren  $2^k + q - 2$  potencias  $k$ -ésimas, por lo tanto se tiene que

**Teorema 4.** *Si  $q = \lfloor (3/2)^k \rfloor$ , y  $k \geq 2$  se verifica la desigualdad*

$$g(k) \geq 2^k + q - 2. \quad (9)$$

Se sigue que para  $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$  resultan las cotas (Hardy-Wright [17] y Vaughan[32])

$$g(k) \geq 4, 9, 19, 37, 73, 143, 279, 548, \dots$$

Pero es probable que se verifique siempre la igualdad. Supongamos que  $k \neq 4$ . Sabemos que si

$$2^k \{(3/2)^k\} + \lfloor (3/2)^k \rfloor \leq 2^k, \quad (10)$$

entonces

$$g(k) = 2^k + q - 2, \quad q = [(3/2)^k]. \quad (11)$$

Pero cuando  $2^k \{(3/2)^k\} + [(3/2)^k] > 2^k$  entonces se verifica una de las dos igualdades siguientes

$$g(k) = 2^k + [(3/2)^k] + [(4/3)^k] - 2, \quad g(k) = 2^k + [(3/2)^k] + [(4/3)^k] - 3$$

según que  $[(4/3)^k][(3/2)^k] + [(4/3)^k] + [(3/2)^k]$  sea igual a  $2^k$  o mayor. En 1957, Mahler[22] demostró que si existen valores de  $k$  para los cuales (10) es falsa entonces solo pueden ser un número finito. Posteriormente Stemmler (1964) verificó, en ordenador, que (10) y (11) se cumplen para  $k \leq 200000$  [25]. En 1990, Kubina y Wunderlich[19] ya lo habían extendido a  $k \leq 471600000$ .

Determinado casi en su totalidad  $g(k)$ , la siguiente pregunta que nos hacemos es: ¿Es posible que si prescindimos de ciertas excepciones resulte que, el número de potencias que precisamos para representar los números, como suma de esas potencias, sea menor? y la respuesta es afirmativa, aunque en raras excepciones se da la igualdad. Para estudiar este caso denotamos por  $G(k)$  al menor entero positivo  $s$  tal que todo entero suficientemente grande pueda ser representado como suma de a lo más  $s$  potencias  $k$ -ésimas. Está claro que  $G(k) \leq g(k)$ . De nuevo nos planteamos el problema de calcular el valor exacto de  $G(k)$  o, al menos, determinar cotas superiores e inferiores.

**Teorema 5.** (Maillet-1908)[17] *Si  $k \geq 2$ , entonces se verifica la desigualdad  $G(k) \geq k + 1$ .*

Esto significa que existen números naturales arbitrariamente grandes que no son suma de  $k$ -ésimas potencias. Así que para todo  $k \geq 2$  se verifican las desigualdades

$$k + 1 \leq G(k) \leq g(k).$$

En 139 años, desde que Waring plantea el problema hasta las investigaciones de Hilbert, el problema se resolvió solo para algunos casos especiales (y no del todo) como  $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$ .

### 3.2. Casos $k = 2$ , $k = 3$

*Sumas de cuadrados.* El caso de la suma de potencias cuadrados y, que conocemos como *teorema de los cuatro cuadrados*, había sido establecido por Bachet en 1621 a consecuencia de una observación hecha por Diofanto, y posteriormente en 1640 por Fermat, quién afirmaba haber demostrado un teorema general que implicaba la veracidad de la conjetura de Bachet y prometía publicarlo pero murió antes de revelar su demostración. Fue resuelto finalmente por Lagrange en 1770, (ver Chandrasekharan [8]).

**Teorema 6.** ( Lagrange ) *Todo entero positivo es una suma de cuatro cuadrados.*

Según este teorema  $g(2) = 4$ , luego ya sabemos que al menos es  $G(2) \leq 4$ .

Respecto del módulo 8 tenemos que  $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$  de lo que se deduce  $x^2 + y^2 + z^2 \not\equiv 7 \pmod{8}$ . Esto nos lleva a que ningún entero de la forma  $8n + 7$  se puede expresar como suma de solo tres cuadrados, por lo tanto  $G(2) \geq 4$ .

Tenemos así que, por el teorema de Lagrange de los cuatro cuadrados  $g(2) = 4$  donde 4 puede reducirse a 3 salvo para los números de la forma  $4^r(8n+7)$ , como demostró Legendre (ver Hardy 1999, pág. 12, [18]), y estos son los únicos enteros que no son expresables como suma de tres cuadrados.

Como  $G(2) \geq 4$  y  $G(2) \leq g(2) = 4$ , resulta entonces que si  $k = 2$ ,

$$G(2) = g(2) = 4$$

y el problema de Waring está completamente resuelto para este caso.

*Representación por sumas de cubos.* Para el caso  $k = 3$ , se tiene según la desigualdad de J.A. Euler que  $g(3) \geq 9$  y en 1909 A. Wieferich[65] demostró que  $g(3) \leq 9$ . Sin embargo, el valor preciso de  $G(3)$  no se conoce. En 1909, E. Landau (1877-1938) da la acotación  $G(3) \leq 8$  y en 1939 Dickson prueba que los únicos números que requieren nueve cubos son  $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$ , y  $239 = 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 1^3$ .

Luego cada número es representable por 9 ó menos cubos, salvo los números 23, 239. Es decir que aunque  $g(3) = 9$ , resulta que solo dos números necesitan 9 cubos.

En 1949, Yu V. Linnik[21], demostró que  $G(3) \leq 7$ . Su demostración requiere algunos resultados profundos sobre la representación de números por formas cuadráticas ternarias. Sin embargo, para el caso de sumas de cubos, debemos recordar que el ingenioso uso de identidades polinomiales ha jugado un gran papel, como demostró en 1951 G.L. Watson en su elegante demostración también de la cota  $G(3) \leq 7$ . Utiliza además una estimación para el número de primos en una progresión aritmética, ver[64].

Aplicando el teorema de Maillet vemos que  $G(3) \geq 4$ , por lo que  $G(3)$  solo puede tomar los valores 4, 5, 6 ó 7. Así para  $k = 3$  es

$$g(3) = 9, \quad 4 \leq G(3) \leq 7$$

aunque los cálculos numéricos sugieren que  $G(3) = 4$ .

#### 4. Hardy y Littlewood

Las ideas subyacentes al problema de las particiones de Hardy y Ramanujan fueron desarrolladas por G.H. Hardy y J.E. Littlewood (1885-1977) en una serie de trabajos publicados entre 1920 y 1928 bajo el título general "*Some problems of partitio numerorum*". Aplicaron con cierto éxito el método al problema de Waring y la conjetura de Goldbach.

En el problema de Waring, Hardy y Littlewood se interesaron por dos cuestiones: 1) de cuantas formas es posible una representación en enteros (8) y 2) hallar una fórmula asintótica para el número de tales representaciones.

Sea  $A = \{a_m\}$  una sucesión cualquiera de enteros no negativos y la función

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{a_m}, \quad |z| < 1.$$

Se tiene entonces que

$$F^s(z) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_s=0}^{\infty} z^{a_{m_1} + \cdots + a_{m_s}} \quad (12)$$

haciendo ahora  $n = a_{m_1} + \cdots + a_{m_s}$ , se deduce que

$$F^s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_s(n, A) z^n \quad (13)$$

donde  $r_s(n, A)$  es el número de representaciones de  $n$  como suma de  $s$  elementos de  $A$ . De aquí se deduce como en (4) que

$$r_s(n, A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{F^s(z)}{z^{n+1}} dz$$

Su principal mejora consistió en tomar en esta integral, varios arcos mayores y varios arcos menores, en lugar de uno sólo de cada clase. Pero su método seguía teniendo el defecto de tener que trabajar con series infinitas. Considerando la sucesión  $A_k$  de las potencias  $k$ -ésimas de enteros, demuestran el teorema siguiente

**Teorema 7.** *Si  $s > (k - 2)2^{k-1} + 5$ , entonces el número  $r_s(n, A_k)$  de soluciones de la ecuación  $n = x_1^k + \cdots + x_s^k$ , en enteros positivos verifica*

$$r_s(n, A_k) = \sigma_s(n) \frac{\Gamma^s(1 + (1/k))}{\Gamma(s/k)} n^{\frac{s}{k}-1} + o(n^{\frac{s}{k}-1}). \quad (14)$$

$\Gamma$  es la función Gamma de Euler, y  $\sigma_s(n)$  es una función aritmética (que se llama serie singular y por lo general bastante complicada), que verifica: existen dos constantes  $c_1(k, s), c_2(k, s)$  tal que  $0 < c_1 \leq \sigma_s(n) \leq c_2$ , para todo  $n$ .

Si se considera  $k \geq 3$ , entonces la condición  $s \geq k2^{k-1} + 1$  será suficiente.

Calcularon los valores de las constantes  $c_1, c_2$  para varios exponentes  $k$ . El resultado anterior implica que existe una constante  $n_0(k)$  tal que si  $s \geq k2^k + 1$  y  $n > n_0(k)$ , entonces  $r_s(n, A_k) > 0$ .

*Cotas generales para  $G(k)$ .* Asociado con la validez de la fórmula asintótica, está el problema de hallar  $G(k)$ . Hardy y Littlewood [14], [15], [16] abordaron este problema y obtuvieron que para cada  $k \geq 2$ ,

$$G(k) \leq (k-2)2^{k-1} + 5$$

y que mejoran posteriormente a

$$G(k) \leq k2^{k-2}h(k)$$

donde  $h(k) \rightarrow 1$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Conjeturaron que  $G(k) \leq 2k+1$ , salvo cuando  $k = 2^m, m > 1$ , en cuyo caso  $G(k) = 4k$ . Cuando  $k = 2$  ya sabemos que  $G(2) = 4$ .

Para casos especiales de  $k$  se pueden especificar mejores cotas que la de Maillet.

**Teorema 8.** 1) Si  $m \geq 2$ , entonces  $G(2^m) \geq 2^{m+2}$ .

2) Para todo primo  $p > 2$  y todo  $m \geq 0$  se verifican las desigualdades

a)  $G(p^m(p-1)) \geq p^{m+1}$ ,

b)  $G(\frac{1}{2}p^m(p-1)) \geq \frac{1}{2}(p^{m+1} - 1)$ .

La propiedad 1) se debe a Kempner y la 2) a Hardy-Littlewood. (see[17]) Ejemplo de estas cotas son  $G(6) \geq 9$ ,  $G(9) \geq 13$ ,  $G(10) \geq 12$ . Para  $G(8)$  la cota de Maillet dice que  $G(8) \geq 9$ , pero la de Kempner nos dice que  $G(8) \geq 32$ .

## 5. Vinogradov y las sumas trigonométricas

I.M. Vinogradov (1891-1983) alrededor de 1924, al estudiar el problema de Waring, propuso sustituir las series infinitas (2) por sumas finitas ( sumas trigonométricas):

$$S_j(\theta, n) = \sum_{a_{jr} \leq n} e^{2\pi i \theta a_{jr}}$$

y la integral (4) por

$$\int_0^1 \prod_{j=1}^s S_j(\theta, n) e^{-2\pi i \theta a_{jr}} d\theta.$$



Vinogradov observó que el método podía aplicarse con sumas finitas, puesto que en la representación de  $n$  como suma de potencias  $k$ -ésimas el mayor entero que puede tomar cada  $x_i$  en (8) es a lo más  $[n^{1/k}] = N$ , de forma que (12) es ahora

$$F_N^s(z) = \sum_{x_1=1}^N \cdots \sum_{x_s=1}^N z^{x_1^k + \cdots + x_s^k}$$

pero ahora sin problemas de convergencia y puede considerar la integral en el círculo unidad  $|z| = 1$ . Entonces: si  $r_s(n, A_k)$  denota el número de soluciones de la ecuación  $n = x_1^k + \cdots + x_s^k$ , en enteros positivos, resulta que

$$r_s(n, A_k) = \int_0^1 \left( \sum_{x=1}^N e^{2\pi i x^k \theta} \right)^s e^{-2\pi i n \theta} d\theta.$$

La modificación introducida por Vinogradov de este método tiene la gran ventaja de que admite una extensa aplicación a otros problemas de Teoría Aditiva de Números.

Con la terminología de Vinogradov, los puntos del segmento  $[0, 1]$  se dividen en dos clases. Pertenecen a la primera clase los números que admiten una buena aproximación mediante fracciones racionales. Estos son los números para los cuales existe una fracción racional  $a/q$ , con un denominador pequeño respecto de  $n$  y tal que  $|\theta - (a/q)|$  es considerablemente menor que  $q^{-2}$ . Todos los demás puntos del segmento  $[0, 1]$  pertenecen a la segunda clase.

Observó que, para tener buenas acotaciones de la integral sobre puntos de la primera clase, necesitaba mejores estimaciones de las sumas trigonométricas-interiores a la integral-que las obtenidas por H. Weyl. Por ello en los años posteriores estudia las sumas trigonométricas e introduce técnicas muy refinadas para obtener acotaciones de las sumas anteriores y en general del tipo

$$\sum_{x=P}^{P+Q} e^{2\pi i f(x)\theta}$$

donde  $f(x)$  puede ser por ejemplo un polinomio u otra función con determinadas condiciones. Para el estudio de las sumas trigonométricas y método del círculo se puede consultar N.M. Korobov [20] y R.C. Vaughan [32], se recomienda la segunda edición por que en esta se ha incluido un refinamiento de Wooley del teorema del valor medio de la integral de Vinogradov-muy importante en muchos problemas de la Teoría de Números- además de la cota superior de  $G(k)$  obtenida por Wooley. (Una generalización de la suma exponencial en la que se introducen caracteres de Dirichlet como coeficientes, es estudiada en [7].)

Vinogradov hizo algunas precisiones en la fórmula asintótica de Hardy y Littlewood, demostrando el siguiente teorema:

**Teorema 9.** Si  $k \geq 12$  y  $s \geq [10k^2 \log k]$ , entonces la fórmula (12) se verifica con un

término error

$$O(n^{\frac{s}{k}-1-\frac{1}{k^2}}).$$

Luego existe una constante  $n_0(k)$  tal que si  $n > n_0(k)$  entonces

$$r_s(n, A_k) > 0.$$

## 6. Algunas cotas para $g(k)$ y $G(k)$

*Representación de enteros por cuartas potencias.* El problema de Waring para cuartas potencias dice que: *cada número natural es la suma de a lo más 19 cuartas potencias.*

Para  $k = 4$  de (9) se deduce que  $g(4) \geq 19$ . Por otro lado, en 1986, Balasubramanian-Desouillers-Dress[3] obtienen la cota  $g(4) \leq 19$ . En su demostración usan el método del círculo para demostrar la propiedad para cada entero  $\geq 10^{367}$ , además de este resultado asintótico dan un resultado numérico según el cual todo  $n \leq 10^{367}$  es una suma de a lo más 19 cuartas potencias.

Por lo que se tiene  $g(4) = 19$ , y el problema de Waring para cuartas potencias está resuelto.

En 1912, A. J. Kempner (ver Dickson Volumen II, [12]) ya había obtenido la cota  $G(4) \geq 16$  y Davenport (1939) demostró que  $G(4) \leq 16$ , (ver [11]). Se tiene entonces  $G(4) = 16$ . Es decir que para  $k = 4$ ,

$$g(4) = 19, \quad G(4) = 16$$

y el problema en este caso, está totalmente resuelto.

*Representación de enteros por quintas potencias.* Para  $k = 5$ , J.R. Chen en 1964 [10], obtiene  $g(5) \leq 37$  que es la mejor cota posible para este caso, teniendo en cuenta (9) resulta que  $g(5) \geq 37$ , luego  $g(5) = 37$ . En 1990 Brüdern [4] obtiene la cota  $G(5) \leq 18$  R.C. Vaughan, T.D. Wooley obtienen-entre otras-las siguientes cotas  $G(5) \leq 17$  [36] que mejora la de Brüdern. Con la cota de Maillet tendríamos  $6 \leq G(5) \leq 17$ . Así que

$$g(5) = 37, \quad 6 \leq G(5) \leq 17.$$

No se conoce por ahora el valor exacto de  $G(5)$ . La conjetura es que  $G(5) = 6$

*Representación de enteros por sextas potencias.* Pillai [23] obtuvo en 1940 la cota  $g(6) \leq 73$ . Vaughan y Wooley obtienen  $G(6) \leq 24$  (ver [36]), y por el teorema 8 sabemos que  $G(6) \geq 9$ . Es decir si  $k = 6$  tenemos

$$g(6) = 73, \quad 9 \leq G(6) \leq 24.$$

No se conoce por ahora el valor exacto de  $G(6)$ . Se conjetura que  $G(6) = 9$ .

Para potencias superiores tenemos, en el caso  $k = 7$ , según lo comprobado por Stemmler, [25] resulta que  $g(7) = 143$ . Vaughan y Wooley obtienen la cota  $G(7) \leq 33$  (ver [36]) así con la cota de Maillet tenemos

$$8 \leq G(7) \leq 33, \quad g(7) = 143.$$

Tampoco se conoce por ahora el valor exacto de  $G(7)$ . La conjetura es que  $G(7) = 8$ .

Para  $k = 8$  tenemos  $g(8) = 279$ [25] y  $G(8) \leq 42$  (ver [37]). Teniendo en cuenta el teorema 8 resulta que  $32 \leq G(8) \leq 42$ . Esto es

$$g(8) = 279, \quad 32 \leq G(8) \leq 42.$$

La conjetura es que  $G(8) = 32$ .

Cuando  $k = 9$  el valor de  $g(9)$  aumenta considerablemente  $g(9) = 548$ [25] sin embargo  $G(9) \leq 50$  (vease [38]), entonces  $13 \leq G(9) \leq 50$ . Así que

$$g(9) = 548, \quad 13 \leq G(9) \leq 50.$$

La conjetura es que  $G(9) = 13$ .

R.C. Vaughan, T.D. Wooley [37], [38] obtienen-entre otras-las siguientes cotas para  $10 \leq k \leq 20$

$$G(k) \leq \left\lceil \frac{157}{19}k - 23 \right\rceil.$$

Para  $k = 10$  se tiene  $g(10) = 1079$ . Pero  $G(10)$  se reduce considerablemente pues de las desigualdades de Vaughan-Wooley y de Hardy-Littlewood resulta que  $12 \leq G(10) \leq 59$ . Se conjetura que  $G(10) = 12$ .

I.M. Vinogradov (Ann. Math. 36, 1935,395), obtuvo la cota

$$G(k) < 6k \log k + (4 + \log 216)k$$

que mejoró posteriormente

$$G(k) < k(3 \log k + 11)$$

y en 1959[39] demostró mediante su famoso método de sumas trigonométricas que

$$G(k) < k(2 \log k + 4 \log \log k + 2 \log \log \log k + 13)$$

para todo  $k$  suficienteente grande. En particular uno de los lemas precisa que  $k > 170000$ . Thanigasalam [26], [27], [28] obtiene cotas para  $G(k)$  cuando  $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ . En

cada caso el método de Davenport, junto con el método del círculo, son ingredientes esenciales en la obtención de los resultados. R.C. Vaughan consigue mejorar el método del círculo. Su método iterativo en el problema de Waring, ha resultado ser de gran importancia en la mejora de las cotas, [32] y [33].

D.T. Wooley [66], obtiene para valores grandes de  $k$ , la cota

$$G(k) \leq k(\log k + \log \log k + O(1)).$$

## 7. Extensiones del problema de Waring

Solo mencionaré las alguna de las extensiones más notables del problema de Waring que son:

1.- *Problema de Waring -Goldbach.* Se trata del problema clásico de Waring pero ahora los enteros  $x_i$  son números primos. Esto es, en el problema de Waring -Goldbach nos preguntamos por la posibilidad de expresar números naturales como suma de  $k$ -ésimas potencias de primos, con un número acotado de sumandos:  $n = p_1^k + \dots + p_s^k$ .

2.- *El problema de Hilbert-Kamke.* En este caso, se estudia la representación simultanea de los números naturales  $N_1, \dots, N_n$  por sumas de un número finito de sumandos naturales de la forma  $x, x^2, \dots, x^n$ , esto equivale a estudiar la resolubilidad del siguiente sistema de ecuaciones diofánticas

$$x_1^r + \dots + x_s^r = N_r, r = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Este problema fue propuesto por Hilbert en el año 1900. La existencia de soluciones para  $s = s(n)$  suficientemente grande fue demostrada por E. Kamke en 1921 mediante una generalización del método usado por Hilbert en el problema de Waring.

3.- *Problema de Prouhet-Tarry.* Otra cuestión, consecuencia de las anteriores es la resolubilidad de sistemas de ecuaciones del tipo

$$x_1^r + \dots + x_k^r - x_{k+1}^r - \dots - x_{2b}^r = 0; \quad r = 1, \dots, n \quad (16)$$

donde cada  $x_j$ , independientemente unos de otros, recorre los valores enteros entre 1 a P. Su generalización es la resolubilidad del sistema de ecuaciones no homogéneo siguiente:

$$x_1^r + \dots + x_k^r - x_{k+1}^r - \dots - x_{2b}^r = \lambda_r; \quad r = 1, \dots, n \quad (17)$$

donde como en el caso anterior, cada  $x_j$  independientemente unos de otros recorren los valores enteros de 1 a P.

4.- *Problema de Waring con potencias mixtas.* El problema en este caso es el estudio de la representación de un entero positivo  $n$  como

$$n = x_1^{k_1} + \cdots + x_s^{k_s}, \quad (2 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_s), \quad (18)$$

donde los  $x_i$  y  $k_i$  son enteros positivos.

5.- *Problema de Waring con exponentes no enteros.* La representación de enteros en este caso como suma de potencias se realiza ahora con sumandos del tipo  $[x^c]$  donde  $c$  es un número positivo no entero. Así que la pregunta ahora es 1) ¿para qué valores de  $c$  y de  $s$  es resoluble la ecuación

$$n = [x_1^c] + \cdots + [x_s^c]? \quad (19)$$

2) ¿Cuál es el número de soluciones?

Si  $c > 12$  es un número no entero y  $s > 22c^2(\log c + 4)$ , Arhipov y Zhitkov [1] prueban que el número de soluciones  $W_{s,c}(n)$  de esta ecuación en enteros positivos  $x_1, \dots, x_s$  verifica la relación asintótica siguiente

$$W_{s,c}(n) = \Gamma^s \left(1 + \frac{1}{c}\right) \Gamma^{-s} \left(\frac{s}{c}\right) n^{\frac{s}{c}-1} + o(n^{\frac{s}{c}-1})$$

6.- *Problema de Waring sobre enteros llenos de cuadrados.* Un entero  $n$  se dice que es lleno de cuadrados cuando verifica que: si  $p$  divide a  $n$  entonces  $p^2$  también lo divide. En este caso se trata de estudiar el número de soluciones de la ecuación diofántica (8) cuando  $x_1, \dots, x_s$  son enteros llenos de cuadrados. Denotando por  $J_{s,k}(n)$  a dicho número de soluciones se demuestra que se verifica la siguiente fórmula asintótica (vease [5])

$$J_{s,k}(n) = \sigma \Gamma^s \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \Gamma^{-1} \left(\frac{s}{2k}\right) P^{\frac{s}{2}-k} + O \left(P^{\frac{s}{2}-k-\frac{1}{120k}} + P^{\frac{s}{2}-\frac{c_2 s}{2k^2 \log k}}\right)$$

donde  $\sigma$  es la serie singular y  $P = [n^{1/k}]$ .

## Referencias

- [1] G.I. Arhipov y A.N. Zhitkov, *Waring problem with non integral exponent.* Izv. Acad. NHauk. Ser. Mat. 48, (1984), 6, 1138-1150.
- [2] R. Balasubramanian. *On Waring problem's.* Hardy Ramanujan 8 (1985), 1-40
- [3] R. Balasubramanian- J.M. Desouillers- F. Dress, *Problème de Waring pour les bicarré.* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303,85-88 y 161-163,(1986).
- [4] J. Brüderns, *On Waring problem's for fifth powers and some related topics.* Proc. London Math. Soc. (3) 61, (1990), 3, 457-479.

- [5] C. Calderón. ; M. J. de Velasco. *Waring's problem on squarefull integers*. An. Univ. Bucaresti, Mat. 44 (1995), 3?12.
- [6] C. Calderón, *Asymptotic estimates on finite abelian groups*. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 74(88) (2003), 57?70.
- [7] C. Calderón, M.J. de Velasco, M.J. Zárate, *An explicit formula for the fourth moment of certain exponential sums*. Acta Math. Hungar., 130 (3) (2011), 203-222.
- [8] K.Chandrasekharan, *Introduction to analytic number theory*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1968.
- [9] K. Chandrasekharan, *Arithmetical functions*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970.
- [10] J.-R. Chen, *Waring's Problem for  $g(5) = 37$* .Sci. Sinica 13, 1547-1568, 1964. Also appeared as Chinese Math Acta 6, 105-127, (1965).
- [11] H. Davenport, *On Waring's Problem for Fourth Powers*.Ann. Math. 40, 731-747, (1939).
- [12] L. E. Dickson, *Waring's Problem and Related Results: Ch. 25 de History of the Theory of Numbers, Vol. 2: Diophantine Analysis*.New York: Chelsea, pp. 717-729, (1952).
- [13] W.J. Ellison, *Waring's problem*. (1971), 10-36.
- [14] G.H. Hardy, J.E. Littlewood *A new solution of Waring's problem*. Quart. J. Math, Oxford , 48, 272-293 (1922)
- [15] G.H. Hardy, J.E. Littlewood *Some problems of "partitio numerorum": I A new solution of Waring's problem*. Göttingen Nachrichten, 33-54, (1920).
- [16] G.H. Hardy, J.E. Littlewood *Some problems of "partitio numerorum": IV The singular series in Waring's problem and the value of number  $G(k)$* .Math. Z. 12, 161-188, (1922).
- [17] G.H. Hardy , E.M. Wright, *An introduction to the theory on numbers*. Oxford, Oxford University Press, (1979).
- [18] G. H. Hardy, *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*,3rd ed. New York: Chelsea, 1999.
- [19] J.F. Kubina- M-V. Wunderlich, *Extending Waring's conjecture to 471600000*. Math. Comp. 55, (1990), 815-820.
- [20] N.M. Korobov, *Las sumas trigonométricas y sus aplicaciones*. Servicio Editorial de la UPV/EHU, Bilbao, 1993.
- [21] Yu V. Linnik, *An elementary solution of a problem of Waring by Schnirelman's method*. Math. Sbornik 12, (54), (1943), 225-230.

- [22] K. Mahler, *On the fractional parts of the powers of rational number II*. Mathematika, 4, 122-4.
- [23] S.S. Pillai, *On Waring's problem  $g(6) = 73$* . Proc. Indian Acad. Sci. Sect A, 12, (1940) 30-40.
- [24] P. Ribenboim, *The book of prime number records*. Second edition, Springer-Verlag 1989. And : *The new book of prime number records*. Springer-Verlag 1996.
- [25] R.M. Stemmler, *The ideal Waring theorem for exponents 401-200000*. Math. Comp. 18, (1964), 144-146.
- [26] K. Thanigasalam, *Improvement on Davempot's iterative methods and new results in aditive number theory I*. Acta Arithm. 46 (1985), no.1, 1-31.
- [27] K. Thanigasalam, *Improvement on Davempot's iterative methods and new results in aditive number theory II*. Acta Arithm. 46 (1986) , no.2, 91-112.
- [28] K. Thanigasalam, *Improvement on Davempot's iterative methods and new results in aditive number theory III*. Acta Arithm. 48 (1987), no.2, 97-116.
- [29] R.C. Vaughan, *On Waring's problem for smaller exponents* Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986), no.3, 445-463.
- [30] R.C. Vaughan, *On Waring's problem for sixth powers*. J. London Math. Soc. (2) 33 (1986) , no.2, 227-236.
- [31] R.C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*. Second Edition, Cambridge University Press 1997.
- [32] R.C. Vaughan, *A new iterative method in Waring's problem*. Acta Math. 162 (1989), no. 1-2, 1-71.
- [33] R.C. Vaughan, *A new iterative method in Waring's problem II*. J. London Math. Soc. (2),39 (1989), 219-230.
- [34] R.C. Vaughan, T.D. Wooley, *Further improvements in Waring's problem*. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 345 (1993) no. 1676, 385-396.
- [35] R.C. Vaughan, T.D. Wooley, *Further improvements in Waring's problem*. Acta Math., 174 (1995), 147-240.
- [36] R.C. Vaughan, T.D. Wooley, *Further improvements in Waring's problem.II* Duke Math. J. 76 (1994) no. 3, 683-710.
- [37] R.C. Vaughan, T.D. Wooley, *Further improvements in Waring's problem III. Eighth powers*. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser A345 (1993) no. 1676,385-396.

- [38] R.C. Vaughan, T.D. Wooley, *Further improvements in Waring's problem IV. Higher powers.* Acta Arith. 94 (2000), no 3, 203-285.
- [39] I.M. Vinogradov, *On an upper bound for  $G(n)$*  Izv. Acad. Nauk, Ser. Mat, 23, (1959), 637-642.
- [40] I.M. Vinogradov, *Select works (traducido del ruso)*, Springer-Verlag, Berlin (1985)
- [41] E. Waring, *Meditationes algebraicae*. Cambridge, England. pp. 204-205, 1770.
- [42] E. Waring, *Meditationes algebraicae*, 3rd ed. Cambridge, England. pp. 349-350, 1782.
- [43] E. Waring, *Meditationes Algebraicae*. An English Translation of the Work of Edward Waring. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.
- [44] E. Waring, *Miscellanea analytica de AEquationibus Algebraicis, Curvanum Proprietatibus, Fluxionibus et Serierum Summatione*. Bentham, Cambridge, 1759.
- [45] E. Waring, *A letter to the Reverend Dr. Powell, Fellow of St. John's College, Cambridge, in a answer to his observations on the first chapter of a book called Miscellanea analytica and his defence of those observations*. J. Bentham, Cambridge, 1760.
- [46] E. Waring, *A reply to a pamphlet entitles Observations on the first chapter of a book called Miscellanea analytica*. J. Bentham, Cambridge, 1760.
- [47] E. Waring, *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis, et curvanum proprietatibus*. Bentham, Cambridge, 1762.
- [48] E. Waring, *Problems (latin text)*. Philosophical Transactions of the Royal Society, LIII:294-298, 1763.
- [49] E. Waring, *Some new properties in conic sections (latin text)*. Philosophical Transactions of the Royal Society, LIV:193-197, 1764.
- [50] E. Waring, *Two theorems (latin text)*. Philosophical Transactions of the Royal Society, LV:143-145, 1765.
- [51] E. Waring, *Proprietates Algebraicarum Curvarum*. Archdeacon, Cambridge, 1772.
- [52] E. Waring, *On the General Resolution of Algebraical Equations*. Philosophical Transactions of the Royal Society, LXIX:86-104, 1779.
- [53] E. Waring, *Problems concerning interpolations*. Philosophical Transactions of the Royal Society, LXIX:59-67, 1779.
- [54] E. Waring, *On the summation of a series, whose general term is a determinate function of  $z$  the distance from the first term of the series*. Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXIV:385-415, 1784.



- [55] E. Waring, *Analyticæ. Editio secunda.* Archdeacon, Cambridge, 1785.
- [56] E. Waring, *On infinite series.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXVI:81-117, 1786.
- [57] E. Waring, *On finding the Values of Algebraical Quantities by converging Serieses, and demonstrating and extending Propositions given by Pappus and others.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXVII:71-83, 1787.
- [58] E. Waring, *On centripetal forces.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXVIII:67-102, 1788.
- [59] E. Waring, *On the method of correspondent values.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXIX:166-84, 1789.
- [60] E. Waring, *On the resolution of attractive powers.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXIX:185-98, 1789.
- [61] E. Waring, *On infinite series.* Philosophical Transactions of the Royal Society, LXXXI:146-72, 1791.
- [62] E. Waring, *On the Principles of Translating Algebraic Quantities Into Probable Relations and Annuities.* Archdeacon, Cambridge, 1792.
- [63] E. Waring, *Essay on the Principles of Human Knowledge.* Archdeacon, Cambridge, 1794.
- [64] G.L. Watson, *A proof of the seven cube theorem.* J. London Math. Soc. 26 (1951), 153-156.
- [65] A. Wieferich, *Beweis des Satzes, dass sich eine jede ganze zahl als summe von höchstens neun positiven kuben darstellent.* Math. Annalen 66, (1909), 99-101. Corregido por A.J. Kempner, en (1912), 72, 387-397, y simplificada por Schlz (Jber Deutsch. Math. Ver. 58, (1955), Abt. 1, 45-48.
- [66] T.D. Wooley, *Large improvements in Waring's problem.* Ann. of Math. (2) 135 (1992), no. 1, 131-164.



## Sistema Tierra, biodiversidad y calidad de vida\*

Miguel Delibes de Castro

Estación Biológica de Doñana – CSIC

Avda. María Luisa, nº 1. Sevilla

El astrofísico y matemático Fred Hoyle había anticipado que el día que pudiéramos ver la Tierra desde el exterior cambiaría nuestra idea del mundo y de nosotros mismos. No se equivocó. Cuando a finales de los sesenta del pasado siglo los astronautas hicieron llegar las primeras imágenes de nuestro planeta flotando en el espacio, tomamos conciencia, por primera vez, de que todos viajábamos a bordo de una nave pequeña y frágil que, además, era la única que teníamos. Basado en una de aquellas fotografías, mi amigo y maestro en divulgación Félix Rodríguez de la Fuente tituló una de sus series “Planeta azul”, y por supuesto él no fue, ni mucho menos, el único en utilizar dicha denominación. La fascinación general nacía de la pequeñez, de la finitud de nuestra casa, pero también de otra evidencia. La expresó mejor que nadie el médico y literato norteamericano Lewis Thomas, cuando escribió: “Vista desde la Luna, lo que más sorprende de la Tierra, tanto que corta la respiración, es que está viva”. A cientos de miles de kilómetros de distancia, y sin otro auxilio que la simple vista, uno es capaz de detectar que la vida ha transformado al planeta Tierra.

A James Lovelock, imaginativo y polifacético investigador, se le había ocurrido eso mismo algún tiempo antes. Cuando recibió el encargo de poner a punto métodos y procedimientos para buscar vida en Marte, lo primero que se le ocurrió fue analizar qué variables diferenciaban a la Tierra, planeta con vida, de otros cercanos que no parecían tenerla. Por ejemplo, ¿por qué había relativamente poco CO<sub>2</sub> libre en la Tierra? Tal vez fuera porque las plantas y muchos microorganismos lo utilizan, a través de la fotosíntesis, para obtener energía y construir sus propios cuerpos. Pero entonces la pregunta era: ¿Por qué no se acaba? Los propios seres vivos, advirtió el científico, liberan CO<sub>2</sub> al respirar. ¡La composición de gases de la atmósfera parecía estar regulada por la vida! En algún artículo

---

\*Discurso pronunciado con motivo de su nombramiento como Académico Correspondiente de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza.

y en un libro de 1979 James Lovelock postuló que los seres vivos, incorporando sustancias a sus propios cuerpos, transformándolas, y liberando residuos, modifican su ambiente y lo mantienen en un cierto equilibrio imprescindible para sostener la propia vida. Como metáfora, insinuó que toda la Tierra se comportaría como un solo organismo vivo con capacidad de homeostasis (autorregulación), y llamó a su hipótesis, que entonces no era más que eso, Gaia (o Gea). Al principio, la mayor parte de los investigadores se tomaron la hipótesis de Gaia como una broma, mientras que diversos grupos ambientalistas, más o menos metafísicos o esotéricos, adoptaron de inmediato la figura de la diosa Gaia, o la madre Tierra, como objeto de su devoción y sus preocupaciones. Ello tuvo como primera consecuencia que la propia idea de Gaia se antojara ajena a los círculos científicos, cuando no abiertamente rechazable. Habían de transcurrir pocas décadas, sin embargo, para que el progreso del conocimiento demostrara que la hipótesis de Lovelock había constituido el punto de partida para una auténtica revolución conceptual, un cambio de paradigma.

Durante mucho tiempo se pensó que la biosfera, la delgada película de vida que envuelve la Tierra, era poco menos que un accidente, prácticamente irrelevante en relación con las poderosas fuerzas planetarias. Pacientes de cuanto acontecía en el exterior, los seres vivos no tenían más alternativa que adaptarse a los cambios ambientales, por otra parte no demasiado notables. Habíamos dado con un planeta que reunía buenas y relativamente estables condiciones para la vida, y la vida se había instalado aquí desde hace unos miles de millones de años, como atestigua el registro fósil. Tras la sugerencia de Lovelock las cosas se ven de otra manera. Las condiciones de la Tierra no están determinadas exclusivamente por la física y la química, a través de la geología, sino también por los seres vivos, que conectados entre sí y con la atmósfera, la litosfera y la hidrosfera, fabrican y mantienen el ambiente global. Como ha escrito Ricard Guerrero, no es que las condiciones de la Tierra hayan permitido el desarrollo de la vida, sino que la propia vida ha determinado las condiciones idóneas en la Tierra para su desarrollo y evolución.

El cambio de paradigma científico obliga a proponer una revolución en los planteamientos conservacionistas. Los científicos están hoy de acuerdo en referirse a la Tierra como un único sistema, limitado, autocontenido (con excepción de la fuente primaria de energía, el Sol), interconectado y capaz de autorregularse, del que la biosfera es un ingrediente activo y esencial. Lo llaman el Sistema Tierra. Si los seres vivos, la naturaleza en su sentido más amplio, regulan el funcionamiento y mantienen el equilibrio de ese sistema, la pérdida de biodiversidad (junto a otras modificaciones incluidas en lo que llamamos cambio global) podría acarrear la alteración de las condiciones que hacen de la Tierra un hogar favorable para nuestra especie.

Pues bien, los científicos coinciden también en que los humanos estamos deteriorando gravemente la biodiversidad mundial, aunque no conozcamos su extensión. Puede parecer

extraño, pero sólo actualmente empiezan a llevarse a cabo inventarios generales de las especies descritas en el mundo, y aun así limitándonos a los organismos eucariotas (que tienen células con núcleo, lo que excluye a las bacterias, probablemente las piezas más relevantes para el funcionamiento del Sistema Tierra). Cálculos aproximados sugieren que se han descrito algo más de 1.800.000 especies, pero alrededor de 200.000 deben ser sinonimias (una misma especie con más de un nombre). Se admite, por tanto, que alrededor de 1.600.000 especies han sido descritas y bautizadas por los expertos (la mayor parte son insectos, seguidos por las plantas con flores). ¿Cuántas podrían existir? En el caso de los mamíferos o las aves, grupos bien estudiados, e incluso en el de las plantas con flores, el número de especies descritas debe ser sólo un poco inferior al de las existentes, pero la situación es muy diferente en lo que atañe a otros colectivos. Para dar una idea de nuestra ignorancia, baste señalar que se considera razonable que haya entre 12 y 18 millones de especies (¡casi diez veces lo conocido!) pero, como ha indicado el especialista Robert H. May, cifras tan dispares como tres y cien millones de especies pueden ser defendidas con buenos argumentos.

Desde que existe un registro fósil continuado, al comienzo del Paleozoico, se han documentado varias extinciones masivas en la historia de la vida sobre la Tierra (aproximadamente una cada 26 millones de años). Cinco de ellas fueron, sin embargo, especialmente relevantes, destacando la del final del periodo Pérmico, hace 247 millones de años, cuando probablemente el 95% de las formas de vida existentes entonces desaparecieron. Los estudiosos creen que el ritmo al que se pierden especies en la actualidad es por lo menos igual, si no más rápido, que el de cualquiera de esas cinco grandes extinciones precedentes.

Dado que no conocemos cuántas especies hay, menos aún podemos saber las que se extinguen cada año. Hay que estimarlo mediante extrapolaciones, partiendo de datos de especies, grupos y épocas que se conozcan bien. Por ejemplo, se puede saber, a la baja, el número de especies de aves que se han extinguido en islas del Pacífico desde la llegada de los polinesios, hace aproximadamente un millar de años (y groseramente las que se han extinguido en el mundo en ese periodo). Son varios miles, y la tasa resultante es superior a cien especies por millón de especies y año. El número de especies de almejas de agua dulce extinguidas en Norteamérica en el último siglo (como mínimo 21 de 300 existentes) también proporciona índices de hasta 1000 especies por millón de especies y año. Pueden estimarse tasas anuales de extinción a partir de la cantidad de bosque tropical destruida, pues no en vano el bosque húmedo es el ambiente más rico en diversidad. De una u otra forma, los expertos sugieren que actualmente se extinguen mil, y quizás diez mil, especies por millón de especies y año. Ello supone que admitiendo, a la baja, que hubiera diez millones de especies, entre diez mil y cien mil se extinguirían anualmente. Con el ánimo de proporcionar una cifra redonda, por más que simplemente orientativa, E. O. Wilson

suele referirse a 27.000 especies desaparecidas cada año, lo que supone 72 pérdidas por día y tres por hora.

Obviamente, si cada año desaparecen el uno por mil de las especies vivientes, en unos siglos apenas quedaría casi ninguna. Y unos siglos puede parecer mucho tiempo, pero no es ni siquiera un suspiro a escala geológica. Las cinco grandes extinciones masivas a las que nos hemos referido se dirían repentinas ojeando el registro fósil, pero en realidad ocurrieron a lo largo de cientos de miles de años, y a veces necesitaron más de un millón de años. Ello confirma, pues, que el ritmo actual de extinción puede equipararse sin desdoro al de las cinco grandes extinciones anteriores, e incluso que esta sexta extinción contemporánea sería la más vertiginosa de todas.

Perdemos especies y poblaciones muy aprisa, y sin embargo el Sistema Tierra necesita de ellas para mantenerse, al menos tanto como nosotros necesitamos del propio Sistema para poder vivir. Los especialistas suelen agrupar los servicios gratuitos que nos facilita la biodiversidad (habitualmente se habla, con más propiedad, de servicios ecosistémicos) en cuatro categorías, según se relacionen con las funciones de los ecosistemas de regulación, de hábitat, de producción y de información. Las funciones de regulación mantienen los procesos ecológicos esenciales y los sistemas que soportan la vida. Incluyen, entre otras, la regulación de elementos (por ejemplo, la ubicación del carbono en la biosfera, que determina parcialmente el efecto invernadero), la regulación del clima, la prevención y limitación de perturbaciones (la vegetación limita la erosión; los manglares, por ejemplo, debilitan la fuerza de los tsunamis), la regulación del agua en superficie y subterránea, la formación y retención de suelo, la regulación de nutrientes y descomposición de residuos, la polinización de las plantas con flores, incluidas las cultivadas, y el control biológico, natural, de las plagas. Por detallar un solo caso, el 90% de las plantas con flores necesitan al menos un animal para ser polinizadas (en el caso de las especies cultivadas, el porcentaje se reduce al 70%), y con mucha frecuencia ese animal no vive en el propio cultivo, sino que precisa a su vez de hábitats silvestres para completar su ciclo reproductor.

Las funciones llamadas de hábitat se refieren al refugio y entorno de reproducción que ofrecen los ecosistemas a la flora y fauna silvestres, contribuyendo así a la conservación de la diversidad genética y de los procesos evolutivos. Habitualmente se distingue una función de refugio (sin un refugio no sería posible que los seres vivos realizaran otras funciones) y una función de criadero (por ejemplo, posibilitar el alevinaje de la fauna de interés pesquero).

Las funciones de producción son las más fácilmente percibidas, pues se relacionan con la explotación directa de los bienes naturales. La base, no obstante, reside en la capacidad de las plantas y muchos microorganismos (unas y otros llamados conjuntamente productores primarios) de convertir el dióxido de carbono, el agua y unos pocos nutrientes

en materia viva. Entre los bienes más evidentes que suministra la biodiversidad se cuentan las pesquerías, la madera, e incluso los productos derivados de la agricultura y la ganadería. Ciertos críticos podrán argir que esos bienes son proporcionados por un número muy limitado de especies, y que no es evidente que los millones de especies restantes sean necesarias. Se olvida, argumentando así, que para que existan vacas debe haber hierba, y para que exista hierba debe haber lombrices, y microbios y otros organismos que tornen el suelo fértil, e insectos polinizadores, y también escarabajos que reciclen las boñigas, y para que existan escarabajos... Toda la biodiversidad está entrelazada, tejida como una red y perdiendo unidades pierde textura y capacidad para sostener el funcionamiento de los ecosistemas. Otros bienes, también de interés económico en sentido estricto, son probablemente menos conocidos. Así, por ejemplo, casi la mitad de las medicinas que se utilizan regularmente en los países desarrollados están basadas en productos naturales, y los veinte fármacos más recetados en Estados Unidos han sido descubiertos originalmente en especies silvestres. Su valor de mercado anual supera los seis mil millones de euros.

Las funciones de información son menos aprehensibles, pero no carecen de importancia. Los ecosistemas, por ejemplo, proporcionan oportunidades para el desarrollo cognitivo. En esta línea cabe situar, por ejemplo, los beneficios derivados del conocimiento sobre cómo cruzar distintas formas silvestres y cultivadas para conferir a éstas resistencia a las enfermedades o la sequía, así como, en un futuro, los probables resultados derivados de la ingeniería genética. Además, tienen un valor de amenidad (caza y pesca deportivas, excursiones en la naturaleza, la mera observación, e incluso el placer de saber que existen especies silvestres a las que nunca vamos a ver) y de futuro (¿qué soluciones a cuáles de nuestros problemas pueden estar ocultas en especies silvestres? ¡Comiéndose a los caballos que vivían en Norteamérica hace once mil años, los primeros amerindios no podían imaginar que perdían la oportunidad de domesticarlos!), y ofrecen una base de información cultural (artística, espiritual, histórica, representativa, etc.).

Hace varios lustros un grupo de investigadores liderados por R. Constanza afrontó el discutido reto de evaluar monetariamente lo que costaría sustituir a los servicios ecosistémicos (digo “discutido” porque a priori su valor es infinito, si pensamos que no dependen de nosotros y nos son imprescindibles para vivir). Para hacerlo, identificaron 17 grandes grupos de bienes y servicios proporcionados por la naturaleza y estimaron el valor económico de los mismos por unidad de superficie y año en cada ecosistema (estuarios, océanos, bosques templados, selvas tropicales, etc). Cuando lo extrapolaron al total de la superficie terrestre concluyeron que el valor era aproximadamente de 33 billones de dólares de 1994, más o menos el doble del producto global bruto. En otras palabras, si destruimos la biodiversidad no habrá en el mundo dinero suficiente para pagar la sustitución de los servicios que nos está prestando (además, dicho sea entre paréntesis, no sabríamos cómo

hacerlo). Tal vez por ello, Gretchen C. Daily y otros científicos de la Sociedad Americana de Ecología han podido asegurar sin asomo de duda que los servicios de los ecosistemas son esenciales para la civilización, y que de continuar las tendencias actuales las actividades humanas dañarán irremediabilmente la biodiversidad, y con ella el funcionamiento de todos los ecosistemas, poniendo en peligro la prestación de estos servicios.

Pero hay otra circunstancia alarmante. El Sistema Tierra es un sistema finito, limitado. Los bienes y servicios que utilizamos no son inagotables, y lo que utilizamos unos no pueden utilizarlos los otros. A escala de biodiversidad, eso significa que los recursos (entendidos como bienes, por ejemplo, la producción primaria, y como servicios, por ejemplo el reciclado de residuos) que monopoliza la especie humana se detraen a otras especies. Por citar dos ejemplos: La población de la especie humana utiliza en su provecho entre el 39% y el 50% de la producción primaria y los recursos derivados de ella; asimismo, consumimos más de la mitad del agua dulce disponible. Ello ha permitido al ecólogo Brian Czech concluir que *Homo sapiens* excluye competitivamente del Planeta a muchas de las especies restantes. A escala intraspecífica sigue siendo válido todo lo referido hasta aquí: Los bienes y servicios naturales son limitados, y lo que utilizamos unos hombres y mujeres no pueden utilizarlo otros. Es evidente que cuantos más seamos más impactaremos sobre la biodiversidad, pero también lo es que ni todos consumimos lo mismo ni todos producimos los mismos residuos (esto es, contaminación). Pondré solamente un ejemplo, referido a la energía; con datos de 1998, Estados Unidos era el mayor consumidor mundial de energía: Reuniendo tan sólo el 4'64% de la población mundial, consumía el 25'32% de la energía; en el extremo opuesto, India reunía el 16'64% de la población pero consumía únicamente el 3'19% de la energía.

¿Por qué no hemos pensado antes que el crecimiento de la población, el consumo y la contaminación podría llevarnos a la catástrofe? tal vez porque nos sentíamos lejos de los límites, que ahora, sin embargo, están peligrosamente cerca. Durante gran parte de su existencia la humanidad no ha sido consciente de lo pequeña que era la Tierra, ni siquiera ha pensado que tuviera límites. Hasta hace un par de siglos gran parte del crecimiento poblacional de *Homo sapiens* ha ocurrido colonizando nuevas tierras a partir del pequeño rincón de Africa de donde al parecer salimos. Siempre cabía, incluso, crecer a costa de los vecinos, conquistando sus territorios (esa práctica quizás se mantiene: ahora conquistamos, o controlamos, su petróleo, o su agua dulce; no siempre hace falta dominar la tierra). Sólo recientemente hemos aceptado que la globalización ambiental es un hecho, que los recursos son pocos para todos, que somos una sola tripulación en un solo barco.

Mathis Wackernagel, del Centro de Estudios para la Sustentabilidad de la Universidad Anáhuac de Xalapa (México), y William Rees, desarrollaron hace pocos años un interesante instrumento para medir el “consumo de naturaleza”, tanto individual como



colectivo. Lo han llamado la huella ecológica, o la impronta ecológica, de las personas y los pueblos, y aunque esté aun en fase de perfeccionamiento, merece ser considerado. El sistema utiliza como patrón de medida la hectárea (o el acre, para los americanos) y consiste en estimar cuánta superficie de tierra o de agua precisamos, ya sea para producir lo que consumimos, ya para acoger y reciclar lo que desechamos. El método cuenta con al menos dos grandes ventajas: por un lado, al utilizar una sola unidad de medida permite comparar directamente los impactos sobre la naturaleza de personas que viven lejos o lo hacen de maneras muy diferentes; por otro, hace posible, asimismo, la estimación de la oferta, de lo que el medio produce, de forma que podemos valorar si estamos, o no, viviendo por encima de nuestras posibilidades. Dicho de otro modo, sólo si nuestra huella promedio es inferior a la producción de la naturaleza por individuo, podemos argumentar que nuestro crecimiento es sostenible (o sustentable). Con datos de hace pocos años, un canadiense promedio precisa casi ocho hectáreas para cubrir los requerimientos que demanda su modo de vida actual, mientras que un ciudadano norteamericano necesita casi diez, un sueco alrededor de seis, un italiano algo más de cuatro (un español, más o menos la misma cantidad), un mexicano dos y media y un hindú menos de una hectárea. Ahora bien, en un mundo cada vez más pequeño conviene que el análisis sea global. Usando los criterios de los creadores de la huella ecológica, la Tierra produce y recicla en la actualidad el equivalente a dos hectáreas por habitante (si en el año 2050 la población alcanza los 10.000 millones, el espacio productivo caerá a 1,2 hectáreas por cabeza), y sin embargo la impronta promedio de la humanidad es ya hoy superior a dos hectáreas y media. El conjunto de la humanidad estamos, por tanto, consumiendo más de lo que la naturaleza puede proporcionar sin deteriorarse. Nos estamos comiendo el capital (incluso si viviéramos solos, olvidando lo que otras especies puedan necesitar).

Aludiendo a estudios basados en la idea de la huella ecológica, Wilson estima que los humanos traspasamos el umbral de la capacidad de regeneración de la Tierra hacia 1978. Eso no quiere decir que con la tecnología actual no podamos producir más, pero sí que significa que lo haremos a costa de la habilidad de los ecosistemas para depurar el aire y el agua, por ejemplo, o eliminando los bosques que ayudan a regular el clima y mantienen “secuestrado” al carbono. De nuevo nos encontramos, por tanto, con el concepto de “calidad de vida”: Tal vez aún podamos producir para todos, pero nunca a largo plazo y perdiendo “calidad” en otros sentidos. Joel Cohen, de la Rockefeller University y autor de uno de los estudios más serios y más citados sobre la materia, lo hace notar muy bien entre sus conclusiones. Dice: “Se debe tomar seriamente en consideración la posibilidad de que los seres humanos hayamos alcanzado, o alcancemos en el plazo de medio siglo, el número máximo que la Tierra puede sostener en condiciones que nos parezcan aceptables a nosotros, y después de nosotros a nuestros hijos y nietos”.

Hace treinta años los ecólogos Ehrlich y Holdren propusieron una ecuación para relacionar teóricamente el crecimiento de la población humana con su impacto sobre el ambiente. Lejos de pasar de moda, su fórmula ha sido muy citada desde entonces. Es sencilla (los propios autores admiten que demasiado) y conscientemente ignora las relaciones, que las hay, y complejas, entre sus componentes:

$$I = P \times C \times T.$$

O, lo que es lo mismo, el impacto sobre el ambiente ( $I$ ) sería igual al producto del tamaño de población ( $P$ ) por el consumo por individuo ( $C$ ) y por el coste tecnológico ( $T$ ), entendido como la cantidad de recursos necesarios y de residuos originados con una tecnología dada para producir cada unidad de consumo.

Si asumimos como hipótesis de trabajo la de Wilson, citada previamente, según la cual el máximo impacto admisible sobre el ambiente global se alcanzó antes de 1980, no quedará otro remedio que aceptar que el producto  $P \times C \times T$  debe disminuir de forma sustancial en el conjunto del mundo, y no se antoja bien cómo puede hacerlo. La tasa de crecimiento de la población disminuye lentamente, pero los números absolutos siguen aumentando y lo harán aún por algunos decenios (hoy somos casi 6.700 millones de seres; las tesis más realistas se refieren a unos 8.000 millones en el año 2025). Aunque sería deseable, y aunque debamos intentarlo, es difícil imaginar que los ciudadanos de los países más ricos rebajemos voluntariamente los niveles de consumo (¿qué político ganaría las elecciones con un programa que proponga tener menos cosas, en lugar de más?), y no se puede siquiera plantear que lo hagan los que consumen por debajo de nuestro nivel. Quedaría la tecnología, que con frecuencia se utiliza como último argumento. Es cierto que los cambios tecnológicos pueden reducir sustancialmente el impacto de la humanidad sobre el ambiente (por ejemplo, si se lograra sustituir la energía basada en combustibles fósiles por energías limpias), pero es difícil pensar que puedan hacerlo hasta el punto de compensar los crecimientos, por el momento imparables, de la población y el consumo. O, mejor dicho, es difícil que, en el caso de conseguirse, puedan hacerlo a tiempo.

Alguien ha escrito que estamos en un atolladero. Al tiempo que queremos respetar la naturaleza y ser justos y solidarios, aspiramos a no dejar de ser ricos, pero ya sabemos que la Tierra superpoblada no da para que todos sean como nosotros. ¿Qué podemos hacer? Solamente combinando el control de población con una reducción del consumo y la producción de residuos podremos acercarnos a una solución. Hay que llamar desarrollo a vivir mejor, no a vivir con más cosas. Es cierto que ya hemos perdido mucha biodiversidad y, sin embargo, pese a algunas limitaciones el Sistema Tierra sigue funcionando a nuestro gusto. ¿Por cuánto tiempo lo hará? ¿Cuántas especies más podemos perder? Dentro de la maquinaria del Sistema la biodiversidad no puede homologarse con la caldera de máquinas

que proporciona energía, ni tampoco es la fuente bruta de materiales originales. Se ha dicho a menudo, sin embargo, a modo de metáfora, que los seres vivos serían las tuercas y tornillos que mantienen maquinaria unida, igual que podrían asimilarse a las unidades de transformación o reciclaje, o a los cables y tubos que canalizan energía y materiales. ¿Cuántos tornillos más puede perder nuestra máquina antes de que colapse? Sólo cabe desear que perdamos los menos posibles. Y para ello, entre otras cosas, tendremos que conseguir un mundo más justo y solidario. <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>La presente disertación está tomada básicamente de tres trabajos previos del autor, publicados o en prensa, a saber:

**Delibes, M.** (2006). Población, consumo y calidad de vida. Pp. 67-78. En *Las políticas de la Tierra. IV Encuentro Salamanca*. Guerra, A. y Tezanos J.F. (eds.). Editorial Sistema, Madrid.

**Delibes, M.** (2007). Biodiversidad y calidad de vida. *Documentación Administrativa* 278-279: 197-205.

**Delibes, M.** (en prensa). Gaia, biodiversidad y el Sistema Tierra. En *El Planeta Tierra*. Biblioteca Ben Rosch de Divulgación Científica y Tecnológica, Córdoba.



## Algunas reflexiones sobre la crisis Mediambiental\*

Juan Pablo Martínez Rica

Real Academia de Ciencias de Zaragoza

C/ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza

Quiero empezar y terminar esta réplica expresándote, Miguel, mi agradecimiento. Ahora en nombre de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza por haber aceptado presentar tu discurso. Luego, ya se verá. Podías haber salido del paso sin esfuerzo, pues en tu caso el discurso no es preceptivo, pero has preferido hacerlo y con él, deleitarnos, así que ¡Muchas gracias!

Me corresponde glosar algunos aspectos científicos de la alocución de nuestro nuevo Académico Correspondiente, el Profesor Delibes de Castro. No es tarea desagradable sino todo lo contrario, pero huelga decir que yo hubiera preferido la labor mucho más grata de pronunciar la *Laudatio*, es decir, de glosar sus méritos, como lo ha hecho nuestro Presidente. Hablar de los méritos de una persona admirada como colega y apreciada como amigo siempre es más placentero. ¡Paciencia! Quizás pueda desquitarme aludiendo a algunos puntos que han quedado en el tintero, aunque forzoso es, para el Profesor Boya como para mí, quedarnos cortos en este terreno.

Ha titulado el Dr. Delibes su charla “Sistema Tierra, biodiversidad y calidad de vida”, un título que, como todos los buenos títulos, condensa perfectamente el contenido a que alude. Son cinco sustantivos empleados para designar cuatro conceptos, Tierra, sistema, biodiversidad, y calidad de vida, conceptos que dan mucho de sí. Un ecólogo ambicioso podría pretender que, de hecho, engloban todo lo que importa conocer, y ciertamente su desarrollo mínimo podría llevar muchas horas, pero en esencia lo que el conferenciante nos propone es que la Tierra es un sistema, una de cuyas características esenciales es su biodiversidad, y que ésta última repercute directamente en nuestra calidad de vida.

Comienza el Profesor Delibes evocando la famosa imagen de la Tierra ascendiendo sobre el horizonte de la Luna que tomaron los astronautas del Apolo VIII en 1968 y que,

---

\*Contestación al Discurso pronunciado por el Prof. Miguel Delibes de Castro con motivo de su nombramiento como Académico Correspondiente de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza

efectivamente, impactó en el imaginario humano, haciendo cambiar nuestra percepción planetaria, tal como habían predicho Hoyle y otros. Nuestra Tierra ya no era un mundo vasto y prácticamente infinito, sino un pequeño globo azulado, aislado en el espacio, velado por las nubes y modelado por la vida. Fue entonces probablemente cuando los humanos percibimos por primera vez la fragilidad de nuestro soporte y cuando cobró sentido para el público la comparación con un un navío en el que para bien o para mal estamos todos embarcados, y cuyo naufragio deberíamos evitar.

Este planeta es todo lo que tenemos. Hoy sabemos que, además de sus siete compañeros estériles que con él viajan en torno al Sol, cientos de nuevos planetas existen orbitando otras estrellas. Ninguno de esos planetas es comparable con el nuestro, pero no cabe duda de que dentro de pocos años los primeros planetas extrasolares del tamaño de la Tierra, y situados en ecosferas compatibles con la vida, podrán ser hallados<sup>1</sup>. Pero eso será todo: el hombre no podrá alcanzar esos mundos en un futuro previsible. En la Tierra estamos y en ella nos quedaremos.

Ahora que tenemos conciencia de los límites de nuestro mundo es cuando podemos empezar a preocuparnos por los mismos. Ya no se trata, en todo caso, de límites lejanos que el hombre no puede alcanzar. Nuestra especie ha dejado de ser una minúscula erupción, un granito imperceptible frente a la inmensidad de los mecanismos de la dinámica planetaria, para convertirse en un elemento significativo para los mismos. Si bien la energía que la Tierra absorbe del sol es todavía más de 7000 veces mayor que la procesada por el hombre, en términos de potencia energética éste genera ya cerca del 10 % de la que se vincula a los fenómenos climáticos; la cantidad de dióxido de carbono procedente de las actividades del hombre alcanza un tercio de la debida a los procesos naturales; la fijación artificial de nitrógeno atmosférico hace bastantes años que ha superado la debida a las bacterias; y en producción de desechos la acción humana es inmensamente mayor que la natural, puesto que la naturaleza no los produce.

Esto nos lleva al segundo término empleado en el título del discurso: sistema. En ecología es usual pensar en términos de sistemas, hasta el punto de que una palabra, ecosistema, designa el objeto principal del estudio de esta ciencia. Una rama de la ecología, llamada sinecología, se dedica precisamente al análisis de los ecosistemas, y en esta rama ha trabajado desde luego el Doctor Delibes.

La Estación de Doñana, en la que él ha desempeñado su labor, tiene una larga tradición en este campo, tradición iniciada por su primer director, José Antonio Valverde. El concepto de taxocenosis, que éste último propuso y desarrolló, está en la raíz de los estudios posteriores que distintos investigadores de la Estación dedicaron al análisis es-

---

<sup>1</sup>Esta profecía se ha cumplido tan sólo dos meses después de pronunciarla, merced a las observaciones del satélite "Kepler" de la NASA

tructural y funcional de los ecosistemas. Nuestro nuevo Académico publicó por primera vez un trabajo sobre la comparación de la estructura de distintos ecosistemas en 1987, y hacia las mismas fechas tenía becarios trabajando en modelización de sistemas ecológicos, alguno de los cuales envió a los cursos que yo daba entonces en Jaca sobre el tema. Hoy la investigación en este campo prosigue allí activamente y a niveles punteros, con los trabajos de Jordi Bascompte y colaboradores. Pues bien, nadie en mejor situación que el Dr. Delibes para contarnos que, salvo por la energía solar que recibe y los ocasionales aportes meteoríticos, la Tierra es un sistema cerrado, y sus procesos de regulación son básicamente internos.

El más importante mecanismo de regulación, de acuerdo con la hipótesis “Gaia” propuesta por Lovelock y Margulis, parece ser la propia vida. Esa tenue capa discontinua, que recubre la superficie terrestre y a la que desde hace más de un siglo se le llama biosfera, tiene una asombrosa capacidad de homeostasis para regularse a si misma y para regular el ambiente en que se halla. Cuando Suess propuso el término “biosfera” en 1875 le dio un significado más bien estático, como una capa más de las que forman la Tierra, semejante a la litosfera o a la atmósfera. Fue Vernadsky, en 1926, quien la definió como una entidad dinámica, como una red de relaciones entre los organismos vivos que de alguna manera modela la superficie del planeta. Y hoy sabemos que fue la vida la que cambió la primitiva atmósfera terrestre y la sustituyó por una atmósfera rica en oxígeno de la que dependen animales y plantas, y que es la vida también la que, gracias al sutil equilibrio de gases que mantiene en la atmósfera, permite que la temperatura media de nuestro planeta sea compatible con la propia vida, en lugar de ser de  $-18^{\circ}$  C, como le correspondería por su posición en el sistema solar. Y claro está, es también la vida la responsable de la aparición de la especie humana, que ha empezado a perturbar gravemente la estructura y la función de su soporte biológico. En efecto, la estructura de la biosfera consiste en el conjunto de todos los elementos que la forman, genes y genotipos, poblaciones y especies, ecosistemas y biomas, todos a su respectiva escala, entrelazados en una inmensa red de dependencias, influencias y relaciones mutuas que son las que resultan afectadas por la acción humana. Y aquí llegamos al tercer término del título: biodiversidad.

La biodiversidad, que mide la variedad subyacente en la mencionada red, está disminuyendo a pasos preocupantes. El Dr. Delibes ha puesto atinadamente el dedo en la llaga al señalar la importancia de la actual crisis de biodiversidad, comparable a las cinco grandes crisis detectadas en el registro fósil. Y esta crisis, llamada ya por muchos “la gran extinción”, puede dejarnos sin unos recursos que no podremos reponer. Como también ha estado acertado al contestar anticipadamente a quienes pudieran argir que el problema no es tan grave, y que la pérdida de algunas especies, muchas de ellas todavía desconocidas para la ciencia, no es relevante.

En mis charlas sobre el tema yo suelo impactar a los oyentes indicando que dos especies, aún subsistentes al comienzo de la conferencia y representadas por los últimos individuos de su estirpe, habrán dejado de existir cuando el público abandone la sala. Aunque suelo emplear una estima de la tasa de extinción, algo más prudente que la aportada por Edward Wilson y recogida en el discurso del Dr. Delibes, el dato no deja de ser deprimente, y a menudo deprime a quienes lo escuchan, Y no se puede aducir que se trata de especies de escaso valor. Como bien ha dicho el conferenciante, nunca es posible conocer de antemano la importancia de una especie determinada. Las plantas pueden morir por ausencia de polinizadores, los tales por la de plantas que polinizan, las aves granívoras por una escasa producción de las semillas de que se nutren, las plantas que producen dichas semillas por la falta de las aves que las dispersan, etc. Existen especies que no parecen esenciales para la subsistencia de un ecosistema, pero que requieren que éste se halle en buen estado. Es el caso del oso pardo en los bosques eurasiáticos y americanos, o de una especie muy cara a nuestro invitado, el lince ibérico en los matorrales mediterráneos. La existencia de esas especies emblemáticas es consecuencia y no causa del buen estado de salud del ecosistema, pero de cualquier forma va asociada a ese estado y por ello hay que felicitarse de la persistencia de las mismas, y emplear todos los medios necesarios para su protección.

La funcionalidad de la biosfera está vinculada a esa red de relaciones reproductoras o tróficas que conectan sus distintos elementos en una malla densa. La supresión de algunas mallas de la red puede dar lugar a un desgarrón que se propague a lo ancho de la misma y que llegue a inutilizar algunas de sus partes. La naturaleza previene estos peligros añadiendo nuevas mallas y estableciendo conexiones redundantes entre los elementos, de manera que si falla algún hilo o se deshace algún nudo no se resienta la red más que localmente. Pero ello no siempre es garantía de estabilidad. La aplicación de la teoría de grafos al análisis de las redes ecológicas, precisamente en la Estación de Doñana, ha revelado que muchas de estas redes son frágiles, y que se desarticulan con la pérdida de un porcentaje modesto de conexiones, a veces menor del 30 %. Pero ¿cómo saber de antemano si una especie es un nexo esencial de la red, y si su desaparición puede tener consecuencias nefastas? Una elemental prudencia aconseja no considerar inútil ninguna especie sin conocer bien su función en el ecosistema que la alberga, y esto por desgracia sólo se logra, y de forma sumaria, para unas pocas de ellas.

Tomemos ahora el último concepto del título, calidad de vida, para mucha gente el único importante. En la actualidad casi todas las sociedades se articulan en torno a los mecanismos de mercado, y las crisis sociales se perciben sobre todo como crisis económicas sin que nos percatemos de que éstas vienen de crisis ecológicas precedentes. Por ello los problemas medioambientales solo son inteligibles para muchos cuando se plantean en términos económicos. Y por esta razón es más adecuada la insistencia del Dr. Delibes en



la importancia económica de los servicios que la naturaleza nos presta.

Según el conferenciante, quien toma el dato de Costanza y colaboradores, el valor de dichos servicios asciende anualmente a 33 billones de dólares de 1994. En relación con este punto me gustaría comentar que la primera vez que tuve conocimiento del artículo que publicó Robert Costanza en 1997, fue gracias a un comentario de Ramón Margalef, el más eximio de los ecólogos españoles, quien estaba de visita en Zaragoza. Margalef y yo teníamos visiones diferentes sobre el papel del dinero en los sistemas ecológico-económicos de los humanos, y cuando nos veíamos solíamos tocar este tema. En esa ocasión me dijo “¿Has visto el trabajo que ha publicado Costanza en la revista *Nature*? Calcula el valor en dólares de los servicios prestados por todos los ecosistemas de la Tierra, y le salen **33 trillones** de dólares”. Yo le contesté “¿Pero se trata de trillones europeos o americanos?”. Obviamente se trataba de trillones americanos, equivalentes a nuestros billones, como confirmó más tarde la lectura del artículo. Pero lo notable fue la respuesta de Margalef: “¿Acaso tiene importancia?”. Que una diferencia de seis órdenes de magnitud carezca de importancia para Margalef no significa que él no la reconociera, sino que, cuando se trata de cifras tan inmensas el valor concreto carece de sentido. Basta decir que la importancia económica de los ecosistemas terrestres se halla fuera de toda medida, y eso es lo que él quería resaltar. Con su fina pero discreta ironía venía a decir que el artículo en cuestión representaba un gran esfuerzo de cálculo para llegar a un resultado que era obvio de antemano, si no en su valor preciso, sí en su enormidad.

Ni que decir tiene que ese artículo era procedente, como lo son la mayor parte de los libros y trabajos escritos sobre el tema, aunque sus conclusiones puedan parecernos obvias. En este terreno señalar lo obvio y aun repetirlo una y otra vez, siempre es conveniente, y ello más en el terreno de la divulgación científica, que alcanza a un mayor número de personas, que en el de la ciencia propiamente dicha.

El Prof. Delibes, además de ser un gran científico, es un gran divulgador, y lo tiene a gala. El mismo insiste en el papel que desempeñó al comienzo de su carrera en este terreno, colaborando con Félix Rodríguez de la Fuente. A día de hoy su producción de obras de divulgación es también notable. De entre ellas quiero entresacar una que, tanto para él como para mí es la preferida. Se titula “*La Tierra Herida*”, escrita en colaboración con su difunto padre, y que puede considerarse como una versión ampliada y elaborada del reciente discurso. Para Miguel esta obra es entrañable no sólo por esta circunstancia, sino sobre todo porque para su padre representó un estímulo y una fuente de alegrías durante los últimos años de su vida. Tanto es así que los hermanos de Miguel consideraron repetir el experimento con otras obras y con cada uno de ellos, a favor de esas alegrías paternas. Para mí, y para la mayoría de los ecólogos españoles, esta obra es muy querida porque nos presta una voz que alcanza mucho más lejos que las nuestras para decir lo que todos

pensamos pero no podemos hacer oír. De hecho, muchos nombres de ecólogos de nuestro país, colegas y amigos comunes, aparecen profusamente en el texto de la misma como fuentes de los informes.

Tener un nombre ilustre, unos conocimientos científicos excelentes y una gran habilidad para comunicarlos representa una responsabilidad importante, a la que Miguel se ha enfrentado con honestidad y eficacia por la vía de la divulgación. Vale la pena señalar que, además de las obras impresas, contribuye con artículos breves a una página de divulgación científica en Internet, una página titulada “*Ventana de Otros Ojos*”. Y también hay que decir que allí sus artículos contrastan por su serena objetividad, con los de otros colaboradores más radicales. Pues nuestro invitado presenta siempre su visión ponderada de los problemas mediambientales, mostrando su preocupación pero alejándose de cualquier catastrofismo al uso. Nadie más distante que él de la imagen del ecologista desmelenado y furibundo de ciertos movimientos de lucha ecológica. Por ejemplo, pocos de éstos suscribirían su apreciación de que es preferible una actitud de rechazo abierto al Protocolo de Kyoto, como la ha exhibido el gobierno de Estados Unidos, a una actitud hipócrita de otros gobiernos más cercanos, que firmaron y ratificaron dicho acuerdo como trámite previo a su descarado incumplimiento.

En fin, repito que tocar una y otra vez estos temas puede ser reiterativo pero nunca inoportuno, más bien siempre conveniente. Son asuntos que hay que oír constantemente, de los que hay que hablar con frecuencia, hasta lograr que la mayor parte de las conciencias humanas los interioricen y asuman sus consecuencias. Y más si se hace bien, con acierto, con mesura y con argumentos indiscutibles. No te extrañará pues, querido amigo, que para finalizar, y conociendo tu admiración por Humphrey Bogart, parodie una de sus frases más conocidas diciendo, como él decía en “Casablanca”, “*¡Tócalos otra vez, Miguel! ¡Y muchas veces más!*”<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>La frase “Tócala otra vez, Sam”, se pone normalmente en boca del actor Humphrey Bogart, protagonista de la película “Casablanca”, pero lo cierto es que no se pronunció en ella, por lo menos en la versión doblada al español que se exhibió en nuestro país.

**ACTIVIDADES DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS  
EXACTAS, FÍSICAS, QUÍMICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA  
EN EL AÑO 2011**

**Sesiones:**

En el año 2011 la Real Academia de Ciencias de Zaragoza celebró cinco sesiones, una de ellas con motivo de los discursos de Ingreso de la nueva Académica Numeraria Ilma. Sra. D<sup>a</sup> María Luisa Peleato y otra con motivo de la entrega de Premios de Investigación. Las sesiones tuvieron lugar los días 23 de febrero, 16 de junio, 23 de octubre, 30 de noviembre y 21 de diciembre. Las sesiones de ingreso y de entrega de premios se desarrollaron en las fechas que se indican a continuación:

- El 16 de junio de 2011, con motivo del discurso de ingreso de la Académica Numeraria Ilma. Sra. D<sup>a</sup> María Luisa Peleato Sánchez con el título de *Las cianobacterias: cooperación versus competencia*. Le respondió en nombre de la Academia, el Ilmo. Sr. D. Carlos Gómez Moreno.
- El 30 de noviembre se entregaron los Premios de Investigación 2011.

**Nuevo Académico Numerario:**

- Ilma. Sra. D<sup>a</sup> María Luisa Peleato Sánchez, Académica Numeraria (Sección de Naturales) con la Medalla N<sup>o</sup> 21.

**Nuevos Académicos Correspondientes:**

- En la Sesión de 23 de febrero de 2011 D. Miguel Delibes de Castro fue elegido nuevo Académico correspondiente de la sección de Naturales y en la de 5 de octubre D. Efim Zelmanov de la sección de Exactas.

**Publicaciones de la Academia:**

Además de publicar el discurso del nuevo académico, la Academia ha publicado el volumen **65** de la Revista de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, y los volúmenes

35, 36 y 37 de la serie Monografías de la Real Academia de Ciencias, con el título de *Actas de las XII Jornadas de Mecánica Celeste, TIDES tutorial: Integrating ODEs by using the Taylor Series Method* y *Giulio RACAH Centennial Conference*, respectivamente.

### Organización de Congresos y Conferencias:

La Academia ha organizado en 2011, entre otros, los siguientes eventos:

- Conferencia del Académico Correspondiente D. Miguel Delibes de Castro el día 18 de mayo de 2011, con el título *Sistema Tierra, Biodiversidad y Calidad de vida*.
- La Academia ha colaborado con el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, en la organización de *VI International Conference on Non Associative Algebra and its Applications*, celebrado del 1 al 5 de noviembre en Zaragoza y en la del *II Singular Workshop*, celebrado en Zaragoza los días 16 y 17 de diciembre.
- Colaboración en la organización conjunta con la Facultad de Ciencias de los Ciclos de Conferencias *Cita con la Ciencia y Espacio Facultad 2010-2011*.
- Colaboración, a título honorífico, en el Ciclo de Conferencias del Centro Pignatelli *Hacia una conciencia planetaria*.

Por último, dentro de la habitual participación de Académicos en numerosos congresos nacionales e internacionales, y en conferencias en el ámbito de la difusión de la ciencia, cabe destacar las siguientes actuaciones:

- El Presidente Luis Boya impartió el 9 de diciembre la conferencia plenaria *S. N. Bose* en la Conferencia ICRAMSA de este año, en la Calcutta Mathematical Society, *Indistinguishability in Quantum Mechanics: the rôle of S. N. Bose*, invitado por Secretario, Prof. U. C. De. También impartió la conferencia *"Polytopes and Physics"* en el Madras Christian College el 12 de diciembre, y otras dos conferencias en la Universidad de Costa Rica, en agosto, tituladas *"Niels BOHR y la Teoría Cuántica Antigua"* y *"Identidades de Cartan entre los grupos de Lie simples"*.
- El Secretario José F. Cariñena impartió la Conferencia inaugural en el XI Congreso Dr. Antonio Monteiro organizado por Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur en Bahía Blanca (Argentina), en mayo, *"A new geometric approach to Abel differential equations of first and second order"*, e impartió conferencias invitadas en el Encuentro de Física Matemática: *"Nuevos retos en Mecánica Cuántica: Integrabilidad y Supersimetría"*, *"A geometric approach to the Virial's Theorem"*, en el mes de enero en la Universidad de Valladolid y en el Workshop *Geometry of Mechanics, Field Theory and Control*, *"Classical and quantum position-dependent mass systems"* en el mes de diciembre en la Universidad Politécnica de

Barcelona. Igualmente impartió conferencias invitadas en los congresos ‘Folding and Unfolding: Interactions from Geometry’, *“Hamiltonian Lie Systems: Theory and applications”*, en Ischia (Italia), y ‘Poisson geometry and applications’, Figueira da Foz (Portugal), *“Geometric Theory of Lie-Hamilton Systems”*, y en ‘Geometry of Manifolds and Mathematical Physics’, Krakow (Polonia) *“Non-strictly canonical transformations and a generalisation of the Virial Theorem”* en el mes de junio de 2011, siendo miembro del Comité Científico en estos tres congresos.

- El Académico Luis Oro fue Conferenciante plenario en la Hungarian Chemical Society National Conference, Sopron, Hungría, mayo 2011, en SECAT11, Zaragoza, España, junio 2011, y en el Smithson Tennant Scientific Symposium, York. UK, noviembre 2011.
- El Académico Alberto Elduque fue presidente del Comité Organizador de la VI International Conference on Non Associative Algebra and its Applications, del 1 al 5 de noviembre en Zaragoza, ha sido Conferenciante plenario en la *“International Conference on Ring Theory”* en Novisibirsk, Rusia, en julio de 2011, en la *“Non-associative Algebras and Related Topics”* celebrada en Coimbra en Julio de 2011 (en la que fue miembro del Comité Científico, e impartió además un mini-curso), y en la *“Nonassociative Algebra in Action: Past, Present, and Future Perspectives”*, en Charlottesville, Virginia (USA), en Septiembre de 2011. También impartió el 30 de septiembre de 2011, la conferencia *“Graduations des algèbres de Lie simples”*, en la Université Paul Verlaine de Metz (Francia).
- El Académico Eladio Liñán fue invitado para dar la ponencia *“Cryptopaleontology: The fossils contained in ancient lapidaries and their magico medicinal use”* en la Geological Society of London, Burlin House, durante la Reunión *“The History of Geology and Medicine”* celebrada el 1 de noviembre.
- El Académico José Luis Marqués presentó una ponencia en el *X Encuentro de la Red Universitaria de Estudios de Postgrado y Formación Permanente* que se celebró en la Universidad Politécnica de Valencia, los días 11 y 12 de marzo de 2011.
- El Académico Víctor M. Orera, impartió la conferencia *“Growth of eutectic ceramic structures by directional solidification methods”* en el *“5th International Workshop on Crystal Growth Technology”*, en Berlín en el mes de junio de 2011; presentó una conferencia invitada en *“IV Congresso Luso-Espanhol de Cerâmica e Vidro”* en Aveiro-(Portugal), en noviembre, *“Eutectic ceramics as highly textured materials”*, y la conferencia plenaria *“Materiales para el Desarrollo”* en las Primeras Jornadas

Científicas Campus de Excelencia Internacional de la Universidad Complutense de Madrid, en febrero.

- La Académica Caridad Sánchez Acedo formó parte del Comité Organizador en el mes de julio en la Universidad de Zaragoza del “*XII Congreso Ibérico de Parasitología*”.
- El Académico Antonio Elipe participó con la conferencia plenaria “*Orbit propagation with Lie-Deprit methods in satellite dynamics*” en el *International Symposium on Orbit Propagation and Determination* en Lille, France en septiembre y la conferencia invitada “*Resonances in Celestial Mechanics*” en el *SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry* Raleigh, North Carolina. USA en octubre. En este mismo mes fue invitado al “Aerospace Engineering Seminar Series” Texas A&M University. College Station, Texas. USA, donde dio la conferencia “*Rotation of a gyrost. Equilibria and bifurcations*”.
- El Académico Enrique Artal ha sido del Comité Organizador del “*II Singular Workshop*” en Zaragoza, en diciembre, Miembro del Comité organizador de “*School on D-modules and applications in Singularity Theory*”, en Madrid-Sevilla, en junio, y miembro del Comité Científico del “*Congreso del Centenario de la RSME*”, en el mes de febrero en vila. Presentó una ponencia invitada en la Sesión Especial de Singularidades, en tal Congreso, “*Dicritical components of special pencils*”, una conferencia plenaria en “*Transfrontalières d’Algre et Géométrie*”, Bayonne’ (Francia) en mayo, “*Drawing Arithmetic Zariski pairs*”, y otra en “*Second International Conference and Workshop on Valuation Theory*”, en El Escorial, en julio, “*Pencils, dicriticals and curvettes*”. También impartió un curso de tres horas en “*Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics*” en la Tokyo Metropolitan University en Tokio (Japón), en marzo: “*Introduction: fundamental group and braid monodromy*”, “*Characteristic varieties: a generalization of Alexander polinomial*”, “*Orbifolds and quasiprojective groups*”.
- El Académico José S. Urieta fue invitado para dar la ponencia “*Supercritical Technologies for the optimization of biocidas*” en el “3th International Seminar on Engineering Thermodynamic of Fluids”, celebrado en Tarragona en el mes de julio.
- El Académico Rafael Núñez-Lagos Roglá, impartió las conferencias “*Lo grande y lo pequeño*” en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao, “*La radiactividad ambiental*” en el IES de Ontiñena en Zaragoza, “*El accidente de la central nuclear de Fukushima-Daiichi en Japón*” en el Ateneo Científico de Zaragoza, “*El accidente Nuclear de Japón*” en el Club 33 de Zaragoza, y ” “*Elaboración de un mapa de radiactividad ambiental en Aragón*” en el IES Reyes Católicos de Ejea de los Caballeros.

Así mismo ha intervenido en diversos programas de Televisión Aragón y Aragón Radio relativos al accidente de la central de Fukushima y ha sido miembro del Jurado del premio *José María Savirón de Divulgación Científica*.

Varios Académicos han colaborado en cursos propios en la Universidad de la Experiencia que organiza la Universidad de Zaragoza. En particular el Académico Eladio Liñán fue encargado de dar el discurso de apertura del Curso Académico 2011-2012 de la Universidad de la Experiencia bajo el título "*Fósiles emblemáticos de Aragón*" y que tuvo lugar en el aula magna del Edificio Paraninfo de la Universidad de Zaragoza el día 6 de octubre.

### **Premios de investigación 2011**

Se convocaron los Premios de Investigación 2010-2011 de la Academia correspondientes a las secciones de Químicas y Naturales. En la sección de Químicas, el Premio fue para el Dr. Ricardo Castarlenas Chela y en la de Naturales para el Dr. Enrique Arranz Yagüe.

Los premiados expusieron sendos trabajos de investigación en la sesión celebrada el 30 de Noviembre y se les hizo entrega del Premio de Investigación 2011. Los trabajos de investigación con los títulos respectivos de "Carbenos y Metales de Transición: el Tándem Ideal para el Diseño de Catalizadores Eficaces" y "Eventos tectono-magmáticos alpinos en el registro geológico de los Pirineos: Inferencias sobre la evolución del manto superior en una zona activa", se publican en este volumen **66** de la Revista de la Real Academia.

Se ha iniciado el proceso para los Premios 2011-2012 en las Secciones de Exactas y Físicas.

### **Distinciones y Nombramientos a Académicos.**

El Académico D. Eladio Liñán fue nombrado *Pastor Mayor 2011 de los Montes de Luna en León* durante la recepción celebrada el día 12 de septiembre.

El Académico D. Alberto Elduque fue nombrado Miembro del Comité Editorial de la revista *Journal of Algebra*.

El Académico D. Antonio Elipe fue nombrado Miembro del Comité Editorial de la revista *International Journal of Astronomy and Astrophysics*.

La Académica D<sup>a</sup> Caridad Sánchez Acedo recibió la medalla *López Neyra* de la Sociedad Española de Parasitología.

El Académico Víctor M. Orera fue nombrado Coordinador Institucional del CSIC para Aragón y Miembro del Consejo Asesor de Transferencia del Conocimiento e Innovación del Ministerio de Ciencia e Innovación.

### **Otros datos.**

La Real Academia de Ciencias de Zaragoza ha sido subvencionada para su funcionamiento habitual, por el Ministerio de Educación y Ciencia, a través del programa de apoyo a

las Reales Academias asociadas al Instituto de España, siendo la subvención para 2011 de 7000 euros.

Se ha continuado poniendo al día la página web de la Academia, cuya dirección es <http://www.unizar.es/acz/>

Zaragoza, diciembre de 2011



# REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ZARAGOZA

## Abstract

La Revista de la Real Academia de Ciencias publishes original research contributions in the fields of Mathematics, Physics, Chemistry and Natural Sciences. All the manuscripts are peer reviewed in order to assess the quality of the work. On the basis of the referee's report, the Editors will take the decision either to publish the work (directly or with modifications), or to reject the manuscript.

## 1 Normas generales de publicación

### 1.1 Envío de los manuscritos.

Para su publicación en esta Revista, los trabajos deberán remitirse a

Académico-Director de Publicaciones  
Revista de la Academia de Ciencias  
Universidad de Zaragoza  
50009 Zaragoza

o bien electrónicamente a la cuenta `elipe@unizar.es`.

La Revista utiliza el sistema de *offset* de edición, empleando el texto electrónico facilitado por los autores, que deberán cuidar al máximo su confección, siguiendo las normas que aquí aparecen.

Los autores emplearán un procesador de texto. Se recomienda el uso de LaTeX, para el que se han diseñado los estilos `academia.sty` y `academia.cls` que pueden obtenerse directamente por internet en <http://www.unizar.es/acz/> o por petición a la cuenta de correo electrónico: `elipe@unizar.es`.

### 1.2 Dimensiones

El texto de los trabajos, redactados en español, inglés o francés, no deberá exceder de 16 páginas, aunque se recomienda una extensión de 6 a 10 páginas como promedio. El texto de cada página ocupará una caja de  $16 \times 25$  cm., con espacio y medio entre líneas.

## 2 Presentación del trabajo.

Los trabajos se presentarán con arreglo al siguiente orden: En la primera página se incluirán los siguientes datos:

- a) *Título del trabajo*: Conciso, pero ilustrativo, con mayúsculas.
- b) *Autor*: Nombre y apellidos del autor o autores, con minúscula.
- c) *Centro*: Centro donde se ha realizado, con su dirección postal.
- d) *Abstract*: En inglés y con una extensión máxima de 200 palabras.
- e) *Texto*

A) Los encabezamientos de cada sección, numerados correlativamente, serán escritos con letras **minúsculas** en negrita. Los encabezamientos de subsecciones, numerados en la forma 1.1, 1.2, . . . , 2.1, 2.2, . . . , se escribirán en *cursiva*.

B) Las fórmulas estarán centradas y numeradas correlativamente.

C) Las referencias bibliográficas intercaladas en el texto, deben ser fácilmente identificables en la lista de referencias que aparecerá al final del artículo, bien mediante un número, bien mediante el nombre del autor y año de publicación.

D) Las figuras y tablas, numeradas correlativamente, se intercalarán en el texto. Las figuras se enviarán en formato EPS, o que se pueda convertir a éste con facilidad. Los apéndices, si los hay, se incluirán al final del texto, antes de la bibliografía.

G) Las referencias bibliográficas de artículos deberán contener: Autor: año de publicación, “Título del artículo”, *revista número*, páginas inicial–final. En el caso de libros, deberá incluirse: Autor: año de publicación, *Título del libro*. Editorial, lugar de publicación.

## 3 Notas finales

Por cada trabajo publicado, se entregarán al autor o autores un total de 25 separatas. La Revista permite la inclusión de fotografías o figuras en color, con un coste adicional que correrá a cargo de los autores.

**Antonio Elipe**  
Académico Editor

RELACIÓN DE REVISTAS NACIONALES QUE RECIBE EN INTERCAMBIO  
LA BIBLIOTECA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS

ACTA BOTANICA BARCINONENSIS  
ACTA QUIMICA COMPOSTELANA - Departamento de Química Analítica  
AFINIDAD - Revista Química Teórica y Aplicada  
ANALES DE BIOLOGIA - Sección de Biología General (Murcia)  
ANALES DEL JARDIN BOTANICO DE MADRID  
ANALES DE LA REAL ACADEMIA DE DOCTORES  
ANALES DE LA UNIVERSIDAD DE MURCIA  
ANALES DE CIENCIAS - Facultad de Ciencias (Químicas y Matemáticas) (Murcia)  
ANALES SECCION DE CIENCIAS - Colegio Universitario de Girona  
ANUARIO DEL OBSERVATORIO ASTRONOMICO - Madrid.  
BELARRA. SOCIEDAD MICOLOGICA. Baracaldo.  
BLANCOANA - Col. Univ. "Santo Reino" Jaén  
BOLETIN DA ACADEMIA GALEGA DE CIENCIAS - (Santiago de Compostela)  
BOLETIN DE LA ASOCIACION HERPETOLOGICA ESPAÑOLA  
BOLETIN GEOLOGICO Y MINERO  
BOTANICA COMPLUTENSIS - Madrid  
BUTLLETI DEL CENTRO D'HISTORIA NATURAL DE LA CONCA DE BARBARA  
COLLECTANEA BOTANICA - (Barcelona)  
COLLECTANEA MATEMATICA - (Barcelona)  
ESTUDIO GENERAL - Revista Colegio Universitario (Girona)  
EXTRACTA MATHEMATICAE - Universidad de Extremadura  
FACULTAD DE CIENCIAS EXPERIMENTALES DE JAEN. Monografías.  
FOLIA BOTANICA MISCELANEA - Departamento de Botánica (Barcelona)  
GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA  
INDICE ESPAÑOL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA -  
INSTITUTO GEOLOGICO Y MINERO DE ESPAÑA  
INVESTIGACION E INFORMACION TEXTIL Y DE TENSIOACTIVIVOS (C.S.I.C.)  
- Barcelona  
LACTARIUS.- BOL. DE LA ASOCIACION MICOLOGICA - Jaén  
LUCAS MALLADA - Inst. Est. Altoaragoneses.

MEMORIAS DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES DE BARCELONA  
MISCELANEA ZOOLOGICA - Museo Zoológico - Ayuntamiento de Barcelona  
NATURALIA BAETICA - Jaén  
PIRINEOS  
PUBLICACIONES PERIODICAS DE LA BIBLIOTECA DEL MUSEU DE ZOOLOGIA  
- (Barcelona)  
REBOLL.- Bull. Centro d'Historia Natural de la Conca de Barbera.  
REVISTA DE LA ACADEMIA CANARIA DE CIENCIAS  
REVISTA REAL ACADEMIA GALEGA DE CIENCIAS  
REVISTA DE BIOLOGIA DE LA UNIVERSIDAD DE OVIEDO  
REVISTA ESPAÑOLA DE FÍSICA  
REVISTA ESPAÑOLA DE FISILOGIA - Pamplona  
REVISTA ESPAÑOLA DE HERPETOLOGIA  
REVISTA IBERICA DE PARASITOLOGIA  
REVISTA MATEMATICA COMPLUTENSE - (Madrid)  
REVISTA DE OBRAS PUBLICAS  
REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATU-  
RALES DE MADRID – Matemáticas  
REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS - QUIMICA - Madrid  
RUIZIA - Monografías del Jardín Botánico (Madrid)  
SCIENCIA GERUNDENSIS  
STUDIA GEOLOGICA SALMANTICENSIA - Universidad de Salamanca  
TRABAJOS DE GEOLOGIA - Universidad de Oviedo  
TREBALLS DEL CENTRE D'HISTORIA NATURAL DE LA CONCA DE BARBERA.  
TREBALLS DE L'INSTITUT BOTANIC DE BARCELONA  
TREBALLS DEL MUSEU DE ZOOLOGIA DE BARCELONA  
ZOOLOGIA BAETICA. UNIVERSIDAD DE GRANADA.

RELACIÓN DE REVISTAS INTERNACIONALES QUE RECIBE EN  
INTERCAMBIO LA BIBLIOTECA DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS - Córdoba. Argentina  
ACADEMY OF NATURAL SCIENCES OF PHILADELPHIA  
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCIEI - Notiziario  
ACCADEMIA UDINESE DI SCIENZE LETTERS ED ARTI.  
ACTA ENTOMOLOGICA MUSEI NATIONALIS PRAGAE  
ACTA FAUNISTICA ENTOMOLOGICA MUSEI NATIONALIS - Praegae  
ACTA GEOLOGICA POLONICA - Warszawa  
ACTA MATHEMATICA HUNGARICA  
ACTA MATEMATICA SINICA - New Series China  
ACTA MUSEI NATIONALI PRAGAE  
ACTA ORNITHOLOGICA - Polska Akademia Nauk Warszawa  
ACTA PHYSICA - Academia Scientarum Hungaricae  
ACTA SOCIETATIS ENTOMOLOGICA BOHEMOSLOVACA  
ACTA UNIVERSITATIS - Series: Mathematics and Informatic – University of Nis –  
Yugoeslavia  
ACTA ZOOLOGICA FENNICA  
AGRONOMIA LUSITANICA - Est. Agr. Nac. Sacavem - Portugal  
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
ANALES DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y  
NATURALES DE BUENOS AIRES  
ANALES DE LA ESCUELA NACIONAL DE CIENCIAS BIOLÓGICAS. México  
ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA  
ANALES DE LA ESCUELA NACIONAL DE CIENCIAS BIOLÓGICAS - México  
ANIMAL BIODIVERSITY CONSERVATION  
ANNALEN DES NATURHISTORISCHEN MUSEUMS IN WIEN  
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - Serie A - I Matematica - Helsinke  
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - Serie A - II Chemica - Helsinke  
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - III Geologica Geografica - Helsinke  
ANNALES ACADEMIA SCIENTARUM FENNICAE - Serie A - IV Physica - Helsinke  
ANNALES HISTORICO NATURALES - Musei Nationalis Hungarici

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER - Université de Grenoble  
 ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER - Gap  
 ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE - Serie I - Science Mathematiques Physiques  
 Bruxelles  
 ANNALES UNIVERSITATIS MARIA CURIE - Sectio A Mathemat. - Sklodowska  
 ANNALES UNIVERSITATIS MARIA CURIE - Sklodowska - Sectio AA Chemica. Lublin.  
 ANNALES UNIVERSITATIS MARIA CURIE - Sklodowska - Sectio AAA Physica. Lublin.  
 ANNALES ZOOLOGICI FENNICI - Helsinki  
 ANNALI DELLA FACOLTA DE AGRARIA - Universita de Pisa  
 ANNALI DEL MUSEO CIVICO DI STORIA NATURALE "Giacomo Doria"  
 ARBOLES Y SEMILLAS DEL NEOTROPICO - Museo Nac. de Costa Rica  
 ARCHIVIO GEOBOTANICO - Univ de Pavía.  
 ATTI DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI. RENDICONTI LINCEI - Matem-  
 atica e Applicazioni - Roma  
 ATTI DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI. RENDICONTI LINCEI - Scien-  
 ze Fisiche e Naturali - Roma  
 ATTI DELLA ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE E ARTI DI UDINE  
 ATTI DELL'INSTITUTO BOTANICO E DEL LABORATORIO CRITTOGRAMICO  
 DELL'UNIVERSITA DI PAVIA  
 BAYERISCHE AKADEMIE DR WISSENSCHAFTEN - Munchen  
 BEITRAGE ZUR FORSCHUNSTECHOLOGIE - Akademie Verlag Berlin  
 BOLETIM DA SOCIEDADE PARANAENSE DE MATEMATICAS - Paraná  
 BOLETIM DA SOCIEDADES PORTUGUESA DE CIENCIAS NATURALES - Lisboa  
 BOLETIN DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS FISICAS, MATEMATICAS Y  
 NATURALES - Caracas  
 BOLETIN DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS - Córdoba. Argentina.  
 BOLETIN BIBLIOGRAFICO DE LA ESCUELA NACIONAL DE CIENCIAS BIOLÓ-  
 GICAS - México  
 BOLETIN DEL MUSEO NAC. DE COSTA RICA.  
 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA  
 BOTANY UNIV. OF CALIFORNIA PUBLICATIONS.  
 BRENESIA - Museo Nacional de Costa Rica  
 BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES - Scientific Information - CENTRE MATH-  
 EMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES  
 BULGARIAN JOURNAL OF PHYSICS  
 BULLETIN OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY - Providence  
 BULLETIN DE LA CLASSE DE SCIENCES - Academie Royale de Belgique - Bruxelles  
 BULLETIN OF THE GEOLOGICAL INSTITUTION OF THE UNIVERSITY UPSALA

BULLETIN OF THE JSME (Japan Society of Mechanical Engineers)  
 BULLETIN DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRETAGNE - Rennes  
 CALIFORNIA AGRICULTURE - University of California  
 CIENCIAS TECNICAS FISICAS Y MATEMATICAS. Academia de Ciencias. Cuba.  
 COLLOQUIUM MATHEMATICUM - Warszawa  
 COMMENTATIONES MATHEMATICAE - Ann. So, Mathematicae Polonese  
 COMPTES RENDUS DE L'ACADEMIE BULGARE DE SCIENCES - Sofia  
 DARWINIANA REV. INST. BOTANICA DARWINION - República Argentina  
 DORIANA - Supplementa agli Annali del Museo Civico di Storia Naturale "G. Doria" -  
 Cenova  
 ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS DO SERVIC DE FOMENTO MINERO - Portugal  
 ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS, DIECCIÓ GERAL DE GEOLOGIA E MINAS -  
 Porto  
 FILOMAT - FACTA UNIVERSITATIS - Univ. af Nis.  
 FÍSICA DE ONDAS ACÚSTICAS Y ELECTROMAGNÉTICAS LINEALES - Acad.  
 Búlgara de las Ciencias  
 FOLIA ANATOMICA UNIVERSITATIS CONIMBRIGENSIS - Coimbra  
 FOLIA ZOOLOGICA - Czechoslovak Academy of Sciences  
 FUNCTIONS ET APPROXIMATIC COMMENTARI MATHEMATICI - Poznań  
 GLASNIK MATEMATICKI - Zagreb  
 IBC - INFORMAZIONI - Rivista Bimestrale Inst. Beni. Artistic. - Regione Emilis-  
 Romagna  
 INSTITUTO DE MATEMATICA - Univ. Nac. del Sur - Bahia Blanca - Argentina  
 INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO AGRARIA - Estação AGRONOMICA  
 NACIONAL OEIRAS INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO DE CIENFUEGOS  
 INTERNATIONAL TIN RESEARCH INSTITUTE  
 JAHRBUCH DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN GÖTTINGEN.  
 JOURNAL OF THE AMERICAN ACADEMY OF ARTS AND SCIENCES - Daedalus  
 JOURNAL OF THE BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES  
 JOURNAL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY  
 JOURNAL OF NON-CRYSTALLINE SOLIDS - Amsterdam  
 LESTURAS MATEMATICAS - Colombia  
 MATHEMATICA BALKANICA  
 MATHEMATICA MONTISNIGRA  
 MEMORABILIS ZOOLOGICA  
 MEMORANDA SOCIETATIS PROFAUNA ET FLORA FENNICA - Helsingfors  
 MEMORIAS DA ACADEMIA DAS CIENCIAS DE LISBOA (Classe de Ciencias)  
 MITTEILUNGEN AUS DEN ZOOLOGISCHEN MUSEUM IN BERLIN

MONOGRAFIAS DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISI-  
 CAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES  
 NACHRICHTEN DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN GUTTINGEN - II  
 Matemáticas y Física  
 NATURAL HISTORY MUSEUM UNIV. OF KANSAS.  
 NEOTROPICO - Museo Nacional de Costa Rica  
 NETHERLANDS JOURNAL OF ZOOLOGY  
 NONLINEARITY - Inst. Physics and London Math. Soc  
 NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS - Ins. de Matematica - Univ. Atac. del Sur. Bahia  
 Blanca  
 NOTULAE NATURAE  
 NUCLEAR ENERGY -Bulgarian Academy of Sciences  
 OCCASIONAL PAPERS OF THE CALIFORNIA ACADEMY OF SCIENCES - San  
 Francisco  
 PHILIPPINE JOURNAL OF SCIENCES - Manila  
 POLISH ACADEMY OF SCIENCES. INSTITUTE OF MATHEMATICA  
 POLSKA AKADEMIE NAUK-PRACE GEOLOGICZNE  
 POLSKA AKADEMIE NAUK-PRACE MINERALOGICZNE  
 PORTUGALIA PHYSICA - Sociedade Portuguesa de Física  
 PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF NATURAL SCIENCES OF PHILADEL-  
 PHIA  
 PROCEEDINGS OF THE CALIFORNIA ACADEMY OF SCIENCES  
 PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY  
 PROCEEDINGS OF THE ROCHESTER ACADEMY OF SCIENCES  
 PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON - A: Mathematical and  
 Physical Sciences  
 PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH - Section A (Mathe-  
 matical and Physical Sciences)  
 PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF QUEENSLAND  
 PUBLICACIONES FUNDAMENTALES DE LA ACADEMIA DE CIENCIAS DE SOFIA  
 PUBLICATION DE L'INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE -  
 Strasbourg  
 PUNIME MATEMATIKE - Prishtine  
 QUADERNI DELL' ACADEMIA UDINESA.  
 QUATERLY OF APPLIED MATHEMATICS  
 REVISTA CUBANA DE FISICA  
 REVISTA COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS



REVISTA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA QUIMICA- Univ. Nal. del Litoral -  
Argentina  
REVISTA TRIMESTRAL DEL INTERNATIONAL TIN RESEARCH INSTITUTE  
REVISTA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA - Argentina  
REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA  
REZIMEA ABSTRACS - POGDORICA  
SCIENCE BULLETIN - University of Kansas  
SCIENTIFIC PAPERS NAT. HISTORY MUSEUM. The University Kansas.  
SEARCH AGRICULTURAL ITHACA NEW YORK  
SENCKENBERGIANA BIOLOGICA - Frankfurt  
SENCKENBERGIANA LETHAEA - Frankfurt  
SMITHSONIAN CONTRIBUTIONS TO PALEONTOLOGY  
SPECTRUM - Akademie der Wissenschaften der DDR  
STUDIA GEOLOGICA POLONICA - Polska Akademy Nauk Warsovia  
SUT JOURNAL OF MATHEMATICS - Science University of Tokio  
T. KOSCIUSZKI TECHNICAL - Univesity of Cracow  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA - Notas del museo de la Plata  
UNIVESITY OF THE STATE OF NEW YORK - Bulletin  
UNIVERSITY OF KANSAS PALEONTOLOGICAL CONTRIBUTIONS  
VERTEBRATOLOGICKE ZPRAVY CESKOLOVENSKA AKADEMIE BRNO  
ZBORNIK RADOVA FILOZOFSKOG - Fakulteta u Nisu-Serija Matematika  
ZBORNIK - Acta Musei Nationalis - Pragae  
ZOOLOGICA POLONIAE  
ZPRAVY USEB (Vertebralogy zpravy) - Brno - Checoslovaquia